MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL v. THAN.

REDIGIERT VON

AUGUST HELLER.

16

SECHSZEHNTER BAND.

1898.

1898

BUDAPEST,

FRIEDR. KILIAN (NACHFOLGER).

1899.

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL v. THAN.

REDIGIERT VON

AUGUST HELLER.

SECHSZEHNTER BAND.

1898.

BUDAPEST,

FRIEDR. KILIAN (NACHFOLGER).

1899.

DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN

INHALT DES XVI. BANDES.

Abhandlungen.

Seite

1. R. v. Kövesligethy. Die beiden Parametergleichungen der Spectralanalyse ... 1
2. Julius Vályi. Ueber mehrfache Polarreciprocitäten in der Ebene 50
3. Anton Koch. Die jüngeren Tertiärbildungen des siebenbürgischen Beckens ... 59
4. Ferd. Klug. Ueber Gasentwicklung bei Pankreasverdauung ... 77
5. Julius Farkas. Ueber die Reduction der Diffusionsgleichungen von Kirchhoff ... 97
6. Julius Farkas. Ergänzung zur Vektoren-Lehre und zur Lehre des Elektro-Magnetismus ... 111
7. Julius Farkas. Die algebraische Grundlage der Anwendung des mechanischen Princips von Fourier ... 154
8. Árpád von Bókay. Ueber die Wirkung einiger schwerer Metalle auf die Structur der quergestreiften Muskeln ... 158
9. Aladár Visnya. Zur Theorie der inducierten linearen Substitutionen ... 187
10. Ph. Lenard. Ueber das Verhalten von Kathodenstrahlen parallel zu elektrischer Kraft ... 194
11. J. Hegyfoky. Die Bewölkung in den Ländern der ungarischen Krone ... 201
12. Béla von Lengyel. Ueber die Wirkung einiger Gase und Metalle auf die photographische Platte ... 217
13. Alois Schuller. Theorie der Elektrolyse ... 226
14. Gustav Rados. Ueber die Bedingungsgleichungen zwischen den Coëfficienten der orthogonalen Substitutionen ... 236
15. Gustav Rados. Inducierte lineare Substitutionen ... 241
16. Paul Stäckel. Johann Bolyai's Theorie der imaginären Grössen 263
   Beilage *A.* ... 276
   « *B.* ... 281
   « *C.* ... 293
   « *D.* ... 295

Seite

17. COLOMAN v. SZILY junior. Ueber die durch Torsion verursachte Veränderung des elektrischen Widerstandes von Metalldrähten 298
18. KARL von KÉTLY. Die anatomischen und physiologischen Verhältnisse der Chorda Tympani auf Grund klinischer Beobachtungen 312

Sitzungsberichte.

I. Sitzungen der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Classe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften 320

17. Januar 1898 ... 320
14. März 1898 ... 321
18. April 1898 ... 322
16. Mai 1898 ... 323
20. Juni 1898 ... 324
17. Oktober 1898 ... 325
14. November 1898 ... 325
12. December 1898 ... 326

II. Fachsectionen der Kön. Ung. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft ... 326

A) Fachconferenz für Zoologie: 8. Januar 1898 ... 326
« « « 5. Februar 1898 ... 327
« « « 5. März 1898 ... 327
« « « 2. April 1898 ... 327
« « « 7. October 1898 ... 327
« « « 7. November 1898 ... 328
« « « 2. December 1898 ... 328

B) Fachconferenz für Botanik: 12. Januar 1898 ... 329
« « « 10. Februar 1898 ... 329
« « « 9. März 1898 ... 330
« « « 13. April 1898 ... 332
« « « 11. Mai 1898 ... 333
« « « 12. October 1898 ... 334
« « « 9. November 1898 ... 334
« « « 14. December 1898 ... 336

C) Fachconferenz für Chemie und Mineralogie: 25. Januar 1898 ... 336
« « « « « 22. Februar 1898 336
« « « « « 29. März 1898 ... 336
« « « « « 26. April 1898 ... 337
« « « « « 31. Mai 1898 ... 338
« « « « « 25. October 1898 338
« « « « « 29. November 1898 339
« « « « « 20. December 1898 339

Seite

D) Fachconferenz für Physiologie: 1. Februar 1898 … 340
« « « 1. März 1898 … 340
« « « 22. März 1898 … 341
« « « 19. April 1898 … 342
« « « 10. Mai 1898 … 343
« « « 4. October 1898 … 343
« « « 29. November 1898 … 343
« « « 13. December 1898 … 344

III. Ungarische Geologische Gesellschaft … 344
Sitzung am 5. Januar 1898 … 344
« « 2. März 1898 … 345
« « 6. April 1898 … 346
« « 4. Mai 1898 … 347
« « 1. Juni 1898 … 347
« « 9. November 1898 … 348
« « 7. December 1898 … 350

Bericht über die Thätigkeit, den Vermögensstand, die Preisausschreibungen u. s. f. der Ung. Akademie der Wissenschaften und der Kön. Ung. Naturwissenschaftl. Gesellschaft.

I. Ungarische Akademie der Wissenschaften … 352
Feierliche Jahressitzung 1898:
1. Jahresbericht des Generalsecretärs … 352
2. Vermögen. Einnahmen und Ausgaben im Jahre 1897, Voranschlag für 1898 … 355
3. Mitglieder-Bestand der Akademie im Jahre 1898 … 357
4. Akademiebibliothek … 357
5. Preisausschreibungen der III. (Math.-naturw. Classe) … 358

II. Königl. Ungar. Naturwissenschaftliche Gesellschaft … 359
Jahresversammlung 1898:
1. Eröffnung durch den Präsidenten … 359
2. Bericht des ersten Secretärs … 359
3. Cassastand der Gesellschaft zu Ende 1897 … 360
4. Bureau und Ausschuss der Gesellschaft … 360
Zur Erinnerung an Friedrich Hazslinszky. Gedächtnissrede gehalten von Alexander Mágócsy-Dietz in der botanischen Fachconferenz am 8. Februar 1899 … 361

Buchbesprechung … 370
Wolfgang Bolyai's und Carl Friedrich Gauss' Briefwechsel. Budapest, 1899 … 370

Erratum … 372

NAMENREGISTER.*

ADDA C. Querschnitt des Neusatzer artesischen Brunnens 347.

AIGNER L. Schmetterlingsvarietäten 327.* — Farbenvariationen der Schmetterlinge 328.

ÁRKÖVI FR. Ueber einen neuen bakteriolog. Factor der Zahnpulpa und Wundgangræne 322. — Aetiologie der Zahncaries 323.

AUJESZKY A. Zur Frage der Anthraximmunität 324.

BÁLINT R. Cebocephalia 340.

BECK S. Zellenveränderungen der Haut bei Myxœdem 320. — Farbenreaction des Fettgewebes von unter der Haut vorkommenden Margarinkrystalle 341.

BEKE E. Ueber die Resolventen der homogenen linearen Differentialgleichungen 325.*

BENE G. Rolle der Algen bei der Kohlenbildung 350.*

BERNÁTSKY E. Zur Kenntniss der endotrophen Mykorhizen 324.* — Crocus reticulatus Stew. 333. — Limnanthenum nymphæoides Gmel. in der Flora Budapests 334. — Gewebestructur des Limnanthenum nymphæoides und der Nymphæa alba 336.*

BITTÓ B. v. Kalkinhalt des Tokajer Weintraubenbodens 336.

BOGDÁNFY E. Der Niederschlag im Winter und die Frühjahrshochwässer der Theiss 325.*

BÓKAY Á. v. Ueber die Wirkung einiger schwerer Metalle auf die Structur der quergestreiften Muskeln 158.

BUGARSKY ST. und LIEBERMANN LEO. Ueber das Salzsäure-Natriumhydroxyd der eiweissartigen Stoffe 322.

BUGARSZKY ST. und TANGL FR. Moleculare Concentration des Blutserums 323. 343.*

CHOLNOKY E. Bericht über die wissenschaftl. Erfolge seiner Reise in China und Mandschurien 325.*

CSAPODI ST. Ueber die ungarischen Benennungen der Farben 332. — Ueber Echinopsis Decaisneana 336.*

CSIKI E. Coleoptera der ungarischen Fauna 327.*

CSIKY J. Aethernarkose, mit Rücksicht auf die ætherige Lungenentzündung 324.*

* Der Stern * bedeutet, dass bloss der Titel der Abhandlung angeführt ist.

DADAY E. Mikroskop. Süsswasserthiere aus Ceylon 320.* 327.
DIETL E. Neue Coleopteren aus der Fauna Ungarns 326.
DUKA T. Entsendung zur Londoner bibliograph. Conferenz 325.
FARKAS J. Ueber die Reduction der Diffusionsgleichungen von Kirchhoff 97. 322.* — Ergänzungen zur Vektorenlehre und zur Lehre des Elektromagnetismus 111. 325.* — Die algebraische Grundlage der Anwendung des mechan. Princips von Fourier 154. 325.*
FENYVESSY B. und HASENFELD A. Ueber die Kraft des phosphorig entarteten Herzens 324.
FIALOWSKI L. Aiolokinetische und aiolostatische Bäume 330.
FILARSZKY F. Beiträge zur Algenvegetation 325.*
FODOR J. und RIGLER G. Versuche mit dem Blute durch Typhusbacillen inficierter Thiere 322.*
FRANCÉ R. Ueber Collodictyon triciliatum 322.* — Ueber eine neue amerikanische Wasserpest 331.
FRANZENAU A. Krystallographische Untersuchungen am Bélabányaer Pyrit 322.*

GRÓSZ E. Beiträge zur Pathologie des Sehnerves 340.

HALAVÁTS J. Ueber die Kiesel der Umgebung von Budapest 346.
HÁRY P. Aufsaugen des officinellen Eisens im Magen 324.*
HASENFELD A. Siehe FENYVESSY.
HAZSLINSZKY FR. Zur Erinnerung 360.
HEGYFOKY J. Die Bewölkung in den Ländern der ungar. Krone 201.
HELLER A. Entsendung zur Londoner bibliographischen Conferenz 325. — Gauss' und Bolyai's Briefwechsel. Buchbesprechung 370.
HOLLÓS L. Beiträge zur Kenntniss der unterirdisch wachsenden Pilze Ungarns 329. — Ueber einen Sandwüstenpilz 333. — Der wirkliche Trüffelpilz in Ungarn 334.*—Volksthümliche Pilzbenennungen 335.* – Bovista Debreciniensis.*
HORUSITZKY H. Ueber die agronom.-geolog. Verhältnisse der norwestl. Theile von Budapest 346.
HORVÁTH G. Hemipterafauna de ungar. Reiches 320.* — Rolle der Hemipteren in der Volkssprache 327.
HÖGYES A. Die Thätigkeit des Budapester Pasteur-Institutes im Jahre 1897. 321.*

ILOSVAY L. Neue Darstellungsmethode des Oxydimorphins 328.* — Deutsche Commission für die Festsetzung der Atomgewichte 339. — Untersuchung der Luher Margarethenquelle 346.

JABLONOVSKY J. Aryas reflexus 326. — Aspidiotus perniciosus 328.*
JENDRÁSSIK E. Ueber die oscillirenden Ströme 341.

KALECSINSZKY A. Ueber die Serpentine aus dem Banat 322.* — Chemische Analysen von Salzeffloreszenzen eines Sees 345. — Die chemische Zusammensetzung der Serpentine aus dem Krassó-Szörényer Comitate 347.
KERTÉSZ K. Neue Fliegenart in der ungar. Fauna 327.
KÉTLY K. v. Die anatomischen und physiologischen Verhältnisse der

Chorda Tympani auf Grund klinischer Beobachtungen 312, 322.*
KLEIN J. Elodea canadensis 331.
KLUG F. Ueber Gasentwicklung bei Pankreasverdauung 77.
KOCH A. Die jüngeren Tertiärbildungen des siebenbürgischen Beckens 59, 325.* — Gesteinsfundort zu Felső-Lapugy 345. — Ein neues geologisches Lehrmittel 349. — Walüberreste aus Klausenburg 349.
KONEK FR. Ueber das Euchinin 337.
KÖVESLIGETHY R. Die beiden Parametergleichungen der Spectralanalyse 1, 325.* — Ueber das Spectrum der Himmelskörper 326.*
KROMPECHER E. Neue Gruppe der Carcinome 343.
KUTHY D. Physiologie in der Hydrotherapie 344.

LACZKÓ D. Neue Beiträge zur geolog. Kenntniss der oberen Trias- und Liasschichten des Bakonyer Waldes 344.
LANDAUER A. Einfluss der Galle auf den Stoffwechsel 343.*
LAUFENAUER C. Die Hódmezővásárhelyer Hexenprocesse (1730—1758) vom nervenpathol. Standpunkte 326.*
LENARD PH. Ueber das Verhalten der Kathodenstrahlen parallel zu elektrischer Kraft 194, 323.*
LENGYEL B. v. Ueber die Wirkung einiger Gase und Metalle auf die photographische Platte 217, 325*, 339. — Beiträge zur Kenntniss des Calciums 323. Der Illyés-See und die chemische Analyse seines Wassers 345.
LENHOSSÉK M. Ueber das Centrosoma 321.
LIEBERMANN L. Siehe BUGARSZKY.
LOCZKA J. Das Nachweisen einer geringen Menge von Cadmium neben vielem Zink 336.
LÓCZY L. Die geograph. und geolog. Ergebnisse der Reise des Gr. Széchenyi 320.* — Die in der Liasschichte am Popodberg gesammelten Fossilien 344.
LÖRENTHEY E. Sepia in den ungarischen Tertiärgebilden 324.*

MÁGÓCSY-DIETZ A. Markdiaphragma doppelkeimblättriger Baumpflanzen 322.* — Das Holzigwerden des Markes einiger baumartigen Pflanzen 333.
MÉHELY L. Neue Froscharten aus Neu-Guinea 321, 326.* — Züchtung der Fröschebrut 327.
MELCZER G. Mineralogische Mittheilungen 346.
MOCSÁRY A. Gedenkrede auf Johann Xantus 328.*
MURAKÖZY C. Die Veränderung der Rübenschnitten in Zuckerfabriken in Gruben 338.

NURICSÁN J. Málnáser Kohlensäurequelle 338.

ÓNODI A. Ueber die phonatorischen und respiratorischen Nervenbündel des Kehlkopfes 320.* — Beiträge zur Kenntniss der Kehlkopfnerven 326.*

PÁLFY M. Beiträge zu den geolog. und hydrologischen Verhältnissen der Umgebung von Székelyudvarhely 347.
PAPP C. Dreikanter aus Ungarn 350.
PASZLAVSZKY J. Thätigkeit der Naturwissenschaftl. Gesellschaft 1897. 359.

Pólya E. Der Abschluss der vorderen Kammer bei Glaucoma 324.

Posewitz Th. Ueberreste eines Somrius aus der Kohle der Fünfkirchner Unter-Diasperiode 347.

Rados G. Ueber die Bedingungsgleichungen zwischen den Coëfficienten der orthogonalen Substitutionen 236, 322.* — Inducierte lineare Substitutionen 241, 325*. — Gruppen von inducierten Substitutionen 325.*

Reuss Fr. Der Einfluss des Gallenmangels auf das Gycogenbildungsvermögen der Leber 320.*

Rigler G. Das Wandern der Typhusbacillen im Boden 325.*

Rigler G. Siehe Fodor.

Róna S. Der jährl. Gang der Temperatur in Ungarn 325.*

Roth R. Die vergleichende Anatomie der vegetativen Organe von ungarländ. Ericaceen 330.

Schilberszky C. Blumenmorphologische Fälle 330.

Schuller A. Theorie der Elektrolyse 226.

Schwitzer H. Beiträge zur Entwicklung des grauen Staars im vorgeschrittenen Alter 324.

Simonkai L. Forschungen auf dem Gebiete unserer Baumflora 334.

Staub M. Ludwig Reissenberger, der erste ungarische Pflanzenphänolog 333.* — Ueber die Gebilde, welche den durch fliessende und Sickerwasser verursachten Pflanzenabdrücken ähneln 347. — Chondrites Gœpperti Gein. 348.

Stäckel P. Johann Bolyai's Theorie der imaginären Grössen 263.

Szádeczky J. Ein neues Ganggestein aus Assuan 345.

Szakáll J. Ueber den Urogenitalapparat der Krokodile 328.

Szily C. von. Jahresbericht über die Thätigkeit der Akademie 352.

Szily C. von jun. Ueber die durch Torsion verursachte Veränderung des elektrischen Widerstandes von Metalldrähten 298.

Szontágh F. und Wittmann O. Ueber die chemische Zusammensetzung des normalen und des diphtheritischen Serums 323.*

Szontágh F. Vergleichende Untersuchungen über die chemische Zusammensetzung des normalen und des diphtheritischen Pferdeblutserums 342.

Tangl Fr. und Zuntz. Der Einfluss der Muskelarbeit auf den Blutdruck 320.*

Tangl Fr. Die Wirkung des Trinkens auf die Ausnützung der Nahrung 343. — Siehe Bugarszky.

Tauszk Fr. Das Fleischl-Mischer'sche Hæmometer 343.*

Tellyesniczky C. Verschiedene Hodenpräparate 341.

Thaisz L. Beiträge zur Flora der Umgebung von Budapest und des Landes 335.

Thanhoffer L. Neue Agyschemazeichnung 340.

Tóvölgyi E. Ueber die Elevationen der Schlagadercurve 343.

Tötössy B. Die Tangentenebenen höherer Ordnung der algebraischen Flächen 322.*

Vályi J. Ueber mehrfache Polarreciprocitäten in der Ebene 50, 325.*

VÁNGEL E. Gedächtnissrede auf den Zoologen Dr. Ladislaus Trexler 327.*

VÉRTESS J. Ueber das Acetylen 339.

VISNYA A. Zur Theorie der inducierten linearen Substitutionen 187.

WARTHA V. Ueber die Darstellung der Metalle 339.

WITTMANN O. Siehe SZONTÁGH.

ZIMÁNYI C. Die Krystallform des Rotterbacher Pyrits 348.

ZUNTZ. Siehe TANGL.

1.

DIE BEIDEN PARAMETERGLEICHUNGEN DER SPEKTRALANALYSE.

Von R. v. KÖVESLIGETHY, corr. Mitglied.

Aus der Sitzung der III. Classe der ung. Ak. d. Wiss. vom 14. Nov. 1898.

Einleitung.

Dem Mangel eines ausgesprochen directiven Princips in ZÖLLNER's geistreicher Definition der Astrophysik mag es zugeschrieben werden, dass diese Wissenschaft noch heute nicht über das Sammeln von Beobachtungsdaten hinausgekommen zu sein scheint. Und doch lässt sich mit jeder wünschenswerthen Genauigkeit der Unterschied der beiden verschwisterten Himmelswissenschaften darlegen, und somit der einzige Weg weisen, der die lang gewöhnte Genauigkeitshöhe der anderen zu heben vermag.

Der Astronom betrachtet den Himmel als ein System materieller Punkte, als ein NEWTON'sches System, wie man kurz sagen könnte, dessen Zustand vollständig bekannt ist, sobald ausser gewissen Anfangszuständen die zwischen den einzelnen Punkten wirkenden Kräfte gegeben sind. In der That hat man es aber auch am Himmel mit physikalischen Körpern zu thun, welche nicht nur Arbeitsleistung fähig sind, sondern auch Wärmeaustausch unterliegen, so dass deren Zustand, ausser der Kenntniss der wirkenden Kräfte, noch wesentlich die Angabe gewisser Zustandsgrössen erfordert. Jedenfalls ist leicht zu ersehen, dass die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie in der Astrophysik zu derselben Rolle berufen sind, welche die mechanischen Principien in der Astronomie schon seit Alters einnehmen.

Ebensowenig Schwierigkeit bereitet die Ueberlegung, woher die in jenen Gleichungen auftretenden Grössen zu schöpfen sind? Das Licht ist bisher die einzige messbare Wirkung jener weiten Welten auf unsere Erde, und sowie die Astronomie Richtung und Länge des Lichtstrahles im Raume bestimmt, so untersucht die Astrophysik die innern, individuellen Eigenschaften desselben.

Von diesem Gedankengange geleitet unternahm ich es vor Jahren, den analytischen Ausdruck der Emissionsgleichung in seiner Abhängigkeit von Wellenlänge und zwei, den Zustand des strahlenden Körpers darstellenden Parametern aufzustellen. Diese beiden Parameter, oder die Elemente des Spektrums sind durch Beobachtung leicht zu bestimmen, und bilden zugleich mittelbar oder unmittelbar jene Variabelen, welche in die Gleichungen der Wärmetheorie eintreten.

Die eine Parametergleichung kannte ich schon längst, die Ableitung der zweiten jedoch verursachte viele Mühe. Erst jetzt gelang es sie derart zu entwickeln, dass ich über meine nun beendeten Spektralstudien, als theoretischer Grundlage der Astrophysik, der XVII. ordentlichen Generalversammlung der «Astronomischen Gesellschaft» zu Budapest kurzen Bericht erstatten konnte, der freundlich aufgenommen wurde.

Da die ersten Versuche auf diesem Gebiete weit zurückliegen, und die vorliegende Abhandlung die Frage dem Wesen nach erledigt, lässt sich ein abgerundetes Ganzes nur um den Preis einiger Wiederholungen geben. Ich darf jedoch mit Beruhigung erwähnen, dass meine bisherigen Bestrebungen in der Astrophysik selbst dann wegweisend bleiben, wenn die Resultate derselben in manchem Punkte Abänderungen leiden sollten.

Die Emissionsgleichung.

Es ist leicht zu übersehen, dass in einem kontinuierlichen Spektrum für den Ausdruck der Emission die Gleichung

$$E = f(\lambda, p_1, p_2 \ldots p_r)$$

bestehen muss, in welcher E die zur Wellenlänge λ gehörige Intensität, p_1, $p_2 \ldots p_r$ aber von körperlichen Beschaffenheiten und besonders dem Zustande, also Temperatur und Dichte des strahlenden Körpers abhängige Parameter bedeuten; f ist eine vorläufig noch unbekannte, aber wenigstens für kontinuierliche Spektra in spektralem Sinne (daher in engerem, als analytischem Sinne) kontinuierliche Function. Die Existenz dieser Function ist unbezweifelbar, und widerspricht durchaus nicht jener bekannten Thatsache, dass Amplitude, daher auch Intensität in den Integralgleichungen der schwingenden Bewegung stets als willkürliche Konstanten auftreten. Die Willkürlichkeit derselben bezieht sich ja stets nur auf die laufende Zeit, nicht auch auf die Wellenlänge. Ohne eine solche Gleichung wäre in spektralem Sinne ein kontinuierliches Spektrum, zu dessen Charakteristik es gehört, auffallende Licht-Maxima und Minima nicht zu besitzen, gar nicht denkbar.

Zur analytischen Darstellung dieser Gleichung giebt es, wie uns scheint, zwei Wege. Der Ausgangspunkt ist entweder die Bewegung der Körper- und Aethertheilchen mit der Annahme, dass die Elongation der Körpertheilchen nicht grösser sein kann, als jene Maximalentfernung, aus welcher eine Rückkehr in die Gleichgewichtslage noch möglich ist, oder aber wir nehmen den von Quintus Icilius auch experimentell bewiesenen Clausius'schen Satz an, dass die Emission des absolut schwarzen Körpers, und der Körper überhaupt in ein anderes Medium transferiert im Verhältnisse des Quadrates des relativen Brechungsexponenten wächst.

Das erste Princip benützte schon vor mir zu anderen Zwecken Pictet mit gutem Erfolge, der zweite Satz scheint zu weiteren Untersuchungen noch nicht herbeigezogen worden zu sein. Und doch ist die Translation eines strahlenden Körpers in ein Medium von anderem relativen Brechungsindexe vielleicht das fruchtbarste Princip spektralanalytischer Untersuchungen.

Anfangs betrat ich den ersten Weg, und fand bei geeigneter Wahl der auftretenden Konstanten

$$E = \frac{4}{\pi} \mu \Lambda \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2},$$

wo μ die Wellenlänge des Intensitätsmaximums, Λ die Totalintensität zwischen $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ des kontinuierlichen Spektrums bedeutet.

Die Gleichung kann, je nachdem die Intensität auf andere Einheiten bezogen wird, in verschiedener Form dargestellt werden. Ist z. B. E_0 die der Wellenlänge μ entsprechende Maximalintensität, so wird

$$E_0 = \frac{\Lambda}{\pi\mu}.$$

Λ und μ sind die beiden Parameter oder Elemente des Spektrums, welche mit Hülfe der Spektralgleichung aus mindestens zwei spektralphotometrischen Beobachtungen zweier Farben dargestellt werden können; sie sind natürlich vorläufig unbekannte Functionen der Beschaffenheit, der Temperatur und der Dichte des strahlenden Körpers. Um Missverständnissen vorzubeugen, muss natürlich erwähnt werden, dass sich der Ausdruck auf das *objektive* Spektrum bezieht, dass daher die Empfindlichkeit des Auges oder allgemein die Absorption des das Spektrum auffassenden Apparates oder Mediums nicht berücksichtigt ist.

Das Spektrum beginnt und endet beziehentlich bei den Wellenlängen $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$, und nimmt für $\lambda=\mu$ das schon früher hingeschriebene Intensitätsmaximum E_0 an. Zu jeder kleineren Intensität, als E_0, gehören zwei Wellenlängen λ_1 und λ_2, für welche die Gleichung

$$\lambda_1\lambda_2 = \mu^2$$

besteht. Ausserdem besitzt das Spektrum in den Punkten

$$\lambda_{\text{I}} = 0{\cdot}3626\,\mu \quad \text{und} \quad \lambda_{\text{II}} = 1{\cdot}5922\,\mu$$

je einen Inflexionspunkt.

Betreffs der Aenderungen des Spektrums mit der Temperatur kann einstweilen nur so viel behauptet werden, dass Strahlen, für welche $\lambda < \sqrt{3}\,\mu$ ist, rascher intensiver werden, als Strahlen, für welche $\lambda > \sqrt{3}\,\mu$ ist.

Die Emissionsgleichung befriedigt ausserdem den Satz von Clausius, sowie dessen später zu erwähnende Folgerung, laut deren sie wenigstens zwei von einander unabhängige Parameter zu enthalten hat.

Die Intensität eines zwischen den Strahlen λ' und λ'' gelegenen Spektralbezirkes ist gegeben durch den Ausdruck

$$\mathfrak{E} = \frac{2}{\pi} A \left(\operatorname{arctg} \frac{\mu(\lambda''-\lambda')}{\lambda'\lambda''+\mu^2} - \mu \frac{(\mu^2-\lambda'\lambda'')(\lambda''-\lambda')}{(\lambda'^2+\mu^2)(\lambda''^2+\mu^2)} \right),$$

der sich jedoch bedeutend vereinfacht, wenn die Grenzwellenlängen der Bedingung $\lambda_1\lambda_2=\mu^2$ entsprechen.

Insofern λ' und λ'' als die Grenzen des sichtbaren Spektrums betrachtet werden können, ist der Ausdruck, natürlich von Instrumentalschwächungen abgesehen, einfach die Intensität des sichtbaren Spektrums und kann in der Form

$$\mathfrak{E} = AF(\mu)$$

geschrieben werden, in welcher $F(\mu)$ gewissermassen die Farbe des Mischlichtes des strahlenden Körpers bedeutet.

Die Funktion $F(\mu)$ besitzt einige interessante Eigenschaften; sie verschwindet für $\mu=0$ und $\mu=\infty$, d. h. für unendlich hohe und unendlich niedere Temperaturen, und erreicht für $\mu=0{\cdot}309$ das Maximum $F(\mu)=0{\cdot}2684$. Jenseits der intensivsten Weissglühhitze schreitet die Mischfarbe der Lichtquelle auch bei wachsender Temperatur viel rascher zurück, als sie sich von der Rothglut an entwickelte, so dass z. B. der Farbeneindruck für $\mu=0{\cdot}750$ und $\mu=0{\cdot}096$ derselbe wird. Und die Empfindlichkeit des Auges hört nicht nur für die FRAUNHOFER'sche Linie *A* und *H* auf, sondern überhaupt für alle μ Werthe, die so weit ausserhalb des sichtbaren Spektrums fallen, dass für dasselbe kein merklicher Bruchtheil der Intensität abfällt.

Alle erwähnten Eigenschaften der Spektralgleichung, sowie später zu ziehende Folgerungen werden durch zahlreiche Beobachtungen gestützt.

Die Emissionsgleichung stellt weit innerhalb der Beobachtungsfehler eine Bolometermessungsreihe dar, welche das sichtbare Spektrum fünfmal an Ausdehnung übertrifft; in diesem Falle musste die Empfindlichkeit des Instrumentes natürlich für jede Wellenlänge gesondert dargestellt werden.

Sie steht weiter in voller Harmonie mit jenen spektralphotometrischen Messungen, welche H. C. VOGEL an verschiedenen Lichtquellen anstellte. Deren Ausdehnung beschränkt sich allerdings nur auf das sichtbare Spektrum, sie gewinnen aber dadurch an Bedeutung, dass sie auf Vergleichen beruhend, unabhängig sind von dem Empfindlichkeitsfaktor des benützten Instrumentes und des Auges.

Der Satz, dass Wellenlängen gleicher Intensitäten auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, ist ebenfalls durch mehrere Beobachtungen erhärtet, und die Inflexionspunkte der Spektralkurve finden sich an der theoretisch geforderten Stelle. Das rasche Anwachsen der Function $F(\mu)$ und die Umkehr derselben bei gewissen Temperaturen bildete wenigstens in einigen Fällen Gegenstand der Beobachtungen von Lucas, und der Entwickelungsgang farbiger Fixsterne scheint hiermit ebenfalls in engem Zusammenhange zu stehen.

Endlich mag noch erwähnt werden, dass sich die auf Komplementärfarben beziehenden Beobachtungen der Gleichung unterstellen lassen, und dass die auf die Talbot'schen Linien Bezug nehmende Bemerkung, der Eindruck weissen Lichtes bliebe ungeändert, wenn aus demselben wenigstens neun homogene Strahlenbüschel ausgelöscht werden, deren Lage indifferent ist, ebenfalls zu Rechte besteht.

Diesen Thatsachen gegenüber durfte die aufgestellte Emissionsgleichung jedenfalls als sehr geeignete Interpolationsformel betrachtet werden, wenn nämlich auf molekular-physikalischen Ueberlegungen fussende Ableitungen für weniger zuverlässig gehalten werden sollten. Jedenfalls schien es aber erwünscht, eine in ihren Folgerungen so weit ausgreifende Gleichung auf sicherere Grundlage zu stellen.

Schreibt man die allgemein aufgestellte Gleichung

$$E = f(\lambda, p_1, p_2 \ldots p_r)$$

r-mal nacheinander auf, so lassen sich die Parameter p durch Wellenlängen und Intensitäten ausdrücken. Man kennt sonach auch die Aenderungen, denen die Gleichung unterliegt, wenn der strahlende Körper in ein anderes Medium versetzt wird. Schreibt man den Clausius'schen Satz in diesem Sinne auf, so erhält man zur Bestimmung von f eine Functionalgleichung, die wegen beiderseitigem Wegfall der variablen Intensität E augenscheinlich mit irgend einer Dispersionsformel identisch wird. Dies bedingt erstlich, dass die Emissionsgleichung mindestens zwei von einander unabhängige Parameter besitze, zweitens gewinnt man auf diese Weise eine Differentialgleichung, aus der f abgeleitet werden kann.

Wählt man demgemäss irgend eine Dispersionsformel, z. B. die von KETTELER, welche ebenso für anomale Dispersion gilt und sich durch Genauigkeit besonders vortheilhaft auszeichnet, so gelangt man zu einer Integralgleichung der Emissionsfunction, welche durch die gewiss gestattete Annahme, es lassen sich durch blosse willkürliche Abänderung der Temperatur und des Druckes nicht beliebig viele Strahlenbüschel aus dem continuierlichen Spektrum löschen, wieder auf unsere Gleichung führt.

Im Folgenden mag daher diese Gleichung ohne Bedenken als Grundlage der weiteren Untersuchungen angenommen werden, und es darf behauptet werden, dass die Emissionsgleichung ihrer Ableitung nach mit den genauesten Messungen der Optik Schritt halten werde.

Die Spektralgleichung besitzt noch eine wichtige Eigenschaft, welche weitgehende Bedeutung erlangt. Sie besitzt nämlich kein Additionstheorem in dem Sinne, dass zwei superponierte Spektra nicht durch denselben Ausdruck wiedergegeben werden können. Daraus folgt erstens, dass man durch Spektralbeobachtungen das Spektrum einer jeden Region geschichteter Körper gesondert darstellen kann; insbesondere kann daher das Spektrum der Lichthülle und des Kernes eines Fixsternes abgesondert werden. Zweitens treten kontinuierliche und diskontinuierliche Spektra in enge Verwandtschaft. Die Erbreiterung der Gaslinien und deren endlicher Uebergang in ein kontinuierliches Spektrum zwingen zu dem Schlusse, dass die Gasspektra genau denselben Ausdruck besitzen. Der einzige Unterschied besteht lediglich darin, dass in dem kontinuierlichen Spektrum die Wellenlänge die unabhängige Variabele ist, während sie in dem Gasspektrum zu einer Function der laufenden ganzen Zahlen wird.

Diesem schon bei der ersten Ableitung der Spektralgleichung gefundenen Satze hat die BALMER'sche Formel, die nun für so viele Elemente schon gerechtfertigt erscheint, volle Stütze verliehen.

Der absolut schwarze Körper und der Absorptionskoefficient.

Die Allgemeinheit der Emissionsgleichung erlaubt es zugleich, diese auch auf den absolut schwarzen Körper auszudehnen. Bezeichnet man dessen Parameter mit H und m, wo nun beide Grössen *reine* Functionen der Temperatur allein vorstellen, so wird

$$e = \frac{4}{\pi} mH \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2}$$

die Gleichung des Spektrums absolut schwarzer Körper, oder kurz, der analytische Ausdruck der KIRCHHOFF'schen e Function.

Kraft des KIRCHHOFF'schen Satzes kann nun ohne weiteres auch der Absorptionskoefficient aufgeschrieben werden. Sind nämlich μ, Λ und m, H die Spektralelemente eines beliebigen und eines absolut schwarzen Körpers von derselben Temperatur, so wird

$$a = \frac{E}{e} = \frac{\mu\Lambda}{mH} \left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2.$$

Da, wie wir sogleich sehen werden, für gleichtemperierte Körper die Gleichung

$$\frac{\mu^3}{\Lambda} = \frac{m^3}{H},$$

besteht, so kann das Absorptionsvermögen in der einfacheren Form

$$a = \frac{\mu^4}{m^4} \left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2$$

geschrieben werden.

Es folgt hieraus, dass unter gleichtemperierten Körpern stets der absolut schwarze Körper das grösste m besitzt, dass daher auch mit wachsender Temperatur die Absorption stets zunimmt. Für sehr kleine Wellenlängen ist $a=1$ nahezu, daher jeder Körper undurchsichtig, für sehr lange Wellen wird $a=\frac{\mu^4}{m^4}$, ein echter Bruch.

Die Kenntniss der Absorption befreit die Spektralanalyse vollkommen von jenen Fesseln, welche die Grenzen der Temperatur ihr anlegen könnte, denn jetzt ist spektrale Untersuchung nicht nur im glühenden Zustande denkbar, sondern bei jeder beliebigen Temperatur ermöglicht: das einemal bildet die Emission, das anderemal die Absorption Gegenstand der Untersuchung.

Der Absorptionskoefficient kann sogleich für jede beliebige Stoffmenge aufgeschrieben werden. Ist nämlich der Absorptionskoefficient der Schichteneinheit a, so wird bei n-facher Schichtung,

$$a_n = 1-(1-a)^n,$$

wobei natürlich anzunehmen ist, dass jede Schichte aus Stoff in demselben Zustande bestehe. Infolge des KIRCHHOFF'schen Satzes lässt sich nun das Spektrum einer beliebigen Stoffmenge berechnen, insofern die Intensität

$$E_n = \frac{4}{\pi} mH \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2}\left(1-\left(1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right)^n\right)$$

wird, wobei jedoch E_n nicht mehr durch die einfache Spektralgleichung ausgedrückt werden kann, welche die Massen- oder Volumeinheit charakterisiert.

Schreibt man kurz

$$\frac{\mu^2}{m^2} = a, \qquad x = a\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2},$$

so wird das das Intensitätsmaximum herstellende x aus der Gleichung

$$[2a-(1+2a)x][1-(1-x^2)^n] + 2nx^2(1-x)(x-a)(1-x^2)^{n-1} = 0$$

und hernach die zugehörige Wellenlänge aus

$$\lambda = \mu\sqrt{\frac{1-x}{x-a}}$$

zu berechnen sein.

Aus der vorangehenden Gleichung folgt, dass die spektralphotometrische Beobachtung einer Lichtquelle zugleich mit den

Elementen des Spektrums auch das Spektrum des mit dem Körper gleichtemperierten absolut schwarzen Körpers giebt. Insofern nun m und H reine Functionen der Temperatur sind, (und wie man sehen wird, H durch m schon gegeben erscheint) führt dies auf Temperaturbestimmungen der Lichtquelle, die vollkommen unabhängig sind von der Entfernung, stofflicher oder Oberflächenbeschaffenheiten, Druck- und Dichteverhältnissen des strahlenden Körpers.

Aus einer früher angezogenen Gleichung, deren Begründung später folgen soll, ersieht man, dass mit μ, H und m auch A mitgegeben ist, und unter Berufung auf ein ebenfalls späteres Resultat mag hier schon erwähnt werden, dass m einfach der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist, so dass

$$m\theta = K,$$

wird.

Das auf beliebige Stoffmenge Bezug habende Absorptionsvermögen betrachteten Zöllner, Wüllner und Andere auch so, als ob Dichte und Schichtendicke einander äquivalent wären, n also auch die Dichte bezeichnen könnte. Dies ist jedoch irrig. Würden sich beide Grössen einander äquivalent entsprechen, so könnte durch Druckänderung nur dann eine Änderung des Spektrums entstehen, wenn auch zugleich die Form der Lichtquelle eine andere würde. Das widerspricht aber der Erfahrung. Diese meine Schlussfolgerung bestätigen die directen Versuche von Janssen und Ebert.

Dadurch verlieren wir nun ein wichtiges und naheliegendes Hilfsmittel, welches die Bestimmung der Dichte ermöglicht hätte, und das nun anderwärts zu suchen ist.

Die aufgeschriebene Form des allgemeineren Absorptionskoefficienten a_n kommt daher nur bei geschichteten Körpern in Betracht und könnte daher als Schichtengesetz bezeichnet werden.

Auch die auf die Gleichung des Absorptionsvermögens bezüglichen Folgerungen sind durch die Erfahrung vollständig geprüft, die Gleichung selbst an zwei, allerdings nur das sichtbare Spektrum umfassenden Messungsreihen kontrolliert. H. C. Vogel stellte an verschiedenen Punkten der Sonnenscheibe spektralphotometrische Messungen an, um die Absorption der Chromosphäre zu bestimmen, und G. Müller stellte in ähnlicher Weise die Absorption des Luftkreises für verschiedene Strahlen fest. Die erste Beobachtungsreihe stimmt mit der Absorptionsgleichung so nahe, als es die Genauigkeit des Gegenstandes nur zulässt; die zweite Reihe ist fast vollkommen darstellbar. Die Resultate der Untersuchung sind (da uns jetzt die Werthe von μ nicht interessieren), dass für die Chromosphäre und die irdische Atmosphäre $m=1{,}1631$ und $m=6{,}960$ ist. Mit andern Worten: Ein mit den mittleren Schichten der Chromosphäre, beziehentlich mit den untern Schichten des Luftkreises gleichtemperierter, absolut schwarzer Körper besitzt ein solches Spektrum, in welchem die Wellenlänge des Intensitätsmaximums beziehentlich bei 1,1631 und 6,960 Tausendstel mm. Wellenlänge liegt. Einem früheren Satze zufolge ist also die mittlere Temperatur der Chromosphäre, wenn jene der unteren Luftschichten zu rund 300° absoluter Skale angenommen wird, etwa 1800°. Diese Angabe stimmt gut mit jener Zahl, welche Stefan auf Grund seines Strahlungsgesetzes ableitet. Zugleich ergiebt sich, dass die Konstante K etwa den Werth $K=2088$ besitze.

Die erste Parametergleichung.

Draper fand im Jahre 1847 auf experimentellem Wege den bemerkenswerthen Satz, dass jeder Körper bei derselben Temperatur Strahlen derselben Wellenlänge zu emittieren beginne. Für Strahlen vom dunkelsten Roth beträgt diese Temperatur für alle Körper etwa 798° der absoluten Skale. Derselbe Satz ergiebt sich auch aus dem Kirchhoff'schen Gesetze, ohne dass es nöthig wäre, die analytische Form der e Function zu kennen.

Die Erfahrung lehrt, dass die Emission des absolut schwarzen Körpers bei geringen Temperaturen für jede Strahlengattung nahezu Null ist, dass sie eine kontinuierliche Function der Wellenlänge und der Temperatur ist und zwar derart, dass sie weder beträchtliche Maxima, noch Minima aufweist. Je kleiner die Wellenlänge ist, desto höher muss die Temperatur sein, um der Emission einen merklichen Werth zu verleihen.

Da nun die Absorption für keinen thatsächlichen Körper Null sein kann, sondern stets ein echter Bruch ist, der für kleine Wellenlängen sogar der Einheit sehr nahe steht, so folgt, dass das aus dem Emissionsvermögen des absolut schwarzen Körpers und dem Absorptionsvermögen eines beliebigen Körpers gebildete Produkt, also die Emission des letzteren, bei niedriger Temperatur für eine gegebene Wellenlänge ebenfalls nahe Null sein muss. Sobald aber bei wachsender Temperatur für die Wellenlänge die KIRCHHOFF'sche e Function einen von Null abweichenden Werth annimmt, geschieht dies ebenfalls für die Emission des andern Körpers.

Der Satz, dass jeder Körper bei derselben Temperatur Strahlen gegebener Wellenlänge zu emittieren beginnt, hat demnach auch theoretischen Werth, und lautet umgekehrt: das Spektrum eines jeden Körpers endet bei derselben Temperatur, bei derselben brechbareren Wellenlänge. Die jenen Satz scheinbar abändernden Erfahrungen WEBER's liefern, wie ich seiner Zeit zeigte, eher eine neue Stütze der Emissionsgleichung.

Nimmt man dem entsprechend den Werth der Emission $E=\iota$ unendlich klein, aber sonst konstant an, so erhält man durch Auflösung der Gleichung nach der kürzeren Wellenlänge eine Beziehung zwischen den Parametern der Spektra, welche bei gegebener Temperatur für alle Körper dieselbe sein muss, d. h.

$$\lambda = \sqrt{\frac{\mu\Lambda}{\pi\iota}} - \sqrt{\frac{\mu\Lambda}{\pi\iota} - \mu^2} = \varphi(\Theta),$$

worin $\varphi(\Theta)$ eine reine, von Stoff- und Druckbeschaffenheiten des Körpers vollkommen unabhängige Temperaturfunction bedeutet. Entwickelt man diese, und bleibt mit Rücksicht auf die unendliche Kleinheit von ι bei der ersten Potenz dieser kleinen Grösse stehen, so erhält man für zwei Körper derselben Temperatur, mit den Parametern μ, Λ und μ', Λ':

$$\frac{\mu^3}{\Lambda} = \frac{\mu'^3}{\Lambda'},$$

und daher ganz allgemein auch

$$\frac{\mu^3}{\Lambda} = \frac{m^3}{H}$$

wo m, H das Spektrum des mit dem gegebenen Körper gleich temperierten absolut schwarzen Körpers bedeutet.

Die Temperaturfunction $\frac{\mu^3}{\Lambda}$ ist nun ganz allgemein bekannt, sobald sie für einen einzigen Körper gegeben ist. Ihre Bestimmung kann in mehrfacher Weise geschehen. Anfänglich stützte ich mich auf die kinetische Gastheorie und fand mittels gewiss nicht einwurfsfreier Rechnung die Gleichung

$$\frac{\mu^3 \theta^4}{\Lambda} = D,$$

in welcher D eine absolute Zahl bedeutet, die DRAPER zum Gedächtniss die DRAPER'sche Konstante heissen mag. Neben diesem Resultate sprach damals der einzige Umstand, dass der gefundene Satz mit dem Strahlungsgesetze STEFAN's identisch ist, wenn die Mischfarbe des Körpers merklich konstant bleibt. Und das STEFAN'sche Gesetz konnte bekanntlich BOLTZMANN auch theoretisch begründen. Später zeigte sich, dass die einfache Gleichung eine von VIOLLE angestellte Messungsreihe, die sich im sichtbaren Spektrum auf vier Wellenlängen und fünf zwischen 775° C. und 1775° C. liegende Temperaturen bezog, mit überraschender Genauigkeit wiedergab. Die grösste Abweichung der einzelnen Resultate betrug 2·1 %, was mit Rücksicht auf die Schwierigkeiten photometrischer Messungen gewiss befriedigend ist.

Wählt man als Einheit der Intensität jene Totalintensität, welche von einem cm² bei 1775° C. erstarrender Platinoberfläche ausgestrahlt wird, als Einheit der Wellenlängen das Tausendstelmillimeter, so ist

$$D = 12737.10^8.$$

Seither ergab sich auf verschiedenen Wegen dasselbe Resultat für die Function $\frac{\mu^3}{\lambda}$. Unter Anderm auch dadurch, dass man den ersten Hauptsatz der Wärmetheorie mit den Variabeln μ und Λ aufschreibt, und den integrierenden Divisor der Differentialgleichung sucht, der ja dem zweiten Hauptsatze zufolge die absolute Temperatur selbst ist.

Dass die Wellenlänge der Maximalintensität im Spektrum des absolut schwarzen Körpers der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist, lässt sich in ähnlicher Weise zeigen. Der absolut schwarze Körper kann nämlich auch so definiert werden, dass für ihn unter sonst gleichen Umständen und bei derselben Temperatur die Wärmeabgabe oder Aufnahme ein Maximum wird.

Nimmt man die Ausstrahlung des absolut schwarzen Körpers zwischen 0° C. und 100° C. in absolutem Masse zu 0,01763 $\frac{\text{g cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}$ an, so erhält man, diese Zahl kurz mit a bezeichnend, laut des DRAPER'schen Satzes:

$$H_{100} - H_0 = \frac{1}{D}(m_1^3\theta_1^4 - m_0^3\theta_0^4) = a,$$

wenn θ_1 und θ_0 die den beiden Temperaturen entsprechenden absoluten Temperaturen bezeichnen. Bemerkt man noch, dass $m\theta = K$ war, so kommt

$$100\frac{K}{D} = 0{,}01763 \frac{\text{g cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}$$

als Zusammenhang zwischen den Konstanten K und D.

Die Methode der langen und kurzen Linien.

Mit geringen Abänderungen führt die bei der Ableitung der ersten Parametergleichung angewandte Methode zur theoretischen Begründung jener wichtigen Beobachtungseinrichtungen, welche LOCKYER so vortheilhaft anwendete. Untersucht man nämlich eine Lichtquelle, welche in ihren verschiedenen Punkten verschiedene Temperatur und Dichte besitzt (etwa dadurch, dass man das auf den Spalt des Spektroskopes entworfene Bild einer Bogenlampe untersucht), so werden in dem Spektrum jene Linien, die schon bei geringer Dichte und niederer Temperatur auftreten, als lange erscheinen, während alle jene Linien, welche nur bei hohen Temperaturen und Dichten bestehen, als kurz erscheinen. Da sich hieran zugleich eine Discussion der Gasspektra anschliesst, und die Methode gerade in der Astronomie wichtig wird, da sowohl die Constitution der Himmelskörper, als die Umstände ihrer Beobachtung vollauf dieser Einrichtung sich anpassen, so mag sie hier kurz besprochen werden.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier ganz auf die Untersuchung absolut schwarzer Körper, obwohl später die Untersuchung, da in der zweiten Parametergleichung die Abhängigkeit des Spektrums von Temperatur und Druck gegeben wird, auch ganz allgemein geführt werden könnte. Wir gewinnen hierdurch den (rechnerischen) Vortheil, dass die Abhängigkeit des Spektrums von der Temperatur sehr einfach aufgeschrieben werden kann. Ein principieller Fehler ist wohl dadurch ausgeschlossen, da ja das Spektrum eines jeden Körpers aus dem des absolut schwarzen Körpers durch Multiplication mit einem echten Bruche hervorgeht. Es möge aber doch noch einmal hervorgehoben werden, dass es uns in diesem Abschnitte nur um qualitative, nicht um quantitative Eigenschaften der Spektra zu thun ist.

In Hinsicht des Draper'schen Satzes kann das Spektrum eines jeden Körpers in der Form

$$E = \frac{4}{\pi D} \mu^4 \Theta^4 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}$$

geschrieben werden. Wird wieder $E = \iota$ angenommen, wo ι konstant, sonst aber unendlich klein ist, so kann die Auflösung der Gleichung, wie früher nach der Wellenlänge, nun auch nach der Temperatur erfolgen.

Schreibt man kurz

$$c_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi \iota D}},$$

wo c_1 für alle Körper konstant ist, und insbesondere für absolute schwarze Körper

$$\mu^2 \Theta^2 c_2 = 1,$$

wobei c_2 mit der constanten K durch die Gleichung

$$c_2 = \frac{1}{K^2}$$

verbunden ist, so lautet die Lösung:

$$\Theta^{-2}=c_1\lambda-c_2\lambda^2,$$

und hiebei bedeutet Θ jene Temperatur, bei welcher die Linie λ des absolut schwarzen Körpers eben verschwindet.

Da für die Länge einer Spectrallinie eine besondere Einheit nicht existiert, so wird es am zweckmässigsten sein, Θ^{-2} selbst als Länge der Linie zu definieren. Diese Definition ist um so vortheilhafter, als hiedurch die Länge der Linie vollkommen unabhängig wird von den Dimensionen des Apparates und der Lichtquelle, und deren relativer Lage. Ausserdem lässt sie sich unmittelbar durch einen vor dem Spalte bewegten Bolometerfaden und ein Galvanometer messen.

Im Sinne der aufgeschriebenen Gleichung besitzt die Linie von der Wellenlänge $\lambda=0$ die Länge $\Theta^{-2}=0$; die Linie $\lambda_0=\frac{c_1}{2c_2}$ erhält die maximale Länge $\Theta_0{}^{-2}=\frac{c_1^2}{4c_2}$, und die Länge der Linien verschwindet wieder für die Wellenlänge $\lambda=\frac{c_1}{c_2}$.

Legt man durch einen der Temperatur Θ entsprechenden Punkt des Spectrums einen unendlich schmalen Streifen $d\Theta$ (der natürlich sobald sich die Temperatur in der Lichtquelle räumlich langsam ändert, wohl auch die ganze Breite des Spectrums erfüllen kann), so werden in jenen Streifen nur jene Linien hineinragen, deren Länge grösser oder mindestens gleich dem aus der Gleichung folgenden Θ^{-2} ist. Die Anzahl der diese Ungleichung befriedigenden Linien ist zugleich die Anzahl aller Linien, welche bei der Temperatur Θ sichtbar wird. Ist also

$$z=c_1\lambda-c_2\lambda^2-\Theta^{-2},$$

so ist eine Linie sichtbar, oder nicht sichtbar, je nach dem für ein gegebenes λ und gegebene Temperatur z positiv oder negativ wird. Bedeutet also n die Gesammtzahl der Linien eines Spectrums, so ergiebt

$$N=\frac{n}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_1^n r\int_0^\infty \sin\left(c_1\lambda_r-c_2\lambda_r^2-\Theta^{-2}\right)y\,.\,\frac{dy}{y}$$

kraft der Eigenschaft des bekannten Discontinuitätsfactors die Anzahl der bei der Temperatur θ sichtbaren Linien. Dies zu erwähnen schien von Wichtigkeit, da LOCKYER, wenigstens in einigen Fällen blos durch die Zählung der sichtbaren Linien bis zu 0·01% genaue quantitative Analysen anstellen konnte, die jedoch ganz natürlich auf rein empirischem Boden standen.

Bedeuten λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der Gleichung $z=0$, und ist $\lambda_1<\lambda_2$, so ist der von λ_1 bis λ_2 sich erstreckende Raum der einzige, in welchem bei der Temperatur θ Spectrallinien sichtbar sind. Die Ausdehnung dieses Raumes hängt wesentlich von der Temperatur ab, und vergrössert sich mit dieser zugleich, indem die Grenze von λ_1 gegen die kürzeren, λ_2 gegen die langen Wellen zu wandert. Der Raum der sichtbaren Linien erbreitert sich symmetrisch nach beiden Seiten, das Maximum der Liniensichtbarkeit behält seine Stellung inne. Die Intensität der Linien rückt jedoch innerhalb dieses Raumes gemäss der Emissionsgleichung weiter.

Bei Erniedrigung der Temperatur verengert sich der Raum sichtbarer Linien, und ist die Temperatur unter

$$\theta = \frac{2}{c_1}\sqrt{c_2}$$

gesunken, so existiert keine einzige sichtbare Linie mehr.

Da in einem Gase λ ohnehin nicht stetig veränderlich ist, können diese, strenge nur für absolut schwarze Körper giltigen Sätze, annäherungsweise auch für Gase angewendet werden. Ein jedes Gasspectrum besitzt daher in der Nähe der Wellenlänge $\lambda = \frac{c_1}{2c_2}$, die nur von den stofflichen Beschaffenheiten des Gases abhängt, eine und nur eine längste Linie, auf welche sich endlich das Spectrum bei abnehmender Temperatur reduciert. Dieser Satz erhielt durch die Beobachtungen LOCKYER's und FRANKLAND's volle Bestätigung.

Wollte man die Gleichung

$$\mu^2\theta^2c_2=1$$

auch für Gase als giltig betrachten, was wir ja in diesem Abschnitte angenähert thaten, so wäre bei n-facher Schichtendicke

$$\Theta^{-2}=c_1\sqrt{n}\lambda-c_2\lambda^2,$$

angenommen, dass die Absorption so gering ist, dass deren zweite und höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Daraus ergeben sich die folgenden, quantitativ nur näherungsweise giltigen Sätze:

Zunehmende Menge des strahlenden Gases bedingt eine Verlängerung der Linien, Erbreiterung des Raumes sichtbarer Linien, daher auch Vergrösserung ihrer Zahl. Die Temperatur, bei welcher die letzte Linie verschwindet, tritt umso eher auf, je grösser die glühende Masse ist, und bei wachsender Stoffmenge sind es stets mehr und mehr kurzwellige Linien, welche die Rolle der längsten Linien übernehmen. Ist endlich die Stoffmenge kleiner, als

$$n=\frac{4c_2}{c_1^2\Theta^2},$$

so ist bei der Temperatur Θ keine einzige Linie des Gases mehr sichtbar. Der hingeschriebene Ausdruck ist also das analytische Maass der Empfindlichkeit der Spectralanalyse.

Die Erfahrung wiederspricht diesen Thatsachen in keinem Punkte, und jene Regel Bunsen's, dass Stoffe, deren Spectrum schon bei niederen Temperaturen auftritt, zweckmässiger in der Gasflamme, und nicht in elektrischen Funken beobachtet werden, findet hier ihre theoretische Begründung.

Das einfache Spectrum der äussersten Sonnenhüllen, der Kometen und Nebelflecke, des Nord- und Zodiakallichtes kann auf derselben Grundlage verstanden werden.

Das bisher Gesagte, das natürlich unter Berücksichtigung der zweiten Parametergleichung ganz genau für jeden Körper abgeleitet werden könnte, mag unter Berufung auf die Emissionsgleichung und die Balmer'sche Formel noch durch das Nachfolgende ergänzt werden.

In einem beliebigen Gasspectrum können höchstens zwei Linien zugleich gleiche Intensität erlangen, und nur eine einzige kann sich im Maximum der Intensität befinden. Durch Aenderungen des Druckes und der Temperatur können nacheinander alle Linien zu intensivsten gemacht werden. Da das Intensitätsverhältniss des discontinuierlichen und des (schwachen) continuierlichen Spectrums der Gase lediglich von dem Verhältnisse der beiden Wärmecapacitäten abzuhängen scheint, dieses aber für alle Gase merklich constant ist, so kann behauptet werden, dass unter sonst gleichen Umständen jene Gase ein glänzendes Spectrum besitzen werden, deren Linienanzahl eine geringe ist.

Die Molekulartheorie, der ich die erste Ableitung der Spectralgleichung sowohl für feste als gasförmige Körper verdankte, ergab auch vollständig die Form der Balmer'schen Gleichung. Für jedes Gasspectrum sollte hiernach die Beziehung

$$\lambda_r^2 = \mu^2 \frac{1}{\varphi(r) - 1},$$

bestehen, in der $\varphi(r)$ eine, ohne weitere Specification molekularer und Atombewegungen jedoch nicht angebbare Function der laufenden Zahlen r bedeutet. Der Erfahrung nach lautet Balmer's Gleichung:

$$\lambda = h \frac{(n+c)^2}{(n+c)^2 - k^2}$$

in welcher h, k^2, und c bezeichnende Constanten des Stoffes sind. Für Hydrogen ist z. B. $h = 0{\cdot}364542$, $k = 2$, $c = 0$ und die Formel giebt die bisher bekannten 13 Hydrogenlinien auf volle 5 Zahlenstellen wieder. Nimmt man $h = 0{\cdot}3646205$, so erhält man aus den Beobachtungen von Müller und Kempf sogar eine sechsziffrige Übereinstimmung. Da die wirkliche Wurzel der interessanten Gleichung bisher unbekannt geblieben, mag es genügen zu erwähnen, dass die Constante h allem Anschein nach mit der Dissociierbarkeit des Stoffes zusammenhängt, und dass die Gleichung auch jene allerdings in engen Grenzen sich bewegenden Bedingungen feststellt, unter denen mehrere Stoffe dieselben gemeinsamen Linien besitzen können.

Verwandte Spectraltheorien.

Strenge genommen stellt jede Strahlungsgleichung ein bestimmtes Integral der Emissionsfunction in seiner Abhängigkeit von der Temperatur vor; so kann z. B. die Strahlungsformel von

Dulong-Petit, Rosetti oder Stefan gedeutet werden. Andere, wie Becquerel und Zöllner versuchen wohl auf Grund ihrer Beobachtungen die Wellenlänge einzuführen, doch ist der Erfolg ein ziemlich geringer. Es hält durchaus nicht schwer, empirische Formeln aufzustellen, welche innerhalb des beschränkten sichtbaren Spectrums die Intensität als Function der Wellenlänge genügend genau wiedergeben und daher ganz brauchbare Interpolationsformeln sind. Der wahre Probestein ihrer Anwendbarkeit wird stets das Verhalten der Grenzen $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$, und besonders des Absorptionsvermögens bleiben. Von diesem Gesichtspunkte betrachtet entspricht keine der erwähnten Formeln.

Mit bedeutend besserem Erfolge beschäftigte sich mit der Frage W. Michelson, dessen Emissionsgleichung dem Wesen nach die Maxwell'sche Wahrscheinlichheits-Function ist. Als solche ergiebt sie für die beiden Grenzen des Spectrums in der That die Intensität 0. Bemerkenswerth ist, dass der Satz, nach welchem das aus den Coordinaten des Culminationspunctes der Curve gebildete Parallelegramm dem Inhalte der ganzen Curve nach einem wahrscheinlich für alle Körper constanten Factor proportional sei, ganz meinen eigenen Ergebnissen entspricht, indem sich fand:

$$\Lambda = \pi \, . \, \mu E_0 \, .$$

Die Bildung des Absorptionscoefficienten spricht aber auch gegen diese Theorie; wie immer auch die Constanten bestimmt werden mögen, treten für gewisse Wellenlängen Absorptionswerthe auf, die grösser als die Einheit sind, wo doch der Bedeutung nach die Grenze 0 und 1 nicht überschritten werden dürfen. Ebenso wiederspricht der Theorie, dass sich die beobachteten Intensitäten für gewisse Wellenlängen grösser ergeben, als die berechneten, was unter Hinweis auf die Empfindlichkeit des Instrumentes, die ebenfalls ein echter Bruch ist, principiellen Gegensatz bedeutet. Endlich aber genügt die Gleichung dem Clausius'schen Satze nicht, kann also mit keiner brauchbaren Dispersionsformel identificiert werden.

Die zweite Parametergleichung.

Die Draper'sche Gleichung ergiebt zwar mit den Parametern des Spectrums die absolute Temperatur, jedoch ertheilt sie keinen Aufschluss über die Dichte, noch gestattet sie die einer gegebenen Temperatur entsprechenden Spectralelemente zu berechnen. Die einschlägigen Beobachtungen sind ziemlich einseitig, beziehen sich zumeist auf die Erscheinungen der Linienverbreiterung und sind ausserdem, da die Temperatur- und Druckbestimmungen ziemlich roh sind, kaum zu verwenden. Ausserdem lässt sich der Einfluss von Druck und Temperatur auf das Spectrum experimentell kaum trennen, spectrophotometrische Messungen fehlen auf diesem Gebiete ganz und so könnte man im besten Falle nur von Integralwerthen der Emissionsfunction ausgehen.

Die Abtrennung der Wirkung von Temperatur und Druck ist in der That schwierig genug. Unter Berufung auf den ersten Hauptsatz der Wärmetheorie, dessen Heranziehen hier ganz selbstverständlich erscheint — kann man sagen, dass die von der Lichtquelle abgegebene Wärme ganz wesentlich von der Art und Weise abhängt, in welcher sich die Temperatur mit dem Drucke verändert.

Unter solchen Umständen stösst die experimentelle Lösung der Frage auf bedeutende Schwierigkeiten und lässt ebenso wenig hoffen, als die rein auf Beobachtungen gegründete Entscheidung des Ptolemaeischen und Coppernikanischen Systems. Es scheint aber, dass wir auch auf diesem Gebiete schon über so viele Erfahrungsthatsachen verfügen, dass an eine rein deductive Ableitung gedacht werden kann. Dass aber die Lösung der Frage keineswegs leicht is, dafür mag zum Belege auch der Umstand dienen, dass es vieler fruchtloser Versuche bedurfte, und dass seit Aufstellung der ersten Parametergleichung eine ganze Reihe von Jahren vergangen ist.

Die meisten Versuche führten zwar nicht zum Ziele, waren aber doch in einer oder in anderer Richtung lehrreich, und dürften mit der Zeit in der Spectralanalyse Anwendung finden. Das Merkwürdigste war freilich, dass sie alle mehr oder minder bestimmt auf das endliche Resultat hinwiesen, was ich leider erst nach dessen Feststellung bemerkte.

Es ist vielleicht nicht ganz überflüssig, auf diese Versuche in Kürze hinzuweisen.

a) Gegenseitige Zustrahlung zweier Körper.

Es kommt hier, sowie in allen folgenden Versuchen darauf an, Strahlungszustände herzustellen, auf welche die Hauptgleichungen der Wärmetheorie anwendbar sind, und die zugleich einen Uebergang auf die Elemente des Spectrums gestatten.

Vor Allem bestimmte ich die gegenseitige Zustrahlung zweier Körper, die sich — falls von anderseitigem Wärmeverlust abgesehen wird, unter der Form

$$q_1 = \int_0^\infty (E_2 a_1 - E_1)\, d\lambda \quad \text{und} \quad q_2 = \int_0^\infty (E_1 a_2 - E_2)\, d\lambda$$

darstellt. Werden die Integrale zwischen den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ genommen, so erhält man die Gleichungen

$$q_1 = A_2 \frac{\mu_1^3}{m_1^4(\mu_1+\mu_2)^3}((m_1^2+\mu_1\mu_2)^2+\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^2) - A_1,$$
$$q_2 = A_1 \frac{\mu_2^3}{m_2^4(\mu_1+\mu_2)^3}((m_2^2+\mu_1\mu_2)^2+\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^2) - A_2,$$

die sich unter vereinfachenden Annahmen bedeutend reducieren lassen. Diese Ausdrücke, die z. B. nach einer gewissen Zeit, wenn die Temperatur der beiden Körper dieselbe geworden ist, wegen

$$m_1 = m_2 = m$$

und

$$A_1 = \frac{\mu_1^3 \Theta^4}{D}, \quad A_2 = \frac{\mu_2^3 \Theta^4}{D},$$

die Form

$$q_1 = \frac{\mu_1^3 \Theta^4}{D}\left(\frac{\mu_2^3}{m^4(\mu_1+\mu_2)^3}((m^2+\mu_1\mu_2)^2+\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^2) - 1\right)$$
$$q_2 = \frac{\mu_2^3 \Theta^4}{D}\left(\frac{\mu_1^3}{m^4(\mu_1+\mu_2)^3}((m^2+\mu_1\mu_2)^2+\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^2) - 1\right)$$

annehmen, und falls auch der Stoff beider Körper derselbe ist, d. h.

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu,$$

in die gemeinsame Form

$$q = \frac{\mu^3 \theta^4}{8Dm^4}(5\mu^4 + 2m^2\mu^2 - 7m^4)$$

übergeben, stellen jedenfalls ein Integral des ersten Hauptsatzes der Wärmetheorie dar. Es scheint mir aber nicht, als ob aus diesen Ausdrücken Besonderes gefolgert werden könnte.

Ebensowenig ergaben sich neue Resultate, als ich den Körper C_2 in einen aus dem Stoffe C_1 bestehenden Kirchhoff-schen Kasten sperrte, oder den Strahlungsunterschied suchte, der bestehen muss, wenn ein Körper einmal in vollkommen reflectierender Kugelschale strahlt, deren Inneres dann durch unendlich kleine Oeffnungen mit dem umgebenden Medium in Verbindung gesetzt wird. Obwohl auf diese Vorgänge die Gleichungen der Wärmetheorie Anwendung finden können, zeigen sie doch nicht mehr, als dass die ausgestrahlte Wärmemenge in irgend einem Zusammenhange mit der Entropie des Systems stehe.

b) Translation des strahlenden Körpers in ein neues Medium.

Auf diesem Processe beruht die endgiltige Lösung der Frage, nur suchte ich in den ersten Versuchen die der Uebertragungsarbeit entsprechende Energieänderung. Dadurch kamen in das Problem die den Zustand des Mediums bestimmenden Grössen, was nicht erwünscht schien, und ausserdem willkürliche Functionen, die nicht näher bestimmt werden konnten.

Hieher dürfte auch die Einführung des Brechungsindex gehören. Bei der nahen Verwandtschaft der Emissions- und Dispersionsgleichung schien dies von Erfolg zu sein, doch stellt die Unkenntniss der Abhängigkeit von Temperatur und Druck des Brechungsindex und noch mehr der Dispersion dies wieder in Frage.

Principiell gleichbedeutend mit der Translation des Körpers sind die Einführungen jener Veränderungen, die die Lichtquelle zeitlich aufweist. Die Methode wäre bei Himmelskörpern anwendbar, trifft aber nur für vollkommene Gase zu.

Nehmen demgemäss die linearen Abmessungen eines kugeligen gasförmigen Himmelskörpers im Verhältnisse von $1 : n$ ab, so wird jedes Volumenelement v zu $\frac{v}{n^3}$, während der Druck p auf pn^4 steigt. Die Temperatur nimmt daher den Werth $n\theta$ an, und der ganze Entwickelungsgang des Himmelskörpers ist nach RITTER durch die Gleichungen

$$p^3v^4 = \text{const.}; \quad p\theta^{-4} = \text{const.}; \quad \text{und} \quad v\theta^3 = \text{const.}$$

gegeben, die nun in die Sprache der Spectralanalyse übersetzt werden müssten. Für irdische Lichtquellen lassen sich ähnliche, aber einfachere Gleichungen aufschreiben, insoferne die meisten Versuche entweder bei constantem Volumen, oder bei constantem Drucke bewerkstelligt werden.

In allen diesen Fällen ist die erste Gleichung der Wärmetheorie integrabel, doch besitzen die Gleichungen, die nur auf ideale Gase Anwendung finden, durchaus nicht die nöthige Allgemeinheit.

c) Explicite Form der thermodynamischen Gleichungen.

Da das Spectrum zwei von einander unabhängige Parameter besitzt, können diese zweifelsohne als Variable der thermodynamischen Gleichungen, also als zustandbestimmend angesehen werden. Die erste Hauptgleichung lautet demgemäss

$$dQ = \varphi(\Lambda, \mu)\, d\Lambda + \psi(\Lambda, \mu)\, d\mu,$$

worin φ und ψ den Integrabilitätsbedingungen nicht genügt. Laut des zweiten Satzes weiss man aber, dass

$$\theta = \sqrt[4]{D}\, \Lambda^{\frac{1}{4}} \mu^{-\frac{3}{4}}$$

der integrirende Divisor der Differentialgleichung ist. Die Bestimmung der Funktionen φ und ψ giebt zwar unmittelbar den Zusammenhang zwischen Λ, μ und θ, v nicht, kann aber doch zur Beurtheilung mancher, gerade astrophysicalischer Fragen wichtig werden.

Wird der Körper in ein anderes Medium transferiert, so wird wegen der Gleichung

$$E_0 = \frac{A}{\pi\mu}$$

aus A nA, aus μ aber $\frac{\mu}{n}$, wenn n den relativen Brechungsexponenten beider Medien bedeutet. Da aber A als ausgestrahlte Totalintensität zum mindesten einen additiven Theil von Q bildet, so folgt, dass in der Gleichung der Wärmeänderung jeder einzelne Theil im neuen Medium n-fach grösser wird. Da nun das Produkt $A\mu$ in Bezug auf den Brechungsindex invariant ist, so folgt, dass die erste Gleichung der Wärmetheorie auch in der Form

$$dQ = \Phi(A\mu)\,dA + \frac{A}{\mu}\,\Psi(A\mu)\,d\mu$$

geschrieben werden kann. Der zweite Hauptsatz ergiebt nun als Beziehung der beiden unbekannten Functionen

$$\Phi(A\mu) - \Psi(A\mu) = A\,(A\mu)^{-\frac{3}{4}},$$

in welcher A die Integrationsconstante bedeutet.

Könnte man nun annehmen, dass der Zuwachs der Totalintensität einfach der Wärmeabnahme gleich wäre, wenigstens in dem Falle, wo μ=const., so wäre:

$$\Phi(A\mu) = -1$$

und dem entsprechend

$$dQ = -dA - \frac{A}{\mu}\left(1 + A\,(A\mu)^{-\frac{3}{4}}\right)d\mu,$$

woraus die Gleichung der Entropie entspränge

$$S_0 - S = \frac{4}{3D^{\frac{1}{4}}}\,(A\mu)^{\frac{3}{4}} + \frac{A}{D^{\frac{1}{4}}}\,\lg\mu.$$

Diese Gleichung liefert wenigstens für ideale Gase den Ausdruck des weiteren Zusammenhanges zwischen den beiden Parametern des Spectrums und den Zustandsvariabeln, ist aber durchaus nicht einwurfsfrei, da es recht fraglich ist, ob einfach $dQ = -dA$ genommen werden darf, die eventuelle potentielle Energie des

Systems ausser Acht lassend. Ohne diese vereinfachende Annahme findet sich die noch jedenfalls allgemeine Gleichung

$$S = S_0 + X(\Lambda\mu) + A \lg \Lambda$$

die mit Rücksicht auf den DRAPER'schen Satz auch in der Form

$$S = S_0 + Y(\mu\Theta) - A \lg \mu$$

geschrieben werden kann.

Insofern bei constanter Temperatur der absolut schwarze Körper die grösstmögliche Wärme aufzunehmen im Stande ist, so folgt, dass dessen Entropieänderung ein Maximum wird. Man hat demnach

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial\mu}\right) = 0 = Y''(\mu\Theta)\,\Theta^2 + \frac{A}{\mu^2},$$

und als Auflösung derselben, da sie für jede Temperatur gilt, die schon mehrfach benützte Gleichung

$$m\Theta = K,$$

in welcher, da es sich um absolut schwarze Körper handelt, K eine reine Zahlenconstante bezeichnet.

Dieselbe Gleichung ergiebt sich auch, wenn die erste Hauptgleichung der Wärmetheorie in dem angeregten Sinne weiter entwickelt wird, indem wir auch die Energie und die äussere Arbeit des Körpers zu bestimmen suchen. Die entsprechenden Gleichungen lauten

$$U = \Lambda f(\Lambda\mu) \quad \text{und} \quad p\,dv = g(\Lambda\mu)\,d\Lambda + h(\Lambda\mu)\frac{\Lambda}{\mu}\,d\mu,$$

und in ihnen bedeuten f, g, h unbekannte Functionen. Auf diesem Wege gelingt es wenigstens formell, v und p durch Λ und μ auszudrücken. Nimmt man nun in diesen Gleichungen die Dichtigkeit so gross an, dass bei dem Volumen $v = v_0$ der strahlende Körper bis auf unendlich kleine Unterschiede das Spectrum des absolut schwarzen Körpers giebt, so kommt man auf die schon mehr erwähnte Beziehung.

Auf diesem Wege ergiebt sich auch die allgemeine Zustandsgleichung

$$F(\theta, p, v)=0,$$

doch bleiben die Ergebnisse rein formell, da es vorläufig zur Bestimmung der vorkommenden unbekannten Functionen an Mitteln fehlt. Die selbst nur differentielle Anwendung bekannter Strahlungsformeln half über die Schwierigkeiten nicht hinweg.

Ein Zurückgreifen auf die durch Wärme veränderten molekularen Vorgänge im Körper, etwa unter Zuhilfenahme des wohl auch mechanisch definierbaren Absorptionscœfficienten war ebenso wenig von Erfolg gekrönt. Eine zufriedenstellende Verbindung zwischen den spectralen und thermodynamischen Zustandsvariabeln konnte nicht angebahnt werden.

d) Translation des Körpers und die zweite Hauptgleichung der Wärmemechanik.

Die gesuchte zweite Parametergleichung ergiebt sich leicht aus der Translation des Körpers in ein Medium von anderem Brechungsindex.

Denken wir uns einen Körper, der in gegebenem Medium bei gegebenem Zustande die Gesammtenergie $\mathfrak{E}$ ausstrahle. Die absolute Temperatur des Körpers sei θ, seine Energie und Arbeitsleistung U und W. Ueberführt man den Körper in ein Medium dessen Brechungsindex um die unendlich kleine Grösse dn grösser ist, so wird die Gesammtstrahlung um $\mathfrak{E}dn$ grösser. Da in diesem Falle anderer Wärmeaustausch nicht stattfindet, so ist dieser Strahlungsüberschuss einfach mit der der Translation entsprechenden Wärmeabgabe identisch, demnach

$$-\mathfrak{E}dn=dU+dW$$

worin die rechte Seite die unendlich kleine Zunahme der Energie und der äusseren Arbeit bezeichnet.

Dieselbe Gleichung ist auch für mehrere Körper giltig. Es seien C_1 und C_2 zwei gleiche Körper in gleichem Zustande. Die momentane Totalintensität beider beträgt demnach im luftleeren Raume $\mathfrak{E}$ und in einem Medium vom Brechungsindex n gleicherweise $n\mathfrak{E}$. Zwischen den beiden Körpern besteht natürlich vollkommenes Wärmegleichgewicht.

Nun werde der Körper C_2 in ein Medium vom Brechungsindex $n+dn$ überführt. Dadurch ändert sich dessen Zustand, und eine ähnliche Veränderung ist auch an dem im alten Medium gebliebenen Körper bemerkbar. Die Emission des Körpers C_2 ist, da seine Temperatur um $d\theta$, sein Volumen um dv, der Index seines umgebenden Mediums um dn gewachsen ist:

$$\left(\mathfrak{E}+\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial v}dv\right)(n+dn)=n\mathfrak{E}+n\left(\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial v}dv\right)+\mathfrak{E}dn,$$

wenn von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung abgesehen wird.

Die Temperatur und das Volumen des Körpers C_1 haben sich um eben dieselbe Grösse $d\theta$ und dv geändert, denn die gegenseitige Zustrahlung ist dieselbe, mithin sind auch die Temperaturen ungeändert. Die Änderung ist daher zu gleicher Zeit isentrop und isotherm, was eine gleiche Änderung des Volumens beider Körper bedingt. Die Emission des Körpers C_1 wurde daher

$$\left(\mathfrak{E}+\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial v}dv\right)n,$$

so dass der Strahlungsüberschuss von C_2 wieder $\mathfrak{E}dn$ ist, der als Wärmeabgabe in die erste Gleichung der Wärmetheorie einzuführen ist.

Da n ebenso, wie in der Theorie der Dispersion den relativen Brechungsindex zwischen Körper und Medium darstellt, so muss er unbedingt eine Function der Temperatur und Dichte des strahlenden Körpers sein, also muss die Gleichung

$$dn=\frac{1}{\mathfrak{E}}(dU+dW)$$

integrabel sein. Nun ist aber zufolge des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie die absolute Temperatur θ schon ein integrierender Divisor der Gleichung, folglich muss $\mathfrak{E}$ die Form besitzen:

$$\mathfrak{E}=\theta\varphi(S),$$

in welcher $\varphi(S)$ eine willkürliche Function der Entropie des Körpers bedeutet. Von der Richtigkeit dieser Gleichung überzeugt man sich sogleich, wenn man sie in die Bedingung der Integrabilität substituirt, man erhält

$$\varphi(S) \,.\, \left(\theta\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)\right) + \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial v}\right) = 0,$$

worin der Factor von $\varphi(S)$ als Ausdruck des zweiten Hauptsatzes von selbst Null ist. Bei der Substitution hat man natürlich zu beachten, dass wegen

$$dQ = \theta dS$$

auch

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) \text{ und } \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial v}\right),$$

geschrieben werden muss, und dass $\frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial v}$ und $\frac{\partial^2 W}{\partial v \partial \theta}$ laut der Bedeutung der äusseren Arbeit einander nicht gleich sind.

Da $\mathfrak{E}$ wenigstens für die Volumeneinheit mit $\mathit{\Lambda}$ identisch wird, so kann mit Rücksicht auf das Draper'sche Gesetz gesagt werden, dass die Entropie eine Function der Variabeln $\mu\theta$ ist, wie dies andeutungsweise schon öfters auftrat.

Ganz dieselbe Gleichung kann nun auf verschiedenen Wegen erlangt werden. Betrachtet man $\mathfrak{E}$ als die in der Zeiteinheit durch Strahlung abgegebene Wärme, so wird

$$-\mathfrak{E}dt = dU + dW$$

Da nun die Zeit unbedingt als Function der durch die Strahlung veränderten Temperatur und Dichte aufgefasst werden kann, so muss — wie früher — $\mathfrak{E}$ ein integrierender Divisor der ersten Hauptgleichung sein. Ebenso könnte $\mathfrak{E}$ als die von der Oberflächeneinheit ausgestrahlte Wärmemenge betrachtet werden, was zu demselben Schlusse führt, und die Gleichung zugleich von der Form der Lichtquelle unabhängig macht.

Das abgeleitete Resultat ist durchaus allgemein, selbst der Ausdruck der äusseren Arbeit erscheint unter allgemeinerer Form, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt, da man überall gleichen, auf die Oberfläche normal gerichteten Druck annimmt.

Die einzige Frage bezieht sich nun noch auf die Bestimmung der Function $\varphi(S)$.

Auch hiefür lassen sich zwei Wege angeben; der eine ist jedenfalls lückenhaft und — insoferne er sich nur auf ideale Gase bezieht — auch einseitig. Da er aber umgekehrt vielleicht einiges Licht auf Dissociationsvorgänge werfen könnte, soll er wenigstens angedeutet werden.

α) **Dissociationsvorgänge als bestimmend für die Entropiefunction.**

Das Volumen v eines Gases enthalte N Molekeln, jede zu V_0 Atomen. Die Gesammtzahl der Atome beträgt hiernach NV_0 und bleibt auch während der Dissociation dieselbe. Zerfallen nun in irgend einem Stadium der Dissociation x Molekeln in V-atomige Molekeln, so bleiben $N—x$ Molekeln mit den ursprünglich V Atomen und $\frac{V_0}{V}x$ Molekeln mit je V Atomen. Die Gesammtzahl der Molekeln ist also $N+\left(\frac{V_0}{V}-1\right)x$, und die mittlere Atomzahl der einzelnen Molekeln

$$n=\frac{NV_0}{N+\left(\frac{V_0}{V}-1\right)x},$$

welche Zahl bei fortschreitender Dissociation stetem Wachsthum unterworfen ist.

Ein bekannter Satz der kinetischen Gastheorie liefert durch Vergleichung der Atom- und Molekularenergie die bemerkenswerthe Beziehung, nach welcher das Verhältniss der specifischen Wärmen bei constantem Drucke und Volumen für ein n-atomiges Gas durch

$$k=\frac{2n+3}{2n+1},$$

ausdrückbar ist, wonach

$$k-1=\frac{2}{2n+1}$$

wird. Während der Dissociation kann k als stetig veränderlich betrachtet werden, so dass dessen Werth nach dem Vorigen

$$k-1=\frac{2\left(N+\left(\frac{V_0}{V}-1\right)x\right)}{N(2V_0+1)+\left(\frac{V_0}{V}-1\right)x}$$

ist. In ähnlicher Weise verändert sich auch das Volumen. Nach der AVOGADRO'schen Regel ist die Beziehung zwischen dem Anfangs-Volumen v und dem variabelen Volumen v' gegeben durch

$$v'=v\left(1+\left(\frac{V_0}{V}-1\right)\frac{x}{N}\right).$$

Die Entropie hängt bei gasförmigen Stoffen lediglich von dem Argumente Θv^{k-1} ab, und daher kann die während des ganzen Dissociationsprocesses ausgestrahlte Intensität $[\mathfrak{E}]$ in der Form

$$[\mathfrak{E}]=\Theta\int\limits_0^1\varphi\left(\Theta\left(v\left(1+\left(\frac{V_0}{V}-1\right)\xi\right)\right)^{2\frac{1+\left(\frac{V_0}{V}-1\right)\xi}{2V_0+1+\left(\frac{V_0}{V}-1\right)\xi}}\right)d\xi,$$

geschrieben werden, wenn

$$\xi=\frac{x}{N}$$

gesetzt wird. Die Grenzen sind dadurch zu bestimmen, dass bei Beginn der Dissociation $x=0$ ist, während bei beendetem Zerfall aller Molekeln $x=N$ zu nehmen ist.

Die Substitution

$$u=2\frac{1+\left(\frac{V_0}{V}-1\right)\xi}{2V_0+1+\left(\frac{V_0}{V}-1\right)\xi}$$

liefert das einfache Resultat

$$[\mathfrak{E}]=\frac{4V_0}{\frac{V_0}{V}-1}\,\Theta\int\limits_{\frac{2}{2V_0+1}}^{\frac{2}{2V+1}}\varphi\left(\Theta\left(\frac{2V_0vu}{2-u}\right)^u\right)\frac{du}{(2-u)^2}.$$

Wenn daher ein zweiatomiges Gas durch Dissociation in einatomige Molekeln zerfällt, so ist $V_0=2$, $V=1$, und die während der Dissociation ausgestrahlte Totalintensität wird

$$[\mathfrak{E}] = 8\theta \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{2}{3}} \varphi\left(\theta\left(\frac{4vu}{2-u}\right)^u\right) \frac{du}{(2-u)^2}.$$

Da der Werth von $[\mathfrak{E}]$ während des Zerfalls beobachtet werden kann, und wenigstens Anfangs-, Mittel- und Endtemperatur der Dissociation als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, so kann die Function φ obwohl nicht ohne Schwierigkeiten bestimmt werden.

Es giebt aber zur Bestimmung dieser Function noch einen verlässlicheren Weg. Immerhin mag der jetzt bezeichnete unter Benützung der abzuleitenden Formeln einigen Nutzen für das Studium der Dissociation bedeuten. Einen hieher weisenden Fingerzeig enthielt schon die eine Constante der Balmer'schen Formel.

β) Bestimmung der Entropiefunction durch das Massenintegral.

Der jetzt einzuschlagende Weg zur Bestimmung der Entropiefunction scheint, weil frei von hypothetischen Voraussetzungen, der sicherste zu sein.

Wir denken uns zwei gleiche Körper, die aus demselben Stoffe bestehen, sich in demselben Zustande befinden, und dieselbe Gestalt besitzen. Das Volumen des einen Körpers sei als Einheit genommen, die linearen Abmessungen des zweiten seien die n-fachen. Dann ist die Oberfläche desselben n^2-, die Masse und Entropie n^3-mal grösser. Infolge dessen bestehen die beiden Gleichungen:

$$\Lambda = \theta\varphi(S),$$

und

$$\frac{4}{\pi} mHn^2 \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2}\left(1-\left(1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right)^n\right) d\lambda = \theta\varphi(n^3 S),$$

insofern in diesem Falle das Schichtengesetz mit vollem Rechte angewendet werden darf. Der Nichtproportionalität von Masse und Strahlung entspricht jener bekannte Satz, dass eine grössere Masse langsamer auskühlt. Der absolut schwarze Körper gelangt natürlich eben durch die Anwendung des Schichtensatzes in das Problem, denn es ist das aus n Schichten kommende Licht bekanntlich durch

$$E\frac{1-(1-a)^n}{a} = e(1-(1-a)^n)$$

gegeben. Da der absolut schwarze Körper schon in unendlich dünner Schichte dasselbe Spektrum liefert, wie bei endlicher Dicke, so ist die Proportionalität der Emission mit der Oberfläche, also mit n^2 in voller Strenge. Bei andern Körpern werden die Verhältnisse schon sehr verwickelt, wie man sich leicht überzeugt, wenn man die Emission einer Gaskugel selbst unter sehr vereinfachenden Umständen berechnet.

Da das vorher aufgeschriebene Integral, das kurz Massenintegral genannt werden dürfte, häufig vorkommt, dürften einige Bemerkungen über die Reduction desselben am Platze sein. Es sei also

$$N = \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2}\left(1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right)^n d\lambda,$$

so wird

$$\mathfrak{E} = n^2\left(H-\frac{4}{\pi}\,mHN\right).$$

Die Substitution

$$\frac{\mu^2}{m^2} = a, \quad x = a\,\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}$$

führt zu der Gleichung

$$N = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2m(1-a)}\int_a^1 \sqrt{\frac{1-x}{x-a}}\,\frac{(1-x^2)^n}{x^2}\,dx.$$

Schreibt man nun weiter,

$$\frac{1-x}{x-a} = \mathrm{tg}^2 u,$$

so wird

$$N = 2^n\,\frac{(1-a)^n a^{\frac{3}{2}}}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+2}u\left(1-\frac{1-a}{2}\sin^2 u\right)^n}{(1-(1-a)\sin^2 u)^2}\,du$$

was durch Gammafunctionen in unendlicher Reihe ausdrückbar ist.

Das vorhergehende Integral kann nach Ausführung einer leichten Integration in der Form

$$n^2 H\left(1-\frac{4}{\pi}m\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2}\left(1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right)^n d\lambda\right)=\Theta\varphi(n^3 S)$$

geschrieben werden, und da sich H auf den mit dem gegebenen Körper gleichtemperierten absolut schwarzen Körper bezieht, ist

$$H=\frac{m^3}{\mu^3}\Lambda=\frac{m^3}{\mu^3}\Theta\varphi(S),$$

und in Folge dessen

$$n^2\frac{m^3}{\mu^3}\varphi(S)\left(1-\frac{4}{\pi}m\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2}\left(1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right)^n d\lambda\right)=\varphi(n^3 S),$$

woraus nun leicht eine Differentialgleichung für $\varphi(S)$ abgeleitet werden kann.

Setzt man

$$\frac{\lambda}{m}=x,$$

und zur weiteren Abkürzung

$$\frac{m}{\mu}=q,$$

so erhält man

$$n^2 q^3\varphi(S)\left(1-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\left(1-\left(\frac{1+x^2}{1+q^2x^2}\right)^2\right)^n dx\right)=\varphi(n^3 S)$$

welche Gleichung offenbar für ein jedes beliebige n giltig ist. Differentiiert man demgemäss nach n, so kommt

$$2nq^3\varphi(S)\left(1-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\left(1-\left(\frac{1+x^2}{1+q^2x^2}\right)^2\right)^n dx\right)-$$

$$-\frac{4}{\pi}n^2q^3\varphi(S)\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\left(1-\left(\frac{1+x^2}{1+q^2x^2}\right)^2\right)^n\cdot$$

$$\mathrm{l.}\left(1-\left(\frac{1+x^2}{1+q^2x^2}\right)^2\right)dx=3n^2S\varphi'(n^3S),$$

und diese Gleichung bleibt auch dann noch bestehen, wenn $n=1$ gesetzt wird. Dies giebt

$$2q^3\varphi(S)\left(1-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\left(1-\left(\frac{1+x^2}{1+q^2x^2}\right)^2\right)dx\right)-$$

$$-\frac{4}{\pi}q^3\varphi(S)\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\left(1-\left(\frac{1+x^2}{1+q^2x^2}\right)^2\right)\cdot$$

$$\mathrm{l.}\left(1-\left(\frac{1+x^2}{1+q^2x^2}\right)^2\right)dx=3S\varphi'(S),$$

und stellt schon die gesuchte Differentialgleichung für $\varphi(S)$ dar.

Da die Werte der in der ersten Reihe stehenden Integrale einfach

$$\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{4}\quad\text{und}\quad\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+q^2x^2)}dx=\frac{\pi}{4q^3},$$

sind, so wird die Gleichung etwas einfacher

$$2\varphi(S)-\frac{4}{\pi}q^3\varphi(S)\left(\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{l.}\left(1-\left(\frac{1+x^2}{1+q^2x^2}\right)^2\right)dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+q^2x^2)^2}\,\mathrm{l.}\left(1-\left(\frac{1+x^2}{1+q^2x^2}\right)^2\right)dx\right)=3S\varphi'(S).$$

Schreibt man nun

$$u(p)=\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+p^2x^2)^2}\,\mathrm{l.}\left(1-\left(\frac{1+x^2}{1+q^2x^2}\right)^2\right)dx,$$

so erhält man die einfache Gleichung

$$2\varphi(S)-\frac{4}{\pi}q^3\varphi(S)(u(1)-u(q))=3S\varphi'(S),$$

so dass wir uns im Folgenden nur mit dem Integrale

$$\omega(p,r,s)=\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+p^2x^2)^2}\,\mathrm{l.}\,(r+sx^2)\,dx$$

zu beschäftigen haben. Ist dies berechnet, so wird

$$u(p)=\omega(p,0,2(q^2-1))+\omega\left(p,1,\frac{q^2+1}{2}\right)-2\omega(p,1,q^2),$$

da ja $u(p)$ in die Form

$$u(p)=\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+p^2x^2)^2}\Big(\mathrm{l.}\,2(q^2-1)+\mathrm{l.}\,x^2+$$
$$+\,\mathrm{l.}\left(1+\frac{q^2+1}{2}x^2\right)-2\,\mathrm{l.}\,(1+q^2x^2)\Big)$$

gebracht werden kann.

Differentiirt man das bestimmte Integral $\omega(p,r,s)$ nach dem Parameter s, so kommt

$$\frac{\partial\omega(p,r,s)}{\partial s}=\int_0^\infty\frac{x^4}{(1+p^2x^2)^2(r+sx^2)}\,dx,$$

das leicht berechnet werden kann.

Schreibt man

$$\frac{1}{(1+p^2x^2)^2(r+sx^2)}=\frac{A}{(1+p^2x^2)^2}+\frac{B}{1+p^2x^2}+\frac{C}{r+sx^2},$$

wo

$$A=\frac{p^2(rp^2-s)}{(s-rp^2)^2},\qquad B=-\frac{p^2s}{(s-rp^2)^2},\qquad C=\frac{s^2}{(s-rp^2)^2},$$

so gelangt man zu der einfachen Gleichung

$$\frac{\partial\omega(p,r,s)}{\partial s}=\frac{\pi}{2}\left(C\frac{r}{s^2}\sqrt{\frac{r}{s}}+\frac{B}{p^5}-\frac{3}{2}\frac{A}{p^5}\right),$$

welche mit Rücksicht auf die Werthe von A, B, C, in

$$\frac{\partial\omega(p,r,s)}{\partial s}=\frac{\pi}{2(s-rp^2)^2}\left(r\sqrt{\frac{r}{s}}-\frac{s}{p^3}-\frac{3}{2p^3}(rp^2-s)\right)$$

übergeht.

Integriert man nun wieder nach s, so kommt

$$\omega(p,r,s)=\text{Const.}+\frac{\pi\sqrt{r}}{2p^2}\left(\frac{1}{2p\sqrt{r}}\,\text{l.}\,\frac{p\sqrt{r}+\sqrt{s}}{p\sqrt{r}-\sqrt{s}}-\frac{\sqrt{s}}{s-rp^2}\right)-$$
$$-\frac{\pi r}{2p(rp^2-s)}+\frac{\pi}{4p^3}\,\text{l.}\,(rp^2-s),$$

und die Constante bestimmt sich aus der Bemerkung, dass für $s=0$

$$\omega(p,r,o)=\text{l.}\,r\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+p^2x^2)^2}\,dx=\frac{\pi}{4p^3}\,\text{l.}\,r$$

wird, was nach einigen Reductionen auf

$$\omega(p,r,s)=\frac{\pi}{2p^3}\left(\frac{p\sqrt{rs}-s}{rp^2-s}-\text{l.}\,p+\text{l.}\,(p\sqrt{r}+\sqrt{s})\right)$$

hinführt.

Bildet man demgemäss die einzelnen Bestandtheile von $u(p)$, so erhält man

$$\omega(p,0,2(q^2-1))=\frac{\pi}{2p^3}\left(1-\text{l.}\,p+\frac{1}{2}\,\text{l.}\,(2q^2-2)\right);$$

$$\omega\left(p,\,1,\,\frac{q^2+1}{2}\right)=\frac{\pi}{2p^3}\left(\frac{p\sqrt{\frac{q^2+1}{2}}-\frac{q^2+1}{2}}{p^2-\frac{q^2+1}{2}}-\right.$$
$$\left.-\,\text{l.}\,p+\text{l.}\left(p+\sqrt{\frac{q^2+1}{2}}\right)\right),$$

$$\omega(p,1,q^2)\qquad=\frac{\pi}{2p^3}\left(\frac{q}{p+q}-\text{l.}\,p+\text{l.}\,(p+q)\right),$$

und mit diesen $u(p)$ selbst in der Form

$$u(p) = \frac{\pi}{2p^3}\left(1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,(2q^2-2) + \frac{p\sqrt{\frac{q^2+1}{2}} - \frac{q^2+1}{2}}{p^2 - \frac{q^2+1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \,\mathrm{l.}\left(p + \sqrt{\frac{q^2+1}{2}}\right) - \frac{2q}{p+q} - 2\,\mathrm{l.}\,(p+q)\right).$$

Hierin ist einmal $p=1$, dann $p=q$ zu setzen, und dann sind die Resultate von einander zu subtrahieren.

Dies giebt

$$u(q) = \frac{\pi}{2q^3}\left(\mathrm{l.}\; \frac{\sqrt{q^2-1}\,[\sqrt{2}\,q + \sqrt{q^2+1}]}{4q^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{q\sqrt{2(q^2+1)} - (q^2+1)}{q^2-1}\right),$$

$$u(1) = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{l.}\; \frac{\sqrt{q^2-1}\,(\sqrt{2} + \sqrt{q^2+1})}{(1+q)^2} + \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{q^2+1} - 2q}{1-q^2}\right)$$

und in Folge dessen:

$$u(1) - u(q) = \frac{\pi}{2q^3}\left(q^3\,\mathrm{l.}\; \frac{\sqrt{q^2-1}\,(\sqrt{2} + \sqrt{q^2+1})}{(1+q)^2} - \right.$$

$$- \,\mathrm{l.}\, \frac{\sqrt{q^2-1}\,(\sqrt{2}\,q + \sqrt{q^2+1})}{4q^2} - q^3\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{q^2+1} - 2q}{q^2-1} -$$

$$\left. - \frac{q\sqrt{2}\,\sqrt{q^2+1} - (q^2+1)}{q^2-1}\right).$$

Darnach nimmt unsere Differentialgleichung die folgende Form an:

$$3S\varphi'(S) = 2\varphi(S)\left(-\,q^3\,\mathrm{l.}\; \frac{\sqrt{q^2-1}\,(\sqrt{2} + \sqrt{q^2+1})}{(1+q)^2} + \right.$$

$$+ \,\mathrm{l.}\; \frac{\sqrt{q^2-1}\,(\sqrt{2}\,q + \sqrt{q^2+1})}{4q^2} + q^3\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{q^2+1} - 2q}{q^2-1} +$$

$$\left. + \frac{q\sqrt{2}\,\sqrt{q^2+1} - 2}{q^2-1}\right).$$

Zieht man nun in Betracht, dass

$$q^3 = \frac{m^3}{\mu^3} = \frac{H}{\Lambda}$$

ist, insofern sich m und μ auf zwei gleichtemperierte Körper beziehen, und dass ebenso

$$\Lambda = \theta\varphi(S), \quad H = \theta\varphi(\sigma),$$

geschrieben werden kann, worin σ die auf dieselbe Temperatur bezogene Entropie des absolut schwarzen Körpers bedeutet, so bekommt man

$$\varphi(S) = q^{-3}\varphi(\sigma).$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach q, das in σ nicht enthalten ist, giebt

$$\varphi'(S)\frac{dS}{dq} = -3q^{-4}\varphi(\sigma),$$

und dies in die obige Gleichung eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathrm{l.}\, S = \mathrm{Const.} - \frac{9}{2}\int\frac{dq}{q}\Bigg(&- q^3\,\mathrm{l.}\,\frac{\sqrt{q^2-1}\,(\sqrt{2}+\sqrt{q^2+1})}{(1+q)^2} + \\ &+ \mathrm{l.}\,\frac{\sqrt{q^2-1}\,(\sqrt{2}q+\sqrt{q^2+1})}{4q^2} + q^3\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{q^2+1}-2q}{q^2-1} + \\ &+ \frac{q\sqrt{2}\sqrt{q^2+1}-2}{q^2-1}\Bigg)^{-1}. \end{aligned}$$

Da m stets grösser ist, als μ, schreibt man zweckmässiger

$$x = \frac{\mu}{m} = \frac{1}{q}$$

und gelangt zu folgender Quadratur,

$$\mathrm{l.}\, S = \mathrm{l.}\, S_0 + \frac{9}{2}\int\frac{x^2}{X}\,dx,$$

in welcher die Constante mit l. S_0 bezeichnet ist, und wo kurz

$$X = x^3\,\mathrm{l.}\,\frac{\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2})}{4} -$$
$$-\,\mathrm{l.}\,\frac{\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x)^2} +$$
$$+\frac{1}{1-x^2}\left(\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}\,x(1+x^2)-2x\,(1+x^4)\right)$$

gesetzt wurde.

Dadurch ist die zweite Parametergleichung bestimmt, und wenigstens für Gase aufschreibbar, insoferne für diese

$$S = c_v\,\mathrm{l.}\,(\Theta v^{k-1})$$

zu setzen ist.

γ) Reihenform der zweiten Parametergleichung.

Die Gleichung lässt sich in endlicher Form nicht darstellen, und daher muss man mechanische Quadratur oder Reihenentwickelungen vornehmen.

Im ersteren Falle ist die Einführung von Briggsischen Logarithmen erwünscht. Man schreibt daher

$$\log. S - \log. S_0 + [9{,}928\,7811-10]\int \frac{x^2}{X'}\,dx$$

wo

$$X' = x^3 \log. \frac{\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2})}{4} -$$
$$-\log. \frac{\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x)^2} +$$
$$+\,0{,}434\,2945\,\frac{1}{1-x^2}\left(\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}\,x\,(1+x^2)-2x\,(1+x^4)\right),$$

und die in [ ] stehenden Zahlen schon gewöhnliche Logarithmen bedeuten. Auch kann der Ausdruck zu diesem Zwecke durch die Substitution $x = \operatorname{tang} \varphi$ in eine für numerische Berechnung bequemere Form gebracht werden.

Aber auch die Reihenentwickelung erledigt sich recht einfach. Wir betrachten zu dem Zwecke die einzelnen in X vorkommenden Glieder.

Es ist

$$\mathrm{l.}\,(\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2}) = \varepsilon_0\sqrt{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\varepsilon_1\sqrt{2}x^3-$$

$$-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}\sqrt{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_2)x^5-\frac{1}{6}x^6+\cdots=-\sum_0^\infty\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}+$$

$$+\sqrt{2}\sum_0^\infty\frac{1}{4n+1}(\varepsilon_0+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{2n})x^{4n+1}+$$

$$+\sqrt{2}\sum_0^\infty\frac{1}{4n+3}(\varepsilon_1+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_{2n+1})x^{4n+3},$$

wenn Kürze halber

$$\varepsilon_i=\left(\frac{1}{2}\right)_i$$

den i-ten Binomialcoefficienten von $\frac{1}{2}$ bezeichnet.

Ebenso wird

$$\mathrm{l.}\,(\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2})=\mathrm{l.}\,(1+\sqrt{2})+\frac{1}{2}(\sqrt{2}\varepsilon_0-1)x^2+$$

$$+\frac{1}{4}(\sqrt{2}\varepsilon_1-1)x^4+\frac{1}{6}(\sqrt{2}\varepsilon_2+\sqrt{2}\varepsilon_0-1)+\cdots$$

$$=\sqrt{2}\sum_0^\infty\frac{1}{4n+2}\left(\varepsilon_{2n}+\varepsilon_{2n-2}+\cdots+\varepsilon_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x^{4n+2}+$$

$$+\sqrt{2}\sum_0^\infty\left(\varepsilon_{2n+1}+\varepsilon_{2n-1}+\cdots+\varepsilon_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x^{4n+4};$$

$$\frac{1}{2}\lg(1-x^2)=-\frac{1}{2\cdot1}x^2-\frac{1}{2\cdot2}x^4-\frac{1}{2\cdot3}x^6-\cdots$$

$$2\,\mathrm{l.}\,(1+x)=\frac{2}{1}x-\frac{2}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{4}x^4+\frac{2}{5}x^5-\cdots$$

und, da der Logarithmen nicht enthaltende Ausdruck in X auch

$$\frac{1}{1-x^2}(\sqrt{2}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-2x(1+x^4))=$$

$$=x^3-\frac{2x+x^3+x^5}{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}x(1+x)^{\frac{3}{2}}}{1-x^2}$$

geschrieben werden kann, so ist

$$(2x+x^3+x^5)(1-x^2)^{-1} = 2x+3x^3+4x^5+4x^7+4x^9+4x^{11}+\cdots$$

und endlich

$$\frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\,x(1+(1+\eta_1)x^2+(1+\eta_1+\eta_2)x^4+(1+\eta_1+\eta_2+\eta_3)x^6+\cdots,)$$

wenn auch der i-te Binomialcoefficient von $\frac{2}{3}$ mit

$$\eta_i = \left(\frac{3}{2}\right)_i$$

bezeichnet wird.

Die Vereinigung der einzelnen Ausdrücke giebt

$$X = \left(\frac{7}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3} - 2\,\mathrm{l}.\,2 + \mathrm{l}.\,(1+\sqrt{2})\right)x^3 -$$

$$-\left(4+\frac{6}{2\cdot 5}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 5}(5\varepsilon_2-3(\varepsilon_2+\varepsilon_0))-\sqrt{2}(1+\eta_1+\eta_2)\right)x^5-$$

$$-\left(4+\frac{6}{4\cdot 7}+\frac{\sqrt{2}}{4\cdot 7}(7\varepsilon_3-3(\varepsilon_3+\varepsilon_1))-\sqrt{2}(1+\eta_1+\eta_2+\eta_3)\right)x^7-$$

$$-\left(4+\frac{6}{6\cdot 9}+\frac{\sqrt{2}}{6\cdot 9}(9\varepsilon_4-3(\varepsilon_4+\varepsilon_2+\varepsilon_0))-\right.$$

$$\left.-\sqrt{2}(1+\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4)\right)x^9-$$

$$-\left(4+\frac{6}{8\cdot 11}+\frac{\sqrt{2}}{8\cdot 11}(11\varepsilon_5-3(\varepsilon_5+\varepsilon_3+\varepsilon_1))-\right.$$

$$\left.-\sqrt{2}(1+\eta_1+\cdots+\eta_4+\eta_5)\right)x^{11}-$$

$$-\left(4+\frac{6}{10\cdot 13}+\frac{\sqrt{2}}{10\cdot 13}(13\varepsilon_6-3(\varepsilon_6+\varepsilon_4+\varepsilon_2+\varepsilon_0))-\right.$$

$$\left.-\sqrt{2}(1+\eta_1+\cdots+\eta_5+\eta_6)\right)x^{13}-\cdots$$

$$\cdots-\left(4+\frac{6}{(2i-2)(2i+1)}+\frac{\sqrt{2}}{(2i-2)(2i+1)}((2i+1)\varepsilon_i-3(\varepsilon_i+\right.$$

$$\left.+\varepsilon_{i-2}+\varepsilon_{i-4}+\cdots))-\sqrt{2}(\eta_i+\eta_{i-1}+\eta_{i-2}+\cdots+\eta_1+1)\right)x^{2i+1}-\cdots$$

worin das Bildungsgesetz klar am Tage liegt. Die ersten zwei Potenzen von x fehlen ganz, die paarigen Potenzen fallen ebenfalls aus. Das Integral besitzt daher die Form

$$\mathrm{l.}\, S = \mathrm{l.}\, S_0 + p_0\, \mathrm{l.}\, x + q_2 x^2 + q_4 x^4 + \cdots$$

Da die Werthe von

$$(n) = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2n-1)}{2^n\,.\,n\,!}$$

sich häufig in Tabellen vorfinden, so kann einfach

$$\varepsilon_n = (-1)^{n+1}\frac{(n)}{2n-1}\,, \quad \eta_n = (-1)^n \frac{3\,(n)}{(2n-3)\,(2n-1)}\,,$$

oder auf einander bezogen

$$\eta_n = -\frac{3}{2i-3}\,\varepsilon_i$$

geschrieben werden.

Die Reihe convergiert zwar langsam, kann aber selbst für der Einheit nahe stehende x ganz gut benützt werden. Die Integration ist natürlich erst dann ausführbar, wenn auch der reciproke Werth der Reihe nach wachsenden Potenzen von x entwickelt vorliegt.

Da sämmtliche vorkommenden Reihen auch ausserhalb der Astronomie von Wichtigkeit werden dürften, möge deren Berechnung hier folgen. Für natürliche Lichtquellen ist x stets ein verhältnissmässig kleiner Bruch, die Ausdehnung der Reihe daher für praktische Zwecke genügend weit getrieben. Die in [ ] stehenden Zahlen bedeuten immer gewöhnliche Logarithmen. Die Controllerechnung dieser Reihen verdanke ich L. von Tolnay jr., der ebenfalls so freundlich war, die mühsame Umkehrung der Reihe (auf Seite 46) zu berechnen.

$$\begin{aligned}\frac{X}{x^2} = {} & 1{\cdot}461\,5774\,x - 0{\cdot}074\,5161\,x^3 - 0{\cdot}173\,6752\,x^5 - \\ & - 0{\cdot}025\,6049\,x^7 - 0{\cdot}050\,5292\,x^9 - 0{\cdot}012\,9253\,x^{11} - \\ & - 0{\cdot}023\,4481\,x^{13} - 0{\cdot}007\,8109\,x^{15} - 0{\cdot}013\,4039\,x^{17} - \\ & - 0{\cdot}005\,2404\,x^{19} - 0{\cdot}008\,6322\,x^{21} - 0{\cdot}003\,7651\,x^{23} - \\ & - 0{\cdot}006\,0062\,x^{25} - 0{\cdot}002\,8390\,x^{27} - 0{\cdot}004\,4120\,x^{29} - \\ & - 0{\cdot}002\,2186\,x^{31} - 0{\cdot}003\,3739\,x^{33} - 0{\cdot}001\,7829\,x^{35} - \end{aligned}$$

$$- 0{\cdot}002\,6609\,x^{37} - 0{\cdot}001\,4646\,x^{39} - 0{\cdot}002\,1508\,x^{41} -$$
$$- 0{\cdot}001\,2251\,x^{43} - 0{\cdot}001\,7739\,x^{45} - 0{\cdot}001\,0403\,x^{47} -$$
$$- 0{\cdot}001\,4872\,x^{49} - \cdots$$

$$\frac{X}{x^2} = [0{\cdot}164\,8219]\,x - [8{\cdot}872\,250]\,x^3 - [9{\cdot}239\,738]\,x^5 -$$
$$- [8{\cdot}408\,323]\,x^7 - [8{\cdot}703\,542]\,x^9 - [8{\cdot}111\,441]\,x^{11} -$$
$$- [8{\cdot}370\,108]\,x^{13} - [7{\cdot}892\,701]\,x^{15} - [8{\cdot}127\,231]\,x^{17} -$$
$$- [7{\cdot}71\,936]\,x^{19} - [7{\cdot}93\,612]\,x^{21} - [7{\cdot}57\,578]\,x^{23} -$$
$$- [7{\cdot}77\,860]\,x^{25} - [7{\cdot}45\,301]\,x^{27} - [7{\cdot}64\,464]\,x^{29} -$$
$$- [7{\cdot}34\,608]\,x^{31} - [7{\cdot}52\,813]\,x^{33} - [7{\cdot}25\,113]\,x^{35} -$$
$$- [7{\cdot}42\,503]\,x^{37} - [7{\cdot}16\,572]\,x^{39} - [7{\cdot}33\,260]\,x^{41} -$$
$$- [7{\cdot}08\,817]\,x^{43} - [7{\cdot}24\,893]\,x^{45} - [7.01\,716]\,x^{47} -$$
$$- [7{\cdot}17\,237]\,x^{49} - \cdots$$

$$\mathrm{l.}\,\frac{S}{S_0} = 0{\cdot}684\,1922\,\mathrm{l.}\,x + 0{\cdot}017\,4412\,x^2 +$$
$$+ 0{\cdot}020\,7698\,x^4 + 0{\cdot}003\,3945\,x^6 + 0{\cdot}004\,3969\,x^8 +$$
$$+ 0{\cdot}001\,2925\,x^{10} + 0{\cdot}001\,6127\,x^{12} + 0{\cdot}000\,6281\,x^{14} +$$
$$+ 0{\cdot}000\,7603\,x^{16} + 0{\cdot}000\,3515\,x^{18} + 0{\cdot}000\,4153\,x^{20} +$$
$$+ 0{\cdot}000\,2143\,x^{22} + 0{\cdot}000\,2512\,x^{24} + 0{\cdot}000\,1406\,x^{26} +$$
$$+ 0{\cdot}000\,1629\,x^{28} + 0{\cdot}000\,0965\,x^{30} + \cdots$$

$$\mathrm{l.}\,\frac{S}{S_0} = [9{\cdot}835\,1781]\,\mathrm{l.}\,x + [8{\cdot}24\,158]\,x^2 + [8{\cdot}31\,743]\,x^4 +$$
$$+ [7{\cdot}53\,077]\,x^6 + [7{\cdot}64\,315]\,x^8 + [7{\cdot}11\,142]\,x^{10} +$$
$$+ [7{\cdot}20\,756]\,x^{12} + [6{\cdot}79\,802]\,x^{14} + [6{\cdot}88\,096]\,x^{16} +$$
$$+ [6{\cdot}54\,593]\,x^{18} + [6{\cdot}61\,843]\,x^{20} + [6{\cdot}33\,102]\,x^{22} +$$
$$+ [6{\cdot}39\,994]\,x^{24} + [6{\cdot}14\,792]\,x^{26} + [6{\cdot}21\,186]\,x^{28} +$$
$$+ [5{\cdot}98\,464]\,x^{30} + \cdots$$

$$\log.\,\frac{S}{S_0} = 0{\cdot}684\,1922\,\log.\,x + 0{\cdot}007\,5746\,x^2 + 0{\cdot}009\,0202\,x^4 +$$
$$+ 0{\cdot}001\,4742\,x^6 + 0{\cdot}001\,9096\,x^8 + 0{\cdot}000\,5613\,x^{10} +$$
$$+ 0{\cdot}000\,7004\,x^{12} + 0{\cdot}000\,2728\,x^{14} + 0{\cdot}000\,3302\,x^{16} +$$
$$+ 0{\cdot}000\,1521\,x^{18} + 0{\cdot}000\,1804\,x^{20} + 0{\cdot}000\,0930\,x^{22} +$$
$$+ 0{\cdot}000\,1086\,x^{24} + 0{\cdot}000\,0607\,x^{26} + 0{\cdot}000\,0702\,x^{28} +$$
$$+ 0{\cdot}000\,0416\,x^{30} + \cdots$$

$$\log. \frac{S}{S_0} = [9{\cdot}835\,1781] \log. x + [7{\cdot}87\,936]\, x^2 + [7{\cdot}95\,522]\, x^4 +$$
$$+ [7{\cdot}16\,856]\, x^6 + [7{\cdot}28\,093]\, x^8 + [6{\cdot}74\,923]\, x^{10} +$$
$$+ [6{\cdot}84\,535]\, x^{12} + [6{\cdot}43\,583]\, x^{14} + [6{\cdot}51\,876]\, x^{16} +$$
$$+ [6{\cdot}18\,226]\, x^{18} + [6{\cdot}25\,612]\, x^{20} + [5{\cdot}96\,834]\, x^{22} +$$
$$+ [6{\cdot}03\,595]\, x^{24} + [5{\cdot}78\,295]\, x^{26} + [5{\cdot}84\,620]\, x^{28} +$$
$$+ [5{\cdot}61\,943]\, x^{30} + \cdots$$

Die Reihenentwickelung zeigt sogleich, dass für $x = 0$ wird: $\frac{x^2}{X} = 0$, während

$$x = 1 - \xi$$

für sehr kleine ξ ergiebt:

$$\frac{x^2}{X} = \frac{1 - 2\xi}{1 - \frac{19}{4}\xi - \frac{3}{2}\xi\, \mathrm{l}.\, \xi}$$

woraus $\frac{x^2}{X} = 1$ folgt für $\xi = 0$, das heisst für $x = 1$.

Das Resultat der Integration stellt sich jedenfalls unter der Form dar

$$S = S_0 F(x) = S_0 F\left(\frac{\mu}{m}\right),$$

statt welcher auch

$$S = S_0 F\left(\frac{\mu\theta}{K}\right)$$

geschrieben werden kann. Ersetzt man hier θ durch seinen aus dem Draper'schen Satze folgenden Werth, so hängt die Entropie lediglich von dem Argumente $\Lambda\mu$ ab, das in ähnlicher Beziehung zu dem langwelligen Ende des Spektrums steht, in welcher $\frac{\mu^3}{\Lambda}$ zu dem kurzwelligen stand. Die Ergebnisse der beiden Parametergleichungen lassen sich also in dem eleganten Satze zusammenfassen:

Die Wellenlänge des kurz-, beziehentlich langwelligen Endes des Spektrums ist eine reine Function der absoluten Temperatur, beziehungsweise der Entropie des strahlenden Körpers.

Die Abhängigkeit des Spektrums von Temperatur und Dichte ist durch diesen Satz vollkommen festgestellt. Man erhält durch die Gleichungen

$$\Theta^4 = D\Lambda\mu^{-3} \quad \text{und} \quad S = S_0 F\left(\frac{D^{\frac{1}{4}}}{K}(\Lambda\mu)^{\frac{1}{4}}\right)$$

aus dem Spektrum des Körpers dessen Zustand und die Umkehrung dieser Gleichungen löst die umgekehrte Aufgabe.

Die Umkehrung der zweiten Parametergleichung liefert das folgende Resultat. Setzt man Kürze halber

$$\left(\frac{S}{S_0}\right)^{1\cdot461\,5774} = \sigma,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} x = \sigma \{ 1 & - 0{,}025\,4917\,\sigma^2 - 0{,}028\,7321\,\sigma^4 + 0{,}000\,3204\,\sigma^6 - \\ & - 0{,}002\,1670\,\sigma^8 + 0{,}000\,0819\,\sigma^{10} - 0{,}000\,4466\,\sigma^{12} + \\ & + 0{,}000\,0391\,\sigma^{14} - 0{,}000\,1667\,\sigma^{16} + 0{,}000\,0280\,\sigma^{18} - \\ & - 0{,}000\,0726\,\sigma^{20} + 0{,}000\,0023\,\sigma^{22} - 0{,}000\,0320\,\sigma^{24} - \\ & - 0{,}000\,0107\,\sigma^{28} - \cdots \} \end{aligned}$$

oder die Cœfficienten in gewöhnlichen Logarithmen angesetzt:

$$\begin{aligned} x = \sigma \{ 1 & - [8{,}40\,640]\,\sigma^2 - [8{,}45\,837]\,\sigma^4 + [6{,}50\,567]\,\sigma^6 - \\ & - [7{,}33\,586]\,\sigma^8 + [5{,}91\,328]\,\sigma^{10} - [6.64\,992]\,\sigma^{12} + \\ & + [5{,}59\,218]\,\sigma^{14} - [6{,}22\,194]\,\sigma^{16} + [5{,}44\,716]\,\sigma^{18} - \\ & - [5{,}86\,094]\,\sigma^{20} + [4{,}36\,17]\,\sigma^{22} - [5{,}50\,515]\,\sigma^{24} - \\ & - [5{,}02\,938]\,\sigma^{28} + \cdots \}. \end{aligned}$$

Die Bedeutung von S_0 ist unschwer zu erkennen. Setzt man nämlich $x=1$, das heisst, bringt man den Körper in einen Zustand, in dem er bis auf unendlich Kleines das Spektrum des absolut-schwarzen Körpers giebt, dann wird

$$\log. S = \log. S_0 + 0\cdot0225\ \ldots$$

in welchem jetzt S die Entropie des absolut schwarzen Körpers bedeutet. Ist diese Σ, so hat man

$$\log. S_0 = \log. \Sigma - 0\cdot0225\ \ldots$$

Dies liefert den für die Folge wichtigen Satz, dass — sowie die Constante der ersten Parametergleichung eine reine Zahl ist —

die Constante der zweiten Gleichung eine von Stoffbeschaffenheiten unabhängige Temperaturfunction darstellt.

In der That ist die Zustandsbestimmung auch jetzt nur für Gase möglich, insofern die Entropie als Function der Temperatur und der Dichte noch nicht für beliebige Körper hingeschrieben werden kann.

Betrachtet man nun die abgeleiteten Ausdrücke, so ergiebt sich vor Allem, dass wachsendem x auch wachsende Entropie entspricht. Unter sonst gleichen Umständen wächst also $\frac{\mu}{m}$ zugleich mit der Temperatur. Da aber einzeln sowohl μ als m bei Zunahme der Temperatur abnimmt, so muss m in viel höherem Maasse abnehmen, als μ. Daher kommt es, dass das Intensitätsmaximum der natürlichen Lichtquellen vielleicht ausnahmslos in das sichtbare Spektrum hineinfällt, während das des absolut schwarzen Körpers in den meisten Fällen ausserhalb desselben zu stehen kommt. Das lässt zweifelsohne auf allmälige Gewöhnung des Auges schliessen; ohne diese Annahme wäre die betonte Gesetzmässigkeit unverständliches Spiel blinden Zufalls.

Die gefundenen Gleichungen mögen sogleich zur Dichtebestimmung der Chromosphære herangezogen werden, unter der Voraussetzung, dass der Stoff dieser Hülle aus atmosphærischer Luft besteht. Dann genügen die früher erwähnten Messungen von Vogel und Müller. Für die Luft berechnet sich nach Müller $\mu = 0{\cdot}504$, für die Chromosphære nach Vogel $\mu = 0{\cdot}536$, während die entsprechenden m Weithe 6·960 und 1·163 waren. Schon diese Daten zeigen, um wieviel rascher bei wachsender Temperatur m abnimmt als μ.

Nimmt man als Temperatur der unteren Luftschichten in runder Zahl wieder $\theta = 300^0$ abs. Skale an, so ist das Volumen eines Kilogramms Luft 0·850 m³. Für $k-1 = 0{,}41$ wird hiemit

$$S = \log.(\theta v^{k-1}) = 2{\cdot}4481, \quad \text{und} \quad \log. S = 0{\cdot}3889.$$

Diesem Entropiewerthe entspricht $x = \frac{0{\cdot}504}{6{\cdot}960} = 0{\cdot}0724$ und daher ergiebt unser Integral

$$\log. 0{\cdot}3889 = \log. S_0 - 0{\cdot}7802,$$

woraus

$$\log. S_0 = 1{\cdot}1691$$

folgt. Für die Atmosphære ist ähnlich $x = 0{\cdot}4609$ und daher deren Entropie

$$\log. S = 0{\cdot}9410, \quad S = \log. \theta + (k-1) \log. v = 8{\cdot}7300.$$

Da die absolute Temperatur dieser Hülle schon früher zu 1800^0 gefunden wurde, so beträgt deren Volum per Kilogramm $2{,}25.10^{13}$ m^3, oder die Dichte ist $3{,}77.10^{-10}$ der Luftdichte an der Erdoberfläche. Der Druck in den mittleren Schichten der Chromosphære betrüge $2{,}259.10^{-13}$ Atmosphæren.

Diese Zahlen, deren Umrechnung auf Hydrogen wegen Unkenntniss dessen x Werthes unthunlich ist, erklären zur Genüge, dass die Fraunhofer'schen Linien so ungemein scharf begrenzt sind und keine Spur des Druckes aufweisen. Sie erhärten auch jene Folgerungen, welche P. J. Fényi aus seinen Protuberanzbeobachtungen zieht, wonach sich die Ausbrüche der Sonne in sozusagen absolut leerem Raume abspielen.

Zum Schlusse möge noch bemerkt werden, dass der Bedeutung von x zufolge auch

$$\frac{A}{H} = \frac{n^3}{m^3} = x^3$$

geschrieben werden kann, und dann stellt die zweite Parametergleichung in der Form

$$A = H\sigma^3 (1 - 0{\cdot}025\,4917\,\sigma^2 - \cdots)^3,$$

sogleich eine Ausstrahlungsformel dar, welche bedeutend bessere Resultate zu geben scheint, als die Stefan'sche Formel. Diese giebt nämlich in einer Discussion einer von Draper angestellten Messungsreihe (Stefan: Ueber die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur; Sitzber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien, LXXIX. Bd. II. Abth. 1879) die Fehlerquadratsumme $0{\cdot}3741$, während das erste Glied der neuen Formel diese auf $0{\cdot}1992$ herabdrückt. Die Uebereinstimmung würde eine noch bessere sein, wenn man Mittel hätte auch die Volumänderungen des strahlenden Körpers in Betracht zu ziehen.

Die interessanten Folgerungen der beiden Parametergleichungen für die Astrophysik, die eine ganz neue Methode der Parallaxenbestimmung, der Herleitung der wahren Grösse und Masse der Himmelskörper — selbst planetarischer Nebelflecke — gestatten, muss einer weiteren Abhandlung vorbehalten bleiben.

Jedenfalls ist aber durch die vorstehenden Resultate die Grundlage der theoretischen Astrophysik hergestellt, und die Untersuchungen Zöllner's, Betti's und besonders Ritter's über die Physik gasförmiger Himmelskörper werden mit den Beobachtungen direkt vergleichbar und sind Wegweiser weiterer wichtiger Forschungen geworden. Ganz abgesehen von der Reihenform der zweiten Parametergleichung hatte ich schon Gelegenheit zu bemerken, dass trotz der Einfachheit der Grundprincipien die in der Astrophysik auftretenden Rechnungen genau so verwickelt sein werden, als jene Methoden, deren sich die Astronomie bedient.

Sollten die abgeleiteten Resultate in einem oder dem andern Punkte auch Abänderungen erleiden, soviel glaube ich erreicht zu haben, dass der zur theoretischen Astrophysik hinführende Gedankengang unverkennbar vorgezeichnet ist.

2.

ÜBER MEHRFACHE POLARRECIPROCITÄTEN IN DER EBENE.

Von Dr. JULIUS VÁLYI,

Professor an der Universität zu Klausenburg, corr. Mitgl. d. Akademie.

Vorgelegt der III. Cl. der ungar. Akademie am 17. Oktober 1898.

Aus «Mathematikai és Természettudományi Értesitő» (Math. und Naturwiss. Berichte) Band XV. pp. 399—406.

Wir suchen solche Punkte

$$A_k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

und Geraden

$$a_k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

in der Ebene auf, welche gleichzeitig durch die beiden Polarreciprocitäten

$$\begin{pmatrix} A_k \\ a_k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} A_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix}$$

verbunden werden, wo die Indices mod. r zu nehmen sind.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden, je nachdem die beiden Polarreciprocitäten ein gemeinsames Poldreieck haben oder nicht.

Der erste Fall ist wichtiger. Der dazu gehörige interessanteste Fall führt zum Satze:

ein reguläres r-Eck, und ein damit concentrisches reguläres r-Seit sind r-fach polarreciprok. Die Grundkegelschnitte dieser Reciprocitäten sind concentrische und congruente gleichseitige Hyperbeln.

Der allgemeine Fall ist eine Projection dieses speciellen Falles.

I.

Wenn die beiden Polarreciprocitäten ein gemeinsames Poldreieck haben, wählen wir dasselbe zum Grunde des Coordinatensystems. Wenn beide Reciprocitäten reell sind, so hat dieses Dreieck wenigstens einen reellen Eckpunkt, wenn die Grundkegelschnitte auch beide imaginär wären. Wenn nur ein einziger Eckpunkt reell wäre, wählen wir diesen zum Grundpunkte (0, 0, 1).

Bei einem passend gewählten Einheitspunkt sind die Gleichungen der Grundkegelschnitte

$$x^2+y^2+z^2=0$$
$$\lambda x^2+\mu y^2+z^2=0.$$

Es seien die Coordinaten von

$$A_k, \quad x_k, \quad y_k, \quad 1$$

die Coordinaten von

$$a_k, \quad u_k, \quad v_k, \quad 1.$$

Durch diese Form der Coordinaten haben wir den Fall ausgeschlossen, wo die dritte Coordinate eines Punktes oder einer Geraden Null ist. Wir setzen sogar vorläufig voraus, dass keine der Coordinaten Null ist.

Die beiden Polarreciprocitäten werden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_k &= x_k & v_k &= y_k \\ u_{k+1} &= \lambda x_k & v_{k+1} &= \mu y_k \end{aligned} \qquad 1)$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

ausgedrückt.

Hieraus

$$x_{k+1}=\lambda x_k \qquad y_{k+1}=\mu y_k$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

Durch Multiplikation der k ersten Gleichungen ist

$$x_k=\lambda^k x_0 \qquad y_k=\mu^k y_0,$$

und durch Multiplikation der sämmtlichen r Gleichungen

$$\lambda^r=1 \qquad \mu^r=1,$$

also sind λ und μ r-te Einheitswurzeln. Es sei ε eine primitive r-te Einheitswurzel und

$$\lambda = \varepsilon^{\xi} \qquad \mu = \varepsilon^{\eta}$$

wo ξ, η ganze Zahlen sind. Dann sind die Coordinaten:

$$\begin{aligned} x_k &= \varepsilon^{k\xi} . x_0 = u_k \\ y_k &= \varepsilon^{k\eta} . y_0 = v_k \end{aligned} \qquad 2)$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

Die Punkte und Geraden sind verschieden, wenn die Zahlen ξ, η, r keinen gemeinsamen Theiler haben.

Aus den Gleichungen 2) sieht man, dass die Punkte A_k und die Geraden a_k ausser den vorausgesetzten beiden Polarreciprocitäten auch noch durch die Polarreciprocitäten

$$\begin{pmatrix} A_k \\ a_{k+h} \end{pmatrix} \quad (h=2, 3, \ldots, r-1)$$

verbunden werden. Die Polarreciprocität ist also r-fach. Die Grundkegelschnitte sind:

$$\varepsilon^{h\xi} x^2 + \varepsilon^{h\eta} y^2 + z^2 = 0 \qquad 3)$$
$$(h=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

Aus den Gleichungen 2) ist es auch ersichtlich, dass die Projectionen der Punkte A_k aus den Grundpunkten (1, 0, 0) und (0, 1, 0) auf die gegenüberliegenden Grundgeraden je einer r-ade in linearer Punktreihe * bilden, deren Grundpunkte in die Grundpunkte des Coordinatensystems fallen. Weil die Grundpunkte einer reellen r-ade imaginär sind, können die Punkte A_k nur dann sämmtlich reell sein, wenn zwei Eckpunkte des gemeinsamen Poldreiecks [die Punkte (1, 0, 0) und (0, 1, 0)] conjugiert complex sind.

Ein Coordinatensystem mit solchen Grundpunkten kann immer so eingerichtet werden, dass die beiden ersten Coordinaten irgend eines reellen Punktes conjugiert complex und die dritte Coordinate reell sei. Die Punkte A_k sind also sämmtlich reell,

* Über die mehrfachen Involutionen. (Im XIII. Bande dieser Berichte. Seite 244.)

wenn x_0, y_0 conjugiert complex und

$$\eta = -\xi.$$

ist.

Die Zahlen ξ, η, r hatten keinen gemeinsamen Theiler, in diesem Falle ist also ξ relativ prim zu r, folglich ist ε^{ξ} selbst eine primitive r-te Einheitswurzel. Bezeichnen wir dieselbe mit ε. Dann sind die Coordinaten

$$\begin{aligned} x_k &= \varepsilon^k \ x_0 = u_k \\ y_k &= \varepsilon^{-k} y_0 = v_k , \\ & {\scriptstyle (k=0,\,1,\,\ldots\,,\,r-1)} \end{aligned} \tag{4}$$

aus diesen folgt:

$$x_k \cdot y_k = x_0 y_0 , \quad {\scriptstyle (h=0,\,1,\,2,\,\ldots\,,\,r-1)}$$

die Punkte A_k bilden also eine r-ade auf einem Kegelschnitte,* deren Grundpunkte $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ sind.

Die Grundkegelschnitte der Polarreciprocitäten sind:

$$\varepsilon^h x^2 + \varepsilon^{-h} y^2 + z^2 = 0 \quad {\scriptstyle (h=0,\,1,\,2,\,\ldots\,,\,r-1)} \tag{5}$$

für alle diese sind die Punkte $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ conjugiert.

Derjenige Fall ist der interessanteste, wo die Punkte $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ in die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene fallen. Dann bilden die Punkte A_k ein reguläres r-Eck, und die Geraden a_k ein damit concentrisches reguläres r-Seit. Die Grundkegelschnitte der Polarreciprocitäten sind gleichseitige Hyperbeln, weil für sie die unendlich fernen Kreispunkte conjugiert sind.

Aus der Gleichung 5 ist es auch ersichtlich, dass diese Hyperbeln aus einer derselben durch Drehung um das Centrum mit den Winkeln $\frac{h\pi}{r}$ $(h = 1, 2, \ldots r-1)$ entstehen.

Auf ein gewöhnliches rechtwinkliges Coordinatensystem führt uns die Transformation

---

* Über die mehrfachen Involutionen. (Berichte. Band XIII. Seite 254).

$$x = X + yi$$
$$y = X - yi$$
$$z = 1$$

Es ist zu bemerken, dass die Reciprocität mit der gleichseitigen Hyperbel

$$X^2 - Y^2 - \rho^2 = 0$$

als Grundkegelschnitt, ein auf die x-Achse bezügliches Spiegelbild derjenigen Polarreciprocität ist, welche durch den Kreis

$$X^2 + Y^2 - \rho^2 = 0$$

erzeugt wird.

Hiernach ist leicht zu beweisen, dass ein reguläres r-Eck und ein reguläres r-Seit mit denselben Centrum (C) r-fach polarreciprok sind.

Denn wählen wir einen solchen Kreis mit dem Centrum C und mit dem Radius ρ, für welchen das polarreciproke des gegebenen regulären r-Ecks mit den gegebenen regulären r-Seit congruent sei. Wählen wir jetzt ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte C, so, dass unter den beiden regulären r-Seiten das eine das auf die x-Achse bezügliche Spiegelbild des anderen sei.

Dann sind die gleichseitigen Hyperbeln, welche aus der Hyperbel

$$X^2 - Y^2 - \rho^2 = 0$$

durch Drehung um den Punkt C mit den Winkeln

$$\frac{h\pi}{r} \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

entstehen, die Grundkegelschnitte derjenigen Polarreciprocitäten, welche das gegebene reguläre r-Eck mit dem gegebenen regulären r-Seit verbinden.

Man sieht auch leicht, dass im Falle, wo die Geraden, welche die Punkte A_k mit dem Punkte C verbinden, auf die Geraden a_k senkrecht stehen, bei einem ungeraden r noch eine auf einen reellen oder imaginären Kreis bezügliche Polarreciprocität auftritt. Wenn r gerade ist, so entstehen noch zwei Polarreciprocitäten, deren eine sich auf einen reellen, die andere auf einen imaginären Kreis bezieht.

*

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die sämmtlichen Coordinaten der Punkte und Geraden von Null verschieden seien. Wenn eine der Coordinaten (z. B. eine erste Coordinate) Null ist, dann müssen nach der ersten Gruppe der Gleichungen 1 die sämmtlichen ersten Coordinaten verschwinden. Die zweite Gruppe der Gleichungen 1 zeigt, dass die Punkte A_k eine r-ade in einer linearen Punktreihe, die Geraden a_k eine r-ade in einem Strahlenbüschel bilden. Die Reciprocität unter ihnen ist auch jetzt r-fach.

II.

Zwei Polarreciprocitäten haben dann kein gemeinsames Poldreieck, wenn ihre Grundkegelschnitte sich in einem Punkte berühren.

Wenn die Berührung von erster Ordnung ist, so sind die Gleichungen dieser Kegelschnitte bei einem passend gewählten Coordinatensystem

$$x^2+2yz+z^2=0$$
$$\lambda x^2+2yz+\lambda z^2=0.$$

Der Berührungspunkt ist (0, 1, 1), die dazu gehörige gemeinsame Tangente (0, 0, 1).

Es seien die Coordinaten von

$$A_k \quad x_k \quad y_k \quad 1$$

die Coordinaten von

$$a_k \quad u_k \quad 1 \quad w_k .$$

Die beiden Polarreciprocitäten sind ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} u_k = x_k & w_k = y_k+1 \\ u_{k+1} = \lambda x_k & w_{k+1} = y_k+\lambda \end{array} \qquad 6)$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

Aus der zweiten Gruppe folgt:

$$\lambda - 1 = y_{k+1} - y_k$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

und durch Addition dieser Gleichungen:

$$r(\lambda - 1) = 0,$$

was unmöglich ist, denn wenn $\lambda = 1$ wäre, müssten die beiden Polarreciprocitäten identisch sein.

Es ist also unmöglich, dass die dritte Coordinate jedes Punktes, und die zweite Coordinate jeder Geraden von Null verschieden sei, wie es nach der oben gewählten Form der Coordinaten vorausgesetzt wurde.

Es folgt aber aus den beiden vorausgesetzten Polarreciprocitäten, dass wenn eine dieser Coordinaten verschwindet, auch die übrigen verschwinden.

Es seien also jetzt die Coordinaten von

$$A_k, \quad x_k, \quad 1, \quad 0$$

die Coordinaten von

$$a_k, \quad u_k, \quad 0, \quad 1.$$

Die beiden Polarreciprocitätien sind ausgedrückt durch

$$\begin{aligned} u_k &= x_k \\ u_{k+1} &= \lambda x_k, \end{aligned}$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

Aus diesen

$$x_k = \lambda^k x_0 = u_k,$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

wo λ eine r-te Einheitswurzel ist.

Also bilden die Punkte A_k eine r-ade auf der Geraden (0, 0, 1), und die Geraden a_k eine r-ade um den Punkt (0, 1, 0), Die Polarreciprocität unter ihnen ist r-fach. Wenn die Berührung der Grundkegelschnitte von höherer Ordnung ist, so sind ihre Gleichungen bei einem passend gewählten Coordinatensystem

$$x^2 + 2yz = 0$$
$$x^2 + 2yz + 2\lambda xz + \mu z^2 = 0.$$

Der Berührungspunkt ist (0, 1, 0), die dazu gehörige gemeinsame Tangente (0, 0, 1). Die Berührung ist von zweiter Ordnung, wenn λ nicht gleich Null ist, von dritter Ordnung, wenn $\lambda = 0$ ist.

Es seien wieder die Coordinaten von

$$A_k, \quad x_k, \quad y_k, \quad 1$$

die Coordinaten von

$$a_k, \quad u_k, \quad 1, \quad w_k.$$

Die beiden Polarreciprocitäten sind ausgedrückt durch

$$\begin{array}{ll} u_k \;\;\;\, = x_k & w_k \;\;\;\, = y_k \\ u_{k+1} = x_k + \lambda & w_{k+1} = y_k + \lambda x_k + \mu. \end{array}$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

Hieraus

$$x_{k+1} - x_k = \lambda \qquad y_{k+1} - y_k = \lambda x_k + \mu$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

Wenn man beide Gruppen einzeln addiert

$$r\lambda = 0 \qquad \lambda \Sigma x_k + r\mu = 0$$

woraus $\lambda = \mu = 0$, also sind die beiden Polarreciprocitäten identisch.

Aus den beiden vorausgesetzten Polarreciprocitäten folgt wieder, dass die dritte Coordinate der Punkte A_k und die zweite Coordinate der Geraden a_k verschwindet.

Es seien also jetzt die Coordinaten von

$$A_k, \quad x_k, \quad 1, \quad 0$$

die Coordinaten von

$$a_k, \quad u_k, \quad 0, \quad 1.$$

Die beiden Polarreciprocitäten sind ausgedrückt durch

$$u_k = x_k$$
$$(1 + \lambda x_k)\, u_{k+1} = x_k$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

hieraus

$$(1 + \lambda x_k)\, x_{k+1} = x_k \tag{7}$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

Hieraus sieht man, dass die Grössen x sämmtlich verschwinden, wenn auch nur eins unter ihnen verschwindet.

Wenn λ nicht Null ist, so gibt es keine andere Lösung. Denn wenn die sämmtlichen x von Null verschieden sind, so folgt aus der Gleichung 7.

$$\lambda = x_{k+1}^{-1} - x_k^{-1}$$
$$(k=0, 1, \ldots, r-1)$$

und durch Addition derselben:

$$r\lambda = 0$$

Und wenn $\lambda = 0$, zeigen die Gleichungen 7, dass die Punkte A_k in einen Punkt der Geraden (0, 0, 1) und die Geraden a_k in eine Gerade des Punktes (0, 1, 0) zusammenfallen.

Eine eigentliche mehrfache Polarreciprocität ist also bei in höherer Ordnung sich berührenden Kegelschnitten unmöglich.

3.

DIE JÜNGEREN TERTIÄRBILDUNGEN DES SIEBENBÜRGISCHEN BECKENS.

Vom ord. Mitgl. der ungar. Akad. ANTON KOCH.

Gelesen in der Sitzung d. ung. Akademie der Wiss. vom 14. Nov. 1898.

Aus «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Math. und Naturw. Anzeiger) Band XVI. pp. 421—436.

Im Jahre 1879 erhielt ich von der math. naturwiss. Commission d. ung. Akademie d. Wissensch. den Auftrag, ein ausführliches Werk unter dem Titel «Studien über die Tertiärbildungen Siebenbürgens» zu schreiben. Nach langjährigen, eingehenden Vorarbeiten erschien der erste Theil meiner Arbeit «Die Tertiärbildungen des Beckens der siebenbürgischen Landestheile. I. Theil. Palæogene Abtheilung» im X. Bande des Jahrbuches der kgl. ung. geologischen Anstalt, mit Unterstützung der ung. Akademie, in ungarischer und deutscher Sprache.

Indem ich nun den zweiten Theil dieser meiner Arbeit vorlege, beehre ich mich den Inhalt derselben in seinen Hauptzügen bekannt zu geben. Der Titel dieser Arbeit ist: «Die Tertiärbildungen des Beckens der siebenbürgischen Landestheile. II. Neogene Abtheilung.» Beigegeben sind dem Werke drei Tafeln mit geologischen Durchschnitten, eine Karte, und 50 Textabbildungen.

Die Arbeit beginnt mit einer kurzen Einleitung, in welcher ich die neuere Eintheilung der jüngeren Tertiärbildungen des siebenbürgischen Beckens motivierend mittheile. Diese lautet wie folgt.

Der im Jahre 1894 erschienene erste Theil (Palæogene Abtheilung) dieses Werkes war schon gedruckt, als die wichtige Abhandlung* von Theod. Fuchs «Tertiärfossilien aus den kohlenführenden Miocæn-Ablagerungen der Umgebung von Krapina und Radoboj und über die Stellung der sogenannten «Aquitanischen Stufe» ebenda erschien und in meine Hände gelangte. In dieser Abhandlung hatte dieser gründliche Kenner der Tertiärbildungen, nach eingehender und kritischer Untersuchung neuerer und schon bekannter älteren Daten überzeugend nachgewiesen, dass die durch Ch. Mayer eingeführte «Aquitanische Stufe» keineswegs æquivalent mit der deutschen ober-oligocænen Stufe sei, für deren Typus man den Casseler Sand betrachten kann, und dass über diesen Punkt unter den Geologen bisher eine grosse Unklarheit herrschte. Die Bezeichnung «Aquitanische Stufe» wurde von Ch. Mayer auf jene Schichten des Beckens von Bordeaux angewandt, welche zwischen dem Asterienkalke im Liegenden und den Faluns von Saucats und Leognan im Hangenden eingeschaltet sind. Die Fauna dieser Schichten enthält nur 4 % solcher Formen, welche als entschieden oligocæne betrachtet werden können; sie enthält jedoch viele solche Arten, welche auch aus unzweifelhaft oligocænen Schichten bekannt sind. Nach ihrer Fauna sind also die aquitanischen Schichten von Bordeaux miocæne, und zwar die tiefsten miocænen Bildungen.

Dagegen ist in dem Sande von Cassel und in den damit gleichaltrigen ober-oligocænen Schichten die Zahl der miocænen Arten gegen die wirklich oligocænen ganz verschwindend klein und somit kann die Grenze dieser Schichten gegen das Miocæn entschieden und scharf gezogen werden. Fuchs empfahl daher, um Missverständnissen in Zukunft möglichst vorzubeugen, für das Oberoligocæn eine eigene Bezeichnung und schlug den Namen «chattische Stufe» vor.

Fuchs weist in Folge des Gesagten nach, dass die tiefsten, sogenannten Horner-Schichten (Sch. von Molt und Loibersdorf) des Wiener Beckens, die kohlenführenden Schichten der Gegend von Krapina und Radoboj, auf siebenbürgischem Gebiet die Zsilythaler und Koroder Schichten, so wie auch die von mir benannten kohlenführenden «Schichten von Puszta-Szent-Mihály», der unter-

* Jahrbuch der kgl. ung. geologischen Anstalt. X. B. 5 H. Budapest, 1894.

miocænen aquitanischen Stufe angehören; dagegen die ungarischen Pectunculus obovatus-Sande, so wie auch die von Dr. K. Hofmann in nordwestl. Siebenbürgen nachgewiesenen versteinerungsführenden Sandsteine und Thonmergel ohne Zweifel Vertreter der oberoligocænen chattischen Stufe sind.

Indem ich die Richtigkeit der Gründe Th. Fuchs' anerkenne, muss ich nun erklären, dass ich seine Feststellung bezüglich der erwähnten und von mir grösstentheils bereits im I. Theile meines Werkes abgehandelten siebenbürgischen Schichten bereitwillig acceptiere. Schon damals erkannte ich, und das habe ich in meiner dort mitgetheilten Tabelle über die Eintheilung der siebenbürgischen Tertiärschichten auch zum Ausdruck gebracht, dass die «Schichten von Puszta-Szent-Mihály und Sch. v. Magyar-Nagy-Zsombor» ihren Faunulen nach, mit den Zsilythaler Schichten æquivalent seien; nicht zugleich aber die daselbst ebenfalls in die aquitanische Stufe gestellten Fellegvárer und Forgácskuter Schichten», indem ich diese mit den, im nördlichen Theile Siebenbürgens entwickelten, zweifellos oligocænen Meeresablagerungen gleichgestellt habe. Über die gewöhnlichste Form ihrer Faunulen, die Cyrena, habe ich ebenfalls bemerkt, dass diese in Betracht ihrer grossen Gestalt und der Abrundung des Rückenkiels, von der Cyr. semistriata Desh. der oligocænen Schichten entschieden abweicht; ich habe jedoch nur die in den Schichten von P.-Szt.-Mihály vorkommende Art mit Cyr. Brongniarti Bast., dieser Leitmuschel des südfranzösischen Aquitanien und mit der Zsilythaler Cyr. gigas Hofmann identificiert, während ich Zweifel hegte, ob auch die in den Schichten von M.-N.-Zsombor vorkommende Form hieher bezogen werden könne. Jetzt muss ich zugeben, dass auch die Cyrena der Schichten von M.-N.-Zsombor in den Formkreis der Brongniarti gehört und da die Bestimmung der damit noch aufgezählten Arten (Natica crassatina? Psammobia aquitanica May. aff.) unsicher ist, besteht auch bezüglich der Fauna kein zwingender Grund, dass man die Schichten von M.-N.-Zsombor in die deutsche ober-oligocæne Stufe verlegen müsse.

Nachdem also auch das Aquitanien noch in das unterste Miocæn gehört, ist es evident, dass man dasselbe in die, im weiteren Sinne gefasste «untere oder I. mediterrane Stufe» Suess' einverleiben muss. Da ich jedoch bloss die Schichten von P.-Szt.-Mihály und von M.-N.-Zsombor für Aquitanien nehme, so muss man auch für die darüber lagernden Schichten von Korod und von Hidalmás einen gemeinsamen Sammelnamen annehmen. Ich will dafür auf Anrathen des Herrn TH. FUCHS das durch CH. DEPÉRET * in Vorschlag gebrachte «Burdigalien» gebrauchen.

Für die neogene Abtheilung unserer Tertiärschichten wird also die Eintheilung, entgegen der im I. Theile des Werkes gegebenen, folgendermaassen modificiert angenommen:

---

* CH. DEPÉRET. Sur la classification et les parallelismes du système miocène. Bull. Soc. géol. de France 3-e Ser. T. XX. CXLV.

Abtheilung	Serie	Stufe	Schichten und deren Facies-Ausbildungen	Buchstaben-Zeichen	Eruptiv-Gesteine	Buchstaben-Zeichen
Neogen	Pliocaen	Levanteische-	Paludina-	P_2	Basalt und Pyr. Andesit	β. u. α.
		Pontische-	Congerien-	P_1	Pyroxen- u. Amphibol-andesite	α.
	Miocaen	Sarmatische-	Feleker od. Cerithium-	M_{III}.		
		Obere- oder zweite (II) Mediterran-	*a)* Littorale u. Flachsee-Bildungen: Leythakalk, Conglomerat, Sandstein, Sand und Tegel mit vielen Versteinerungen.	M_{II_2}	Quarz-andesit oder Dacit	δ.
			b) Tiefsee-Bildungen: Mezőséger Sch. oder Salzformation, mit spärlichen Petrefacten.	M_{II_1}		
		Untere oder I. Mediterran: Burdigalien-	Sch. v. Hidalmás	M_{I_4}	—	—
			« « Korod	M_{I_3}		
		— Aquitanien	« « P.-Szt-Mih. (Zsilythaler Sch.)	M_{I_2}		
			« « M.-N.-Zsomb. (Zsilythaler Sch.)	M_{I_1}		
Palæogen	Oligocaen	Chattische St.	*Am Westrande des Beckens:* Brackische od. Süsswasser-Facies. *Am Nordrande des Beckens:* Littorale und Tiefsee-Facies u. s. w.	$O_{\mathrm{I-II}}$.	—	—

Hierauf folgt der Ausweis der auf die siebenbürgischen obertertiären Ablagerungen bezüglichen Litteratur, welche im Ganzen 233 Nummern in sich fasst, sowohl in kürzeren-längeren Mittheilungen, als auch in selbstständigen Werken. Diese Litteratur habe ich, ausser meinen eigenen Beobachtungen, in meinem Werke aufgearbeitet.

Es folgt dann die eingehende Beschreibung der siebenbürgischen ober-tertiären Bildungen, nach der am Ende der Einleitung gegebenen Eintheilung, angefangen mit den sedimentären Bildungen. Indem ich die in das Aquitanien zu zählende Schichten von P.-Szt.-Mihály und M.-N.-Zsombor bereits im I. Theile meines Werkes abgehandelt habe, beginne ich die Beschreibung im II. Theile sogleich mit den unter-mediterranen Koroder Schichten. Es werden zuerst die Ausbildungweisen und Verbreitungsverhältnisse der einzelnen Schichtencomplexe ausführlich beschrieben, worauf die vollständigen Listen ihrer bisher bekannten Faunen folgen. Nach meinen Zusammenstellungen sind bisher von verschiedenen organischen Resten nachgewiesen:

in den Schichten von Korod	81	Formen
« « « « Hidalmás	228	«
« « Mezőséger Schichten	116	«
« « thonig-sandigen Schichten der littoralen Facies der ober-mediterr. Stufe	1543	«
im Leythakalk und in den entsprechenden Schichten	172	«
in den sarmatischen Schichten	147	«
« « pontischen Schichten	47	«
« « levantischen Schichten	168	«
im Ganzen also	2502	Formen

verschiedener organischer Reste.

Im II. Haupttheile dieser Arbeit werden die eruptiven Gesteine des Beckens in leicht übersichtlicher Zusammenfassung abgehandelt und zwar in folgenden drei Unterabtheilungen: *a)* Typen und Hauptvarietäten der Tertiär-Erruptivgesteine in petrographischer Hinsicht; *b)* tektonische Verhältnisse derselben, mit Folgerungen auf die Art der Thätigkeit der einstigen Vulkane, *c)* das geologische Alter der eruptiven Gesteine.

Das geologische Alter, nämlich den Zeitpunkt der Eruptionen der im siebenbürgischen Becken auftretenden Gesteinsfamilien konnte ich folgenderweise fixieren. Am ältesten sind die Gesteine der Liparit-Familie, welche am Beginne des mitteloligocænen Zeitalters an die Oberfläche gelangten (wenigstens im nordwestlichen Theile des Beckens). Das Alter der Trachyte (ohne Quarz) konnte zweifellos nicht nachgewiesen werden; es ist jedoch sehr wahrscheinlich, dass selbe der Eruption der Quarztrachyte sogleich nachfolgten, also beinahe ebenso alt sind. Die Eruption der Familie des Quarzandesites oder Dacites begann am Anfang des ober-mediterranen Zeitalters und dauerte mit öfteren Unterbrechungen bis Ende desselben, ja setzte sich im südlichen Theil des Erzgebirges auch noch im sarmatischen Zeitalter fort. Der quarzlose Biotitandesit folgte wahrscheinlich sogleich dem Dacite nach, und zwar bereits im sarmatischen Zeitalter. Der Ausbruch der Amphibol- und Pyroxenandesite ging an den verschiedenen Punkten des Beckenrandes nicht in derselben Zeit vor sich; denn während der Pyroxenandesit des Láposer Gebirges und des Czibles-Stockes wahrscheinlich im sarmatischen Zeitalter an die Oberfläche gelangte, fallen die mächtigsten Andesiteruptionen des Kelemenstockes und Hargitazuges schon in die pontische Zeit und reichen bis in die levantische Zeit hinein. Die Thätigkeit der kleinsten Basaltvulkane endlich, wenigstens gilt das für die Basalte am Altflusse sicher, fällt in die zweite Hälfte des levanteischen Zeitalters hinein.

Zum Schlusse versuche ich, auf Grund der bisher constatierten Thatsachen, den Entwickelungsprocess, das ist die Geschichte des siebenbürgischen Tertiärbeckens, wie folgt, zu skizzieren.

Das Mittelland Siebenbürgens bildet ein beinahe vollkommen umschlossenes, durch die Lagerungsverhältnisse gut ausgesprochenes Becken, in welchem eine ununterbrochene Reihe von Tertiärbildungen abgelagert ist. Die Ränder dieses, bl. 400 Quadratmeilen einnehmenden tertiären Beckens, werden mit wenig Unterbrechungen von, aus krystallinischen Schiefern oder mesozoischen Schichten aufgebauten Gebirgen gebildet, während von palæozoischen Schichten bloss Dyas und zweifelhaftes Devon in sehr untergeordneten Partien nachgewiesen sind.

Die Lagerung der Tertiärsedimente kann innerhalb des Beckens im Allgemeinen als regelmässig und einfach bezeichnet werden. Wir sehen dem ganzen westlichen und nördlichen Beckenrande entlang mit wenigen Ausnahmen, dass die älteren Tertiärschichten sich an das Randgebirge anlehnend, unter wenigen

(5—20 °) Graden, und nur an einigen Punkten auch mit steilerem Gefälle, gegen die Mitte des Beckens zu einfallen, in Folge dessen vom Rande aus gegen die Mitte zu rasch nacheinander jüngere und höhere Schichten folgen, und sehr bald alle unter die allgemeine Decke der jungtertiären Schichten hinuntertauchen, wie das auf der vorgezeigten geologischen Karte und den geol. Durchschnitten deutlich zu erkennen ist. Sichere Spuren bedeutenderer Schichtstörungen, Faltungen, Brüche und Verwerfungen finden wir im nordwestlichen Viertel des Beckens, den Randgebirgen entlang, und die Bruchlinien laufen dort, so wie auch die Faltenaxen mit dem Randgebirge oder der Streichungslinie der nächsten krystallinen Schieferinsel parallel.

In der südlichen Hälfte des siebenbürgischen Beckens, besonders an dessen östlichem und südlichem Rande, finden wir den grössten Theil der älteren Tertiärschichten niedergesunken und von jüngeren Tertiärschichten überdeckt. Hie und da taucht jedoch eine abgerissene Scholle der älteren Sedimente aus ihnen heraus, respektive sie blieb an der Oberfläche hängen. Als solche kennt man: das kleine eocäne Inselgebirge von Sárd-Borbánd, die Nummulitenkalkscholle von Portsesd, das oligocäne Conglomerat nebst Kalk von Talmatsch, nach Stur eine kleine Partie ähnlichen Conglomerates bei Reussmarkt, Nummuliten-führender Sandstein im Persányer Gebirge und vielleicht auch eine schmale Zone des eocänen Karpathensandsteines an der südöstlichen Grenze Siebenbürgens. Diese Verbreitung deutet darauf hin, dass die unter-tertiären Schichten am südlichen, südwestlichen und südöstlichen Rande des Beckens einerseits störenden Einflüssen mehr ausgesetzt waren, andererseits aber nach deren Ablagerung die nördliche Hälfte des Beckens sich allmälig erheben, die südliche aber vielleicht entsprechend senken musste.

Die unter-tertiären Schichten lagern am westlichen und südlichen Rande des Beckens discordant über meso- und palæozoische Schichten, oder auch unmittelbar auf den krystallinischen Schiefern; während sie, wie es scheint, in dem südöstlichen Karpathenzuge, in gleicher Ausbildung, wie die Kreidebildungen, also in der Facies von Karpathensandstein, in ununterbrochener Reihe und concordanter Lagerung über den Kreidebildungen folgen.

Daraus kann man ohne Zweifel folgern, dass die Erhebung einer zusammenhängenden Landesmasse gegen Ende der mesozoischen Periode nicht nur begonnen hat, sondern bereits vor der Tertiärperiode so weit vorgeschritten war, dass der Rand des zukünftigen Beckens in ununterbrochener Linie ausgebildet war; während am östlichen und nördlichen Rande blos einzelne kleinere oder grössere Inselmassen sich aus dem offenen Meere erheben durften, und war somit das später sich ganz schliessende siebenbürgische Becken am Anfange der Tertiärzeit noch eine gegen Norden und Osten bis zum grössten Theile offene Bucht.

L. v. Lóczy hatte schon im Jahre 1876 aus seinen Beobachtungen im Hegyes-Drócsa-Gebirge,* nach welchen die dort entwickelten Gosauschichten regelmässig und beinahe horizontal lagern, während die Schichten des Karpathensandsteines stark gefaltet sind, mit Recht darauf geschlossen, dass in diesem Grenzgebirge zwischen Ungarn und Siebenbürgen der gebirgserhebende Seitendruck sein Maximum noch vor der Ablagerung der Gosauschichten erlangt hatte. Diese Gebirgsbewegung fand aber in dieser Zeit nicht blos im Hegyes-Drócsa-Gebirge statt, sondern muss sich, aus der weiten Verbreitung ähnlich abgelagerter Gosauschichten im ganzen südlichen und westlichen Randgebirge Siebenbürgens geschlossen, in den sämmtlichen südlichen und westlichen Grenzgebirgen geäussert haben. Es musste daher in diesen Gegenden des siebenbürgischen Beckens damals, also gegen Ende der Kreideperiode, genauer vielleicht am Ende des Cenomanalters, jene allgemeine Oberflächengestaltung vor sich gehen, welche im Grossen und Ganzen die Form und Ausbreitung des späteren siebenbürgischen Tertiärbeckens bestimmt hatte. Auch im Senonalter dürfte sich die allmälige Hebung dieses Gebietes noch fortgesetzt haben, der dies bewirkende südöstliche Seitendruck jedoch war schon sehr in Abnahme begriffen.

Dass auch am Ende der Kreideperiode in der damaligen siebenbürgischen Seebucht irgend welche Sedimente zur Ablage-

* Jelentés a Hegyes-Drócsa hegységbe tett kirándulásairól (Bericht über seine Excursionen in das Hegyes-Drócsa-Gebirge). Földtani Közlöny, 1876, p. 106.

rung kamen, das ist natürlich sehr wahrscheinlich; da man aber sichere Spuren solcher Ablagerungen in dem Gebiete Siebenbürgens noch nicht kennt, muss man entweder voraussetzen, dass vor dem Beginne der Tertiärperiode das Gebiet der siebenbürgischen Bucht sich etwas gesenkt hat, oder aber, dass die obersten Kreideablagerungen innerhalb jenes, aus buntem Thon und Sandsteinbänken bestehenden mächtigen Schichtcomplexes, sich befinden, welcher im nordwestlichen Theile des siebenbürgischen Beckens die Reihe der Tertiärablagerungen beginnt. In Anbetracht dessen, dass die Überbleibsel der Gosauschichten, als kleinere oder grössere Schollen, meistens über dem Horizonte der Tertiärschichten verbreitet sind: halte ich es für wahrscheinlicher, dass man das oberste senone Glied des Kreidesystemes in dem tiefsten Horizonte der in das Untereocæn gestellten unteren bunten Thonschichten suchen müsse, was also auch einen allmälig langsamen, ungestörten Übergang aus der Kreideperiode in die Tertiärzeit voraussetzen lässt.

Der absolute Mangel an Versteinerungen der unteren bunten Thonschichten erlaubt uns den Schluss auf eigenthümliche bionomische Verhältnisse, welche entlang des westlichen Ufers der siebenbürgischen Bucht am Ende der Kreideperiode und am Anfang der Tertiärzeit bestehen mussten. Nebst dem Vorherrschen des Thonschlammes deutet die erhebliche Quantität des vom nahen Lande eingeführten gröberen sandigen und schotterigen Materiales auf eine turbulente Wirkung fliessender Gewässer, welche gegen die offene See zu die Herausbildung von mächtigen Nehrungen und hinter denselben von Lagunen und Seesümpfen verursacht haben dürfte. In diesen konnte die Ablagerung der theils brackischen, theils Süsswasser-Schichten vor sich gehen. Für diese Auffassung und Erklärung spricht ganz entschieden die Thatsache, dass vom Anfange des mitteleocænen Zeitalters ein Sediment aus wirklichen Süsswasser-Sümpfen, nämlich der Süsswasserkalk von Sibó-Róna, in dem obersten Horizonte des bunten Thones dazwischengelagert vorkommt, und diesem entsprechende kalkreiche Sandstein- oder sandige Kalkeinlagerungen beobachtet man auch am Rande des Gyaluer Hochgebirges. Die Verbreitung des Süsswasserkalkes im nordwestl. Theile des Beckens weist also entschieden darauf hin, dass die nordwestliche Uferlinie der siebenbürgischen untereocænen Bucht am Anfange der Tertiärperiode noch immer in langsamer Erhebung begriffen war.

Dass in grösseren Tiefen dieser Bucht, vom Ufer gegen Osten zu entfernter, innerhalb dieses Zeitalters auch wirkliche Meeressedimente sich ablagern mussten, das ist ganz natürlich, und es ist auch recht wahrscheinlich, dass man innerhalb der Sandstein-Gebilde des südöstlichen Karpathenzuges die entsprechenden Tiefseebildungen suchen müsse.

Dem Alter der langsamen Erhebung folgte nun jenes einer Senkung und diese fiel in der siebenbürgischen Bucht bereits in das mitteleocæne Alter hinein. Den Süsswasserschichten folgte innerhalb der Uferregion die Ablagerung der rein marinen Perforata- und unteren Grobkalk-Schichten, und deren feinschlammige, mergelige oder kalkige Natur gibt davon Zeugniss, dass sich das vom nahen Lande her eingeführte Material gegen jenes aus dem Meere Ausgeschiedenen bedeutend vermindert hatte. Die reichen Faunen der erwähnten Schichten weisen auf eine littorale Ablagerung einer warmen Zone hin.

Zur selben Zeit mussten aber auch in der weiter gegen Osten zu sich ausbreitenden Seetiefe Meeresbildungen mit bedeutend abweichender Facies zur Ablagerung gelangen, obgleich wir die Anschliessung solcher an die Littoralsedimente nicht kennen, da solche unter der Decke der jüngeren Schichten des siebenbürgischen Beckens liegen müssen. Wahrscheinlich ist es, dass die Sandsteingebilde des südöstlichen Karpathenzuges auch die æquivalenten Tiefseeablagerungen der obengenannten Littoralsedimente in sich einschliessen.

Während des mitteleocænen Zeitalters trat aber in den nordwestlichen Uferregionen der siebenbürgischen Bucht wieder eine Änderung ein, vielleicht nicht eben gerade durch eine Hebung der Uferregion, als mehr durch eine, während langer Zeit allmälig erfolgten Aufschüttung und Ausfüllung der Littoralregion mit den erwähnten marinen Ablagerungen. Die vom Lande her zuströmenden Gewässer führten abermals reichliches und theilweise auch grobes Material in die seichte Littoralzone ein, und diese musste sich wieder durch Ablagerung von Nehrungen in ein

Lagunen- und Seesumpf-Gebiet verwandeln. Innerhalb dieser vollzog sich die Ablagerung der oberen bunten Thonschichten sammt dem, in deren oberen Horizonte eingelagerten Süsswasserkalke, während dem weiter vom Ufer, in der Tiefe des offenen Meeres, die Ablagerung der Tiefseebildungen ununterbrochen sich fortsetzen konnte.

Infolge weiterer Senkung des Ufergebietes gegen Ende des mitteleocænen Zeitalters, musste abermals Seewasser das Gebiet der Seesümpfe überdecken; und aus diesem Meere haben sich dann, dem Ufer entlang, die oberen Grobkalk-Schichten und fortsetzungsweise im obereocænen Zeitalter, bei zunehmender allmäliger Senkung, auch die Intermedia- und Bryozoen-Schichten abgelagert.

Unterdessen erfolgte gegen Osten zu, in der Tiefe der offenen See, fortgesetzt auch die Ablagerung der Tiefseebildungen, und dass diese in die Gruppe der Karpathensandstein-Bildungen gehören, dafür dient als Zeugniss das Vorkommen bei Alt-Rodna, wo der nummulitenführende Kalkmergel wirklich zwischen Sandsteinschichten eingelagert ist.

Entlang dem südlichen Ufer der siebenbürgischen Eocænbucht mussten sich natürlich auch ähnliche Uferschichten abgelagert haben. Von diesen blieb jedoch nur der mitteleocæne Grobkalk von Porcsesd an der Oberfläche, welcher zugleich eine bedeutende locale Abweichung in der Qualität und Quantität des Sedimentes, im Vergleiche zu jenen des nordwestlichen Ufers der Bucht aufweist; wogegen untereocæne Sedimente gänzlich in der Tiefe verblieben und vom Obereocæn sich blos Spuren in Porcsesd zeigen, während bedeutende Reste davon sich noch im Sárd-Borbander Inselgebirge vorfinden. Im oligocænen Zeitalter wird die allmälige Erhebung der Ufergebiete der siebenbürgischen Seebucht während der Ablagerung der Hojaer Schichten merkbarer, während die folgenden mitteloligocænen Schichten (Sch. von Révkörtvélyes und Méra) in Betracht ihrer Brack-, zum Theil auch Süsswasser-Faunulen, entschieden in einer bereits stark erhobenen Uferzone, oder auch in Ufersümpfen sich abgelagert haben. Dieser Uferfacies gleichwerthige Tiefseeablagerungen lassen sich in den Meletta- und Menilithschichten des südöstlichen Karpathenzuges ganz sicher erkennen, weil wir zwischen diesen beiden abweichenden Faciesgebilden überbrückende und verbindende Schichten, nämlich den Fischschuppen-Schiefer von Nagy-Ilonda besitzen, welche von Osten aus zwischen die Bildungen der Uferfacies ziemlich weit hineinreichen.

In den Beginn der mitteloligocænen Zeit fällt auch der Anfang der tertiären vulkanischen Thätigkeit, denn die Eruption des Quarztrachytes und wahrscheinlich auch die des Trachytes, gingen in dieser Zeit vor sich.

Die im Zeitalter des Oberoligocæn oder der chattischen Stufe abgelagerten Schichten zeigen die, mit ihrer in verschiedenen Seetiefen erfolgten Ablagerung zusammenhängenden Faciesunterschiede und deren Übergänge ineinander in auffallendster Weise. Am Fusse des Gyaluer Hochgebirges und entlang der nordöstlichen Ausläufer des biharer Gebirgstockes haben die Schichten der chattischen Stufe beinahe noch reinen Süsswassercharakter, mit ziemlich bedeutenden Kohlenablagerungen versehen (Sch. von Forgácskút und Corbula-Schichten); während gegen Nordosten zu ihr Übergang in rein marine Ablagerungen schrittweise verfolgbar ist, so dass sie in der Gegend der vereinigten Szamos bereits eine Ablagerung der seichten Sèe vorstellen, gegen Magyar-Lápos zu aber in ein wirkliches schlammiges Tiefsee-Sediment übergehen. In ähnlicher Faciesausbildung sind sie auch weiter, im südöstlichen Karpathenzuge, in dem Gebiete zwischen Alt-Rodna und dem Bistritz-Flusse vorhanden. Ich finde aber keine Angaben darüber, dass solche Schichten in dem südlichen Verlaufe dieses Karpathenzuges, diesseits des Gebirgskammes, irgendwo vorkämen. Es erscheint mir daher für wahrscheinlich, dass das Emportauchen dieses Zuges und damit zugleich auch die Erhebung des Persányer Gebirgszuges, aus dem hier offenen Meere und somit die Abschliessung des Beckens gegen Osten zu, in diesem Zeitalter vor sich gehen musste. Es wird diese Ansicht auch durch die Fauna der Meeresablagerungen der chattischen Stufe unterstützt, welche im Gegensatze mit dem noch mediterranen Charakter der unter- und mitteloligocænen Schichten, ganz den Charakter der deutschen oberoligocænen Schichten aufweist; so dass es im höchsten Grade wahrscheinlich ist, dass das siebenbürgische Becken in diesem Zeitalter durch irgend eine Öffnung des nördlichen Grenzgebirges mit dem deutschen oberoligocænen Meere in Verbindung stand. Das siebenbürgische Becken schloss sich also im oberoligocænen Zeitalter auch gegen Osten zu und verlor damit die unmittelbare Verbindung mit dem mediterranen offenen Meere; blieb aber mit dem nordöstl.-europæischen Meere noch in irgendwelcher Verbindung.

Im ersten Zeitalter des Miocæns, also in jenem des Aquitanien, dauern dieselben Ablagerungsverhältnisse in dem jetzt schon siebenbürgischen Binnenmeere fort und in Folge dessen kamen am östlichen Fusse des Meszes-Zuges die noch immer kohlenführenden Schichten von M.-N.-Zsombor und P.-Szt.-Mihály zur Ablagerung. Während derselben Zeit ging auch in der Hátszeger Bucht und besonders in dem Zsilybecken, die Ablagerung der kohlenreichen Schichten von ähnlichem Brack- und Süsswasser-Charakter vor sich. In nördlicher Richtung, also gegen das damals noch offene nordöstliche Meer zu, setzte sich zu gleicher Zeit die Ablagerung von Meeresschichten in ähnlicher Faciesausbildung, wie jene der chattischen Stufe fort.

Mit dem Anfange dieses Zeitalters tritt eine energischere Bergbewegung auch im Norden und Westen des Beckens ein, in Folge dessen dann auch die Verbindung mit dem nordöstlichen offenen Meer aufhörte, und das siebenbürgische Binnenmeer von nun an nur mehr durch die ungarische grosse mediterrane Bucht mit dem offenen Mediterranmeere zusammenhieng. In der Umgebung von Klausenburg fehlen über den Schichten der chattischen Stufe die oben erwähnten Schichten des Aquitanien und werden unmittelbar durch den untermediterranen Koroder Sand bedeckt. Die Gegend von Klausenburg war daher in der aquitanischen Zeit bereits trocken, um dann in dem darauf folgenden Zeitalter der untermediterranen Stufe wieder vom Meere bedeckt zu werden. Die untermediterranen Koroder Sande und Schichten von Hidalmás haben sich bereits in dem vollkommen umschlossenen siebenbürgischen Binnenmeere abgelagert, welches vielleicht nur durch einzelne Öffnungen des Meszeszuges und im südlichen Erzgebirge mit der ungarischen Mediterranbucht communizieren konnte, gegen Norden und Osten zu aber von dem nordöstlichen offenen

Meere gänzlich abgeschlossen war. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass das zsilythaler Becken nicht blos gegen Norden zu mit der Hátszeger Bucht, sondern auch gegen Süden mit dem rumänischen Kohlenbecken bei Bahna und dadurch mit dem offenen Meere in Verbindung stand.

Am Beginne des Zeitalters der obermediterranen Stufe hatte der von Südosten her wirkende Seitendruck sein Maximum erreicht, in Folge dessen begann auch auf den entstandenen Bruch- und Verwerfungslinien die grossartige Thätigkeit der Andesitvulkane. Im Nordwesten haben die mächtigen Daciteruptionen des Vlegyászastockes diese Thätigkeit eingeleitet, im Norden die Ergüsse der Dacite und des Biotitandesites in den Rodnaer Alpen diese fortgesetzt; die Dacite besonders mit Auswurf einer enormen Menge von Asche und Lapilli, welche am Grunde des Binnenmeeres abgelagert die Reihe der obermediterranen Sedimente beginnen. Während dessen haben sich am Grunde des Binnenmeeres vom Lande her eingeschwemmter Thonmergelschlamm und thoniger Sand, unterbrochen durch dünnere Lagen der Asche späterer Daciteruptionen, in grosser Menge abgelagert. An vielen Punkten, so z. B. auch bei Klausenburg am Weinberge Hója, lagern die Mezőséger Schichten mit den Dacittuffen discordant auf den Schichten der chattischen Stufe, als sicherstes Zeichen der Schichtunterbrechung infolge der Hebung und Senkung des Ufergebietes.

Indessen musste das siebenbürgische Binnenmeer lange Zeit hindurch vom Weltmeere abgeschlossen werden, während dem die Ablagerung der mächtigen Salzlager sammt den Gypseinlagerungen vor sich ging. Das Salzwasser des vollständig abgeschlossenen Binnenmeeres musste, infolge des damals noch warmen Klimas, allmälig bis zum Sättigungsgrad der Salzlösung verdunsten und somit zuerst das Kalksulphat als Gyps, sodann das Chlornatrium als Steinsalz an den tiefsten Stellen des Beckens gefällt werden. Diesem Vorgange folgte, noch immer im Zeitalter der obermediterranen Stufe, abermals ein Durchbruch des Weltmeeres, wodurch das Becken wieder mit Salzwasser gefüllt wurde. Dieser Durchbruch geschah wahrscheinlich die Maroslinie entlang vom ungarischen Binnenmeere her und musste die bereits gefällten Salzlager mit einer Schlammdecke überziehen. Das nördliche und westliche Ufer dieses Binnenmeeres, besonders dessen tief eingreifende Buchten, und die Meeresenge der Maroslinie, boten günstige Lebensbedingungen für die Entwicklung einer reichen littoralen Fauna, wodurch die Entstehung der durch ihren Petrefactenreichthum berühmten Localitäten (Felső-Lapugy, Bujtur, Felső-Orbó, Csicsó-Hagymás u. s. w.) erklärbar ist. Der an Einbuchtungen reiche östliche Rand des siebenbürgischen Erzgebirges, so auch die das siebenbürgische Binnenmeer mit dem ungarischen verbindende Maroslinie waren für das Gedeihen solcher reichen Littoralfaunen und zum Theil auch von Korallbänken besonders geeignet. In den grösseren Tiefen des Binnenmeeres jedoch haben sich zu gleicher Zeit, laut Zeugniss der sehr eigenthümlichen, gemischten organischen Reste, welche die Thonmergelschichten im Hangenden der Salzlager einschliessen, den Tiefseeablagerungen des heutigen Schwarzen Meeres ähnliche Sedimente abgelagert.

Die Ausbrüche des Dacites haben sich unterdessen öfters wiederholt, besonders von reichlichen Aschenauswürfen begleitet, welche als Tuffe auch in dem oberen Horizonte der obermediterranen Schichten sehr verbreitet vorkommen. Beiläufig auf das Ende dieses Zeitalters fällt die Thätigkeit des kleinen Dacitvulkanes Csicsóberg, so wie auch die Entstehung der Dacitgebirge des Erzgebirges, besonders des Csetrásgebirges am südlichen Rande derselben.

Nun folgt das Zeitalter der sarmatischen Stufe. Das salzige Wasser des siebenbürgischen Binnenmeeres süsste sich infolge der vom Lande hineinströmenden Niederschläge immer mehr aus und es kamen infolge dessen am Grunde desselben vorherrschend sandige Schichten zur Ablagerung, welche die bezeichnenden Molluskenreste der sarmatischen Stufe einschliessen. Die nördliche Hälfte des Beckens jedoch bis zur Maros war am Anfang dieses Zeitalters bereits trocken, nur von Torda aus ragt bis Klausenburg die sarmatische Ablagerung des Feleker Berges hinein; während die südliche Hälfte des Beckens von einer allgemeinen Decke sarmatischer Sedimente eingenommen wird. Die ruhigen und reineren Gewässer der Hátszeger Bucht boten die günstigsten Verhältnisse zu einem reichen Gedeihen der sarmatischen Fauna und zur Ablagerung von reichlichem Kalkschlamm, deshalb hier die mannigfaltigsten Kalkschichten vorherrschen; während im Inneren des Beckens zu gleicher Zeit nur thonige und sandige Sedimente, mit spärlicheren organischen Resten, sich abgelagert haben.

Laut Zeugniss von schieferigen, weissen biotithältigen Tuffen des Biotitandesites, welche hie und da zwischen den sarmatischen Schichten lagern, folgte am Beginne der sarmatischen Zeit wahrscheinlich der Ausbruch von Biotitandesit jenem des wirklichen Dacites und zwar in der südlichen Hälfte des Beckens, wo der Gebirgstock des Büdös sammt dem Morgó, dann die Biotitandesit-Vulkane des Erzgebirges die Asche liefern konnten; während am nördlichen Rande des Beckens die Ausbrüche der Pyroxenandesite des Láposer und Czibles-Gebirges in diese Zeit hineinfallen.

In Folge der weiteren Aussüssung und zugleich Einengung des Brackwassers des sarmatischen Binnenmeeres im südlichen Theile des Beckens, hauptsächlich aber im südöstlichen Winkel desselben, bildete sich der siebenbürgische Binnensee des pontischen Zeitalters heraus, in dessen schlammigen Thonmergelsedimenten Süsswasserorganismen, hie und da jedoch auch in, aus Schotter und Sand bestehenden Flussablagerungen, Fluss-Mollusken reichlich sich vorfinden. Am Rande des Hargitazuges schliessen diese Schichten hie und da Detritus von Andesit in Form von Tuffen und Breccien ein; es liegt jedoch die Hauptmasse dieses Detritus meistens schon über den pontischen Ablagerungen. Daraus folgt nun, dass die Ausbrüche der Amphibol- und Pyroxenandesite der Hargita gegen Ende des pontischen Zeitalters ihr Maximum erreicht haben mussten.

Der pontische Binnensee musste aber am Ende dieses Zeitalters auf der Maroslinie zum grössten Theil abfliessen; am östlichen und westlichen Fusse des Persányer Gebirges jedoch blieben noch ziemlich grosse Süsswasserteiche zurück, aus welchen in der ersten Hälfte des Zeitalters der *levanteischen Stufe* abermals reichliche Sedimente sich abgelagert haben. Unter diesen Sedimenten befinden sich, ausser Seemergel, Thon und Lignit, in grosser Menge auch der Detritus des Hargitaandesites und des Basaltes der Altgegend, theils abgesondert eingelagert, theils mit denselben vermengt. Es folgt daraus, dass die Thätigkeit der vorherrschend Pyroxenandesit-Vulkane der südlichsten Hargita, und auch jene der Basalt-Vulkane, in diese letzte Phase der Tertiärzeit hineinfällt und gewiss bis Ende der Tertiärzeit dauerte, wenn sie nicht vielleicht auch noch in die Diluvialzeit hineinreichte.

Für ein so junges Alter der südlichen Hargita spricht entschieden auch die Thatsache, welche ich bei Schässburg in den Diluvialterrassen des Gr. Kockelflusses beobachtet habe. In dem Schotter dieser Terrassen fand ich keine Spur von Hargitaandesiten, bloss die Gerölle der krystallinischen Schiefer der Fogaraser Alpen; wogegen das alluviale Inundationsgebiet des Kockelflusses mit Andesitgeröllen erfüllt ist. Daraus ersieht man, dass in der Diluvialzeit — vielleicht nur in der ersten Hälfte — das jetzige Flusssystem noch nicht ausgebildet war, wahrscheinlich deshalb nicht, weil in der südlichen Endigung des Hargitagebirges die vulkanische Thätigkeit kaum abgeschlossen war und die neuere und endgiltige Oberflächengestaltung durch die Erosion erst dann begann; während aus den Fogaraser Alpen die Wirkung der herabfliessenden Gewässer bis Schässburg reichte.

Und damit bin ich am Schlusse der Geschichte des siebenbürgischen Tertiärbeckens angelangt, von da an die Erosionswirkung der diluvialen Niederschläge die Hauptrolle in der Durchfurchung der Oberfläche des siebenbürgischen Beckens und in der Zustandebringung der jetzigen orographischen Verhältnisse übernommen hatte.

Indem ich das Resultat meiner 25-jährigen Forschungen vorlegte, schliesse ich mit dem Wunsche, es möge meine Arbeit je eher zu neuen noch eingehenderen Untersuchungen Anregung geben.

4.

ÜBER GASENTWICKLUNG BEI PANKREAS-VERDAUUNG.

Vom ord. Mitgl. d. ung. Akademie FERD. KLUG.

Vorgelegt der III. Cl. d. Akad. am 13 Decemb. 1897.

Aus: «Math. és Természettud. Értesítő (Math. und Naturw. Anzeiger) Band XVI, pp. 71—88.

I.

Die Frage, ob Darmgase durch die Thätigkeit ungeformter Fermente entstehen, hat Hüfner * im Jahre 1874, durch mit grosser Umsicht ausgeführte Versuche, in bejahendem Sinne beantwortet. Hüfner untersuchte die Fibrinverdauung mittelst Pankreas bei möglichstem Ausschluss von Pilzen und Bakterien. Anfangs wurde die unmittelbar dem Thiere entnommene, 1—2 Tage unter absolutem Alkohol aufbewahrte Drüse, mit einer vorher abgekochten und nachher wieder erkalteten Fibrinmasse in einem ziemlich complicierten Apparat in der Weise zusammen gebracht, dass keine der beiden Substanzen vorher mit anderer, als mit durchgeglühter Luft in Berührung kam. Doch schon nach mehreren Versuchen zeigte sich, dass die frische Drüse selbst nicht zu gebrauchen war; das Innere derselben war inficiert, Fäulniss trat ein. Sobald aber an Stelle des frischen Pankreas das amorphe, aus Glycerinextract mit Alkohol gewonnene Fermentpulver angewandt wurde, gelang der Versuch. Die Dauer der Einwirkung betrug 3—6 Tage. Das Resultat war: Ausscheidung von Kohlensäure, keine Entwicklung

* Journal f. prakt. Chemie Bd. X S. 1. 1874.

brennbarer Gase, wie auch die Thatsache, dass während des Versuchs von irgend einer der in Lösung befindlichen Substanzen Sauerstoff chemisch gebunden wurde. Kohlensäureentwicklung trat auch dann ein, wenn selbst die geringe Menge Sauerstoffgas, welche mit der Fermentlösung in die Kolben gelangte, ausgepumpt worden war (Versuch 10). Dem mit Fibrin und Ferment gefüllten Kolben wurde jegliches noch restierendes Gas, also auch jeglicher noch auspumpbare, nicht chemisch gebundene Sauerstoff genommen, und doch bestand das am Ende des Versuchs ausgepumpte Gas überwiegend aus Kohlensäure. Versuche zeigten auch, dass die Fermentlösung schon allein so fest Sauerstoff bindet, dass derselbe nicht wieder angepumpt werden kann. Hüfner vermuthet, «dass erst während der Berührung des Fibrins mit dem sauerstoffbeladenen Ferment, während der Reaction der beiden auf einander, Kohlensäure gebildet werde. Welches der Beiden, ob das Fibrinmolecül oder das des Ferments die Kohlensäure ausgiebt, bleibt vor der Hand ungewiss».

In einer zweiten Mittheilung * theilt Hüfner Versuche mit, bei welchen Sauerstoff und Fibrin ohne Ferment auf einander wirkten und binnen drei Wochen aller Sauerstoff verschwand, dafür aber Kohlensäure auftrat und bei welchen sich auch zeigte, dass die Menge der am Ende des Versuches gebildeten Kohlensäure um so geringer wurde, je sorgfältiger und vollkommener alle vorhandene Luft aus dem Kolben entfernt worden war. Hüfner schliesst hieraus, dass die Kohlensäureentwicklung durchaus nicht mit der Thätigkeit des Ferments zusammenhängt, sondern vielmehr nur die Folge eines Oxydationsprocesses ist, der auch ohne Gegenwart des Ferments verläuft. Brennbare Gase traten selbst bei möglichstem Ausschluss von Sauerstoff nicht auf. Hüfner vermuthet, dass am Ende doch nur lebendige mikroskopische Organismen das Auftreten brennbarer Gase während der Verdauung veranlassen. Bei Versuchen mit Fibrin in einem Infus von faulendem Käse entwickelte sich in der That Wasserstoffgas, welches jedoch ebenso von den Eiweisssubstanzen, wie auch von dem Fette des Käses herrühren konnte.

---

* Journal f. prakt. Chemie. Bd. XI. S. 43. 1875.

Ach KUNKEL * hat die bei künstlicher Pankreasverdauung auftretenden Gase untersucht und unter denselben Kohlensäure, Wasserstoff, Schwefelhydrogen, Nitrogen und Methan gefunden, von welchen Schwefelhydrogen und Methan erst gegen das Ende des 9—10 Stunden anhaltenden Versuches auftraten. Wenn man diese Ergebnisse mit jenen von HÜFNER vergleicht und weiss, dass KUNKEL mit der Drüse in toto verdaute, demnach Fäulniss nicht vermeiden konnte, so wird man geneigt, die Entwicklung der Gase dieser letzteren zuzuschreiben.

WASSILIEFF ** hat bei Verdauung von Fibrin in Pankreasextract, welchem Kalomel in solcher Menge (1 %) beigegeben war, dass derselbe erwiesener Maassen antiseptisch und aseptisch wirkte, geringere Entwicklung von Kohlensäure beobachtet, als in solchem Pankreas-Extract, der kein Kalomel enthielt; niemals aber fand sich Wasserstoff oder Schwefelwasserstoff vor.

Neuere Angaben über Bildung von Gasen bei Ausschluss der Fäulniss sind mir nicht bekannt, und da die von HÜFNER beobachtete Bildung der Kohlensäure sich als Oxydationsproduct erwiesen und dasselbe bei den Versuchen von WASSILIEFF auch nicht ausgeschlossen war — denn dieser letztere Forscher gab die Verdauungsflüssigkeit in einen Gasometer mit Luft und schüttelte den Gasometer während der Verdauung auch häufig —, so steht heute der Satz wohl noch unangefochten da, dass Enzymwirkungen bei der Verdauung keine Gase entwickeln. Speciell wird die bei der Verdauung im Darm frei werdende Kohlensäure, theils vom Blut, theils von der Eiweissfäulniss, von der Milch- und Buttersäuregährung der Kohlenhydrate, theils von dem Freiwerden aus dem Alkalikarbonat des Pankreas- und des Darmsaftes, bei deren Neutralisation durch die Salzsäure des Magensaftes und die bei der Gährung entstehenden organischen Säuren *** abgeleitet. Dem gegenüber beweisen meine in Folgendem mitzutheilenden

---

* Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. 8 S, 134. 1875.

** Zeitschrift für physiologische Chemie Bd. VI. S. 112. 1881.

*** O. HAMMARSTEN: Lehrbuch der physiol. Chemie. III. Aufl. S. 279. 1895. — ARTHUR GANGAE: Die phys. Chemie der Verdauung S. 482. 1897.

Erfahrungen, dass Gase und speciell auch die Kohlensäure als Producte einer Enzymwirkung enstehen.

II.

Wenn man von Blut und anhängenden Geweben möglichst gereinigte frische Pankreas fein haschiert der Digestion aussetzt, indem man zugleich die Fäulniss durch Zugabe von Thymol ausschliesst, so kann man oft Gasentwicklung beobachten. Als ich zu anderem Zweck 10 Stück, 2750 g wiegender Rinderpankreas, mit 1000 ccm destilliertem Wasser und 27 g pulverisiertem Thymol, bei 38—40°C. in einem 7 Liter fassenden Cylindergefäss, 20 Stunden lang der Verdauung aussetzte, so fand sich der Inhalt stark verdaut und über der Flüssigkeit die Pankreasreste in schäumendem Zustande; ja ein Theil derselben war ausgeflossen und bedeckte die Aussenwand des Gefässes, wie auch den Boden des Thermostats. Bei einem anderen Versuch entwickelten 300 g Pankreas, 150 ccm Wasser und 3 g Thymol 0,1659 g Kohlensäure. Bei mit anderen Drüsen, so mit Magenschleimhaut, in ganz ähnlicher Weise gemachten Verdauungsversuchen fiel mir nie Gasentwicklung auf, und andere Autoren, welche Thymol als Desinficiens benützen, machen ebenfalls keine Erwähnung davon, als hätten sie Gasentwicklung beobachtet. Die Gasentwicklung muss also hier eine ganz specifische Erscheinung sein.

Eine 0,1 %-ige Thymollösung soll hinreichen, um die alkoholische, sowie die milchsaure Gährung aufzuheben (Lewin); das von mir der Verdauungsmasse beigemischte Thymol überstieg bei Weitem diese Menge. Wohl löst sich Thymol nur schwer in kaltem Wasser, doch geht von demselben in der Verdauungstemperatur etwas mehr in Lösung über. Auf jeden Fall enthielt die Masse genug Thymol gelöst, um die Fäulniss zu hemmen, wie dies aus der Erfahrung folgt, nach welcher, selbst wenn man Pankreas und Thymol drei Wochen lang und darüber in der obigen Weise digeriert oder den verdauten und abfiltrierten Pankreasextract ähnlich lange stehen lässt, keine Fäulniss eintritt und das gelöste Trypsin hierbei seine verdauende Wirkung beibehält. Es schien also der Mühe werth, diese zufällig beobachtete Gasentwicklung bei Pankreasverdauung mit Thymol näher zu untersuchen, um so mehr, als ich unter Umständen auch mit dem abfiltrierten, künstlichen Pankreassaft Gasentwicklung erhalten konnte. Da sowohl die bekannten Versuche von Hüfner und von Wassilieff, wie auch meine Beobachtungen vorzüglich auf Kohlensäureentwicklung deuteten, so trachtete ich vor Allem, diese eingehender zu untersuchen.

III.

Als Versuchsobject diente Rinderpankreas. Dasselbe wurde am Morgen aus dem Schlachthause geholt, dann gewöhnlich bis gegen Mittag dem Wasserstrahl ausgesetzt, hierauf von Bindegewebe, Fett, Blutgefässen gereinigt und mittelst Fleischmühle zermahlen. Nun wurde der Drüsenbrei entweder direct zum Versuch angewandt oder aus demselben, durch 20 Stunden anhaltende Digestion, ein Extract bereitet, welcher, am kühlen Orte aufbewahrt, als künstlicher Pankreassaft ebenfalls zur Verdauung diente.

Das Verdauungsgefäss war eine, nach Art der Spritzflaschen adjustirte, luftdicht verschliessbare Flasche, in welche das Pankreas oder der Extract mit der zu verdauenden Substanz gegeben wurde. Das längere, in die Flüssigkeit tauchende Glasrohr des Gefässes diente zum Einführen von reiner Luft. Die Luft wurde nämlich vorerst, um kohlensäurefrei zu sein, durch zwei Kalilauge und ein Baryumhydroxydlösung enthaltendes Gefäss geleitet und gelangte so in die Verdauungsflasche. Das kurze Gasrohr, das zur Ableitung der Gase diente, wurde mit zwei nach einander folgenden Pettenkofer'schen Röhren, welche mit titrierter Barytlösung angefüllt waren, verbunden. Ein Aspirator besorgte dass mässige Durchstreichen der Luft. Einige in solcher Weise mit Pankreas, künstlichem Pankreasextract, Pankreassiccum und Trypsin gemachte Versuche sind aus der folgenden Tabelle (Tab. I) zu ersehen.

Tabelle I.

Datum	Nummer der Versuche	Anordnung der Versuche	Kohlensäure in g	Bemerkungen
1897 24. März	1	300 g Pankreas, 150 cm^3 Wasser, 3 g Thymol	0·1659	
29. «	2	300 g Pankreas, 150 cm^3 Wasser. 3 g Thymol, 10 cm^3 Mandelöl	0·275	
7. April	3	300 g. Pankreas, 150 cm^3 Wasser, 3 g Thymol, 10 cm^3 Oel	0·155	
8. «	4	200 cm^3 Pankreasextract, 10 cm^3 Oel	0·259	Dieses Pankreasextract wurde am 7. April aus 1260 g Pankreas, 630 cm^3 Wasser und 18 g Thymol gewonnen
11. «	5	200 cm^3 Pankreasextract	0·058	Dieser Pankreasextract wurde am 10. April aus 1230 g Pankreas, 600 cm^3 Wasser und 18 g Thymol gewonnen
		200 cm^3 desselben Extractes, 20 cm^3 Oel	0·159	Derselbe
12. «	6	200 cm^3 desselben Extractes, 20 g gekochte Stärke	0·025	Derselbe
		200 cm^3 desselben Extractes, 20 cm^3 Oel	0·239	Derselbe
13. «	7	200 cm^3 desselben Extractes	0·025	Derselbe
21. «	8	200 cm^3 Pankreasextract, 4 g Fibrin	0·038	Dieser Pankreasextract wurde am 20. April aus 1650 g Pankreas, 1650 cm^3 Wasser mit 32 g Thymol bereitet. Verdaut Eiweiss gut.
		200 cm^3 Pankreasextract, 10 cm^3 Oel	0·078	

Datum	Nummer der Versuche	Anordnung der Versuche	Kohlensäure in g	Bemerkungen
27. April	9	45 g Pankreas siccum, 405 cm^3 Wasser, 3 g Thymol	0	Pankreas siccum selbst wurde hierbei gut verdaut
		45 g Pankreas siccum, 405 cm^3 Wasser, 3 g Thymol, 10 cm^3 Oel	0·112	
29. «	10	200 cm^3 Trypsinlösung, 2 g Thymol, 10 cm^3 Oel	0	Die Trypsinlösung enthielt 2% Trypsin und verdaute Eiweiss sehr gut
		200 cm^3 Trypsinlösung, 2 g Thymol, 4 g Fibrin (gekocht)	0	

Aus diesen Versuchen folgt, dass während der Selbstverdauung des Pankreas Kohlensäure frei wird (Vers. 1—3), wie auch, dass mit künstlichem Pankreassaft während der Verdauung Kohlensäure gewonnen werden kann, wenn man zu demselben Oel gibt (Vers. 5, 6). Während ein Pankreasextract für sich 0,058 g Kohlensäure lieferte, gaben andere 200 ccm desselben Extracts, welchem Oel beigegeben worden war, 0,159—0,239 g Kohlensäure. Aus Stärke entwickelte sich bei der Verdauung gar keine, aus Fibrin (Vers. 8) ebenfalls keine oder doch nur sehr wenig Kohlensäure. Die letztere, wenn sich eine solche überhaupt bildete, kann von dem wenigen im Fibrin enthaltenen Fett stammen. Dies folgt daraus, dass bei der Verdauung von Fibrin mit Trypsin (Vers. 10) keine Kohlensäure frei wird. Bei einem Vergleich der Versuche 4—7 mit den mit 8 bezeichneten ist es sehr auffallend, dass bei den letzteren überhaupt eine ungemein schwache Gasentwicklung stattfand. Es scheint demnach nicht ein jedes Pankreas die Fähigkeit zu besitzen, aus Fett Kohlensäure frei zu machen; dies wird durch an anderer Stelle mitzutheilende Versuchsergebnisse noch bestätigt werden. Auch der Pankreasextract, welcher frisch, sowie am 1—2. Tag, bei der Verdauung noch Gas liefert, verliert diese Fähigkeit, sobald derselbe eine entschieden saure Reaction gewinnt. Bei der Selbstverdauung von Pankreas siccum erhielt ich keine Kohlensäure und auch nach der Zugabe von Oel (Vers. 9) waren nur Spuren von Kohlensäure zu gewinnen. Hier ist also jenes Enzym, welches Kohlensäure frei macht, nicht oder doch nur in ungemein geringer Menge vorhanden. Verdauungsversuche mit Trypsin und Oel bewiesen, dass jenes bei der Entwicklung von Kohlensäure nicht mit betheiligt ist.

Diese Versuche deuten demnach daraufhin, dass die Kohlensäure, welche bei der Selbstverdauung von Pankreas frei wird, dem in derselben enthaltenen Fett entstammt, und erwecken den Verdacht, dass diese Erscheinung die Folge einer Enzymwirkung auf Fett ist.

IV.

Die Frage betreffend, ob es sich hier um eine Bildung der Kohlensäure durch Oxydation oder um eine Abspaltung derselben handelt, ist seit Abelous und Biarne * bekannt, dass das Pankreas der oxydierenden Thätigkeit entbehrt. Andererseits erhielt Hugo Schulze ** aus Fetten nur bei einer Temperatur über 100° C. Kohlensäure durch Oxydation und schliesst, dass nur Fermente dem Sauerstoff die Möglichkeit gewähren, das Fett zu oxydieren, während nach Otto Frank *** die Salze der höheren Fettsäuren schon bei gewöhnlicher Temperatur, unter Einwirkung des Sauerstoffs der Luft, eine Zersetzung, eine oxydative Spaltung erleiden. Ich machte daher auch mit Ausschluss des Oxygens Versuche, indem ich vorerst, anstatt Luft, reines Hydrogen durch die Verdauungsflüssigkeit leitete.

---

* Archiv de physiol. norm. et path. S. 198. 1895.

** Archiv f. d. ges. Phys. Bd. XVIII. S. 398—404.

*** Archiv für Physiologie S. 51. 1894.

Das Hydrogen wurde durch Einwirkung von Zink auf Schwefelsäure gewonnen, musste aber, um in das Verdauungsgefäss zu gelangen, ebenso wie in den vorangegangenen Versuchen die Luft, Kalilauge und Barytwasser enthaltende Gefässe durchstreichen. Alle diese, der Apparat zum Entwickeln des Hydrogens, wie auch die Reinigungsgefässe und das Verdauungsgefäss selbst waren unter einander und mit den PETTENKOFER'schen Absorptionsröhren nur durch Glasröhren, ohne eingeschaltete Kautschukröhren, verbunden und ausserdem noch in ausgekochtes Wasser gestellt; der Zutritt von Luft war also ganz unmöglich gemacht. Auch gebrauchte ich als Desinficiens ausser Thymol noch Sublimat. Ich fand nämlich, dass Versuche mit thymolisiertem Pankreasextract und Oel nicht immer von jeder Fäulniss frei sind, und glaube, dies daher ableiten zu müssen, dass Oele Thymol leicht lösen, demnach auch Thymol aus dem Pankreasextract aufnehmen, dem zu Folge dieser zu wenig desinficiert bleibt. Sublimat erwies sich überhaupt als ein sehr gutes Desinficiens bei der Verdauung und hemmte die Gasentwicklung nicht. So entwickelte sich in einem Gefäss, in welchem 3335 g Pankreas, 1660 ccm Wasser und 5 g Sublimat der Verdauung ausgesetzt waren, 3,7 g Kohlensäure.

Eine Sublimatlösung von 1 : 5000 soll bereits ein ganz sicheres Desinfectionsmittel sein. Ja, ein Theil Sublimat auf 20,000—30,000 ccm Wasser vernichtet mit Sicherheit zur Untersuchung genommene Mikroorganismen, sporenfreie wie sporenhältige Bacillen und Coccen (R. KOCH)*. P. ZWEIFEL ** jedoch fand das Blut in einer 0,2 ‰-Sublimatlösung nach vielen Wochen ganz verändert, voller Mikrococcen und Stäbchenbakterien, wie auch sehr schlecht riechend. Eiweissartige Substanzen binden das Sublimat unter Bildung von *HgO*-Albuminat, welches letzteres schlechter als Carbolsäure desinficiert (MIKULICZ). Allein diese Bildung von *HgO*-Albuminat verläuft langsam und stört die Verdauung nicht durch Fäulniss, wenigstens nicht in den ersten zwei Tagen, während

* W. BERNATZKI und A. E. VOGL: Lehrbuch der Arzneimittellehre S. 138. u. 449. 1891.

** Zeitschrift für physiologische Chemie. Bd. VI. S. 420. 1881.

welcher ich niemals Fäulniss beobachtete. Doch darf man nicht weniger als 1 ‰ Sublimat nehmen; übrigens geht die Verdauung auch bei einem Sublimatgehalt von 2 ‰ gut vor sich. Bei 1 : 2000 Sublimat fand ich am Schluss einer 24 stündigen Digestion bereits Spuren von Fäulniss vor. Wie günstig und eben nicht störend Sublimat auch der Eiweissverdauung ist, beweist der folgende Versuch. 15 g Pankreas, 200 ccm Wasser und 0,2 g Sublimat wurden 24 Stunden lang im Thermostat der Verdauung ausgesetzt und dann die Flüssigkeit abfiltriert. Im Filtrat entsprach die Menge des gelösten Albumins, mit dem Spectrophotometer untersucht, dem Extinctionscoëfficienten 1,62408. In 30 ccm dieses Filtrats wurden 15 g Fibrin der Verdauung 20 Stunden lang ausgesetzt. Der nachher von Neuem abfiltrierten Flüssigkeit entsprach der Extinctionscoëfficient von 7,00560.* Von faulem Geruch, Schwefelhydrogen war absolut keine Spur zu entdecken. Es lässt sich übrigens, wie bekannt, die Bildung von HgO-Albuminat durch Zusatz von Kochsalz, dessen Menge wenigstens das Zehnfache des Quecksilberchlorids beträgt, verhindern.** Ich machte auch mit 0.1 % Sublimat und 1,0 % Kochsalz etliche Versuche, fand abei bei denselben die Verdauung weniger gut, auch erfolgte nach einigen Tagen, bei Zugabe von Oel, trotz Kochsalz, Zersetzung des Sublimats.

Dass 1 ‰ Sublimat in der That gut desinficiert, beweisen noch Versuche, die ich mit Speicheldrüsen, rohem Fleisch, sowie auch mit gekochter Pankreasdrüse gemacht und bei welchen consequenter Maassen keine Gasentwicklung zu beobachten war. Ebenso erhielt ich ganz frische Pankreasdrüsen, mittelst welchen weder bei Desinficierung mit Sublimat noch mit Thymol während der Digestion Gasentwicklung stattfand, während dieselbe mit anderen Pankreasdrüsen eintraf. Es unterliegt unter solchen

---

* Wenn R. Pfleiderer (Archiv f. d. ges. Phys. Bd. 66 S. 613) an den vielen Decimalstellen der mit Spectrophotometer erhaltenen Ergebnisse Anstoss findet, so kann ich dafür, dass die Zahlen der Logarithmentafeln 5—7 Decimalstellen haben, eben so wenig, wie ich auch daran keine Schuld trage, dass diesem Autor die spectrophotometrische Methode zu umständlich ist.

** Bernatzki und Vogl a. a. O.

Umständen keinem Zweifel, dass Sublimat bei der Verdauung als Desinficiens gut zu brauchen ist.

Die Resultate, welche ich unter dem Einflusse von Hydrogengas erhalten habe, zeigt die folgende Tabelle (Tab. II).

Tabelle II.

Datum	Nummer der Versuche	Anordnung der Versuche	Kohlensäure in g	Bemerkungen
13. Mai	1	200 cm Pankreasextract	0·109	Dieser Extract wurde am 12. Mai aus 2860 g Pankreas, 2860 cm^3 Wasser uud 29 g Thymol gewonnen
		200 cm^3 Pankreasextract, 20 g Glycerin	0·0994	
14. «	2	200 cm^3 Pankreasextract, 4 cm^3 Acid. aceticum	0·0421	Derselbe Extract
		200 cm^3 Pankreasextract, 4 cm^3 Fibrin, gekocht	0·0897	
15. «	3	200 cm^3 Pankreasextract, 20 cm^3 Mandelöl	0·4305	Derselbe Extract
31. «	4	200 cm^3 Pankreasextract, 10 g Oel, 0·6 g Thymol	0·217	Extract aus 2750 g Pankreas. 1400 cm^3 Wasser, 28 g Thymol
		200 cm^3 Pankreasextract, 10 g Stearin, 0·6 g Thymol	0·024	
10. «	5	150 g Pankreas, 150 cm^3 Wasser, 0·3 g $HgCl_2$	0·304	

Diese Versuche bezeugen, dass es sich hier nicht um Oxydaetion, sondern um Abspaltung von Kohlensäure handelt. Versuch-mit Glycerin ergaben nicht mehr Kohlensäure, als solche, bei welchen dem Pankreasextract gar nichts beigegeben worden war. Es kann also die Kohlensäure nicht vom Glycerin stammen. Am wenigsten Kohlensäure lieferte das Extract nach Zugabe von 2 % Essigsäure. In solcher Menge zerstört die Essigsäure das Enzym vollkommen. Eben weil Säuren das hier wirksame Enzym rasch zerstören, lässt sich auch mit Sublimat anstatt Thymol ein solcher Extract der Drüse höchst schwer gewinnen, welcher mit Fett der Digestion ausgesetzt, Kohlensäure frei machen könnte, denn die Verdauungsflüssigkeit, die man aus der Pankreasdrüse mit Sublimat nach 24-stündiger Verdauung gewinnt, reagiert, wenn Spaltung von Fetten stattfand, bereits so stark sauer, dass das Fettenzym seine Wirkung mehr oder weniger verloren hat; Versuche mit Sublimat als Desinficiens gelingen also besser, wenn die Drüse in Substanz, wie bei Versuch 5, benutzt wird. Aus Tabelle II, Versuch 4, kann man auch ersehen, dass Verdauungsversuche mit Stearin ganz erfolglos sind. Ich habe probeweise, ausser mit Oel, auch mit frisch zerlassener Butter Versuche gemacht und erhielt in einem Fall circa 0,338 g Kohlensäure. Aus dem folgt, dass nur Fette, die in der Verdauungstemperatur flüssig werden, bei der Pankreasverdauung Kohlensäure liefern,

V.

Wenn, wie die Versuche zeigen, bei der Spaltung von Fetten Kohlensäure entwickelt wird, so ist es nicht unmöglich, dass auch andere Gase, etwa Hydrogen, frei werden. Um hierüber Aufklärung zu erhalten, führte ich dem obigen ähnliche Verdauungsversuche mit Glasgefässen aus, welche jenen ähnlich waren, die man zur Cultur anaerober Bakterien verwendet. Die Gefässe waren mit Glashähnen versehen und konnten mit der Quecksilberluftpumpe ausgepumpt werden. Das Pankreas oder der künstliche Pankreassaft wurden also in das Gefäss gegeben, dann die Luft ausgepumpt und so das Gefäss in den Thermostaten gestellt. Nach der Verdauung wurde das über der Flüssigkeit befindliche Gas durch Quecksilber in ein Eudiometer getrieben und die Analyse nach der Bunsen'schen Methode durchgeführt.

Die meisten meiner Versuche habe ich eben auf diese Weise gemacht und konnte vor Allem constatieren, dass die Gasentwicklung hierbei bedeutend geringer ausfiel, als in den vorangegangenen Versuchen. Ursache dieser Erscheinung ist der Umstand, dass in den vorangegangenen Versuchen die Luft, bezüglich das Hydrogen fortwährend durch die Flüssigkeit gesogen wurden, demnach dieselbe in beständiger Bewegung erhielten, wie auch das gebildete Gas entfernt worden war; die Ruhe und der Umstand, dass Verdauungsproducte der Verdauuug selbst hinderlich sind, mässigten die Gasentwicklung bei den nun mitzutheilenden Versuchen bedeutend. Ansonst waren die Versuche ebenfalls mit Pankreas und Pankreasextract gemacht, welch letzterer mit Thymol oder Sublimat enthaltendem Wasser durch Selbstverdauung, wie auch mit Glycerin, nach der Methode von GRÜTZNER* gewonnen wurde. Die letztere bestand darin, dass 100 g Pankreas mit 900 ccm Glycerin und 100 ccm 1 % Na_2CO_3-lösung der Extraction ausgesetzt wurden und das Filtrat als Glycerinextract zur Verdauung diente. Ein Versuch mit 1 % Fluornatrium und Pankreas, sowie mit mittelst Fluornatriumlösung dargestellten Pankreasextract blieb resultatlos; es konnte weder Fettverdauung constatiert werden, noch trat Gasentwicklung auf. Auch Sublimat + 1 % Kochsalz erwiesen sich der Fettverdauung ungünstig, wohl trat etwas Verdauung und Gasentwicklung auf, doch alles dies in bedeutend geringerem Maasse, als wenn Sublimat für sich allein angewandt wurde. Die Salze scheinen also, wenigstens bei 1 % und mehr Gehalt, der Fettverdauung nachtheilig zu sein.

Ich setzte auch Oel allein fünf Tage lang in luftleerem Raume der Verdauungstemperatur aus, ferner hielt ich 10 g Oel mit 200 ccm 1 % Thymol enthaltendem Wasser, dann mit solchem, das 1 % Sublimat, wie auch 1 % Sublimat und 1 % Kochsalz enthielt, 20 Stunden lang im Thermostat, ohne die geringste Gasentwicklung constatieren zu können. Ebenso trat keine Gasentwicklung auf, wenn anstatt Pankreas Fleisch oder Speicheldrüsen, ob mit Oel oder nicht, zur Digestion verwendet wurden. Wie bei den früheren Versuchen, so kam es auch hier vor, dass

---

* Archiv f. d. ges. Physiol. Bd. 12 S. 303.

ich Pankreas erhielt oder Extract aus Pankreas bereitete, welche bei der Verdauung gar kein Gas entwickelten, während wieder andere Pankreas, bei genau derselben Behandlung, Gas erzeugten.

Nach den Erfahrungen, die man bei der Trypsinverdauung machte, glaubte ich, dies hänge von der Zeit ab, die seit dem Tode des Thieres bis dahin verstrichen ist, bis das Pankreas der Verdauung ausgesetzt worden war. Bestätigt wurde diese Voraussetzung durch die Ergebnisse der Versuche 13—15 der Tabelle III, in welchen mit der frischen Pankreas 2,08, mit jener aber, welche über Nacht an kühlem Ort aufbewahrt gewesen, 8,86 ccm Kohlensäure erhalten werden konnte. Andererseits aber zeigte sich, dass, wenn ein Pankreas, das noch warm in das Institut gelangte und sogleich zur Verdauung benützt würde, kein Gas entwickelt, so erzeugt der Rest des Pankreas ebenfalls kein Gas, wenn derselbe auch vorerst 12—18 Stunden lang am kühlen Orte, wo keine Fäulniss eintrat, aufbewahrt worden war. Ebenso trat in dem thymolisierten Extract eines solchen Pankreas, selbst dann, wenn dasselbe 1—2 Tage lang an der Luft frei stand und nachher mit Fett der Verdauung ausgesetzt wurde, keine Gasentwicklung auf, wie sich auch die neutrale Reaction des Extracts nicht merklich änderte. Wenn sich also das Enzym zu der Zeit, als das Thier getödtet wurde, im Pankreas nicht vorfand, so tritt dasselbe im Pankreas oder dessen Extract auch nicht mehr auf. Am sichersten erhielt ich bei der Verdauung Gasentwicklung, wenn ich nicht ein, höchstens zwei Pankreas, sondern viele (5—10 Stück) auf einmal in Verwendug nahm, wohl, weil unter soviel Pankreas stets eine oder mehrere vorkamen, die das Enzym enthielten. Aehnlich trifft man ja auch das Trypsin nicht in einem jeden Pankreasextract oder Pankreassekret an, und in den Pankreasextracten, die ich aus Pankreasen an Pneumonie oder Typhus gestorbener Personen gewonnen, fehlte ebenfalls jede Eiweissverdauung, während, im Falle die betreffenden Personen sonst gesund gewesen und eines plötzlichen Todes starben, die gewonnenen Extracte vorzüglich Eiweiss verdauten.

Ich machte mit Pankreas auch einen solchen Versuch, bei welchem ich die eine Hälfte des zermahlenen Pankreas zur Verdauung benützte, während die andere Hälfte desselben, auf einer

Glasplatte ausgebreitet, an warmem Ort dem langsamen Eintrocknen, bezüglich der Selbstverdauung ausgesetzt worden war. Die frisch benützte Pankreashälfte lieferte bei der Fettverdauung Gas, während jene, die 24 Stunden lang auf der Glasplatte gelegen, sowie das Extract der letzteren, ohne jede Wirkung war.

Alle diese Thatsachen bestätigen die Annahme, dass es in der Pankreas ein Enzym giebt, welches Fette in der Weise spaltet, dass dabei Gase frei werden. Diese Gase können unmöglich von Fäulniss herrühren, denn dann müssten ja dieselben in jedem Falle vorkommen und bei der Verdauung mit Pankreas, welches vor der Verwendung ohne Desinfectionsmittel, längere Zeit sogar, an warmem Ort gelegen, gewiss nicht fehlen. Auch lehren die angeführten Befunde, dass dieses Enzym nicht in jedem Pankreas enthalten ist, nicht nach dem Tode, als post mortale Erscheinung, in der Drüse auftritt. Ferner geht das Enzym leicht zu Grunde, besonders leicht dann, wenn das Pankreas oder der Extract sauer werden.

Die folgende Tabelle (Tab. III) enthält eine Uebersicht der Resultate von Analysen solcher Gase, welche bei der Verdauung im luftverdünnten, bezüglich luftleeren Raume, gewonnen wurden. Die Gasmengen sind auf 0 ° C. und 760 mm Quecksilberdruck reduciert.

Tabelle III.

Nummer der Versuche	Anordnung der Versuche	Untersuchte Gasmenge in cm³	CO_2 in cm³	H_2 in cm³	Verhältniss zwischen		Bemerkungen
					CO_2 %	H_2 %	
1	200 cm³ Pankreasextract, 10 cm³ Oel	18·88	14·47	3·86	78·95	21·05	Pankreasextract mit Thymol erzeugt. Im ganzen nicht viel Gas
2	dasselbe	20·7	15·22	4·07	78·91	21·09	Derselbe
3	dasselbe	5·23	3·76	1·44	72·31	27·7	Derselbe
4	dasselbe	26·33	15·30	10·64	59·01	40·99	Frischer Pankreasextract mit Thymol gewonnen. Viel Gas
5	dasselbe	19·44	4·06	4·582	46·88	53·12	Derselbe. Viel Luft gerieth in das Verdauuugsgefäss
6	200 cm³ Pankreasextract, 10 g Butter	25·35	12·2	12·4	49·56	50·44	Derselbe. Die Butter wurde zerlassen benützt
7	200 cm³ Glycerinextract, 10 cm³ Oel	15·1	2·20	0	—	—	Glycerinextract n. Grützner. Extraction dauerte einen Tag
8	dasselbe	4·99	3·188	0	—	—	Derselbe. Extraction dauerte 2 Tage
9	dasselbe	8·25	0·307	0	—	—	Derselbe. Extraction dauerte 3 Tage
10	100 g Pankreas, 100 cm³ Wasser, 0·2 g $HgCl_2$, 10 cm³ Oel	22·36	9·98	9·88	50·26	46·74	Frisches Pankreas

Nummer der Versuche	Anordnung der Versuche	Untersuchte Gasmenge in cm³	CO_2 in cm³	H_2 in cm³	Verhältniss zwischen		Bemerkungen
					CO_2 %	H_2 %	
11	150 g Pankreas, 150 cm³ Wasser, 0·3 g $HgCl_2$	36·19	19·47	17·05	53·32	46·68	Frisches Pankreas
12	100 g Pankreas, 100 cm³ Wasser, 0·2 g $HgCl_2$, 10 g Schweinefett	18·3	3·211	3·54	47·56	52·44	Frisches Pankreas. Viel Luft gerieth in das Verdauungsgefäss
13	100 g Pankreas, 100 cm³ Wasser, 2 g Thymol	14·59	2·00	0	—	—	Noch warm aus dem Schlachthaus geholtes Pankreas
14	100 g Pankreas, 100 g Wasser, 2 g Thymol	21·36	8·86	0	—	—	Dasselbe über Nacht an kühlem Ort aufbewahrt
15	100 g Pankreas, 100 g Wasser, 0·2 g $HgCl_2$, 2·0 g $NaCl$	4·619	2·648	0	—	—	Das letztere Pankreas

Das auffallendste Ergebniss der in dieser Tabelle verzeichneten Versuche ist die Gegenwart von Hydrogen bei einem grossen Theil derselben, wobei ausdrücklich hervorzuheben ist, dass Methan absolut nicht, auch nicht in Spuren, nachzuweisen war.

Die Versuche 1—3 wurden mit ein und demselben Pankreasextract durchgeführt und bei denselben im Ganzen nicht viel Gas gefunden; bedeutend reicher war die Gasentwicklung in den Versuchen 4—6, zu welchen ein anderer Pankreasextract diente. Ausser Oel wurde zum Extract in einem Versuche ausgelassene Butter gegeben; ein wesentlicher Unterschied war aber bei der Gasentwicklung nicht zu beobachten.

Mit aus frischer Pankreas, nach GRÜTZNER mit Glycerin gewonnenem Extract, machte ich die Versuche 7—9, bei welchen 200 ccm Extract auf je 10 ccm Oel einwirkte. In allen drei Versuchen konnte ich nach 20 stündiger Verdauung wohl Kohlensäure, doch kein Hydrogen nachweisen. Die Gasentwicklung war überhaupt gering, und am dritten Tage konnte selbst Kohlensäure nur in höchst geringer Menge erhalten werden. Das Enzym befand sich also am zweiten Tage am reichlichsten im Extract und war am dritten Tage bereits zum grössten Theil aus demselben verschwunden.

Unter den Versuchen, welche ich mit Drüsensubstanz und Sublimat gemacht (Tab. III, Vers. 10—12), befindet sich auch ein solcher, bei welchem Schweinefett (Schmalz) der Verdauung ausgesetzt worden war (Vers. 12). Das Mengenverhältniss von Kohlensäure und Hydrogen weicht hier kaum merklich von jenem ab, welches ich bei der Verdauung der Butter in thymolisiertem Pankreas-extract (Vers. 6) fand, indem in beiden Fällen ziemlich gleiche Mengen beider Gase vorhanden waren.

Bei einigen Versuchen gelangte während der Verdauung Luft in das Gefäss, wel die Glashähne schlecht schlossen, so besonders in den Versuchen 5, 7, 9, 12—15, doch änderte dieser Umstand nicht merklich den Verlauf der Gasentwicklung, da wir Kohlensäure und Hydrogen in dem während der Verdauung frei gewordenen Gas sowoht bei Gegenwart von Luft, also Oxygen (Vers. 5, 12), wie auch bei nahezu totalem Mangel des letzteren (Vers. 1—4, 6, 10) vorfinden.

Das Mengenverhältniss zwischen Kohlensäure und Hydrogen ist sehr verschieden und entspricht dem bei der Buttersäuregährung nicht (3 $CO_2 : 4\ H_2$). Wie sich der Vorgang hier überhaupt von dem bei der Buttersäuregährung auch darin wesentlich unterscheidet, dass, während die letztere bei Gegenwart des Sauerstoffs stillsteht, die Fettspaltung zu Folge des Pankreasenzyms bei Gegenwart des Sauerstoffs nur so vor sich geht wie bei Mangel desselben. Die Art der Fettspaltung lässt sich aus den Resultaten der Tabelle III nicht erschliessen, da das Verhältniss der Kohlensäure zum Hydrogen kein constantes is. Bei mässiger Gasentwicklung (Vers. 1—3) enthielt das producierte Gas verhältnissmässig viel mehr Kohlensäure als Hydrogen, während bei starker Gasentwicklung deren Mengen nahe gleich waren. Doch auch in den letzteren Fällen war bald etwas mehr Kohlensäure (Vers. 4, 10, 11), bald mehr Hydrogen (Vers. 5, 6, 12) vorhanden. Schliesslich fehlte in Versuchen, bei welchen die Gasentwicklung eine sehr geringe war, das Hydrogen ganz (Vers. 7—9, 13—15). Es muss also das Hydrogen, während es frei wird, auch wieder chemisch gebunden werden, und die Menge des auf diese Weise verschwindenden Wasserstoffs muss relativ zur gebildeten Kohlensäure grösser sein bei geringer, als bei starker Gasentwicklung. Vielleicht dass ungesättigte Fettsäuren, oder andere organische Verbindungen, eventuell das relativ zu anderen Enzymen sehr bald verschwindende Enzym selbst, das Hydrogen in statu nascenti binden. Um in diesen Vorgang eine genauere Einsicht zu gewinnen, wäre es nöthig, das Enzym isoliert zur Verdauung zu benützen. Allein dies stösst vor der Hand auf unüberwindliche Schwierigkeiten, da das Enzym sehr vergänglich ist und aus der Lösung nicht nur beim Ansäuern derselben (Tab. II, Vers, 2), sondern auch sonst binnen wenigen Tagen verschwindet.

Da das Glycerin mit dem Enzym keine Gase liefert, so dürften es die Säureradicale sein, die, während das Fett zerfällt, so weit gespalten werden, dass hierbei Kohlensäure und Hydrogen frei werden. Freilich geschieht dies nur so lange, bis die Säuren nicht in solcher Menge in der Verdauungsflüssigkeit auftreten, dass hiedurch die Enzymwirkung selbst gehemmt wird.

Den Veränderungen, welche die Nährstoffe bei der Verdauung erleiden, sind auch jene Veränderungen gleich, welche dieselben in der Hitze durchmachen. So werden Eiweisse in überhitztem Wasserdampf ebenfalls zu Albuminosen und Peptonen, und diese zerfallen schliesslich in die gewöhnlichen Amidosäuren. Stärke wird durch Behandlung mit siedendem Wasser oder durch Kochen in verdünnten Mineralsäuren zu Dextrin und Zucker umgeändert und von der Ameisensäure ist ebenso bekannt, dass dieselbe, auf 160 ° erhitzt, in Kohlensäure und Hydrogen zerfällt. während die höheren, bei gewöhnlicher Temperatur festen Fettsäuren sich bei der Destillation oder im überhitzten Wasserdampfe ebenfalls zersetzen; vielleicht ist die Wirkung des Fettenzyms diesen letzteren gleich. Auf jeden Fall lässt sich aus den mitgetheilten Versuchen mit grosser Wahrscheinlichkeit schliessen, dass auch die Verdauung der Fette nicht allein in der Spaltung zu Fettsäure und Glycerin und in der Bildung von Seifen besteht, sondern dass dieselbe ein viel weiter reichender Vorgang ist, bei welchem als Endproducte schliesslich auch Kohlensäure und Hydrogen entstehen. Die Erscheinung erinnert an die Wirkung des Trypsins auf Eiweiss, deren primäre Producte Albuminosen und Peptone sind, die aber bei anhaltender Einwirkung theilweise weiter in Leucin, Tyrosin und Glutaminsäure zerfallen. Wie Eiweisse, so werden auch Fette bei der Verdauung weiter gespalten, als dies der Verwerthung derselben im Organismus dienlich erscheint.

5.

ÜBER DIE REDUCTION DER DIFFUSIONS-GLEICHUNGEN VON KIRCHHOFF.

Von Prof. JULIUS FARKAS an d. Univ. Kolozsvár (Klausenburg).

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 18. April 1898.

Auszug aus «Mathem. és Természettud. Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftl. Anzeiger der Akademie, Bd. XVI. pp. 201—217. 1898).

KIRCHHOFF leitete für die freie Diffusion zweier Gase folgende Gleichungen aus seiner kinetichen Gas-Theorie ab (Vorlesungen, Theorie der Wärme, 1894. S. 197, 198):

$$\left.\begin{aligned}\mu_1 X &= \mu_1 \frac{du_1}{d_1 t} - \varkappa\mu_1\mu_2 (u_2 - u_1) + \frac{\partial p_1}{\partial x}\\ \mu_1 Y &= \mu_1 \frac{dv_1}{d_1 t} - \varkappa\mu_1\mu_2 (v_2 - v_1) + \frac{\partial p_1}{\partial y}\\ \mu_1 Z &= \mu_1 \frac{dw_1}{d_1 t} - \varkappa\mu_1\mu_2 (w_2 - w_1) + \frac{\partial p_1}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_2 X &= \mu_2 \frac{du_2}{d_2 t} - \varkappa\mu_2\mu_1 (u_1 - u_2) + \frac{\partial p_2}{\partial x}\\ \mu_2 Y &= \mu_2 \frac{dv_2}{d_2 t} - \varkappa\mu_2\mu_1 (v_1 - v_2) + \frac{\partial p_2}{\partial y}\\ \mu_2 Z &= \mu_2 \frac{dw_2}{d_2 t} - \varkappa\mu_2\mu_1 (w_1 - w_2) + \frac{\partial p_2}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \frac{\partial \mu_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial \mu_1 v_1}{\partial y} + \frac{\partial \mu_1 w_1}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial t} + \frac{\partial \mu_2 u_2}{\partial x} + \frac{\partial \mu_2 v_2}{\partial y} + \frac{\partial \mu_2 w_2}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

wo μ_1 und μ_2 die Dichtigkeit der zwei Gase, p_1 und p_2 ihre Spannung, $(u_1 v_1 w_1)$ und $(u_2 v_2 w_2)$ ihre Geschwindigkeit, (XYZ) die als in denselben identisch vorausgesetzte freie Beschleunigung: im Orte x, y, z und im Momente t; $\varkappa$ einen sehr grossen positiven Coefficienten (Function der Dichtigkeiten und der Spannungen) und

$$\frac{d}{d_1 t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_1 \frac{\partial}{\partial y} + w_1 \frac{\partial}{\partial z} \tag{1'}$$

$$\frac{d}{d_2 t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + w_2 \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2'}$$

Ich setze Folgendes voraus: 1. Am Anfang sind beide Gase im Zustand der Ruhe, haben gleichmässige und gleiche Temperatur, übereinstimmende Spannung und das weniger dichte ist ganz oberhalb des dichteren. 2. Das Zusammenlassen der Gase geschieht durch eine horizontale Öffnung und in der Umgebung ist während der Diffusion die Temperatur gleichmässig und constant. 3. Dass nur die freie Beschleunigung der Schwere in Betracht zu ziehen ist.

Besonders habe ich die Absicht hier zu zeigen, dass die zwei Spannungen (p_1 und p_2) unter diesen Bedingungen mit grosser Annäherung denselben Differential-Gleichungen genügen, wie unter den üblichen — auch von Kirchhoff befolgten — beschränkteren Bedingungen, wobei nämlich keine freie Beschleunigung zugelassen wird und dass sich den hier gegebenen Bedingungen noch diejenige anschliesst, dass sich die zwei Gase in einem verticalen cylindrischen Gefässe befinden, am Anfang durch eine sehr dünne horizontale Platte getrennt sind und diese Trennung beim Zusammenlassen der Gase im ganzen Querschnitt des Cylinders auf einmal ohne störende Wirkung verschwindet.

Das Experiment und die Theorie treffen sich in der Gleichung der Spannungen. Aber eine derartige Beschränkung der Gefässform verursacht experimentelle Schwierigkeiten, besonders die genügende Ermöglichung eines momentanen Contactes der zwei Gase auf der ganzen Fläche des Cylinder-Querschnittes.*

---

* Obermayer: Sitzungsber. der Ak. der Wiss. Wien, LXXXI. Bd. II. Abth. 1880. (p. 1104.).

Ausserdem ist desshalb, weil die Diffusion überall durch einen vollständigen Cylinder-Querschnitt stattfindet, dieselbe nicht so langsam, dass gewisse Rechnungs-Vernachlässigungen nicht unterhalb des Pünktlichkeitsgrades der Messung bleiben würden. Da es aus dem Folgenden hervorgehen wird, dass die Form des Gefässes indifferent ist für die Gleichungen, welche das Experiment und die Theorie zu einander in Beziehung bringen, so wird das Erstere sicherer und ausserdem auch abwechselnder zu machen sein, vom Gesichtspunkte der Theorie.

Jene beschränkende Voraussetzung, dass keine freie Beschleunigung vorhanden ist, bedeutet eigentlich bei der Beziehung des Experimentes zur Theorie eine Vernachlässigung und ist mit derjenigen Supposition äquivalent, dass in den Gleichungen (1) und (2) $\mu_1 X, \mu_2 X$, u. s. w. ohne Belang vorkommen. Doch können diese Gleichungen in dreifacher Weise so zu neuen linearen Gleichungen combiniert werden dass man von den neuen schon nicht behaupten kann, dass die freie Beschleunigung in denselben ohne Schaden vernachlässigt werden könnte; sobald ein Parameter nicht genügt zur Characterisierung der Abhängigkeit von dem Orte, so geschieht schon diese Vernachlässigung auf Kosten der Folgerungen. Die Addition der entsprechenden Gleichungen unter (1) und (2) führt uns zu diesen neuen Gleichungen aus dem Grunde, weil bei der Addition die Glieder mit dem sehr grossen Coefficienten $\varkappa$ wegfallen. Zur grösseren Vollständigkeit der Behandlung ist auch noch nothwendig, dass wir aus den neuen Gleichungen, die ersten Gliedei der rechten Seite von (1) und (2) nicht vollständig weglassen dürfen, wie es Kirchhoff that, sondern nur im Sinne von (1)′ und (2)′ die unendlich kleinen Theile höherer Ordnung vernachlässigen. Im vorliegenden Auszug werden wir aber von dieser Ergänzung absehen.

I. Nachdem am Anfange das dichtere Gas ganz unterhalb ist, die Temperaturen der zwei Gase gleichmässig und gleich sind, ihre Spannungen übereinstimmen und ihre Communication längst einer horizontalen Öffnung beginnt, so wird die Diffusion sehr langsam stattfinden. Besonders wird fortwährend und überall die Bewegung sehr langsam sein, wenn dass Gefäss stellenweise sich verengt und wenn die Scheidungsstelle vor Beginn der Vermengung sich in Verengung befand. In diesem Falle kann mit verlässlicher Sicherheit ein gewöhnlicher Hahn mit T-Bohrung das Scheidungsmittel sein, dessen Bohrung vor der Vereinigung mit einem der Gase in beständiger Communication war.

So wie KIRCHHOFF, wollen wir auch an der rechten Seite von (1) und (2) die ersten Glieder weglassen. Dem entsprechend schreiben wir statt (1) und (2):

$$\left.\begin{aligned}\mu_1 X + \varkappa\mu_1\mu_2(u_2 - u_1) &= \frac{\partial p_1}{\partial x}\\ \mu_1 Y + \varkappa\mu_1\mu_2(v_2 - v_1) &= \frac{\partial p_1}{\partial y}\\ \mu_1 Z + \varkappa\mu_1\mu_2(w_2 - w_1) &= \frac{\partial p_1}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_2 X + \varkappa\mu_2\mu_1(u_1 - u_2) &= \frac{\partial p_2}{\partial x}\\ \mu_2 Y + \varkappa\mu_2\mu_1(v_1 - v_2) &= \frac{\partial p_2}{\partial y}\\ \mu_2 Z + \varkappa\mu_2\mu_1(w_1 - w_2) &= \frac{\partial p_2}{\partial z}\,.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Dem schliessen sich noch (3) und (4) und die hieher gehörenden Wärme-Gleichungen an. Nachdem vor Beginn der Diffusion die Temperatur der zwei Gase gleichmässig und gleich war und in der Umgebung des Gefässes die Temperatur gleichmässig und constant ist, die Gas-Bewegung aber eine sehr langsame ist, so wird mit grosser Annäherung der Vorgang ein isothermischer sein. Man kann also mit grosser Annäherung setzen:

$$p_1 = n_1\mu_1, \quad p_2 = n_2\mu_2 \qquad (7)$$

mit der Bedingung, dass n_1 und n_2 bei der herrschender Temperatur die bezüglichen charakteristischen Constanten der Gase, sowohl vom Orte, als auch von der Zeit unabhängig sind. Es wird auch noch zu berücksichtigen sein, dass n_1 und n_2 sehr gross sind, insoferne $\sqrt{n_1}$ und $\sqrt{n_2}$ grosse Geschwindigkeiten sind, derartig grosse, wie in den betreffenden Gasen die Schall-Geschwindigkeiten.

Aus (3), (4), (5), (6) kann man nach folgenden Vorgängen neue Gleichungs-Systeme bilden: die Gleichungen (5) werden mit dem Divisor n_1 die (6) mit dem Divisor n_2, beziehungsweise addiert, ein anderesmal einfach addiert; ferner werden die Gleichungen (3) und (4) mit den Multiplicatoren n_1 und n_2 addiert, dann auch einfach addiert. Auf diese Weise gelangen wir zu acht solchen Gleichungen, deren System äquivalent ist mit dem System der acht Original-Gleichungen, weil umgekehrt aus jenen diese folgen. Bevor wir aber diese Operationen verrichten, wird es zweckmässig sein, schon im Vorhinein gewisse neue Veränderliche einzuführen.

II. Die gesammte Dichtigkeit bezeichne μ, die gesammte Spannung p, im x, y, z im Zeit-Momente t:

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu \tag{8}$$

$$p_1 + p_2 = p. \tag{9}$$

schreiben wir ferner

$$\begin{aligned} p_1u_1 + p_2u_2 &= pu \\ p_1v_1 + p_2v_2 &= pv \\ p_1w_1 + p_2w_2 &= pw. \end{aligned} \tag{10}$$

Im Sinne von (7) ist auch

$$n_2p_1 + n_1p_2 = n_1n_2\mu \tag{8$'$}$$

$$n_1\mu_1 + n_2\mu_2 = p \tag{9$'$}$$

$$\begin{aligned} n_1\mu_1u_1 + n_2\mu_2u_2 &= pu \\ n_1\mu_1v_1 + n_2\mu_2v_2 &= pv \\ n_1\mu_1w_1 + n_2\mu_2w_2 &= pw. \end{aligned} \tag{10$'$}$$

Aus (8) und (9)′ folgt

$$\mu_1 = \frac{n_2\mu - p}{n_2 - n_1}, \quad \mu_2 = \frac{n_1\mu - p}{n_1 - n_2}. \tag{11}$$

aus (9) und (8)′ oder (7) und (11) aber

$$p_1 = n_1\frac{n_2\mu - p}{n_2 - n_1}, \quad p_2 = n_2\frac{n_1\mu - p}{n_1 - n_2}. \tag{12}$$

Jetzt wenden wir uns zu den im vorgehenden I. angemeldeten Operationen. In den durch die erste Operation entstehenden Gleichungen befinden sich die mit dem sehr grossen $\varkappa$ multiplizierten Glieder, also können aus diesen Gleichungen die übrigen Glieder der linken Seite weggelassen werden, welchen entsprechend:

$$\varkappa\mu_1\mu_2(n_2-n_1)(u_2-u_1)=n_1n_2\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

$$\varkappa\mu_1\mu_2(n_2-n_1)(v_2-v_1)=n_1n_2\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

$$\varkappa\mu_1\mu_2(n_2-n_1)(w_2-w_1)=n_1n_2\frac{\partial\mu}{\partial z}.$$

Aber es ist

$$\mu_1\mu_2(n_2-n_1)(u_2-u_1)$$

$$=\mu_1\frac{n_2-n_1}{n_2}(n_2\mu_2u_2-n_2\mu_2u_1),$$

also laut (10)'

$$=\mu_1\frac{n_2-n_1}{n_2}[pu-(n_1\mu_1+n_2\mu_2)u_1]$$

und daher auch nach (9)'

$$=\mu_1\frac{n_2-n_1}{n_2}p(u-u_1)$$

und in ähnlicher Weise kann man finden, dass auch

$$=\mu_2\frac{n_1-n_2}{n_1}p(u-u_2).$$

Wir haben daher als Resultate der ersten oben angezeigten Operation die Gleichungen;

$$\left.\begin{aligned}\varkappa(n_2-n_1)p\mu_1(u-u_1)&=n_1n_2^2\frac{\partial\mu}{\partial x}\\ \varkappa(n_2-n_1)p\mu_1(v-v_1)&=n_1n_2^2\frac{\partial\mu}{\partial y}\\ \varkappa(n_2-n_1)p\mu_1(w-w_1)&=n_1n_2^2\frac{\partial\mu}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(13)_1'$$

$$
\begin{aligned}
\varkappa(n_1-n_2)p\mu_2(u-u_2) &= n_2 n_1^2 \frac{\partial\mu}{\partial x}\\
\varkappa(n_1-n_2)p\mu_2(v-v_2) &= n_2 n_1^2 \frac{\partial\mu}{\partial y}\\
\varkappa(n_1-n_2)p\mu_2(w-w_2) &= n_2 n_1^2 \frac{\partial\mu}{\partial z}\,.
\end{aligned}
\qquad (13)'_2
$$

Diese Gleichungen dienen dazu, dass durch sie die zwei Bewegungs-Geschwindigkeiten $(u_1 v_1 w_1)$ und $(u_2 v_2 w_2)$ mittelst den Veränderlichen μ, p, u, v, w ausgedrückt werden. Und zwar mit Rücksicht auf (11).

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u - \frac{n_2}{n_2\mu-p}\,\frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\,\frac{\partial\mu}{\partial x}\\
v_1 &= v - \frac{n_2}{n_2\mu-p}\,\frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\,\frac{\partial\mu}{\partial y}\\
w_1 &= w - \frac{n_2}{n_2\mu-p}\,\frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\,\frac{\partial\mu}{\partial z}
\end{aligned}
\qquad (13)''_1
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 &= u - \frac{n_1}{n_1\mu-p}\,\frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\,\frac{\partial\mu}{\partial x}\\
v_2 &= v - \frac{n_1}{n_1\mu-p}\,\frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\,\frac{\partial\mu}{\partial y}\\
w_2 &= w - \frac{n_1}{n_1\mu-p}\,\frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\,\frac{\partial\mu}{\partial z}\,.
\end{aligned}
\qquad (13)''_2
$$

Auf diese Weise drücken (11), (12), $(13)''_1$, $(13)''_2$ die alten zehn Veränderlichen μ_1, μ_2; p_1, p_2; u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 durch die fünf neuen μ, p und u, v, w aus. Die übrigen am Schlusse von I. angedeuteten Operationen lassen uns zu fünf Gleichungen für die fünf neuen Veränderlichen gelangen.

Es möge noch bemerkt sein, um es im Folgenden benützen zu können, dass aus den Gleichungen $(13)'_1$ und $(13)'_2$ durch Subtraction im Sinne von (8) die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 &= \mu u - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\,\frac{\partial\mu}{\partial x}\\
\mu_1 v + \mu_2 v_2 &= \mu v - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\,\frac{\partial\mu}{\partial y}\\
\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 &= \mu w - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\,\frac{\partial\mu}{\partial z}
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

folgen.

III. Diesmal sollen diejenigen Gleichungen abgeleitet werden, welche die fünf neuen Veränderlichen: μ, p und u, v, w betreffen. Die am Schlusse von I. angezeigten und noch übrig gebliebenen drei Operationen führen zu denselben.

Aus der zweiten Operation folgt, wenn (8) und (9) in Betracht gezogen wird

$$\mu X = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mu Z = \frac{\partial p}{\partial z} \tag{14}$$

Aus der dritten Operation folgt mit Benützung von (9)′ und (10)′:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial pu}{\partial x} + \frac{\partial pv}{\partial y} + \frac{\partial pw}{\partial z} = 0. \tag{15}$$

Endlich aus der vierten Operation auf Grund von (13):

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu u - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu v - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu w - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p}\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = 0. \tag{16}$$

Die unter (14), (15), (16) befindlichen fünf Gleichungen dienen zur Bestimmung unserer fünf Veränderlichen μ, p und u, v, w, welche fünf Veränderliche in (11), (12) und in $(13)_1''$, $(13)_2''$ unmittelbar ausdrücken, die zehn alten Veränderlichen μ_1, μ_2, p_1, p_2 und $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2$ der zehn Original-Gleichungen (3), (4), (5), (6), (7).

Der wiederholt vorkommende Factor

$$\frac{n_1 n_2}{\varkappa p} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\mu_1 \mu_2}{p_1 p_2}\frac{1}{p}$$

ist der sogenannte Diffusions-Coefficient. Er wird gewöhnlich als constant betrachtet. Wenn er es auch nicht ist, so kann man mit Gewissheit sagen*, dass er sich sowohl mit dem Orte, wie auch mit der Zeit wenig ändert. Es bezeichne von nun an der Buchstabe k:

---

* Winkelmann: Handbuch der Physik I. p. 644.

$$\frac{n_1 n_2}{\varkappa p} = k. \tag{17}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial t}, \quad \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x}, \quad \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial y}, \quad \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial z} \tag{17'}$$

sind stets kleine Grössen.

IV. In der Voraussetzung, dass nur die freie Beschleunigung der Gravitation Einfluss übt, stellen wir die z Axe vertikal abwärts. Wenn g die Grösse der Gravitations-Beschleunigung bezeichnet, so wird jetzt stets und überall

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g.$$

sein

Jetzt lauten daher die Gleichungen (14) wie folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu g \tag{18}$$

So hängt p vom Orte bloss durch die Coordinate z ab, und infolge dessen auch μ.* Aus diesem Grunde sind die Ableitungen nach x und y in (17)′ besonders klein.

V. Nachdem dies alles in Bezug auf die Gleichungen (14) begründet ist, wenden wir uns zu den Gleichungen (15) und (16).

Benützend die Bezeichnung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Theta \tag{19}$$

und auch die unter (17) befindliche, ferner in Betracht gezogen, dass im Sinne von IV. p und μ von x und y unabhängig ist, können wir die Gleichungen (15) und (16) also schreiben:

$$\frac{\partial p}{\partial z} w + p\Theta + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} w + \mu\Theta + \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial \mu}{\partial z}\right). \tag{21}$$

---

* Zugleich daher im Sinne von (11) und (12) auch die Dichtigkeiten μ_1, μ_2, und die Spannungen p_1, p_2. (Die verticale Bewegung ist daher so langsam, dass durch horizontale Bewegung die Dichtigkeiten und die Spannungen in den horizontalen Querschnitten einander mit grosser Annäherung fortwährend ausgleichen.)

Jetzt werde ich beweisen, dass die zwei ersten Glieder links in (21) ohne Belang sind. Das zu beweisen ist jetzt noch unsere Hauptaufgabe.

a) Wir differenzieren die Gleichung (20) nach z. Zieht man dann die dritte Gleichung unter (18) in Betracht, so erhält man:

$$\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{p}{g\mu}\frac{\partial \theta}{\partial z}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial z}w+\theta+\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}=0. \tag{22}$$

Das letzte Glied

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial t}+\frac{\partial \mu_2}{\partial t}\right)$$

ist jedenfalls ein unendlich Kleines von sovieltem Grade, wie

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \mu_1}{\partial t} \text{ und } \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial \mu_2}{\partial t},$$

weder von höherem, noch von niederem Grade. Nach (3) und (4) ist es daher* ein unendlich Kleines von so vieltem Grade, als die Bewegungs-Geschwindigkeiten $(u_1 v_1 w_1)$ und $(u_2 v_2 w_2)$. Laut der Bedeutung von u, v, w ist aber das erste, dritte und vierte Glied wenigstens ein unendlich Kleines vom so vieltem Grade,** als die Bewegungs-Geschwindigkeiten. So ist daher das zurückgebliebene Glied

$$\frac{p}{g\mu}\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

wenigstens ein unendlich Kleines von so vieltem Grade, als die Bewegungs-Geschwindigkeiten. Aber $p:\mu$ ist das Quadrat einer grossen Geschwindigkeit (IV.).

So ist

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

ein unendlich Kleines von höherer Ordnung, wie die Bewegungs-

* Was seinen Zahlenwerth anbelangt (d. h. Multipliziert mit der Längeneinheit).

** Was seinen Zahlenwerth anbelangt (d. h. Multipliziert mit der Flächeneinheit).

Geschwindigkeiten, daher ist θ bei grosser Annäherung unabhängig von der Coordinate z.

b) Daraus folgt mit Hilfe von (20), dass auch θ ein unendlich Kleines von höherer Ordnung ist, wie die Bewegungs-Geschwindigkeiten. Nämlich laut den Gleichungen (20) und (18) ist

$$\frac{g\mu}{p} w + \theta + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \tag{20$'$}$$

Setzen wir voraus, dass θ kein unendlich Kleines von höherer Ordnung ist, wie die Bewegungs-Geschwindigkeiten. Da kann das erste Glied in (20)′ weggelassen werden, da w wenigstens ein unendlich Kleines von sovielter Ordnung ist, als die Bewegungs-Geschwindigkeiten und $p : \mu$ ist das Quadrat einer grossen Geschwindigkeit. Wir haben also

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} + \theta = 0.$$

Da θ bei grosser Annäherung *a)* nur die Function von x, y, t ist, p aber nur die Function von z und t ist, so folgt aus dieser Gleichung, dass deren zwei Glieder nur von t abhängen in jener Supposition, dass θ kein unendlich Kleines von höherer Ordnung ist, wie die Bewegungs-Geschwindigkeiten. Nach diesem ein Raumelement des Gefässes mit $D\tau$ bezeichnend kann

$$\int \theta D\tau = \theta \int D\tau \tag{23}$$

bei grosser Annäherung gesetzt werden. Wenn wir aber die Integration auf das ganze Volumen des Gefässes erstrecken, ein Element der Oberfläche dieses Volumens mit $D\sigma$ bezeichnen und die Richtungs-Cosinuse der nach Aussen zeigenden Normale α, β, γ sind, so wird (19) in Betracht gezogen

$$\int \theta D\tau = \int (\alpha u + \beta v + \gamma w) \, D\sigma.$$

Nach der Bedeutung von u, v, w in (10) ist:

$$p(\alpha u + \beta v + \gamma w) =$$
$$= p_1(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1) + p_2(\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2).$$

Hier sind die in der zweiten Zeile in Klammern befindlichen Grössen, die Componenten längs der Normale der zwei Bewegungs-Geschwindigkeiten, also ist der Werth jeder derselben $= 0$. Folglich ist

$$\int \Theta D\tau = 0$$

und nach (23) wird mit einer grossen Annäherung mit einer grösseren, wie die Kleinheits-Ordnung der Bewegungs-Beschleunigungen ist: $\Theta = 0$, im Widerspruche mit derjenigen unserer Voraussetzung, dass Θ kein unendlich Kleines von höher Ordnung ist, wie die Bewegungs-Geschwindigkeiten.

c) Nachdem Θ ein unendlich Kleines von höherer Ordnung ist, wie die Bewegungs-Geschwindigkeiten, hingegen $\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}$ ein unendlich Kleines von derselben Ordnung *a)*, so kann man das zweite Glied links in (21) weglassen. Ist dies geschehen, so folgt aus dem Umstande, dass u und k als von den Coordinaten x, y unabhängig erscheinen (IV), dass auch die Abhängigkeit des w von den Coordinaten, x, y ausser Acht gelassen werden kann. Daraus folgt aber, dass auch w ein unendlich Kleines von höherer Ordnung ist, wie die Geschwindigkeiten.

Da nämlich mit einer Annäherung von höherer Ordnung, wie die Ordnung der Bewegungs-Geschwindigkeiten $\Theta = 0$ *b)*, dass heisst (24):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

so multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Raumelemente $D\tau$ und mit einer Funktion ψ, die nur von z und t abhängt, und dessen Ableitung nach z überall stets mit w zugleich positiv oder negativ ist. Mit einer auf den Inhalt des Gefässes sich erstreckenden partiellen Integration

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \psi D\tau = - \int w \frac{\partial \psi}{\partial z} D\tau = 0,$$

denn wie wir gesehen haben, ist auf der Oberfläche

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

Nachdem $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ nicht unendlich klein zu sein braucht, so ist w ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, also kann $w=0$ gesetzt werden.

VI. Nach diesem kann die Gleichung (21) so geschrieben werden

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) \tag{24}$$

und nach (20) ist

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t} = -\left(\frac{1}{p}\frac{\partial \mu}{\partial z} w + \theta\right) \tag{25}$$

ein unendlich Kleines höherer Ordnung, wie die Bewegungs-Geschwindigkeiten.

Es ist leicht aus der Gleichung (24) die Gleichungen der einzelnen Gas-Spannungen abzuleiten. Es wird nach (12)

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{n_1}{n_2 - n_1}\left(n_2 \frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{n_1}{n_2 - n_1}\left(n_2 \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

d. h. wenn in der zweiten Gleichung auch (18) in Betracht gezogen wird:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{n_1 n_2 \mu}{n_2 - n_1}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{1}{n_2 \mu}\frac{\partial p}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{n_1 n_2 \mu}{n_2 - n_1}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{g}{n_2}\right).$$

Nachdem $n_2 \mu$ eine Quantität von derselben Ordnung, wie p, $\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t}$ aber ein unendlich Kleines von höherer Ordnung ist (25), wie die Bewegungs-Geschwindigkeiten; nachdem ferner n_2 das Quadrat einer grossen Geschwindigkeit ist: so können die zweiten Glieder rechts vernachlässigt und

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{n_1 n_2}{n_2 - n_1}\frac{\partial \mu}{\partial t}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{n_1 n_2}{n_2 - n_1}\frac{\partial \mu}{\partial z}$$

geschrieben werden. Daraus und aus (24) folgt, dass

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial p_1}{\partial z}\right) \tag{26}$$

und es kommt auch dieselbe Gleichung der Spannung p_2 zu, jede mit einer Annäherung von höherer Ordnung, wie die Ordnung der unendlich kleinen Bewegungs-Geschwindigkeiten ist.

Bei einer ziemlich guten Annäherung, wie bei KIRCHHOFF (bei ihm in Bezug auf ein Gefäss mit senkrechten Seitenwänden)

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = k \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}. \tag{26$'$}$$

6.

ERGÄNZUNGEN ZUR VEKTOREN-LEHRE UND ZUR LEHRE DES ELEKTRO-MAGNETISMUS.

Von Prof. JULIUS FARKAS an d. Univ. Kolozsvár (Klausenburg).

Vorgelegt der ung. Akademie in der Sitzung vom 17. October 1898.

Aus «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger.) Bd. XVI. pp. 321—360. 1898.

INHALTSVERZEICHNISS.

I. **1.** Über diejenigen parametrischen Ausdrücke der Vektoren, in welchen die Parameter ein Skalar-Potenzial und ein Vektor-Potential sind. 2. Gewisse Eigenschaften der Funktion des Ortes, als Bedingungen ihrer Einwerthigkeit. 3. Der STOKES'sche Integral-Satz; die analytische Begründung gewisser Gültigkeits-Bedingungen davon. 4. Von denjenigen parametrischen Ausdrücken der Vektoren, in welchen die Parameter zwei Skalar-Potentiale und ein Multiplikator sind: die Bestimmung der Beliebigkeits-Grenze dieser Parameter. 5. Die Angabe einer funktionalen Beschränkung derselben Parameter. 6. Eine Unendlichkeits-Eigenschaft der Funktion des Ortes, als der Funktion von zwei anderen Funktionen.

II. 1. Die auf die Variablen der MAXWELL-HEAVISIDE'schen Gleichungen (elektrische und magnetische Kraft) sich erstreckende funktionalen Eigenschaften. 2. Das funktionale Verhältniss der elektrischen und magnetischen Kraft in den Gleichungen im Falle von isotropen und ruhenden Mitteln. 3. Dasselbe im Falle von krystallinischen und sich bewegenden Mitteln. 4. Dasselbe mit Rücksichtnahme des HALL'schen Phänomens. 5. Die Bestimmung der von dem permanenten Magnetismus herrührenden magnetischen Kraft.

III. 1. Einführung eines allgemeinen Principes, welches zum Ausdrucke der localen elektromotorischen Kraft und der localen Induktion geführt hat. 2. Eine vollständigere Ausnützung dieses Principes. 3. Beweis dessen, dass dieser vollständigere Vorgang zu der erfahrungsmässigen Ergänzung der MAXWELL-HEAVISIDE'schen Gleichungen führt. 4. Bemerkung zur Aufstellung der elektro-magnetischen Gleichungen der bewegten Mittel.

I. Zur Vektoren-Lehre.

Seit Clebsch stehen folgende Ausdrücke in häufiger Verwendung für die Vektoren:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial O}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\
Y &= \frac{\partial O}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\
Z &= \frac{\partial O}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1}
$$

wie auch

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial F}{\partial x} + H\frac{\partial G}{\partial x} \\
Y &= \frac{\partial F}{\partial y} + H\frac{\partial G}{\partial y} \\
Z &= \frac{\partial F}{\partial z} + H\frac{\partial G}{\partial z},
\end{aligned} \tag{2}
$$

welche in jedem solchen Raumtheil möglich sind, in welchem der Vektor (X, Y, Z) eine differenzierbare stetige Funktion des Ortes (x, y, z) ist.*

Diese Ausdrücke sind die augenscheinlichen Zusammensetzungen von solchen speciellen Vektoren, welche auch selbstständig oft in der mathematischen Physik vorkommen, nämlich

$$(2)_{H=0} \quad \text{oder} \quad (1)_{L=0,\, M=0,\, N=0} \tag{3}$$

$$(1)_{O=0} \tag{4}$$

$$(2)_{F=0} \tag{5}$$

und letztere sind so zu betrachten, als parametrische Ausdrücke gewisser partieller Differential-Gleichungen. Diese Gleichungen sind folgende:

---

* Clebsch, Crelle Journ. LVI. 1859. LXI. 1863.
Stokes, Trans. Cambridge 1849.
Voigt, Komp. d. th. Phys. I. p. 188—193.

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0 \qquad \text{ad (3)}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0 \qquad \text{ad (4)}$$

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+Y\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)=0 \qquad \text{ad (5)}$$

als äquivalente zu den funktionalen Behauptungen (3), (4), (5).

In einem besonderen Falle ist es von besonderer Bedeutung zu wissen, ob in (1), (2), (3), (4), (5) die mit gewissen funktionalen Eigenschaften behafteten Parameter (O, L, M, N, F, G, H) anwendbar sind, ohne die erlaubte Allgemeinheit der Vektoren (X, Y, Z) zu verletzen.

Bevor ich diese meine Behauptung ausführlich umschreiben möchte, führe ich eine Benennung ein.

Hat eine Funktion, als Funktion des Ortes folgende Eigenschaft: endlich, stetig, einwerthig, differenzierbar zu sein im ganzen Raume und sind seine ersten Coordinaten-Abtheilungen auch endlich, stetig, eindeutig, differenzierbar im ganzen Raume, ferner verschwindet die Funktion im Unendlichen wenigstens von erster Ordnung, ihre ersten Coordinaten-Ableitungen wenigstens von zweiter Ordnung (jene wenigstens so, wie die reciproken Werthe der Entfernungen, diese wenigstens so, wie die Quadrate der reciproken Werthe der Entfernungen), so nenne ich die Funktion eine NEWTON'sche. Nach dem GREEN'schen Satze hat eine solche Funktion die Form eines gewöhnlichen Raum-Potentials.

Aus Rücksicht wichtiger Anwendungen ist es nothwendig zu wissen, wenn X, Y, Z NEWTON'sche Funktionen sind, ob auch die Parameter O, L, M, N, bezw. F, G, H ebenfalls immer NEWTON'sche Funktionen sein können. In der Voraussetzung nämlich, dass diese Parameter solche Funktionen sind, kann man mit einfachen Mitteln wichtige Folgerungen ziehen, welche sonst nicht zu machen wären.

1. Bezüglich der Formen (1), (3), (4), ist die Frage vollkommen erledigt. Benützen wir folgende Bezeichnungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\equiv 4\pi u,\qquad \frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial x}\equiv 4\pi v,\qquad \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\equiv 4\pi w, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\equiv 4\pi k, \tag{6}$$

dann ist

$$-4\pi\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial k}{\partial x}\right)\equiv \varDelta X, \text{ u. s. w.}$$

Folglich, da X, Y, Z NEWTON'sche Funktionen sind, nach dem GREEN'schen Satze

$$X=-\int\left(\frac{\partial k}{\partial a}+\frac{\partial w}{\partial b}-\frac{\partial v}{\partial c}\right)\frac{D\tau}{r}, \text{ u. s. w.}$$

wo $D\tau$ das Raumelement im Orte a, b, c bedeutet, und r die Entfernung dieses Ortes von (x, y, z). In Folge der funktionalen Eigenschaften der Ausdrücke u, v, w und k (5), sind nämlich ihre derivierten integrabel im ganzen Raume.

So ist

$$X=-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{k}{r}D\tau+\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{w}{r}D\tau-\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{v}{r}D\tau \quad \text{u. s. w.}$$

also entsprechen:

$$O=-\int\frac{k}{r}D\tau, \quad L=\int\frac{u}{r}D\tau, \quad M=\int\frac{v}{r}D\tau, \quad N=\int\frac{w}{r}D\tau \tag{7}$$

und zwar mit stetigen, endlichen, eindeutigen, differenzierbaren k, u, v, w.

In den speciellen Fällen (3), bezw. (4) liefert einfach $u=0$, $v=0$, $w=0$, bezw. $k=0$ das Resultat der Lösung der Frage.

Fügen wir dem jetzt noch folgende Bemerkung zu.

Wenn k, u, v, w nur in endlicher Entfernung nicht überall verschwinden, so werden im Sinne der Ausdrücke unter (7) O, L, M, N im Unendlichen wenigstens von der ersten Ordnung verschwinden, X, Y, Z aber von mindestens der zweiten Ordnung, die Coordinaten-Ableitungen der letzteren von mindestens der dritten Ordnung. Vorausgesetzt aber, dass X, Y, Z von höherer als der zweiten Ordnung im Unendlichen verschwinden, ist nothwendiger Weise

$$\int kD\tau=0, \quad \int uD\tau=0, \quad \int vD\tau=0, \quad \int wD\tau=0. \tag{8}$$

Nämlich, wenn die Richtungs-Cosinuse des bis ins Unendliche sich erstreckenden Vektors R, α, β, γ sind, so wird im Unendlichen

$$R^2X=\alpha\int kD\tau-\beta\int wD\tau+\gamma\int vD\tau, \quad \text{u. s. w.}$$

In der Voraussetzung, dass X, Y, Z im Unendlichen in einer höheren Ordnung, wie der zweiten, verschwinden, so werden diese Grenz-Ausdrücke bei jedem Richtungs-Cosinus α, β, γ verschwinden, also erfordern sie die Gleichungen (8). Ferner zugleich bei derselben Voraussetzung können die Funktionen O, L, M, N, d. h.

$$-\int\frac{k}{r}D\tau\equiv-4\pi\int\left(\frac{\partial X}{\partial a}+\frac{\partial Y}{\partial b}+\frac{\partial Z}{\partial c}\right)\frac{D\tau}{r},$$

$$\int\frac{u}{r}D\tau=4\pi\int\left(\frac{\partial Z}{\partial b}-\frac{\partial Y}{\partial c}\right)\frac{D\tau}{r}, \quad \text{u. s. w.}$$

mit Anwendung von partiellen Integrationen auf die Formen geführt werden:

$$\begin{aligned} O&=4\pi\int\left(X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}+Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}+Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)D\tau,\\ L&=-4\pi\int\left(Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}-Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)D\tau, \quad \text{u. s. w.}\end{aligned} \tag{9}$$

2. Es möge an diesem Orte bemerkt sein, dass wenn wir eine Funktion in der Weise definieren, dass wir in der Definition der NEWTON'schen Funktion anstatt der Einwerthigkeit der Funktion die ausnahmslose Endlichkeit der zweiten Ableitungen fordern, so definieren wir eine NEWTON'sche Funktion: wenn eine Funktion, als Funktion des Ortes in einem einfach zusammenhängenden Theile des Raumes endlich, stetig, differenzierbar und ihre ersten Coordinaten-Ableitungen endlich, stetig, einwerthig, differenzierbar, ihre zweiten Coordinaten-Ableitungen endlich sind, so ist schon die Funktion einwerthig.

Hat nämlich die Funktion ψ in einem einfach zusammenhängenden Raumtheile diese Eigenschaften, so verschwindet dieses Linien-Integral:

$$\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz\right)$$

auf jeder zweifach zusammenhängenden Linie geführt, auf so einer, welche ganz im Innern des Raumtheiles ist. Dies erhellt daraus, dass jene Eigenschaften der Funktion ψ es erlauben, dass das Integral nach dem STOKES'schen Satze auf ein derartiges Oberflächen-Integral umgeformt werde, welches sich auf der von einer zweifach zusammenhängenden Linie begrenzten zweiseitigen Fläche ausbreitet, und jedes Element dieses Oberflächen-Integrales verschwindet.

MAXWELL beweist am Anfange des ersten Bandes (Art. 19) seines grossen Werkes, ohne Erwähnung jeder Bedingung, dass die Funktionen des Ortes in den einfach zusammenhängenden Theilen des Raumes einwerthig sind. Da aber die Gültigkeit der Behauptung an solche Bedingungen gebunden ist, welche in den Conceptionen von MAXWELL auch implicite nicht enthalten sind, ist auch natürlicher Weise die Richtigkeit des Beweises nicht allgemein. Nämlich es erfordert, dass die Flächen ψ=const. sich in einer solchen Linie nicht schneiden, welche durchgeht durch den betrachteten einfach zusammenhängenden Raumtheil.

3. Die, der Funktion ψ des Ortes zugeordneten Eigenschaften (Endlichkeit, Stetigkeit Differenzierbarkeit, die Endlichkeit, Stetigkeit, Einwerthigkeit, Differenzierbarkeit der ersten Ableitungen und die Endlichkeit der zweiten Ableitungen) genügen zur gültigen Anwendung des Theoremes von STOKES. Ganz klar erscheint dies von folgender — wie es mir scheint neuer — Deduction des Theoremas, welche auf der Umwandlung eines Raum-Integrals zu einem Oberflächen-Integral beruht.

Es sei die Gleichung einer zweiseitigen Flache $\Omega=0$. Nehmen wir einen einfach zusammenhängenden Theil davon in Betracht, in deren Nähe Ω eine differenzierbare stetige Funktion des Ortes, und deren Ableitungen endlich, stetig, einwerthig, und differenzierbare Funktionen seien. Die bei stetiger Änderung der Funktion Ω unserer Fläche sich anreihenden Flächen

$$\Omega=\text{const.}=DS$$

schneiden nicht den ausgewählten Flächentheil, wenigstens solange der Werth von DS kleiner ist, wie irgend ein kleiner Werth von DS, denn die Ableitungen von Ω sind in der Gegend von dem Flächentheil endlich. Unter denjenigen Flächen, welche unseren ausgewählten Flächentheil aus der Fläche $\Omega=0$ ausschneiden, gibt es eine solche, welche die Flächen $\Omega=DS$ überall normal schneidet, wenigstens solange der Werth von DS kleiner ist, wie ein gewisses Kleines. Der von einer Fläche $\Omega=DS$, ferner, von der Fläche $\Omega=0$, und von der normal schneidenden Fläche eingeschlossene Raumtheil ist nun eine dünne Raumschichte τ. Der ausgewählte Flächentheil von $\Omega=0$, sei mit σ_0 bezeichnet.

Ist (ξ, η, ζ) als Funktion des Ortes endlich stetig, einwerthig, differenzierbar, und sind seine Ableitungen endlich im Raumtheil τ, also in der Gegend des Oberflächentheiles σ_0, dann wird

$$\int\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial b}-\frac{\partial\eta}{\partial c}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial a}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}-\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial b}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial a}-\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right]D\tau$$
$$=\int\left[\xi\left(\frac{\partial\Omega}{\partial c}\beta-\frac{\partial\Omega}{\partial b}\gamma\right)+\eta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\gamma-\frac{\partial\Omega}{\partial c}\alpha\right)+\zeta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial b}\alpha-\frac{\partial\Omega}{\partial a}\beta\right]D\sigma$$

wo das linksseitige Integral auf dem Raum τ, das rechtsseitige auf der Oberfläche σ desselben zu erstrecken ist; α, β, γ sind die Richtungs-Cosinuse der auf die innere Seite der Fläche hinweisenden Normalen. Nachdem auf der Oberfläche von $\Omega=0$ und $\Omega=DS$ des Raumes τ

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a}:\frac{\partial\Omega}{\partial b}:\frac{\partial\Omega}{\partial c}=\alpha:\beta:\gamma,$$

ist, so reduziert sich das Oberflächen-Integral auf denjenigen Theil, welcher sich auf die schmale Seitenfläche der Schichten bezieht. Wenn nun am Orte a, b, c die Dicke der Schichte Dn ist und ein Randelement vo σ_0 mit $D\lambda$ bezeichnet wird: ein verschwindendes Dn im Auge behaltend kann man setzen

$$D\tau=D\sigma_0 Dn,\quad D\sigma=D\lambda Dn.$$

im Raum — beziehungsweise im Flächen-Integral.

Auch in Betracht gezogen, dass

$$(Dn)^2=(DS)^2:\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right)^2\right],$$

und die Richtungs-Cosinuse einer Normalen von $D\sigma_0$ mit $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ bezeichnend, können wir unsere Integralgleichung also schreiben:

$$\int\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial b}-\frac{\partial\eta}{\partial c}\right)\alpha_0+\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}-\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)\beta_0+\left(\frac{\partial\eta}{\partial a}-\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)\gamma_0\right]D\sigma_0$$
$$=\int[\xi(\beta\gamma_0-\gamma\beta_0)+\eta(\gamma\alpha_0-\alpha\gamma_0)+\zeta(\alpha\beta_0-\beta\alpha_0)]\,D\lambda$$

wo sich das erste Integral über die Fläche σ_0, das zweite über die Randlinie λ desselben erstreckt; $\beta\gamma_0-\gamma\beta_0$ u. s. w. aber sind die Richtungs-Cosinuse einer Richtung der Randlinie, deren Verhältniss zu dem Normalen-Systeme $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ leicht zu erkennen ist.

4. Um sich Kenntniss zu schaffen von den Parametern F, G, H unter (2) und (5), untersuchen wir die Beliebigkeitsverhältnisse dieser Funktionen.

Zu einer gegebenen X, Y, Z Funktion gehörige Funktion F, G, H sei F_0, G_0, H_0 in den Gleichungen (2). Die übrigen soll die additive Ergänzung

$$F=F_0+f,\quad G=G_0+g,\quad H=H_0+h.$$

liefern.

Dies für X, Y, Z in (2) einschreibend, und in Betracht gezogen, dass auch F_0, G_0, H_0 entsprechen, gelangen wir zu folgenden Gleichungen, als Gleichungen von f, g, h:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+(h+H_0)\frac{\partial g}{\partial x}+h\frac{\partial G_0}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}+(h+H_0)\frac{\partial g}{\partial y}+h\frac{\partial G_0}{\partial y}&=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}+(h+H_0)\frac{\partial g}{\partial z}+h\frac{\partial G_0}{\partial z}&=0.\end{aligned}\tag{10}$$

Nach diesen Gleichungen verschwindet die Jacobi'sche Determinante der Funktionen f, g, G_0: f lässt sich als Funktion von g und G_0 auffassen. Folglich können unsere Gleichungen auch also geschrieben werden:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}+h+H_0\right)\frac{\partial g}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial G_0}+h\right)\frac{\partial G_0}{\partial x}=0$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}+h+H_0\right)\frac{\partial g}{\partial y}+\left(\frac{\partial f}{\partial G_0}+h\right)\frac{\partial G_0}{\partial y}=0$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}+h+H_0\right)\frac{\partial g}{\partial z}+\left(\frac{\partial f}{\partial G_0}+h\right)\frac{\partial G_0}{\partial z}=0.$$

Nach diesem ist entweder

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial g}+h+H_0=0\\&\frac{\partial f}{\partial G_0}+h=0\end{aligned}\tag{11}$$

oder aber die drei Jacobi'schen Determinanten von g und G_0 verschwinden, also lässt sich g und damit auch f als Funktion von G_0 auffassen, weshalb wegen (10)

$$\frac{df}{dG_0}+(h+H_0)\frac{dg}{dG_0}+h=0.\tag{12}$$

ist.

Dem entsprechend ist entweder

$$\begin{aligned}&F_0+f\equiv F=F_0+f(g,\ G_0)\\&G_0+g\equiv G=G_0+g\\&H_0+h\equiv H=-\frac{\partial f}{\partial g}\\&\frac{\partial f}{\partial G_0}-\frac{\partial f}{\partial g}=H_0\end{aligned}\tag{11'}$$

oder aber

$$\begin{aligned}&F_0+f\equiv F=F_0+f(G_0)\\&G_0+g\equiv G=G_0+g(G_0)=G(G_0)\\&H_0+h\equiv H=\left(H_0-\frac{df}{dG_0}\right):\frac{dG}{dG_0}.\end{aligned}\tag{12)'}$$

Es ist aber zweckmässig den Inhalt von (11)' in einer anderen Form zu betrachten. Nach der letzten Gleichung von (11)' erscheint g als Funktion von G_0 und H_0. Demzufolge kann auch

f und G als Funktion von G_0 und H_0 in Betracht kommen. Dieselben als solche benützend, finden wir mit Hilfe der entsprechenden infinitesimalen Transformation:

$$\begin{aligned} &F_0+f\equiv F=F_0+f(G_0,\, H_0)\\ &G_0+g\equiv G=G(G_0,\, H_0)\\ &H_0+h\equiv H=-\frac{\partial f}{\partial H_0}:\frac{\partial G}{\partial H_0}\\ &\frac{\partial f}{\partial G_0}\frac{\partial G}{\partial H_0}-\frac{\partial f}{\partial H_0}\frac{\partial G}{\partial G_0}=H_0\frac{\partial G}{\partial H_0}\,. \end{aligned} \tag{12}''$$

Entweder kann f oder G (letztere anstatt g) als beliebige Funktion von G_0 und H_0 gewählt werden; zur Bestimmung der anderen dient die vierte Gleichung. In den früheren Ausdrücken $(12)'$ ist G und f ebenfalls eine beliebige Funktion von G_0.

Was den unter (5) befindlichen speciellen Ausdruck ($F=0$) anbelangt, führt der gleiche Vorgang zu der einzigen Möglichkeit

$$\begin{aligned} &G_0+g\equiv G=G(G_0)\\ &H_0+h\equiv H=H_0:\frac{dG}{dG_0}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

5. Sind die in (2) durch die Parameter $F,\ G,\ H$ oder in (5) durch die Parameter $G,\ H$ ausgedrückten $X,\ Y,\ Z$ Funktionen NEWTON'sche Funktionen, so können die Parameter doch nicht immer NEWTON'sche Funktionen sein; d. h. wenn wir voraussetzen, dass jede von $F,\ G,\ H$ in (2) eine NEWTON'sche Funktion ist, so würden die durch sie bestimmten Funktionen $X,\ Y,\ Z$ nur eine Classe der NEWTON'schen bilden, und wenn wir noch annehmen, dass in (5) sowohl G, wie auch H eine NEWTON'sche Funktion sei, so würden wir die dort noch überhaupt mögliche Classe der NEWTON'schen Funktionen auch verengen.

Es kann nämlich vorkommen, dass die Funktion G_0 um gewisse Linien herum cyklometrische Vieldeutigkeit besitzt, d. h. dieselbe hat eine Vieldeutigkeit um constante Differenzen, und dennoch sind die Produkte

$$H_0\frac{\partial G_0}{\partial x}\,,\qquad H_0\frac{\partial G_0}{\partial y}\,,\qquad H_0\frac{\partial G_0}{\partial z}$$

NEWTON'sche Funktionen, theilweise deshalb, weil die Ableitungen von G_0 schon nicht mehrdeutig sind, theilweise deshalb, weil auf den Flächen, Linien und in den Punkten, wo diese Ableitungen unendlich werden, dort H_0 in genug hohem Grade verschwindet, wie auch im Unendlichen. Nichts leichteres, wie solche Funktionen G_0 und H_0 dem entsprechend zu construieren, und zwar auch solche, bei welchen G_0 nach incommensurablen Constanten vielwerthig wird.

Ist aber G_0 mit incommensurablen Perioden mehrwerthig, dann ist nach (12)′ und (12)″, bezw. nach (13) schon jede analytische Funktion G mehrwerthig, welche nämlich denjenigen (X, Y, Z) Vektor liefert, wie G_0 und H_0.

6. Aus Nothwendigkeit der folgenden Anwendungen will ich noch auf ein analytisches Verhalten hinweisen, das zu betrachten übrigens auch durch andere Anwendungen gefordert wird.

Es sei, dass eine differenzierbare Funktion φ des Ortes so aufzufassen wäre, wie eine Funktion zweier differenzierbarer Funktionen u und v des Ortes von gegebener Form:

$$\varphi=\varphi(u, v),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}.\end{aligned}\tag{14}$$

Ich behaupte, dass wo die ersten Coordinaten-Ableitungen von φ, u, v endlich, aber die Ableitungen von φ nach irgend einem oder nach beiden Parametern (u,v) unendlich sind, dort die JACOBI'schen Determinanten der zwei Parameter verschwinden. In der Voraussetzung, dass die Ableitung von φ nach u im Orte x, y, z unendlich ist multiplicieren wir die zweite Gleichung von (14) mit $\partial v : \partial z$, die dritte mit $\partial v : \partial y$, und nacher subtrahieren wir die eine Gleichung von der anderen. Auch zwei andere ähnliche Vorgänge befolgend, finden wir:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\quad \text{u. s. w.}$$

Laut Voraussetzung sind die linken Theile in diesen Gleichungen endlich, in den rechten ist $\partial\varphi : \partial u$ unendlich. Also ist

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Ich behaupte ferner, dass wo die ersten Coordinaten-Ableitungen von φ und u endlich sind, aber $\partial\varphi : \partial u$ unendlich ist und überall in dieser Gegend (das heisst identisch :)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

dort verschwinden die Ableitungen von u. Multiplicieren wir nach der Reihe die Gleichungen (14) mit den Ableitungen von u und dann addieren wir dieselben :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right].$$

Da im Sinne der Voraussetzungen die linke Seite endlich ist, auf der rechten aber $\partial\varphi : \partial u$ unendlich ist im Orte x, y, z, so wird:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 0$$

sein.

II. Über die Hertz'sche Definition der Maxwell-Heaviside'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes.

1. Die elektromagnetischen Gleichungen Maxwell's wurden durch ihre Formulierung von Heaviside zur Bedeutung von Fundamental-Gleichungen erhoben, besonders in der Hertz'schen Behandlung.*

Boltzmann aber erhebt Einwendungen gegen die einleitenden Definitionen von Hertz,** welche sich auf die Variablen der Glei-

* Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. 1892.

** Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Electricität und des Lichtes. 1893. II. Th. §, 3.

chungen, auf die s. g. elektrische und magnetische Kraft beziehen, in den Bezeichnungen von HERTZ (X, Y, Z) und (L, M, N). Im Sinne dieser Einwendungen sind jene Definitionen theilweise überflüssig, theilweise auch unrichtig. Diese Einwendungen sind berechtigt und auch wohl begründet.

Es sind aber unbedingt nothwendig gewisse Elemente in den Definitionen, welche in den HERTZ'schen implicite enthalten sind. Und zwar sind gewisse funktionale Eigenschaften für die elektrische und magnetische Kraft in vorhinein anzugeben. Eigenschaften, ohne deren vorheriger Angabe, in das System der Folgerungen gehörige partikuläre Integrale nicht mit Nothwendigkeit auftreten, sondern hypothetisch sind, bezw. a posteriori einzuführende definitionsmässige Beschränkungen verlangen.

In Betracht gezogen, dass der Begriff der Flächendichte, dann des Flächenmomentes und der Liniendichte der Electricität, des Magnetismus, des elektrischen Stromes, nur wie formelle Grenzbegriffe zu betrachten sind, kann man in vorhinein von den elektrischen und magnetischen Kräftecomponenten X, Y, Z und L, M, N fordern, dass diese NEWTON'schen Funktionen des Ortes sein sollen, und zwar was ihr Verhalten im Unendlichen anbelangt, soll die elektrische Kraft wenigstens in der zweiten Ordnung, die magnetische Kraft wenigstens in der dritten Ordnung im Unendlichen verschwinden.

Nur auf diese Weise können die mit der Erfahrung übereinstimmenden partikulären Folgerungen, als nothwendig und ausschliesslich richtig betrachtet werden.

2. Nach den Bezeichnungen von HERTZ, sind die Gleichungen des magnetischen Feldes in isotropen und ruhenden Medien (l. c. S. 21):

$$\begin{aligned}
A\mu \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\
A\mu \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\
A\mu \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi A\lambda (X - X') &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \\
A\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi A\lambda (Y - Y') &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \\
A\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi A\lambda (Z - Z') &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} .
\end{aligned} \tag{2}
$$

Boltzmann hält die besondere mechanische Definition der magnetischen Kräfte (L, M, N) für überflüssig (l. c. S. 15.), denn diese sind schon durch (1) definiert, vorausgesetzt, dass sie vor sehr langer Zeit Null waren; ferner sagt der Autor: «Dass sie den Kräften proportional sind, welche auf einen Solenoidpol wirken, kann dann später aus den Gleichungen bewiesen werden. Stahlmagnete sind dann als Magnete aufzufassen, in denen unbekannte kleine Ströme fliessen.»

Aber was die Bestimmung der magnetischen Kräfte (L, M, N) anbelangt, bloss auf die Gleichungen (1), und dem entsprechend auf lange Zeiten zu verweisen, muss ich eben im Rahmen der Hertz'schen Gleichungen als übertriebenes Verfahren bezeichnen. Dies erfordert in gewissem Maasse die Angabe einer passenden Vorgeschichte der gegenwärtigen Zustände, beziehungsweise Änderungen. Ausserdem müssen die «unbekannten Strömungen», welche anstatt dem permanenten Magnetismus gesetzt werden, in Betracht kommen in den Gleichungen (2), also müssen sie wegen der Bestimmtheit der Gleichungen gegeben sein.

Dem gegenüber werde ich hier beweisen, dass der permanente Magnetismus und die momentane elektrische Kraft aus den Gleichungen die momentane magnetische Kraft bestimmen.

Nehmen wir an, dass es zwei solche magnetische Kräfte giebt, welche bei gegebener elektrischer Kraft und gegebenem permanenten Magnetismus die Gleichungen befriedigen, u. z. (L, M, N) und (L_0, M_0, N_0). Benützen wir die Bezeichnungen

$$L - L_0 \equiv L', \quad M - M_0 \equiv M', \quad N - N_0 \equiv N' \tag{3}$$

so wird nach den Gleichungen (2)

$$\frac{\partial M'}{\partial z} - \frac{\partial N'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial N'}{\partial x} - \frac{\partial L'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial L'}{\partial y} - \frac{\partial M'}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

Ferner, da der permanente Magnetismus auch gegeben ist, so hat man

$$\frac{\partial \mu L'}{\partial x} + \frac{\partial \mu M'}{\partial y} + \frac{\partial \mu N'}{\partial z} = 0\,; \tag{5}$$

es gehört nämlich ausser dem nach der POISSON'schen Regel inducierten Magnetismus nur noch der permanente Magnetismus in die Theorie, also ist seine Dichtigkeit

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mu L}{\partial x} + \frac{\partial \mu M}{\partial y} + \frac{\partial \mu N}{\partial z}\right),$$

der Unterschied zwischen der vollständigen (freien) Dichtigkeit und der POISSON'schen inducierten (scheinbaren) Dichtigkeit: in der That lassen diesen Unterschied die Gleichungen (1), welche bezw. nach x, y, z differentiert und dann addiert werden, unverändert erscheinen.

Laut den Gleichungen (4) hat der Differenzen-Vector (L', M', N') ein Skalar-Potential. Aber in der gemachten Voraussetzung, dass die magnetische Kraftcomponenten L, M, N, wie auch L_0, M_0, N_0 NEWTON'sche Funktionen sind (II. 1.), sind auch die Componenten L', M', N' solche (3), also auch ihr Potential ist eine solche Funktion (I. 1.) Daher folgt aus der Gleichung (5) (wenn man mit dem Potential multipliciert und über den ganzen Raum partiell integriert)

$$L'=0, \quad M'=0, \quad N'=0.$$

Es wird daher durch die momentane elektrische Kraft und durch den permanenten Magnetismus in isotropen, ruhenden Medien aus den Fundamentalgleichungen (1) und (2) die momentane magnetische Kraft vollständig bestimmt.

3. Auf gleicher Weise folgt, dass auch in der Gegenwart von krystallinischen, ruhenden Medien die momentane elektrische Kraft und der permanente Magnetismus die momentane magnetische Kraft bestimmen und im Falle der Massenbewegung, dieselben und die momentanen Bewegungs-Geschwindigkeiten dieselbe bestimmen: aus den allgemeinen Gleichungen (I*b*) von HERTZ (l. c. S. 261) folgen auch im Anschluss an diesen Daten die Gleichun-

gen unter (4), und wenn wir nach Analogie von (3) in Bezug auf die «magnetische Polarisation» oder anders benannt «die Anzahl der magnetischen Kraftlinien» $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ setzen

$$\mathfrak{L}-\mathfrak{L}_0\equiv\mathfrak{L}', \quad \mathfrak{M}-\mathfrak{M}_0\equiv\mathfrak{M}', \quad \mathfrak{N}-\mathfrak{N}_0\equiv\mathfrak{N}'$$

so gehört nach den Gleichungen (I*a*) (l. c. S. 261) von Hertz zu dem permanenten Magnetismus

$$\frac{\partial\mathfrak{L}'}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}'}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}'}{\partial z}=0, \tag{5}$$

denn aus jenen Gleichungen folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha\,.+\frac{\partial}{\partial y}\beta\,.+\frac{\partial}{\partial z}\gamma\,.\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}\right)=0,$$

in welcher die linke Seite nichts anderes ist, als die totale Veränderungs-Geschwindigkeit von

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}$$

(α, β, γ) sind die Geschwindigkeits-Componenten der Massenbewegung und der 4π-te Theil dieser Grösse ist die Dichtigkeit des permanenten Magnetismus (Hertz l. c. S. 266 und S. 267).

Der Beweis ist ebenso, wie im Falle isotroper und ruhender Medien, nur setzt seine Gültigkeit gewisse Eigenschaften der Anisotropie voraus, welche übrigens nach allen bisherigen Erfahrungen als allgemein betrachtet werden können.*

4. Man nennt im Falle ruhender isotroper Medien, den mit den linken Seiten der Gleichungen (2), als mit Componenten gebildeten Vektor, elektrische Strömung.

Im Allgemeinen bilden die linken Seiten der Hertz'schen Gleichungen (I*b*) ergänzt mit dem letzten Gliede der rechten Sei-

* Voigt, Komp. d. th. Phys. II. 1896. S. 184. u. 185.

ten (l. c. S. 261) denjenigen Vektor, welcher in der Behandlung von HERTZ dem Begriffe der elektrischen Strömung entspricht.

In diesem Sinne bestimmen schon die momentane elektrische Strömung und der permanente Magnetismus die momentane magnetische Kraft aus den Fundamental-Gleichungen nach dem Beweise des früheren Artikels.

Wollen wir aber auch das HALL'sche Phänomen in Betracht ziehen, so müssen in den Fundamental-Gleichungen die Strömungs-Componenten mit gewissen Gliedern ergänzt werden. In der Theorie von VOIGT sind die Ergänzungs-Componenten in ursprünglich isotropen Medien (l. c. S. 302 und 303)

$$\begin{gathered}\theta.(ZM-YN)\\ \theta.(XN-ZL)\\ \theta.(YL-XM),\end{gathered}$$

wo θ annäherungweise von den magnetischen Zuständen unabhängig ist.

Diese ergänzenden Strömungs-Componenten in Betracht gezogen, müssen anstatt den Gleichungen unter (4) folgende gesetzt werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N'}{\partial y}-\frac{\partial M'}{\partial z}&=\theta.(ZM'-YN')\\ \frac{\partial L'}{\partial z}-\frac{\partial N'}{\partial x}&=\theta.(XN'-ZL')\\ \frac{\partial M'}{\partial x}-\frac{\partial L'}{\partial y}&=\theta.(YL'-XM').\end{aligned}$$

Aus ihnen folgt auf leicht erkennbarer Weise

$$\left(\frac{\partial N'}{\partial y}-\frac{\partial M'}{\partial z}\right)L'+\left(\frac{\partial L'}{\partial z}-\frac{\partial N'}{\partial x}\right)M'+\left(\frac{\partial M'}{\partial x}-\frac{\partial L'}{\partial y}\right)N'=0$$

Daher ist der Differenzen-Vektor von folgender Form

$$L'=\rho\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x},\quad M'=\rho\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y},\quad N'=\rho\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}.$$

Würde jetzt daraus, dass L', M', N' NEWTON'sche Funktionen sind nothwendiger Weise folgen, dass $\tilde{\omega}$ auch eine solche, und ρ eine endliche, stetige einwerthige, differenzierbare Funktion ist, so könnte man nach den Gleichungen (5) folgern, dass die Differentialquotienten von $\tilde{\omega}$ überall verschwinden, also, dass auch im Falle eines bemerkbaren HALL'schen Effectes die momentane magnetische Kraft vollständig bestimmt wäre durch die momentane elektrische Kraft und den permanenten Magnetismus.

Jedoch in Folge des (I. 5) Vorgetragenen fällt diese Folgerung weg, und es tritt dem HALL'schen Phänomen entsprechend nach der einfachen Hypothese von VOIGT die von BOLTZMANN indicierte Bestimmung in den Vordergrund.

5. Zur Bestimmung des permanenten Magnetismusses kann diejenige Methode dienlich sein, welche HERTZ zur Definition der magnetischen Kraft benützt, weil sie im Einklange steht mit den Ausdrücken der Magneto-Striction und weil der permanente Magnetismus unabhängig von den elektrischen Kräften in Betracht gezogen werden kann, nämlich bei Erzeugung solcher Verhältnisse, welche den Gleichungen, (1) und (2) unterworfen sind und zwar in der Weise, dass die rechten Seiten von (1) und die linken Seiten von (2) verschwinden.

Es fragt sich aber, ob wenn man, nach HERTZ, anstatt den thatsächlichen mechanischen Wirkungen andere setzt, ob die Bestimmung keine partikuläre ist, d. h. ob mit dem wirklichen mechanischen (ponderomotorischen) Effekte sich nicht noch eine andere (L, M, N) Funktion als «magnetische Kraft» verträgt; denn im Falle der Bejahung, enthält die Bestimmung eine überflüssige Beschränkung.

Gegenwärtig ausschliesslich isotrope Medien im Auge behaltend, wenn wir folgende Bezeichnungen benützen:

$$\frac{\partial \mu L}{\partial x}+\frac{\partial \mu M}{\partial y}+\frac{\partial \mu N}{\partial z}\equiv 4\pi k \tag{6}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\equiv 4\pi i_x,\quad \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}=4\pi i_y,\quad \frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\equiv 4\pi i_z \tag{7}$$

$$L^2+M^2+N^2=F^2, \tag{8}$$

so werden die effektiven mechanischen Kräfte-Componenten auf die Raumeinheit aus den MAXWELL'schen Magneto-Strictions-

Gleichungen* berechnet sein:

$$
\begin{aligned}
kL &= \frac{1}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}F^2+\mu(Mi_z-Ni_y)\\
kM &= \frac{1}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial y}F^2+\mu(Ni_x-Li_z)\\
kN &= \frac{1}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial z}F^2+\mu(Li_y-Mi_x).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Der Vektor $(i_x i_y i_z)$ ist die elektrische Strömung. Aber da in Ermanglung von elektrischer Strömung der permanente Magnetismus derselbe ist und er auch von jener befreit werden kann, so können wir uns auf die von jenen unabhängigen Gleichungen beschränken. Vorausgesetzt aber, dass

$$i_x=0,\quad i_y=0,\quad i_z=0, \tag{10}$$

so hat die magnetische Kraft (L, M, N) ein Skalar-Potential (7). Sei diese mit ψ bezeichnet, so dass

$$L=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad M=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad N=-\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{11}$$

sei, dann wird (6), (8):

$$-4\pi k=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \tag*{(11)$'$}$$

$$F^2=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 \tag*{(11)$''$}$$

sein und die Componenten der mechanischen Kraft sind

$$
\begin{aligned}
&-\left(k\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{8\pi}F^2\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\\
&-\left(k\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{1}{8\pi}F^2\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\\
&-\left(k\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{1}{8\pi}F^2\frac{\partial\mu}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

* Vollkommen entwickelte Formeln traf ich nur im Kompendium von Voigt. Dort sind andere, kompliciertere Ausdrücke (II. S. 273) angeführt, aber eine einfache Rechnung zeigt, dass sie mit den vorliegenden übereinstimmen.

In den Grenzschichten können die Ableitungen von μ gross sein, obgleich μ selbst (der Coefficient der magnetischen Induction) sich überall wenig von einer Constanten unterscheidet und im Inneren der Magnete sind auch seine Ableitungen klein. So kann man vom zweiten Gliede in den Ausdrücken der mechanischen Kraft (12), ohne die Allgemeinheit zu verletzen, nicht absehen.

Das nächste bezweckt die Entscheidung: mit welcher Beliebigkeit entspricht das Potential ψ einer gegebenen effektiven mechanischen Kraft (12). Die Behandlung ist aus dem Grunde, mit manchen Schwierigkeiten verbunden, weil wir mit quadratischen partiellen Differential-Gleichungen zu thun haben, daher sie auch nicht kurz ausgeführt werden kann.

6. Setzen wir voraus, dass einer gewissen mechanischen Kraft (12) zweierlei magnetische Kräfte entsprechen, von denen der ersten das Potential ψ_0, der zweiten das Potential ψ zukommt. Aus (12) folgt

$$
\begin{aligned}
k\frac{\partial\psi}{\partial x} - k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x} &= 0 \\
k\frac{\partial\psi}{\partial y} - k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial y} + \frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial y} &= 0 \qquad (13) \\
k\frac{\partial\psi}{\partial z} - k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial y} + \frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}
$$

Es sind zwei Hauptgruppen möglich. Entweder ist

$$k=0, \quad k_0=0, \quad F^2-F_0^2=0 \qquad (14)$$

oder es verschwindet die Jacobi'sche Determinante der Funktionen ψ, ψ_0, μ, also können diese Funktionen, als Funktionen zweier Veränderlichen betrachtet werden:

$$\psi=\psi(p,q), \quad \psi_0=\psi_0(p,q), \quad \mu=\mu(p,q), \qquad (15)$$

woraus sich wegen (13):

$$
\begin{aligned}
&\left(k\frac{\partial\psi}{\partial p} - k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial p} + \frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \\
&+\left(k\frac{\partial\psi}{\partial q} - k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial q} + \frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

ergiebt.

Dieser Hauptfall enthält die Möglichkeit zweier Nebenfälle. Es ist nämlich in diesem zweiten Hauptfalle entweder

$$\begin{aligned} k\frac{\partial\psi}{\partial p}-k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial p}+\frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial p}&=0 \\ k\frac{\partial\psi}{\partial q}-k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial q}+\frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial q}&=0, \end{aligned} \tag{15$'$}$$

oder aber die drei JACOBI'schen Determinanten der Funktionen p und q verschwinden, also lassen sich dieselben als Funktionen einer einzigen gemeinsamen Veränderlichen auffassen, und ebenso auch ψ, ψ_0, μ:

$$\psi=\psi(\varsigma), \quad \psi_0=\psi_0(\varsigma), \quad \mu=\mu(\varsigma), \tag{16}$$

und dem anschliessend

$$k\frac{d\psi}{d\varsigma}-k_0\frac{d\psi_0}{d\varsigma}+\frac{F^2-F_0^2}{4\pi}\frac{d\mu}{d\varsigma}=0. \tag{16$'$}$$

Es ist aber auch jene Möglichkeit zu betrachten, dass in gewissen Theilen des Raumes einer von den drei Fällen, in anderen andere vorkommen.

Es ist übrigens augenscheinlich, dass im Falle (15), (15)′ auch (16), 16)′ enthalten ist aber zum Zwecke der bewerkstelligenden Folgerungen wähle ich in (15), (15)′ für die Veränderlichen p und q, die Funktionen ψ_0 und ψ, wodann (15), (15)′ in

$$\begin{aligned} &\mu=\mu(\psi,\psi_0) \\ &8\pi k+(F^2-F_0^2)\frac{\partial\mu}{\partial\psi}=0 \\ &8\pi k_0-(F^2-F_0^2)\frac{\partial\mu}{\partial\psi_0}=0. \end{aligned} \tag{17}$$

übergeht.

Nur ist von hier aus ein solcher Fall ausgeschlossen, der in (15), (15)′ enthalten ist und weder in (14), noch in (16), (16)′ vorkommt, nämlich derjenige Fall, in welchem $F^2=F_0^2$ und zugleich die JACOBI'sche Determinante der Potentiale ψ_0 und ψ als Funktionen von p und q, verschwindet.

Es muss also noch als ein besonderer Fall:

$$F^2 - F_0^2 = 0 \tag{18}$$

$$k\frac{d\psi}{d\varsigma} - k_0\frac{d\psi_0}{d\varsigma} = 0.$$

betrachtet werden.

Hingegen können wir von (16), (16)′, als in (17) und in (18) enthaltend absehen: (17) und (18) enthält vollkommen in sich die Gesammtheit der zu (15), (15)′ gehörigen Fälle, wenn wir uns vor der Möglichkeit nicht verschliessen, dass $\partial\mu : \partial\psi_0$ und $\partial\mu : \partial\psi$ in einzelnen Punkten, Linien und Flächen unendlich ist.

6_1. Vorausgesetzt, dass (14) im ganzen Raume stattfindet, so folgt aus seinen zwei ersten Gleichungen laut (11)′ nach bekannter Weise, dass

$$\psi_0 = 0, \quad \psi = 0$$

ist im ganzen Raume, denn nach den vorläufigen funtionellen Voraussetzungen (II, 1) hat die Funktion ψ_0 und ψ die Eigenschaften, welche zu diesen Folgerungen nöthig sind.

Es soll daher die Gültigkeit des Falles (14) im ganzen Raume als ausgeschlossen betrachtet werden.

6_2. Addieren wir und subtrahieren wir die zwei Differential-Gleichungen (17). Wenn wir uns dann der Bezeichnung

$$\psi - \psi_0 = \psi_1, \quad \psi + \psi_0 = \psi_2 \tag{19}$$

bedienen und die Funktionen ψ_1 und ψ_2 als Argumente anstatt ψ_0 und ψ einführen, so werden unsere Gleichungen laut (11)′ und (11)″ die Form annehmen:

$$4\pi k_1 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\psi_2} = 0$$

$$4\pi k_2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\psi_1} = 0$$

wo k_1 und k_2 durch ψ_1 und ψ_2 ebenso ausgedrückt ist, wie in (11) k durch ψ. Ihre Ausdrücke eingesetzt, erscheinen unsere Gleichungen, wie folgt:

$$\begin{aligned} F_1^2 \frac{\partial \mu}{\partial \psi_1} + \mu \Delta \psi_1 = 0 \\ F_2^2 \frac{\partial \mu}{\partial \psi_2} + \mu \Delta \psi_2 = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

wo F_1^2 und F_2^2 durch ψ_1 und ψ_2 ebenso definiert sind, wie in (11)'' F^2 durch ψ.

Multiplicieren wir die erste Gleichung (20) mit einer vorderhand unbestimmten Funktion Φ (ψ_1) von ψ_1 und mit dem Raumelement $D\tau$, und dividieren durch μ; integrieren wir dann dieselbe über den ganzen Raum. Am zweiten Gliede links eine partielle Integration verrichtend finden wir:

$$\int \left(\frac{d\Phi}{d\psi_1} - \frac{\Phi}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \psi_1} \right) F_1^2 D\tau = 0, \tag{21}$$

wenn nur die Funktion Φ so gewählt ist, dass sie überall endlich, stetig, einwerthig, differenzierbar sei und ihre Ableitung $d\Phi : d\psi_1$ überall endlich ist. Es ist nämlich $F_1^2 \partial\mu : \partial\psi_1$ überall endlich, wie dies aus (20) folgt.

Ist $\partial\mu : \partial\psi_1$ selbst auch endlich, dann kann man die Funktion Φ so wählen zwischen den Grenzen der sie beschränkenden Bedingungen, dass im Integral der Faktor von F_1^2 überall positiv sei. Es entspricht z. B.

$$\Phi = \psi_1^{2m+1},$$

wenn nur m eine grössere positive ganze Zahl bedeutet, wie eine gewisse endliche Zahl. Denn dann ist im Integral der Faktor von F_1^2:

$$\left(2m+1 - \frac{\psi_1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \psi_1} \right) \psi_1^{2m}.$$

Es entspricht auch

$$\Phi = \psi_1^3 e^{-m : \psi_1^2}$$

Dann ist im Integral der Faktor von F_1^2:

$$\left(2m + 3\psi_1^2 - \frac{\psi_1^3}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \psi_1} \right)$$

u. s. w. Daher ist überall $F_1=0$, d. h. $\psi_1=\text{const.}$ und folglich

$$\psi-\psi_0=\text{const.}=0.$$

Wir müssen aber noch mit der Möglichkeit rechnen, dass $\partial\mu:\partial\psi_1$ in einzelnen Punkten, Linien, oder Flächen unendlich ist. Natürlich ist wegen (20) an diesen Orten nothwendigerweise $F_1=0$. Schliessen wir jetzt sehr kleine Kugeln, sehr dünne Röhren, sehr dünne Schichten aus dem Raume der Integration, d. h. aus dem unendlichen Raum, solche nämlich, welche diese Punkte Linien und Flächen enthalten. Dann schliessen sich der linken Seite (21) auch Oberflächen-Integrale an, welche folgende Form haben

$$\int \Phi \frac{\partial\psi_1}{\partial n} D\sigma,$$

wo n die auswärts weisende Normale des Flächenelementes $D\sigma$ bedeutet. Insoferne ein solches Integral sich auf die Oberfläche einer sehr kleinen Kugel oder einer sehr dünnen Röhre bezieht, ist es schon aus dem Grunde sehr klein, weil die Fläche sehr klein ist; insoferne es sich aber auf die Oberfläche von einer sehr dünnen Schichte bezieht, ist es auch schon deshalb sehr klein, weil die Schichte so dünn sein kann, dass die Werthe der zu integrierenden Funktionen $\Phi\partial\psi_1:\partial n$, welche zu gegenüber liegengenden Flächenpunkten gehören, sich von einander nach ihrem absoluten Werthe nur beliebig wenig unterscheiden, während, was ihr Vorzeichen betrifft, sie wegen den entgegengesetzten Sinn der Normale, entgegengesetzt sind. Aber deshalb, weil in den von den ausschliessenden Flächen enthaltenen Punkten, Linien oder Flächen $F_1=0$, so können die Kugeln so klein, die Röhren und Schichten so dünn sein, dass im Sinne von (11)$''$ auf ihren Oberflächen $\partial\psi_1:\partial n$ überall kleiner ist, als eine beliebig kleine Grösse. So ist auch gegenwärtig in jedem Punkte des Raumes

$$\psi-\psi_0=\text{const.}=0.$$

Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung in (20) auf Grunde (II. 1.) der allgemeinen funktionalen Eigenschaften von ψ und ψ_0, dass überall

$$\psi + \psi_0 = \text{const.} = 0$$

So folgt $\psi=0$, $\psi_0=0$ auch aus den Gleichungen (20), als für den ganzen unendlichen Raum gültig angenommenen Relationen.

Es muss daher auch die Richtigkeit von (20) für den ganzen Raum ausgeschlossen werden.

6_3. In dem unter (18) bezeichneten Falle ist

$$F^2 - F_0^2 \equiv \left[\left(\frac{d\psi}{d\varsigma}\right)^2 - \left(\frac{d\psi_0}{d\varsigma}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial\varsigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varsigma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varsigma}{\partial z}\right)^2\right] = 0$$

nach (11)″.

Vorausgesetzt also, dass (18) für den ganzen Raum gültig ist, so folgt daraus wenigstens

$$\psi - \psi_0 = \text{const.} = 0$$

oder

$$\psi + \psi_0 = \text{const.} = 0$$

wodurch auch schon die letzte Gleichung von (18) erfüllt ist.

Wenn wir daher, in der Definition den Fall

$$d\psi + d\psi_0 = 0$$

ausschliessen, so ist überall

$$\psi = \psi_0.$$

6_4. Wir müssen auch mit der Möglichkeit rechnen, dass in manchen Theilen des Raumes (14), in anderen (17) oder (18) gültig ist.

Vorderhand soll nur von der Verknüpfung von (14) und (17) die Rede sein, d. h. von dem Falle, dass in manchen Theilen des Raumes (14) in anderen (17) gültig ist.

Aus (14) folgt

$$k - k_0 = 0, \quad k + k_0 = 0,$$

also im Sinne der Bezeichnungen in (19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned} \tag{22)'$$

Ferner aus der dritten Gleichung von (14) im Sinne von (11)''

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\frac{\partial \psi_2}{\partial x}+\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\frac{\partial \psi_2}{\partial y}+\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\frac{\partial \psi_2}{\partial z}=0. \qquad (22)''$$

Auf so einer Fläche, auf welcher der Raum von (14) und der Raum von (17) angrenzen, kann man noch μ im Sinne von (17) und (19) als bloss eine Funktion von ψ_1 und ψ_2, auffassen. Möge nun μ_0 eine positive Funktion dieser zwei Argumente bedeuten:

$$\mu_0=\mu_0(\psi_1,\ \psi_2),$$

welche endlich, stetig, einwerthig derivierbar ist im Raume (14), so wie auch ihre ersten Coordinaten-Ableitungen, und welche an der gemeinsamen Grenze von (14) und (17) mit μ übereinstimmt. Ferner sei Φ eine Funktion von gleichen allgemeinen Eigenschaften von ψ_1, wie in (6_3).

Nachdem wir die erste Gleichung von (22)' mit dem Quotienten $\psi:\mu_0$ und dem Raumelement $D\tau$ multipliziert haben, verrichten wir an derselben eine partielle Integration, sich erstreckend auf so einen Raum τ und auf seine Oberfläche, in welchem (14) gültig ist. Mit Rücksicht auf (22)'', finden wir:

$$\int\limits_{\tau}\frac{\mu}{\mu_0}\left(\frac{d\Phi}{d\psi_1}-\frac{\Phi}{\mu_0}\frac{\partial \mu_0}{\partial \psi_1}\right)F_1^2 D\tau+\int\limits_{\sigma}\Phi\frac{\partial \psi_1}{\partial n}D\sigma=0, \qquad (23)$$

wo n die nach dem Inneren von τ weisende Normale des Flächenelementes $D\sigma$ ist. Es wird nämlich dort, wo der Raum τ mit dem Raume von (17) sich berührt $\mu_0=\mu$ im Oberflächen-Integral sein; der zufälligerweise ins Unendliche gehörige Theil dieses Integrals verschwindet aber wegen den Eigenschaften von ψ_1 (I, 1), welche sich aus den Definitionen (II, 1), ergeben.

Lenken wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf einen solchen an τ angrenzenden Raum T, in welchem (17) gültig ist. Multiplicieren wir die erste Gleichung von (20) mit Φ und dem Raumelemente $D\tau$, dividieren wir mit μ, dann verrichten wir daran eine partielle Integration, sich erstreckend auf den Raum T und auf seine Oberfläche S:

$$\int\limits_{T}\left(\frac{d\Phi}{d\psi_1}-\frac{\Phi}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \psi_1}\right)F_1^2 D\tau+\int\limits_{S}\Phi\frac{\partial \psi_1}{\partial N}D\sigma=0, \qquad (24)$$

wo N die nach dem Inneren von T gerichtete Normale des Flächenelementes $D\sigma$ ist.

Ähnliche Gleichungen haben wir in Bezug auf alle Räume τ und T. Der Repräsentant von allen sei (23) und (24). Wir haben nur nothwendig die gemeinschaftlichen Theile der Oberflächen σ und S in Rechnung zu ziehen, denn die ersten Coordinaten-Ableitungen von ψ_1 verschwinden im Unendlichen nach der dritten Ordnung (II. 1.) Für das Fernere mögen σ und S in (23) und (24) nur diese Theile bedeuten.

Nachdem die Factoren des gemeinsamen Elementes $D\sigma$ von σ und S in den Integralen

$$\Phi \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \quad \text{és} \quad \Phi \frac{\partial \psi_1}{\partial N}$$

entgegengesetzt gleich sind in Folge des entgegengesetzten Sinnes der Normalen, so ist klar, dass die auf den ganzen unendlichen Raum sich erstreckende Summation ergiebt:

$$\Sigma \int_\tau + \Sigma \int_T = 0. \tag{25}$$

Wenn nun $\partial \mu_0 : \partial \psi_1$ überall endlich ist, so kann man aus (25) ebenso schliessen, dass $\psi_1 = 0$ ist, wie in (6_2) aus (21).

Ferner in der Voraussetzung, dass diese Ableitungen in einzelnen Punkten, Linien, Flächen unendlich sind, kann man nichtsdestoweniger mit derselben Folgerung begründen, wie in (6_2), dass $\psi_1 = 0$ ist. Und zwar mit genau derselben, denn so wie an Orten, wo $\partial \mu : \partial \psi$, unendlich ist, die Grösse F_1 nach (20) verschwindet, ebenso verschwindet dieselbe wegen (22)'' überall, wo $\partial \mu_0 : \partial \psi_1$ unendlich ist (I. 6. !)

Ähnlicherweise kann man sich überzeugen, dass in der Verknüpfnng von (14) und (17) auch üherall $\psi_2 = 0$ ist.

Also wird nach diesem sowohl in der Verknüpfung von (14) und (17) als auch wenn sie gesondert in Betracht kommen

$$\psi_0 = 0, \quad \psi = 0$$

sein im ganzen unendlichen Raum. Man muss daher auch diesen Fall ausschliessen.

6_5. Nehmen wir jetzt neben den Räumen τ und T auch die Existenz von solchen Räumen in Betracht, in welchen (18) gültig ist.

Aus (18) folgt, in Bezug auf einen jeden Raumtheil, für welchen dasselbe gültig ist, dass wenigstens $\psi - \psi_0 =$const. oder $\psi + \psi_0 =$const. ist, daher ψ_1 oder $\psi_2 =$const. (6_3).

Es sei in den Räumen von (18) überall $\psi_1 =$const. Bezüglich der Räume (14) und (17) ist die Integral-Gleichung (25) auch noch jetzt gültig. Es ist zwar wahr, dass es durch jene Oberflächen-Integrale zu ergänzen wäre, welche durch Berührung der Räume τ und T mit den Räumen von (18) entstehen, d. h. sich auf die Berührungsflächen derselben erstrecken; aber die Ableitungen von ψ_1 verschwinden auf diesen Flächen, als auch zu (18) gehörig, und folglich verschwinden auch die zur Ergänzung dienenden Oberflächen-Integrale.

Ist daher in den Räumen (18) überall die Lösung $\psi - \psi_0 =$ const. gültig, und nirgends die andere ($\psi + \psi_0 =$const.), dann wird durch die Verknüpfung aller drei Fälle (14), (17), (18) nothwendigerweise

$$\psi = \psi_0 .$$

6'. Alles zusammengefasst, führte unsere Analyse zu dem Resultate, dass wir nur die Entgegengesetztheit von $d\psi_0$ und $d\psi$ ausschliessen mit dem Erfordernisse, dass den effektiven mechanischen Kräften eine einzige (L, M, N) sogenannte magnetische Kraft entsprechen soll.

Die am Anfange der Nr. 5 angezeigte ergänzende Bestimmung der magnetischen Kraft schliesst keine anderen möglichen magnetischen Kräfte aus, wie solche, welche entweder im ganzen Raume, oder in einzelnen Theilen desselben mit den bestimmten gerade entgegengesetzt sind.

III. Principielle Ergänzung der Maxwell-Heaviside'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes.

1*a*. Maxwell schreibt die Componenten der in beliebigen Mitteln inducierten localen elektromotorischen Kraft (gegenwärtig einfach elektrische Kraft genannt) aus denjenigen Integral-Ausdrücken auf, welche zur Bezeichnung der in einem unveränderlichen und ruhenden, geschlossenen linearen Leiter inducierten linearen elektromotorischen Kraft dient.* Dies thut er mit jener Allgemeinheit, welche das Verschwinden eines geschlossenen Linien-Integrals erlaubt. So schaltet er additive die Coordinaten-Ableitungen einer im Vorhinein unbestimmten Funktion in die Componenten der localen elektromotorischen Kraft. Von dem in dieser Weise gebildeten Ausdruck-Systeme sagt er (l. c. «Locale Induction» S. 290), dass dies «ist die allgemeinste Form der elektromotorischen Kraft für den Fall, dass ein an sich veränderlicher Körper sich in einem veränderlichen elektromagnetischen Felde bewegt.»

Maxwell befolgt also jenes Princip in der Bildung seiner Ausdrücke für die locale elektromotorische Kraft, dass sie auf unveränderliche und ruhende geschlossene lineare Leiter angewendet, den erfahrungsmässig benützten Ausdruck liefern sollen.

Dieses Princip befolgt auch Helmholtz in seiner eigenen elektromagnetischen Theorie.**

Kirchhoff, der in Bezug auf Leiter, d. h. bezüglich Conductions-Strömungen, als erster Ausdrücke für die locale elektromotorische Kraft aufgestellt hat, stützte sich auf das «Gesetz» von Weber;*** später befolgte er aber in seinen Vorlesungen ebenfalls dasselbe Princip, nachdem er denjenigen Fehler seiner Formeln bemerkt hat, welchen Helmholtz ausführlich gezeigt hat, dass sie nämlich labile elektrostatische Zustände bedingen. Er schliesst zu den Ausdrücken, welche er für die Induction der Conductions-Ströme in dem III. Bande seiner von Planck herausgegebenen Vorlesungen aufstellt, diese Bemerkung bei: «Die Berechtigung hierzu liegt darin, dass, wenn wir diese Gleichungen für den Fall

---

* Im II. Bd der Weinstein'schen deutschen Übersetzung des grossen Werkes von Maxwell unter dem Titel «Allgemeine Gleichungen für die in der Zeiteinheit inducierten elektromotorischen Kräfte.» S. 287.

** «Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende Körper» Borch. Journ. LXXII. 1870. Ges. Abh. I. S. 545., ferner «Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern» Borch. Journ. LXXVIII. 1874. Ges. Abh. I. S. 702.

*** «Ueber die Bewegung der Electricität in Leitern». Pogg. Ann. CII. 1857. Ges. Abh. S. 154.

anwenden, dass die inducierenden Ströme geschlossen sind und der inducierte Strom linear und geschlossen ist, wir zu dem vorher angegebenen Gesetze kommen.» Dann beweist er dies und bemerkt: «Daraus folgt freilich noch nicht, dass diese Formeln die richtigen sein müssen; sie widersprechen aber keiner der bis jetzt vorliegenden Erfahrungen.» (S. 218.) Diese Gleichungen benützt er auch in einem späteren Artikel seiner Vorlesungen (S. 223) zur Construction seiner Ausdrücke für die in dieelectrischen Medien inducierten elektrischen Momente und Polarisations-Strömungen. Auch die von KIRCHHOFF benützte Definition für die locale elektromotorische Kraft ist so wie die ältere ganz speciell, nur frei von dem Fehler der früheren, weil sie stabile elektrostatische Zustände zulässt.

MAXWELL und HELMHOLTZ, beide ebenfalls das angezeigte Princip befolgend, benützt jeder diejenige Verallgemeinerung in seiner Theorie, welche sich auf das Verschwinden des geschlossenen Linien-Integrales eines Funktionelementes stützt. Doch enthält das Princip, wenn wir es nicht auf isotropische Zustände beschränken, sondern erlauben, dass es sich auch auf æolotropische Zustände erstrecke, mehr Allgemeinheit in sich. Wenn wir nicht ausschliessen, ob eingestanden ob stillschweigend die Möglichkeit der Aeolotropie, so können die aus dem Princip sich ergebenden Folgerungen auch mit einer anderen Vielfältigkeit geschehen, welche zwar was ihren analytischen Ursprung betrifft noch primitiver ist, wie jene, doch hat es eine Bedeutung, denn in der elektromagnetischen Theorie des Lichtes führt es zu den magneto-optischen Erscheinungen.

Diese Classe der Vielfältigkeit beruht auf der Ergänzung der Elemente des wiederholt erwähnten Linien-Integrals mit Zusätzen, welche einzeln verschwinden.

1*b*. Dieser Vielfältigkeit kann man noch eine zweite von anderer Natur hinzufügen. Letztere stützt sich auf diejenigen Gleichungen, welche dem analytischen Begriffe der elektromotorischen Kraft den physikalischen Inhalt geben, nämlich in den Gleichungen der Strominduction, welche den Zusammenhang bestimmen, der zwischen den Strömungscomponenten und zwischen den Componenten der elektromotorischen Kraft besteht, und die schon im Falle von ruhenden unveränderlichen Medien aus zwei Gleichungs-Systemen bestehen, von denen das eine sich auf Conductions-Strömungen, das andere auf Polarisations- (bei Maxwell Verschiebungs-) Strömungen bezieht.

Bei der Bildung derjenigen, welche sich auf Conductions-Strömungen beziehen, befolgen die Autoren ebenfalls stillschweigend oder eingestanden, wie Kirchhoff das Princip, dass ihre Gleichungen auf Strömungen von ruhenden, unveränderlichen geschlossenen linearen Leitern angewendet sich auf den Typus der bekannten erfahrungsmässigen Gleichungen reducieren.

Aber auch bei diesem Vorgang erschöpfen sie nicht vollständig die sich erbietenden Allgemeinheiten. Sie betrachten in vorhinein die Richtung des Conductions-Stromes und der elektromotorischen Kraft als übereinstimmend, und dadurch schliessen sie wieder die Annahme von æolotropischen Zuständen aus. Ihre Gleichungen können aber im Rahmen des von ihnen befolgten Principes allgemeiner gemacht werden, indem man sie in der Weise ergänzt, dass bei Anwendung auf Ströme von geschlossenen linearen Leitern die Elemente des aus der Ergänzung sich ergebenden Theiles des Integral-Ausdruckes der Stromintensität verschwinden sollen.

Durch diese Ergänzung gelangen wir zur Berücksichtigung des Hall'schen Effectes.

Wenn wir aber bedenken, dass die Erfahrung nur auf endlich dünne Leiter sich beziehen kann, denn der Begriff des Linearen ist nur ein idealer Grenzbegriff, können wir mit noch einem principiellen Schritt vorwärts gehen, indem wir die Gleichungen auch in der Weise ergänzen, dass diese für endlich-dünne Leitungsröhren mit grosser Annäherung dieselben Ausdrücke liefern, wie ohne Ergänzung die originalen. In diesem Sinne müssen natürlicherweise die Original-Gleichungen nur als von durchschnittlicher Gültigkeit betrachtet werden, welche nämlich von den effektiven Erscheinungen nur irgend eine durchschnittliche darstellen. Von den in dieser Weise ergänzten Gleichungen kann man in Vorhinein erwarten, dass sie auch für solche Medien passen, in deren chemischer Structur Assymmetrien vorkommen,welche auf die elektrischen Erscheinungen Einfluss ausüben ; also kann man hoffen, dass sie sich auf die «natürlichen» assymmetrischen Medien und auf die «natürliche» Aeolotropie auch beziehen.

In der That werden sich mit dieser Verallgemeinerung die Gleichungen auch auf die sogenannte optische Aktivität der Medien erstrecken.

1*c*. Eine von diesen verschiedene principielle Verallgemeinerung hat der leipziger Professor Drude ausgenützt, insoferne er nicht nur gewöhnliche Conductions-Strömungen, sondern auch oscillatorische Entladungen von Leitern durch Dielektrica vor Auge behielt. Auf solche sich stützend, construierte er Gleichungen der localen Induktion (Physik des Aethers 1894 S. 518—524), welche den zuerst von Kirchhoff aufgestellten linearen Formeln entsprechen. Infolge dieser Verallgemeinerung erstrecken sich seine Gleichungen auch auf die Erscheinung der Dispersion (l. c. S. 524). Diese Verallgemeinerung kann als Fortsetzung der in obigem bezeichneten betrachtet werden, als weitere Ergänzung von jenen, oder umgekehrt können jene, nachdem dies geschehen ist, ausgeführt werden.

Ich werde hier von den Maxwell'schen Formeln ausgehen und werde diese mit Einhaltung der angemeldeten principiellen Verfahren verallgemeinern. Ich lasse aber krystallinische Körper ausser Betracht und ausserdem beschränke ich mich auf ruhende Medien; der Übergang auf krystallinische Körper und die Inbetrachtnahme von Bewegungen des Mediums kann nachträglich jedenfalls ohne Hinderniss geschehen, sowie auch die erwähnte Drude'sche Verallgemeinerung. Ich bediene mich dabei der Maxwell'schen Bezeichungen. Ich thue dies nicht nur deshalb, damit ich in Verbindung bleibe mit Maxwell's Buch, sondern auch deshalb, damit die erreichten Resultate mit den von anderen Autoren (Goldhammer, Drude etc.) empirisch oder hypothetisch aufgestellten Ergänzungen direct vergleichbar sein sollen. Eine nunmehr allgemeine Gewohnheit befolgend, rechne ich dabei die elektromotorische Kraft und die elektrische Strömung in elektrischen Einheiten, die magnetische Kraft in magnetischen Einheiten, mit A die reciproke kritische Geschwindigkeit bezeichnend.

2*a*. Unter den Maxwell'schen Componenten P, Q, R der auf die Raumeinheit berechneten localen elektromotorischen Kraft sind solche zu verstehen, bei denen der Ausdruck für die lineare elektromotorische Kraft:

$$\int (PDx + QDy + RDz) \equiv E$$

bei ruhenden unveränderlichen geschlossenen Leitern mit dem erfahrungsmässigen Ausdruck übereinstimmt.

Nachdem die Integration auf einer geschlossenen Linie zu führen ist, so verändert sich der Werth von E nicht, wenn wir bezw. zu P, Q, R die Coordinaten-Ableitungen einer regulären Funktion addieren. In den Maxwell'schen Componenten P, Q, R müssen schon solche Glieder mit verstanden werden.

Aber mit diesen Hinzufügungen erhalten wir noch nicht die allgemeinste Form von P, Q, R, bei welchen E unverändert bleibt. Sobald p, q, r solche Funktionen der Zeit und des Ortes sind, dass der durch sie bestimmte Vektor überall und fortwährend auf die Richtung des Stromes senkrecht steht, so können

$$P+p \equiv X, \quad Q+q \equiv Y, \quad R+r \equiv Z \tag{1}$$

anstatt P, Q, R angewendet werden: der Werth der linearen elektromotorischen Kraft E bleibt unverändert. Es behält sogar jedes Element des Integrals seinen alten Werth, denn (p, q, r) ist senkrecht auf das Bahnelement der Integration (Dx, Dy, Dz), daher

$$pDx + qDy + rDz = 0.$$

Bezeichnen wir die Componenten der Strömung mit u, v, w. Nachdem der Vektor (p, q, r) überall und stets darauf senkrecht steht, so kann derselbe folglich ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} p &\equiv bw - cv \\ q &\equiv cu - aw \\ r &\equiv av - bu, \end{aligned}$$

wo a, b, c Unbestimmte von zeitlichem Charakter sind. Aber mit Rücksicht darauf, dass die Grundlage unseres Ausganges ein ruhender und unveränderlicher linearer Leiter bildet, bleibt die so eben aufgeschriebene Gleichung auch dann richtig, wenn wir anstatt (p, q, r) eine Zeit-Ableitung von beliebig hoher Ordnung davon benützen. Indem wir diese Zeit-Ableitungen dadurch bezeichnen, dass wir dem Fusse des Buchstaben die Ordnung der Derivation beifügen, können wir schreiben:

$$p_i Dx + q_i Dy + r_i Dz = 0.$$

Zum Ausdrucke p, q, r kann also benützt werden

$$\begin{aligned} p &= \Sigma(bw - cv)_i \\ q &= \Sigma(cu - aw)_i \\ r &= \Sigma(av - bu)_i\,, \end{aligned} \tag{2}$$

wo der Index «i» ebenfalls eine Derivation bezeichnet und die Summen-Glieder auch nach den Coefficienten a, b, c verschieden sein können.

Die Verallgemeinerung durch Zufügung der Glieder p, q, r modificiert von den MAXWELL'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes nur die der Strominduction, insoferne in diese anstatt (P, Q, R) zu schreiben ist (X, Y, Z). Für isotrope Medien sind die MAXWELL'schen Gleichungen der Strominduction die folgenden:

$$\begin{aligned} u &= CP + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t} \\ v &= CQ + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Q}{\partial t} \\ w &= CR + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial R}{\partial t} \end{aligned}$$

oder nach HERTZ wegen der Inhomogenität mit gewissen elektromotorischen Kräften (P', Q', R') ergänzt (l. c. S. 218 u. S. 219).

$$u = C(P - P') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{u. s. w.}$$

Die ersten Glieder entsprechen dem Conductionstheil der Strömung, die zweiten dem Polarisations- (Verschiebungs-) Theil derselben. Die letzteren sind eigentlich rein hypothetischen Ursprungs. Jetzt ist noch in diese Gleichungen anstatt (P, Q, R) zu schreiben (X, Y, Z), wie dies unten folgen wird.

Die übrigen MAXWELL'schen Gleichungen des elektromagnetischen Raumes bleiben unverändert, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi A u &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ 4\pi A v &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} \\ 4\pi A w &= \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

in welchen die elektromotorische Kraft explicite gar nicht vorkommt; ferner

$$\left.\begin{aligned} A\mu\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \\ A\mu\frac{\partial\beta}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \\ A\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

welche, oder die æquivalenten Integral-Gleichungen gerade als die Definitionen der MAXWELL'schen elektromotorischen Kraft zu betrachten sind.

Diesen schliessen sich nach den gegebenen Vorbemerkungen, die Gleichungen der Strom-Induction

$$u = C(X - P') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} \quad \text{stb.}$$

an. Aber in Aussicht nehmend die in ($1b$) angemeldeten ferneren principiellen Verallgemeinerungen, fügen wir diesen die Componenten ξ, η, ζ eines nachträglich zu charakterisierenden Vektors bei.

$$\left.\begin{aligned} u &= C(X - P') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \xi \\ v &= C(Y - Q') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t} + \eta \\ w &= C(Z - R') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t} + \zeta. \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

2*b*. Durchschneiden wir eine dünne Stromröhre mit einer Fläche, und es möge die Stromröhre aus dieser Fläche den Theil σ herausschneiden. $D\sigma$ soll die Fläche eines Elementes von σ bezeichnen, und die Richtungscosinuse der Normalen seien l, m. n. Concedieren wir nun, dass das System (C) auch ohne ξ, η, ζ mit genügender Genauigkeit für die Stromröhre die Stromintensität ergiebt:

$$I \equiv \int_\sigma (ul+vm+wn)\,D\sigma$$

dessen Grenzwerth ($\sigma=0$; u, v, $w=\infty$) für eine entsprechende Stromlinie die Stromintensität bezeichnet. Die in (C) angegebenen Ausdrücke (mit Beibehaltung von ξ, η, ζ) für die richtigen betrachtend, kann nur in der Weise möglich sein, dass sie auch ohne (ξ, η, ζ) entsprechen, dass

$$\int_\sigma (\xi l+\eta m+\zeta n)\,D\sigma=0. \tag{*}$$

gesetzt werden darf.

Ich setze von der dünnen Röhre voraus, dass die Peripherie der Fläche σ überall senkrecht auf der Richtung der Strömung stehen kann, ohne dass dieselbe eine Schraubenlinie bilden soll, d. h. ohne dass die Fläche eine Schraubenfläche wäre. Wählen wir auch so die Fläche σ und jetzt um die zwei Ergänzungs-Methoden (1*b*) zu gleicher Zeit zu behandlen, schreiben wir:

$$\xi=\xi_1+\xi_2, \quad \eta=\eta_1+\eta_2, \quad \zeta=\zeta_1+\zeta_2. \tag{3}$$

Von dem Theil (ξ_1, η_1, ζ_1) fordern wir, dass er auf die Strömung senkrecht stehe und also

$$\begin{aligned} \xi_1 &= b'w-c'v \\ \eta_1 &= c'u\ -a'w \\ \zeta_1 &= a'v\ -b'u, \end{aligned} \tag{4}$$

sei, wo a', b', c' dimensionslose Unbestimmte sind.

Jetzt bleibt in der Gleichung (*) nur (ξ_2, η_2, ζ_2), denn l, m, n sind die Richtungscosinuse der Strömung. Wir wollen ξ_2, η_2, ζ_2 in der Weise wählen, dass im Sinne von (*)

$$\int_\sigma (\xi_2 l + \eta_2 m + \zeta_2 n)\, D\sigma = 0$$

sei. Zu dem Zwecke schreiben wir:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \eta_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ \zeta_2 &= \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned} \tag{5}$$

und verrichten die STOKES'sche Integration. Ist ein Element der Randlinie von σ der Vektor (Dx, Dy, Dz), dann finden wir mit Erstreckung auf die Randlinie

$$\int (\varphi Dx + \psi Dy + \chi Dz) = 0.$$

(*) kann daher auch so erfüllt sein, dass

$$\varphi Dx + \psi Dy + \chi Dz = 0.$$

Nachdem der Vektor (Dx, Dy, Dz) überall senkrecht steht auf die locale Strömung, so bestehen

$$\varphi = -\rho u, \quad \psi = -\rho v, \quad \chi = -\rho w, \tag{6}$$

wo ρ eine Länge vorstellende Unbestimmte der Lösung bedeutet.

2*c*. Um die Resultate zu sammeln: substituiere ich aus (1) anstatt P, Q, R in die Gleichungen (B) $X - p$, $Y - q$, $Z - r$, dann schreibe ich anstatt p, q, r in diese die rechten Seiten von (2); ferner führe ich ein in die Gleichungen (C) die aus (3), (4), (5), (6) sich ergebenden Werthe von ξ, η, ζ, dann benützte ich die Bezeichnungen:

$$a' + \frac{\partial \rho}{\partial x} \equiv \mathfrak{a}, \qquad b' + \frac{\partial \rho}{\partial y} \equiv \mathfrak{b}, \qquad c' + \frac{\partial \rho}{\partial z} \equiv \mathfrak{c}.$$

Auf diese Weise erscheinen die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes im Falle von ruhenden und isotropen wie auch æolotropen Medien in folgender Form:

$$
\left.\begin{aligned}
4\pi A u &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\\
4\pi A v &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\\
4\pi A w &= \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad (A)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
A\mu\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} + \Sigma\left[\frac{\partial(aw-cu)}{\partial z} - \frac{\partial(bu-av)}{\partial y}\right]_i\\
A\mu\frac{\partial\beta}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} + \Sigma\left[\frac{\partial(bu-av)}{\partial x} - \frac{\partial(cv-bw)}{\partial z}\right]_i\\
A\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} + \Sigma\left[\frac{\partial(cv-bw)}{\partial y} - \frac{\partial(aw-cu)}{\partial x}\right]_i
\end{aligned}\right\} \quad (B)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
u &= C(X-P') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \mathfrak{b}w - \mathfrak{c}v - \rho\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
v &= C(Y-Q') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t} + \mathfrak{c}u - \mathfrak{a}w - \rho\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
w &= C(Z-Q') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t} + \mathfrak{a}v - \mathfrak{b}u - \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (C)
$$

wo die Coefficienten a, b, c; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und ρ bezüglich ihrer Entstehung von einander unabhängig sind.

3. Um den physikalischen Sinn der eingeschalteten neuen Glieder der Gleichungen zu erkennen, sind nur Vergleiche mit solchen Theorien, bezw. mit solchen empirischen oder hypothetischen Formeln zu machen, welche theils auf den HALL'schen Effect, theils auf magneto-optische Erscheinungen, theils bezüglich der «natürlichen» optischen Aktivität von verschiedenen Autoren aufgestellt wurden.

Die Glieder mit den Coefficienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bilden in den Gleichungen (C) eine derartige Ergänzung, welche den HALL'schen Effekt enthält. Mit einem eben solchen Theil ergänzt z. B. für den Effekt LORENTZ die Gleichungen und dann GOLDHAMMER, der davon ausgeht, dass ursprünglich isotrope Medien infolge von Magnetisierung æolotrop werden (Wied. Ann. XXXI. «Ueber die Theorie des HALL'schen Phänomens»).

Die Glieder mit den Coefficienten a, b, c sind solche Ergänzungen der Gleichungen (B), welche in Verbindung mit entsprechenden Grenzflächen-Gleichungen Rechnung ablegen von der Drehung der Polarisationsebene des durch magnetisierte Medien gehenden oder von solchen reflectierten Lichtes. Von dieser Ergänzung kann man nämlich zeigen, dass ihr erstes Glied (jenes, welches der Zeit-Derivation nicht unterworfen, da sein $i=0$ ist) übereinstimmt mit derjenigen Ergänzung, welche GOLDHAMMER und von ihm unabhängig und beinahe gleichzeitig DRUDE den Gleichungen beigefügt haben, um die magneto-rotatorische Polarisation und den KERR'schen Effekt zu demonstrieren (Wied. Ann. «Ueber magneto-optische Erscheinungen,» «Physik des Aethers» S. 584—589 u. s. w.). Sehen wir nämlich jetzt von den Gliedern mit den Coefficienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und ρ, ab und bloss optische Erscheinungen und durchsichtige Medien vor Augen haltend, lassen wir auch beiseite die Glieder der Conduction mit dem Coefficienten (C) in den Gleichungen (C); dann setzen wir in den Gleichungen (B) anstatt u, v, w ihre in (C) befindlichen Ausdrücke, in den Gleichungen unter (C) anstatt denselben ihre in (A) befindlichen Ausdrücke, aber behalten wir nur die ersten Glieder ($i=0$) der Σ Formen. Dann gelangen wir zu den Gleichungen:

$$A\mu \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} K(aZ - cX) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} K(bX - aY), \text{ u. s. w.}$$

$$AK \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \text{u. s. w.}$$

welche dieselben Formen haben, wie die hierher gehörigen Gleichungen von DRUDE («Physik des Aethers» S. 586 u. s. w.)

Was schliesslich den übrig gebliebenen (mit dem Faktor ρ behafteten) Theil anbelangt, bedeutet dies die gewöhnliche rotatorische Polarisation. Um diesen ergänzenden Theil selbst in Betracht zu ziehen, sehen wir jetzt ab von den mit a, b, c und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ behafteten Gliedern und ausschliesslich auf optische Erscheinungen und durchsichtige Medien beschränkt, lassen wir aus (C) auch die (mit dem Faktor C behafteten) Glieder der Conduction. Nach diesem setzen wir in (C) die Ausdrücke der aus (A) genommenen Strömungscomponenten u, v, w ein. Insoferne das

Medium, was seine Magnetisierung anbelangt, als homogenes betrachtet werden kann, also sein μ gleichmässig ist, haben wir:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Auch dies in Betracht gezogen, finden wir:

$$A\mu \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \text{ u. s. w.}$$

$$AK \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} - \rho \varDelta \alpha, \text{ u. s. w.}$$

Daraus aber, durch Elimination der elektromotorischen Kraft (X, Y, Z) insoferne K und ρ als gleichmässig genommen werden können, folgt

$$A^2 K\mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \varDelta \alpha - \rho \varDelta \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right), \text{ u. s. w.}$$

Ähnliche Gleichungen finden wir für die elektromotorische Kraft, vorausgesetzt, dass K gleichmässig ist und in dem Medium keine effective Elektricität vorhanden, dass also

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Es wird nämlich nach Elimination der magnetischen Kraft aus den sechs Gleichungen:

$$A^2 K\mu \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \varDelta X - \rho \varDelta \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \text{ u. s. w.}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von jenen, welche DRUDE nach seiner Methode für aktive Körper (l. c. S. 541. Form. 91) gefunden hat, nur dadurch, dass in den dyssymmetrischen Gliedern bei ihm anstatt der Operation $\triangle$ eine Zeitderivation von zweiter Ordnung vorkommt, was zwischen den Grenzen unserer Erfahrungen eine nebensächliche Bedeutung hat. Die Gleichungen hier stimmen mit jenen ersten Formeln überein, welche in der Elasticitäts-Theorie des Lichtes für die rotarische Polarisation aufgestellt wurden, d. h. mit den MAC-CULLAGH'schen. Benützen wir aber als Licht-Vektor anstatt α, β, γ

$$\alpha' \equiv \alpha - \rho \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right), \text{ u. s. w.}$$

bezw. anstatt X, Y, Z

$$X' \equiv X - \rho \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right), \text{ u. s. w.}$$

so wird für den gewöhnlichen Fall, dass ρ ein so kleiner gleichmässiger Werth ist, das umgekehrt

$$\alpha \equiv \alpha' - \rho \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) = \alpha' - \rho \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial y} - \frac{\partial \beta'}{\partial z} \right) \quad \text{u. s. w.}$$

$$X \equiv X' - \rho \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = X' - \rho \left(\frac{\partial Z'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial z} \right) \quad \text{u. s. w.}$$

mit grosser Annäherung gesetzt werden kann, dann nehmen unsere Gleichungen ganz die DRUDE'schen Formen an, denn unsere Gleichungen übergehen nach der Substitution (mit Rücksicht darauf, dass ρ gleichförmig ist) in die folgenden:

$$A^2 K \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\alpha' + \rho \left(\frac{\partial \beta'}{\partial z} - \frac{\partial \gamma'}{\partial y} \right) \right] = \Delta \alpha' \quad \text{u. s. w.}$$

$$A^2 K \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[X' + \rho \left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \right) \right] = \Delta X' \quad \text{u. s. w.}$$

4. Den Übergang von ruhenden Medien zu beweglichen wünsche ich noch zum Schlusse mit einer Bemerkung zu begleiten.

HERTZ hat die Veränderungs-Geschwindigkeiten in ruhenden Medien, nämlich die Veränderungs-Geschwindigkeiten der magnetischen und elektrischen Polarisation, nach seiner Bezeichnnng

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} \right) \text{ und } \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \right)$$

auf Grund von wahrscheinlichen Hypothesen mit für bewegliche Medien gültigen Ausdrücken ergänzt (l. c. 258, 259, 260), welche er kurz so charakterisiert: «Wir behaupten nun, es sei der Einfluss der Bewegung derart, dass wenn er allein wirksam wäre, er die magnetischen Kraftlinien mit der Materie fortführen würde.» Ich verweise bezüglich der eingehenden Stylisierung und Anwendung derselben auf sein Buch, in welchem dies so wie auch jedes Andere, sehr klar vorgetragen ist. Was ich hier bemerken will, besteht darin, dass man auf eine einfache Weise einen solchen materiellen elementaren Vektor definieren kann als Funktion von Zeit und Ort, dass der Verschiebungscomponent seiner Veränderungs-Geschwindigkeit der HERTZ'schen Definition entspricht.

Sind die Componenten der Geschwindigkeit der Massenbewegung in Orte x, y, z, gleich $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ (bei HERTZ α, β, γ; ferner steht bei ihm anstatt des Differentiationszeichens ∂ überall d), so werden im Sinne der Hypothese von HERTZ die MAXWELL-HEAVISIDE-schen Gleichungen für ruhende Medien von denjenigen für bewegte Medien darin unterschieden, dass in letzteren anstatt den Veränderungs-Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \text{ u. s. w. und } \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathfrak{L}\dot{y} - \mathfrak{M}\dot{x})}{\partial y} - \frac{\partial (\mathfrak{N}\dot{x} - \mathfrak{L}\dot{z})}{\partial z} + \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right)\dot{x} \text{ u.s.w.}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathfrak{X}\dot{y} - \mathfrak{Y}\dot{x})}{\partial y} - \frac{\partial (\mathfrak{Z}\dot{x} - \mathfrak{L}\dot{z})}{\partial z} + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\dot{x} \text{ u.s.w.}$$

zu schreiben ist.

Nehmen wir einen materiellen elementaren Vektor in Betracht, welcher was die Richtung anbelangt überall übereinstimmt, was aber die Grösse anbelangt, proportioniert ist mit der magnetischen oder elektrischen Polarisation, in einem beliebigen Moment, übrigens aber überall bestimmt ist durch das Produkt des Entfernungsvektors von zwei sehr nahen individuellen Massenpunkten und der materiellen Dichtigkeit, (ξ, η, ζ) bezeichne diesen Vektor; die vollständigen Veränderungs-Geschwindigkeiten seiner Componenten sind

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\dot{z}, \text{ u.s.w.}$$

Um aus diesen die Verschiebungscomponenten auszusondern, müssen wir von diesen diejenigen Veränderungs-Geschwindigkeiten subtrahieren, welche von der Veränderung der Länge und Richtung des Strecken-Vektors und von der Veränderung der Massen-Dichtigkeit herrühren. Die zu den ersten zwei Gattungen gehörigen sind:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\xi + \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\eta + \frac{\partial \dot{x}}{\partial z}\zeta, \quad \text{u. s. w.}$$

die der dritten angehörigen:

$$-\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}\right)\xi, \quad \text{u. s. w.}$$

wie dies die Kinematik der nicht starren Körper rechtfertigt. Nach verrichteten Subtractionen können die resultierenden Ausdrücke leicht auf die Form der hier verzeichneten HERTZ'schen Ergänzungen überführt werden.

7.

DIE ALGEBRAISCHE GRUNDLAGE DER ANWENDUNGEN DES MECHANISCHEN PRINCIPS VON FOURIER.

Von Prof. JULIUS FARKAS an d. Univ. Kolozsvár.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 17. Oktober 1898.

Aus «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger.) Bd. XVI, pp. 361—364.

Schon in zwei Mittheilungen habe ich diesen Gegenstand behandelt. Jetzt in dieser dritten geschieht dies in verhältnissmässig sehr einfacher Weise, von welcher man kaum eine einfachere finden kann, insoferne nämlich man in Betracht zieht, dass wie viel immer von einander unabhängige homogene, lineare Ungleichheiten einander zugeordnet werden können, sobald die Anzahl der Variablen grösser ist, als zwei. Diesen Fall zieht auch eine in neuerer Zeit erschienene Arbeit (Henneberg, Crelle Journ. 1894) nicht in Betracht. Aber vorwiegend aus dem Gesichtspunkte dieser Allgemeinheit ist nützlich die Anwendung der allgemeinen analytischen Methode.

Es sei

$$\begin{array}{c} A_{11}u_1+A_{12}u_2+\cdots+A_{1n}u_n\equiv\theta_1\geqq 0 \\ A_{21}u_1+A_{22}u_2+\cdots+A_{2n}u_n\equiv\theta_2\geqq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{1}$$

unser System von Ungleichheiten, und in jeder Lösung derselben möge

$$A_1u_1+A_2u_2+\cdots+A_nu_n\equiv\vartheta\geqq 0. \tag{2}$$

sein.

Die multiplikatorische Grundlage der Anwendungen des mechanischen Principes von Fourier bildet folgender Lehrsatz: es giebt immer solche nicht-negative, von den Variablen u unabhängige Multiplicatoren λ, dass

$$\vartheta \equiv \lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\cdots \tag{3}$$

ist.

In folgendem habe ich die Absicht, den möglichst einfachsten, ganz strengen und vollkommenen Beweis dieses Satzes zu geben.

*

Der in (2) befindliche Coefficient A_n sei von 0 verschieden. Berechnen wir aus (2) die Variable u_n, als Funktion der übrigen u und ϑ, und dann substituieren wir sie überall in (1) durch diese Funktion. Wenn dies geschehen, dividieren wir die einzelne Ungleichheiten mit dem absoluten Werth des Coefficienten des in ihnen befindlichen ϑ (insoferne derselbe von 0 verschieden ist). Das Resultat des Vorganges sei

$$\begin{array}{rr} \vartheta+p_1 \equiv \theta_{p_1} \geqq 0, & \vartheta+p_2 \equiv \theta_{p_2} \geqq 0, \ldots \\ r_1 \equiv \theta_{r_1} \geqq 0, & r_2 \equiv \theta_{r_2} \geqq 0, \ldots \\ -\vartheta+q_1 \equiv \theta_{q_1} \geqq 0, & -\vartheta+q_2 \equiv \theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \end{array} \tag{1)'$$

wo $p_1, p_2 \ldots, r_1, r_2 \ldots,$ lineare, homogene ganze Funktionen der Variablen $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ bedeuten.

Nach der Voraussetzung ist in jeder Lösung des Systemes, d. h. in jedem dasselbe befriedigende Werthsystem $\vartheta, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$

$$\vartheta \geqq 0. \tag{2)'$$

In der ersten Zeile von (1)′ ist nothwendiger Weise wenigstens eine Ungleichheit, denn wenn die erste Zeile nicht bestehen würde, so könnte $\vartheta<0$ sein.

Jetzt schreibe ich anstatt dem System (1)′ ein anderes auf, welches sich von diesem darin unterscheidet, dass es anstatt der dritten Zeile solche Ungleichheiten enthält, welche aus (1)′ durch Eliminationen der Grösse ϑ entstehen:

$$\begin{array}{ll} \vartheta+p_1 \equiv \Theta_{p_1} \geqq 0, & \vartheta+p_2 \equiv \Theta_{p_2} \geqq 0, \ldots \\ r_1 \equiv \Theta_{r_1} \geqq 0, & r_2 \equiv \Theta_{r_2} \geqq 0, \ldots \\ p_1+q_1 \equiv \Theta_{p_1}+\Theta_{q_1} \geqq 0, & p_1+q_2 \equiv \Theta_{p_1}+\Theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \\ p_2+q_1 \equiv \Theta_{p_2}+\Theta_{q_1} \geqq 0, & p_2+q_2 \equiv \Theta_{p_2}+\Theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array} \tag{1$''$}$$

Auch in jeder Lösung dieses Systemes ist

$$\vartheta \geqq 0. \tag{2$''$}$$

Setzen wir nämlich voraus, dass hier $\vartheta<0$ sein kann. Dann folgt aus der ersten Zeile, dass ein jedes $p>0$. Ist p_1 das kleinste p, so kann darin ϑ noch den Werth $-p_1$ haben. So aber wird nach der dritten Zeile von (1)$''$ auch die dritte Zeile von (1)$'$ erfüllt sein, also auch das ganze System (1)$'$. Nun kann dies aber nach der Voraussetzung nur für nicht-negative Werthe von ϑ befriedigt werden: also kann auch bei jeder Lösung von (1)$''$ nur $\vartheta \geqq 0$ sein.

Nach dieser Begründung beschränken wir uns vor der Hand auf jene specielle Lösungen von (1)$''$, in welchen kein p negativ ist, also in welchen

$$\begin{array}{ll} p_1 \geqq 0, & p_2 \geqq 0, \ldots \\ r_1 \geqq 0, & r_2 \geqq 0, \ldots \\ p_1+q_1 \geqq 0, & p_1+q_2 \geqq 0, \ldots \\ p_2+q_1 \geqq 0, & p_2+q_2 \geqq 0, \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array} \tag{1$_1$}$$

Jedenfalls existiert eine solche Lösung von (1)$''$, welche (1)$_1$ befriedigt (nämlich wenigstens dadurch, dass alle p, q, r verschwinden).

In (1)$_1$ ist wenigstens ein gewisses p stets $=0$; denn wenn alle p auf einmal >0 sind, so könnte $\vartheta<0$ sein in (1)$''$, ferner wenn alle p nicht auf einmal >0 sein könnten, dann könnten sie es auch auf einmal sein (da die Summe von richtigen Ungleichheiten auch eine richtige Ungleichheit ist).

Es sei nun, dass in jeder Lösung von $(1)_1$ $p=0$, also in allen

$$-p_1 \geqq 0, \tag{$(2)_1$}$$

und setzen wir voraus, dass im Falle von n—1 Leitgrössen der zu beweisende Satz besteht. Dann besteht er in Bezug auf $(1)_1$ und $(2)_1$, denn in diesen kommen nur die $u_1\, u_2 \ldots u_n$—1 vor. Es existieren daher solche nicht-negative Multiplicatoren P, Q, R, dass

$$\begin{aligned} -p_1 \equiv\ & P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + R_1 r_1 + R_2 r_2 + \cdots \\ & + Q_{11}(p_1+q_1) + Q_{12}(p_1+q_2) + \cdots \\ & + Q_{21}(p_2+q_1) + Q_{22}(p_2+q_2) + \cdots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{$(3)_1$}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man aber im Falle von n Leitgrössen auch schliessen auf die Richtigkeit des Grundsatzes, dass heisst, man kann folgern auf (3). Aus $(1)''$ lässt sich nämlich mit Rüchsichtnahme auf $(3)_1$ nach leicht erkennbaren Operationen schliessen, dass:

$$\begin{aligned} (1+P_1)\ & \theta_{p_1} + P_2\theta_{p_2} + \cdots + R_1\theta_{r_1} + R_2\theta_{r_2} + \cdots \\ & + Q_{11}(\theta_{p_1} + \theta_{q_1}) + Q_{12}(\theta_{p_1} + \theta_{q_2}) + \cdots \\ & + Q_{21}(\theta_{p_2} + \theta_{q_2}) + Q_{22}(\theta_{p_2} + \theta_{q_2}) + \cdots \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \equiv (1+P_1+P_2+\cdots)\,\vartheta. \end{aligned}$$

8.

ÜBER DIE WIRKUNG EINIGER SCHWERER METALLE AUF DIE STRUCTUR DER QUERGESTREIFTEN MUSKELN.

Von Dr. ÁRPÁD von BÓKAY,

Professor der Pharmacologie an der Kön. Ung. Universität zu Budapest, corr. Mitgl. der ungar. Akad. d. Wiss.

Vorgelegt der III. Cl. der ung. Akademie am 17. Mai. 1897.

Aus «Mathematikai és Természettudományi Értesitő» (Math. u. Naturwiss. Anzeiger) Band XV, pp. 192—223.

Die pharmacohistologische Forschung, deren Wichtigkeit ich nicht genug betonen kann, und die mich und meine Schüler bereits seit Jahren beschäftigt, hat, wiewohl sie eines der dankbarsten Gebiete betrifft, bisher nur eine verhältnissmässig geringe Anzahl von Anhängern gefunden. Und doch erschliesst die Histologie, bei unseren pharmacodynamischen Untersuchungen methodisch angewendet, eine ganze Fülle von neuen Thatsachen, die zur näheren Beleuchtung und Erklärung der bisher gewonnenen experimentellen Ergebnisse dienen können.

Dieser Richtung huldigt auch die nachfolgende Arbeit; dieselbe soll die auf die quergestreiften Muskeln ausgeübte histologische Wirkung solcher schwerer Metalle klarlegen, die sowohl durch die klinische Erfahrung, als auch durch die Pharmacologie bereits als die Muskelfunction wesentlich beeinträchtigende Agentien erkannt wurden und von welchen wir einerseits nicht wissen, ob sie in den quergestreiften Muskeln histologische Veränderungen bewirken, andererseits, wenn dies der Fall wäre, welcher Natur dieselben seien, ob primärer oder secundärer, und ob sie von den Erkrankungen des Nervensystems abhängen?

Die schweren Metalle, die ich untersuchte, sind: Kupfer, Zink, Cadmium, Eisen und Mangan; hieher gehören eigentlich auch das Quecksilber und das Blei; doch will ich die Ergebnisse meiner diesbezüglichen Untersuchungen erst später publicieren. Die Aufklärung der erwähnten Fragen ist für das Verständniss der pharmacologischen und toxischen Wirkung jener Metalle um so wichtiger, als ja die in der Litteratur vorhandenen Erklärungen der durch diese Metalle verursachten Muskellähmungen durchaus divergierend sind. Ausser diesen Metallen und deren Verbindungen giebt es noch eine Reihe von Substanzen organischer und anorganischer Natur, — von manchen Autoren Muskelgifte genannt, — die bezüglich ihrer histologischen Einwirkung auf die Musculatur auch noch nicht erforscht wurden, wiewohl man von der grossen Mehrzahl derselben eine solche Wirkung um so mehr voraussetzen kann, als ihr Einfluss auf die Arbeitsfähigkeit, die Arbeitskraft und auf die Erregbarkeit der Muskeln durch graphische Methoden festgestellt, von den meisten dieser Substanzen sogar eine intensive Wirkung auf den einen oder anderen chemischen Bestandtheil der Muskeln nachgewiesen wurde. (Heffter).[1] Von den Metallen, die ich einer Prüfung im erwähnten Sinne unterwarf, gehören, nach den Äusserungen des hervorragenden englischen Forschers Lauder Brunton,[2] Kupfer, Zink und Cadmium, in grossen Mengen gehört sogar Eisen zu derjenigen Gruppe der Muskelgifte, die die Arbeitsfähigkeit der Muskeln wohl herabsetzen, deren Reizbarkeit aber nicht beeinflussen; das Mangan ist, laut Lauder-Brunton den Muskeln gegenüber wirkungslos. Es wäre merkwürdig, wenn die Metalle, die die Function der Muskeln so wesentlich verändern können, die Structur derselben unberührt liessen, wo es doch jedem Pathologen bekannt ist, dass der Organismus kein labileres, empfindlicheres Gewebe aufzuweisen hat, als gerade die Muskulatur.

Es war nun gerade dieser hohe Grad von Empfindlichkeit, der mich bereits bei meinen ersten Versuchen veranlasste, Vorsicht walten zu lassen, um nicht gewisse mikroskopische Befunde, die zwar von dem gewohnten Muskelbilde abweichen, jedoch oft auch an den Muskeln gesunder Thiere zu sehen sind, irrthümlich dem Einflusse obiger Metalle zuzuschreiben; daher ich als pathologisch nur hochgradige Veränderungen und solche gelten liess, die ich wiederholt, bei verschiedenen Thieren und immer in derselben Weise eintreten sah.

Grosse Vorsicht in der Beurtheilung der Befunde war aber auch aus einem anderen Gesichtspunkte geboten. Jedem Histologen ist es bekannt, dass die quergestreiften Muskeln ihr normales Structurbild unter bestimmten histologischen Verfahren einbüssen; Essigsäure lässt in ihnen glänzende interstitielle Körnchen erscheinen; unter der Behandlung mit destillirtem Wasser verlieren sie die Querstreifung und erscheinen ausgesprochen längsgestreift; in Alcohol gehärtete Muskeln können mittelst Nadeln der Länge nach in sogenannte Primitiv-Fibrillen zerzupft werden, während sie unter der Einwirkung anderer Reagentien, z. B. der Chromsäure in Querscheiben zerfallen. *Alle diese Bilder können aber auch als pathologische vorkommen.* Darum war es mir nicht erlaubt die, dem vergifteten, jedoch noch lebenden, oder höchstens soeben verendenden Thiere entnommenen Muskeln, die sogleich in physiologischer Kochsalz-, oder in einer anderen physiologischen Lösung untersucht wurden, zur Gewinnung von Dauerpräparaten nach solchen Methoden zu behandeln, die allein schon solche Bilder hervorrufen, welche auch als pathologische Befunde angesehen werden könnten. Um Dauerpräparate herzustellen, benutzte ich stets die Goldchlorid-Osmiumsäure-Methode nach Löwit-Mays-Thanhoffer. Die erwähnte Methode ist vor Allem die zur klarsten Conservierung der Structur der quergestreiften Muskeln geeigneteste; ferner bietet sie den grossen Vortheil, gleichzeitig auch die beste Methode zur Darstellung der motorischen Nervenendigungen zu sein, wie dies v. Csiky, ein Schüler v. Thanhoffer's hervorhob,[3] und wie dies auch Babes und Blocq [4] in dem auf die Pathologie der Nervenendigungen bezüglichen Hefte ihres vorzüglichen Atlas' bezeugen.

Um zu entscheiden, ob die gefundenen Muskelveränderungen primär oder secundär seien, untersuchte ich ausser den motorischen Nervendigungen sowohl die Nervenstämme, wie auch das Rückenmark, erstere mittelst der Osmiumsäure, letzteres mittelst der Nissl'schen Methode.

Als Versuchsthiere dienten mir Frösche, weisse Mäuse, Kaninchen und Hunde. Namentlich sind die Muskeln der beiden ersterwähnten Thierarten ausserordentlich bequem zu untersuchen, geben schöne, lebhafte Bilder, und sind, was die Nervenendigungen anbelangt, Objecte ersten Ranges. Bei genannten Thieren erzeugte ich nun theils acute, theils, insofern es möglich war, chronische Vergiftungen, und untersuchte die Musculatur in verschiedenen Stadien der Vergiftung; zunächst in einer physiologischen Flüssigkeit, dann nach Schnellfärbung mit Methylenblau, zum Schluss nach der Behandlung mit Goldchlorid-Osmiumsäure. Um, zur Bestimmung einer etwaigen Muskelatrophie Querschnitte herzustellen, bediente ich mich für die Härtung des Muskels meistens der MÜLLER'schen Flüssigkeit, die zum 10. Theile mit Formalin versetzt war; zuweilen aber auch der ZENKER'schen oder FLEMMING'-schen Flüssigkeit.

I. Wirkung des Kupfers auf die quergestreiften Muskeln.

Beim Menschen sowohl als bei den zu Versuchszwecken verwendeten kalt- und warmblütigen Thieren sind die im Krankheitsbild der acuten und subacuten Kupfervergiftung am eclatantesten hervortretenden Symptôme: die ausserordentlich früh eintretenden und rasch fortschreitenden Muskellähmungen; auch tritt der Tod meistens infolge einer Lähmung der Athmungsmusculatur ein, seltener durch primäre Lähmung des Herzmuskels. Der totalen Lähmung geht zunächst Muskelschwäche voran, worauf dann fibrilläre Zuckungen (daher das Zittern der Extremitäten), Parese und Paralyse folgen. Wie bekannt, wurde die Wirkung des Kupfers auf die Musculatur am eingehendsten von HARNACK[5] im Jahre 1875 untersucht. Zur Vergiftung der Thiere bediente er sich des weinsauren Kupferoxyd-Natriums, einer Verbindung, die im Gegensatz etwa zum schwefelsauren und essigsauren Kupfer eine locale Wirkung kaum entfaltet, sich in Wasser sehr gut löst, und Eiweiss blos in saurer Lösung fällt; daher zum Studium der Fernwirkung des Kupfers sich besser eignet, als alle die übrigen löslichen Kupfersalze. — HARNACK's Erfahrungen über die Wirkung des Kupfers auf die Muskeln sind in folgendem Satze ausgedrückt: «Est ist ein seltener Fall, wenn die Einwirkung einer Giftsubstanz auf den quergestreiften Muskel eines Säugethiers in so handgreiflicher, leicht zu erkennender Weise sich geltend macht». Hiemit stimmen auch die älteren Angaben von Orfila, Blake und Anderen überein, sowie auch die neueren Erfahrungen von Ellenberger, Hofmeister und Tschirch. Neuestens hatten Leo Schwartz [6] und Filehne [7] die Wirkungen des Kupfers pharmacologisch untersucht. Schwartz hat mit Kupferalbuminsäure gearbeitet. Diese Verbindung wurde nach dem Muster der von Marfori und Schmiedeberg dargestellten Eisenalbuminsäure hergestellt. Mit diesem Präparate, nämlich mit der Kupferalbuminsäure, erlangte Schwartz dieselben Resultate wie Harnack mit seinem Doppelsalze, nur trat bei letzterem die Wirkung langsamer ein, indem im Organismus das Kupfer aus dieser Verbindung sich nur sehr langsam abspaltet. Nach Filehne wäre zwar der Tod bei Kupfervergiftungen nicht auf Muskellähmung zurückzuführen, aber auch er stellt die wichtige Rolle derselben im Krankheitsbilde dieser Vergiftungen fest.

Meine eigenen Versuche an Fröschen, weissen Mäusen und Kaninchen, mittelst schwefel- und essigsaurem Kupfer, dann mit weinsaurem Kupferoxydnatrium und Kupferalbuminsäure bestätigen vollkommen die Angaben von Harnack und Schwartz; ich will nur erwähnen, dass ich die beim Eintreten der Parese am ganzen Körper sichtbaren fibrillären Zuckungen als besonders charakteristisch für peracute Vergiftungen fand; desgleichen auch den von den Autoren nicht erwähnten Umstand, dass die Reflexe zur Zeit, wo die Muskellähmungen noch nicht sehr vorgeschritten sind, verstärkt sind, ja sogar ein mässiger Reflextetanus festzustellen ist; ferner sah ich bei Fröschen, was v. Kétly [8] an einem vergifteten Menschen sah und beschrieb, dass nämlich durch mechanische Reizung von den Muskeln und Sehnen aus noch stärkere tonische Contractionen auszulösen waren, wie bei Tetanie; begreiflicherweise nur zu Beginn der Vergiftung, und nur in einzelnen Muskelgruppen.

Es fragt sich nun, welchen Ursprunges die erwähnten Muskellähmungen sind? — Harnack glaubt an eine directe Läsion der Musculatur, einerseits, weil die vollständige Intactheit der Willens- und Gefühlssphäre an eine Läsion des centralen Nervensystems überhaupt nicht denken lässt; andererseits, weil die Abnahme und das schliessliche Aufhören der directen Muskelerregbarkeit und das Ausbleiben der Todtenstarre direct auf eine Läsion der Musculatur selbst hinweisen. Roger,[9] der mit Kupferalbuminat arbeitete, schreibt die fortschreitende Muskellähmung einer aufsteigenden Rückenmarkslähmung zu; Köck,[10] der mit neutralem, essigsaurem Kupfer experimentierte, folgert aus den an Kaninchen und Tauben beobachteten Krämpfen (die wahrscheinlich Erstickungskrämpfe waren) auf eine Läsion der motorischen Nerven. Tschirch und Schwartz theilen Harnack's Ansicht. Filehne meint — allerdings nur auf Grund eines meiner Ansicht nach nicht massgebenden Versuches — abweichend von den vorerwähnten Autoren, dass man eine Lähmung des centralen Nervensystems nicht ausschliessen könne. Dieser Versuch Filehne's betraf einen Frosch, dem er die eine hintere Extremität aus dem Blutkreislaufe ausgeschaltet hatte, um auf diese Weise dem Kupfer den Weg zu den betreffenden Muskeln zu verlegen. Bei diesem Thiere sah er nun an der abgebundenen Extremität ebenfalls Lähmungserscheinungen auftreten, die er einer centralen Wirkung des Kupfers zuschreibt; aber wobei er den Umstand ausser Acht liess, dass die Sistierung der Blutversorgung an sich genügt, um auch, wie ich es oft sah, den Froschmuskel paretisch zu machen. Viel wichtiger, als die von Filehne angeführten Argumente, die für eine Läsion des centralen Nervensystems durch das Kupfer sprechen, — wobei natürlich eine gleichzeitige primäre Läsion der Muskulatur nicht ausgeschlossen ist, — sind einige von den Symptomen, die an dem vergifteten Menschen beobachtet wurden, und zwar Convulsionen zu Beginne der Vergiftung, Betäubung, Sopor, Coma, die auf eine Läsion des Gehirns hinweisen; weiterhin die von Kétly beschriebenen tetanieartigen Symptome, die laut diesem Autor von einer pathologischen Erregung der vorderen grauen Substanz des Rückenmarkes herrühren sollen.

Aus diesen Literatur-Angaben, dürfte, wie ich meine, für Jedermann die Überzeugung hervorgehen, dass es sich bei den acuten Kupfervergiftungen um eine primäre Lähmung der quergestreiften Muskeln handelt, und dass, wenn auch eine Läsion des centralen oder peripherischen Nervensystems nicht ausgeschlossen werden kann, die Muskellähmungen von jener unabhängig entstehen und diese beiden Processe parallel nebeneinander vor sich gehen. Es werden denn nun, wenn durch das Kupfer eine directe Lähmung der Muskeln bedingt wird, und diese Lähmungen so rasch und vollkommen sich entwickeln, wie dies von den Autoren beschrieben wird, in den quergestreiften Muskeln, deren Structur als sehr labil bekannt ist, auch histologische Veränderungen zu erwarten sein. Dass sich in der That wesentliche Gewebsveränderungen einstellen, die den Autoren bisher entgangen sind, geht aus meinen nunmehr zu beschreibenden Experimenten hervor.

Ein oder zwei Kubikctm, einer 1%-igen, mittelst physiologischer Kochsalzlösung hergestellten Lösung des weinsauren Kupferoxyd-Natriums wurden grossen Fröschen theils unter die Haut, theils in einen grösseren Nebenast der Vena abdominalis gespritzt. Diejenigen Thiere, welche die Kupferlösung direct in ihr Gefässsystem eingespritzt bekommen hatten, starben später, jedoch innerhalb 24 Stunden. Ob nun das Gift auf die eine oder andere Weise angewendet wurde, traten immer, bereits nach $^1/_2$—1 Stunde Muskellähmungen auf, erst an den hinteren, dann an den vorderen Extremitäten, schliesslich an den Hals- und Kopfmuskeln, zunächst bloss als Parese, nachher als Paralyse. Todtenstarre stellte sich nach dem Tode nicht ein. Wenn ich nun an dem vollkommen gelähmten bewegungslosen Thiere, dessen Herz aber noch arbeitete, die von der Haut entblössten Muskeln direct galvanisch oder faradisch reizte, sah ich überhaupt keine Muskelcontractionen eintreten. Ich will noch hinzufügen, dass ein auf dem Electroden-Objecttisch gereiztes Muskelbündelchen durch das Microscop beobachtet, bereits $^1/_4$—$^1/_2$ Stunde nach der Vergiftung seine Contractionsfähigkeit eingebüsst hatte; ja, es hörte sogar die Reizbarkeit eines Bündelchens, dessen Contractilität am Jendrássik'schen Objecttisch gut beobachtet werden konnte, bereits nach 1—2 Minuten auf, wenn ich es mit ein-zwei Tropfen der obigen Kupferlösung benetzte. Wenn ich aus den Schenkelmuskeln des vor 2—3 Stunden vergifteten, aber noch lebenden Thieres kleine Stückchen herausschnitt, und dieselben in physiologischer Kochsalzlösung, eventuell auch mit Methylenblau gefärbt, zerzupfte, oder am Objectträger gelinde zerdrückte, konnte ich schon den beginnenden Schwund der Querstreifung beobachten, und zwar am frühesten an den Rändern der Fasern; andererseits traten in der Faser kleine Tröpfchen oder Körnchen auf, gleichzeitig mit einer sehr deutlichen Längsstreifung oder Runzelung; die Muskelkerne waren sehr scharf zu sehen und mit dunklen Körnchen gefüllt.

An den Muskelstückchen, die dem bereits abgestorbenen Thiere entnommen wurden, konnte ich bei sofortiger Unter-

Norm. Froschmuskelfaser in physiol. Kochsalzlösung. Reichert III. 7.

Acute Kupfervergift. Froschmuskelfaser in physiol. Kochsalzlösung Starke Körnung. Reichert III. 7.

suchung oder nach sofortiger Färbung meist ein vollständiges Fehlen der Querstreifung beobachten. Es war sogar ein seltener Befund, wenn ich eine intacte Faser in einem Gesichtsfelde fand. Die Muskelfasern selbst waren stark gekörnt, die Körnchen grau glänzend, rund; sie waren keine Fetttröpfchen, wie ich dies mittelst Osmiumsäure feststellen konnte. In diesem Stadium ist an den Muskelfasern eine sehr starke Längsstreifung zu sehen; die Frage ob diese Erscheinung als eine Faltenbildung des Sarcolemmas mit Schrumpfung der contractilen Substanz oder als beginnender Zerfall in Primitiv-Fibrillen zu deuten sei, konnte ich erst an meinen Beobachtungen an mehr chronisch vergifteten Thieren und zwar dahin entscheiden, dass es sich um letzteres handelt.

Aus den Muskeln derselben Frösche verfertigte ich auch Goldchloridpräparate, desgleichen härtete ich auch zur Herstellung von Längs- und Querschnitten einzelne Stücke in Zenker'scher, Flemming'scher und Müller'scher Flüssigkeit (letztere war mit Formalin versetzt); die Schnitte färbte ich mit Hämatoxylin,

Acute Kupfervergiftung. Post mortem entnommene Muskelfaser. Goldchlorid-Præparat. Albuminöse Trübung. Reichert III. 7.

Acute Vergift. mit 1% Weinsaur. Kupferoxyd-Natr. Froschmuskelfaser in physiol. Kochsalzlösung. Schwund der Querstreifung; starke Längsstreifung. Reichert III. 7.

Hämatoxylin-Eosin und Bismarck-Braun. An diesen fixierten Präparaten, insbesondere an den mit Goldchlorid behandelten, die unter gelindem Drucke zertheilt wurden, konnte ich — wenn auch nicht oft — eine Veränderung wahrnehmen, die an frischen Objecten kaum zu sehen war, nämlich die Zenker'sche *hyaline oder wachsartige Degeneration.* Eine solche Muskelfaser lässt zuweilen gar keine Structur erkennen, ist vollständig homogen, hyalin in ihrer ganzen Masse, nur die Muskelkerne sind noch zu erkennen. An andern Fasern, die eine derartige Degeneration nicht zeigten, sah ich dasselbe Bild, wie an den frischen Objecten, nämlich ein Undeutlichwerden oder einen fast völligen Schwund der Querstreifung; dagegen eine ausgesprochene Längsstreifung mit Auftreten von Körnchen, die sich längs der Längsstreifen lagerten. Die histologischen Veränderungen an den Muskeln von Fröschen mit acuter Kupfervergiftung sind demnach die folgenden: *Albuminöse Trübung, die Zeichen eines beginnenden Zerfalles in Primitiv-Fibrillen, und zuweilen auch Zenker'sche wachsartige Degeneration.* Dass diese Veränderungen primär sind, geht zunächst daraus hervor, dass Ganglienzellen des Rückenmarkes und der Intervertebralganglien, nach Nissl untersucht, wie auch die zu den fraglichen Muskeln gehörigen Nervenstämme, mit Osmiumsäure behandelt, als vollständig intact und normal sich erwiesen; ferner auch aus dem Umstande, dass ich bei der Untersuchung der in den erkrankten Muskeln befindlichen Nerven endigungen kein einziges jener pathologischen Bilder fand, die im Babes-Blocq-Atlas von Babes und Marinesko abgebildet sind.

Links norm. Froschmuskelfaser; rechts Muskelfaser eines acut mit Kupfer vergift. Frosches. Härtung in Flemming'scher Flüssigkeit. Färbung mit Hæmatoxylin-Eosin Reichert III. 7.

In einer anderen Versuchsreihe erzeugte ich an weissen Mäusen, so weit, als es eben gieng, mehr chronische Vergiftungen, theils mit weinsaurem Kupferoxydnatrium, theils mit schwefelsaurem und essigsaurem Kupfer und Kupferalbuminat. Die mit letzterer Substanz vergifteten Thiere bekamen dieselbe per os mit Weissbrot vermengt als Futter, die anderen Kupferpräparate wurden täglich in 1%-iger Lösung unter die Haut gespritzt (pro die 1 Kubikctm.) Die Thierchen wurden, besonders die letzteren am zweiten Tage matt und kraftlos, doch frassen und tranken sie noch. Am dritten Tage schleppten sie bereits ihre hinteren Extremitäten nach und verendeten nach starker Abmagerung und unter den Zeichen einer allgemeinen Muskellähmung endlich am 7—9.

Tage. Nach erfolgtem Tode untersuchte ich die noch warme Musculatur (Extremitäten-, Brust-, Bauchmuskeln) genau in derselben Weise, wie früher die Froschmuskeln und verglich die Präparate controllweise mit den, nach identischen Methoden behandelten, Muskelpräparaten gesunder weisser Mäuse. Während die Muskeln nicht vergifteter Thiere immer die idealste Querstreifung zeigten, konnte ich bei den chronisch vergifteten eben dasselbe beobachten, wie an den acut vergifteten Kaltblütern, mit dem Unterschiede, dass sich die Zenker'sche wachsartige Degeneration, d. h. die Coagulationsnekrose viel häufiger zeigte, und dass sich zahlreiche dünner gewordene, atrophische Fasern vorfanden, die, wie denn dies bei der Muskelatrophie fast zur Regel wird, eine Vermehrung

Norm. Muskelfaser einer weissen Maus. Goldchlorid Præparat. Reichert III. 7.

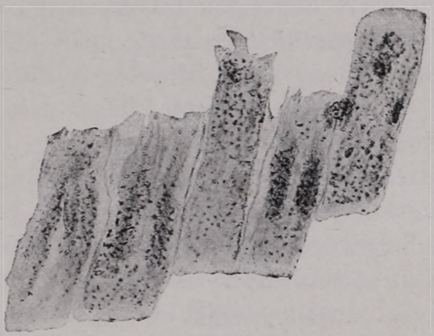
Chron. Kupfervergift. Cupr. acet. subcutan. Muskelfasern einer weissen Maus. Goldchlorid-Præparat. Zenker'sche Degener. Reichert. III. 3.

der Kerne zeigten. Die Körnung war sowohl in diesen atrophischen, wie auch in den übrigen Fasern, die ihre Querstreifung eingebüsst hatten, sehr stark, und die Körnchen waren in den meisten Fällen nach der Längsstreifung orientiert, stellenweise in auffallend grosser Menge vorhanden.

Es war auch eben bei diesen Thieren festzustellen, dass die

Längsstreifung auf eine «Zerklüftung» in Primitiv-Bündeln zu beziehen ist; man findet nämlich in solchen Fällen Muskelfasern, die bereits thatsächlich zerklüftet sind, also ein mehr fortgeschrittenes Stadium dieses Processes zeigen. Der Zerfall in Querscheiben, was bei der Goldchloridbehandlung normaler Musculatur kaum zu sehen ist, kann an den Muskeln der vergifteten Thierchen, wenn auch nicht in der Regel, doch zuweilen beobachtet werden. Ich kann nicht umhin, zu erwähnen, dass an den Muskelfasern, die eine Querstreifung noch

Chron. Kupfervergift. Muskelfasern einer weissen Maus. Goldchlorid-Præparat. Links Anfang d. Zerklüftung, rechts vorgeschrittene albuminöse Trübung. Reichert. III. 7.



Chron. Kupfervergift. Muskelfasern einer weissen Maus. Goldchlorid-Præparat. Albuminöse Trübung. Reichert. III. 7.

erkennen liessen, die schöne regelmässige Linie der «sarcous elements» in Unordnung gerathen zu sein schien, als wenn dieselben auseinanderfallen wollten; ich sah in diesen Fällen eher eine Querpunctiertheit, als eine Querstreifung. Für das mikroskopische Bild war es irrelevant, ob das Thier per os mit dem Futter oder subcutan vergiftet wurde, doch schien es mir, als wären die Veränderungen nach Einspritzung des weinsauren Kupferoxydnatriums am stärksten. Die Nerven und Nervenendigungen in den mit Osmiumsäure, resp. Goldchlorid behandelten Präparaten zeigten gar keine Veränderungen, desgleichen die Ganglienzellen des Rückenmarks bei Nissl'scher Behandlung.

In einer dritten Versuchsreihe vergiftete ich Kaninchen durch subcutane Einspritzung von weinsaurem Kupferoxydnatrium. Nachdem die Thiere unter der Einwirkung von 6—8 Ctgm. des Giftes nach 3—4 Tagen unter den Zeichen allgemeiner Muskellähmung verendeten, untersuchte ich Musculatur, Nerven und Rückenmark und sah an den Muskeln denselben positiven, an den Nervenelementen denselben negativen Befund, wie an Fröschen und weissen Mäusen; allerdings waren die Muskelveränderungen nicht so ausgesprochen, wie an den letzgenannten Thierchen. Wobei zu bemerken ist, dass die Kaninchenmuskeln auch im gesunden Zustande nicht dieselben schönen und klaren Bilder geben, wie die Muskeln von Fröschen und Mäusen.

Wenn ich noch hinzufüge, dass ich an der Herzmusculatur der Maus dieselben Veränderungen beobachtete, wie ich sie die Extremitäten- und Stammesmuskeln betreffend beschrieb, habe ich das gesammte Resultat meiner Experimente mitgetheilt, das in Folgendem zusammengefasst werden kann: Bei acuter und subchronischer Kupfervergiftung kommt mit den Muskellähmungserscheinungen parallel eine Körnung der quergestreiften Musculatur sowie Undeutlichwerden und später Schwund der Querstreifung, zuweilen auch Coagulations-Nekrose, sowie auch Neigung zum Zerfall in Primitiv-Fibrillen, stellenweise auch zu Querscheiben zustande; in Fällen mit längerem Verlaufe kommt aber auch Muskelatrophie vor.

II. Wirkung des Zinks auf die quergestreiften Muskeln.

Das Zink, dessen Präparate schon von Buchheim, und nach ihm von Anderen, wie Schmiedeberg, Harnack namentlich auf Grund ihrer in vieler Beziehung dem Kupfer ähnlichen Wirkungen zur pharmacologischen Gruppe des Kupfers eingetheilt wurden, ist toxicologisch zwar weniger wichtig als das Kupfer, pharmacologisch aber, wenigstens heutzutage, umso wichtiger. Auch beim Zink steht im Symptomenbilde der Vergiftung unter den Resorptions-Symptomen die Wirkung auf die quergestreifte

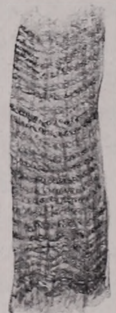
Musculatur im Vordergrunde. Jedem Autor, der eine schwerere Zinkvergiftung beschrieb, fiel die zu hohem Grade sich entwickelnde Muskelschwäche auf. (HIRT,[11] POPOFF,[12] ORFILA,[13] TESTA,[14] D'AMORE[15] und MICHAELIS.[16]) Neuerer Zeit beschäftigte sich HARNACK[17] mit der Wirkung des Zinks auf die Musculatur, und zwar in derselben Arbeit, deren ich im Kapitel über das Kupfer gedachte. Seiner Ansicht nach ist diese Wirkung des Zinks mit der des Kupfers identisch, doch quantitativ geringer. Er bediente sich des phosphorsauren Zinkoxydnatriums und des baldriansauren Zinks, und sah an Fröschen nach Dosen, die zwei Mgrm. Zinkoxyd entsprachen, eine totale Lähmung in einigen Stunden sich entwickeln; nach geringeren Dosen hingegen nur eine Parese; bei Kaninchen und Hunden machte er — selbstverständlich nach grösseren Gaben — ähnliche Beobachtungen. Er betont ferner seine Ansicht, dass das Zink direct die Musculatur beeinträchtige, und dass der Tod einer directen Einwirkung des Zinks auf die Herzmusculatur zuzuschreiben sei.

Der neueste Autor, der mit Zink arbeitete, ist SACHER,[18] aus dem pharmacologischen Laboratorium zu Dorpat. Das Präparat, dessen er sich bediente, war, nach Muster des HARNACK'schen Kupferdoppelsalzes bereitet, weinsaures Zinkoxydnatrium, mit einem Gehalt an Zink von 22·65%. Dieses Präparat, das ich auch benützte, ruft keine locale Wirkung hervor, wenigstens keine solche in 1—2%-igen Lösungen; aus seinen Lösungen wird es durch das Blutalkali nicht gefällt; es löst die rothen Blutkörperchen nicht, verändert weder Hämoglobin, noch Oxyhämoglobin, noch erzeugt es einen Niederschlag im Blutserum. Das Zinkalbuminat, womit SACHER ebenfalls arbeitete, ist, seiner Ansicht nach, weniger vortheilhaft, indem es, wenn auch nur in grösserer Concentration, im Serum einen Niederschlag erzeugt. SACHER sah bei Kaltblütern schon auf Dosen von einigen Milligrammen zunächst Muskelschwäche, dann ein Abnehmen der Reflexe und nach 4—5 Stunden eine Parese eintreten. Bei Warmblütern, welche bereits an einer Dosis des Doppelsalzes zu Grunde giengen, die 65 Mgrmen des Zinkoxyds pro 1 Kgr. Thier entsprach, beobachtete er nach geringeren Dosen Muskelschwäche, nach stärkeren Extremitätenlähmungen, in tödtlichen Vergiftungsfällen aber zuerst tonische Krämpfe, nachher eine rasch fortschreitende totale Muskellähmung. Wie Harnack, sieht auch er in diesen Erscheinungen eine directe Läsion der quergestreiften Muskeln, und diese seine Auffassung wird durch Versuche, die er an von Fröschen entnommenen Nerven-Muskelpräparaten anstellte, auch bestätigt. Es geht aus diesen Versuchen nämlich hervor, dass das Muskelstück (ohne den Nervenstamm) in eine Lösung des Zinkdoppelsalzes (1 Th. auf 20,000—25,000 physiologische Kochsalzlösung) getaucht und einige Minuten darin gelassen, seine Empfindlichkeit dem faradischen Strome gegenüber vollständig eingebüsst hat, sowohl für directe, als auch für die indirecte Reizung. Wenn er nur den Nervenstamm in die Zinklösung tauchte, wurde auch dieser, wenn auch nicht so schnell als der Muskel, gelähmt; woraus Sacher folgert, dass man eine Lähmung der Nervenendigungen durch das Zink nicht ausschliessen könne, dabei aber natürlich festhält, dass das Zink die Musculatur direct lähmt. Interessant sind auch Sacher's Experimente an Blutgefässen und an dem Oesophagus von Fröschen, welche darthun, dass das Zink auf die glatten Muskelfasern in gleicher Weise wirkt, wie auf die quergestreiften. Sacher suchte auch nach den Ursachen der obenerwähnten Herzlähmung; er arbeitete theils an dem entblössten Froschherzen, theils am ausgeschnittenen Herzen, das in dem Williams'schen Apparat eingeschaltet war, und schreibt den diastolischen Herzstillstand per exclusionem einer directen Einwirkung des Zinks auf den Herzmuskel zu.

Aus allen diesen Angaben, die mit den modernsten pharmacologischen Methoden ausgeführt wurden, geht hervor, dass auch das Zink, wie das Kupfer ein specifisches Gift der quergestreiften Musculatur ist, wenn es auch nicht gelungen ist, wie bei dem Kupfer, die Lähmungssymptome *ausschliesslich* aus einer Läsion der Muskelsubstanz abzuleiten.

Es ist vollkommen überflüssig, meine mit dem Zink, namentlich mit dessen obenerwähntem Doppelsalze ausgeführten Versuche zu beschreiben. Meine Beobachtungen, an Kalt-, wie auch an Warmblütern stimmen mit den Harnack'- und Sacher'schen Punkt für Punkt überein; daher ich nun auf die Ergebnisse meiner Untersuchungen zu sprechen kommen kann, die sich auf die mikroskopische Structur des durch Zinkvergiftung gelähmten Muskels beziehen.

Ich gieng bei diesen Versuchen genau so vor, wie ich es bei dem Kupfer beschrieb. Von Kaltblütern wählte ich den Frosch, von Warmblütern die weisse Maus. Das zur Vergiftung nöthige Zink applicierte ich theils in Form von Zinkalbuminat, theils als schwefelsaures Zink, theils aber und in den meisten Fällen als weinsaures Zinkoxydnatrium in einer 1%-igen Lösung. Das erste Präparat wurde den weissen Mäusen mit dem Futter (Weissbrot) gemengt dargereicht, das Sulfat, das Doppelsalz und in einigen Fällen auch das Zinkalbuminat unter die Haut, das Doppelsalz aber auch unmittelbar in das Gefässsystem (Vena abdominalis) gespritzt. In der ersten Versuchsreihe erzeugte ich bei Fröschen möglichst acute Vergiftungen. 3—4 Kubikctm. der 1%-igen Lösung des Doppelsalzes, dem Thiere subcutan beigebracht, tödteten dasselbe nach 3—4 Stunden; 1—2 Kubikctm. in die Vena abdominalis gespritzt, in 1—1½ Stunden. Nach 30—40 Minuten war bereits eine Parese der hinteren Extremitäten sichtbar, nach 50—60 Minuten aber so zu sagen die ganze Musculatur paralytisch, und weder durch den constanten, noch auch durch den faradischen Strom bei directer Reizung zu Contractionen, oder auch nur zu Zuckungen zu bringen. Das Thier lag bewegungslos ausgestreckt, und nur das selten und träge sich contrahierende Herz zeigte, dass das Leben noch nicht ganz erloschen sei. Gleich zu Beginn der Vergiftung war eine gewisse Betäubung und ein der Katalepsie ähnlicher Zustand bemerkbar. Nach dem Absterben des Thieres waren die Muskeln etwas rigid geworden; doch stellte sich keine wirkliche Todtenstarre ein. Hatte ich nun einzelne Muskelpartikelchen, dem noch lebenden Thiere unmittelbar nach oder auch vor dem Herzstillstande entnommen, in physiologischer Kochsalzlösung, oder mit Methylenblau gefärbt und sofort untersucht, konnte ich nirgends mehr eine intacte Querstreifung wahrnehmen; an den meisten Muskelfasern war sogar von jener keine Spur zu sehen; die Musculatur war überall längsgefaltet, resp. längsgestreift und mit glänzenden Körnchen erfüllt; während an Muskelpräparaten von demselben Thier, die vor der Vergiftung entnommen wurden, die schönste Querstreifung zu sehen war. An Stellen, wo die Querstreifung überhaupt noch zu sehen war, hatte sie das Aussehen, als wäre sie in Pünktchen oder Kügelchen zerfallen. Dasselbe pathologische Bild bot sich auch an zerzupften oder zerdrückten Goldchlorid-Präparaten, desgleichen auch an solchen, die in Formalin oder ZENKER'scher Flüssigkeit gehärtet, mit dem Mikrotom geschnitten, und mit Bismarckbraun oder Hämatoxylin-Eosin gefärbt waren. An Präparaten, die nach den beiden letztgenannten Methoden behandelt waren, machte das Muskelbild auch an Stellen, wo die Veränderungen verhältnissmässig noch am geringsten waren, den Eindruck, als ob die Querstreifung der Fasern zerwühlt, in Unordnung gerathen, oder punctiert wäre. An den Fröschen erzeugte ich auch subchronische Vergiftungen. Die Thiere verendeten am 5—7. Tage, nachdem sie täglich 1 Kubikctm. einer 1%-igen Lösung des Zinkdoppelsalzes unter die Haut gespritzt bekommen hatten, unter den Symptomen einer langsam sich entwickelnden Lähmung, wobei die directe Reizbarkeit der Muskeln vollständig verschwand. Nach jeder Einspritzung konnte ich 2—3 Stunden lang Betäubungs-Erscheinungen wahrnehmen. Die Musculatur dieser Thiere, genau wie in der früheren Versuchsreihe untersucht, liess Querstreifung auch in Spuren nicht mehr sehen; wohl aber eine hochgradige Körnung, und zwar weit stärker als bei den Thieren der früheren Versuchsreihe, und auch eine viel schärfere, dabei derbere Längsstreifung der Muskelfasern. Die Körnchen waren meistens in Längsreihen, interfibrillär geordnet, nur an den Rändern der Fasern waren sie in querer Anordnung sichtbar. Diese Verhältnisse waren am besten an frischen Objecten und Goldchlorid-Präparaten, die zerzupft oder zerdrückt wurden, zu sehen; weniger gut an Präparaten, die nach den angegebenen Methoden gehärtet, geschnitten und mit Bismarckbraun oder



Acute Zinkvergift. mit weinsaur. Zinkoxydnatr. 1%-ige Lösung in die Abdominalvene. Froschmuskelfaser in physiol. Kochsalzlös. untersucht. Die Querstreifung zerfällt in Körnchen. Reichert III. 7.

Hämatoxylin gefärbt wurden. Zu bemerken habe ich noch, dass an den Präparaten dieser Reihe, insbesondere an den mit Hämatoxylin gefärbten, nicht selten auch eine Vermehrung der Musculatur zu sehen war, zugleich hie und da auch eine Atrophie der Muskelfasern. Die atrophischen Fasern traten insbesondere an Querschnitten hervor.

Die dritte Versuchsreihe bezog sich auf weisse Mäuse, bei denen ich eine womöglich chronische Zinkvergiftung hervorzu-

Chron. Zinkvergift, mit Zinkalbuminat (subcutan). Muskelfasern einer weissen Maus. Goldchlorid-Præparat. Links zwei Fasern mit grober Längsstreifung und starker Körnung, rechts eine Faser mit schwindender Querstreifung. Reichert III. 7.

Chron. Zinkvergift. mit Zinkalbuminat. Muskelfasern einer weissen Maus. Goldchlorid-Præparat. Rechts eine atrophische, degenerierte Faser, in der Mitte eine noch normale, l nks eine Faser albuminös getrübt. Reichert III. 7.

bringen suchte. So bekam z. B. ein Thier täglich 1 Kubikctm. einer 1%-igen Lösung von Zinksulfat unter die Haut gespritzt und blieb 17 Tage lang am Leben; zwei andere Thiere erhielten dieselbe Dosis einer 1%-igen Lösung des Zinkalbuminats, und lebten 20, resp. 21 Tage lang; ein Thier, dem täglich 1 Kubikctm. einer 1%-igen Lösung des Zinkdoppelsalzes unter die Haut gespritzt wurde, lebte nur 5 Tage lang. Alle diese Thiere magerten ab, wiewohl sie ihrem Futter und Trank eifrig zusprachen, und giengen unter den Symptomen einer sich immer mehr ausbreitenden und steigernden Muskellähmung zu Grunde, wobei die Bauchund Extremitätenmuskeln stark atrophisch wurden. Ich will noch hinzufügen, dass die Thiere nach der täglich vorgenommenen Einspritzung jedes Mal 1—2 Stunden lang betäubt, schlafsüchtig waren. Bei Anwendung der bereits angeführten verschiedenen Untersuchungsmethoden traf ich unter dem Mikroskope kaum auf einige scheinbar intacte Muskelfasern in je einem Präparate. Die sonst, am gesunden Thiere prächtig sichtbare Querstreifung war an den meisten Fasern theils getrübt, theils gänzlich verschwunden; dagegen entweder eine Längsstreifung sichtbar, die mit Körnchenbildung einhergieng, oder aber, was ich bei acut und chronisch vergifteten Fröschen nicht beobachten konnte, die ZENKER'sche wachsartige, d. h. hyaline Degeneration (Coagulations-Necrose); in den angrenzenden Theilen aber eine Atrophie mit stärkerer Vermehrung der Muskelkerne. Dass alle diese Erscheinungen nicht unter dem Einflusse der Behandlung, Härtung und Färbung zu Stande kommen, bezeugten mikroskopische Bilder, an denen in unmittelbarer Nachbarschaft der erkrankten Fasern auch ein-zwei scheinbar normale zu sehen waren.

Bei der Zinkvergiftung traf ich demnach an den quergestreiften Muskeln dieselben Veränderungen an, wie bei der Kupfervergiftung; daher dem Zink im pharmacologischen System auch in dieser Beziehung der Platz neben dem Kupfer zukommt, von dem es sich hauptsächlich nur durch eine gewisse betäubende Wirkung unterscheidet. Dass aber alle diese pathologischen Veränderungen der Muskeln primär seien, bewiesen die mit FLEMMING'scher Flüssigkeit behandelten Präparate der zu den fraglichen Muskeln führenden Nervenstämme, an denen die Nervenfasern vollständig normale Bilder darboten; desgleichen die Ganglienzellenpräparate aus Rückenmark und Intervertebralganglien, nach NISSL behandelt. Bezüglich der Letzteren könnte ich höchstens hinzufügen, dass ich die pericellularen Räume etwas vergrössert, die Nervenzellenkerne etwas gequollen und glänzender fand, welche Veränderungen aber auch artificiell sein können. An den motorischen Nervenendigungen, die ich an den Goldchloridpräparaten untersuchte, fand ich ebenfalls keine structurellen Veränderungen vor.

III. Wirkung des Cadmiums auf die quergestreiften Muskeln.

Das Cadmium gehört, obzwar seine Salze in einigen Pharmacopœen, wie in der spanischen, französischen, englischen, griechischen, russischen und deutschen (Ed. I.) officinell sind und es auch in der Farben-Industrie eine Rolle spielt, weder in pharmacologischer, noch in toxicologischer Hinsicht zu den medicinisch wichtigeren Substanzen, wiewohl einige seiner Salze verhältnissmässig wirksame Arzneien und auch kräftige Gifte sind. Die meisten Autoren beschränken sich auf eine einfache Aufzählung seiner Präparate und auf die Bemerkung, dass die Verbindungen des Cadmiums den entsprechenden Verbindungen des Zinks analog wirken. So thun es Werber, Van Hasselt, Falck, Kobert und Lewin in ihren toxicologischen, Nothnagel-Rossbach, Rabuteau, Husemann, Bernatzik-Vogl, Fonsagrives und Balogh in ihren pharmacologischen Handbüchern. Einige der Autoren erwähnen einfach, dass das Cadmium, wie es den Anschein hat, ein stärkeres Gift sei, als das Zink.

Ich konnte in der Litteratur nur zwei toxicologisch-experimentelle Arbeiten über Cadmium finden: eine vorläufige Mittheilung von Marmé [19] aus dem Jahre 1867 und eine italienische Arbeit von Paderi [20] aus dem Jahre 1895. Diese zwei Arbeiten enthalten viele einander widersprechende Angaben. In eine Erörterung der sämmtlichen in beiden Arbeiten enthaltenen Angaben will ich mich nicht einlassen, und muss mich nur auf diejenigen beschränken, die sich auf die motorische Sphäre beziehen. Marmé sah an Thieren, denen er Cadmiumsalze beibrachte, allgemeine Schwäche und vor dem Verenden Krämpfe auftreten, er erwähnt aber nichts von einer motorischen Lähmung. Paderi berichtet dagegen über eine ausgesprochene motorische Lähmung, der Erregungszustände vorangiengen; die Lähmungen wären, nach Paderi, centralen Ursprunges, wiewohl seine direct an den Muskeln angestellten Versuche ihn eher zur Annahme einer directen Muskellähmung nach Art des Kupfers berechtigt hätten.

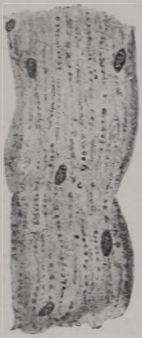
Über Vergiftungsfälle an Menschen fand ich in der Litteratur nur drei Berichte (Wheeler,[21] Burdach [22] und Soret [23]); in denselben wird, neben gastro-enteritischen Symptomen, bezüglich der motorischen Sphäre nur eine bedeutende Muskelschwäche erwähnt.

Ich stellte meine Versuche mit weinsaurem Cadmiumoxyd-Natrium an, das nach dem Muster des HARNACK'schen Kupfer- und SACHER'schen Zinkdoppelsalzes angefertigt war. Diese Verbindung ist in Wasser sehr gut löslich; durch dieselbe wird das Eiweiss nicht gefällt, und das Blut in physiologischer Kochsalzlösung nicht angegriffen, sie verhält sich mit einem Worte eben so, wie die analogen Verbindungen des Kupfers und Zinks. Ich verwendete eine 1%-ige Lösung dieses Salzes, indem ich dieselbe theils Fröschen, theils weissen Mäusen, theils Kaninchen bald unter die Haut, bald aber direct in das Gefässsystem spritzte.

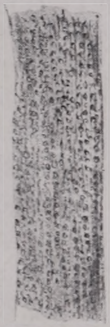
Meine Erfahrungen zeigen, dass die Wirkung des Cadmiums auf die quergestreifte Musculatur im Grossen und Ganzen der des Kupfers und Zinks ähnlich sind und bezüglich der Intensität dieser Wirkungen das Cadmium den Mittelpunkt zwischen jenen beiden behauptet, da es jedenfalls stärker toxisch wirkt als das Zink und schwächer als das Kupfer. Mit dem Zink hat es auch noch die Ähnlichkeit, dass man nach seiner Verabreichung neben den gleich zu erörternden Lähmungserscheinungen auch eine geringe Betäubung beobachten kann; mit dem Kupfer aber in dem, dass sich zu Beginn der Vergiftungserscheinungen eine gesteigerte Reflex-Erregbarkeit nachweisen lässt.

Ein Kubikctm. einer 1%-igen Lösung obigen Cadmium-Doppelsalzes erzeugte, einem Frosche unter die Haut gespritzt, bereits nach 1/4 Stunde eine Parese der Extremitäten; nach einer Stunde eine totale Paralyse der gesammten quergestreiften Musculatur; direct gereizt waren die Muskeln zu dieser Zeit nicht mehr zur Contraction zu bringen. Nach 1 1/2 Stunden stand, wie bei der Kupfer- und Zinkvergiftung, auch das Herz still und war auf keine Weise mehr reizbar. Auch weisse Mäuse giengen nach 2 Kcm. einer 1%-igen Lösung des Doppelsalzes in einigen Stunden unter den Symptomen einer allgemeinen Muskelparalyse zu Grunde; auf eine Dosis von 1 Kcm. aber erst nach 2—3 Tagen, unter denselben Symptomen. Kaninchen verendeten von 3—4 Centigrammen des Doppelsalzes in 48 Stunden. Froschmuskeln waren in 1/4-1/2-1%-ige mit physiologischer Kochsalzlösung angefertigte Lösung des Cadmium-Doppelsalzes getaucht, bereits nach einigen Minuten weder vom Nerv aus, noch auch direct gereizt zur Contraction zu bringen.

Alles weist also darauf hin, dass auch das Cadmium, wie Kupfer und Zink, ein Muskelgift sei. Bestärkt wurde ich in dieser meiner Ansicht durch die Ergebnisse der mikroskopischen Untersuchung, der ich die quergestreiften Muskeln der an Cadmium-Vergiftung verendeten Thiere unterwarf. Wenn ich nämlich Muskelstücke eines Frosches oder einer weissen Maus, die von



Acute Cadmiumvergift. mit weinsaurem Doppelsalz. (1%-ge Lösung) Froschmuskelfaser mit Methylenblau gefärbt. Längs gestreift; Querstreifung veschwunden; interfibrillär zahlreiche Körnchen. Reichert III. 7.



Acute Cadmiumvergiftung mit weinsaurem Doppelzalz. (1%-ige Lösung.) Froschmuskelfaser in physiol. Kochsalzlösung. Hochgradige albuminöse Degeneration. Reichert III. 7.

1—2 Kcm. einer 1%-igen Lösung des Cadmium-Doppelsalzes soeben verendeten, in Serum oder in einer anderen physiologischen Flüssigkeit sofort mikroskopisch untersuchte, sah ich die Muskelfasern von kleinen glänzenden Körnchen oder Tröpfchen erfüllt, die keine Fetttröpfchen waren, sondern aus einer eiweissartigen Substanz bestanden. Diese Körnchen oder Tröpfchen waren besonders reichlich an den Randpartieen der Faser zu sehen; daselbst war auch die Querstreifung undeutlich oder gar fehlend, während sie nach innen zu deutlich genug schien. An anderen Muskelfasern sah ich die Querstreifung in Auflösung begriffen; andere hatten wieder den Anschein, als ob sie der

Quere nach geborsten wären; einzelne isotrope Streifen schienen sehr breit, wie wenn sie leer wären, aber auch ganz intacte Muskelfasern waren noch zu sehen. An erkrankten Muskelfasern war die Längsstreifung zuweilen sehr ausgesprochen. In Goldchlorid-Präparaten sah ich zahlreiche Fasern, deren Querstreifung vollständig geschwunden und nur eine starke Körnung oder Längsstreifung aufwies. Überhaupt kamen dieselben Bilder vor, wie bei dem Zink, nur mit dem Unterschiede, dass die Körnung hier eine dichtere war. Da es mir leider bei meinen kleinen Thieren nicht gelungen ist, eine chronische Cadmium-Vergiftung zu erzeugen, konnte ich weder die ZENKER'sche Degeneration, noch eine Muskelatrophie nachweisen, wie dies bei Kupfer und Zink möglich war. Quer- und Längsschnitte der gehärteten Muskeln, nach den bei dem Kupfer beschriebenen Methoden hergestellt, mit Hämatoxylin-Eosin und Bismarckbraun gefärbt, gaben dieselben Bilder, wie bei acuter Zinkvergiftung.

Die Durchsicht des Nervensystems ergab hier ebenso keine Veränderungen, wie bei den beiden früher erwähnten Metallen.

Das Cadmium erzeugt daher die Lähmungen direct durch Einwirkung auf die quergestreiften Muskeln und verändert die Structur derselben in derselben Weise wie Kupfer und Zink bei acuten Vergiftungen.

IV. Mikrochemische Versuche am Muskel mit Kupfer, Zink und Cadmium.

Was ich bezüglich der Structurveränderungen der quergestreiften Muskeln des lebenden Thieres unter der Einwirkung von Kupfer, Zink und Cadmium bisher vorbrachte, wird, wie ich glaube, gut ergänzt durch Beobachtungen, die ich an frischen Muskelstückchen, welche lebenden, gesunden Fröschen und weissen Mäusen entnommen wurden, anstellte. Die Muskelstückchen wurden sofort in physiologischer Kochsalzlösung unter das Mikroskop gebracht; dann brachte ich von der $1\text{-}^{1}/_{2}\text{-}^{1}/_{4}\%$-igen, ja noch verdünnteren, mit 0·6%-iger Kochsalzlösung angefertigten Lösung des Kupfer-, Zink- und Cadmium-Doppelsalzes einige Tropfen an den Rand des Deckgläschens, und sog dieselben vermittelst eines an dem anderen Rand des Deckgläschens angebrachten Stückchen Fliesspapieres durch das Präparat hindurch und beobachtete während dieser Zeit die zunächst vollkommen intacte Structur der Muskelfasern. (Bemerken muss ich noch, dass normale Muskelbilder in Objecten, die den beiden obigen Thiergattungen frisch entnommen und vor dem Eintrocknen geschützt werden, selbst nach 1—2 Stunden sich nicht verändern.) In dem Maasse, als die Metallsalzlösungen durch das Präparat zu strömen begannen, fieng auch die Querstreifung an, undeutlich zu werden, bis sie schliesslich gänzlich verschwand; und zwar am schnellsten bei dem Kupfer, am langsamsten bei dem Zink; eine Mittelstellung nahm das Cadmium ein. An Stelle der Querstreifung trat eine Körnung; die Muskelfaser füllte sich mit sehr kleinen, hellen, glänzenden Körnchen, die sich zunächst interfibrillär anzuordnen schienen, die Grenzen der Primitiv-Fibrillen gleichsam andeutend. Unterdessen ward die Längsstreifung der Faser, die unter normalen Verhältnissen nur eben angedeutet ist, immer deutlicher, ausgesprochener, und zwar am schnellsten bei dem Kupfer, am langsamsten bei dem Cadmium; während Zink in dieser Beziehung in der Mitte steht. Bezüglich der Körnung konnte ich die Beobachtung machen, dass dieselbe am stärksten sich unter der Einwirkung des Cadmiums entwickelt, und zwar mit einer überraschenden Schnelligkeit und Intensität.

Alles dies erreicht den Höhepunkt der Entwickelung in höchstens 10 Minuten, und ist zunächst und am stärksten an den Rändern der Muskelfaser sichtbar, wo dieselbe von den Salzlösungen zuerst, und am intensivsten getroffen wird. Der Schwund der Querstreifung und das Auftreten der Körnung sind parallele Processe und hängen, nach meinen Beobachtungen, mit einander zusammen. Sowie die Strömung der Salze beginnt, werden die «sarcous elements», die unter normalen Verhältnissen viereckig erscheinen, kreisrund, so dass je eine doppelbrechende, anisotrope Reihe derselben bei starker Vergrösserung und scharfer Einstellung wie eine Perlschnur erscheint, bald darauf sieht man einzelne Glieder der letzteren gleichsam sich ablösen, die Zahl solcher immer zunehmen; bis sie im Innern der Muskelfaser zunächst wie auseinandergeworfen, ungeordnet, später aber der

Länge nach, interfibrillär geordnet erscheinen. So verschwindet allmälig die Querstreifung, bis wir eine albuminös getrübte Muskelfaser vor uns sehen, an der die Längsstreifung immer deutlicher hervortritt.

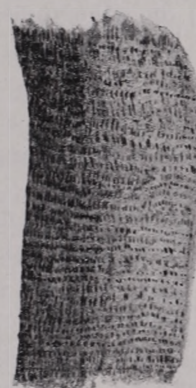
V. Wirkung des Eisens auf die quergestreiften Muskeln.

Es wurde bereits in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt, dass das Eisen von Lauder-Brunton [24] zu denjenigen Substanzen gerechnet wird, die neben ihrer anderweitigen Wirkung im Stande sind, die Arbeitsfähigkeit der quergestreiften Muskeln herabzusetzen. Der englische Forscher stützt sich bei dieser Aussage wahrscheinlich auf eine Arbeit Kobert's [25] vom Jahre 1883; da, meines Wissens, letztere allein es war, die sich mit der Wirkung des Eisens auf die Musculatur beschäftigte. In der erwähnten Publication bezieht sich Kobert auf exacte Untersuchungen, denen er viele Arzneien und zahlreiche andere Substanzen mittelst des Tiegel'schen Apparates und der Tiegel'schen Methode unterwarf, um festzustellen, in welchem Sinne jene die Arbeitsleistung der quergestreiften Muskeln beeinflussen. Bezüglich des Eisens, das er in Form des weinsauren Eisenoxydnatriums verwendete, äussert sich Kobert dahin, dass lethale Dosen die Arbeitsleistung der Muskeln herabsetzen; kleine dagegen auf die Musculatur nicht schädigend einwirken, sogar deren Arbeitsleistung noch steigern.

Zwei Jahre vor Kobert stellten H. Meyer und Fr. Williams [26] im Schmiedederg'schen Laboratorium als Erste die toxischen Eigenschaften des Eisens in systematischer Weise, auf experimenteller Grundlage fest. Sie beobachteten an verschiedenen kalt- und warmblütigen Thieren, die mit tödtlichen Dosen des weinsauren Eisenoxydnatriums vergiftet worden, in allen Fällen zunächst träge, schleppende, ungeschickte Bewegungen, und Schwund des Muskelgefühles; schliesslich entwickelte sich eine complete Paralyse; an Kaltblütern reagierten trotz der vollständig entwickelten Lähmung die direct gereizten Muskeln, obwohl ihre Reizbarkeit geschwächt war; nicht so bei Warmblütern. Als Hauptursache der motorischen Lähmung betrachten sie eine progressive Paralyse des centralen Nervensystems. Letzterer

Process geht bei der Eisenvergiftung in der That vor sich, doch kann auf Grund dieser Arbeiten nebenbei eine directe Beeinflussung der Muskelsubstanz durch das Eisen nicht ausgeschlossen werden. Dass dem in der That so ist, geht auch aus meinen mikroskopischen Untersuchungen hervor. Fröschen brachte ich intravenös eine 2%-ige Lösung von Ferrum albuminatum bei, welches Präparat auf das Blut in keiner Beziehung destructiv oder coagulierend wirkt, worauf dann in 1—2 Stunden unter anderen Vergiftungserscheinungen auch eine motorische Lähmung

Chron. Eisenvergift. Eisenalbuminat subcutan. Muscelfasern einer weissen Maus. Goldchlor.-Præparat. Zenker'sche Degeneration. Reichert. III. 7.



Chron.Vergift. mit Eisenalbuminat. Subcutan. Muskelfaser einer weissen Maus. Goldchlorid-Præparat. Die Querstreifung zerfällt in Körnchen. Reichert III. 7.

sich zu entwickeln pflegt, wobei die Muskelfasern hochgradig gekörnt werden und ihre Querstreifung verlieren. Die deutlich quergestreiften Muskelfasern gesunder Thiere verlieren ihre Querstreifung vor unseren Augen (unter dem Mikroskop) wenn sie mit einer ½—1%-igen, mit physiologischer Kochsalzlösung hergestellten Lösung von Eisenalbuminat in Berührung kommen. Bei diesem Versuche sah ich aber nicht, wie unter ähnlichen Verhältnissen bei dem Kupfer, Zink und Cadmium eine Körnung eintreten; im Gegentheile, die Muskelfasern werden mehr homogen, structurlos, höchstens wird noch ihre bis dahin unklare Längsstreifung etwas deutlicher.

Weisse Mäuse, die durch eine täglich subcutan applicierte Dosis von 1 Kcm. einer 1%-igen Lösung des Eisenalbuminats chronisch vergiftet wurden, und hiebei stark abmagerten, verendeten nach 8—10 Tagen. An Goldchlorid-Präparaten sah ich dann neben intacten, sehr zahlreiche Muskelfasern mit ZENKER'scher Degeneration und Atrophie; ich sah auch zahlreiche Fasern, an denen die Querstreifung fehlte, die dagegen gekörnt und in diesem Falle auch häufig längsgestreift waren. Von den drei früher besprochenen Metallen abweichend, ist also bei chronischer Eisenvergiftung die ZENKER'sche Degeneration häufiger, bei jenen seltener; die albuminöse Trübung dagegen beim Eisen seltener, bei jenen aber häufiger.

VI. Wirkung des Mangans auf die quergestreiften Muskeln.

LASCHKEWITSCH,[27] der als Erster die toxischen Wirkungen des Mangans erforschte, sah bei Kaltblütern eine complete Lähmung eintreten, die er theils einer Einwirkung auf die Nerven, theils einer solchen auf die Muskeln zuschrieb; bei Warmblütern, denen er Mangansalze in das Blutgefässsystem spritzte, konnte er nur eine Schwäche beobachten. Auch HARNACK[28] sah an Fröschen einen lähmungsartigen Zustand; wobei die absichtlichen Bewegungen aufhörten, die Sensibilität und Reflex-Erregbarkeit beträchtlich abnahmen, während die Muskelerregbarkeit sowohl bei directer, als auch indirecter Reizung sogar nach dem Verenden des Thieres längere Zeit hindurch noch intact blieb. HARNACK bestreitet daher eine directe Einwirkung des Mangans auf die quergestreiften Muskeln, wobei von einer offenbar auf das Gewebseiweiss stattfindenden localen Einwirkung des Mangans abzusehen ist. MERTI und LUCHSINGER[29] bestätigen in einer vorläufigen Mittheilung HARNACK's Ausspruch bezüglich der Natur der beobachteten motorischen Lähmungen. KOBERT[30] wies vermittelst der TIEGEL'schen Methode nach, dass die Ermüdungs-Curve der Muskeln an Fröschen, die mit Mangan vergiftet waren, ebenso wie die Gesammtarbeit dieser Muskeln von der Norm sich gar nicht unterscheidet; er meint daher, dass das Mangan der Muskelsubstanz gegenüber wirkungslos, wenn auch sonst ein stärkeres Gift als Eisen, sei.

Das Mangan unterscheidet sich demnach — obwohl von ihm allgemein angenommen wird, dass es dem Eisen conform wirke — von diesem sowohl in seiner Wirkung auf die Musculatur, wie auch in vielem Anderen. Und, trotzdem es auch dem Eisen chemisch so nahe steht, bemerken wir zwischen den Wirkungen der beiden Metalle bei weitem nicht den Parallelismus, wie z. B. zwischen dem chemisch so verwandten Zink und Cadmium.

Auf Grund meiner an der Musculatur angestellten mikroskopischen Untersuchungen kann ich die Angaben der angeführten Autoren in einer anderen Richtung ebenfalls bestätigen. An Muskeln von Fröschen und weissen Mäusen, die mit Manganpeptonat und Manganalbuminat theils subcutan, theils auf dem Wege der Blutbahn tödtlich vergiftet worden, konnte ich weder bei sofortiger Untersuchung des frischen Objectes, noch an Goldchlorid-Präparaten irgendwelche Structurveränderungen nachweisen, wiewohl die Thiere unter den Zeichen einer motorischen Lähmung zu Grunde giengen; ebensowenig, wie an frisch ausgeschnittenen, intacten Muskelstückchen, die ich unter dem Mikroskope beobachtete, während ich unter dem Deckgläschen eine 1—2%-ige mit physiologischer Kochsalzlösung hergestellte Lösung von Manganpeptonat oder Manganalbuminat auch 15—20 Minuten lang durchströmen liess.

Dieser negative Befund stimmt mit einem weiteren gut überein, dass nämlich die Muskeln nach dem Verenden des Thieres direct und auch vom Nerv aus gut erregbar sind; und bekräftigt noch die Annahme eines Zusammenhanges der unter der Einwirkung von Kupfer, Zink, Cadmium und Eisen entstehenden mikroskopischen Veränderungen mit dem Umstande, dass unter der Einwirkung der genannten Metalle die directe Erregbarkeit der Muskeln entweder vollkommen schwindet, oder aber, wie beim Eisen, stark abnimmt. Auch hiedurch sehe ich die Richtigkeit des obigen Satzes bekräftigt, dass nämlich, — was ich in der Toxicologie und Pharmacologie nicht genug betonen kann — mit einer Functionsstörung auch eine Gewebsveränderung einhergeht.

Litteratur.

1. Heffter: «Beiträge zur Chemie des quergestreiften Muskels etc.» Archiv f. exp. Path. u. Pharm. Bd. 33. S. 225.

2. Lauder-Brunton: «Handb. der allgem. Pharmacol. u. Therapie.» Übersetzt nach der III. engl. Ausg. v. Zechmeister 1893, S. 126 u. ff.

3. Johann v. Csiky: Die Nervenendigungen in den glatten Muskelfasern. Internat. Monatsschr. f. Anat. u. Physiol. 1897. Bd. XIV. H. 8/9.

4. Babes et Blocq: «Atlas der pathol. Histol. des Nervensystems.» Berlin 1892.

5. Harnack: «Über die Wirkung der «Emetica» auf die quergestreiften Muskeln.» Arch. f. exp. Path. u. Pharm. Bd. III. S. 44.

6. Leo Schwartz: «Archiv f. exp. Path. u. Pharm.» Bd. 35.

7. Filehne: «Deutsche med. Wochenschr.» 1895. Nr. 19.

8. v. Kétly: «Orvosi Hetilap.» 1883. Nr. 10. (Ungarisch.)

9. Roger: «Revue de medicine», Nov. 1887.

10. Köck: «Jahresber. f. Pharm. 1873. S. 519.

11. Hirt: «Die Krankheiten der Arbeiter.» 1. S. 91—98, II. S. 165, III. S. 82—83, 182.

12. Popoff: «Berl. klin. Wochenschrift.» 1873. Nr. 5.

13. Orfila: «Allgem. Toxicol.» 1818. Bd. II. S. 22.

14. Testa: «Il Morgagni» 1881, Ref. Virchow-Hirsch. Jahrb. 1881. I. Pag. 645.

15. D'Amore: «Sem. méd. 1892. Pag. 456.

16. Michaelis: «Arch. f. physiol. Heilk.» 1850, S. 109—132.

17. Harnack: «Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmac.» Bd. 9. S. 152

18. Sacher: «Arbeiten d. pharm. Institut. zu Dorpat. Herausgeg. v. Kobert, Bd. IX. S. 189.

19. Marmé: «Zeitschr. f. ration. Med.» XXIX. S. 113.

20. Paderi, Cesare: «Sull'azzione fisiologica del cadmio» Archivio di Farmacol. III. f. P. 1.

21. Wheeler: «A case of poisoning by bromide of cadmium.» Boston med. and surg. Journal 1876, 12. Oct. P. 434. Ref. Virchow-Hirsch. Jahrb. 1876. S. 408.

22. Burdach: «Citiert durch Fonsagrives.»

23. Soret: «Bull. de Thérap.» L. IV. T.

24. Loco citato.

25. «Arch. f. exp. Path. u. Pharm.» Bd. XV.

26. «Arch. f. exp. Path. u. Pharm.» Bd. XIII.

27. Laschkewitsch: «Med. Centralblatt.» 1866. S. 369.

28. Harnack: «Arch. f. exp. Path. u. Pharm.» Bd. III. S. 58.

29. «Med. Centralblatt.» 1882. Nr. 38.

30. Kobert: «Archiv f. exper. Path. u. Pharm.» Bd. XVI. S. 361.

9.

ZUR THEORIE DER INDUCIERTEN LINEAREN SUBSTITUTIONEN.

Von ALADÁR VISNYA.

Aus «Mathematikai és Physikai Lapok» (Mathematische und Physikalische Blätter) 8. Jahrg. p. 65—70.

Mit Rücksicht darauf, dass in neuester Zeit mehrere auf die Theorie der inducierten linearen Substitutionen bezügliche Publicationen erschienen sind, dürfte es vielleicht von Interesse sein, dass man die von Herrn Prof. RADOS bezüglich der Wurzeln der charakteristischen Gleichungen der inducierten Substitutionen neuerdings bewiesenen Sätze * in speciellen Fällen auch durch geometrische Betrachtungen erschliessen kann.** Hier soll das folgende Theorem durch solche geometrische Ueberlegungen bewiesen werden:

Bezeichnet man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von der linearen Substitution:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 \\ y_2 &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 \\ y_3 &= \alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3 \end{aligned} \qquad (S)$$

durch

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,$$

so hat die charakteristische Gleichung ihrer inducierten Substitution zweiten Grades:

---

* Die Ermittlung eines derartigen, auf geometrischen Betrachtunged fussenden Beweises stellte Herr Prof. RADOS als Aufgabe im Mathematischen-Seminar am Polytechnikum zu Budapest.

** Die Sätze hat H. FRANKLIN im Jahre 1894 gegeben und in anderer Form bewiesen. S. American Journal 1894.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2-\mu & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & 2\alpha_1\alpha_2 & 2\alpha_1\alpha_3 & 2\alpha_2\alpha_3 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2-\mu & \beta_3^2 & 2\beta_1\beta_2 & 2\beta_1\beta_3 & 2\beta_2\beta_3 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2-\mu & 2\gamma_1\gamma_2 & 2\gamma_1\gamma_3 & 2\gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_3\beta_3 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\mu & \alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1 & \alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2 \\ \alpha_1\gamma_1 & \alpha_2\gamma_2 & \alpha_3\gamma_3 & \alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1 & \alpha_1\gamma_3+\alpha_3\gamma_1-\mu & \alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2 \\ \beta_1\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \beta_3\gamma_3 & \beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1 & \beta_1\gamma_3+\beta_3\gamma_1 & \beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2-\mu \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(I)}$$

die Wurzeln:

$$\lambda_1^2, \ \lambda_2^2, \ \lambda_3^2, \ \lambda_1\lambda_2, \ \lambda_1\lambda_3, \ \lambda_2\lambda_3.$$

Die ternäre lineare Substitution S, von der wir voraussetzen, dass ihre Determinante nicht verschwindet, kann als Repräsentant einer Collineation in der Ebene betrachtet werden. Die Fixpunkte dieser Collineation sind durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_i x_1^{(i)} &= \alpha_1 x_1^{(i)} + \beta_1 x_2^{(i)} + \gamma_1 x_3^{(i)} \\ \lambda_i x_2^{(i)} &= \alpha_2 x_2^{(i)} + \beta_2 x_2^{(i)} + \gamma_2 x_3^{(i)} \\ \lambda_i x_3^{(i)} &= \alpha_3 x_1^{(i)} + \beta_3 x_2^{(i)} + \gamma_3 x_3^{(i)} \\ &\scriptstyle (i=1,\,2,\,3) \end{aligned} \tag{1}$$

charakterisiert, wo λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von S bedeuten. Es mögen diese Fixpunkte der Reihe nach durch P_1, P_2, P_3 bezeichnet werden.

Um den angeführten Satz zu beweisen, stelle man folgendes Problem: *welche sind diejenigen Punktpaare der Ebene, die bei Ausführung der durch S repräsentierten Collineation unverändert bleiben?*

Geometrisch lässt sich die Frage leicht erledigen.

Es sei (A, B) ein Punktpaar, das den Forderungen unseres Problems genügt, das heisst, dass (A, B) bei der Ausführung der Collineation S als Punktpaar unverändert bleibt. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass dies nur dann möglich ist, wenn sowohl A, als B Fixpunkte der Collineation S sind.

Bei den gestellten Voraussetzungen sind nämlich zwei Fälle möglich:

$$1. \qquad \begin{aligned} S(A) &= A \\ S(B) &= B. \end{aligned}$$

Hiedurch ist eben ausgesprochen, dass A und B Fixpunkte der Collineation S sind.

$$2. \qquad \begin{aligned} S(A) &= B \\ S(B) &= A \end{aligned}$$

dann erhält man durch Wiederholung der Collineation S die Gleichungen:

$$\begin{aligned} S^2(A) &= S(B) = A \\ S^2(B) &= S(A) = B \end{aligned}$$

die A und B als Fixpunkte der Collineation S^2 erscheinen lassen. Da aber bekanntlich die Fixpunkte der Collineationen S und S^2 im Allgemeinen identisch sind, ergiebt sich, dass auch in diesem Falle A und B unter den fixen Elementen von S vorkommen müssen; dies ist aber mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} S(A) &= B \\ S(B) &= A \end{aligned}$$

nur dann verträglich, wenn die Punkte A und B mit einander identisch sind, so dass in diesem zweiten Falle (A, B) ein Punktpaar darstellt, das ein und denselben Fixpunkt der Collineation S doppelt enthält.

Sind also die Fixpunkte der durch S repräsentierten Collineation:

$$P_1, \ P_2, \ P_3,$$

so hat man mit den Punktpaaren:

$$(P_1, P_1), \ (P_2, P_2), \ (P_3, P_3), \ (P_1, P_2), \ (P_1, P_3), \ (P_2, P_3)$$

sämmtliche Lösungen des Problems.

Nachdem man also sämmtliche Lösungen des in Angriff genommenen Problems kennt, kann man vermittels der *analytischen Behandlung* der Aufgabe auf die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (I) schliessen.

Analytisch kann das Problem folgendermassen formuliert werden: es mögen diejenigen Punktpaare x' und x'' bestimmt werden, deren Gleichung

$$(x'_1u_1+x'_2u_2+x'_3u_3)\,(x''_1u_1+x''_2u_2+x''_3u_3) = 0 \qquad (2)$$

bei Ausführung der contragredient Substitution von S,

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \\ u_2 &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 \\ u_3 &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3, \end{aligned}$$

nur durch einen constanten Factor multipliciert wird. Die transformierte Gleichung, nach den v geordnet, ist die folgende:

$$\begin{aligned} &[(\alpha_1 x'_1 + \beta_1 x'_2 + \gamma_1 x'_3)\, v_1 + (\alpha_2 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \gamma_2 x'_3)\, v_2 + \\ &\qquad + (\alpha_3 x'_1 + \beta_3 x'_2 + \gamma_3 x'_3)\, v_3]\,. \\ &.\,[(\alpha_1 x''_1 + \beta_1 x''_2 + \gamma_1 x''_3)\, v_1 + (\alpha_2 x''_1 + \beta_2 x''_2 + \gamma_2 x''_3)\, v_2 + \\ &\qquad + (\alpha_3 x''_1 + \beta_3 x''_2 + \gamma_3 x''_3)\, v_3] = 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

Damit die Gleichungen (2) und (3) Gleichungen desselben Punktpaares seien, müssen in ihnen die entsprechenden Terme der laufenden Coordinaten abgesehen von einem constanten Factor einander gleich sein:

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 x'_1 + \beta_1 x'_2 + \gamma_1 x'_3)(\alpha_1 x''_1 + \beta_1 x''_2 + \gamma_1 x''_3) = \mu x'_1 x''_1 \\ &(\alpha_2 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \gamma_2 x'_3)(\alpha_2 x''_1 + \beta_2 x''_2 + \gamma_2 x''_3) = \mu x'_2 x''_2 \\ &(\alpha_3 x'_1 + \beta_3 x'_2 + \gamma_3 x'_3)(\alpha_3 x''_1 + \beta_3 x''_2 + \gamma_3 x''_3) = \mu x'_3 x''_3 \\ &(\alpha_1 x'_1 + \beta_1 x'_2 + \gamma_1 x'_3)(\alpha_2 x''_1 + \beta_2 x''_2 + \gamma_2 x''_2) + \\ &+ (\alpha_1 x''_1 + \beta_1 x''_2 + \gamma_1 x''_3)(\alpha_2 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \gamma_2 x'_3) = \mu (x'_1 x''_2 + x''_1 x'_2) \\ &(\alpha_1 x'_1 + \beta_1 x'_2 + \gamma_1 x'_3)(\alpha_3 x''_1 + \beta_3 x''_2 + \gamma_3 x''_3) + \\ &+ (\alpha_1 x''_1 + \beta_1 x''_2 + \gamma_1 x''_3)(\alpha_3 x'_1 + \beta_3 x'_2 + \gamma_3 x'_3) = \mu (x'_1 x''_3 + x''_1 x'_3) \\ &(\alpha_2 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \gamma_2 x'_3)(\alpha_3 x''_1 + \beta_3 x''_2 + \gamma_3 x''_3) + \\ &+ (\alpha_2 x''_1 + \beta_2 x''_2 + \gamma_2 x''_3)(\alpha_3 x'_1 + \beta_3 x'_2 + \gamma_3 x'_3) = \mu (x'_2 x''_3 + x''_2 x'_3). \qquad (4) \end{aligned}$$

Dieses System von Gleichungen kann zur Bestimmung der Coordinaten der gesuchten Punkte dienen. Hier ist auch μ eine Unbekannte; wird jedoch μ als Parameter betrachtet, so hat man sechs homogene Gleichungen mit den sechs Unbekannten: x'_1, x'_2, x'_3, x''_1, x''_2, x''_3 und es ergiebt sich nur für diejenigen Werthedes μ eine von der gewöhnlichen verschiedene und brauchbare Lösung, bei denen diese Gleichungen von einander nicht unabhängig sind. Um zu diesen Werthen von μ zu gelangen, betrachte man als Unbekannte die folgenden Grössen:

$$x'_1x''_1=\xi_{11}\quad x'_2x''_2=\xi_{22}\quad x'_3x''_3=\xi_{33}$$
$$x'_1x''_2+x''_1x'_2=\xi_{12}\quad x'_1x''_3+x''_1x'_3=\xi_{13}\quad x'_2x''_3+x''_3x'_2=\xi_{23}.$$

Indem man diese einführt, ergiebt sich ein System homogener linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1^2-\mu)\,\xi_{11}+\beta_1^2\xi_{22}+\gamma_1^2\xi_{33}+\alpha_1\beta_1\xi_{12}+\alpha_1\gamma_1\xi_{13}+\beta_1\gamma_1\xi_{23}=0\\
&\alpha_2^2\xi_{11}+(\beta_2^2-\mu)\,\xi_{22}+\gamma_2^2\xi_{33}+\alpha_2\beta_2\xi_{12}+\alpha_2\gamma_2\xi_{13}+\beta_2\gamma_2\xi_{23}=0\\
&\alpha_3^2\xi_{11}+\beta_3^2\xi_{22}+(\gamma_3^2-\mu)\,\xi_{33}+\alpha_3\beta_3\xi_{12}+\alpha_3\gamma_3\xi_{13}+\beta_3\gamma_3\xi_{23}=0\\
&2\alpha_1\alpha_2\xi_{11}+2\beta_1\beta_2\xi_{22}+2\gamma_1\gamma_2\xi_{33}+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\mu)\,\xi_{12}+\\
&\qquad+(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)\,\xi_{13}+(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)\,\xi_{23}=0\\
&2\alpha_1\alpha_3\xi_{11}+2\beta_1\beta_3\xi_{22}+2\gamma_1\gamma_3\xi_{33}+(\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1)\,\xi_{12}+\\
&\qquad+(\alpha_1\gamma_3+\alpha_3\gamma_1-\mu)\,\xi_{13}+(\beta_1\gamma_3+\beta_3\gamma_1)\,\xi_{23}=0\\
&2\alpha_1\alpha_3\xi_{11}+2\beta_2\beta_3\xi_{22}+2\gamma_2\gamma_3\xi_{33}+(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)\,\xi_{12}+\\
&\qquad+(\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2)\,\xi_{13}+(\beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2-\mu)\,\xi_{23}=0
\end{aligned}$$

dessen Determinante der charakteristischen Function (I) identisch gleich ist, weil sie sich von dieser nur darin unterscheidet, dass die Zeilen mit den Reihen vertauscht sind. Dieses System hat dann und nur dann eine Auflösung, in der nicht alle Unbekannte gleich Null sind, wenn der Parameter μ einen Werth annimmt, für den diese Determinante verschwindet.

Es soll nun gezeigt werden, dass, falls

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3 \tag{II}$$
$$x''_1,\ x''_2,\ x''_3 \tag{III}$$

wirkliche Lösungen der Aufgabe sind, das heisst, wenn sie wirklich ein Punktpaar bestimmen, so giebt es unter den ξ von Null verschiedene, und so muss zu diesen Werthen von x' und x'' ein solches μ zugehören, für welches die charakteristische Gleichung (I) erfüllt ist.

Wenn nämlich die Werthsysteme (II) und (III) wirklich je einen Punkt bestimmen, so ist in jedem Werthsystem wenigstens ein Element von Null verschieden. Es seien diese: im ersten Werthsystem:

$$x'_r \gtreqless 0$$

im zweiten:

$$x''_s \gtreqless 0$$

wo so r, wie s eine der Zahlen 1, 2, 3 bezeichnet.

Nun sind zwei Fälle möglich:

1. Ist $r=s$, so ist es evident, dass

$$\xi_{rr} = x'_r x''_r \gtrless 0.$$

2. Ist hingegen $r \gtrless s$, alsdann müssen wieder zwei Fälle unterschieden werden:

a) ist ausserdem

$$x''_r \gtrless 0$$

dann ist wieder

$$\xi_{rr} = x'_r x''_r \gtrless 0\,;$$

b) ist hingegen

$$x''_r = 0$$

dann reduciert sich

$$\xi_{rs} = x'_r x''_s + x''_r x'_s$$

auf

$$x'_r x''_s$$

das bei den gemachten Voraussetzungen von Null verschieden ist.

Jede Lösung unserer Aufgabe liefert also eine Wurzel der charakteristischen Gleichung (I). Die sämmtlichen Lösungen sind die Punktpaare

$$(P_i,\, P_k) \atop (i,\, k=1,\, 2,\, 3)$$

und so ergiebt sich, wenn man deren Coordinaten

$$\begin{array}{ll} x'_1 = x_1^{(i)} & x''_1 = x_1^{(k)} \\ x'_2 = x_2^{(i)} & x''_2 = x_2^{(k)} \\ x'_3 = x_3^{(i)} & x''_3 = x_3^{(k)} \end{array}$$

in den Gleichungen (4) setzt, und die Relationen (1) berücksichtigt, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (I)

$$\lambda_i \lambda_k \atop (i,\, k=1,\, 2,\, 3)$$

sind, womit der am Anfange dieser Note ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Es muss noch bemerkt werden, dass im ganzen Laufe dieses Beweises stillschweigend vorausgesetzt wurde, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (I)

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$$

verschieden sind, und dies ist vermöge der unbestimmten Annahme der Coefficienten von S zulässig. Aus gewissen algebraischen Betrachtungen erschliesst man, dass das Theorem auch in dem Falle giltig bleibt, wenn die λ zum Theil, oder alle einander gleich sind.*

---

* Siehe: RADOS, Math. und naturw. Berichte Bd. XVI. pag. 241.

10.

ÜBER DAS VERHALTEN VON KATHODENSTRAHLEN PARALLEL ZU ELEKTRISCHER KRAFT.

Von Ph. LENARD.

Professor an d. Universität Kiel. Corr. Mitgl. d. ung. Akademie der Wissenschaften.

Vorgelegt in der Sitzung vom 16. Mai 1898.

Aus «Mathematikai és Természettudományi Értesitő» (Math. und Naturwiss. Anzeiger d. Akad.) Bnd. XVI. pp. 266—271. 1898.

1. Stetige Veränderlichkeit der magnetischen Ablenkbarkeit von Kathodenstrahlen ist bisher niemals zur Beobachtung gelangt, vielmehr erwies sich die Ablenkbarkeit eines einmal gegebenen Strahles unter allen bisher in Betracht gezogenen Umständen als unabänderlich.

Die Vorstellung indessen, zu welcher neuere Versuche geführt haben — in gewissem Sinne Sir William Crookes' ursprüngliche Hypothese mit neuem, verfeinertem Inhalt — lässt Änderung der Ablenkbarkeit nicht nur möglich, sondern in gewissen Fällen sogar als nothwendige Forderung der Electrodynamik erscheinen. Ein solcher Fall ist der in der Überschrift angedeutete. Wir stellen ein Feld constanter elektrischer Kraft her, zwischen zwei Condensatorplatten etwa, im leeren Raume, und richten einen Kathodenstrahl durch dieses Feld, so dass er parallel dessen Kraftlinien verläuft, etwa durch Bohrungen der Condensatorplatten in das Feld eintretend und aus demselben wieder austretend, Wir finden nun in der That, dass die magnetische und auch die elektrische Ablenkbarkeit des Strahles nach Durchsetzung des Feldes verändert ist und zwar gerade in dem geforderten Sinne. Beide sind grösser oder kleiner geworden, je nachdem Kraft und Strahl gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Ein besonderes Interesse gewinnen unsere Versuche dadurch, dass in ihnen eine Kraft, von welcher man eine dynamische Erklärung erwartet, auf ein zu Beschleunigendes wirkt, welches selbst schon fast mit Lichtgeschwindigkeit sich bewegt. Auf die Frage indessen, ob diese Geschwindigkeit die Grösse der Beschleunigung beeinflusse, wird unter den Umständen der Versuche eine bejahende Antwort von denselben nicht ertheilt.

Wir können dagegen sagen, dass die Versuche auch in quantitativer Hinsicht die Annahmen und Resultate der vorhergehenden Arbeit vollkommen bestätigen.

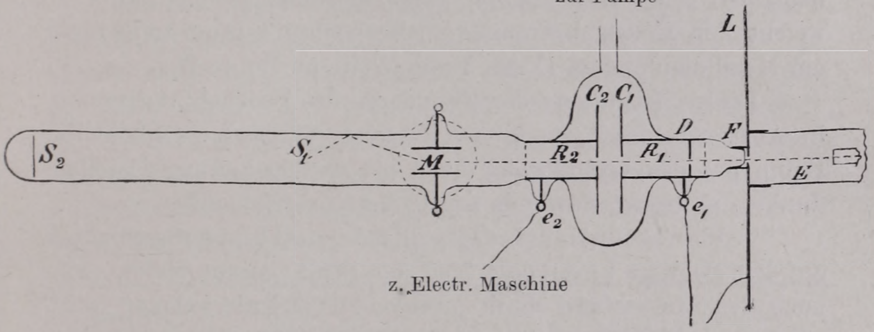


Fig. 1.

2. Der benutzte Apparat ist in Fig. 1 in etwa ein Achtel natürlicher Grösse dargestellt. In E werden die Strahlen erzeugt; sie durchsetzen das dichte Metallfenster F, gelangen in den Condensator C_1C_2 und können dann bei M der magnetischen oder auch der elektrischen Ablenkung unterworfen werden, welche sie schliesslich auf den Schirm S_1 treffen lässt. Die beiden Condensatorplatten C_1C_2, zwei vollkommen ebene, einander parallele, kreisförmige Messingplatten, sind in ihrer Mitte in der Weite von nur 1 mm durchbohrt und werden von Metallröhren R_1R_2 getragen, welche ihrerseits zu Electroden e_1e_2 führen. Der Abstand der Platten von einander beträgt 2 cm; die Platte C_1 ist stets mit der Erde verbunden, C_2 kann mit Hülfe einer Influenzmaschine positiv oder negativ elektrisiert werden. Die Glaswand des Apparates

ist von e_2 ab nach links bis über den Schirm hinaus mit Stanniol überzogen, welches mit e_2 stets leitend verbunden bleibt; eine kleine Öffnung im Stanniol lässt den Schirm beobachten. Die durch den punktierten Kreis bei M angedeuteten Drahtrollen zur magnetischen Ablenkung sind in geringer Entfernung ober- und unterhalb des Rohres aufgestellt und von dessen Stanniolhülle durch Glimmerplatten isoliert. Soll die elektrische Ablenkung beobachtet werden, so sind die beiden bei M ersichtlichen rechteckigen Metallplatten zu benutzen, deren Länge in Richtung des Strahles 4 cm, deren Abstand 2 cm beträgt, welche indessen für jetzt beide mit der Stanniolhülle leitend verbunden bleiben. Wir bemerken noch eine mit der Erde verbundene Metallwand L, welche den Erzeugungsraum vom Beobachtungsraum trennt und ein Metalldiaphragma D von 3 mm Weite im Rohre R_1.

Einige Zeit nimmt das Evacuieren des Beobachtungsraumes in Anspruch. Sind die letzten Gasreste entfernt, so bleibt der Raum um den Condensator auch bei starker Ladung desselben dunkel; in diesem Zustande wurde der Apparat benutzt.

3. Vorweg überzeugt man sich, dass der Phosphorescenzfleck auf dem Schirme unverrückt, also der Strahl gerade bleibt, wenn auch der Condensator stark positiv oder negativ geladen wird, vorausgesetzt, dass kein Strom in den ablenkenden Drahtrollen fliesst.

Die Versuche über die magnetische Ablenkung wurden nun folgendermaassen ausgeführt. Zuerst ist der Condensator C ungeladen; es wird bei M durch Einschalten von Widerständen in den Stromkreis der Drahtrollen ein Magnetfeld von solcher Stärke erzeugt, dass der Phosphorescenzfleck in stark abgelenkter Lage am Rande des Schirmes S_1 erscheint; die Lage des Fleckes wird dann an einer auf dem Schirm befindlichen Scala abgelesen. Jetzt laden wir bei fortdauerndem ablenkenden Strome den Condensator C; der Fleck wandert dadurch auf dem Schirme; er geht nach weniger abgelenkten Lagen, wenn der Condensator positiv geladen wird, nach mehr abgelenkten, wenn er negativ geladen wird. Dadurch ist die Veränderung der Ablenkbarkeit nachgewiesen.

Um die Erscheinung quantitativ zu verfolgen, genügt es, den ablenkenden Strom J_0 zu messen, welcher den Phosphorescenzfleck zu einer bestimmten Lage bei ungeladenem Condensator bringt, und den Strom J_1, welcher ihn zu derselben Lage bringt während der Condensator die Potentialdifferenz P besitzt. Zur Messung der letzteren ist im Nebenschluss zum Condensator eine verstellbare Funkenstrecke angebracht, deren blanke Messingkugeln 2·5 cm Durchmesser besitzen. Es wurde jedesmal diejenige Lage des Fleckes in Betracht gezogen, welche er in dem Augenblicke einnimmt, da ein Funke die Strecke überspringt; einige an das zu ladende System geschaltete Leydener Flaschen machen das Ansteigen der Ladung beim Drehen der Elektrisiermaschine und also das Wandern des Fleckes genügend langsam.

Die Resultate der Messungen finden sich in folgender Tabelle verzeichnet, deren jede Zeile Mittelwerthe aus drei einzelnen Versuchen enthält. Es gelangten zwei verschiedene Strahlenarten zur Verwendung, wie sie bei den in der ersten Columne angegebenen Potentialdifferenzen zwischen den Electroden des Entladungsrohres erzeugt werden.* In der mit † bezeichneten Versuchsgruppe wurde der entferntere Schirm S_2 benutzt; die ablenkenden Ströme waren dem entsprechend schwächer.

Potentialdiff. im Entladungsrohr (Schlagweite)	Potentialdifferenz des Condensators		$\frac{J_1}{J_0}$	Anfangsgeschwindigkeit v_0	Endgeschwindigkeit v_1
	in Schlagw.	in magnetischem Maass			
cm	cm	C.G.S.		$10^{10}\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$10^{10}\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
2,8	1,00	$P = -291.10^{10}$	0,500	0,70 = 0,67 + 0,03	0,35
	0,64	$P = -210.10^{10}$	0,650	0,68 = 0,67 − 0,01	0,34
	1,00	$P = +291.10^{10}$	1,41	0,62 = 0,67 − 0,03	0,89
3,6	1,00	$P = -291.10^{10}$	0,608	0,77 = 0,81 − 0,04	0,47
	1,00	$P = +291.10^{10}$	1,27	0,79 = 0,81 − 0,02	1,00
	†1,00	$P = +291.10^{10}$	1,22	0,88 = 0,81 + 0,07	1,07

* Es soll nicht gesagt sein, und es ist auch nicht erwiesen, dass die zwischen den Electroden messbare maximale Potentialdifferenz die Eigenschaften der erzeugten Strahlen eindeutig und allein bestimme. In gleichem Entladungsrohre werden jedoch unter gleichen Bedingungen

4. Die in den letzten beiden Columnen verzeichneten Geschwindigkeiten v_0 und v_1 des jedesmal in den Condensator tretenden und des ihn verlassenden Strahles sind aus den Versuchsdaten berechnet nach den beiden Gleichungen

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{J_1}{J_0} \text{ und } v_1^2 - v_0^2 = 2\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,P,$$

deren erste aussagt, dass verschiedene Strahlenarten die gleiche seitliche Beschleunigung erfahren in Magnetfeldern, deren senkrecht zum Strahl gerichtete Stärken den Strahlengeschwindigkeiten proportional sind und deren zweite der Ausdruck des Gesetzes der Energieerhaltung für unseren Fall ist. Die zweite Gleichung enthält auch die Voraussetzung, dass die wirksame beschleunigende Kraft genau die Grösse der auf ruhende Elektricitäten im elektrischen Felde ausgeübten Kraft besitze. Das Dichtenverhältniss ε/μ wurde früheren Resultaten entsprechend als von unveränderlicher Grösse und gleich $6{,}39 \,.\, 10^6$ $\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}$ $\mathrm{g}^{-\frac{1}{2}}$ in Rechnung gesetzt, welche letztere Zahl das arithmetische Mittel der an drei verschiedenen Strahlenarten früher erhaltenen Zahlen* ist.

Betreffend die Geschwindigkeit v_0 ersehen wir aus der Tabelle zuerst, dass sie sich für die erste Strahlenart jedesmal kleiner ergiebt als für die zweite, ganz wie dies früher* auf anderem Wege gefunden wurde. Wir sehen weiter, dass diese Übereinstimmung auch zahlenmässig mit der zu erwartenden Genauigkeit zutrifft, denn die für dieselben beiden Strahlenarten früher gefundenen Geschwindigkeiten, 0·67 bez. 0·81 . 10^{10} cm/sec, werden von den jetzt gefundenen gut in die Mitte genommen. Wir nehmen dies als Bestätigung der benutzten Theorie und der gemachten Annahmen; wir sehen insbesondere auch den früher gefundenen Werth des Dichtenverhältnisses gut bestätigt. Übrigens wird man bemerken, dass die Schwankungen in den für dieselbe Strahlenart gefundenen Werthen von v_0 grösser sind, als die mögliche Unsicher-

---

immer wieder dieselben Strahlen erzeugt und insofern können die angegebenen Potentialdifferenzen zur Festlegung der benutzten Strahlenarten dienen. Ueber das hier verwendete Entladungsrohr und die Erzeugungsbedingungen vgl. Wied. Ann. 51. p. 227. 1894.

* Ph. Lenard, Wied. Ann. 64. p. 287. 1898.

heit der Messungen; dieser Umstand findet indess eine genügende Erklärung in den unkontrolierbaren Schwankungen, welchen die Erzeugungsbedingungen der Strahlen unterworfen sind.

Was die Geschwindigket v_1 der den Condensator verlassenden Strahlen anlangt sehen wir, dass die langsamsten Strahlen erhalten wurden durch die Verzögerung der ursprünglich schon langsameren ersten Strahlenart; das so erreichte Minimum gemessener Geschwindigkeit ist etwa ein Zehntel der Lichtgeschwindigkeit. Die schnellsten erhaltenen Strahlen, erzeugt durch Beschleunigung der zweiten Strahlenart, haben fast genau ein Drittel der Lichtgeschwindigkeit. Diese beiden erhaltenen äussersten Strahlenarten unterscheiden sich sehr bemerkbar in der Fähigkeit, den benutzten Schirm — Pentadecylparatolylketon auf Papier — zu erleuchten. Die Phosphorescenzflecke der schnellsten Strahlen sind

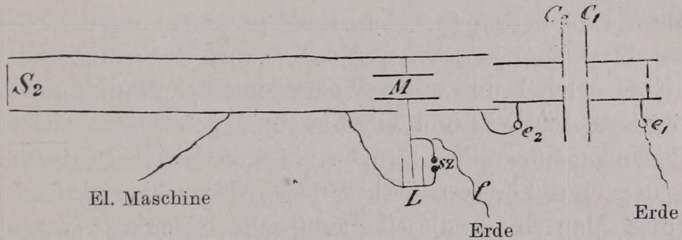


Fig. 2.

ausserordentlich hell, die der langsamsten sind nur mit Schwierigkeit überhaupt zu sehen. Eine deutliche Abweichung von scharf geradliniger Verbreitung der Strahlenbündel im leeren Raume habe ich unter den obwaltenden Umständen in keinem Falle bemerken können: auch war die Absorbierbarkeit der schnellsten Strahlenart nicht so gering, dass ein Glimmerblatt von 0·2 mm Dicke sehr bemerkbar durchdrungen worden wäre.

5. Die Veränderung der elektrischen Ablenkbarkeit der Strahlen wurde in folgender Weise beobachtet. Die Drahtrollen bei M waren entfernt und die eine der daselbst im Rohre befindlichen Metallplatten jetzt von der Wandbelegung isoliert, im übrigen die Anordnung nach dem Schema der Fig. 2 getroffen, in welcher ausser dem jetzt benutzten Schirme S_2 nur Metalltheile

gezeichnet sind; L bedeutet eine Leydener Flasche mit isolierter äusserer Belegung, s eine Funkenstrecke von $^1/_3$—$^1/_2$ mm Länge, f eine Hanfschnur. Man übersieht, dass bei geladenem Apparate die isolierte Platte M periodisch ein geringeres Potential annehmen wird als die mil C_2 verbundene andere Platte M. Der Potentialunterschied der beiden Platten ist durch die Länge der Funkenstrecke s zu regulieren, er erreicht den vollen, dieser Länge entsprechenden Betrag in dem Augenblicke, in welchem ein Funke die Strecke überspringt, worauf er zu Null herabsinkt, um dann durch die Wirkung der schwach leitenden Hanfschnur von neuem wieder anzusteigen. Man beobachtet dabei ein Wandern des Phosphorescenzfleckes am Schirm aus seiner unabgelenkten Lage heraus bis zu einem Punkte, von welchem er wieder zu jener Lage zurückspringt. Die Länge des dabei beschriebenen Weges misst die elektrische Ablenkung der durch den Condensator veränderten Strahlen. Soll die Ablenkung der unveränderten Strahlen gemessen werden, so wird das ganze System C_2 zur Erde geleitet und unter Weglassung der Hanfschnur allein die isolierte Platte M und die Flasche L geladen, so dass wieder in passenden Intervallen Funken die Strecke s überspringen. Der Weg des Phosphorescenzfleckes misst wieder die elektrische Ablenkung. Man findet dieselbe nun sehr bemerkbar vergrössert dnrch eine negative Ladung. Es betrug z. B. bei positiver Ladung bis auf annähernd 1 cm Schlagweite die elektrische Ablenkung 15 mm, wenn sie bei ungeladenem Condensator unter sonst gleichen Umständen 10 mm beträgt. Damit ist auch die Veränderung der elektrischen Ablenkbarkeit erwiesen und gezeigt, dass Sinn und Grössenordnung der Veränderung der Erwartung entsprechen.

11.

DIE BEWÖLKUNG IN DEN LÄNDERN DER UNGARISCHEN KRONE.

Von J. HEGYFOKY.

Aus «Mathematikai és Természettudományi Közlemények» (Math. und Naturwiss. Mittheilungen) XXVII. Band Nr. 3.

I. Die Wichtigkeit des Studiums der Bewölkung.

Nicht nur die Temperatur, sondern auch der tägliche Gang des Luftdruckes hängt zum Theil von der Bewölkung ab. Auf die Gemüthsstimmung wirkt dieselbe auch ein, und den Landschaftbildern verleihet sie einen eigenthümlichen Reiz.

Die vorliegende Studie beschäftigt sich mit der Discussion der *jährlichen Periode*. Dieselbe ist bis jetzt nicht untersucht worden. Einige Daten sind zwar in den wenigen Monographien neueren Ursprungs enthalten, jedoch eine zusammenfassende Untersuchung fehlt bis jetzt. Im Jahre 1865 theilte zwar J. Hunfalvy die Bewölkungsverhältnisse für 10 Stationen mit, jedoch sind seine Daten von allzukurzer Dauer, um gehörigen Aufschluss über die jährliche Periode geben zu können.

II. Die Daten.

Dieselben sind den Jahrbüchern der meteorologischen Anstalt zu Budapest entnommen und beziehen sich auf den Zeitraum 1871—1895. Die Zahl der Stationen beträgt 244. Sieben Monate schon als ein Jahr gezählt, ist die Beobachtungsdauer:

1— 5	Jahre	an	70	Stationen
6—10	«	«	60	«
11—15	«	«	57	«
16—20	«	«	20	«
21—25	«	«	37	«

Es beobachteten also 54 Procente der Stationen 1—10, und 46 Procente 11—25 Jahre hindurch.

Die Beobachtungsstunden sind 7, 2, 9. Andere Combinationen kommen selten vor.

Da sich keine Station mit 24-stündigen Beobachtungen vorfindet, kann auch nicht entschieden werden, in wie weit sich die gebrauchten Combinationen vom wahren 24-stündigen Mittel unterscheiden. Weil aber die Differenzen zwischen den gewöhnlichen Stundencombinationen und dem 24-stündigen Mittel nur sehr gering zu sein pflegen, wurden an unseren Mitteln keine Correctionen angebracht.

III. Die normalen Mittel.

Zur Bestimmung der normalen Mittel wurden zwei Wege eingeschlagen. Es wurden nämlich Mittel aus 5, 10, 15, 20 Jahren gebildet und mit einander verglichen; auch wurde die mittlere Abweichung vom Mittel längerer Perioden berechnet, ebenso für die Monate, als für das Jahr.

1. Für sechs Stationen wurden vom Jahre 1871 angefangen immer 5, 10, 15, 20 Jahre zu einem Mittel vereinigt und dasselbe in die Columne 1871, 1872, 1873 und so weiter eingetragen, und die Schwankung dieser Mittel dargethan. Das Ergebniss ist folgendes:

Bei	5— 5-jährigen	Serien	beträgt	die	Schwankung	4—12%
«	10—10 «	«	«	«	«	2— 7%
«	15—15 «	«	«	«	«	1— 4%
«	20—20 «	«	«	«	«	0— 1%

(Tabelle I im Original).

Die Schwankung ist am grössten an jenen Stationen, wo mehrere Beobachter funktionierten, mithin die Homogenität oft unterbrochen wurde. *Was also bei den anderen meteorologischen Elementen das Versetzen der Instrumente verursacht, fällt bei der Bewölkung auf den Wechsel der Beobachter, nämlich die Unterbrechung der Homogenität.*

2. Die mittlere Abweichung wurde für 32 Stationen berechnet. (Tabelle II im Original.) Dieselbe stellt sich beim Jahresmittel

viel kleiner heraus, als bei den Monatsmitteln. Das Maximum fällt theils auf den Herbst, theils auf den Winter.

Beim *Jahresmittel* beträgt die mittlere Abweichung meistens 3%. Von den 37 Serien der 32 Stationen weisen 3 eine kleinere, 12 eine grössere Abweichung als 3% auf.

Längere oder kürzere Zeiträume bewirken keine namhaften Unterschiede. In Árvaváralja macht die mittlere Abweichung des Jahresmittels 2·9, 2·8% aus, ebenso bei 20-, als 40-jährigen Beobachtungen. Die Reissenberger'sche 30-jährige Serie zu Nagy-Szeben weist als mittlere Abweichung 3·1, die je einer 15-jährigen 2·7, 3·2% auf; die Gottschling'sche 16-jährige Reihe hat 2·8% mittlere Abweichung. 16 Jahre in Arad zeigen 2·1, 14 Jahre in Deliblat (Bewölkung unterschätzt) 1·3% mittlere Abweichung.

Nicht so sehr die natürlichen Verhältnisse sind es also, als vielmehr die Homogenität der Beobachtugen, welche auf die mittlere Abweichung namhaften Einfluss ausüben. Wird dieselbe in Folge eines Wechsels des Beobachters unterbrochen, so steigert sich die mittlere Abweichung. So beträgt dieselbe in Ungvár, wo im Jahre 1873—1884 einer, im Jahre 1885—1895 ein anderer Beobachter functionierte, 11·9%; versucht man aber laut Eperjes die Homogenität herzustellen, dann bekömmt man als mittlere Abweichung 3·7%. Die nichthomogene Serie zu Nagy-Bánya weiset 7·5, die homogene 2·5; die nichthomogene zu Késmárk 7·8, die homogene 2·3; die nichthomogene zu Budapest 3·0, die homogene 2·6; die nichthomogene zu Csáktornya aber 4·2, die homogene 4·4% mittlere Abweichung auf. Dem entsprechend wird bei den homogenen Serien auch der wahrscheinliche Fehler des Mittels kleiner, als er bei den nichthomogenen ist. (Tabelle III im Original.)

Die mittlere Abweichung der *Monatsmittel* ist in den Sommermonaten viel kleiner als in jenen der anderen Jahreszeiten. In der grossen Tiefebene tritt das Maximum im Oktober, in den anderen Gegenden meistens im Februar auf; das Minimum fällt auf Juli oder Juni. Die Umgegend der Hohen Tátra weiset das Minimum im November auf.

*

Für Árvaváralja und Nagy-Szeben wurden die Differenzen zwischen 5, 10, 15 und 20-jährigen Perioden gegen jene von 30, 40 homogenen Jahren nicht nur bezüglich des Jahresmittels, sondern auch bezüglich der Monatsmittel dargestellt. (Tabelle IV im Original.) Zu Árvaváralja beträgt die Schwankung beim Jahresmittel 5-jähriger Perioden 6 (+3 und —3), 10-jähriger 4 (+2 und —2), 20-jähriger 2% (+1 und —1). Zu Nagy-Szeben ist dieselbe Grösse einer 5-jährigen Periode 6 (+3 und —3), einer 10-jährigen 1 (0 und +1), einer 15-jährigen 2% (+1 und —1). — Bei den Monatsmitteln sind die Differenzen der 5, 10, 15, 20-jährigen Perioden gegen die 30, 40-jährigen Mittel schon viel grösser. Obwohl im Allgemeinen die Differenzen zwischen 5, 10, 15, 20 Jahren gegen 30 und 40 Jahre desto kleiner werden, je mehr Jahre diese kürzeren Perioden aufweisen, ist dies doch nicht bei jedem Monat der Fall. Zu Árvaváralja ist Juli und August, zu Nagy-Szeben Oktober der veränderlichste Monat. Am ersten Orte beträgt die Differenz einer 20-jährigen Periode gegen die 40-jährige + oder — 6 bis 7%; zu Nagy-Szeben eine 15-jährige gegen die 30-jährige +7 oder —6%.

3. Der wahrscheinliche Fehler. Derselbe wird bei den oben erwähnten 32 Stationen ebenso für die Monate, als für das Jahr mitgetheilt. (Tabelle V im Original.) Er beträgt bei Stationen mit homogenen Serien bei dem Jahresmittel einer 20-jährigen Periode höchstens 0·5%; sind aber die Reihen nicht homogen, so kann derselbe auch 11% ausmachen.

Die Monatsmittel einer 20-jährigen homogenen Serie haben einen wahrscheinlichen Fehler, der kleiner ist als 2%; bei einer 30—40-jährigen schwankt er um 1·5% herum.

Das Jahresmittel kann also bis auf ±1% aus weniger als 15 Jahren schon bestimmt werden; die Monatsmittel aus beiläufig 40 Jahren. Da aber 40—50 Jahre hindurch ein und derselbe Beobachter kaum functioniert, und mithin die Homogenität verloren geht, kann auch nicht gehörig festgestellt werden, wie viele Jahre zur Bestimmung der normalen (±1%) Monatsmittel nöthig sind.

IV. Die Homogenität der Daten.

Zur Eruierung der Homogenität wurden die Jahresmittel verwendet. Die 244 Stationen wurden nach den Gegenden des Landes in sieben Gruppen eingetheilt, und das Jahresmittel gegen das vorangehende mit + oder — bezeichnet, je nachdem der Bewölkungsgrad zu- oder abnahm. Aus den sieben Gruppen wurde dann das Landesmittel gebildet. (Tabelle VI im Original.) Die sehr abweichenden Differenzen der einzelnen Stationen wurden eingeklammert und bei der Bildung der sieben Gruppenmittel ausgelassen. Die sieben Gruppenmittel und das Landesmittel sind für den ganzen Zeitraum 1871—1895 auch graphisch dargestellt worden. (Graphische Tabelle *A* im Original.)

Der grösste Unterschied zwischen zwei Jahren beträgt laut den sieben Gruppen +7·9 und —9·3% und kommt in der Gegend der SE-Karpaten vor.

Der zu- und abnehmende Bewölkungscharakter ist meistens im ganzen Lande derselbe. Gegen 1871 wächst im Jahre 1872 der Bewölkungsgrad in allen Gegenden des Landes, in Siebenbürgen aber nimmt er ab; ebenso ist es im Jahre 1876. Das Jahr 1877 zeigt abnehmende, 1878 zunehmende, 1879 und 1880 abnehmende 1881 zunehmende Bewölkung im ganzen Lande. Im Jahre 1882 nehmen die E-Karpaten an der allgemeinen Aufklärung nicht Theil, ebenso wie im Jahre 1883 an der allgemeinen zunehmenden Bewölkung. Auch im Jahre 1884—1888 ist der Gang der Veränderung nicht im ganzen Land derselbe. Am auffallendsten ist die allgemeine Zunahme der Bewölkung im Jahre 1889 und die Abnahme in 1890. Dann folgen zwei Jahre mit theilweiser und drei mit allgemeiner Veränderung.

Die ersten Jahre der 25-jährigen Periode waren mehr heiter als das Mittel, dann folgten mehr trübe und wieder mehr heitere und zuletzt etwas mehr bewölkte Jahre. Die Abweichung des Landesmittels vom 25-jährigen Mittel ist bei den einzelnen Lustren in % folgende:

1871/75	1876/80	1881/85	1886/90	1891/95
—1·0	+1·5	—0·1	—1·0	+0·6

Durch das erwähnte Verfahren kann zwar der Gang der Bewölkung von einem Jahre zum anderen bestimmt, und gröbere Unterbrechungen in der Homogenität aufgedeckt werden, jedoch kann nicht dargethan werden, welchen Daten im Falle des Nichtübereinstimmens der Vorzug gebühre. *Eine homogene Serie zeigt nur die Veränderung von Jahr zu Jahr pünktlich an, nicht aber auch den gut oder minder gut geschätzten Bewölkungsgrad.*

Der Unterschied zweier sich folgenden Jahre kann nun benützt werden zur Berechnung der Bewölkungsgrösse. Es werden die zwei auffallendsten Jahre (1889, 1890) mit maximaler Veränderung ausgewählt und für 73 Stationen die Originalmittel dieser zwei Jahre nach Thunlichkeit corrigiert und für jede der sieben Gruppen das 25-jährige Mittel bestimmt. (Tabelle VII im Original.) Auf diese Weise bekommt man für die:

I.	Grosse Tiefebene als mittlere Bewölkung	50·0%
II.	Gegend zwischen der Adria und Drau, Bewölkung ...	56·3%
III.	Gegend zwischen der Drau und Donau, Bewölkung... ...	54·3%
IV.	Kleine Tiefebene, Bewölkung	53·0%
V.	Gegend um die Tátra, Mátra und Fátra, Bewölkung ...	56·0%
VI.	Gegend der E-Karpaten, Bewölkung	62·3%
VII.	Gegend der SE-Karpaten, Bewölkung	53·5%
	Mittel (kleine Tiefebene mit 1/2 Gewicht) Bewölkung ...	56·5%.

Lässt man bei der Gruppe VI Ungvár und Nagy-Bánya weg, dann wäre das Landesmittel 55·5%.

Die Homogenität der Daten wird auch auf andere Weise geprüft. Nachdem es sich herausstellte, dass das Interpolieren einzelner Monats- und Jahresmittel bei einer Entfernung bis zu 100 und mehr Km. beider Stationen zulässig ist, so liegt es auf der Hand, dass man alle Stationen mit einer in der Mitte des Landes vergleichen könnte, um über die Homogenität und zugleich auch über die Güte der einzelnen Jahresmittel ein Urtheil fällen zu können. Leider haben wir aber keine homogene und ganz vertrauungsvolle Serie aus der Mitte des Landes. So weit als möglich, wurde also eine Vergleichsserie aus den Beobachtungen des Verfassers hergestellt, obwohl derselbe nicht immer an derselben Stelle beobachtete. Seine Daten wurden mit jenen aus Kecskemét (Beobachter Herr Professor Parragh) bezüglich der Jahre

1873—1881 homogen hergestellt, und das Jahr 1871 und 1872 interpoliert. Mit dieser Serie, N. A. benannt (Nagy-Alföld = Grosse Tiefebene), wurde das Jahresmittel jeder Station verglichen. (Tabelle VIII im Original.)

Es stellte sich heraus, dass bei homogenen Serien selbst bei einer Entfernung von 200—300 Km. die Differenzen der fünf Lustren genug constant sind und nur 2—4% Schwankung aufweisen; sind aber die Lustrenmittel nicht homogen, dann beträgt die Schwankung auch 10 bis 17%.

Das Jahresmittel aus 10 und mehr Jahren gerechnet, wurde nur für 68 Stationen, deren Differenzen gegen die Vergleichsserie ziemlich constant bleiben, gebildet. (Tabelle IX im Original.) Als wahrscheinlichstes Jahresmittel bekommt man also für die:

I.	Grosse Tiefebene laut 14 Stationen	52·6%
II.	Gegend zwischen der Adria und Drau 7 Stationen	55·3%
III.	Gegend zwischen der Drau und Donau 9 St.	53·2%
IV.	Kleine Tiefebene laut 6 St.	55·7%
V.	Gegend um die Fátra, Mátra und Tátra 10 St.	55·6%
	« « « « « « « 4 St.	64·0%
VI.	Gegend der E-Karpaten laut 6 St.	63·0%
VII.	Gegend der SE-Karpaten laut 12 St.	55·4%
	Mittel der 68 Stationen	55·8%.

Dieses Mittel stimmt mit jenem, welches aus den Jahren 1889 und 1890 mittels der Differenzen von Jahr zu Jahr berechnet wurde, und 56·5 oder 55·5 ausmacht, ganz gut überein. Nach Svante Arrhenius beträgt die Bewölkung auf dem 47. Breitengrad 55% (Hann. Klim. I. 217.); Ungarn scheidet derselbe beiläufig in der Mitte, und die mittlere Bewölkung des Landes macht 55—56% aus.

Die grosse Tiefebene hat fast gleiche Bewölkung, als die hügelige Gegend jenseits der Donau. Kroatien und Slavonien, so wie die Umgegend der Karpaten von Pozsony bis zur rumänischen Landesgränze ist so zu sagen gleichförmig bewölkt. Mehr zunehmende Bewölkung zeigen die Central-Karpaten und die Gebirge in Mármaros, dann die SE-Karpaten um Ruszkabánya und Petrozsény.

Bei der Besprechung der Homogenität wird auch die Reduction kürzerer Perioden auf längere Zeiträume erwähnt. Selbstverständlich ist dieses Verfahren nur an Stationen mit homogenen Beobachtungen zu gebrauchen. Zu dem Behufe wird Árvaváralja und Eperjes in Betracht gezogen. Zuerst wird die mittlere Abweichung vom langjährigen Mittel für Eperjes aus den Jahren 1871—1894, für Árvaváralja aus der Periode 1851—1890 dargegethan (Tabelle X im Original), dann die Differenz zwischen beiden Stationen für die Jahre 1871—1894 (Tabelle XI im Original), und zuletzt die Abweichung der Differenzen vom Mittel, oder die Variabilität der Differenzen für die Periode 1871—1894. (Tabelle XII im Original.)

Die maximale mittlere Abweichung vom langjährigen Mittel fällt bei Árvaváralja auf den Dezember mit $\pm 11{\cdot}3\%$, bei Eperjes auf den Februar mit $\pm 10{\cdot}1\%$; die maximale mittlere Variabilität der Differenzen stellt sich im Februar mit $\pm 5{\cdot}9\%$ ein. Im Allgemeinen ist die mittlere Abweichung der Monatsdifferenzen vom Mittel zwei- bis dreimal geringer als die mittlere Abweichung der directen Monatsmittel vom Mittel der langjährigen Periode. Kürzere Reihen können also mit Vortheil auf längere reduciert werden, jedoch nur in dem Falle, wenn die Daten homogen sind, was aber bei einem Beobachterwechsel kaum anzutreffen ist.

Die Variabilität der Differenzen wird für acht Stationspaare berechnet, ebenso der wahrscheinliche Fehler derselben für die zwei Monate maximaler und minimaler Variabilität. (Tabelle XIII im Original.) Als Resultat ergiebt sich, dass kürzere homogene Serien mit Vortheil in Bezug des Jahresmittels, sowie des Monatsmittels mit kleinster Variabilität, auf längere reduciert werden können, dass aber die Reduction der Monatsmittel mit grösster Variabilität kaum vom Nutzen ist.

Dann wird an neun Stationspaaren gezeigt, dass, wenn fünf Jahre auf 14—15 Jahre reduciert werden, bei sechs Paaren ein sehr gutes Jahresmittel erhalten wird; dass aber bei dem Monat mit maximaler Variabilität das reducierte von dem originalen Mittel schon um 3—7% abweicht; und dass bei drei Stationspaaren schlechtere Resultate erhalten werden. (Tabelle XIV im Original.)

V. Die jährliche Periode.

In sieben Gruppen eingetheilt, werden die 244 Stationen mit Angabe der Beobachtungsdauer nach ihren Monats-, Winter-, Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Jahresmitteln dargestellt. (Tabelle XV im Original.) Das Ergebniss ist folgendes:

1. Der trübste Monat, besonders in der NE-Hälfte des Landes von Pressburg (Pozsony) bis zum östlichen Saume Siebenbürgens, ist der Dezember; in der SW-Hälfte ist es theils der Dezember, theils der Januar. Eine kleine Abweichung zeigen die Berge bei Borostyánkő jenseits der Donau, wo das Maximum der Bewölkung auf den November fällt.

2. Der heiterste Monat ist der August. In einem Theile von Kroatien und Slavonien, in der Gegend von Bróod und Ó-Gradiska ist der Juli etwas heiterer als der August; in dem östlichsten Theil des Landes, in den Bergen von Mármaros, fällt das Minimum auf den September. Hochgelegene Stationen in der Tátra und Mármaros sind im Februar am heitersten.

3. Das Maximum der Bewölkung fällt auf den Winter, das Minimum auf den Sommer. Die Bergstationen in der Tátra und Mármaros sind im Herbst am trübsten, am heitersten im Winter oder Frühling.

Der Bewölkungsgrad ist oft über- oder unterschätzt. An einem Orte auf der grossen Tiefebene weiset der trübste Monat 72, an einem anderen nur 50% auf. Es muss also untersucht werden, ob durch abweichende Schätzungweise die jährliche Periode nicht verwischt wird.

Zu dem Behufe werden die Monatsmittel aller Stationen mit fünf- und mehrjährigen Daten mit dem Jahresmittel verglichen und die jährliche Periode als Abweichung der Monatsmittel vom Jahresmittel dargestellt. (Tabelle XVI im Original.) Es ergiebt sich, dass nahegelegene Stationen, deren Jahresmittel um 15—18% differiert, in Bezug der jährlichen Periode bei den Monatsmitteln bis auf 2—3 Prozente übereinstimmen; mithin erscheint dieselbe weder durch Ueber-, noch durch Unterschätzung verfälscht zu sein.

Die jährliche Periode stellt sich nach den originalen Daten für das ganze Land folgendermassen heraus:

Jan.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
8·7	3·4	1·7	0·6	—2·0	—2·6	—11·7	—14·0*	—10·3	2·5	9·8	*13·3*

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
8·5	0·1	—9·4*	0·7	50·5

Die maximale Zunahme der Bewölkung vom September zum Oktober ist bei allen sieben Landesgruppen anzutreffen; nicht so die maximale Abnahme vom Juni zum Juli, weil in den E-Karpaten dieselbe zwischen Dezember und Januar auftritt. Auch auf der kleinen Tiefebene ist die Verminderung der Bewölkung vom Februar zum März etwas grösser als zwischen Juni und Juli.

Die heitersten drei Monate sind Juli, August, September. In der westlichsten Gegend des Landes ist der Juli um 0·5% heiterer, als der August; in der östlichen ist zwar auch der August der heiterste, aber der September ist um 2·2% mehr heiter als der Juli, hingegen ist beim Landesmittel der September um 1·4% trüber, als der Juli. Als Unicum steht die Gegend der SE-Karpaten, wo der Oktober um 3·3% heiterer ist als der Juni; das Landesmittel zeigt den Oktober um 5·1% mehr trüb als den Juni.

Etwas Aehnliches bemerkt man auch bezüglich November und Januar. Im südlichen Theile des Landes ist der Januar etwas trüber als der November; im nördlichen hingegen ist der Januar heiterer als der November.

In den E-Karpaten ist der Februar auffallend heiter, der März viel trüber als in den anderen Gegenden des Landes.

Mit dem Jahresmittel stimmt am besten der April überein; vom April bis September ist der Himmel reiner, vom Oktober bis April aber trüber. Frühling und Herbst hat fast gleiche Bewölkung, als das Jahresmittel; der Winter ist beiläufig um so viel trüber, als der Sommer heiterer ist. Im Osten ist der Frühling etwas trüber als der Herbst; in den anderen Gegenden des Landes, besonders in der kleinen Tiefebene, ist der Herbst etwas trüber als der Frühling.

Die Schwankung der Monatsmittel ist bei den sieben Gruppen am grössten in der grossen Tiefebene und in Kroatien und

Slavonien, am kleinsten in den N- und E-Karpaten. *Die Grösse der Schwankung hängt also von der geographischen Breite und der Seehöhe ab.*

In den N-, E- und SE-Karpaten treffen wir einen besonderen Typus der Bewölkung an, den Höhentypus. (Tabelle XVII im Original.) 28 Stationen stellen denselben in Abweichungen vom originalen Jahresmittel folgendermassen dar:

Jan.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
—0·5	—4·5	3·1	0·9	—1·2	1·7	—5·1	—6·9*	—6·5	5·8	5·5	*8·1*

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1·0	0·9	—3·5*	*1·5*	52·4

Es ist zwar auch in der bergigen Gegend der Juli, August, September am heitersten, jedoch bildet sich im Februar ein secundäres und im Mai ein tertiäres Minimum aus. Das Hauptminimum stellt sich in den N- und SE-Karpaten im August, in den E-Karpaten um Marmaros im September ein.

Die Schwankung der Monatsmittel beträgt 15%; mithin ist in der Seehöhe von ungefähr 600 Meter eine um 13% geringere Schwankung anzutreffen als auf der grossen Tiefebene in etwa 100 Meter Seehöhe. Es kann aber daraus nicht geschlossen werden, dass die Schwankung proportionell der Seehöhe abnehme, denn auf dem Obir (2044 M.) macht dieselbe 19, auf dem Sonnblick (3106 M.) aber 27% aus.

Auf dem Obir und Sonnblick ist der Winter die heiterste Jahreszeit. Diese Eigenschaft ist nur in Tátrafüred (1004), an der höchsten unserer Stationen, anzutreffen. Wie auf dem Obir, ist auch hier der Winter am heitersten, der Frühling am trübsten. Die Schwankung macht in Tátrafüred 13% aus. Auch an anderen höhergelegenen Stationen, wie Sljeme, Borostyánkő und Csiksomlyó ist der Winter etwas weniger bewölkt als an benachbarten niedrigeren Orten.

Oben wurde erwähnt, dass für 68 Stationen ziemlich verlässliche Jahresmittel aus den homogenen Daten gebildet wurden. Würde man an diese Mittel die Abweichungen der Monatsmittel vom ursprünglichen, aus allen Daten gerechneten Jahresmittel anbringen, so könnte man für die Stationen auch viel verlässlichere

Monatsmittel erhalten. Diese Operation wurde aber nur für die sieben Gruppen und den Höhentypus ausgeführt. (Tabelle XIX im Original.) Die corrigierte mittlere Bewölkung ist bei den charakteristischsten Gruppen folgende:

Jan.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Grosse Tiefebene											
64·4;	58·0;	54·5;	53·7;	49·4;	48·5;	37·9;	36·1*;	40·8;	54·4;	63·5;	*68·4*
SE-Karpaten											
62·0;	58·8;	59·0;	58·0;	55·9;	55·8;	44·5;	40·9*;	44·6;	54·9;	63·2;	*67·6*
N- und E-Karpaten											
68·7;	62·7;	65·9;	64·9;	61·0;	64·1;	56·0;	52·8*;	54·5;	67·2;	72·1;	*74·4*
Das ganze Land											
64·5;	59·2;	57·5:	56·4;	53·8;	53·2;	44·1;	41·8*;	45·5;	58·3;	65·6;	*69·1*

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Schwankung
63·6;	52·6;	40·8*;	53·0;	52·6;	32·3
63·1;	57·7;	47·1*;	54·0;	55·4;	26·7
68·6;	63·9;	57·6*;	64·6;	63·4;	21·6
64·3;	55·9;	46·4*;	56·5;	55·8;	27·3

Im Winter ist die grosse Tiefebene kaum etwas (3·6%) heiterer als der trübste Theil des Landes. Die Gegend jenseits der Donau ist am heitersten, um 1½% heiterer als die grosse Tiefebene.

Im Frühling ist die grosse Tiefebene und die Gegend jenseits der Donau um 10, im Sommer um 17% heiterer, als die bewölktesten E-Karpaten.

Im Herbst ist die grosse Tiefebene und Siebenbürgen am heitersten.

Die sieben Gruppen, der Höhentypus (595 M.), die N- und E-Karpaten (401) M. wurden auch graphisch dargestellt. (Graphische Tabelle *B* im Original.)

VI. Die Ursache der jährlichen Periode.

Im Winter und Sommer verhält sich die relative Feuchtigkeit ebenso, wie die Bewölkung. Es wird nun untersucht, ob dies auch für die einzelnen Monate zutrifft. 18 Stationen (Tabelle XX im Original) geben folgendes zu erkennen:

1. Das Maximum der relativen Feuchtigkeit fällt, analog der Bewölkung, auf den Dezember. In der grossen Tiefebene ist dasselbe im Dezember und Januar anzutreffen, gerade so, wie bei der Bewölkung.

2. Das Minimum der relativen Feuchtigkeit stellt sich nicht in dem Monat der minimalen Bewölkung, im August, sondern im Juli ein. In der Karpaten-Gegend zeigt sich das Hauptminimum im April und Mai. In der grossen Tiefebene und jenseits der Donau entwickelt sich das secundäre Minimum im April nur sehr schwach. — Der Sommer ist am wenigsten feucht in der grossen Tiefebene und jenseits der Donau; in der Karpaten-Gegend weiset der Frühling die minimale Feuchtigkeit auf.

Auf Tabelle *B* im Original werden die Monatsmittel auch graphisch dargestellt. Dieselbe lässt erkennen, dass der normale Gang im April, Mai und Juni gestört ist. Auch bei der Bewölkung zeigt sich etwas Aehnliches; der abfallende Ast der Kurve ist im März, April, Mai und Juni nicht symmetrisch.

Juni ist trüber und feuchter, als er sein sollte; es ist dies der Monat mit maximalem Niederschlage im ganzen Lande.

Der Luftdruck ist im April, Mai und Juni am geringsten. Das häufigere Erscheinen der Depressionen verursacht oft Regenwetter, mithin ist der normale Gang der relativen Feuchtigkeit und Bewölkung gestört. Im Oktober nimmt die Bewölkung am stärksten zu; ebenso die relative Feuchtigkeit. Auch der Regenfall zeigt in diesem Monat ein secundäres Maximum und der Luftdruck ein secundäres Minimum.

Die Windstärke spielt gewiss auch eine Rolle bei dem Gange der relativen Feuchtigkeit. An sieben Stationen ist dieselbe im März zwar am grössten, jedoch im April kaum etwas geringer. (Tabelle XXI im Original.) — Auf dem Sonnblick ist die Windstärke im Sommer am kleinsten, im Winter am grössten; die relative Feuchtigkeit ist hingegen zur Zeit der kleinsten Windstärke, im Sommer am grössten, im Winter, bei der stärksten Luftströmung, am kleinsten.

Eine andere auffallende Eigenschaft ist jene, der zu Folge das Minimum der relativen Feuchtigkeit sich um einen Monat früher (im Juli) einstellt, als jenes der Bewölkung (im August). Ob dies aber auch in der freien Atmosphäre, im Wolkenniveau, der Fall ist, scheint nicht wahrscheinlich zu sein; weil das Maximum der Temperatur schon auf hohen Bergen sich auf die ersten Tage des August verspätet, mithin auch das Minimum der relativen Feuchtigkeit oben später, etwa im August, auftreten kann, und nicht im Juli, wie unten.

Die relative Feuchtigkeit ist im Winter im ganzen Lande fast vollkommen gleich, im Sommer aber ist die grosse Tiefebene um 10% weniger feucht als die Karpaten-Gegend. Die Schwankung der Monatsmittel beträgt bei unseren 18 Stationen 18·1%; in der Karpaten-Gegend ist der Unterschied zwischen Dezember und April 15·1, zwischen Dezember und Juli 11·6%; hingegen im übrigen Theil der Landes zwischen Dezember und Juli 23·6%, zwischen Dezember und April 19·8%. In der grossen Tiefebene stellt sich die minimale Feuchtigkeit in der wärmsten Jahreszeit ein; in der bergigen Gegend ist der Sommer feuchter als der Frühling.

Laut zwei Stationen in der grossen Tiefebene und Siebenbürgen sind im Winter die Nebeltage am häufigsten, im Sommer am seltensten; Herbst hat mehr Nebeltage als der Frühling. Auch dieser Umstand übt einen Einfluss auf die Grösse der Bewölkung aus.

Die nephische Windrose zu Turkeve (5 Jahre) giebt zu erkennen, dass die Bewölkung im Winter und Frühling bei Winden aus der N-Hälfte des Horizontes geringer ist, als bei jenen aus der S-Hälfte; Sommer und Herbst verhält sich umgekehrt. Dies hängt von der Vertheilung des Luftdruckes ab. Wie bei verschiedenen Winden in der grossen Tiefebene die Wolken ziehen, zeigt Tabelle XXII. im Original.

Der jährliche Gang der Bewölkung hängt also hauptsächlich von der Temperatur, der relativen Feuchtigkeit, vom Auftreten und Zug der Depressionen und den Winden um dieselben, also vom Luftdruck ab. Orographische Verhältnisse spielen auch eine Rolle dabei.

VII. Die Bewölkung, der Niederschlag und Wasserstand.

Zwischen diesen Elementen besteht ein gewisser Zusammenhang.

Berechnet man die Abweichungen vom Mittel in Procenten, und zwar für den Wasserstand der Donau bei Pressburg und Orsova (1876—1895), für den Niederschlag an 31—41 Stationen (1871—1895) und die Bewölkung (1871—1895), wie sie eben dargestellt wurde, so bekommt man als Abweichung der Lustrenmittel vom Gesammtmittel:

		1871/75	1876/80	1881/85	1886/90	1891/95
Bewölkung		—1·0	+ 1·5	—0·1	—1·0	+0·6
Niederschlag		—3·1	+ 5·3	—0·3	—2·6	+0·9
Wasserstand	Pressburg	+11·8	—6·7	—5·1	0·0	
	Orsova	+15·6	+1·0	—7·5	—9·3	

Im Lustrum 1876—80 ist die Bewölkung, der Niederschlag und Wasserstand am grössten; in den folgenden zwei Lustren 1880—1885 und 1886—1890 nehmen alle drei Elemente ab, beim Wasserstand in Pressburg ist in 1886—1890 schon geringe Zunahme wahrzunehmen, in Orsova aber, wo sich die Landesniederschläge viel besser abspiegeln, nimmt der Wasserstand noch ab; im letzten Lustrum nimmt die Bewölkung, der Niederschlag und Wasserstand bei Pressburg zu, in Orsova kommt noch geringe Abnahme vor. Der trockene Charakter dauert im Osten noch fort, als er im Westen schon geschwunden ist. Die Flüsse sinken im Osten noch, als sie im Westen steigen. Im Lustrum 1871—75 ist die Bewölkung unter dem Mittel, das Wetter ist trockener, die Donau steht niedriger als im Mittel, wie dies im Werke «Wasserstand der Flüsse und Niederschlag in Ungarn» gezeigt wurde. Die zwei Elemente des Niederschlages und Wasserstandes bei Orsova werden auch graphisch zum Vergleich mit der Bewölkung dargestellt. (Graphische Tabelle *A* im Original.)

Bei allen drei Elementen stellt sich der trockene Charakter der Witterung am auffallendsten in den Jahren 1883—1888, und der feuchte in der Periode 1876—1881 heraus.

*

Das Jahresmittel der Bewölkung wurde zwar für 68 Stationen nach Möglichkeit bestimmt, jedoch kann dasselbe nicht für jede Station als absolut gewiss betrachtet werden. Ebendesshalb konnten auch keine Isonephen gezogen werden und wurden bloss die Jahresmittel in die Karte eingeschrieben.

VIII. Die Monats- und Jahresmittel der Stationen.

Für alle 244 Stationen sind dieselben, nebst den Lustrenmitteln, alphabetisch mitgetheilt (im Original). Man kann also leicht die Lustrenmittel vergleichen und bestimmen, ob die Differenzen wenigstens in den vier Jahreszeiten constant bleiben, oder nicht. Auch können einzelne Monate in Bezug eines gewissen Wolkengrades schnell aufgesucht werden. Neben den Lustrenmitteln sind hie und da auch Mittel aus 3—4 Jahren mitgetheilt. Interpolierte Daten wurden in Klammern gesetzt; ebenso jene Monatsmittel bei den Lustren und dem ganzen Zeitraume, welche aus weniger Jahren, als andere berechnet sind. Die geographische Länge der Stationen ist von Greenwich gezählt. Ein *Z* bedeutet Zonen (mitteleuropäische) Zeit, kommt aber selten vor, weil die Beobachtungen nach Ortszeit angestellt wurden.

ÜBER DIE WIRKUNG EINIGER GASE UND METALLE AUF DIE PHOTOGRAPHISCHE PLATTE.

Von BÉLA von LENGYEL, ord. Mitgl. d. ungar. Akademie d. Wiss.

Vorgetragen in der Sitzung der ungarischen Akademie am 17. Oktober 1898.

Aas «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Math. und Naturwiss. Anzeiger) Bnd. XVI. pag. 365—377.

Seitdem RÖNTGEN die nach ihm benannten Strahlen entdeckte, wurden zahlreiche Untersuchungen publiciert, welche sich theils auf die Eigenschaften der *X*-Strahlen, theils auf andere, den *X*-Strahlen ähnliche, doch von diesen in mancher Beziehung verschiedene Strahlen bezogen.

H. BECQUEREL entdeckte die Uranstrahlen,* G. C. SCHMIDT die Thorstrahlen.** Diese Strahlen üben eine ähnlicne Wirkung aus wie die *X* Strahlen, sind aber doch von ihnen verschieden. Dass diese Wirkungen von strahlender Energie herrühren, ist nach den Untersuchungen der genannten Forscher nicht zu bezweifeln. Es giebt aber noch eine Menge anderer Körper, die auf die photographische Platte einwirken, wie von den verschiedensten Forschern, vor allem in letzter Zeit von W. J. RUSSEL,*** nachgewiesen wurde.

Er untersuchte viele organische Körper und schliesst aus seinen Versuchen, dass die Dämpfe, besonders der leicht oxydierbaren Körper, die photographische Platte beeinflussen. Aus der auffallenden Analogie der Wirkungen einerseits der Dämpfe sog. Körper, andererseits der Metalle schliesst er, dass die (polierten) Metalle bei gewöhnlicher Temperatur verdampfen.

---

* H. BECQUEREL: Compt. rend. 76. u. 77.

** G. C. SCHMIDT: Wied. Ann. 65. p. 141. 1898.

*** W. J. RUSSEL: Proc. Roy. Soc. London.

Ich beabsichtigte zu untersuchen, ob auf die photographische Platte das metallische Calcium eine ähnliche Wirkung ausübt wie die von Pellat und anderen aufgezählten Metalle, und wurde dabei veranlasst, die unten beschriebenen Versuche anzustellen.

1. Auf eine in schwarzes Papier gewickelte photographische Platte wurde ein Stück Calcium mit der polierten Fläche aufgelegt, mit einem Trichter bedeckt und durch den Trichter, um die Oxydation des Metalles zu verhüten, ein langsamer Strom von wohlgetrockneter Kohlensäure geleitet. Nach zehn Stunden wurde die Platte entwickelt. Es erschien auf der Platte ein runder, der Öffnung des Trichters entsprechender dunkler Fleck, in dessen Mitte, dort wo das Calciumstück auflag, ein heller, den Conturen des Metallstückes entsprechender weisser Fleck sich zeigte. Auf denjenigen Theilen der Platte, welche vom Trichter nicht bedeckt waren, war keine Wirkung wahrzunehmen. Aus diesem Versuch geht hervor, dass das Calcium auf die Platte wirkungslos war; hingegen schien die Kohlensäure einzuwirken. Diese Erscheinung liesse sich entweder dadurch erklären, dass der Trichter, mit welchem das Calciumstück bedeckt war, nachdem er früher dem Tageslicht ausgesetzt war, phosphorescierte und dadurch die Wirkung hervorrief, oder dass die Kohlensäure selbst oder die Spuren Unreinigkeiten, die sie enthielt (sie wurde aus Marmor entwickelt), oder schliesslich die Produkte der Einwirkung der Kohlensäure auf das schwarze Papier die beobachtete Wirkung hervorbrachte. Die Wirkung kann indessen einer Phosphorescenz kaum zugeschrieben werden, denn dann hätte sie sich, wenigstens theilweise, auch ausserhalb des Trichters zeigen müssen. Schreibt man die Wirkung der Kohlensäure zu, so scheint es a priori ausgeschlossen, dass die Wirkung durch irgend welche Strahlen, welche durch die Kohlensäure emittiert würden, herrühre. Wenn Gase überhaupt auf die photographische Platte wirken, so kann diese Wirkung kaum eine andere als eine chemische sein. Da, nach meinem Wissem, die Frage über die Wirkung der Gase auf die photographische Platte kaum untersucht ist, habe ich beschlossen, die im Folgenden beschriebenen Versuche anzustellen.

2. Auf eine in schwarzes Papier gehüllte photographische

Platte * wurde ein Trichter gestülpt, durch dessen Röhre ein Wasserstoffstrom geleitet wurde. Das Gas war durch eine Waschflasche, dann durch eine mit Knpfersulfatlösung getränkte Bimssteinstücke enthaltende Röhre geleitet und schliesslich mit Chlorcalcium getrocknet. Nach 10 Stunden wurde die Platte entwickelt, wobei auf der Platte ein kreisförmiger, der Trichteröffnung entsprechender schwarzer Fleck erschien.

3. Es wurde eine photographische Platte, welche auf einem kleinen, aus Glasstäbchen verfertigten Dreifuss lag, unter eine Glasglocke gestellt, deren Öffnung mit reinem destillierten Wasser verschlossen war. Auf der sensiblen Seite der Platte lag ein kleines, sehr dünnes, dreieckiges Glimmerblättchen. Durch den Tubus der Glocke wurde dieselbe mit reinem Wasserstoff gefüllt und das ganze 10 Stunden lang stehen gelassen. Beim Entwickeln schwärzte sich die ganze Platte sehr intensiv, aber die Stelle, wo das Glimmerblättchen lag, blieb weiss; die weisse Stelle war nicht scharf begrenzt, sondern die Schwärzung erstreckte sich verschwommen gegen das Innere des Dreieckes, dessen Mitte vollkommen weiss blieb.

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass feuchter Wasserstoff energischer wirkt als trockener; ferner, dass die Wirkung der Lichtwirkung ähnlich ist, indem der Wasserstoff das Bromsilber, ebenso wie das Licht, zur leichten Reducierbarkeit disponiert. Die Wirkung scheint in der Berührung des Bromsilbers und Wasserstoffs zu bestehen und nicht durch vom Wasserstoff ausgesandte Strahlen hervorgerufen zu sein. Das beweist schon der Umstand, dass die Wirkung des Wasserstoffs auch unter der Glimmerplatte, nahe zu den Rändern sich noch zeigte, was kaum denkbar ist, wenn man annimmt, dass die Wirkung von irgend einer Strahlung herrühre.

4. Mit demselben Apparat wurde ein Versuch mit reinem, aus Ammoniumnitrit dargestellten Stickstoff gemacht. Die Platte zeigte nach dem Entwickeln eine schwache, aber deutlich wahr-

---

* Ich benutzte zu meinen Versuchen ausschliesslich Dr. SCHLEUSSNER'sche Platten. Die Versuche wurden selbstverständlich im Dunkelzimmer ausgeführt.

nehmbare Wirkung. Die Stelle, wo ein dünnes Glassblättchen lag, zeigte keine Wirkung.

5. Derselbe Versuch wurde mit Aethylen gemacht. Die Platte zeigte nach dem Entwickeln eine starke Wirkung des Gases. Auch in diesem Falle blieb die mit einer kleinen, dünnen Glasplatte bedeckt gewesene Stelle unverändert, jedoch zeigte es sich auch hier wie in Versuch 2, dass der negative Schatten der Platte nicht scharf begrenzt war.

6. Das Resultat war dasselbe, wenn statt Aethylen Methan einwirkte, nur war die Wirkung in diesem Falle etwas schwächer.

7. Reines Kohlenoxyd verhielt sich wie Wasserstoff und Aethylen, aber die Wirkung war noch intensiver als die der anderen Gase.

Aus diesen Ergebnissen muss der Schluss gezogen werden, dass die reducierenden Gase viel energischer wirken, als die in dieser Hinsicht indifferente Kohlensäure und der Stickstoff. Um die Richtigkeit dieses Schlusses zu prüfen, wurden jetzt einige Versuche mit oxydierenden Gasen angestellt.

8. Mit derselben Versuchsanordnung wurde vorerst Sauerstoff geprüft. Nachdem die photographische Platte 10—12 St. mit Sauerstoff gestanden hatte, wurde die Platte entwickelt, ohne die geringste Spur einer Wirkung zu zeigen.

9. Dasselbe Resultat erhielt ich mit sogenanntem Stickoxyd. Das Gas corrodierte die Gelatineschicht, aber die Platte liess beim Entwickeln nicht die geringste Spur einer anderweitigen Wirkung wahrnehmen.

Die in den beschriebenen Versuchen erzielten Resultate liessen voraussehen, dass die schwache Wirkung der Kohlensäure und des Stickstoffs (vgl. Versuche 1 und 4) von einer Spur Verunreinigung herrühre. Es wurden daher die Versuche wiederholt.

10. Die Kohlensäure wurde aus reinem Natriumhydrocarbonat entwickelt und das Gas, nachdem es eine mit Natriumcarbonatlösung beschickte Waschflasche durchsetzt hatte, durch eine ungefähr 50 cm lange PETTENKOFER'sche Röhre geleitet, die eine mit verdünnter Schwefelsäure angesäuerte Lösung von Kaliumpermanganat enthielt. Die so dargestellte Kohlensäure

zeigte nach 15 Stunden keine Spur einer Einwirkung auf die photographische Platte.

11. Reiner, durch Kaliumpermanganat geleiteter Stickstoff war ebenfalls vollkommen wirkungslos.

Aus den aufgeführten Versuchen folgt mit Bestimmtheit, dass auf die photographische Platte die reducierenden Gase wirken, hingegen die indifferenten oder gar oxydierenden wirkungslos sind.

Nun ist es die Frage, ob die beobachtete Wirkung eine einfache Reduction ist, oder eine solche, infolge deren das Silberbromid durch die gewöhnlichen Entwickler leicht reducierbar wird. Einer gewöhnlichen Reduction widerspricht der Umstand, dass die Platte während der Einwirkung der Gase sich nicht schwärzt, sondern nur dann, wenn sie in einen Entwickler gelegt wird. Bestände ferner die Wirkung der Gase in einer einfachen Reduction, so müssten die Gase das auf die Platte aufgenommene latente Bild in dem Sinne wie die Entwickler hervorrufen. Das findet aber nicht statt.

12. Auf eine Platte wurde die Aussicht aus dem einen Fenster des Institutes aufgenommen und dann auf diese Platte eine Glasplatte gelegt, sodass das latente Bild durch die Glasplatte theilweise verdeckt war. Nun wurde das Ganze während 15 Stunden der Einwirkung von reinem, feuchten Wasserstoff ausgesetzt. Die Platte zeigte nach dieser Zeit keine merkliche Veränderung; nicht die kleinste Spur des latenten Bildes war hervorgekommen. Nun wurde die Platte mit Pyroentwickler in gewöhnlicher Weise entwickelt, wobei es sich zeigte, dass der der Einwirkung des Wasserstoffs ausgesetzt gewesene Theil der Platte sich ganz schwärzte, ohne eine Spur des aufgenommenen Bildes sehen zu lassen; der Theil der Platte hingegen, welcher durch eine Glasplatte vor der Wirkung des Wasserstoffs geschützt war, schwärzte sich nicht, dort entwickelte sich das Negativ in gewöhnlicher Weise. Der Wasserstoff scheint also auf das Silberbromid eine ähnliche Wirkung auszuüben wie das Licht, denn die beschriebene Wirkung ist identisch mit jener, welche das Bild hervorruft. Bedeckt man nämlich die photographische Platte, auf welche ein Bild aufgenommen wurde, zum Theil lichtdicht und exponiert die

Platte dem Tageslicht, so wird die Platte dort, wo sie das Licht traf, bekannterweise schwarz, ohne ein Bild zu zeigen; dort, wo sie verdeckt war, entwickelt sich das Negativ.

Nachdem die Wirkung des Wasserstoffs durch die obigen Versuche festgestellt war, lag der Gedanke nahe, dass die von mehreren Forschern beobachtete Wirkung der Metalle möglicherweise auch auf den Wasserstoff zurückzuführen sei; es ist ja bekannt, dass Zink und Magnesium mit kohlensaurem Wasser Wasserstoff ziemlich lebhaft entwickeln. Ich wiederholte vor allem H. PELLAT's Versuch und erhielt dasselbe Resultat wie er, wenn die polierte Oberfläche des Zinkstückes von der Gelatineschicht der Platte 1—2 mm entfernt war; es blieb aber die Wirkung aus, wenn das Zink von der Schicht 2—3 cm entfernt war. Das beweist, dass vom Zink Strahlen, welche auf die Platte wirken, nicht emittiert werden, denn es ist nicht vorauszusetzen, dass Strahlen, welche ein Luftschicht von 1—2 mm Dicke leicht durchsetzen, von 2—3 cm dicken Schichten völlig absorbiert würden. Die Wirkung des Zinkes rührt demzufolge entweder von den Dämpfen des Metalles her, wie PELLAT und RUSSEL annehmen, oder von der kleinen Menge des vom Zink in feuchter Luft entwickelten Wasserstoffs, wie ich es vermuthete.

13. Um die Frage experimentell zu entscheiden, wurde eine photographische Platte, um sie völlig zu trocknen, circa 24 Stunden unter einer Glocke mit Phosphorpentoxyd stehen gelassen. Der Platte gegenüber wurde 1—2 mm entfernt das blanke Zinkstück aufgestellt und das Ganze unter eine Glasglocke gebracht, welche mit sorgfältig getrockneter und von Kohlensäure befreiter Luft gefüllt wurde. Als nach 16 Stunden nun die Platte entwickelt wurde, *zeigte sich nicht die geringste Spur einer Wirkung.* Wurde der Versuch mit feuchter, aber kohlensäurefreier Luft wiederholt, so war eine schwache Wirkung wahrzunehmen; wurde aber die Glocke, welche Platte und Zink enthielt, mit feuchter Kohlensäure gefüllt, *so war die Wirkung eine überaus intensive.* Auch diese Wirkung blieb aus, wenn das Zink von der Gelatineschicht 2—3 cm entfernt war. Die Wirkung des Zinkes zeigte sich auf der Platte an denjenigen Stellen am intensivsten, welche den Rändern und Ecken der polierten Zinkfläche entsprachen und gerade diese Stellen

der Zinkfläche waren am stärksten angegriffen; sie waren mit weissem basischen Zinkcarbonat bedeckt.

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass Zink in reiner, trockner und kohlensäurefreier Luft gar nicht wirkt; in feuchter Kohlensäure auch nur dann, wenn die Zinkfläche der Gelatineschicht hinreichend nahe liegt. Ist nämlich die Zinkfläche von der sensiblen Schicht entfernt, so kommt der an der Zinkfläche entwickelte Wasserstoff mit der Gelatineschicht nicht in Berührung und die Wirkung bleibt aus.

14. Stellt man Zink und photographische Platte einander gegenüber und setzt das Ganze unter eine Glasglocke, wo eine kleine Porzellanschale mit rauchender Salzsäure steht, so erhält man in 1—2 Stunden eine sehr intensive Wirkung.

Ähnliche Versuche wurden mit Magnesium, Cadmium, Aluminium, Kupfer und Quecksilber angestellt. Die drei erstgenannten Metalle sind auf die photographische Platte ohne Wirkung, wenn die Platte und die Luft trocken und letztere auch kohlensäurefrei ist; im entgegengesetzten Falle ist aber die Wirkung eine intensive; Kupfer und Quecksilber blieben wirkungslos, gleichviel ob der Versuch in trockener Luft oder in feuchter Kohlensäure angestellt war. Enthält aber das Quecksilber eine Spur von Zink oder Natrium, so wird es wirksam.

15. Ausgeglühtes Palladiumblech ist ohne Wirkung, ein mit Wasserstoff beladenes wirkt intensiv auf die photographische Platte.

Dem Wasserstoff ähnlich wirken auch andere reducierende Gase und Dämpfe.

Das Wesen der Wirkung des Wasserstoffs auf die Bromsilbergelatine zu ergründen, ist mir nicht gelungen. Es wird allgemein angenommen, dass die Wirkung des Lichtes auf die Bromsilbergelatine darin besteht, dass das Bromsilber in Silbersubbromid verwandelt wird, welches durch die gebräuchlichen Entwickler leicht reduciert wird. Da zwischen der Wirkung des Wasserstoffs und des Lichtes eine so grosse Analogie besteht, nahm ich an, dass die Wirkung im Sinne der Gleichung stattfindet

$$2AgBr + H = Ag_2Br + HBr$$

Um die Richtigkeit meiner Voraussetzung zu prüfen, wurde an eine kleine Glaskugel eine capillare Röhre angeblasen und letztere mit einer Millimetertheilung versehen. Der Apparat wurde sehr sorgfältig calibriert; das ganze Volumen desselben beträgt 39,31 cm^3 und an der Capillarröhre lassen sich noch 0,002 cm^3 ablesen. In die Kugel wurden ein bis zwei Tropfen Wasser und einige Gramm Bromsilbergelatine, welche von einer Platte abgelöst war, gebracht, und der Apparat mit reinem feuchten Wasserstoff gefüllt, während die Capillarröhre unter Quecksilber tauchte, Nachdem das Gasleitungsrohr abgeschmolzen war, wurde der Apparat im Dunkelzimmer mehrere Tage stehen gelassen und das Gasvolumen täglich bei rothem Lichte abgelesen. Ich bemerke noch, dass die die Bromsilbergelatine enthaltene Kugel in schwarzes Tuch lichtdicht eingehüllt war. Die abgelesenen und auf 0° und 760 mm reducierten Volumina sind

I. 34, 49; 34, 40; 34, 54; 34, 54; 34, 54
II. 34, 37; 34, 37; 34, 38.

Wenn wir annehmen, dass durch die Einwirkung des Wasserstoffs Silbersubbromid entsteht, so würden 0,001 g Silber 0,05 cm^3 Wasserstoff entsprechen. In einer zu den obigen Versuchen benutzten Bromsilbergelatine habe ich nach der Beendigung des Versuches das durch den Pyroentwickler reducierte Silber bestimmt. Die Bromsilbergelatine wurde auf übliche Weise entwickelt, sorgfältig ausgewaschen und mit Natriumthiosulfat (Fixiernatron) übergossen. Das Fixieren mit Natriumthiosulfat wurde dreimal wiederholt, um das unveränderte Bromsilber vollständig zu entfernen. Nun wurde gut ausgewaschen, die Gelatine in viel warmem Wasser gelöst und vom ausgeschiedenen Silber abfiltriert. Das Silber wurde mit Königswasser, dem etwas Kaliumchlorat zugesetzt war, in Silberchlorid verwandelt und gewogen. Aus dem Gewichte des Chlorsilbers ergab sich das Gewicht des reducierten Silbers zu 0,0112 gr; diesem würden nach obiger Voraussetzung 0,58 cm^3 Wasserstoff entsprechen. Man sieht, dass diese Menge grösser ist, als dass sie der Beobachtung hätte entgehen können. Die Bromsilbergelatine absorbiert also Wasserstoff nicht in einem solchen Maasse, dass man daraus die Reduction des Bromsilbers folgern könnte. Würde die Wirkung des Wasserstoffs in einer Reduction bestehen, so müsste sich Bromwasserstoff bilden; die Bildung dieses Körpers nachzuweisen ist mir nicht gelungen, obwohl ich in dieser Richtung viele Versuche unter verschiedenen Vesuchsbedingungen anstellte.

Versuche, das Silbersubbromid darzustellen, schlugen fehl. Es mag nur die eine Beobachtung erwähnt werden, dass frisch dargestelltes Silberbromid mit Silberoxydammoniaklösung sich insofern nicht verändert, dass es vom Pyroentwickler nicht reduciert wird; übergiesst man hingegen eine Bromsilbergelatineplatte mit Silberoxydammoniaklösung und wäscht sie nach einigen Minuten gut aus, so schwärzt sich die Platte, wenn man sie mit einem Entwickler übergiesst. Es scheint also, dass das Bromsilber in der Gelatine in einem anderen Zustande enthalten ist als in dem gewöhnlichen, ausgefällten Niederschlag.

Das *Resultat* meiner Untersuchung lässt sich im Folgenden zusammenfassen:

Die leicht oxydierbaren Gase wirken auf die Bromsilbergelatine ähnlich wie das Licht, indem sie das Bromsilber in eine durch die gebräuchlichen Entwickler leicht reducierbare Modification überführen.

Die Wirkung der Metalle auf die Bromsilbergelatine besteht darin, dass sie aus der Feuchtigkeit der Luft Wasserstoff entwickeln, welch letzterer die eigentliche Wirkung ausübt. Sind die Bedingungen zur Wasserstoffentwickelung nicht vorhanden, so bleibt auch die Wirkung aus. Daraus geht hervor, dass die Wirkung weder durch Metalldämpfe, noch durch irgend eine andere Strahlung hervorgebracht wird. Ausnahme bilden die Uran- und Thorverbindungen, für welche H. Becquerel bez. G. C. Schmidt die eigenartige Strahlung nachgewiesen haben.

13.

THEORIE DER ELEKTROLYSE.

Von Prof. ALOIS SCHULLER,

ord. Mitglied der ungar. Akademie der Wissenschaften.

Aus den «Naturwissenschaftlichen Mittheilungen. Ergänzungsheft.»
(Természettud. Közlöny. Pótfüzetek) 31. Band 2. Heft.

1. Im folgenden ist der Versuch gemacht, die Erscheinungen der Elektrolyse ohne Zuhülfenahme der elektrolytischen Dissociation zu erklären. Den Ausgangspunkt bildet die Annahme, dass die Atome in elektrischer Hinsicht im wesentlichen dieselben Eigenschaften besitzen, wie gewöhnliche Körper, dass also letztere die Eigenschaften ihrer Grundelemente veranschaulichen.

2. Es ist bekannt, dass bei der Berührung verschiedenartiger Körper Elektricität entsteht, deren grösster Theil an den Berührungsstellen verdichtet ist, während ein kleiner Theil an den übrigen Theilen der Oberfläche erscheint und auch im äusseren Raume eine merkliche Wirkung ausübt. Nennt man den letzteren Theil, welcher die Potentialdifferenz verursacht, freie Elektricität, so besteht die gesammte Elektricität aus freier und condensatorisch gebundener. Ebensolche Elektricitäten setze ich bei der Berührung der Atome verschiedenartiger Körper voraus. Ich nehme ferner an, dass zwischen den Atomen eines und desselben chemischen Elementes *keine* elektrische Differenz besteht. Wenn also die Atome eines Elementes an die Materie gebundene Elektricität enthalten, so ist diese bei allen Atomen gleichartig, die Electricitäten der sich berührenden Atome verdichten sich also nicht, im Gegentheile sie stossen einander ab.

3. Aus dieser Auffassung folgt zunächst, dass chemische Verbindungen unter gewissen Bedingungen vom elektrischen Strome

zersetzt werden können. Gelingt es nämlich z. B. im Chlorkalium-Molekul zum K genügende negative, zum Cl positive Elektricität zu leiten, so verschwindet die elektrische Anziehung und bleibt nur die Anziehung der ponderablen Massen; ist letztere grösser bei den gleichartigen Atomen, so zerfällt die Verbindung in ihre Bestandtheile. Ebenso folgt aus dieser Auffassung, dass chemische Elemente durch den elektrischen *Strom* nicht in ihre Atome zerlegt werden können, wenn sie nicht Gelegenheit haben mit Atomen anderer Art Verbindungen einzugehen. Hingegen können *gleichartige* Ladungen diese Zerlegung bewirken. Wenn nämlich z. B. Sauerstoffmolekule starke elektrische Ladungen erhalten, so können die Atome in Folge der gegenseitigen Abstossung von einander lossgerissen werden. Die freien Atome können dann mit anderen Molekülen, besonders wenn diese vorübergehend eine entgegengesetzte Ladung besitzen, neue Verbindungen eingehen. Dies mag der Vorgang im Ozon-Entwicklungsapparate sein, und ähnliches kann sich auch bei der Entstehung von Kathodenstrahlen zutragen. In derselben Weise können auch chemische Verbindundungen durch einseitige Ladungen zerlegt werden, und dieser Vorgang ist von der Elektrolyse wohl zu unterscheiden, da in diesem Falle die Gültigkeit der elektrolytischen Gesetze von FARADAY nicht nachgewiesen ist.

4. Unserer Annahme gemäss sind die Moleküle der chemischen Verbindungen in Folge der sogenannten freien Elektricitäten *polarisiert*, ähnlich wie man sich Elementarmagnete vorzustellen pflegt. Derlei polare Moleküle können einander gegenüber nicht indifferent sein, dieselben werden sich vielmehr zu grösseren, zusammengesetzten Molekülen vereinigen. So z. B. können sich zwei Moleküle in verkehrter Lage, wie $\frac{KCl}{ClK}$ zum Theile neutralisieren, ohne dass dadurch die freien Elektricitäten der Atome ganz verschwinden würden. So entstandene Molekülcomplexe können symmetrisch sein, und sind dann wegen Mangel an Polarität der Elektrolyse nicht unterworfen, ausser wenn sehr starke Kräfte wirken. Diese Auffassung macht es verständlich, wesshalb die Körper mit einerlei Molekülen, wie das Wasser, die wasserfreie Salzsäure u. s. w. den elektrischen Strom fast gar nicht leiten.

Erst wenn ein Theil der Moleküle bei hoher Temperatur in Folge der heftigen Zusammenstösse in einfache Moleküle gespalten ist, treten entschieden polare Moleküle auf, wie $+ \overset{+}{K}\overset{-}{Cl} -$ im geschmolzenen Chlorkalium, und erst dann beginnt die Elektrolyse. Die polaren Moleküle werden sich nämlich von den freien Elektricitäten der Elektroden gerichtet, kettenartig in Reihen gruppieren, wie die folgende:

$$- \underset{+\;-}{KCl}, \underset{+\;-}{KCl}, \underset{+\;-}{KCl} +$$

und die Moleküle werden ihre, der Drehung entsprechenden Schwingungen um die neue Ruhelage vollführen. Ohne der hier vorausgesetzten Polarität der Moleküle ist die Elektrolyse nicht denkbar. Denn die von aussen zugeführten Elektricitäten können die Elektricitäten der Jonen nur dann neutralisieren, wenn die positive Elektricität blos dem negativen Jon, die negative bloss dem positiven Jon zugeführt wird. Eine Ausnahme bilden sehr starke gleichnamige Ladungen der Atome im Molekül, welche im Falle der Elektrolyse in Folge des stetigen Verbrauches der zugeleiteten Elektricität von selbst entfallen, und welche im Falle der elektrischen Leitung nur bei äusserst plötzlichen Ladungen denkbar sind.

Ist die vorher dargestellte Verkettung der Moleküle eingetreten, so wird die darauf folgende Wirkung der zugeleiteten Elektricität darin bestehen, dass Elektricität aus den Elektroden in die nächstliegenden Moleküle eintritt, wobei die betreffenden Atome vorerst nur einen Theil ihrer Elektricität verlieren, daher ihren Verband im Molekül noch nicht lösen. Dieser Zustand dürfte der elektrischen Polarisation entsprechen, welche übrigens auch aus thatsächlich abgeschiedenen Produkten erklärt werden kann. Sollen die elektrolytischen Gesetze auch für die Polarisation gelten, so muss man von der letzteren Annahme ausgehen.

5. Die eigentliche Elektrolyse wird z. B. beim geschmolzenen Chlorkalium den folgenden Verlauf nehmen. Jene *K*-Atome, welche die Kathode berühren, verlieren ihre positive Ladung, werden eventuell sogar negativ geladen. Dadurch entfällt die elektrische Anziehung von Seite des negativ geladenen *Cl*-Atoms, das letztere wird also von der Kathode abgestossen. Inzwischen wird

an der Kathode ein neutrales oder unbedeutend negativ geladenes K-Atom frei, ebenso wird an der Anode ein Cl-Atom frei. Dadurch entsteht die folgende Kette, welche der Einfachheit wegen die abgeschiedenen Produkte nicht enthält.

$$- \ \overset{-}{Cl},\ \underset{+\ -}{KCl},\ \underset{+\ -}{KCl},\ \overset{+}{K}.\ +$$

Die oberen Zeichen beziehen sich auf die starken Ladungen der aus ihren Verbindungen stammenden Atome, die unteren bezeichnen die verhältnissmässig geringe sog. freie Elektricität der Atome im Molekül.

Würden sich die extremen Glieder $\overset{-}{Cl}$ und $\overset{+}{K}$ unmittelbar berühren, so müssten sie sich offenbar unter Wärmeentwicklung zu neutralem KCl vereinigen. Wesentlich dieselbe Umwandlung erfolgt, wenn sich das erste Cl dem nächstliegenden K gesellt und zugleich das zweite Cl in Freiheit setzt, während gleichzeitig das letzte K sich mit dem letzten Cl verbindet und das vorletzte K verdrängt. Diese Umlagerung erfordert keinen Energieverbrauch, dieselbe kann sogar von einer geringen Wärmeentwicklung begleitet sein, insofern sie auch von dem Potential-Gefälle befördert wird. Nach erfolgter Umlagerung wäre die Reihenfolge:

$$- \ \underset{-\ +}{ClK},\ \overset{-}{Cl},\ \overset{+}{K},\ \underset{-\ +}{ClK}\ +$$

und es würden in dem betrachteten Falle die freien Atome $\overset{-}{Cl}$ und $\overset{+}{K}$ in unmittelbare Nähe gelangen, dieselben würden sich also sofort verbinden. Es entstände dann die Kette

$$- \ \underset{-\ +}{ClK},\ \underset{-\ +}{ClK},\ \underset{-\ +}{ClK}\ +$$

deren Glieder unter dem Einflusse der Elektricität der Elektroden alsbald wieder umgedreht würden, da jedes folgende Molekül von dem vorhergehenden (oder von dem darauf folgenden) orientiert wird. In der so entstandenen Kette wiederholt sich derselbe Vorgang mit dem einzigen Unterschiede, dass die Kette jetzt um ein KCl weniger enthält. Die an den Elektroden sich ansammelnden, von ihren Ladungen befreiten K-Atome einerseits, sowie die

Cl-Atome andererseits, können sich ungehindert zu Molekülen vereinigen.

6. Die im Vorhergehenden vorausgesetzte Drehung der Moleküle ist gleichwerthig mit der entgegengesetzten Wanderung der Jonen; das Resultat wäre offenbar dasselbe, wenn die von den Elektroden abgestossenen Jonen zur gegenüberliegenden Elektrode wandern würden. Die Geschwindigkeit der Jonen wird im Allgemeinen voraussichtlich verschieden sein, denn die Drehung wird wohl um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Moleküls erfolgen, der grösseren Masse entspräche dann eine kleinere Verschiebung und umgekehrt. Nach Kohlrauch ist die Leitungsfähigkeit verdünnter Lösungen der Summe der Jonen-Geschwindigkeiten proportional, es ist also bei der Elektrolyse die *relative* Verschiebung der Jonen massgebend. Letztere ist in dem betrachteten Falle gleich der doppelten Entfernung zwischen den Atomen des Moleküls, denn um diesen Betrag verschieben sich die Schwerpunkte der Atome gegen einander, während sich das Molekül um den gemeinsamen Schwerpunkt in die entgegengesetzte Lage dreht.

7. Unsere Theorie macht es verständlich, weshalb die elektrolytische Leitung fast ausschliesslich an den flüssigen Aggregatzustand gebunden ist. Aus diesem Gesichtspunkte kann man sich nämlich von den Aggregatzuständen das folgende Bild entwerfen. In festem Zustande sind grössere Molekülkomplexe vorhanden, deren Form wahrscheinlich dem Krystallsystem des Stoffes entspricht. Solange diese Moleküle zusammengedrängt sind, können sie wohl dem Wärmezustande entsprechende Bewegungen ausführen, aber sie können sich im Allgemeinen nicht frei drehen. Bei einer gewissen Temperatur nun entfernen sich die Moleküle von einander dermassen, oder sie zerfallen in so kleine Aggregate, dass sie sich durchschnittlich ohne Zusammenstösse frei drehen können, es erscheint dann der flüssige Zustand, den ja die Beweglichkeit der Theilchen vom festem Zustande unterscheidet. Nach dieser Auffassung wäre die Beweglichkeit der Flüssigkeiten auf die *Drehbarkeit* der Moleküle zurückgeführt. Im Gaszustande sind die Moleküle noch einfacher, ihre Entfernung ist noch grösser, sie können sich also noch freier bewegen, desshalb ist ihre Bewegung hauptsächlich eine fortschreitende.

Nach dem Erörterten sollte man meinen, Gase müssten die Elektricität leiten, sie müssten also elektrolysierbar sein, was aber nur in geringem Grade der Fall ist. Dieses Verhalten erklärt sich folgendermassen: Nach dem von § 5 Entwickelten setzt die Elektrolyse eine gewisse Verkettung der Moleküle voraus, derart, dass Atome mit entgegengesetzter Elektricität sich nebeneinander lagern. Dies ist bei den Gasen in Folge der grossen Entfernung der Moleküle und auch wegen der grossen Geschwindigkeit der Theilchen selten zu erwarten, die Elektrolyse ist daher sehr erschwert.

Wir müssen noch zum festen Zustande zurückkehren. Die Moleküle können sich hier, wie erwähnt, im *Allgemeinen* nicht frei herumdrehen, wodurch die Elektrolyse im Allgemeinen ausgeschlossen ist. Indessen werden sich bei höherer Temperatur, namentlich in der Nähe des Schmelzpunktes, auch drehbare Moleküle finden, namentlich wenn sich die umgebenden Moleküle, welche sich ohnehin schon fast in der erforderlichen Entfernung befinden, von dem betrachteten Molekül in Folge der Wärmebewegung *gleichzeitig* entfernen. In dem Masse, als die Drehbarkeit der Moleküle zunimmt, steigert sich die elektrische Leitung, vorausgesetzt natürlich, dass es sich um polare Moleküle handelt.

8. Wie schon erwähnt, werden die Atome der chemischen Elemente nicht von elektrischen Kräften zusammengehalten, es müssen also der allgemeinen Gravitation entsprechende Kräfte vorausgesetzt werden. Solche Kräfte wirken auch zwischen ungleichartigen Atomen, das Molekül KCl halten also nicht nur die überwiegenden elektrischen Kräfte zusammen, sondern überdies noch die Massen-Anziehung. Letztere befolgt bei den Atomen und Molekülen naturgemäss ein kompliciertes Gesetz; denn während sich das Molekül B von dem Moleküle A entfernt, nähert es sich den umgebenden Molekülen; war also ursprünglich die Anziehung von Seite des A überwiegend, so überwiegen später die übrigen. Als erste Annäherung kann man aber annehmen, die Anziehung zweier Atome sei dem Produkte der Massen proportional, was natürlich nur bei gleichem Abstande zutreffen würde.

Aus dieser Annahme kann man schliessen, dass die Massen-Anziehung an und für sich, in Abwesenheit von elektrischen Kräften, nicht selten die Bildung der elementaren Moleküle befördert.

In diesem Falle haben wir es mit zwei entgegengesetzten Bestrebungen zu thun: der elektrische Unterschied begünstigt die Vereinigung, die Gravitation hingegen die Trennung verschiedenartiger Atome. So ist z. B. bei der Salzsäure das Produkt der Massen abgerundet 1×35, also bei zwei Molekülen 70. Bei den aus zwei HCl — Molekülen stammenden Bestandtheilen liefert das Produkt für H_2: 1×1, für Cl_2: $35 \times 35 = 1225$. Die Bildung des Cl-Moleküles für sich erfolgt schon unter einer viel grösseren Kraft, als die Bildung des HCl-Moleküles. Daraus erklärt sich, dass sich die Salzsäure sofort zersetzt, sobald die elektrische Anziehung ihrer Bestandtheile verschwindet. Diese Folgerung beruht auf der Verschiedenheit der Atomgewichte und man sieht, dass wenn unsere Auffassung richtig ist, die Massen-Attraction eine Zersetzung um so mehr begünstigt, je verschiedener die Atomgewichte sind.

Es verdient ausdrücklich erwähnt zu werden, dass nach der hier vertretenen Auffassung die Wirkung des elektrischen Stromes sich bloss darauf beschränkt, die elektrische Anziehung der Atome zu vernichten, dass also die eigentliche Zersetzung, d. i. die Bildung elementarer Moleküle nur der Massen-Anziehung zuzuschreiben ist. Mit anderen Worten: bei den der Elektrolyse unterworfenen Körpern hat der elektrische Strom bloss elektrische Kräfte zu überwinden.

9. In den Molekülen der chemischen Verbindungen können elektrische Kräfte nur zwischen verschiedenartigen Atomen vorausgesetzt werden: zwischen gleichartigen Atomen kann eine Anziehung nur von der Massen-Attraction herrühren. So würden im Moleküle der schwefligen Säure elektrische Kräfte nur zwischen S und den beiden O vorkommen, zwischen den beiden O aber nur die Massen-Anziehung. Dieses zugegeben, erkennt man leicht, dass die chemische Vereinigung nicht nur von dem ziemlich geringen elektrischen Unterschiede, sondern auch von der Massenanziehung begünstigt wird. Denn im Molekül SO_2 kommen die folgenden Massen-Anziehungen vor: zwischen S und den beiden O mit dem Produkt $32 \times 16 \times 2$, oder 16×64, dann zwischen O und O mit dem Produkt 16×16; im ganzen also 16×80. Für zwei Moleküle ist der doppelte Betrag, also 16×160 in Rechnung zu ziehen. Bei den aus $2SO_2$ resultierenden elementaren Mo-

lekülen S_2 und $2O_2$ wären die betreffenden Produkte 32×32 und 2×16×16, also zusammen 16×96. Die Massenanziehung wäre also im SO_2 Molekül bedeutend grösser, als in den Bestandtheilen. Die auf die Verbindung bezügliche Zahl 16×160 dürfte zu hoch angeschlagen sein, denn die beiden O-Atome sind wahrscheinlich auf verschiedenen Seiten des S (OSO). Unsere Folgerung bleibt aber im wesentlichen auch dann noch richtig, wenn man die Anziehung zwischen den beiden O (Produkt 16×16) im SO_2-Molekül vollkommen vernachlässigt. Danach ist nicht zu erwarten, dass reine schweflige Säure elektrolytisch zersetzt werden könnte, da ja die Massen-Anziehung die chemische Verbindung aufrecht erhalten würde, wenn auch die elektrischen Kräfte fehlen würden.

10. Es ist sehr schwierig, die Massen-Anziehung der Atome zu schätzen, da die Kräfte wesentlich von der Struktur der Moleküle abhängen. Denn zwischenliegende Atome sind entgegengesetzten Kräften ausgesetzt, und es sind, wie bei den Capillarerscheinungen, hauptsächlich die an der Grenze befindlichen Atome massgebend. Man kann sich aber dennoch aus dem vorangeschickten einen Begriff davon machen, wodurch die Zahl der Atome im Molekül bestimmt wird.

Bei sehr niederer Temperatur, etwa in der Nähe des absoluten Nullpunktes, ist die Bewegung der Moleküle verhältnissmässig langsam, die Moleküle können also aus zahlreichen Atomen, resp. aus mehrfachen Molekülen bestehen, welche aber von Kräften zusammengehalten werden, die nicht wesentlich grösser sind, als bei einfacheren Molekülen. Mit steigender Temperatur werden die Zusammenstösse der Moleküle immer heftiger, die Moleküle zerfallen also in eine grössere Zahl von einfacheren Molekülen, welche die Zusammenstösse ohne weiteren Zerfall vertragen können, da sich die Energie auf kleinere Massen vertheilt. Einer constanten Temperatur entspricht bei gleichem, zur Verfügung stehenden Volumen eine gewisse mittlere Zahl der Atome im Molekül, wobei es aber im allgemeinen sowohl grössere, als auch kleinere Moleküle giebt, welche ihre Zusammensetzung während der Zusammenstösse fortwährend ändern.

Diese gleichzeitig vorhandenen verschiedenen Moleküle würden so manche Eigenschaft der Körper erklärlich machen, unter anderem auch die verschiedenen einfachen Lichtarten im Spectrum. Bei fortwährend gesteigerter Temperatur wären die Moleküle immer weniger zusammengesetzt, bis sie schliesslich aus einfachen Atomen bestehen würden, wie man bekanntlich bei manchen Dämpfen anzunehmen gezwungen ist.

11. Betrachtet man nun die Elektrolyse der wässerigen Lösungen, so fällt zunächst die Thatsache auf, dass bei gewöhnlicher Temperatur weder das Wasser für sich, noch das gelöste Salz allein den elektrischen Strom leitet, wie ja im allgemeinen Körper mit nur einerlei Molekülen bei gewöhnlicher Temperatur schlechte Leiter sind. Bloss die aus verschiedenartigen Molekülen bestehenden Lösungen und insbesondere die wässerigen Lösungen erwiesen sich als verhälltnissmässig gute Leiter. Offenbar spielen die Moleküle des Lösungsmittels ebenso, wie die des Salzes eine wesentliche Rolle, aber beide nur in Verbindung mit einander.

Dass reines Wasser den elektrischen Strom schlecht leitet, kann nicht nur aus der Symmetrie der zusammengesetzten Moleküle (Siehe 4), sondern auch aus dem symmetrischen Bau der einzelnen Moleküle erklärt werden. Bedenkt man nämlich, dass im Wassermolekül die beiden H-Atome höchst wahrscheinlich zu beiden Seiten des O gelagert sind, dass also die räumliche Anordnung der Gruppe HOH entspricht, so ist klar, dass hier keine Spur einer Polarität vorhanden ist. Die negative Elektrode wird beide H mit gleicher Kraft anziehen, es ist also eine Verkettung der Moleküle, wie sie unter 4 behandelt wurde, beim Wasser nicht zu erwarten.

Die Symmetrie verschwindet aber sofort, sobald sich das Wassermolekül mit einem anderen, nicht symmetrischen Molekül, wie KCl vereinigt, und dieser Umstand könnte die Leistungsfähigkeit der Lösung erklären. Man müsste dann annehmen, die zusammengesetzten Moleküle des KCl zerfielen während der Auflösung in einfache Moleküle, welche sich mit Wassermolekülen vereinigen würden, wie auch schon Traube angenommen hat. In concentrierter Lösung könnte das Salz zum Theile aus zusammengesetzteren, symmetrischen Molekülen bestehen, wodurch das geringere molekulare Leitungsvermögen erklärt würde.

Die elektrische Leitung der Lösungen kann ferner wesentlich begünstigt werden durch die sekundären Produkte, indem hierdurch die erforderliche Potentialdifferenz wesentlich herabgedrückt werden kann. Während z. B. die Produkte der Elektrolyse beim geschmolzenen KCl, nähmlich K und Cl eine bedeutende Potentialdifferenz verursachen, ist dieselbe entschieden geringer in wässeriger Lösung, wo an Stelle von K das H und KHO, ferner anstatt Cl in verdünnter Lösung ebenfalls ein anderes Produkt auftritt.

Im übrigen ist der Verlauf der Elektrolyse aus ähnlichen Betrachtungen zu erklären, wie sie unter 4. und 5. ausführlicher besprochen wurden, nur dass an Stelle der Salzmoleküle mit Wassermolekülen vereinigte zu setzen sind.

12. Fasst man den Gedankengang dieser Zeilen kurz zusammen, so ergeben sich folgende Bedingungen der Elektrolyse.

1. Die Moleküle müssen unsymmetrisch sein, d. i. sie müssen in elektrischer Hinsicht Polarität besitzen.

2. Die Moleküle müssen drehbar sein; dieselben müssen sich nämlich in der Richtung der Stromlinien in Ketten reihen, in denen je ein Anion einem Kation des nächsten Moleküles gegenübersteht.

3. Die Massenanziehung der Atome muss in den Produkten der Elektrolyse grösser sein, als im Elektrolyten.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird die Elektrolyse noch wesentlich erleichtert durch die sekundären Produkte der Elektrolyse, indem letztere eine geringere Potentialdifferenz erfordern, als den Jonen entsprechen würde.

Einen ähnlichen, wenn nicht noch tiefer greifenden Einfluss werden auch die Elektroden ausüben, wenn dieselben von Elektrolyten oder von den Produkten der Elektrolyse angegriffen werden, wie es bei geschmolzenen Salzen häufig der Fall zu sein scheint.

Es ist klar, dass eine Theorie der Elektrolyse erst dann vollständig ist, wenn sie nicht nur mit den Eigenschaften der Körper in Einklang steht, sondern auch den quantitativen Verhältnissen der Erscheinung Rechnung trägt, wenn sich also unter Anderem die elektrolytischen Gesetze und die Wanderungs-Geschwindigkeiten daraus ableiten lassen. Das leistet aber meines Wissens keine der bekannten Theorien.

14.

ÜBER DIE BEDINGUNGSGLEICHUNGEN ZWISCHEN DEN COEFFICIENTEN DER ORTHOGONALEN SUBSTITUTIONEN.

Von corr. M. GUSTAV RADOS.

Vorgelegt in der Sitzung d. III. Classe d. Akademie am 14. März 1898.

(Aus «Mathematikai és Természettudományi Értesitő» [Mathematischer u. naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie] XVI. Band. pag. 123—127.

Die lineare Substitution

$$y = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

ist — wie bekannt — orthogonal, wenn zwischen ihren Coefficienten die Bedingungsgleichungen

$$f_i \equiv c_{i_1 1}c_{i_2 1} + c_{i_1 2}c_{i_2 2} + \cdots + c_{i_1 n}c_{i_2 n} - \delta_{i_1 i_2} = 0 \quad (i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{I)}$$

bestehen, in denen das Symbol $\delta_{i_1 i_2}$ 1 oder 0 bedeutet, je nachdem die Zahlen i_1 und i_2 gleich oder verschieden sind. Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen ν, ist genau so gross, wie die Anzahl der aus den Elementen 1, 2, 3, . . ., n gebildeten Combinationen zweiter Classe mit Wiederholung, also

$$\nu = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Das auf die Bestimmung der orthogonalen Substitutionen von n Dimensionen bezügliche Problem ist gleichwerthig dem Problem der Auflösung des unter I) angesetzten Gleichungsystems. Vor der Lösung dieser Aufgabe müssen jedoch zwei Fragen entschieden werden.

1. Ob die Gleichungen des Systems sich nicht widersprechen, so dass ihre simultane Lösung unmöglich ist?

2. Ob die Gleichungen des Systems von einander unabhängig sind, so dass man auch eine der Anzahl der Gleichungen und Unbekannten entsprechende Anzahl von Lösungen findet.

Dass die Gleichungen I) sich nicht widersprechen, folgt schon daraus, dass gewisse orthogonale Substitutionen von n Dimensionen ohne Weiteres gebildet werden können. So ist z. B. — um die einfachste zu erwähnen — die identische Substitution:

$$y_i = x_i, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

deren Coefficienten durch die Gleichungen

$$c_{i_1 i_2} = \delta_{i_1 i_2} \quad (i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben sind, orthogonal. $c_{i_1 i_2} = \delta_{i_1 i_2}$ ist also eine Lösung des Gleichungsystems I), so dass schon hiedurch die Incompatibilität der Gleichungen unter I) ausgeschlossen ist.

Nicht so einfach zu entscheiden ist die zweite Frage, die sich auf die Unabhängigkeit der Gleichungen I) bezieht. Diese Frage ist — meines Wissens — bisher noch nicht entschieden; es ist mir wenigstens kein Beweis bekannt, aus dem die Unabhängigkeit der Gleichungen I) in einer jeden Zweifel ausschliessenden Weise ersichtlich würde. Und die Entscheidung dieser Frage ist an sich genug wichtig, da der oft angewendete Satz, nach dem die aus der Gesammtheit der orthogonalen Substitutionen von n Dimensionen bestehende Mannigfaltigkeit, die Dimension

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

hat, nur dann einwurfsfrei ist, wenn die Gleichungen unter I) von einander unabhängig sind, und ehe dies nicht genau erwiesen ist, kann man von der Dimension dieser Mannigfaltigkeit nur so viel aussagen, dass dieselbe nicht kleiner, als $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

In den vorliegenden Zeilen soll die Unabhängigkeit der Gleichungen I) mit voller Strenge bewiesen werden.

Werden die Combinationen zweiter Classe mit Wiederholung der Elemente 1, 2, 3, . . ., n in der Reihenfolge

$$(11), (12), \ldots, (1n), (22), \ldots, (2n), \ldots,$$
$$(n-1, n-1), (n-1, n), (nn)$$

geschrieben, und wird zur Bezeichnung der Combination $(i_1 i_2)$ deren Ordnungsnummer in dieser Reihe benützt, dann sind die Gleichungen des Systems I):

$$f_1=0,\ f_2=0,\ \ldots,\ f_\nu=0$$
$$\left(\nu = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

und die Unbekannten darin sind

$$c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nn}.$$

Im Sinne eines bekannten algebraischen Satzes sind nun die Gleichungen I) dann und nur dann unabhängig, wenn nicht jede Determinante ν-ten Grades der aus n^2 Zeilen und $\nu = \frac{n(n+1)}{2}$ Reihen zusammengesetzten Matrix,

$$M = \left\| \begin{array}{cccccccccccc} \frac{\partial f_1}{\partial c_{11}} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial c_{1n}} & \frac{\partial f_1}{\partial c_{21}} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial c_{2n}} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial c_{n1}} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial c_{nn}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial c_{11}} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial c_{1n}} & \frac{\partial f_2}{\partial c_{21}} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial c_{2n}} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial c_{n1}} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial c_{nn}} \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . & \ldots & . & \ldots & . \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial c_{11}} & \ldots & \frac{\partial f_\nu}{\partial c_{1n}} & \frac{\partial f_\nu}{\partial c_{21}} & \ldots & \frac{\partial f_\nu}{\partial c_{2n}} & \ldots & \frac{\partial f_\nu}{\partial c_{n1}} & \ldots & \frac{\partial f_\nu}{\partial c_{nn}} \end{array} \right\|,$$

identisch gleich Null ist. Um das zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass die Determinanten ν-ten Grades der Matrix M nicht alle identisch verschwinden für diejenigen Werthsystheme $c_{i_1 i_2}$, welche die Coefficienten irgend einer reellen orthogonalen Substitution bilden. Dieses zeigen wir in der Weise, dass wir die Quadratsumme der aus M zu bildenden Determinanten ν-ten Grades bilden und beweisen, dass dieselbe für die erwähnten Systeme $c_{i_1 i_2}$ einen von Null verschiedenen Werth annimmt.

Die Matrix M kann ausführlicher folgender Massen geschrieben werden:

$$\left\|\begin{matrix} 2c_{11} & 2c_{12} & \ldots & 2c_{1n} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & 0 & 0 & \ldots \\ . & & \ldots & . & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2c_{21} & 2c_{22} & \ldots & 2c_{2n} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{31} & c_{32} & \ldots & c_{3n} & c_{21} & c_{22} & \ldots \\ . & & \ldots & . & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots \\ . & & \ldots & . & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots \end{matrix}\right\|,$$

die Quadratsumme der aus ihr zu bildenden Determinanten ν-ten Grades kann nun mehr auf Grund des CAUCHY-BINET'schen Satzes in Form einer Determinante ν-ten Grades dargestellt werden auf die Weise, dass wir in der i-ten Zeile dieser Determinante als das k-te Element den Ausdruck schreiben, der durch Composition der i-ten und k-ten Zeile der Matrix M entsteht; wenn wir dazu noch bedenken, dass wir nun in Stelle der Unbekannten $c_{i_1 i_2}$ die Coefficienten einer reellen orthogonalen Substitution gesetzt haben, dass also

$$c_{i_1 1} c_{i_2 1} + c_{i_1 2} c_{i_2 2} + \ldots + c_{i_1 n} c_{i_3 n} = \delta_{i_1 i_2},$$

dann wird die erwähnte Quadratsumme die folgende Determinante liefern:

$$\left|\begin{matrix} 4\delta_{11} & 2\delta_{12} & \ldots & 2\delta_{1n} & \ldots \\ 2\delta_{21} & \delta_{22}+\delta_{11} & \ldots & \delta_{2n} & \ldots \\ . & . & \ldots & . & \ldots \\ 2\delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn}+\delta_{11} & \ldots \\ . & . & \ldots & . & \ldots \\ . & . & \ldots & . & \ldots \end{matrix}\right|,$$

welche ausführlich geschrieben, die folgende ist:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & \dots & . & . & . & . & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2 & \dots \\ . & . & \dots & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}.$$

Der Werth dieser Determinante aber,

$$4^n \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n(n+3)}{2}},$$

ist von Null verschieden. Und so ist es denn unmöglich, dass alle Determinanten ν-ten Grades von M identisch verschwinden, und damit ist auch die Unabhängigkeit der Gleichungen des Systems I) vollständig erwiesen.

15.

INDUCIERTE LINEARE SUBSTITUTIONEN.

Von GUSTAV RADOS c. M.

Vorgelegt in der Sitzung der III. Classe der Akademie am 17. Oktober 1898.

Aus «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Math. u. Naturwiss. Anzeiger der Akademie.) Band XVI. pag. 378—398.

Wird auf eine algebraische Form n-ten Grades mit k Unbestimmten lineare Substitution angewendet, so sind die Coëfficienten der transformierten Form — bekanntlich — lineare Ausdrücke der Coëfficienten der ursprünglichen Form, und ganze homogene Functionen n-ten Grades der Coëffiicienten der angewandten linearen Substitution. Es sei

$$f = \mu_0 u_0 p_0 + \mu_1 u_1 p_1 + \cdots + \mu_{\nu-1} u_{\nu-1} p_{\nu-1}$$

eine algebraische Form n-ten Grades der Unbestimmten

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

wobei

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{\nu-1}$$

beliebige Zahlencoëfficienten,

$$u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$$

litterale Coëfficienten,

$$p_0, p_1, \ldots, p_{\nu-1}$$

die sämmtlichen von einander verschiedenen

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n)$$

Potenz-Producte, endlich ν den Binomial-Coëfficienten

$$\nu = \binom{n+k-1}{n} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(k+1)k}{1.2\dots(n-1)n}$$

bedeuten. Wenden wir auf f die lineare Substitution

$$x_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{ik}y_k \qquad (S)$$
$$(i=1, 2, \dots, k)$$

an, so erhalten wir die transformierte Form

$$F = \mu_0 U_0 P_0 + \mu_1 U_1 P_1 + \cdots + \mu_{\nu-1} U_{\nu-1} P_{\nu-1},$$

in welcher

$$U_0, U_1, \dots, U_{\nu-1}$$

die transformierten litteralen Coëfficienten,

$$P_0, P_1, \dots, P_{\nu-1}$$

aber die sämmtlichen verschiedenen Potenz-Producte

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_k^{\alpha_k}$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n)$$

bedeuten. Die Coëfficienten dieser transformierten Form hängen mit den Coëfficienten der ursprünglichen Form vermittels der folgenden Gleichungen zusammen:

$$U_g = r_{g0}u_0 + r_{g1}u_1 + \cdots + r_{g\nu-1}u_{\nu-1} \qquad I_n(S)$$
$$\left(g=0, 1, 2, \dots, \nu-1;\quad \nu = \binom{n+k-1}{n}\right)$$

in denen die Coëfficienten

$$r_{gh}$$
$$(g, h=0, 1, 2, \dots, \nu-1)$$

homogene ganze Functionen n-ten Grades der Coëfficienten

$$a_{ij}$$
$$(i, j=1, 2, \dots, k)$$

sind.

Es ist somit ersichtlich, dass die Substitution (S) zwischen den Unbestimmten x die zwischen den Umbestimmten u zu Stande kommende Substitution $I_n(S)$ zur Folge hat, dieselbe so zu sagen inducieirt. Darum müssen wir SYLVESTER's * Terminologie für sehr treffend bezeichnen, in deren Sinne die Substitution (S) *Inductor-Substitution*, $I_n(S)$ aber die *inducierte* Substitution n-ten Grades von (S) genannt wird.

Die inducierten Substitutionen treten nicht allein ihrer principiellen Wichtigkeit wegen, sondern auch vermöge ihrer vielfachen Anwendung in der modernen Behandlung der Invariantentheorie mehr und mehr in den Vordergrund. Um so bemerkenswerther ist es, dass in den Abhandlungen SYLVESTER's, LE PAIGÉ's,** STUDY's *** und HURWITZ's,† also in der gesammten hierauf bezüglichen Litteratur, so zu sagen nur die äusserlichen Eigenschaften der inducierten Substitutionen besprochen sind, während auf diejenigen ihrer Eigenschaften, die ihrer inneren Structur entspringen, des Näheren nicht eingegangen wird. Dieser Umstand hat mich bewogen, die Theorie der inducierten Substitutionen zum Gegenstand meiner Untersuchung zu machen und es sei mir erlaubt, die ersten Ergebnisse meiner hierauf bezüglichen Studien in der vorliegenden Arbeit mitzutheilen.

Die wesentlichsten Eigenschaften der Inductor-Substitution (S) offenbaren sich in der Structur ihrer charakteristischen Gleichung:

$$\varphi_k(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1k} \\ a_{21}-\lambda & a_{22}-\lambda & \dots a_{2k} \\ . & . & \dots . \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots a_{kk}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

In gleicher Weise gehen auch die hauptsächlichen Eigenschaften der inducierten Substitution $I_n(S)$ aus ihrer charakteristischen Gleichung

* SYLVESTER's Abhandlung «Sur les actions mutuelles des formes invariantives derivées» Crelle-Journal Bd. 85. pag. 90.

** Sur une propriété des formes algébriques préparées. Math. Annalen Bd. XV. pag. 206.

*** In seinem Werke: «Methoden der Theorie der ternären Formen» pag. 36.

† Zur Invariantentheorie Math. Annalen Bd. 45. pag. 380.

$$\Phi_{kn}(\mu) \equiv \begin{vmatrix} r_{00}-\mu & r_{10} & \dots & r_{1\nu-1} \\ r_{01} & r_{11}-\mu & \dots & r_{2\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r_{\nu-11} & r_{\nu-12} & \dots & r_{\nu-1\nu-1}-\mu \end{vmatrix} = 0$$

hervor. Es fragt sich nun, welcher Zusammenhang besteht zwischen der charakteristischen Gleichung der Inductor- und der inducierten Substitution?

Diese Frage will ich in der vorliegenden Arbeit beantworten. Die Antwort ertheilt der nachfolgende Satz:

Sind

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Inductor-Substitution (S), also der Gleichung $\varphi_k(\lambda)=0$, *alsdann erhalten wir sämmtliche Wurzeln der charakteristischen Gleichung der inducierten Substitution n-ten Grades* I_n *(S), also der Gleichung* $\Phi_{kn}(\mu)=0$, *indem wir in dem Product*

$$\mu_{i_1 i_2 \dots i_n} = \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n}$$

an Stelle der Index-Combination

$$i_1 i_2 \dots i_n$$

die sämmtlichen Combinationen mit Wiederholung der Elemente

$$1, 2, 3, \dots, k$$

setzen.

Sind also

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

Wurzeln der charakteristischen Gleichung der ternären linearen Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3 \\ x_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3 \\ x_3 &= \alpha_3 y_1 + \beta_3 y_2 + \gamma_3 y_3, \end{aligned}$$

dann wird ihre inducierte Substitution zweiten Grades das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
U_0 &= \alpha_1^2\, u_0 + \beta_1^2\, u_1 + \alpha_3^2\, u_2 + 2\alpha_1\alpha_2\, u_3 + 2\alpha_1\alpha_3\, u_4 \\
&\qquad + 2\alpha_2\alpha_3\, u_5 \\
U_1 &= \beta_1^2\, u_0 + \beta_2^2\, u_1 + \beta_3^2\, u_2 + 2\beta_1\beta_2\, u_3 + 2\beta_1\beta_3\, u_4 \\
&\qquad + 2\beta_2\beta_3\, u_5 \\
U_2 &= \gamma_1^2\, u_0 + \gamma_2^2\, u_1 + \gamma_3^2\, u_2 + 2\gamma_1\gamma_2\, u_3 + 2\gamma_1\gamma_3\, u_4 \\
&\qquad + 2\gamma_2\gamma_3\, u_5 \\
U_3 &= \alpha_1\beta_1\, u_0 + \alpha_2\beta_2\, u_1 + \alpha_3\beta_3\, u_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\, u_3 + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)\, u_4 \\
&\qquad + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)\, u_5 \\
U_4 &= \alpha_1\gamma_1\, u_0 + \alpha_2\gamma_2\, u_1 + \alpha_3\gamma_3\, u_2 + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1)\, u_3 + (\alpha_1\gamma_3 + \alpha_3\gamma_1)\, u_4 \\
&\qquad + (\alpha_2\gamma_1 + \alpha_3\gamma_2)\, u_5 \\
U_5 &= \beta_1\gamma_1\, u_0 + \beta_2\gamma_2\, u_1 + \beta_3\gamma_3\, u_2 + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)\, u_3 + (\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1)\, u_4 \\
&\qquad + (\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2)\, u_5
\end{aligned}
$$

ausgedrückt und die Wurzeln der charakteristischen Gleichung dieser letzteren Substitution sind nach dem oben ausgesprochenen Satze:

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2,\ \lambda_1\lambda_2,\ \lambda_1\lambda_3,\ \lambda_2\lambda_3\,.$$

In der vorliegenden Arbeit will ich ausser dem Beweis dieses Hauptsatzes nur noch eine seiner Anwendungen mittheilen. Dieselbe bezieht sich auf den Zusammenhang, der zwischen der Determinante der ursprünglichen und jener der inducierten Substitution besteht. Dieser Zusammenhang ist ein höchst einfacher, da *die Determinante der inducierten Substitution n-ten Grades einer linearen Substitution von k Dimensioneu* immer *die* $\binom{n+k-1}{k-1}$*-te Potenz der Determinante der ursprünglichen Substitution ist.*

Auf andere Anwendungen, sowie auf die genaue Untersuchung der algebraischen Beschaffenheit der charakteristischen Gleichung der inducierten Substitution hoffe ich in meiner nächsten Arbeit zurückkehren zu können.

1. Inducierte Substitutionen zweiten Grades.

Um unsere Betrachtungen an einen concreten Fall anknüpfen zu können, hauptsächlich aber darum, dass die Complication der Bezeichnungen die Einfachheit des Gedankenganges nicht verdunkle, werden wir uns in dem Folgenden überall auf die Untersuchung der inducierten Substitutionen einer binären Substitution beschränken; zugleich möge jedoch betont werden, dass die angestellten Betrachtungen von Wort zu Wort auch auf Substitutionen von irgend welcher Dimension angewendet werden können.

Es sei die zu Grunde liegende binäre Inductor-Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 \\ x_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2; \end{aligned} \qquad (S)$$

es möge dieselbe auf die Form zweiten Grades

$$f = u_0 x_1^2 + 2u_1 x_1 x_2 + u_2 x_2^2$$

angewendet werden; alsdann sei die transformierte Form

$$F = U_0 y_1^2 + 2U_1 y_1 y_2 + U_2 y_2^2.$$

Die Coëfficienten dieser Form können vermittels der Coëfficienten der Form f folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} U_0 &= \alpha_1^2 \quad u_0 + 2\alpha_1\alpha_2 \qquad\qquad u_1 + \alpha_2^2 \quad u_2 \\ U_1 &= \alpha_1\beta_1 u_0 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) u_1 + \alpha_2\beta_2 u_2 \\ U_2 &= \beta_1^2 \quad u_0 + 2\beta_1\beta_2 \qquad\qquad u_1 + \beta_2^2 \quad u_2; \end{aligned} \qquad I_2(S)$$

Dieses System linearer Gleichungen ergiebt die inducierte Substitution zweiten Grades von S, nämlich $I_2\,(S)$.

Es seien ferner λ_1, λ_2 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Substitution (S), also der Gleichung

$$\varphi_2(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 \\ \beta_1 & \beta_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

alsdann ist zu erweisen, dass

$$\lambda_1^2, \ \lambda_1\lambda_2, \ \lambda_2^2.$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der inducierten Substitution $I_2\,(S)$ der Gleichung

$$\Phi_{22}(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1^2-\mu & 2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\mu & \alpha_2\beta_1 \\ \beta_1^2 & 2\beta_1\beta_2 & \beta_2^2-\mu \end{vmatrix} = 0$$

Zum Beweis dieses Satzes, ziehen wir auch die Fix-Elemente der Substitution (S) in den Kreis unserer Betrachtungen. Es seien die Coordinaten dieser Fix-Elemente

$$\xi_1,\ \xi_2;\ \eta_1,\ \eta_2,$$

dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_1\xi_1 &= \alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2 & \lambda_2\eta_1 &= \alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2 \\ \lambda_2\xi_2 &= \alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2 & \lambda_2\eta_2 &= \alpha_2\eta_1+\beta_1\eta_2. \end{aligned} \tag{I}$$

Jetzt kann man leicht nachweisen, dass die Reihen der Tabelle

$$\begin{array}{lll} \lambda_1\xi_1^2, & \lambda_1^2(2\xi_1\xi_2), & \lambda_1^2\xi_2^2; \\ \lambda_1\lambda_2\xi_1\eta_1, & \lambda_1\lambda_2(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1), & \lambda_1\lambda_2\xi_2\xi_2; \\ \lambda_2^2\eta_1^2, & \lambda_2^2(2\eta_1\eta_2), & \lambda_2^2\eta_2^2; \end{array}$$

solche Werthsysteme vertreten, die sich in cogredienter Weise mit der transponierten Substitution der Substitution $I_2(S)$ transformieren.

Im Sinne des unter (I) Stehenden ist nämlich

$$\begin{aligned} \lambda_1^2\xi_1^2 &= (\lambda_1\xi_1)^2 &&= (\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)^2 \\ \lambda_1^2(2\xi_1\xi_2) &= 2(\lambda_1\xi_1)(\lambda_1\xi_2) &&= 2(\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)(\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2) \\ \lambda_1^2\xi_2^2 &= (\lambda_2\xi_2)^2 &&= (\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)^2, \end{aligned}$$

und wenn wir diese Ausdrücke ordnen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2\xi_1^2 &= \alpha_1^2\ \xi_1^2+\alpha_1\beta_1\ (2\xi_1\xi_2)+\ \beta_1^2\ \xi_2^2 \\ \lambda_1^2(2\xi_1\xi_2) &= 2\alpha_1\alpha_2\ \xi_1^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(2\xi_1\xi_2)+2\beta_1\beta_2\ \xi_2^2 \\ \lambda_1^2\xi_2^2 &= \alpha_2^2\ \xi_1^2+\alpha_2\beta_2\ (2\xi_1\xi_2)+\ \beta_2^2\ \xi_2^2, \end{aligned}$$

dies Gleichungen zeigen aber, dass $\mu=\lambda_1^2$ die Wurzel der Gleichung $\Phi_{22}(\mu)=0$ ist. In ähnlicher Weise ist

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2\xi_1\eta_1 &= (\lambda_1\xi_1)(\lambda_2\eta_1) = (\alpha_1\xi_1+\beta_1\eta_1)(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2) \\ \lambda_1\lambda_2(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1) &= (\lambda_1\xi_1)(\lambda_2\eta_2)+(\lambda_1\xi_2)(\lambda_2\eta_1) = \\ &= (\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2)+(\alpha_2\xi_1+\beta_2\eta_1)(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2) \\ \lambda_1\lambda_2\xi_2\eta_2 &= (\lambda_1\xi_2)(\lambda_2\eta_2) = (\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2), \end{aligned}$$

oder wenn wir die Ausdrücke neuerdings ordnen:

$$\begin{aligned}
\lambda_1\lambda_2\, \xi_1\eta_1 &= \alpha_1^2\ \xi_1\eta_1 + \alpha_1\beta_1\ (\xi_2\eta_2+\xi_2\eta_1) + \beta_1^2\ \xi_2\eta_2 \\
\lambda_1\lambda_2(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1) &= 2\alpha_1\alpha_2\,\xi_1\eta_1 + (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1) + 2\beta_1\beta_2\xi_2\eta_2 \\
\lambda_1\lambda_2\, \xi_2\eta_2 &= \alpha_2^2\ \xi_1\eta_1 + \alpha_2\beta_2\ (\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1) + \beta_2^2\ \xi_2\eta_2\,,
\end{aligned}$$

so dass $\mu=\lambda_1\lambda_2$ ebenfalls der Gleichung $\Phi_{22}(\mu)=0$ genügt.

Endlich erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda_2^2\ \eta_1^2 &= (\lambda_2\eta_1)^2 = (\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2)^2 \\
\lambda_2^2(2\eta_1\eta_2) &= 2(\lambda_2\eta_1)(\lambda_2\eta_2) = (\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2)(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2) \\
\lambda_2^2\ \eta_2^2 &= (\lambda_2\eta_2)^2 = (\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2)^2,
\end{aligned}$$

oder nach dem Ordnen der Ausdrücke die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda_2^2\ \eta_1^2 &= \alpha_1^2\ \eta_1^2 + \alpha_1\beta_1\ (2\eta_1\eta_2) + \beta_1^2\ \eta_2^2 \\
\lambda_2^2(2\eta_1\eta_2) &= 2\alpha_1\alpha_2\,\eta_1^2 + (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(2\eta_1\eta_2) + 2\beta_1\beta_2\,\eta_2^2 \\
\lambda_2^2\ \eta_2^2 &= \alpha_2^2\ \eta_1^2 + \alpha_2\beta_2\ (2\eta_1\eta_2) + \beta_2^2\ \eta_2^2
\end{aligned}$$

in Folge deren $\mu=\lambda_2^2$ die Wurzel der Gleichung $\Phi_{22}(\mu)=0$ ist.

Hiemit ist aber unser Satz bezüglich der inducierten Substitutionen zweiten Grades gänzlich bewiesen.

Beiläufig möge noch erwähnt werden, dass die Werthsysteme

$$\begin{array}{lll}
\xi_2^2, & 2\xi_1\xi_2, & \xi_2^2; \\
\xi_1\eta_1, & \xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1, & \eta_2\eta_2; \\
\eta_1^2, & 2\eta_1\eta_2, & \eta_2^2
\end{array}$$

die Fix-Elemente der transponierten Substitution von $I_2(S)$ ergeben.

2. Inducierte Substitutionen dritten Grades.

Wendet man die binäre Inductor-Substitution S auf die Form dritten Grades

$$f = u_0x_1^3 + 3u_1x_1^2x_2 + 3u_2x_1x_2^2 + u_3x_2^3$$

an, so können díe Coëfficienten der transformierten Form

$$F = U_0y_1^3 + 3U_1y_1^2y_2 + 3U_2y_1y_2^2 + U_3y_2^3$$

mittels der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}U_0=a_1^3\quad u_0+\;3a_1^2a_2\qquad\qquad\quad u_1+\;3a_1a_2^2\qquad\qquad\quad u_2+a_2^3\quad u_3\\U_1=a_1^2\beta_1\,u_0+(2a_1a_2\beta_1+a_1^2\beta_2)\,u_1+(2a_1a_2\beta_2+a_2^2\beta_1)\,u_2+a_2^2\beta_2\,u_3\\U_2=a_1\beta_1^2\,u_0+(2a_1\beta_1\beta_2+a_2\beta_1^2)\,u_1+(2a_2\beta_1\beta_2+a_1\beta_2^2)\,u_2+a_2\beta_2^2\,u_3\\U_3=\beta_1^3\quad u_0+\;3\beta_1^2\beta_2\qquad\qquad\quad u_1+\;3\beta_1\beta_2^2\qquad\qquad\quad u_2+\beta_2^3\quad u_3\end{array}\right\}\;I_3\,(S)$$

dargestellt werden, deren System wieder die inducierte Substitution von (S), $I_3\,(S)$ ergiebt.

Hier ist wieder zu beweisen, falls

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Substitution (S) sind, dass die Producte

$$\lambda_1^3,\quad \lambda_1^2\lambda_2,\quad \lambda_1\lambda_2^2,\quad \lambda_2^3.$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Substitution $I_2(S)$, der Gleichung $\Phi_{23}=0$, ausdrücken.

Zum Beweis dieses Satzes werden wir uns wieder der Fix-Elemente der Substitution (S) bedienen. Der grösseren Einfachheit wegen benützen wir die folgenden abgekürzten Bezeichnungen:

$$\left.\begin{array}{llll}\xi_1^3\;=R_{00}, & 3\xi_1^2\xi_2=R_{01}, & 3\xi_1\xi_2^2=R_{02}, & \xi_2^3\;=R_{03}\\\xi_1^2\eta_1=R_{10}, & 2\xi_1\xi_2\eta_1+\xi_1^2\eta_2=R_{11}, & 2\xi_1\xi_2\eta_2+\xi_2^2\eta_1=R_{12}, & \xi_2^2\eta_2=R_{13}\\\xi_1\eta_1^2=R_{20}, & 3\xi_1\eta_1\eta_2+\xi_2\eta_1^2=R_{21}, & 2\xi_2\eta_1\eta_2+\xi_1\eta_2^2=R_{22}, & \xi_2\eta_2^2=R_{23}\\\eta_1^3\;=R_{30}, & 3\eta_1^2\eta_2=R_{31}, & 3\eta_1\eta_2^2=R_{32}, & \eta_2^3\;=R_{33},\end{array}\right\}\;(\mathrm{II})$$

ferner

$$\left.\begin{array}{llll}a_1^3\;=r_{00}, & 3a_1^2a_2=r_{71}, & 3a_1a_2^2=r_{02}, & a_2^3\;=r_{03}\\a_1^2\beta_1=r_{10}, & 2a_1a_2\beta_1+a_1^2\beta_2=r_{11}, & 2a_1a_2\beta_2+a_2^2\beta_1=r_{12}, & a_2^2\beta_2=r_{13}\\a_1\beta_1^2=r_{20}, & 2a_1\beta_1\beta_2+a_2\beta_1^2=r_{21}, & 2a_2\beta_1\beta_2+a_1\beta_2^2=r_{22}, & a_2\beta_2^2=r_{23}\\\beta_1^3\;=r_{30}, & 3\beta_1^2\beta_2=r_{31}, & 3\beta_1\beta_2^2=r_{32}, & \beta_2^3\;=r_{33}.^{\star}\end{array}\right\}\;(\mathrm{III})$$

⋆ Wenn wir diese abgekürzte Bezeichnung gebrauchen, können wir die Substitution $I_3\,(S)$ durch die Gleichungen

$$U_\alpha=r_{\alpha 0}u_0+r_{\alpha 1}u_1+r_{\alpha 2}u_2+r_{\alpha 3}u_3$$
$$(\alpha=0,\,1,\,2,\,3)$$

Nun können wir wieder beweisen, dass die Werthsysteme in den Reihen sich

$$\lambda_1^\alpha \lambda_2 R_{\alpha 0},\ \lambda_1^\alpha \lambda_2 R_{\alpha 1},\ \lambda_1^\alpha \lambda_2 R_{\alpha 2},\ \lambda_1^\alpha \lambda_2 R_{\alpha 3}$$
$$(\alpha=0,1,2,3)$$

mit der transponierten Substitution von $I_3(S)$ cogredient transformieren.

1. Ist $\alpha=0$, so hat man auf Grund der Gleichungen unter (I)

$$\begin{aligned}
\lambda_1^3 R_{00} &= \lambda_1^3 \xi_1^3 &&= (\lambda_1\xi_1)^3 &&= (\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)^3 \\
\lambda_1^3 R_{01} &= \lambda_1^3 (3\xi_1^2\xi_2) &&= 3(\lambda_1\xi_1)^2(\lambda_1\xi_2) &&= 3(\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)^2(\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2) \\
\lambda_1^3 R_{02} &= \lambda_1^3 (3\xi_1\xi_2^2) &&= 3(\lambda_1\xi_1)(\lambda_1\xi_2)^2 &&= 3(\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)(\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)^2 \\
\lambda_1^3 R_{03} &= \lambda_1^3 \xi_2^3 &&= (\lambda_2\xi_2)^3 &&= (\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)^3;
\end{aligned}$$

wenn wir hier wieder die angedeuteten Operationen ausführen und die Ausdrücke ordnen, ferner die abgekürzten Bezeichnungen unter (II) und (III) gebrauchen, erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda_1^3 R_{00} &= r_{00}R_{00}+r_{10}R_{01}+r_{20}R_{02}+r_{30}R_{03} \\
\lambda_1^3 R_{01} &= r_{01}R_{00}+r_{11}R_{01}+r_{21}R_{02}+r_{31}R_{03} \\
\lambda_1^3 R_{02} &= r_{02}R_{00}+r_{12}R_{01}+r_{22}R_{02}+r_{32}R_{03} \\
\lambda_1^3 R_{03} &= r_{03}R_{00}+r_{13}R_{01}+r_{23}R_{02}+r_{32}R_{03}
\end{aligned} \tag{1}$$

aus denen sogleich folgt, dass $\mu=\lambda_1^3$ die Wurzel der Gleichung $\Phi_{23}(\mu)=0$ ist.

2. Ist $\alpha=1$, so hat man

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2\lambda_2 R_{10} &= \lambda_1^2\lambda_2(\xi_1^2\eta_1) = (\lambda_1\xi_1)^2(\lambda_2\eta_1) = (\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)^2(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2) \\
\lambda_1^2\lambda_2 R_{11} &= \lambda_1^2\lambda_2(2\xi_1\xi_2\eta_1+\xi_1^2\eta_2) = 2(\lambda_1\xi_1)(\lambda_1\xi_2)(\lambda_2\eta_1)+(\lambda_1\xi_1)^2(\lambda_2\eta_2) = \\
&= 2(\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)(\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2)+ \\
&\quad +(\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)^2(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2) \\
\lambda_1^2\lambda_2 R_{12} &= \lambda_1^2\lambda_2(2\xi_1\xi_2\eta_2+\xi_2^2\eta_1) = 2(\lambda_1\xi_1)(\lambda_1\xi_2)(\lambda_2\eta_2)+(\lambda_1\xi_2)^2(\lambda_2\eta_1) = \\
&= 2(\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)(\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2)+ \\
&\quad +(\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)^2(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2) \\
\lambda_1^2\lambda_2 R_{13} &= \lambda_1^2\lambda_2\xi_1^2\eta_2 = (\lambda_1\xi_1)^2(\lambda_2\eta_2) = (\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)^2(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2);
\end{aligned}$$

---

ausdrücken. Die Bezeichnung der charakteristischen Gleichung aber giebt die Gleichung

$$\Phi_{23}(\mu) \equiv |\, r_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}\mu \,| = 0$$
$$(\alpha,\beta=0,1,2,3)$$

in welcher $\delta_{\alpha\beta}$ Null oder (1) bedeutet, je nachdem $\alpha \gtrless \beta$ oder $\alpha=\beta$ ist.

wenn wir wieder die angedeuteten Operationen durchführen und die Ausdrücke ordnen, erhalten wir das System der Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2\lambda_2 R_{10} &= r_{00}R_{10}+r_{10}R_{11}+r_{20}R_{12}+r_{30}R_{13}\\
\lambda_1^2\lambda_2 R_{11} &= r_{01}R_{10}+r_{11}R_{11}+r_{21}R_{12}+r_{31}R_{13}\\
\lambda_1^2\lambda_2 R_{12} &= r_{02}R_{10}+r_{12}R_{11}+r_{22}R_{12}+r_{32}R_{13}\\
\lambda_1^2\lambda_2 R_{13} &= r_{03}R_{10}+r_{13}R_{11}+r_{32}R_{12}+r_{33}R_{13},
\end{aligned} \tag{2}$$

aus denen unmittelbar hervorgeht, dass $\mu = \lambda_1^2\lambda_2$ die Gleichung $\Phi_{23}(\mu) = 0$ befriedigt.

3. Ist $\alpha = 2$, so hat man

$$\begin{aligned}
\lambda_1\lambda_2^2 R_{20} &= \lambda_1\lambda_2^2(\xi_1\eta_1^2) = (\lambda_1\xi_1)(\lambda_2\eta_1)^2 = (\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2)^2\\
\lambda_1\lambda_2^2 R_{21} &= \lambda_1\lambda_2^2(2\xi_1\eta_1\eta_2+\xi_2\eta_1^2) = 2(\lambda_1\xi_1)(\lambda_2\eta_1)(\lambda_2\eta_2)+(\lambda_1\xi_2)(\lambda_2\eta_1)^2 =\\
&= 2(\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2)(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2)+\\
&\quad +(\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2)^2\\
\lambda_1\lambda_2^2 R_{22} &= \lambda_1\lambda_2^2(2\xi_2\eta_1\eta_2+\xi_1\eta_2^2) = 2(\lambda_1\xi_2)(\lambda_2\eta_1)(\lambda_2\eta_2)+(\lambda_1\xi_1)(\lambda_2\eta_2)^2 =\\
&= 2(\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2)(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2)+\\
&\quad +(\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2)^2\\
\lambda_1\lambda_2^2 R_{23} &= \lambda_1\lambda_2^2(\xi_2\eta_2^2) = (\lambda_1\xi_2)(\lambda_2\eta_2)^2 = (\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2)^2;
\end{aligned}$$

nach abermaligem Ordnen erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda_1\lambda_2^2 R_{20} &= r_{00}R_{20}+r_{10}R_{21}+r_{20}R_{22}+r_{30}R_{23}\\
\lambda_1\lambda_2^2 R_{21} &= r_{01}R_{20}+r_{11}R_{21}+r_{21}R_{22}+r_{31}R_{23}\\
\lambda_1\lambda_2^2 R_{22} &= r_{02}R_{20}+r_{12}R_{21}+r_{22}R_{22}+r_{32}R_{23}\\
\lambda_1\lambda_2^2 R_{23} &= r_{03}R_{20}+r_{13}R_{21}+r_{23}R_{22}+r_{33}R_{23}
\end{aligned} \tag{3}$$

aus denen hervorgeht, dass $\mu = \lambda_1\lambda_2^2$ die Wurzel der Gleichung $\Phi_{23}(\mu) = 0$ ist.

4. Ist $\alpha = 3$, so hat man

$$\begin{aligned}
\lambda_2^3 R_{30} &= \lambda_2^3\eta_1^3 &&= (\lambda_2\eta_1)^3 &&= (\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2)^3\\
\lambda_2^3 R_{31} &= \lambda_2^3(3\eta_1^2\eta_2) &&= 3(\lambda_2\eta_1)^2(\lambda_2\eta_2) &&= 3(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2)^2(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2)\\
\lambda_2^3 R_{32} &= \lambda_2^3(3\eta_1\eta_2) &&= 3(\lambda_2\eta_1)(\lambda_2\eta_2)^2 &&= 3(\alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2)(\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2)^2\\
\lambda_2^3 R_{33} &= \lambda_2^3\eta_2^3 &&= (\lambda_2\eta_2)^3 &&= (\alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2)^3;
\end{aligned}$$

nach Ordnen der Ausdrücke ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda_2^3 R_{30} &= r_{00} R_{30} + r_{10} R_{31} + r_{20} R_{32} + r_{30} R_{33} \\
\lambda_2^3 R_{31} &= r_{01} R_{30} + r_{11} R_{31} + r_{21} R_{32} + r_{31} R_{33} \\
\lambda_2^3 R_{32} &= r_{02} R_{30} + r_{12} R_{31} + r_{22} R_{32} + r_{32} R_{33} \\
\lambda_2^2 R_{33} &= r_{03} R_{30} + r_{13} R_{31} + r_{23} R_{32} + r_{33} R_{33}
\end{aligned} \tag{4}$$

die endlich zeigen, dass $\mu = \lambda_2^3$ die Wurzel der Gleichung

$$\Phi_{23}(\mu) = 0 \text{ ist.}$$

Damit ist unser Satz auch bezüglich der inducierten Substitutionen dritten Grades gänzlich bewiesen.

Schon die bisherigen Betrachtungen zeigen, dass die Darstellung mit dem Zunehmen des Grades der inducierten Substitution immer verwickelter wird; dies geht so weit, dass wenn wir den eingeschlagenen Weg fortsetzen, bei der Darstellung der inducierten Substitutionen von höherem als dritten Grad Ausdrücke erhalten, die sich in Folge ihrer grossen Ausdehnung zum Hinschreiben gar nicht mehr eignen. Und doch dient das bisher Gesagte als Fingerzeig dazu, wie man bei der Darstellung der höheren Fälle vorgehen müsse. Jedes der Gleichungssysteme unter (1), (2), (3) und (4) kann durch eine einzige Gleichung ersetzt werden, indem wir die Gleichungen des betreffenden Gleichungssystems nach Multiplication mit Unbestimmten addieren und sie so in eine einzige Gleichung zusammenfassen. Dies führt uns dazu, dass wir auch die Polaren der Grundform f zu unseren Betrachtungen heranziehen, wodurch diese, wie es der Erfolg zeigen wird über alle Erwartung einfach und übersichtlich gestalten.

3. Inducierte Substitutionen n-ten Grades.

Ehe wir auf den allgemeinen Beweis unseres Hauptsatzes übergehen, ist es im Interesse der Einheit der Darstellung zweckmässig einen auf die Polaren der Grundform bezüglichen und an sich beinahe evidenten, jedoch für den Zweck unseres Beweises wichtigen Hilfssatz voraus zu schicken. Dieser Satz ist der folgende:

Die Polarenbildung und die auf die Reihen von Unbestimmten angewandten Substitutionen sind vertauschbare Operationen.

Es sei die symbolische Darstellung der algebraischen Form n-ten Grades

$$f \equiv u_0 x_1^n + \binom{n}{1} u_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + \binom{n}{n} u_n x_2^n$$

die Gleichung

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = a_x^n,$$

so dass die Formeln

$$u_k = a_1^{n-k} a_2^k \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n)$$

die Darstellungen der Coëfficienten u_k vermittels der Symbole a_1 und a_2 liefern.

Wird auf die Form f die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 \\ x_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned} \tag{S}$$

angewendet, so sei die transformierte Form

$$S(f) = F = U_0 y_1^n + \binom{n}{1} U_1 y_1^{n-1} y_2 + \cdots + \binom{n}{n} U_n,$$

oder in symbolischer Darstellung

$$S(f) = F = [a_1(\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2) + a_2(\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2)]^n = (a_\alpha y_1 + a_\beta y_2)^n,$$

so dass die Coëfficienten der transformierten Form die Gleichungen

$$U_k = a_\alpha^{n-k} a_\beta^k \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n)$$

ergeben. Ist also

$$F = (A_1 y_1 + A_2 y_2)^n = A_y^n,$$

die symbolische Darstellung von F, so ist

$$\begin{aligned} A_1 &= a_\alpha \\ A_2 &= a_\beta. \end{aligned}$$

Es sei nunmehr die auf die Reihen der Unbestimmten

$$x_1, x_2; x_1', x_2'$$

bezügliche k-te Polare von f

$$\Pi_k(f) = \Pi_k(x_1, x_2; x'_1, x'_2),$$

dann ist bekanntlich

$$\Pi_k(f) = \Pi_k(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = a_x^{n-k} a_{x'}^k;$$

Wenn wir auf die Reihen der Unbestimmten (x_1, x_2) und (x'_1, x'_2) die Substitution (S) in cogredienter Weise anwenden, so tritt die Richtigkeit des aufgestellten Hilfssatzes auf Grund der Identitäten

$$\begin{aligned} S\Pi_k(f) &= [a_1(\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2) + a_2(\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2)]^{n-k} \cdot \\ &\cdot [a_1(\alpha_1 y'_1 + \beta_1 y'_2) + a_2(\alpha_2 y'_1 + \beta_2 y'_2)]^k \\ &= (a_\alpha y_1 + a_\beta y_2)^{n-k} (a_\alpha y'_1 + a_\beta y'_2)^k = \\ &= (A_1 y_1 + A_2 y_2)^{n-k} (A_1 y'_1 + A_2 y'_2)^k = \\ &= A_y^{n-k} A_{y'}^k = \Pi_k(F) = \Pi_k(S(f)) \end{aligned}$$

unmittelbar in Evidenz.

Dies vorausgesandt, gehen wir nun auf die Formulierung und den Beweis unseres Hauptsatzes über.

Die inducierte Substitution n-ten Grades der Substitution (S) repräsentiert das System der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} U_0 = a_\alpha^n \qquad\;\; = \Pi_0(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2) \equiv r_{00} u_0 + r_{01} u_1 + \cdots + r_{0n} u_n \\ U_1 = a_\alpha^{n-1} a_\beta = \Pi_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2) \equiv r_{10} u_0 + r_{11} u_1 + \cdots + r_{1n} u_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ U_n = a_\beta^n \qquad\;\; = \Pi_n(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2) \equiv r_{n0} u_0 + r_{n1} u_1 + \cdots + r_{nn} u_n \end{array}\right\} I_n(S)$$

in welchem die Coëfficienten

$$r_{ij} = r_{ij}(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$$
$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

die homogenen ganzen Ausdrücke $(n-k)$-ten Grades der Coëfficienten α_1, α_2 und k-ten Grades der Coëfficienten β_1, β_2 und somit ganze homogene Ausdrücke vom n-ten Grade in den Coëfficienten von (S) sind.

Der zu beweisende Satz lässt sich daher in den eingeführten Bezeichnungen folgendermassen ausdrücken :

Sind

$$\lambda_1, \lambda_2,$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Substitution (S), also Gleichung

$$\varphi_2(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

alsdann sind

$$\lambda_1^n, \lambda_1^{n-1}\lambda_2, \ldots, \lambda_1^{n-k}\lambda_2^k, \ldots, \lambda_2^n.$$

die sämmtlichen Wurzeln der charakteristischen Gleichung der inducierten Substitution n-ten Grades I_n (S), also der Gleichung

$$\Phi_{2n} \equiv \begin{vmatrix} r_{00} - \mu & r_{12} & \ldots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} - \mu & \ldots r_{2n} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \ldots \quad \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots r_{nn} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Für den Beweis sollen wieder die Fix-Elemente der Substitution (S),

$$(\xi_1, \xi_2)$$
$$(\eta_1, \eta_2)$$

herangezogen werden; dieselben können aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1\xi_1 &= \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2 & \lambda_2\eta_1 &= \alpha_1\eta_1 + \beta_1\eta_2 \\ \lambda_1\xi_2 &= \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2 & \lambda_2\eta_2 &= \alpha_2\eta_1 + \beta_2\eta_2 \end{aligned} \tag{I}$$

bestimmt werden.

Aus diesen Fix-Elementen als Reihen von Unbestimmten bilden wir die k-te Polare von f, $\Pi_k(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$. Bei Benützung der abgekürzten Bezeichnung

$$r_{kl}(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2) = R_{kl}$$
$$(k, l = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

kann man diese Polare folgendermassen schreiben:

$$\Pi_k(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2) = a_\xi^{n-k} a_\eta^k = R_{k0}u_0 + R_{k1}u_1 + \cdots + R_{k_n u_n}.$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

Man bilde ferner die Ausdrücke

$$\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k \, \Pi_k(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2);$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

da nun die k-te Polare den Variablen ξ_1, ξ_2 von $(n-k)$-tem Grade in den Variablen η_1, η_2 k-ten Grades ist, so hat man

$$\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k \Pi_k(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2) = \Pi_k(\lambda_1\xi_1, \lambda_1\xi_2; \lambda_2\eta_1, \lambda_2\eta_2), \quad (k-0, 1, 2, \ldots, n)$$

oder indem man die Gleichungen (I) in Betracht zieht,

$$\begin{aligned}\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k \Pi_k(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2) &= \\ = \Pi_k(\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2, \alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2; \alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2, \alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2); \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n)\end{aligned}$$

da aber im Sinne des vorausgesandten Hilfssatzes die auf die Unbestimmten ausgeübten cogredienten Substitutionen und die Polarenbildung vertauschbare Operationen sind, so wird:

$$\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k \Pi_k(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2) = \Pi_k(F), \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n)$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k(R_{k0}u_0+R_{k1}u_1+\cdots+R_{kn}u_n)=R_{k0}U_0+R_{k1}U_1+\cdots+R_{kn}U_n. \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n)$$

Zieht man schliesslich in Betracht, dass

$$U_j = r_{j0}u_0+r_{j1}u_1+\cdots+r_{jn}u_n, \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n)$$

so kann die zuletzt gewonnene Identität ausführlicher folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k(R_{k0}u_0+R_{k1}u_1+\cdots+R_{kn}u_n) &= \\ = R_{k0}(r_{00}u_0+r_{10}u_1+\cdots+r_{n0}u_n) &+ \\ + R_{k1}(r_{01}u_0+r_{11}u_1+\cdots+r_{n1}u_n) &+ \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots &+ \\ + R_{kn}(r_{0n}u_0+r_{1n}u_1+\cdots+r_{nn}u_n). & \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n)\end{aligned}$$

Diese zerfällt nun zufolge der Unbestimmtheit der Grössen u in die folgenden $n+1$ Identitäten:

$$\begin{aligned}\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k R_{k0} &= r_{00}R_{k0}+r_{10}R_{k1}+\cdots+r_{n0}R_{kn} \\ \lambda_1^{n-k}\lambda_2^k R_{k1} &= r_{01}R_{k0}+r_{11}R_{k1}+\cdots+r_{n1}R_{kn} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-k}\lambda_2^k R_{kn} &= r_{0n}R_{k0}+r_{1n}R_{k1}+\cdots+r_{nn}R_{kn}, \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n)\end{aligned}$$

und aus diesen ist sogleich ersichtlich, dass die Werthe

$$\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k \atop (k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_{2n}(\mu)=0$$

sind und da die auf diese Weise gefundenen Wurzeln im Allgemeinen verschieden sind, so haben wir hiermit die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $(n+1)$-ten Grades: $\Phi_{2n}(\mu)=0$ gefunden.

Der Umstand, dass am Schlusse der obigen Darstellung der Fall von gleichen Elementen in der Reihe

$$\lambda_1^n,\ \lambda_1^{n-1}\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_1^{n-i}\lambda_2^i,\ \ldots,\ \lambda_2^n$$

ausgeschlossen wurde, beeinträchtigt in keiner Weise die allgemeine Gültigkeit unseres Satzes, wie dies die folgenden Betrachtungen zeigen sollen.

Der obige Satz über die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von inducierten Substitutionen kann auch folgendermassen formuliert werden:

Ist

$$\Phi_{2n}(\mu)\equiv\mu^{n+1}-C_1\mu^n+\cdots+(-1)^{n+1}C_{n+1}=0$$

die charakteristische Gleichung der inducierten Substitution n-ten Grades $I_n(S)$ so können die Coëfficienten

$$C_i=C_i(a_1,\,a_2,\,\beta_1,\,\beta_2) \atop (i=1,\,2,\,\ldots,\,n+1)$$

die — wie auf Grund ihres Bildungsgesetzes klar ist — rationale ganze Ausdrücke der Grössen

$$a_1,\ a_2,\ \beta_1,\ \beta_2$$

sind, als etementare symmetrische Funktionen der Grössen

$$\lambda_1^n,\ \lambda_1^{n-1}\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_2^n \tag{II}$$

dargestellt werden, also

$$C_i(a_1,\,a_2,\,a_1,\,\beta_2)=S_i(\lambda_1^n,\,\lambda_1^{n-1}\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_2^n), \atop (i=1,\,2,\,\ldots,\,n+1)$$

wobei S_i eine aus den Elementen der Reihe (II) gebildete elementare symmetrische Function i-ten Grades bedeutet.

Diesen Satz haben wir in den obigen Darstellungen bezüglich derjenigen Substitutionen als richtig erwiesen, für die das Product

$$D = \prod_{(i)} \prod_{(j)} (\lambda_1^{n-i} \lambda_2^{i} - \lambda_1^{n-j} \lambda_2^{j}) \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n;\ j > i)$$

nicht Null ist.* Dieses Product kann als symmetrische Function der Wurzeln

$$\lambda_1, \lambda_2$$

vermittels der Coëfficienten der Gleichung

$$\varphi_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

rational ausgedrückt werden, so dass

$$D = \Omega(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2),$$

wo Ω als Bezeichnung für eine rationale ganze Function eingeführt wurde.

Die Richtigkeit unseres Satzes ist somit für diejenigen Inductor-Substitutionen erwiesen, deren Coëfficienten die Gleichung

$$\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = 0$$

nicht befriedigen. Ist S eine *solche* Substitution, so hat man

$$C_i(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = S_i(\lambda_1^n, \lambda_1^{n-1}\lambda_2, \ldots, \lambda_2^n); \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

es kann jedoch $S_i(\lambda_1^n, \lambda_1^{n-1}\lambda_2, \ldots \lambda_2^n)$ auch als symmetrische Func-

---

* Dass dieses Product nicht identisch Null ist, zeigen schon die einfachsten Beispiele. Ist z. B. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ ist, dann giebt die Reihe (II) die Reihe

$$2^n, 2^{n-1}, \ldots, 2, 1,$$

die keine gleichen Werthe enthält und somit ist das Product D von Null verschieden.

tion der Wurzeln λ_1 und λ_2 aufgefasst werden und als solche kann sie mittels der Coëfficienten der Gleichung

$$\varphi_2(\lambda) = 0$$

rational ausgedrückt werden, also:

$$S_i(\lambda_1^n, \lambda_1^{n-1}\lambda_2, \ldots, \lambda_2^n) = R_i(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2), \quad (i=1, 2, \ldots, n+1)$$

wo R_i wieder das Zeichen einer rationalen ganzen Function ist.

Auf Grund der bisherigen Betrachtungen haben wir also bezüglich aller die Gleichung

$$\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = 0$$

nicht befriedigender Coëfficientensysteme $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ das Bestehen der Gleichung

$$C_i(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = R_i(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \quad (i=1, 2, \ldots, n+1)$$

bewiesen, dann ist aber im Sinne eines bekannten algebraischen Satzes ihr Bestehen auch bezüglich jener Coëfficientensysteme $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ gesichert, für die

$$\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = 0,$$

so dass damit die Identitäten

$$C_i(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = S_i(\lambda_1^n, \lambda_1^{n-1}\lambda_2, \ldots, \lambda_2^n) \quad (i=1, 2, \ldots, n+1)$$

bezüglich aller (S) Inductor-Substitutionen als richtig erwiesen sind, womit zugleich auch unser Hauptsatz ganz allgemein erwiesen ist.

4. Die Determinante der inducierten Substitution.

Die Determinante der inducierten Substitution kann vermittels der oben eingeführten Bezeichnungen in folgender Weise angesetzt werden:

$$|I_n(S)| = \begin{vmatrix} r_{00} & r_{01} & \dots & r_{0\nu-1} \\ r_{10} & r_{11} & \dots & r_{1\nu-1} \\ . & . & \dots & . \\ r_{\nu-10} & r_{\nu-11} & \dots & r_{\nu-1\nu-1} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist — wie unmittelbar ersichtlich — nichts anderes, als das absolute Glied der charakteristischen Gleichung der inducierten Substitution also der Gleichung $\Phi_{kn}(\mu)=0$, und kann daher so geschrieben werden:

$$|I_n(S)| = \Phi_{kn}(0) = \prod_{(i)} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n},$$

wo das Product-Zeichen sich auf die Index-Combination $i_1, i_2 \dots i_n$ bezieht und auf die sämmtlichen Combinationen n-ter Classe mit Wiederholung der Elemente $1, 2, 3, \dots k$ erstreckt werden muss. Da aber dieses Product eine symmetrische Function der Wurzeln

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$$

ist, so wird $I_n(S)$ nach Ausführung der Multiplication in der Form

$$|I_n(S)| = (\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_k)^\alpha$$

erscheinen. Es ist nun das Product

$$\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_k$$

das absolute Glied der Gleichung

$$\varphi_k(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2k} \\ . & . & \dots & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

nämlich die Determinante

$$\varphi_k(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ . & . & \dots & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = |S|$$

so dass

$$|I_n(S)| = |a_{ij}|^{\alpha} = |S|^{\alpha}, \tag{III}$$

diese Gleichung zeigt aber schon, dass die Determinante der inducierten Substitution eine Potenz der Determinante der ursprünglichen Substitution ist. Nun soll noch schliesslich der Exponent α bestimmt werden. Da jedes Element der Determinante $|I_n(S)|$ vom Grade

$$\nu = \binom{n+k-1}{n}$$

an sich vom n-ten Grade in den Elementen a_{ij} ist, ferner die Determinante $|S|$ der Ausdruck k-ten Grades derselben Elemente ist, so ist im Sinne von (III)

$$n\binom{n+k-1}{n} = k\alpha$$

und daher

$$\alpha = \frac{n}{k}\binom{n+k-1}{n} = \frac{n}{k}\binom{n+k-1}{k-1} =$$

$$= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1).n}{1 \quad 2 \quad \ldots(k-1).k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1},$$

so dass

$$|I_n(S)| = |S|^{\binom{n+k-1}{n-1}};$$

diese Identität ist aber schon der Ausdruck des Satzes, dessen Richtigkeit zu erweisen war.

Es soll schliesslich zur Erläuterung des letzteren Satzes ein Beispiel angeführt werden: Es sei $n=2$, $k=3$ und es sei die Determinante der ursprünglichen Substitution S

$$|S| = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

alsdann ist im Sinne unseres Satzes die Determinante ihrer indu cierten Substitution zweiten Grades

$$|I_2(S)| =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & 2\alpha_1\alpha_2 & 2\alpha_1\alpha_3 & 2\alpha_2\alpha_3 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & 2\beta_1\beta_2 & 2\beta_1\beta_3 & 2\beta_2\beta_3 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_1\gamma_2 & 2\gamma_1\gamma_3 & 2\gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_3\beta_3 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1 & \alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1 & \alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2 \\ \alpha_1\gamma_1 & \alpha_2\gamma_2 & \alpha_3\gamma_3 & \alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1 & \alpha_1\gamma_3+\alpha_3\gamma_1 & \alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2 \\ \beta_1\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \beta_3\gamma_3 & \beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1 & \beta_1\gamma_3+\beta_3\gamma_1 & \beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2 \end{vmatrix} =$$

$$= |S|^4 \, \star$$

⋆ Diesen speciellen Fall unseres Satzes hat schon Eugen v. Hunyadi in seiner Abhandlung «Beitrag zur Theorie der Flächen 2-ten Grades» (Crelle Journal Bd. 89. p. 58.) aufgestellt und bewiesen. So ferner die Arbeit von A. Scholtz Műegyetemi Lapok Bd. II. pag. 68 und die Arbeit von Kürschák und Bauer Math. és Physikai Lapok Bd. IV. pag. 1 und pag. 207.

16.

JOHANN BOLYAIS THEORIE DER IMAGINÄREN GRÖSSEN.

Von PAUL STÄCKEL, Universitätsprofessor in Kiel.

Vorgelegt der ungar. Akademie in der Sitzung vom 15. Mai 1899 durch das ord. Mitgl. Jul. Kőnig.

1.

Dass Johann Bolyai, der Verfasser der *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* (Maros-Vásárhely 1832) auch der Theorie der imaginären Grössen seine Aufmerksamkeit zugewendet hat, war bereits 1868 von Herrn Baumeister Franz Schmidt bemerkt worden. Im Jahre 1853, so erzählte dieser, wollte er [Johann] einen Theil seiner mathematischen Arbeiten drucken lassen, denn unter seinen Papieren findet sich der Titel und Fragmente einer Abhandlung: «Principia doctrinae novae quantitatum imaginariarum perfectae uniceque satisfacientis aliaeque disquisitiones analyticae et analytico-geometricae cardinales gravissimaeque. Auctore Johanne Bolyai de eadem, geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco castrensium Capitaneo pensionato. Agropoli sive Maros-Vásárhelyini 1853».[1] In ähnlicher Weise äusserte sich 1884 Herr Koloman von Szily in seiner Lebensbeschreibung von Johanns Vater, Wolfgang Bolyai.[2]

Drei Jahre später hat Herr Joseph Koncz neue Aufschlüsse gegeben, indem er einen Brief veröffentlichte, den Wolfgang Bolyai am 7. November 1837 an seinen Freund Peter Bod ge-

[1] *Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya.* Grunerts Archiv der Mathematik und Physik. 48. Theil. Greifswald, 1868. S. 228.

[2] Adatok Bolyai Farkas életrajzához. Értekezések a mathematikai tudományok köréből. Budapest, 1884. S. 38.

richtet hat.[1] Hierin berichtet Wolfgang, dass ihn sein Kollege Professor Alexis Dósa auf eine in der *Allgemeinen Zeitung* mitgeteilte Preisaufgabe über die Theorie der imaginären Grössen aufmerksam gemacht habe, und bittet Bod dafür zu sorgen, dass die von ihm verfasste und an Alexius Katona gesandte Arbeit über diesen Gegenstand so rasch als möglich an Professor Kühn abgehe. Von seinem Sohne Johann erzählt Wolfgang: «Er las meine Arbeit und sagte, dass er absolut nicht schreiben würde; und neulich sah ich, als ich auf der Post war, die Unterschrift Professor Kühn über Erhalt seiner Arbeit, die aus einem Bogen besteht.»

Auf Grund dieser Angaben, die mir im März 1896 durch Herrn Baumeister Schmidt zugänglich gemacht wurden, hat sich der genaue Thatbestand feststellen lassen; bei den betreffenden Nachforschungen erfreute ich mich der Unterstützung der Herren Dr. Abendroth, Professor Engel und Geheimrath Scheibner in Leipzig, denen ich auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank sagen möchte.

Im Jahre 1834 hatte auf Veranlassung von M. W. Drobisch[2] die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig folgende Preisaufgabe gestellt:

«Quantitatum imaginariarum non solum in analyticis, sed etiam analytico-geometricis disquisitionibus usus nunc est satis frequens. Iam vero indigitavit Ill. Gauss, illas quantitates, quas sub specie fictitiarum tantummodo formarum vulgo contemplari solent, negativarum instar quantitatum explicatione intuitiva non omnino esse expertes. Fuerunt praeterea alii geometrae, e quibus inprimis nominandi sunt W. Cu. Buée, Mourey, Warren, qui has quantitates, ubi in geometricis occurrerint, construendas esse docere conarentur. Quae tamen quum adhuc dubia videantur, movet Societas quaestionem, possitne haec doctrina de construc-

---

[1] A Marosvásárhelyi Evang. Reform. Kollegium Története. Maros-Vásárhely, 1896. S. 292—293; der betreffende Abschnitt war schon 1887 im Programm des Kollegiums veröffentlicht worden.

[2] Vergl. auch Drobisch' Abhandlung: *Über die geometrische Construction der imaginären Grössen*, Berichte der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Bd. II. S. 171—179, gelesen den 5. September 1848.

tione quantitatum imaginariarum ita firmari et excoli, ut, quae lateant constructiones, ubicunque geometrae quantitatibus illis usi sint, e certis regulis explanari possint vel, si rei natura hoc non concedit, quibusnam conditionibus imaginaria liceat construere, luculenter appareat.»

In der Märznummer des Intelligenzblattes der *Allgemeinen Literatur-Zeitung* (Halle-Leipzig) vom Jahre 1837 (Spalte 111) wurde an diese Preisaufgabe erinnert und darauf hingewiesen, dass die Zeit der Einsendung der Arbeiten an den derzeitigen Secretär Prof. KÜHN mit dem Monat November des Jahres ende.

Drei Arbeiten gingen ein. Merkwürdiger Weise waren alle drei Verfasser Ungarn: Wolfgang Bolyai, Johann Bolyai und Franz Kerekes. Das Urtheil der Gesellschaft, das im März 1838 veröffentlicht wurde (vergl. auch die Aprilnummer des Intelligenzblattes vom Jahre 1838, Spalte 169), beginnt mit folgenden Worten:

«Quaestionem mathematicam de *quantitatum imaginariarum constructione* propositam quae tractarent, tres quidem Societati traditae sunt dissertationes, nulla tamen, quod vehementer dolemus, praemio digna videbatur.

Eteniam prima, symbolo: *Sigillum veri simplex* obsignata, sermonis obscuritate, indistincta notionum definitione, inutili signorum inusitatorum congerie et fructuum percipiendarum inopia admodum laborat, nisi fortasse hoc fructus loco accipere velis, quod auctor lineas curvas, quarum formulae e realibus tantummodo quantitatibus compositae sunt, nigro, illas vero, quae formulis imaginariis utuntur, rubro colori repraesentare suadet!

Parum laudabilior altera videbatur dissertatio, cui praefixa est sententia: *fructus non nisi maturi decerpendi*. Quae priori illi tum ratione quavis habita tum inprimis ea dissimilis non est, quod, quamquam minus graviter, tamen in eadem fere vitia omnia incidit, quae in recensenda illa reprehendimus.»

Es folgt die Besprechung der dritten Arbeit, deren Verfasser die Hälfte des Preises zufiel, ohne dass jedoch sein Name, geschweige denn seine Arbeit seitens der Gesellschaft veröffentlicht wurde.

Auf die Preisaufgabe vom Jahre 1837 beziehen sich ferner zwei Briefe, die Johann Bolyai an die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft gerichtet hat, und die sich noch jetzt in deren Archiv befinden. In dem ersten, datiert Domáld bei Elisabethstadt, den 30. December 1841, schreibt Johann, er habe durch Herrn Professor Bolyai die Abhandlung: *Fructus non nisi maturi decerpendi,* als deren Verfasser er sich bekenne, zurückerbeten; da aber die Gesellschaft dieselbe nur dem Verfasser selbst ausliefern wolle, erbitte er sie sich jetzt zurück, «indem ich solche (wie dessen auch darin erwähnt wird) als Wechselfieberpatient in der Eile verfasste oder vielmehr aus schon fertigen Ideen zusammensetzte, sodass ich nicht einmal eine genaue Abschrift davon behalten konnte.» In einem zweiten Briefe, der nach dem in Johanns Nachlass befindlichen Aufgabs-Recepisse zu schliessen, am 28-ten Februar 1842 von Elisabethstadt abgegangen ist, wiederholt Johann seine Bitte aufs dringendste und fordert, dass ihm die Abhandlung unverweilt zurückgesandt werde, widrigenfalls er sich an den König von Sachsen wenden müsse.

Inzwischen war, nach einem Vermerk auf dem ersten Briefe, die Schrift bereits am 15. Februar an ihn abgegangen. Man durfte daher hoffen, dass sich Johanns Abhandlung über imaginäre Grössen in dessen Nachlass befinde, der in der Bibliothek des ev. ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely aufbewahrt wird und eine riesige Kiste füllt. Als ich mich im März 1898 dorthin begeben hatte, wurde mir seitens des Kollegiums in der freundlichsten Weise erlaubt, diese Papiere durchzusehen. Bei dieser Gelegenheit fand ich nicht nur die bereits 1868 von Herrn Baumeister Schmidt erwähnten Fragmente der *Principia doctrinae novae,* sondern auch ein sauber geschriebenes Manuscript von 8 Seiten Grossquart, also gerade einem Bogen, das mit dem Motto: *Fructus nonnisi maturi decerpendi* beginnt. Meine Vermuthung, dass hier die Abhandlung vom Jahre 1837 vorliege, gewann eine weitere Stütze durch den beachtenswerten Umstand, dass in den Blättern ausser dem schon erwähnten Aufgabs-Recepisse vom 28. Februar 1842 auch das in Wolfgang Bolyais Schreiben an Bod erwähnte *Retour-Recepisse* lag, das die Unterschrift D. Kühn trägt und Leipzig, den 17. October 1837 datiert ist. Ein Bedenken, das man geltend machen könnte, darf freilich nicht verschwiegen werden: Johann sagt in dem Brief vom 30. December 1841, in der Abhandlung sei erwähnt, dass er sie als Wechselfieberpatient in der Eile verfasst habe. Eine solche Bemerkung persönlicher Natur ist nun in jenem Manuscripte nicht erhalten, das einen streng wissenschaftlichen Charakter trägt. Ob man aber glaubt, wie ich es thue, dass jener späteren Äusserung Johanns kein erhebliches Gewicht beizulegen sei, und dass ihn dabei sein Gedächtnis getäuscht habe, oder ob man andrer Ansicht ist: auf jeden Fall giebt uns das Manuscript mit dem Motto: *Fructus nonnisi maturi decerpendi* die Ideen über die Theorie der imaginären Grössen, die Johann Bolyai in seiner Abhandlung vom Jahre 1837 entwickelt hat.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen gehe ich dazu über, die Manuscripte über die imaginären Grössen, die ich in Maros-Vásárhely aufgefunden habe, kurz zu charakterisieren:

1) Ein Entwurf der Abhandlung vom Jahre 1837, 18 Seiten Folio (dazu 16 kleinere Zettel), der sich auf die ersten 8 Paragraphen der Abhandlung bezieht. Weggelassen ist bei dieser die Einleitung des Entwurfes. Ich werde die Einleitung später in Beilage A mitteilen, da sie für die Erkenntniss der grundlegenden Gedanken des Verfassers von Wichtigkeit ist.

2) Ein Manuscript mit dem Motto: *Fructus nonnisi maturi decerpendi,* das ich als die Abhandlung vom Jahre 1837 bezeichne. Es wird als Beilage B vollständig abgedruckt werden. Bei dem Abdrucke sind verschiedene Zusätze, die Johann später gemacht hat und die als solche durch ihre Stellung, durch die flüchtigere Schrift und die dunklere Tinte kenntlich sind, mitaufgenommen, aber zum Unterschiede *cursiv* gesetzt worden.

3) Vorarbeiten zu den *Principia doctrinae novae:*

a) 20 Seiten Grossfolio, auf die 8 ersten Paragraphen der Abhandlung vom Jahre 1837 bezüglich;

b) 28 Seiten Octav auf §§ 10 und 12 bezüglich.

Diese Papiere lassen sich am besten bezeichnen als eine Paraphrase der genannten Paragraphen. Als lehrreiches Beispiel teile ich in Beilage C die neue Fassung des § 10 der Abhandlung mit. Man wird daraus erkennen, dass inhaltlich zu dem ursprünglichen Texte nichts Wesentliches hinzugekommen ist.

Nebenbei sei darauf hingewiesen, dass aus der inhaltlichen Übereinstimmung dieser Manuscripte mit der Abhandlung: *Fructus* etc. ein neues Indicium dafür gewonnen wird, dass hier wirklich die der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft eingereichte Schrift vorliegt.

Von einer Weitschweifigkeit, die fast an pathologische Zustände gemahnt, ist die Darstellung in dem

4) Manuscript der *Principia doctrinae novae*, das 47 Seiten Grossfolio umfasst, wozu 14 grössere und kleinere Zettel kommen, denn nicht weniger als 37 Seiten beziehen sich auf §§ 2 und 3 der Abhandlung; damit bricht das Manuscript ab. Wichtiger ist die Einleitung, S. 1—10, da sie über den Inhalt des geplanten Werkes Aufschluss giebt; es handelte sich danach nur um eine verbesserte und erweiterte Darlegung der in der Abhandlung vom Jahre 1837 dargelegten Theorie, die Johann in der Einleitung als «quoad essentiam jam anno 1831 excogitata» bezeichnet. Man gewinnt hiernach den Eindruck, dass Johanns Productivität sich schon früh erschöpft habe, ein Eindruck, der durch die sonstigen im Nachlasse befindlichen Aufzeichnungen nur verstärkt wird. Als Probe gebe ich in Beilage D den Schluss der Einleitung, der dem Paragraphen 1 der Abhandlung vom Jahre 1837 entspricht und von dem Inhalte der *Principia* handelt.

2.

Nach dem Vorhergehenden genügt es für die Beurteilung dessen, was Johann Bolyai in der Theorie der imaginären Grössen geleistet hat, den Entwurf und die Abhandlung vom Jahre 1837 (Beilage A und B) in Betracht zu ziehen. Man wird dabei zwei wesentlich verschiedene Fragen zu beantworten haben, einmal wie sich Johanns Abhandlung zu der Preisaufgabe der Jablonowski'schen Gesellschaft verhält und dann welcher Werth ihr, wenn man sie von dem Standpunkte der Geschichte der complexen Grössen aus betrachtet, beizulegen ist.

Was die erste Frage betrifft, so verlangte die Gesellschaft, «dass entschieden werden solle, ob die Lehre von der Construction der imaginären Grössen sich so begründen und ausbilden lasse, dass vermöge derselben nach sicheren Regeln die Constructionen angegeben werden können, die überall, wo sich die Geometer der imaginären Grössen bedienen, versteckt liegen mögen; oder wenn dieses unmöglich, dass wenigstens die Bedingungen erhellen, unter denen jene Grössen construierbar sind.» Auf den eigentlichen Gegenstand der Preisaufgabe bezieht sich also nur der § 10 und ein Teil des § 11 der Abhandlung. Man wird daher sagen müssen, dass Johann für die Anwendung der in §§ 1—7 entwickelten Theorie der imaginären Grössen auf geometrische Constructionen recht wenig gethan hat, und dass DROBISCH gegenüber dem stolzen Motto: *Fructus nonnisi maturi decerpendi* mit Recht von dem «Mangel einzuerntender Früchte» sprechen durfte, den auch die Theorie des Logarithmus in § 8 nicht ersetzen kann. Ebensowenig lässt sich nicht leugnen, dass die Darstellung jener Theorie an Klarheit und Einfachheit viel zu wünschen übrig lässt; ja der Excurs über nichteuklidische Geometrie (§ 9), so interessant er an und für sich auch ist, war damals für den nicht eingeweihten Leser gänzlich unverständlich.*

Demnach wird man der Gesellschaft aus dem Urtheil, das sie «zu ihrem lebhaften Bedauern» fällen musste, keinen Vorwurf machen und Johann nicht beistimmen können, der seinem Unmuthe an dem Rande des Entwurfes mit den bitteren Worten Luft machte: «*Schade, dass dieser grosse Schatz in unwürdige Hände fiel.*»

Gewiss, Johanns Theorie der imaginären Grössen war ein grosser Schatz, sie war ein bedeutsamer Schritt von dem Standpunkte, den GAUSS eingenommen hatte, nach der Richtung der modernen Auffassung der complexen Grössen. Allein was wir jetzt deutlich und klar sehen, war für Johann noch in Dunst und Nebel gehüllt. Er hat in genialer Intuition die Lösung des Problems geahnt, allein er ist nicht im Stande gewesen, sie in durchgebildeter, anderen verständlicher Darstellung zu formulieren. Es ging ihm hier wie seinem Vater, dessen *Tentamen* an so

* Es verdient bemerkt zu werden, dass Johann dabei die Bezeichnungen *Parasphäre* und *Hypersphäre* anwendet, die GAUSS in dem Briefe an Wolfgang Bolyai vom 6. März 1832 vorgeschlagen hatte.

manchen Stellen zeigt, wie Wolfgang Problemen der modernen Mathematik ganz nahe kam, ohne sie aber greifen zu können.

Indem ich mich hiermit zu der Beantwortung der zweiten Frage wende, muss ich vor allem auf den Einfluss eingehen, den Wolfgang Bolyais Arbeiten auf Johanns Theorie der imaginären Grössen gehabt haben; es ist das um so nöthiger, als diese Arbeiten bis jetzt ganz unbeachtet geblieben sind und selbst in der neuesten Darstellung der Theorie der complexen Grössen keine Erwähnung gefunden haben.[1] Ein solcher Einfluss ist auch bei Johanns geometrischen Arbeiten unverkennbar, und mit Recht sagt F. Engel: «Gauss, Schweikart und Lobatschefskij waren reife Männer, als sie die Lösung des Räthsels [der Parallelentheorie] fanden, und bei jedem von diesen waren lange Jahre vergeblicher Anstrengungen vorhergegangen, während J. Bolyai schon als einundzwanzigjähriger Jüngling die Wahrheit erkannte, nachdem er sich höchstens drei bis vier Jahre ernstlich mit dem Gegenstande beschäftigt hatte. Dafür hatte aber auch Johanns Vater, Wolfgang Bolyai, länger als zwei Jahrzehnte vergeblich mit den Schwierigkeiten der Parallelentheorie gerungen; die gewaltige geistige Arbeit, die Gauss, Schweikart und Lobatschefskij jeder für sich allein vollbracht haben, vertheilt sich eben bei den beiden Bolyai auf zwei Generationen.»[2]

Johann selbst hat auch, trotz vieler unerquicklicher Streitigkeiten, nie aufgehört, in seinem Vater, der ihn persönlich in die Mathematik eingeführt hatte, den dankbar zu verehrenden Lehrer zu erblicken, dem er, um einen Ausdruck Kroneckers zu gebrauchen, sein «mathematisches Dasein» verdankte. Das zeigen viele Stellen des Nachlasses, unter andern auch der Anfang der Beilage D, wo er seinen Vater als sein Vorbild bezeichnet und geradezu mit Euklid in eine Reihe stellt.

Unverkennbar ist Wolfgang Bolyais Bestreben, die beiden Disciplinen der Arithmetik und Geometrie, die er im *Tentamen*

---

[1] E. Study: *Theorie der gemeinen und höheren complexen Zahlen.* Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. I. Leipzig, 1899. S. 147—183.

[2] Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij: *Zwei geometrische Abhandlungen.* Zweiter Theil. Leipzig, 1899. S. 382—383.

als «arbores corradicatae coronisque confluentibus» bezeichnet, im Gegensatze zu der bis weit in das neunzehnte Jahrhundert hinein üblichen Vermischung, jede für sich selbständig zu begründen; wenn auch viel fehlt, dass er diese Trennung consequent durchgeführt hätte. Sehr bezeichnend für diese Tendenz ist eine Äusserung, die sich bei seinem Berichte über Gauss' ersten Beweis für die Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen findet.[1] Nachdem er Gauss' Abhandlung als die «primitiae messis ditissimae» begeistert gelobt hat, fühlt er sich doch in seinem mathematischen Gewissen verpflichtet hinzuzufügen: «fit quidem Geometriae subsidio; sed veritas veritati heterogenea non est.»

Auf demselben Standpunkte steht Johann, der (in § 11) gegen Gauss' Theorie der imaginären Grössen[2] mit Recht einwendet, dass die daselbst verwendeten Begriffe von *rechts* und *links*, von *oben* und *unten* nicht bestimmt genug sind und dass überhaupt in der Arithmetik geometrische Betrachtungen vermieden werden müssen.

Die Vermischung von Arithmetik und Geometrie hatte ihren Grund in dem seit dem Aufkommen der analytischen Geometrie stillschweigend usurpierten Gebrauch *stetig* veränderlicher Zahlengrössen, der sich an die Darstellung der Werthe einer solchen Grösse durch die Punkte einer Geraden knüpfte. Die Zahl ist jedoch ihrem Ursprunge nach discreter Natur, und es entsteht so eine Discrepanz, die schon in Euklids Erklärung der Proportion ihren Ausdruck gefunden hat. Wolfgang hat sich damit geholfen, dass er die Zeit als den Träger der stetig veränderlichen Grösse wählte, ein Verfahren, das in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts vielfach angewandt worden ist, obwohl es die Schwierigkeit nicht beseitigt, sondern nur verlegt. Dieses Hineinziehen der Zeit, das als ein interessantes Übergangsstadium zu einer rein arithmetischen Begründung des Begriffes der stetigen Veränderlichkeit auftritt, aber leider noch keine eingehende historische Dar-

[1] *Tentamen.* T. I., Seite 425, ed. sec. S. 461.

[2] Selbstanzeige der *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda,* Göttingische Gelehrte Anzeigen vom 23. April 1831, wiederabgedruckt in den Werken Bd. II, S. 169—178.

stellung gefunden hat, findet sich auch bei Johann, der in seiner Abhandlung wiederholt die «durationes» zur Darstellung der bei ihm auftretenden Zahlengrössen benutzt.

Von ganz besonderer Wichtigkeit für Johanns Untersuchungen ist die Theorie der negativen Grössen, die sein Vater im *Tentamen* entwickelt hat. In dem zweiten Paragraphen des Entwurfes (Beilage A) bringt Johann im Grunde Wolfgangs Gedanken zum Ausdruck, jedoch mit einer Klarheit und Schärfe, zu der dieser selbst sich niemals durchgerungen hat. Er besteht in der fundamental wichtigen Erkenntniss, dass die negativen Grössen erst dann einen Sinn gewinnen, wenn man den Grössen zwei «Determinationen» beilegt oder mit andern Worten, wenn man neben der ursprünglichen Einheit «+1» eine neue Einheit «—1» einführt, eine Einsicht, worin Wolfgang freilich schon Buée (1806) zum Vorgänger hatte.* Durchdrungen von der Bedeutsamkeit seines Gedankens hat Wolfgang im Gegensatze zu den Zeichen des Hinzuthuns und Wegnehmens «+» und «—» für die positive und negative Einheit zwei besondere Zeichen «⊹1» und «⊢⊣» eingeführt. Für die Begründung der Theorie der negativen Grössen mögen die neuen Zeichen ihren Nutzen haben, aber es empfiehlt sich, diese Fesseln bald wieder abzustreifen, sonst wird die Darstellung unnöthig lang und schwerfällig.

Aus der naturgemässen Weiterentwickelung von Wolfgang Bolyais Theorie der negativen Grössen ist Johanns Theorie der imaginären Grössen hervorgegangen; der Vater hat dem Sohne auch hier «vorangeleuchtet». Ehe ich indessen hierauf ausführlicher eingehe, möchte ich einige wenige Worte über Wolfgangs Theorie der imaginären Grössen

---

* *Mémoire sur les quantités imaginaires*, read 20. Juni, 1805. Philosophical Transactions, London 1806. Daselbst heisst es auf Seite 24:

Chacun des signes + et — a deux significations tout-à-fait différentes.

1°. Mis devant une quantité q. ils peuvent designer, comme je l'ai dit, deux *opérations arithmétiques* opposées dont cette quantité est le sujet

2°. Devant cette même quantité ils peuvent désigner deux *qualités* opposées ayant pour sujet les *unités* dont cette quantité est composée.

sagen, der diesen Gegenstand wiederholt behandelt hat.* Wolfgang denkt sich jede Grösse mit einer Einheit behaftet, deren Wahl noch frei steht, so dass das Zeichen $\sqrt{a}$ bei geeigneter Wahl der Einheit stets etwas Reelles bedeutet. «Sit igitur fas, ea quorum realitas multiplicationi quoad $+1$ innititur, *realia quoad* $+1$ (breviter *realia*), illa vero quorum realitas multiplicatione quoad -1 innixa est, *realia quoad* -1, sive *pure imaginaria* dicere.» Grössen der Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, wo α und β reell sind, nennt er *imaginaria*. Besondere Schwierigkeiten macht ihm die Multiplication imaginärer Grössen, die er auf den Begriff der «divisio absoluta» gründet. Die diesbezüglichen Auseinandersetzungen sind recht dunkel und die Durchführung ist, wie Johann in § 11 mit Recht bemerkt, stellenweise nicht fehlerfrei.

Ganz anders verfährt Johann: er führt sofort 4 Einheiten ein, $\vdash\!+\!\dashv 1$, $\vdash\!-\!\dashv 1$, $\vdash\!\dotplus\!\dashv 1$ $\vdash\!\cdot\!\dashv 1$, die beiden ersten nennt er reell und entgegengesetzt, die beiden letzten imaginär und entgegengesetzt, und entwickelt nun sorgfältig und ausführlich die Regeln, nach denen mit diesen viertheiligen Grössen gerechnet wird, die man, wie er ausdrücklich darlegt, stets auf die reducierte Form $\alpha+\sqrt{-1}\beta$ bringen kann, wo α und β positive oder negative reelle Grössen bezeichnen. Freilich hat er sich diese Aufgabe erheblich erschwert, indem er, ganz dem Ideengange seines Vaters folgend, neben den Zeichen der Einheiten $\vdash\!+\!\dashv$, $\vdash\!-\!\dashv$, $\vdash\!\dotplus\!\dashv$, $\vdash\!\cdot\!\dashv$ noch die entsprechenden Zeichen der Operationen $+$, $-$, $\dotplus$, $\dot{-}$ einführt, sodass seine Theorie unnöthig compliciert erscheint. Das ist jedoch nur ein äusserlicher Mangel, der nicht daran hindern kann, den

* *Tentamen*, t. I. S. 105—118, ed. sec. S. 121—136; vergl. auch S. 177, ed. sec. S. 202, t. II. S. 357—371, ed. sec. t. I. S. 524—539, vergl. auch die Errores zu t. I. S. LIV—LVIII, ed. sec. S. 540—543 und endlich die später gedruckten Errores zu t. I. S. LXXVI—LXXXVI, ed. sec. S. 544—555. Die Ausführungen an dieser letzten Stelle sind von W. Bolyai für den «Kurzen Grundriss» vom Jahre 1851 benützt worden, siehe besonders S. 25—26. Ich bin geneigt, diese letzte Darstellung in den *Errores* für die 1837 der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft eingereichte Abhandlung zu halten; eine genauere Begründung dieser Vermuthung ist hier nicht am Platze.

wesentlichen Fortschritt anzuerkennen, den Johanns Theorie der imaginären Grössen für die damalige Zeit bedeutete.

Das gilt allerdings nur mit einer Einschränkung. Als Johann seine Schrift nach Leipzig sandte, war bereits eine Abhandlung[1] erschienen, in der die moderne Auffassung der gewöhnlichen complexen Zahlen als Paare reeller Grössen in voller Deutlichkeit ausgesprochen und durchgeführt worden war. Ihr Verfasser war kein anderer, als HAMILTON, der bekannte Entdecker der *Quaternionen.* Aus dieser bemerkenswerthen Abhandlung, die seiner Zeit nicht beachtet wurde und erst neuerdings gebührend gewürdigt worden ist,[2] möge hier folgende Stelle Platz finden (a. a. P. S. 417—418), die so zu sagen die Quintessenz von Hamiltons Theorie enthält:

«In the *theory of single numbers,* the symbol $\sqrt{-1}$ is *absurd,* and devotes an *impossible extraction,* or a merely *imaginary number;* but in the *theory of couples,* the same symbol $\sqrt{-1}$ is *significant,* and denotes a *possible extraction,* or a *real couple,* namely the *principal square-root of the couple* $(-1,0)$. In the latter theory, therefore, though not in the former, this sign $\sqrt{-1}$ may properly be employed; and we may write, if we choose, for any couple (a_1, a_2) whatever,

$$(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \sqrt{-1},$$

interpreting the symbols a_1 and a_2, in the expression $a_1 + a_2 \sqrt{-1}$, as denoting the pure primary couples $(a_1, 0)$, $(0, a_2)$, — — — and interpreting the symbol $\sqrt{-1}$, in the same expression, as denoting the secondary unit or pure secondary couple $(0, 1)$.»

Unzweifelhaft besitzt HAMILTONS Abhandlung erhebliche Vorzüge vor der Johanns. Nicht nur ist seine Darstellung bei weitem klarer und vollständiger, sondern Hamilton sieht auch

---

[1] *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples,* read 4. Nov. 1833 and 1. Jun. 1835. Transactions of the Royal Irish Academy. Vol. XVII. Dublin, 1837. S. 293—423.

[2] STUDY, a. a. O. S. 149, wo wohl der Umstand hätte Erwähnung finden sollen, dass HAMILTON augenscheinlich von GAUSS' Theorie der complexen Zahlen nichts gewusst hat.

weiter, er weiss schon damals, dass man eine entsprechende Theorie für Grössen mit mehr als zwei oder, wenn man die beiden negativen Einheiten besonders zählen will, mit mehr als vier Einheiten aufstellen kann (S. 422.) Johann behauptet zwar (§ 3), dass man genau seine vier Einheiten, $+1$, -1, $\dotplus 1$, $\dot{-}1$ einführen müsse, nicht mehr und nicht weniger, aber er bleibt den Beweis schuldig. Während ferner Johann die Regeln für die Multiplication complexer Grössen ohne jede Begründung, so zu sagen durch einen Machtspruch einführt, giebt Hamilton auf Grund des distributiven Gesetzes die allgemeinste Formel der Multiplication und bemerkt dazu, dass es sich aus Gründen der Zweckmässigkeit empfehle, die darin auftretenden Constanten so zu wählen, dass man auf die gewöhnlichen complexen Zahlen kommt. Zu Gunsten von Johann ist freilich geltend zu machen, dass dieser sich vollkommen darüber klar war, dass die Regeln des Rechnens mit imaginären Grössen erst definiert werden müssen und dass es hier ebenso, wie bei den negativen Grössen (vergl. § 2 des Entwurfes), keineswegs erlaubt ist, die für die gewöhnlichen Zahlen geltenden Rechnungsregeln ohne weiteres auf die neuen Zahlen zu übertragen. Diese richtige Erkenntniss zeigt sich besonders darin, dass Johann gegen Gauss' Deduction, dass die ganzen complexen Zahlen durch die Punkte eines quadratischen Gitters in der Ebene dargestellt werden müssen, mit Recht den Einwand macht, Gauss dehne dabei den Begriff der Proportion, der zunächst nur für reelle Grössen gilt, in unzulässiger Weise auf imaginäre Grössen aus.

Alles in allem wird man sagen dürfen, dass, wenn Johann auch nicht die Kraft hatte, seine Ideen abzuklären und auszugestalten, wenn es ihm auch leider nicht beschieden war, die vielversprechende Früchte seiner Jugend reifen zu lassen, seine Leistungen in der Theorie der imaginären Grössen doch des Verfassers der *Appendix* nicht unwürdig sind und ihm für immer einen Platz in der Geschichte dieser Theorie sichern.

Beilage A,

§ 1 und 2 des Entwurfes enthaltend.

Responsio ad quaestionem, veram indolis quantitatum (vulgo) imaginariarum dictarum expositionem concernentem, ab Inclyta Societate Scientiarum Jablonowskiana Lipsiae d. d. . . ta Martii 1837 motam.

§ 1.

Cum quisque in functionibus animae suae exercendis eum in finem ut in aliis quoque eaedem repraesentationes ut in nobis ipsis exsurgant adeoque [in] condendo quovis systemate scientifico, necessario formatione seu constructione conceptuum, sive determinatione sensus omnium vocum aliorumve signorum in discursu occurrentium per quasdam voces seu conceptus simplices ac indefinibiles (quales, cum omnia definire manifesto impossibile naturaeque systematis scientifici repugnans sit, necessario adsunt et quarum significationem aliis nonnisi per immediatam promonstrationem(?) et nonnisi imperfecte enuntiare possumus et qualium aliquas libro construendo tanquam notas supponere coacti sumus) inchoare debeat; et postea, positis propositionibus quibusdam simplicissimis ac haud amplius ex aliis deductibilibus ac per se jam satis claris (e qualibus itidem necessario exundum est) cujusvis alius propositionis veritas aut falsitas (quando formâ theorematis exhibetur), possibilitas aut impossibilitas (siquidem sub forma problematis nunciata fuerit) haud aliter quam disquirendo, num ea ex axiomatibus positis (vim definitionum probe retinendo, secundumque certas leges (logices) concludendo seu procedendo) consequantur aut minus, decidenda sit: disquisitio praesens manifesto reduci potest ad tria momenta sequentia:

1^mo^ definire quid sub quantitatibus imaginariis intelligendum sit;

2do definire quid sub constructione earundem quantitatum intelligatur;

3tio denique decidere, num quantitates imaginariae construi possint an secus? atque in casu primo modum talis constructionis ostendere.

Quae omnia jam methodo debita omnique quae desiderari potest claritate aggredimur absolvemusque; qui contemplationis modus, ad quem uti ad totius theoriae verae quantitatum imaginariarum aeque ac realium momenta praecipua auctor occasione infra dicenda multos jam abhinc annos pervenit, ei per longum usum perfamiliaris factus est. At hic tantum summa brevitate necessarium ex theoria ipsa excerpere proferreque licet: quae vero ad scopum praesentem sufficient.

§ 2.

Nil omnino absurdius, rationique magis dissentaneum excogitari potest, quam conamen majus ex minori demendi, discursusque de quantitatibus ipso 0 minoribus maxime vanus, tempora testatur, quibus nonnunquam vel geometris insignissimis veritatem simplicem velo mysterioso oculo sano impenetrabili involvere placeret, tractatione rei superficiali resultatisque speciem habentibus deceptis et contentis nullumque idcirco scrupulum ulteriorem moventibus. Si e. g. debitum tamquam bonum negativum, via ad sinistram ut negativa via ad dextram, hyperbola (in geometria vulgari, theorematі, ab ipso Euclide perperam sub forma axiomatis XI. assumti innixa) ut ellipsis axis minoris imaginarii censeatur et vice versa vel si de quantitatibus loqueris, quae positivis dictis additae illas diminuant (ita ut $a+b$ fiat minor quantitate positiva a, imo talis evadere possit, ut et ipsa quantitati positivae addita hanc non augeat), voces dextrum, sinistrum, hyperbola, ellipsis, additio in sensu communi accipiendo (ut quidem, si essentiam rei spectes, tamen omnino mos est) re accuratius examinatâ ecquisne hoc approbaturus est, et quis potius non dixerit, tali modo naturae vim illatam fore, quippe cum tales propositiones omnino contradictoriae sint. Namque etsi significatio ipsius $a-b$ vulgo data optime concipi possit, usque dum est $a>b$; expressio illa sensum haud amplius habebit, simulac est $a<b$. Committiturque paralogismus crassissimus, extendendo ea, quæ proprie nonnisi de iis casibus, ubi demendum minus quam diminuendum est, valent, generaliter ad alios quoque casus tractandoque postea talos complexus ut $-b$ (quae secundum definitionem nonnisi quantitatibus ipso b majoribus postpositae, seu adjunctae sensum habent) tanquam signa quantitatum.

Et sunt hoc modo definitae jam quantitates negativae ipsae vere impossibiles, seu tales non existunt. Atque eodem jure, si tè demonstravisse credideris duos factores tam positivos quam negativos factum positivum producere, nec factores alius indolis praeter tales admiseris, utique recte contenderis, quantitatem, cujus quadratum negativum sit, seu radicem quadratam ex negativo prorsus impossibilem esse. At si ad talem complexum symbolorum, ut $\sqrt{-1}$, cui nullum objectum respondet (quasi imaginem absque originali), delapsus, theorematibus ut tuis certam generalitatem elegantiamque conciliare possis, tales complexus tamen retineas, operationibusque calculi subjicias — ipsum $\sqrt{-1}$ nonnisi tamquam rem omni ulteriori significatione carentem contemplando — effugium hocce non solum menti semper objectum suum intueri intuitivamque cognitionem assequi cupienti neutiquam satisfaciens est, sed omnimodo a soliditate geometrica abhorret dignitasque scientiae utilissimae certitudineque perfecta gaudentis hoc modo tanquam ludibrium inane, resultataque chimaeris superstructa merito dubiosa censerentur. Quid enim juvat scire vel potius quem sensum habet e . g. propositio, cuivis aequationi algebraicae ordinatae satisfieri posse per valorem incognitae talem $a+b\sqrt{-1}$ (designantibus a, b quantitates reales) dum ideam quâ res $\sqrt{-1}$ per quantitatem b multiplicari possit, fingere non potes? Et quî potes de resultati tui exactitudine convictus esse, dum in eliciendo illo impossibilia et non entia fictaque tamquam possibilia atque existentia veraque tractaveris? At metaphysica totius hujus argumenti longe alia est paullo inferius summa simplicitate exponenda quamvis remedium etiam his inconvenientiis modo sequenti haud difficulter affertur. Quantitates vulgo positivae dictae (ut, uti necesse est, ad fundamentum recurramus) nil aliud sunt, quam quantitates ipsae absolutae. Si jam (quâvis litera quantitatem denotante) debeat esse $a+x=c$ ipso a minori: manifesto ex a demi debebit illi b quo a ipsum c superat, aequale; et si in hoc casu ipsum x per $-b$ denotes, [ita ut] $a+(-b)<a$, erit quidem omnino $-b$ tanquam quantitas ipsi a homogenea non existens: at si (quod potest) $-b$ denotet quantitatem quamcunque ipsi a heterogeneam, vel ipsum $-b$ (complexum seu materiam signorum $-$ et b intelligendo) sit quantitas, e. g. si sint a, b durationes (tempora) et $-a$, $-b$ rectae, atque definitionem statuas, talem expressionem $a+x$, donec x cum a homogeneum fuerit, denotare ipsorum a, x summam (in sensu vulgari); si vero (ut casum $x=0$ brevitatis caussa hic praeteream) fuerit x ipsi a heterogeneum, tum $a+x$ denotet ipsum a ea quantitate diminutam, ad quam ita se habet x (geometrice) ut $-a:a$, siquidem 4-ta haecce proportionalis ad $-a$, a, x ipso a non major fuerit, secus autem ipsum x quantitate $-a$ diminutum: expressiones formae $-b$ omnino sensum habebunt, inque additione absque difficultate tractabiles erunt, modo b aliquod et ei respondens $-b$ figatur seu detur. Si nempe (brevius) 1 denotet quantitatem quamcumque (fixam) ejusdem generis cum a, -1 vero quantitatem arbitrariam (fixam) ipsi x homogeneam: $a+x$ designet a minus ipso $x\,.\,1$, si sit hoc $<a$; et x minus $a\,.-1$, si sit $x\,.\,1>a$; in casu aequalitatis denique sit $a+x=0$.

Fas utique licitumque est, conceptus utvis construere (e. g. polyedron regulare a hexagonis clausum signo quolibet denotare, deque eo loqui) modo post datas definitiones nil inepte asseras. (Qua occasione tamen adnoto, sermonem de rebus, quarum realitas nondum constat quae adeoque forsan haud existunt, etsi nulla contradictio (logica) manifesta adfuerit, nonnisi hypothetice admissibilem inque scientia solida pro ineleganti atque prorsus inutili simplicitatique naturali contrariam reputandam). Et habent fundamentum omnes quae in mathesi (pura) nonnunquam vel inter viros magnae reputationis exortae sunt disputationes in notionibus obscuris. Ita e. g. certe nunquam Leibnitius ac J. Bernoullius tantum litem de existentia logarithmorum quantitatum negativarum movissent, modo notiones distinctas clarasque habuissent, anteque omnia (secundum praecepta logices) objectum disputationis clare fixissent.

Sed ne ut nimis longus fiam, veram naturae objecti nostri expositionem aggredior quae simplicitate, evidentiaque verbo omni respectu omnem scrupulum possibilem tollit, cuique satisfecerit, absque dubio nihil amplius eatenus desiderandum linquit. Res variis modis exponi (absolvi) potest, quos, ut a pluribus lateribus illustretur, omnisque quae hic desiderari potest lux objecto cardinali tam obscuro magnique momenti affundatur, non piget inutileque erit generalissimis contemplationis modis seorsim proferre.

Beilage B,

die Abhandlung vom Jahre 1837 enthaltend.

Fructus nonnisi maturi decerpendi.

Responsio ad quaestionem, discussionem dubii, num, et quibusnam conditionibus, quantitates vulgo pro imaginariis habitae, in geometria occurrentes construi possint necne, concernentem, ab Inclyta Societate Scientiarum Jablonowskiana Lipsiae anno 1837 motam.

§. 1.

Cum quaestio praesens nonnisi circa constructionem imaginariorum a geometris usurpatorum versetur: plus quam desideratur praestamus

1^mo^ indolem (non solum imaginariarum sed) omnis generis quantitatum in calculo occurrentium, quaeque objecta speculationis esse possunt, sive potius modum, quo quantitates operationibus calculi subjici possunt, (summa brevitate) indigitantes (completam expositionem hujus rei, quae hic neque exspectatur neque ob brevitatem necessariam praestari potest, systemati totius scientiae reservantes);

2^do^ definientes quid sub constructione quantitatum hac quidem occasione intelligi debeat;

3^tio^ denique decidentes num imaginaria construi possint aut secus?

§. 2.

Quantitas quaevis in se vel per se neque realis positivaque est, neque existentia rerum *(eatenus quod, vel in quantum quidvis vel existit vel non existit)* gradus diversos modificationesque habet: sed possunt utique aequalia per locum, vel per tempus, vel per alias quasvis conditiones (quarum ingens multitudo facillime excogitari potest), imo res eadem quoque *diverso respectu vel* ad diversas *res* relata (sive sortiatur nomina quoad has res aequalia sive non) distingui. E.g. secundum notiones vulgares sec $(x+2\pi)$ (designante π quadrantem pro radio 1, quod quidem inusitatum fuit) recta cum sec x identica est, quæ tamen, tamquam sec x, a se ipsa, tamquam sec $(x+2\pi)$ considerata, utique distingui potest, ita ut arcus fine in secantem cadente, secans haud inepte e.g. positiva dicatur, in casu contrario tamquam negativa spectata. *Aequalia diversis qualitatibus praedita esse possunt. Et similiter potest esse persona eadem simul et semel et pater et filius quoad diversas personas.* Et sunt denique complexus a et P; a et Q; a et R etc. manifesto omnes diversi, siquidem $P, Q, R, \ldots$ diversa denotent.

§. 3.

Ut rem summa generalitate amplectamur (materiae hactenus tam obscurae omne quod desiderari potest lumen affundentes), sit 1 quantitas certa (finita), e.g. duratio; $a, b, c, \ldots$ quantitates quaecumque huic 1 homogeneae, assumtisque quatuor characteribus

$$+,\ -,\ \dot{+},\ \dot{-}$$

(ideoque solummodo non pluribus paucioribusve, quia ut satis apparebit, scopus disquisitionum plane 4 requirit) qui vel etiam signa rerum a quantitatibus tractatis diversarum esse possunt, vel omni ulteriori signifi- [2] catione carentes tamquam res substantivae considerari poterunt: designet quodvis ipsorum

$$+1,\ -1,\ \dot{+}1,\ \dot{-}1$$

quantitatem certam arbitrariam cujusvis generis, e.g. durationem, rectam, portionem helicis etc., ita ut omnes hae 4 quantitates etiam heterogeneae evadere possint; designetque, quàvis literarum P, Q, R, S in hac disquisitione quodvis ipsorum $+$, $-$, $\dot{+}$, $\dot{-}$ denotante, Pa nil aliud quam $a \,.\, P1$ seu factum ex a in $P1$ (cujus posterioris significatio jam nota est), i.e. proportionalem 4tam geometricam ad 1, $P1$, a; observando, quod quantitas eadem

a, diversis characteribus affecta ad quantitates omnino aliquo modo (juxta §. 2.) distinctas referatur.

Assumamus praeterea rem aliquam alius generis e. g. o, omnino substantivam, de nihilo enim nonnisi conceptus negativus est, nihilumque designare operationibusque subjicere, rem propius contemplando absurdum esse facile patet; nec ideo e.g. $a+o=a$ statui potest, quia in hoc casu ipsi a nil addendum est, hanc enim ob caussam necessario aeque statui deberet $\frac{a}{o}=a$. Tale examen accuratius protinus monstrat, etiam metaphysicam tractationis ipsius o hactenus omnino falso innixam fuisse fundamento.

Ceterum $P\,o$ designet nil aliud quam o; atque (siquidem voces consuetas retinere velimus) dici potest

⊢+⊣ a, a positive sumtum seu positivum;
⊢—⊣ a, a negativum,

quodvis ipsorum ⊢+⊣ a, ⊢—⊣ a, ⊢∔⊣ a, ⊢•⊣ a; ⊢+⊣, ⊢—⊣; ⊢∔⊣, ⊢•⊣ alterius oppositum;

porro dici possunt

⊢+⊣ a, ⊢—⊣ a realia,
⊢∔⊣ a, ⊢•⊣ a imaginaria

(suntque revera imaginaria, simulac secundum notiones supra stabilita ssignis ⊢∔⊣ vel ⊢•⊣ affecta tamquam realia spectari volunt; et similis contradictio seu impossibilitas est, si negativum (a positivo jamjam probe distinctum) simul pro positivo haberi vult; quidquid enim est nonnisi id quod est); denique tam signa realia ⊢+⊣, ⊢—⊣ inter se, quam haec (imaginaria) ⊢∔⊣, ⊢•⊣ dicantur homogenea; signum reale atque imaginarium vero heterogenea. *Auch kann ⊢∔⊣ a (sowohl als ⊢•⊣ a) eine Nebengrösse (Stand) von ⊢+⊣ a (wie auch von ⊢—⊣ a) heissen.*

§. 4.

Denotet $Pa\ Pb$, nempe complexus signorum Pa, Pb, quantitatem ex a et b constantem cum eodem signo (communi) P affectam, sive quod eodem redit, quantitatem ex Pa, Pb compositam. Si autem Q sit ipsius P oppositum (§. 3.): denotet $Pa\ Qb$ seu $Qb\ Pa$ pro a, b inaequalibus, illud, quo majus ipsorum a, b minus superat, signo majoris acceptum; pro $a=b$ vero [3] rem 0 (§. 3.). Pro P, Q hetercgeneis (§. 3.) autem designet $Pa\ Qb$ nil aliud quam complexum quantitatum Pa, Qb. Hi conceptus valent, usquedum neutrum ipsorum a, b est o; si vero alterum o sit: denotet $Pa\ Qb$ alterum cum signo praefixo, nempe $Pa\ Qo = Pa$, $Po\ Qb = Qb$.

Per talem expressionem denotatum, ubi P, Q heterogenea sunt, cum denominatio quantitatis ad complexus ex heterogeneis constantes minus idonee applicari potest, commode aptoque verbo dici potest status (Stand), denominatione innumeris casibus usitatâ (e. g. status thermometri etc.) sensu latiori in scientiam receptâ; et quidem mixtus, quamdiu nec a nec $b=o$; purus si vel a vel b (adeoque etiam si utrumque) $= o$, cujus distinctionis utilitas utique satis frequens est. Quo pacto conceptus generalis summae facile haberi potest.

§. 5.

Assumamus *praeterea* adhuc 4 alia signa

$$+,\ -,\ \dotplus,\ \dot{-},$$

designetque $+P$ nil aliud quam ipsum P; $-P$ ipsius P oppositum; porro sit

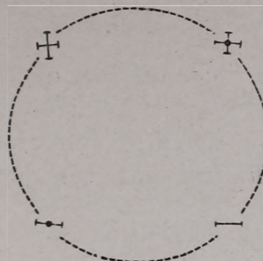
$$\dotplus\,\boxplus = \dot{\boxplus},\quad \dotplus\,\dot{\boxplus} = \boxminus,\quad \dotplus\,\boxminus = \dot{\boxminus},\quad \dotplus\,\dot{\boxminus} = \boxplus;$$
$$\dot{-}\,\boxplus = \dot{\boxminus},\quad \dotplus\,\dot{\boxminus} = \boxminus,\quad \dot{-}\,\boxminus = \dot{\boxplus},\quad \dot{-}\,\dot{\boxplus} = \boxplus;$$

quas regulas haud ingratum erit ex unica sequenti deducere.

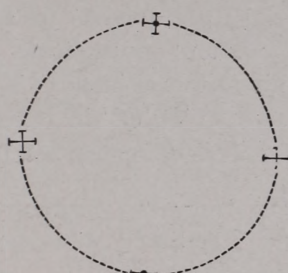
Condatur series

$$\boxplus,\ \dot{\boxplus},\ \boxminus,\ \dot{\boxminus}$$

repetaturque vicibus quotvis, sive (quod simplicius est) ponantur signa illa 4 ita in orbem ut ultimum i. e. $\dot{\boxminus}$ primum i. e. $\boxplus$ excipiat e. g. hunc in modum



seu hoc modo



pariterque ordinentur

$$+,\ \dot{+},\ -,\ \cdot\!\!-,$$

atque statuatur lex, quod si (cum $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ et $+$ incipiendo, i. e. ipsis indicem 1 tribuendo) P sit terminus m-tus in orbe primo, $\mathfrak{P}$ vero n-tus in quocunque horum orbium (sive serierum in se redeuntium): $\mathfrak{P}P$ denotet terminum $(m+n-1)$-tum seriei prioris, sive cujus index est proportionalis 4ta arithmetica ad 1, m, n. Quo pacto (casus omnes percurrendo) facile statim nanciscimur 16 theoremata pro $\mathfrak{P}$ alicui ex $+$, $\dot{+}$, $-$, $\cdot\!\!-$ aequali totidemque pro $\mathfrak{P}$ aliquod ex $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, $\vdash\!\!\dot{+}\!\!\dashv$, $\vdash\!\!-\!\!\dashv$, $\vdash\!\!\cdot\!\!\dashv$ denotanti; quorum brevitatis gratia solummodo posteriora 16 et quidem in forma contractiori apponimus, nempe:

$$\vdash\!\!+\!\!\dashv\vdash\!\!+\!\!\dashv = \vdash\!\!-\!\!\dashv\vdash\!\!-\!\!\dashv = \vdash\!\!\dot{+}\!\!\dashv\vdash\!\!\cdot\!\!\dashv = \vdash\!\!\cdot\!\!\dashv\vdash\!\!\dot{+}\!\!\dashv = \vdash\!\!+\!\!\dashv;$$
$$\vdash\!\!+\!\!\dashv\vdash\!\!-\!\!\dashv = \vdash\!\!-\!\!\dashv\vdash\!\!+\!\!\dashv = \vdash\!\!\dot{+}\!\!\dashv\vdash\!\!\dot{+}\!\!\dashv = \vdash\!\!\cdot\!\!\dashv\vdash\!\!\cdot\!\!\dashv = \vdash\!\!-\!\!\dashv;$$
$$\vdash\!\!+\!\!\dashv\vdash\!\!\dot{+}\!\!\dashv = \vdash\!\!\dot{+}\!\!\dashv\vdash\!\!+\!\!\dashv = \vdash\!\!-\!\!\dashv\vdash\!\!\cdot\!\!\dashv = \vdash\!\!\cdot\!\!\dashv\vdash\!\!-\!\!\dashv = \vdash\!\!\dot{+}\!\!\dashv;$$
$$\vdash\!\!-\!\!\dashv\vdash\!\!\dot{+}\!\!\dashv = \vdash\!\!\dot{+}\!\!\dashv\vdash\!\!-\!\!\dashv = \vdash\!\!+\!\!\dashv\vdash\!\!\cdot\!\!\dashv = \vdash\!\!\cdot\!\!\dashv\vdash\!\!+\!\!\dashv = \vdash\!\!\cdot\!\!\dashv.$$

Denique $\mathfrak{P}(Pa)$ seu $\mathfrak{P}Pa$ denotet $(\mathfrak{P}P)\,a$.

[4] §. 6.

Denotante porro $1'$ quantitatem quamlibet (ipsi 1 homogeneam aut non); a' vero $a.1'$: definiantur omnia Pa' (i. e. pro omnibus 4 valoribus seu significationibus ipsius P) prorsus simili modo ut §. 3. Pa definitum fuit. Quo posito denotet

$$(Pa'Qb')\,(RcSd)$$

summam (§. 4).

$$PRa'.c\,PSa'.d\,QRb'.c\,QSb'.d,$$

i. e. quovis ipsorum c, d, per quodvis ipsorum a', b' (per se ad unitatem propriam $1'$ relatum) multiplicato, atque cujusvis facti partialis signo e signis factorum juxta §. 5 determinato, summa omnium vocatur *factum* ex $Pa'Qb'$ in $RcSd$. Sic e. g. designantibus a, b homogenea, c, d item homogenea invenitur

$$\left(\frac{ac+bd}{cc+dd} + \frac{bc-ad}{cc+dd}\right)(c+d) = a+b.$$

§. 7.

Simplicissimum quidem est (quamquam id necessarium juxta §. 3. haud sit) omnes $+a$ etc. ipsi a *homogeneas* et *aequales* adsumere, perque *locum* distinguere. Acceptis exempli gratia 4 punctis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in tempore, denotanteque a durationem quamlibet, possunt $+a$ etc. durationes ipsi a aequales respective ex $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ incipientes denotare. Sed possunt etiam *absque detrimento* $+a$ etc. *non ut quantitates, sed ut soli complexus ipsius* a *atque signorum praefixorum* spectari, signaque haec nonnisi ad indicandos *modos*, quibus quantitates in calculo *tractari* debeant, introducta sunt.

§. 8.

Utile quoque erit conceptum logarithmi vulgarem *vitiosum* hac occasione corrigere, nec non conceptus caeteros ei affines modo unice recto stabilire.

Designante φx limitem seriei (formae notissimae)

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{xxx}{1.2.3} \text{ etc.},$$

pro quovis statu ipsius x (ut demonstrari potest) convergentis nomino x logarithmum ipsius ψx, ψx vero statum ipsi x tamquam logarithmo respondentem, seu breviter statum logarithmi x, designoque relationem hanc per

$$x = l\psi x.$$

Porro intellego per a^b nil aliud quam $\psi(bla)$, nominoque quemvis valorem hujus expressionis ipsius a potentiam exponentis b; a vero ipsius cujusvis a^b radicem exponentis b.

At logarithmi definitio generalis quae basi innititur (quod fit etiam apud ill. La Grange, imo apud omnes scriptores mihi notos) minus recta est. Etenim si b logarithmus ipsius c quoad basin a dicatur, simulac fuerit $a^b = c$: facile perspicitur, quod si Lc sit valor quivis [5] ipsius lc, et La valor quivis ipsius la, pro integris realibus quibusvis m, n, ipsum

$$\frac{Lc \dotplus 4m\pi}{La \dotplus 4n\pi} \,\star$$

ipsius c logarithmum quoad basin a esse, quippe cum in

$$a^b = \psi(bla)$$

valori ipsius

$$la = La \dotplus 4n\pi$$

posito, c omnino unus valor ipsius a^b erit. At quamvis quaestio recta sit, omnes valores ipsius b assignare, per quibus valor aliquis ipsius a^b dato c aequalis est: attamen conceptus logarithmi generalis modo sequenti paullo subtiliori definiendus est, siquidem (ut alia incommoda praeteream) non etiam quantitatibus negativis imaginariisque logarithmos reales quoque tribuere mens est (esset nempe secus propter e. g.

$$16^{\frac{1}{4}} = +2,\ -2,\ \dotplus 2,\ \dot{-}2$$

$\star$ designante (juxta definitiones statim dandas) π arcum minimum cujus sinus $=1$.

manifesto $\frac{1}{4}$ log. quoad basin 16 quarumvis harum 4 quantitatum). Dicatur q ipsius $\psi(pq)$ logarithmus quoad modulum $\frac{1}{p}$ (posset dici quoad modulum p, interim hoc essentiale non est); quo pacto log. quoad mod. 1 idem erit sive congruet cum eo quod supra (simpliciter) logarithmum diximus.

Eodem modo appello limites serierum (semper convergentium)

$$1-\frac{xx}{1.2}+\frac{xxxx}{1.2.3.4} \text{ etc.}$$

et

$$x-\frac{xxx}{1.2.3}+\frac{xxxxx}{1.2.3.4.5} \text{ etc.}$$

respective cosinum sinumque ipsius x, hoc vero arcum etc. (quae relatio etiam generalius concipi potest).

§. 9.

Cum expositio uberior hic haud locum habeat: transimus jam ad applicationes scientiae quantitatum ad geometriam, inter quas sequens tam quoad praegnantiam tam quoad insignem elegantiam eo magis primum locum meretur, quod jam in geometriae (sed haud vulgaris) limine occurrat.

In appendice tomi I libri, cui titulus:

Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi, *Maros-V. anno 1832 appariti* traduntur formulae trigonometriae planae pro illo casu, quod si propositio, quam Euclides (judicio omnium geometrarum acutiorum) perperam sub forma axiomatis XI protulit, falsa esset (postea scientiâ spatii a dicto axiomate independenter stabilitâ). Nullo negotio vero ex eisdem formulis con-[6]sequitur esse

$$\sin + \frac{a}{i} = \sin a \,.\, \sin + \frac{c}{i},$$

$$\cos + \frac{c}{i} = \cos + \frac{a}{i} \cdot \cos + \frac{b}{i},$$

denotantibus a; b, c cathetos hypotenusamque, α angulum catheto a oppositum, denique i certam rectam ibidem definitam (in se et per se in suppositione praesenti determinatam); e quibus duabus aequationibus jam omnes reliquae trigonometriae planae fluunt. Has aequationes autem contemplanti patebit triangula rectangula plana et proin totum planum superficiemque ei aequidistantem (quales jam, ipse quoque in eandem theoriam incidens, ante multos abhinc annos hypersphaericas appellavi) prorsus simili modo ac superficiem sphaerae in calculo tractari posse, ita quidem, ut si quantitatem illam r, qua latera $\triangle$li rectanguli in superficie quavis undique uniformi existentis dividenda sunt, ut statui possit

$$\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r} \cdot \cos\frac{b}{r},$$

e. g. parametrum hujus superficiei appellare placeat: parametri superficierum sphaericarum reales, parametri superficierum plano æquidistantium imaginariae (i. e. quantitates vere existentes cum signis $\dotplus$, $\dot{-}$ affectae) evadunt; parameter plani $\dot{-}\, i$ (pariterque $\dotplus\, i$) erit.

At potest res aliter quoque concipi. Posset *nempe, sed minus naturaliter, idonee, recte, simpliciter, eleganter,* etiam planum tamquam ad parametrum i pertinens considerari, atque rectae ipsae, in plano vicem arcuum circulorum maximorum subeuntes ut arcus imaginarii quoad parametrum i spectari: sed quo pacto (ut ostendi potest) parametris ipso i minoribus nullae superficies uniformes tales, quarum arcus, ad finem plane expositum, pro imaginariis haberi possent, respondent.

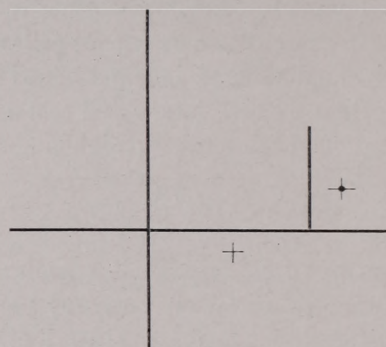
Ex ingenti multitudine disquisitionum elegantissimarum hoc argumentum gravissimum (i. e. geometriam absolutam ab XI. euclideo axiomate independentem) concernentium plura hic referre non licet. *Et equidem plane per hanc disquisitionem, hoc labore occupatus annis abhinc $\frac{1}{4}$ seculo fere, in theoriam veram imaginariorum incidi, acquisivi, tentavi.*

§. 10.

Quod constructionem quantitatum in geometria attinet, ea quidem (in sensu praesenti *in praecedentibus explicato*) prorsus ac simpliciter a voluntate nostra pendet; ut [7] facillime innumeri modi excogitari possint, quibus e. g. aequatio

$$y = fx$$

(denotante f functionem), sive locus geometricus ejus, generaliter status quosvis includendo, construi possit; *e. g. quod simplicissimum est:*



Respectu cujus rei solummodo observo, ratiocinium d'ALEMBERTIANUM, quo probari vult, in constructione aequationum vulgari, valores (ordinatarum, abscissarumque) positivos ac negativos ad partes contrarias axium coordinatarum applicari debere: nil ponderis habere falsumque esse, cum in hac re in se et per se nulla obligatio locum habeat.

§. 11.

Rite iis, quae hic exposita sunt, perpensis, nullum dubium superesse poterit

1^mo^ quin solae *res adeoque et* quantitates revera existentes (vel, si materiales i. e. partes mundi corporei seu externi sint, saltem cogitabiles possibilesque) objecta speculationis *sanae* esse possint;

2^do^ sponte defluet constabitque quantitates omnes in geometria *(alibive ubicumque)* occurentes omnino in intuitu exhiberi *seu* construique posse.

Scholion. Posito, quod licet, $\dotplus 1 = 1$, erit *itaque* tam $\dotplus 1 \cdot \dotplus 1$ quam $\dot{-} 1 \cdot \dot{-} 1 = -1$, seu tam $\dotplus 1$, quam $\dot{-} 1$

valor expressionis $\sqrt{-1}$; exhibebuntque $\dotplus 1$, $\dot{-} 1$ omnes valores ipsius $\sqrt{-1}$, siquidem definitiones ita ut supra factum est adornare libuit. Nil enim impedit quin ponamus etiam $f1.f1 = f'1.f'1 = f''1.f''1$ etc. $= -1$; sed alias quam definitiones plane supra datas supponere non solum *superfluum — cum solis 4 jam adoptatis omnia reliqua genera exprimere licet — praetereaque haec 4 sustinent ad omnis generis quantitatum exprimendas* — inutile esset, sed etiam elegantia scientiae splendidissima eo offenderetur evanesceretque. Potest etiam p. 18 Demonstr. novae etc. Ill. Gauss 1799 conferri.

Denique observo, in theoriam imaginariorum libro §. 9. citato traditam, praeter quosdam alios etiam errorem sequentem irrepsisse. In tomi II. p. 362 ut et tomi I. p. LVI. definitio proportionis falso exprimitur, siquidem proprietates communes notissimae proportionis retineri volunt. Juxta illam definitionem enim esset, nostris signis

$$\pm 1 : \dotplus 1 = \dotplus 1 : \pm 1,$$

multiplicandoque omnes terminos statu quovis mixto (§. 4.) $a \dotplus b$, evaderet proportio

$$(a \dotplus b) : (-b \dotplus a) = (-b \dotplus a) : (a \dotplus b),$$

quod vero secundum regulam ejusdem auctoris proportio non est. Quae duo repugnant. *Ultimum juxta eundem auctorem haud esse proportionem vel inde patet, quod si* $b \backsim 0$: *idem*

$$\backsim (a : \dotplus a = \dotplus a : a)$$

adeoque est non proportio.

[8] Neque notiones imaginaria concernentes in Gött. Gel. Anz. p. 632 usque 638 traditas Ill^mi Gauss (salvo respectu summo Viro debito) pro satisfacientibus habere possum. Etenim

1^mo quamvis omnino impossibile sit, majus de minori, deque 0 tale demere, quod in ipso deest; quantitatesque quarum quadratum negativum sit, nullis aliis quantitatum generibus quam positivis ac negativis admissis, evidenter exstare non possunt (conceptu ipsarum manifesto contradictionem involente): attamen juxta notiones supra perquam solide stabilitas patet e. g. etiam numerum negativum imaginariumque hominum utique realiter existentem reddi posse: p. 634 dictum itaque cum metaphysica vera rei non plane congruit.

2^{do} Quid ibi sub relationibus intelligatur, non in intuitu exhibetur: attamen sensus totius disquisitionis summa concinnitate claritateque expositus hic esse videtur (saltem hoc modo luculentius apparens): si planum in quadrata aequalia dividatur, imo generalius absque omni divisione, si punctum in recta moveatur, dicatur via ejus positiva (seu directa), vel negativa (seu inversa), prout motus antrorsum vel retrorsum fit; si vero in rectam ad primam rectam perpendicularem deviet (unde postea item directioni primae aequidistanter moveri potest etc.): habeatur via pro imaginaria (seu laterali) cujus item duae species dantur. Quomodo enim aliter negativae relationes (ut ibi exprimitur) per positivas per se jam determinatae sint, haud apparet.

Interim etiam contra hanc expositionem sequentia objicio:

1^{mo} notiones dextri, sinistri, supra, infra etc. non determinabantur, relativae sunt, et tamquam minus geometrica hic evitari debent possuntque;

2^{do} haud concipitur, quomodo ad conclusionem, *et quo sensu*, [perveniatur] quod $+i$ (ut et $-i$) sit proportionalis media inter $+1$ et -1, imprimis quod antea proportio generaliter definita haud sit, ac etiam rhombi pro quadratis sumi possunt.

3^{tio} expositio haec innititur veritati axiomatis XI. dubiosae contemplationique spatii in Arithmetica evitandae; cui priori quidem incommodo facile remedium afferi potest, sumendo (ut brevis sim) superficiem sphaericam radii infiniti, quam parasphaericam appellare licet;

4^{to} (ut loca minoris momenti praeteream) phrasis: quod alia genera quantitatum in scientia quantitatis admitti non possint, haud probanda est: supra enim satis luculenter ostenditur quantitates quidem (pro lubitu) quotvis generum introduci posse, sed solum modo non debere;

5^{to} denique contemplatio talis rei perquam angusta specialisque est.

Beilage C,

die spätere Bearbeitung von § 10 der vorhergehenden Abhandlung enthaltend.

Quod rem propius contemplando constructionem quantitatum realium imaginariarumque in geometria alibive occurentium attinet, modus quidem hujus constructionis in sensu praesenti seu in praecedentibus explicato prorsus ac simpliciter omnino nonnisi a voluntate, pacto, conditione, conventione nostra pendet, ita, ut facillime innumeri modi talis constructionis excogitari possint, quibus e. g. aequatio

$$y = fx,$$

denotante «fx» functionem quemvis datam seu determinatam ipsius x, seu «f» signum functionale seu existente $fx \models$ * functioni cuidam ipsius x, sive ut dicunt, locus geometricus seu significatio vel exhibitio geometrica seu in spatio hujus aequationis, et quidem generaliter quantitates quaevis formae $a + b$, ubi a, b reales quaevis vel etiam $=0$, adeoque quaevis ipsarum positivae vel negativae, vel etiam ipso o aequalis est, includendo — sub quam formam autem per praecedentia et juxta pro fundamentis posita jam necessario quantitas quævis in mathesi vel ejus totius ambitu occurrens vel se offerre potens construi possit: cujus quidem constructionis modos vel exempla simplicissima utilissima elegantissimaque sunt sequentia; observando vel praemittendo ante omnia observationem (dicam tamen respectu hujus rei, haud supprimere licet observationem) ratiocinium d'Alembertianum quo probari vult vel probare conatur vir illustris in constructione aequationum vulgari pro valoribus nempe

---

* [Signum $\models$ est identitatis. Stäckel.]

variabilium nonnisi realibus peragendam seu efficiendam, valores abscissarum ordinatarumque positivas ac negativas ad plagas contrarias axium coordinatarum applicari d e b e r e, ita absolute enunciatum sine adjectione alius conditionis vel postulati vel restrictionis nil ponderis (in praesenti rei statu) habere, imo omnino falsum esse, cum in hac re in se et per se quidem nulla obligatio sive restrictio locum habere potest.

Beilage D,

ein Stück der Einleitung zu den Principia doctrinae novae enthaltend.

Cum quaestio Inclytae Societatis Scientiarum JABLONOWIANAE nonnisi circa constructionem imaginariorum a geometris usurpatorum versetur, deque conceptu ipso claro, distincto seu aequo vel justo talium entium seu rerum, sive quidnam sub iisdem jure meritoque seu recto intelligi possit debeatque, sive definitio eaque clara entis ac conceptus, de quibus sermo est, quod vero, more praelucentis seu face praeeuntis Patris et summi magistri EUKLIDIS necessario toti disquisitioni praemitti sive hanc praecedere debet, in eadem quaestione neque sermo est: manifesto plus quam ibidem desideratur præstabimus

1) Conceptum seu naturam seu indolem seu essentiam vel metaphysicam, et quidem unice veram seu rectam ipsam quoque, et quidem non solum imaginariorum, sed ut par est, reique natura, nexus et affinitas postulat, eâque etiam commodissima fit vel effici potest debetque, simul etiam realium, verbo eatenus vel hoc respectu omnis generis quantitatum in calculo occurentium, quaeque objecta speculationis seu disquisitionis purae vel analyticae esse possunt, sive potius vel rectius modum, quo quantitates (cum de non-entibus, imo plane impossibilibus seu chimaeris serio plus loqui vel tractare, quam enunciare eadem existere haud posse, non-nisi insanum, ad minimum ridiculosum seu risum movens vel jocosum ac inutile seu sterile et verbis abusus esset, inde tuto nil aliud enasci seu resultari potest, expressionesque tales vagae seu inanes seu ineptae, ut facile perspici seu penetrari potest, solummodo circumstantia ea, quatenus vel qualiter ipsae in calculo tamquam expressiones quantitatum realium

tractandae sunt, adeoque non-nisi fortuito incertoque seu dubitato seu dubio obnoxie ad resultata perducunt) utique s e m p e r r e a l e s, operationibus calculi sive analyticis subjici seu tractari sive in calculum introduci seu eum ingredi queant debeantque, partim summa qua potui brevitate, partim et prolixius indigitantes, completam doctrinarum praegnantissimarum huc pertinentium vel hac materia connexarum vel huic rei affinium illamque si id fieri posset adhuc semper magis magisque illustrantium expositionem, qui hic neque exspectatur, neque ob seu propter brevitatem necessariam, cum hocce quidem loco tantum modo essentiam evolvere fundamentaque doctrinae de imaginariis ponere scopus principalis originariusque sit, praestari potest, systemati totius seu integrae scientiae sive scientiarum omnium nobis reservantes;

2) definientes q u i d sub c o n s t r u c t i o n e quantitatum hocce quidem loco seu respectu seu hac occasione intelligi debeat;

3) denique decidentes num imaginaria in geometria alibive occurrentes construi possint aut secus, et si ita quibusnam conditionibus vel in quantum et quomodo vel qualiter vel qua ratione hoc fieri vel exsequi possit debeatque; praeterea

4) conceptus fundamentales cardinalesque gravissimi momenti analyseos sic dictae sublimioris, adhucdum perquam vagas, vel non modo debito stabilitas, imo nonnunquam repugnantes, a quibus vero claritas, rigor seu praecisio, elegantiaque totius praecipue seu praesertim dependet, semel pro semper solide modoque quoad g e n e r a l i t a t e m, ut demonstrabimus, unice recto seu directo, naturali, simplicissimo elegantissimoque stabilientes; tum

5) pro summa castitate sanctitateque veritatis, opinionem imo criticam, seu recensionem seu examen, partimque refutationem theoriae imaginariorum in T e n t a m i n e traditae, insufficientiamque seu non-idoneitatem theoriae Ill^{mi} Gauss examini castigationique rigorissimae Publici Lectorisque penetrantis capacemque se sentientis subjicientes;

6) si quidem dissertatio praesens haud in nimiam molem excrescet, coronidis loco applicationes quasdam easque satis vel maxime singulares seu ejusdem generis unicas, scientiae quantitatum

purae seu universalis seu generalis seu analyseos ad geometriam apponentes; denique

7) decisionem vel judicium Inclytae Societatis Scientiarum Jablonowianae super tres dissertationes quaestionem praesentem tractantes Societatique traditas pro notitia etiam adnectentes: quod negotium seu argumentum jam statim seu illico aggredimur.

17.

ÜBER DIE DURCH TORSION VERURSACHTE VERÄNDERUNG DES ELEKTRISCHEN WIDERSTANDES VON METALLDRÄHTEN.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde.

Von COLOMAN v. SZILY junior.

I.

Der elektrische Widerstand eines Körpers ist die Function aller den physischen Zustand des Körpers bestimmenden Factoren. Ausser Acht gelassen jenen complicierten Zusammenhang, welcher zwischen dem Widerstand und der Form und den Dimensionen des Körpers existiert, erscheint der elektrische Widerstand als die Constante der Materie in physikalischem und chemischem Sinne. Ändert sich die Materie in einem oder anderem Sinn, so ändert sich auch der Werth dieser Constante. Welche Veränderung der Constante, des *specifischen elektrischen Widerstandes* die Veränderung des Körpers begleitet, kann nur auf experimentalem Wege festgestellt werden.

Wenn wir uns bloss auf die festen Leiter beschränken, so ist ohne Zweifel die Veränderung des Widerstandes als Function der Temperatur am wichtigsten. Auf diesem Gebiete wurden schon zahlreiche Forschungen angestellt, unter welchen die von Dewar und Flemming am beachtenswerthesten sind.

Viel weniger eingehend wurde jene Veränderung des Widerstandes untersucht, welche mechanische Veränderung der Materie der Metalle begleitet. Unter mechanischer Veränderung ist eine durch Ausglühen, Stählen, Spannen, Zusammendrücken, Torsion, Biegen hervorgebrachte Veränderung zu verstehen. In allen diesen Fällen verändern sich die zwischen den Körperelementen wirkenden inneren Kräfte, die Verhältnisse der Elasticität, und aus rein wissenschaftlichem Standpunkt ist die Untersuchung dessen von Interesse, was für eine Function der elektrische Widerstand der oben erwähnten äusserlichen mechanischen Veränderungen ist, da so erhofft werden kann auf den zwischen dem Widerstand und den inneren physischen Kräften bestehenden Zusammenhang Folgerungen zu ziehen.

Die hierauf bezüglichen, nicht eben zahlreichen Forschungen zeigen aber keinen erfreulichen Erfolg und scheinen sogar zu beweisen, dass von Regelmässigkeiten von allgemeinem Werthe überhaupt keine Rede ist. Verhältnissmässig am eingehendsten wurde noch die Widerstandsveränderung der Metalldrähte beim Dehnen durch Mousson, Lord Kelvin, doch besonders durch Tomlinson * untersucht und hiebei fand man auch die meisten Regelmässigkeiten.

Alle diese Erfahrungen sind nicht dazu geeignet, um jemanden zu neuen Versuchen anzueifern. Es ist mir jedoch aufgefallen, dass mit der durch die Torsion verursachten Veränderung des Widerstandes sich bisher noch niemand eingehender befasste. In der ganzen Litteratur fand ich nur Gerosa's * Abhandlung, der sich mit der durch die verschiedenen mechanischen Wirkungen hervorgebrachte Veränderung des Widerstandes befassend, auch die Wirkung der Torsion nicht ausser Acht liess. Von dieser erwähnt er aber nur wenig, es gelang ihm blos zu constatieren, dass der Widerstand bei der Torsion wächst, bei der Retorsion aber kleiner wird, und dass er bei der Detorsion, welche der Torsion folgt, seinen ursprünglichen Werth nicht wiedergewinnt, eine nähere Regelmässigkeit fand er aber nicht. Wenn wir aber bedenken, dass einerseits der elektrische Widerstand mit den Elasticitätsverhältnissen des Körpers in Zusammenhang sein muss, an-

* Tomlinson: Phil. mag. XVII. p. 400.

** Gerosa: Sulla Variazione nella Resistenza elletrica di un filo metallico in relazione ad alcuni disturbi provocati ne suoi sistemi molecolari. Nuovo Cimento (3) XIV. XV.

dererseits aber diese Elasticitätsverhältnisse bei der Torsion, wenigstens in den Grenzen der Elasticität einfach sind, so müssen wir daraus schliessen, dass auch die durch Torsion verursachte Widerstandsveränderung einer einfachen Regelmässigkeit huldigt. Das hat mich bewogen mich mit hierauf bezüglichen Versuchen zu befassen.

Die Messungen wurden im Pariser «Laboratoire de Recherches Physiques» angefangen und zu Zürich, in Institute des hochverehrten Herrn Professors H. F. Weber wo ich die Versuche in einem unterirdischem Raume, in welchem die Temperatur bis auf 0·1 C° constant war, angestellt habe, fortgesetzt. Die durch die Torsion verursachten Widerstandsveränderungen trachtete ich vor allem eingehend an solchen Stoffen festzustellen, bei welchen der Einfluss unbedeutender Temperaturschwankungen unbemerkbar und unmessbar gering ist, also an dem *Constantan* und dem *Manganin*.

II. Methode der Messungen.

Bei der Anordnung der Versuche musste ich zwei Dinge im Auge behalten, dass nämlich erstens die Messung mit der möglich grössten Genauigkeit gemacht werde, und zweitens dass jeder störende Einfluss, jede nicht beachtbare Schwankung der im Systeme vorkommenden Widerstände vermieden werde. Bei der Durchführung der Messungen bediente ich mich der durch Kirchhoff umgestalteten Form der Wheatstone'schen Anordnung, bei der also nicht 4, sondern 6 Widerstände in den Zweigen vorkommen. Das Wesen der Anordnung bestand im Folgenden. Ein anderthalb Meter langer Constantandraht war neben einer mit Millimetereintheilung versehenen Skala horizontal gespannt; bei den Punkten der Skala 0. und 1500. waren dicke Kupferdrähte an das Constantan gelöthet, welche mit je einem Kasten von grossem Widerstand den Contact hervorbrachten, nach dem einen grossen Widerstand folgte ein kleine Widerstände hervorbringender Kasten, nach dem anderen aber der zur Torsion bestimmte Draht, wofür dieser Letztere mit einem Kasten verbunden war. Am gespannten Messungsdraht befand sich ein mit leichter Reibung verschiebbarer Schlitten. Das Galvanometer war zwischen die beiden grossen

Widerstände geschlossen; der Schlitten, der zur Torsion bestimmte Draht und der Knotenpunkt des Kastens von kleinem Widerstand waren mit der Stromquelle einer aus drei DANIELL'schen Elementen bestehenden Batterie verbunden.

Zur Herstellung der Verbindung dienten 3 mm dicke Metalldrähte, während die Knotenpunkte der verschiedenen Zweige ausschliesslich Quecksilber bildete, dass der Contact überall möglichst vollkommen und constant sei. Auch für die Isolierung von der Erde wurde gesorgt und zwar so, dass während der Dauer einer Versuchsreihe, während 4—5 Stunden, eine absolute Unveränderlichkeit stattfand. So konnten die Zahlen der Versuchsreihen, obgleich sie nicht die absoluten Werthe des Widerstandes gaben, doch relativ genommen mit einander streng verglichen werden, so dass sie die *Veränderung* des Widerstandes des geprüften Drahtes sicher festgestellt werden konnte, was ja die Hauptsache ist.

Bei den Versuchen benützte ich ein LORD KELVIN'sches Galvanometer von geringem Widerstand mit vier Rollen, deren gesammter Widerstand 5·8 Ohm war.

Der zur Untersuchung bestimmte Draht wurde vor den Versuchen sorgfältig ausgeglüht, dass jede Ungleichheit ausgeglichen werde. Dann wurde er mit dem einen Ende an eine durch einen Ebonitpfropf durchgezogene dicke Kupferstange angelöthet und in eine in verticaler Lage befestigte 3·5 m lange Kupferröhre versenkt, in deren oberen Öffnung der Ebonitpfropf sich presste und bei der oberen Löthung die Unbeweglichkeit des ganzen Systems sicherte. An das aus der Röhre herausstehende untere Ende des Drahtes löthete ich einen 2 kg. schweren Kupfercylinder, der den Draht spannte. Die Torsion des Drathes geschah durch das Drehen des Cylinders mit der Hand.

Endlich muss ich noch über den Gang der Messungen selbst berichten.

Da ich einerseits trachten musste, dass die einzelnen Widerstandsmessungen je kürzere Zeit in Anspruch nehmen, andererseits aber bei einem Galvanometer von grösserer Empfindlichkeit das Aufsuchen der am Messungsdrahte der Null-Ausweichung entsprechenden Lage so zu sagen unmöglich ist, wurde diese Null-Lage mittels Berechnung festgestellt. Ich suchte nämlich jene zwei aufeinander folgenden Theilungspunkte der in Millimeter getheilten Skala des Messungsdrahtes, bei denen die entsprechenden Galvanometerausweichungen von entgegengesetzer Richtung sind; aus dem Werthe dieser beiden Ausweichungen wurde die der Null-Ausweichung entsprechende Lage auf Grund der Voraussetzung ausgerechnet, dass die Intensität des in der Nähe der Null-Lage des Messungsdrahtes durch den Galvanometer fliessenden Stromes, d. h. die mit dem Fernrohr beobachtete Skalenausweichung mit der Entfernung des beweglichen Contactes von der Null-Lage proportional ist.

Um beurtheilen zu können in wiefern die in dem Ferneren mitgetheilten Zahlen glaubwürdig sind, soll noch Folgendes erwähnt werden. Die eigentlichen Messungen konnte man nie unmittelbar nach Einschaltung des Drahtes anfangen; die mit dem Einschalten unvermeidlich verbundenen Biegungen und Erschütterungen hatten nämlich zur Folge, dass der Widerstand des Drahtes anfangs gar nicht beständig war, aber mit der Zeit eine langsame Veränderung zeigte. Nach ein-zwei Tagen aber nahm der Draht schon einen endgiltigen Widerstand an, was aus der vollständigen Beständigkeit der Schwingungen des Galvanometers zu sehen war. Diese Beständigkeit zeigt auch, dass das System von der Temperatur gänzlich unabhängig ist.

III. Resultate der Versuche.

Nach Voraussendung des oben Gesagten sehen wir nun, was für Resultate die Versuche ergaben. Zu erst führen wir die Versuche bezüglich des Constantandrahtes an, und zwar vor allem die in dem Falle eines gewissen Querschnittes erscheinenden Widerstandsveränderungen, dann die Abhängigkeit dieser Veränderungen von dem Querschnitt, endlich aber die Ausbreitung der Messungen auf Drähte, welche wegen der Grösse ihres Ausdehnungscoëfficienten einer anderen Messungsmethode bedürften.

Der Diameter des Querschnittes der in der ersten Gruppe vorkommenden Constantandrähte war nahezu $\frac{1}{2}$ mm., genau 0·46 cm., der Widerstand 10·5 Ohm. Dass man die Widerstandsveränderungen mit der Genauigkeit von nahezu 1 Milliontel messen könne, war jeder der Hilfswiderstände 50 Ohm und die Empfindlichkeit des Galvanometers wurde so reguliert, dass 1 mm Verschiebung an dem beweglichen Contacte am Messungsdraht, in der Gegend der Gleichgewichtslage ein Unterschied der Galvanometerausweichung von 50 Skalentheilen entspreche. So konnte man also, den Contact an einem gewissen Punkt des Messungsdrahtes unverändert lassend, durch Beobachtung der Galvanometerausweichungen bei den aufeinander folgenden Widerstandsveränderungen die entsprechende Gleichgewichtslage am Messungsdrahte mittels Berechnen auf $\frac{1}{50}$ mm. bestimmen.

In der folgenden Tabelle (siehe pag. 304), theile ich eine ganze Reihe von Beobachtungen mit, um die Methode des Berechnens der Widerstandsveränderung klar ersichtlich zu machen.

Ich muss bemerken, dass in den berechneten Widerstandswerthen die letzte Ziffer, als die, welche die milliontel Theile giebt nicht mehr ganz genau ist, da bei der Ausweichung des Galvanometers die Veränderung von einem Theile überhaupt den Werth der letzteren Ziffer um eine Einheit verringert. Diese Messungsreihe wiederholte ich öfter unter denselben Umständen an frischen Drähten und die Resultate stimmten genügend überein; der Gang der Veränderung des Widerstandes war bei jedem streng derselbe, und die entsprechenden Werthe waren nur in der letzten Ziffer verschieden, was hauptsächlich von dem geringen Unterschiede im Grade der Ausglühung verursacht wurde. Einigemale kam es vor, dass der Widerstand einen gänzlich ausserordentlichen, allzugrossen oder allzukleinen Werth zeigte. Da aber diese Fälle nur sporadisch vorkamen und in ihrem Auftauchen gar keine Regelmässigkeit zu beobachten war, so muss als ihre Ursache entweder ein äusseres störendes Moment, oder aber die durch die Torsion hervorgebrachte eventuelle Erschütterung betrachtet werden. (In der mitgetheilten Tafel kommt zufällig kein solcher ausserordentlicher Werth vor.) Wir müssen unsere Tabelle noch mit einem Beitrag ergänzen. Da schon in vorhinein zu erwarten war, dass die Widerstandsveränderung mit den Elasticitätsgrenzen des Drahtes in irgend einer Verbindung sein wird, habe ich noch vor den elektrischen Messungen bei jedem Draht die Grenze der

Torsions-winkel	Stelle des Contactes am Messungsdrath	Ausweichung des Galvanometers	Berechnete Stelle des Contactes	Widerstand	Widerstandsveränderung Wi—Wo	Widerstandsveränderung Wi—Wi-1
	Mm.		Mm.	Ω	Ω	Ω
0	750	19	749·61	10·60020	—	—
1.2π	«	22	749·56	10·60022	0·00002	0·00002
2.2π	«	24	749·52	10·60024	0·00004	0·00002
3.2π	«	27	749·46	10·60026	0·00006	0·00002
4.2π	«	35	749·30	10·60035	0·00015	0·00009
5.2π	«	44	749·12	10·60044	0·00024	0·00009
6.2π	«	53	748·94	10·60053	0·00033	0·00009
7.2π	«	61	748·78	10·60061	0·00041	0·00008
8.2π	«	70	748·60	10·60070	0·00050	0·00009
9.2π	«	79	748·42	10·60079	0·00059	0·00009
10.2π	«	93	748·14	10·60092	0·00072	0·00013
11.2π	«	106	747·88	10·60105	0·00085	0·00013
12.2π	«	121	747·58	10·60119	0·00099	0·00014
13.2π	«	138	747·24	10·60137	0·00117	0·00018
14.2π	«	156	746·88	10·60155	0·00135	0·00018
15.2π	«	177	746·46	10·60176	0·00156	0·00021
16.2π	«	200	746·00	10·60198	0·00178	0·00022
17.2π	«	222	745·56	10·60220	0·00200	0·00022
18.2π	«	245	745·10	10·60243	0·00223	0·00023
19.2π	«	269	744·62	10·60267	0·00247	0·00024
20.2π	«	295	744·10	10·60293	0·00273	0·00026
21.2π	«	321	743·58	10·60319	0·00299	0·00026
22.2π	«	346	743·08	10·60344	0·00324	0·00025
23.2π	«	376	742·48	10·60373	0·00353	0·00029
24.2π	«	405	741·90	10·60402	0·00382	0·00029
25.2π	«	436	741·28	10·60432	0·00412	0·00030

Elasticität, d. h. die maximale Torsion bestimmt, welche keine beständige Deformation verursacht. So war dies bei dem vorigen Draht mit grosser Annäherung $3 \cdot 2\pi$, da der Torsionswinkel 4°, also sehr klein war und darum keine bleibende Deformation verursachte.

Ich stellte auch noch eine längere Reihe von Messungen an, deren Resultate ich aber wegen dem Mangel an Raum hier nicht mittheile.

Nach dem Beweise dieser Messungen wächst der elektrische Widerstand mit dem Torsionswinkel, doch nicht proportional, sondern viel rascher, so das während im Anfange die Veränderung blos der einige millionte Theil des ursprünglichen Werthes ist, es bei dem Torsionswinkel von $40 \cdot 2\pi$ schon beinahe den tausendsten Theil ausmacht. Wenn wir bei jedem Draht auch die Grenze der Elasticität in Betracht ziehen, sehen wir, *dass innerhalb der Elasticitätsgränze der Widerstand mit dem Torsionswinkel proportional wächst, nach Überschreiten dieser Grenze aber der Widerstand schon rascher wächst.** Es ist aber auch weiter charakteristisch für die Widerstandsveränderung, dass die Reihe in einzelne Gruppen getheilt werden kann, innerhalb welcher die Proportionalität zwischen Widerstand und Torsionswinkel besteht, doch ist der Factor der Proportionalität in jeder Gruppe grösser. Demzufolge ist die Curve der Widerstandsveränderung, wenn wir die Torsionswinkel als Abscissen und die mit dem Anfangswerthe verglichenen Widerstandsveränderungen als Ordinaten betrachten, eine *aus geraden Stücken zusammengesetzte gebrochene Linie,* bei dem die aufeinanderfolgenden Geraden immer steiler werden.

Dies alles kann natürlich nur bei dem Grade der Genauigkeit bestehen, den mir zu erreichen gelang. Ich weiss wohl, dass eine derartige Darstellung der Erscheinung, das Vorkommen von Winkelpunkten in der Curve, dem allgemeinen physikalischen Standpunkt welcher nicht nur in der Function selbst, sondern auch im Differentialquotienten Continuität erfordert, nicht entspricht; doch mit Rücksicht darauf, dass im vorliegenden Fall schon die

* Also gerade umgekehrt, wie beim Dehnen.

millionten Theile umbestimmt sind, und noch mindestens die zehmillionten Theile nöthig wären, um den eigentlichen Gang der Veränderungscurve darstellen zu können, finde ich die Darstellung der Veränderung in so annähernder Weise für erlaubt. Ausserdem spricht aber auch ein wichtigerer Grund für eine solche Darstellung der Erscheinung; wir werden nämlich sehen, dass die Elasticitätsgrenze auch vom Standpunkt dar Widerstandsveränderung sozusagen ein Grenzpunkt ist, da wenn wir bei demselben Draht die Grenze der Elasticität weiter hinausschieben, auch die erste Proportionalitätsreihe dem entsprechend grösser wird.

Dies führt uns aber schon in den zweiten Abschnitt der Forschungen hinüber, in welchem ich suchte, inwiefern die von der Torsion verursachte Veränderung der Zeit gegenüber eine Beständigkeit zeigt, und inwiefern die durch die starke Torsion hervorgebrachte Veränderung der Elasticitätsverhältnisse auf die Widerstandveränderungen einen Einfluss ausübt. Zu dem Zweck theile ich die lange Versuchsreihe mit, welcher ich einen Draht unterzog, und aus der die Regelmässigkeit der auftretenden Veränderungen am klarsten ersichtlich ist. Im Anfangszustande des Drahtes waren die den Widerstand charakterisierenden Daten die folgenden:

Stelle des Contactes am Messungsdraht: 894 mm.

Ausweichung des Galvanometers: 120.

Widerstand: 9·93400 Ω.

Nun drehte ich den Draht plötzlich um $5 \cdot 2\pi$ und beobachtete die Ausweichungen des Galvanometers 40 Minuten lang. So jetzt, wie auch in den sämmtlichen hierauf folgenden ähnlichen Fällen, erfolgte das Ablesen des Galvanometers nach je zwei Minuten. Die Daten des Drahtes waren:

Stelle des Contactes am Messungsdraht: 894 mm.

Widerstand in Anfang: 9·93433 Ω.

Widerstand am Ende: 9·93430 Ω.

Widerstandsverringerung: 0·00003 Ω.

Dann liess ich den Draht sich aufdrehen. Die Deformation betrug 60°.

Widerstand im Anfang: 9·93427.

Widerstand am Ende: 9·93415.

Widerstandsverringerung: 0·00012.

Von der neuen Gleichgewichtslage gerechnet, erlitt nun der Draht auf einmal ein Torsion von $20 \cdot 2\pi$. Die hierauf bezüglichen Beobachtungen gaben die folgenden Daten:

Stelle des Contactes am Messungsdraht: 892 mm.

Widerstand im Anfang: 9·93684 Ω.

Widerstand am Ende: 9·93679 Ω.

Widerstandsverringerung: 0·00005 Ω.

Nach der Retorsion war eine Deformation von $10 \cdot 2\pi$ zu beobachten.

Zwei Tage später unterzog ich den Draht einer Torsion nach 2π, dann liess ich ihn 6 Wochen lang in Ruhe hängen, wonach eine neue Torsionsreihe folgte. Nach zwei Tagen vollführte ich dann die letzte Torsionsreihe.

Aus den Daten, die diese Versuche ergaben, kann man nunmehr die folgenden Folgerungen ziehen.

Was vor allem die Veränderung mit der Zeit betrifft, so *bleibt der Widerstand des verdrehten und gefangen gehaltenen Drahtes nicht beständig, sondern zeigt mit der Zeit eine ausserordentlich langsame, jedoch entschiedene Verringerung.* So verringert sich auch der Widerstand des retordierten und deformierten Drahtes, doch viel rascher, als im vorigen Fall, was zweifellos den Grund hat, dass der Draht keinem äusserlichen Zwange unterworfen ist und daher ganz frei das Erreichen der Gleichgewichtslage anstreben kann.

Was das Übrige betrifft, erwähne ich vor allem jene bekannte Eigenschaft der elastischen Körper, dass, wenn sie ihre Elasticitätsgrenze übertreffend in Anspruch genommen und danach wieder frei gemacht worden sind, in dieser neuen, deformierten Gleichgewichts-Lage die Grenze der Elasticität weit hinausgeschoben erscheint, und diese Hinausschiebung bei wiederholten starken Belastungen in gesteigertem Maasse so lange fortdauert, bis endlich der Körper reisst. Mit diesem Verhalten sehen wir den Gang des elektrischen Widerstandes ganz im Einklang. Während die Elasticitätsgrenze des in natürlichen Umständen sich befindlichen Constantandrahtes und das Ende des ersten Abschnittes der Widerstandsveränderung, bei den angewendeten Dimensionen, um den Torsionswinkel von $2 \cdot 2\pi$ oder $3 \cdot 2\pi$ ist, dauert der erste Widerstandsabschnitt bei dem in Vornhinein stark (um $20 \cdot 2\pi$) gedrehten und eine Deformation von $10 \cdot 2\pi$ erlittenen Draht bis $7 \cdot 2\pi$ und so ist mit Recht zu erwarten, dass auch die Elasticitätsgrenze in dieser Gegend ist. Der directe Versuch erwies auch dies.

Was endlich das Gebahren der deformierten Drähte über die Elasticitätsgrenze hinaus angeht, ist hier der Charakter der Widerstandsveränderung derselbe, als bei dem natürlichen Draht, doch vollzieht sich das Wachsen des Widerstandes viel langsamer.

Das bisher Gesagte bezieht sich alles auf Constantandrähte von ein und demselben Querschnitt. Nun ist noch übrig zu untersuchen, *was für eine Rolle der Querschnitt hat.* Hiefür zog ich den in den vorigen Versuchen benützten Draht von $\frac{1}{2}$ mm. auf 0·39 mm. aus, glühte denselben sorgfältig aus und unterzog ihn einer bis auf $40 \cdot 2\pi$ gehenden Versuchsreihe. Das Wachsthum des Widerstandes war nun so langsam, dass es bei den ersten Torsionen gar nicht constatiert werden konnte. Naturgemäss konnte auch der Einklang mit der Elasticitätsgrenze nicht so klar beobachtet werden. Die Elasticitätsgrenze war, nach einer unmittelbaren Bestimmung, innerhalb von $10 \cdot 2\pi$. Auch habe ich beobachtet, dass die durch die Torsion verursachte Widerstandsveränderung in viel stärkerem Maasse wächst, als der Querschnitt.

Nach den Erfolgen der an dem Constantandraht gemachten Versuche gehe ich nun auf den anderen Theil dieser Arbeit über: auf das Ausdehnen dieser Versuche auf die gewöhnlichen Metalle. Als Übergang untersuchte ich erst Drähte von *Neusilber* und *Nickelin*, deren Ausdehnungscoëfficienten vom Standpunkte der gewöhnlichen Praxis noch sehr klein sind. Ich musste aber einsehen, dass die bei dem Constantandraht angewandte Methode sich hier wegen der fortwährenden Temperaturveränderung, die mit dem Thermometer gar nicht gemessen werden konnte, doch den Werth des Widerstandes von Minute zu Minute änderte, nicht bewähren kann. Ich musste also die Empfindlichkeit bis auf die Hunderttausendstel verringern. Nun war zwar der Temperaturwechsel nicht so störend, doch konnte anderseits auch die Widerstandsveränderung nicht von Schritt zu Schritt bestimmt werden, da bei den ersten Torsionen absolute Beständigkeit, später aber ein nicht mehr zuverlässiges Wachsthum des letzten Decimalen sich zeigte. Hieraus war in Ganzem so viel ersichtlich, dass auch bei diesen Drähten eine Veränderung von derselben Art und beiläufig von derselben Ordnung, wie bei dem Constantan, auftritt.

Wenn die beim Constantan angewandte Methode sich schon bei den mit Neusilber- und Nickelindrähten gemachten Versuchen nicht bewährte, so obliegt es keinem Zweifel, dass es bei den Drähten mit grossen Wärmecoëfficienten, z. B. dem Eisen oder dem Kupfer, nicht angewendet werden kann. Ein — eigentlich überflüssiges — Experiment bestärkte mich auch in meiner Überzeugung. Ich musste mich also nach einer Methode umsehen, bei der die nicht mehr vermeidlichen thermischen Widerstandsveränderungen doch irgendwie wegfielen. Diese Schwierigkeit wurde noch durch einen Umstand gesteigert. Dass die Widerstandsveränderung gleich bei den ersten Torsionen von messbarer Grösse sei, darf kein zu dünner Draht genommen werden, dann ist aber der Widerstand des Drahtes klein, doch muss er dennoch mit einer bis auf die Millionteln gehenden Genauigkeit gemessen werden; was aber das für eine schwierige Aufgabe ist, ist ja bekannt. Ich hatte auch zu dem Erfolg kein Vertrauen, mein gesammtes Streben richtete sich dahin, bezüglich eines, möglicherweise chemisch reinen, Drahtes festzustellen, ob die durch Torsion verursachte Veränderung von derselben Natur ist, wie bei dem Constantan, also einer Legierung. *Als Stoff wählte ich das Kupfer.*

Zur Beseitigung der durch die Temperatur verursachten Veränderungen bewies sich nach lange fruchtlosen Bemühungen eine sehr einfache Modificierung der WHEATSTONE'schen Anordnung für das zweckmässigste. Als Messungsdraht diente der bei den vorhergehenden Versuchen benützte Constantandraht, die beiden anderen Zweige der Anordnung bildeten zwei nebeneinander, in der Entfernung von einigen cm. aufgehängten Kupferdrähte von gleichem Maass, gleicher Qualität und gleicher Belastung und der Contacte wurde bloss durch dicke Kupferdrähte und Quecksilber hergestellt. Das Abweichen von der WHEATSTONE'schen Brücke bestand darin, dass ich am Messungsdrahte nicht ein, sondern zwei Contacte in unveränderlicher Lage anwandte, deren eine auf 747, die andere 750 mm. stand. Durch einen einfachen Quecksilberumschalter konnte man den einen oder den anderen Contact anwenden. Mit Rücksicht auf die in dem System herrschenden Symmetrie ist es klar, dass die durch den Temperaturwechsel verursachten Temperaturveränderungen einander ausgleichen müssen, und so das Galvanometer jeden Contact betreffend im Laufe der Zeit eine beständige Ausweichung zeigen muss, wenn nämlich beide Drähte in Ruhe sind. Hievon musste ich mich aber auch überzeugen. Auf Grund meiner Versuche fand ich aber die Ausweichungen des Galvanometers keineswegs beständig, sondern schwankend. In diesen Schwankungen war aber keine Regelmässigkeit zu beobachten, deshalb müssen sie als die nothwendigen Folgen der mit der Empfindlichkeit des Galvanometers verbundenen sehr grossen Ausweichungen betrachtet werden. Demnach kann die störende Wirkung des Temperaturwechsels für thatsächsächlich beseitigt erachtet werden.

Nach allem diesem war zu hoffen, dass, wenn ich den einen Draht in Ruhe lasse, den anderen einer Torsion unterziehe, die nicht schwankenden, sondern regelmässigen Veränderungen der Galvanometerausweichungen die durch Torsion verursachten Widerstandsveränderungen verrathen. Die Versuche hatten auch einen günstigen Erfolg.

Der Durchmesser des verwendeten Kupferdrahtes war 0·5 mm. In Bezug auf den 0·46 mm. dicken Constantandraht ist der Werth dieser Verhältnisszahl blos 0·0001; es scheint also, dass der Widerstand beim Kupfer in stärkerem Maasse wächst, als beim Constantan.

Ich betone nochmals, dass bezüglich des Kupfers ich bloss so viel für erreicht erachte, dass in Hinsicht auf die durch Torsion verursachte Widerstandsveränderung das reine Kupfer sich wesentlich so verhält, wie die Constantan-Legierung, trotzdem ihre thermischen Eigenschaften so verschieden sind.

Die Erfolge meiner Versuche können in dem Folgenden kurz zusammengefasst werden:

1. *Das Constantan betreffend, bei dem das Schwanken der Temperatur keineswegs störend wirkt, wächst der elektrische Widerstand mit der Torsion, doch nicht proportional, sondern*

in viel stärkerem Maasse; die Curve der Widerstandsveränderung kann mit grosser Annäherung als aus allmälig steiler werdenden Geraden zusammengestellt betrachtet werden; der Endpunkt des ersten Stückes stimmt mit der Elasticitätsgrenze überein; der Widerstand des nach starker Torsion retordierten und deformierten Drahtes ist viel grösser, als dessen ursprünglicher Werth; der auf diese Weise deformierte Draht benimmt sich bei neuen Torsion so, wie der im natürlichen Zustand, doch wird die Elasticitätsgrenze und dem entsprechend der erste Abschnitt der Widerstandsveränderung weit hinausgeschoben; der Widerstand des verdrehten Drahtes zeigt eine mit der Zeit fortschreitende ausserordentlich langsame Verringerung; die Veränderung des Widerstandes wächst in grösserem Maasse, als der Querschnitt des Drahtes.

2. *Neusilber und Nickelin zeigt ein dem Constantan ähnliches Verhalten, so weit dies zu beurtheilen die nicht genug empfindliche Methode erlaubt.*

3. *Auch bei dem chemisch reinen Kupfer wächst mit der Torsion der Widerstand, und zwar in stärkerem Maasse, als bei den geprüften Legierungen.*

18.

DIE ANATOMISCHEN UND PHYSIOLOGISCHEN VERHÄLTNISSE DER CHORDA TYMPANI AUF GRUND KLINISCHER BEOBACHTUNGEN.

Vorgetragen in der Sitzung der ungar. Akademie vom 14. März 1898.

Von dem correspondierenden Mitglied Prof. Dr. CARL KÉTLY.

(Antritts-Vortrag.)

Aus «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Math. und Naturw. Berichte) Band XVI. pag. 139—144.

Über den Ursprung, den Verlauf und die Natur einzelner Nerven geben selbst die uns heute zur Verfügung stehenden genauen Untersuchungen der Gewebelehre, keine genügende Aufklärung; ja sogar die an Thieren angestellten Versuche, bleiben uns oft, aus leicht erklärlichen Ursachen, die Antwort schuldig. In mehreren Fällen ist es mit der Hilfe klinischer Beobachtungen gelungen, über den complicierten Verlauf eines Nerves und dessen Functionen ein genaues Bild zu gewinnen. Eine solche, bis jetzt nicht gelöste Frage ist die Rolle der Chorda tympani in der Physiologie. Wenn wir die, in den letzten zehn Jahren in dieser Richtung veröffentlichte Litteratur durchsehen, so begegnen wir ganz entgegengesetzten Ansichten von berühmten Anatomen und Physiologen, über den Ursprung, den Verlauf und die Functionen des erwähnten Nerves. Die Methoden der Gewebelehre und die Ergebnisse der an Thieren angestellten Versuche, sind durchaus nicht genügend zur Lösung dieser schweren Aufgabe; und nur mit Hilfe von klinischen Beobachtungen sind wir dahin gelangt, dass wir mit grosser Wahrscheinlichkeit die anatomischen und physiologischen Verhältnisse dieses Nerves bestimmen können.

Die Chorda tympani schliesst sich dem Gesichtsnerv an, verläuft mit diesem im Gesichtsnerv-Canal (Canalis Fallopiæ), kurz vor dem Austritt aus dem Canal, verlässt sie denselben und gelangt durch die Trommelhöhle und die Fissura petro-tympanica an die Basis des Schädels, indem sie sich von hier nach vorne und abwärts neigt, vereinigt sie sich mit dem Zungennerven und theilt sich später in zwei Äste, deren vorderer sich mit den Nervenfasern des nervus lingualis auf dem vorderen Theil der Zunge verzweigt, während der rückwärtige sich von dem Zungennerv trennt und sich in dem unter der Kinnlade befindlichen Ganglion (Gangl. submaxillare) einbettet und indem er die unter dem Kinn und unter der Zunge liegenden Speicheldrüsen versieht, wirkt er auf deren Ausscheidungen ein.

Diesen Verlauf kannte schon Henle * und er ist seither allgemein anerkannt. Indessen ist seine weitere Bestimmung in der Zunge noch hin und wieder zweifelhaft; ebenso wie man darüber noch nicht im Reinen ist, auf welchen Wegen die Chorda tympani zum Gehirn gelangt.

Die Geschmacksempfindung der vorderen zwei Drittheile der Zunge vermittelt der Zungennerv, diese seine Rolle ist über allen Zweifel, theils durch Experimente, theils durch operative Eingriffe bei Menschen bewiesen; indem nach dem Durchschneiden des Zungennervstammes auf zwei Drittheilen der entsprechenden Zungenseite die Geschmacksempfindung aufhörte. Doch entsteht durch Unterbrechung der Chorda tympani genau dasselbe Resultat. Die Fähigkeit der Geschmacksleitung des letzteren Nerves hat Claude Bernard ** zuerst bewiesen, später hat der geniale Duchenne*** mit Hilfe von Electricität die Fähigkeit der Geschmacksleitung dieses Nerves bewiesen, da durch Faradisieren des mit Wasser gefüllten äusseren Ohrganges auf zwei Drittheil des vorderen Theiles der entsprechenden Seite der Zunge ein Metallgeschmack entstand. Ohrenärzte haben in vielen Fällen erfahren,

---

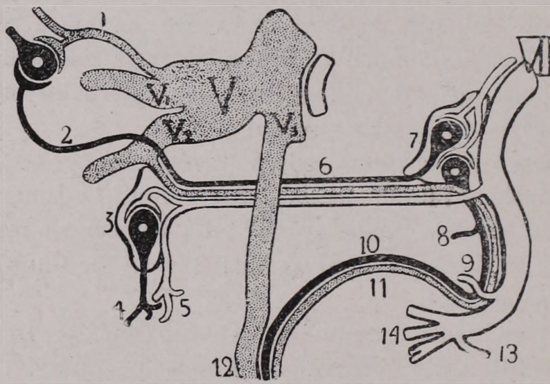
* Henle: Nervenlehre. 1873.

** Cl. Bernard: Leçons sur la physiologie et la pathologie du système nerveux. II. 1888.

*** Diagnostic et curabilité de la surdité et de la surdi-mutité nerveuse. 1861.

dass durch Verletzen der Chorda tympani eine Störung, oder ein vollständiges Aufhören der Geschmacksempfindung verursacht wird. So dass nunmehr die Ärzte es im Allgemeinen zugeben, dass die Chorda tympani, welche in dem Zungennerv ausläuft, den Geschmack an den vorderen zwei Drittheilen der Zunge vermittelt.

Es ist im Allgemeinen eine bekannte Thatsache, dass bei peripheren Lähmungen des Gesichtsnervs an den vorderen zwei Drittheilen der Zunge der Geschmack oft aufhört, oder aber eine



V—nervus trigeminus; VII—nervus facialis; 1—nervus lacrymalis; 2—nervus orbitalis; 3—ganglion sphenopalatinum; 4—nervi ad tonsillam; 5—nervi palatini; 6—nerv. petr. superf. maior; 7—ganglion geniculi; 8—nervus communicans c. plexu tympani; 9—nervus stapedius; 10—chorda tympani (Speichel secernierende Fasern); 11—chorda tympani (Geschmacksfasern); 12—nervus lingualis; 13—nervus auricularis magnus; 14—rami peripherici nervi facialis.

ganz eigenartige Veränderung (Metallgeschmack etc.) entsteht. Genau dasselbe bemerken wir bei mechanischen oder experimentellen Eingriffen, wenn diese den Gesichtsnerv in dem Fallopia-Canal berühren. Diese Erfahrungen beweisen, dass die Chorda tympani, wenigstens auf einem begrenzten Gebiete, im Gesichtsnerv verläuft. Wenn der Gesichtsnerv an der Basis des Schädels jenseits des Ganglion geniculi verletzt wird, so verursacht dies niemals eine Störung im Geschmacksgefühl; und deshalb müssen wir annehmen, dass die Chorda tympani den Gesichtsnerv nur bis zum Ganglion geniculi begleitet, und hier sich von ihm trennt. Auf Grund dessen können wir sagen, dass die Auffassung von

LUSSANA [1] und CLAUDE BERNARD, nach welcher die Chorda tympani die einfache Fortsetzung der WRISBERG-Portion des Gesichtsnerves wäre, falsch ist; auch die Behauptung BERNARD's nach, welcher der Gesichtsnerv durch Vermittlung der Chorda tympani nur einen motorischen Einfluss auf die Erregung der Geschmacksempfindung ausübt, fällt dadurch weg. Nach ihm bringt die Chorda tympani die auf der Zunge unter der Schleimhaut befindlichen Muskelfasern in Bewegung, und diese setzen dann die auf dem vorderen Theile der Zunge vorhandenen Geschmackswarzen in Bewegung, wodurch deren Berührung mit den, den Geschmack erregenden Stoffen erleichtert wird, und weiter auch die mit der Chorda tympani verlaufenden gefässmotorischen Äste auf dem Gebiete der Warzen umgebenden Venen ausdehnend einwirken, und dadurch das Geschmacksgefühl stärken. BERNARD hält die Chorda tympani für die directe Fortsetzung des dazwischen fallenden WRISBERG'schen Nerventheiles, und betrachtet den letzteren als einen selbständigen Nerv, welcher im grossen Sympathicus seinen Ursprung hat.

Nachdem wir nun, auf Grund der oben erwähnten Thatsachen, wissen, dass die Chorda tympani, als der, den Geschmack der vorderen zwei Drittheile der Zunge vermittelnde Nerv, nur auf einem begrenzten Gebiete mit dem Gesichtsnerv verläuft, wird die weitere Frage die sein, wo sie sich von diesem trennt und welcher ihr weiterer Verlauf ist. Nach den physiologischen Handbüchern von BRÜCKE [2] und HERMANN [3] und den darauf bezüglichen Mittheilungen von KRAUSE [4] und CARL [5] stammen die Geschmacksfasern der Chorda tympani durch Vermittelung des Trommelnerves, aus dem Nervus glosso-pharyngeus. Ihre Behauptungen sind bloss auf theoretische Folgerungen und Voraussetzungen gegründet; indem sie von der Behauptung ausgehen, dass das Geschmacksgefühl nur durch die Function eines Nerves zum Aus-

---

[1] LUSSANA: Archives de physiologie. 1869.

[2] BRÜCKE: Vorles. üb. Physiologie.

[3] HERMANN: Handbuch der Physiologie.

[4] KRAUSE: A leiró emberboncztan kézikönyve. 1882. S. 1342.

[5] CARL: Archiv für Ohrenheilkunde. 1875.

druck kommen kann, und dieser ist der Nervus glosso-pharyngeus, von welchem bekannt ist, dass er die Geschmackswarzen des hinteren Drittheils der Zunge mit Fasern versieht; wie dies VINTSCHGAU und KÖNIGSCHMIEDT und nach diesen im THANHOFFER'-schen anatomischen Institut DYONIS BENCZÚR, durch Versuche an Kaninchen nachgewiesen hat. Die Erfahrungen und Experimente haben im Allgemeinen bewiesen, dass beim Verwunden oder Durchschneiden des Nervus glosso-pharyngeus regelmässig der Geschmack nur auf der beschädigten Seite der Zungenwurzel verloren geht, während er auf den vorderen zwei Drittheilen bestehen bleibt. Es werden zwar einzelne Fälle erwähnt, in welchen durch Verwunden des N. glosso-pharyngeus das Geschmacksgefühl auf der entsprechenden Seite der vorderen Hälfte der Zunge eine Störung erlitt, doch dies sind Ausnahmen, und können billigerweise durch die individuelle Abweichung des Verlaufes der Nerven erklärt werden. Und so können wir mit Sicherheit aussprechen, dass die Mehrzahl der Physiologen und Ärzte der jetzigen Zeit die Chorda tympani nicht von dem Nervus glosso-pharyngeus ableiten.

SCHIFF [1] behauptet auf Grund von physiologischen und ERB [2] auf Grund pathologischer Untersuchungen, dass die Chorda tympani sich vom Gesichtsnerv trennend zum N. trigeminus wendet und dass mit diesem seine geschmackfühlenden Fasern zum Gehirn gelangen. Diesen Standpunkt nehme auch ich ein und habe diesem in meiner im Jahre 1886 erschienenen Monographie [3] Ausdruck gegeben.

An welchen Zweig des dreitheiligen Nerves sich die Chorda tympani anschliesst, darüber sind die Meinungen verschieden. Nach den beiden obenerwähnten Forschern, verlässt sie den Gesichtsnerv in seinem Ganglion geniculi und gelangt von hier mit dem Nerv. petrosus superficialis major in den Ganglion sphenopalatinum, d. h. sie vereinigt sich mit dem zweiten Äste des

---

[1] SCHIFF: Recueil des mémoires physiologiques. III. 1896.

[2] ERB: ZIEMSSEN Handb. d. spec. Path. u. Therap. XII.

[3] KÉTLY KÁROLY: Kórodai tanulmányok az arczideg bántalmáról. Budapest, 1886. KILIÁN FRIGYES bizománya.

Trigeminus. Andere hingegen nehmen die Vereinigung mit dem dritten Aste an, so Ziehl,* nach welchem der N. petrosus superficialis minor den Gesichtsnerv mit dem Ganglion oticum verbinden würde. Bis jetzt besitzen wir nur wenige pathologische Daten über die Entscheidung dieser Frage; soviel ist indessen gewiss, dass bei Erkrankung des Trigeminus-Stammes oder des Gasser'schen Ganglion, z. B. bei, durch Geschwülste verursachter Zusammendrückung, Geschmacksstörungen eintreten; doch darüber, mit welchem Zweige der Verlauf der geschmacksleitenden Fasern verlaufen, besitzen wir gegenwärtig nur wenig beweiskräftige Daten.

Einen solchen, hierauf anwendbaren und beweisbringenden Krankheitsfall konnte ich im Jahre 1886 beobachten. Rosa O. 22 Jahre alt, ledig, litt seit lange an Kopfschmerzen in der Genicksgegend, zu welchen sich von Zeit zu Zeit Schwindel und selten Brechreiz gesellten. Im Monate November, als ich die Kranke in Behandlung nahm, war der rechtsseitige Gesichtsnerv und der nervus abducens gelähmt; nach dem Berichte der intelligenten Kranken entwickelte sich die Lähmung bisher stufenweise im Verlaufe von drei Monaten. Die Lähmung des Gesichtsnerves zeigte die charakteristischen Eigenthümlichkeiten der peripheren Lähmungen mit der sogenannten Entartungs-Reaction. Der weiche Gaumen und das Zäpfchen waren auch von der Lähmung berührt. Eine *Geschmacksstörung* zeigte sich jedoch nicht. Unter solchen Umständen konnte man auf eine Geschwulst der Gehirnbasis schliessen. Im Monate Jänner 1887 klagte die Kranke über ein pelziges Gefühl auf der rechten Seite der Gesichtsmitte und in der Gegend der Nase; die Untersuchung ergab, dass auf dem Gebiete des zweiten Zweiges vom rechtsseitigen Trigeminus eine höhergradige Unempfindlichkeit vorhanden war, auf derselben Seite der vorderen zwei Drittheile der Zunge aber war das Geschmacksgefühl (für sauer, süss und bitter) verloren gegangen; jedoch war die Tast- und Wärmeleitungsfähigkeit unberührt. Nach einigen Wochen verbreitete sich die Unempfindlichkeit des Gesichtes auch auf den dritten Zweig des Trigeminus und nach

* Ziehl: Virchow's Arch. 1889. CXVII.

kurzer Zeit war auch dies Gebiet unempfindlich; und damit gleichzeitig verminderte sich auch die Tast- und Wärmeleitungsfähigkeit der Zunge, und hörte schliesslich vollkommen auf.

Diese Beobachtungen können als sehr werthvolle Daten verwendet werden:

1. Können sie zur Entscheidung, ob das Geschmacksgefühl der vorderen zwei Drittheile der Zunge durch die Chorda tympani oder durch den Zungennerv vermittelt wird, benützt werden. Im vorliegenden Falle begann der Verlust des Geschmacksgefühles auf der diesseitigen, vorderen Hälfte der Zunge, mit der Gefühllosigkeit des zweiten Astes des Trigeminus; und solange die Gefühllosigkeit auf den zweiten Ast beschränkt war, war das Tast- und Wärmegefühl unberührt und so ist es klar, dass nur die Vermittelung der Chorda tympani in Betracht kommen kann, welche nach allem diesen aus dem zweiten Aste des Trigeminus, wahrscheinlich aus dem Ganglion sphenopalatinum stammt.

2. Dieser Fall beweist ferner, dass die Chorda tympani nicht die Fortsetzung des dazwischen liegenden WRISBERG'schen Tractes ist, wie dies LUSSANA und CL. BERNARD behaupten; sondern ein Zweig des Trigeminus, welcher, durch den Fallopia-Canal zur Zunge gelangt. Dadurch wird auch die Annahme von CL. BERNARD widerlegt, nach welcher das Geschmacksgefühl an dem vorderen Theile der Zunge unter dem bewegenden Einflusse der Chorda tympani stehen würde, denn der zweite Ast des Trigeminus enthält bloss Gefühlsfasern.

3. Beweist dieser Fall ferner, dass der Zungennerv nur das Tast- und Wärmegefühl vermittelt, während er auf den Geschmack keinen Einfluss ausübt. Der Zungennerv stammt nämlich aus dem dritten Ast des Trigeminus.

Auf Grund aller in diesem Falle gemachten klinischen Beobachtungen, sehe ich die Ansicht von SCHIFF und ERB bestätigt, dass nämlich die Geschmacksfähigkeit der vorderen zwei Drittheile der Zunge ihren Ursprung im zweiten Aste des Trigeminus hat, und durch die mit dem Gesichtsnerv gleich verlaufenden Chorda tympani aufrecht erhalten wird. Nur so ist es zu erklären, dass bei örtlichen Lähmungen des Gesichtsnerves nur dann eine Störung des Geschmackes eintritt, wenn der die

Lähmung verursachende Herd in demjenigen Theile des Fallopia-Canals liegt, in welchem der Gesichtsnerv mit der Chorda tympani gleichzeitig verlauft.

Ich muss hinzufügen, dass diese Auffassung nur der Mehrzahl der Fälle entspricht, nachdem es auch verlässliche Beobachtungen giebt, nach welchen, durch eine Lähmung des dritten Zweiges des Trigeminus auf den vorden zwei Drittheilen der Zunge eine Geschmacksstörung erfolgte; mit Bezug auf diese, muss ich auf die häufigen Unregelmässigkeiten des Verlaufes der Nerven hinweisen, welche im Organismus zu beobachten sind.

SITZUNGSBERICHTE.*

I. In den **Sitzungen der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Classe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften** lasen die nachbenannten Autoren die folgenden Arbeiten (anschliessend an pp. 356—369 des XV. Bandes dieser Berichte):

Sitzung den 17. Januar 1898.

1. *Ludwig Lóczy* c. M.: «*Die geographischen und geologischen Ergebnisse der Reise des Grafen Széchenyi*».

2. *Adolf Ónodi* c. M.: «*Ueber die phonatorischen und respiratorischen Nervenbündel des Kehlkopfes*». (Siehe Mathem. u. naturwiss. Berichte Bd. XV. pp. 320—336.)

3. *Eugen v. Daday* c. M.: «*Mikroskopische Süsswasserthiere aus Ceylon*».

4. *Franz Tangl* und *Zuntz*: «*Der Einfluss der Muskelarbeit auf den Blutdruck*». Vorgelegt durch das o. M. *Ferdinand Klug*.

5. *Friedrich Reusz*: «*Der Einfluss des Gallenmangels auf das Glycogenbildungsvermögen der Leber*». Vorgelegt durch das c. M. *Árpád Bókay*.

6. *Samuel Beck*: «*Die Zellenveränderungen der Haut bei Myxoedem*». Vorgelegt durch denselben.

Sitzung den 14. Februar 1898.

1. *Géza Horváth* o. M.: «*Die Hemipterafauna des ungarischen Reiches*».

* In dieser Abtheilung geben wir eine kurze Uebersicht der in den Sitzungen der III. Classe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kön. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft gelesenen Arbeiten, bezw. Vorträge und Vorlesungen. Der grössere Theil derselben ist entweder dem ganzen Umfange nach oder in längerem Auszuge in der ersten Abtheilung dieses Bandes enthalten; dieser Umstand ist auch bei den betreffenden, hier der Vollständigkeit wegen angeführten Titeln angedeutet. Der andere Theil dieser Arbeiten, bezw. Vorträge, von welchen wir hier nur die kurzen Auszüge oder auch nur die Titel angeführt haben, besteht aus solchen, die theils weil sie unfertig und daher noch nicht publicierbar sind, theils weil sie mindere Bedeutung haben oder auch nur zur Verbreitung der Wissenschaft dienen sollen, theils aber auch aus solchen, die wegen Raummangels unter die selbstständigen Arbeiten nicht aufgenommen wurden.

2. *Ludwig Méhely*: «*Neue Froscharten aus Neu-Guinea*». Vorgelegt durch das o. M. *Géza Horváth*. Diese neuen Arten stammen aus der Sammlung des in Neu-Guinea verweilenden *Ludwig Biró*. Die beachtenswertheste unter ihnen ist eine in der Astrolabe-Bucht gesammelte kleine Kröte, welche als eine bisher gänzlich unbekannte Art den Namen *Choanacantha rostrata* erhielt und in die Familie *Engystomatidae* gehört.

3. *Andreas Högyes* o. M.: «*Die Thätigkeit des Budapester Pasteur-Institutes im Jahre 1897*».

Sitzung am 14. März 1898.

1. *Michael Lenhossék* c. M. (Antrittsvortrag): «*Ueber das Centrosoma*». Der Begriff des Centrosoma ist bei den Gelehrten sehr verschieden gefasst worden; Vortragender nennt — mit *Flemming* und *Heidenhain* übereinstimmend — Centrosomen die in den Körper der Zelle eingebetteten, in typischer Lage und Zahl vorkommenden Körnchen, rechnet also nicht auch die umgebende Sphæra und die strahlenartige Structur dazu, wie andere Forscher. Es besteht seiner Meinung nach aus einem specifischen Stoff, der weder mit dem Cytoplasma, noch den Bestandtheilen des Samens identisch ist. Seine typischeste Lage ist, wenn es in der Mitte der Zelle liegt. Jedes Centrosoma entsteht aus einem anderen Centrosoma und ist daher auf ein Muttercentrosoma zurückzuführen, das aus dem Samenfaden stammt. Was die physiologische Bestimmung des Centrosoma angeht, bekennt sich Vortragender zu der durch *Boveri* begründeten Theorie, dergemäss das Centrosoma das dynamische Centrum der Zelle ist, also von ihr alle bisher unbekannten Kräfte ausgehen, welche die Theilung der Zellen verursachen.

Vortragender untersuchte das Centrosoma in den Zwischenzellen des Hodens des Kaninchens und der Ratte und fand, dass auch hier, wie in den entsprechenden Zellen des Menschen und der Katze, das Centrosoma auch in der ganz entwickelten, ruhenden Zelle fortbesteht, und dass das Cytoplasma keine Spur der strahlenartigen fibrillarischen Structur zeigt, sondern von der zu homogenen, scharf begrenzten kugelförmigen Körpern differenzierten Sphäre gebildet wird. Sehr geeignet für Untersuchungen des Centrosomas sind auch die Stromazellen des Eierstockes vom Kaninchen. Im Eierstocke eines schwangeren Kaninchens fand Vortragender eigenartige Zellen, die er bei keinem anderen Thiere vorfand. Es sind dies verfettete Zellen, in denen das Fett in Form von Körnchen eingebettet ist, wodurch das Protoplasma ein netzartiges Aussehen erhält. Das Centrosoma, welches im geometrischen Mittelpunkt der Zelle ist, besitzt hier keine Sphäre. Die oberflächliche Lage des Centrosomas beobachtete Vortragender an den Cylinder-Epithelialzellen des Nebenhodens vom Kaninchen und der Ratte. Er wies auch nach, dass die Bewegung der Flimmerzellen von den Centrosomen herrührt, die mit den in den Zellen sichtbaren sogenannten basalen Körperchen identisch sind. Es gelang ihm auch zu beweisen, dass der Schwanzfaden der Spermatide nicht — wie man es bisher allgemein annahm — aus dem Zellensamen, sondern — wie dies kurz vordem *Meves* behauptete — aus dem Centrosoma hervorwächst.

2. *Carl Kétly* c. M. (Antrittsvortrag): «*Die anatomischen und physiologischen Verhältnisse der Chorda tympani auf Grund von klinischen Beobachtungen*». (Siehe die erste Abtheilung dieses Bandes pp. 313—319.)

3. *Joseph Fodor* o. M. und *Gustav Rigler*: *Versuche mit dem Blute durch Typhusbacillen inficierter Thiere*». (Siehe Math. u. naturwiss. Berichte Bd. XV. pp. 69—74.)

4. *Gustav Rados* c. M.: «*Ueber die Bedingungsgleichungen zwischen den Coëfficienten der orthogonalen Substitutionen*». (Siehe die erste Abtheilung dieses Bandes, pp. 236—240.)

5. *Béla Tötössy*: «*Die Tangentenebenen höherer Ordnung der algebraischen Flächen*». Vorgelegt durch das c. M. *Gustav Rados.*

6. *Rudolf Francé*: «*Ueber Collodictyon triciliatum*». Vorgelegt durch das o. M. *Géza Entz.*

Sitzung am 18. April 1898.

1. *Alexander Mágócsy-Dietz* c. M. «*Markdiaphragma doppelkeimblättriger Baumpflanzen.*»

2. *August Franzenau* c. M. (Antrittsvortrag): «*Krystallographische Untersuchungen am Bélabányaer Pyrit*». (Siehe Math. u. naturwiss. Berichte Bd. XV. pp. 198—223.)

3. *Julius Farkas*: «*Ueber die Reduction der Kirchhoff'schen Diffusionsgleichungen*». Vorgelegt durch das c. M. *Moritz Réthy.* (Siehe die erste Abtheilung dieses Bandes pp. 97—110.)

4. *Alexander Kalecsinszky*: «*Ueber Serpentine aus dem Banat*». Vorgelegt durch das o. M. *Carl Than.*

5. *Stephan Bugarszky* und *Leo Liebermann*: «*Ueber das Salzsäure-, Natriumhydroxyd- und Kochsalzbindungsvermögen der eiweissartigen Stoffe*». Vorgelegt durch denselben. — Die Verfasser verwendeten zu ihren Untersuchungen Eiweiss, Albumose und Pepsin. Die Grundlage ihrer Forschungsmethoden bildete das Sinken des Gefrierpunktes und die Bestimmung der elektromotorischen Kraft. Beide Methoden ergaben, dass die eiweissartigen Stoffe die Salzsäure und das Natriumhydroxyd zu binden vermögen, das Kochsalz aber nicht. In abgerundeten Zahlen ausgedrückt, vermag ein Molekul Eiweiss vier Molekule Salzsäure und ebensoviel Natriumhydroxyd, ein Molekul Albumose drei Molekule Salzsäure und ebensoviel Natriumhydroxyd, zwei Molekule Pepsin aber bloss ein Molekul Salzsäure zu binden.

6. *Franz Árkövi*: «*Ueber einen neuen bacteriologischen Factor der Zahnpulpa und Wundgangraene*». Vorgelegt durch das o. M. *Ferdinand Klug.* — Vortragender beobachtete beim abscessus alveolaris chronicus

ein bisher unbekanntes Bacterium, welchem er den Namen *bacillus gangraenae pulpae* gab. Es gehört zu den pleomorphen Bacterien. Auf sehr erschöpftem Züchtungsboden bringt es Sporen hervor, wodurch es dem *oedema malignum* ähnlich ist. Seine meisten Eigenschaften erinnern jedoch an den *Yung*'schen «O Caries-Pilz». Die Versuche bewiesen, dass dieser Mikroorganismus unter den Bacterien des Mundes und beim Hervorbringen des Wundbrandes eine grosse Rolle spielt.

7. *Franz Árkövi: «Beiträge zur Aetiologie der Zahncaries»*. Vorgelegt durch denselben. — Der *bacillus gangraenae pulpae* spielt auch in der Aetiologie der Zahncaries eine bedeutende Rolle. Es ist ein eben solches Bacterium der Caries, wie die *Yung*'schen Cariespilze, es kann sogar allein die Caries verursachen. Die Versuche erwiesen die Richtigkeit von *Miller*'s Behauptung, nach welcher das Cariespigment kein Mikroorganismus, sondern das Vorhandensein von Eisen hervorbringt, für unhaltbar, da auch die empfindlichsten Eisenreagentien keine Reaction gaben.

Sitzung den 16. Mai 1898.

1. *Philipp Lenard* c. M. (Antrittsvortrag): *«Ueber das Verhalten von Kathodenstrahlen parallel zu elektrischer Kraft»*. Vorgelesen durch das o. M. *Coloman v. Szily.* (Siehe erste Abtheilung dieses Bandes pp. 194—200.)

2. *Béla v. Lengyel* o. M.: *«Beiträge zur Kenntniss des Calciums»*. — Das Calcium wird durch Quecksilber leicht amalgamisiert, das Amalgam ist, wenn das Calcium in grosser Masse vorhanden, ein fester Körper. Die Calciumspäne geben mit Kaliumchlorat ein explodierendes, grell aufleuchtendes Gemisch, das jedoch auf die photographische Platte — wie es scheint — keine Wirkung hat. Calcium und Hydrogen vereinigt sich so bei gewöhnlicher Temperatur, wie bei Rothglut zu Calciumhydrid (CaH_2). Mit Nitrogen vereinigt sich das Calcium schwer zu Calciumnitrid (Ca_3N_2). Wenn wir Calciumspäne in trockenem Methanstrom erhitzen, verwandelt es sich allmälig zu einer grauen Masse, die mit Wasser eine grosse Menge Gas entwickelt, dieses Gas ist ein Gemisch von Calciumcarbid und Calciumhydrid.

3. *Felix Szontagh* und *Oskar Wittmann: «Ueber die chemische Zusammensetzung des normalen und des diphtheritischen Serums»*. Vorgelegt durch das o. M. *Ferdinand Klug.*

4. *Stephan Bugarszky* und *Franz Tangl: «Ueber die molekulare Concentration des Blutserums»*. Vorgelegt durch denselben. — Die molekulare Concentration des Blutserums ist bei den von den Vortragenden untersuchten Säugethieren verhältnissmässig nur wenig verschieden. Am meisten concentriert ist das Serum des Schweines und des Rindes. Die Concentration ist bei derselben Thierart ziemlich beständig, es sind bloss geringe Schwankungen zu beobachten. Der grösste Theil der Molekule des Serums ist anorganisch und, obwohl das Gewicht der organischen Molekule viel grösser ist, wird dies durch die grosse Zahl der anorganischen Molekule

ausgeglichen. So hängt also der osmotische Druck des Blutserums hauptsächlich von den anorganischen Molekulen ab.

Sitzung den 20. Juni 1898.

1. *Emerich Lörenthey: «Sepia in den ungarischen Tertiärgebilden».* Vorgelegt durch das o. M. *Anton Koch.* (Siehe Math. u. naturw. Berichte Bd. XV. pp. 268—272.)

2. *Eugen Pólya: «Der Abschluss der vorderen Kammer bei Glaucoma».* Vorgelegt durch das c. M. *Wilhelm Schulek.* — Vortragender beobachtete 24 Glaucomafälle und fand dabei den Winkel der vorderen Kammer meistens ganz oder halb geschlossen. Am leichtesten schliesst er sich beim hypermetropen Auge, schwerer beim emmetropen, während bei myopen Augen überhaupt kein Schliessen des Winkels beobachtet wurde. So scheint denn die Disposition zum schwereren oder leichteren Schliessen des Winkels von der Beschaffenheit desselben abzuhängen.

3. *Hugo Schwitzer: «Beiträge zur Entwicklung des grauen Staars im vorgeschrittenen Alter».* Vorgelegt durch denselben. — Nach den Erfahrungen des Verfassers kommt diese Krankheit am meisten zwischen dem 61. und 65. Lebensjahr vor, und zwar grösstentheils bei Landleuten. Frauen sind dieser Krankheit weniger ausgesetzt, wie Männer. Die Ursache des grauen Staares scheinen die ultravioletten Sonnenstrahlen zu sein.

4. *Béla Fenyvessy* und *Arthur Hasenfeld: «Ueber die Kraft des phosphorig entarteten Herzens».* Vorgelegt durch das c. M. *Árpád Bókay.*

5. *Johann Csiky: «Aethernarkose mit Rücksicht auf die aetherige Lungenentzündung».* Vorgelegt durch denselben.

6. *Paul Háry: «Das Aufsaugen des officinellen Eisens im Magen».* Vorgelegt durch denselben.

7. *Eugen Bernátsky: «Zur Kenntniss der endotrophen Mykorhizen».* Vorgelegt durch das c. M. *Mágócsy-Dietz.*

8. *Aladár Aujeszky: «Beiträge zur Frage der Anthraximmunität».* Vorgelegt durch das o. M. *Andreas Högyes.* — Die Versuche bezweckten festzustellen, ob durch Einspritzung von Milzemulsion gesunder Thiere gegen Anthrax empfindliche Thiere immunisiert werden können. Die grösstentheils an Kaninchen und Mäusen gemachten Versuche können in drei Gruppen zusammengefasst werden: 1. Versuche, bei denen die Thiere präventiv behandelt werden. 2. Versuche mit post infectionem behandelten Thieren. 3. Versuche mit Thieren, die mit dem Gemisch des inficierenden und des immunisierenden Stoffes geimpft wurden. 75% der mit Milzemulsion gesunder Thiere geimpften Kaninchen widerstand der Infection, die übrigen starben später als die Controllthiere. Die Infectionsfähigkeit des Infectionsstoffes wurde von der dazu gemischten Milzemulsion verringert. Die immunisierten Kaninchen behielten ihre Widerstandsfähigkeit Wochen hindurch. Mäuse konnten nicht auf ähnliche Weise immunisiert

werden, obwohl die geimpften Thiere später starben, als die Controllthiere.

9. *Gustav Rigler: «Das Wandern des Typhusbacillus im Boden».* Vorgelegt durch das o. M. *Joseph Fodor.*

10. Auf Vorschlag des Generalsecretärs *Coloman v. Szily* stellt die Classe der Gesammtsitzung den Antrag, dass zu der im laufenden Jahre in London zu haltenden mathematisch-naturwissenschaftlichen bibliographischen Conferenz in Vertretung Ungarns *August Heller* o. M. und *Theodor Duka* c. M. entsendet werden.

Sitzung den 17. Oktober 1898.

1. *Julius Farkas* c. M. (Antrittsvortrag): *«Ergänzungen zur Vectorenlehre und zur Lehre des Elektromagnetismus».* (Siehe die erste Abtheilung dieses Bandes pp. 111—153.)

2. *Julius Farkas* c. M.: *«Die algebraische Grundlage des Fourier'schen mechanischen Principes».* (Siehe die erste Abtheilung dieses Bandes pp. 154—157.)

3. *Béla v. Lengyel* o. M.: *«Die Wirkung einiger Gase auf die photographische Platte».* (Siehe die erste Abtheilung dieses Bandes pp. 217—225.)

4. *Gustav Rados* c. M.: *«Inducierte lineare Substitutionen».* (Siehe die erste Abtheilung dieses Bandes pp. 241—262.)

5. *Julius Vályi* c. M.: *«Mehrfache polare Reciprocität».* Vorgelegt durch das o. M. *Julius König.* (Siehe die erste Abtheilung dieses Bandes pp. 50—58.)

6. *Eugen Cholnoky: «Bericht über die wissenschaftlichen Erfolge meiner Reise in China und Mandschurien».* Vorgelegt durch das c. M. *Ludwig Lóczy.*

7. *Ferdinand Filárszky: «Beiträge zur Algenvegetation».* Vorgelegt durch das c. M. *Alexander Mágócsy-Dietz.*

8. *Emanuel Beke: «Ueber die Resolventen der homogenen linearen Differenzialgleichungen».* Vorgelegt durch das o. M. *Julius König.*

Sitzung den 14. November 1898.

1. *Anton Koch* o. M.: *«Ueber die jüngere Tertiärbildung des siebenbürgischen Beckens».* (Siehe die erste Abtheilung dieses Bandes pp. 59—76.)

2. *Rudolph v. Kövesligethy* c. M.: *«Zwei Parametergleichungen der Spectralanalyse».* (Siehe die erste Abtheilung dieses Bandes pp. 1—49.)

3. *Gustav Rados* c. M.: *«Gruppen von inducierten Substitutionen».*

4. *Edmund Bogdánfy: «Der Niederschlag im Winter und die Frühjahrshochwässer der Theiss».* Vorgelegt durch das Ehrenmitglied *Nicolaus v. Konkoly.*

5. *Sigismund Róna: «Der jährliche Gang der Temperatur in Ungarn».* Vorgelegt durch denselben.

Sitzung den 12. December 1898.

1. *Carl Laufenauer* c. M. (Antrittsvortrag): «*Die Hódmezővásárhelyer Hexenprocesse (1730—1758) vom nervenpathologischen Standpunkte*».

2. *Adolf Ónodi* c. M.: «*Beiträge zur Kenntniss der Kehlkopfnerven*».

3. *Gustav Rados* c. M.: «*Die charakteristische Function der inducierten Substitutionen*».

4. *Rudolph v. Kövesligethy*: «*Ueber das Spectrum der Himmelskörper*».

II. Die **Fachsectionen der Königlichen Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft** hielten im Jahre 1898 zwanglose Sitzungen, deren Protokolle in folgendem, anschliessend an die diesbezüglichen Berichte pp. 370—389 des XV. Bandes dieser Berichte mitgetheilt werden.

A) Fachconferenz für Zoologie.

Sitzung den 8. Januar 1898.

1. *Joseph Jablonowski* hält über den *Argas reflexus* einen Vortrag und spricht, nachdem er einen Ueberblick auf die hierauf bezügliche Litteratur gegeben hatte, eingehend über die Lebensweise, Verbreitung und Schädlichkeit dieser Art und über die Mittel, mit denen man sich gegen sie wehren kann.

2. *Ludwig Méhely* zeigt die von *Ludwig Biró* in Neu-Guinea gesammelten *Reptilien und Amphibien*, zusammen 187 Arten.

3. *Ernst Dietl* spricht über «*Neue Coleopteren aus der Fauna Ungarns*» und zeigt einige Arten, die im neuen ungarischen Käferkatalog (Fauna regni Hungariæ. *Kuthy:* Coleoptera.) noch nicht vorkommen. Diese Arten sind: *Nebria transsylvanica Germ. ab Ormay Ganglb.* aus den südöstlichen Karpathen; *Dyschirius bacillus Schaum* aus der Gegend des Neusiedler-Sees, welche Art bisher nur in der Gegend von Smyrna bekannt war; *Pterostychus rufitarsis Dej. var. Deubeli Ganglb.* vom Kronstädter «Christenberg»; *Babister bipustulatus F. ab lacertosus Sturm* aus der Gegend von Dicső-Szent-Márton; *Cymindis sp.*, die ganz schwarz ist, der *C. humeralis* ähnelt und aus dem Comitat Krassó-Szörény stammt; *Graphoderes cinereus L. ab intermedius Westh.* aus Hermannstadt; *Oxypoda Deubeli Ganglb.* aus der Gegend von Kronstadt; *Leptusa bucsoiana Ganglb.* und *Omalium Lokayi Fleisch.* vom Berge Bucsecs; *Drimeotus Chyzeri Biró, Dr. Entzi Biró* und *Dr. Horváthi Biró* aus den Höhlen im Comitate Bihar; *Chryptophagus Deubeli Ganglb.* vom Bucsecs (diese Art kommt auch in den Rodnaer Bergen und um Herkulesbad vor); *Epuraea abietina J. Sahlb.* aus dem Comitat Mármaros; *Monotoma brevicollis Aubé* vom Budapester Blocksberg; *Copris lunaris L. var. corniculatus Muls.*, ist selten; *Aphodius fossor L. var. silvaticus Ahr.* aus Hermannstadt; *Ochodaeus cychramoides Reitt.* aus Budapest; *Phyllopertha horticola L. var. nigropicea Dietl* (clytris nigropiceis) aus dem Rothenthurmpass (Dietl) und dem Vellebit (Biró); *Poecilonota gloriosa Mars.* aus dem Vellebit; *Buprestis cupressi Germ.* aus Buc-

cari; *Steatoderus ferrugineus L. var. occitanicus Vill.* aus dem Lotriolathal (Rotherthurmpass); *Oedemera Deubeli Ganglb.* vom Kronstädter Czenkberg; *Pitiophthorus glabratus Eichh.* aus dem mittleren Ungarn; *Brachyta clathrata F. var. rufipes Stierl.* aus dem «Vale Capra rece» (westlich vom Rothenthurmpass); *Euluperus cynaeus Joan. var. major Wse.* von den Rosenauer Bergen und *Coccinella hieroglyphica L. var. aureata Panz.* aus dem Banat. Endlich zeigt er drei sehr seltene Arten: *Liodes hybrida Er.*, *Cyrtusa Fussi Seidl.* und *Agyrtes bicolor Lap.*, sämmtlich aus dem Lotriolathal.

4. *Rudolph Francé* zeigt die trockenen *Cerva*-Präparate vor und seine Monographie über die *Craspedomonadika.*

Sitzung am 5. Februar 1898.

1. *Koloman Kertész* spricht über eine *neue Fliegenart* aus der ungarischen Fauna und macht im Zusammenhang damit mehrere synonymische Bemerkungen.

2. *Ludwig Aigner* erwähnt sämmtliche Schmetterlingsvarietäten, die in der ungarischen Fauna erst jetzt bekannt wurden.

3. *Eugen Daday* referiert über die Schlussergebnisse des Studiums betreffs des durch *Julius Madarász* gesammelten mikroskopischen Materiales der Ceyloner süssen Wasser. Im verarbeiteten Materiale fand er 140 mikroskopische Arten, von denen 17 für die Wissenschaft neu sind.

Sitzung den 5. März 1898.

1. *Géza Horváth* trägt über die *Rolle der Hemipteren in der Volkssprache und in der Litteratur* vor und erwähnt im Zusammenhang damit mehrere interessante volksthümliche und litterarische Benennungen der Hemipteren. Die Arten stellt er in systematischer Ordnung zusammen und legt besonders auf die volksthümlichen Ausdrücke ein grösseres Gewicht.

2. *Ernst Csiki* zählt 28 Variationen aus der Ordnung der *Coleopteren der ungarischen Fauna* auf.

Sitzung den 2. April 1898.

Ludwig Méhely trägt über die *Züchtung der Fröschebrut* vor. Nach einer kurzen Einleitung bespricht er in Verbindung von Zeichnungen und Präparaten eingehend die verschiedenen Arten der Bruterziehung der einzelnen Froscharten. Er constatiert, dass auf die Erziehung der Brut die zwingende Wirkung der äusseren Verhältnisse einen Einfluss ausübt. Dies beweist der Umstand, dass die unter den Tropen lebenden Arten die interessantesten Fälle der Bruterziehung liefern.

Sitzung den 7. Oktober 1898.

1. *Géza Horváth* giebt einen kurzen Ueberblick über die von der Fachsection in diesem Jahre behufs Sammlung gemachten Ausflüge.

2. *Eugen Vángel* hält eine Gedenkrede über das verstorbene Mitglied

der Gesellschaft, *Dr. Ladislaus Traxler*, und würdigt seine Thätigkeit auf dem Gebiete der Zoologie.

3. *Ludwig Aigner* spricht «*Ueber die Farbenvariationen der Schmetterlinge*». Er erwähnt die Umstände, welche die Farbenänderung verursachen können. Als den wichtigsten Factor nennt er die Wirkung der Harnsäure.

Sitzung den 7. November 1898.

1. *Joseph Jablonowski* giebt eine Darstellung der *Aspidiotus perniciosus* genannten Schildlaus, insbesondere ihrer Lebensweise und ihrer Verheerungen.

2. *Julius Szakáll* trägt «*Ueber den Urogenitalapparat der Krokodile*» vor. Seinen Forschungen zu Folge stehen die Krokodile den niedersten Vertretern der Säugethiere, den Monotrematen viel näher, als den Vögeln, und zwar in Betreff so der Zeugungs-, wie auch der Harnorgane.

Die Sexualdrüsen befinden sich an der unteren Fläche der Niere und sind besonders auffallend. Die Samenleiter öffnen sich in den Eingang der Furche des entwickelten männlichen Gliedes. Das männliche Glied bleibt in einem Entwicklungsstadium, das bei der Entwicklung der Säugethiere bloss einem Uebergangsstadium entspricht. Dieselbe Gestalt pflegt auch bei Säugethieren vorzukommen, als die mangelhafte Entwicklung der Harnröhre *(hypospadia)*.

Die Eileiter endigen bis zum ersten Eierlegen blind unter der Speichelmembrane der Kloake und werden nur zu dieser Zeit durchbrochen. Die Nieren sind aus einer oberen und einer unteren Hälfte zusammengesetzt. Gegenüber den Oeffnungen der Harnleiter an der oberen Wand der Kloake befindet sich eine kleine, verkümmerte Harnblase. Von der Oeffnung des Bauchraumes (pori abdominales) bewies er gegenüber der bisher bestehenden Ansicht, dass sie immer geschlossen sind. Betreffend die Drüsenstructur neben der Kloake und unter dem Kinn, meint er, dass dies Unschlittsdrüsen sind, wovon der charakteristische Geruch des Aufenthaltsortes der Krokodile herstammt.

Sitzung den 2. December 1898.

1. *Alexander Mocsáry* hält eine Gedenkrede über *Johann Xántus.*

Cornelius Chyzer erwähnt, dass das Präsidium der amerikanischen Vereinigten Staaten seine Dankbarkeit gegenüber Johann Xántus in ein Gesetz fasste.

2. *Johann Pável* zeigt *neue ungarische Schmetterlingsarten*, welche *Graf Béla Wass* in Szt.-Gotthárd in Siebenbürgen gesammelt hat.

B) Fachconferenz für Botanik.

Sitzung den 12. Januar 1898.

1. *Rudolph Francé* zeigt Präparate und Kulturen, welche er nach der *Chr. Hansen*'schen Methode aus *Saccharomyces cerevisiae* und *S. Pastorianus* verfertigte, um Ascosporenbildung in ihnen hervorzurufen. Zu diesem Zwecke liess er die Hefe an sterilisierten Gipsscheiben in möglichst feuchter Luft, etwa bei 25° C. gähren und konnte bei seinen zwölfmal wiederholten Versuchen sich bei jeder Gelegenheit von der Entwicklung von Ascosporen überzeugen.

2. *Alexander Mágócsy-Dietz* legt eine «*Verkannte Geastere*» betitelte Arbeit *Ladislaus Hollós*' vor. Der Verfasser beschreibt eine in Ungarn neue Art unter dem Namen *Geaster Mammosus Chev.*, unter welchem Namen bis daher der *G. fimbriatus Fr.* oder *G. rufescens Pers.* sich verbarg. Auch *G. Berkeleyi Mass.* und der *G. Marchicus Henn.* waren in Ungarn unter anderen Namen bekannt.

3. *Alexander Pályi* zeigt die Pflanzensammlung weiland *Paul Gönczy*'s vor. In der Sammlung findet sich kaum eine vom Inhaber gesammelte Pflanze, die meisten stammen von weiland *Julius Kovács*, und zwar aus Ungarn und der Umgebung von Wien.

4. *Alexander Mágócsy-Dietz* legt ein von *Árpád Dégen* und *Ignatz Dörfler* geschriebenes und von der Wiener Akademie herausgegebenes Werk unter dem Titel «*Beiträge zur Flora Albaniens und Macedoniens*» vor.

Sitzung den 10. Februar 1898.

1. *Alexander Pályi* zeigt, nachdem er kurz die an der *Leo Györök*'schen Yacht auf die Insel Pomo in der Adria gemachte Reise beschreibt, die auf der Insel gesammelten Pflanzen, die nach der Bestimmung *Árpád Dégen*'s die folgenden sind: *Alyssum leucadeum Guss.*, *Centaurea erithmifolia Vis.*, deren Blume und Frucht bisher noch niemand sammelte. Prof. *Statio* sandte von Pomo an *Visiani* ein Exemplar der Knospe dieser Pflanze. Demzufolge konnte ihre Beschreibung ergänzt werden als *Statice cordata L.*, *Plantago sp.?*, die der *Pl. subrulata L.* am nächsten steht, *Daucus sp.?*, der dem *D. aureus Desf.* am nächsten steht, jedoch wahrscheinlich eine neue Art ist.

2. *Alexander Mágócsy-Dietz* legt *Ladislaus Hollós*' «*Neue Beiträge zur Kenntniss der unterirdisch wachsenden Pilze Ungarns*» betitelte Arbeit vor. Die von *Andreas Kmet*, doch grösstentheils von *Hollós* gesammelten Daten sind darum werthvoll, da in Ungarn bisher sehr wenig unterirdisch wachsende Pilze bekannt waren. *Hollós* erwähnt zehn Arten von neuen Fundorten, von denen die folgenden sieben Arten für Ungarn neu sind: *Hydnangium carneum Wallr.*, *Melanogaster variegatus* (Vitt.) *Tul.*, *M. ambiguus* (Vitt.) *Tul.*, *Balsompia fragiformis Tul.*, *Genabea fragilis Tul.*, *Tuber excavatum Vitt.*, *T. dryophilum Tul.*

3. *Alexander Mágócsy-Dietz* legt eine Arbeit *Robert Roth*'s unter dem Titel «*Die vergleichende Anatomie der vegetativen Organe von ungarländischen Ericaceen, in Hinsicht auf die im natürlichen System festgestellten Gruppen*» vor. Die Arbeit wurde von der philosophischen Facultät der Budapester Universität durch den Theodor Margó'schen Preis ausgezeichnet. Der Verfasser beschreibt in seiner Abhandlung die anatomischen Eigenschaften des Stiels, des Blattes und des Stengels der Ericaceen, und beschäftigt sich mit ihrer systematischen Eintheilung. Die ungarischen Arten der Ericaceen classificiert er auf Grund der Eigenschaften der Blätterbüschel und gelangt zu dem Schluss, dass die *Eichler*'sche Eintheilung der Classificierung auf histologischer Grundlage am nächsten steht. Er theilt dann die auf die ungarischen Ericaceen bezüglichen Daten und die Erfolge der auf die einzelnen Arten bezüglichen eingehenden Forschungen mit. Seine Arbeit begleiteten 126 Abbildungen.

4. *Carl Schilberszky* zeigt *blumenmorphologische Fälle*, und zwar:

a) Eine Blume von *Passiflora quadrangularis* mit einer viertheiligen Narbe;

b) Tulpenblüthen, an denen er zwei wesentlich abweichende Fälle des Gefülltwerdens (flore pleno) demonstriert, nämlich in dem einen Fall durch Substitution der Staubfäden und Stempel, im anderen Fall aber durch Hervorwachsen (prolificatio) aus den Achseln der einzelnen Blüthentheile;

c) in einer Blüthe der *Gartennelke* (Dianthus Caryophyllus) entwickelte sich am Ende eines der aus der Spitze des Stempels ausgehenden fünf Narbenzweige eine ganz vollkommene und regelmässig grosse Anthera;

d) von der Nelke erwähnt und zeigt er auch, dass die Narbenzweige in einzelnen Fällen die Höhe der Blumenblätter nicht erreichen, während in anderen Fällen schon aus sehr zarten und geschlossenen Knospen die beträchtlich verlängerten Narbenzweige wahrnehmbar (3—4 cm.) hervorstehen; diese mit der Protogynie in Verbindung stehende Erscheinung verdient eine weitere Beachtung.

Sitzung den 9. März 1898.

1. Präsident *Julius Klein* weist in seiner Eröffnungsrede auf den Umstand hin, dass die botanische Fachsection seit ihrem Bestehen an dem heutigen Tag ihre fünfzigste Sitzung hält und schildert aus diesem Anlass in grossen Zügen die seitherige Wirksamkeit und drückt den Wunsch aus, dass die Fachsection auch in Zukunft eine je grössere Thätigkeit im Interesse des Aufblühens der heimischen Botanik an den Tag lege.

2. *Ludwig Fialowski* bespricht unter dem Titel «*Die Pyramidenpappel und die Weissakazie als Beispiele der im Winde wehenden (aiolokinetischen) und dem Winde standhaltenden (aiolostatischen) Bäume*» die vom Winde

verursachte Deformation der Bäume unseres Klimas auf Grund seiner langjährigen Erfahrungen. Auf Grund von älteren Erfahrungen der Förster, wonach der Stamm alleinstehender, dem Winde ausgesetzter Bäume in der Richtung des Windes sich mehr verdickt und einen elliptischen Querschnitt annimmt, beobachtete er auch die Wirkung des Windes auf die Lage des Baumes. Alleinstehende oder über die anderen beträchtlich hinausragende Bäume zeigen die Wirkung des Windes sehr merklich. Dem Winde standhaltende, d. h. nicht schwankende Bäume neigen sich in der Richtung des Windes; die schwankenden senden der Windrichtung entgegen sogenannte Brettwurzeln in den Boden und vergrössern dadurch ihre Grundfläche. Dies zeigten auch die 30 Photographien des Vortragenden. Die derartige Formation der meisten Bäume stimmt mit dem Diagramm der vorherrschenden Winde der entsprechenden Gegend (Budapest, Gödöllő, Totis) überein, ausgenommen den Fall, in welchem dem Winde ein Hügel, ein Gebäude oder eine Baumgruppe eine andere Richtung giebt. Dann neigt sich der Baum der Wirkung des aus seiner Richtung gebrachten Windes gemäss, oder wird durch Einwirkung desselben deformiert.

3. *Rudolph Francé* beschreibt unter dem Titel «*Ueber eine neue amerikanische Wasserpest*» die *Eichhornia crassipes* genannte, den Liliaceen verwandte Wasserpflanze, welche in neuerer Zeit in den südlichen Regionen der Vereinigten Staaten, besonders in Florida die stehenden und fliessenden Gewässer so massenweise überzogen hat, dass es deren Schiffbarkeit unmöglich machte und auch das Fischen bedenklich gefährdet. Vortragender zeigt auch zwei lebende Exemplare dieser Pflanze, die aus dem botanischen Garten der Budapester Universität stammen.

In Verbindung damit bemerkt *Joseph Fekete*, dass die gezeigten zwei Exemplare abweichende Formen dieser Pflanzenart sind, an denen sich dem Gedeihungsorte gemässe Abweichungen entwickelten, insofern die Blätter der am Rande von Gewässern, in Sümpfen wurzelnder Pflanzen gestreckt und langstielig sind, während die in tieferen Wasser frei schwimmenden Pflanzen kürzere und breitere Blätter haben, was auch die gezeigten Exemplare beweisen.

Dr. Moritz Staub glaubt nicht, dass die Eichhornia crassipes auch in anderen Gegenden Verheerungen anrichten wird, da er z. B. nichts davon weiss, dass die von Amerika her verrufene *Elodea canadensis* in den west-europäischen Flüssen oder auch in Ungarn (wo sie auch noch heute von mehreren Gegenden her bekannt ist) auch nur die mindeste Gefahr erregt hätte. Seiner Meinung nach ruft nur das Zusammentreffen mehrerer günstiger Umstände eine solche aussergewöhnliche Zunahme derartiger Pflanzen hervor. Er denkt, dass der Elodea besonders der niedere Wasserstand günstig sei.

Julius Klein theilt in Hinsicht auf die Elodea mit, dass er in neuerer Zeit im Stadtwäldchenteich zu Budapest diese Pflanze fand.

Alexander Mágócsy-Dietz hält die vernommenen Ansichten für so werthvoll, dass er es für wünschenswerth erachten würde, wenn die Pflanzengeographen den Ursachen des Auftauchens und Verschwindens der Schlingpflanzen grössere Aufmerksamkeit widmen möchten. In Betreff des niederen Wasserstandes theilt er die Ansicht *Staub*'s, da nach seiner bisherigen Erfahrung die hauptsächlichsten Gedeihungsorte der Schlingpflanzen in den todten Armen der Flüsse sind, doch wechseln die herrschenden Pflanzen auch hier; so herrschte z. B. in den todten Armen der Theiss im Comitat Bereg eine Zeit lang die *Salvinia natans*, welche später der *Stratiotes aloides* weichen musste.

4. *Alexander Mágócsy-Dietz* legt unter dem Titel «*Sarcoscypha Kecskemétiensis nov. sp. und neue Pezizen in unserer Pilzflora*» eine Arbeit *Ladislaus Hollós*' vor. Der Verfasser beschreibt darin 19, für Ungarn neue Arten der *Discomycetes*, in Begleitung von colorierten Bildern. Es sind dies: *Acetabula leucomelas Pers.*, *Geopyxis ammophila D. et M. G. pallidula C. et Peck*, *Peziza ochracea Boud.*, *P. ampelina Quel.*, *P. funerata Cke.*, *P. sepiatra Cke.*, *P. ampliata Pers.*, *Galactinia succosa Berk.*, *Barlaea constellatio B. et Br.* und dessen Variation *var. Fuckelii Cke.*, *Humaria congrex Karst.*, *H. depressa Phil.*, *H. viridibrunnea Ces.*, *H. violacea P.*, *H. laetirubra Cke.*, *H. pluvialis Cke.*, *Lachnea arenosa Fckl.*, *L. albo-spadicea Grev.*, *Sphaerospora trechispora B. et Br.*; ausserdem zwei Arten, die in Ungarn schon bekannt waren, aber von neuen Fundorten stammen: *Humaria Sabranskyana Bäuml.* und *Sarcoscypha subfloccosa Hazsl.*

Sitzung den 13. April 1898.

1. *Stephan Csapodi* trägt «*Ueber die ungarischen Benennungen der Farben*» vor. Die bunte Farbenpracht der Pflanzen ergötzt nicht nur den Laien, sondern dient auch dem Botaniker als ein wichtiges Zeichen an den Pflanzen; in der Beschreibung der Farben ist man aber so inconsequent, dass es schon an der Zeit ist, sich über bestimmte Benennungen zu einigen. Vortragender erklärte an zahlreichen Wollsträhnen die vorkommenden Farben und empfahl für ihre Benennung echt ungarische Namen.

Moritz Staub erwähnt, dass man in neuerer Zeit der richtigen Unterscheidung der Farben auch vom biologischen Standpunkt aus grössere Aufmerksamkeit schenkt; er ersucht daher die Commission für die botanische Nomenclatur, dass sie sich dieser Frage annehme.

Alexander Mágócsy-Dietz beantragt, dass dieser Vortrag in der Zeitschrift der Gesellschaft abgedruckt werde, wonach die Fachsection mit den anderen Fachsectionen in Verbindung trete und eine aus diesen gebildete Section in Anwesenheit des Vortragenden endgiltig über die in Druck zu erscheinende Farbentafel sich einige. Er meint, dass man die Tafel nicht nur im Fachwörterbuch, sondern auch selbständig mit englischem, französischem und deutschem Text veröffentlichen könnte, ähnlich der *Scaccardo*'schen «Chromotoxia». — Der Antrag wird angenommen.

2. *Eugen Bernátsky* spricht über die *Crocus reticulatus Stew.* genannte Pflanze, deren morphologische und physiologisch-anatomische Eigenschaften, sowie Gedeihungs- und Verbreitungsverhältnisse er schildert. Das unterirdische Organ der Pflanze ist kugelförmig und gegen den beständigen Druck geschützt, in Folge dessen es sich in verticaler Richtung erneuert. Die Blume ist xerophil, der Structur der Parenchyma und des Hautgewebes gemäss.

Derselbe zeigt dann das folgende Buch: *G. Rouy «Illustrationes plantarum Europae rariorum»*, das auch insofern interessant ist, da unter den 200 photographischen Abbildungen auch 18 Bilder auf Ungarn bezüglicher Arten sind.

3. *Alexander Mágócsy-Dietz* legt eine Arbeit *Ladislaus Hollós'* unter dem Titel *«Neue Lycoperdonarten in der Pilzflora Ungarns»* vor. Diese neuen Arten sind: *Lycoperdon ericaceum Bon.*, *L. hiemale Bull.*, *L. lilacinum (Mon. et Berk.) Speg.*, *L. velatum Vittad* und *L. Cookei Mass.*

4. *Carl Schilberszky* legt unter dem Titel *«Der Fissideus Arnoldii R. Ruthe in der ungarischen Laubmoosflora»* eine Abhandlung von *Martin Péterfi* vor. Der Verfasser hat das genannte Moos, das den litterarischen Daten zu Folge das erste in Ungarn gefundene Exemplar dieser Pflanze ist, aus Nemes-Podhrágy bekommen.

5. *Carl Schilberszky*, Schriftführer der Fachsection, meldet an, dass der Jesuitenpater *Ladislaus Menyhárt*, gewesener Professor am Kalocsaer Gymnasium und eifriger Fachgenosse, während der Ausübung seines Berufes als Missionär an den Ufern des Zambesi gestorben sei. Laut der von *Louis Gonzago Dialov* stammenden Nachricht erlag der Missionär einer Vergiftung.

Auf Antrag *Moritz Staub*'s betraut die Fachsection *Carl Schilberszky* mit der über den Verstorbenen zu haltenden Gedenkrede.

Sitzung den 11. Mai 1898.

1. *Moritz Staub* hält einen Vortrag unter dem Titel *«Ludwig Reissenberger, der erste ungarische Pflanzenphaenolog»*.

2. *Alexander Mágócsy-Dietz* legt eine *«Ueber einen ausserordentlich interessanten Sandwüstenpilz (Scleroderma Corium [Guers.] Grav.)»* betitelte Abhandlung *Ladislaus Hollós*'s vor. Dieser Pilz war bisher bei uns bloss in einem Exemplar aus Croatien bekannt, wo ihn *Schulzer* fand und unter dem Namen *Pachyderma Strossmayeri*, später *Mycenastrum clausum* in die Wissenschaft einführte. Der Verfasser fand den Pilz auf mehreren Orten der grossen ungarischen Tiefebene in mehr als hundert Exemplaren. Die *Schulzer*'schen Exemplare und ein Exemplar aus Australien stimmten auch nach mikroskopischer Untersuchung mit den *Hollós*'schen überein.

3. *Alexander Mágócsy-Dietz* spricht unter dem Titel *«Das theilweise Holzigwerden des Markes einiger baumartiger Pflanzen»* darüber, dass das homogene weiche Mark derselben (z. B. Lonicera, Feige, Weintraube)

durch die Schichte der in grosser Masse verholzten Zellen, Diaphragma genannt, unterbrochen wird. Das Diaphragma dient zum Aufbewahren der Nahrung und des Wassers und zur Befestigung der Zweige.

Sitzung den 12. Oktober 1898.

1. *Moritz Staub* gedenkt in warmen Worten des Todes des Wiener Universitätsprofessors *Anton von Kerner.*

2. *Carl Schilberszky* legt eine Arbeit *Ladislaus Hollós*'s unter dem Titel «*Der wirkliche Trüffelpilz in Ungarn und andere neue Beiträge zur Kenntniss unserer unterirdisch wachsenden Schwämme*» vor.

3. *Moritz Staub* bespricht den ersten Band des «*Grundzüge der Pflanzenverbreitung in den Karpathen*» betitelten Werkes von *F. Pax.* Der Verfasser dieses Werkes ist Professor an der Universität Breslau, der die Karpathenflora wohl kennt und sein Buch, als hervorragendes Mitglied der *Engler*'schen Schule, den Principien der modernen Pflanzengeographie gemäss schrieb.

Unlängst erschien auch *J. Roemer*'s «*Die Flora des Burzenlandes*» betiteltes, zur Gelegenheit der Honterus-Feier verfasstes Werk, das die Schönheiten der Siebenbürgischen Flora in weiteren Kreisen bekannt machen wird.

Sitzung den 9. November 1898.

1. *Eugen Bernátsky* hält unter dem Titel «*Das Limmanthemum nymphaeoides (L.) Gmel. in der Flora Budapest's*» einen Vortrag, in welchem er ein getrocknetes Exemplar der im Juni des Jahres 1898 auf der Insel Csepel (nächst Budapest) gefundenen Pflanze vorzeigt. Er hält das Erwähnen dieser Date darum für wichtig, da er bisher nichts davon hörte, dass diese Pflanze in der Umgebung von Budapest vorkomme, obwohl sie im Pester Comitat bekannt ist. Er theilt seine auf diese Pflanze bezüglichen Forschungen mit.

2. *Ludwig Simonkai* hält einen «*Forschungen auf dem Gebiete unserer Baumflora*» betitelten Vortrag, den er mit zahlreichen Pflanzenexemplaren illustriert. Er meint, dass die sehr zahlreichen, aus dem Auslande hereingebrachten Pflanzen ein auf Grund der Erfahrung geschriebenes, streng kritisches Werk der ungarischen Dendrologie benöthigen. In diesem Werk müssten so den einheimischen Bäumen und Sträuchern, als den unter freiem Himmel bei uns cultivierten Baumpflanzen ein Platz eingeräumt werden. Die kön. ung. Naturwissenschaftliche Gesellschaft entsendete diesen Sommer Vortragenden zur Besichtigung der herrschaftlichen und staatlichen Gärten Ungarns. Er berichtet über dieselben. Mit besonderem Lob erwähnt er die staatlichen Gärten zu Schemnitz, Ungarisch-Altenburg, das ung. kön. Gärtnerlehrinstitut, insbesondere aber den botanischen Garten der Budapester Universität. Von den Privatgärten erwähnt er diejenigen des Erzherzogs Joseph zu Fiume und Alcsuth und

den des Erzherzogs Joseph August zu Kis-Tapolcsány. Die herrschaftlichen Gärten zeigen vom Standpunkte der Dendrologie in der letzteren Zeit keinen Fortschritt.

Die Arten der Cedern sind so im Ausland, wie in Ungarn schlecht definiert. Am besten gedeiht bei uns die *Cedrus Atlantica* Manetti. Das alte Genus der Spiræa ist nunmehr in viele Genera getheilt. Was wir auch heute noch unter Spiræa verstehen, sind 80—85 Arten, und diese zur Hälfte Hybriden. Einige der Arten fasst Vortragender in eine zusammen; so besonders die bei uns, aber auch in *Koehne*'s Dendrologie unterschiedene *Spiraea obovata* W. K. und *Spiraea acutifolia* Willd. unter dem Namen *Spiraea hypericifolia* L. Er weist auch nach, dass die *Sp. obovata* W. K. bei uns gerade so wenig einheimisch ist, als z. B. die *Sp. salicifolia* L.

Alexander Mágócsy-Dietz giebt seiner Freude Ausdruck, dass *Simonkai* durch das kritische Studium des Spiræa-Genus auf ein und derselben Pflanze dimorphe Blätter fand und so die auch bei uns verwirrte Unterscheidung der Arten geklärt wird.

3. *Ludwig Thaisz* spricht unter dem Titel «*Beiträge zur Flora der Umgebung von Budapest und des Landes*» über das neuere Vorkommen einiger interessanten Pflanzenarten.

So erschien auf dem Budapest am nächsten liegenden Theil der Insel Csepel, am Ufer des todten Donauarmes, eine im Lande bisher unbekannte Pflanze: Amarantus græcisans L.

Diese nord-amerikanische Pflanze ist in Süd-Europa und Nord-Afrika schon lange heimisch. Das Erscheinen der Pflanze am genannten Ort erklärt Vortragender dadurch, dass an dem der Hauptstadt am nächsten liegenden Theil des Donauarmes ein Mistablagerungsplatz und theilweise aus Unrath hergestellte Eisenbahndämme sind; von da mochte sich die Pflanze auf die ausgetrockneten Stellen des Inundationsgebietes der Donau verbreiten. In Gesellschaft des Amarantus war auch die *Teloxys aristata L. Moq. Taud.* und der *Sciopus supinus L.* zu finden, den *Vinzenz Borbás* als zweifelhafte Pflanze in der Flora von Budapest erwähnt.

Neu ist, wenigstens für die Budapester Flora, die *Lappa ambigua* Čelak. (L. major tomentosa). *Emerich Szabó* fand im vorigen Jahre *Cardamine hirsuta* L. im Budapester Stadtwäldchen, welches in Budapest bisher auch unbekannt war.

4. *Alexander Mágócsy-Dietz* legt *Ladislaus Hollós*' «*Volksthümliche Pilzbenennungen*» betitelte Arbeit vor.

5. Derselbe theilt auf Grund der von *Ludwig Fekete* eingeschickten Daten der Fachsection mit, dass der *Ostria carpiniflora* genannte Baum nächst Légrád und Zákány im Somogyer Comitat in der Nähe der Drau vorkomme. Er theilt auch mit, dass die *Taxus baccata* nebst den bisher bekannten Orten (Bánd, Herend) auch bei Szent-Gál im Vesprimer Comitat gefunden worden ist.

Eugen Bernátsky erwähnt als Fundort der Taxus das Rollgebirge bei Oravicza.

Sitzung den 14. Dezember 1898.

1. *Eugen Bernátsky* trägt über «*Die vergleichende Gewebsstruktur der Limnanthemum nymphaeodes (L.) Lk. und der Nymphaea alba* vor.

2. *Stephan Csapodi* zeigt ein im Blumentopf gezogenes Exemplar der *Echinopsis Decaisneana* sammt der sich entwickelnden Frucht. Die Befruchtung der Blume dieser Pflanze erfolgte durch den Blumenstaub der daneben blühenden *Echinopsis Eyresii.*

Vortragender zeigt auch ein Exemplar der Echinopsis Eyresii, deren in grösserer Zahl entwickelte Keime sämmtlich an der Pflanze gelassen wurden und wegen dem Mangel an Raum in Folge des gegenseitigen Druckes verkümmerte Formen annahmen und an den Typus der Cereus erinnern; auch die Dornen bildeten sich viel feiner aus, als bei der regelmässigen Entwickelung.

3. *Alexander Mágócsy-Dietz* legt eine Abhandlung von *Ladislaus Hollós* unter dem Titel «*Bovista Debreciniensis (Hazsl.) De Toni*» vor. Der Verfasser nennt die Benennungen des interessanten Pilzes und erwähnt seine Fundorte. Er fand den Pilz auch in einer Höhe von 1200 Metern im Kaukasus, an einer Rinderweide. Er ähnelt dem Hasenmist, zwischen dem er gedeiht.

4. *Alexander Mágócsy-Dietz* giebt eine Uebersicht der botanischen Litteratur der letzteren Zeit.

C) Fachconferenz für Chemie und Mineralogie.

Sitzung den 25. Januar 1898.

1. *Stephan Bugarszky* machte in dem «*Ueber die Forschungen betreffend den Agregatzustand und die Lösungstheorie*» betitelten Vortrag die Auffassung *J. Traube*'s bekannt, von der er bei der neuen Bestimmung des Molekulgewichtes ausgieng und eine neue Erklärung des osmotischen Druckes und der elektrolytischen Dissociation gab.

Sitzung den 22. Februar 1898.

1. *Béla v. Bittó* bespricht in seinem Vortrag «*Ueber den Kalkinhalt des Tokaj-Hegyaljaer Weintraubenbodens*» die *Sahut*'sche Methode bezüglich der Adaptation des Weintraubenbodens und theilt die nach dieser Methode in Tokaj-Hegyalja gemachten Bodenanalysen mit.

Sitzung den 29. März 1898.

1. *Joseph Loczka* hält unter dem Titel «*Das Nachweisen von einer geringen Menge von Cadmium neben vielem Zink nach dem gewöhnlichen qualitativen Verfahren*» einen Vortrag. Er sucht den Grund davon, dass wenig Cadmium neben viel Zink durch Hydrogensulfid sich nicht aus-

scheidet, darin, dass man die Reagenz gewöhnlich in Anwesenheit von sehr vieler Salzsäure anwendet. Er fand, dass wenn wir aus circa drei Gramm Zink eine möglichst neutrale Lösung herstellen, diese auf 50 Cm^3 verdünnt, mit 1 Cm^3 concentrierter Schwefelsäure säuern und mit Hydrogensulfid sättigen, dann den sich bildenden Niederschlag auswaschen, in etwa 15—18 percentiger Salzsäure auflösen, eindampfen und in Wasser von 50 Cm^3 auflösen, dann aber wieder mit 1 Cm^3 concentrierter Schwefelsäure säuern und Hydrogensulfidgas durchleiten: so scheidet sich, wenn das Zink Cadmium enthält, ein gelber Niederschlag aus, welcher jedoch noch nicht ganz die charakteristische Farbe hat; wenn wir aber diesen Niederschlag nach dem früheren Vorgehen noch einmal auflösen unf auf dieselbe Weise mit Hydrogensulfid sättigen, scheidet sich das Cadmiumsulfid in einer schönen gelben Farbe aus.

Alois Schuller bemerkt, dass Cadmium in kleiner Quantität nach *Wartha* auch so zu finden ist, wenn wir das cadmiumhältige Zink in einer Platinschale mit Natriumhydroxyd so lösen, dass sich das Zink nicht gänzlich auflöse, und das Uebergebliebene auf Cadmium prüfen, Er erwähnt ferner, dass man auch die kleinste Quantität Cadmiums leicht erkennen kann, wenn man es vom Zink mittelst Destillierens im Vacuum abscheidet.

2. *Armin Frankfurter* legte die folgenden Inauguraldissertationen vor:

a) *Ludwig Klein:* «Ueber die Schwefellebern».

b) *Béla Szabó:* «Die Lösbarkeit des Lithiumcarbonats in kohlendioxydhältigem Wasser».

c) *Michael Penkert:* «Ueber das Ammoniak und seine Kohlenoxydverbindungen».

Sitzung den 26. April 1898.

1. *Friedrich Konek* weist in seinem Vortrag über das *Euchinin* nach, dass Aethylkohlensäureäther des Chinins keine so leicht sich zersetzende Verbindung ist, als es *Dr. Aba Sztankay* voraussetzte. Nach den Forschungen des Vortragenden wird das Euchinin nicht einmal vom kochenden Wasser zu Alkohol, Kohlensäure und Chinin zersetzt; sogar die Säuren und die alkalischen Metallhydroxyde sind nicht im Stande es leicht zu verseifen.

2. *Armin Frankfurter* legt die folgenden Inauguraldissertationen vor:

a) *Alexander Gödény:* «Das Chloralhydrat und seine Natriumreaction.»

b) *Nikolaus Moskovits:* «Ueber die Entstehung der Isonitramine».

c) *Edmund Telkessy:* »Die Anwendung des Kaliumbromats bei volumetrischen quantitativen Bestimmungen».

Sitzung den 31. Mai 1898.

1. *Carl Muraközy* trägt über «*Die Veränderung der Rübenschnitten der Zuckerfabriken in Gruben*» vor. Da die Litteratur keine Daten darüber aufweist, welche Veränderung die Rübenschnitten binnen mehr als neun Monaten in den Gruben durchmachen, ferner mit wie grossem Gewichtverlust das 12 Monate lange Stehen in der Grube verbunden ist, war es nothwendig sich eingehender mit dieser Frage zu befassen. Da der Gewichtsverlust durch directe Messung nicht festgestellt werden konnte, gründete er seine Berechnung auf die Quantität der die Asche bildenden Salze, aus welcher es sich ergab, dass der binnen 5—9 Monaten sich einstellende Gewichtsverlust, zwischen 40—50% des ursprünglichen Gewichtes der Rübenschnitten schwankt, in einem Jahr aber sich über 70% erhebt. Er bestimmte die Quantität der in der Grube während des Gährens sich bildenden Säuren, was er für wichtig hält, da seiner Meinung nach die in Gruben gehaltenen Rübenschnitten nicht als Futter benützt werden können.

Jakob Szilasi hätte es für nothwendig erachtet, dass Vortragender sich auch mit den getrockneten Rübenschnitten befasse. *Muraközy* hält diese Frage für bedeutungslos, da auch die getrockneten Rübenschnitten nur eingeweicht verwendet werden können.

2. *Ludwig Ilosvay* legt eine «*Neue Darstellungsmethode des Oxydimorphins*» betitelte Arbeit *Joseph Nussbaum*'s vor. Das Morphin kann auch durch Hydrogenperoxyd zu Oxydimorphin oxydiert werden. Es werden die Eigenschaften und Reagenzen des Oxydimorphins erwähnt. Der Verfasser hofft, dass im Falle einer Morphinvergiftung das Hydrogenperoxyd als Gegenmittel gute Dienste leisten werde und dass durch Hydrogenperoxyd auch andere Alkaloide zu Oxydialkaloiden umgestaltet werden können.

3. *Gustav Buchböck* legt die Inaugural-Dissertation *Otto Kronpechers*'s vor unter dem Titel «*Ueber den Eisengehalt der Pflanzennährmittel.*»

Sitzung den 25. Oktober 1898.

1. *Joseph Nuricsán* macht den gegenwärtigen Stand der bei den *Málnáser Kohlensäurequellen* begonnenen Arbeiten bekannt und giebt seiner Hoffnung darüber Ausdruck, dass das Unternehmen in kurzer Zeit seine Thätigkeit beginnen werde können und stündlich etwa 50 Kg. Kohlensäure verdichten werde. Die Málnáser Fabrik wird die zweite in Ungarn sein, welche natürliche Kohlensäure verdichtet.

2. *Sigismund Bernauer* theilt eine Verordnung des ung. kön. Ackerbauministeriums mit, in welcher in Angelegenheit der durch Behörden, Fachcorporationen und Private gegründeten chemischen Untersuchungs- und mikroskopischen Laboratorien verfügt wird. Vortragender schliesst aus den Ausweisen der Budapester Markthallen, dass die Controlle der Nahrungsmittel daselbst sehr mangelhaft sei. Er beantragt, dass die Fach-

section eine aus fünf Mitgliedern bestehende Commission wähle, welche sich mit der Verordnung befasst und bewirkt, dass auch Eigenthümer von Privatlaboratorien, wenn sie hiezu entsprechend ausgebildet sind, das Recht haben. für die Behörden rechtlich anerkannte Untersuchungen auszuführen.

Sitzung den 29. November 1898.

1. *Vinzenz Wartha* spricht in seinem Vortrag «*Ueber die Darstellung der Metalle*» von den Vorgehen, deren Zweck ist, bei der Verbrennungstemperatur der Kohle Heizstoffe von grösserer Verbrennungstemperatur zur Darstellung der Metalle zu benützen. Nach den bisherigen Erfahrungen bewährte sich am besten das Aluminium, welches bei günstiger Vertheilung staunend leicht das Chrom, das Mangan und das Eisenoxyd reduziert. Diese Methode arbeitete Goldschmidt aus, doch erwähnt er über die damit erreichbare Temperatur nichts. Wenn das Aluminium verbrennt, kann nach Berechnung des Vortragenden eine Temperatur von 4725° erreicht werden. Die bei dem Verbrennen sich entwickelnde Wärme kann nicht nur zur Reduzierung von Metalloxyden, sondern auch zum Schweissen von Metallen zweckmässig benützt werden.

Stephan Farbaky bemerkt, dass als er mit *Stephan Schenek* Accumulatoren construirte, sie auch zur Darstellung des Bleies als Heizmittel Zink verwendeten.

2. *Joseph Vértess* fasste in seinem Vortrag «*Ueber das Acetylen*» jene Erfahrungen zusammen, die über die Entwickelung, die Reinigung und das Versehen mit Brennern des Acetylens bis jetzt bekannt sind.

Zu diesem Gegenstande brachte auch *Ignatz Pfeiffer* und *Albert Grittner* Bemerkungen bei. Voriger sprach hauptsächlich über die Construktion des Brenners, während Letzterer hauptsächlich hinsichtlich der das Acetylen begleitenden Nebenproducte einige Bemerkungen machte.

Sitzung den 20. Dezember 1898.

1. *Béla Lengyel* trägt «*Ueber die Wirkung einiger Gase auf die photographische Platte*» (Siehe oben pag. 217—225) vor und gelangt zu dem Schluss, dass die reduzierten Gase auf das Bromsilbergelatin ähnlich wie das Licht wirken, indem sie das Bromsilber reduzierbar machen mit den gewohnten Hervorrufern, ferner, dass diejenigen Metalle, die mit verdünnten Säuren Hydrogen entwickeln, auch auf das Bromsilbergelatin wirken, und zwar auf die Weise, dass sie aus den Dämpfen der Luft Hydrogen entwickeln, was in Wirklichkeit die Reduction bewirkt, nicht aber der Metalldampf, oder die von jenem ausgesandten unbekannten Strahlen.

2. *Ludwig Ilosvay* berichtet über den Vorschlag der zur Festsetzung der Atomgewichte entsandten deutschen Commission, auf dessen Grund die Fachconferenz ausspricht, dass sie die durch die Commission beantragten Atomgewichte in der Praxis so lange anwenden wird, bis eine pünktlichere Bestimmung nicht deren Abänderung benöthigt.

D) Fachconferenz für Physiologie.

Sitzung den 1. Februar 1898.

1. *R. Bálint* zeigt in seinem Vortrag «*Ueber einen Fall der Cebocephalia auf Grund histologischer Untersuchung*» ein abnorm entwickeltes Gehirn, an welchen den Platz der Hemisphären eine 1 Cm. dicke Blase einnimmt. Es fehlen gänzlich die Riechpartien des Gehirnes und dem entsprechend ist auch das äussere Riechorgan verkümmert. Die Thalami sind zusammengewachsen. Das Mittel-, das verlängerte und das kleine Gehirn sowie das Rückenmark sind ganz normal, es fehlen bloss die Bänder, welche von der Rinde gegen die Peripherie zu wachsen.

2. *L. Thanhoffer* zeigt eine von ihm selbst construirte *neue Agyschemazeichnung* vor, welche das Zustandekommen der dem Platz und der Dimension der einzelnen Durchschneidungen entsprechenden Gefühls- und Bewegungslähmungen veranschaulicht.

Sitzung den 1. März 1898.

1. *Emil Grósz* hielt unter dem Titel «*Beiträge zur Pathologie des Sehnerves*» einen Vortrag. In den letzten Jahren machte er das Studium jenes Zusammenhanges zu seiner Aufgabe, in welchem die Entartungen des Sehnerves mit den allgemeinen Krankheiten stehen. Die Erforschung dieses Zusammenhanges führt einestheils zur Erkenntniss der feineren Structur und Function des Sehnerves, andererseits macht es aber die Feststellung, sogar Heilung von schweren organischen Leiden möglich. Im ersten Semester dieses Studienjahres nahm Vortragender im Laboratorium der Augenklinik 30 Augen und Sehnerven in Arbeit; unter diesen kam in 9 Fällen Tabes dorsalis, in 2 Fällen Diabetes mellitus, in 12 Fällen Gehirngeschwulst etc. vor.

Der Diabetes mellitus kann ausser der Linse und dem Nervenepithel auch den Sehnerv angreifen, wo dann die Krankheit des Letzteren in Form der Neuritis retrobulbaris erscheint. Die durch den Diabetes verursachte Veränderung ist mit jener identisch, welche die Cannabis indica, das Blei, das Jodoform, das Kohlensulfid, das Joduret hervorruft.

Er unterstützt durch neue klinische und anatomische Forschungen seine schon vor zwei Jahren ausgedrückte Ansicht, dass eines der frühesten und beständigsten Symptome der Tabes dorsalis die Atrophie des Sehnerves ist, dass der Sitz der Sehstörung der intraorbitale Theil des Nerves ist, dass die Atrophie einen ascendenten Charakter hat, es deutet sogar vieles dahin, dass der Ausgangspunkt die Ganglienschichte der Retina ist.

Er hält seine im vorigen Jahr ausgedrückte Meinung aufrecht, dass die echten Neoplasmen durch Strangulieren seitens einer Papillitis hervorgerufen werden, die Gumma und das Tuberculum aber durch die Verbreitung der Entzündung nach unten zu verursacht wird. Diese Auffassung demonstriert er durch fünf neue Fälle. Endlich weist er auf die Nothwendigkeit hin, dass jeder der unter anatomische Untersuchung kommenden Fälle noch im Leben einer sorgfältigen Untersuchung unterworfen werden könne, und dass die anatomische Forschung in der ganzen Ausdehnung des ersten Gliedes der Sehbahn gemacht werden könne.

2. *Koloman Tellyesniczky* zeigt verschiedene *Hodenpräparate* vor: zuerst von einem Frosch mit vielen Hoden, an dessen beiden Seiten ober den normalen Hoden noch bis zum Rande des Magens etwa 10—15 Stück kleinere und grössere Hoden in der Grösse der Spitze einer Stecknadel, und kleinere getrennte Hoden gefunden wurden. Die mikroskopische Untersuchung ergab, dass in sämmtlichen eine ganz normale Samenfadenentwicklung in Gang war. Dann zeigt er den Hoden eines 15jährigen Knaben, der auf der Klinik des Professors Réczey wegen seitlichem Cryptorrhismus ausgeschnitten wurde. Aus der Untersuchung gieng hervor, dass es gänzlich im embryonalen Zustand verblieben war, da auch in den engen Hodenröhren bloss die für den embryonalen Hoden charakteristischen zweierlei Zellen zu sehen waren. Zum Vergleich zeigt er endlich Hoden von erwachsenen Menschen, von Ratten, Meerschweinchen, Salamandern etc.

Sitzung den 22. März 1898.

1. *Ernst Jendrássik* sprach «*Ueber die oscillierenden Ströme*». Diese Ströme werden in der neuesten Zeit in Bezug sowohl ihrer physiologischen, als ihrer Heilwirkung der Untersuchung unterworfen und obwohl unsere hierauf bezüglichen Forschungen noch sehr mangelhaft sind, thut es Noth, uns mit der aus diesen Gesichtspunkten interessanten Form des elektrischen Stromes zu befassen. Vortragender erklärt diese Umgestaltung des elektrischen Stromes durch die Analogie der Hydrostatik und Hydrodynamik und demonstriert durch Experimente die während des Oscillierens sich entwickelnden Strahlen, wobei sich sehr überraschende Inductionswirkungen einstellen. Von diesen sind von physiologischem Standpunkt jene am interessantesten, in denen der durch den menschlichen Körper gehende Strom, ohne dass es stark fühlbar wäre, auch starke Glühlampen zum Leuchten bringt. Die bisher gegebenen Erklärung dieser Erscheinung hält er für ungenügend. Seiner Meinung nach geht bei dieser Gelegenheit kein grösserer Strom durch den Körper, als einer von einzwei Milliampèren und dieser giebt in Folge der grossen Spannung das Licht. Die zum Leuchten nöthige Anzahl von Watt wird nämlich auch dann hervorgebracht, wenn die Intensität sehr gering ist, vorausgesetzt, dass die Spannung genügend gross ist.

2. *Samuel Beck* demonstriert *eine interessante und bisher unbekannte Farbenreaction der in den Fettzellen des Fettgewebes unter der Haut manchmal vorkommenden Margarinkrystalle.* An den mikroskopischen Präparaten, die aus dem Fettgewebe eines an Myxœdema Erkrankten herrührten, war zu sehen, dass die grossen rundeu Lücken von dem die Fettzellen umfassenden Bindegewebe dunkel blau oder grünlich blau gefärbt wurden, die diese Fettzellen stellenweise gänzlich ausfüllenden, windrosenförmigen

Krystallnadelgruppen aber eine lebendig rothe Farbe zeigten. Diese auffallende zweifache Färbung wird durch Farbenveränderung dann hervorgerufen, wenn wir die Schnitte des in Alkohol gehärteten und Margarinkrystalle enthaltenden Objectes einfach durch wässerige Lösung von Methylenblau färben und dann in dünner Pikrinsäurelösung auswaschen. Vortragender schloss die Schnitte nach der Behandlung mit Pikrinsäure gleich in eine dicke Lösung von Gummi arabicum, in vorhinein auf den Umstand rechnend, dass die bei dem Eintrocknen sich bildenden Krystalle und Niederschlag die Reinheit des Präparates stören werden. Die Methode bewährte sich glänzend, da die Margarinkrystalle nicht bloss ihre rothe Farbe behielten, sondern diese noch lebendiger wurde. Die Fettkrystalle pflegen die histologischen Handbücher immer bloss als postmortale Bildungen zu erwähnen, welche mehrere Stunden nach gänzlichem Auskühlen der Gewebe sich aus dem Fett ausscheiden. Man hält sie überhaupt nicht für solche Erscheinungen, welche durch irgend eine physiologische Wirkung hervorgebracht werden, noch schreibt man ihnen eine pathologische Bedeutsamkeit zu. Vortragender ist der Meinung, dass die Margarinkrystalle auch die Ursachen eines pathologischen Processes sein können.

Der andere Gegenstand seines Vortrages waren *zwei Präparate von lepröser Haut.* Seitdem *Hansen* den Leprabacillus entdeckt hat und danach denselben auch *Neisser* beschrieb, dauert der Streit die Virchow'schen Leprazellen betreffend noch heute fort. Es ist nämlich die Frage unentschieden, ob diese grossen, mit Bacillen vollgestopften und manchmal scheinbar Kerne besitzenden Gebilde wirklich Zellen sind, oder freie Bacillen in eine Glœamasse gebettet, die in den Spalten des Bindegewebes sich befindet, so wie es *Unna* in seinen hierauf bezüglichen Arbeiten behauptet. Es ist also von der pathologisch wichtigen Frage die Rede, ob die Leprabacillen intra- oder extracellular in dem Gewebe sind.

Mit diesem Vortrage im Zusammenhang theilt *Anton Genersich* mit, dass auch in den Zellen an Gangræna erkrankter Individuen Margarinkrystalle zu finden sind, und auch an lange in Alkohol stehenden Präparaten sich solche bilden. Ihre Entwicklung kann so erklärt werden, dass der Spiritus das Innere der Fettzellen allmählig und ungleich herauslöst, so, dass zuerst die am leichtesten diffundierenden dünnen öligen Bestandtheile durch die Zellenwand dringen, dann die dichteren, während die unlösbaren Theile in Form von Margarin-Nadeln krystallisieren.

Sitzung den 19. April 1898.

1. *Felix Szontagh* hält unter dem Titel «*Vergleichende Untersuchungen über die chemische Zusammensetzung des normalen und des diphteritischen Pferdeblutserums*» einen Vortrag, in dem er über die Forschungen berichtet, die er im Verein mit *Oskar Wittmann* im physiologischen Institut der Budapester thierärztlichen Akademie machte. Diese Forschungen beziehen sich auf den Nucleoalbumingehalt des Serums, auf das Verhältniss des Globulins zum Albumin, auf den Eiweissgehalt, das specifische Gewicht,

das Sinken des Gefrierpunktes, den Aschengehalt und die elektrische Leitungsfähigkeit desselben. Zwischen dem zweierlei Serum ist in Hinsicht auf den Eiweissgehalt, hauptsächlich aber bezüglich dar elektrischen Leitungsfähigkeit ein Unterschied vorhanden.

2. *Stephan Bugarszky* trägt «*Ueber das Salzsäure-, Natriumhydroxyd- und Kochsalzbindungsvermögen der eiweissartigen Stoffe*» vor. (S. p. 322 dieses Bandes.)

Sitzung den 10. Mai 1898.

Franz Tangl trägt «*Ueber die molekulare Concentration des Blutserums*» vor. (S. p. 323 dieses Bandes.)

Sitzung den 24. Mai 1898.

1. *Franz Tangl* spricht in seinem Vortrag «*Die Wirkung des Trinkens auf die Ausnützung der Nahrung*» über seine an Pferden gemachten Versuche, die ergaben, dass zur Ausnützung des Futters am besten ist, wenn man das Thier nach dem Füttern tränkt; am wenigsten gut ist das Tränken vor dem Füttern.

2. *Dr. Armin Landauer* hält einen Vortrag unter dem Titel «*Der Einfluss der Galle auf den Stoffwechsel*» einen Vortrag. (S. Bd. XV. dieser Berichte pp. 75—114.)

3. *Franz Tauszk* zeigt den *Fleischl-Mischer'schen Haemometer* in seiner modificierten Form.

Sitzung den 4. Oktober 1898.

Elemér Tóvölgyi sprach «*Ueber die Elevationen der Schlagadercurve*». Seine Forschungen führten zu dem Resultat, dass alle drei Elevationen die Folge ein und derselben Ursache, nämlich der Reflection auf der Peripherie sind.

Sitzung den 29. November 1898.

Dr. Eduard Krompecher hielt über eine von ihm festgestellte *neue Gruppe der Carcinome* einen Vortrag. Er nennt diese Krebsart drüsenartiger Epithelkrebs (carcinoma epitheliale adenoides). Vortragender weist nach, dass diese Krankheit von dem Epithel ausgeht und somit ein wirklicher Krebs ist. In ihrer mikroskopischen Structur und klinischen Erscheinung ist sie von dem gewöhnlichen Krebs verschieden. Unter dem Mikroskop sind unverhärtete, aus spindelartigen Zellen bestehende Nester, Bündel, Röhren und Schläuche sichtbar, oft mit spitzenartigem Muster, die aus der drüsenartigen Einstülpung des Epithels stammen. Diese Krebskrankheit ahmt sozusagen die embryonale Drüsenbildung nach, nur dass die Epithelzellen fortwährend, ziellos sich vermehren, die benachbarten Organe vernichten und, sich selbst überlassen, den Tod herbeiführen. Auch klinisch kann diese Krankheit leicht erkannt werden. Im Gesicht bilden sich gewöhnlich kleinere und grössere Geschwüre mit aufgeworfenen Rändern, an den übrigen Körpertheilen aber pilzartige Geschwülste. Charakteristisch ist es, dass diese Geschwüre, gegenüber den anderen Krebskrankheiten, nicht am Berührungspunkte der Aussenhaut und der Schleimhäute, sondern an irgend einer anderen Stelle der Haut sich entwickeln, dass die benachbarten Drüsen selten anschwellen, dass die Geschwüre langsam wachsen und dass sie verhältnissmässig nicht so gefährlich sind, wie bei der gewöhnlichen Krebskrankheit. Sie fangen mit dem Entwickeln eines linsengrossen Kügelchens an, welches bald schwärig wird, Jahre hindurch langsam zunimmt, auf einmal aber sich rasch zu entwickeln beginnt. Diese Krankheit entwickelt sich zwischen dem 40-ten und dem 70-ten Lebensjahre; ihre Ursache ist, wie die eines jeden Krebses, unbekannt. Die einzige Heilung ist die frühzeitige Operation.

Sitzung den 13. Dezember 1898.

Dr. Desider Kuthy besprach unter dem Titel «*Physiologie in der Hydrotherapie*» die physiologischen Grundlagen der Wasserheilmethode. An 23 Tafeln demonstrierte er die Wirkung der Temperaturreize auf das Lumen und den Tonus der Adern, die Vertheilung des Blutes im Organismus, das Betragen der Zusammenziehungen des Herzens, bezüglich deren Zahl und Intensität und auf die Tiefe und den Rhythmus des Athmens. Unmittelbare locale Wirkungen, Wirkungen von fernen Punkten und allgemeine kalte oder auch nur kühle Wirkungen des Wassers steigern die Herzthätigkeit. Dann demonstrierte er an einer Reihe von Ergogrammen die die Muskelkraft hebende Wirkung der Behandlung mit Wasser und der Massage. Der Muskel kann der Ermüdung nach Anwendung einer kühlen Behandlung besser Widerstand leisten, und kann, wenn er schon ermüdet ist, durch ein sogenanntes abkühlendes Bad wieder zur Arbeitskraft erweckt werden. Die Einwirkung der hohen Temperatur kann auch Fieber verursachen, wie das Vortragender an sich selbst beobachtete; diese Temperaturerhöhung verschwindet gewöhnlich nach $^1/_4$—$^3/_4$ Stunden.

III. Die «**Ungarische Geologische Gesellschaft**» hielt im Jahre 1898 Sitzungen, deren Protokolle wir im Folgenden wiedergeben (anschliessend an pp. 389—396. des XV. Bandes):

Sitzung den 5. Januar 1898.

1. *Desider Laczkó* trägt in seiner «*Neue Beiträge zur geologischen Kenntniss der oberen Trias- und Liasschichten des Bakonyer Waldes*» betitelten Abhandlung die Daten vor, die er gelegentlich seiner neueren Untersuchungen bei Wesprim sammelte. In dem Gestein repräsentiert der «Wesprimer Mergel» die Cassianer und Rhætischen Schichten; ein grosser Theil der Dolomite der Umgebung stammen aus früherer Zeit, als die Rhætischen Schichten und sind auch älter, als der Hauptdolomit. Am nördlichen Abhang des Popodberges wurde ein bisher unbekanntes Liasgebiet bekannt, das einen ganz alpinischen Charakter hat.

2. *Ludwig Lóczy* hält unter dem Titel «*Bemerkungen zu den durch Desider Laczkó im Wesprimer Mergel und in der Liasschichte am Popodberg gesammelten Fossilien*» einen Vortrag, in dem er den stratigraphischen Werth der erwähnten Gesteine eingehender würdigt.

3. *Dr. Franz Schafarzik* legte eine Abhandlung *Dr. Julius Szádeczky*'s unter dem Titel «*Ein neues Ganggestein aus Assuan in Egypten*» vor. Das erwähnte Gestein wurde in einem Granitbruch gefunden. Von den ursprünglichen Mineralien ist darin der Augit am unversehrtesten, während der Olivin nahezu gänzlich zu Serpentin geworden ist. Von den nicht ursprünglichen Mineralien ist darin Chlorit und Calcit enthalten. Der Verfasser betrachtet das Gestein als neu entdeckt und nennt es «Józsefit».

Dr. Franz Schafarzik meint, dass das fragliche Gestein, aus der Beschreibung beurtheilt, nicht genügend unversehrt für eine pünktliche pertrographische Bestimmung war, und rechtfertigt dann seine Ansicht, nach welcher das Gestein ein sehr verwitterter Diabas sein könnte.

Auch *Dr. Alexander Schmidt* findet, dass die mitgetheilte Analyse den Daten der mikroskopischen Untersuchung widerspricht, und dem zur Folge von einem neuen Gestein gar nicht die Rede sein könne.

Sitzung den 2. März 1898.

1. *Dr. Anton Koch* theilt *seine neueren Beobachtungen über den berühmten Gesteinfundort zu Felső-Lapugy* mit. Vortragender sammelte 11,394 Exemplare, die 395 Arten angehören. Diese verglich er mit den Arten der benachbarten Fundorte und konnte hieraus sehr interessante Folgerungen betreffs der Häufigkeit der Arten machen.

2. *Dr. Béla Lengyel* besprach in seiner «*Der Illyés-See (Maros-Tordaer Comitat) und die chemische Analyse seines Wassers*» betitelten Abhandlung den See, welcher in der Nähe von Szováta unter Salzfelsen sich erstreckt. Der See war in den Jahren 1873 und 1874 noch nicht vorhanden und entstand wahrscheinlich dadurch, dass die in der Tiefe entspringenden warmen Quellen die Salzmassen auflösten und dem zu Folge Senkungen vorkamen, die das Becken des jetzigen Sees, der 8—10 Joch gross ist, bildeten. Die Tiefe des Sees ist durchschnittlich 20 M.; die Quantität der in einem Liter seines Wassers aufgelösten Salze ist 233·75 G., das specifische Gewicht ist bei 15° C. 1·174. Der badende Mensch geht darin nicht unter; die Temperatur ist wechselnd; auf der Oberfläche beträgt sie 16—20°, in der Tiefe von 0·5 M. 30—40°, über 4 M. schon 60° C.

Dr. Ludwig Lóczy hält es für wahrscheinlich, dass dieser See, gerade so, wie die übrigen kleineren Seen dieser Gegend, seine Entstehung der Rutschung der ganzen Berglehne verdanke.

3. *Dr. Emerich Lörenthey* zeigt *Krebse aus dem Trias* vor, welche er in einer in der Akademie gehaltenen Sitzung näher beschrieben hat.

4. *Alexander Kalecsinszky* legt die im chemischen Laboratorium des ung. kön. geologischen Institutes gemachten *chemischen Analysen* vor, deren eine sich auf das Salzefflorescieren am Ufer des Ruszanda-Sees im Torontaler Comitat bezieht. Dieses Salz enthält bloss 4% Soda und 86% schwefelsaures Natron. Vortragender theilt ferner mit, dass im vorigen Jahr bei der Untersuchung des Bodens der zu Budapest im Bau begriffenen

neuen Brücke in einer Tiefe von 17·6 M. 47° C. warmes artesisches Wasser aufstieg. Aus der Analyse dieses Wassers konnte constatiert werden, dass es in jeder Beziehung einen ähnlichen Charakter hat, wie die heissen Quellen des Blocksberges.

Dr. Thomas Szontagh bemerkt, dass das Aufquellen dieses Quellenwassers, so wie das einer jeden Blocksberg-Quelle eine secundäre Erscheinung sei.

5. *Heinrich Horusitzky* trug «*Ueber die agronomisch-geologischen Verhältnisse des nordwestlichen Theiles von Budapest*» vor. Er theilt die Bodenqualität des in Rede stehenden Gebietes in 21 Hauptgruppen und bezeichnet die Bodenarten, welche für Weinzucht geeignet sind.

Sitzung den 6. April 1898.

1. *Julius Halaváts* hält «*Ueber die Kiesel der Umgebung von Budapest*» einen Vortrag und bespricht bei dieser Gelegenheit zwei Kieselablagerungen, von denen sich eine am linken Donauufer, zwischen Rákos-Keresztur und Puszta-Szt.-Lőrincz, die andere am rechten Ufer, bei Ercsi befindet. Im geologischen Sinne ist die am linken Ufer die ältere, da sie die Mastodonüberreste in den Levanteer Stock versetzen. Die in der rechtsufrigen Ablagerung vorkommenden Ueberreste von Mollusken lassen eine Zeitbestimmung nicht zu; aber die nicht selten vorkommenden Ueberreste von *Elephas meridionalis* sprechen für das Diluvium.

2. *Dr. Gustav Melczer* legt «*Mineralogische Mittheilungen*» vor, die sich auf die am Mathiasberg bei Budapest und am Fuchsberg bei Üröm gesammelten Calcite beziehen. An letzterem Ort kommen die Calcite in den Höhlungen des Dachsteinkalksteines neben Tropfsteingebilden vor; sie sind skalenoëderartig ausgebildet, die Krystalle haben in Folge der übertriebenen Entwickelung einzelner Flächen eine eigenartige gestreckte Form. Diese Calcite sind darum besonders interessant, da darunter Zwillingskrystalle nach $\pi(01\bar{1}2) = -\frac{1}{2}R$ sind, die denjenigen aus Grandjuato in Mexico ähnlich sind. Am Mathiasberg sind die Calcite auf Orbitoidkalkstein zu finden. Unter den Skalenoëdern befinden sich auch Zwillingskrystalle nach $\pi(02\bar{2}1) = -2R$. Vortragender erkannte die beiden Zwillingsgesetze auch an den Calciten vom kleinen Schwabenberg; bisher waren nur die, der Basis nach, Zwillinge an diesen Krystallen bekannt.

3. *Dr. Ludwig Ilosvay* trägt die Ergebnisse der «*Neueren Untersuchung der Luher Margarethen-Quelle*» vor, und vergleicht diese Analyse mit den vor 20, resp. vor 10 Jahren ausgeführten. Die Zusammensetzung dieses Wassers verändert sich wesentlich und zwar nicht in Folge einfacher Verdünnung, sondern wahrscheinlich in Folge der Veränderung der Bahnen des Wassers, das sich fortwährend einen anderen Boden sucht. Am auffälligsten ist, dass jetzt darin wieder die Borsäure erschien, die vor 10 Jahren gänzlich fehlte, im Jahre 1877 aber vorhanden war; ferner enthält es nunmehr Natriumcarbonat und auffallend vermehrte sich die Kohlensäure, die jetzt etwa 20-mal so viel ist, als vor 20 Jahren.

Sitzung den 4. Mai 1898.

1. *Alexander Kalecsinszky* bespricht «*Die chemische Zusammensetzung der Serpentine aus dem Krassó-Szörényer Comitate*». Alle Serpentine enthalten Magneteisen; ihr Pulver ist, befeuchtet, auf Curcuma oder rothes Lakmuspapier von bemerklicher alkalischer Wirkung. Besonders schwankend ist ihr Calciumgehalt, und wenn er 30% beträgt, schmelzen sie, während sie im entgegengesetzten Fall feuerfest sind und nicht einmal bei 1500° schmelzen. Das ursprüngliche Gestein enthält kaum Wasser, der SiO_2- und CaO-Gehalt ist grösser, MgO enthält es bedeutend weniger, als der Serpentin; auch das specifische Gewicht des ursprünglichen Gesteins ist grösser, als dasjenige des Serpentins, was durch das Wachsen des Volumens in Folge der Wasseraufnahme erklärt werden kann.

2. *Dr. Theodor Posewitz* zeigte *die Ueberreste eines Saurius aus der Kohle der Fünfkirchner Unter-Diasperiode* vor.

3. *Hugó Böckh* theilt «*Beiträge zur Frage des Pecten denudatus und Pleuronectis comitatus Font.*» mit. Aus dem ungarischen Schlier, aus den Comitaten Gömör und Baranya untersuchte Vortragender 25 Exemplare, die mit der Beschreibung der erwähnten Arten übereinstimmen. Er machte die Erfahrung, dass zwischen diesen zwei Arten so viele Uebergangsformen existieren, dass es zweckmässig wäre, sie in eine Art zu vereinigen. Andere von den erwähnten Fundorten stammende Gesteine stimmen mit den Gesteinen des österreichischen Schliers überein, weshalb er auch den ungarischen zum unteren Mediterran zählt.

4. *Dr. Moritz Staub* sprach «*Ueber die Gebilde, welche den durch das fliessende und Sickerwasser entsprungenen Pflanzenabdrücken ähneln.*» Er erwähnt die aus der Litteratur bekannten Gebilde, von denen nunmehr bekannt ist, dass sie ihre Existenz dem fliessenden oder dem Sickerwasser verdanken und die wegen ihrer Aehnlichkeit mit den Pflanzenabdrücken schon als Pflanzen beschrieben worden sind; er zeigt zwei Gebilde vor, die sich auf geschlemmtem Porzellanboden entwickelten. Das eine erinnert an *Sphenopteris*, das andere an *Lepidodendron*. Den Ursprung derselben erklärt er auf Grund einer Mittheilung von *Ludwig Petrik*.

Sitzung den 1. Juni 1898.

1. *Dr. Moritz Pálfy* bespricht in seinem Vortrage: «*Beiträge zu den geologischen und hydrologischen Verhältnissen der Umgebung von Székelyudvarhely*» die geologischen Gebilde dieser Gegend. Diese sind: Mediterranthonmergel, auf dieses gelagertes Sarmata Conglomerat und über dem Andesittuff; an beiden Seiten des Nagy-Küküllő Flusses sind kleinere diluviale Kieselablagerungen. Nach der kurzen Beschreibung der Hydrologie dieser Gegend bespricht er die geologischen Verhältnisse des Székelyudvarhelyer Salzbades, des Szejkebades und der davon einen halben Kilometer weit entfernten Sauerwasser-Quelle.

2. *Coloman Adda* beschreibt den «*Querschnitt des Neusatzer artesischen Brunnens*». Das Bohrloch, welches einen Durchmesser von 40 Cm.

hat, geht bis zu einer Tiefe von 193 M. hinunter; das Bohren war von Erfolg gekrönt, insofern der Brunnen in einer Minute 240 Liter 24° C. warmes Wasser giebt, welches 4·5 M. hoch springt; sie fanden aber auch schon ein oberes Wasserreservoir, dessen Wasser 17° C. hat. Die Reihe der durchbohrten Schichten erinnert in vieler Hinsicht an die benachbarten Brunnen; bei den Bohrungen erreichten sie den Pontuser Thon am Rand des Fruska Gora Gebirges noch nicht; die Schichten des Wasserreservoirs gehören der Levanteer Etage an und zwar auf Grund der Versteinerungen, zu den Paludinaschichten. Ihre Dicke ist beinahe so, wie in dem artesischen Brunnen zu Maria-Theresiopel, doch sind sie hier tiefer gelegen.

Dr. Ludwig Lóczy bemerkt, dass nach den Beobachtungen von *Halaváts* die Levanteer Etage bei Maria-Theresiopel sich über die Oberfläche erhebt, nach *Adda* aber diese Schichten tiefer liegen; aus dem ist zu sehen, dass die Levanteer Etage ähnlicherweise uneben ist, als gegenwärtig die Oberfläche der grossen ungarischen Tiefebene. Diese Unebenheit kann nicht nur von der Erosion herstammen. Auch gegenwärtig ist an den Rändern der grossen Ebene in der Nähe der Berge die absolute Höhe geringer, als gegen die Mitte der Ebene, obgleich zu erwarten wäre, dass sie gerade an den Rändern grösser sei, da die Ablagerungen der Flüsse hier zuerst vorkommen. Hieraus schliesst er hypothetisch, dass an den Rändern des Beckens schon im Levanteer Zeitalter grosse Senkungen vorkamen.

3. *Dr. Carl Zimányi* bespricht *«Die Krystallform des Kotterbacher (Comitat Szepes) Pyrites.»* Die 0·5—8 Mm. grossen Pyritcrystalle wuchsen im grosskörnigen Siderit oder in dem diesen durchgehenden weissen Quarz. Die Zahl der beobachteten Formen ist 49; von diesen sind 29 Pentagondodekaeder, 14 Diakisdodekaeder, 2 Ikositetraeder, 1 Triakisoktaeder, schliesslich (100), (111) und (110). Viele der Formen sind neu; auffallend sind die vielflächigen Combinationen; an den combiniertesten konnte man 19, 23 und 33 einfache Formen unterscheiden.

4. *Dr. Moritz Staub* zeigt ein Exemplar des *Chondrites Goepperti Gein.*, welches *E. Rzehak* in Troppau der Gesellschaft zum Geschenk gemacht hat. Diese Pflanze wurde bei Odvan in Oesterreichisch-Schlesien in vier Exemplaren in einem neu eröffneten Dachschieferbruch gefunden. Vortragender theilt auch die Litteratur mit, welche seit 1873 sich mit der Erforschung der *Chondrites* genannten Alge befasst, von *Nathorst* bis *Rothpletz*, und auf Grund deren glaubt er, dass nicht jedes als *Chondrites* beschriebene Petrefact eine urweltliche Alge ist; doch ist auch nicht jede *Chondrites* genannte Alge die Spur eines Wurmes.

Sitzung den 9. November 1898.

1. *Dr. Moritz Pálfy* legt die *in den Jahren 1896—1898 geologisch aufgenommene Karte der XXIII. Abtheilung der 19. Zone (Magura)* vor. Diese Karte enthält das Gyaluer Hochgebirge. Durch das Gebiet zieht sich von Norden nach Süden eine mächtige Granitmasse, auf welche westwärts

und ostwärts sich der zur oberen und zur unteren Gruppe gehörige Krystallschiefer lagerte. Paleozooer und Mezozooer Gebilde — Dyas vernicano, Sandstein, darüber Triaskalk, ein wenig Liasschiefer und Kalkstein aus der Liasperiode — sind nur im Südwesten zu finden. In der Nähe der Gemeinde Meleg-Szamos lagerte sich an einem kleinen Gebiet auf die jüngste Gruppe des Krystallschiefers Sandstein aus der oberen Kreidezeit. Triasgebilde unterer bunter Lehm, Perforata — und untere Grobkalkschichten — sind blos aus dem Eocen bekannt.

2. *Dr. Anton Koch* legt «*Ein neues geologisches Lehrmittel*» vor. *Dr. Michael Tóth*, Bürgerschuldirektor zu Nagyvárad, verfertigte nämlich, nach den Unterweisungen des Vortragenden, aus natürlichem Stoff das geologische Profil der Kleinzeller Hochebene nächst Alt-Ofen in einer Grösse von 130 Cm. Länge und 40 Cm. Höhe. In Verbindung damit theilt er auch die eigenen Beobachtungen, die er an der erwähnten Stelle machte, mit. Die Hochebene ist unmittelbar auf dem Kleinzeller kalkhältigen Triasthon aufgebaut; die Reihe der Schichten ist von unten nach oben die folgende: unmittelbar über dem kalkhältigen Thon liegt Sand, darüber gelber Lehm, etwa 4 M. dicker, körniger Kalktuff, in einer Dicke von 0·5 M. Lehm, 4—6 Meter dicker Kalktuff und zu oberst feiner Kalkschlamm. Der Sand lagerte sich im alten Inundationsgebiet der Donau ab, doch konnte Vortragender das Zeitalter nicht bestimmen, in welchem diese Ablagerung stattfand. Im untersten Kalktuff ist die Zahl der Petrefacten klein, in dem darüber liegenden, etwa 50 Cm. dicken Lehm sind gar keine vorhanden; dieser ist wahrscheinlich von den höheren Stellen hierher getragen worden; im oberen Kalktuff sind viele Petrefacten; zu oberst lagerte sich loser Seekalkschlamm nieder, der wahrscheinlich auch aus der Quaternärperiode stammt.

Dr. Ludwig Lóczy hält es für unzweifelhaft, dass die Kleinzeller Kalksteinterasse den alten Thalgrund der Donau einnahm und einen grossen Umfang hatte. In allen Gegenden der Umgebung von Budapest ist der Süsswasserkalkstein zu finden. Den auf den Ofner Mergel gelagerten losen Sand betrachtet er, trotz seiner irreführenden Schichtung, für die Ablagerung eines Flusses, welcher an den verschiedenen Stellen des Beckens nur durch die wechselnde Geschwindigkeit des Wassers und durch die Geschwindigkeit der Stromrichtung sich gestaltet. Den unter dem Kalktuff befindlichen Lehm betreffend setzt er ebenfalls keine anderen Verhältnisse voraus. Endlich macht er darauf aufmerksam, dass in Ungarn nirgends Gletscherspuren unter 900—1000 M. absoluter Höhe zu finden sind.

3. *Dr. Anton Koch* zeigt «*Walüberreste aus Klausenburg*» vor. Beim Bau eines Hauses fand man etwa in der Tiefe von 3 M. an der Grenze des zu der Sarmatschichte gehörenden Sandes und im Myocenthon zwei Walwirbel. Diese Wirbel gehören nach ihren Dimensionen, Form und Gewebsstructur zweifellos in die Familie der *Physeteridae*, und zwar in das Genus *Berardius*.

4. *Géza Bene* bespricht eine «*Die Rolle der Algen bei der Kohlenbildung*» betitelte Abhandlung vom Lilleer Universitätsprofessor *Bertrand.*

Sitzung den 7. December 1898.

1. *Dr. Franz Schafarzik* legte eine Abhandlung unter dem Titel «*Die von industriellem Standpunkt wichtigeren Gesteine des Neutraer Comitates*» vor. Auf Grund seiner eigenen Forschungen beschreibt er die geologische Structur der in diesem Comitat befindlichen Gebirge. Es sind dies Schollengebirge, in denen die verschiedenen Formationen sich alle in einer Richtung neigen, die Ränder sind von Dislocationen begrenzt, in deren Nähe an mehreren Stellen warme Quellen entspringen, so z. B. bei Pistyán. Den Kern der Gebirge bildet der Krystallschiefer; darauf liegt der rothe Sandstein der Dyas; von den die Mesozooer Gebilde repräsentierenden Kalksteinen und Dolomiten kommen die jüngeren mehr in den westlichen Gebirgen vor. Die Schichten des Eocenalters sind gewöhnlich in einzelne Flecken vertheilt, nur in der Gegend von Privigye nehmen sie ein grösseres Gebiet ein; die Mediterranconglomerate und die Pontuser und Sarmataschichten lagerten sich an den beiden Seiten des Brezova-Gebirges ab. Von den industriell verwerthbaren Gesteinen zeigt Vortragenden die folgender vor: Quarzite, feuerfesten Thon, sehr schönen weiss und gelbgestreiften schwarzen Marmor und weissen, doch weniger guten Marmor.

Dr. Ludwig Lóczy constatiert mit Freude, dass *Schafarzik* der erste ist, der die schollige Beschaffenheit der nordwestlichen Karpathen erwähnt. Diese Gebirge haben nicht den Charakter der Kettengebirge; ähnlich sind die Verhältnisse in den östlichen Gegenden; es kann bewiesen werden, dass in dem inneren Gürtel der Karpathen, mit Ausnahme des Sandsteingürtels, die Gebirge schollig sind, so wie der Bakonyerwald und das Graner Gebirge. Hieraus ergiebt sich, dass die Gebirge, welche die ungarische Tiefebene umgeben, nicht zu dem Bergsystem der Alpen gehören.

Ludwig Petrik bezweifelt, dass die durch den Vortragenden erwähnten Quarzite zur Glasfabrikation sehr geeignet wären. *Dr. Franz Schafarzik* bemerkt, dass die Glasfabrikanten, mit denen er sich in Verbindung setzte, anderer Meinung waren.

2. *Carl Papp* zeigt in seinem «*Dreikanter aus Ungarn*» betitelten Vortrag die schönen «Dreikanter» vor, die *Dr. Moritz Staub* im Jahre 1887 in der von Budapest in nordöstlicher Richtung etwa 15 Km. weit liegenden Gemeinde Csömör in der Kieselablagerung gesammelt hat. Nach einer kurzen historischen Skizze der Dreikanterfrage erwähnt er, dass damals, als Staub die ersten Dreikanter in Ungarn gesammelt hat, die diluvialen Gletscherspuren auch bei uns auf Grund der herrschenden Berendt'schen Glacial-Theorie gesucht wurden; heutzutage schliessen wir aus den scharfen Kieseln auf grosse Stürme. Die erwähnten Dreikanter kommen auf der Oberfläche der Levanteer Schichte vor; ihr Stoff rührt

also von dem Geschiebe der in den Levanteer See mündenden Flüsse her; scharf geschliffen wurden sie aber erst im Diluvium durch die Stürme, die auch den Flugsand und den Löss aufhäuften. Diese Dreikanter sind also auch Zeugen der Steppenbildung, die im Diluvium auch auf den Tiefebenen und hügeligen Gegenden unseres Vaterlandes herrschte, aus dessen Fauna, ausser den aus dem Löss stammenden Schnecken, die folgenden Steppenthiere bekannt sind: *Camelus sp.*, *Saiga prisca Nehr.*, *Cricetus phäus fossilis Nehr.*, *Arctomys bobac Schreb.*, *Vulpes vulgaris fossilis Woldr. Fc.* Es sind auch die von *Dr. Anton Koch* bei Karlstadt in Croatien im groben Pontuser Sand gefundenen Dreikanter interessant, aus denen wir auch im Pontuser Zeitalter auf starke Luftströmungen schliessen können.

3. *Dr. Moritz Staub* bespricht die «*Examen d'un collection de végétaux fossiles de Roumanie*» betitelte Abhandlung von *A. F. Marion* und *L. Laurent.*

BERICHTE

ÜBER DIE THÄTIGKEIT, DEN VERMÖGENSSTAND, DIE PREISAUSSCHREIBUNGEN U. S. F.

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖN. UNG. NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT.

I. Ungarische Akademie der Wissenschaften.

Jahresbericht des Generalsecretärs Coloman v. Szily.

«In jedem Lande — schrieb im vorigen Jahre der Minister für Cultus und Unterricht an unsere Akademie — verwenden die Akademien auch durch ihre lexicographische Thätigkeit besondere Sorgfalt auf die Ausbildung der Landessprache. Die einzige Aufgabe der Académie Française ist die fortwährende Vervollkommnung des Wörterbuches der französischen Sprache.»

In dieser Richtung verdient auch die Thätigkeit der Ungarischen Akademie eine Anerkennung, aber diese Thätigkeit müsste eine fortwährende sein, wie es die geschichtlichen, archäologischen und naturwissenschaftlichen Forschungen sind, denen der Staat eine jährliche Unterstützung gewährt.

Auf Grund dessen forderte der Minister vom Reichstage eine Erhöhung der jährlichen Subvention der Akademie vom künftigen Jahre an. Die Gesetzgebung leistete diesem Antrag des Ministers Folge und so kann nun die sprachwissenschaftliche Classe gleich zur Vorbereitung der zweiten Ausgabe des grossen Wörterbuches schreiten, welches in 10—12 Jahren erscheinen soll.

Als dessen Vorarbeiten können wir die neue Ausgabe des Dialektwörterbuches von *Joseph Szinnyei* betrachten, welches jetzt im Erscheinen ist, das Wörterbuch der Handwerke von *Johann Frecskay*, das sogenannte «Arany»-Wörterbuch, in welchem *Albert Lehr* die Sprache Johann Arany's aufarbeitet, die Ausgabe der aus dem XVI. Jahrhundert stammenden Fragmente des Gyöngyöser Wörterbuches durch *Johann Melich*, das erste Heft des sprachgeschichtlichen und diplomatischen Wörterbuches von *Julius Zolnay* und das kleine Fremdwörterbuch, welches die sprachwissenschaftliche Commission auf Anregung des Ministers für Cultus und Unterricht zusammenstellt.

Zu einem endgiltigen Beschluss kam die interessante Frage, wie der Klang der ungarischen Sprache in der Zeit der Árpáden-Könige gewesen, durch eine Abhandlung vom o. M. *Joseph Szinnyei* über die mittelalterlichen Sprachdenkmäler. Es wurde bewiesen, dass der Klang der ungarischen Sprache dem jetzigen viel ähnlicher war, als man bisher angenommen hatte. Mit der Sprachgeschichte beschäftigten sich noch: c. M. *Bernhard Munkácsi* in der Abhandlung: «Ueber die Anfänge der ethnischen Berührungen zwischen Ungaren und Slaven», wo er auf philologischer Grundlage beweist, dass diese Berührungen in die Zeit ihres Aufenthaltes am Schwarzen Meere zu versetzen sind. Das auswärtige M. *Aurel Stein* schrieb: «Ueber die weissen Hunnen und ihre verwandten Stämme», *Ludwig Katona* «Ueber die Litteratur der ungarischen Mythologie», *Ladislaus Négyesy* «Ueber die neueste Entwickelung der ungarischen Sprache».

Corr. M. *Stephan Hegedüs* würdigte den grössten unserer lateinischen Schriftsteller, Janus Pannonius, als Epiker, c. M. *Ignaz Künos* suchte die ungarischen Elemente in der türkischen Sprache auf und schrieb über die türkische, *Moritz Szilasi* hingegen über die neuere finnische Litteratur. *Eduard Mahler* hielt einen Vortrag aus dem Gebiete der Aegyptologie «Ueber die Jahresformen und die grossen periodischen Zeitrechnungssysteme der Aegypter».

Von den Ausgaben der I. Classe und deren Commissionen können wir erwähnen, dass von dem grossen biographischen und bibliographischen Werke «Leben und Werke ungarischer Schriftsteller», von *Joseph Szinnyei*, schon die Hälfte erschienen ist, und die vom o. M. *Aron Szilády* redigierten «Litteraturwissenschaftlichen Berichte» von Jahr zu Jahr eine grössere Verbreitung finden. Ausserdem sind erschienen: der IV. Band jener Unternehmung der Commission für Litteraturgeschichte, in welcher sie die Facsimilen altungarischer Druckwerke herausgiebt. Das preisgekrönte Werk von *Joseph Bayer* «Geschichte der ungarischen Dramenlitteratur» und das Wörterbuch des in Ungarn seinerzeit gebrauchten Beamten- und Mönch-Lateins, dessen Zustandekommen ausschliesslich das Verdienst des o. M. *Anton Bartal* ist, sind ebenfalls hier zu nennen.

In der II. Classe wurden hauptsächlich geschichtswissenschaftliche Gegenstände vorgetragen. *Florian Mátyás* berichtigte in seinem «Heidnische Gebräuche bei unseren Vorfahren» genannten Werke viele bisher verbreiteten Irrthümer; ausserdem hielten c. M. *Johann Karácsonyi*, c. M. *Ernst Nagy* und *Julius Schönherr* ihre Antrittsvorträge.

Die Ausgaben der II. Classe befassen sich hauptsächlich mit der Geschichte und deren Hilfswissenschaften. Es erschien der XX. Band der von *Alexander Szilágyi* redigierten Denkmäler des siebenbürgischen Landtages, der zweite Theil des vierten Bandes der «Ungarischen rechts-geschichtlichen Denkmäler» von *Alexander Kolozsvári* und *Clemens Óvári*, der III. Band der geschichtlichen Geographie Ungarns vom c. M. *Desider Csánky*, Briefe und Urkunden das Leben Nikolaus Zrinyi's betreffend, herausgegeben von *Samuel Barabás*, die Geschichte des Comitates Csanád von *Samuel Borovszky*, welches Werk im Auftrage der historischen Commission verfasst wurde. Im Auftrage dieser Commission erschien noch: das Handbuch der Heraldik von *Oskar Bárczay*.

Die in der III. mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe gehaltenen Vorlesungen und Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten zu finden.

Die Mitglieder unserer Akademie nahmen, ausser ihrer fachwissenschaftlichen Thätigkeit, auch an der Verbreitung der Wissenschaft regen Antheil. Ob wir unsere wissenschaftliche Vereine, welche im Verbreiten der Wissenschaft Organe sind, oder die grösseren litterarischen Unternehmungen von Verlegern betrachten, überall sehen wir an der Spitze der Leitung oder in der Corporation der Mitarbeiter die Vertreter der Akademie. Dasselbe beweist das Pallas-Lexikon, unter dessen Mitarbeitern wir 65 Akademiker finden.

Indem wir die Aufzählung der im Jahre 1897 ausgeschriebenen Preisarbeiten übergehen, erwähnen wir hier bloss ein Moment. Der Präsident der Akademie überreichte in einer öffentlichen Sitzung die im vorigen Jahre zum ersten Mal zuerkannte Wahrmann'sche goldene Medaille an Anton Mechwart, den Director der Ganz'schen Maschinen- und elektrotechnischen Fabrik, für seine auf dem Gebiete der Industrie erworbenen bedeutenden Verdienste. Anton Mechwart vermehrte das Grundcapital der Akademie durch eine Stiftung von 3000 Gulden. Gr. Julius Andrássy spendete 4000 Gulden als Preis für eine Biographie Franz Deák's; c. M. Theodor Duka machte eine Stiftung von 2000 Kronen.

Im vorigen Jahre wurde zum Andenken an den grössten ungarischen Encyclopädisten Samuel Brassai eine Gedenktafel in Toroczkó-Szentgyörgy enthüllt, auch bei dieser Feier fehlten nicht die Vertreter der Akademie. Der greise Gelehrte, von dem wir gehofft hatten, dass er das erste hundert Jahre alte Mitglied der Akademie sein werde, schrieb noch in seinem sechsundneunzigsten Lebensjahre eine Abhandlung über «Die wahre positive Philosophie» und arbeitete zwei Jahre später, kurz vor seinem Tode, an einer mathematischen Abhandlung. Noch länger als Brassai war der nun auch verstorbene Nikolaus Barabás Mitglied der Akademie.

Seit der vorjährigen grossen Sitzung hat die Akademie noch folgende Mitglieder verloren: Franz Pulszky, Ferdinand Knauz, die o. M. Alexius Jakab und Georg Volf, die c. M. Heinrich Finály, Emerich Poór, Gustav Kondor, Albert Pálffy, Jakob Pólya und Georg Szathmáry.

Die Zahl der auswärtigen Mitglieder ist in den letzten Jahren durch den Tod bedeutend vermindert worden, im Jahre 1883 hatten wir 102, in diesem Jahre nur mehr 73 auswärtige Mitglieder. Die im vorigen Jahre verstorbenen sind: Alfred Arneth, der Präsident der Wiener kaiserlichen Akademie, Alfrède des Cloiseaux, Thomas Spencer Wells und Eduard Sayous, der erfahrene Kenner der ungarischen Geschichte und Litteratur.

3. A) *Vermögen der Akademie am 31. December 1897.*

I. *Activum.*

1. Werthpapiere der Akademie insgesammt	1.606,412	fl.	12	kr.
2. Gebäude der Akademie, Einrichtung, Bibliothek	1.000,000	«	—	«
3. Aeussere Stiftungen, Fonds, Immobilien	108,874	«	65	«
4. Rückständige Interessen, Hausmiethe	2873	«	36	«
5. Verschiedene Forderungen der Akademie	83,717	«	41	«
6. Im Vorhinein für 1898 bezahlte Gebühren	3313	«	86	«
7. Ausstehende Vorschüsse	2218	«	99	«
8. Hauszinsrückstände	131	«	04	«

II. *Passivum.*

1. Die von der Akademie verwalteten Fonds	151,233	fl.	75	kr.
2. Verschiedene Forderungen und Miethzins	43,010	«	09	«
3. Vermögen der Akademie zu Anfang des Jahres	2.543,819	«	07	«
4. Vermögenszunahme	69,478	«	52	«
III. *Gesammtvermögen der Akademie*	2.807,541	«	43	«

B) *Einnahmen der Akademie im Jahre 1897.*

1. Interessen von Stiftungen und andere Forderungen	6190	fl.	09	kr.
2. Ertrag der Werthpapiere	62,413	«	67	«
3. Hausmiethe	41,995	«	17	«
4. Erlös verkaufter Bücher	9,000	«	—	«
5. Landessubvention	40,000	«	—	«
6. Immobilien	800	«	82	«
7. Legate und Spenden	7092	«	97	«
8. Einzahlung der Ungarischen Kaufmannshalle	160	«	—	«
9. Beitrag der archäologischen und anthropologischen Gesellschaft	675	«	—	«
10. Cursdifferenzen	65,464	«	50	«
11. Aus der Kazinczy-Stiftung	1759	«	87	«
12. Rückerstattung von der III. Classe der Akademie	14,800	«	19	«
13. Die Einnahmen der Akademie im Jahre 1897 gegenüber dem Voranschlag	179,134	«	81	«
Ausgaben	180,882	«	74	«

C) *Ausgaben der Akademie im Jahre 1897.*

1. Personalbezüge	32,020	fl. 73	kr.
2. Jahrbuch, Anzeiger, Almanach u. s. w.	4772	« 31	«
3. I. Classe und deren Dotation	17,033	« 20	«
4. II. « « « «	36,339	« 34	«
5. III. « « « «	21,989	« 16	«
6. Bücheredition und Unterstützung anderer Büchereditionen	5000	« —	«
7. Graf Széchenyi's Werke	196	« 99	«
7*a*. Zur Ausgabe von Kazinczy's Briefen	1759	« 87	«
7*b*. Szinnyei: Ungarische Schriftsteller	1200	« —	«
8. Preise	13,860	« 50	«
9. Unterstützung des «Budapesti Szemle» (Budapester Revue)	4000	« —	«
10. Für ausländische Publicationen über ungarische Litteratur	1350	« —	«
11. Pränumeration auf die «Mathematischen und Naturwiss. Berichte»	1500	« —	«
12. Bibliothek und Handschriftensammlung	6490	« 91	«
13. Anwalt, Bureau, vermischte Ausgaben	3992	« 86	«
14. Instandhaltung der Gebäude der Akademie	7381	« 99	«
15. Steuer	14,366	« 92	«
16. Interessen der verwalteten Fonds	2303	« 76	«
17. Unvorhergesehene Ausgaben	2124	« 20	«
18. Rückerstattung an das Grundcapital	3200	« —	«
19. Für die Millenniumsausgabe	100	« —	«
20. Cursdifferenzen	1638	« 95	«

D) *Voranschlag für 1898.*

Einnahmen.

1. Interessen der Stiftungen	3000	fl. —	kr.
2. Forderungen	3300	« —	«
3. Ertrag der Werthpapiere	64,000	« —	«
4. Ertrag der Immobilien	500	« —	«
5. Hausmiethe	42,000	« —	«
6. Erlös für verkaufte Bücher	10,000	« —	«
7. Landes-Subvention	40,000	« —	«
8. Ausserordentliche und durchlaufende Einnahmen	8165	« 18	«

Ausgaben.

1. Personalbezüge	31,039	fl. 20	kr.
2. Anzeiger, Almanach u. s. w.	4500	« —	«
3. I. Classe und deren Commissionen	18,040	« 04	«
4. II. « « « «	30,185	« 90	«
5. III. « « « «	17,564	« 24	«
6. Unterstützung von Büchereditions-Unternehmungen	3000	« —	«
7. Graf Széchenyi-Museum	500	« —	«
7a. Ausgabe der Correspondenz Kazinczy's	2200	« —	«
7b. Szinnyei: Biographien der ungarischen Schriftsteller	1200	« —	«
8. Preise	7000	« —	«
9. Budapesti Szemle (Budapester Revue)	4000	« —	«
10. Für ausländische Publicationen über ungarische Litteratur	1600	« —	«
11. Pränumeration auf die «Math. Naturw. Berichte»	1500	« —	«
12. Bibliothek	6500	« —	«
13. Instandhaltung der Gebäude, Heizung, Beleuchtung etc.	11,000	« —	«
14. Vermischte Ausgaben	5000	« —	«
15. Steuer	16,000	« —	«
16. Interessen aus den von der Akademie verwalteten Fonds	2400	« —	«
17. Rückerstattung an das Grundcapital	3200	« —	«
18. Unvorhergesehene Ausgaben	3000	« —	«
	169,429	fl. 38	kr.
Vermehrung des Grundcapitals	1,535	« 80	«

4. *Die Zahl der Mitglieder der Ungarischen Akademie der Wissenschaften* betrug zu Ende des Jahres 1898 insgesammt 231. Von diesen waren 18 Ehrenmitglieder, 56 ordentliche, 134 correspondierende Mitglieder.

Der Directionsrath bestand aus 24 Mitgliedern.

Auf die einzelnen Classen vertheilen sich die Mitglieder wie folgt:

Die I. (sprach- und schönwissenschaftliche) Classe hatte 6 Ehren-, 11 ordentliche und 32 correspondierende Mitglieder.

Die II. (philosophisch-historische) Classe hatte 7 Ehren-, 22 ordentliche und 36 correspondierende Mitglieder.

Die III. (mathematisch-naturwissenschaftliche) Classe zählte 7 Ehren-, 20 ordentliche und 30 correspondierende Mitglieder.

5. *Bibliothek.* Die Anzahl der geordneten Fachwissenschaften war 53, welche 54,784 katalogisierte Werke enthalten.

Darunter: Anthropologie 303, Naturwissenschaft 157, Physik 908, Chemie 415, Mathematik und Astronomie 1085, Naturgeschichte 128, Zoologie 490, Botanik 318, Mineralogie 501, Medicin, Anatomie, Physiologie 2479.

Der grosse Zettelkatalog besteht gegenwärtig aus 57,688 Zetteln.

Um die Zeitschriften und in Fortsetzungen erscheinenden Werke in Evidenz zu halten wird ein besonderer Zettelkatalog geführt.

Der Fachkatalog besteht aus 102 Bänden und 48 Zettelkapseln.

Die Zunahme der Bibliothek im Jahre 1897:

a) Durch Kauf	440	Werke
b) Durch Tauschverkehr mit auswärtigen Akademien	580	«
c) Geschenke von Privatpersonen	146	«
d) Pflichtexemplare von 38 Druckereien	930	«
e) Eigene Ausgaben	28	«
Summe der gesammten Zunahme	2124	Werke.

Ausserdem 160 Schulprogramme, 58 ungarische und 112 ausländische Zeitschriften.

Im Lesesaal der Bibliothek benützten 6811 Personen 9085 Werke, während 1063 Werke ausgeliehen waren.

Die Preisausschreibungen der III. Mathem.-Naturw. Classe.

a) *Neue Preise:*

Aus der Andreas Fáy-Stiftung der Pester ersten vaterländischen Sparkassa. Gegenstand: Welche Rolle spielen die Wasserstrassen in der Reihe der Verkehrswege, mit besonderer Rücksicht auf unsere vaterländischen Verhältnisse. Preis 300 Gulden. Termin 30. Sept. 1900.

b) *Wiederholt ausgeschriebene Preise:*

Lévay-Stiftung. Gegenstand: Verhältniss des in der Forstwirthschaft Ungarns liegenden Capitals und der danach gewonnenen Zinsen. Preis 1000 Gulden. Termin 30. September 1898. — Vitéz-Stiftung. Gegenstand: Beschreibung einer heimatlichen Thiergruppe auf Grund selbstständiger Untersuchungen. Preis 40 Dukaten. Termin 30. September 1898.

Die Editionen der Akademie im Jahre 1897 betrugen 36 Werke in 921 Bogen. Von diesen sind mathematische und naturwissenschaftliche Werke die Folgenden: Mathem. und naturwiss. Anzeiger, redigiert von Dr. Julius König. Band XV. — Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos introducendi von Volfgangus Bolyai de Bolya. Herausgegeben von Julius König und Mauritius Réthy. — Der Wasserstand unserer Flüsse und die Niederschläge von Jakob Hegyfoki.

Die Akademie hat im Jahre 1897 folgende Vermächtnisse erhalten: von Hypolit Fehér, Erzabt zu Martinsberg 1000 Gulden, von Anton Gyürky 25 Gulden, von Karl Pászthory 500 Gulden, von Ladislaus Rhédey 67 Gulden, von Andreas Mechwart 3000 Gulden, von Theodor Duka 1000 Gulden, von einem Unbekannten 1000 Gulden, von Vargha-Jekelfalussy 500 Gulden.

*

II. Königliche Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft.

Jahresversammlung den 27. Januar 1898.

1. Der Präsident eröffnet die Sitzung und legt die Tagesordnung der Generalversammlung vor. Der erste Secretär Prof. *Joseph Paszlavszky* erstattet den Bericht über den Rücktritt der Präsidenten und einiger Ausschussmitglieder und liest den Brief des Präsidenten *Coloman von Szily* vor, in welchem er den Ausschuss bittet, ihn in die Reihe der als Präsidenten Vorgeschlagenen nicht aufzunehmen, da er schon seit achtzehn Jahren als Präsident gewirkt hat, und es für die Gesellschaft nicht für vortheilhaft hält, wenn die Leitung zu lange in denselben Händen sich befindet.

2. Prof. *Paszlavszky*, erster Secretär, liest hierauf seinen Bericht über die Thätigkeit der Gesellschaft im Jahre 1897. Er berichtet über die zu Gunsten des in Neu-Guinea weilenden ungarischen Naturforschers *Ludwig Biró* veranstaltete Landessammlung, welche in wenigen Monaten 3600 Gulden zusammengebracht hat.

Eine Auszeichnung erfuhr die Gesellschaft im vorigen Jahre durch ihren Protektor Sr. königl. Hoheit dem *Erzherzog Joseph*, da er seine interessanten Beobachtungen über ein Gewitter für unser Journal einsandte. Als eine Anerkennung können wir noch jenes Schreiben des Ministers für Bodencultur erwähnen, in welchem er die Kön. Naturwissenschaftliche Gesellschaft mit der Ausgabe des Werkes «Natürliche Nahrung der Fische in den Seen Ungarns» von *Dr. Eugen Daday* betraut.

Auf die inneren Angelegenheiten der Gesellschaft übergehend, erwähnt der Secretär die öffentlichen Vorträge von *Dr. Otto Pertik* über das Wesen, Leben und Eigenschaften der Bakterien und von Prof. *Dr. Eugen Klupathy* über die elektrischen Wellen, welchen eine gewählte Zuhörerschaft beiwohnte. Die einzelnen Fachsectionen hielten zusammen 108 Vorträge, und zwar: die zoologische über 31, die biologische über 17, die botanische über 38 und die mineralogisch-chemische über 22 Gegenstände.

Die botanische Section arbeitet an einem allgemeinen botanischen Fachwörterbuche. Von der zoologischen Section ist der Gedanke eines eigenen ungarischen Naturhistorischen Museums ausgegangen. Hier wurde auch die Angelegenheit von Beobachtungsstationen an süssen Gewässern und am Meere besprochen.

Eine bedeutende Thätigkeit kann die Gesellschaft auch in der Verbreitung der Naturwissenschaften aufweisen. Vor Allem sind ihre Editionen zu erwähnen. In ihrer Ausgabe sind in diesem Jahre erschienen: «Der Luftdruck in Ungarn» von *Sigmund Róna*, «Der Organismus der Craspedomondinæ» von *Rudolf Francé* und das schon erwähnte Werk von *Eugen Daday*. Als Beilagen der Chemischen Zeitschrift erschienen: «Die Elemente der quantitativen chemischen Analyse» von *Béla* von *Lengyel* und

«Die Elemente der gerichtlichen Chemie» von *Emil Felletár* und *Joseph Jahn.* Noch mehr Erfolg als diese hatten die populären Ausgaben, die 1800 Subscribenten aufweisen können. Von diesen sind erschienen: «Das Handbuch der praktischen Photographie» von *F. Schmidt* und als Uebersetzung «Das Leben des Meeres» von *C. Keller.*

Von dem Organ der Gesellschaft «Naturwissenschaftliche Zeitschrift» ist der XXIX. Band in 7800 Exemplaren erschienen. Dessen Supplement in 3700 Exemplaren. Ausserdem hat die Gesellschaft noch ein Fachorgan: die «Chemische Zeitschrift».

Trotzdem die materielle Kraft der Gesellschaft im Verhältniss zu ihren vielseitigen Aufgaben sehr beschränkt ist, hat sie doch auch andere ausser ihrem Wirkungskreis stehende naturwissenschaftliche Unternehmungen unterstützt. So das «Ornithologische Centrum für Ungarn» und die «Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn».

Von den Mitgliedern sind im vorigen Jahre 99 verstorben, unter ihnen: Prof. *Ludwig Jurányi, Michael Gschwindt, Samuel Brassai, Franz Pulszky, Gustav Kondor* und *Joseph Kovács.*

Gewählt wurden 758 neue Mitglieder, so dass die Zahl der Mitglieder sich auf 7905 vermehrte, von denen 230 gründende Mitglieder sind.

Cassastand der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Ende des Jahres 1897.

Einnahmen.

Übertrag von 1896	129,168	fl.	27 kr.
Einnahmen des Stammcapitals	3800	«	— «
« « Betriebscapitals	37,431	«	61 «
« « Explorationsfondes	11,046	«	98 «
« « Büchereditions-Unternehmens	19,652	«	71 «
« « der Chemischen Zeitschrift	3678	«	25 «

Ausgaben.

Ausgaben des Stammcapitals	269	fl.	53 kr.
« « Betriebscapitals	38,782	«	94 «
« « Explorationsfondes	6986	«	06 «
« « Büchereditions-Unternehmens	17,802	«	75 «
« « der Chemischen Zeitschrift	4274	«	47 «

Bureau und dirigierender Ausschuss der Königl. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft für das Jahr 1897.

Präsident: *Coloman von Szily.*
Vicepräsident: Baron *Roland Eötvös* und *Andreas Högyes.*
Erster Secretär: *Joseph Paszlavszky.*
Zweite Secretäre: *Ladislaus Csopey* und *Gustav Melczer.*

Ausschuss-Mitglieder:

Für Zoologie: *Cornelius Chyzer, Eugen Daday, Géza Entz, Otto Herman, Géza Horváth* und *Julius Madarász.*

Für Mineralogie und Chemie: *Anton Koch, Joseph Krenner, Ludwig Lóczy, Julius Pethő, Alexander Schmidt* und *Andreas Semsey.*

Für Chemie: *Joseph Fodor, Ludwig Ilosvay, Alexander Kalecsinszky, Béla* von *Lengyel, Stephan Schenek* und *Carl von Than.*

Für Physiologie: *Stephan Csapodi, Ferdinand Klug, Carl Laufenauer, Géza Mihálkovics, Otto Pertik* und *Ludwig Thanhoffer.*

Für Botanik: *Albert Bedő, Vincenz Borbás, Julius Klein, Alexander Mágócsy-Dietz, Carl Schilberszky* und *Moritz Staub.*

Für Physik: *Isidor Fröhlich, August Heller, Rudolph Kövesligethy, Alois Schuller, Vincenz Wartha* und *Franz Wittmann.*

Zur Erinnerung an Friedrich Hazslinszky.

Von *Alexander Mágócsy-Dietz,* corr. Mitgl. der Ung. Akademie.

Vorgelesen in der botanischen Fachconferenz der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft am 8. Februar 1899.

Indem ich mich mit dem Leben, den Bestrebungen und der Wirksamkeit eines Mannes befasse, der im Vaterlande hochgeachtet und in den Fachkreisen des Auslandes nicht weniger bekannt war, muss ich nebst der Anerkennung auch deshalb mein Interesse ihm zuwenden, da ein jeder Moment seines Lebens das Gefühl der Sympathie in uns erweckt. Unsere Gefühle werden aber nur verstärkt, wenn wir seinen Lebenslauf näher betrachten. Im engsten Sinne des Wortes kämpfte er sich selbst zur Stelle empor, die er einnahm und durch die er in der wissenschaftlichen Geschichte unseres Vaterlandes sich für ewig einen Platz erworben hat. Seine über ein halbes Jahrhundert währende Thätigkeit ist ein reiches Feld von Thatsachen, welche durch ihre Erfolge geeignet sind, uns zur Anspornung und zur Lehre zu dienen.

Friedrich August Hazslinszky war ein Sprosse des alten protestantischen adeligen Geschlechtes der Soltész, früher Keve, das zur Zeit der Protestantenverfolgung seine Heimat verliess und statt dem alten Namen von seinem Stammorte *Hazslin* den Namen *Hazslinszky* annahm.

Nach vielen Widerwärtigkeiten kehrte die Familie ins Vaterland zurück. Der Vater unseres Gelehrten liess sich Anfangs dieses Jahrhunderts in Késmárk als Gewerbetreibender nieder; er wurde aber auch wegen seiner das gewöhnliche Maass überschreitenden Bildung vom

Stadtrath mit dem Zeichenunterricht betraut. Seine Mutter, Susanne Kuchta, wurde durch die Zipser Familie Badányi erzogen. Der Sohn dieser Eltern war Friedrich August, der am 6. Juni 1818 geboren wurde; ausser ihm bestand die Familie noch aus drei Knaben und vier Mädchen. Die Sprache der Familie war deutsch, doch nicht der Késmárker Dialekt; ihr Leben durchdrang ein christlicher Geist, der durch Beten, Singen und an Festtagen durch Lesen der heiligen Schrift zum Ausdrucke kam. Da die Eltern ihre Kinder von den Kameraden absonderten, mussten sich diese im Hause eine Beschäftigung suchen. Friedrichs erste Beschäftigung war das Zeichnen und das Modellieren. Als ihn seine Eltern im achten Jahre in die Normalschule einschreiben liessen, hatte er schon mehr alt hundert Zeichnungen beisammen und konnte schon lesen, was er sich durch das ursprünglich unbewusste Copieren der Bildertitel aneignete. Später schnitt er in Schieferstein flache Muster zum Giessen von Zinngegenständen. Noch als Elementarschüler lernte er Klavierspielen.

In der ersten Classe der lateinischen Schule vernachlässigte er das Zeichnen nicht; seine Fertigkeit darin war so gross, dass er den Unterricht Älterer auf sich nehmen konnte. Damals lernte er wahrscheinlich auch ungarisch. Er hatte für Blumen eine grosse Vorliebe und war am glücklichsten, wenn er in den Wald gehen durfte, wo er sich die schönsten Blumen auswählte und sie in Büchern trocknete.

Später (1833) gab er das Zeichnen auf und nahm an der Pflege des kleinen Hausgartens Theil, wo er den Tátrablumen einen besonderen Platz einräumte, obwohl er ihre Namen nicht kannte. Zu dieser Zeit hörte er auch zum ersten Mal, dass es eine Pflanzenlehre gäbe und Bücher, die von den Blumen handeln. Durch den Hausarzt kam das erste botanische Buch: *P. A. Matthioli commentarii in VI libros P. Dioscoridis*, in seine Hand. Von den oberen Classen des Gymnasiums absolvierte er ein Jahr in Debreczin, die beiden anderen in Késmárk. Zu dieser Zeit befasste er sich noch mehr mit den Pflanzen und war besonders bestrebt, die gesammelten Pflanzen zu bestimmen. Von Debreczin zurückkehrend kam endlich die *Wildenow*'sche allgemeine Botanik in seine Hände und durch die Güte der Késmárker Pharmaceuten auch einige elementare Lehrbücher; durch das Studieren dieser Bücher erwarb er sich so viel Kenntnisse, dass er mit Hilfe des nach dem *Linné*'schen System verfassten Buches die Pflanzen bestimmen konnte.

In der rhetorischen Classe des Gymnasiums interessierte ihn hauptsächlich die Litteratur und die Poetik, seine Gelegenheitsgedichte trugen ihm sogar Geld ein, von dem er sich sogleich die *Schultes*'sche Botanik kaufte. Damals ward die Richtung seiner Studien vor seinen Professoren bekannt und man war ihm von vielen Seiten mit botanischen Werken behilflich. Aus dieser Zeit stammt auch sein aus nahezu 800 Blüthenpflanzenarten bestehendes Herbarium, welches später in Besitz des Ungvárer Gymnasiums kam, heute aber nicht mehr existiert.

Die philosophischen Classen des Gymnasiums absolvierte *Hazslinszky* 1837—38 in Késmárk und da die Studien nicht seine ganze Zeit in Anspruch nahmen, gab er nebenbei Privatunterricht; er vernachlässigte aber auch seine botanischen Studien nicht, sondern befasste sich sogar mit dem Studium der Kryptogamen, die er mit einem primitiven Mikroskope untersuchte. Neben der Botanik interessierte er sich auch für Krystallographie und verfertigte während eines Winters 254 Krystallmodelle. Seine Ausflüge erstreckten sich auf die ganze Zips und auf das angrenzende Sároser Comitat, wo er 1838 die Opalgruben aufsuchte; besonders viel besuchte er die Tátra, deren Flora er auf Grund des *Wahlenberg*'schen Buches studierte. Durch seine kühnen Wanderungen in der Tátra gerieth er sogar einmal in Lebensgefahr, woraus ihn bloss der Zufall rettete.

Zu dieser Zeit fasste er seine Pflanzenexemplare in eine neue Sammlung zusammen, in welcher eine jede Pflanze auf einem besonderen Bogen mit Papierstreifen befestigt war. Später begann er jedoch eine dritte Sammlung anzulegen, in welcher die einzelnen Arten zwischen Fliesspapier frei lagen.

In diesen Jahren begann er auch seine litterarische Thätigkeit; er verfasste auf Grund seiner zahlreichen Erfahrungen ein «Topographie des Zipser Comitates» betiteltes Buch. Von Késmárk gieng er 1838 als Erzieher der Söhne der Familie Karsa nach Sárospatak, um dort Jus zu studieren. Er vernachlässigte aber dabei auch die Botanik nicht und verfasste unter dem Titel «Das Linnéisch-Houttuyn'sche Pflanzensystem. Compendium floræ universalis 1839» ein Handbuch der Pflanzenlehre.

Zwar studierte er Jurisprudenz mit grosser Lust, wie alles, mit dem er sich befasste, jedoch er beendigte dasselbe nicht und liess sich 1839 nach Késmárk zurückkehrend, als Theolog einschreiben. Er ward aber zur selben Zeit auch als supplierender Lehrer in den unteren Classen des Gymnasiums verwendet. Um diese letztere Pflicht erfüllen zu können, wurde er vom Besuch der Lehrstunden befreit und nur zum Ablegen der Prüfung verpflichtet.

In diese Periode seines Lebens fällt auch sein grösster Ausflug, der in den grossen Ferien des Jahres 1841 mehr als zwei Monate lang dauerte und mit Ausnahme Siebenbürgens sich so zu sagen auf ganz Ungarn erstreckte.

Im Schuljahre 1840/41 schrieb er sein erstes selbstständiges Buch: «Botanische Terminologie in Abrissen». In demselben Jahre ordnete er auch die aus mehr als 700 Exemplaren bestehende Genersich'sche Mineraliensammlung. 1842 schickte der Lehrkörper des Késmárker Lyceums den in den Naturwissenschaften, besonders aber in der Botanik bewanderten jungen Mann auf eigene Unkosten auf die Versammlung der Naturforscher und Aerzte nach Neusohl (Beszterczebánya).

Nach Beendigung des theologischen Curses bereitete er sich vor nach Debreczin zu gehen. Seine Mineraliensammlung und seine Bücher verkaufte er und aus dem erhaltenen Gelde bestritt er die Kosten der Debreczinei Reise. Nachdem er in seinen mineralogischen und botanischen Studien den Mangel der chemischen Kenntnisse fühlte, begann er hier Chemie zu studieren. Zu diesem Zwecke studierte er hauptsächlich mit Hilfe des Professors Csécsi die Chemie des Berzelius.

Die Botanik vernachlässigte er auch in Debreczin nicht; er arbeitete dort an zwei grösseren Werken. Er versuchte mit vieler Mühe die gesammte Pflanzenwelt in ein idealistisches System zusammen zu fassen. In Verbindung damit machte er sich an die Erweiterung und Verbesserung der ungarischen botanischen Terminologie.

Seine beiden Werke, nämlich das «Novum Systema vegetabilium», sowie die «Vorschläge betreffend die ungarische botanische Terminologie», wurden von der Temesvárer Versammlung der ungarischen Aerzte und Naturforscher beifällig aufgenommen, doch sind in seinem litterarischen Nachlass jetzt bloss kleine Fragmente daraus vorhanden. Er machte von Debreczin aus zahlreiche Ausflüge, deren einem die «Topographie des Árvaer Comitates» zu danken ist. Sein anstrengendes Arbeiten und die unregelmässige Lebensweise auf seinen Ausflügen verursachten im Herbst des Jahres 1842 eine Krankheit, die ihn längere Zeit ans Bett fesselte.

Nachdem er von seiner Krankheit genesen, setzte er seine Studien fort, jetzt verfügte er aber schon über ein Mikroskop, besser gesagt eine Nürnberger Lupe, mit welcher er die kleinen Pflanzen und Thiere untersuchte.

Nun genügte ihm aber Debreczin nicht mehr, er bereitet sich vor nach Wien zu kommen. Nachdem er seine Bücher wieder verkauft hatte, trat er im Herbst des Jahres 1843 mit wenig Geld, doch mit desto besseren Zeugnissen und Anempfehlungen die Reise nach Wien an. Um die Landesgrenze überschreiten zu können und den Unannehmlichkeiten, die den ungarischen Schriftstellern im Auslande zu Theil wurden, zu entgehen, erwarb er sich vor der Abreise das Gesellenzeugniss aus dem Sattler- und Radmacher-Handwerk. In Wien angekommen, wurde er von seinen Freunden und Gönnern mit Wohnung und Nahrung versehen und erhielt sogar auf ihre Empfehlungen Privatstunden. Da er zum Studium der Chemie nach Wien gekommen war, liess er sich am Polytechnikum immatriculieren und hörte dort die Vorträge von *Meissner*, *Pasqualati*, *Heszler*, *Schrötter* und *Strassnitzky*, doch legte er zu Ende des Herbstes nur aus allgemeiner und analytischer Chemie, und zwar mit Auszeichnung, Prüfung ab. Im Schuljahr 1844/45 arbeitete er bloss im chemischen Laboratorium und hörte die palæontologischen Vorträge von *Hauer*.

Von grossem Einfluss auf seine weiteren Fortschritte waren die botanischen Unterrichtsstunden, in welchen er die Gattin des zweiten Leibarztes des Kaisers und damaligen Universitätsrectors *Günther* in die Elemente der «Scientia amabilis» einführte, wodurch er nicht nur das Vertrauen und die Achtung der Familie, sondern auch Vertrauen in seine

Kenntnisse und ein sicheres Auftreten in der Gesellschaft erwarb. Dem ist es auch zuzuschreiben, dass er dem Ruf an die Felsőlövőer (Oberschützener) Schule nicht folgte, als aber die Direction des Lyceums seiner Vaterstadt Késmárk ihn aufforderte sich um die physikalische Lehrkanzel zu bewerben, nahm er an der Concurrenz Theil. Die Stelle wurde aber einem anderen gegeben und dies verbitterte sein empfindliches Gemüth derart, dass er bezweifelte, seinem Vaterlande je nützlich sein zu können. Er verbrannte seine Manuscripte zum grössten Theile, dass ihn kein Band mehr an seine Heimat fesseln möge; er nahm auch die an der Ofner Gewerbeschule ihm angebotene Professorenlehrkanzel nicht an und beschloss in Wien zu bleiben, wo seine botanischen Vorträge sich einer immer grösseren Beliebtheit erfreuten, da er seine Vorträge an möglichst vielen natürlichen Pflanzen zu demonstrieren verstand. Er machte auch zahlreiche Ausflüge in die Umgebung Wiens.

Seine Verhältnisse besserten sich in Wien mehr und mehr, seine gesellschaftlichen und wissenschaftlichen Verbindungen nahmen auch beträchtlich zu, und er war nahe daran, sich an der Universität eine Docentur der Pflanzenphysiologie zu erwerben. Er hatte sich seinem Vaterlande schon nahezu ganz entfremdet, als die in Wien verweilenden Ungaren zu Ende des Jahres 1845 sein patriotisches Gefühl erweckten; er folgte der durch Franz Pulszky veranlassten Einladung und machte sich im Januar 1846 auf die Reise, um an dem Eperjeser Collegium seine Stelle als öffentlicher, ordentlicher Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften anzunehmen.

Hiemit endet die erste Periode des Lebens *Hazslinszky*'s. Diesen mit unermüdlichen Kämpfen erfüllten Jahren folgen Jahre stiller Ruhe; aber diese Ruhe ist nur scheinbar, da seine Thätigkeit desto fieberhafter war und allen äusserlichen Erfolg und Aufsehen mied. Diese Periode wird von zwei parallel laufenden Thätigkeiten erfüllt: die seinem Beruf entsprechende Wirksamkeit, und die Verwirklichung des Ideals seiner Kinder- und Jugendzeit: die wissenschaftliche Wirksamkeit.

Nachdem er seine Lehrkanzel eingenommen und sich materiell unabhängig gemacht hatte, betrachtete er es als seine erste Pflicht, mit der Pflanzenwelt der Umgebung bekannt zu werden und aus dieser eine Sammlung anzulegen. Der 1846-er Versammlung der ungarischen Aerzte und Naturforscher zu Eperjes legt er schon seine aus 376 Arten bestehende, in der Nähe von Eperjes gesammelte Pflanzensammlung vor.

Zu dieser Zeit erhält er das von seinen Wiener Freunden und Verehrern ihm als ein Angedenken der schönen Wiener Tage geschenkte Plössl'sche Mikroskop, das bis an das Ende seines Lebens das Werkzeug seiner unermüdlichen Arbeiten war. Die botanischen Forschungen erstreckten sich zu jener Zeit auf die kleineren Pilze; es ist also nichts natürlicher, als dass auch *Hazslinszky* mit grossem Eifer diese kleinen Pilze, insbesondere die Sphærien zu studieren begann. Doch als autodidaktischem

Anfänger gelingt es ihm nicht, mit den zahlreichen Entwicklungsarten ins Reine zu kommen und zum Schluss verliert er dazu auch die Lust. Er wendet sich von der Botanik ab und lebt theilweise seinem Professorenberuf, theilweise dem Studium anderer Zweige der Naturwissenschaften.

Als Professor sorgt er vor Allem für Lehrbücher und schreibt zuerst eine Mineralogie, dann eine Chemie, eine Geologie und endlich eine Botanik.

Unter der Wirkung des Wiener Aufenthaltes, besonders der Vorträge *Hauer*'s, begann er sich mit Geologie zu beschäftigen, erst als Sammler und Berichterstatter des Wiener geologischen Institutes, dann auch als selbstständiger Forscher. Doch seine alte Vorliebe kehrt wieder zurück; er beginnt wieder sich mit Botanik zu befassen.

Vor Allem arbeitet er die Erfolge der Sammlungen seiner Jugend auf und veröffentlicht sie unter dem Titel «Beiträge zur Kenntniss der Karpathenflora», in welchem Werke er seine Darstellung auch auf die Kryptogamen ausdehnt. Er beginnt nun auch die Verwirklichung der Pläne und Träume seiner Jugendzeit: das Aufarbeiten der gesammten ungarischen Flora, was seiner ausdauernden Thätigkeit, wenn auch mit mehrfacher Unterbrechung, schliesslich gelingt. Zur Anfeuerung seiner Schüler schreibt er 1864 «Éjszaki Magyarhon viránya» (Die Pflanzenwelt Nordungarns), 1872 «Magyarhon edényes növényeinek füvészeti kézikönyve» (Botanisches Handbuch der Gefässpflanzen Ungarns), wodurch er hauptsächlich für die Jugend ein Hilfsmittel zu schaffen bestrebt war.

Später beschreibt er die ungarischen Arten der kryptogamen Pflanzengruppen in seinen zusammenfassenden Werken und veröffentlicht seine zahlreichen kleineren und neueren Untersuchungen. 1867 erscheint sein «Magyarország s társországai moszatviránya» (Die Algenflora Ungarns und seiner Nebenländer) betiteltes Werk, welches er 1868 aus dem Nachlasse Alexander Márkus's mit der «Algenflora der Umgebung von Neusohl» ergänzt.

Nach den Algen kommt an die Flechten die Reihe und 1870 erscheint sein Werk: «Adatok Magyarhon zuzmóvirányához» (Beiträge zur Flechtenflora Ungarns), denen 1884 als zweites «A magyar birodalom zuzmóflorája» (Die Flechtenflora des ungarischen Reiches) folgt.

Mit der Verbreitung der Moose in Ungarn befasst er sich in mehreren Abhandlungen, bis er endlich seine hierauf bezüglichen Forschungen unter dem Titel: «A magyar birodalom mohflorája» (Die Moosflora des ungarischen Reiches) zusammenfasst.

Hierauf kommt auch an die Pilze die Reihe, mit denen er sich von jeher mit so viel Vorliebe befasste und die den grössten Theil seiner wissenschaftlichen Thätigkeit bilden. Schon 1864 veröffentlichte er die erste hierauf bezügliche kleine Abhandlung, der erst kleinere, dann aber grössere zusammenfassende Werke folgten.

In seiner botanischen Thätigkeit lässt er auch die geographische

Verbreitung der Pflanzen in Ungarn und deren Ursachen nicht ausser Acht. Ihm ist die Erkenntniss dessen zu verdanken, dass die östlichen Hochgebirgswiesen Ungarns ärmer sind, als die westlichen, und dass alle Pflanzenarten, die Pilze nicht ausgenommen, von Osten nach Westen wandern. Im Jahre 1890 versucht er, die Gebiete der Verbreitung der Blattpilze in Ungarn zu bestimmen.

In seinen Forschungen und Mittheilungen gab er sich nicht mit der einfachen Erkenntniss und Mittheilung der Arten zufrieden, sondern theilte auch ihre Diagnose mit, um sie dem pflanzenliebenden Publikum zugänglich zu machen. In der Auffassung der Art ist er ein Jünger der alten, conservativen Schule; neue Arten stellt er nur nach eingehender Untersuchung und Studium auf; er giebt sich nicht mit den morphologischen Eigenschaften der Art zufrieden, sondern hält auch die Untersuchung ihrer Entwicklung für nothwendig. Die kleineren morphologischen Veränderungen, welche die auf die Pflanze einwirkenden Factoren hervorrufen, nimmt er in den erweiterten Begriff der Art auf, und nur wenn die Veränderungen bedeutender und beständig sind, stellt er neue Arten auf. Das ist die Ursache dessen, dass wir trotz seiner zahlreichen Forschungen ihm verhältnissmässig so wenig neue Arten zu verdanken haben.

Es genügte ihm aber nicht das blosse Aufzählen und die Diagnose der Arten; er strebte Höheres zu erreichen: er befasste sich mit dem Gedanken, die Pflanzen in ein möglichst natürliches System zu ordnen. 1843 machte er in Debreczin den ersten hierauf bezüglichen Versuch, später erstrebte er dasselbe mit den Flechten und den Discomycetes, wodurch er weit über die Floristen unter den Botanikern hervorragt.

Die Zahl seiner sich auf ein halbes Jahrhundert erstreckenden litterarischen Arbeiten ist mehr als hundert. Seine Mittheilungen werden dadurch interessant, dass er nahezu alle beschriebenen Pflanzen entweder selbst sammelte, oder wenigstens persönlich untersuchte, wodurch er vielen Irrthümern auswich und weshalb seine Arbeiten durchaus verlässlich sind. Auf seinen zahlreichen Ausflügen sammelte er, besonders im Anfang, nicht nur Pflanzen, sondern auch Mineralien, Gesteine, Thiere, später ausschliesslich Pflanzen, endlich bloss Pilze. Durch sein mehr als halbhundertjähriges Sammeln schuf er sich eine beträchtliche Sammlung, aus welcher die zoologischen und mineralogischen Gegenstände in die Sammlungen des Eperjeser Collegiums, die Gesteine in das ungarische königliche geologische Institut gelangten. Seine Phanerogam- und Gefässkryptogamensammlung, die aus etwa 1200 Species besteht, erhielt das Nationalmuseum, sammt seiner Algen-, Flechten- und Pilzsammlung; die zweiten Exemplare der letzteren schenkte er dem botanischen Institute der Universität. Derartige Geschenke machte er auch den Sammlungen verschiedener Schulen Ungarns.

So weit ist das Feld, auf welchem sich seine wissenschaftliche

Wirksamkeit bewegte; und dabei brachte er den grösseren Theil seines Lebens seiner Thätigkeit als Professor und Beamter des Collegiums zu: er war ja nicht nur mit Leib und Seele Professor, sondern auch ein beseelter Anhänger des alten protestantischen Collegiums. Besonders als Rector und als Cassier erwarb er sich um den Fortbestand des Collegiums unvergängliche Verdienste.

Im Vortrage zeigte sich *Hazslinszky* immer als begeisterter Naturforscher; er war bestrebt, seine Schüler dem Guten, dem Schönen und dem Wahren zu gewinnen; darum legte er auch nicht auf die Menge des Stoffes Gewicht, sondern auf die Entwicklung des Urtheils, des Denkens und die Veredlung der Gefühle seiner Schüler. In seinem wirklichen Elemente fühlte er sich dann, wenn er seine Schüler in der freien Natur belehren konnte.

Der zweite Abschnitt seines Lebens verlief still in scheinbarer Ruhe. Als Jüngling arbeitete er mit überschäumendem Lebensmuth, als Mann ruhiger, doch desto intensiver, bis er endlich als Greis von dem fieberhaften Wirken allmählig ablässt und in ihm bloss die Liebe zur Arbeit, zur Pflichterfüllung und zu den Naturwissenschaften zurückbleibt, die mit ihm am 19. November 1896 auch in das andere Leben hinübergeht.

Die zweite Periode seines Lebens war eben so erfolgreich, wie die erste. Mit schönen Anlagen, guter Gesundheit und dem Vortheil einer sorgfältigen Erziehung tritt er auf seine Bahn; die Beweise seiner Fähigkeiten liefern seine Schulzeugnisse; seine sämmtlichen Zeugnisse sind vorzüglich, von der Elementarschule, bis zum Polytechnikum. Besonders sein Gedächtniss war staunenswerth bis zum Greisenalter und nur in den letzten 3—4 Jahren wurde es schwächer.

Sein Leben ist sozusagen eine Kette unaufhörlicher Arbeit. Er suchte niemals Zerstreuung. Seine einzige Unterhaltung war sein Gärtchen, doch rastete er auch hier nicht; er hegte und pflegte seine lieben Pflanzen und verfolgte ihre Entwicklung mit steter Aufmerksamkeit. Sein Garten war auch kein gewöhnlicher kleinstädtischer Garten, sondern eine Sammlung von beobachtenswerthen Pflanzen, die er sich aus dem Freien oder aus Pflanzengärten verschaffte. Ausser seiner längeren Krankheit in Debreczin war er nie ernstlich krank.

In seinem Gemüth herrschten Religiösität und Hang zur Poesie. Einer seiner schönsten Züge ist seine grosse Vaterlandsliebe. Diese trieb ihn die Wissenschaft seines Vaterlandes mit allen Kräften, mit der ganzen Fülle seiner Fähigkeiten zu fördern und die «unüberwindbare Gleichgültigkeit, welche die ungarische Gelehrtenwelt damals umgab, zu bekämpfen», — wie er sich in einem an den Professor Ludwig Jurányi gerichteten Brief ausdrückt.

Diese Vaterlandsliebe drängte ihn zur Uebertragung der wissenschaftlichen Terminologie in die ungarische Sprache. Hierinnen konnten jedoch seine Bemühungen nicht von Erfolg gekrönt werden, da er nicht von ungarischen Eltern stammte, und auch keine ungarische Erziehung genossen hatte, wodurch er es nie zu einem richtigen ungarischen Sprachgefühl bringen konnte. Einzelne von ihm herrührende Bildungen wurden jedoch von der ungarischen Sprache angenommen und sind auch noch heutzutage gebräuchlich. Seine Vaterlandsliebe drückt auch ihm im 1848-er Freiheitskampfe die Waffe in die Hand. Bald wird er aber des aufregenden Krieges müde und sucht nach dem Kaschauer Gefecht am stillen Familienherd Ruhe.

Wie ruhig und still auch seine Wirksamkeit war, hatte sie doch den ihr gebührenden Erfolg: durch seine Lehrthätigkeit in der grossen Schaar seiner Schüler, durch seine Werke über die ungarische Flora aber im Kreise der Fachgelehrten seines Vaterlandes sowohl als auch des Auslandes. Sein Name war im Auslande wohlbekannt und er stand mit einer grossen Zahl ausländischer Gelehrten in Correspondenz.

Diesen Erfolgen hatte er auch die Anerkennnug zu verdanken, die ihm von Seite einzelner und von Gesellschaften zu Theil ward. Er war ordentliche Mitglied der ungarischen Akademie der Wissenschaften. Die Naturwissenschaftliche Gesellschaft, deren Mitglied er seit 1846 war, wählte ihn 1886 zum Ehrenmitglied.

Wenn wir die Erfolge der Thätigkeit *Hazslinszky*'s überblicken, müssen wir anerkennen, dass er der erste war, der die Kryptogamen-Pflanzenwelt Ungarns beschrieb; ausser *Kitaibel* that er das meiste für die Erkenntniss und die Bekanntmachung der ungarischen Flora. Auch ihm geziemt die Grabschrift:

«Gaude Hungaria, qui talem tulisti.»

BUCHBESPRECHUNG.

(In diesem Abschnitte bringen wir die Besprechung von in den letzten Jahren erschienenen mathematisch-naturwissenschaftlichen Werken ungarischer Autoren.)

Wolfgang Bolyai und Carl Friedrich Gauss' Briefwechsel. *Im Auftrage der ungarischen Akademie herausgegeben, mit Anmerkungen und biographischen Daten versehen von Franz Schmidt und Paul Stäckel. Budapest, herausgegeben von der ungarischen Akademie 1899.* (Bolyai Farkas és Gauss Frigyes Károly levelezése. Budapest. Kiadja a Magy. Tud. Akadémia 1899.)

Die Originale der hier veröffentlichten Briefe von Gauss und Bolyai befinden sich gegenwärtig im Besitze der königl. Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Kurze Zeit nach Gauss Tode erwarb der Staat seinen schriftlichen Nachlass und überliess denselben der Akademie zur Herausgabe. In diesem Nachlasse befanden sich auch die Briefe Bolyai's an Gauss, während die von Gauss an Bolyai gerichteten Briefe von Letzterem am 13. Juli 1856 an Professor Sartorius von Waltershausen gesendet wurden, welcher dieselben dem Gauss'schen Nachlasse einverleibte. Aus den Briefen von Gauss an Bolyai hat Schering einige Bruchstücke veröffentlicht, vollständig erscheint der Briefwechsel erst mit diesem Buche. Die Briefe wurden unverkürzt, ohne irgend welche Auslassungen wiedergegeben, so dass sie auf Bolyai's Leben bezügliche einige intimere Stellen enthalten. Nach so langer Zeit konnte dies ruhig geschehen, umsomehr als diese Verhältnisse längst in den über Bolyai veröffentlichten Biographien mitgetheilt worden sind. Zudem sind diese Briefe so charakteristisch für die ganze Persönlichkeit Wolfgang Bolyai's, dass schon aus diesem Grunde Auslassungen nicht am Platze gewesen wären.

Die mitgetheilten Briefe enthalten fast den ganzen Briefwechsel der beiden Gelehrten. Es fehlen bloss diejenigen, welche Bolyai nicht zurücksandte, da sie als» blos commissionell nichts interessantes enthalten». Der erste Brief ist von Gauss an Bolyai gerichtet am 29. Sept. 1797, der letzte von Bolyai am 6. Februar 1853. Im Ganzen sind es 42 Briefe, von denen Bolyai 24, Gauss 18 geschrieben hat.

Die Briefe bieten höchst werthvolle Daten und Anschauungen bezüglich der innersten Charakter- und Gemüthseigenschaften jener beiden

Männer, von denen der eine der Fürst der Mathematiker genannt wurde, und dessen congenialer Freund, welcher ähnliche Fähigkeiten besass als jener, theils durch sein eigenthümliches, zu Extremen geneigtes Wesen, theils sein unbeständiges Schwanken zwischen Poesie und Mathematik, seine Neigung sich mit verschiedenen technischen Arbeiten zu befassen, verhindert wurde, jene Resultate auf dem Gebiete der Mathematik aufzuweisen, welche ihm bei einer stetigen Beschäftigung mit den Fragen, die er sich in seinen jungen Jahren als Vorwurf gesetzt hatte, nicht entgehen hätten können. Seinem gleich genialen Sohne Johann war es vorbehalten, das alte Problem der Parallelen zu lösen, welches Problem sein Vater sein ganzes Leben hindurch, jedoch fruchtlos zu lösen vorhatte.

Doch waren es auch andere Gründe, welche auf Wolfgang Bolyai's wissenschaftliche Thätigkeit von lähmender Wirkung waren. Zum grossen Theile seine höchst beklagenswerthen Familienverhältnisse und ausserdem die jeder Aneiferung und Anregung entbehrende Umgebung, sowie der Mangel jedes litterarischen Hilfsmittels, da er sich diese nur mit grossem Geldaufwande und selbst dann nur mit grossem Zeitverluste, ja mitunter selbst auch unter diesen Umständen nicht verschaffen konnte. Alles dies musste auf seine Studien und sein Arbeiten höchst ungünstig und lähmend wirken. So begreifen wir auch leicht den Ton, in welchem der arme Schulmeister von Marosvásárhely in seinen Briefen Gauss den anerkannten grossen und glücklichen Gelehrten in überschwänglichen Worten feiert, während Gauss niemals den Glauben an seines Freundes mathematisches Genie aufgiebt und in steter Erwartung ist, dessen bedeutende Untersuchungen und Arbeiten geniessen zu können.

Es ist in dieser Beziehung ein trauriges Bild, welches wir diesem Briefwechsel bezüglich der Lebensschicksale Bolyai's entnehmen. Unverstanden von seiner Umgebung, die in ihm zwar den grossen Gelehrten schätzt, ohne jedoch seine Bedeutung auch nur von Ferne ermessen zu können. Die ungarische Akademie wählt ihn schon im Jahre 1832 zu ihrem Mitgliede, aber niemand denkt daran, seine Arbeit zu unterstützen, während sie eines andern werthlose Rechenbücher herausgiebt. Allerdings ist es auch Bolyai's extravagantes Wesen, welches ihn von ernsten mathematischen Studien zurückhält. Eine zeitlang hält ihn die Poesie gefangen. Er schreibt eine Reihe dramatischer Werke, übersetzt Gedichte des von ihm so hochverehrten Schiller, wobei er jedoch mit dem Originaltext in sonderbarer Weise umspringt und der «Resignation» z. B. einen ganz anderen Schluss anfügt, als welchen das Original enthält. Dann beschäftigt er sich mit technischen Dingen, baut Oefen und einen von Innen aus zu bewegenden Wagen, mit dem er ohne Pferde im Lande umherfährt.

So verglimmt ein schönes und grosses Talent. Was er in seinem Tentamen und den andern erschienenen kleineren mathematischen Schriften giebt, ist unendlich wenig gegen das, was sein Freund geschaffen und gegen das, was er unter günstigen Verhältnissen schaffen hätte können.

Den Briefen von Bolyai und Gauss folgen einige Briefe, die sich auf die Schicksale derselben nach Gauss Tod beziehen. Der erste ist ein Schreiben des Direktors der meteorologischen Centralanstalt in Wien, Carl Kreil, mit dem Bolyai gelegentlich der erdmagnetischen Messungen im Jahre 1848 in Marosvásárhely bekannt worden war, an den nun Bolyai geschrieben hatte, da er in Göttingen keinerlei Bekanntschaft hatte, um einige Daten über Gauss' Leben zur Kenntniss derjenigen zu bringen, die davon Gebrauch machen konnten. Kreil schrieb in diesem Briefe, der an Sartorius von Waltershausen in Göttingen gerichtet ist, über Bolyai's Schreiben, dessen Inhalt, insofern er sich auf Gauss bezieht, mitgetheilt wird. Kreil's Brief ist vom 24. April 1855. In Folge dieses Schreibens hatte sich nun Sartorius von Waltershausen an Bolyai gewendet, um von ihm die Uebersendung der Gauss'schen Briefe zu bitten. Am 13. Juli 1856 sendete Bolyai dieselben in Begleitung eines Schreibens an Sartorius von Waltershausen, die er mit den Worten aus der Hand giebt: «Gehet denn. theure Reliquien, zu der Hand, die Euch schrieb.» Ausser den Briefen legte er auch einige Reliquien von Gauss aus der gemeinsam verlebten Jugendzeit bei, z. B. eine Schiefertafel, eine Carricatur Kestner's von Gauss' Hand gezeichnet u. A.

Es folgt nun ein Brief von Sartorius von Waltershausen vom 12. Aug. 1856 an Bolyai und dessen Antwort vom 26. desselben Monats und noch ein Brief von Sartorius von Waltershausen an Bolyai vom 26. Oktober 1856. Den Reigen der Briefe beschliesst der von Waltershausen vom 30. Dezember 1872 an den einen der Herausgeber des vorliegenden Briefwechsels, Herrn Franz Schmidt, in welchem er ihm über die in Göttingen bewahrten Briefe spricht.

Den Schluss des Bandes bilden die Anmerkungen der Herausgeber und ein ausgiebiges Register zum Buche. Der Band ist im selben Format und in derselben splendiden Ausführung herausgegeben, als der I. Band des Tentamen, der vor zwei Jahren erschienen ist.

AUGUST HELLER.

Druckfehler.

Auf Seite 60, Zeile 18 von oben ist zu lesen «*miocaenen*» an Stelle des unrichtigen «*oligocaenen*».

DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN.