ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, P. ERDŐS, L. FEJES TÓTH, L. KALMÁR, L. RÉDEI,
A. RÉNYI, B. SZ.-NAGY, K. TANDORI, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS XVI FASCICULI 1–2

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1965

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok rövid tartalmi kivonattal együtt a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, I., Fő utca 32. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind mit kurzer Zusammenfassung an folgende Adresse zu senden

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, P. ERDŐS, L. FEJES TÓTH, L. KALMÁR, L. RÉDEI,
A. RÉNYI, B. SZ.-NAGY, K. TANDORI, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS XVI

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1965

ACTA MATH. HUNG.

INDEX

TOMUS XVI

ACZÉL, J. and HOSSZÚ, M., Further uniqueness theorems for functional equations 51
ÁDÁM, A., Bemerkungen zum graphentheoretischen Satze von I. Fidrich 9
ALEXITS, G. und LEINDLER, L., Über die Approximation im starken Sinne 27
ALEXITS, G. und KRÁLIK, D., Über die Approximation mit starken de la Vallée—Poussinschen Mitteln 43
BALÁZS, J. and TURÁN, P., Notes on interpolation. IX 215
BEAUMONT, R. A. and PIERCE, R. S., Quasi-isomorphism of direct sums of cyclic groups 33
BOLLOBÁS, B., On generalized graphs 447
CONSTANTINESCU, F., La solution d'une équation fonctionnelle à l'aide de la théorie des distributions 211
CORNER, A. L. S., Three examples on hopficity in torsion-free abelian groups 303
ERDŐS, P., HAJNAL, A. and RADO, R., Partition relations for cardinal numbers 93
FEJES TÓTH, L., Distribution of points in the elliptic plane 437
Фидрих, Илона, О перенумерации графов 1
FLADT, K., Über eine rektifizierbare nichteuklidische Neilsche Parabel 197
FLADT, K., Einige Merkwürdigkeiten bei speziellen ebenen Kurven der hyperbolischen Geometrie 201
FOSTER, F. G. and PERERA, A. G. A. D., Queues with batch arrivals. II 275
HAJNAL, A., ERDŐS, P. and RADO, R., Partition relations for cardinal numbers 93
HILL, P. D. and MEGIBBEN, C. K., Quasi-closed primary groups 271
HOSSZÚ, M. and ACZÉL, J., Further uniqueness theorems for functional equations 51
IQBALUNNISA, Neutrality in weakly modular lattices 325
JANOWITZ, M. F., A characterisation of standard ideals 289
KAMTHAN, P. K., On the mean values of an entire function represented by Dirichlet series. II 89
Киш, О. и Сабадош, Й., Замечания о сходимости Лагранжева интерполирования .. 389
KRÁLIK, D. und ALEXITS, G., Über die Approximation mit starken de la Vallée-Poussinschen Mitteln 43
LÁNCZI, EDIT, Unique prime factorization in imaginary quadratic number fields 453
LEINDLER, L. und ALEXITS, G., Über die Approximation im starken Sinne 27
LEINDLER, L., Über die Approximation im starken Sinne 255
LEINDLER, L., Über die de la Vallée-Poussinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen 375
MAKAI, E., A lower estimation of the principal frequencies of simply connected membranes .. 319
MEGIBBEN, C. K. and HILL, P. D., Quasi-closed primary groups 271
MOLNÁR, J., Volumenabschätzung eines Polyeders in Räumen konstanter Krümmung 431
MOON, J. W., On extremal graphs containing no wheels 13
MOÓR, A., Untersuchungen über die oskulierenden Punkträume der metrischen Linienelementräume 57

NÖBAUER, W., Über die vollideale und Permutationspolynome eines Galoisfeldes 37
PERERA, A. G. A. D. and FOSTER, F. G., Queues with batch arrivals. II 275
PÉTER, RÓZSA, Über die sequenzielle Berechenbarkeit von rekursiven Wortfunktionen durch Kellerspeicher 231
PIERCE, R. S. and BEAUMONT, R. A., Quasi-isomorphism of direct sums of cyclic groups 33
RADO, R., ERDŐS, P. and HAJNAL, A., Partition relations for cardinal numbers 93
RÉDEI, L., Logische Dualität der Frobenius—Stickelbergerschen und Hajósschen Hauptsätze der Theorie der endlichen abelschen Gruppen 327
RÉDEI, L., Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajos 329
REID, J. D., On subcommutative rings 23
RÉVÉSZ, P., On a problem of Steinhaus 311
RÉVÉSZ, P., Some remarks on strongly multiplicative systems 441
SCHMIDT, E. T., Remark on a paper of M. F. Janowitz 435
SCHMIDT, J. W., Konvergenzbeschleunigung bei monotonen Vektorfolgen 221
STEINIG, J., A comparison of two inequalities for the triangle 19
Сабадош, Й. и Киш, О., Замечания о сходимости Лагранжева интерполирования 389
TAMÁSSY, L., Über autoparallele Flächen tensorial zusammenhängender Räume 75
TURÁN, P. and BALÁZS, J., Notes on interpolation. IX 215
VAN ROOIJ, A. C. M. and WILF, H. S., The interchange graph of a finite graph 263
WEINERT, H. J., Zur Erweiterung algebraischer Strukturen durch Rechtsquotientenbildung 213
WILF, H. S. and VAN ROOIJ, A. C. M., The interchange graph of a finite graph 263

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

Том. XVI—Вып. 1—2

РЕЗЮМЕ

О ПЕРЕНУМЕРАЦИИ ГРАФОВ

И. Фидрих (Будапешт)

В работе исследуются конечные направленные графы, под их перенумерацией подразумевается перенумерация их вершин.

Под допустимой перенумепацией некоторого графа $G=(X, U)$ мы понимаем такую его перенумерацию множеством $E=\{1, 2, \ldots, |X|\}$, для которой выполняются следующие условия:

1. Входные точки графа обладают наименьшими номерами.
2. Выходные точки графа обладают наибольшими номерами.
3. У графа нет дуг, показывающих от вершины большего номера к вершине меньшего номера.

Под почти допустимой перенумерацией некоторого графа $G=(X, U)$ мы понимаем такую его перенумерацию множеством $E=\{1, 2, \ldots, |X|\}$, для которой, кроме условий 1, 2, выполняется следующее условие:

3′. Число дуг графа, показывающих от вершины большего номера к вершине меньшего номера, не больше числа контуров графа.

Доказывается следующая теорема:

Любой конечный граф, не содержащий изолированных точек, может быть перенумерован почти допустимым образом.

В качестве частного случая этой теоремы получается следующее утверждение:

Любой конечный граф, не содержащий изолированных точек и контуров, может быть перенумерован допустимым образом.

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРЕМЕ О ГРАФАХ И. ФИДРИХА

А. Адам (Будапешт)

Доказывается следующая теорема: Если обозначить число всех циклов направленного графа через k, то в графе можно выбрать не более k ребер так, чтобы каждое из этих ребер было дополняемо до цикла и чтобы после обращения ориентации всех выбранных ребер граф стал бесцикловым. Эта теорема представляет собой по существу эквивалентный вариант теоремы, высказанной в предыдущей работе И. Фидрихом о перенумерациях графов. Доказательство теоремы основывается на индукции по числу ребер. В конце статьи автор выдвигает следующую гипотезу: В любом графе, содержащем хотя бы один цикл, найдется такое ребро e, что после обращения ориентации e, число циклов будет меньше, чем было первоначально.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ГРАФАХ БЕЗ КОЛЕС

Дж. В. Мун (Лондон, Великобритания)

Назовем некоторый граф колесом, если он состоит из одного круга и из дополнительной вершины, соединенной каждой вершиной круга. Обозначим через n и E число вершин, соответственно ребер, графа G. В работе исследуются максимальное и мини-

мальное числа ребер графов G, не содержащих колес в качестве подграфа, но в которых вчерчиванием любого нового ребра уже содержится колесо в G. В случае таких графов G для E выполняются следующие точные неравенства:

$$2n-3 \leqq E \leqq \left[\frac{n^2}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right].$$

Кроме этого, в работе характеризуются т. н. экстремальные графы, т. е. те графы, для которых на правой или левой стороне имеется равенство.

СОПОСТАВЛЕНИЕ ДВУХ НЕРАВЕНСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО ТРЕУГОЛЬНИКА

Й. Штейниг (Цюрих, Швейцария)

Любой неправильный треугольник может быть разрезан с помощью некоторой прямой линии на две части так, чтобы для точек одной части было точнее неравенство Эрдёша

$$R_1+R_2+R_3 \geqq 2(r_1+r_2+r_3),$$

а для точек другой части — неравенство Шреибера [3]

$$R_1+R_2+R_3 \geqq 6r.$$

(Для правильного треугольника они равносильны.) R_1, R_2, R_3 означают расстояния от вершин, а r_1, r_2, r_3 — расстояния от сторон до некоторой точки треугольника. r — радиус вписанного круга.

СУБКОММУТАТИВНЫЕ КОЛЬЦА

Дж. Д. Реид (Сиракуз, Нью-Йорк, США)

Ассоциативное кольцо A назовем субкоммутативным, если для заданных $a, b \in A$ существует $c \in A$, удовлетворяющий уравнению $ab=ca$. Субкоммутативные кольца, не содержащие нильпотентных элементов, представимы в виде суб-прямых сумм известных подколец тел, а в полупростом случае — в виде плотных суб-прямых сумм тел.

Автор построит пример субкоммутативного кольца эндоморфизмов, и этим дает отрицательный ответ на одну проблему Селе и Сендреи (см. [4], стр. 232).

О ПРИБЛИЖЕНИИ В СИЛЬНОМ СМЫСЛЕ

Дь. Алексич (Будапешт) и Л. Леиндлер (Сегед)

Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π; $s_n(x)$ — n-ая частичная сумма ряда Фурье, а $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{s}_n(x)$ — сопряженные функции $f(x)$ и $s_n(x)$, соответственно. Известно, что если $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, где $0<\alpha<1$, то для сумм

$$h_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}|f(x)-s_\nu(x)|, \qquad \tilde{h}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}|\tilde{f}(x)-\tilde{s}_\nu(x)|$$

имеют место оценки

$$h_n(x)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \tilde{h}_n(x)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Однако, существует функция $f \in \mathrm{Lip}\, 1$, для которой в некоторых точках

$$\tilde{h}_n(x) \geqq c\,\frac{\log n}{n} \qquad (c>0)$$

(теорема 1). В то же время, если $f \in \mathrm{Lip}\, 1$, то равномерно выполняется соотношение

$$\tilde{h}_n(x) = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

(теорема 2); если же производная $f'(x)$ существует почти всюду и суммируема, то почти всюду имеем

$$h_n(x) = O_x\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad \tilde{h}_n(x) = O_x\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

(теорема 3).

КВАЗИ-ИЗОМОРФИЗМ ПРЯМЫХ СУММ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

Р. А. Бомонт и Р. С. Пирс (Сяттль, Вашингтон, США)

Пусть G, H — коммутативные p-группы, представляющие собой прямые суммы циклических групп. G и H квази-изоморфны в том и только в том случае, если G и H удовлетворяют следующим условиям:

Существует целое число $k \geqq 0$ такое, что для любых целых $n \geqq 0$, $r \geqq 0$ имеем

$$\sum_{j=0}^{r} f_G(n+k+j) \leqq \sum_{j=0}^{2k+1} f_H(n+j),$$

$$\sum_{j=0}^{r} f_H(n+k+j) \leqq \sum_{j=0}^{2k+1} f_G(n+j),$$

где $f_G(\alpha)$ обозначает α-й инвариант Ульма группы G.

О ПОЛНЫХ ИДЕАЛАХ И ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ КОНЕЧНОГО ПОЛЯ

В. Нэбауэр (Вена, Австрия)

Пусть $\mathfrak{q}$ — конечное поле порядка q, и $Q = \mathfrak{q}[x]$ — кольцо многочленов над $\mathfrak{q}$. Идеал A кольца Q называется полным идеалом, если из $f(x) \in A$ вытекает $f(u(x)) \in A$ для любого $u(x) \in Q$. Известно, что всякий (отличный от нулевого и единичного) полный идеал кольца Q однозначно представляется в виде

$$A = (x^{q^{e_1}} - x)^{a_1} \cap (x^{q^{e_2}} - x)^{a_2} \cap \ldots \cap (x^{q^{e_r}} - x)^{a_r}, \tag{1}$$

где $r>0$; $e_1 > e_2 > \ldots > e_r > 0$; $a_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$, и $a_j > a_i$ если e_j является собственным делителем числа e_i. Полные идеалы вида (1), для которых $a_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$, называются идеалами остаточных многочленов; совокупность $\mathfrak{V}$ всех идеалов остаточных многочленов из Q представляет собой подструктуру идеалструктуры кольца Q. Поставляя в соответствие каждому идеалу остаточных многочленов свое многообразие нулей в алгебраическом замыкании Ω поля $\mathfrak{q}$, получается дуальный изоморфизм подструктуры $\mathfrak{V}$ на подструктуру $\mathfrak{W}$ степенного множества от Ω, порожденную всеми конечными промежуточными полями расширения $\Omega|\mathfrak{q}$.

Пусть $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}$; многочлен $f(x) \in Q$ называется перестановочным многочленом от $\mathfrak{w}$, если отображение $\alpha \to f(\alpha)$ (где α пробегает $\mathfrak{w}$) является перестановкой от $\mathfrak{w}$. Множество $\mathfrak{h}(\mathfrak{w})$ всех перестановочных многочленов от $\mathfrak{w}$ представляет собой полугруппу по отношению к композиции многочленов; отображение $\varkappa$, определенное равенством $\varkappa\mathfrak{w} = \mathfrak{h}(\mathfrak{w})$, отображает $\mathfrak{W}$, гомоморфно по объединению, но не гомоморфно по пересечению, в дуальную структуру структуры подполугрупп от $\mathfrak{h}(\mathfrak{q})$; $\varkappa$ является взаимно однозначным на подмножестве $\mathfrak{W}$, оформленном конечными промежуточными полями от $\Omega|\mathfrak{q}$.

ПРИБЛИЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ СИЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЕ ЛА ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

Дь. Алексич (Будапешт) и Д. Кралик (Будапешт)

Пусть $f(x)$ — функция, заданная и суммируемая в $[a, b]$; $\{\varphi_n(x)\}$ — ортогональная система функций; $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ — разложение $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$. Положим $s_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$. В теории приближений существенную роль играют средние де ла Валле-Пуссена

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} \{s_\nu(f, x) - f(x)\};$$

известно, что, например при разложениях в ряд по тригонометрической системе скорость приближения этих средних $\leqq 4E_n(f)$, где $E_n(f)$ означает наилучшую скорость приближения, достигаемую тригонометрическими полиномами порядка не выше n. Существенно более тонким является вопрос о том, какого размера есть приближение с т. н. сильными средними де ла Валле-Пуссена

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f, x) - f(x)|.$$

В работе находятся следующие результаты: Если $\{\varphi_n(x)\}$ — тригонометрическая система и $[a, b] = [0, 2\pi]$, то для ограниченных и непрерывных функций $f(x)$ имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f, x) - f(x)| \leqq K E_n(f),$$

где K — абсолютная константа. На основе этого предложения доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $f^{(r)}(x)$ — производная порядка r функции $f(x)$, периодичной по 2π, где $f^{(0)}(x) = f(x)$. Производная $f^{(r)}(x)$ принадлежит классу Зигмунда тогда и только тогда, когда равномерно выполняется соотношение

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f, x) - f(x)| = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$, периодичная по 2π, принадлежит классу Зигмунда, то равномерно выполняется соотношение

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f, x) - f(x)| = O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная ортогональная система функций, заданных в интервале $[a, b]$, а $\lambda(x)$ — заданная для положительных x, положительная, при $x \to +\infty$ монотонно стремящаяся к бесконечности, вогнутая снизу функция. Если $(C, 1)$-средние ортогонального ряда $\Sigma c_n\lambda(n)\varphi_n(x)$ $(\Sigma c_n^2\lambda^2(n)<\infty)$ на множестве $E\subset[a, b]$ ограничены, то для сильных средних де ла Валле-Пуссена ортогонального ряда $\Sigma c_n\varphi_n(x)$ имеем соотношение

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}|s_\nu(f, x)-f(x)| = O_x\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

почти всюду на E, причем в силу теоремы Рисса-Фишера $f(x)$ — однозначно определенная функция: $f(x)\sim\Sigma c_n\varphi_n(x)$.

ДАЛЬНЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ ОДНОЗНАЧНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Я. Ацел (Дебрецен) и М. Хоссу (Мишкольц)

Обобщается в нескольких направлениях следующая теорема работы [2]: При начальных условиях

(0) $$f(a) = c, \quad f(b) = d \qquad (a, b\in\langle A, B\rangle)$$

функциональное уравнение

(1) $$f(F(x, y)) = H(f(x), f(y), x, y),$$

предположенное справедливым в $\langle A, B\rangle$, имеет там же не больше одного непрерывного решения f, если в этой области F является непрерывной функцией, $H(u, v, x, y)$ — монотонна в узком смысле по u или v, и

(I) $$F(x, y)\in(x, y) \quad \text{при} \quad x\neq y$$

в $\langle A, B\rangle$. Здесь (x, y) — открытый, $\langle A, B\rangle$ — замкнутый, полузамкнутый, открытый, конечный или бесконечный интервал (теорема 1). — В самом деле, по теоремам 2 и 3 в известных важных частных случаях довольно ограничительное условие (I) („интернность") можно заменить разными условиями монотонности. — С другой стороны, в этих случаях, и если $F(a, a)\neq a$ (при непрерывности F из (I) вытекает $F(x, x)\equiv x$!), то вместо условия (0) единственное начальное условие $f(a)=c$ достаточно для однозначности.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО СОПРИКАСАЮЩИМСЯ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВАМ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Моор (Сегед)

Общее n-мерное пространство линейных элементов $\mathfrak{L}_n$ — это множество линейных элементов $(x^i, \dot{x}^i)$, где метрика определяется подходящим основным метрическим тензором $g_{ij}(x, \dot{x})$, далее, существует некоторый инвариантный дифференциал D, для которого $Dg_{ij}=0$. Это требование еще не определяет инвариантный дифференциал однозначно; из инвариантных дифференциалов $\overset{1}{D}, \overset{2}{D}$, введенных в настоящей работе, $\overset{1}{D}$ отличается тем, что его параметры смещения зависят только от основного метрического тензора.

Соприкасающееся риманово пространство получается так, что на некотором n-мерном подмножестве $\mathfrak{B}_n$ каждой точке x^i поставляем в соответствие некоторое направление через равенства

$$\dot{x}^i = r^i(x),$$

а потом составляем тензор

$$\gamma_{ik}(x) \overset{\text{def}}{=\!=} g_{ik}(x, r(x)),$$

определяющий метрику на $\mathfrak{B}_n$ и зависящий только от места. Аналогично, величины

$$L^{(\alpha)}{}_i{}^j{}_k(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \Gamma^*{}_i{}^j{}_k(x, r(x)), \quad L^{(\beta)}{}_i{}^j{}_k(x) \overset{\text{def}}{=\!=} L^*{}_i{}^j{}_k(x, r(x))$$

определяют соприкасающиеся аффинно-связные пространства $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$, $\mathfrak{A}_n^{(\beta)}$, соответственно.

В настоящей работе вдоль произвольной последовательности линейных элементов

$$(*) \qquad x^i = x^i(\tau), \quad \dot{x}^i = \dot{x}^i(\tau), \qquad \tau_0 \leqq \tau \leqq \tau_1$$

с помощью приема, принадлежащего О. Варга, построится такое подмножество $\mathfrak{B}_n$, что для вектора поля $r^i(x)$ вдоль выбранной последовательности линейных элементов имеет место соотношение $\dot{x}^i(\tau) = r^i(x(\tau))$. Затем можно проверить, что вдоль $(*)$ инвариантные дифференциалы соприкасающихся риманова и аффинно-связного точечных пространств совпадают с инвариантными дифференциалами $\overset{1}{D}$ и $\overset{2}{D}$, соответственно, пространства $\mathfrak{L}_n$. Тензоры кривизны соприкасающихся точечных пространств $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$, $\mathfrak{A}_n^{(\beta)}$ вдоль $(*)$ совпадают с разными тензорами кривизны пространства $\mathfrak{L}_n$ (см. уравнения (6.4), (6.6)). Однако тензор кривизны соприкасающегося риманова пространства совпадает с тензором кривизны $R_i^{*j}{}_{kl}$ пространства $\mathfrak{L}_n$ только при выполнении некоторых дальнейших, весьма ограничительных условий (см. уравнения (5.4), (5.5)).

ОБ АВТОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ТЕНЗОРИАЛЬНО СВЯЗНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Л. Тамашши (Дебрецен)

В точках P n-мерного дифференцируемого многообразия тензоры одного и того же типа составляют по произведению касательного пространства $E_n(P)$ и дуального пространства $E_n^*(P)$: $E_n^{(r)}(P) \otimes E_n^{*(s)}(P)$. Если между касательными пространствами $E_n(P)$ задано линейное соотношение, то это индуцирует линейное соотношение и между элементами произведений пространств. Однако, непосредственным линейным отображением элементов произведений пространств друг в друга можно установить более общее линейное соотношение, которое называется тензориальным. Упомянутый частный случай этого можно называть индуцированным. В случае тензоров типа (2. 0) тензориальное соотношение описывается абсолютным дифференциальным оператором $\vartheta T^{ij} \overset{\text{df}}{=} dT^{ij} + \gamma_{kl}{}^{ij}{}_t T^{kl} dx^t$ $(T^{ij}(P) \in E_n^{(2)}(P))$, причем закон преобразования геометрического объекта γ, определяющего соотношение, задается уравнением (1.1). Тензорное поле $T^{ij}(P(t))$ является параллельно сдвинутым, если $\dfrac{\vartheta T^{ij}}{dt} = 0$. (Случай тензоров типа (r, s) может быть трактован вполне аналогично.)

В этой геометрии не можно говорить об автопараллельных кривых, так как параллелность векторов вообще не определена. Но простые бивекторы, входящие в $E_n^{(2)}$, пригодны для определения параллельности положений плоскостей, что делает возможным введение понятия поверхностей с параллельными касательными плоскостями. Эти поверхности назовем автопараллельными поверхностями.

Относительно их работа содержит следующие результаты. Если соотношение является индуцированным, что равносильно представимости γ в виде (1.2), то автопараллельные поверхности совпадают с вполне геодезическими поверхностями соответствующего простого аффинно-связного пространства. По этому автопараллельные поверхности можно посмотреть как обобщение вполне геодезических поверхностей. — Система дифференциальных уравнений автопараллельных поверхностей $x^i = x^i(u^1, u^2)$ представляется в виде (1.5), (1.7), где $\varphi_\alpha(u)$ $(\alpha = 1, 2)$ — произвольные функции. Эту систему можно перевести в более простую систему (1.12), (1.13) преобразованием параметров вида

$u^{\alpha}=u^{\alpha}(u^{1'}, u^{2'})$ в том и только в том случае, если $\varphi_{\alpha}(u)du^{\alpha}$ — полный дифференциал. Этот факт представляет собой обобщение существования аффинного параметра геодезической линии. — Автопараллельные поверхности не существуют при произвольных тензориальных соотношениях через произвольные положения плоскостей (как это видно уже в индуцированным случае). С целью решения проблемы о существовании автопараллельных поверхностей, мы приведем их систему дифференциальных уравнений к системе (2.7) хорошо известного типа. Таким способом мы получаем необходимые и достаточные условия существования автопараллельных поверхностей. — Может случиться, что автопараллельные поверхности двух различных тензориальных соотношений γ, γ^* совпадают. Это обстоятельство имеет место тогда и только тогда, когда γ^* имеет вид $\gamma+B$, где B — тензор типа (2. 3), удовлетворяющий (3.7) (тензор проективной деформации). B наверно такой, если он выполняет условие (3.8).

О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ РЯДОМ ДИРИХЛЕ

П. К. Камтан (Дели, Индия)

Пусть

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$$

(где $s=\sigma+it$; $0\leqq\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty$; $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{n}{\lambda_n}<\infty$; $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=h>0$) — некоторая целая функция порядка ϱ. Доказываются несколько соотношений между функциями $A(\sigma)$ и $m_k(\sigma)$, определенными через формулы

$$A(\sigma)\overset{\text{def}}{=}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma+it)|^2\,dt;$$

$$m_k(\sigma)\overset{\text{def}}{=}\lim\frac{1}{2Te^{k\sigma}}\int_{0}^{\sigma}\int_{-T}^{T}|f(x+it)|^2 e^{kx}\,dx\,dt,\qquad 0<k<\infty.$$

Так, например, доказывается, что при $\sigma\to\infty$

$$\log m_k(\sigma)\sim\log A(\sigma).$$

ПАРТИЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КАРДИНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

П. Эрдёш (Будапешт), А. Хайнал (Будапешт) и Р. Радо (Ридинг, Англия)

В большей части работы авторы занимаются следующими соотношениями — и их обобщениями — между кардинальными числами (определенными формулами (3. 1), (3. 2) и (3. 3)):

(I) $$a\to(b_0, b_1, \ldots)^r,$$

(II) $$a\to(b)^{<\aleph_0}_c$$

и

(III) $$\binom{a}{b}\to\binom{a_0, a_1}{b_0, b_1}.$$

Одна из важнейших целей работы — полное изучение соотношений типа (I). Соответствующие результаты содержатся в теоремах I, II, а остающиеся открытые вопросы — в проблемах 1, 2.

Другой важной целью статьи является исследование поляризированных партиционных соотношений.

В наибольшей части работы предполагается обобщенная гипотеза континуума.

ОБ ОДНОЙ СПРЯМЛЯЕМОЙ НЕЭВКЛИДОВОЙ ПАРАБОЛЕ НЕЙЛЯ

К. Фладт (Кальв, Германия)

Исследуется вопрос, которые из кривых третьего порядка с уравнением вида $y^2 = \frac{x^3}{\alpha x + \beta}$ спрямляемы элементарным путем в гиперболической геометрии. В качестве результата получается единственная парабола Нейля с уравнением $y^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{-k}x^3$, где k означает кривизну.

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

К. Фладт (Кальв, Германия)

Исследуются аналоги в гиперболической плоскости некоторых знаменительных кривых евклидовой плоскости. Исходя из соответствующих уравнений, устанавливаются одни из своих важнейших метрических характеристик.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВЯНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ф. Константинеску (Клуж, Румыния)

Доказывается, что любое непрерывное решение функционального уравнения (1) является бесконечно дифференцируемой функцией. При доказательстве используется теория обобщенных функций.

К РАСШИРЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБРАЗОВАНИЕМ ПРАВЫХ ЧАСТНЫХ

Г. Й. Вейнерт (Потсдам, ГДР)

В качестве дополнения к высказываниям работы [2] показывается: Если $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ — полугруппа правых частных полугруппы $\mathfrak{R}$ с множеством знаменателей $\mathfrak{n}$, и $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{s})$ — соответствующая полугруппа правых частных от $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{T}$ является уже полугруппой правых частных от $\mathfrak{R}$. Этот результат переносится на полукольца и кольца; итак, повторение образования правых частных не приводит к системам другого типа.

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ. IX (О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ)

Й. Балаж (Будапешт) и П. Туран (Будапешт)

В работе мы занимаемся приближением преобразований Фурье вида (1.2), где $\varphi(t)$ задана только в n положительных корнях ξ_ν n-го многочлена Лагерра $L_n^*(x)$, определенного под (2.1), непрерывна для $t \geqq 0$ и удовлетворяет (1.4) при некотором $c_1 < \frac{1}{2}$. Обозначая его через $\Phi_n(x, y)$, поставим следующие требования:

а) $\Phi_n(x, \pi_k) \equiv \Phi(x, \pi_k)$ для всех $n > k$, где π_k — произвольный многочлен степени k;

б) $\lim_{n \to \infty} \Phi_n(x, \varphi) = \Phi(x, \varphi)$ равномерно на вещественной оси.

Мы показываем, что функции вида

$$\Phi_n(x, \varphi) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(\xi_\nu) \psi_\nu(x)$$

удовлетворяют обоим условиям, и функции $\psi_\nu(x)$ определяются через (2.5).

ОБ УЛУЧШЕНИИ СХОДИМОСТИ МОНОТОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ВЕКТОРОВ

Й. В. Шмидт (Дрезден, ГДР)

Известно, что решения систем линейных уравнений при некоторых условиях могут быть приближены с обоих сторон методом последовательных приближений. Сходимость этих приближений может оказаться медленной; в статье доказывается, что δ^2-метод Ейткина улучшения сходимости числовых последователей может быть использован для последовательностей векторов так, что одновременно с улучшением сходимости получаются двухсторонние границы решения.

Исследования оканчаются рассмотрением нумерических примеров.

О СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ ВЫЧИСЛЯЕМОСТИ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ СЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЯМ-ПАМЯТЕЙ

Р. Петер (Будапешт)

В последние годы в разных областях, особенно при автоматических переводах, преобладает требование „секвенциальной" передачи последовательности сигналов в другую, т. е. такой передачи, что последовательные сигналы результата устанавливаются с учетом отдельных сигналов первоначальной последовательности в данном порядке, один за другим. Удовлетворить этому требованию обычно не удается попросту, но этому может способствовать применение т. н. ям-памятей (это стало полезным методом и само по себе).

Яма-память — это память, в которую можно одновременно положить по сигналу (и каждый последний сигнал словно нажимает сигналы, находящиеся уже в памяти, одним местом ниже). Тоже вынять из нее можно лишь один сигнал (верхний) одновременно; при этом мы можем либо удалить, либо и оставить на месте этот сигнал (как бы мы перенесли только его копию в другую память).

В литературе[1] имеются относительно этого лишь разовые методы, и стало желательным искать возможно общий метод.

В настоящей работе я указываю именно такой общий метод для секвенциального вычисления значений функций слов, частично-рекурсивных в некотором множестве слов над конечным алфавитом, при помощи конечной системы ям-памятей. Отсюда, на-

пример, получим как следствие, что „вполне скобочные", „конвенционально скобочные", „непоследовательно-конвенционально скобочные" виды и различные бесскобочные виды типа Лукашевича и Павлака, соответственно, формул, посторенных из переменных заданными действиями, между которыми я доказала примитивно-рекурсивность преобразований перевода в предыдущих работах,[2] могут быть секвенциально переведены друг на друга при пользовании конечными системами ям-памятей.

Наоборот, я доказываю, что те функции слов, заданные на произвольном множестве слов, значения у которых вычисляемы с помощью конечных систем ям-памятей, являются частично-рекурсивными на подходящем множестве слов.

О ПРИБЛИЖЕНИИ В СИЛЬНОМ СМЫСЛЕ

Л. Леиндлер (Сегед)

В работе доказывается общая теорема относительно приближения в сильном смысле (теорема 1), содержащая в качестве частного случая все известные в этом направлении теоремы (см. работы [2], [3], [4], [5]), и с применением этой теоремы решается (теорема 3) одна проблема Дь. Алексича ([2], стр. 330). Далее, из теоремы 1 немедленно вытекает

Теорема 2. Если $f(x)$ всюду r раз дифференцируема и $f^{(r)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$, то при любой $p(>0)$ равномерно выполняется оценка (4), и при $\beta>(r+\alpha)p$ — оценка (5).

Теорема 4 показывает, в частности, что оценки (4) и (5) при $\beta=(r+\alpha)p$ вообще неверны.

О ПЕРЕНУМЕРАЦИИ ГРАФОВ

ИЛОНА ФИДРИХ (Будапешт)
(*Представлено* Л. Калмаром)

В настоящей работе рассматриваются конечные направленные графы, в связи с которыми употребляются понятия и обозначения, использованные в [1].

Пусть заданы граф $G=(X, U)$ и такое множество натуральных чисел A, что выполняется равенство $|A|=|X|$. Перенумерацией графа G множеством A будем называть однозначное отображение $x \to a_x \in A$, определенное для каждой вершины $x \in X$ так, что $a_x \neq a_{x'}$, при $x \neq x'$. Число a_x будем называть номером вершины x (при данной перенумерации графа G).

Граф G, если для него задана некоторая его перенумерация, будем называть перенумерованным графом.

Пусть граф $G=(X, U)$ является перенумерованным графом. Тогда множество тех дуг $u=(x, x') \in U$, для которых при данной перенумерации выполняется неравенство $a_x > a_{x'}$, будем обозначать через $\bar{U}$.

Допустимой перенумерацией графа $G=(X, U)$ будем называть его перенумерацию множеством $E=\{1, 2, \ldots, |X|\}$, удовлетворяющую следующим условиям.

1. Входы графа перенумерованы множеством $\{1, 2, \ldots, |X_1|\}$, где X_1 — множество входов графа.

2. Выходы графа перенумерованы множеством $\{|X|-|X_3|+1, |X|-|X_3|+2, \ldots, |X|\}$, где X_3 — множество выходов графа.

3. Имеет место равенство $|\bar{U}|=0$.

Почти допустимой перенумерацией графа $G=(X, U)$ будем называть его перенумерацию множеством $E=\{1, 2, \ldots, |X|\}$, удовлетворяющую условиям (1), (2) и

3′. Имеет место неравенство $|\bar{U}| \leqq r$, где r — число контуров[1]) графа.

Имеет место следующая

Теорема. *Каждый конечный граф, не имеющий изолированных точек, может быть перенумерован почти допустимым образом.*

Теорема доказывается с помощью следующей леммы.

Лемма. *Пусть задан конечный граф $G=(X, U)$ без контуров и такое множество чисел A, что выполняется равенство $|A|=|X|$. Тогда граф G может быть перенумерован множеством A так, что имеет место равенство $|U|=0$.*

[1]) Здесь и в дальнейшем петлю не считаем контуром.

Доказательство леммы. Исходя из заданного графа $G=(X, U)$ построим последовательность графов

$$G=G_0, \bar{G}_0, G_1, \bar{G}_1, \ldots, G_n, \bar{G}_n=G^* \tag{1}$$

путем применения следующих операций.

Операция $\mathscr{A}$: Добавление к графу всех таких дуг (a, c), для граничных вершин которых в нем найдется путь вида $[a, \ldots, b, \ldots, c]$.

Операция $\mathscr{B}$: Добавление к графу одной из таких дуг (a, c), для граничных вершин которых в нем нет путей видов ни $[a, \ldots, b, \ldots, c]$ ни $[c, \ldots, b, \ldots, a]$.

Правила построения последовательности (1) задаются равенствами

$$\bar{G}_i=\mathscr{A}G_i \qquad (i=0, 1, \ldots, n)$$

$$G_{i+1}=\mathscr{B}\bar{G}_i \qquad (i=0, 1, \ldots, n-1).$$

В силу конечности графа G после выполнения некоторого числа n таких двойных шагов, получаем G^*, который является конечным полным графом. Из предположения, что граф G является графом без контуров и из правил построения последовательности (1) следует, что граф G^* тоже является графом без контуров.

Каждый конечный полный граф без контуров $G^*=(X^*, U^*)$ может быть перенумерован множеством $\{1, 2, \ldots, |X^*|\}$ так, что $|\bar{U}^*|=0$. Для этого, как показал Селе [2], достаточно каждой вершине $x\in X^*$ присвоить номер $\alpha_x=|X^*|-d^+(x)$. Возьмем такую перенумерацию графа G^* и обозначим ее через P^*.

Так как множества вершин всех элементов последовательности (1) совпадают, то P^* является перенумерацией и графа G. В силу того, что G^* получился из G только добавлением к нему дуг, P^* удовлетворяет условию $|\bar{U}|=0$.[2])

Упорядочим элементы $a_1, a_2, \ldots, a_{|X|}$ множества A так, что $a_i<a_{i+1}$ для $i=1, 2, \ldots, |X|-1$. От перенумерации P^* графа G перейдем к его перенумерации P множеством A так, что вершине $x\in X$, имеющей при перенумерации P^* номер i, присвоим номер a_i. Очевидно, что и при перенумерации P будем иметь $|\bar{U}|=0$. Следовательно, лемма доказана.

Перед доказательством теоремы введем некоторые понятия.

Граф $G=(X, U)$ будем называть взвешенным графом, если каждой вершине $x\in X$ поставлено в соответствие одно и только одно целое число $k_x\geqq 1$, называемое весом вершины x.

Пусть заданы взвешенный граф $G=(X, U)$ и такое множество чисел $\mathfrak{A}$, что выполняется равенство $\mathfrak{A}=\sum_{x\in X} k_x$. Расширенной перенумерацией взвешенного графа G множеством $\mathfrak{A}$ будем называть отображение $x\to\mathfrak{A}_x\subseteq\mathfrak{A}$, определенное для каждой вершины $x\in X$ и выполняющее следующие требования:

[2]) Идею доказательства существования перенумерации P^* графа G автору указал научный сотрудник Математического Исследовательского Института Венгерской Академии Наук А. Адам.

1. $|\mathfrak{A}_x| = k_x$ для каждой вершины $x \in X$;

2. $\mathfrak{A}_x \cap \mathfrak{A}_{x'} = \emptyset$, если $x \neq x'$.

Множество $\mathfrak{A}_x$ будем называть расширенным номером вершины x (при данной расширенной перенумерации взвешенного графа G).

При расширенной перенумерации взвешенного графа $G=(X, U)$ множество тех дуг $u=(x, x') \in U$, для которых найдутся такие $a \in \mathfrak{A}_x$ и $a' \in \mathfrak{A}_{x'}$, что $a > a'$, будем обозначать через $\overline{U}$.

Примечание 1. Если граф $G=(X, U)$ является взвешенным графом, причем каждая вершина $x \in X$ имеет вес $k_x = 1$, то каждая его расширенная перенумерация является его перенумерацией и $\overline{U} = \bar{U}$.

Пусть для взвешенного графа $G=(X, U)$ дана некоторая его перенумерация P. Расширенной перенумерацией взвешенного графа G, соответствующей его перенумерации P, будем называть такую его расширенную перенумерацию, при которой каждой вершине x присваивается расширенный номер

$$(2) \quad \mathfrak{A}_x = \{a_x + \sum_{x' \in X'} (k_{x'} - 1),\ a_x + \sum_{x' \in X'} (k_{x'} - 1) + 1,\ \ldots,\ a_x + \sum_{x' \in X'} (k_{x'} - 1) + k_x - 1\},$$

где через a_x и k_x обозначены соответственно номер при перенумерации P и вес вершины x и X' является множеством всех таких вершин $x' \in X$ для номеров которых при перенумерации P выполняется неравенство $a_{x'} < a_x$.

Примечание 2. Из определения множеств вида (2) следует, что для каждого $a \in \mathfrak{A}_x$ и $a' \in \mathfrak{A}_{x'}$ неравенство $a < a'$ выполняется всегда, если $a_x < a_{x'}$.

Сгущением контура $C=(X_C, U_C)$ взвешенного графа $G=(X, U)$ будем называть выполнение над ним следующих операций.

1. Замена множества X_C на одну вершину $c \in X_C$, причем:

а) элементы множества $U'_C = U^+_{X_C} \cap U^-_{X_C} \supseteq U_C$ исчезают;

б) элементы множества $U^+_{X_C} \setminus U^-_{X_C}$ заменяются элементами множества U^+_c;

в) элементы множества $U^-_{X_C} \setminus U^+_{X_C}$ заменяются элементами множества U^-_c.

2. Присвоение вершине c веса $k_c = \sum_{x \in X_C} k_x$.

Примечание 3. Ясно, что если $|U'_C| = |U_C| + p$ $(p \geqq 0)$, то число s контуров, сгущающихся при слущении контура C, удовлетворяет неравенству $s \geqq p + 1$.

Процессом упрощения взвешенного графа $G=(X, U)$ будем называть последовательность графов

$$(3) \quad G = G^0, G^1, \ldots, G^m = \tilde{G}$$

где граф $G^i=(X^i, U^i)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ получается из графа G^{i-1} сгущением какого-либо его контура. Здесь число m означает число сгущений, необходимых для того, чтобы граф $\tilde{G}$ являлся графом без контуров. Последний элемент $\tilde{G}$ последовательности (3) будем называть упрощением графа G.

Ясно, что для каждого графа G существует одно и только одно его упрощение $\tilde{G}$, которое можно получить, как правило, не единственным процессом его упрощения вида (3), может быть, с разными числами m.

Если граф G является графом без контуров, то $G=\tilde{G}$.

Примечание 4. Из определения сгущения контура следует, что в процессе упрощения (3) графа $G=(X, U)$ выполняются равенства

$$\sum_{x\in X^i} k_x = \sum_{x\in X} k_x, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

которые переходят в равенства

$$\sum_{x\in X^i} k_x = |X|, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

если $k_x=1$ для каждой вершины $x\in X$.

Доказательство теоремы. Пусть граф $G=(X, U)$ является конечным графом, не имеющим изолированных точек.

Обозначим через X_1 множество входов графа G, через X_2 множество его переходных точек[3]) и через X_3 множество его выходов. Из определения входов, переходных точек и выходов графа следует, что для графа, не имеющего изолированных точек, выполняются равенства

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X,$$

$$X_1 \cap X_2 = X_1 \cap X_3 = X_2 \cap X_3 = \emptyset.$$

Следовательно, любая перенумерация подграфов $G_1=(X_1, \Gamma_{X_1})$, $G_2=(X_2, \Gamma_{X_2})$ и $G_3=(X_3, \Gamma_{X_3})$ графа $G=(X, \Gamma)=(X, U)$ такими множествами B_1, B_2 и B_3 соответственно, для которых

$$B_1 \cap B_2 = B_1 \cap B_3 = B_2 \cap B_3 = \emptyset,$$

задает перенумерацию графа G множеством $B_1 \cup B_2 \cup B_3$.

По предположению конечности графа G графы G_1, G_2 и G_3 тоже являются конечными.

Зададим любые перенумерации графа G_1 множеством $\{1, 2, \ldots, |X_1|\}$ и графа G_3 множеством $\{|X|-|X_3|+1, |X|-|X_3|+2, \ldots, |X|\}$. Этим самым удовлетворяем первым двум требованиям почти допустимой перенумерации графа G.

Для задания перенумерации подграфа G_2 графа G поступаем следующим образом.

Каждой вершине $x\in X_2$ присвоим вес $k_x=1$. Возьмем один из процессов упрощения графа G_2:

$$G_2 = G^0, G^1, \ldots, G^m = \tilde{G}_2,$$

который в силу конечности графа G_2 является конечным процессом. Так

[3]) Переходной точкой графа $G=(X, U)$ называем вершину $x\in X$, для которой $d^-(x)\neq 0$ и $d^+(x)\neq 0$.

как $\tilde{G}_2 = G^m = (X^m, U^m)$ является конечным графом без контуров, то в силу леммы можно задать такую его перенумерацию P^m множеством $\{|X_1|+1, |X_1|+2, \ldots, |X_1|+|\tilde{X}_2|\}$, что выполняется равенство $|\bar{U}^m| = 0$. Возьмем расширенную перенумерацию $\mathfrak{P}^m$ взвешенного графа G^m, соответствующую перенумерации P^m.

Расширенная перенумерация $\mathfrak{P}^m$ для $i=m$ обладает свойствами:

α. $\mathfrak{P}^i$ является такой расширенной перенумерацией взвешенного графа $G^i=(X^i, U^i)$, при котором для расширенных номеров $\mathfrak{A}^i_x$ вершин $x \in X^i$ графа G^i выполняется равенство

$$\bigcup_{x \in X^i} \mathfrak{A}^i_x = \{|X_1|+1, |X_1|+2, \ldots, |X_1|+|X_2|\};$$

β. Выполняется неравенство $|\bar{\bar{U}}^i| \leqq r^i$, где r^i — число контуров графа G^i. Свойство (α) расширенной перенумерации $\mathfrak{P}^m$ вытекает из определения перенумерации P^m и из примечания (4) по определению расширенной перенумерации, соответствующей данной перенумерации. Свойство (β) расширенной перенумерации $\mathfrak{P}^m$ следует из свойства перенумерации P^m и из примечания (2).

Пусть для некоторого $i (m \geqq i > 0)$ имеется расширенная перенумерация $\mathfrak{P}^i$ графа $G^i=(X^i, U^i)$, обладающая свойствами (α) и (β).

Рассмотрим контур $C=(X_C, U_C)$ графа G^{i-1}, сгущением которого получился граф G^i из графа G^{i-1} и который в графе G^i заменился на вершину $c \in X^i$ с весом k_c. Пусть вершина $c \in X^i$ при расширенной перенумерации $\mathfrak{P}^i$ графа G^i имеет расширенный номер

$$\mathfrak{A}^i_c = \{a, a+1, \ldots, a+k_c-1\}.$$

Перенумеруем вершины контура C графа G^{i-1} множеством

$$A_{X_c} = \{a, a+1, \ldots, a+|X_C|-1\},$$

исходя из любой его вершины в направление, заданное контуром C. Полученную таким образом перенумерацию контура C обозначим через P_C. Возьмем расширенную перенумерацию $\mathfrak{P}_C$ контура C, соответствующую его перенумерации P_C.

В качестве расширенной перенумерации $\mathfrak{P}^{i-1}$ графа G^{i-1} возьмем перенумерацию, при которой вершины $x \in X^{i-1} \setminus X_C$, являющиеся вершинами и графа G^i, получают те же самые расширенные номера, что имели при расширенной перенумерации $\mathfrak{P}^i$, а вершины $x \in X_C$, которым в графе G^i соответствует единственная вершина c, получают расширенные номера, присвоенные им при расширенной перенумерации $\mathfrak{P}_C$ контура C.

Полученная таким образом расширенная перенумерация $\mathfrak{P}^{i-1}$ графа G^{i-1} обладает свойством (α), так как $\mathfrak{A}^{i-1}_x = \mathfrak{A}^i_x$, если $X^{i-1} \setminus X_C$ и $\bigcup\limits_{x \in X_C} \mathfrak{A}^{i-1}_x = \mathfrak{A}^i_c$, следовательно $\bigcup\limits_{x \in X^{i-1}} \mathfrak{A}^{i-1}_x = \bigcup\limits_{x \in X^i} \mathfrak{A}^i_x$.

Если при сгущении контура C сгущалось s контуров графа G^{i-1}, то по примечанию (3) $|\bar{\bar{U}}_C| \leqq s$. Из определения множеств $\mathfrak{A}^{i-1}_x$ следует, что

при расширенной перенумерации выполняется равенство $|\bar{\bar{U}}^{i-1}| = |\bar{\bar{U}}^{i}| + |\bar{U}'_c|$, следовательно будет $|\bar{\bar{U}}^{i-1}| \leqq |\bar{\bar{U}}^{i}| + s$. Из свойства ($\beta$) расширенной перенумерации $\mathfrak{P}^i$ следует, что

$$|\bar{\bar{U}}^{i-1}| \leqq r^i + s = r^{i-1},$$

т. е. расширения перенумерация $\mathfrak{P}^{i-1}$ обладает и свойством (β).

Следовательно, если $m>0$, то, исходя из расширенной перенумерации $\mathfrak{P}^m$ графа G^m, можем построить последовательность

$$\mathfrak{P}^m, \mathfrak{P}^{m-1}, \ldots, \mathfrak{P}^1, \mathfrak{P}^0$$

расширенных перенумераций графов

$$G^m, G^{m-1}, \ldots, G^1, G^0$$

соответственно. В конечном счете получим расширенную перенумерацию $\mathfrak{P}^0$ графа $G^0 = G_2$, обладающую свойствами (α) и (β). Так как каждой вершине $x \in X_2$ присвоен был вес $k_x = 1$, в силу примечания (1), расширенная перенумерация $\mathfrak{P}^0$ является перенумерацией графа G_2. Из свойств (α) и (β) расширенной перенумерации $\mathfrak{P}^0$ следует, что она является перенумерацией графа G_2 множеством $\{|X_1|+1, |X_1|+2, \ldots, |X_1|+|X_2|\}$, удовлетворяющей условию $|\bar{U}_2| \leqq r$, где r—число контуров графа G_2, т. е. графа G.

В случае $m=0$ граф G_2 может быть перенумерован множеством $\{|X_1|+1, |X_1|+2, \ldots, |X_1|+|X_2|\}$ так, чтобы $|\bar{U}_2| \leqq r$, в силу леммы.

Так как все входы графа G имеют номера, меньше чем $|X_1|+1$, и все выходы графа G имеют номера, больше чем $|X_1|+|X_2|$, то полученные перенумерации подграфов G_1, G_2 и G_3 задают такую перенумерацию графа G множеством $\{1, 2, \ldots, |X_1|+|X_2|+|X_3|\}$, которая удовлетворяет и требованию (3′) почти допустимой перенумерации графа.

Следующее утверждение является частным случаем только что доказанной теоремы.

Каждый конечный граф без контуров, не имеющий изолированных точек, может быть перенумерован допустимым образом.

Вычислительный Центр
Венгерской Академии Наук,
Будапешт

(Поступило 2. V. 1963., в перерадотанной форме 15. V. 1964.)

Цитированная литература

[1] К. Берж, *Теория графов и ее применения.*
[2] Szele T., Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **50** (1943), стр. 223–256.

ON NUMBERING OF GRAPHS

I. FIDRICH (Budapest)

(Summary)

The paper deals with finite and directed graphs. The numbering of such a graph means the numbering of its vertices.

An admissible numbering of a graph $G=(X, U)$ means a numbering by the set $E=\{1, 2, \ldots, |X|\}$ which satisfies the following conditions:

(1) The input points of the graph have the minimal numbers.

(2) The output points of the graph have the maximal numbers.

(3) The graph has no edge showing from a vertex with greater number to a vertex with smaller one.

An almost admissible numbering of a graph $G=(X, U)$ means such a numbering by the set $E=\{1, 2, \ldots, |X|\}$ which satisfies (besides the conditions (1) and (2)) the following condition:

(3′) The number of edges showing from a vertex with greater number to a vertex with smaller one does not exceed the number of the cycles of the graph.

The following theorem is proved:

Any finite directed graph without isolated points may be numbered almost admissibly.

As special case one obtains:

Any finite graph having no isolated points and no cycles may be numbered admissibly.

BEMERKUNGEN ZUM GRAPHENTHEORETISCHEN SATZE VON I. FIDRICH

Von

A. ÁDÁM (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. KALMÁR)

Herrn Professor L. KALMÁR *zum 60. Geburtstag gewidmet*

1. In dieser Arbeit geben wir einen anderen Beweis für den Satz, der von I. FIDRICH im vorhergehenden Artikel [1] veröffentlicht wird.[1] Wir sagen den Satz in einer modifizierten Formulierung aus, und werfen ein naheliegendes offenes Problem auf.

2. Wir betrachten einen endlichen Graphen G, in dem jede Kante gerichtet ist. Schlingen sind ausgeschlossen; es ist doch erlaubt, daß ein Punktpaar durch mehrere Kanten verbunden ist.[2] $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet eine Kante, die aus dem Punkt A nach dem Punkt B geht. Wir bezeichnen durch $\overline{AB}$ eine A und B verbindende Kante, wenn ihre Orientierung nicht in Betracht genommen wird. Eine Folge von Kanten

$$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

bzw.

$$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$$

bzw.

$$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1}$$

heißt eine *Bahn*, ein *Weg* bzw. ein *Zyklus* (der Reihe nach), wenn $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paarweise verschiedene Punkte sind.

Sei $e = \overrightarrow{AB}$ eine Kante von G. Wenn wir diese Kante weglassen und eine neue Kante $\overrightarrow{BA}$ (zwischen denselben Endpunkten) zunehmen, so sagen wir, daß wir die Kante e *umgekehrt haben*. Die gleichzeitige Umkehrung mehrerer Kanten wird analog verstanden.

3. Wir machen einige Vorbereitungen für den Beweis des Satzes. Ist so B aus A, wie C aus B durch je eine Bahn erreichbar, so ist auch C aus A. Wir nennen A und B *mutuell erreichbar*, wenn so aus A nach B, wie aus B nach A je eine Bahn existiert. Diese Relation ist trivialerweise reflexiv und symmetrisch; laut der vorhergehenden Feststellung ist sie transitiv. Folglich induziert die Relation eine Klasseneinteilung γ in der Menge der Punkte von G. Die sämtlichen Punkte eines Zyklus liegen in einer gemeinsamen Klasse mod γ. Eine Kante $\overline{AB}$ kann dann und

[1] Sie hat diese Ergebnis noch als Vermutung mir mitgeteilt; die beiden Beweise entstanden voneinander wesentlich unabhängig (der ihre etwas früher).

[2] Die Bedingung, daß Schlingen nicht erlaubt sind, ist der Einfachkeit halber zweckmäßig. Ihr Vorkommen ist nämlich für uns indifferent.

nur dann in einen Zyklus erweitert werden, wenn A und B mutuell erreichbar sind. Der Graph enthält dann und nur dann (mindestens) einen Zyklus, wenn es zwei mutuell erreichbare (verschiedene) Punkte in ihm gibt.

4. SATZ. *Wir bezeichnen die Anzahl der Zyklen des Graphen G durch c ($c \geqq 0$). Es gibt in G derartige Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$, daß sie die folgenden drei Behauptungen erfüllen:*

$k \leqq c$,

jede Kante e_i ($1 \leqq i \leqq k$) kann in einen Zyklus erweitert werden,

wenn man die Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ (und nur diese) umkehrt, so ist der entstehende Graph zyklenfrei.

Zunächst zeigen wir, daß die erste und die dritte Behauptung zusammen eine äquivalente Variante des wesentlichen Teiles des ursprünglichen Satzes von FIDRICH, d. i. der folgenden Aussage bilden: *man kann jedem Punkt A von G eine natürliche Zahl $\alpha(A)$ derart ein-eindeutig zuordnen, daß $\alpha(A) > \alpha(B)$ für höchstens c Kanten $\overrightarrow{AB}$ gilt.* Wahrlich, wenn es eine solche Numerierung gibt, so führt die Umkehrung der Kanten mit $\alpha(A) > \alpha(B)$ zu einem derartigen Graphen, in dem $\alpha(A) < \alpha(B)$ für jede Kante $\overrightarrow{AB}$ gilt, der folglich zyklenfrei ist. Andererseits, wenn man k Kanten auswählt, die den erwähnten beiden Behauptungen genügen, so versichert das Lemma in [1], daß man den durch die Umkehrungen entstehenden Graphen so numerieren kann, daß jedenfalls $\alpha(A) < \alpha(B)$ gilt. Diese Numerierung hat die gewünschte Beschaffenheit im ursprünglichen Graphen.

5. BEWEIS. Wir wenden Induktion bezüglich der Anzahl der Kanten an. Bezeichne n die Anzahl der Kanten von G. Wenn $n = 2$, so ist der Satz trivialerweise erfüllt. Nehmen wir an, daß $n \geqq 3$. Sei G' derjenige Graph, der aus G durch das Weglassen einer (beliebig ausgewählten) Kante $e = \overrightarrow{AB}$ entsteht. Betrachten wir derartige Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ in G', die die Konklusion des Satzes erfüllen. Der Grundgedanke des Beweises besteht darin, daß wir zeigen, daß der Satz bezüglich G entweder von diesem Kantensystem oder demjenigen System erfüllt wird, das diese Kanten und e enthält; und zwar kann die zweite Alternative nur dann vorkommen, wenn $\overrightarrow{AB}$ in (wenigstens) einen Zyklus von G erweitert werden kann.

Fall 1: e tritt in keinem Zyklus von G auf. Da G' keine Bahn aus B nach A enthält, sind B und A in verschiedenen Klassen mod γ (die Klasseneinteilung γ wird in G' verstanden). Wir betrachten einen beliebigen Weg in G', der B und A verbindet (es kann geschehen, daß ein derartiger Weg nicht existiert); bestehe er aus den Kanten

$$\overline{C_1C_2},\ \overline{C_2C_3},\ \ldots,\ \overline{C_{n-1}C_n} \qquad (C_1 = B,\ C_n = A).$$

Mindestens eine dieser Kanten verbindet solche Punkte, die in verschiedenen Klassen mod γ liegen; eine Kante dieser Eigenschaft kann nicht in einen Zyklus erweitert werden. Man kann einsehen, daß es eine Kante unter diesen gibt, die aus C_{i+1} nach C_i gerichtet ist (weil im entgegengesetzten Falle man eine Bahn aus B nach A konstruieren könnte). — Die Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ erfüllen den Satz nicht nur in G', sondern auch in G. Die ersten beiden Behauptungen gelten für sie trivial; das Bestehen der dritten Aussage folgt daraus, daß — wie wir dies gesehen haben —

aus keinem der Wege in G' aus B nach A eine Bahn entsteht, wenn man $e_1, e_2, \ldots, e_k$ umkehrt.

Fall 2: die Anzahl derartigen Zyklen von G, die e enthalten, ist $r(>0)$. Bezeichnen wir diejenigen Graphen, die aus G' bzw. G durch die Umkehrung der Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ entstehen, durch $\bar{G}'$ bzw. $\bar{G}$. Jeder Zyklus von $\bar{G}$ enthält e, und zwar hat $\bar{G}$ einen Zyklus dann und nur dann, wenn es eine Bahn aus B nach A in $\bar{G}'$ gibt.

Fall 2/a: $\bar{G}'$ hat keine Bahn aus B nach A. Dann erfüllen die Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ den Satz auch bezüglich G.

Fall 2/b: $\bar{G}'$ hat eine Bahn aus B nach A. Da $\bar{G}'$ zyklenfrei ist, gibt es in ihm keine Bahn aus A nach B. Die $k+1$ Kanten

$$e, e_1, e_2, \ldots, e_k$$

erfüllen den Satz. (Es gilt offenbar $k+1 \leqq c+r$, wo c die Anzahl der Zyklen in $\bar{G}$ bedeutet.)

6. VERMUTUNG. In jedem gerichteten endlichen Graphen G, der nicht zyklenfrei ist, gibt es eine Kante e mit der folgenden Eigenschaft: wenn G^* denjenigen Graphen bezeichnet, der aus G durch die Umkehrung von e entsteht, so enthält G^* wenigere Zyklen, als G.

Ist diese Vermutung wahr, so folgt der Satz aus ihr unmittelbar durch sukzessive Verminderung der Anzahl der Zyklen. Wie man es zeigen kann, im Falle, daß die Vermutung nicht gilt, ist jedes Gegenbeispiel mit minimaler Anzahl von Punkten ein derartiger Graph, in dem alle Punkte eine gemeinsame Klasse mod γ bilden. Diese Tatsache kann folgenderweise bewiesen werden. Betrachten wir ein Gegenbeispiel G^0 und die Klasseneinteilung γ der Punkte von G^0. Wir nehmen an, daß die Anzahl der Klassen mindestens 2 ist. Wir bilden einen neuen Graphen G^+ aus G^0 durch das Zusammenziehen der Punkte in jeder Klasse. (Die Punkte von G^+ entsprechen ein-eindeutig den Klassen von G^0. Jeder derartigen Kante von G^0, die in verschiedenen Klassen liegende Punkte verbindet, entspricht eine Kante in G^+ zwischen den den Klassen zugeordneten Punkten. G^+ hat keine übrige Kante.) G^+ ist zyklenfrei. Es existiert eine Klasse, die mindestens zwei Punkte von G^0 enthält. Wenn derjenige Graph, der aus den Punkten dieser Klasse und den sie verbindenden Kanten besteht, kein Gegenbeispiel wäre, so bekäme man durch die Umkehrung der entsprechenden Kante e auch aus G^0 einen Graphen mit niedrigerer Anzahl von Zyklen.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST

(Eingegangen am 10. Mai 1963.)

Literatur

[1] И. Фидрих (I. FIDRICH), О перенумерации графов, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), S. 1–7.

ON EXTREMAL GRAPHS CONTAINING NO WHEELS

By

J. W. MOON (London)

(*Presented by* G. HAJÓS)

§ 1. Introduction. A graph which consists of a simple cycle with an additional vertex, the "center", joined to each vertex of the cycle has been defined as a *wheel* by TUTTE [3]. Suppose that G is an ordinary graph which contains no wheels as subgraphs but which loses this property whenever any new edge is added joining two vertices not already joined. The main object here is to show that this implies that

$$2n-3 \leqq E \leqq \left[\frac{n^2}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right], \tag{1. 1}$$

where n and E denote the number of vertices and edges of G. Both inequalities are best possible and we will characterize the extremal graphs, i. e., those for which equality holds on either side. We assume throughout that $n \geqq 4$.

§ 2. Maximal graphs containing no wheels. Let H_n denote a graph with n vertices constructed as follows: The vertices are split into two sets, P and Q, with $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ and $\left[\frac{n}{2}\right]$ vertices, respectively. There are as many edges joining pairs of vertices in P as is consistent with the requirement that no two of these edges have a vertex in common. Each vertex in P is joined by an edge to each vertex in Q.

If $n \equiv 1 \pmod 4$, let L_n denote a graph defined as above except that P is now the set with $\left[\frac{n}{2}\right]$ vertices. If $n \equiv 2 \pmod 4$, let L_n denote a graph defined as above except that P and Q have $n/2+1$ and $n/2-1$ vertices, respectively. For convenience, let $L_n = H_n$ in the remaining cases.

Let F_5 denote a graph consisting of a path (a, b, c, d) each vertex of which is joined to a fifth vertex e. Let F_6 denote a graph obtained from F_5 by the addition of a sixth vertex f which is joined to a, c, and d. Finally, let F_7 denote a graph obtained from F_6 by the addition of a seventh vertex g which is joined to a, b, d, and f.

The following properties of these graphs can readily be verified.

(2. 1) H_n and L_n each have $\left[\frac{n^2}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right]$ edges.

(2. 2) Neither H_n nor L_n contain any wheels.

(2. 3) At least one wheel is formed when any new edge is added to H_n or L_n.

These statements also apply to F_n, when $n = 5$, 6, and 7.

The right hand side of inequality (1. 1) is a consequence of the following result.

THEOREM 1. *Let*

$$\varphi(n) = \left[\frac{n^2}{4}\right] + \left[\frac{n+1}{4}\right] = \begin{cases} 4l^2+l, & \text{if } n = 4l; \\ 4l^2+3l, & \text{if } n = 4l+1; \\ 4l^2+5l+1, & \text{if } n = 4l+2; \\ 4l^2+7l+3, & \text{if } n = 4l+3. \end{cases}$$

Then the only graphs with n vertices and at least $\varphi(n)$ edges which contain no wheels are H_n, L_n, and F_n.

PROOF. The theorem certainly holds when $n=4$. Suppose that it has been proved for all $n \leqq m$. Let G be some graph with $m+1$ vertices and at least $\varphi(m+1)$ edges which contains no wheels. We may assume that G has exactly $\varphi(m+1)$ edges, for if it can be shown that this implies that $G = H_{m+1}$, L_{m+1}, or F_{m+1}, then the slightly stronger statement in the theorem will be an immediate consequence of property (2. 3).

Suppose that $m = 4l+1$. Then G has $4l+2$ vertices and $4l^2+5l+1$ edges. Since $(2l+2)(4l+2) > 2(4l^2+5l+1)$, it follows that there is some vertex x in G of degree d, where $d \leqq 2l+1$. Let G' be the graph obtained by removing x and its d incident edges from G. Then G' contains no wheels and has $4l+1$ vertices and $\varphi(4l+2)-d \geqq \varphi(4l+2)-(2l+1) = \varphi(4l+1)$ edges. It follows from the induction hypothesis and (2. 1) that $G' = H_m$, L_m, or F_m, and that $d = 2l+1$. Hence, G consists of H_m, L_m, or F_m, plus the vertex x which is joined to precisely $2l+1$ vertices of H_m, L_m, or F_m.

We now consider the possibilities. First, suppose that $G' = H_m$. It is clear that x cannot be joined to more than one vertex of both P and Q simultaneously, for in that case we could select two vertices from P and two vertices from Q which were adjacent to x. But these chosen vertices form a cycle, from the definition of H_m, and hence would form a forbidden wheel with x. This observation and the fact that x must be joined to at least one vertex in P, since Q contains only $2l$ vertices, leaves the following alternatives:

(a) The vertex x is joined to every vertex of P and to no vertex of Q.

(b) The vertex x is joined to $2l$ vertices of P and to one vertex q of Q.

(c) The vertex x is joined to one vertex p_1 of P and to every vertex of Q.

Alternative (a) implies that $G = H_{m+1}$, by definition.

Alternative (b) is impossible if x is joined to two adjacent vertices of P because these two vertices with x and q would form a complete subgraph of order 4, which is a wheel.

This impossibility can be avoided only when $2l=2$, and x is joined to the vertex in P which is joined to no other vertex in P. In this case $m=5$ and $G = F_6$.

Alternative (c). Suppose p_1 is also joined to the vertex p_2 in P. Then if q_1 and q_2 are two vertices of Q, the vertices p_2, q_1, x, q_2 form a cycle of length four. As each of these vertices is joined to p_1, this forms a forbidden wheel. Hence, p_1 can only be the vertex joined to no other vertices of P. This implies that $G = L_{m+1}$, by definition.

The second possibility is that $G' = L_m$. The same argument as used before reduces the alternatives to the following:

(d) The vertex x is joined to every vertex of Q and to no vertex of P.

(e) The vertex x is joined to $2l$ vertices of Q and to one vertex of P.

(f) The vertex x is joined to one vertex of Q and to every vertex of P.

Alternative (d) implies that $G = H_{m+1}$. Alternatives (e) and (f) are impossible by the same arguments as were used in treating the first parts of (c) and (b), respectively.

The remaining possibility is that $G' = F_5$. It can easily be checked that this can happen only when $G = F_6$.

Thus we see that if the theorem holds when $n = m = 4l+1$, then it also holds when $n = m+1 = 4l+2$. To complete the proof of Theorem 1 by induction it is necessary to treat separately the remaining cases where $m \equiv 0, 2, 3 \pmod 4$. As the arguments are quite similar to the one used above, we omit the details. Perhaps the most tedious part is in considering the various possibilities when $G' = F_m$. Fortunately, however, there are only three of these rather exceptional graphs because one verifies that it is impossible to construct a maximal extremal graph of 8 vertices by adjoining a new vertex to vertices of F_7.

It may be of interest to mention the following simple argument which gives a fairly good upper bound for the number of edges in a graph G with n vertices, each of positive degree, which contains no wheels. Let e_k denote the number of edges both of whose endvertices are joined to the k'th vertex of G. If G contains no wheels then clearly $e_k \leqq d_k - 1$, where d_k denotes the degree of the k'th vertex. If this inequality is summed over all the vertices of G each edge (i, j) is counted $t(i, j)$ times, where $t(i, j)$ denotes the number of triangles (or complete subgraphs of order 3) containing the edge (i, j). Hence, the summed inequalities become

$$3T \leqq 2E - n, \tag{2. 1}$$

where T denotes the total number of triangles contained in G. But NORDHAUS and STEWART [2] (see also MOON and MOSER [1]) have shown that

$$3T \geqq \frac{E}{n}(4E - n^2). \tag{2. 2}$$

Combining these inequalities we find that

$$E < n(n+2)/4, \tag{2. 3}$$

which differs from the best possible result in Theorem 1 by approximately $n/4$.

It also can be shown that

$$E \leqq \frac{1}{2}\sum d_k^2 - \sum t^2(i, j), \tag{2. 4}$$

where the sums are over the vertices and edges of G, but we omit the derivation of this. Some of the graphs defined in the next section show that it is possible for equality to hold in (2. 1) and (2. 4).

§ 3. Minimal graphs containing no wheels. Let T_n denote any graph which consists of a tree with $n-1$ vertices and an additional vertex t joined to each vertex of the tree. Let R_n denote any graph with n vertices which contains a triangle with

vertices a, b and c such that each of the remaining vertices is joined to precisely two of these three vertices and to no others. To distinguish between the graphs R_n and T_n we assume that each edge of the triangle (a, b, c) belongs to at least one other triangle. Q_5 denotes the graph obtained from the complete graph of order 4 by subdividing one of its edges (p, q) into two edges, (p, x) and (x, q), by the insertion of a fifth vertex x.

The following statements are easily established.

(3. 1) The graphs T_n and R_n all have $2n-3$ edges.

(3. 2) None of the graphs T_n or R_n contain any wheels.

(3. 3) At least one wheel is formed when any new edge is added to the graphs T_n or R_n.

These statements also apply to Q_5, when $n=5$.

THEOREM 2. *The only graphs with n vertices and not more that* $2n-3$ *edges for which the addition of any new edge increases the number of wheels they contain are the graphs* T_n, R_n, *and* Q_5.

PROOF. When $n=4$ the theorem is obviously true. Suppose that it has been proved for all $n \leqq m$ and let G be some graph with $m+1$ vertices which satisfies the hypothesis. Since every vertex in a wheel has degree at least 3, it follows that the minimal degree d of the vertices of G satisfies $d \geqq 2$. The fact that G has at most $2(m+1)-3$ edges implies that $d<4$.

Suppose $d=2$. Let G' denote the graph obtained from G by removing some vertex x of degree 2. The only wheels x could belong to in G are those formed by adding a new edge joining x to some other vertex. Hence, adding any new edge to G', a graph with m vertices and at most $2m-3$ edges, forms the same new wheels as are formed by adding the same new edge to G. By the induction hypothesis and (3. 1) we may assert that G' has exactly $2m-3$ edges and is one of the graphs T_m, R_m, or Q_5.

We first assume that x is adjacent to two nonadjacent vertices p and q, in which case every other vertex z of G' must be adjacent to both p and q. This is because the addition of the edge (x, z) to G forms at least one new wheel which of necessity contains the vertices p, q, x, and z. One of these 4 vertices must be the center of this wheel; the fact that p is not joined to q eliminates all of these except z, which then, by definition, must be joined to both p and q. It requires $2m-4$ edges for p and q to be adjacent to all the remaining vertices of G'. Hence, G' contains only one other edge, say (r, s). If $m=4$, then G' is simply the complete graph of order 4 with one edge missing and $G=Q_5$. If $m \geqq 5$, there is another vertex w of degree 2. It is easily seen, in view of the hypothetical structure of G', that the addition of the new edge (w, x) to G would not form a new wheel, contrary to the hypothesis. We may therefore assert that if $G \neq Q_5$, then the vertices p and q to which x is joined to each other.

By checking the various possibilities it is not difficult to see that if $G'=Q_5$, then it would be impossible for G to have the properties it is supposed to have. So we may now assume that $G'=T_m$ or R_m. By an argument similar to that given above it can be shown that each vertex z of G' not joined to x is joined to at least one of the vertices p or q.

If $G' = T_m$, suppose first that neither p nor q is the vertex t in T_m. Now t is of degree $m-1$, p is adjacent with q, and each of the remaining vertices is at least joined to one of p or q. The number of edges G' must have to satisfy these requirements alone is $(m-1)+1+(m-3) = 2m-3$. But this is the total number of edges contained in G', so each vertex $z \neq p, q, t$ is joined to precisely 2 vertices of the triangle (p, q, t). Therefore G is one of the graphs T_{m+1} or R_{m+1}, according as to whether or not either of the vertices p or q has degree $m-1$ in G'. If $G' = T_m$ and x is adjacent with t and one other vertex, then $G = T_{m+1}$ by definition.

If $G' = R_m$ then x may be joined to two vertices of the triangle (a, b, c), in which case $G = R_{m+1}$, or x may be joined to one vertex, say a, of this triangle and to some vertex $f \neq b, c$, where f is joined to a. But this possibility cannot occur, because if g is some vertex of R_m other than a which is joined to both b and c (and such a vertex exists by definition of R_m) then the addition of the new edge (x, g) would not form a new wheel in G. The last possibility, when x is joined neither to a nor to b and c, cannot occur.

It remains to consider the case $d = 3$. Let G_1 denote the graph obtained from G by removing some vertex x of minimal degree 3. Let p, q and r be the three vertices to which x is joined in G. Now G_1 has m vertices and at most $2m-4$ edges. Hence, using the induction hypothesis, there must exist a pair of nonadjacent vertices y and z such that the addition of the new edge (y, z) to G_1 does not form a new wheel. But, in the original graph G the addition of (y, z) does form a new wheel which, of necessity, must involve x. Either x or one of the three vertices joined to x is the center of this wheel and in either case it must be that two of the vertices joined to x, say p and q, are not joined to each other while each is joined to the third vertex r. If we form the graph G_2 by adding the edge (p, q) to G_1, it is not difficult to see that the addition of any new edge to G_2 forms either the same new wheel as is formed by the addition of the same edge to G or a new wheel which differs from the corresponding wheel in G in that the arc (p, x, q) is replaced by (p, q). (Conceivably, a new wheel might be formed when (p, q) is added to G_1. This is the reason for not assuming at the outset that G has no wheels as was done in Theorem 1.)

By the induction hypothesis we may now assert that $G_2 = T_m$, R_m, or Q_5. But G_2 has at most one vertex of degree less than three, since r is the only vertex whose degree is smaller in G_2 than in G. Hence, $G_2 \neq T_m$ or R_m since both of these graphs contain at least two vertices of degree less than three. Neither can $G_2 = Q_5$, since the one vertex in Q_5 of degree less than three, corresponding to r, is joined to two nonadjacent vertices, contrary to the case in G_2.

These contradictions show that the original graph G must contain at least one vertex of degree 2 and, with the earlier argument, shows that $G = T_{m+1}$, R_{m+1}, or Q_5. This suffices to complete the proof of the theorem by induction.

The left hand side of inequality (1. 1) now follows immediately by virtue of (3. 1) and (3. 2).

In closing we remark that DIRAC and ERDŐS (unpublished) have obtained a result corresponding to Theorem 1 when the only wheels considered are those involving five vertices.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY COLLEGE LONDON

(Received 18 November 1963)

References

[1] J. W. MOON and L. MOSER, On a problem of Turán, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **7** (1962), pp. 283–286.

[2] E. A. NORDHAUS and B. M. STEWART, Triangles in an ordinary graph, *Canadian Journal of Math.*, **15** (1963), pp. 33–41.

[3] W. T. TUTTE, A theory of 3-connected graphs, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Series A*, 64=*Indag. Math.*, **23** (1961), pp. 441–455.

A COMPARISON OF TWO INEQUALITIES FOR THE TRIANGLE

By

J. STEINIG (Zürich)

(*Presented by* L. FEJES TÓTH)

1. Introduction. Let P be an arbitrary point in a triangle T or on its boundary, and let R_1, R_2, R_3 be the distances from P to the vertices of T, while r_1, r_2, r_3 denote the distances from P to the sides of T. A well-known inequality of P. ERDŐS states that

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3),$$

with equality only when T is equilateral and P its centroid. On the other hand, L. FEJES TÓTH has given an elegant proof ([1] or [2]) of the following inequality, due to M. SCHREIBER [3]: for any point P in the plane of triangle T,

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 6r,$$

where r denotes the radius of the triangle's inscribed circle. Equality occurs in the same case as above.

The purpose of this note is to discuss the following question: for a given point in T or on its boundary, which is the sharpest of these two inequalities? To do this, we shall examine the locus of all points in T or on its boundary for which $r_1 + r_2 + r_3$ has a given constant value, which is a straight line. We shall then give a new proof of an interesting theorem concerning the direction of all such lines.

2. A construction. Let A_1, A_2, A_3 be the vertices of T, and let a_i be the side of T opposite vertex A_i. Further, we shall denote T together with its boundary by $\bar{T}$.

If T is equilateral, $\Sigma r_i = 3r$ for all points of $\bar{T}$. Let us therefore suppose first that

$$a_1 < a_2 \leqq a_3. \tag{1}$$

A. TIMMERMANS has shown [4] how to construct a line such that Σr_i is constant for all points of $\bar{T}$ on the line:

Determine points D and E on sides a_3 and a_2 respectively, so that $DA_2 = EA_3 = a_1$ (Fig. 1). Now let P be any point of $\bar{T}$ on the line joining D and E. Denoting by S the area of quad-

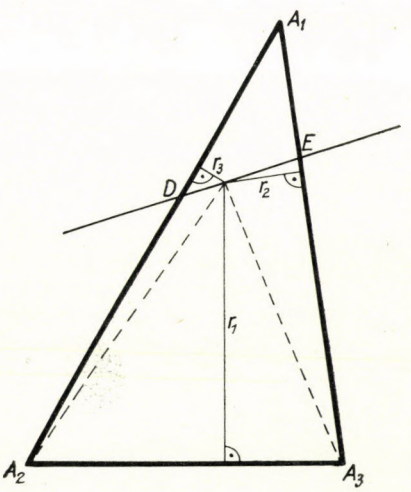


Fig. 1

rilateral DEA_3A_2, we have

$$2S = r_1 \cdot A_2A_3 + r_2 \cdot A_3E + r_3 \cdot A_2D,$$

or $2S = a_1 \Sigma r_i$, and therefore Σr_i is constant for all points of $\bar{T}$ on line DE.

That this is also true for all points of $\bar{T}$ on a parallel to line DE is an immediate consequence of the theorem which states that all triangles with the same base and the same altitude are equal in area. For let Q be a point of $\bar{T}$ on a parallel FG to DE. If Δ is the area of triangle QDE, we have:

$$2(S+\Delta) = a_1 \Sigma r_i \quad \text{if } FG \text{ is between } DE \text{ and } A_1$$

$$2(S-\Delta) = a_1 \Sigma r_i \quad \text{if } FG \text{ is between } DE \text{ and } a_1.$$

In either case, Σr_i is constant for all points of $\bar{T}$ on FG. At the same time, this shows that Σr_i increases as one nears vertex A_1 in a constant direction from any point of $\bar{T}$.

3. Three Theorems. The contents of the preceeding paragraph were already known many years ago, but the following interesting theorem seems to have escaped attention until recently [5]:

THEOREM 1. *The locus of all points in a triangle whose distances from the three sides have the same sum is a line perpendicular to the line joining the incenter and circumcenter of the triangle.*

TIMMERMANS's construction permits us to formulate this theorem in another manner:

THEOREM 2. *The line joining the two points obtained by carrying a length equal to the shortest side of a triangle from the vertices limiting that side onto the two other sides in direction of the third vertex is perpendicular to the line which joins the triangle's incenter and circumcenter.*

One sees without difficulty that this restriction to the triangle's shortest side is unnecessary. Indeed, three different lines can be constructed by the above method, and it is readily shown, for instance by vectorial methods, that they are parallel. A third, more general enunciation would accordingly be as follows:

THEOREM 3. *Carry a length equal to one of the sides of a triangle from the vertices limiting it onto the other two sides in direction of the third vertex. The line joining the two points thus obtained is perpendicular to the line which joins the triangle's incenter and circumcenter.*

We shall prove this theorem in its third formulation, by showing that a line constructed by TIMMERMAN's method is perpendicular to the line joinig the triangle's incenter and circumcenter. The simplest proof seems to be by using vectorial methods.

4. Proof. We denote the incenter of triangle T by I, and its circumcenter by O. Let $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_3A_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_2A_1} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$, and $\overrightarrow{DE} = \vec{v}$, and let the lengths of these vectors be a, b, c, u and v respectively. It is clear that $\vec{u}$ and $\vec{v}$ are nullvectors if and only if T is equilateral, a case which we have excluded (1). To show that

these two vectors are orthogonal, it is therefore sufficient to show that their scalar product vanishes.

By TIMMERMAN's construction, we have $\vec{v} = \vec{a} + \frac{a}{b}\vec{b} - \frac{a}{c}\vec{c}$. Further, it can be shown that

$$\overrightarrow{A_2 I} = \frac{ac}{a+b+c}\left(\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{c}}{c}\right),$$

and that

$$\overrightarrow{A_2 O} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\vec{b}(\vec{a}+\vec{b})}{2\vec{b}\cdot\vec{t}}\vec{t},$$

where $\vec{t}$ is any (non-vanishing) vector orthogonal to $\vec{a}$.

We thus have the following expression for $\vec{u} = \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{A_2 O} - \overrightarrow{A_2 I}$:

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\vec{b}(\vec{a}+\vec{b})}{2\vec{b}\cdot\vec{t}}\vec{t} - \frac{ac}{a+b+c}\left(\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{c}}{c}\right).$$

By forming the scalar product $\vec{u}\cdot\vec{v}$, replacing $\vec{c}$ by $\vec{a}+\vec{b}$, and bearing in mind that since $\vec{a}\cdot\vec{t} = 0$ (for $\vec{t}$ is orthogonal to $\vec{a}$), we have $\vec{b}\cdot\vec{t} = \vec{c}\cdot\vec{t}$, we obtain after some simplifications

$$(2) \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{a^2bc^2 + ab^2c^2 - a^4b - ab^4 - a^3b^2 - a^2b^3}{2bc(a+b+c)} - \frac{2(a^2b+ab^2)}{2bc(a+b+c)}\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

But $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}$ and therefore $2\vec{a}\cdot\vec{b} = c^2 - a^2 - b^2$. Introducing this value in (2), we find that $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Therefore the vectors $\vec{u}$ and $\vec{v}$ are orthogonal, as was to be proved.

5. Some consequences. We have seen that the value of Σr_i increases as one nears vertex A_1 in a constant direction. From this we can deduce several interesting consequences.

5. 1. To the smallest side of T is opposed the greatest altitude, and we can solve the following maximum problem:

In a given triangle T, locate a point P whose distances from the three sides have the greatest possible sum.

P is the vertex opposite the smallest side of T, and the greatest possible value of Σr_i is given by the triangle's greatest altitude.

The solution of the corresponding minimum problem is given by the vertex opposite the triangle's greatest side, and the least possible value of Σr_i is determined by the triangle's smallest altitude.

5. 2. If h_i is the altitude of T from vertex A_i, it is easily shown that $\Sigma h_i \geqq 9r$. Indeed, the inequality between the harmonic and arithmetic means, applied to h_1, h_2, h_3 gives us

$$(3) \qquad 3\left(\sum \frac{1}{h_i}\right)^{-1} \leqq \frac{1}{3}\sum h_i,$$

and since $\sum \frac{1}{h_i} = \frac{1}{r}$ in any triangle, we have the desired inequality. Equality holds only when all three altitudes are equal, that is to say if T is equilateral. (For other proofs, see [6] and [7], and [8] for a generalisation.)

Since T is not equilateral (1), its greatest altitude must therefore be greater than $3r$. Thus $\Sigma r_i = 3r$ for all points of $\bar{T}$ on the line through I and perpendicular to line OI, while $\Sigma r_i > 3r$ for vertex A_1, and we can apply paragraph 2 to conclude as follows:

6. Conclusion. In any non-equilateral triangle T, the line through the incenter I and perpendicular to the line joining I with the circumcenter O divides T and its boundary in two regions. For all points in that region which contains the vertex opposite the triangle's smallest side, we have

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3) \geqq 6r.$$

In the second region,

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 6r \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3),$$

while on the dividing line,

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3) = 6r.$$

(Received 19 December 1963)

References

[1] L. FEJES TÓTH, Inequalities Concerning Polygons and Polyhedra, *Duke Math. J.*, **15** (1948), pp. 817–822.
[2] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel, und im Raum* (Springer Verlag, Berlin), pp. 11–12.
[3] M. SCHREIBER, Aufgabe 196, *Jber, dtsch. Math.-Ver.*, **45** (1935), p. 63.
[4] A. TIMMERMANS, Problèmes et théorèmes sur les polygones et sur les polyèdres, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, **18** (1827–28), pp. 217–232.
[5] E. J. F. PRIMROSE, A Triangle Property, note 2967, *Math. Gaz.*, **XLV** (1961), pp. 231–232.
[6] F. LEUENBERGER, Einige Dreiecksungleichungen, *Elem. Math.* **13**, (1958), pp. 121–126.
[7] J. BERKES, Bemerkung zur Arbeit von F. Leuenberger über einige Dreiecksungleichungen, *Elem. Math.*, **14** (1959), pp. 62–64.
[8] F. LEUENBERGER, Extremaleigenschaften der Summe der wichtigsten Ecktransversalen des n-dimensionalen Simplex, *Elem. Math.*, **15** (1960), pp. 81–82.

ON SUBCOMMUTATIVE RINGS

By

J. D. REID[1] (Syracuse, New York, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

1. Introduction. In his book ([4], p. 232), L. FUCHS lists the following problem of SZELE and SZENDREI: Is the endomorphism ring of an Abelian group commutative if every endomorphic image of the group is fully invariant? This question clearly has a negative answer if there exists a group G whose endomorphism ring A is non-commutative and has the property that for every pair $a, b \in A$ there exists $c \in A$ such that $ab = ca$ (thinking of endomorphisms as acting on the right). Recently, A. L. S. CORNER [3] has shown that any reduced countable torsion free ring with identity is isomorphic to the endomorphism ring of some reduced countable torsion free group. Thus, to answer the question of SZELE and SZENDREI, it suffices to exhibit a reduced countable torsion free ring with identity in which the above mentioned equations are solvable. We do this in section 3.

In section 2 we give a representation theorem for rings A in which the equation

$$ab = ca \tag{1}$$

always has a solution c given a and b. Such rings have been considered previously and are called *subcommutative* rings by BARBILIAN and BUCUR (see [2]). We will use this name also. Our theorem discusses rings which have no proper nilpotent elements but says nothing about subcommutative nil rings. In section 4 we show that there exist non-commutative subcommutative nil rings as well as non-commutative nil rings which are not subcommutative. These examples were pointed out to the author by D. B. LISSNER, to whom the author is indebted as well for several discussions on the topic of this paper.

2. Subcommutative rings. Let A be a subcommutative ring. Defining prime ideal as in the commutative case, it is easy to show that the intersection of the prime ideals of A is precisely the set of nilpotent elements of A. Indeed a trivial modification of the proof of the corresponding fact for commutative rings accomplishes this. Hence, if N is the ideal of nilpotent elements of A then the ring $\bar{A} = A/N$ is a subcommutative ring without nilpotent elements and our remarks show that, in such a ring $\bar{A}$, the intersection of the prime ideals is zero. To state our theorem on such rings, we use the following:

DEFINITION. Let I be an index set and for each $i \in I$, let Δ_i be a division ring. Denote the complete direct sum of the Δ_i by $\Sigma^* \Delta_i$. For $a \in \Sigma^* \Delta_i$, define a' by

$$(a')_i = \begin{cases} 0 & \text{if } a_i = 0 \\ a_i^{-1} & \text{if } a_i \neq 0. \end{cases}$$

We call a subring A of $\Sigma^* \Delta_i$ a *stable* subring if $aAa' \subseteq A$ for each $a \in A$.

[1] Support for this research by the National Science Foundation (NSF Grant GP-1615) is gratefully acknowledged.

We recall that $\Sigma^* \Delta_i$ is the usual ring formed from the cartesian product of the sets Δ_i with coordinate-wise operations.

THEOREM. *Any stable subring of a complete direct sum of division rings is subcommutative and has no proper nilpotent elements. Every subcommutative ring without proper nilpotent elements is a subdirect sum of stable subrings of division rings.*

PROOF. The first statement follows immediately from the observation that, for $a, b \in \Sigma^* \Delta_i$, one has $ab = (aba')a$. For the second statement, let A be a subcommutative ring with no proper nilpotent elements and let $\mathscr{P}$ be the collection of prime ideals of A. Then $\cap \{P | P \in \mathscr{P}\} = 0$ so that A is a subdirect sum of the rings A/P, $P \in \mathscr{P}$. The rings A/P have no divisors of zero and, being homomorphic images of A, they are subcommutative. The condition for subcommutativity (i. e. equation(1)) implies that any pair of non-zero elements of A/P have a non-zero common left multiple so that, by a well known theorem of ORE, there exists a division ring Δ_P containing A/P. Finally, for any pair $a, b \in A/P$, $a \neq 0$, the equation $ab = ca$ has a unique solution in Δ_P, namely $c = aba^{-1}$. Subcommutativity of A/P implies that this solution c must lie in A/P. Hence A/P is a stable subring of Δ_P as required.

It is easy to see, and for subcommutative rings with identity it has been pointed out by BUCUR [2], that any prime ideal in the sense of general ring theory (i. e. P is prime in A if $aAb \subseteq P$ implies $a \in P$ or $b \in P$) of a subcommutative ring is prime in our more restricted sense ($ab \in P$ implies $a \in P$ or $b \in P$). It follows from this and from the fact that the intersection of the prime ideals is the set of nilpotent elements in a subcommutative ring that the upper and lower nil radicals of such a ring coincide. Hence our theorem can be interpreted as the analogue for subcommutative rings of the structure theorem on rings whose lower nil radical is zero ([5], p. 196). We note also that semi-simple subcommutative rings are covered by the theorem since primitive ideals are prime ideals. In the case of a semi-simple subcommutative ring A one can obtain a slightly stronger result. In such a ring, the intersection of the modular maximal left ideals is zero, this being the radical. Since modular maximal left ideals are maximal left ideals and since in a subcommutative ring every left ideal is two-sided, one has a collection of maximal ideals with zero intersection. The quotient of the ring by any one of these ideals is a division ring so that our ring is a subdirect sum of division rings. Moreover, we have here a dense subdirect sum and can now state the following analogue of a well known theorem on commutative rings ([5], p. 16):

PROPOSITION. Any semi-simple subcommutative ring is a dense subdirect sum of division rings.

It may be of some interest to point out that the theorem of section 2 yields a short proof of a well known theorem on the commutativity of certain types of rings. In addition to furnishing an application for our representation theorem the proof given here of the commutativity theorem requires less machinery than the usual proof (cf. [5, p. 217]).

THEOREM (JACOBSON). *Let A be a ring in which for every $x \in A$ there exists an integer $n(x) > 1$ such that $x^{n(x)} = x$. Then A is commutative.*

PROOF. As in [5; p. 217] we observe that $x^{n(x)-1}$ is a central idempotent for each $x \in A$ and that A has no proper nilpotent elements. Moreover, for $xy \in A$,

$xy = x^{n(x)}y = (xyx^{n(x)-2})x$ so that A is subcommutative. Hence, by our representation theorem, to show that an arbitrary ring satisfying the hypotheses is commutative, it suffices to treat the case in which A is a stable subring of a division ring Δ. Viewing the equation $x^{n(x)} = x$ as an equation in Δ we conclude that $1 = x^{n(x)-1}$ so that $x^{-1} = x^{n(x)-2} \in A$ when $x \neq 0$, $x \in A$. Thus A is itself a division ring and we may apply Kaplansky's theorem on division rings ([5], p. 185) to conclude that A is commutative.

3. Subcommutative endomorphism rings. We now show that there exist non-commutative subcommutative rings with identity whose additive groups are torsion-free, finite rank and reduced. Let D be the division algebra of rational quaternions: i. e. the algebra over the rational number field Q with basis $1, i, j, k$ and multiplication table $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$. For rational primes p, write Q_p for the field of p-adic numbers and put $D_p = D \otimes Q_p$. Then D_p is a central simple algebra over Q_p and it is known that there exists p such that D_p is not a full matrix algebra over Q_p (cf. [1], p. 149, Thm. 31). Since $[D_p: Q_p] = [D: Q] = 4$ this implies for such p that D_p is a division algebra over Q_p. Thus ([1], Ch. IX) D_p contains a valuation ring J_p. It is easy to see that as additive groups, D_p/J_p is p-primary and J_p is torsion-free homogeneous whose type is that of the p-adic integers. Moreover, $aJ_pa^{-1} \subsetneqq J_p$ for all $a \in D_p$, $a \neq 0$.

Now put $A = D \cap J_p$. Then A is torsion-free and has an identity. Moreover, since D_p/J_p is a torsion group it is clear that D/A is a torsion group. It follows from this that A is non-commutative as a ring. The inclusions $A \subsetneqq D$ and $A \subsetneqq J_p$ imply respectively that A has finite rank and that A is reduced as a group. Finally it is clear that $aAa^{-1} \subsetneqq A$ for all $a \in D$, in particular for all $a \in A$ so that A is stable in D, hence A is subcommutative. Applying Corner's result to this example now settles the question of SZELE and SZENDREI.

4. Nil rings. To obtain non-commutative subcommutative nil rings, let F be a field σ a non-trivial automorphism of F and R the set of formal power series in one indeterminant x over F. With the usual addition and with multiplication defined by the relation $xb = \sigma(b)x$, $b \in F$, together with the distributive law, it is well known (cf. [5], p. 187) that R is an associative ring. For $r \in R$, put $\deg r = k$ if $r = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^i$, $a_k \neq 0$. Then r is a unit if and only if $\deg r = 0$ so that the ideal $N = \{r | \deg r > 0\}$ of non-units of R is the radical of R. Clearly $N^k = \{r | \deg r \geqq k\}$ for all $k \geqq 1$ and if $a \in N$, $\deg a = k$ then $aN = Na = N^{k+1}$. Hence N is a subcommutative non-commutative radical ring. For $k \geqq 2$, N^k is properly contained in N^{k-1} so N/N^k is nilpotent of index k. For $k \geqq 3$, N/N^k is a non-commutative subcommutative nilpotent ring of index k. The direct sum of the rings N/N^k, $k \geqq 3$ is a non-commutative subcommutative non-nilpotent nil ring.

On the other hand, let R_n be the ring of strictly triangular matrices over the field F; i. e.

$$R_n = \{(a_{ij}) \in F_n | a_{ij} = 0 \text{ for } i \geqq j\}.$$

Then R_n is nilpotent of index n and if $n \geqq 3$, R_n is not subcommutative. Indeed, representing R_n as a ring of linear transformations acting on the right of an n-dimensional vector space over F, the equation $ab = ca$ implies range $(ab) \subseteq$ range (a). For $n \geqq 3$ however, it is easy to find $a, b \in R_n$ which fail to satisfy this condition;

e. g. $a=e_{12}$, $b=e_{23}$ (these are the usual matrix units). Finally, the direct sum of the R_n (or the infinite dimensional analogue of R_n) gives a non-nilpotent nil ring (radical ring) which is not subcommutative.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
SYRACUSE UNIVERSITY,
SYRACUSE, NEW YORK, USA

(Received 10 February 1964)

Bibliography

[1] A. A. ALBERT, Structure of Algebras, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* v. **24**, New York, *Amer. Math. Soc.*, 1939.

[2] I. BUCUR, Sur le théorème de décomposition de Lasker-Noether dans les anneaux subcommutatifs, *Revue de Mathématiques pures et appliquées, Acad. R. P. R.*, **8** (1963), pp. 565–568.

[3] A. L. S. CORNER, Every countable reduced torsion free ring is an endomorphism ring, *Proc. London Math. Soc.*, **52** (1963), 687–710.

[4] L. FUCHS, *Abelian groups, Publ. House of Hung. Acad. Sci.* (Budapest, 1958).

[5] N. JACOBSON, Structure of Rings, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* v. **37**, *Providence, Amer. Math. Soc.*, 1956.

ÜBER DIE APPROXIMATION IM STARKEN SINNE

Von

G. ALEXITS (Budapest), Mitglied der Akademie und L. LEINDLER (Szeged)

1. Einleitung

Bezeichne $f(x)$ eine nach 2π periodische Funktion, $s_n(x)$ die n-te Partialsumme ihrer Fourierreihe, $\tilde{f}(x)$ bzw. $\tilde{s}_n(x)$ die konjugierten Funktionen von $f(x)$ bzw. $s_n(x)$. Bezeichne ferner $h_n(x)$ bzw. $\tilde{h}_n(x)$ die „starken Summen"

$$h_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |f(x)-s_\nu(x)| \quad \text{bzw.} \quad \tilde{h}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |\tilde{f}(x)-\tilde{s}_\nu(x)|.$$

Neulich wurde die folgende Verschärfung eines klassischen Satzes von BERNSTEIN [3] bewiesen (ALEXITS und KRÁLIK [2]): Ist $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ mit $0<\alpha<1$, so gelten die Beziehungen

$$h_n(x) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \tilde{h}_n(x) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \tag{1}$$

gleichmäßig. Die Approximation im starken Sinne ist also für die Funktionen der Klasse $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$ bis auf Konstanten nicht schlechter als die beste trigonometrische Approximation. Die Lipschitzklasse $\alpha=1$ nimmt jedoch eine Sonderstellung ein, da für die Approximation der Funktion $f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$ mit ihren Fejérschen Mitteln bekanntlich nur $f(x)-\sigma_n(x) = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ behauptet werden kann, wohl aber gilt für alle Cesàroschen Mittel $\tilde{\sigma}_n^\beta(x)$ mit $\beta>0$ die Beziehung

$$\tilde{f}(x)-\tilde{\sigma}_n^\beta(x) = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2}$$

gleichmäßig, und diese Approximation ist für die Klasse Lip 1 sogar charakteristisch (ALEXITS [1]).

Vergleicht man (1) und (2), so ist man geneigt zur fragen, ob nicht etwa auch $\tilde{h}_n(x)=O(n^{-1})$ für alle $f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$ besteht? Wir wollen zeigen, daß indem nicht so ist, im Gegenteil, es gilt der

SATZ I. *Es gibt Funktionen* $f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$, *für welche in einzelnen Punkten*

$$\tilde{h}_n(x) \geqq c\,\frac{\log n}{n}$$

mit $c>0$ *gilt.*

Das ist zugleich die schärfste untere Schranke (bis auf die Größe von c), da wir auch die folgende Behauptung recht einfach beweisen werden:

SATZ II. *Ist* $f(x) \in \mathrm{Lip}\, 1$, *so gilt die Abschätzung*

$$\tilde{h}_n(x) = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

gleichmäßig.

Verzichten wir auf die Beschränkheit fast überall der Ableitung $f'(x)$ und verlangen nur ihre Existenz fast überall und Integrierbarkeit, so können wir noch folgendes behaupten:

SATZ III. *Existiert* $f'(x)$ *fast überall und ist sowohl* $f'(x)$ *wie auch* $\tilde{f}'(x)$ *integrierbar, so gelten die Abschätzungen*

$$h_n(x) = O_x\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad \tilde{h}_n(x) = O_x\left(\frac{\log n}{n}\right) \tag{3}$$

fast überall.

Den Spezialfall $f'(x) \in L^p$ mit $p > 1$ möchten wir eigens hervorheben. Dann sind nämlich sowohl $f'(x)$ wie auch $\tilde{f}'(x)$ L^p-integrierbar (s. [5], I. S. 253), also sind die Voraussetzungen des Satzes III erfüllt. Die Bedingung $f'(x) \in L^p$ ist aber mit $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(1, p)$ gleichbedeutend (s. [5], I. S. 180). Wir erhalten somit aus dem Satz III das folgende

KOROLLAR. *Ist* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(1, p)$ *mit* $p > 1$, *so gelten die Beziehungen* (3) *fast überall.*

2. Beweis des Satzes I

Wir definieren folgenderweise eine Funktion $f(x)$, welche dem Satz I genügt:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(\frac{\sin (5 \cdot 2^k - l)x}{l} - \frac{\sin (5 \cdot 2^k + l)x}{l} \right), \tag{4}$$

und zeigen zunächst, daß $f(x)$ zur Klasse Lip 1 gehört. Sei nämlich h eine beliebige positive Zahl und n die kleinste natürliche Zahl, für welche $h \geqq 2^{-n}$ ist. Wir zerlegen in (4) die rechts stehende äußere Summe in die beiden Teile

$$\sum_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} = f_{1,n}(x) + f_{2,n}(x).$$

Beachtet man, daß für die Funktionen

$$R_k(x) = \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(\frac{\sin (5 \cdot 2^k - l)x}{l} - \frac{\sin (5 \cdot 2^k + l)x}{l} \right) =$$

$$= - \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} 2 (\cos 5 \cdot 2^k x) \frac{\sin lx}{l}$$

die Abschätzung $\max\limits_{-\pi \leqq x \leqq \pi} |R_k(x)| \leqq M$ $(k = 1, 2, \ldots)$ gilt, so ergibt sich

$$|f_{2,n}(x+h) - f_{2,n}(x)| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(|R_k(x+h)| + |R_k(x)| \right) \leqq \frac{2M}{2^n} \leqq 2Mh.$$

Was nun die Funktion $f_{1,n}(x)$ anbetrifft, haben wir zu zeigen, daß $|f'_{1,n}(x)| \leqq K$ für alle x gilt. Wir zerlegen auch $f'_{1,n}(x)$ in zwei Teile:

$$(5) \qquad f'_{1,n}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} 2 \cos 5 \cdot 2^k x \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{\sin lx}{l} \right)' =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} 5 \cdot 2^{k+1} \sin 5 \cdot 2^k x \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{\sin lx}{l} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} 2 \cos 5 \cdot 2^k x \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \cos lx = A_1^{(n)}(x) + A_2^{(n)}(x).$$

Da $f'_{1,n}(x)$ eine gerade Funktion und $|f'_{1,n}(0)| \leqq 1$ ist, können wir uns auf das halboffene Intervall $0 < x \leqq \pi$ beschränken. Sei dann m die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$(6) \qquad \frac{1}{x} \leqq 5 \cdot 2^m$$

ist, und bezeichne $\mu = \min(n, m)$. Dann gilt

$$(7) \qquad |A_2^{(n)}(x)| \leqq \left| \sum_{k=1}^{\mu-1} \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \cos 5 \cdot 2^k x \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \cos lx \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=\mu}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \cos 5 \cdot 2^k x \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \cos lx \right| = A_{21}^{(n)}(x) + A_{22}^{(n)}(x).$$

Wegen der monotonen Abnahme von $\cos x$ ergibt sich nach (6), daß die Funktionen

$$C_k(x) = \frac{\cos 5 \cdot 2^k x}{2^{k-1}} \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \cos lx$$

für $k \leqq \mu - 1$ positiv sind und eine monoton abnehmende Folge bilden. Dann ist

$$C_{k+1}(x) = \frac{\cos 5 \cdot 2^{k+1} x}{2^k} \sum_{l=2^k+1}^{2^{k+1}} \cos lx \leqq$$

$$\leqq \frac{\cos 5 \cdot 2^k x}{2^k} \left(\sum_{l=2^k+1}^{3 \cdot 2^{k-1}} \cos lx + \sum_{l=3 \cdot 2^{k-1}+1}^{2^{k+1}} \cos lx \right) \leqq \frac{\cos 5 \cdot 2^k x}{2^{k-1}} \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \cos lx = C_k(x).$$

Daraus und aus $A_{21}^{(n)}(x) = \left| \sum_{k=1}^{\mu-1} (-1)^k C_k(x) \right|$ folgt

$$(8) \qquad A_{21}^{(n)}(x) \leqq 1.$$

Ist $n \leqq m$, so ist

$$(9) \qquad A_{22}^{(n)}(x) = |C_n(x)| \leqq 1.$$

Ist aber $n>m$, so können wir $A_{22}^{(n)}(x)$ auf Grund von (6) und der bekannten Ungleichung

$$\left|\sum_{l=p}^{q}\cos lx\right| \leqq \frac{4}{x} \qquad (0<x\leqq\pi)$$

(s. z. B. [4], S. 99) folgenderweise abschätzen:

$$A_{22}^{(n)}(x) \leqq \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\frac{4}{x} \leqq 20\cdot 2^m\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}<80. \tag{10}$$

Aus (7), (8), (9) und (10) ergibt sich somit

$$|A_2^{(n)}(x)|<81. \tag{11}$$

Jetzt wollen wir die Funktion $A_1^{(n)}(x)$ abschätzen:

$$|A_1^{(n)}(x)| \leqq \left|\sum_{k=1}^{\mu-1}(-1)^{k-1}10\sin 5\cdot 2^k x\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{\sin lx}{l}\right| + \tag{12}$$

$$+\left|\sum_{k=\mu}^{n}(-1)^{k-1}10\sin 5\cdot 2^k x\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{\sin lx}{l}\right| = A_{11}^{(n)}(x)+A_{12}^{(n)}(x).$$

Die Funktionen

$$I_k(x) = \sin 5\cdot 2^k x\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{\sin lx}{l}$$

sind für $k\leqq\mu-1$ positiv und bilden eine monoton zunehmende Folge. Daraus folgt die Ungleichung

$$A_{11}^{(n)}(x) = \left|\sum_{k=1}^{\mu-1}(-1)^{k-1}10I_k(x)\right| \leqq 10. \tag{13}$$

Übergehen wir nun zur Abschätzung von $A_{12}^{(n)}(x)$. Ist $n\leqq m$, d. h. $\mu=n$, so besteht

$$A_{12}^{(n)}(x) = 10|I_n(x)| \leqq 10. \tag{14}$$

Im Falle $n>m$ benutzen wir die bekannte Ungleichung

$$\left|\sum_{l=p}^{q}\frac{\sin lx}{l}\right| \leqq \frac{4}{px}$$

(s. z. B. [4], S. 99) und die Ungleichung (6). Dann ergibt sich

$$A_{12}^{(n)}(x) \leqq \sum_{k=m}^{n}10\frac{4}{2^{k-1}x} \leqq 200\cdot 2^m\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}<800. \tag{15}$$

Nach (12), (13), (14) und (15) ist alsdann

$$|A_1^{(n)}(x)|\leqq 810. \tag{16}$$

Aus (5), (11) und (16) folgt endlich

$$|f'_{1,n}(x)|<30^2$$

für jeden Punkt x, womit $f(x)\in$ Lip 1 bewiesen ist.

Wir zeigen nun, daß für die unter (4) definierte Funktion $f(x)$ die Beziehung $\tilde{h}_n(0) \geqq 2^{-5}\frac{\log n}{n}$ gilt. Setzen wir in der Tat $4\cdot 2^p \leqq n < 4\cdot 2^{p+1}$. Dann ist

$$\tilde{h}_n(0) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |\tilde{f}(0)-\tilde{s}_\nu(0)| \geqq \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{p-1}\sum_{\nu=4\cdot 2^r+1}^{4\cdot 2^{r+1}} |\tilde{f}(0)-\tilde{s}_\nu(0)| \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{p-1}\sum_{\nu=5\cdot 2^r+2^{r-1}}^{6\cdot 2^r-1} |\tilde{f}(0)-\tilde{s}_\nu(0)| = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{p-1} I_r .$$

Jetzt schätzen wir I_r ab:

$$I_r = \sum_{\nu=11\cdot 2^{r-1}}^{6\cdot 2^r-1}\left|\frac{(-1)^{r+1}}{2^r}\sum_{l=\nu-10\cdot 2^{r-1}+1}^{2^r}\frac{1}{l}\right| =$$

$$= \frac{1}{2^r}\sum_{k=2^{r-1}+1}^{2^r}\sum_{l=k}^{2^r}\frac{1}{l} \geqq \frac{1}{2^r}\sum_{k=2^{r-1}+1}^{3\cdot 2^{r-2}}\sum_{l=k}^{2^r}\frac{1}{l} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2^r}\sum_{k=2^{r-1}+1}^{2^r}\sum_{l=3\cdot 2^{r-2}}^{2^r}\frac{1}{l} \geqq \frac{1}{2^r}\,2^{r-2}\cdot 2^{r-2}\,\frac{1}{2^r} = \frac{1}{16}.$$

Daraus folgt

$$\tilde{h}_n(0) \geqq \frac{1}{n}\sum_{r=2}^{p-1}\frac{1}{16} = \frac{p-2}{16n}.$$

Für $n \geqq 2^{20}$ ist $p-2 > \frac{1}{2}\log n$, also $\tilde{h}_n(0) \geqq 2^{-5}\frac{\log n}{n}$ wie behauptet.

Damit haben wir den Satz I vollständig bewiesen.

3. Beweis der Sätze 2 und 3

Zum Beweis des Satzes II benötigen wir den folgenden elementaren

HILFSSATZ. *Bezeichne s_n die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Ist $h_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|s_k| = O(1)$ und konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{k}$, so gilt die Beziehung*

$$\sum_{\nu=1}^{n} R_\nu = O(\log n),$$

wobei $R_\nu = \left|\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{u_k}{k}\right|$ bedeutet.

Durch wiederholte Abelsche Umformung ergibt sich nämlich

$$R_\nu = \left|\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{u_k}{k}\right| \leqq \sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{|s_k|}{k(k+1)} + \frac{|s_\nu|}{\nu+1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{2h_k}{(k+1)(k+2)} + \frac{h_\nu}{\nu+1} + \frac{|s_\nu|}{\nu+1}.$$

und daraus

$$\sum_{\nu=1}^{n} R_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{n} O\left(\frac{1}{\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|s_\nu|}{\nu+1} \leqq O(\log n) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{h_\nu}{\nu+1} + \frac{|s_n|}{n+1} =$$

$$= O(\log n) + O(\log n) + O(1) = O(\log n).$$

Um den Satz II zu beweisen, bemerken wir, daß aus $f(x) \in \mathrm{Lip}\, 1$ bekanntlich die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\Sigma(b_k \cos kx - a_k \sin kx)$ gegen die konjugierte Funktion $\tilde{f}(x)$ folgt, daher ist

$$\tilde{h}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \sum_{k=\nu+1}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx) \right|.$$

Setzen wir also in unserem Hilfssatz $u_k = k(b_k \cos kx - a_k \sin kx)$, so haben wir nur noch das gleichmäßige Bestehen von

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |s_k'(x)| = O(1) \tag{17}$$

zu zeigen. Aus dem üblichen Beweis der starken Summierbarkeit der Fourierreihe (s. z. B. [5], II. S. 182) ergibt sich aber leicht, daß die starken Summen der Fourierreihe einer fast überall beschränkten Funktion gleichmäßig beschränkt bleiben. Wegen $f(x) \in \mathrm{Lip}\, 1$ ist die Funktion $f'(x)$ beschränkt, wegen

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |s_k'(x)| \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |s_k'(x) - f'(x)| + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |f'(x)|$$

besteht also die Abschätzung (17) tatsächlich gleichmäßig, w. z. b. w.

Der Beweis des Satzes III verläuft ähnlich. Der einzige Unterschied ist nur, daß (17) nicht gleichmäßig, sondern nach dem bekannten Satz von MARCINKIEWICZ über die starke Summation der Fourierreihe einer integrierbaren Funktion (s. [5], II. S. 184) für fast alle x besteht. Die Anwendung unseres Hilfssatzes ergibt alsdann $\tilde{h}_n(x) = O_x\left(\frac{\log n}{n}\right)$ fast überall, und dieselbe Abschätzung erhalten wir ähnlicherweise auch für $h_n(x)$.

(Eingegangen am 20. Februar 1964.)

Schriftenverzeichnis

[1] G. ALEXITS, Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier, *Mat. Fiz. Lapok*, **48** (1941), S. 410–422.

[2] G. ALEXITS–D. KRÁLIK, Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen, *Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci.*, **8 (A)** (1963), S. 317–326.

[3] S. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné, *Mémoires Acad. Roy. Belgique*, **(2) 4** (1912), S. 1–104.

[4] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций* (Москва, 1949).

[5] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, I, II (Cambridge, 1959).

QUASI-ISOMORPHISM OF DIRECT SUMS OF CYCLIC GROUPS*

By

R. A. BEAUMONT (Seattle, Washington, USA) and R. S. PIERCE (Seattle, Washington, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

All groups considered in this note are abelian p-groups for a fixed prime p. In [1; Theorem 1. 3], it was shown that if G and H are quasi-isomorphic p-groups ($G \dot{\cong} H$), then G and H satisfy the following two conditions:

(I) There exists an integer $k \geqq 0$ such that for all integers $n \geqq 0$ and $r \geqq 0$

$$\sum_{j=0}^{r} f_G(n+k+j) \leqq \sum_{j=0}^{2k+r} f_H(n+j),$$

$$\sum_{j=0}^{r} f_H(n+k+j) \leqq \sum_{j=0}^{2k+r} f_G(n+j);$$

(II) $$f_G(\alpha) = f_H(\alpha) \text{ for all } \alpha \geqq \omega.$$

For any ordinal number α, $f_G(\alpha)$ is the α-th Ulm invariant of G.

Conversely, it was shown that if G and H are countable groups which satisfy (I) and (II), then $G \dot{\cong} H$. Clearly, for countable groups without elements of infinite height, (I) is a necessary and sufficient condition for quasi-isomorphism. As a corollary of [1; Theorem 1. 3] we have that if G and H are countable, then $G \dot{\cong} H$ if and only if G and H have quasi-isomorphic basic subgroups and $G^1 \dot{\cong} H^1$ (G^1 and H^1 are the subgroups of elements of infinite height in G and H respectively). In this note, we use [1; Theorem 1. 3] to prove the following theorem.

THEOREM. *Let G and H be abelian p-groups which are direct sums of cyclic groups. Then $G \dot{\cong} H$ if and only if G and H satisfy condition* (I).

This result has the immediate corollary

COROLLARY. Let G and H be abelian p-groups. Let B^G and B^H be basic subgroups of G and H respectively. If $G \dot{\cong} H$, then $B^G \dot{\cong} B^H$.

PROOF. It is sufficient to remark that for $n < \omega$, $f_G(n) = f_{B^G}(n)$, $f_H(n) = f_{B^H}(n)$, and B^G and B^H are direct sums of cyclic groups.

To prove the Theorem, we are required to show only that (I) implies $G \dot{\cong} H$. The converse follows from [1; Theorem 1. 3]. Therefore, in the remainder of this note we assume that G and H are direct sums of cyclic groups which satisfy (I). Write

$$G = B_1^G \oplus B_2^G \oplus \ldots \oplus B_j^G \oplus \ldots,$$

$$H = B_1^H \oplus B_2^H \oplus \ldots \oplus B_j^H \oplus \ldots,$$

* This work was supported by National Science Foundation Research Grant No. GP. 809.

where B_j^G and B_j^H are direct sums of cyclic groups of order p^j for $j \geqq 1$. Let $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots\}$ be the set of all cardinal numbers which satisfy

(i) $\alpha_0 = \aleph_0$,

(ii) $\alpha_i \geqq \aleph_0$ for all $i \geqq 0$,

(iii) for $i \geqq 1$, $\alpha_i = |B_{j_i}^G|$ or $\alpha_i = |B_{j_i}^H|$ for some j_i,

(iv) if $|B_i^G| \geqq \aleph_0$, then $|B_i^G| = \alpha_{k_i}$ for some k_i and
if $|B_i^H| \geqq \aleph_0$, then $|B_i^H| = \alpha_{l_i}$ for some l_i.

LEMMA 1. *Let G_0 and H_0 be direct sums of cyclic groups such that*

$$f_{G_0}(n) = \begin{cases} f_G(n) & \text{if } f_G(n) < \aleph_0 \\ \aleph_0 & \text{if } f_G(n) \geqq \aleph_0, \end{cases}$$

$$f_{H_0}(n) = \begin{cases} f_H(n) & \text{if } f_H(n) < \aleph_0 \\ \aleph_0 & \text{if } f_H(n) \geqq \aleph_0. \end{cases}$$

For $i \geqq 1$, let G_i and H_i be direct sums of cyclic groups such that

$$f_{G_i}(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } f_G(n) < \alpha_i \\ \alpha_i & \text{if } f_G(n) \geqq \alpha_i, \end{cases}$$

$$f_{H_i}(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } f_H(n) < \alpha_i \\ \alpha_i & \text{if } f_H(n) \geqq \alpha_i. \end{cases}$$

Then $G \cong \sum_{i \geqq 0} \oplus G_i$ and $H \cong \sum_{i \geqq 0} \oplus H_i$.

PROOF. If $f_G(n)$ is finite, then $f_{G_0}(n) = f_G(n)$ and $f_{G_i}(n) = 0$ for $i \geqq 1$. Therefore, $f_G(n) = \sum_{i \geqq 0} f_{G_i}(n) = f_{\Sigma \oplus G_i}(n)$. If $f_G(n) \geqq \aleph_0$, then $f_G(n) = |B_{n+1}^G| = \alpha_m$ for some $m \geqq 0$. Moreover, $f_{\Sigma \oplus G_i}(n) = \sum_{i \geqq 0} f_{G_i}(n) = \sum_{i \geqq 0} \varepsilon_i \alpha_i$, where $\varepsilon_i \alpha_i = \alpha_i$ if $\alpha_i \leqq \alpha_m$ and $\varepsilon_i \alpha_i = 0$ if $\alpha_i > \alpha_m$. Hence $f_{\Sigma \oplus G_i}(n) = \alpha_m = f_G(n)$ in this case also. Thus,

$$G \cong G_0 \oplus G_1 \oplus \ldots \oplus G_i \oplus \ldots,$$

since $f_G(n) = f_{\Sigma \oplus G_i}(n)$ for all $n \geqq 0$, and both G and $\sum_{i \geqq 0} \oplus G_i$ are direct sums of cyclic groups. The proof that $H \cong \sum_{i \geqq 0} \oplus H_i$ is the same.

LEMMA 2. *Let G_0 and H_0 be defined as in Lemma 1. Then $G_0 \dot{\cong} H_0$.*

PROOF. G_0 and H_0 are countable direct sums of cyclic groups. Moreover, since G and H satisfy (I), it follows from the definition of G_0 and H_0 that G_0 and H_0 satisfy (I). Hence by [1; Theorem 1. 3], $G_0 \dot{\cong} H_0$.

LEMMA 3. *For $i > 0$, let G_i and H_i be defined as in Lemma 1. If $f_{G_i}(n) = \alpha_i$ for $n \geqq k$, then there exists an m such that $n - k \leqq m \leqq n + k$ and $f_{H_i}(m) = \alpha_i$. If $f_{H_i}(n) = \alpha_i$ for $n \geqq k$, then there exists an m' such that $n - k \leqq m' \leqq n + k$ and $f_{G_i}(m') = \alpha_i$.*

PROOF. Suppose that $f_{G_i}(n)=\alpha_i$ for $n\geqq k$. By the definition of $G_i, f_G(n)\geqq\alpha_i$. By (I),

$$f_G(n) \leqq f_H(n-k)+\ldots+f_H(n+k).$$

Hence, $f_H(m)\geqq\alpha_i$ for some m, where $n-k\leqq m\leqq n+k$. By the definition of H_i, $f_{H_i}(m)=\alpha_i$. The second statement follows symmetrically.

LEMMA 4. *Assume that α is an infinite cardinal. Let L and M be direct sums of cyclic groups with the properties*

(i) *for all $n\geqq 0$, $f_L(n)=0$ or $f_L(n)=\alpha$, and for all $n'\geqq 0$, $f_M(n')=0$ or $f_M(n')=\alpha$;*

(ii) *if $n\geqq k$ is such that $f_L(n)=\alpha$, then there exists m satisfying $n-k\leqq m\leqq n+k$ such that $f_M(m)=\alpha$ and*
if $n'\geqq k$ is such that $f_M(n')=\alpha$, then there exists m' satisfying $n'-k\leqq m'\leqq$ $\leqq n'+k$ such that $f_L(m')=\alpha$.

Then there exists a group K which is a direct sum of cyclic groups containing subgroups L' and M' with the properties

$$L\cong L',\ M\cong M',\ p^{2k+1}K\subseteqq L' \text{ and } p^{2k+1}K\subseteqq M'.$$

PROOF. Let K be a direct sum of cyclic groups satisfying

$$f_K(n)=\begin{cases}0 \text{ for } 0\leqq n<2k\\ \alpha \text{ for } n=2k\\ f_L(n-k)+f_M(n-k) \text{ for } n>2k.\end{cases}$$

We will show that K contains a subgroup $L'\cong L$ such that $p^{2k+1}K\subseteqq L'$. The result for M is obtained similarly. Let $2k=n_0<n_1<n_2<\ldots$ be all integers n_i such that $f_K(n_i)=\alpha$. For $i\geqq 0$, let

$$S_i=\{m\,|\,n_i-2k\leqq m\leqq n_i, f_L(m)\neq 0\}.$$

It follows from the definition of K and from (ii) that S_i is not empty for $i>0$. For a fixed $i\geqq 0$, let $S_i=\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$, where $n_i-2k\leqq m_1<m_2<\ldots<m_r\leqq n_i$. Define K_{ij} for $1\leqq j\leqq r$ to be a direct sum of α copies of $Z(p^{n_i+1})$. Let

$$K_i=\sum_{j=1}^{r}\oplus K_{ij},\quad L'_{ij}=p^{n_i-m_j}K_{ij},\quad L'_i=\sum_{j=1}^{r}\oplus L'_{ij}.$$

If S_0 is empty, we define $L'_0=0$. By the definition of $K_i, f_{K_i}(n)=0$ if $n\neq n_i$, and $f_{K_i}(n_i)=\alpha$. Since $L'_i=\sum_{j=1}^{r}\oplus L'_{ij}$, it follows that $f_{L'_i}(m)=0$ if $m\notin S_i$ and $f_{L'_i}(m)=\alpha$ if $m\in S_i$. Moreover, $p^{2k+1}K_i\subseteqq L'_i$ for all $i\geqq 0$. Note that $\sum_{i>0}\oplus K_i$ has the same Ulm invariants as K, so that $\sum_{i>0}\oplus K_i\cong K$. Under this isomorphism,

$$\sum_{i>0}\oplus L'_i\cong L'\subseteqq K.$$

Since $\sum_{i>0} \oplus L_i'$ has the same Ulm invariants as L,

$$L' \cong \sum_{i>0} \oplus L_i' \cong L.$$

Finally, we have $p^{2k+1}\left(\sum_{i>0} \oplus K_i\right) \subseteqq \sum_{i>0} \oplus L_i'$, so that $p^{2k+1}K \subseteqq L'$.

PROOF OF THE THEOREM. For $i>0$, the groups G_i and H_i, defined in Lemma 1, satisfy (i) of Lemma 4 for the infinite cardinal α_i. By Lemma 3, these groups also satisfy (ii) of Lemma 4. Therefore, by Lemma 4, there exists a group K_i for each $i>0$ such that K_i contains subgroups G_i', H_i' satisfying

$$G_i' \cong G_i, \quad H_i' \cong H_i, \quad p^{2k+1}K_i \subseteqq G_i', \quad p^{2k+1}K_i \subseteqq H_i'.$$

Let $K = \sum_{i>0} \oplus K_i$. Then K contains subgroups $\sum_{i>0} \oplus G_i'$ and $\sum_{i>0} \oplus H_i'$ such that

$$\sum_{i>0} \oplus G_i' \cong \sum_{i>0} \oplus G_i, \quad \sum_{i>0} \oplus H_i' \cong \sum_{i>0} \oplus H_i,$$

$$p^{2k+1}K \subseteqq \sum_{i>0} \oplus G_i', \quad p^{2k+1}K \subseteqq \sum_{i>0} \oplus H_i'.$$

Hence $\sum_{i>0} \oplus G_i \mathrel{\dot\cong} K \mathrel{\dot\cong} \sum_{i>0} \oplus H_i$. Since $G_0 \mathrel{\dot\cong} H_0$ by Lemma 2, it follows that $\sum_{i \geqq 0} \oplus G_i \mathrel{\dot\cong} \sum_{i \geqq 0} \oplus H_i$. Finally, by Lemma 1, $G \cong \sum_{i \geqq 0} \oplus G_i$ and $H \cong \sum_{i \geqq 0} \oplus H_i$. Hence $G \mathrel{\dot\cong} H$.

UNIVERSITY OF WASHINGTON
DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
SEATTLE, USA

(Received 12 March 1964)

Reference

[1] R. A. BEAUMONT and R. S. PIERCE, *Quasi-isomorphism of p-groups*, Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups, Pub. House Hungarian Acad. Sci., Budapest, 1964, pp. 13–27.

ÜBER DIE VOLLIDEALE UND PERMUTATIONSPOLYNOME EINES GALOISFELDES

Von

W. NÖBAUER (Wien)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

1. Unter einem Permutationspolynom des kommutativen Ringes mit Einselement $\mathfrak{r}$ versteht man ein Polynom $f(x) \in \mathfrak{r}[x]$, für welches die durch $\pi\alpha = f(\alpha)$ (α durchläuft $\mathfrak{r}$) definierte eindeutige Abbildung π von $\mathfrak{r}$ in sich eine Permutation von $\mathfrak{r}$ ist. Die Arbeit [1] beschäftigt sich mit Permutationspolynomen eines Galoisfeldes $\mathfrak{q} = GF(q)$ und studiert unter anderem die Frage nach Permutationspolynomen von $\mathfrak{q}$, die auch Permutationspolynom eines Erweiterungs-Galoisfeldes von $\mathfrak{q}$ sind. Auch wir wollen hier einen Beitrag zu diesem Problem geben; es wird sich dabei als zweckmäßig erweisen, auch solche Polynome über $\mathfrak{q}$ zu betrachten, welche eine Permutation der Vereinigung $\mathfrak{w}$ endlich vieler Erweiterungs-Galoisfelder von $\mathfrak{q}$ bewirken. Bei der Untersuchung derartiger Polynome spielen jene Polynome aus $\mathfrak{q}[x] = Q$ eine Rolle, welche für alle Elemente von $\mathfrak{w}$ verschwinden. Alle diese Polynome bilden ein Ideal von Q, das mit $f(x)$ bei beliebigem $u(x) \in Q$ stets auch $f(u(x))$ enthält, also ein Vollideal von Q (vgl. [3]). Wir geben deshalb zu Beginn unserer Arbeit in Erweiterung eines Satzes von MILGRAM [2] ein System von Vollidealen von Q an, in dem jedes dieser Vollideale genau einmal vorkommt.

2. Wie bisher sei $\mathfrak{q}$ das Galoisfeld von der Ordnung q und der Charakteristik p, und $\mathfrak{q}[x] = Q$. Wie bereits erwähnt, bezeichnen wir ein Ideal A von Q als Vollideal, wenn aus $f(x) \in A$ folgt $f(u(x)) \in A$ für beliebiges $u(x) \in Q$. Das Einheitsideal und das Nullideal sind Vollideale (wir bezeichnen sie als die „trivialen Vollideale"); es ist leicht einzusehen (vgl. etwa [3]), daß mit A und B auch die Summe (A, B), der Durchschnitt $A \cap B$ und das Produkt AB Vollideale sind. Wir wollen alle Vollideale von Q in eindeutiger Darstellung angeben; diese Aufgabe wird gelöst durch folgenden:[1]

SATZ 1. *Man erhält sämtliche nichttrivialen Vollideale von Q, aber keine weiteren Ideale, wenn man alle Ideale*

$$V = (x^{q^{e_1}} - x)^{a_1} \cap (x^{q^{e_2}} - x)^{a_2} \cap \ldots \cap (x^{q^{e_r}} - x)^{a_r} \tag{1}$$

bildet mit $r > 0$, $e_1 > e_2 > \ldots > e_r > 0$, $a_\nu > 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots, r$ und $a_j > a_i$ für $e_j \| e_i$. Dabei sind r, die Folge der e_ν und die Folge der a_ν durch V eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Zunächst zeigen wir, daß jedes nichttriviale Vollideal V sich in der Gestalt (1) darstellen läßt. Da Q Hauptidealring ist, haben wir $V = (f(x))$ mit einem normierten, nichtkonstanten $f(x) \in Q$. Es sei Ω der algebraische Abschluß von $\mathfrak{q}$ und $\alpha_1 \in \Omega$ Nullstelle von $f(x)$; für beliebiges $g(x) \in Q$ haben wir $f(g(x)) \in V$, also

[1] Wie üblich schreiben wir $a|b$, wenn a Teiler von b, und $a \| b$, wenn $a|b$ und $a < b$.

$f(g(\alpha_1))=0$, mit α_1 sind also alle Elemente des Erweiterungskörpers $\mathfrak{q}(\alpha_1)$ von $\mathfrak{q}$ Nullstellen von $f(x)$. Es sei etwa α_1 eine a_1-fache Nullstelle von $f(x)$ und das davon verschiedene $\alpha_2 \in \mathfrak{q}(\alpha_1)$ eine a_2-fache Nullstelle von $f(x)$, dann gilt in $\Omega[x]$

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{a_1}(x-\alpha_2)^{a_2}(x-\alpha_3)^{a_3}\ldots(x-\alpha_s)^{a_s} \tag{2}$$

mit $s>1$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$ und $a_\nu > 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots, s$. Wir wählen $h(x) \in Q$ so, daß $h(\alpha_1)-\alpha_2 = 0$ und $h'(\alpha_1) \neq 0$; dies ist möglich, wir brauchen ja nur $g(x)$ mit $\alpha_2 = g(\alpha_1)$ zu nehmen und zu setzen

$$h(x) = \begin{cases} g(x) \text{ falls } g'(\alpha_1) \neq 0 \\ g(x)+(x^{q^t}-x) \text{ falls } g'(\alpha_1) = 0 \text{ und } t \text{ der Grad von } \alpha_1 \text{ über } \mathfrak{q} \text{ ist.} \end{cases}$$

Dann haben wir in $\Omega[x]$:

$$f(h(x)) = (h(x)-\alpha_1)^{a_1}(h(x)-\alpha_2)^{a_2}(h(x)-\alpha_3)^{a_3}\ldots(h(x)-\alpha_s)^{a_s} \tag{3}$$

wegen $h(\alpha_1)=\alpha_2$ und $h'(\alpha_1)\neq 0$ kommt $(x-\alpha_1)$ in der Primfaktorzerlegung von $f(h(x))$ genau a_2-mal vor, wegen $f(x)|f(h(x))$ gilt also $a_2 \geqq a_1$. Ist also $\alpha_i \in \Omega$ in (2) vom Grad e_i über $\mathfrak{q}$, dann gilt, da $\mathfrak{q}(\alpha_i)$ dann Galoisfeld der Ordnung q^{e_i} ist, jedenfalls $(x^{q^{e_i}}-x)^{a_i}|f(x)$, also haben wir

$$(f(x)) \subseteqq \bigcap_{i=1}^{s} (x^{q^{e_i}}-x)^{a_i}. \tag{4}$$

Würde in (4) nicht das Gleichheitszeichen gelten, so hätten wir, wenn wir das normierte kleinste gemeinsame Vielfache der Polynome $(x^{q^{e_i}}-x)^{a_i}$ mit $v(x)$ bezeichnen:

$$f(x) = g(x)v(x) \tag{5}$$

mit einem nichtkonstanten $g(x) \in Q$; $g(x)$ hätte also mindestens eine Nullstelle α in Ω, diese müßte eines der α_j von (2) sein und wir hätten $(x-\alpha_j)^{a_j+1}|f(x)$ im Widerspruch zu (2).

Wir denken uns nun in (4) die Ideale auf der rechten Seite nach absteigenden e_ν geordnet; die Glieder mit gleichem e_ν ordnen wir jeweils nach absteigenden a_ν an, wir können dann von ihnen sofort alle bis auf das erste streichen. Wir erhalten so eine Darstellung für V von der Gestalt (1) mit $r>0$, $e_1 > e_2 > \ldots > e_r > 0$ und $a_\nu > 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots, r$; falls in dieser Darstellung gilt $e_j \| e_i$ und $a_j \leqq a_i$, so haben wir $(x^{q^{e_j}}-x)^{a_j}|(x^{q^{e_i}}-x)^{a_i}$ und können das $(x^{q^{e_j}}-x)^{a_j}$ streichen, wir kommen dadurch also tatsächlich zu einer Darstellung für V von der in Satz 1 angegebenen Gestalt.

Weiter sind die Ideale (1) alle vom Null- und Einheitsideal verschieden; daß sie sämtlich Vollideale sind, ergibt sich daraus, daß $(x^{q^{e_\nu}}-x)$ die Menge der für alle Elemente von $GF(q^{e_\nu})$ verschwindenden Polynome von Q und daher wie leicht zu erkennen Vollideal von Q ist, sowie aus der schon früher erwähnten Abgeschlossenheit der Menge der Vollideale gegenüber der Produkt- und Durchschnittsbildung von Idealen. Schließlich seien zwei Darstellungen eines nichttrivialen Vollideales V in der Gestalt (1) gegeben, es gelte also mit normiertem $f(x)$

$$V = \bigcap_{\nu=1}^{r} (x^{q^{e_\nu}}-x)^{a_\nu} = \bigcap_{\nu=1}^{s} (x^{q^{f_\nu}}-x)^{b_\nu} = (f(x)) \tag{6}$$

mit $0<r\leqq s$ und den übrigen in Satz 1 angegebenen Bedingungen für die e_ν bzw. f_ν und a_ν bzw. b_ν. Es ist dann e_1 sowie f_1 der größte unter den Graden der Nullstellen von $f(x)$ über $\mathfrak{q}$, also gilt $e_1=f_1$, und a_1 sowie b_1 ist die Vielfachheit dieser Nullstellen größten Grades, also gilt $a_1=b_1$. Sei schon gezeigt, daß gilt $e_\nu=f_\nu$ und $a_\nu=b_\nu$ für $\nu\leqq t$ und sei

$$\bigcap_{\nu=1}^{t}(x^{q^{e_\nu}}-x)^{a_\nu}=\bigcap_{\nu=1}^{t}(x^{q^{f_\nu}}-x)^{b_\nu}=(g(x))\text{ mit normiertem }g(x);$$

wir haben dann $g(x)|f(x)$; sei $f(x)=g(x)h(x)$, dann ist e_{t+1} bzw. f_{t+1} der größte unter den Graden über $\mathfrak{q}$ der Nullstellen von $h(x)$, also gilt $e_{t+1}=f_{t+1}$, und es ist $a_{t+1}-\max\limits_{\nu\leqq t,\,e_{t+1}|e_\nu}a_\nu$ bzw. $b_{t+1}-\max\limits_{\nu\leqq t,\,f_{t+1}|f_\nu}b_\nu$ die Vielfachheit dieser Nullstellen größten Grades, also gilt $a_{t+1}=b_{t+1}$; für $t=r$ ergibt sich bei obiger Schlußweise $h(x)=1$, daher gilt auch $s=r$, womit auch die Eindeutigkeitsaussage von Satz 1 bewiesen ist.

3. Wir bezeichnen ein nichttriviales Vollideal $V=(f(x))$ von Q als Restpolynomideal, wenn in der Darstellung (1) von V gilt $a_\nu=1$ für $\nu=1,2,\ldots,r$. Es ist also V genau dann Restpolynomideal, wenn $f(x)$ keine mehrfachen Nullstellen hat; da jedes nichttriviale Vollideal im Ideal (x^q-x) enthalten ist und daher Summe und Durchschnitt zweier nichttrivialer Vollideale wieder nichttriviale Vollideale sind, sind also Summe und Durchschnitt zweier Restpolynomideale wieder ein Restpolynomideal (natürlich ist das Produkt zweier Restpolynomideale nicht immer ein solches). Die Restpolynomideale von Q bilden also einen Teilverband $\mathfrak{V}$ im Idealverband von Q. Mit ϑV bezeichnen wir die Nullstellenmannigfaltigkeit in Ω des Restpolynomideales V. Aus

$$V=(x^{q^{e_1}}-x)\cap(x^{q^{e_2}}-x)\cap\ldots\cap(x^{q^{e_r}}-x) \tag{7}$$

mit $r>0$ und beliebigen $e_\nu>0$ folgt sogleich

$$\vartheta V=GF(q^{e_1})\cup GF(q^{e_2})\cup\ldots\cup GF(q^{e_r}) \tag{8}$$

wenn $\cup$ die mengentheoretische Vereinigung in der Potenzmenge von Ω bezeichnet; daraus folgt sogleich, daß die Bildmenge $\vartheta\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{V}$ die aus allen Vereinigungsmengen endlich vieler endlicher Zwischenkörper von $\Omega|\mathfrak{q}$ bestehende Teilmenge der Potenzmenge von Ω ist; denkt man sich die Ideale von V als Hauptideale geschrieben, dann erkennt man sogleich, daß ϑ umkehrbar eindeutig ist und daß gilt $\vartheta(V_1\cap V_2)=\vartheta V_1\cup\vartheta V_2$ sowie $\vartheta(V_1,V_2)=\vartheta V_1\cap\vartheta V_2$. Wir können damit also, wenn wir die verbandstheoretische Terminologie von [4] verwenden, folgenden Satz aussprechen:

SATZ 2. *Die Restpolynomideale von Q bilden gegenüber der Bildung von Summe und Durchschnitt einen Verband $\mathfrak{V}$. Ordnet man jedem Restpolynomideal seine Nullstellenmannigfaltigkeit im algebraischen Abschluß Ω von $\mathfrak{q}$ zu, so erhält man einen dualen Isomorphismus ϑ in den Teilmengenverband $\mathfrak{P}(\Omega)$ von Ω; $\vartheta\mathfrak{V}$ ist der von allen endlichen Zwischenkörpern von $\Omega|\mathfrak{q}$ erzeugte Teilverband von $\mathfrak{P}(\Omega)$.*

4. Wir setzen nun $\vartheta\mathfrak{V}=\mathfrak{W}$ und bezeichnen mit η die inverse Abbildung zu ϑ. Für $\mathfrak{w}\in\mathfrak{W}$ ist also $\eta\mathfrak{w}$ das Restpolynomideal der für alle Elemente von $\mathfrak{w}$ verschwindenden Polynome aus Q. Unter einem Permutationspolynom von $\mathfrak{w}$ verstehen

wir ein Polynom $f(x) \in Q$, für welches die durch

$$\pi\alpha = f(\alpha) \qquad (\alpha \text{ durchläuft } \mathfrak{w}) \tag{9}$$

erklärte Abbildung π von $\mathfrak{w}$ in sich eine Permutation von $\mathfrak{w}$ ist; wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{w}$ ist also $f(x)$ genau dann Permutationspolynom, wenn π umkehrbar eindeutig, aber auch genau dann Permutationspolynom, wenn π eine Abbildung auf $\mathfrak{w}$ ist.

Entsprechen den beiden Polynomen $f_1(x), f_2(x)$ aus Q die Abbildungen π_1, π_2 von $\mathfrak{w}$ in sich, dann entspricht dem Polynom $f_1(f_2(x))$ ersichtlich die Abbildung $\pi_1 \pi_2$; daraus folgt sogleich, daß mit $f_1(x)$ und $f_2(x)$ auch $f_1(f_2(x))$ ein Permutationspolynom von $\mathfrak{w}$ ist; da das Polynom x Permutationspolynom von $\mathfrak{w}$ ist, bilden also die Permutationspolynome von $\mathfrak{w}$ eine Teilhalbgruppe $\mathfrak{h}(\mathfrak{w})$ der aus den Elementen von Q mit der Operation der Polynomsubstitution als Verknüpfung bestehenden Halbgruppe, wobei $\mathfrak{h}(\mathfrak{w})$ das Einselement dieser Halbgruppe enthält; ordnet man jedem Polynom $f(x) \in \mathfrak{h}(\mathfrak{w})$ die durch (9) erklärte Abbildung π zu, so erhält man einen Homomorphismus τ von $\mathfrak{h}(\mathfrak{w})$ in die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_{\mathfrak{w}}$ von $\mathfrak{w}$.

Wir beweisen nun

SATZ 3. *Ist* $f(x) \in \mathfrak{h}(\mathfrak{w})$, *dann gibt es* $g(x) \in Q$, *so daß gilt* $f(g(x)) \equiv g(f(x)) \equiv x \bmod \eta\mathfrak{w}$. *Gibt es umgekehrt zu* $f(x) \in Q$ *ein* $g(x) \in Q$ *mit* $f(g(x)) \equiv x \bmod \eta\mathfrak{w}$ *oder ein* $h(x) \in Q$ *mit* $h(f(x)) \equiv x \bmod \eta\mathfrak{w}$, *dann gilt* $f(x) \in \mathfrak{h}(\mathfrak{w})$.

BEWEIS. Sei $f(x) \in \mathfrak{h}(\mathfrak{w})$ und $\tau f(x) = \pi (\pi \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{w}})$. Wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{w}}$ gilt $\pi^n = \varepsilon$ (Einheitspermutation) für geeignetes $n > 0$, bezeichnen wir das durch $(n-1)$-fache Iteration von $f(x)$ gebildete Polynom von Q mit $g(x)$, so haben wir also $\tau f(g(x)) = \tau g(f(x)) = \pi^n = \varepsilon$, also gehören $f(g(x)) - x$ und $g(f(x)) - x$ zu $\eta\mathfrak{w}$. Umgekehrt folgt aus $f(g(x)) \equiv x \bmod \eta\mathfrak{w}$, daß $\tau f(x) \tau g(x) = \varepsilon$ und aus $g(f(x)) \equiv x \bmod \eta\mathfrak{w}$, daß $\tau g(x) \tau f(x) = \varepsilon$, also in beiden Fällen $\tau f(x) \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{w}}$, also $f(x) \in \mathfrak{h}(\mathfrak{w})$.

5. Wir setzen nun $\varkappa\mathfrak{w} = \mathfrak{h}(\mathfrak{w})$ für jedes $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}$ und wollen die Abbildung $\varkappa$ etwas näher untersuchen.

Zunächst gilt: Aus $\mathfrak{w}_1 \subseteq \mathfrak{w}_2$ folgt $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1) \supseteq \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2)$. Denn ist $f(x) \in \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2)$, dann ist die Abbildung $\alpha \to f(\alpha)$ umkehrbar eindeutig auf $\mathfrak{w}_2$, daher auch umkehrbar eindeutig auf $\mathfrak{w}_1$, daher gilt $f(x) \in \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1)$. Insbesondere gilt also $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}) \subseteq \mathfrak{h}(\mathfrak{q})$ für jedes $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}$.

Nach dem soeben festgestellten haben wir also $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1 \cup \mathfrak{w}_2) \subseteq \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1) \cap \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2)$. Ist umgekehrt $f(x) \in \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1) \cap \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2)$, dann gibt es nach Satz 3 Polynome $g(x), h(x)$ in Q, so daß gilt $g(f(x)) \equiv f(g(x)) \equiv x \bmod \eta\mathfrak{w}_1$ bzw. $f(h(x)) \equiv x \bmod \eta\mathfrak{w}_2$; setzen wir $(\eta\mathfrak{w}_1, \eta\mathfrak{w}_2) = V$, so haben wir also $f(g(x)) \equiv f(h(x)) \bmod V$, woraus sogleich $g(f(g(x))) \equiv g(f(h(x))) \bmod V$ folgt; da aber $g(f(x)) \equiv x \bmod V$ und V ein Vollideal ist, erhalten wir $g(f(g(x))) \equiv g(x) \bmod V$ und $g(f(h(x))) \equiv h(x) \bmod V$, also haben wir $g(x) \equiv h(x) \bmod V$. Ist $\eta\mathfrak{w}_1 = (m_1(x))$, $\eta\mathfrak{w}_2 = (m_2(x))$ und $V = (d(x))$, so ist $d(x)$ ein größter gemeinsamer Teiler von $m_1(x)$, $m_2(x)$ und es sind die Polynome $\dfrac{m_1(x)}{d(x)}$, $\dfrac{m_2(x)}{d(x)}$ teilerfremd; es gibt deshalb ein $l(x)$, so daß gilt

$$\frac{m_1(x)}{d(x)} l(x) \equiv \frac{h(x) - g(x)}{d(x)} \bmod \left(\frac{m_2(x)}{d(x)} \right) \tag{10}$$

daraus folgt $m_1(x)l(x)+g(x)\equiv h(x) \bmod (m_2(x))$, und für $u(x) = g(x)+m_1(x)l(x)$ gilt $u(x)\equiv g(x) \bmod (m_1(x))$, $u(x)\equiv h(x) \bmod (m_2(x))$. Wir haben also $f(u(x))\equiv \equiv f(g(x))\equiv x \bmod \eta\mathfrak{w}_1$, $f(u(x))\equiv f(h(x))\equiv x \bmod \eta\mathfrak{w}_2$, also $f(u(x))\equiv x \bmod (\eta\mathfrak{w}_1\cap\eta\mathfrak{w}_2)$, also $f(u(x))\equiv x \bmod \eta(\mathfrak{w}_1\cup\mathfrak{w}_2)$, wegen Satz 3 daher $f(x)\in\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1\cup\mathfrak{w}_2)$. Somit gilt $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1\cup\mathfrak{w}_2) = \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1)\cap\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2)$.

Wir haben auch $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1\cap\mathfrak{w}_2)\supseteq(\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1), \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2))$, wenn $(\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1), \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2))$ die von $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1)$ und $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2)$ erzeugte Teilhalbgruppe von $\mathfrak{h}(\mathfrak{q})$ bezeichnet. Daß in dieser Beziehung aber nicht immer das Gleichheitszeichen gilt, lehrt folgendes Beispiel:

Wir setzen $\mathfrak{q} = GF(7)$, $\mathfrak{w}_1 = GF(7^2)$, $\mathfrak{w}_2 = GF(7^3)$, so daß also $\mathfrak{w}_1\cap\mathfrak{w}_2 = \mathfrak{q}$. Für $f(x) = x^4+3x$ gilt (vgl. [1], S.199):

$$f(x)\in\mathfrak{h}(\mathfrak{q}),\quad f(x)\notin\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1),\quad f(x)\notin\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2).$$

Wäre $f(x)\in(\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1), \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2))$, so würde man $f(x)$ erhalten durch Komposition von endlich vielen Polynomen aus $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1)$ und $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2)$; die in diesem Kompositum $u_1(u_2(u_3(\ldots)))$ auftretenden Polynome sind nicht konstant und von höchstens viertem Grad; da der Grad eines Permutationspolynomes von $GF(r)$ kein von 1 verschiedener Teiler von $r-1$ sein kann (vgl. [1], S. 196), wären alle darin auftretenden Polynome von $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1)$ linear und daher auch in $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2)$ enthalten, wir hätten also doch $f(x)\in\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2)$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ die Menge aller Polynome $ax^{p^j}+b\in Q$ mit $j\geqq 0$ und $a\neq 0$. In [1], S. 198 wurde gezeigt, daß genau die Polynome von $\mathfrak{A}$ Permutationspolynome für alle endlichen Erweiterungskörper von $\mathfrak{q}$ sind. Daraus folgt sehr leicht, daß gilt $\bigcap_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{W}}\mathfrak{h}(\mathfrak{w}) = \mathfrak{A}$, denn einerseits ist hier die linke Seite in der rechten enthalten, andererseits wegen $\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1\cup\mathfrak{w}_2) = \mathfrak{h}(\mathfrak{w}_1)\cap\mathfrak{h}(\mathfrak{w}_2)$ die rechte Seite in der linken; $\mathfrak{A}$ ist also Teilhalbgruppe von $\mathfrak{h}(\mathfrak{q})$. Die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnittes können wir zusammenfassen in folgendem

SATZ 4. *Die Abbildung $\varkappa$ bildet den Verband $\mathfrak{W}$ vereinigungshomomorph, aber nicht durchschnittshomomorph ab in den dualen Verband des Teilhalbgruppenverbandes von $\mathfrak{h}(\mathfrak{q})$; alle Elemente von $\varkappa\mathfrak{W}$ enthalten die Teilhalbgruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{h}(\mathfrak{q})$.*

Ob $\varkappa$ umkehrbar eindeutig ist, können wir nicht sagen, es gilt aber der folgende

SATZ 5. *Die Abbildung $\varkappa$ ist auf der aus den endlichen Zwischenkörpern von $\Omega|\mathfrak{q}$ bestehenden Teilmenge von $\mathfrak{W}$ umkehrbar eindeutig.*

BEWEIS. Seien $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ zwei verschiedene endliche Zwischenkörper von $\Omega|\mathfrak{q}$ von den Ordnungen q^r, q^s. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\mathfrak{s}\not\subseteq\mathfrak{r}$ und daher $s>1$. Mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen v von q^r-1 und q^s-1 bilden wir das Polynom

$$g(x) = x^v - x^{q^r-1}+x. \tag{11}$$

Wegen $x^{k(q^r-1)}\equiv x^{q^r-1} \bmod \eta\mathfrak{r}$ gilt $x^v\equiv x^{q^r-1} \bmod \eta\mathfrak{r}$, also $g(x)\in\mathfrak{h}(\mathfrak{r})$. Ebenso gilt $x^v\equiv x^{q^s-1} \bmod \eta\mathfrak{s}$ sowie $x^{q^r-1}\equiv x^w \bmod \eta\mathfrak{s}$ mit $1\leqq w\leqq(q^s-1)$ und $w\equiv q^r-1 \bmod (q^s-1)$. Wäre $w = q^s-1$, so hätten wir $(q^s-1)|(q^r-1)$, also wäre q^s-1 der größte gemeinsame Teiler von q^r-1 und q^s-1. Nun ist aber der größte gemeinsame Teiler von q^r-1 und q^s-1 gleich q^d-1, wo d der größte gemeinsame Teiler von r und s ist, wir hätten also $s|r$ und damit $\mathfrak{s}\subseteq\mathfrak{r}$, also einen Widerspruch.

Deshalb gilt $g(x) \equiv x^{q^s-1} - x^w + x \bmod \eta\mathfrak{s}$, wie schon erwähnt, kann aber ein nichtlineares Polynom vom Grad $q^s - 1$ nicht Permutationspolynom für $GF(q^s)$ sein, also gilt $g(x) \notin \mathfrak{h}(\mathfrak{s})$ und damit $\mathfrak{h}(\mathfrak{r}) \neq \mathfrak{h}(\mathfrak{s})$.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT
WIEN

(Eingegangen am 12. März 1964.)

Literatur

[1] L. CARLITZ, Permutations in finite fields, *Acta Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), S. 196–203.
[2] A. N. MILGRAM, Saturated Polynomials, *Reports Math. Colloquium* II, **7** (1946), S. 65–67.
[3] W. NÖBAUER, Die Operation des Einsetzens in Polynomringen, *Math. Annalen*, **134** (1958) S. 248–259.
[4] G. SZÁSZ, *Einführung in die Verbandstheorie* (Leipzig, 1962).

ÜBER DIE APPROXIMATION MIT STARKEN DE LA VALLÉE-POUSSINSCHEN MITTELN

Von

G. ALEXITS (Budapest), Mitglied der Akademie und D. KRÁLIK (Budapest)

1. Einleitung

Bezeichne $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ definierte, integrierbare Funktion, $\{\varphi_n(x)\}$ ein Orthogonalsystem und

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

die Entwicklung von $f(x)$ nach dem System $\{\varphi_n(x)\}$. Mit

$$s_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

werden wir die n-te Teilsumme dieser Entwicklung bezeichnen. Die Annäherungseigenschaften der de la Vallée-Poussinschen Mittel

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} [s_\nu(f, x) - f(x)]$$

spielen in der Approximationstheorie bekanntlich eine große Rolle, da sie z. B. für das trigonometrische System eine Approximationsgeschwindigkeit $\leqq 4E_n(f)$ haben, wenn $E_n(f)$ den besten, mit trigonometrischen Polynomen höchstens n-ter Ordnung erreichbaren Annäherungsgrad bedeutet.

Wesentlich schärfer ist das Approximationsproblem gestellt, wenn wir statt der gewöhnlichen, die *starken* de la Vallée-Poussinschen Mittel

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f, x) - f(x)|$$

betrachten. Diese Frage wurde bisher für die starke $(C, 1)$-Summation untersucht (ALEXITS [1], ALEXITS—KRÁLIK [3] und ALEXITS [2]). Die erzielten Resultate weisen darauf hin, daß die starke $(C, 1)$-Summation i. allg. zu keinen schlechteren Ergebnissen führt als die gewöhnliche. In einem Fall aber, nämlich im Fall der Funktionen $f \in \mathrm{Lip}\, 1$ ist die gewöhnliche $(C, 1)$-Summation der starken überlegen (ALEXITS—LEINDLER [4]). Um so interessanter ist, daß die starke de la Vallée-Poussinsche Summation, genau so wie die gewöhnliche, für das trigonometrische System im wesentlichen denselben Annäherungsgrad ergibt wie die beste trigonometrische Approximation. Daraus folgern wir u. a. eine Verschärfung der Charakterisierung der Zygmund-Klasse Z, d. i. die Gesamtheit der 2π-periodischen Funktionen mit der

Eigenschaft

$$\sup_{\substack{|t|\leqq h \\ 0\leqq x\leqq 2\pi}} |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \leqq Kh.$$

Unser diesbezügliches Ergebnis lautet wie folgt:

SATZ 1. *Bezeichne $f^{(r)}(x)$ die r-te Ableitung der 2π-periodischen Funktion $f(x)$, wo $f^{(0)}(x)=f(x)$ gesetzt wird. Die Ableitung $f^{(r)}(x)$ gehört zu Z genau dann, wenn für die starken de la Vallée-Poussinschen Mittel der Fourierreihe von $f(x)$ die Beziehung gilt:*

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f,x)-f(x)| = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Natürlich können auch die Funktionen $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ mit $0<\alpha<1$ durch den Annäherungsgrad $O(n^{-r-\alpha})$ der starken de la Vallée-Poussinschen Mittel charakterisiert werden. Eine Annäherung, welche für $r=0$ auch von den $(C,1)$-Mitteln $\sigma_n(f,x)$ erreicht wird. Es ist aber fraglich, und diese Frage wurde vom Herrn BUTZER am approximationstheoretischen Kolloquium 1963 in Oberwolfach gestellt, ob die Annäherung $O(\log n/n)$, welche $\sigma_n(f,x)$ im Fall $f\in \mathrm{Lip}\,1$ erreicht, auch für die starke Annäherung

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f,x)-f(x)|$$

richtig bleibt? Wir beantworten diese Frage sogar für die ausgedehntere Klasse Z bejahend:

SATZ 2. *Gehört die 2π-periodische Funktion $f(x)$ zur Zygmund-Klasse Z, so gilt*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f,x)-f(x)| = O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Wir greifen auch das Problem der starken de la Vallée-Poussinschen Approximation für allgemeine Orthogonalreihen an, und werden auf Grund eines elementar-reihentheoretischen Hilfssatzes folgendes beweisen:

SATZ 3. *Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges, in $[a,b]$ definiertes Orthogonalsystem und $\lambda(x)$ eine positive, mit $x\to\infty$ monoton gegen Unendlich strebende, von unten konkave Funktion. Sind die $(C,1)$-Mittel der Orthogonalreihe $\Sigma c_n\lambda(n)\varphi_n(x)$ mit $\Sigma c_n^2\lambda^2(n)<\infty$ auf der Menge $E\subset[a,b]$ beschränkt, so gilt für die starken de la Vallée-Poussinschen Mittel der Orthogonalreihe $\Sigma c_n\varphi_n(x)$ die Beziehung*

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f,x)-f(x)| = O_x\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

auf E fast überall, wo $f(x)$ die durch den Riesz—Fischerschen Satz eindeutig bestimmte Funktion $f(x)\sim\Sigma c_n\varphi_n(x)$ bedeutet.

Hiermit haben wir einen Satz von TANDORI [5] verschärft, welcher dasselbe behauptet wie unser Satz, jedoch nur für die gewöhnlichen de la Vallée-Poussin-

schen Mittel unter der einschränkenden Bedingung, daß $\Sigma c_n \lambda(n) \varphi_n(x)$ auf E $(C, 1)$-summierbar ist und die Folge $\{\lambda(n)\}$ der Beziehung

$$n \cdot \Delta \left(\frac{1}{\lambda(n)} \right) = O\left(\frac{1}{\lambda(n)} \right)$$

genügt. Wir zeigen also, daß diese Einschränkungen selbst bei starker de la Vallée-Poussinscher Summation unnötig sind.

2. Beweis der Sätze 1 und 2

Wir verstehen unter $\{\varphi_n(x)\}$ das trigonometrische Orthogonalsystem, unter $f(x)$ eine 2π-periodische Funktion und beweisen zunächst den folgenden

HILFSSATZ 1. *Ist* $|f(x)| \leqq M$, *so gilt die Abschätzung*

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f, x)| \leqq K \cdot M,$$

wo K *eine absolute Konstante bedeutet.*

Bezeichnet $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, so ist bekanntlich

$$|s_\nu(f, x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{1/n} \left| \varphi_x(t) \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt + \left| \frac{1}{\pi} \int_{1/n}^\pi \varphi_x(t) \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| = I + II.$$

Bei Beachtung von $|f(x)| \leqq M$ lassen sich I und II folgenderweise abschätzen:

$$I \leqq \frac{1}{\pi} 4M \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n} < \frac{4M \cdot 2n}{n\pi} < \frac{8M}{\pi};$$

$$II \leqq \left| \frac{1}{\pi} \int_{1/n}^\pi \varphi_x(t) \frac{\sin \nu t}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{1/n}^\pi \varphi_x(t) \cos \nu t \, dt \right| = I_1 + I_2;$$

$$I_2 \leqq \frac{1}{2\pi} 4M\pi = 2M.$$

I_1 ist der Absolutbetrag der ν-ten Sinuskoeffizienten b_ν der Funktion

$$\Psi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}} & \text{für } \dfrac{1}{n} \leqq t \leqq \pi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt also

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f, x) - f(x)| \leqq \frac{8M}{\pi} + 2M + \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |b_\nu|,$$

wo die letzte Summe mit Hilfe der Besselschen Ungleichung abgeschätzt werden kann:

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |b_\nu| \leqq \left\{ \frac{1}{\pi n} \int_{1/n}^{\pi} \Psi_x^2(t)\, dt \right\}^{1/2} \leqq \left\{ \frac{16M^2}{\pi n} \int_{1/n}^{\pi} \frac{dt}{t^2} \right\}^{1/2} < \frac{4M}{\sqrt{\pi}},$$

womit der Hilfssatz 1 mit $K = \dfrac{8}{\pi} + 2 + \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$ bewiesen ist.

Bezeichne nun $T_n(x)$ das trigonometrische Polynom höchstens n-ter Ordnung, welches die Funktion $f(x)$ im Tschebyscheffschen Sinn am besten approximiert:

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - T_n(x)| = E_n(f).$$

Dann haben wir für $n \leqq \nu \leqq 2n-1$

$$|f(x) - s_\nu(f, x)| \leqq |f(x) - T_n(x)| + |T_n(x) - s_\nu(T_n, x)| + |s_\nu(T_n, x) - s_\nu(f, x)|.$$

Das erste Glied rechts ist $\leqq E_n(f)$, das zweite verschwindet wegen $T_n(x) \equiv s_\nu(T_n, x)$, während das dritte $|s_\nu(T_n - f, x)|$ ist. Auf Grund unseres Hilfssatzes 1 erhalten wir daher wegen $|T_n(x) - f(x)| \leqq E_n(f)$ die Abschätzung

$$(*) \qquad \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f, x) - f(x)| \leqq E_n(f) + K \cdot E_n(f).$$

Gehört nun $f^{(r)}(x)$ zur Klasse Z, so gilt bekanntlich (ZYGMUND [6], I. S. 117) $E_n(f) = O\left(\dfrac{1}{n^{r+1}}\right)$. Nach $(*)$ ist daher das n-te starke de la Vallée-Poussinsche Mittel ebenfalls von der Größenordnung $\dfrac{1}{n^{r+1}}$. Gilt umgekehrt die Beziehung

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f, x) - f(x)| = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$$

gleichmäßig, so besitzen um so mehr die n-ten schwachen de la Vallée-Poussinschen Mittel den Annäherungsgrad $O(n^{-r-1})$, woraus bekanntlich $f^{(r)}(x) \in Z$ folgt (vgl. ZYGMUND [6], I. S. 119). Damit ist der Beweis des Satzes 1 vollendet.

Der Satz 2 ist nun ein Korollar des soeben Bewiesenen. Ist nämlich $f \in Z$, so haben wir

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu(f, x) - f(x)| \leqq \frac{C}{n}$$

für alle n und x, wo C eine von n und x unabhängige Konstante bedeutet. Für $2^{m-1} \leqq n < 2^m$ können wir also schreiben:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f, x) - f(x)| \leqq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{m} \left\{ 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} |s_\nu(f, x) - f(x)| \right\}.$$

Der Klammerausdruck ist nach dem vorangehenden Satz von der Größenordnung $O(1)$, daher gilt wegen $m = O(\log n)$ die behauptete Beziehung

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f, x) - f(x)| = O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

3. Beweis des Satzes 3

Wir benötigen vor allem den folgenden, elementarreihentheoretischen

HILFSSATZ 2. *Die Teilsummen S_n der Reihe Σa_n sollen der Bedingung*

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |S_\nu| \leqq K$$

genügen, bezeichne ferner $\lambda(x)$ die Funktion im Satz 3. Gibt es eine Indexfolge $\{\mu_m\}$ derart, daß sowohl S_{μ_m} wie auch

$$s_{\mu_m} = \sum_{k=0}^{\mu_m} \frac{a_k}{\lambda(k)}$$

gegen die Grenzwerte S bzw. s konvergieren, so gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu - s| \leqq \frac{6K + 2S}{\lambda(n)}.$$

Nach unseren Voraussetzungen gibt es einen genügend großen Index $\mu_m > 2n$, so daß in der zu s konvergierenden Teilfolge $\{s_{\mu_m}\}$ die Beziehung $|s_{\mu_m} - s| < \frac{K}{\lambda(n)}$ gilt, außerdem $|S_{\mu_m}| < 2S$ ist. Dann haben wir aber

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu - s| \leqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_\nu - s_{\mu_m}| + \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} |s_{\mu_m} - s| \leqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} \left| \sum_{k=\nu+1}^{\mu_m} \frac{a_k}{\lambda(k)} \right| + \frac{K}{\lambda(n)}.$$

Mittels einer Abeltransformation erhalten wir ferner

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} \left| \sum_{k=\nu+1}^{\mu_m} \frac{a_k}{\lambda(k)} \right| = \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} \left| \sum_{k=\nu+1}^{\mu_m - 1} \Delta \left[\frac{1}{\lambda(k)} \right] S_k + \frac{S_{\mu_m}}{\lambda(\mu_m)} - \frac{S_\nu}{\lambda(\nu+1)} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} \left| \sum_{k=\nu+1}^{\mu_m - 1} \Delta \left[\frac{1}{\lambda(k)} \right] S_k \right| + \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} \frac{|S_{\mu_m}|}{\lambda(\mu_m)} + \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} \frac{|S_\nu|}{\lambda(\nu+1)}.$$

Da $\left\{ \frac{1}{\lambda(k)} \right\}$ eine konvexe Nullfolge ist, gilt für das letzte Glied auf der rechten

Seite $\leqq \frac{K}{\lambda(n)}$. Das zweite Glied ist nach Annahme $< \frac{2S}{\lambda(n)}$, während das erste den folgenden Ausdruck nicht übertrifft:

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}\left\{\sum_{j=0}^{l}\nu\cdot 2^j\,\Delta\left[\frac{1}{\lambda(\nu\cdot 2^j)}\right]\frac{1}{\nu\cdot 2^j}\sum_{k=\nu\cdot 2^j+1}^{\nu\cdot 2^{j+1}}|S_k|\right\},$$

wo l die kleinste natürliche Zahl bedeutet, für die $2^l\nu \geqq \mu_m$ ist. Nach unseren Voraussetzungen ist aber

$$\frac{1}{\nu\cdot 2^j}\sum_{k=\nu\cdot 2^j+1}^{\nu\cdot 2^{j+1}}|S_k| \leqq K,$$

so daß unser letzte Ausdruck wegen der monotonen Abnahme von $\{\Delta[1/\lambda(k)]\}$ nicht größer ist als

$$\frac{K}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}\nu\cdot\Delta\left[\frac{1}{\lambda(\nu)}\right]+\frac{2K}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}\sum_{j=0}^{l}\nu\cdot 2^j\,\Delta\left[\frac{1}{\lambda(\nu\cdot 2^{j+1})}\right]\leqq$$

$$\leqq \frac{2Kn}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}\Delta\left[\frac{1}{\lambda(\nu)}\right]+\frac{2K}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=1}^{\nu\cdot 2^j}\Delta\left[\frac{1}{\lambda(\nu\cdot 2^j+i)}\right]\leqq$$

$$\leqq \frac{2K}{\lambda(n)}+\frac{2K}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}\frac{1}{\lambda(\nu)}\leqq\frac{4K}{\lambda(n)}.$$

Wir haben also

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}|s_\nu-s|\leqq\frac{K}{\lambda(n)}+\frac{K}{\lambda(n)}+\frac{2S}{\lambda(n)}+\frac{4K}{\lambda(n)}=\frac{6K+2S}{\lambda(n)}$$

erhalten, wie behauptet.

Zum Beweis des Satzes 3 beachten wir, daß es auf Grund der Voraussetzungen eine Indexfolge $\{\nu_n\}$ gibt derart, daß die Teilsummenfolge $\{s_{\nu_n}(f,x)\}$ der Reihe $\Sigma c_k\varphi_k(x)$ fast überall zur Funktion $f(x)$ konvergiert. Aus der Indexfolge $\{\nu_n\}$ kann man bekanntlich eine Teilfolge $\{\mu_m\}$ herausgreifen, so daß auch die Teilsummenfolge $\{S_{\mu_m}(x)\}$ der Orthogonalreihe $\Sigma c_k\lambda(k)\varphi_k(x)$ fast überall zu der entsprechenden Funktion konvergiert. Mit dieser gemeinsamen Indexfolge $\{\mu_m\}$ konvergieren also sowohl die Folge $\{s_{\mu_m}(x)\}$ wie auch die Folge $\{S_{\mu_m}(x)\}$ fast überall. Laut des vorangehenden Hilfssatzes haben wir also nur nachzuweisen, daß aus der Beschränktheit der $(C,1)$-Mittel $\sigma_n(x)$ der Reihe $\Sigma c_k\lambda(k)\varphi_k(x)$ auf E die Beschränktheit der Mittel

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}|S_\nu(x)|$$

fast überall auf E folgt. Es ist aber

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}|S_\nu(x)|\leqq\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}|S_\nu(x)-\sigma_\nu(x)|+\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}|\sigma_\nu(x)|=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}|S_\nu(x)-\sigma_\nu(x)|+O(1)$$

auf E überall. Auf die letzte Summe wenden wir die Cauchysche Ungleichung an:

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}|S_\nu(x)-\sigma_\nu(x)| \leqq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}\{S_\nu(x)-\sigma_\nu(x)\}^2}.$$

Es ist aber bekannt (ZYGMUND [6], II. S. 183), daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\{S_\nu(x)-\sigma_\nu(x)\}^2}{\nu}$$

fast überall konvergiert, daher gilt fast überall

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1}\{S_\nu(x)-\sigma_\nu(x)\}^2 = o(1),$$

wie wir es behauptet haben.

(Eingegangen am 12. März 1964.)

Literaturverzeichnis

[1] G. ALEXITS, Une contribution á la théorie constructive des fonctions, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), S. 149–157.
[2] G. ALEXITS, Sur les bornes de la théorie de l'approximation des fonctions continues par polynômes, *Publications Math. Institute Hung. Acad. Sci.*, **8** A ser. (1963), S. 329–339.
[3] G. ALEXITS–D. KRÁLIK, Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen, *Publications Math. Institute Hung. Acad. Sci.*, **8** A ser. (1963), S. 317–327.
[4] G. ALEXITS–L. LEINDLER, Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), S. 27–32.
[5] K. TANDORI, Über Approximationen mit allgemeinen Orthogonalreihen, *Annales Univ. Sci. Budapest R. Eötvös*, **3–4** (1960/61), S. 351–356.
[6] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series*, I, II (Cambridge, 1959).

FURTHER UNIQUENESS THEOREMS FOR FUNCTIONAL EQUATIONS

By

J. ACZÉL (Debrecen—Gainesville, Fla.) and M. HOSSZÚ (Miskolc)

(*Presented by* A. RÉNYI)

1. In a previous paper [2] one of us has shown the following

THEOREM 1. *There exists at most one continuous function f satisfying the functional equation*

$$f(F(x, y)) = H(f(x), f(y), x, y) \tag{1}$$

for all $x, y \in \langle A, B\rangle$ and the initial conditions

$$f(a) = c, \quad f(b) = d \qquad (a, b \in \langle A, B\rangle),$$

if F is continuous in $\langle A, B\rangle \times \langle A, B\rangle$, $H(u, v, x, y)$ is strictly monotonic in u or v and F is intern ($F(x, y) \in (x, y)$ for all $x \neq y \in \langle A, B\rangle$), where $\langle A, B\rangle$ is a closed, half-open, open, finite or infinite interval.

Among the conditions of this theorem only that of the internness of F is really restrictive, but by that this theorem, though one of the few structural theorems in the theory of functional equations, and fairly general, does not cover e. g. Cauchy's functional equation

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$

([3], cf. also [1] pp. 44—45).

In the present paper we show that in case of equations of the form

$$f_1(F(x, y)) = H(f(x), f(y), x, y) \tag{2}$$

more general than (1), the condition of internness of F can be replaced by the more natural suppositions of solvability resp. strict monotony of F and H in their first and second variables (then, of course, also the condition of strict monotony of H in one of its variables can be removed). We use methods of proof similar to those applied in [5], [6], and [7] (cf. also [1], pp. 232—233, 205).

The internness has the *reflexivity*

$$F(x, x) = x$$

as a consequence. We will see, that if F is not reflexive, i. e. there exists at least one a with $F(a, a) \neq a$, then there exists at most one continuous solution of (1) satisfying *one* initial condition

$$f(a) = c$$

for such an a.

2. We prove first the following

THEOREM 2. *There exists at most one continuous function f satisfying the functional equation*

$$f_1(F(x, y)) = H(f(x), f(y)) \tag{3}$$

for all $x, y \in \langle A, B\rangle$ and the initial conditions $f(a) = c$, $f(b) = d$ $(a, b \in \langle A, B\rangle)$, if F is continuous in $\langle A, B\rangle \times \langle A, B\rangle$ and $F(x, y)$, $H(u, v)$ are strictly increasing or strictly decreasing in $x, y (\in \langle A, B\rangle)$ resp. in $u, v (\in \langle f(A), f(B)\rangle)$.

PROOF. We reduce (3) to an equation of form (1) with other F (and H), fulfilling the conditions of Theorem 1.

First we remark that

$$g(x) = F(x, x) \tag{4}$$

takes every value assumed by $F(x, y)$, for, if e. g. F is increasing in both variables, then

$$g(A) = F(A, A) \leqq F(x, y) \leqq F(B, B) = g(B),$$

and g is of course continuous and strictly increasing (the changes if $A = -\infty$ or $B = \infty$ are obvious).

Thus the inverse g^{-1} of g is well defined on $\langle F(A, A), F(B, B)\rangle$ and

$$G(x, y) = g^{-1}(F(x, y)) \tag{5}$$

has always a sense for $x, y \in \langle A, B\rangle$ and remains continuous and increasing in both variables, but *is also intern*, as

$$x = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(F(x, x)) = G(x, x) \leqq G(x, y) \leqq G(y, y) = y;$$

for $x \leqq y$ and similar argument holds in the case $y < x$.

If we put into (3) $x = y = G(s, t)$, we get

$$f_1(F[G(s, t), \ G(s, t)]) = H(f[G(s, t)], \ f[G(s, t)]).$$

and with (4), (5) and the notation

$$h(u) = H(u, u)$$

(strictly monotonic in u) this goes over into

$$f_1(F(s, t)) = h(f[G(s, t)])$$

or because of (3) into

$$H(f(s), f(t)) = h(f[G(s, t)]).$$

Finally with

$$K(u, v) = h^{-1}(H(u, v))$$

(also strictly monotonic in both u and v), we arrive to

$$f(G(s, t)) = K(f(s), f(t))$$

which is an equation of the form (1), with the intern function G instead of F, fulfilling thus all the conditions of Theorem 1, which proves Theorem 2. The proof is quite similar if F is decreasing.

Note that *in the special case where $f = f_1$*, i. e. in the case of an equation of the form (1), *an initial condition $f(a) = c$ with $F(a, a) \neq a$ — if such an a exists — alone*

determines the unique solution f, provided that there is any solution at all. This is clear, since then we have the other initial condition $f(b)=H(c, c)$, $b=F(a, a)$ on account of (3).

For the Cauchy-equation, obviously all conditions of Theorem 2 are satisfied, so it has *at most* one continuous solution satisfying the initial conditions $f(a)=c$, $a+a \neq a$, $a \neq 0$ and this is $f(x)=\frac{c}{a}x$.

For a somewhat similar uniqueness theorem in the particular case $f=f_1$, $F(x, y) = x+y$ of (3) cf. [1] (pp. 58—59).

3. For the hitherto uncovered case that F and H increase in one and decrease in another variable (and H has two further variables x, y), we prove the following

THEOREM 3. *If the domains of F in its first and second variable are $\langle A, B\rangle$, if F and H strictly increase in their first and strictly decrease in their second variables and the equations $F(x, y)=z$, $H(u, v, s, t)=w$ have solutions $x=G(z, y)$, $u=K(w, v, s, t)$ for given y, v, s, t in their domains and z, w in their ranges and F is continuous in $\langle A, B\rangle\times\langle A, B\rangle$, then there exists at most one continuous function satisfying the functional equation*

$$f_1(F(x, y))=H(f(x), f(y), x, y) \tag{2}$$

for all $x, y\in\langle A, B\rangle$ and the initial conditions

$$f(a)=b, \quad f(c)=d, \qquad (a, b\in\langle A, B\rangle).$$

A similar statement holds if both F and H decrease in their first and increase in their second variables.

PROOF. By the strict monotony of F and H in their first variables, the solutions $x=G(z, y)$, $u=K(w, v, s, t)$ of $F(x, y)=z$, $H(u, v, s, t)=w$ for given y, z, v, s, t, w are *unique*.

These functions G, K are already *strictly increasing in their first and second variables*, for e. g.

$$x_1=G(z, y_1) \geqq G(z, y_2)=x_2 \quad \text{for} \quad y_1<y_2$$

would imply

$$z=F(x_1, y_1) > F(x_2, y_2)=z,$$

a contradiction, and also

$$s_1=G(z_1, y) \geqq G(z_2, y)=s_2 \quad \text{for} \quad z_1<z_2$$

would imply

$$z_1=F(s_1, y) \geqq F(s_2, y)=z_2,$$

again a contradiction.

With F also G is continuous.

We can express $f(x)$ out of (2):

$$f(x)=K(f_1[F(x, y)], f(y), x, y)$$

and by denoting

$$F(x, y)=z, \quad x=G(z, y),$$

we have the equation

$$f(G(z, y))=K[f_1(z), f(y), G(z, y), y] \qquad (y, z\in\langle A, B\rangle).$$

Let us define

$$M(x, y) = G(F(x, y), x).$$

This is a function strictly increasing in x and strictly decreasing in y. Clearly, we have

$$f(M(x, y)) = K(f_1[F(x, y)],\ f(x),\ M(x, y),\ x) =$$
$$= K(H[f(x), f(y), x, y], f(x), M(x, y), x) = L(f(x), f(y), x, y). \tag{6}$$

This is an equation of the form (1) with a reflexive function M:

$$M(x, x) = G(F(x, x), x) = x.$$

M is also continuous and takes every value in $\langle A, B\rangle$ when x runs through $\langle A, B\rangle$, while y is fixed. In fact, $M(A, y) \leqq M(A, A) = A$ and $M(B, y) \geqq M(B, B) = B$ if $A \leqq y \leqq B$ (this shows that *the interval* $\langle A, B\rangle$, if of positive length, *has to be open*, for else $M(A, y)$ or $M(B, y)$ $(A < y < B)$ would not belong anymore to $\langle A, B\rangle$, while $M(x, y) = G(F(x, y), x) \in \langle A, B\rangle$). Thus the inverse N of M with respect to its first variable exists and it is again continuous and strictly increasing in both variables (just as we have seen for G) and remains reflexive, so

$$x = N(x, x) < N(x, y) < N(y, y) = y \quad \text{for} \quad x < y$$

i. e. N is intern and we can get an equation of the form (1) where also the conditions of Theorem 1 are fulfilled. Such an equation follows from (6) if we express $f(x)$. The solution u of the equation

$$w = L(u, v, s, t) = K(H(u, v, s, t), u, G[F(s, t), s], t)$$

certainly is unique, since K is increasing in its first and second variables as well as H in its first one.

Remark that *in the special case* $f_1 = f$ *it is again enough to give a single initial condition* $f(a) = c$ *with* $F(a, a) \neq a$ *if such an* a *exists*. This can be verified in the same way as in 2.

The equation

$$f(\alpha x + \beta y + \gamma) = Af(x) + Bf(y) + C \qquad (\alpha\beta \neq 0)$$

is an example for both theorems 2 (if $\alpha\beta > 0$) and 3 (if $\alpha\beta < 0$). It has at most one continuous solution satisfying the initial conditions

$$f(a) = b, \quad f(c) = d,$$

but there exists such a solution for all a, b, c, d only if

$$\alpha = A, \quad \beta = B, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \gamma = C = 0$$

while for

$$\alpha \neq A \quad \text{or} \quad \beta \neq B$$

there exists a continuous solution only in the case $b = d$ and then only the trivial constant one $(f(x) = d)$. In the remaining cases there are uniquely determined continuous solutions satisfying just one initial condition, except if $\gamma = (1 - \alpha - \beta)a$, (see e. g. [1], pp. 68—70; for noncontinuous solutions [4] and [8]).

For a uniqueness theorem somewhat similar to our theorems 2 and 3 in the particular case $f_1 = f$, $F(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ $(\alpha\beta \neq 0)$ of (3) cf. [1] (p. 72).

Also theorems 2 and 3 can be extended for more general domains than $\langle A, B\rangle \times \times \langle A, B\rangle$, as Theorem 1 was in [2].

DEPARTMENTS OF MATHEMATICS,
UNIVERSITY OF KOSSUTH LAJOS,
DEBRECEN

AND
UNIVERSITY OF FLORIDA,
GAINESVILLE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
TECHNICAL UNIVERSITY,
MISKOLC

(Received 18 March 1964)

References

[1] J. ACZÉL, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Basel-Stuttgart, 1961).
[2] J. ACZÉL, Ein Eindeutigkeitssatz in der Theorie der Funktionalgleichungen und einige ihrer Anwendungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15** (1964).
[3] A. L. CAUCHY, Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 1. Analyse algébrique, V. Paris, 1821 (Oeuvres (2) 3, Paris 1897, pp. 98—113, 220).
[4] Z. DARÓCZY, Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **22** (1961), pp. 31—41.
[5] M. HOSSZÚ, On the functional equation of distributivity, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953), pp. 159—167.
[6] M. HOSSZÚ, Nonsymmetric means, *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), pp. 1—9.
[7] M. HOSSZÚ, Függvényegyenletek és algebrai módszerek a geometriai objektumok elméletében III, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **9** (1959), pp. 333—346.
[8] L. LOSONCZI, Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25** (1964), pp. 250—254.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE OSKULIERENDEN PUNKTRÄUME DER METRISCHEN LINIENELEMENTRÄUME

Von

A. MOÓR (Szeged)

(*Vorgelegt von* O. VARGA)

Einleitung

Ein allgemeiner n-dimensionaler metrischer Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ ist die Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(x^i, \dot{x}^i)$, in der die Metrik durch einen geeigneten metrischen Fundamentaltensor $g_{ij}(x, \dot{x})$ definiert ist und im Raume ein metrisches invariantes Differential D existiert, d. h. es ist $Dg_{ij} \equiv 0$. Wir haben die Geometrie eines derartigen Raumes in unserer Arbeit [3][1] begründet, und J. R. VANSTONE hat, später in der Arbeit [6], diese Theorie weiter entwickelt.

Wir werden im § 1 die fundamentalen Formeln dieser Geometrie zusammenstellen, und dann in §§ 2 und 3 die fundamentalen kovarianten Ableitungen und verschiedene invariante Differentiale definieren. Diese werden von denen in unserer Arbeit [3] angegebenen etwas verschieden sein, denn die Annahme (2. 3b) von [3] werden wir nicht voraussetzen.

Einen oskulierenden Punktraum eines Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ bekommt man dadurch, daß man die Richtungen $\dot{x}^i$ der Linienelemente in einem gewissen n-dimensionalen Teilraum $\mathfrak{B}_n$ als Funktionen des Ortes x^i auffaßt und das so erhaltene Richtungsfeld $\dot{x}^i = r^i(x)$ in die Fundamentalgrößen des Raumes $\mathfrak{L}_n$ einsetzt; z. B. in $g_{ik}(x, \dot{x})$, oder in die Übertragungsparameter $L_i^{*j}{}_k(x, \dot{x})$. So bekommt man entweder einen oskulierenden Riemannschen Raum, der zuerst von A. NAZIM untersucht (vgl. [5]) und dann von O. VARGA weiter entwickelt wurde (vgl. [7]), oder einen oskulierenden affinzusammenhängenden Raum, der analog zu dem Riemannschen Raum ist, und der in unserem Aufsatz [4] bestimmt wurde.

Mit Hilfe des oskulierenden Riemannschen Raumes kann man die Resultate von O. VARGA über das invariante Differential des oskulierenden Riemannschen Raumes auch auf unseren allgemeinen metrischen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ übertragen, wir müssen aber für die Konstruktion des Linienelementfeldes $\dot{x}^i = r^i(x)$ statt der geodätischen Kurven die autoparallelen Linien benützen. Das invariante Differential des oskulierenden Riemannschen Raumes wird dann mit einem speziellen invarianten Differential des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ längs einer bestimmten Linienelementfolge $(x^i(\tau), \dot{x}^i(\tau))$ übereinstimmen.

Nach diesen, in § 4 durchgeführten Untersuchungen, beschäftigen wir uns in §§ 5 und 6 mit dem Problem, ob die Krümmungstensoren der oskulierenden Räume mit den Krümmungstensoren von $\mathfrak{L}_n$ identisch sein können, oder nicht. Es wird sich zeigen, daß der Krümmungstensor des oskulierenden Riemannschen Raumes mit dem des $\mathfrak{L}_n$-Raumes nur unter sehr strengen Bedingungen identisch sein kann.

[1] Die Zahlen in eckigen Klammern deuten auf das Schriftenverzeichnis am Ende unserer Arbeit.

Hingegen wird die Identität des Krümmungstensors des oskulierenden affinzusammenhängenden Punktraumes und des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ längs einer Linienelementfolge immer erfüllbar sein. Es wird sich auch zeigen, daß das invariante Differential des oskulierenden affinzusammenhängenden Punktraumes in dem Sinne metrisch ist, daß das invariante Differential des metrischen Grundtensors verschwindet.[2]

Im § 7 untersuchen wir die Identität der Krümmungsmaße des oskulierenden Riemannschen und des $\mathfrak{L}_n$-Raumes. Im Finslerschen Raum sind diese Skalare identisch (vgl. [8]), in unseren $\mathfrak{L}_n$-Räume müssen dazu aber noch gewisse weitere Bedingungen erfüllt sein.

Zuletzt zeigen wir im § 8, daß die Laugwitzsche Konstruktion in unserem $\mathfrak{L}_n$-Raum zu einem neuen, aber vom Richtungsfeld $\dot{x}^i = r^i(x)$ abhängigen invarianten Differential führt.

§ 1. Grundformeln der metrischen Linienelementräume

Zu Grunde gelegt sei eine $(2n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(x^i, \dot{x}^i)$, wo die x^i die Koordinaten eines Punktes in einem n-dimensionalen Punktbereich bezeichnen und die $\dot{x}^i$ die Bestimmungszahlen einer Richtung sind. Bei den $\dot{x}^i$ kommt offenbar nur ihr Verhältnis in Betracht, d. h. $\dot{x}^i$ und $\varrho\dot{x}^i$ $(\varrho > 0)$ bestimmen dieselbe Richtung. Existiert in dieser Mannigfaltigkeit der Linienelemente ein in den $\dot{x}^i$ von nullter Dimension homogener metrischer Fundamentaltensor $g_{ik}(x, \dot{x})$ der in i, k symmetrisch sein soll, so nennen wir diese Linienelementmannigfaltigkeit einen n-dimensionalen metrischen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$, falls noch in $\mathfrak{L}_n$ ein solches invariantes Differential der Tensoren definiert ist, für das, das invariante Differential des metrischen Fundamentaltensors identisch verschwindet.

Der metrische Fundamentaltensor bestimmt die Bogenlänge einer Kurve $x^i = x^i(\tau)$ durch die Formel

$$s = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{g_{ik}(x(\tau), x'(\tau)) x'^i x'^k}\, d\tau, \qquad x'^i = \frac{dx^i}{d\tau} \tag{1.1}$$

und die Länge eines Vektors $\xi^i(x, \dot{x})$ durch

$$\xi(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{ik}(x, \dot{x}) \xi^i(x, \dot{x}) \xi^k(x, \dot{x})}.$$

Die kontravarianten Komponenten des metrischen Fundamentaltensors g_{ik} sind — wie gewöhnlich — durch das Gleichungssystem:

$$g_{ik}(x, \dot{x}) g^{jk}(x, \dot{x}) = \delta_i^j \tag{1.2}$$

festgelegt, wo δ_i^j das Kroneckersche Symbol bezeichnet. g^{kj} existiert immer, wenn $\det(g_{ik}) \neq 0$ ist, was wir im folgenden immer voraussetzen wollen. g^{kj} ist übrigens

[2] Aus $Dg_{ik} = 0$ folgt noch nicht, daß die Übertragungsparameter die Christoffelschen Symbole sind, da die Übertragungsparameter nicht symmetrisch sein müssen.

auch symmetrisch. Das Herauf-, bzw. Herunterziehen der Indizes mit g^{ij}, bzw. g_{ij} ist in der gewöhnlichen Weise definiert.

Der Einheitsvektor $l^i(x, \dot{x})$, der die Richtung seines Stützelementes hat, hat die kontra-, bzw. kovarianten Komponenten:

$$l^i = \frac{\dot{x}^i}{F(x, \dot{x})}, \quad l_i = g_{ik} l^k,$$

wo

$$F(x, \dot{x}) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}(x, \dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^k} \tag{1. 3}$$

die Grundfunktion des Raumes $\mathfrak{L}_n$ bedeutet. Die Überschiebungen mit l^i werden wir durch „o" bezeichnen.

Der Torsionstensor des Raumes $\mathfrak{L}_n$ ist

$$A_{ijk} = FC_{ijk}, \quad C_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \partial_{\dot{x}^k} g_{ij}.$$

Wir definieren noch durch Γ^*_{ijk} die Lösung des Gleichungssystems:

$$\Gamma^*_{ijk} = [ijk]_{(g)} - A_{ijm} \Gamma^{*m}_{o\ k} - A_{jkm} \Gamma^{*m}_{o\ i} + A_{ikm} \Gamma^{*m}_{o\ j}, \tag{1. 4}$$

wo

$$[ijk]_{(g)} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik}), \quad \partial_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

das durch g_{ik} gebildete Christoffelsche Symbol von erster Art bezeichnet. Bezüglich der Möglichkeit der expliziten Bestimmung von Γ^*_{ijk} aus dem Gleichungssystem (1. 4) verweisen wir auf die Arbeiten [3] § 2 und [6] § 3. Wir wollen im folgenden immer annehmen, daß Γ^*_{ijk} *durch* (1. 4) *eindeutig festgelegt ist.* — Da Γ^*_{ijk} in i, k symmetrisch ist, hat Γ^*_{ijk}: $\frac{1}{2} n^2(n+1)$ Komponenten und (1. 4) besteht aus ebensoviel Gleichungen vom ersten Grade. *Durch* (1. 4) *wird* Γ^*_{ijk} *allein durch den metrischen Fundamentaltensor* g_{ik} *festgelegt.*

$C_i^{j}{}_k$ und $\Gamma^{*j}_{i\ k}$ bilden die, allein aus g_{ik} bestimmten, Übertragungsparameter des Raumes. Mit diesen werden wir im folgenden die wichtigsten kovarianten Ableitungen und invarianten Differentiale definieren, welche aber von denen in unserer Arbeit [3] definierten etwas verschieden sind, da im allgemeinen im $\mathfrak{L}_n$-Raum

$$C_o^{j}{}_m C_o^{m}{}_k = 0 \tag{1. 5}$$

nicht besteht.

BEMERKUNG. Im Finslerraum ist

$$C_{ojm} = \frac{1}{2} (\partial_{\dot{x}^m} g_{sj}) l^s = 0$$

und diese Relation vereinfacht in großem Maße die Theorie des invarianten Differentials. Die Bedingung $C_{ojm} = 0$, oder die Gültigkeit von (1. 5) bzw. die mit (1. 5) äquivalente Relation (2. 3b) von [3] sind aber nicht notwendig — wie wir das im Paragraphen 3 sehen werden.

§ 2. Kovariante Ableitungen im L_n-Raum

Wir definieren in dem $\mathfrak{L}_n$-Raum die folgenden beiden kovarianten Ableitungen. Ist ξ^i ein kontravarianter Vektor, so sind die beiden fundamentalen kovarianten Ableitungen:

$$\overset{1}{\nabla}_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i \|_m \Gamma^{*m}_{o\,k} + \Gamma^{*i}_{m\,k} \xi^m \tag{2. 1}$$

und

$$\overset{2}{\nabla}_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i \|_m L^{*m}_{o\,k} + L^{*i}_{m\,k} \xi^m, \tag{2. 2}$$

wo die Operation „$\|_m$"

$$\|_m \overset{\text{def}}{=} F \partial_{\dot{x}^m}$$

bedeutet, und

$$L^{*i}_{j\,k} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{*i}_{j\,k} + \Lambda_j{}^i{}_k \tag{2. 3}$$

ist; $\Lambda_j{}^i{}_k$ bedeutet in (2. 3) einen gemischten Tensor dritter Stufe. Die durch (2. 1) bestimmte kovariante Ableitung ist also ein Spezialfall der durch (2. 2) angegebenen kovarianten Ableitung, denn (2. 2) geht nach (2. 3) in (2. 1) über, falls $\Lambda_j{}^i{}_k = 0$ ist. $\Gamma^{*i}_{j\,k}$ kommt bei der Konstruktion des oskulierenden Riemannschen Raumes vor; mit $L^{*j}_{i\,k}$ bekommt man einen oskulierenden affinzusammenhängenden Raum.

Man kann leicht verifizieren, daß die kovariante Ableitung (2. 2) metrisch, d. h. $\overset{2}{\nabla}_k g_{ij} = 0$ ist, falls $\Lambda_i{}^j{}_k$ dem Gleichungssystem

$$\Lambda_{(ij)k} + A_{ijm} \Lambda_o{}^m{}_k = 0 \tag{2. 4}$$

genügt (vgl. [3] Formeln (2. 8) und (2. 22)). $\Lambda_{(ij)k}$ bedeutet — wie gewöhnlich — den in i, j symmetrischen Teil von Λ_{ijk}. Die kovariante Ableitung (2. 1) ist immer metrisch, wie das auf Grund der Formel (1. 4) leicht verifiziert werden kann.

Die beiden kovarianten Ableitungen hängen miteinander durch die Formeln

$$\overset{2}{\nabla}_k \xi^i = \overset{1}{\nabla}_k \xi^i - \xi^i \|_t \Lambda_o{}^t{}_k + \Lambda_t{}^i{}_k \xi^t \tag{2. 5}$$

zusammen. Für einen kovarianten Vektor ξ_i hat man

$$\overset{2}{\nabla}_k \xi_i = \overset{1}{\nabla}_k \xi_i - \xi_i \|_t \Lambda_o{}^t{}_k - \Lambda_i{}^t{}_k \xi_t .$$

Für die kovarianten Ableitungen des Einheitsvektors l^i besteht der folgende

SATZ 1. *Es ist* $\overset{1}{\nabla}_k l^i \equiv 0$; *die Relation*

$$\overset{2}{\nabla}_k l^i \equiv 0 \tag{2. 6}$$

besteht dann und nur dann, falls

$$(l_t + A_{oot}) \Lambda_o{}^t{}_k = 0 \tag{2. 7}$$

ist.

BEWEIS. Nach der Formel (1. 3) ist

$$l^i \|_t = \delta^i_t - l^i (l_t + A_{oot}), \tag{2. 8}$$

und nach (1. 4) gilt:

$$\partial_k l^i = -\frac{\dot{x}^i}{2F}(\partial_k g_{rs})\dot{x}^r\dot{x}^s = -l^i(\Gamma^*_{ook} + A_{oom}\Gamma^{*m}_{o\ k}).$$

Aus der Formel (2. 1) folgt dann für $\xi^i = l^i$ unmittelbar die Relation $\overset{1}{\nabla}_k l^i \equiv 0$ und nach (2. 5), (2. 7) und (2. 8) folgt auch (2. 6). Umgekehrt: ist nun $\overset{2}{\nabla}_k l^i \equiv 0$ gültig, so folgt auf Grund von (2. 5) und (2. 8) die Relation (2. 7).

BEMERKUNG. (2. 7) ist eine schwächere Relation als (2. 4), denn aus (2. 4) folgt nach Überschiebung mit $l^i l^j$ die Relation (2. 7), die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht.

§ 3. Invariante Differentiale

Das erste invariante Differential eines Vektors ξ^i im $\mathfrak{L}_n$-Raum definieren wir durch die Formel:

$$\overset{1}{D}\xi^i \overset{\text{def}}{=} d\xi^i + C_{j\ k}^{\ i}\xi^j\, d\dot{x}^k + \Gamma_{j\ k}^{\ i}\xi^j\, dx^k, \tag{3. 1}$$

wo

$$\Gamma_{j\ k}^{\ i} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{*i}_{j\ k} + A_{j\ s}^{\ i}\Gamma^{*s}_{o\ k} \tag{3. 2}$$

bedeutet und $\Gamma^{*i}_{j\ k}$ durch (1. 4) bestimmt ist. $\overset{1}{D}\xi^i$ ist ein Vektor, wie das durch eine unmittelbare Berechnung der Transformationsformel von $\overset{1}{D}\bar{\xi}^i$ gezeigt werden kann. (Vgl. [3] § 3.)

Für den Einheitsvektor l^i hat man:

$$\omega^i_{(1)}(d) \overset{\text{def}}{=} \overset{1}{D}l^i \equiv dl^m(\delta^i_m + A_{o\ m}^{\ i}) + \Gamma_{o\ m}^{\ i}\, dx^m, \tag{3. 3}$$

da $\dot{x}^i = Fl^i$ und $C_{j\ o}^{\ i} \equiv 0$ ist. Nehmen wir für das folgende immer an, daß die Determinante:

$$\text{Det}\,(\delta^i_m + A_{o\ m}^{\ i}) \neq 0$$

ist, dann wird durch

$$(\delta^i_m + A_{o\ m}^{\ i})J^k_i = \delta^k_m \tag{3. 4}$$

ein gemischter Tensor J^k_m eindeutig festgelegt (vgl. z. B. [3] Gleichung (2. 15)). Nach einer Überschiebung von (3. 3) mit J^k_i folgt somit

$$dl^k = J^k_s\omega^s_{(1)} - J^k_s\Gamma_{o\ m}^{\ s}\, dx^m. \tag{3. 5}$$

Beachten wir nun, daß

$$d\dot{x}^k = F\, dl^k + l^k\, dF \tag{3. 6}$$

und wegen der Homogenität von nullter Dimension von g_{ik} in $\dot{x}^j$, $C_{j\ o}^{\ i} \equiv 0$ ist, so wird aus (3. 1)

$$\overset{1}{D}\xi^i = d\xi^i + \{A_{j\ s}^{\ i}J^s_k\omega^k_{(1)} + (\Gamma_{j\ k}^{\ i} - A_{j\ s}^{\ i}J^s_t\Gamma_{o\ k}^{\ t})\, dx^k\}\xi^j. \tag{3. 7}$$

Auf Grund von (3. 2) ist aber:

$$\Gamma_{j\,k}^{i} - A_{j\,s}^{i} J_t^s \Gamma_{o\,k}^{t} \equiv \Gamma_{j\,k}^{*i} + A_{j\,m}^{i} \Gamma_{o\,k}^{*m} - A_{j\,s}^{i} J_t^s (\delta_m^t + A_{o\,m}^{t}) \Gamma_{o\,k}^{*m}$$

und nach (3. 4) bekommt man

$$\Gamma_{j\,k}^{i} - A_{j\,s}^{i} J_t^s \Gamma_{o\,k}^{t} \equiv \Gamma_{j\,k}^{*i}. \tag{3. 8}$$

Die Form (3. 7) des invarianten Differentials kann somit in der Form

$$\overset{1}{D}\xi^i = d\xi^i + A_{j\,s}^{i} J_k^s \xi^j \omega_{(1)}^k(d) + \Gamma_{j\,k}^{*i} \xi^j \, dx^k \tag{3. 9}$$

angegeben werden. Die Zerlegung von (3. 9) nach kovarianten Ableitungen ist leicht bestimmbar. Auf Grund von (3. 5) und (3. 6) ist unter Beachtung der Homogenität von nullter Dimension von ξ^i in den $\dot{x}^i$:

$$d\xi^i = (\partial_k \xi^i - \xi^i \|_m J_s^m \Gamma_{o\,k}^{s}) \, dx^k + \xi^i \|_m J_k^m \, \omega_{(1)}^k .$$

Aus (3. 2) folgt aber nach einer Überschiebung mit ${}^{l)}J_i^m$ in Hinsicht auf die Gleichung (3. 4)

$$J_i^m \Gamma_{o\,k}^{i} = J_i^m (\delta_s^i + A_{o\,s}^{i}) \Gamma_{o\,k}^{*s} = \Gamma_{o\,k}^{*m} \tag{3. 10}$$

und somit wird:

$$d\xi^i = (\partial_k \xi^i - \xi^i \|_m \Gamma_{o\,k}^{*m}) \, dx^k + \xi^i \|_s J_k^s \omega_{(1)}^k .$$

Substituieren wir das in (3. 9), so wird auf Grund von (2. 1):

$$\overset{1}{D}\xi^i = \overset{1}{\nabla}_k \xi^i \, dx^k + (\xi^i \|_s + A_{j\,s}^{i} \xi^j) J_k^s \omega_{(1)}^k . \tag{3. 11}$$

Wir bemerken noch, daß $\Gamma_{i\,k}^{*j}$ und $\Gamma_{i\,k}^{j}$ sich gegenseitig bestimmen; das folgt unmittelbar aus den Formeln (3. 2) und (3. 8). Wir geben noch für Γ_{ijk} eine für späteres wichtige Formel an, die aus (3. 2) und (1. 4) verifiziert werden kann:

$$\Gamma_{ijk} = [ijk]_{(g)} - A_{jkm} \Gamma_{o\,k}^{*m} + A_{ikm} \Gamma_{o\,j}^{*m} . \tag{3. 12}$$

Man erhält ein zweites invariantes Differential im $\mathfrak{L}_n$-Raum, wenn man in der Definitionsformel (3. 2) statt der $\Gamma_{j\,k}^{*i}$ die durch die Formel (2. 3) definierten Übertragungsparameter $L_{j\,k}^{*i}$ substituiert. Statt (3. 2) wird also

$$L_{j\,k}^{i} \overset{\text{def}}{=} L_{j\,k}^{*i} + A_{j\,s}^{i} L_{o\,k}^{*s} \tag{3. 13}$$

und das zweite invariante Differential im $\mathfrak{L}_n$-Raume wird:

$$\overset{2}{D}\xi^i \overset{\text{def}}{=} d\xi^i + C_{j\,k}^{i} \xi^j \, d\dot{x}^k + L_{j\,k}^{i} \xi^j \, dx^k . \tag{3. 14}$$

Führen wir die Bezeichnung

$$\omega_{(2)}^{i} \overset{\text{def}}{=} \overset{2}{D} l^i \equiv dl^m (\delta_m^i + A_{o\,m}^{i}) + L_{o\,m}^{i} \, dx^m$$

ein, so bleiben alle Formeln von (3. 1) bis (3. 10) gültig, nur müssen wir statt $\overset{1}{D}$ das invariante Differential $\overset{2}{D}$, statt $\omega^i_{(1)}$ die Größe $\omega^i_{(2)}$, statt $\Gamma_j{}^i{}_k$ bzw. $\Gamma^{*i}_j{}_k$ die Größen $L_j{}^i{}_k$ bzw. $L^{*i}_j{}_k$ setzen.

Das Analogon der Formel (3. 8) ermöglicht $L^{*i}_j{}_k$ durch $L_j{}^i{}_k$ zu bestimmen; es ist

$$L^{*i}_j{}_k \equiv L_j{}^i{}_k - A_j{}^i{}_s J^s_t L_o{}^t{}_k . \tag{3. 15}$$

Drücken wir das invariante Differential $\overset{2}{D}\xi^i$ des Vektors ξ^i durch die kovarianten Ableitungen aus, so wird in Hinsicht auf die Formel (2. 2):

$$\overset{2}{D}\xi^i = \overset{2}{\nabla}_k \xi^i \, dx^k + (\xi^i\|_s + A_j{}^i{}_s \xi^j) J^s_k \omega^k_{(2)} . \tag{3. 16}$$

Bezüglich der invarianten Differentiale gilt der folgende

SATZ 2. *Das invariante Differential* $\overset{1}{D}$ *ist metrisch, d. h. es ist* $\overset{1}{D}g_{ij} \equiv 0$; *das invariante Differential* $\overset{2}{D}$ *ist aber dann und nur dann metrisch, falls* (2. 3) *und* (2. 4) *bestehen.*

BEWEIS. Es ist

$$\overset{\varkappa}{D}g_{ij} = \overset{\varkappa}{\nabla}_k g_{ij} \, dx^k + (2A_{ijs} - A_{ijs} - A_{jis}) J^s_k \omega^k_{(\varkappa)}, \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

Da der Koeffizient von $\omega^k_{(\varkappa)}$ wegen der Symmetrie von A_{ijk} in i, j verschwindet, wird

$$\overset{\varkappa}{D}g_{ij} = \overset{\varkappa}{\nabla}_k g_{ij} \, dx^k, \qquad (\varkappa = 1, 2). \tag{3. 17}$$

Es ist aber $\overset{1}{\nabla}_k g_{ij} = 0$ und

$$\overset{2}{\nabla}_k g_{ij} = -2A_{ijt} \Lambda_o{}^t{}_k - 2\Lambda_{(ij)k},$$

woraus nach (3. 17) die Behauptung des Satzes 2 unmittelbar folgt.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch darauf hinweisen, daß die in (3. 11) und (3. 16) vorkommende Operation

$$\xi^i_{;k} \overset{\text{def}}{=\!=} (\xi^i\|_s + A_j{}^i{}_s \xi^j) J^s_k \tag{3. 18}$$

im wesentlichen auch eine kovariante Ableitung im $\mathfrak{L}_n$-Raum bestimmt. Im folgenden wird aber diese Operation keine wesentliche Rolle spielen.

§ 4. Oskulierende Punkträume

Im $\mathfrak{L}_n$-Raume sei in einem n-dimensionalen Teilbereich $\mathfrak{B}_n$ ein Richtungsfeld $\dot{x}^i = r^i(x)$ angegeben. Wir definieren nun drei verschiedene Typen von oskulierenden Punkträume in folgender Weise:

DEFINITION. *Der Raum, in dem durch den symmetrischen Tensor*

$$\gamma_{ik}(x) \overset{\text{def}}{=\!=} g_{ik}(x, r(x)) \tag{4. 1}$$

eine Metrik definiert ist, ist ein oskulierender Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$ *von* $\mathfrak{L}_n$ *mit dem metrischen Fundamentaltensor* $\gamma_{ik}(x)$. *Der Raum, in dem durch die affinen Übertragungsparameter*

$$L^{(\alpha)}{}_{i\,k}^{\,j}(x) \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{i}^{*j}{}_{k}(x, r(x)) \tag{4. 2a}$$

bzw.

$$L^{(\beta)}{}_{i\,k}^{\,j}(x) \overset{\text{def}}{=} L_{i}^{*j}{}_{k}(x, r(x)) \tag{4. 2b}$$

eine Übertragung der Vektoren definiert ist, ist ein oskulierender affinzusammenhängender Raum $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$ *bzw.* $\mathfrak{A}_n^{(\beta)}$ *von* $\mathfrak{L}_n$.

Das Vektorfeld $r^i(x)$ kann in verschiedenartiger Weise konstruiert werden, wir wollen aber wegen seiner sehr günstigen Anwendbarkeit die von O. VARGA entwickelte Konstruktion durchführen (vgl. [7], § 2). Diese Konstruktion besteht im Wesentlichen darin, daß man längs einer vorgegebenen Folge der Linienelemente

$$\begin{cases} x^i = x^i(\tau) \\ \dot{x}^i = \dot{x}^i(\tau) \end{cases} \qquad (\tau_0 \leqq \tau \leqq \tau_1) \tag{4. 3}$$

— die wir im folgenden als Grundfolge bezeichnen wollen — durch jedes Linienelement $(x^i, \dot{x}^i)$ eine Lösungskurve $x^i = x^i(s)$ des Differentialgleichungssystems

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{j\,k}^{*i}\left(x, \frac{dx}{ds}\right)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{4. 4}$$

legt und diese Kurve in eine Kurvenkongruenz einbettet, so, daß durch jeden Punkt des Teilbereiches $\mathfrak{B}_n$ genau eine Kurve der Kongruenz gehe.

Ist der Parameter s in (4. 4) die Bogenlänge, so sieht man leicht aus (3. 5) und (3. 10), daß wegen $l^i = \dfrac{dx^i}{ds}$ längs (4. 4) $\omega_{(1)}^{k} = 0$ ist, d. h. die Lösungskurven von (4. 4) sind eben die autoparallelen Linien. Ist unser $\mathfrak{L}_n$-Raum ein Finslerscher Raum, so definiert (4. 4) die geodätischen Linien des Raumes; in einem allgemeinen $\mathfrak{L}_n$-Raum sind aber die autoparallen Kurven von den geodätischen Linien verschieden.

Man kann also zu jedem Punkt x^i vom Teilbereich $\mathfrak{B}_n$ einen Einheitsvektor $r^i(x)$ zuordnen, nämlich den Tangentenvektor der durch x^i hindurchgehenden Kurve der Kongruenz. Wir setzen noch voraus, daß längs der Grundfolge (4. 3) die $\dot{x}^i$ die Einheitsvektoren $l^i(\tau)$ sind, d. h. längs (4. 3) gilt:

$$\dot{x}^i(\tau) = l^i(\tau) = r^i(x(\tau)). \tag{4. 5}$$

Auf Grund des Satzes 1 kann noch nach der Vargaschen Konstruktion erreicht werden, daß längs (4. 3) auch

$$\frac{\partial r^i}{\partial x^k} + \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{j\,k}^{\,i} r^j = 0 \tag{4. 6}$$

bestehe, wo $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{j\,k}^{\,i}$ die aus dem Tensor (4. 1) gebildeten Christoffelschen Symbole zweiter Art bedeuten (vgl. [7] § 2, insb. (2. 18)).

Aus (4. 1) folgt nun, daß die Christoffelschen Symbole erster Art von γ_{ik} des Raumes $\mathfrak{R}_n$ durch

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk} \overset{\text{def}}{=} [ijk]_{(\gamma)} = [ijk]_{(g)} + C_{ijm}\frac{\partial r^m}{\partial x^k} + C_{jkm}\frac{\partial r^m}{\partial x^i} - C_{ikm}\frac{\partial r^m}{\partial x^j} \tag{4. 7}$$

festgelegt sind. Beachten wir nun, daß längs der Grundfolge (4. 3) wegen der Formel (4. 5)

$$F(x(\tau), r(x(\tau))) = 1, \tag{4. 8}$$

und auch (4. 6) gültig ist, so folgt aus (4. 7), daß längs (4. 3):

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk} = [ijk]_{(g)} - A_{ijm}\overset{(\varrho)}{\Gamma}_t{}^m{}_k r^t - A_{jkm}\overset{(\varrho)}{\Gamma}_t{}^m{}_i r^t + A_{ikm}\overset{(\varrho)}{\Gamma}_t{}^m{}_j r^t \tag{4. 9}$$

besteht. Dieses Gleichungssystem ist zu (1. 4) vollständig analog, nur steht statt Γ^*_{ijk} in (4. 9) $\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk}$ und statt l^i steht hier r^i. Nach der Annahme, die wir über die Lösbarkeit von (1. 4) bezüglich Γ^*_{ijk} im § 1 gestellt haben, folgt auf Grund von (4. 9), und (4. 5) daß längs der Grundfolge (4. 3)

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk}(x) = \Gamma^*_{ijk}(x, r(x)), \qquad x^i = x^i(\tau) \tag{4. 10}$$

besteht, oder nach (4. 1) *längs der Grundfolge* (4. 3):

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_i{}^j{}_k(x) = \Gamma_i^{*j}{}_k(x, r(x)), \qquad x^i = x^i(\tau). \tag{4. 10'}$$

Man kann mit Hilfe von (4. 10′) leicht den folgenden Satz beweisen:

SATZ 3. *Längs der Grundfolge* (4. 3) *ist das invariante Differential* $\overset{(\varrho)}{D}\xi^i$ *eines Vektors* ξ^i *des oskulierenden Riemannschen Raumes* $\mathfrak{R}_n$ *mit dem invarianten Differential* $\overset{1}{D}\xi^i$ *des* $\mathfrak{L}_n$*-Raumes identisch.*

BEWEIS. Das invariante Differential eines Vektors ξ^i im $\mathfrak{R}_n$-Raum ist:

$$\overset{(\varrho)}{D}\xi^i = d\xi^i + \overset{(\varrho)}{\Gamma}_j{}^i{}_k \xi^j\, dx^k. \tag{4. 11}$$

Da längs der Grundfolge (4. 3) wegen (4. 8)

$$d\dot{x}^m = \frac{\partial r^m}{\partial x^k}dx^k, \qquad C_j{}^i{}_k = A_j{}^i{}_k \tag{4. 12}$$

bestehen, folgt aus (4. 7) nach einer Überschiebung mit dx^k wegen (4. 6) und (4. 10′) im Hinblick auf (3. 12)

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_j{}^i{}_k\, dx^k = C_j{}^i{}_k\, d\dot{x}^k + \Gamma_j{}^i{}_k\, dx^k.$$

Nach den Formeln (4. 11) und (3. 1) folgt nun unmittelbar längs (4. 3):

$$\overset{(\varrho)}{D}\xi^i = \overset{1}{D}\xi^i$$

w. z. b. w.

Jetzt gehen wir zur Untersuchung des affinzusammenhängenden Punktraumes $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$ über. Der $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$-Raum ist durch (4. 2a) definiert. Wir können die Übertragungs-

parameter des $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$-Raumes in der Form

$$L^{(\alpha)}{}_{i}{}^{j}{}_{k}(x) = \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i}{}^{j}{}_{k}(x) + \Lambda^{(\varrho)}{}_{i}{}^{j}{}_{k}(x) \tag{4.13}$$

schreiben, wo $\Lambda^{(\varrho)}{}_{i}{}^{j}{}_{k}$ den gemischten Tensor

$$\Lambda^{(\varrho)}{}_{i}{}^{j}{}_{k}(x) \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{*j}{}_{i}{}_{k}(x, r(x)) - \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i}{}^{j}{}_{k}(x) \tag{4.13'}$$

bedeutet und $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i}{}^{j}{}_{k}$ durch (4. 7) bestimmt ist. Offenbar ist längs der Grundfolge auf Grund von (4. 10), bzw. (4. 10′):

$$\Lambda^{(\varrho)}{}_{i}{}^{j}{}_{k}(x(\tau)) = 0, \tag{4.14}$$

da (4. 10), und (4. 10′) längs der Grundfolge (4. 3) gelten, wenn das Vektorfeld $r^i(x)$ durch die Vargasche Konstruktion entstanden ist, d. h. (4. 6) gilt. Offenbar ist (4. 13) und (4. 13′) mit (4. 2a) äquivalent.

$\Lambda^{(\varrho)}{}_{i}{}^{j}{}_{k}$ ist im Teilbereich $\mathfrak{B}_n$ definiert, wir wollen aber jetzt annehmen, daß $\Lambda^{(\varrho)}{}_{i}{}^{j}{}_{k}$ aus einem im $\mathfrak{L}_n$-Raum definierten Tensor entstanden ist:

$$\Lambda^{(\varrho)}{}_{i}{}^{j}{}_{k}(x) = -\Lambda_{i}{}^{j}{}_{k}(x, r(x)). \tag{4.15}$$

Auf Grund der Definitionsformel (4. 13′) ist das offenbar möglich, es ist aber jetzt nach (4. 13′) und (4. 15)

$$\Lambda_{i}{}^{j}{}_{k}(x, r(x)) \overset{\text{def}}{=} \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i}{}^{j}{}_{k}(x) - \Gamma^{*j}{}_{i}{}_{k}(x, r(x)).$$

Aus (4. 2a) bekommen wir jetzt nach (4. 13) und (4. 15):

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i}{}^{j}{}_{k}(x) \equiv \Gamma^{*j}{}_{i}{}_{k}(x, r(x)) + \Lambda_{i}{}^{j}{}_{k}(x, r(x)). \tag{4.16}$$

Diese Relation ist nur eine andere Auffassung von (4. 2a), doch werden wir bei den Untersuchungen der Krümmungstensoren sowohl (4. 2a), wie auch (4. 16) benützen können.

Längs der Grundfolge (4. 3) gehen die Formeln (4. 2a) und (4. 16) wegen (4. 14) in (4. 10′) über, *die Wichtigkeit von* (4. 2a) *und* (4. 16) *besteht aber darin, daß diese Formeln nicht nur längs der Grundfolge* (4. 3) *gelten, sondern in den* x^i *Identitäten sind.* Man darf also (4. 2a) und (4. 16) nach x^m partiell ableiten. Diese Tatsache wird bei den Untersuchungen über die Krümmungstensoren von großer Wichtigkeit sein:

Wir beweisen den folgenden

SATZ 3*. *Das invariante Differential des* $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$*-Raumes ist längs* (4. 3) *mit* $\overset{1}{D}$, *und das invariante Differential des* $\mathfrak{R}_n$*-Raumes ist längs* (4. 3) *mit* $\overset{2}{D}$ *identisch, wenn die Übertragungsparameter von* $\overset{2}{D}$ *durch* (2. 3) *und*

$$\Lambda_{i}{}^{j}{}_{k}(x, \dot{x}) \overset{\text{def}}{=} \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i}{}^{j}{}_{k}(x) - \Gamma^{*j}{}_{i}{}_{k}(x, \dot{x})$$

gegeben sind. (Für $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i}{}^{j}{}_{k}$ vgl. (4. 7).)

BEMERKUNG. Dieser Satz ist im Wesentlichen nur eine andere Formulierung des Satzes 3, da hier die Tatsache, daß (4. 2a) und (4. 16) nicht nur längs (4. 3), sondern im ganzen Bereich $\mathfrak{B}_n$ gelten, nicht ausgenützt wird.

BEWEIS DES SATZES 3*. Das invariante Differential des oskulierenden $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$-Raumes ist auf Grund von (4. 2a):

$$\overset{(\alpha)}{D}\xi^i = d\xi^i + L^{(\alpha)i}_{\ \ jk}\xi^j dx^k = d\xi^i + \Gamma^{*i}_{jk}(x, r(x))\xi^j dx^k. \tag{4.17}$$

Längs der Grundfolge ist nun nach (4. 6) und (4. 10′):

$$\frac{\partial r^i}{\partial x^k} + \Gamma^{*i}_{jk}(x, r(x))r^j = 0. \tag{4.18}$$

Vergleichen wir das mit (4. 12), so sieht man, daß längs der Grundfolge (4. 3)

$$dx^m = -\Gamma^{*m}_{o\ k}\, dx^k \tag{4.18′}$$

besteht, da längs (4. 3) $r^i = l^i$ ist. Aus der Formel (4. 17) folgt nun in Hinsicht auf die Formeln (1. 4), (4. 18′), (3. 1) und (3. 12) unmittelbar die Formel:

$$\overset{(\alpha)}{D}\xi^i = \overset{1}{D}\xi^i,$$

und das beweist die erste Behauptung des Satzes.

Auf Grund von (4. 14) und (4. 15) verschwindet längs (4. 3) der Tensor $A_i^{\ j}{}_k$. Man kann somit nach der Definitionsformel (2. 3) von $L^{*i}_{j\ k}$ (4. 18′) in der Form:

$$dx^m = -L^{*m}_{o\ k}\, dx^k \tag{4.19}$$

schreiben. Selbstverständlich gilt (4. 19) im allgemeinen nur längs der Grundfolge (4. 3).

Betrachten wir nun das durch (4. 11) bestimmte invariante Differential des $\mathfrak{R}_n$-Raumes. Nach (4. 16) bzw. (3. 13) wird:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^j_{i\ k}(x) = \Gamma^{*j}_{i\ k}(x, r(x)) + A_i^{\ j}{}_k(x, r(x)) \equiv L^{*j}_{i\ k}(x, r(x)),$$

bzw.:

$$\overset{(\varrho)}{D}\xi^i = d\xi^i + (L_j^{\ i}{}_k - A_j^{\ i}{}_m L^{*m}_{o\ k})\xi^j dx^k.$$

Beachten wir jetzt (4. 19) und (4. 8), so wird längs der Grundfolge $C_j^{\ i}{}_k = A_j^{\ i}{}_k$ und nach (3. 14) wird:

$$\overset{(\varrho)}{D}\xi^i = \overset{2}{D}\xi^i.$$

Das beweist die zweite Hälfte des Satzes.

Der durch (4. 2b) definierte oskulierende affinzusammenhängende Raum $\mathfrak{A}_n^{(\beta)}$ ist von $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$ verschieden. Wir legen hier die in dem Aufsatz [4] angewandte Konstruktion des Vektorfeldes $r^i(x)$ zu Grunde. Diese unterscheidet sich von dem Vargaschen Konstruktion darin, daß statt der Lösungskurven von (4. 4) die Lösungskurven von

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + L^{*i}_{j\ k}\left(x, \frac{dx}{ds}\right)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{4.20}$$

verwendet werden, und dementsprechend für $r^i(x)$ statt (4. 6) (vgl. [4], (1. 14)) längs der Grundfolge (4. 3)

$$\frac{\partial r^i}{\partial x^k} + L^{(\beta)\,i}_{j\,k}(x) r^j = 0 \tag{4.21}$$

gelten wird. $L^{*i}_{j\,k}$ ist in (4. 2b) und (4. 20) selbstverständlich durch (2. 3) festgelegt, es soll aber (2. 6) und die damit äquivalente Relation (2. 7) gelten. Ebenso wie in [4] folgt aus (4. 21) und (4. 2b) wegen der Relation $r^i(x(\tau)) = l^i(\tau)$:

$$d\dot{x}^i = \frac{\partial r^i}{\partial x^k} dx^k = - L^{*i}_{o\,k}\, dx^k,$$

und auf Grund von (3. 13) wird längs der Grundfolge (4. 3):

$$\overset{(\beta)}{D}\xi^i \overset{\text{def}}{=} d\xi^i + L^{(\beta)\,i}_{j\,k}\xi^j\, dx^k = \overset{2}{D}\xi^i. \tag{4.22}$$

Aus (4. 22) und aus dem Satz 2 folgt für das invariante Differential $\overset{(\beta)}{D}$ der wichtige

SATZ 4. *Das invariante Differential* $\overset{(\beta)}{D}$ *ist längs der Grundfolge mit* $\overset{2}{D}$ *identisch und* $\overset{(\beta)}{D}$ *ist dann und nur dann metrisch, falls die Relationen* (2. 3) *und* (2. 4) *bestehen.*

Die Sätze 3, 3* und 4 drücken die folgende wichtige Tatsache aus:

HAUPTSATZ I. *Die invariante Differentiale* $\overset{1}{D}$ *und* $\overset{2}{D}$ *des* $\mathfrak{L}_n$*-Raumes können in dem* $\mathfrak{L}_n$*-Raum mit Hilfe des oskulierenden Riemannschen, bzw. oskulierenden affinzusammenhängenden Raumes eingeführt werden.*

§ 5. Krümmungstensor des oskulierenden Riemannschen Raumes

Der Krümmungstensor des oskulierenden Riemannschen Raumes ist durch die Formel

$$\overset{(o)}{R}_i^{\ j}{}_{km} \overset{\text{def}}{=} \partial_m \overset{(o)}{\Gamma}_i^{\ j}{}_k + \overset{(o)}{\Gamma}_{i\,k}^{\ t} \overset{(o)}{\Gamma}_t^{\ j}{}_m - k/m \tag{5.1}$$

definiert, wo das Symbol k/m den vorigen Ausdrück mit vertauschten Indizes k und m bedeutet. Zieht man in der Formel (4. 7) den Index j herauf — was wegen (4. 1) offenbar möglich ist — so wird in Hinsicht auf (4. 6) und (4. 10′)

$$\partial_m \overset{(o)}{\Gamma}_{i\,k}^{\ j} = \partial_m \Gamma^{*j}_{i\,k} - (\partial_{\dot{x}^t} \Gamma^{*j}_{i\,k}) \Gamma^{*t}_{p\,m} \dot{x}^p + \tag{5.2}$$

$$+ g^{hj} \left\{ C_{ihs} \left[\partial_m \Gamma^{*s}_{q\,k} \dot{x}^q - (\partial_{\dot{x}^t} \Gamma^{*s}_{q\,k} \dot{x}^q) \Gamma^{*t}_{p\,m} \dot{x}^p + \frac{\partial^2 r^s}{\partial x^k\, \partial x^m} \right] + (ihk) \right\}$$

wo (ihk) die zyklische Permutation des in der Klammer $\{\ \}$ stehenden Ausdrucks bedeutet, wo aber noch vor der letzten eckigen Klammer auch das Vorzeichen verändert werden muß.

Da der Krümmungstensor eines $\mathfrak{L}_n$-Raumes durch die Formel

$$R^{*j}_{i\,km} \overset{\text{def}}{=} \partial_m \Gamma^{*j}_{i\,k} - (\partial_{\dot{x}^t} \Gamma^{*j}_{i\,k}) \Gamma^{*t}_{p\,m} \dot{x}^p + \Gamma^{*t}_{i\,k} \Gamma^{*j}_{t\,m} - k/m \tag{5. 3}$$

bestimmt ist, könnte man aus den Formeln (4. 10′), (5. 1), (5. 2) und (5. 3) den Zusammenhang der Krümmungstensoren längs der Grundfolge (4. 3) leicht bestimmen. Den Krümmungstensor $R^{*j}_{i\,km}$ selbst, bekommt man am einfachsten aus den Vertauschungsformeln bezogen auf die kovariante Ableitung (2. 1). Es wird nach (5. 3):

$$\left(\overset{1}{\nabla}_l \overset{1}{\nabla}_k - \overset{1}{\nabla}_k \overset{1}{\nabla}_l\right) \xi^i = R^{*i}_{j\,kl} \xi^j - R^{*m}_{o\,kl} \xi^i \|_m .$$

Wir werden jetzt hinreichende Bedingungen für die Übereinstimmung der Krümmungstensoren (5. 1) und (5. 3) geben.

SATZ 5. *Sind längs der Grundfolge* (4. 3) *die Relationen* (4. 10′) *und*

$$\frac{\partial^2 r^s}{\partial x^k \partial x^m} = -\partial_m \Gamma^{*s}_{q\,k} \dot{x}^q + (\partial_{\dot{x}^t} \Gamma^{*s}_{q\,k} \dot{x}^q) \Gamma^{*t}_{p\,m} \dot{x}^p \tag{5. 4}$$

gültig, so besteht längs (4. 3):

$$\overset{(o)}{R}{}^{j}_{i\,km}(x(\tau)) = R^{*j}_{i\,km}(x(\tau), r(x(\tau))). \tag{5. 5}$$

BEWEIS. Der Satz ist nach (4. 10′), (5. 1)—(5. 4) trivial.

Es ist ein wichtiges Problem, unter welchen Bedingungen (5. 4) erreicht werden kann. Ist das Vektorfeld $r^i(x)$ so wählbar, daß (4. 6) nicht nur längs (4. 3), sondern im ganzen Bereich $\mathfrak{B}_n$ gilt, d. h. (4. 6) in den x^i eine Identität ist, so gilt auch (5. 4). Das folgt daraus, daß (5. 4) durch partielle Ableitung von (4. 6) entsteht, wenn noch (4. 10′) und $\dot{x}^i = r^i$ beachtet werden. Die Integrabilitätsbedingungen von (4. 6) sind wegen (4. 10′) in Hinsicht auf $r^i = \dot{x}^i$:

$$R^{*j}_{i\,km} \dot{x}^i = 0. \tag{5. 6}$$

Bekanntlich ist diese Relation die Bedingung des absoluten Parallelismus der Linienelemente in den Linienelementräumen, die nicht notwendigerweise metrisch sein müssen (vgl. [4], Anmerkung bei der Korrektur auf S. 402).

§ 6. Krümmungstensoren der oskulierenden affinzusammenhängenden Räume

Der Krümmungstensor des oskulierenden Riemannschen Raumes kann nach den Resultaten des vorigen Paragraphen nur in sehr speziellen $\mathfrak{L}_n$-Räumen mit dem Krümmungstensor (5. 3) übereinstimmen. Hingegen stimmen die Krümmungstensoren der oskulierenden affinzusammenhängenden Räume mit gewissen Krümmungstensoren des $\mathfrak{L}_n$-Raumes überein.

Neben den Krümmungstensoren (5. 1) und (5. 3) definieren wir die folgenden Krümmungstensoren des oskulierenden affinzusammenhängenden Raumes $\mathfrak{A}^{(\alpha)}_n$, bzw. $\mathfrak{A}^{(\beta)}_n$:

$$R^{(\varkappa)}{}^{j}_{i\,km} \overset{\text{def}}{=} \partial_m L^{(\varkappa)}{}^{j}_{i\,k} + L^{(\varkappa)}{}^{t}_{i\,k} L^{(\varkappa)}{}^{j}_{t\,m} - k/m, \tag{6. 1}$$

wo $\varkappa=\alpha$ bzw. $\varkappa=\beta$ gesetzt werden soll, je nachdem (6. 1) den Krümmungstensor von $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$ bzw. $\mathfrak{A}_n^{(\beta)}$ bedeutet. Zu dem durch (2. 3) definierten Übertragungsparameter gehörigen Krümmungstensor des $\mathfrak{L}_n$-Raumes ist:

$$\overset{(L)}{R}{}^{*j}_{i\,km} \overset{\text{def}}{=} \partial_m L^{*j}_{i\,k} - L^{*j}_{i\,k}\|_t L^{*t}_{o\,m} + L^{*t}_{i\,k} L^{*j}_{t\,m} - k/m. \tag{6. 2}$$ [3]

Der Krümmungstensor (5. 3) entsteht nach der Definitionsformel (2. 3) aus (6. 2), wenn in (2. 3) $\Lambda_j^i{}_k=0$ gesetzt, d. h. in (6. 2) $L^{*j}_{i\,k}=\Gamma^{*j}_{i\,k}$ substituiert wird.

Die Formel (4. 2a) gilt im Teilbereich $\mathfrak{B}_n$. Nach einer partiellen Ableitung nach x^m bekommt man in Hinsicht auf (4. 6) und (4. 10′), daß längs der Grundfolge (4. 3)

$$\partial_m L^{(\alpha)j}_{i\,k} = \partial_m \Gamma^{*j}_{i\,k} - (\partial_{\dot{x}^t}\Gamma^{*j}_{i\,k})\Gamma^{*t}_{s\,m}\dot{x}^s. \tag{6. 3}$$

Setzen wir in (6. 1) $\varkappa=\alpha$, so bekommt man auf Grund von (6. 3) in Hinsicht auf (5. 3), daß längs der Grundfolge

$$R^{(\alpha)j}_{i\,km} = R^{*j}_{i\,km} \tag{6. 4}$$

gültig ist.

Betrachten wir jetzt die Formel (4. 2b). Auf Grund von (4. 2b) und (4. 21) wird längs der Grundfolge (4. 3) nach einer partiellen Ableitung nach x^m von (4. 2b):

$$\partial_m L^{(\beta)j}_{i\,k} = \partial_m L^{*j}_{i\,k} - (\partial_{\dot{x}^t} L^{*j}_{i\,k}) L^{*t}_{s\,m}\dot{x}^s. \tag{6. 5}$$

Beachten wir jetzt, daß wegen (4. 8) längs der Grundfolge die Operation $\|_k=\partial_{\dot{x}^k}$ und $\dot{x}^i(\tau)=l^i(\tau)$ ist, so folgt aus (6. 1) für $\varkappa=\beta$ nach den Formeln (4. 2b) und (6. 5), daß längs der Grundfolge

$$R^{(\beta)j}_{i\,km} = \overset{(L)}{R}{}^{*j}_{i\,km} \tag{6. 6}$$

besteht.

Die wichtigsten Resultate dieses Paragraphen, die durch (6. 4) und (6. 6) bestimmt sind, fassen wir im folgenden Satz zusammen:

SATZ 6. *Der Krümmungstensor des oskulierenden affinzusammenhängenden Raumes* $\mathfrak{A}_n^{(\alpha)}$ *bzw.* $\mathfrak{A}_n^{(\beta)}$ *ist längs der Grundfolge* (4. 3) *mit dem Krümmungstensor* (5. 3) *bzw.* (6. 2) *identisch.*

Auf Grund der Relation (4. 16) können wir den Zusammenhang des Krümmungstensors des oskulierenden Riemannschen Raumes mit dem Krümmungstensor $R^{*j}_{i\,km}$ in tensorieller Form bestimmen.

Nach einer partiellen Ableitung von (4. 16) nach x^m wird wegen (4. 18) längs der Grundfolge (4. 3):

$$\partial_m \overset{(O)}{\Gamma}{}^{j}_{i\,k} = \partial_m \Gamma^{*j}_{i\,k} - (\partial_{\dot{x}^t}\Gamma^{*j}_{i\,k})\Gamma^{*t}_{s\,m}\dot{x}^s + \partial_m \Lambda_i^j{}_k - (\partial_{\dot{x}^t}\Lambda_i^j{}_k)\Gamma^{*t}_{s\,m}\dot{x}^s.$$

Aus (5. 1) wird somit längs der Grundfolge (4. 3):

$$\overset{(O)}{R}{}^{j}_{i\,km} = R^{*j}_{i\,km} + 2\overset{1}{\nabla}_{[m}\Lambda_{|i|}{}^{j}_{k]}. \tag{6. 7}$$

[3] Dieser Krümmungstensor kann am einfachsten auch durch die *Identitäten von Ricci* bestimmt werden (vgl. (8. 5) von [3]).

(Bei der Herleitung dieser Formel haben wir noch beachtet, daß längs (4. 3) $\Lambda_i{}^j{}_k(x(\tau), \dot{x}(\tau)) = 0$ ist.)

BEMERKUNG. Die Formel (6. 7) kann auch nach (4. 13) abgeleitet werden, wenn die Relationen (4. 15), (4. 18) und (6. 4) beachtet werden. — $\Lambda_i{}^j{}_k$ ist in (6. 7) durch (4. 16) festgelegt und somit in i, k symmetrisch.

Für die Krümmungstensoren der oskulierenden Räume gilt also der

HAUPTSATZ 2. *Die Relationen* (6. 4), (6. 6) *und* (6. 7) *drücken den Zusammenhang der Krümmungstensoren der* $\mathfrak{L}_n^{(\alpha)}$-, $\mathfrak{L}_n^{(\beta)}$- *und* $\mathfrak{R}_n$-*Räume mit den Krümmungstensoren* $R_i^{*j}{}_{km}$ *und* $\overset{(L)}{R}{}_i{}^j{}_{km}$ *aus.*

Die Formel (5. 4) gibt hinreichende Bedingungen dafür daß längs der Grundfolge (4. 3) die Krümmungstensoren $\overset{(\varrho)}{R}{}_i{}^j{}_{km}$ und $R_i^{*j}{}_{km}$ übereinstimmen. Mit Hilfe der sogenannten „schwach oskulierenden Riemannschen Räume" kann die Bedingungsgleichung etwas abgeschwächt werden.

(Für den Begriff: „schwach oskulierenden Riemannschen Räume" vgl. [2].)

Es gilt der folgende Satz

SATZ 7. *Ist in einem Linienelement* $\underset{(0)}{(x}, \underset{(0)}{\dot{x})}$

$$\partial_m \Gamma^{*i}_{q\,k}\dot{x}^q - (\partial_{\dot{x}^t}\Gamma^{*i}_{q\,k}\dot{x}^q)\Gamma^{*t}_{s\,m}\dot{x}^s$$

in k, m *symmetrisch, so ist das Vektorfeld* $r^i(x)$ *in der Weise angebbar, daß*

$$\overset{(\varrho)}{R}{}_i{}^j{}_{km}(\underset{(0)}{x}) = R_i^{*j}{}_{km}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{\dot{x}}) \tag{6. 8}$$

gültig sei.

BEWEIS. Für die Reihenentwicklung von $r^i(x)$ gilt

$$r^i(x) = \underset{(0)}{\dot{x}^i} - [\Gamma^{*i}_{j\,p}\dot{x}^j]_{(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{\dot{x}})}(x^p - \underset{(0)}{x^p}) - \tag{6. 9}$$

$$- \frac{1}{2}[\partial_j \Gamma^{*i}_{q\,p}\dot{x}^q - (\partial_{\dot{x}^t}\Gamma^{*i}_{q\,p}\dot{x}^q)\Gamma^{*t}_{s\,j}\dot{x}^s]_{(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{\dot{x}})}(x^j - \underset{(0)}{x^j})(x^p - \underset{(0)}{x^p}) + \Phi^i(x, \underset{(0)}{x}),$$

wo die Φ^i solche Funktion sind, für die die Relationen

$$\Phi^i(\underset{(0)}{x}) = 0, \quad \left.\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^k}\right|_{\underset{(0)}{x}} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial x^k \partial x^m}\right|_{\underset{(0)}{x}} = 0$$

bestehen. Aus (6. 9) folgt somit

$$r^i(\underset{(0)}{x}) = \underset{(0)}{\dot{x}^i}, \quad \left.\frac{\partial r^i}{\partial x^m}\right|_{\underset{(0)}{x}} = -\Gamma^{*i}_{j\,m}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{\dot{x}})\,\underset{(0)}{\dot{x}^j},$$

$$\left.\frac{\partial^2 r^i}{\partial x^k \partial x^m}\right|_{\underset{(0)}{x}} = [-\partial_{(m}\Gamma^{*\ i}_{|q|\ k)}\dot{x}^q + (\partial_{\dot{x}^t}\Gamma^{*i}_{q\,(k}\dot{x}^q)\Gamma^{*\ t}_{|s|\ m)}\dot{x}^s]_{(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{\dot{x}})}.$$

Diese Formeln drücken nach der Symmetrieforderung des Satzes 7 aus, daß die Relationen (5. 4) und auch (4. 18) in einem Linienelement $(x, \dot{x})$ gelten. Aus (4. 10′) und (5. 1) folgt wegen (5. 2) und (5. 4) die Behauptung des Satzes.

§ 7. Krümmungsskalar und Krümmungsmaß in den oskulierenden Räumen

In der Arbeit [8] hat O. VARGA gezeigt, daß das Berwaldsche Krümmungsmaß eines Finslerschen Raumes:

$$B(x, \dot{x}, \eta) \overset{\text{def}}{=} \frac{R_{oioj}\eta^i\eta^j}{(g_{pq} - l_p l_q)\eta^p\eta^q}$$

längs einer Extremale des Finslerschen Raumes mit dem zur Zweirichtung $(\dot{x}^i, \eta^i)$ gehörigen Riemannschen Krümmungsmaß identisch ist. Diese Identität beruht auf der Tatsache, daß längs einer Extremalen

$$\overset{(o)}{R}_{ijkm} r^i r^k = R^*_{ijkm} r^i r^k \tag{7. 1}$$

besteht, wo r^i den Tangentenvektor der Extremale bedeutet.

Nach den Formeln (6. 4) und (6. 6) gilt für die affinzusammenhängenden Räume offenbar eine zur Relation (7. 1) analoge Formel, die entsteht, wenn in (7. 1) statt der Tensoren $\overset{(o)}{R}_i{}^j{}_{km}$ und $R^{*j}_{i\ km}$ diejenigen Tensoren gesetzt werden, die in (6. 4) und (6. 6) vorkommen. Die Formel (7. 1) selbst gilt aber in unserem $\mathfrak{L}_n$-Raum wegen $A_{oij} \neq 0$ im allgemeinen nicht. Wir wollen aber jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen die Relation (7. 1) im $\mathfrak{L}_n$-Raum erfüllt sein kann.

Jedem Punkte x^i eines Teilbereichs sei ein Einheitsvektor $r^i(x)$ zugeordnet. Die Formel (4. 7) schreiben wir nun nach Heraufziehen des Index j in Hinsicht auf die Definitionsgleichung (1. 4) von Γ^*_{ijk} in die Form:

$$\overset{(o)}{\Gamma}_i{}^j{}_k(x) = \Gamma^{*j}_{i\ k}\big(x, r(x)\big) + C_i{}^j{}_s P^s_k + C_k{}^j{}_s P^s_i - C_{iks}\gamma^{jt} P^s_t, \tag{7. 2}$$

wo $\gamma^{jt}(x) = g^{jt}\big(x, r(x)\big)$ und

$$P^s_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial r^s}{\partial x^k} + \Gamma^{*s}_{p\ k}\big(x, r(x)\big) r^p \tag{7. 3}$$

bedeutet. Differenzieren wir die Identität (7. 2) partiell nach x^m, nehmen wir ferner an, daß längs einer Kurve $C: x^i = x^i(\tau)$

$$P^s_k\big(x(\tau)\big) = 0, \quad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau} = r^i\big(x(\tau)\big) \tag{7. 4}$$

ist,[4] so bekommt man aus (7. 2) nach (7. 3) und (7. 4):

$$\begin{aligned} \partial_m \overset{(o)}{\Gamma}_i{}^j{}_k &= \partial_m \Gamma^{*j}_{i\ k} - (\partial_{\dot{x}^s}\Gamma^{*j}_{i\ k})\Gamma^{*s}_{p\ m}\dot{x}^p + \\ &+ C_i{}^j{}_s \partial_m P^s_k + C_k{}^j{}_s \partial_m P^s_i - C_{iks}\gamma^{jt}\partial_m P^s_t. \end{aligned} \tag{7. 5}$$

[4] Die Bedingung (7. 4) ist mit der Bedingung (11) von [8] äquivalent.

Aus (7. 4) folgt, daß längs der Kurve C:

$$(\partial_m P_k^s) r^m = \frac{d}{d\tau} P_k^s = 0 \tag{7. 6}$$

ist, und somit bekommt man aus der Definitionsformel (5. 1) von $\overset{(\varrho)}{R}_i{}^j{}_{km}$ unter Beachtung der Formeln (7. 2)—(7. 6):

$$\overset{(\varrho)}{R}_i{}^j{}_{km} r^i r^k = R^{*j}_{i\,km} r^i r^k + (\partial_m P_k^s)(2A_o{}^j{}_s r^k - A_{oos} g^{jk}). \tag{7. 7}$$

Aus dieser Formel folgt unmittelbar der folgende

SATZ 8. *Gelten die Relationen* (7. 4), *so stimmen die Krümmungsskalare*

$$\overset{(\varrho)}{R} \overset{\text{def}}{=} \overset{(\varrho)}{R}_i{}^j{}_{kj} r^i r^k \quad \textit{und} \quad R^* \overset{\text{def}}{=} R^{*j}_{i\,kj} r^i r^k,$$

bzw. die Krümmungsmaße dann und nur dann überein, falls

$$(\partial_j P_k^s)(2A_o{}^j{}_s r^k - A_{oos} g^{jk}) = 0.$$

§ 8. Bemerkung zur Laugwitzschen Konstruktion der oskulierenden Räume

Aus der Formel (4. 7) konstruierte D. LAUGWITZ im Finslerschen Fall einen oskulierenden Raum, dessen invariantes Differential mit dem Rundschen invarianten Differential identisch ist (vgl. [1] §§ 1, 2). Auch in unserem $\mathfrak{L}_n$-Raum gelangt man mit dieser Laugwitzschen Methode zu einem neuen invarianten Differential, welches vom invarianten Differential $\overset{1}{D}$ bzw. $\overset{2}{D}$ verschieden ist.

Aus (4. 7) und (4. 11) folgt wegen der ersten Formel von (4. 12):

$$\overset{(+)}{D}\xi^i = d\xi^i + C_{j\,m}^{\ i}\xi^j\, dx^m + G^{(+)i}_{j\,k}\xi^j\, dx^k, \tag{8. 1}$$

wo

$$G^{(+)i}_{j\,k}(x, r(x)) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\,k \end{matrix} \right\}_{(g)} + C_{k\,m}^{\ i} \frac{\partial r^m}{\partial x^j} - C_{kjm} g^{is} \frac{\partial r^m}{\partial x^s}. \tag{8. 2}$$

Durch (8. 1) und (8. 2) ist ein invariantes Differential auch im $\mathfrak{L}_n$-Raum festgelegt, dieses invariante Differential hängt aber vom Richtungsfeld $r^i(x)$ ab.

BOLYAI INSTITUT,
UNIVERSITÄT JÓZSEF ATTILA,
SZEGED

(Eingegangen am 23. März 1964.)

Schriftenverzeichnis

[1] D. LAUGWITZ, Zur geometrischen Begründung der Parallelverschiebung in Finschlerschen Räumen, *Archiv der Math.*, **6** (1955), S. 448—452.

[2] T. MAEBASHI, A weakly osculating Riemann space of the Finsler space and its application to a theory of subspaces in the Finsler space, *Tensor* (new series), **9** (1959), S. 62—72.

[3] A. MOÓR, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math.* Szeged, **17** (1956), S. 85–120.
[4] A. MOÓR, Über oskulierende Punkträume von affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten, *Annals of Math.*, **56** (1952), S. 397–403.
[5] A. NAZIM, *Über Finslersche Räume*. Diss. (München, 1936), 56 Seiten.
[6] J. R. VANSTONE, A generalization of Finsler geometry, *Canadian Journal of Math.*, **14** (1962), S. 87–112.
[7] O. VARGA, Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **50** (1942), S. 165–175.
[8] O. VARGA, Über das Krümmungsmaß in Finslerschen Räumen, *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1949), S. 116–122.

ÜBER AUTOPARALLELE FLÄCHEN TENSORIAL ZUSAMMENHÄNGENDER RÄUME

Von

L. TAMÁSSY (Debrecen)

(*Vorgelegt von* O. VARGA)

Die Tensoren von demselben Typus in den Punkten einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit bilden einen Produktraum des Tangentialraumes E_n und seines dualen Raumes E_n^*. Ist unter den Vektoren der Tangentialräume ein linearer Zusammenhang vorgegeben, so induziert er auch unter den Elementen der Produkträume einen linearen Zusammenhang. Diesen Zusammenhang können wir induziert, oder vektorial nennen, da er durch den unter den Vektoren existierenden Zusammenhang induziert ist. Unter den Elementen der Produkträume kann man aber auch direkter Weise einen Zusammenhang herstellen, der allgemeiner ist, als der induzierte. Solche Zusammenhänge werden oft tensorial genannt. Mit solchen Übertragungen beschäftigen sich S. HOKARI, H. HOMBU, E. BOMPIANI, A. COSSU, M. KUCHARZEWSKI, P. MASTROGIACOMO und der Verfasser.[1]

In dieser Geometrie kann man nicht über autoparallele Kurven sprechen, da die Parallelität der Vektoren im allgemeinen keinen Sinn hat. Die einfachen Bivektoren, die Tensoren zweiter Stufe, und daher Elemente der Produkträume $E_n \otimes E_n = E_n^{(2)}$ sind, scheinen uns aber dazu geeignet, die Parallelität der Ebenenstellungen zu erklären, was uns die Einführung des Begriffs der mit parallelen Tangentialebenen versehenen Flächen ermöglicht. Diese Flächen werden wir autoparallele Fläche nennen. Im folgenden wollen wir uns mit ihrer Erklärung und Untersuchung beschäftigen.

Im § 1 werden wir die autoparallelen Flächen definieren. Wir zeigen, daß im Falle eines induzierten Zusammenhanges diese mit den totalgeodätischen Flächen zusammenfallen. Daher können die autoparallelen Flächen als die Verallgemeinerung der totalgeodätischen Flächen betrachtet werden. Wir ermitteln und untersuchen die Differentialgleichung der autoparallelen Flächen. Im § 2 werden die Integrabilitätsbedingungen dieser Differentialgleichungen, d. h. die Existenzbedingungen der autoparallelen Flächen behandelt. Endlich werden im § 3 die projektiven Veränderungen (Deformationen) des tensorialen Zusammenhangs bestimmt, d. h. für welche die autoparallelen Flächen noch immer autoparallele Flächen bleiben.

1. § Der Begriff und die Gleichung der autoparallelen Flächen

Es sei eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit vorgelegt, die mit einem tensorialen Zusammenhang versehen ist. Der Zusammenhang sei durch das lineare differentialgeometrische Objekt $\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t$ mit dem Transformationsgesetz

[1] Genauere Literaturhinweise befinden sich in der zusammenfassenden Arbeit von M. KUCHARZEWSKI [3] und bei A. COSSU [1].

$$(1)\qquad \gamma_{k'l'}{}^{i'j'}{}_{t'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{k'}\partial x^{t'}}\delta^{j'}_{l'} + \delta^{i'}_{k'}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{l'}\partial x^{t'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{t'}}\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t$$

festgelegt. Die Tensoren $T^{ij}(x)$ und $T^{ij}(x+dx)$ sind ineinander parallel verschoben, wenn für sie

$$\vartheta T^{ij} \overset{\text{def}}{=} dT^{ij} + \gamma_{kl}{}^{ij}{}_t T^{kl}\,dx^t = 0$$

gilt. Reduziert sich der Zusammenhang auf einem induzierten, d. h. ist er durch einen gewöhnlichen affinen Zusammenhang $\Gamma_j{}^i{}_k$ induziert, so gilt

$$(2)\qquad \gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta^j_l \Gamma_k{}^i{}_t + \delta^i_k \Gamma_l{}^j{}_t .$$

Diese Form des γ ist für die Reduktion charakteristisch. Die Reduktion ist, wenn sie überhaupt möglich ist, eindeutig.[2]

1. Wir wollen erstens den Begriff der autoparallelen Flächen erklären.

DEFINITION 1. Wir nennen zwei Ebenenstellungen, genommen in den Tangentialräumen von $P(x)$ bzw. von $P'(x+dx)$, parallel bezüglich des gegebenen tensorialen Zusammenhangs, wenn in den gegebenen Ebenenstellungen zwei solche vom Nullvektor verschiedene Vektorpaare ξ, η; bzw. ξ', η' zu finden sind, die zwei parallel verschobene einfache Bivektoren $p = \xi \wedge \eta$ [3] bzw. $p' = \xi' \wedge \eta'$ bestimmen.

Definition 1 ist mit der folgenden äquivalent.

DEFINITION 2. Wir nennen zwei Ebenenstellungen, genommen in zwei benachbarten Punkten, parallel, wenn die einfachen Bivektoren p und $\bar{p}$, gebildet aus den in den entsprechenden Ebenenstellungen beliebig genommenen Vektoren ξ, η, und $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ von der Beschaffenheit sind, daß der parallel verschobene Tensor von $\bar{p}$ zu p proportional ist.

Haben nämlich $p(x) = \xi(x) \wedge \eta(x)$ und $\bar{p}(x+dx) = \bar{\xi}(x+dx) \wedge \bar{\eta}(x+dx)$ nach Definition 2 parallele Ebenenstellungen, d. h. ist der durch das Parallelverschieben von $\bar{p}$ entstehende Tensor — bezeichnet mit $v(\bar{p})$ — gleich λp, so gibt das Verschieben des aus dem $\bar{\xi}$ und $\frac{1}{\lambda}\bar{\eta}$ gebildeten $\tilde{p} = \bar{\xi} \wedge \frac{1}{\lambda}\bar{\eta} = \frac{1}{\lambda}\bar{p}$, der eine mit $\bar{p}$ gemeinsame Stellung hat, schon den einfachen Bivektor p, da wegen der homogenen Linearität der durch γ zwischen $E_n^{(2)}(x)$ und $E_n^{(2)}(x+dx)$ hervorgerufenen Abbildung $v(\tilde{p}) = v\left(\frac{1}{\lambda}\bar{p}\right) = \frac{1}{\lambda}v(\bar{p}) = p$ ist. Daher ist die Ebenenstellung von $\bar{p}$ nach Definition 1 mit der Ebenenstellung von p parallel. — Umgekehrt: ist $p = v(p')$, so ist $v(\bar{p}) = v(\lambda p') = \lambda p$, d. h. mit p proportional, weil ein beliebiger $p'^{ij}(x+dx)$, der mit $\bar{p}^{ij}(x+dx)$ identische Stellung hat, immer die Form von $\lambda p'^{ij}$ besitzt.

Daraus geht auch hervor, daß

$$\vartheta p \equiv p - v(\bar{p}) = \sigma p$$

[2] Die durch das γ erzeugte Geometrie ist bei den Verfassern, die in der Einführung genannt sind, ausführlicher behandelt. In [4] wirkt z. B. der lineare Operator ϑ über die Menge der Tensoren von gerader kontra- und kovarianter Stufenzahl. Die im Text bisher erwähnten Formeln und Behauptungen sind auch in [4] zu finden: Formeln (11), (13) im 1. §; (4) im 2. §; bzw. Sätze 2 und 4.

[3] Das Zeichen $\wedge$ bedutet die alternierende, oder äußere Multiplikation, d. h. $p^{ij} = \xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i$.

die Parallelität derjenigen in zwei benachbarten Punkten genommenen Ebenenstellungen charakterisiert, die durch die einfachen Bivektoren p bzw. $\bar{p}$ bestimmt ist.

DEFINITION 3. Zwei beliebige Elemente einer in den Punkten einer Kurve genommenen einparameterigen Ebenenschar sind parallel längs der gegebenen Kurve, wenn die in den benachbarten Punkten der Kurve genommenen Ebenenstellungen parallel sind.

Ist also $p^{ij}(t)$ irgendeine in den längs der Kurve gegebenen Ebenenstellungen genommene differenzierbare einfache Bivektorschar, so ist die Parallelität der Ebenenstellungen durch

$$\vartheta p^{ij} = p^{ij}(t) - v\big(p^{ij}(t+dt)\big) = f(t)p^{ij}(t)\,dt,$$

d. h. durch

$$\frac{\vartheta p^{ij}}{dt} = f(t)p^{ij}$$

charakterisiert.

Jetzt können wir schon den Begriff der autoparallelen Flächen erklären.

DEFINITION 4. Wir nennen eine Fläche unseres Raumes autoparallel, wenn die Tangentialebenen längs jeder Kurve der Fläche parallel verschoben sind.

2. Die autoparallele Fläche stellt eine Verallgemeinerung der totalgeodätischen Fläche des gewöhnlichen affinzusammenhängenden Raumes dar.

SATZ 1. *Reduziert sich der tensoriale Zusammenhang auf einen induzierten, dann sind die autoparallelen Flächen die Totalgeodätischen.*

Erstens zeigen wir, daß im Falle der erwähnten Reduktion der in einen benachbarten Punkt Parallelverschobene des einfachen Bivektors $p = \xi \wedge \eta$ bis auf in dx linearen Glieder mit dem alternierenden Produkt der Parallelverschobenen von ξ und η übereinstimmt, d. h. wieder ein einfacher Bivektor ist. Dies bedeutet anders ausgedrückt, daß im Falle der Reduktion

$$v(\xi \wedge \eta) = v(\xi) \wedge v(\eta) \tag{3}$$

bis auf in dx lineare Glieder gilt. In der Tat hat wegen (2) die linke Seite von (3) die Komponentendarstellung

$$\begin{aligned} p^{ij} + dp^{ij} &= \xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i + (\delta^i_k \Gamma_l{}^j{}_t + \delta^j_l \Gamma_k{}^i{}_t)(\xi^k \eta^l - \xi^l \eta^k)\, dx^t \\ &= \xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i + \Gamma_l{}^j{}_t \eta^l\, dx^t \xi^i + \Gamma_k{}^i{}_t \xi^k\, dx^t \eta^j - \Gamma_l{}^j{}_t \xi^l\, dx^t \eta^i - \Gamma_k{}^i{}_t \eta^k\, dx^t \xi^i \\ &= \xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i + d\eta^j \xi^i + d\xi^i \eta^j - d\xi^j \eta^i - d\eta^i \xi^j, \end{aligned}$$

während für die rechte Seite die Darstellung

$$(\xi^i + d\xi^i)(\eta^j + d\eta^j) - (\xi^j + d\xi^j)(\eta^i + d\eta^i)$$

gilt, was nach Vernachläßigung von $d\xi^i d\eta^j$ und $d\xi^j d\eta^i$ d. h. von Gliedern, die in dx von zweiter Ordnung sind, mit $p^{ij} + dp^{ij}$ übereinstimmt.

Ist nun die betrachtete Fläche eine autoparallele Fläche, und sind ξ und η Tangentenvektoren in einem Punkt zu dieser Fläche, so bestimmt $p + dp = v(p) = v(\xi) \wedge v(\eta)$ eine ebensolche Ebenenstellung, wie die Tangentialebene der auto-

parallelen Fläche in dem entsprechenden benachbarten Punkte, das heißt die durch das Parallelverschieben der Tangentenvektoren ξ und η entstandene $v(\xi)$ und $v(\eta)$ sind auch Tangenten der Fläche, was bereits für eine totalgeodätische Fläche charakteristisch ist. — Umgekehrt, ist im Falle der Reduktion jede totalgeodätische Fläche eine autoparallel Fläche. Dann sind nämlich zusammen mit ξ und η auch $v(\xi)$ und $v(\eta)$ Tangentenvektoren, und daher bestimmt der durch das Parallelverschieben der Tangentialebenenstellung $p = \xi \wedge \eta$ entstehende $v(p) = v(\xi) \wedge v(\eta)$ auch eine Tangentialebenenstellung in dem entsprechenden Punkte der Fläche, d. h. die Fläche ist nach unserer Definition eine autoparallele Fläche.

3. Wir bestimmen jetzt das die autoparallelen Flächen charakterisierende Differentialgleichungssystem.

Betrachten wir die Fläche

$$x^i = x^i(u^1, u^2) \tag{4}$$

mit Rang $\left\| \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right\| = 2$ $(\alpha = 1, 2)$. $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ bedeuten die Tangentialvektoren der Parameterlinien der Fläche. Dann ist

$$p^{ij}(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} & \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^i}{\partial u^2} & \frac{\partial x^j}{\partial u^2} \end{vmatrix} \tag{5}$$

eine zweiparametrige einfache Bivektorschar, die in jedem Punkt eine mit der Tangentialebene der Fläche identische Ebenenstellung bestimmt. Daher ist (4) nach Definition 4 eine autoparallele Fläche, wenn längs jeder (differenzierbaren) Kurve $u^\alpha = u^\alpha(t)$ der Fläche

$$\frac{\vartheta p^{ij}}{dt} = \left[\frac{\partial p^{ij}}{\partial u^\alpha}(u(t)) + \gamma_{kl}{}^{ij}{}_v(u(t)) p^{kl}(u(t)) \frac{\partial x^v}{\partial u^\alpha}(u(t)) \right] \frac{du^\alpha}{dt}(t) = \tag{6}$$

$$= f\left(u(t), \frac{du}{dt}\right) p^{ij}(u(t))$$

besteht.

(6) ist äquivalent mit

$$\frac{\vartheta p^{ij}}{\partial u^\alpha} \equiv \frac{\partial p^{ij}}{\partial u^\alpha} + \gamma_{kl}{}^{ij}{}_v(u) p^{kl} \frac{\partial x^v}{\partial u^\alpha} = \varphi_\alpha(u) p^{ij}. \tag{7}$$

Ist nämlich in (6) $\frac{du^\alpha}{dt} = \delta^\alpha_\beta$, so erhalten wir (7) mit $\varphi_\beta(u) = f(u, \delta^\alpha_\beta)$; und umgekehrt, aus (7) gelangen wir durch eine Kontraktion nach $\dot{u}^\alpha$ zu einer Relation vom Typus (6), wo $f = \varphi_\alpha \dot{u}^\alpha$ ist. So erhalten wir den

SATZ 2. *Eine Fläche ist dann und nur dann eine autoparallele Fläche, wenn sie das Differentialgleichungssystem* (5) *und* (7) *mit irgendwelchen Funktionen* $\varphi_\alpha(u)$ *befriedigt.*

4. Wir zeigen jetzt, wie sich diese Gleichungen im Falle einer Parametertransformation

(8) $$u^\alpha = u^\alpha(u^{1'}, u^{2'})$$

verändern. Dann erhalten wir

(9) $$\bar{p}^{ij}(u') \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial u^{1'}} & \frac{\partial x^j}{\partial u^{1'}} \\ \frac{\partial x^i}{\partial u^{2'}} & \frac{\partial x^j}{\partial u^{2'}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{1'}} & \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{1'}} \\ \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{2'}} & \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{2'}} \end{vmatrix} = p^{ij}(u)\,\Delta(u'),$$

wo

$$\Delta(u') = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}$$

ist. Weiterhin gilt

$$\frac{\vartheta \bar{p}^{ij}}{\partial u^{\alpha'}} = \left[\frac{\partial \bar{p}^{ij}}{\partial u^\beta} + \gamma_{kl}{}^{ij}{}_s \bar{p}^{kl}\frac{\partial x^s}{\partial u^\beta}\right]\frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\alpha'}}.$$

Dies ergibt mit Rücksicht auf (9)

$$\frac{\vartheta \bar{p}^{ij}}{\partial u^{\alpha'}} = \left[\frac{\partial p^{ij}}{\partial u^\beta}\Delta(u') + \gamma_{kl}{}^{ij}{}_s p^{kl}\Delta(u')\frac{\partial x^s}{\partial u^\beta}\right]\frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\alpha'}} + \frac{\partial \Delta}{\partial u^{\alpha'}}p^{ij},$$

und unter Verwendung von (7)

$$\frac{\vartheta \bar{p}^{ij}}{\partial u^{\alpha'}} = \left[\Delta(u')\varphi_\beta\frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\alpha'}} + \frac{\partial \Delta}{\partial u^{\alpha'}}\right]p^{ij} = \Delta(u')\left[\varphi_{\alpha'} + \frac{\partial \log \Delta}{\partial u^{\alpha'}}\right]p^{ij} \qquad \left(\varphi_{\alpha'} \equiv \varphi_\beta\frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\alpha'}}\right).$$

Endlich nach nochmaliger Anwendung von (9) ist

$$\frac{\vartheta \bar{p}^{ij}}{\partial u^{\alpha'}} = \left(\varphi_{\alpha'} + \frac{\partial \log \Delta}{\partial u^{\alpha'}}\right)\bar{p}^{ij},$$

und mit Hilfe der Bezeichnung

(10) $$\varphi_{\alpha'} + \frac{\partial \log \Delta}{\partial u^{\alpha'}} \equiv \bar{\varphi}_{\alpha'}$$

erhalten wir

(11) $$\frac{\vartheta \bar{p}^{ij}}{\partial u^{\alpha'}} = \bar{\varphi}_{\alpha'}\bar{p}^{ij}.$$

Also gehen im Falle einer Parametertransformation (8) die Gleichungen (5) und (7) in die Gleichungen (9) und (11) über.

5. Wir wissen, daß man aus der allgemeinen Gleichung der autoparallelen Kurven der affin zusammenhängenden Räume durch eine geeignete Parametertransformation immer auf die einfachere Gleichung

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}{}^i\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

übergehen kann. Diesen Parameter nennt man affin Parameter. — Es entsteht

die analoge Frage, ob man nicht für jede autoparallele Fläche durch eine Parametertransformation der $\overline{\varphi}_{\alpha'}=0$ erreichbar wäre, d. h. ob man nicht immer ein solches „affines" Parametersystem einführen könnte, in welchem das Differentialgleichungssystem der autoparallelen Fläche die gegenüber (5) und (7) einfachere Form

$$\bar{p}^{ij}(u') = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial u^{1'}} & \frac{\partial x^j}{\partial u^{1'}} \\ \frac{\partial x^i}{\partial u^{2'}} & \frac{\partial x^j}{\partial u^{2'}} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

$$\frac{\vartheta \bar{p}^{ij}}{\partial u^{\alpha'}} = 0 \tag{13}$$

annimt.

Die Existenz eines solchen Parametersystems ist nach (10) mit

$$\varphi_\beta \frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\alpha'}} = -\frac{\partial \log \Delta}{\partial u^{\alpha'}},$$

oder nach einer Kontraktion mit $\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\gamma}$ mit der Lösbarkeit von

$$\varphi_\gamma = -\frac{\partial \log \Delta}{\partial u^\gamma} \tag{14}$$

gleichwertig. — Die notwendige und hinreichende Bedingung der Existenz einer solchen Funktion $\log \Delta$ ist aber bekanntlich

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u^\beta} \equiv \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial u^\alpha}. \tag{15}$$

Die Antwort auf unsere Frage wird daher gegeben durch den

SATZ 3. *Das Differentialgleichungssystem* (5), (7) *einer autoparallelen Fläche kann man dann und nur dann durch eine Parametertransformation in die einfachere Form* (12), (13) *überführen, wenn* $\varphi_\alpha(u)du^\alpha$ *ein totales Differential ist.*

Endlich bemerken wir, daß $\varphi_\alpha(u)\,du^\alpha$ nicht in jedem Falle ein totales Differential ist. Geben wir nämlich die Gleichung (4) der Fläche, sowie die Funktionen $\varphi_\alpha(u)$, die die Relation (15) nicht erfüllen willkürlich vor, so ist (7) für die als Unbekannte betrachtete Größe $\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t$ in jedem Punkt (u) ein gewöhnliches lineares Gleichungssystem, in welchem der Anzahl der Unbekannten größer als der Anzahl der Gleichungen ist. Für das längs der Fläche so angenommene, und sonst beliebige γ ist (4) eine autoparallele Fläche, und $\varphi_\alpha(u)\,du^\alpha$ ist dennoch kein totales Differential.

2. § Die Integrabilität der Differentialgleichungen der autoparallelen Flächen

In diesen Paragraphen wollen wir untersuchen, durch welche Punkte und durch welche Ebenenstellungen man eine autoparallele Fläche legen kann, d. h. unter welchen Bedingungen die Differentialgleichungen (1. 5) und (1. 7) der autoparallelen Flächen integrabel sind.

Zu diesem Zwecke geben wir ein Gleichungssystem an, das unter gewissen Einschränkungen mit (1. 5) und (1. 7) äquivalent ist, und welches bereits von Typus

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} \text{a)} & \dfrac{\partial \theta^{\varrho}}{\partial u^{\alpha}} = \Psi^{\varrho}_{\alpha}(\theta, u) \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, M \\ \alpha = 1, 2 \end{pmatrix} \\ \text{b)} & F^{\lambda}_{0}(\theta, u) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, S) \end{array}$$

ist, d. h. welches außer den Funktionalgleichungen bezüglich der unbekannten Funktionen (die die Ableitungen der unbekannten Funktionen nicht enthalten), nur solche Differentialgleichungen enthält, in welchen der Reihe nach sämtliche partielle Ableitungen der unbekannten Funktionen durch die Veränderlichen und durch die unbekannten Funktionen ausgedrückt sind, ohne daß dabei ihre Ableitungen explizit auftreten würden. Auf diesen Typus ist schon der bekannte Satz von J. M. THOMAS und O. VEBLEN[4] anwendbar, der eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität von (1) angibt.

Die unbekannten Funktionen sind jetzt die

$$x^i(u^1, u^2) \quad \text{und} \quad p^{ij}(u^1, u^2).$$

Bezüglich dieser ist das Differentialgleichungssystem (1. 5), (1. 7) nicht vom Typus (1). Einerseits weil (1. 5) die partielle Ableitungen der x^i in der erwähnten Form nicht ausdrückt, anderseits weil (1. 7) auch die unbestimmte Funktionen $\varphi_\alpha(u)$ enthält, (für welche (1. 7) gar keine Differentialgleichung ist).

Die erste Schwierigkeit läßt sich leicht beseitigen. Wir wollen nämlich die autoparallele Fläche in einer Parameterdarstellung suchen, für welche

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2$$

ist. Dies ist zwar eine Einschränkung (dies bedeutet nämlich geometrisch, daß die autoparallele Fläche in der Umgebung des betrachteten Punktes keine auf die x^1, x^2 Koordinatenebene senkrechte Tangente besitzt), aber keine wesentliche. Vertauschen wir nämlich x^1, x^2 der Reihe nach mit den verschiedenen Paaren x^i, x^j, so ist in einer entsprechenden Umgebung jede autoparallele Fläche durch je einen der $\binom{n}{2}$ Fälle darstellbar. Die autoparallelen Flächen werden weiterhin in der genannten Parametrisation gesucht. In diesem Falle gilt gemäß (1. 5) $p^{12} = 1$, und (1. 5) ist durch

$$(2)\qquad \begin{array}{ll} \text{a)} & \dfrac{\partial x^i}{\partial x^1} = p^{i2} \\ \text{b)} & \dfrac{\partial x^i}{\partial x^2} = p^{1i} \\ \text{c)} & p^{1j}p^{i2} - p^{1i}p^{j2} = p^{ij} \end{array}$$

ersetzbar.

Auch die zweite Schwierigkeit läßt sich beseitigen, denn aus (1. 7) lassen sich die unbestimmten und unbequemen Funktionen $\varphi_\alpha(u)$ sehr einfach eliminieren.

[4] Siehe J. M. THOMAS, O. VEBLEN [5], oder z. B. L. P. EISENHART [2] 8. §.

(1. 7) ist nämlich äquivalent mit

$$p^{rs}\left(\frac{\partial p^{ij}}{\partial u^\alpha}+\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t p^{kl}\frac{\partial x^t}{\partial u^\alpha}\right)-p^{ij}\left(\frac{\partial p^{rs}}{\partial u^\alpha}+\gamma_{kl}{}^{rs}{}_t p^{kl}\frac{\partial x^t}{\partial u^\alpha}\right)=0. \tag{3}$$

Multiplizieren wir nämlich (1. 7) mit p^{rs}, und subtrahieren wir aus diesem den durch Vertauschung der Indexpaare gewonnene Ausdruck, so ergibt sich sofort (3). Schreibt man andererseits (3) in der Form

$$\frac{\dfrac{\vartheta p^{ij}}{\partial u^\alpha}}{\dfrac{\vartheta p^{rs}}{\partial u^\alpha}}=\frac{p^{ij}}{p^{rs}},$$

so ist es umgekehrt ersichtlich, daß wenn für irgendeinen Indexpaar i,j $(i\neq j)$ $\dfrac{\partial\vartheta p^{ij}}{\partial u^\alpha}=\varphi_\alpha p^{ij}$ besteht, so auch $\dfrac{\vartheta p^{rs}}{\partial u^\alpha}=\varphi_\alpha p^{rs}$ für jedes andere Indexpaar r,s gilt. Die mit (1. 7) äquivalente Beziehung (3) enthält die φ_α bereits nicht. Das Gleichungssystem (3) gehört aber, auch nach der Einsetzung von $\dfrac{\partial x^t}{\partial u^\alpha}$ aus (2), nicht zu dem Typus von (1).

Wir wollen also zunächst die $\dfrac{\partial p^{ij}}{\partial u^\alpha}$ aus (3) explizit ausdrücken. Wir bringen (3) auf die Form

$$p^{rs}\frac{\partial p^{ij}}{\partial u^\alpha}-p^{ij}\frac{\partial p^{rs}}{\partial u^\alpha}=\Pi_\alpha^{ijrs}, \tag{4}$$

wo Π_α^{ijrs} die auf der linken Seite von (4) nicht vorkommenden Glieder, mit einem negativen Vorzeichen versehen bedeutet, wenn in (3) die $\dfrac{\partial x^t}{\partial u^\alpha}$ noch aus (2) eingesetzt worden sind. Bilden wir jetzt den Ausdruck

$$p^{uv}\Pi_\alpha^{ijrs}+p^{rs}\Pi_\alpha^{uvij}-p^{ij}\Pi_\alpha^{uvrs}.$$

Dieser ist mit Rücksicht auf (4) identisch null, d. h. es ist

$$p^{uv}\Pi_\alpha^{ijrs}+p^{rs}\Pi_\alpha^{uvij}=p^{ij}\Pi_\alpha^{uvrs}. \tag{5}$$

Ferner ergibt sich aus (4) mit Rücksicht auf $p^{12}=1$

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial u^\alpha}=\Pi_\alpha^{ij12} \tag{6}$$

wenn noch $r=1, s=2$ gesetzt wird. So folgt also aus (3), d. h. aus (4) die (5) und die (6). Aber auch umgekehrt, befriedigen (5) und (6) die Gleichung (4). — So ist (3), d. h. (1. 7) durch (5) und (6) ersetzbar, wo (5) die Form von (1. 7) und (6) die Form von (1, a) hat.

Daher kann man das Differentialgleichungssystem (1. 5), (1. 7) endlich — unter der erwähnten Einschränkung — durch

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial x^i}{\partial x^1} = p^{i2}(x^1, x^2)$$

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial x^i}{\partial x^2} = p^{1i}(x^1, x^2)$$

$$(7) \qquad \text{c)} \qquad \frac{\partial p^{ij}}{\partial u^\alpha} = \Pi_\alpha{}^{ij12}\big(x^1, x^2, p(x^1, x^2)\big)$$

$$\text{d)} \qquad p^{1i}p^{j2} - p^{1j}p^{i2} + p^{ij} = 0$$

$$\text{e)} \qquad p^{uv}\Pi_\alpha{}^{ijrs} - p^{ij}\Pi_\alpha{}^{uvrs} + p^{rs}\Pi_\alpha{}^{uvij} = 0$$

ersetzen. Dieses System ist schon vom Typus (1). — Bezeichnen wir jetzt die Gleichungen (7, d, e) mit $F_0^\lambda = 0$; die aus den Integrablilitätsbedingungen der (7, a, b, c) und aus den ersten Ableitungen von $F_0^\lambda = 0$ unter Berücksichtigung von (7) gebildete Gleichungsgruppe mit $F_1^\mu = 0$; usw. So erhalten wir auf Grund des erwähnten Satzes von J. M. THOMAS und O. VEBLEN den folgenden

SATZ 4. *Das Gleichungssystem* (4) *ist dann und nur dann lösbar, d. h. in unserem tensorial-zusammenhängenden Raum existieren dann und nur dann in der Form* $x^i = x^i(x^1, x^2)$ $(i = 3, 4, \ldots, n)$ *darstellbare autoparallele Flächen, wenn sich eine natürliche Zahl N angeben läßt derart, daß die Gleichungsgruppe* $F_{N+1}^\tau = 0$ *für die Unbekannten* $x^3, x^4, \ldots, x^n$ *und* p^{ij} *in den verschiedenen Punkten* x^1, x^2 *schon eine Folge der* $F_0^\lambda = 0, F_1^\mu = 0, \ldots, F_N^\sigma = 0$ *ist.*

Die die Lösung bedeutende autoparallele Fläche geht dann durch den Punkt $\underset{0}{x}$ und besitzt dann die dem einfachen Bivektor $\underset{0}{p}{}^{ij}$ $(\underset{0}{p}{}^{12} \neq 0)$ entsprechende Tangentialebenenstellung, wenn die in den Lösungen $x^i = x^i(x^1, x^2, c)$ $(i = 3, 4, \ldots, n)$, $p^{ij} = p^{ij}(x^1, x^2, c)$ von (7) vorkommenden Konstanten c so gewählt werden können, daß für sie $x^i(\underset{0}{x}{}^1, \underset{0}{x}{}^2, c_0) = \underset{0}{x}{}^i$ $(i = 3, 4, \ldots, n)$, $p^{ij}(\underset{0}{x}{}^1, \underset{0}{x}{}^2, c_0) = \lambda \underset{0}{p}{}^{ij}$ gilt.

Die übrigen autoparallelen Flächen erhalten wir, wenn die Rolle von x^1, x^2 in (7), der Reihe nach durch alle mögliche x^i, x^j übernommen wird.

Wir bemerken, daß es bereits ohne die Untersuchung des Differentialgleichungssystems (1. 5), (1. 7) ersichtlich ist, daß es Räume gibt, in welchen unbegrenzt (d. h. durch jeden Punkt, und durch jede Ebenenstellung) autoparallele Flächen gelegt werden können, und daß auch Räume existieren, in welchen dies nicht der Fall ist. Betrachten wir nämlich die Räume von induziertem vektorialem Zusammenhang, d. h. in welchen der γ sich nach (1. 2) reduziert. Es sei ferner das in (1. 2) vorkommende Γ durch einen Riemannschen Raum erzeugt. So kann man unter diesen in denjenigen und nur in denjenigen unbegrenzt autoparallele Flächen legen, die aus einem Riemannschen Raum von konstanter Krümmung stammen. In Riemannschen Räumen ist nämlich die Möglichkeit totalgäodetische Flächen unbe-

grenzt zu legen (das Ebenenaxiom), mit der freien Beweglichkeit und dies mit der Konstanz der Krümmung äquivalent.[5] Die totalgeodätischen Flächen sind aber im Falle der Reduktion mit den autoparallelen Flächen identisch (siehe Satz 1).

3. § Deformationen des Zusammenhanges, die autoparallele Flächen nicht verändern

Wir wollen untersuchen, für welche γ^* die autoparallelen Flächen mit den autoparallelen Flächen für einen gegebenen γ identisch sind. Das Problem ist daher ein Analogon eines Grundproblems der projektiven Geometrie der Bahnkurven eines gewöhnlichen affinen Zusammenhanges.[6]

1. Das Differentialgleichungssystem der autoparallelen Flächen ist nach dem vorigen Paragraphen

$$p^{ij}(u) = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}\frac{\partial x^j}{\partial u^2} - \frac{\partial x^j}{\partial u^1}\frac{\partial x^i}{\partial u^2} \tag{1}$$

$$\left\{p^{rs}\left[\frac{\partial p^{ij}}{\partial u^\alpha} + \gamma_{kl}{}^{ij}{}_t(x)p^{kl}\right] - p^{ij}\left[\frac{\partial p^{rs}}{\partial u^\alpha} + \gamma_{kl}{}^{rs}{}_t(x)p^{kl}\right]\right\}\frac{\partial x^t}{\partial u^\alpha} = 0. \tag{2}$$

Es wird also nach dem $\gamma^*(x)$ gefragt, für welches die Lösungen $x^i(u)$, $p^{ij}(u)$ des Systems (1), (2) und des Systems (1) und

$$\left\{p^{rs}\left[\frac{\partial p^{ij}}{\partial u^\alpha} + \gamma^*_{kl}{}^{ij}{}_t(x)p^{kl}\right] - p^{ij}\left[\frac{\partial p^{rs}}{\partial u^\alpha} + \gamma^*_{kl}{}^{rs}{}_t(x)p^{kl}\right]\right\}\frac{\partial x^t}{\partial u^\alpha} = 0 \tag{3}$$

identisch sind. Das γ kommt in (1) nicht vor. Daher genügt es zu untersuchen, für welche $\gamma^*(x)$ (2) und (3) äquivalent sind. Dazu ist das Erfülltsein der Relation

$$[p^{rs}(\gamma^*_{kl}{}^{ij}{}_t - \gamma_{kl}{}^{ij}{}_t) - p^{ij}(\gamma^*_{kl}{}^{rs}{}_t - \gamma_{kl}{}^{rs}{}_t)]p^{kl}\frac{\partial x^t}{\partial u^\alpha} = 0 \tag{4}$$

bezüglich der γ^* notwendig und hinreichend. Besteht nämlich (2) und (3) so ergibt ihre Differenz (4); und umgekehrt folgt (3) aus (4) und (2); bzw. aus (4) und (3) folgt (2).

Führen wir die Bezeichnungen $\frac{\partial x^i}{\partial u^1} = \xi^i$, $\frac{\partial x^i}{\partial u^2} = \eta^i$ ein, und bezeichnen wir die Differenz von γ und γ^* mit B:

$$B_{kl}{}^{ij}{}_t \overset{\text{def}}{=} \gamma^*_{kl}{}^{ij}{}_t - \gamma_{kl}{}^{ij}{}_t.$$

Aus (1. 1) ist es ersichtlich, daß B ein Tensor ist. So läßt sich (4) in der Form

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad (B_{rs}{}^{ij}{}_t(x)\delta^k_u\delta^l_v - B_{rs}{}^{kl}{}_t(x)\delta^i_u\delta^j_v)[\xi^r\eta^s - \eta^r\xi^s][\xi^u\eta^v - \eta^u\xi^v]\xi^t = 0 \\ &\text{b)}\quad (B_{rs}{}^{ij}{}_t(x)\delta^k_u\delta^l_v - B_{rs}{}^{kl}{}_t(x)\delta^i_u\delta^j_v)[\xi^r\eta^s - \eta^r\xi^s][\xi^u\eta^v - \eta^u\xi^v]\eta^t = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

[5] Diese auf B. RIEMANN und F. SCHUR zurückgehenden klassischen Ergebnisse wurden neuestens durch O. VARGA [6] weiterentwickelt, indem er die Riemannschen Räume mit negativer und mit positiver konstanter Krümmung durch die Möglichkeit Hyperflächen von gewisser Eigenschaft zu legen, von einander getrennt charakterisierte.

[6] Siehe z. B. L. P. EISENHART [2] 32. §.

schreiben. (5) müßte eigentlich im Falle eines festen γ nur für diejenige Paare ξ^i, η^i erfüllt sein durch welche autoparallele Flächen hindurchgehen.[7]

Wir suchen aber einen solchen Tensor B, der auch zu einem beliebigen γ addiert einen solchen γ^* gibt, der einen tensorialen Zusammenhang induziert, in welchem die autoparallelen Flächen in Verhältnis zu dem vorangehenden unverändert bleiben. Daher müssen wir bestimmen, wann die Polynome (5), die in den ξ^i und η^i $2n$ Veränderliche besitzen, und in jeden Veränderlichen höchstens von dritter Ordnung sind, identisch verschwinden.

(5, b) geht durch Vertauschung von ξ und η aus (5, a) hervor. Da aber die ξ und η auch in (5, a) jeden Wert annehmen, ist (5, b) eine Folge von (5, a). Wir können also (5, b) im folgenden außer Acht lassen. Nach einer Umformung hat (5, a) die Gestalt

$$T_{rs}{}^{ij}{}_{t}{}^{kl}{}_{uv}\xi^r\eta^s\xi^u\eta^v\xi^t = 0, \tag{6}$$

wo

$$T_{rs}{}^{ij}{}_{t}{}^{kl}{}_{uv} \overset{\text{def}}{=} B_{[rs]}{}^{ij}{}_{t}\delta^k_{[u}\delta^l_{v]} - B_{[rs]}{}^{kl}{}_{t}\delta^i_{[u}\delta^j_{v]}$$

ist. (6) wird dann und nur dann identisch Null, wenn

$$T_{(r|s|}{}^{ij}{}_{t}{}^{kl}{}_{u)v} + T_{(r|v|}{}^{ij}{}_{t}{}^{kl}{}_{u)s} = 0 \tag{7}$$

gilt. So besteht der

SATZ 5. *Jene und nur jene Tensoren sind von der Beschaffenheit, daß die autoparallelen Flächen für γ und für $\gamma + B$ (für alle γ) identisch sind, die die Relation* (7) *befriedigen.*

Einen solchen Tensor B nennen wir den projektiven Deformationstensor des Zusammenhanges, und eine Veränderung des γ durch diesen Tensor nennen wir die projektive Deformation des Zusammenhanges.

2. Im folgenden werden wir zwei einfachere, aber zu der im Satz formulierten Eigenschaft nur hinreichende Bedingungen angeben.

SATZ 6. $B_{rs}{}^{ij}{}_{t}$ *ist ein projektiver Deformationstensor, wenn*

$$B_{[rs]}{}^{ij}{}_{t} = B_{[st]}{}^{ij}{}_{r} \tag{8}$$

ist.

Dann kann man nämlich die linke Seite von (5, a) in der folgenden Form schreiben

$$[(B_{(rs)}{}^{ij}{}_{t}\delta^k_u\delta^l_v - B_{(rs)}{}^{kl}{}_{t}\delta^i_u\delta^j_v) + (B_{[rs]}{}^{ij}{}_{t}\delta^k_u\delta^l_v - B_{[rs]}{}^{kl}{}_{t}\delta^i_u\delta^j_v)] \cdot$$

$$\cdot [\xi^r\eta^s\xi^u\eta^v - \xi^r\eta^s\eta^u\xi^v - \eta^r\xi^s\xi^u\eta^v + \eta^r\xi^s\eta^u\xi^v]\xi^t.$$

[7] Das Problem scheint in dieser Form zu kompliziert zu sein, da darin auch die Frage wesentlich hineinspielt, ob durch die betrachtete Ebenenstellung des gegebenen tensorial-zusammenhängenden Raumes eine autoparallele Fläche hindurchgeht oder nicht, wofür die Bedingung an sich schon nicht einfach ist. Wir bemerken, daß diese Frage in der projektiven Geometrie der Bahnkurven nicht auftaucht, da dort aus jedem Punkt in jeder Richtung eine autoparallele Kurve (Bahnkurve) ausgeht.

Bei der Multiplikation durch die in der zweiten runden Klammer stehenden Glieder tritt in jedem Glied des Produkts ein Faktor $B_{[rs]}{}^{\cdot\cdot}{}_t\xi^r\xi^t$, oder $B_{[rs]}{}^{\cdot\cdot}{}_t\xi^s\xi^t$ auf. Sei können wegen (8) in der Form $B_{[tr]}{}^{\cdot\cdot}{}_s\xi^r\xi^t$, bzw. $B_{[st]}{}^{\cdot\cdot}{}_r\xi^s\xi^t$ geschrieben werden, die verschwinden. Es verschwinden aber auch die Größen, die bei der Multiplikation durch die erste runde Klammer entstehen. In der zweiten eckigen Klammer steht nämlich offensichtlich $p^{rs}p^{uv}$. Daher kommt in jedem Glied des Produktes der Faktor $B_{(rs)}{}^{\cdot\cdot}p^{rs}$ vor, welcher wegen der Symmetrie von $B_{(rs)}{}^{\cdot\cdot}$ und der Antisymmetrie von p^{rs} verschwindet.

Untersuchen wir das Problem im Falle eines induzierten Zusammenhanges. Nehmen wir also an, daß γ sich auf die Form

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta^i_k\Gamma_l{}^j{}_t + \delta^j_l\Gamma_k{}^i{}_t$$

reduziert. Es sei ferner

$$\Gamma^*_j{}^i{}_k = \Gamma_j{}^i{}_k + \delta^i_j\psi_k + \delta^i_k\psi_j, \tag{9}$$

wo ψ_k ein beliebiger Vektor ist. Wir bilden die Übertragungskoeffizienten

$$\gamma^*_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta^i_k\Gamma^*_l{}^j{}_t + \delta^j_l\Gamma^*_k{}^i{}_t. \tag{10}$$

Die autoparallelen Flächen für γ und γ^* sind identisch. Beide Zusammenhänge sind nämlich induziert, und daher sind ihre autoparallele Flächen nach dem Satz 1 die totalgeodätischen Flächen der entsprechenden gewöhnlichen affinzusammenhängenden Geometrien, erzeugt durch die Γ bzw. Γ^*. Die totalgeodätischen Flächen, erzeugt durch die Γ bzw. Γ^* sind aber identisch, da nach (9) Γ^* durch die projektive Deformation von Γ entsteht, was besagt, daß die Geodätischen der Γ und der Γ^* zusammenfallen, und daher auch ihre Totalgeodätischen.

Setzen wir (9) in (10) ein, so erhalten wir für B den Wert

$$B_{kl}{}^{ij}{}_t = 2\delta^i_k\delta^j_l\psi_t + \delta^i_k\delta^j_t\psi_l + \delta^i_t\delta^j_l\psi_k. \tag{11}$$

Nach dem vorangehenden Absatz läßt die Veränderung durch einen solchen Deformationstenzor B eines beliebigen reduzierenden γ die autoparallelen Flächen unverändert. (11) annulliert aber auch die linke Seite von (5, a). Daher gilt der

SATZ 7. *Die Deformation durch einen Tensor* (11) *eines beliebigen Zusammenhanges γ ist eine projektive Deformation. Ist γ ein induzierter Zusammenhang, so bringt auch sein projektiv-deformierter durch einen Tensor* (11) *einen induzierten Zusammenhang zustande.*

(11) befriedigt aber im allgemeinen (8) nicht, was zeigt, daß (8) nur eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingung dafür ist, daß B ein projektiver Deformationstensor sei.

MATHEMATISCHES INSTITUT,
UNIVERSITÄT KOSSUTH LAJOS,
DEBRECEN

(Eingegangen am 23. März 1964.)

Literaturverzeichnis

[1] A. Cossu, Nozioni generali sulle connessioni tensoriali di specie qualunque, *Rend. Mat. e Appl.*, **21** (1962), S. 167–218.
[2] L. P. Eisenhart, *Non Riemannian-geometry* (New York, 1927).
[3] M. Kucharzewski, Über die Tensorübertragung, *Annali di Mat. Pura et Appl.*, **54** (1961), S. 64–83.
[4] L. Tamássy, Über den Affinzusammenhang von, zu Tangentialräumen gehörenden Produkträumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), S. 65–82.
[5] J. M. Thomas–O. Veblen, Projective invariants of affine geometry of paths, *Annals of Math.*, **27** (1926), S. 279–296.
[6] O. Varga, Über die Kennzeichnung der Riemannschen Räumen konstanter negativer und konstanter positiver Krümmung, *Annali di Mat. pura ed Appl.*, **53** (1961), S. 105–118.

ON THE MEAN VALUES OF AN ENTIRE FUNCTION REPRESENTED BY DIRICHLET SERIES. II

By

P. K. KAMTHAN (Delhi)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. Let $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ $(S=\sigma+it;\ 0\leqq\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty;\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n/\lambda_n<\infty;$ $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=h>0)$ represent an entire function of order $(R)\varrho$. Let us define:

$$A(\sigma)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma+it)|^2\,dt; \tag{1.1}$$

$$m_k(\sigma)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2Te^{k\sigma}}\int_{0}^{\sigma}\int_{-T}^{T}|f(x+it)|^2\,e^{kx}\,dx\,dt, \qquad 0<k<\infty. \tag{1.2}$$

I have proved elsewhere [1] a number of results obtaining ϱ and λ in terms of $A(\sigma)$ and $m_k(\sigma)$, making use of the condition that $\chi_n=\log|a_{n-1}/a_n|(\lambda_n-\lambda_{n-1})$ is a non-decreasing function of n for atleast $n\geqq n_0$. In this paper I wish to state and prove the following theorems:

2. THEOREM 1. *If* $0\leqq\varrho<\infty$ *holds for an entire function* $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{s\lambda_n}$ *where* λ_n*'s satisfy the conditions enunciated as above, then for* $\sigma\to\infty$

$$\log m_k(\sigma)\sim\log A(\sigma).$$

PROOF. We have from (1.1) and (1.2)

$$m_k(\sigma)=\frac{1}{e^{k\sigma}}\int_{0}^{\sigma}A(x)e^{kx}\,dx<\frac{A(\sigma)}{k}. \tag{2.1}$$

Further for $\Delta>\sigma$

$$m_k(\Delta)>\frac{1}{e^{k\Delta}}\int_{\sigma}^{\Delta}A(x)e^{kx}\,dx>\frac{A(\sigma)}{k}\,\frac{e^{k\Delta}-e^{k\sigma}}{e^{k\Delta}}. \tag{2.2}$$

Inequalities (2.1) and (2.2) yield when combined together:

$$m_k(\sigma)<\frac{A(\sigma)}{k}<\frac{e^{k\Delta}}{e^{k\Delta}-e^{k\sigma}}\,m_k(\Delta), \qquad \Delta>\sigma. \tag{2.3}$$

But [1]*

$$\log\{e^{k\Delta}m_k(\Delta)\} = \log\{e^{k\sigma}m_k(\sigma)\} + \int_{\sigma}^{\Delta} \frac{A(x)}{m_k(x)}\,dx \leqq \tag{2.4}$$

$$\leqq \log\{e^{k\sigma}m_k(\sigma)\} + \frac{A(\Delta)}{m_k(\Delta)}(\Delta-\sigma).$$

But for $\eta > 0$,

$$\frac{\eta A(\sigma)}{m_k(\sigma)} < \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} \frac{A(x)}{m_k(x)}\,dx < \log\{e^{(\sigma+\eta)k}m_k(\sigma+\eta)\} < \tag{2.5}$$

$$< \log\{k^{-1}e^{(\sigma+\eta)k}A(\sigma+\eta)\} = (1+o(1))\log A(\sigma+\eta),$$

since $\log A(\sigma)$ is a convex function of σ (see lemma 2 [1]). Hence, following (3. 1) of Theorem 1 [1], we have:

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \log[A(\sigma)/m_k(\sigma)]/\sigma \leqq \varrho. \tag{2.6}$$

Again

$$\Delta - \sigma < \exp(A-\sigma) - 1,\ \Delta > \sigma. \tag{2.7}$$

Hence making use of (2. 6) and (2. 7) in (2. 5), we find for $\Delta > \sigma \geqq \sigma_0$,

$$-\log k + \log A(\sigma) + \log(e^{k\Delta} - e^{k\sigma}) < \log(e^{k\sigma}) + \log m_k(\sigma) + [1 + e^{-(\varrho+\varepsilon)\sigma}]^{\varrho+\varepsilon};$$

$$\Delta = \sigma + \log\left[1 + \exp\{-(\varrho+\varepsilon)\sigma\}\right] > \sigma \geqq \sigma_0$$

or,

$$\log A(\sigma) + \log(e^{k(\Delta-\sigma)} - 1) < \log m_k(\sigma) + 1 + O(e^{-(\varrho+\varepsilon)\sigma}),$$

or,

$$\log A(\sigma) < \log m_k(\sigma) + 1 + O(e^{-(\varrho+\varepsilon)\sigma}).$$

Hence

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{\log A(\sigma)}{\log m_k(\sigma)} \leqq 1.$$

But from the left-hand inequality in (2. 3) we obviously have:

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{\log A(\sigma)}{\log m_k(\sigma)} \geqq 1$$

and so the result follows.

THEOREM 2. *For* $\sigma \geqq \sigma_0$

$$A(\sigma, f^{(1)}) \geqq A(\sigma)\left[\frac{\log A(\sigma)}{2\sigma}\right]^2,$$

where

$$A(\sigma, f^{(1)}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f'(\sigma+it)|^2\,dt.$$

* This can be verified from the integral relation involving $m_k(\sigma)$ and $A(\sigma)$.

PROOF.

$$A(\sigma,f^{(1)}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f'(\sigma+it)|^2\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{f(\sigma+it)-f(\sigma-\sigma\varepsilon+it)}{\sigma\varepsilon}\right|^2 dt \geqq$$

$$\geqq \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\frac{|f(\sigma+it)|-|f(\sigma-\sigma\varepsilon+it)|}{\sigma\varepsilon}\right\}^2 dt.$$

Hence

$$\left(A(\sigma,f^{(1)})\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sigma\varepsilon}\left\{\left(A(\sigma)\right)^{\frac{1}{2}}-\left(A(\sigma-\sigma\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \geqq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sigma\varepsilon}\left\{e^{\sigma n(\sigma)/2}-e^{(\sigma-\sigma\varepsilon)n(\sigma)/2}\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sigma\varepsilon}e^{\sigma n(\sigma)/2}\left\{1-e^{-\sigma\varepsilon n(\sigma)/2}\right\} = \frac{\log A(\sigma)}{2\sigma}\,[A(\sigma)]^{\frac{1}{2}},$$

where

$$n(\sigma) = \frac{\log A(\sigma)}{\sigma}.$$

THEOREM 3. *We have for every arbitrarily small* $\varepsilon>0$ *and* $\sigma>\sigma_0$

$$\frac{m_k(\sigma,f^{(1)})}{m_k(\sigma)} > (1-\varepsilon)\,\frac{A(\sigma-\eta,f^{(1)})}{A(\sigma-\eta)},$$

where η *is fixed and* >0.

PROOF. We have:

$$m_k(\sigma,f^{(1)}) > \frac{1}{e^{k\sigma}}\int_{\sigma-\eta}^{\sigma}\frac{A(x,f^{(1)})}{A(x)}\,A(x)\,e^{kx}\,dx >$$

$$> \frac{A(\sigma-\eta,f^{(1)})}{A(\sigma-\eta)}\cdot\frac{1}{e^{k\sigma}}\left[\int_0^{\sigma}-\int_0^{\sigma-\eta}\right]A(x)\,e^{kx}\,dx = \frac{A(\sigma-\eta,f^{(1)})}{A(\sigma-\eta)}\,[m_k(\sigma)-e^{-k\eta}m_k(\sigma-\eta)].$$

Now

$$\log\left[e^{k\eta}m_k(\sigma)/m_k(\sigma-\eta)\right] = \int_{\sigma-\eta}^{\sigma}A(x)/m_k(x)\,dx.$$

Hence

$$\exp\left[\eta A(\sigma-\eta)/m_k(\sigma-\eta)\right] \leqq e^{k\eta}m_k(\sigma)/m_k(\sigma-\eta) \leqq \exp\left[\eta A(\sigma)/m_k(\sigma)\right].$$

Therefore

$$m_k(\sigma-\eta) = o\big(m_k(\sigma)\big),$$

and so we find that

$$m_k(\sigma, f^{(1)}) > (1-\varepsilon) m_k(\sigma) A(\sigma, -\eta, f^{(1)})/A(\sigma-\eta), \qquad \sigma > \sigma_0.$$

THEOREM 4. *We have:*

$$\frac{m_k(\sigma, f^{(1)})}{m_k(\sigma)} < \frac{A(\sigma, f^{(1)})}{A(\sigma)}.$$

PROOF. We have:

$$m_k(\sigma, f^{(1)}) = \frac{1}{e^{k\sigma}} \int_0^{\sigma} \frac{A(x, f^{(1)})}{A(x)} A(x) e^{kx}\, dx < \frac{A(\sigma, f^{(1)})}{A(\sigma)} \frac{1}{e^{k\sigma}} \int_0^{\sigma} A(x) e^{kx}\, dx,$$

since from Theorem 2 $A(x, f^{(1)})/A(x)$ is an increasing function, and this proves the result.

UNIVERSITY OF DELHI,
DELHI, INDIA

(Received 31 March 1964)

Reference

[1] P. K. KAMTHAN, On the mean values of an entire function represented by Dirichlet series, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15** (1964), pp. 133–136.

PARTITION RELATIONS FOR CARDINAL NUMBERS

By

P. ERDŐS (Budapest), member of the Academy, A. HAJNAL (Budapest)

and R. RADO (Reading, England)

1. INTRODUCTION

In this paper our main object is the study of relations between cardinal numbers which are written in the form

$$a \to (b_0, b_1, \ldots)^r \quad \text{or} \quad a \to (b)_c^{<\aleph_0} \quad \text{or}$$

$$\binom{a}{b} \to \binom{a_0 \quad a_1}{b_0 \quad b_1}. \tag{1}$$

Such relations were introduced in [3] and [1]. They are called I-relations, II-relations and III-relations respectively, and they will be defined in 3. 1, 3. 2 and 3. 3. In sections 18 and 19 we shall introduce certain generalizations of these relations. Our whole theory can be considered as having arisen out of the classical theorem of RAMSEY [18]. The most natural and direct generalization of the question settled by Ramsey's theorem is the problem of deciding whether for a given positive integer r and given cardinals $a, b_0, b_1, \ldots$ the I-relation $a \to (b_0, b_1, \ldots)^r$ is true or false. Although the I-relation was only introduced in 1952 several papers had already appeared on such relations between 1933 and 1952. As far as we know the first of these papers is due to W. SIERPIŃSKI [19] who proved that $2^{\aleph_0} \not\to (\aleph_1, \aleph_1)^2$. Two of the present authors have published several notes on such relations. All the results found by us before the present paper are contained in [1] where there will also be found references to previous papers by other writers except to those of G. KUREPA of which we had no knowledge at that time. Independently of P. ERDŐS and R. RADO and at about the same time KUREPA found several I-relations the most important of which, deduced under the assumption of the generalized continuum hypothesis, can be stated as follows:

$$\aleph_{\alpha+2} \to (\aleph_{\alpha+1}, \aleph_{\alpha+2})^2,$$

$$\aleph_{\alpha+r} \to (\aleph_{\alpha+1})^r_{\aleph_\alpha} \quad \text{for} \quad r \geqq 1, \ \alpha \geqq 0.$$

Furthermore, KUREPA proved independently but somewhat later than SIERPIŃSKI that

$$2^{\aleph_\alpha} \not\to (\aleph_{\alpha+1}, \aleph_{\alpha+1})^2.$$

For these results see [20].

In this paper our first major aim is to discuss as completely as possible the relation I. Our most general results in this direction are stated in Theorems I and II, and the remaining open questions are stated in Problems 1 and 2. If we disregard cases when among the given cardinals there occur inaccessible numbers greater than $\aleph_0$, and if we assume the General Continuum Hypothesis, then our results are complete for $r = 2$, and they are also complete for $r \geqq 3$ provided we restrict ourselves to finitely many numbers b_ν. It seems that there are only two essentially

different methods for obtaining positive partition formulae: those given in Lemma 1 (the ramification method) and those given in Lemma 3 (the canonization method). The idea underlying Lemma 1 has of course been known for a long time but the ramification method in its present form gives in some cases sharper and more general results than have been known before. We shall not always quote in the text the place where the previous weaker results appeared. Perhaps our most important new method is that given in Lemma 3 of which there are bound to be many further applications.

In Lemma 5 we state powerful new methods for constructing examples of particular partitions which yield negative I-relations. The simplest special case of these general constructions leads to a proof of

$$2^{2^{\aleph_0}} \nrightarrow (\aleph_1, \aleph_1)^3$$

which was the decisive step towards proving our general theorems. Throughout most of our work we assume the General Continuum Hypothesis. In some cases it will be obvious to the reader how the theorems should be formulated when this hypothesis is not made but in other cases unmanageable complications would arise if we were to abandon the continuum hypothesis.

In sections 17 we prove a negative result on II-relations which is sharper than that obtained in [4]. This result is perhaps not best possible but it is interesting on account of its connection with the abstract measure problem for inaccessible cardinals described in section 8.

In sections 18—20 we consider problems which are in various ways related to our original partition problem. Here we are very far from obtaining complete results, and in some cases we are not even able to give a complete discussion of the many open questions. The proofs and constructions of counter examples are similar to those used in sections 1—16 but the results show many new and interesting features such as those present in Theorems 22 and 23.

Our second major aim is an investigation of the polarized partition relation III. Such relations were formally introduced in [3] but an earlier result of SIERPIŃSKI [22] implicitly contains the formula

$$\binom{\aleph_0}{\aleph_1} \nrightarrow \binom{\aleph_0 \quad \aleph_0}{\aleph_1 \quad \aleph_1}.$$

In 3. 3 we define a very general type of polarized relation but we in fact restrict ourselves to relations of type (1). This severe restriction is probably not essential and it is justified only because even in this special case our discussion is not complete. Several important problems remain unsolved some of which, such as Problems 10 and 12, seem difficult and may require new methods. It may well be that new phenomena arise with more general polarized partitions but we have not investigated these.

PART I

2. NOTATION AND DEFINITIONS

Unless the contrary is stated, Roman capitals denote sets, small Greek letters as well as k, l, m, n denote ordinal numbers (ordinals), and small Roman letters other than k, l, m, n, x, y, z denote cardinal numbers (cardinals). The sequence of

infinite cardinals is $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$, and the corresponding initial ordinals are $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. We always put $\omega = \omega_0$. No distinction is made between finite ordinals and the corresponding finite cardinals. We shall always assume that

$$r, s < \omega.$$

For every α, the symbol α^* denotes the order type obtained from the type α by reversing all order relations.

Bold type letters $\mathbf{A}, \mathbf{F}, \ldots$ are used to denote sets of sets or families of sets. As usual, these last two notions differ in that in a family the multiplicity of occurrence of any particular set is essential whereas this is not so in a set of sets. If A is a set of ordinals and $A \neq \varnothing$ then $\min A$ denotes the least element of A.

Set inclusion in the wide sense, union and intersection are denoted by

$$A \subset B, \quad A + B, \quad AB$$

respectively, and the symbols

$$\Sigma(\nu \in N) A_\nu, \quad \Pi(\nu \in N) A_\nu$$

denote union and intersection of any family of sets. Without fear of creating confusion we use the same notation for sums and products of cardinals as for union and intersection of sets. The symbol

$$\Sigma'(\nu \in N) A_\nu$$

denotes the set $\Sigma(\nu \in N) A_\nu$ and, at the same time, expresses the fact that

$$A_\mu A_\nu = \varnothing \quad \text{for} \quad \mu, \nu \in N; \mu \neq \nu.$$

We shall make use of the *obliteration operator* $\hat{}$ whose effect on a well-ordered sequence of elements is to remove that element above which it is placed. Thus

$$x_0, x_1, \ldots, \hat{x}_n \tag{1}$$

denotes the sequence of type n whose νth term is x_ν. We use this notation even in cases where an element x_n has not been defined at all. The symbol

$$a_0 + a_1 + \ldots + \hat{a}_n \tag{2}$$

denotes the sum of all cardinals a_ν for wich $\nu < n$, and other similar uses of the operator $\hat{}$ will be easily interpreted. We shall nearly always omit the customary three dots ... to indicate a continuation of the symbols as indicated in front of them, so that (1) and (2) are more simply written as $x_0,, \hat{x}_n$ and $a_0 + + \hat{a}_n$ respectively.

If $\Phi(x)$ is a proposition involving the general element x of A then for $B \subset A$ the symbol

$$B\{x\colon \Phi(x)\}$$

denotes the set of all $x \in B$ such that $\Phi(x)$ is true. In the formula for $\Phi(x)$ we may use the logical signs $\wedge$ for "and", $\vee$ for "or", $\supset$ for "implies", $\exists x$ for "there is x", and $\forall x$ for "for all x".

The cartesian product of sets $A_0,, \hat{A}_n$ is

$$A_0 \times\times \hat{A}_n = \{(x_0,, \hat{x}_n)\colon \nu < n \supset x_\nu \in A_\nu\} = \{f\colon \nu < n \supset f(\nu) \in A_\nu\}.$$

If $A_0, \hat{A}_n$ are pairwise disjoint sets each of which is ordered then the symbol

$$A_0 + + \hat{A}_n (tp)$$

denotes the set $A_0 + + \hat{A}_n = A$ and, at the same time, indicates that A is ordered by the rule that for $x, y \in A$ we have $x < y$ if and only if

either (i) there is $v < n$ with $x, y \in A_v$, and $x < y$ in A_v,
or (ii) there are $\mu < v < n$ with $x \in A_\mu$ and $y \in A_v$.

If $x_0, \hat{x}_n \in A$, and if a binary relation $x \prec y$ is defined on A then each of the symbols

$$\{x_0, \hat{x}_n\}_\prec, \quad \{x_v : v < n\}_\prec$$

denotes the set $\{x_0, \hat{x}_n\}$ and, in addition, expresses the fact that $x_\alpha \prec x_\beta$ for $\alpha < \beta < n$.

The cardinal of A is $|A|$, and if A is ordered then the order type of A is denoted by tp A. If the same set A is ordered by several order relations R_v then tp (A, R_v) denotes the order type of A under R_v. If tp $A = \alpha$ then we put $|\alpha| = |A|$. For any A and B we put

$$A - B = A\{x : x \notin B\}.$$

If $\alpha \leqq \beta$ then we put

$$[\alpha, \beta) = \{v : \alpha \leqq v < \beta\}.$$

Every α has a unique representation $\alpha = \omega\beta + r$. We put

$$\alpha \dot{-} s = \omega\beta + (r - s) \text{ if } r \geqq s,$$
$$\omega\beta \text{ if } r < s.$$

Ordinals of the form $\gamma + 1$ are said to be of the *first kind*, all others of the *second kind*. Ordinals of the form $\omega\beta$, where $\beta \geqq 1$, are *limit numbers*, all others *isolated*. If $a = \aleph_\alpha$ then we put

$$a^+ = \aleph_{\alpha+1}; \; a^- = \aleph_{\alpha \dot{-} 1}.$$

If $a < \omega$ then $a^+ = a + 1$ and $a^- = a \dot{-} 1$.

If $a \geqq \aleph_0$ then a' denotes throughout this paper the least cardinal b such that

$$a = a_0 + + \hat{a}_n$$

for some suitable n, a_v such that $|n| = b$ and $a_0, \hat{a}_n < a$. If $a = \aleph_\alpha$ then $a' = \aleph'_\alpha = \aleph_{\mathrm{cf}(\alpha)}$ where cf(α) is the *cofinality function* introduced by TARSKI. Whenever the notation a' is used it is tacitly assumed that $a \geqq \aleph_0$.

The cardinal a is called *weakly inaccessible* if

$$a = a' = a^-,$$

and it is *strongly inaccessible* if

$$a = a', \text{ and } b < a \text{ implies } 2^b < a.$$

These two notions will mainly be used when the General Continuum Hypothesis

(3) $$2^{\aleph_v} = \aleph_{v+1} \text{ for all } v$$

is assumed in which case strongly and weakly inaccessible cardinals form the same class and will simply be referred to as inaccessible. The number $\aleph_0$ is strongly inaccessible, and no other inaccessible number is known.

We put

$$[S]^a = \{X: X \subset S \wedge |X| = a\},$$

$$[S]^{<a} = \Sigma(b < a)[S]^b,$$

$$[S]^{\leqq a} = \Sigma(a \leqq b \leqq |S|)[S]^b,$$

$$\mathbf{P}(S) = \{X: X \subset S\}.$$

The following notation will be very useful. If $I \subset \mathbf{P}(S)$ then

$$[I]_r = \{|X|: X \subset S \wedge [X]^r \subset I\}.$$

Clearly, $[I]_r$ depends on I and r only and not on S. We shall use the notation

$$[S_0, \hat{S}_n]^{a_0, \hat{a}_n} = \mathbf{P}(S_0 + + \hat{S}_n)\{X: (\forall v)(v < n \supset |XS_v| = a_v)\}.$$

For any a we denote by $\omega(a)$ the *initial ordinal* whose cardinal is a, i. e. we put

$$\omega(a) = \min_n (|n| = a).$$

The statement of propositions in whose proof the General Continuum Hypothesis (3) is assumed, will be prefixed by the symbol $(*)$. The same applies to problems which are of interest only when (3) is assumed.

3. THE PARTITION RELATIONS I, II, III

3. 1. The ordinary partition relation (relation I). A *partition* of A is any sequence $(A_0, \hat{A}_n)$ such that $A = A_0 + + \hat{A}_n$. We shall also use the version $A = \Sigma(v \in N) A_v$. The A_v are the classes of the partition. The partition is called *disjoint* if $A = \Sigma' A_v$. An *r-partition* of A is, by definition, a partition of $[A]^r$.

The *power* of a partition $\Delta = (A_0, \hat{A}_n)$ of A is the cardinal

$$|\Delta| = |\{v: v < n \wedge A_v \neq \varnothing\}|.$$

Thus a 1-partition of A is a sequence $(I_0, \hat{I}_n)$ such that $[A]^1 = \Sigma I_v$. Then $A = \Sigma J_v$ where $J_v = A\{x: \{x\} \in I_v\}$ for $v < n$. When there is no danger of a misunderstanding we shall identify the partition $(I_0, \hat{I}_n)$ of $[A]^1$ with the partition $(J_0, \hat{J}_n)$ of A.

If Δ is a partition of A, and if $B \subset A$, then the statement

$$|\Delta| \leqq 1 \text{ in } B$$

means, by definition, that B lies in some class of Δ, and "$|\Delta| > 1$ in B" is the negation of this statement.

Trivial results in [1] show that there is no loss of generality in assuming that in every partition the classes are indexed by a set of ordinals of the form $[0, n)$. Occasionally we shall employ a notation in which the classes of a partition are indexed in some other way.

We define the *ordinary partition relation (I-relation)*

$$a \to (b_0, \hat{b}_n)^r \quad (\text{or: } a \to (b_\nu)^r_{\nu<n}) \tag{1}$$

as follows. The relation (1) expresses the fact that whenever

$$|S| = a; \quad [S]^r = I_0 + + \hat{I}_n \tag{2}$$

then there are a number $\nu < n$ and a set $X \subset S$ such that

$$|X| = b_\nu; \quad [X]^r \subset I_\nu.$$

More simply, this means that (2) implies that

$$b_\nu \in [I_\nu]_r \text{ for some } \nu < n.$$

The logical negation of (1), and similarly for all partition relations to be introduced later, is written as

$$a \not\to (b_0, \hat{b}_n)^r \quad (\text{or: } a \not\to (b_\nu)^r_{\nu<n}). \tag{3}$$

The relations (1) and (3) are only of interest if

$$r \geqq 1; \quad n \geqq 2; \quad r < b_0, \hat{b}_n \leqq a.$$

Here is a systematic discussion of the degenerate cases of (1) and (3). Define four disjoint subsets of $[0, n)$ whose union is $[0, n)$:

$$N_{++} = \{\nu: r \leqq b_\nu \leqq a\},$$
$$N_{+-} = \{\nu: r \leqq b_\nu \not\leqq a\},$$
$$N_{-+} = \{\nu: r \not\leqq b_\nu \leqq a\},$$
$$N_{--} = \{\nu: r \not\leqq b_\nu \not\leqq a\}.$$

Case 1. $N_{-+} \neq \varnothing$. Then (1) holds. For if (2) holds then we choose $\nu \in N_{-+}$. Then $r \not\leqq b_\nu \leqq a$, and we can choose $X \in [S]^{b_\nu}$. Then $[X]^r = \varnothing \subset I_\nu$ and (1) follows.

Case 2. $N_{-+} = \varnothing$.

Case 2*a*. $N_{+-} + N_{--} \neq \varnothing$. Then (3) holds. For if $|S| = a$ then there is a partition (2) such that $I_\nu = \varnothing$ for $\nu \notin N_{+-} + N_{--}$. Now suppose there are a number $\nu < n$ and a set $X \in [S]^{b_\nu}$ such that $[X]^r \subset I_\nu$. Then $b_\nu \leqq a$; $\nu \in N_{++} + N_{-+} = N_{++}$; $\varnothing \neq [X]^r \subset I_\nu$; $\nu \in N_{+-} + N_{--}$ which is a contradiction. Hence (1) is false.

Case 2*b*. $N_{+-} + N_{--} = \varnothing$. Then $r_\nu \leqq b_\nu \leqq a$ for $\nu < n$, and it follows that this is the only case worth studying. Hence when discussing (1) or (3) we may if we wish assume $r \leqq b_0, \hat{b}_n \leqq a$. We mention that even this last case can be further reduced by omitting those b_ν for which $b_\nu = r$. For we have the following simple proposition: If $m \leqq n$ and $b_0 = = \hat{b}_m = r$, then the relations $a \to (b_0, \hat{b}_n)^r$ and $a \to (b_m, \hat{b}_n)^r$ are equivalent. If $b_\nu = b$ for $\nu < n$ we write (1) also in the form

$$a \to (b)^r_c \text{ or } a \to (b)^r_n \tag{4}$$

where $c=|n|$. This notation is justified since if all b_ν are equal to each other then the truth of (1) does not depend on the ordinal number n but only on the value of $|n|$. More generally, the relation

$$a \to ((b_0)_{c_0}, (b_1)_{c_1})^r \tag{5}$$

has the following meaning. Let $|n_0|=c_0$; $|n_1|=c_1$;

$$d_\nu = b_0 \text{ for } \nu < n_0$$
$$b_1 \text{ for } n_0 \leqq \nu < n_0 + n_1 .$$

Then

$$a \to (d_\nu)^r_{\nu < n_0 + n_1} .$$

We may, of course, have more than two groups of equal entries in (5). Similar remarks apply to (3).

REMARK. Concerning a further extension of the relation (1) to cover partitions of $[S]^e$ for $e \geqq \aleph_0$ it is proved in [3], p. 434, that every such analogue of (1) is false.

3. 2. Partition relations with multiple exponents (II-relations). Let $r_0,, \hat{r}_l$, a, b, c be given cardinals. Then we say that the relation

$$a \to (b)^{r_0,, \hat{r}_l}_c \tag{6}$$

holds if, whenever $|S|=a$ and

$$[S]^r = \Sigma(\nu < \omega(c)) I(r, \nu) \quad (\text{partition } \Delta_r)$$

for all r then there always exists a set $X \in [S]^b$ such that

$$|\Delta_{r_\lambda}| \leqq 1 \text{ in } [X]^{r_\lambda} \text{ for every } \lambda < l.$$

We call (6) a *II-relation* or, more explicitly, a *II* $(r_0,, \hat{r}_l)$*-relation*. The II (r_0)-relations coincide with the ordinary I-relations. When studying (6) we may always suppose if we wish that $l \leqq \omega$ and $r_0 << \hat{r}_l$. If $\{s_0,, \hat{s}_m\} \subset \{r_0,, \hat{r}_l\}$ then (6) implies $a \to (b)^{s_0,, \hat{s}_m}_c$. In 5. 3 we shall see that if $b \geqq \aleph_0$ and $\sup(\mu < m) s_\mu = \omega$ then the converse implication holds so that for $b \geqq \aleph_0$ all relations (6) with fixed a, b, c and arbitrary $r_0,, \hat{r}_l$ with $\sup(\lambda < l) r_\lambda = \omega$ are equivalent. The relation (6) is only of interest if $c \geqq 2$ and $a \geqq b \geqq r_0,, \hat{r}_l$. In particular, (6) is false if $a < b$; $c > 0$; $l > 0$ and (6) is true if $a \geqq b$ and $b < r_\lambda$ for some $\lambda < l$. The logical negation of (6) is written as

$$a \not\to (b)^{r_0,, \hat{r}_l}_c .$$

Another type of II-relation, which we shall discuss in some more detail is written as

$$a \to (b)^{< \aleph_0}_c$$

and expresses the following condition. Let $|S|=a$;

$$[S]^r = \Sigma(\nu < \omega(c)) I(r, \nu) \quad (\text{partition } \Delta_r)$$

for every r. Then there always are a set $X \in [S]^b$ and a number r_0 such that

$$|\Delta_r| \leqq 1 \text{ in } [X]^r \text{ for } r \geqq r_0 .$$

3. 3. Polarized partition relations (III-relations). Let $s \geqq 2$; $r_0, , r_{s-1} \geqq 1$, and let a_σ and $b_{\sigma\nu}$ be cardinals, for $\sigma < s$; $\nu < n$. Then the relation

$$\text{(7)} \qquad \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{s-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_{0\nu} \\ b_{1\nu} \\ \vdots \\ b_{s-1,\nu} \end{pmatrix}_{\nu<n}^{r_0, r_1, , r_{s-1}}$$

is said to hold if the following condition is satisfied. Let $|S_\sigma| = a_\sigma$ for $\sigma < s$, and $S_\sigma S_\tau = \varnothing$ for $\sigma < \tau < s$. Let

$$[S_0, , S_{s-1}]^{r_0, , r_{s-1}} = I_0 + + \hat{I}_n.$$

Then there are always sets $X_\sigma \subset S_\sigma$ for $\sigma < s$ and a number $\nu < n$ such that

$$|X_\sigma| = b_{\sigma\nu} \text{ for } \sigma < s, \text{ and } [X_0, , X_{s-1}]^{r_0, , r_{s-1}} \subset I_\nu.$$

The relation (7) is only of interest if

$$r_\sigma \leqq b_{\sigma\nu} \leqq a_\nu \text{ for } \sigma < s;\ \nu < n,$$

and we shall frequently when considering (7), assume these conditions to hold. In the present paper we shall mainly consider the very special case

$$s = 2; \quad r_0 = r_1 = 1; \quad n = 2$$

which corresponds to the partitioning of even graphs into two subgraphs. We shall however also investigate a generalization of this special case in a different direction Let $a, b, c_\nu, d_\nu, e_\nu, f_\nu$ be cardinals, for $\nu < n$. Then the "*relation with alternatives*'

$$\text{(8)} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_\nu \vee d_\nu \\ e_\nu \vee f_\nu \end{pmatrix}_{\nu<n}^{1,1}$$

is said to hold whenever the following statement is true. Let $AB = \varnothing$; $|A| = a$; $|B| = b$; $[A, B]^{1,1} = I_0 + + \hat{I}_n$. Then there are always sets $X \subset A$; $Y \subset B$ and a number $\nu < n$ such that $[X, Y]^{1,1} \subset I_\nu$ and either (i) $|X| = c_\nu$; $|Y| = e_\nu$ or (ii) $|X| = d_\nu$; $|Y| = f_\nu$. It is worth noting here that the alternatives for the sets X and Y are not independent so that for instance the possibility $|X| = c_\nu$; $|Y| = f_\nu$ is not permitted. The relation (8) is only of interest if

$$1 \leqq c_\nu, d_\nu \leqq a; \ 1 \leqq e_\nu, f_\nu \leqq b \text{ for } \nu < n,$$

and we shall frequently assume these inequalities.

REMARKS. 1. Theorems proved in sections 24 and 26 will show that alternatives are essential for the investigation of even graphs. Clearly there is no need for introducing more than two alternatives for each class.

2. It would of course be possible to define more general relations with alternatives but then it would not be easy to determine the minimum number of alternatives required for a complete discussion.

3. If $c_\nu = d_\nu$ and $e_\nu = f_\nu$ for $\nu < n$ then (8) is equivalent to

$$\binom{a}{b} \to \binom{c_\nu}{e_\nu}^{1,1}_{\nu<n}.$$

4. If in (8) we have, for $\nu < n$, $c_\nu = c$; $d_\nu = d$; $e_\nu = e$; $f_\nu = f$, then we also write (8) in the form

$$\binom{a}{b} \to \binom{c \vee d}{e \vee f}^{1,1}_{|n|}.$$

5. On reflection it will become obvious that in studying any of the relations I, II, III there will be no loss of generality in assuming that all partitions involved in the arguments are disjoint.

6. The left hand sides of all our partition relations will nearly always be assumed to contain infinite cardinals only.

4. PRELIMINARIES ON PARTITION RELATIONS I, II, III

4. 1. Invariance under permutations of the arguments. Let $|m| = |n|$, and let $\nu \to \pi(\nu)$ be a one-one map of $[0, m)$ onto $[0, n)$. Then the relations $a \to (b_\nu)^r_{\nu<n}$ and $a \to (b_{\pi(\nu)})^r_{\nu<m}$ are equivalent, and similarly the relations

$$\binom{a}{b} \to \binom{c_\nu \vee d_\nu}{e_\nu \vee f_\nu}^{1,1}_{\nu<n} \quad \text{and} \quad \binom{a}{b} \to \binom{c_{\pi(\nu)} \vee d_{\pi(\nu)}}{e_{\pi(\nu)} \vee f_{\pi(\nu)}}^{1,1}_{\nu<m}$$

are equivalent. For the proof see [1], Theorem 17.

4. 2. Monotonicity properties. We say that one of our relations is *increasing (decreasing)* in one of its arguments if whenever the relation holds it continues to hold when this particular argument is increased (decreased) while the remaining arguments remain constant. It is easy to see that every one of our partition relations I, II, III is increasing in every cardinal variable on the left hand side and decreasing in every cardinal variable on the right hand side, with the exception of the "exponent" r and a cardinal indicating the number of classes. For the proof see [1], Theorem 12.

4. 3. Substitution rules. (i) Let $a \to (b_0, \hat{b}_n)^r$; $n \geqq 1$; $b_0 \to (c_0, \hat{c}_m)^r$. Then $a \to (c_0, \hat{c}_m, b_1, \hat{b}_n)^r$. For the proof see [1], Theorem 16.

(ii) Substitution in a relation with two alternatives may lead to a relation with more than two alternatives. Thus it is easy to see that the three relations (in which on the right only the first row is written out)

$$\binom{a}{b} \to \binom{a_0 \vee a_1,\ a_2 \vee a_3}{b_0 \vee b_1,\ \ldots\ldots}; \quad \binom{a_0}{b_0} \to \binom{a_4 \vee a_5,\ a_6 \vee a_7}{\ldots\ldots\ldots\ldots}; \quad \binom{a_1}{b_1} \to \binom{a_8 \vee a_9,\ a_{10} \vee a_{11}}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

imply the new relation

$$\binom{a}{b} \to \binom{a_4 \vee a_5 \vee a_8 \vee a_9,\ a_6 \vee a_7 \vee a_{10} \vee a_{11},\ a_2 \vee a_3}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots}$$

and that in general nothing stronger than this can be asserted.

5. FURTHER REMARKS ON PARTITIONS

5. 1. Product of partitions. Let $k \geqq 1$, and let, for each $\varkappa < k$, $\Delta_\varkappa$ be a partition

$$S = \Sigma(\nu < n_\varkappa) A_\varkappa(\nu)$$

of S. Then the *product*

$$\Delta_0 \ldots \hat{\Delta}_k = \Pi(\varkappa < k) \Delta_\varkappa$$

denotes the partition

$$S = \Sigma(\varkappa < k \supset \nu_\varkappa < n_\varkappa) B(\nu_0, , \nu_k)$$

where

$$B(\nu_0, , \hat{\nu}_k) = \Pi(\varkappa < k) A_\varkappa(\nu_\varkappa).$$

It follows that

$$|\Pi \Delta_\varkappa| \leqq \Pi |\Delta_\varkappa|.$$

Also, if every $\Delta_\varkappa$ is disjoint then $\Pi \Delta_\varkappa$ is disjoint. By convention, an empty product of partitions of S is the partition which has only one class.

5. 2. Induced partitions. Let Δ be a disjoint partition of S. Then the relation

$$x_0 \equiv x_1 (\cdot \Delta)$$

denotes, by definition, the fact that $x_0, x_1 \in S$ and that x_0 and x_1 lie in the same class of Δ. Let

$$f: y \to f(y)$$

be a map from a set T into S. Then a partition Δ' of T is defined by the rule

$$\Delta'(y) = \Delta(f(y)) \text{ for } y \in T$$

which, by definition, means that

$$y_0 \equiv y_1 (\cdot \Delta')$$

if and only if

$$y_0, y_1 \in T \text{ and } f(y_0) \equiv f(y_1) (\cdot \Delta).$$

We call Δ' the partition of T *induced* by Δ and f. Clearly, $|\Delta'| \leqq |\Delta|$. Frequently the multiplication of a number of induced partitions is the effective tool for proving results on partitions.

We now prove the assertion made in 3. 2 about the equivalence of various Π $(r_0, , \hat{r}_l)$-relations.

5. 3. *Let*

$$a \to (b)_c^{r_0, , \hat{r}_l}; \; b \geqq \aleph_0; \; \sup(\lambda < l) r_\lambda = \omega.$$

Then

$$a \to (b)_c^{0, , \hat{\omega}}.$$

PROOF. Let $\omega(a) = n$; $S = [0, n)$; $|N| = c$, and let

$$[S]^r = \Sigma(\nu \in N) I(r, \nu) \text{ (partition } \Delta_r)$$

for all r.

By the remark made in 3. 2 we may assume that $r_0 < < \hat{r}_l$. Define the r-partition Δ_r' of S by

$$\Delta_r'(\{x_0, , \hat{x}_{r_<}\}) = \Delta_\lambda(\{x_0, , \hat{x}_\lambda\}) \quad \text{for} \quad r_\lambda \leqq r < r_{\lambda+1}, \quad \lambda < \omega.$$

Then obviously $|\Delta'_r| = c$. Hence, by hypothesis, there is $X \subseteq S$ such that $\mathrm{tp}X = \omega(b)$ and

$$|\Delta'_{r_\lambda}| \leqq 1 \text{ in } [X]^{r_\lambda} \text{ for } \lambda < l.$$

Now let $s < \omega$; $\{x_0,, \hat{x}_\lambda\}_<$, $\{y_0,, \hat{y}_\lambda\}_< \subset X$. Then $r_\lambda \geqq \lambda$ and we can choose $x_\lambda,, \hat{x}_{r_\lambda}$, $y_\lambda,, \hat{y}_{r_\lambda} \in X$ such that $x_0 < < \hat{x}_{r_\lambda}$ and $y_0 < < \hat{y}_{r_\lambda}$. Then

$$\{x_0,, x_{r_\lambda}\} \equiv \{y_0,, y_{r_\lambda}\}(\cdot \Delta'_{r_\lambda})$$

and hence, by definition of Δ'_r,

$$\{x_0,, \hat{x}_\lambda) \equiv \{y_0,, \hat{y}_\lambda\}(\cdot \Delta_\lambda).$$

Hence $|\Delta_\lambda| \leqq 1$ in $[X]^\lambda$, and the assertion follows.

6. THE RAMIFICATION LEMMA

We shall now describe a mode of reasoning which constitutes the core of many arguments about partitions. It has been used, in one form or another, in a number of papers already. In the rather more general form stated below it is a very powerful tool for obtaining partition relations.

LEMMA 1. *Let* $\varrho = \varrho \dot{-} 1 > 0$. *Let* $S(v_0,, v_\sigma)$ *and* $F(v_0,, \hat{v}_\sigma)$ *be sets and* $n(v_0,, \hat{v}_\sigma)$ *be ordinals defined for* $\sigma \leqq \varrho$. *Put*

$$N = \{(v_0,, \hat{v}_\sigma) \colon \sigma \leqq \varrho \wedge (\tau < \sigma \supset v_\tau < n(v_0,, \hat{v}_\tau))\}; \quad S'(v_0,, \hat{v}_\sigma) = S\Pi(\tau < \sigma) S(v_0,, v_\tau)$$

for $\sigma \leqq \varrho$.

Suppose that

$$S'(v_0,, \hat{v}_\sigma) = F(v_0,, \hat{v}_\sigma) +' \Sigma(v_\sigma < n(v_0,, \hat{v}_\sigma)) S(v_0,, v_\sigma)$$

for $\sigma < \varrho$; $(v_0,, \hat{v}_\sigma) \in N$. *Then we have:*

(i) $F(v_0,, \hat{v}_\tau) F(v_0,, \hat{v}_\sigma) = \varnothing$ *for* $\tau < \sigma < \varrho$ *and* $(v_0,, \hat{v}_\sigma) \in N$.

(ii) $S = \Sigma(\sigma < \varrho \wedge (v_0,, \hat{v}_\sigma) \in N) F(v_0,, \hat{v}_\sigma) + \Sigma((v_0,, \hat{v}_\varrho) \in N) S'(v_0,, \hat{v}_\varrho)$.

(iii) *Let* $|S| \geqq a \geqq \aleph_0$ *and* $|\varrho| < a'$; $|F(v_0,, \hat{v}_\sigma)| < a$ *for* $(v_0,, \hat{v}_\sigma) \in N$.

Suppose that there are cardinals c_σ *such that* $c_\sigma^{|\sigma|} < a'$ $\sigma < \varrho$, *and* $|n(v_0,, \hat{v}_\tau)| \leqq c_\sigma$ *whenever* $\tau < \sigma < \varrho$ *and* $(v_0,, \hat{v}_\sigma) \in N$. *Then*

(1) *there is* $(v_0,, \hat{v}_\varrho) \in N$ *with* $S'(v_0,, \hat{v}_\varrho) \neq \varnothing$.

(iv) *Let* $|S| \geqq b^+ > \aleph_0$; $\varrho \leqq \omega(b')$; $|n(v_0,, \hat{v}_\sigma)| \leqq b$ *and*

$|F(v_0,, \hat{v}_\sigma)| \leqq b$ *for* $\sigma < \varrho$ *and* $(v_0,, \hat{v}_\sigma) \in N$. *Let* $2^c \leqq b$ *for* $c < b$.

Then (1) *holds.*

(v) *Let* $|S| \geqq a$; $|\varrho| < a$; $|n(v_0,, \hat{v}_\sigma)| < a$ *and* $|F(v_0,, \hat{v}_\sigma)| < a$ *for* $\sigma < \varrho$ *and* $(v_0,, v_\sigma) \in N$. *Suppose that* a *is strongly inaccessible. Then* (1) *holds.*

PROOF OF (i). $F(v_0,, \hat{v}_\tau) F(v_0,, \hat{v}_\sigma) \subset F(v_0,, \hat{v}_\tau) S'(v_0,, \hat{v}_\sigma) \subset F(v_0,, \hat{v}_\tau) S(v_0,, v_\tau) = \varnothing$.

PROOF OF (ii). Put $\Sigma(\sigma<\varrho\wedge(v_{0,},\hat{v}_\sigma)\in N)F(v_{0,},\hat{v}_\sigma)=G$; $S-G=T$. For $\sigma<\varrho$ and $(v_{0,},\hat{v}_\sigma)\in N$ put $S(v_{0,},v_\sigma)-G=T(v_{0,},v_\sigma)$. Then $T\Pi(\tau<\sigma)T(v_{0,},v_\tau)=$ $=\Sigma((v_{0,},v_\sigma)\in N)T(v_{0,},v_\sigma)$ for $\sigma<\varrho$; $(v_{0,},\hat{v}_\sigma)\in N$. Hence we have, for $\pi<\sigma<\varrho$ and $(v_{0,},v_\sigma)\in N$,

$$T(v_{0,},v_\sigma)\subset\Sigma((v_{0,},\hat{v}_\sigma,\lambda)\in N)T(v_{0,},\hat{v}_\sigma,\lambda)=\Pi(\tau<\sigma)T(v_{0,},v_\tau)\subset T(v_{0,},v_\pi).$$

Now suppose that there is an element

$$x\in T-\Sigma((v_{0,},\hat{v}_\varrho)\in N)\Pi(\sigma<\varrho)T(v_{0,},v_\sigma).$$

Put $N^*=N\{(v_{0,},v_\sigma):\sigma<\varrho\wedge x\in T(v_{0,},v_\sigma)\}$. Then $N^*\neq\varnothing$. Define a partial order on N^* by putting $(v_{0,},v_\tau)<(v_{0,},v_\sigma)$ whenever $\tau<\sigma$. We want to apply Zorn's lemma to N^*. Let $l=l\dot{-}1>0$ and $(v_0(\lambda),,v_{\sigma_\lambda}(\lambda))<(v_0(\mu),,v_{\sigma_\mu}(\mu))$ for $\lambda<\mu<l$. Then $\sigma_0<<\tilde{\sigma}_l<\varrho$; $\omega\leqq\sup(\lambda<l)\sigma_\lambda=\pi\leqq\varrho$, and there are numbers $v_{0,},\hat{v}_\pi$ such that $v_\sigma(\lambda)=v_\sigma$ for $\lambda<l$ and $\sigma\leqq\sigma_\lambda$. Then $(v_{0,},\hat{v}_\pi)\in N$. Also, $x\in\Pi(\varkappa<\pi)T(v_{0,},v_\varkappa)$ and hence, by definition of x, $\pi<\varrho$. Then

$$x\in\Pi(\varkappa<\pi)T(v_{0,},v_\varkappa)=\Sigma((v_{0,},v_\pi)\in N)T(v_{0,},v_\pi),$$

and there is v_π such that $(v_{0,},v_\pi)\in N$ and $x\in T(v_{0,},v_\pi)$. Then $(v_0(\lambda),,v_{\sigma_\lambda}(\lambda))<$ $<(v_{0,},v_\pi)$ for $\lambda<l$, and hence the partial order on N^* is inductive. Thus Zorn's lemma applies and gives a maximal element $(v_{0,},v_\alpha)$ in N^*. Then $\alpha<\varrho$; $\alpha+1<\varrho$; $x\in T(v_{0,},v_\alpha)=\Pi(\beta<\alpha+1)T(v_{0,},v_\beta)=\Sigma((v_{0,},v_{\alpha+1})\in N)T(v_{0,},v_{\alpha+1})$, and there is $v_{\alpha+1}$ such that $(v_{0,},v_{\alpha+1})\in N$ and $x\in T(v_{0,},v_{\alpha+1})$. But then $(v_{0,},v_{\alpha+1})>$ $>(v_{0,},v_\alpha)$ which contradicts the maximality of $(v_{0,},v_\alpha)$. Hence there is no such element x, and therefore

$$S-G=\Sigma((v_{0,},\hat{v}_\varrho)\in N)\Pi(\sigma<\varrho)(S(v_{0,},v_\sigma)-G).$$

This implies (ii).

PROOF OF (iii). Let (1) be false. Then, by (ii),

$$|S|\leqq\Sigma(\sigma<\varrho\wedge(v_{0,},\hat{v}_\sigma)\in N)|F(v_{0,},\hat{v}_\sigma)|. \tag{2}$$

The number of terms of the sum in (2) is at most

$$\Sigma(\sigma<\varrho)c_\sigma^{|\sigma|}<a',$$

by the regularity of a'. Hence, using the definition of a', we deduce from (2) that $|S|<a$ which is the required contradiction.

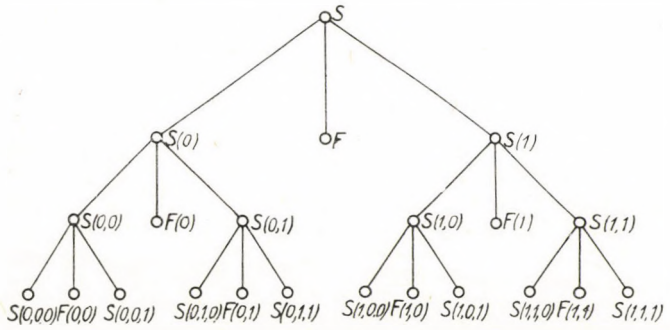
PROOF OF (iv). Put, in (iii), $a=b^+$ and $c_\sigma=b$. Then the hypothesis of (iii) holds since, if $\sigma<\varrho$, we have $|\sigma|<b'$ and hence

$$c_\sigma^{|\sigma|}=b^{|\sigma|}\leqq b<a=a'.$$

PROOF OF (v). Let (1) be false. Then, again, (2) holds. Put $N_\sigma=\{(v_{0,},\check{v}_\sigma):$ $(v_{0,},\hat{v}_\sigma)\in N\}$ for $\sigma<\varrho$. We prove by induction that $|N_\sigma|<a$. Let $\tau<\varrho$, and suppose that $|N_\sigma|<a$ for $\sigma<\tau$. Then we have: If $\tau=0$, then $|N_\tau|=1<a$. If $\tau=\pi+1$, then $|N_\tau|=\Sigma((v_{0,},\hat{v}_\pi)\in N_\pi)|n(v_{0,},\hat{v}_\pi)|<a$. Now let $\tau=\tau\dot{-}1>0$ and $(v_{0,},\hat{v}_\tau)\in N_\tau$. Then $(v_{0,},\hat{v}_\sigma)\in N_\sigma$ for $\sigma<\tau$ and hence $|N_\tau|\leqq\Pi(\sigma<\tau)|N_\sigma|<a$. Thus $|N_\sigma|<a$ for

$\sigma < \varrho$, and again (2) leads to the contradiction $|S| < a$. This proves (v) and completes the proof of Lemma 1.

We call the system **R** of sets N, $F(v_0,, \hat{v}_\sigma)$, $S(v_0, v_\sigma)$ a *ramification system* on S of *length* ϱ. If all $n(v_0,, \hat{v}_\sigma)$ have the same value n we call n the *order* of the ramification system. With every ramification system there is associated a tree whose lowest branches, in the case of order 2, are shown in the following diagram:



In applications we shall always use the notation $S'(v_0,, \hat{v}_\sigma)$ as defined in the lemma, and also N_σ as defined in the proof of (v). We shall construct **R** inductively. Assuming that $S'(v_0,, \hat{v}_\sigma)$ has already been defined for some fixed σ, $v_0,, \hat{v}_\sigma$ we shall define $n(v_0,, \hat{v}_\sigma)$, $F(v_0,, \hat{v}_\sigma)$, $S(v_0,, v_\sigma)$.

7. POSITIVE THEOREMS FOR I-RELATIONS IN THE CASE $a = \aleph_{\alpha+1}$; $r = 2$

THEOREM 1. *Let* $a \to (a_0,, \hat{a}_m)^2$; $b \to (b_0,, \hat{b}_k)^1$; $b \geqq \aleph_0$; $a, b^+ \leqq c = c'$, *and suppose that* $(a^- |k|)^d < c$ *for all* $d < b$. *Then*

$$c \to (a_0,, \hat{a}_m, b_0,, \hat{b}_k)^2.$$

(∗) COROLLARY 1. $\aleph_{\alpha+1} \to (\aleph_{\alpha+1}, (\aleph'_\alpha)_k)^2$ *for* $\alpha \geqq 0$; $|k| < \aleph'_\alpha$.

Deduction of the Corollary from the Theorem. Put $m = 1$; $a = a_0 = \aleph_{\alpha+1}$; $b = b_0 = = \hat{b}_k = \aleph'_\alpha$; $c = \aleph_{\alpha+1}$. Then the hypothesis of Theorem 1 holds, and the Corollary follows.

PROOF OF THEOREM 1. Let $|S| = c$,

$$[S]^2 = \Sigma(\mu < m) K_\mu + \Sigma(\varkappa < k) L_\varkappa.$$

We may assume that

(1) $$\text{if } S' \in [S]^a, \text{ then } [S']^2 \not\subset \Sigma(\mu < m) K_\mu.$$

We have to find a number $\varkappa < k$ and a set $S'' \subset S$ such that $[S'']^2 \subset L_\varkappa$ and $|S''| \geqq b_\varkappa$.

We define inductively a ramification system **R** on S of length $\varrho = \omega(b)$ and order $n = \omega(a^- |k|)$. By (1), $a \geqq 2$. Let $\sigma < \varrho$, and let $S'(v_0,, \hat{v}_\sigma)$ be defined for some

$v_0,, \hat{v}_\sigma$. We write v in place of $v_0,, \hat{v}_\sigma$. Choose as $F(v)$ a maximal subset of $S'(v)$ such that

$$[F(v)]^2 \subset K_0 + + \hat{K}_m.$$

Then, by (1), $|F(v)| < a$, and by the maximality of $F(v)$ we have

$$S'(v) - F(v) = \Sigma(v_\sigma < n)\, S(v, v_\sigma)$$

where, for each $v_\sigma < n$, either $S(v, v_\sigma) = \varnothing$ or, for some $y(v, v_\sigma) \in F(v)$ and $\varkappa(v, v_\sigma) < k$, we have

$$S(v, v_\sigma) = \big(S'(v) - F(v)\big)\{x: \{y(v, v_\sigma), x\} \in L_{\varkappa(v, v_\sigma)}\}. \tag{2}$$

Here we have used the fact that the number of pairs $(y, \varkappa)$ with $y \in F(v)$ and $\varkappa < k$ does not exceed $a^- |k| = |n|$.

This defines **R**. Now Lemma 1 (iii) applies. For: $|S| = c$ is regular; $|\varrho| = b < c$. If $\sigma < \varrho$, then

$$|n|^{|\sigma|} = \big(a^- |k|\big)^{|\sigma|} < c$$

since $|\sigma| < b$. Hence by Lemma 1 (iii) there are numbers $v_0,, \hat{v}_\varrho < n$ such that $S'(v_0,, \hat{v}_\varrho) \neq \varnothing$. Then (2) holds for $\sigma < \varrho$. Put $x_\sigma = y(v_0,, v_\sigma)$ for $\sigma < \varrho$. If $\sigma < \tau < \varrho$ then

$$x_\tau = y(v_0,, v_\tau) \in F(v_0,, \hat{v}_\tau) \subset S'(v_0,, \hat{v}_\tau) \subset S(v_0,, v_\sigma);$$

$$\{x_\sigma, x_\tau\} \in L_{\varkappa(v_0,, v_\sigma)}.$$

Put $M_\varkappa = [0, \varrho)\{\sigma: \varkappa(v_0,, v_\sigma) = \varkappa\}$ for $\varkappa < k$. Then $[0, \varrho) = M_0 + + \hat{M}_k$, and by $b \to (b_\varkappa)^1_{\varkappa < k}$ there is $\varkappa < k$ such that $|M_\varkappa| \geqq b_\varkappa$. Put $S'' = \{x_\sigma: \sigma \in M_\varkappa\}$. Then $|S''| \geqq b_\varkappa$; $[S'']^2 \subset L_\varkappa$, and Theorem 1 follows.

REMARK. The method used in the proof of Theorem 1 actually yields a result of a more general type: see Theorem 39 in section 22. We have described here the proof for this special case in order to prepare the complete discussion of relation I without applying results on polarized partitions.

(∗) THEOREM 2. *If* $c < a'$, *then* $a^+ \to (a)^2_c$.

PROOF. Let $|S| = a^+$; $[S]^2 = I_0 + + \hat{I}_n$; $n = \omega(c)$. We define a ramification system **R** on S of length $\varrho = \omega(a)$ and order n. Let $\sigma < \varrho$, and let $S'(v_0,, \hat{v}_\sigma)$ be defined. Again, instead of $v_0,, \hat{v}_\sigma$ we write v. If $S'(v) = \varnothing$ then put $F(v) = S(v, v_\sigma) = \varnothing$ for $v_\sigma < n$. Now let $S'(v) \neq \varnothing$. Choose $x(v) \in S'(v)$ and put $F(v) = \{x(v)\}$,

$$S(v, v_\sigma) = \big(S'(v) - F(v)\big)\{y: \{x(v), y\} \in I_{v_\sigma}\} \quad \text{for} \quad v_\sigma < n.$$

This defines **R**. Lemma 1 (iii) applies. For $|S| = a^+$ is regular; $|\varrho| = a < a^+$; $|F(v)| \leqq 1 < a^+$, and if $\sigma < \varrho$ then

$$|n|^{|\sigma|} = c^{|\sigma|} < a^+.$$

Hence there are numbers $v_0,, \hat{v}_\varrho < n$ with $S'(v_0,, \hat{v}_\varrho) \neq \varnothing$. Then $F(v_0,, \hat{v}_\sigma) = \{x_\sigma\}$; $x_\sigma = x(v_0,, \hat{v}_\sigma)$ for $\sigma < \varrho$. If $\sigma < \tau < \varrho$ then, by definition of $S(v_0,, v_\sigma)$,

$$\{x_\tau\} = F(v_0,, \hat{v}_\tau) \subset S'(v_0,, \hat{v}_\tau) \subset S(v_0,, v_\sigma);\ \{x_\sigma, x_\tau\} \in I_{v_\sigma}.$$

If $M_\varkappa = [0, \varrho)\{\sigma: v_\sigma = \varkappa\}$ for $\varkappa < n$, then $[0, \varrho) = M_0 + + \hat{M}_n$, and since $|n| = c < a' = |\varrho|'$, there is $\varkappa < n$ such that $|M_\varkappa| = |\varrho| = a$. Put $S'' = \{x_\sigma: \sigma \in M_\varkappa\}$. Then $|S''| = a$; $[S'']^2 \subset I_\varkappa$, and Theorem 2 follows.

REMARK. If a is regular then the conclusion of Theorem 2 follows from Corollary 1.

8. FURTHER POSITIVE THEOREMS FOR I-RELATIONS. REMARKS AND PROBLEMS FOR THE CASE OF INACCESSIBLE CARDINALS

8. 1. (∗) LEMMA 2 *(the stepping-up lemma). Let* $r \geqq 1$; $a \geqq \aleph_0$; $a \to (b_\nu)^r_{\nu<m}$. *Then*

$$a^+ \to (b_\nu + 1)^{r+1}_{\nu<m}. \tag{1}$$

PROOF. We may assume that $r < b_0, \hat{b}_m \leqq a$.

Case 1. $m \geqq \omega(a)$. Then there is a partition

$$[S]^r = L_0 + + \hat{L}_m, \quad \text{where } |S| = a,$$

such that $|L_\nu| \leqq 1$ for $\nu < n$. Then, by hypothesis, there are $\nu < m$ and $Y \in [S]^{b_\nu}$ such that $[Y]^r \subset L_\nu$. Then $|[Y]^r| \leqq |L_\nu| \leqq 1$; $b_\nu \leqq r$, which is a contradiction.

Case 2. $m < \omega(a)$. Then (1) follows by [1], Theorem 39 (ii). For the convenience of the reader we briefly describe the proof.

Let $|S| = a^+$, and

$$[S]^{r+1} = I_0 + ' + ' \hat{I}_m \quad \text{(partition } \Delta\text{)}.$$

We define inductively a ramification system **R** on S of length $\varrho = \omega(a)$. Let $\sigma < \varrho$, and let $S'(v_0, \hat{v}_\sigma)$ be defined. Write v in place of $v_0, \hat{v}_\sigma$, for some fixed numbers $v_0, \hat{v}_\sigma$. If $S'(v) = \varnothing$, put $F(v) = \varnothing$ and $n(v) = 0$. Now let $S'(v) \neq \varnothing$. Choose $F(v) = \{x(v)\} \subset S'(v)$ and put

$$\Delta_\nu(y) = \Pi\big(X \in [\Sigma(\tau \leqq \sigma) F(v_0, \hat{v}_\tau)]^r\big) \Delta(X + \{y\})$$

for $y \in S'(v) - F(v)$. Put $n(v) = \omega(|\Delta_\nu|)$. Then

$$S'(v) - F(v) = \Sigma\big(v_\sigma < n(v)\big) S(v, v_\sigma),$$

where $|\Delta_\nu| \leqq 1$ on each $S(v, v_\sigma)$. This defines **R**. Now Lemma 1 (iii) applies. For we have, for $\tau < \sigma$,

$$|n(v_0, \hat{v}_\sigma)| \leqq |\Delta|^{|\sigma+1|^r} = c_\sigma < a; \quad |n(v_0, \hat{v}_\tau)| \leqq c_\sigma.$$

Also, $c_\sigma^{|\sigma|} \leqq a < a^+$; $|S| = a^+ = a^{+\prime}$; $|\varrho| < a^+$; $|F(v)| \leqq 1 < a^+$. Hence, by Lemma 1 (iii), there is $(v_0, \hat{v}_\varrho) \in N$ such that $S'(v_0, \hat{v}_\varrho) \neq \varnothing$. Choose $x_\varrho \in S'(v_0, \hat{v}_\varrho)$. Then we can write $F(v_0, \hat{v}_\sigma) = \{x_\sigma\}$ for $\sigma < \varrho$, and we have $\{x_0, x_\varrho\}_{\neq} \subset S$. Now

$$\Delta_\nu(y) = \Pi\big(X \in [\{x_0, x_\sigma\}]^r\big) \Delta\big(X + \{y\}\big) \quad \text{for } y \in S'(v) - \{x_\sigma\},$$

for $\sigma < \varrho$. By definition of $S(v, v_\sigma)$,

$$\{x_{\sigma_0}, x_{\sigma_r}\} \equiv \{x_{\sigma_0}, \hat{x}_{\sigma_r}, x_\varrho\} \ (\cdot \Delta)$$

for $\sigma_0 < \ldots < \sigma_r < \varrho$. We have $[[0, \varrho)]^r = K_0 + \ldots + \hat{K}_m$, where $K_\mu = [[0, \varrho)]^r\{X: X + \{x_\varrho\} \in I_\mu\}$ for $\mu < m$. Since $|\varrho| = a \to (b_\mu)^r_{\mu<m}$, there are μ and M such that $\mu < m$; $M \subset [0, \varrho)$; $|M| = b_\mu$; $[M]^r \subset K_\mu$. Put $Q = \{x_\sigma: \sigma \in M\} + \{x_\varrho\}$. Then

$$Q \subset S; \quad |Q| = b_\mu + 1; \quad [Q]^{r+1} \subset I_\mu,$$

and (1) follows. This proves Lemma 2.

(*) THEOREM 3. *If* $\alpha \geqq 0$; $c < \aleph'_\alpha$; $r \geqq 2$, *then*

$$\aleph_{\alpha+(r-1)} \to (\aleph_{\alpha+1}, (\aleph'_\alpha)_c)^r.$$

(*) THEOREM 4. *If* $\alpha \geqq 0$; $c < \aleph'_\alpha$; $r \geqq 1$, *then* $\aleph_{\alpha+(r-1)} \to (\aleph_\alpha)^r_c$.

PROOFS. Theorem 4 is trivial for $r = 1$. Both, Theorem 3 and Theorem 4 are true for $r = 2$, by Corollary 1 and Theorem 2 respectively. For general $r \geqq 2$ both theorems follow from Lemma 2 by induction over r.

(*) COROLLARY 2. *If* $\aleph_\alpha$ *is regular;* $c < \aleph_\alpha$; $r \geqq 2$, *then*

$$\aleph_{\alpha+(r-1)} \to (\aleph_{\alpha+1}, (\aleph_\alpha)_c)^r.$$

REMARK. For regular $\aleph_\alpha$ Theorem 4 follows from Theorem 3.
We shall need the well known

THEOREM OF RAMSEY [18]. (i) *For* $c < \aleph_0$ *and* $r \geqq 1$, $\aleph_0 \to (\aleph_0)^r_c$.
(ii) *For* $b, c, r < \aleph_0$ *there is* $R(b, c, r) < \aleph_0$ *such that*

$$R(b, c, r) \to (b)^r_c.$$

(*) THEOREM 5. *Let* a *be inaccessible;* $m < \omega(a)$; $b_0, \ldots, \hat{b}_m < a$. *Then*

$$a \to (a, b_0, \ldots, \hat{b}_m)^2.$$

The case $m < \omega$ of this theorem is [1], Theorem 8.

PROOF. Let

$$|S| = a; \quad [S]^2 = L + L_0 + \ldots + \hat{L}_m; \quad a \notin [L]_2.$$

We define a ramification system $\mathbf{R}$ on S of length $\varrho = \omega((b_0 + \ldots + \hat{b}_m)^+)$. We note that

$$|\varrho| \to (b_0, \ldots, \hat{b}_m)^1. \tag{2}$$

Let $\sigma < \varrho$, and let $S'(v_0, \ldots, \hat{v}_\sigma) = S'(v)$ be defined. We take as $F(v)$ a maximal subset of $S'(v)$ such that $[F(v)]^2 \subset L$. Since $a \notin [L]_2$ we have $|F(v)| < a$. Then there are a number $n(v)$, elements $x(v, v_\sigma)$ of $F(v)$ and numbers $\mu(v, v_\sigma) < m$ such that

$$S'(v) - F(v) = \Sigma(v_\sigma < n(v))\, S(v, v_\sigma),$$

where $\{x, x(v, v_\sigma)\} \in L_{\mu(v, v_\sigma)}$ for $v_\sigma < n(v)$; $x \in S(v, v_\sigma)$. This follows from the maximality of $F(v)$. We can make

$$|n(v)| \leqq |F(v)| \cdot |m| < a.$$

This defines $\mathbf{R}$. Lemma 1 (iv) applies and yields $(v_0, \ldots, \hat{v}_\varrho) \in N$ such that $S'(v_0, \ldots, \hat{v}_\varrho) \neq \varnothing$.

Then $n(v_{0,}, \hat{v}_\sigma) \geqq 1$ for $\sigma < \varrho$, and there exists $x_\sigma = x(v_{0,}, v_\sigma)$ for $\sigma < \varrho$. Then

$$\{x_\tau, x_\sigma\} \in L_{\mu(v_{,}, v_\tau)} \text{ for } \tau < \sigma < \varrho,$$

$$[0, \varrho) = K_0 + + \hat{K}_m,$$

where $K_\mu = \{\tau : \tau < \varrho \wedge \mu(v_{0,}, v_\tau) = \mu\}$ for $\mu < m$. By (2) there are $M \subset [0, \varrho)$ and $\mu < m$ such that $|M| = b_\mu$ and $M \subset K_\mu$. Put $X = \{x_\sigma : \sigma \in M\}$. Then $|X| = b_\mu$ and $[X]^2 \subset L_\mu$ which proves Theorem 5.

8. 2. The following remarks are relevant in connection with the discussion of partition relations involving inaccessible cardinals.

We want to consider the following propositions involving a cardinal $a \geqq \aleph_0$:

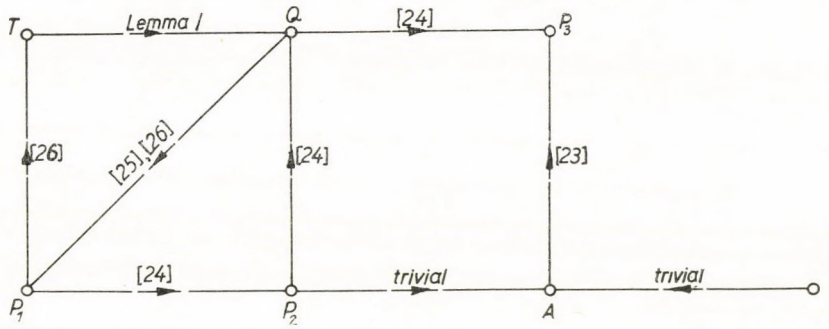
A: If a is strongly inaccessible, then $a \nrightarrow (a)_2^{<\aleph_0}$.

B: If a is strongly inaccessible, then $a \nrightarrow (\aleph_0)_2^{<\aleph_0}$.

P_1, P_2, P_3, Q: These are defined in [24].

T: $a \nrightarrow (a, 4)^3$.

The following diagram shows implication relations known to hold between these propositions together with the corresponding references:



Furthermore, (i) if $P_3 \Rightarrow Q$, then Q holds for all a [28]; (ii) if Gödel's constructability axiom is assumed then P_3 holds for all a [27]. (iii) Q holds for a very wide class of strongly inaccessible cardinals [5].

By (iii) $a \nrightarrow (a, a)^2$, $a \nrightarrow (a, 4)^3$ and $a \nrightarrow (a)_2^{<\aleph_0}$ hold for many inacessible cardinals.

The following problems remain open.

PROBLEM (A) Is it true that $a \nrightarrow (a, a)^2$, $a \nrightarrow (a, 4)^3$ or $a \nrightarrow (a)_2^{<\aleph_0}$ hold for every strongly inaccessible cardinal?

(B) Is there any strongly inaccessible cardinal for which $a \nrightarrow (\aleph_0)_2^{<\aleph_0}$ holds?

Added in proof (23. III. 1965.). For a more detailed discussion of the recent results concerning Q, P_1, P_2, P_3 see [30].

It has been recently proved by F. ROWBOTTOM that Gödel's constructibility axiom implies that $a \nrightarrow (\aleph_1)_2^{<\aleph_0}$ holds for every cardinal a.

9. CANONICAL PARTITIONS. CANONIZATION LEMMA

9. 1. DEFINITION. Let Δ be a disjoint partition of $[S]^r$, and let $\Sigma'(\nu<n)S_\nu \subset S$. Then Δ is called *canonical* in $(S_0,, \hat{S}_n)$ if for $X, Y \in [S_0 + + \hat{S}_n]^r$ the relations

$$|XS_\nu| = |YS_\nu| \quad \text{for} \quad \nu < n$$

imply

$$X \equiv Y(\cdot \Delta).$$

We remark here that this notion of canonicity differs from that used in [1]. There we were considering ordinal canonicity whereas here we have cardinal canonicity.

9. 2. (*) LEMMA 3 *(Canonization lemma). Let* $|S| = a > a'$; $\varrho = \omega(a')$; $r \geqq 1$; $a_0 < < \hat{a}_\varrho < a = \sup(\sigma < \varrho) a_\sigma$, *and let* Δ *be a disjoint partition of* $[S]^r$ *such that* $|\Delta| < a$. *Then there are sets* S_σ *such that* $|S_\sigma| = a_\sigma$ *for* $\sigma < \varrho$ *and* $\Sigma'(\sigma < \varrho) S_\sigma \subset S$, *and* Δ *is canonical in* $(S_0,, \hat{S}_\varrho)$. *If we are, in addition, given any representation*

$$S = \Sigma'(\sigma < \varrho) S'_\sigma$$

such that $|S'_\sigma| < a$ *for* $\sigma < \varrho$, *then we can stipulate that, in addition,* $S_\lambda \subset S'_{\sigma(\lambda)}$ *for* $\lambda < \varrho$, *where* $\sigma(0) < < \hat{\sigma}(\varrho) < \varrho$.

PROOF. Put

$$R = \{(r_0,, \hat{r}_s, t) : r_0,, \hat{r}_s \geqq 1 \wedge r_0 + + \hat{r}_s = r \wedge t < s\}.$$

Let $(r_0,, \hat{r}_s, t) \in R$. We say that Δ is $(r_0,, \hat{r}_s, t)$-canonical in $(A_0,, \hat{A}_\varrho)$ if the following conditions hold: $\Sigma'(\sigma < \varrho) A_\sigma \subset S$; $|A_\sigma| = a_\sigma$ for $\sigma < \varrho$. Whenever $X, Y \in [A_0 + + \hat{A}_\varrho]^r$ and

$$XA_\sigma = X_\sigma; \quad YA_\sigma = Y_\sigma; \quad |X_\sigma| = |Y_\sigma| \quad \text{for} \quad \sigma < \varrho,$$

$$\{\sigma : X_\sigma \neq \varnothing\} = \{\sigma_0,, \hat{\sigma}_s\}_<; \quad |X_{\sigma_\lambda}| = r_\lambda \ (\lambda < s);$$

$$X_\sigma = Y_\sigma \quad \text{for} \quad \sigma \neq \sigma_t,$$

then $X \equiv Y(\cdot \Delta)$. Our aim is to find sets $S_0,, \hat{S}_\varrho$ such that Δ is $(r_0,, \hat{r}_s, t)$ — canonical in $(S_0,, \hat{S}_\varrho)$ for every $(r_0,, r_s, t)$ of R simultaneously.

Let $(r_0,, \hat{r}_s, t) \in R$, and let Δ be $(r_0,, \hat{r}_s, u)$-canonical in a fixed system $(A_0,, \hat{A}_\varrho)$ for every u such that $t < u < s$. This is for instance true if $t = s-1$ and $\Sigma'(\sigma < \varrho) A_\sigma \subset S$; $|A_\sigma| = a_\sigma$ for $\sigma < \varrho$. It suffices to deduce that there are numbers λ_σ and sets B_σ such that $\lambda_0 < < \hat{\lambda}_\varrho < \varrho$ and $B_\sigma \subset A_{\lambda_\sigma}$ for $\sigma < \varrho$, and Δ is $(r_0,, \hat{r}_s, t)$-canonical in $(B_0,, \hat{B}_\varrho)$. For, the passage from $(A_0,, \hat{A}_\varrho)$ to $(B_0,, \hat{B}_\varrho)$ does not destroy any canonicity Δ may have possessed in $(A_0,, \hat{A}_\varrho)$, and a finite number* of steps as described above starting with the sets $S'_0,, \hat{S}'_\varrho$, leads to the required system $(S_0,, \hat{S}_\varrho)$.

We well-order the set $[S]^{<\aleph_0}$ and denote, for $s < \omega$; $X \subset S$; $|X| \geqq s$, by $\pi(X, s)$ the first element of $[X]^s$. We now define λ_σ and B_σ by simultaneous induction. Let $\tau < \varrho$, and let λ_σ, B_σ be defined for $\sigma < \tau$, and suppose that $\lambda_\sigma < \varrho$ and $B_\sigma \in [A_{\lambda_\sigma}]^{a_\sigma}$

* In fact, $|R| = (r+1)\, 2^{r-2}$.

for $\sigma<\tau$. We define λ_τ and B_τ as follows. There is $\lambda_\tau<\varrho$ such that $\lambda_\sigma<\lambda_\tau$ for $\sigma<\tau$. This follows from $|\varrho|'=|\varrho|$. Put

$$\Delta_{\lambda_\tau}(X) = \Pi\big(P\in[A_{\lambda_0}++\hat{A}_{\lambda_\tau}]^{r_0++\hat{r}_t}\wedge\lambda_\tau<\hat{\varrho}_t<<\hat{\varrho}_s<\varrho\big)$$
$$\Delta\big(P+X+\hat{\pi}(A_{\varrho_t},r_t)++\hat{\pi}(A_{\varrho_s},r_s)\big)\quad\text{for}\quad X\in[A_{\lambda_\tau}]^{r_t}.$$

Then

$$|\Delta_{\lambda_\tau}|\leqq|\Delta|^{(a_{\lambda_0}++\hat{a}_{\lambda_t})^{r_0++\hat{r}_t}(a')^{s-t-1}}=b_\tau<a,$$

where b_τ is independent of the choice of λ_τ. We have $a_\tau+b_\tau<\aleph_\alpha<a$ for some $\alpha=\beta+1$. By Theorem 4,

$$\aleph_{\alpha+(r_t-1)}\to(\aleph_a)^{r_t}_{b_t},$$

and $\aleph_{\alpha+(r_t-1)}<a$. We can choose λ_τ so that, in addition, $a_{\lambda_\tau}\geqq\aleph_{\alpha+(r_t-1)}$. Then we shall have

$$a_{\lambda_\tau}\to(a_\tau)^{r_t}_{|\Delta_{\lambda_\tau}|},$$

and therefore there is a set $B_\tau\in[A_{\lambda_\tau}]^{a_\tau}$ such that

$$|\Delta_{\lambda_\tau}|\leqq1\ \text{ in }\ [B_\tau]^{r_t}.$$

This completes the definition of λ_σ and B_σ for $\sigma<\varrho$. We have $\lambda_0<<\hat{\lambda}_\varrho<\varrho$ and $B_\sigma\in[A_{\lambda_\sigma}]^{a_\sigma}$ for $\sigma<\varrho$. We now show that Δ is $(r_0,,\hat{r}_s,t)$-canonical in $(B_0,,\hat{B}_\varrho)$.

Let

$$X,\,Y\in[B_0++\hat{B}_\varrho]^r;\quad XB_\sigma=X_\sigma;\quad YB_\sigma=Y_\sigma\ \text{ for }\ \sigma<\varrho;$$
$$\{\sigma\colon X_\sigma\neq\varnothing\}=\{\sigma_0,,\hat{\sigma}_s\}_<;$$
$$|X_{\sigma_\lambda}|=r_\lambda\ \text{ for }\ \lambda<s,\ \text{and}\ X_\sigma=Y_\sigma\ \text{ for }\ \sigma\neq\sigma_t.$$

Then we have, in view of the $(r_0,,\hat{r}_s,u)$-canonicity for every u in the range $t<u<s$, the relation

$$X=X_{\sigma_0}++\hat{X}_{\sigma_s}\equiv X'(\cdot\Delta),$$

where

$$X'=X_{\sigma_0}++X_{\sigma_t}+\hat{\pi}(A_{\lambda_{\sigma_t}},r_t)++\hat{\pi}(A_{\lambda_{\sigma_s}},r_s).$$

By definition of $\Delta_{\lambda_{\sigma_t}}$ and B_{σ_t} we have $X'\equiv X''(\cdot\Delta)$, where

$$X''=X_{\sigma_0}++\hat{X}_{\sigma_t}+Y_{\sigma_t}+\hat{\pi}(A_{\lambda_{\sigma_t}},r_t)++\hat{\pi}(A_{\lambda_{\sigma_s}},r_s).$$

Finally, again by the $(r_0,,\hat{r}_s,u)$-canonicity for $t<u<s$,

$$X''\equiv X_{\sigma_0}++\hat{X}_{\sigma_t}+Y_{\sigma_t}+\hat{Y}_{\sigma_t}++\hat{Y}_{\sigma_s}=Y(\cdot\Delta).$$

This completes the proof of Lemma 3. We note that the final clause of the lemma is also proved by our construction.

9.3. (∗) LEMMA 3A *(polarized canonization lemma). Let* $a>a'$; $AB=\varnothing$; $|A|=|B|=a$; $\varrho=\omega(a')$; $a_0<<\hat{a}_\varrho<a=\sup(\sigma<\varrho)a_\sigma$;

$$[A,B]^{1,1}=I_0+'I_1.$$

Then there are sets A_σ, B_σ *and numbers* $h(\sigma,\tau)<2$ *such that*

$$\Sigma'(\sigma<\varrho)A_\sigma\subset A;\ \Sigma'(\sigma<\varrho)B_\sigma\subset B;$$

$$|A_\sigma|=|B_\sigma|=a_\sigma \text{ for } \sigma<\varrho;$$

$$[A_\sigma, B_\tau]^{1,1}\subset I_{h(\sigma,\tau)} \text{ for } \sigma,\tau<\varrho.$$

PROOF. Let $\omega(a)=n$; $A=\{x_0,,\hat{x}_n\}_{\neq}$; $B=\{y_0,,\hat{y}_n\}_{\neq}$; $S=[0,n)$. Then $[S]^2=\Sigma'(\varkappa,\lambda<2)I(\varkappa,\lambda)$, where

$$I(\varkappa,\lambda)=\{\{\mu,\nu\}_<:\{x_\mu,y_\nu\}\in I_\varkappa\wedge\{x_\nu,y_\mu\}\in I_\lambda\} \text{ for } \varkappa,\lambda<2.$$

By Lemma 3 there are sets S_σ and numbers $h_0(\sigma,\tau), h_1(\sigma,\tau)<2$ such that $S_0++\hat{S}_\varrho(tp)\subset S$; $|S_\sigma|=a_\sigma$ for $\sigma<\varrho$;

$$[S_\sigma, S_\tau]^{1,1}\subset I(h_0(\sigma,\tau), h_1(\sigma,\tau)) \text{ for } \sigma<\tau<\varrho.$$

Put $A_\sigma=\{x_\mu:\mu\in S_{2\sigma}\}$; $B_\sigma=\{y_\nu:\nu\in S_{2\sigma+1}\}$ for $\sigma<\varrho$. Then $|A_\sigma|=a_{2\sigma}\geqq a_\sigma$; $|B_\sigma|=a_{2\sigma+1}>a_\sigma$ for $\sigma<\varrho$;

$$A_\sigma A_\tau=B_\sigma B_\tau=\varnothing \text{ for } \sigma<\tau<\varrho.$$

Now let $\sigma,\tau<\varrho$; $x_\mu\in A_\sigma$; $y_\nu\in B_\tau$. Then $\mu\in S_{2\sigma}$; $\nu\in S_{2\tau+1}$. If $\sigma\leqq\tau$, then $2\sigma<2\tau+1$; $\{\mu,\nu\}_<\in[S_{2\sigma}, S_{2\tau+1}]^{1,1}\subset I(h_0(2\sigma,2\tau+1), h_1(2\sigma,2\tau+1))$;

$$\{x_\mu, y_\nu\}\in I_{h_0(2\sigma,2\tau+1)}.$$

If $\sigma>\tau$, then $2\tau+1<2\sigma$; $\{\nu,\mu\}_<\in[S_{2\tau+1}, S_{2\sigma}]^{1,1}\subset I(h_0(2\tau+1,2\sigma), h_1(2\tau+1,2\sigma))$;

$$\{x_\mu, y_\nu\}\in I_{h_1(2\tau+1,2\sigma)}.$$

Hence the assertion holds if we put

$$h(\sigma,\tau)=\begin{cases}h_0(2\sigma,2\tau+1) & \text{if } \sigma\leqq\tau\\ h_1(2\tau+1,2\sigma) & \text{if } \sigma>\tau.\end{cases}$$

REMARK. There are, of course, more general versions of polarized canonization procedures.

9. 2. Super-canonicity. DEFINITION. Let Δ be a disjoint r-partition of S, and let $\Sigma'(\nu\in n)S_\nu\subset S$. Then Δ is called *super-canonical* in $(S_0,,\hat{S}_n)$ if the following condition holds. Whenever

$$X, Y\in[S_0++\hat{S}_n]^r;\quad \{\mu:XS_\mu\neq\varnothing\}=\{\mu_0,,\hat{\mu}_s\}_<;$$
$$\{\nu:YS_\nu\neq\varnothing\}=\{\nu_0,,\hat{\nu}_s\}_<;\quad |XS_{\mu_\sigma}|=|YS_{\nu_\sigma}| \text{ for } \sigma<s,$$

then $X\equiv Y(\cdot\Delta)$. It follows that every super canonical partition is canonical. It is easy to prove, by induction over r, that the number of systems $(r_0,,\hat{r}_s)$ such that $r_0,,\hat{r}_s\geqq1$; $r_0++\hat{r}_s=r$ is 2^{r-1}. It follows that if $r\geqq1$ and Δ is super-canonical then $|\Delta|\leqq2^{r-1}$.

LEMMA 3B *(Super-canonization lemma). Let* $|S| = a > a'$; $m < \omega(a') = n$. *Suppose that either* (i) $a' = \aleph_0$, *or* (ii) $a' > \aleph_0$, *and* a' *is measurable*. Let* $r \geqq 1$ *and*

$$[S]^r = I_0 + ' + ' \hat{I}_m \quad (\textit{partition } \Delta).$$

Then there are sets S_ν *and cardinals* a_ν *such that*

$$a_0 < < \hat{a}_n < a = \sup (\nu < n) a_\nu;$$

$$\Sigma'(\nu < n) S_\nu = S; \quad |S_\nu| = a_\nu \textit{ for } \nu < n;$$

$$|\Sigma(\nu < n) S_\nu| = a,$$

and Δ *is super-canonical in* $(S_0, \hat{S}_n)$.

PROOF. There is only one step where the proof in case (ii) differs from that in case (i).

By Lemma 3, there is a set

$$B = \Sigma'(\nu < n) B_\nu \subset S$$

such that Δ is canonical in $(B_0, \hat{B}_n)$; $|B_\nu| = b_\nu$ for $\nu < n$; $b_0 < < \hat{b}_n < a = \sup (\nu < n) b_\nu$. Now there is a partition

$$[[0, n)]^r = \Sigma'(\lambda < l) J_\lambda, \tag{1}$$

where $l < \omega$, such that two elements $\{\mu_0, \hat{\mu}_r\}_<$, $\{\nu_0, \hat{\nu}_r\}_<$ of $[[0, n)]^r$ belong to the same class J_λ if and only if, whenever

$$X \in [\Sigma(\varrho < r) B_{\mu_\varrho}]^r; \quad Y \in [\Sigma(\varrho < r) B_{\nu_\varrho}]^r,$$

and $|XB_{\mu_\varrho}| = |YB_{\nu_\varrho}|$ for $\varrho < r$, then X and Y lie in the same class I_ν. We now apply to the partition (1) the relation

$$a' \to (a')^r_l.$$

In case (i) this relation is Ramsey's theorem, and in case (ii) it follows from [4], Theorem 9. We obtain a set $\{\sigma_0, \hat{\sigma}_n\}_< \subset [0, n)$ and a number $\lambda < l$ such that $[\{\sigma_0, \hat{\sigma}_n\}]^r \subset J_\lambda$. Then Δ is super-canonical in $(B_{\sigma_0}, \hat{B}_{\sigma_n})$, and the assertion holds if we put $S_\nu = B_{\sigma_\nu}$ for $\nu < n$.

10. POSITIVE I-RELATIONS IN THE CASE $r = 2$; $a > a'$

10. 1. (*) LEMMA 4. *Let* $a \geqq \aleph_0$, *and let* $b_0, \hat{b}_m$ *be any cardinals. Then the relations*

$$a \to (a, b_0, \hat{b}_m)^2; \quad a' \to (a', b_0, \hat{b}_m)^2$$

are equivalent.

* i. e. that a' does not possess the property P_3 of [24]. In fact, the weaker condition $a' \to (a', a')^r$ already suffices. After recent results discussed in 8. 2 the existence of such cardinals, other than $\aleph_0$, has been rendered unlikely.

PROOF. The case $a=a'$ is trivial. Now let $a>a'$. The case when $b_0<2$ is trivial. Now let $b_0,, \hat{b}_m \geqq 2$, and put $n=\omega(a')$.

1. Let $a' \to (a', b_0,, \hat{b}_m)^2$. Then $m<a'$, and $b_0,, \hat{b}_m \leqq a'$. Let $|S|=a$ and $[S]^2 = I+'\Sigma'(\mu<m)I_\mu$ (partition Δ). Assume that $b_\mu \notin [I_\mu]_2$ for $\mu<m$. By Lemma 3 there are sets S_ν such that $a' \leqq |S_\nu| < |S_\lambda| < a$ for $\nu<\lambda<n$;

$$\Sigma'(\nu<n) S_\nu \subset S; \quad |S_0 + + \hat{S}_n| = a,$$

and Δ is canonical in $(S_0,, \hat{S}_n)$. If $\mu<m$; $\nu<n$; $[S_\nu]^2 \subset I_\mu$, then $|S_\nu|<b_\mu$ whereas in fact $|S_\nu| \geqq a' \geqq b_\mu$. This contradiction shows that $[S_\nu]^2 \subset I$ for $\nu<n$. Choose $S' \subset S$ such that $|S' S_\nu|=1$ for $\nu<n$. Then $|S'| = a' \to (a', b_0,, \hat{b}_m)^2$, and we have at least one of the following cases.

Case 1. There are a number $\mu<m$ and a set $S'' \in [S']^{b_\mu}$ such that

$$[S'']^2 \subset I_\mu.$$

This contradicts $b_\mu \notin [I_\mu]_2$.

Case 2. There is $S'' \in [S']^{a'}$ such that $[S'']^2 \subset I$. Put

$$S''' = \Sigma(S'' S_\nu \neq \varnothing) S_\nu.$$

Then $|S'''|=a$; $[S''']^2 \subset I$. This proves $a \to (a, b_0,, \hat{b}_m)^2$.

2. Let $a \to (a, b_0,, \hat{b}_m)^2$;

$$[[0, n)]^2 = J+'\Sigma'(\mu<m)J_\mu.$$

Let $S=\Sigma'(\nu<n) S_\nu$ and $|S_\nu|<|S|=a$ for $\nu<n$. Then

$$[S]^2 = I+'\Sigma'(\mu<m)I_\mu,$$

where

$$I_\mu = \Sigma(\{\alpha, \beta\}_< \in J_\mu)[S_\alpha, S_\beta]^{1,1} \text{ for } \mu<m.$$

Then $|S| \to (a, b_0,, \hat{b}_m)^2$, and we have at least one of the cases:

Case 1. There is $S' \in [S]^a$ with $[S']^2 \subset I$. Put $N = \{\nu: S' S_\nu \neq \varnothing\}$. Then $|N|=a'$; $[N]^2 \subset J$.

Case 2. There are a number $\mu<m$ and a set $S' \in [S]^{b_\mu}$ with $[S']^2 \subset I_\mu$. Define N as in case 1. Then $|S' S_\nu| \leqq 1$ for $\nu<n$; $|N|=|S'|=b_\mu$; $[N]^2 \subset J_\mu$. This proves $a' \to (a', b_0,, \hat{b}_m)^2$ and completes the proof of Lemma 4.

10. 2. (*) THEOREM 6. *Let* $a>a' = b^+$; $c<a'$. *Then*

$$a \to (a, (b')_c)^2.$$

PROOF. By Corollary 1, $a' \to (a', (b')_c)^2$, and the assertion follows from Lemma 4.

(*) COROLLARY 3. *Let* $\alpha>\mathrm{cf}(\alpha) = \beta+1$ *and* $c<\aleph'_\alpha$. *Then*

$$\aleph_{\alpha+(r-2)} \to (\aleph_\alpha, (\aleph'_\alpha)_c)^r \text{ for } r \geqq 2.$$

This follows from Theorem 6 and Lemma 2.

11. THE SETS OF VECTORS USED AS COUNTER EXAMPLES

11. 1. The vector discrepancy. For any two distinct "vectors" $x=(x_0,, \hat{x}_n)$; $y=(y_0,, \hat{y}_n)$ of the same "length" n we define the *discrepancy* $\delta(x, y)$ by putting

$$\delta(x, y) = \min(x_v \neq y_v)v.$$

When no confusion can arise we shall instead of $\delta(x, y)$ write more simply xy. If $r \geqq 3$, and $x_0,, x_{r-1}$ are vectors of the same length, $x_\varrho \neq x_{\varrho+1}$ for $\varrho+1<r$, then we put

$$\delta(x_0,, x_{r-1}) = (x_0x_1, x_1x_2,, x_{r-2}x_{r-1}); \quad \delta'(x_0,, x_{r-1}) = \{x_\varrho x_{\varrho+1} : \varrho < r-1\}.$$

Thus $\delta(x_0,, x_{r-1})$ is a vector of length $r-1$, and $\delta'(x_0,, x_{r-1})$ is a set of ordinals.

Every set X of vectors of the same length whose components x_v, y_v are ordinals will be ordered lexicographically by putting

$$x<y \text{ whenever } x_{xy}<y_{xy}.$$

By $\operatorname{tp}(X)$ we always mean $\operatorname{tp}(X, <)$.

11. 2. The set $V(\alpha)$. We put

$$V(\alpha) = \{(x_0,, \hat{x}_{\omega_\alpha}) : x_0,, \hat{x}_{\omega_\alpha} < 2\}.$$

If $(*)$ is assumed then $|V(\alpha)| = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

11. 3. The set $V'(\alpha)$. Let $\alpha > \operatorname{cf}(\alpha)$ and $\omega_{\operatorname{cf}(\alpha)} = n$. For every such α for which we shall want to consider the set $V'(\alpha)$ we shall choose, without mentioning this explicitly, a fixed sequence $\alpha_0,, \hat{\alpha}_n$ such that

$$\operatorname{cf}(\alpha) < \alpha_0 < \hat{\alpha}_n < \alpha = \sup(v<n)\alpha_v.$$

We put $V'(\alpha) = \{(x_0,, \hat{x}_n) : (\forall v)(v<n \supset x_v < \omega_{\alpha_v})\}$. Then $V(\operatorname{cf}(\alpha)) \subset V'(\alpha)$. The set $V'(\alpha)$ is only defined if $\alpha > \operatorname{cf}(\alpha)$. If $(*)$ is assumed then

$$\aleph_\alpha = \Sigma \aleph_{\alpha_v} < \Pi \aleph_{\alpha_v} \leqq \aleph_\alpha^{|n|} = \aleph_{\alpha+1}$$

so that $|V'(\alpha)| = \Pi \aleph_{\alpha_v} = \aleph_{\alpha+1}$.

11. 4. SIERPIŃSKI **partitions.** Let $(V(\alpha), \prec)$ and $(V'(\alpha), \prec')$ be well-orders of the sets $V(\alpha)$ and $V'(\alpha)$ respectively, of types $\omega(|V(\alpha)|)$ and $\omega(|V'(\alpha)|)$ respectively. We define the SIERPIŃSKI *partitions*

$$\Delta_S : [V(\alpha)]^2 = T_0 +' T_1,$$

$$\Delta'_S [V'(\alpha)]^2 = T'_0 +' T'_1$$

by putting

$$T_0 = [V(\alpha)]^2 \{\{x, y\}_< : x \prec y\},$$

$$T'_0 = [V'(\alpha)]^2 \{\{x, y\}_< : x \prec' y\}.$$

11. 5. We shall need the following well known facts.

$(*)$ (i) If $X \subset V(\alpha)$, and either $\operatorname{tp} X = \sigma$ or $\operatorname{tp} X = \sigma^*$, then $|X| \leqq \aleph_\alpha$.

(∗) (ii) If $X \subset V'(\alpha)$ and $\operatorname{tp} X = \sigma$, then $|X| \leqq \aleph_\alpha$; if $X \subset V'(\alpha)$ and $\operatorname{tp} X = \sigma^*$, then $|X| \leqq \aleph'_\alpha$. The results (i) and (ii) can be briefly expressed by

$$\omega_{\alpha+1}, \omega^*_{\alpha+1} \nleq \operatorname{tp}(V(\alpha)); \omega_{\alpha+1}, \omega^*_{\mathrm{cf}(\alpha)+1} \nleq \operatorname{tp}(V'(\alpha)).$$

We shall make frequent use, without reference, of the following simple propositions.

11. 6. (i) Let either $\{x, y, z\}_{\neq} \subset V(\alpha)$ or $\{x, y, z\}_{\neq} \subset V'(\alpha)$. Then $xz \geqq \min(xy, yz)$, and here is equality if $xy \neq yz$.

(ii) If $\{x, y, z\}_{<} \subset V(\alpha)$, then $xy \neq yz$ and $xz = \min(xy, yz)$.

PROOF. Put $x = (x_0, , \hat{x}_n)$, and similarly for y, z. Here $n = \omega_\alpha$ or $n = \omega_{\mathrm{cf}(\alpha)}$.

PROOF OF (i). If $v < xy, yz$, then $x_v = y_v = z_v$. Hence $xz \geqq \min(xy, yz)$. If $xy = v_0 < yz$, then $x_{v_0} \neq y_{v_0} = z_{v_0}$; $xz \leqq v_0 = \min(xy, yz)$. If $xy > v_1 = yz$, then $x_v = y_{v_1} \neq z_{v_1}$; $xz \leqq v_1 = \min(xy, yz)$.

PROOF OF (ii). If $xy = yz = v_0$, then $0 \leqq x_{v_0} < y_{v_0} < z_{v_0} < 2$ which is impossible. Hence $xy \neq yz$ and, by (i), $xz = \min(xy, yz)$.

12. COUNTER EXAMPLES FOR $r = 2$

(∗) THEOREM 7. *$a^+ \nrightarrow (a^+, a'^+)^2$ for $a \geqq \aleph_0$.*

This follows from [1] Theorem 7 (ii) which states: If $a \geqq \aleph_0$ and $b = \min(a^c > a)c$, then $a^b \nrightarrow (a^+, b^+)^2$. For if (∗) is assumed then $b = a'$ and $a^b = a^+$. For convenience here is the proof. Let $a = \aleph_\alpha$.

Case 1. $a = a'$. Consider the partition Δ_S of 11. 4. It follows from 11. 5 (i) that $\aleph_{\alpha+1} \notin [T_0]_2 + [T_1]_2$. This proves the assertion.

Case 2. $a > a'$. Consider the partition Δ'_S of 11. 4. It follows from 11. 5 (ii) that $\aleph_{\alpha+1} \notin [T'_0]_2$ and $\aleph'^+_\alpha \notin [T'_1]_2$. This proves the assertion, and Theorem 7 follows.

THEOREM 8. *If $n \geqq 1$ and $a_v < b_v$ for $v < n$, then $a_0 \ldots \hat{a}_n \nrightarrow (b_0, , \hat{b}_n)^2$.*

REMARKS. The case $a_0 = = \hat{a}_n = 2$ is due to Gödel. The case: $n = 2$ and arbitrary a_v, b_v is [1] Theorem 36 (iii).

PROOF. Let $|A_v| = a_v$ for $v < n$, and let S be the cartesian product of the sets A_v. Then $|S| = a_0 \ldots \hat{a}_n$, and

$$[S]^2 = \Sigma(v < n) I_v,$$

where

$$I_v = [S]^2\{\{f, g\} : f(v) \neq g(v)\} \quad \text{for} \quad v < n.$$

If $S' \subset S$ and $[S']^2 \subset I_v$, then

$$|S'| = |\{f(v) : f \in S'\}| \leqq |A_v| < b_v$$

which completes the proof of Theorem 8.

(∗) THEOREM 9. *If $3 \leqq b_0, , \hat{b}_n \leqq a$ and $a' < a < b_0 \ldots \hat{b}_n$, then*

(1) $$a^+ \nrightarrow (b_0, , \hat{b}_n)^2.$$

PROOF. *Case* 1. $|n| \geqq a$. Then by Theorem 8, $2^a \nrightarrow (3)^2_a$ and hence, a fortiori, (1).

Case 2. $|n| < a$. Put $m = \omega(a')$ and choose $a_0,, \hat{a}_m$ such that

$$a_0 < < \hat{a}_m < a = \sup(\mu < m) a_\mu.$$

We can find inductively $\{v_0,, \hat{v}_m\}_{\neq} \subset [0, n)$ such that $b_{v_\mu} > a_\mu$ for $\mu < m$. For let $\lambda < m$, and suppose that v_μ has been defined for $\mu < \lambda$, such that $v_\mu < n$ for $\mu < \lambda$. Then there is $v_\lambda \in [0, n) - \{v_0,, \hat{v}_\lambda\}$ such that $b_{v_\lambda} > a_\lambda$, since otherwise we would obtain the contradiction

$$a^+ \leqq \Pi(v < n) b_v \leqq \left(\Pi(\mu < \lambda) b_{v_\mu}\right) a_\lambda^{|n|} \leqq a^{|\lambda|} a_\lambda^{|n|} \leqq a.$$

This completes the inductive definition of $v_0,, \hat{v}_m$. By Theorem 8,

$$a_0 \ldots \hat{a}_m \nrightarrow (b_{v_\mu})^2_{\mu < m}.$$

Since $a_0 \ldots \hat{a}_m = a^+$, the relation (1) follows, and Theorem 9 is proved.

(∗) COROLLARY 4. $a^+ \nrightarrow (a)^2_{a'}$ *if* $a > a'$.

(∗) THEOREM 10. *Let* $a > a' > \aleph_0$. *Then* $a^+ \nrightarrow (a^+, (3)_{a'})^2$.

PROOF. We shall apply the following theorem of ERDŐS and FODOR [6]: Let $\aleph_0 \leqq b + c < a$; $|S| = a$,

$$x \notin f(x) \subset S \text{ and } |f(x)| < b \text{ for } x \in S;$$

$$S_\mu \in [S]^a \text{ for } \mu < \omega(c).$$

Then there is a set $S' \subset S$ such that $S' f(S') = \varnothing$ and $|S' S_\mu| = a$ for $\mu < \omega(c)$. In [6] this is proved in the special case when $S_\mu S_\nu = \varnothing$ for $\mu < \nu < \omega(c)$ but the general case then follows since quite generally, whenever $|T_\mu| = a \geqq \aleph_0$ for $\mu < \omega(a)$, there are sets $T'_\mu \in [T_\mu]^a$ for $\mu < \omega(a)$ such that $T'_\mu T'_\nu = \varnothing$ for $\mu < \nu < \omega(a)$.

Now let $l = \omega(a')$; $m = \omega(a)$; $n = \omega(a^+)$; $S = [0, n)$. Then $l < m < n$, and we can write $[S]^a = \{A_0,, \hat{A}_n\}$. Put $\mathbf{K}_\varrho = \{A_\nu : \nu < \varrho \wedge A_\nu \subset [0, \varrho)\}$ for $\varrho < n$. Then

$$[S]^a = \Sigma(\varrho < n) \mathbf{K}_\varrho; \quad |\mathbf{K}_\varrho| \leqq a \text{ for } \varrho < n. \tag{2}$$

Let $a_0 < < \hat{a}_l < a = \sup(\lambda < l) a_\lambda$. Then there are sets $\mathbf{K}_{\varrho\lambda}$ such that

$$\mathbf{K}_\varrho = \Sigma(\lambda < l) \mathbf{K}_{\varrho\lambda}; \quad |\mathbf{K}_{\varrho\lambda}| \leqq a_\lambda \text{ for } \varrho < n; \lambda < l. \tag{3}$$

Let λ be fixed, $\lambda < l$. We define $f_\lambda(\varrho)$ by induction over ϱ. Put $f_\lambda(\varrho) = \varnothing$ for $\varrho < m$. Now let $m \leqq \sigma < n$, and suppose that $f_\lambda(\varrho)$ has been defined for $\varrho < \sigma$ in such a way that

$$\varrho \notin f_\lambda(\varrho) \subset S; \quad |f_\lambda(\varrho)| < a_{\lambda+1} \text{ for } \varrho < \sigma.$$

Then $|\sigma| = a$, and by the theorem of ERDŐS and FODOR, applied to the set $[0, \sigma)$, there is $F_{\sigma\lambda}$ such that

$$F_{\sigma\lambda} \subset [0, \sigma); \quad |F_{\sigma\lambda}| \leqq a_\lambda; \quad F_{\sigma\lambda} f_\lambda(F_{\sigma\lambda}) = \varnothing, \tag{4}$$

$$F_{\sigma\lambda} A_\nu \neq \varnothing \text{ if } A_\nu \in \mathbf{K}_{\sigma\lambda}. \tag{5}$$

We put $f_\lambda(\sigma)=F_{\sigma\lambda}$. Then $\sigma\notin f_\lambda(\sigma)\subset S$; $|f_\lambda(\sigma)|\leqq a_\lambda<a_{\lambda+1}$. This completes the definition of $f_\lambda(\varrho)$ for $\lambda<l$; $\varrho<n$. Now we have

$$[S]^2 = I+'\Sigma(\lambda<l)I_\lambda,$$

where

$$I_\lambda = \{\{\varrho,\sigma\}\colon \varrho<\sigma<n\wedge\varrho\in f_\lambda(\sigma)\} \qquad \text{for } \lambda<l.$$

1. Let $S'\subset S$; $|S'|=a^+$. Then there is $\varrho<n$ such that $A_\varrho\subset S'$. Now there is $\sigma\in S'$ such that $\sigma>\varrho$ and $A_\varrho\subset[0,\sigma)$. Then $\sigma\geqq m$. By (3) there is $\lambda<l$ such that $A_\varrho\in\mathbf{K}_{\sigma\lambda}$. By (5), $f_\lambda(\sigma)A_\varrho=F_{\sigma\lambda}A_\varrho\neq\varnothing$, and there is $\tau\in f_\lambda(\sigma)A_\varrho$. Then $\tau\in A_\varrho\subset S'$; $\{\tau,\sigma\}_<\in I_\lambda$; $[S']^2\not\subset I$; $a^+\notin[I]_2$.

2. Let $\lambda<l$ and $[\{\varrho'',\varrho',\varrho\}_<]^2\subset I_\lambda$. Then $\{\varrho'',\varrho'\}\subset f_\lambda(\varrho)=F_{\varrho\lambda}$; $\varrho''\in f_\lambda(\varrho')$ and therefore $\varrho''\in F_{\varrho\lambda}f_\lambda(F_{\varrho\lambda})$ which contradicts (4). Hence $3\notin[I_\lambda]_2$, and Theorem 10 follows.

13. COUNTER EXAMPLES FOR $r\geqq3$. PRELIMINARIES

13. 1. The positive and negative results proved so far enable us to give an almost complete discussion for the case $r=2$. This will be done in section 15. Lemma 2, the stepping-up lemma, gives us a method to obtain positive relations for $r\geqq3$. This seems to be the only method for proving positive relations in these cases. Thus our aim would be to prove a converse of Lemma 2 i. e. to show that for $r\geqq2$ and $a\geqq\aleph_0$ the relation $a\to(b_\nu)^r_{\nu<n}$ implies $2^a\to(b_\nu+1)^{r+1}_{\nu<n}$. However, we can prove this only under some restrictions and using different methods to cover the various cases. We are now going to prove several lemmas which assure this implication under various conditions.

First we need some more definitions and some preliminary results concerning the set $V(\alpha)$.

13. 2. Let α be fixed. For $\{x,y\}_<\subset V(\alpha)$ we put $\eta(x,y)=0$ if $x<y$, and $\eta(x,y)=1$ if $x>y$. Thus, in the notation of 11. 4,

$$\{x,y\}\in T_{\eta(x,y)} \quad \text{if} \quad \{x,y\}_<\subset V(\alpha).$$

If $r\geqq3$ and $\{x_0,,x_{r-1}\}_<\subset V(\alpha)$, we put

$$\eta(x_0,,x_{r-1}) = (\eta(x_0,x_1),,\eta(x_{r-2},x_{r-1})).$$

Let $r\geqq3$; $1\leqq s\leqq r-1$; $k_0,,k_{s-1}<2$. Denote by

$$K_{k_0,,k_{s-1}}(\alpha,r)$$

the set of all sets $\{x_0,,x_{r-1}\}_<\subset V(\alpha)$ such that

$$\eta(x_0,,x_{r-1})=(k_0,,k_{r-2}) \quad \text{for some } \hat{k}_{s-1},,\hat{k}_{r-1}.$$

Thus $K_{010}(\alpha,r)$ is defined for $r\geqq4$ and is the set of all sets $\{x_0,,x_{r-1}\}_<\subset V(\alpha)$ such that $x_0<x_1>x_2<x_3$. The symbol $K_{k,,k}$ stands for $K_{k_0,,k_{r-2}}$ where $k_0=\cdots=k_{r-2}=k$. We put

$$K(\alpha,r) = K_{0,,0}(\alpha,r)+K_{1,,1}(\alpha,r).$$

We have the following simple result. If $X \subset V(\alpha)$, and if tp $(X, \prec)$ is a limit number then, for every choice of $s, k_0, , k_{s-1}$ with $1 \leqq s \leqq r-1$, the relation

$$[X]^r \subset K_{k_0, , k_{s-1}}(\alpha, r)$$

holds if and only if, $k_0 = = k_{s-1}$ and $[X]^r \subset K_{k_0}$. This follows at once if one consideres any set $\{x_0, , x_r\}_{\prec} \subset X$ and the meaning of the satement

$$\{x_0, , x_{r-1}\}, \{x_1, , x_r\} \in K_{k_0, , k_{s-1}}(\alpha, r).$$

See also 13. 5.

13. 3. Let $\{x_0, , x_{r-1}\}_{\prec} \in K(\alpha, r)$. Then $x_\varrho x_{\varrho+1} \neq x_{\varrho+1} x_{\varrho+2}$ for $\varrho < r-2$. For we have either $x_0 < < x_{r-1}$ or $x_0 > > x_{r-1}$, and in either case the assertion follows from 11. 6 (ii).

13. 4. For $\delta_0 < \delta_1 < \omega_\alpha$ we put $\xi(\delta_0, \delta_1) = 0$ and $\xi(\delta_1, \delta_0) = 1$. If $r \geqq 3$ and $\delta_0, , \delta_{r-1} < \omega_\alpha$; $\delta_\varrho \neq \delta_{\varrho+1}$ for $\varrho < r-1$, we put

$$\xi(\delta_0, , \delta_{r-1}) = (\xi(\delta_0, \delta_1), , \xi(\delta_{r-2}, \delta_{r-1})).$$

Now let $1 \leqq s \leqq r-2$ and $k_0, , k_{s-1} < 2$. Denote by

$$P_{k_0, , k_{s-1}}(\alpha, r)$$

the set of all sets $\{x_0, , x_{r-1}\}_{\prec} \subset K(\alpha, r)$ for which

$$\xi(\delta(x_0, , x_{r-1})) = (k_0, , k_{r-3}) \text{ for some } \hat{k}_{s-1}, , \hat{k}_{r-2}.$$

We note that $\xi(\delta(x_0, , x_{r-1}))$ exists by 13. 3.

Thus $P_{010}(\alpha, r)$ is defined for $r \geqq 5$ and denotes the set of all sets $\{x_0, , x_{r-1}\}_{\prec} \subset \subset V(\alpha)$ such that

(i) either $x_0 < < x_{r-1}$ or $x_0 > > x_{r-1}$

and

(ii) $x_0 x_1 < x_1 x_2 > x_2 x_3 < x_3 x_4$.

Throughout the rest of this paper whenever the arguments of any of the sets $V, V', K, P, K_{k_0, , k_{s-1}}, P_{k_0, , k_{s-1}}$ are α, r they will not be shown.

The symbol $P_{k, , k}$ stands for $P_{k_0, , k_{r-3}}$ where $k_0 = = k_{r-3} = k$. Put $P = P_{0, , 0} + + P_{1, , 1}$. We have $P_{k_0, , k_{s-1}} \subset K$ for $1 \leqq s \leqq r-2$ and $k_0, , k_{s-1} < 2$.

We shall now deduce some properties of the sets $K_{k_0, , k_{s-1}}$ and $P_{k_0, , k_{s-1}}$.

13. 5. Let $r \geqq 3$ and $X \subset V$. Then $|X| < r+1$ provided at least one of the following conditions (a), (b), (c) holds:

(a) $[X]^r \subset K_{01}$;

(b) $[X]^r \subset K_{10}$;

(c) $[X]^r \subset K_{k_0, , k_{r-2}}$ for some $(k_0, , k_{r-2}) \neq (k_0, , k_0)$.

PROOF. Let $\{x_0, , x_r\}_{\prec} \subset X$; $\eta_\varrho = \eta(x_\varrho, x_{\varrho+1})$ for $\varrho < r$. In case (a) we have $\{x_0, , x_{r-1}\} \in K_{01}$ and hence $\eta_0 = 0$; $\eta_1 = 1$. But we also have $\{x_1, , x_r\} \in K_{01}$ and hence $\eta_1 = 0$; $\eta_2 = 1$. This is a contradiction. In case (b) we find, in the same way, $\eta_0 = 1$; $\eta_1 = 0$ and also $\eta_1 = 1$; $\eta_2 = 0$, i. e. a contradiction. In case (c) we have at the same time $\eta_\varrho = k_\varrho$ and $\eta_{\varrho+1} = k_\varrho$ for all $\varrho \leqq r-2$. These equations imply $k_0 = = = = k_{r-2}$ which is the desired contradiction.

13. 6. (a). Let either (i) $r \geqq 3$ and $[X]^r \subset K$ or (ii) $r \geqq 4$ and $|X| \geqq r+1$; $[X]^r \subset K_{010}+K$. Then $[X]^r \subset K_{s,,s}$ for some $s<2$.

(b) Let $r \geqq 4$ and $[X]^r \subset P$. Then $[X]^r \subset P_{t,,t}$ for some $t<2$.

PROOF. We may assume $|X| \geqq r+1$.

Proof of (a). Let $[X]^r \not\subset K_{s,,s}$ for $s<2$. Then there are sets $A_0, A_1 \in [X]^r$ such that $A_s \notin K_{s,,s}$ for $s<2$. We can choose $x \in X - A_0$. Put $\{x\}+A_0+A_1 = \{x_0,, x_{n-1}\}_<$. Then $n \geqq r+1$. Put $\eta(x_\nu, x_{\nu+1}) = \eta_\nu$ for $\nu \leqq n-2$.

Case 1. $\{x_\nu,, x_{\nu+r-1}\} \in K$ for $\nu+r-1 \leqq n-1$. Then $\eta_\nu = = \eta_{\nu+r-2}$ and, since $|[\nu, \nu+r-1)[\nu+1, \nu+r)| = r-2 \geqq 1$, we have $\eta_0 = = \eta_{n-2}$. We deduce that $A_0, A_1 \in K_{\eta_0,,\eta_0}$ which is a contradiction.

Case 2. There is $\nu_0 \leqq n-r$ with $\{x_{\nu_0},, x_{\nu_0+r-1}\} \notin K$. Then (ii) holds, and $\{x_{\nu_0},, x_{\nu_0+r-1}\} \in K_{010}$. If $\nu_0 = 0$ then $\{x_{\nu_0+1},, x_{\nu_0+r}\} \notin K_{010}+K$, and if $\nu_0 \geqq 1$ then $\{x_{\nu_0-1},, x_{\nu_0+r-2}\} \notin K_{010}+K$. In either of these cases we obtain a contradiction against the hypothesis.

Proof of (b). We have $[X]^r \subset P \subset K$. Hence, by (a), there is $s<2$ with $[X]^r \subset K_{s,,s}$. Let us assume that $[X]^r \not\subset P_{t,,t}$ for $t<2$. Then there are sets $A_0, A_1 \in [X]^r$ such that $A_t \notin P_{t,,t}$ for $t<2$. Let $A_0+A_1 = \{x_0,, x_{n-1}\}_<$. Then $n \geqq r$, and we have either $x_0 < < x_{n-1}$ or $x_0 > > x_{n-1}$. Also, $\{x_\nu,, x_{\nu+r-1}\} \in P_{t_\nu,,t_\nu}$ for $\nu+r-1 \leqq n-1$. Put $\xi(x_\nu x_{\nu+1}, x_{\nu+1}x_{\nu+2}) = \xi_\nu$ for $\nu+2 \leqq n-1$. Then $\xi_\nu = = \xi_{\nu+r-3} = t_\nu$, say, for $\nu \leqq n-r$. Since $r \geqq 4$ these equations imply $t_0 = = t_{n-r}$, and we obtain the contradiction $A_0, A_1 \in P_{t_0,,t_0}$. This completes the proof.

13. 7. Let $X \subset V$ and $|X| = b \geqq \aleph_0$. Then there are a set $X' \in [X]^b$ and a number $t<2$ with $[X']^r \subset K_{t,,t}$, provided at least one of the following conditions (a), (b), (c) holds:

(a) $r \geqq 3$ and $[X]^r K_{01} = \varnothing$;

(b) $r \geqq 3$ and $[X]^r K_{10} = \varnothing$;

(c) $r \geqq 4$ and $[X]^r K_{010} = \varnothing$.

PROOF. Suppose there are no X' and t with the required proporties. We may assume that $X = \{x_0,, \hat{x}_n\}_<$ where $n = \omega(b)$. Put $[\mu, \nu] = \eta(x_\mu, x_\nu)$ for $\mu < \nu < n$. We show that

(1) there is $\{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}_< \subset [0, n)$ with $[\nu_0, \nu_1] = 0$; $[\nu_1, \nu_2] = 1$; $[\nu_2, \nu_3] = 0$.

Let us assume that (1) is false. Then we have the following two cases (all ordinals are in $[0, n)$):

Case 1. There are $\mu < \nu < \lambda$ with $[\mu, \nu] = 0$; $[\nu, \lambda] = 1$. Then there are ϱ, σ with $\mu < \nu < \lambda < \varrho < \sigma$ and $[\varrho, \sigma] = 0$. But then $[\lambda, \varrho] = 1$, and we have $[\mu, \nu] = 0$; $[\nu, \varrho] = 1$; $[\varrho, \sigma] = 0$ which is impossible.

Case 2. Whenever $\mu < \nu < \lambda$ and $[\mu, \nu] = 0$, then $[\nu, \lambda] = 0$. Then there are $\mu < \nu$ with $[\mu, \nu] = 0$. Now there are λ, ϱ with $\mu < \nu < \lambda < \varrho$ and $[\lambda, \varrho] = 1$. But then $[\nu, \lambda] = 0$, and hence $[\lambda, \varrho] = 0$ which is a contradiction. This proves (1) so that there are $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ such that the conditions in (1) hold. If $r \geqq 4$ then we can choose $\nu_4,, \nu_r$ such that $\nu_0 < < \nu_r < n$. Then all three conditions (a), (b), (c) are violated since

$$\{x_{\nu_0},, x_{\nu_{r-1}}\} \in K_{01}; \quad \{x_{\nu_1},, x_{\nu_r}\} \in K_{10}$$

and, if $r \geqq 4$, then $\{x_{\nu_0}, , x_{\nu_{r-1}}\} \in K_{010}$. This shows that our first assumption was false so that there are X' and t such that the required conditions hold.

13. 8. Let $r \geqq 3$; $X \subset V$; $|X| \geqq b = b'$; $[X]^r \subset K_{t,,t}$; $\alpha \geqq 0$. Then there is $X' \in [X]^b$ with $[X']^r \subset P_{0,,0}$.

PROOF. We may assume $X = \{x_0, , \hat{x}_n\}_<$, where $n = \omega(b)$. Then

$$\text{either } x_0 << \hat{x}_n \text{ or } x_0 >> x_n. \tag{2}$$

We define inductively numbers $\mu_0, , \hat{\mu}_n, \delta_0, , \hat{\delta}_n$. Let $\sigma < n$, and suppose that $\mu_0, , \hat{\mu}_\sigma, \delta_0, , \hat{\delta}_\sigma$ have been defined such that $\mu_0 << \hat{\mu}_\sigma < n$ and $\delta_0 << \hat{\delta}_\sigma < \omega_\alpha$. Put

$$A_\varrho = \{x_\nu : \nu > \mu_\varrho \wedge x_{\mu_\varrho} x_\nu \neq \delta_\varrho\} \quad \text{for} \quad \varrho < \sigma. \tag{3}$$

Let us suppose that

$$|A_\varrho| < b \quad \text{for} \quad \varrho < \sigma. \tag{4}$$

Put

$$B_\sigma = A_0 + + \hat{A}_\sigma + \{x_\nu : (\exists \varrho)(\varrho < \sigma \wedge \nu \leqq \mu_\varrho)\}. \tag{5}$$

By (4) and $b = b'$ we have

$$|B_\sigma| < b. \tag{6}$$

There is a least number $\bar{\mu}_\sigma < n$ such that

$$B_\sigma \subset \{x_\nu : \nu < \bar{\mu}_\sigma\}. \tag{7}$$

Put

$$D_\sigma = \{x_\mu x_\nu : \bar{\mu}_\sigma \leqq \mu < \nu < n\}, \tag{8}$$

$$\delta_\sigma = \min D_\sigma. \tag{9}$$

There is a least number μ_σ such that $\bar{\mu}_\sigma \leqq \mu_\sigma < n$ and $x_{\mu_\sigma} x_\nu = \delta_\sigma$ for at least one $\nu > \mu_\sigma$. There is a least number $\bar{\bar{\mu}}_\sigma > \mu_\sigma$ such that $x_{\mu_\sigma} x_{\bar{\bar{\mu}}_\sigma} = \delta_\sigma$. Put

$$A_\sigma = \{x_\nu : \mu_\sigma < \nu \wedge x_{\mu_\sigma} x_\nu \neq \delta_\sigma\}.$$

If $\varrho < \sigma$ then $x_{\mu_\varrho} \in B_\sigma$, and $\mu_\varrho < \bar{\mu}_\sigma \leqq \mu_\sigma$ by (7). We have

$$x_{\mu_\sigma} x_\nu = \delta_\sigma \quad \text{for} \quad \nu \geqq \bar{\bar{\mu}}_\sigma. \tag{10}$$

For let $\nu \geqq \bar{\bar{\mu}}_\sigma$, and put $x_{\mu_\sigma} = x$; $x_{\bar{\bar{\mu}}_\sigma} = y$; $x_\nu = z$. Then $\bar{\mu}_\sigma \leqq \mu_\sigma < \bar{\bar{\mu}}_\sigma \leqq \nu$; $xy = \delta_\sigma$; $xz \in D_\sigma$. Hence, by (9), $xz \geqq \delta_\sigma$. Thus if (10) were false then $xz > \delta_\sigma$. Then $\bar{\bar{\mu}}_\sigma < \nu$ and $xy < xz$. On the other hand we have, by (2), either $x < y < z$ or $x > y > z$. Hence, by 11. 6 (ii), $xz = \min(xy, yz) \leqq xy$ which is a contradiction. This proves (10). It now follows from (10) that $|A_\sigma| < b$. Finally we note that if $\varrho < \sigma$ then, by (5), $x_{\mu_\varrho} \in B_\sigma$ and hence, by (7), $\mu_\varrho < \bar{\mu}_\sigma \leqq \mu_\sigma$. This completes the inductive definition of $\mu_0, , \hat{\mu}_n, \delta_0, , \hat{\delta}_n$ such that $\mu_0 << \hat{\mu}_n$. Put $x_{\mu_\nu} = y_\nu$ for $\nu < n$. Then

$$y_\varrho y_\sigma = \delta_\varrho \quad \text{for} \quad \varrho < \sigma. \tag{11}$$

For let $\varrho < \sigma$. If $y_\sigma \in B_\sigma$ then, by (7), $\mu_\sigma < \bar{\mu}_\sigma$ which is false. Hence $y_\sigma \notin B_\sigma$, and it

follows from (5) that $y_\sigma \notin A_\varrho$. Since $\mu_\sigma > \mu_\varrho$ we conclude from (3) that (11) holds. We now assert that

(12) $$\delta_\varrho < \delta_\sigma \quad \text{for} \quad \varrho < \sigma.$$

To see this, let $\varrho < \sigma$ and $\delta_\varrho \geqq \delta_\sigma$. Then, by (11), $y_\varrho y_\sigma = \delta_\varrho$ and $y_\sigma y_{\sigma+1} = \delta_\sigma$. By (2), either $y_\varrho < y_\sigma < y_{\sigma+1}$ or $y_\varrho > y_\sigma > y_{\sigma+1}$. In either case it follows from (11) and 11. 6 (ii) that

$$\delta_\varrho = y_\varrho y_{\sigma+1} = \min(y_\varrho y_\sigma, y_\sigma y_{\sigma+1}) = \min(\delta_\varrho, \delta_\sigma) = \delta_\sigma$$

and $y_\varrho y_\sigma = y_\sigma y_{\sigma+1}$ which contradicts 11. 6 (ii). This proves (12). Put $X' = \{y_0, , \hat{y}_n\}$. Then

(13) $$|X'| = b; \quad [X']^r \subset [X]^r \subset K_{t,,t} \subset K.$$

Let $\sigma_0 < < \sigma_{r-1}$ and $A = \{y_{\sigma_0}, , y_{\sigma_{r-1}}\}$. Then, by (11) and (12), $y_{\sigma_\varrho} y_{\sigma_{\varrho+1}} = \delta_{\sigma_\varrho} < < \delta_{\sigma_{\varrho+1}} = y_{\sigma_{\varrho+1}} y_{\sigma_{\varrho+2}}$ for $\varrho + 2 \leqq r-1$ so that $\xi(y_{\sigma_\varrho} y_{\sigma_{\varrho+1}}, y_{\sigma_{\varrho+1}} y_{\sigma_{\varrho+2}}) = 0$ for $\varrho \leqq r-3$. This, together with (13), shows that $[X']^r \subset P_{0,,0}$ and proves that X' has the required properties.

13. 9. Let $r \geqq 3$; $X \subset V$; $|X| \geqq r+1$; $[X]^r \subset P_{k_0,,k_{r-3}}$. Then $k_0 = = k_{r-3}$.

PROOF. There is a set $\{x_0, , x_r\}_< \subset X$. Put $\delta_\varrho = x_\varrho x_{\varrho+1}$ for $\varrho \leqq r-1$, and $\xi_\varrho = \xi(\delta_\varrho, \delta_{\varrho+1})$ for $\varrho \leqq r-2$. Then we have, by definition of $P_{k_0,,k_{r-3}}$, $(\xi_0, , \xi_{r-3}) = (\xi_1, , \xi_{r-2}) = (k_0, , k_{r-3})$ and hence $k_0 = = k_{r-3}$.

13. 10. Let $r \geqq 4$; $X \subset V$; $[X]^r \subset P$. Then there is $t < 2$ with $[X]^r \subset P_{t,,t}$.

PROOF. Let $A, B \in [X]^r$. It suffices to show that there is $t < 2$ such that $A, B \in P_{t,,t}$. Let $A + B = \{x_0, , x_{p-1}\}_<$. Then $p \geqq r$ and $\{x_\pi, , x_{\pi+r-1}\} \in P_{s_\pi,,s_\pi}$ for $\pi \leqq p - r$. Since $\{x_{\pi+1}, , x_{\pi+3}\} \subset \{x_\pi, , x_{\pi+r-1}\} \{x_{\pi+1}, , x_{\pi+r}\}$ for $\pi \leqq p-r-1$ it follows from the definition of $P_{s_\pi,,s_\pi}$ that $s_0 = = s_{p-r} = s$, say. Put $\delta_v = x_v x_{v+1}$ for $v \leqq p-2$.

Case 1. $s = 0$. Then $\delta_0 < < \delta_{p-2}$, and repeated application of 11. 6 (ii) yields $x_\mu x_v = \delta_\mu$ for $\mu < v < p$. Hence $A, B \in P_{0,,0}$.

Case 2. $s = 1$. Then $\delta_0 > > \delta_{p-2}$. Then, similarly, $A, B \in P_{1,,1}$.

13. 11. Let $r \geqq 4$; $X \subset V$; $|X| = b \geqq \aleph_0$; $[X]^r \subset K_{t,,t}$. Then there is $X' \in [X]^b$ with $[X']^r \subset P_{0,,0}$ provided at least one of the following conditions (a), (b), (c), (d) holds:

(a) $[X]^r P_{01} = \varnothing$;

(b) $[X]^r P_{10} = \varnothing$;

(c) $r \geqq 5$ and $[X]^r P_{010} = \varnothing$;

(d) $r \geqq 5$ and $[X]^r P_{101} = \varnothing$.

PROOF. We may assume $X = \{x_0, , \hat{x}_n\}_<$, where $n = \omega(b)$. In what follows we always suppose the letters u, v, w, y, z to denote elements of X. We shall use freely, without reference, 11. 6 (ii).

Case 1. $t = 0$. Then $x_0 < < \hat{x}_n$. Let $s \geqq 3$, and suppose that $y_0 < < y_{s-1}$, and $\xi(y_v y_{v+1}, y_{v+1} y_{v+2}) \neq \xi(y_{v+1} y_{v+2}, y_{v+2} y_{v+3})$ for $v < s-3$. This is for instance true for $s = 3$ and arbitrary $\{y_0, y_1, y_2\}_<$. We assert that then $s \leqq 5$. For suppose $s \geqq 6$. Then we can choose $z_4, , z_r$ with $y_4 < z_4 < < z_r$. Then there is $\lambda < 2$ with

$\{y_0,, y_3, z_4,, z_{r-1}\} \in P_{\lambda,1-\lambda}$; $\{y_1,, y_4, z_5,, z_r\} \in P_{1-\lambda,\lambda}$. Hence both (a) and (b) are false, and $r \geqq 5$. Now there is $\mu < 2$ with

$$\{y_0,, y_4, z_5,, z_{r-1}\} \in P_{\mu,1-\mu,\mu}; \{y_1,, y_5, z_6,, z_r\} \in P_{1-\mu,\mu,1-\mu},$$

so that both (c) and (d) are false as well. This is impossible. Hence $3 \leqq s \leqq 5$. We now suppose that s has its largest possible value for the given X. Put

$$y_{s-3} = u; \quad y_{s-2} = v; \quad y_{s-1} = w; \quad X' = \{y: \ y > w\}.$$

Then $X' \in [X]^b$. Let $\{w_0, w_1, w_2\}_< \subset X'$.

Case 1a. $uv > vw$. Then, by the maximality of s, whenever $u < u_0 < u_1 < u_2$, then not all the relations $uu_0 > u_0u_1 < u_1u_2$ hold. By using this repeatedly we conclude: $uv > vw > ww_0$; $vw_0 = ww_0$; $uv > vw_0 > w_0w_1$; $vw_1 = w_0w_1$; $uv > vw_1 > w_1w_2$; $w_0w_1 > w_1w_2$. But since $b \geqq \aleph_0$ we can choose $\{w, w_0,, \hat{w}_\omega\}_<$. Then, by what has just been proved, we have $w_vw_{v+1} > w_{v+1}w_{v+2}$ for $v < \omega$ which is impossible.

Case 1b. $uv < vw$. Then, by the maximality of s, whenever $u < u_0 < u_1 < u_2$, not all the relations $uu_0 < u_0u_1 > u_1u_2$ hold. By using this repeatedly we conclude: $uv < vw < ww_0$; $vw_0 = vw$; $uv < vw_0 < w_0w_1$; $uw_0 = uv$; $uw_0 < w_0w_1 < w_1w_2$. Hence $[X']^r \subset P_{0,,0}$.

Case 2. $t = 1$. Then the same proof as in the Case 1 applies except that every inequality $x < y$ between elements of X is reversed. This completes the proof.

13. 12. If $r \geqq 3$ and $[X]^r \subset P_{1,,1}$, then $|X| < \aleph_0$.

PROOF. If $|X| \geqq \aleph_0$, then we can choose $\{x_0,, \hat{x}_\omega\}_< \subset X$. Then, by definition of $P_{1,,1}$, $x_vx_{v+1} > x_{v+1}x_{v+2}$ for $v < \omega$ which is impossible.

13. 13. Let $r \geqq 5$; $X \subset V$; $|X| \geqq r+1$; $s < 2$;

$$[X]^r \subset K_{s,,s}(P + P_{010}).$$

Then there is $t < 2$ such that $[X]^r \subset P_{t,,t}$.

PROOF. Assume there is no such t. Then there are elements $x_0,, x_{r-1}, y_0,, y_{r-1} \in X$ such that $\{x_0,, x_{r-1}\}_< \notin P_{0,,0}$ and $\{y_0,, y_{r-1}\}_< \notin P_{1,,1}$. We can choose $x_r \in X - \{x_0,, x_{r-1}\}$. Let $\{x_0,, x_r, y_0,, y_{r-1}\} = \{z_0,, z_{n-1}\}_<$. Then $n \geqq r+1$; $x_\varrho = z_{\alpha(\varrho)}$; $y_\varrho = z_{\beta(\varrho)}$; $\alpha(\varrho), \beta(\varrho) < n$ for $\varrho < r$. We have either $z_0 << z_{n-1}$ or $z_0 >> z_{n-1}$. We have exactly one of the following three cases:

Case 1. $\{z_0,, z_{r-1}\} \in P_{0,,0}$. Then $z_0z_1 << z_{r-2}z_{r-1}$. Since $\{z_v,, z_{v+r-1}\} \in P_{0,,0} + P_{1,,1} + P_{010}$ for $v \leqq n-r$, it follows for $v = 1,, n-r$, in this order, that $\{z_v,, z_{v+r-1}\} \in P_{0,,0}$. Hence $z_0z_1 << z_{n-2}z_{n-1}$; $x_\varrho x_{\varrho+1} = z_{\alpha(\varrho)}z_{\alpha(\varrho)+1} < < z_{\alpha(\varrho+1)}z_{\alpha(\varrho+1)+1} = x_{\varrho+1}x_{\varrho+2}$ for $\varrho \leqq r-3$; $\{x_0,, x_{r-1}\} \in P_{0,,0}$ which is a contradiction.

Case 2. $\{z_0,, z_{r-1}\} \in P_{1,,1}$. Then $z_0z_1 >> z_{r-2}z_{r-1}$; $\{z_v,, z_{v+r-1}\} \in P_{1,,1}$ for

$$v \leqq n-r; \quad z_0z_1 >> z_{n-2}z_{n-1}; \quad y_\varrho y_{\varrho+1} = z_{\beta(\varrho)}z_{\beta(\varrho+1)} = z_{\beta(\varrho+1)-1}z_{\beta(\varrho+1)} >$$

$$> z_{\beta(\varrho+2)-1}z_{\beta(\varrho+2)} = y_{\varrho+1}y_{\varrho+2}$$

for $\varrho \leqq r-3$; $\{y_0,, y_{r-1}\} \in P_{1,,1}$ which is a contradiction.

Case 3. $\{z_0,, z_{r-1}\} \in P_{010}$. Then $z_0z_1 < z_1z_2 > z_2z_3 < z_3z_4$ and, clearly, $\{z_1,, z_r\} \notin \notin P + P_{010}$ which is a contradiction. The assertion is therefore proved.

13. 14. Let $X \subset V$; $r \geqq 3$; $[X]^r \subset P_{s,,s}$; $|X| \geqq r$. Then there is $t < 2$ with $[X]^r \subset K_{t,,t}$. Also, for $\{x, y, z\}_< \subset X$, if $s = 0$ then $xy = xz < yz$, and if $s = 1$ then $xy > xz = yz$.

PROOF. By 13. 6. there is $t < 2$ with $[X]^r \subset K_{t,,t}$. There is $\{x_0,, x_{r-1}\}_< \subset X$ such that

$$x = x_\mu; \quad y = x_\nu; \quad z = x_\lambda \quad \text{for some} \quad \mu < \nu < \lambda < r.$$

Then either $x_0 < < x_{r-1}$ or $x_0 > > x_{r-1}$. Let $\beta < \gamma < r$. If $s = 0$, then $x_0 x_1 < < < < x_{r-2} x_{r-1}$ and hence

$$x_\beta x_\gamma = \min (x_\beta x_{\beta+1}, x_{\gamma-1} x_\gamma) = x_\beta x_{\beta+1}.$$

If $s = 1$, then $x_0 x_1 > > x_{r-2} x_{r-1}$ and hence

$$x_\beta x_\gamma = \min (x_\beta x_{\beta+1}, x_{\gamma-1} x_\gamma) = x_{\gamma-1} x_\gamma.$$

These relations imply the assertion.

14. COUNTER EXAMPLES FOR $r \geqq 3$. LEMMAS

We begin with two negative relations.

THEOREM 11. $2^a \nrightarrow (a^+, r+1)^r$ *for* $a \geqq \aleph_0$; $r \geqq 3$.

PROOF. Let $a = \aleph_\alpha$. Then $[V]^r = I_0 +' I_1$, where $I_1 = K_{01}$.

1. Let $X \subset V$; $[X]^r \subset I_0$; $|X| \geqq \aleph_0$. Then, by 13. 7, there is $X' \subset X$ such that $|X'| = |X|$ and $[X']^r \subset K_{t,,t}$ for some t. Then $|X| = |X'| \leqq a$ by 11. 5 (i).

2. Let $X \subset V$ and $[X]^r \subset I_1$. Then, by 13. 5 (a), $|X| < r+1$. Since $|V| = 2^a$, Theorem 11 follows.

THEOREM 12. $a \nrightarrow (a, r+1)^r$, *if* $a > a'$ *and* $r \geqq 3$.

PROOF. Let $n = \omega(a')$; $|S| = a$; $S = \Sigma'(\nu < n) S_\nu$; $|S_\nu| < a$ for $\nu < n$. Then $[S]^r = = I_0 +' I_1$, where

$$I_1 = [S]^r \{A : (\exists \mu, \nu)(\mu < \nu < \eta \wedge |AS_\mu| = r - 1 \wedge |AS_\nu| = 1)\}.$$

Then $X \in [S]^a$ implies $[X]^r I_1 \neq \varnothing$, and $Y \in [S]^{r+1}$ implies $[Y]^r I_0 \neq \varnothing$. This proves Theorem 12.

($*$) COROLLARY 5. *If* $r \geqq 3$; $a \geqq \aleph_0$, *and if* a *is not inaccessible then* $a \nrightarrow (a, r+1)^r$.

This follows from Theorem 11 and 12.

We are now going to discuss the various converses of Lemma 2 mentioned in 13. 1.

Throughout the proofs of Lemmas 5A—5F we put

$$I_\nu = P_{0,,0}\{\{x_0,, x_{r-1}\}_< : \delta'(x_0,, x_{r-1}) \in I_\nu^*\} \quad \text{for} \quad \nu < m.$$

In every case the sets I_ν^* will have been defined.

LEMMA 5A. *Let* $a \geqq \aleph_0$, *and let* $b_0, \hat{b}_m$ *be cardinals such that*

(A) $\begin{cases} r \geqq 3; \text{ there are } \mu < \nu < m \text{ such that } b_\mu, b_\nu \geqq \aleph_0, \text{ and at least one of } b_\mu, b_\nu \\ \text{is regular.} \end{cases}$

Let $a \nrightarrow (b_\nu)^{r-1}_{\nu<m}$. *Then* $2^a \nrightarrow (b_\nu + 1)^r_{\nu<m}$.

PROOF. We may suppose $b_0, \hat{b}_m \geqq r$. By 4. 1 we may assume $b_0 = b_0'$ and $b_1 \geqq \aleph_0$. Let $a = \aleph_\alpha$; $n = \omega_\alpha$; $S = [0, n)$. Then there is a partition $[S]^{r-1} = \Sigma'(\nu < m) I_\nu^*$ such that

(1) $$b_\nu \notin [I_\nu^*]_{r-1} \quad \text{for} \quad \nu < m.$$

Then $[V]^r = \Sigma'(\nu < m) I_\nu$, where

(2) $$I_1 = K_{01} + \bar{I}_1; \quad I_\nu = \bar{I}_\nu \qquad (2 \leqq \nu < m).$$

Let $X \in [V]^{b_0}$; $[X]^r \subset I_0$. Then $[X]^r K_{01} = \varnothing$ and, by 13. 7 (a), there are a set $X' \in [X]^{b_0}$ and a number t such that $[X']^r \subset K_{t,,t}$. By 13. 8 and $b_0 = b_0'$ there is $X'' \in [X']^{b_0}$ such that $[X'']^r \subset P_{0,,0}$. Then

(3) $$[X'']^r \subset P_{0,,0} I_0.$$

Next, let $Y \in [V]^{b_1}$; $[Y]^r \subset I_1$. Then $[Y]^r K_{10} = \varnothing$ and, by 13. 7 (b), there is $Y' \in [Y]^{b_1}$ such that $[Y']^r \subset K$. Then, by (2),

(4) $$[Y']^r \subset P_{0,,0} I_1.$$

It follows from (2), (3) and (4) that it is sufficient to prove that

(5) $$\text{if } X \subset V; \ \nu < m; \ [X]^r \subset P_{0,,0} I_\nu, \text{ then } |X| < b_\nu + 1.$$

Let us therefore assume that

$$X = \{x_0, , \hat{x}_k\}_< \subset V; \quad \nu < m; \quad [X]^r \subset P_{0,,0} I_\nu.$$

For future applications we note that the in rest of this proof we do not make any use of any hypothesis not mentioned in (5). Put $D = \{x_\varkappa x_{\varkappa+1} : \varkappa + 1 < k\}$. Then $x_\varkappa x_{\varkappa+1} < x_{\varkappa+1} x_{\varkappa+2}$ for $\varkappa + 2 < k$ and hence $|D| = |k \dot{-} 1|$. Let $E \in [D]^{r-1}$. Then there are $\varkappa_0 < < \varkappa_{r-1} < k$ such that $E = \{x_{\varkappa_\varrho} x_{\varkappa_\varrho + 1} : \varrho < r - 1\}$. Then, by 13. 14 and (2), $E = \{x_{\varkappa_\varrho} x_{\varkappa_\varrho + 1} : \varrho < r - 1\} = \delta'(x_{\varkappa_0}, , x_{\varkappa_{r-1}}) \in I_\nu^*$. Hence $[D]^{r-1} \subset I_\nu^*$ and, by (1), $|k \dot{-} 1| = |D| < b_\nu$; $|X| = |k| < b_\nu + 1$. This proves Lemma 5A.

LEMMA 5B. *Let* $a \geqq \aleph_0$; $m \geqq 2$, *and let* $b_0, \hat{b}_m$ *be such that*

(B) $$r \geqq 4; \text{ there is } \nu < m \text{ with } b_\nu = b_\nu'.$$

Let $a \nrightarrow (b_\nu)^{r-1}_{\nu<m}$. *Then* $2^a \nrightarrow (b_\nu + 1)^r_{\nu-m}$.

REMARK. For $r \geqq 4$ Lemma 5A follows from Lemma 5B.

PROOF. We may assume $b_0 = b_0'$ and $b_0, , \hat{b}_m \geqq r$. Just as in the proof of Lemma 5A, let $a = \aleph_\alpha$; $n = \omega_\alpha$; $S = [0, n)$. Then there is a partition $[S]^{r-1} = \Sigma'(\nu < m) I_\nu^*$ such that

(6) $$b_\nu \notin [I_\nu^*]_{r-1} \quad \text{for} \quad \nu < m.$$

Then $[V]^r = \Sigma'(\nu < m) I_\nu$, where

(7) $$I_1 = K_{010} + \bar{I}_1; \quad I_\nu = \bar{I}_\nu \quad (2 \leqq \nu < m).$$

Let $X\in[V]^{b_0}$; $[X]^r\subset I_0$. Then $[X]^rK_{010}=\varnothing$ and, by 13.7 (c), there are $X'\in[X]^{b_0}$ and t such that $[X']^r\subset K_{t,,t}$. By 13.8 and $b_0=b_0'$ there is $X''\in[X']^{b_0}$ such that $[X'']^r\subset P_{0,,0}$. Then (3) holds. Next, let $Y\in[V]^{b_1+1}$; $[Y]^r\subset I_1$. Then, by (7),

$$[Y]^r\subset K_{010}+K$$

and hence, by 13.6 and $|Y| = b_1+1\geqq r+1$, we have $[Y]^r\subset K$, and therefore (4) holds for $Y'=Y$. It follows from (7), (3) and (4) that it suffices to prove (5). This proof was given in the proof of Lemma 5A, so that Lemma 5B is established.

LEMMA 5C. *Let $a\geqq\aleph_0$; $m\geqq 2$, and let $b_0,,\hat{b}_m$ be such that*

(C) $$r\geqq 5;\ \textit{there is } v<m \textit{ with } b_v\geqq\aleph_0.$$

Let $a\to(b_v)^{r-1}_{v<m}$. Then $2^a\to(b_v+1)^r_{v<m}$.

PROOF. We may assume $b_0\geqq\aleph_0$ and $b_0,,\hat{b}_m\geqq r$. Define α, n, S, I_v^* as in the proof of Lemma 5A so that (6) holds. Then $[V]^r=\Sigma'(v<m)I_v$, where

(8) $$I_1 = K_{010}+P_{010}+\bar{I}_1;\quad I_v=\bar{I}_v \qquad (2\leqq v<m).$$

Let $X\in[V]^{b_0}$; $[X]^r\subset I_0$. Then $[X]^rK_{010}=\varnothing$ and, as in the proof of Lemma 5B, there is $X''\in[X]^{b_0}$ such that (3) holds. Next, let $Y\in[V]^{b_1+1}$; $[Y]^r\subset I_1$. Then, by (8), $[Y]^r\subset K_{010}+K$ and hence, by 13.6 and $b_1+1\geqq r+1$, $[Y]^r\subset K$. It now follows from (8) that $[Y]^r\subset P_{010}+P_{0,,0}$. We deduce from 13.6 (a) (i) and 13.13 that $[Y]^r\subset P_{0,,0}$. Therefore, again, (4) holds for $Y'=Y$. It follows from (8), (3) and (4) that we only need to prove (5), and the proof of Lemma 5A applies. This proves Lemma 5C.

LEMMA 5D. *Let $r\geqq 4$ and $a\geqq\aleph_0$. Let $b_0,,\hat{b}_m$ be cardinals, and put*

$$c_r = 2^{r-1}+2^{r-2}-4.$$

Let $a\to(b_v)^{r-1}_{v<m}$. Then $2^a\to((r+1)_{c_r},(b_v+1)_{v<m})^r$.

PROOF. Define α, n, S, I_v^* as in the proof of Lemma 5A so that (6) holds. Let $2\leqq p<\omega$. Denote by $\varepsilon_p(0),,\varepsilon_p(2^p-3)$ all systems $(\sigma_0,,\sigma_{p-1})$ with $\sigma_0,,\sigma_{p-1}<2$ except the two systems $(0,,0)$, $(1,,1)$. Then

$$[V]^r=\Sigma'(i<2^{r-1}-2)I_i'+'\Sigma'(j<2^{r-2}-2)I_j''+'\Sigma'(v<m)I_v,$$

where the I_i', I_j'', I_v are defined by the following rules. Let $A=\{x_0,,x_{r-1}\}_<\subset V$.

(9) If $A\notin K$, so that $\eta(x_0,,x_{r-1})=\varepsilon_{r-1}(i)$ for some $i<2^{r-1}-2$, then $A\in I_i'$.

(10) If $A\in K-P$, so that $\xi(\delta(x_0,,x_{r-1}))=\varepsilon_{r-2}(j)$ for some $j<2^{r-2}-2$, then $A\in I_j''$.

(11) If $A\in P$, so that $\delta'(x_0,,x_{r-1})\in I_v^*$ for some $v<m$, then $A\in I_v$.

Now let $X'\subset V$; $i<2^{r-1}-2$; $[X']^r\subset I_i'$. Then $[X']^r\subset K_{\varepsilon_{r-1}(i)}$ by (9). Hence, by 13.5 (c),

(12) $$|X'|<r+1.$$

Next, let $X'' \subset V$; $j < 2^{r-2}-2$; $[X'']^r \subset I''_j$. Then $[X'']^r \subset P_{\varepsilon_{r-2}(j)}$ by (10) and hence, by 13. 9,

$$|X''| < r+1. \tag{13}$$

Finally, let $X \in [V]^{b_\nu+1}$; $[X]^r \subset I_\nu$; $\nu < m$. Then, by (11), $[X]^r \subset P$ and hence, by 13. 6 (b), there are $s, t < 2$ such that

$$[X]^r \subset K_{s,,s} P_{t,,t}. \tag{14}$$

It follows from (12), (13) and (14) that it suffices, again, to prove (5), and this proof was given in the proof of Lemma 5A. This establieshes Lemma 5D.

LEMMA 5D′. *Let* $|S| = a \geqq \aleph_0$; $|T| = 2^a$; $r \geqq 4$;

$$[S]^{r-1} = \Sigma'(\nu < m) I^*_\nu.$$

Then there is a partition $[T]^r = \Sigma'(\nu < m) I_\nu$ *such that*

$$[I_\nu]_r \subset [I^*_\nu]_{r-1} + [0, \omega) \qquad \text{for} \quad \nu < m.$$

COROLLARY. *If* $r \geqq 4$; $m \geqq 2$; $a, b_0,, \hat{b}_m \geqq \aleph_0$; $a \nrightarrow (b_\nu)^{r-1}_{\nu<m}$, *then*

$$2^a \nrightarrow (b_\nu)^r_{\nu<m}.$$

PROOF. Let $a = \aleph_\alpha$. We may assume $S = [0, \omega_\alpha)$ and $T = V$. Put

$$I_1 = K_{01} + P_{01} + \bar{I}_1; \quad I_\nu = \bar{I}_\nu \qquad (2 \leqq \nu < m).$$

Let $b \geqq \aleph_0$; $\nu < m$; $b \in [I_\nu]_r$. Then there is $X \in [V]^b$ with $[X]^r \subset I_\nu$. Then there is $s < 2$ with $[X]^r K_{s,1-s} = \varnothing$. By 13. 7 there is $X' \in [X]^b$ with $[X']^r \subset K$. There is $t < 2$ with $[X']^r P_{t,1-t} = \varnothing$. By 13. 11 there is $X'' = \{x_0,, \hat{x}_k\}_< \in [X']^b$ with $[X'']^r \subset P_{0,,0}$. Then $k \geqq \omega(b)$, and $x_\lambda x_{\lambda+1} < x_\mu x_{\mu+1}$ for $\lambda < \mu < \omega(b)$. Put $D = \{x_\lambda x_{\lambda+1} : \lambda < \omega(b)\}$. Let $L \in [D]^{r-1}$. Then there are $\lambda_0 < < \lambda_{r-2} < \omega(b)$ with $L = \{x_{\lambda_\varrho} x_{\lambda_\varrho+1} : \varrho < r-1\}$. Put $\lambda_{r-1} = \lambda_{r-2}+1$. Then, by 13. 14, $x_{\lambda_\varrho} x_{\lambda_\varrho+1} = x_{\lambda_\varrho} x_{\lambda_{\varrho+1}}$ for $\varrho < r-1$ and, by definition of I_ν, we have

$$L = \{x_{\lambda_\varrho} x_{\lambda_\varrho+1} : \varrho < r-1\} = \delta'(x_{\lambda_0},, x_{\lambda_{r-1}}) \in I^*_\nu,$$

$$[D]^{r-1} \subset I^*_\nu; \quad b = |D| \in [I^*_\nu]_{r-1}.$$

This proves Lemma 5D′.

The corollary follows since by Lemma 5D we can choose the I^*_ν such that $b_\nu \notin [I^*_\nu]_{r-1}$ for $\nu < m$. Then $b_\nu \notin [I_\nu]_r$ for $\nu < m$ which proves the assertion.

LEMMA 5E. *Let* $a \geqq \aleph_0$; $m \geqq 1$, *and let* $b_0,, \hat{b}_m$ *be such that* $b_\nu = b'_\nu$ *for at least one* $\nu < m$. *Let* $a \nrightarrow (b_\nu)^2_{\nu<m}$. *Then* $2^a \nrightarrow (4, (b_\nu+1)_{\nu<m})^3$.

PROOF. We may assume $b_0 = b'_0$. Let $r = 3$. Define α, n, S, I^*_ν as in the proof of Lemma 5A so that (6) holds. Then $[V]^3 = I + '\Sigma'(\nu < m) I_\nu$, where

$$I = K_{01}; \quad I_\nu = \bar{I}_\nu \qquad (1 \leqq \nu < m). \tag{15}$$

Let $X \subset V$; $[X]^3 \subset I$. Then, by (15), $[X]^3 \subset K_{01}$ and hence, by 13. 5 (a), $|X| < 4$. Next, let $Y \in [V]^{b_0}$; $[Y]^3 \subset I_0$. Then, by (15), $[Y]^3 K_{01} = \varnothing$ and hence, by 13. 7 (a) and 13. 8, there is $Y' \in [Y]^{b_0}$ with $[Y']^3 \subset P_0$. Let $Y' = \{y_0,, \hat{y}_k\}_<$; $D = \{y_\varkappa y_{\varkappa+1} : \varkappa+1 < k\}$. Then, by 13. 14 and (15), $[D]^{r-1} \subset I^*_0$ and hence, by (6), $b_0 = |Y'| =$

$= |k \dot{-} 1| = |D| < b_0$ which is a contradiction. Finally, let $Z \in [V]^{b_\nu+1}$; $[Z]^3 \subset I_\nu$; $1 \leqq \nu < m$. Then $[Z]^3 \subset P_0 I_\nu$. Therefore, again, it suffices to prove (5), and Lemma 5E follows.

LEMMA 5F. *Let* $a \geqq \aleph_0$, *and* $a \nrightarrow (b_\nu)^2_{\nu<m}$. *Then*

$$2^a \nrightarrow (4, 4, (b_\nu + 1)_{\nu<m2})^3.$$

REMARK. This result is an analogue of Lemma 5D for the case $r=3$, where $c_r = 2$. In this case, however, we cannot prove the stronger statement $2^a \nrightarrow (4, 4, (b_\nu+1)_{\nu<m})^3$, which would formally be the case $r=3$ of Lemma 5D, since we needed 13. 6 (b), and this latter proposition is false for $r=3$.

PROOF. Let $r=3$, and define α, n, S, I_ν^* as in the proof of Lemma 5A so that (6) holds. Then

$$[V]^3 = I_0 + {}'I_1 + {}'\Sigma'(\nu<m) I_{0\nu} + {}'\Sigma(\nu<m) I_{1\nu},$$

where the I_t and $I_{t\nu}$ are defined as follows.

$$I_t = K_{t,1-t} \quad \text{for} \quad t<2;$$

$$I_{t\nu} = P_t\{\{x, y, z\}_\prec : \delta'(x, y, z) \in I_\nu^*\} \text{ for } t<2 \text{ and } \nu<m.$$

We are using here the fact that $[V]^3 = K_{01} + {}'K_{10} + {}'K = P_0 + {}'P_1$. If $[X]^3 \subset I_t$, then $[X]^3 \subset K_{t,1-t}$ and by 13. 5, $|X|<4$. If $[Y]^3 \subset I_{t\nu}$, then $[Y]^3 \subset P_t$, and it follows, just as in the proof of Lemma 5E, that if $Y = \{y_0,, \hat{y}_k\}_\prec$, then

$$[\{y_\varkappa y_{\varkappa+1} : \varkappa+1<k\}]^2 \subset I_\nu^*; \quad |k \dot{-} 1| < b_\nu;$$

$$|Y| = |k| < b_\nu + 1.$$

This proves Lemma 5F.

Now we are going to discuss two theorems which we cannot prove without using $(*)$.

$(*)$ THEOREM 13. *Let* $a > a'$. *Then* $a^+ \nrightarrow (a, 5)^4$.

PROOF. Let $a = \aleph_\alpha$; $r=4$; $n = \omega_\alpha$; $l = \omega(a')$;

$$a_0 < < \hat{a}_l < a = \sup_{(\lambda<l)} a_\lambda,$$

and put

$$\lambda(\nu) = \min_{(a_\lambda > |\nu|)} \lambda \quad \text{for} \quad \nu<n.$$

If $A = \{x_0,, x_3\}_\prec \subset V$, then we put $\Lambda(A) = (\lambda_0(A),, \lambda_2(A))$, where $\lambda_\nu(A) = \lambda(x_\nu x_{\nu+1})$ for $\nu<3$. Then $[V]^4 = I_0 + {}'I_1$, where

$$I_1 = K_{010} + K\{A : \lambda_0(A) \geqq \lambda_1(A) < \lambda_2(A)\}. \tag{16}$$

Let us suppose that $a \in [I_0]_4$. Then there is $X \in [V]^a$ with $[X]^4 \subset I_0$ and, by (16), $[X]^4 K_{010} = \varnothing$. Hence, by 13. 7, there is $X' \in [X]^a$ such that $[X']^4 \subset K_{sss} \subset K$ for some s. Let $X' = \{x_0,, \hat{x}_k\}_\prec$. Then $k \geqq n$.

Case 1. $\lambda(x_\mu x_\nu) < \lambda(x_\nu x_\tau)$ for $\mu<\nu<\tau<n$. Put $\lambda_\mu = \lambda(x_\mu x_{\mu+1})$ for $\mu<n$. Then

$$\lambda_\mu = \lambda(x_\mu x_{\mu+1}) < \lambda(x_{\mu+1} x_\nu) < \lambda(x_\nu x_{\nu+1}) = \lambda_\nu \quad \text{for} \quad \mu+1<\nu<n,$$

and

$$\lambda_\mu = \lambda(x_\mu x_{\mu+1}) < \lambda(x_\nu x_{\nu+1}) = \lambda_\nu \quad \text{for} \quad \mu+1 = \nu<n.$$

Hence $\lambda_0 << \hat{\lambda}_n < l$; $a = |n| \leqq |l| = a'$ which is a contradiction.

Case 2. There are numbers $\mu < \nu < \tau < n$ such that

$$\varrho = \lambda(x_\mu x_\nu) \geqq \lambda(x_\nu x_\tau).$$

Then $[\{x_\mu, x_\nu, x_\tau, x_\sigma, x_\varphi\}]^4 \subset I_0$ for $\tau < \sigma < \varphi < n$ and hence, by (16),

$$\varrho = \lambda(x_\mu x_\nu) \geqq \lambda(x_\nu x_\tau) \geqq \lambda(x_\tau x_\sigma) \geqq \lambda(x_\sigma x_\varphi) \text{ for } \tau < \sigma < \varphi < n. \tag{17}$$

Put $X'' = \{x_{\tau+1}, , \hat{x}_n\}$. Then $|X''| = a$. Let $x_\sigma = (x_\sigma(0), , \hat{x}_\sigma(n))$ for $\tau < \sigma < n$. We define elements y_σ of V by putting $y_\sigma = (y_\sigma(0), , \hat{y}_\sigma(n))$ where, for $\nu < n$ and $\tau < \sigma < n$,

$$y_\sigma(\nu) = x_\sigma(\nu) \text{ if } \lambda(\nu) \leqq \varrho, \text{ and } y_\sigma(\nu) = 0 \text{ if } \lambda(\nu) > \varrho. \tag{18}$$

Put $Y = \{y_{\tau+1}, , \hat{y}_n\}$. Let $\tau < \sigma < \varphi < n$. Then, by (17), $\lambda(x_\sigma x_\varphi) \leqq \varrho$. Hence, by (18), we have, for $\nu_0 = x_\sigma x_\varphi$, $y_\sigma(\nu_0) = x_\sigma(\nu_0) \neq x_\varphi(\nu_0) = y_\varphi(\nu_0)$. Therefore $y_\sigma \neq y_\varphi$, and $|Y| = a$. On the other hand, by (18), $|Y| \leqq 2^{a_\varrho} = a_\varrho^+ < a$ which is a contradiction. Hence $a \notin [I_0]_4$.

Next, suppose that $5 \in [I_1]_4$. Then there is $Z \in [V]^5$ with $[Z]^4 \subset I_1$. Then, by (16), $[Z]^4 \subset K_{010} + K$ and hence, by 13. 6, $[Z]^4 \subset K_{sss}$ for some s. Let $Z = \{z_0, , z_4\}_<$; $\lambda_\nu = \lambda(z_\nu z_{\nu+1})$ for $\nu < 4$. Then, by (16), $\lambda_0 \geqq \lambda_1 < \lambda_2$ and, at the same time, $\lambda_1 \geqq \lambda_2 < \lambda_3$ which is impossible. Hence $5 \notin [I_1]_4$, and Theorem 13 follows.

(*) THEOREM 14. *Let* $a > a'$ *and* $c = a'^-$. *Then* $a^+ \nrightarrow (a, (4)_c)^3$.

PROOF. Define $\alpha, n, l, a_0, , \hat{a}_l, \lambda(\nu)$ as in the proof of Theorem 13 except that now $r = 3$. If $A = \{x_0, , x_2\}_< \subset V$, we put $\lambda_\nu(A) = \lambda(x_\nu x_{\nu+1})$ for $\nu < 2$. By Theorem 8, we have $2^c \nrightarrow (3)^2_c$. Hence there is a partition

$$[[0, l)]^2 = \Sigma'(\nu < \omega(c)) I_\nu^*$$

such that $3 \notin [I_\nu^*]_2$ for $\nu < \omega(c)$. Then

$$[V]^3 = I_0 + 'I_1 + '\Sigma'(\nu < \omega(c) \wedge t < 2) I_{\nu t},$$

where

$$\begin{cases} I_0 = K_{01} + K\{A : \lambda_0(A) = \lambda_1(A)\}; & I_1 = K_{10}; \\ I_{\nu t} = P_t\{A : \{\lambda_0(A), \lambda_1(A)\} \in I_\nu^*\} & \text{for } \nu < \omega(c); \quad t < 2. \end{cases} \tag{19}$$

Let $X \in [V]^a$; $[X]^3 \subset I_0$. Then, by (19), $[X]^3 K_{10} = \varnothing$ and, by 13. 7, there is $X' \in [X]^a$ with $[X']^3 \subset K_{ss}$ for some s. Let $X' = \{x_0, , \hat{x}_k\}_<$. Then $k \geqq n$, and either $x_0 << \hat{x}_k$ or $x_0 >> \hat{x}_k$. Put $\lambda(x_0, x_1) = \varrho$. Then, by (19), $\lambda(x_\mu x_{\mu+1}) = \varrho$ for $\mu < n$ and, more generally, $\lambda(x_\mu x_\nu) = \varrho$ for $\mu < \nu < n$. We now argue as in case 2 of the proof of Theorem 13. Let $x_\sigma = (x_\sigma(0), , \hat{x}_\sigma(n))$ for $\sigma < n$. Put $y_\sigma(\nu) = x_\sigma(\nu)$ if $\lambda(\nu) \leqq \varrho$, and $y_\sigma(\nu) = 0$ if $\lambda(\nu) > \varrho$, for $\sigma, \nu < n$. Put $y_\sigma = (y_\sigma(0), , \hat{y}_\sigma(n))$ for $\sigma < n$, and $Y = \{y_0, , \hat{y}_n\}$. If $\sigma < \varphi < n$, then $\lambda(x_\sigma x_\varphi) = \varrho$ and hence, for $\nu_0 = x_\sigma x_\varphi$, $y_\sigma(\nu_0) = x_\sigma(\nu_0) \neq x_\varphi(\nu_0) = y_\varphi(\nu_0)$. Thus $y_\sigma \neq y_\varphi$; $|Y| = a$. On the other hand, $|Y| \leqq 2^{a_\varrho} = a_\varrho^+ < a$ which is a contradiction. Hence $a \notin [I_0]$. Next, let $[Z]^3 \subset I_1$. Then, by (19), $[Z]^3 K_{01} = \varnothing$ and, by 13. 5, we have $|Z| < 4$. Hence $4 \notin [I_1]_3$. Finally, let $Z_0 \in [V]^4$; $[Z_0]^3 \subset I_{\nu t}$ for some $\nu < \omega(c)$ and $t < 2$. Then, by (19), $[Z_0]^3 \subset P_t$. Let $Z_0 = \{z_0, , z_3\}_<$. Then either $z_0 << z_3$ or $z_0 >> z_3$. Put $D = \{\lambda(z_0 z_1), , \lambda(z_2 z_3)\}$. Then, by (19) and 11. 6 (ii), $[D]^2 \subset I_\nu^*$. But this is false since $|D| = 3$, and Theorem 14 is proved.

15. DISCUSSION OF RELATION I. MAIN THEOREMS

15. 1. A definition. We define a function $\mathrm{cr}(\beta)$ by putting, for every ordinal β,

$$\mathrm{cr}(\beta) = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1).$$

This means that if $\aleph_\beta = b$, then $\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)} = b'^{-\prime}$. We call $\mathrm{cr}(\beta)$ the *critical number* belonging to β. Explicitly, it is given by the following rule.

Case 1. β is of the first kind. Then $\beta = \alpha + 1$, and $\mathrm{cr}(\beta) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Case 2. β is of the second kind.

Case 2a. $\aleph'_\beta$ is weakly inaccessible. Then $\mathrm{cr}(\beta) = \mathrm{cf}(\beta)$.

Case 2b. $\aleph'_\beta$ is not weakly inaccessible. Then $\mathrm{cf}(\beta) = \gamma + 1$, and $\mathrm{cr}(\beta) = \mathrm{cf}(\gamma)$.

We note that if $\aleph_\beta$ is weakly inaccessible, then $\mathrm{cr}(\beta) = \beta$, and that $\mathrm{cr}(\beta) < \beta$ otherwise.

The following Main Theorem I gives a summary of the results obtained so far for $r = 2$ as well as the essential part of the results for $r \geqq 3$. Its proof consists of a rather lengthy discussion of cases. During this discussion we shall require some new corollaries of earlier results.

15. 2. The first Main Theorem. (*) THEOREM I. *Let* $n \geqq 2$, *and let*

$$2 \leqq r < b_0, \hat{b}_n \leqq \aleph_\beta.$$

Consider the relation

(R) $$\aleph_{\beta+(r-2)} \to (b_0, \hat{b}_n)^r$$

and the following conditions:

(IA) $$b_0 = \aleph_\beta,$$

(IB) $$b_0, \hat{b}_n < \aleph_\beta,$$

(CA) $$b_1 \ldots \hat{b}_n \leqq \aleph_{\mathrm{cr}(\beta)},$$

(CB) $$b_0 \ldots \hat{b}_n < \aleph_\beta.$$

Then we have the following results:

(i) *If* (IA) *holds, then* (CA) *is necessary for the truth of* (R) *except possibly when*

(1) $$r \geqq 3; \quad \beta > \mathrm{cf}(\beta) > \mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1 > \mathrm{cr}(\beta); \quad b_1, \hat{b}_n < \aleph_0.$$

(ii) *If* (IA) *holds and* $b_1 \geqq \aleph_0$, *then* (CA) *is necessary for the truth of* (R).

(iii) *If* (IA) *holds, then* (CA) *is sufficient for the truth of* (R) *except possibly when* $\aleph'_\beta$ *is inaccessible and greater than* $\aleph_0$.

(iv) *If* (IA) *holds and* $b_1, \hat{b}_n < \aleph'_\beta$, *then* (CA) *is sufficient for the truth of* (R).

(v) *If* (IB), *holds, then* (CB) *is necessary and sufficient for the truth of* (R).

Clearly, (ii) follows from (i). Since frequent use will be made of these results in the case $n < \omega$ we state explicitly what the theorem asserts in this case. We consider the relation

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \to (b_0, b_{n-1})^r,$$

where $2 \leqq n < \omega$ and

$$\aleph_\beta \geqq b_0 \geqq \ldots \geqq b_{n-1} > r \geqq 2.$$

For any β, we have:

(2) $$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (\aleph_\beta, \aleph^+_{\mathrm{cr}(\beta)})^r;$$

(3) $$\aleph_{\beta+(r-2)} \rightarrow (\aleph_\beta, (\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)})_{n-1})^r$$

except possibly when $\mathrm{cf}(\beta) = \mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1 > 0$.

(4) $$\begin{cases} \aleph_{\beta+(r-2)} \rightarrow (\aleph_\beta, (b)_{n-1})^r & \text{if} \quad b < \aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}; \\ \aleph_{\beta+(r-2)} \rightarrow (b)^r_n & \text{if} \quad b < \aleph_\beta. \end{cases}$$

Theorem I leaves some questions on I-relations unanswered, such as that of the truth of

(5) $$\aleph_{\beta+1} \rightarrow (\aleph_\beta, (4)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^3$$

when

(6) $$\beta > \mathrm{cf}(\beta) > \mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1 > \mathrm{cr}(\beta).$$

We conjecture that (5) is false when (6) holds. It seems that to prove this only a slight refinement of the methods used in section 14 would be sufficient; however we have not been able to settle this question. Here the simplest unsolved problem is

($*$) PROBLEM 2.

$$?\, \aleph_{\omega_{\omega+1}+1} \rightarrow (\aleph_{\omega_{\omega+1}}, (4)_{\aleph_0})^3.$$

This corresponds to the smallest β which satisfies (6).

15. 3. Proof of Theorem I. Consider the following conditions:

(C*A) $$n < \omega_{\mathrm{cr}(\beta)}; \quad b_1 ,, \hat{b}_n \leqq \aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}.$$

(C*B) $$\begin{cases} n < \omega_{\beta \dot{-} 1}; \quad b_0 ,, \hat{b}_n < \aleph_\beta; \\ \text{there is } c < \aleph_{\beta \dot{-} 1} \text{ with } |\{v : b_v \geqq c\}| < \aleph_{\mathrm{cf}(\beta \dot{-} 1)}. \end{cases}$$

15. 4. The conditions (*CA*) and (*C*A*) are equivalent.

PROOF. If (CA) holds, then $b_1 ,, \hat{b}_n \leqq b_1 \ldots \hat{b}_n \leqq \aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}$;

$$|n \dot{-} 1| < 3^{|n \dot{-} 1|} \leqq b_1 \ldots \hat{b}_n \leqq \aleph_{\mathrm{cr}(\beta)};$$

$$n < \omega_{\mathrm{cr}(\beta)},$$

and (C*A) follows. Vice versa, if (C*A) holds then, since $\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}$ is regular,

$$b_1 \ldots \hat{b}_n \leqq (\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)})^{|n \dot{-} 1|} \leqq \aleph_{\mathrm{cr}(\beta)},$$

and (CA) holds.

15. 5. The conditions (*CB*) and (*C*B*) are equivalent.

PROOF. 1. Let (CB) hold. Then $|n| < 3^{|n|} \leqq b_0 \ldots \hat{b}_n < \aleph_\beta$; $n < \omega_{\beta \dot{-} 1}$. Let us assume that (C*B) is false. Then $|\{v : b_v \geqq c\}| \geqq \aleph_{\mathrm{cf}(\beta \dot{-} 1)}$ for $c < \aleph_{\beta \dot{-} 1}$. Then we can construct

inductively a sequence $v_0 < \ldots < \hat{v}_l < n$, where $l = \omega_{\mathrm{cf}(\beta \dot{-} 1)}$, such that $\sup(\lambda < l) b_{v_\lambda} = \aleph_{\beta \dot{-} 1}$. If there is a number $m < l$ such that $b_{v_\lambda} = \aleph_{\beta \dot{-} 1}$ for $m \leqq \lambda < l$, then we obtain the contradiction

$$\aleph_\beta > b_0 \ldots \hat{b}_n \geqq b_{v_m} \ldots \hat{b}_{v_l} = (\aleph_{\beta \dot{-} 1})^{\aleph_{\mathrm{cf}(\beta \dot{-} 1)}} > \aleph_{\beta \dot{-} 1}.$$

Hence there is no such m, and we can impose on the v_λ the additional condition $b_{v_0} < \ldots < \hat{b}_{v_l}$. Then, by Kőnig's theorem, $\aleph_\beta > b_0 \ldots \hat{b}_n \geqq b_{v_1} \ldots \hat{b}_{v_l} > b_{v_0} + \ldots + \hat{b}_{v_l} \geqq \aleph_{\beta \dot{-} 1}$ which is the desired contradiction. Hence (C*B) is true.

2. Let (C*B) hold for some c. Put

$$N_0 = \{v : b_v \geqq c\}; \quad N_1 = \{v : b_v < c\}.$$

Case 1. $\beta = 0$. Then $n < \omega$; $b_0, \ldots \hat{b}_n < \aleph_0$, and (CB) holds.

Case 2. $\beta \dot{-} 1 = \beta > 0$. Then there is $\gamma < \beta$ such that

$$\Pi(v \in N_0) b_v \leqq 2^{\Sigma(v \in N_0) b_v} \leqq 2^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\gamma+1} < \aleph_\beta,$$

$$\Pi(v \in N_1) b_v \leqq c^{|n|} \leqq 2^{c|n|} \leqq 2^{\aleph_\gamma} < \aleph_\beta.$$

Hence (CB) holds.

Case 3. $\beta \dot{-} 1 < \beta$. Then $\beta = \delta + 1$, and $|N_0| < \aleph_\delta$;

$$\Pi(v \in N_0) b_v \leqq \aleph_\delta{}^{|N_0|} < \aleph_\delta,$$

$$\Pi(v \in N_1) b_v \leqq c^{|n|} \leqq 2^{c|n|} < \aleph_\beta,$$

and (CB) follows.

15. 6. Proof of Theorem I (i). We assume (IA) and (R) and want to deduce that either (CA) or (1) holds. Suppose that (CA) is false. Then, by 15. 4, (C*A) is false. It is sufficient to prove the following three propositions:

(*) COROLLARY 6.

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (\aleph_\beta, \aleph^+_{\mathrm{cr}(\beta)})^r \quad \textit{for} \quad r \geqq 2.$$

(*) COROLLARY 7.

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (\aleph_\beta, (r+1)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^r \quad \textit{for} \quad r \geqq 2$$

except possibly when

(7) $$r \geqq 3; \quad \beta > \mathrm{cf}(\beta) > \mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1 > \mathrm{cr}(\beta).$$

(*) COROLLARY 8.

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (\aleph_\beta, \aleph_0, (r+1)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^r \quad \textit{for} \quad r \geqq 2.$$

For let us assume these three propositions proved. Our aim is to prove: Let (IA) and (R) be true, and $n \geqq 2$; $2 \leqq r < b_0, \ldots \hat{b}_n \leqq \aleph_\beta$. Let both (C*A) and (1) be false. Then a contradiction follows. To exhibit this contradiction we consider the cases:

Case 1. $n < \omega_{\mathrm{cr}(\beta)}$. Then, since (C*A) is false, there is $v < n$ with $b_v > \aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}$. Then, by (IA) and (R), $\aleph_{\beta+(r-2)} \rightarrow (\aleph_\beta, \aleph^+_{\mathrm{cr}(\beta)})^+$ which contradicts Corollary 6.

Case 2. $n \geqq \omega_{\mathrm{cr}(\beta)}$. Then, by (IA) and (R), $\aleph_{\beta+(r-2)} \rightarrow (\aleph_\beta, (r+1)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^r$. By Corollary 7 this implies that (7) holds. Since (1) is false, we conclude that there is

$v \in [1, n)$ with $b_v \cong \aleph_0$. Then, by (IA) and (R),

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \to (\aleph_\beta, \aleph_0, (r+1)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^r$$

which contradicts Corollary 8. All this shows that in order to prove Theorem I (i) it suffices to prove Corollaries 6, 7, 8.

PROOF OF COROLLARY 6. For $r=2$ we have to prove

$$\aleph_\beta \nrightarrow (\aleph_\beta, \aleph^+_{\mathrm{cr}(\beta)})^2. \tag{8}$$

Case 1. $\beta = \alpha+1$. Then $\mathrm{cr}(\beta)=\mathrm{cf}(\alpha)$, and (8) follows from Theorem 7.

Case 2. $\beta = \beta \dot{-} 1 = \mathrm{cf}(\beta)$. Then $\mathrm{cr}(\beta)=\beta$, and (8) is trivial.

Case 3. $\beta = \beta \dot{-} 1 > \mathrm{cf}(\beta)$. Put $\mathrm{cf}(\beta)=\gamma$. Then, by Lemma 4, (8) is equivalent to

$$\aleph_\gamma \nrightarrow (\aleph_\gamma, \aleph^+_{\mathrm{cr}(\beta)})^2. \tag{9}$$

Now $\mathrm{cf}(\gamma)=\gamma$, and $\mathrm{cr}(\gamma)=\mathrm{cf}(\gamma \dot{-} 1)=\mathrm{cr}(\beta)$. Hence (9) follows from case 1 or case 2, when applied to γ in place of β. Thus we have proved Corollary 6 for $r=2$. To complete the proof assume that, for some $r \geqq 3$, we have

$$\aleph_{\beta+(r-3)} \nrightarrow (\aleph_\beta, \aleph^+_{\mathrm{cr}(\beta)})^{r-1}.$$

Then, since $\aleph^+_{\mathrm{cr}(\beta)}$ is regular, it follows from Lemma 5A that

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (\aleph_\beta + 1, \aleph^+_{\mathrm{cr}(\beta)}+1)^r,$$

and Corollary 6 is established by induction over r.

PROOF OF COROLLARY 7. For $r=2$ we have to prove that if (7) is false then

$$\aleph_\beta \nrightarrow (\aleph_\beta, (3)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^2. \tag{10}$$

Case 1. $\beta = \alpha+1$. Then $\mathrm{cr}(\beta)=\mathrm{cf}(\alpha)$, and (10) means

$$\aleph_{\alpha+1} \nrightarrow (\aleph_{\alpha+1}, (3)_{\aleph_{\mathrm{cf}(\alpha)}})^2. \tag{11}$$

Case 1a. $\alpha=\mathrm{cf}(\alpha)$. Then (11) follows from $(*)$ and Theorem 8.

Case 1b. $\alpha>\mathrm{cf}(\alpha)$. Then (11) follows from Theorem 10.

Case 2. $\beta = \beta \dot{-} 1 = \mathrm{cf}(\beta)$. Then $\mathrm{cr}(\beta)=\beta$, and (10) is trivial.

Case 3. $\beta = \beta \dot{-} 1 > \mathrm{cf}(\beta)$. Put $\mathrm{cf}(\beta)=\gamma$. Then $\mathrm{cr}(\gamma)=\mathrm{cr}(\beta)$ and, by Lemma 4, (10) is equivalent to

$$\aleph_\gamma \nrightarrow (\aleph_\gamma, (3)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\gamma)}})^2. \tag{12}$$

But (12) is true by case 1 or 2, when applied to γ instead of β. This proves Corollary 7 for $r=2$. We now prove it for $r=3$ when the assertion is

$$\aleph_{\beta+1} \nrightarrow (\aleph_\beta, (4)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^3. \tag{13}$$

Case 1. $\beta=\mathrm{cf}(\beta)$. Then by (10) and Lemma 5E we have

$$\aleph_{\beta+1} \nrightarrow (4, \aleph_\beta, (4)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^3$$

which is the same as (13).

Case 2. $\beta > \mathrm{cf}(\beta)$. Then, by Theorem 14,

$$\aleph_{\beta+1} \nrightarrow (\aleph_\beta, (4)_{\aleph_{\mathrm{cf}(\beta)\dot{-}1}})^3. \tag{14}$$

Case 2a. $\mathrm{cf}(\beta) = \gamma + 1$. If $\gamma > \mathrm{cf}(\gamma)$, then

$$\beta > \mathrm{cf}(\beta) > \mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1 = \gamma > \mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cr}(\beta)$$

so that (7) would be true, contrary to the hypothesis. Thus $\gamma = \mathrm{cf}(\gamma)$; $\mathrm{cr}(\beta) = \mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1$, and (13) follows from (14).

Case 2b. $\mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1 = \mathrm{cf}(\beta)$. Then $\mathrm{cr}(\beta) = \mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1$, and (13) follows from (14).

We have shown that the assertion of Corollary 7 is true for $r = 2$ and for $r = 3$. Now suppose that, for some $r \geqq 4$,

$$\aleph_{\beta+(r-3)} \nrightarrow (\aleph_\beta, (r)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^{r-1}.$$

Then, by Lemma 5D, there is $c_r < \aleph_0$ such that

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow ((r+1)_{c_r}, \aleph_\beta + 1, (r+1)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^r.$$

This is the same as the assertion of Corollary 7 and so establishes Corollary 7 by induction over r.

PROOF OF COROLLARY 8. If $r = 2$, then the assertion of Corollary 8 follows from Corollary 7. Suppose that, for some $r \geqq 3$,

$$\aleph_{\beta+(r-3)} \nrightarrow (\aleph_\beta, \aleph_0, (r)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^{r-1}.$$

Then, by Lemma 5A,

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (\aleph_\beta + 1, \aleph_0 + 1, (r+1)_{\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}})^r.$$

This proves Corollary 8 by induction over r and concludes the proof of Theorem I (i). As has already been pointed out, part (ii) of Theorem I follows from (i).

15. 7. Proof of Theorem I (iii). We have to prove: If (IA) and (CA) hold then either (R) holds or $\mathrm{cf}(\beta) = \mathrm{cf}(\beta) \dot{-} | > 0$.

It suffices to prove:

$(*)$ COROLLARY 9.

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \rightarrow (\aleph_\beta, (\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)})_c)^r \tag{15}$$

for $r \geqq 2$ *and* $c < \aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}$ *except possibly when*

$$\mathrm{cf}(\beta) = \mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1 > 0, \tag{16}$$

i. e. when $\aleph'_\beta$ *is inaccessible and greather than* $\aleph_0$.

For, to deduce (iii) from Corollary 9 let us assume that (IA) and (CA) are true and that the condition (16) is not satisfied. We have to deduce (R). In fact, (C*A) follows from (CA), and hence $|n| < \aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}$. Now, by Corollary 9, the relation (15) holds with $c = |n|$. Then (R) follows from (C*A) and (IA).

PROOF OF COROLLARY 9. We assume that (16) is false. We begin by proving the relation (15) for $r = 2$ when it states

$$\aleph_\beta \rightarrow (\aleph_\beta, (\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)})_c)^2.$$

By Lemma 4 this follows from

$$(17) \qquad {}'_{\beta}\aleph \to (\aleph'_{\beta}, (\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)})_c)^2.$$

Case 1. $\mathrm{cf}(\beta) = \gamma + 1$. Then $\mathrm{cr}(\beta) = \mathrm{cf}(\gamma)$, and (17) follows from Theorem 1.

Case 2. $\mathrm{cf}(\beta) = \mathrm{cf}(\beta) \dot{-} 1$. Then, since (16) is false, we have $\mathrm{cf}(\beta) = 0$ and $c < \aleph_0$, and (17) follows from Ramsey's theorem. This proves (15) for $r = 2$. Now let $r \geqq 3$, and suppose

$$\aleph_{\beta + (r-3)} \to (\aleph_{\beta}, (\aleph_{\mathrm{cr}(\beta)})_c)^{r-1}.$$

Then, by Lemma 2, we obtain (15), and Corollary 9 follows by induction over r. This completes the proof of (iii).

15. 8. Proof of Theorem I (iv). We shall use the equivalence of (CA) and, (C*A). We have to prove: If $r \geqq 2$; $2 \leqq n < \omega_{\mathrm{cr}(\beta)}$; $b_1,, \hat{b}_n \leqq \aleph_{\mathrm{cr}(\beta)}$; $b_1,, b_n < \aleph'_{\beta}$, then

$$(18) \qquad \aleph_{\beta + (r-2)} \to (\aleph_{\beta}, b_1,, \hat{b}_n)^r.$$

By Lemma 2 we need only consider the case $r = 2$, and for $r = 2$, (18) is, by Lemma 4, equivalent to

$$\aleph'_{\beta} \to (\aleph'_{\beta}, b_1,, \hat{b}_n)^2.$$

Hence, putting $\mathrm{cf}(\beta) = \gamma$, we see that it suffices to prove:

(*) COROLLARY 10. *Let* $\gamma = \mathrm{cf}(\gamma)$; $2 \leqq n < \omega_{\mathrm{cf}(\gamma \dot{-} 1)}$; $b_1,, \hat{b}_n < \aleph_{\gamma}$; $b_1,, \hat{b}_n \leqq \leqq \aleph_{\mathrm{cf}(\gamma \dot{-} 1)}$. *Then*

$$(19) \qquad \aleph_{\gamma} \to (\aleph_{\gamma}, b_1,, \hat{b}_n)^2.$$

PROOF OF COROLLARY 10.

Case 1. $\gamma = \delta + 1$. Then (19) follows from the proposition:

$$\aleph_{\delta+1} \to (\aleph_{\delta+1}, (\aleph'_{\delta})_c)^2 \quad \text{for} \quad c < \aleph'_{\delta},$$

and this proposition follows from Corollary 1.

Case 2. $\gamma = \gamma \dot{-} 1$. Then $\aleph_{\gamma}$ is inaccessible, and (19) follows from Theorem 5. We now prove the two parts of Theorem I (v).

15. 9. If (1B) and (CB) hold, then (R) follows.

PROOF. By 15. 5 the condition (C*B) holds, so that $n < \omega_{\beta \dot{-} 1}$; $b_0,, \hat{b}_n < \aleph_{\beta}$, and there is $c < \aleph_{\beta \dot{-} 1}$ with

$$|\{v : b_v \geqq c\}| < \aleph'_{\beta \dot{-} 1}.$$

We want to deduce (R).

Case 1. $\beta \dot{-} 1 = \beta$. Then it suffices to prove:

$$(20) \qquad \begin{cases} \aleph_{\beta + (r-2)} \to (c_0,, \hat{c}_m, (c)_e)^r \\ \text{if } r \geqq 2;\ c < \aleph_{\beta};\ m < \omega_{\mathrm{cf}(\beta)};\ c_0,, \hat{c}_m < \aleph_{\beta};\ e < \aleph_{\beta}. \end{cases}$$

By definition of $\mathrm{cf}(\beta)$, (20) is the same as:

$$\aleph_{\beta + (r-2)} \to (c)^r_e \text{ if } r \geqq 2 \text{ and } c, e < \aleph_{\beta}.$$

By Lemma 2 we need only consider the case $r=2$, i. e.

$$\aleph_\beta \to (c)^2_e \text{ for } c, e < \aleph_\beta. \tag{21}$$

Case 1a. $\beta = 0$. Then (21) follows from Ramsey's theorem.

Case 1b. $\beta > 0$. Then $\beta = \beta \dot{-} 1 > 0$, and there is $\gamma < \beta$ with $c, e \prec \aleph_\gamma$. Then, by Corollary 1,

$$\aleph_{\gamma+2} \to (\aleph_{\gamma+2}, (\aleph_{\gamma+1})_{\aleph_\gamma})^2. \tag{22}$$

Now (21) follows from (22).

Case 2. $\beta = \alpha + 1$. Then it is sufficient to prove:

$$\begin{cases} \aleph_{\alpha+(r-1)} \to ((\aleph_\alpha)_d, (c)_e)^r \\ \text{if } r \geqq 2;\ c < \aleph_\alpha;\ d < \aleph'_\alpha;\ e < \aleph_\alpha. \end{cases} \tag{23}$$

By Lemma 2 we need only consider the case $r=2$ when (23) states:

$$\begin{cases} \aleph_{\alpha+1} \to ((\aleph_\alpha)_d, (c)_e)^2 \\ \text{if } c, e < \aleph_\alpha \text{ and } d < \aleph'_\alpha. \end{cases} \tag{24}$$

Case 2a. $\alpha = \mathrm{cf}(\alpha)$. Then (24) follows from Corollary 1.

Case 2b. $\alpha > \mathrm{cf}(\alpha)$. Then, by Theorem 2, $\aleph_{\alpha+1} \to ((\aleph_\alpha)_d, \aleph_\alpha)^2$. Hence it suffices to prove $\aleph_\alpha \to (c)^2_e$, and this follows from (21) since $\alpha \dot{-} 1 = \alpha$. This shows that if (IB) and (CB) hold, then (R) follows.

15. 10. If (IB) and (R) hold, then (CB) holds.

PROOF. We assume that (IB) holds and that (CB), and so (C*B), is false. We have to deduce that (R) is false. Thus we are given: $n \geqq 2;\ 2 \leqq r < b_0, \hat{b}_n < \aleph_\beta$; $b_0 \ldots \hat{b}_n \geqq \aleph_\beta$, and either (i) $n \geqq \omega_{\beta \dot{-} 1}$, or (ii) $n < \omega_{\beta \dot{-} 1}$ and $|\{v: b_v \geqq c\}| \geqq \aleph'_{\beta \dot{-} 1}$ for $c < \aleph_{\beta \dot{-} 1}$. We have to deduce

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (b_v)^r_{v<n}.$$

Case 1. (i) holds. Then it suffices to prove

(*) COROLLARY 11.

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (r+1)_{\aleph_{\beta \dot{-} 1}}.$$

Case 2. (ii) holds. Put $m = \omega_{\mathrm{cf}(\beta \dot{-} 1)}$. Then $\beta > 0$; $n \geqq \omega$;

$$\aleph_{\beta \dot{-} 1} > |n| \geqq \aleph'_{\beta \dot{-} 1} \geqq |m|.$$

Case 2a. $\beta = \beta \dot{-} 1$. Then

$$|\{v: b_v \geqq c\}| \geqq \aleph'_\beta \text{ for } c < \aleph_\beta. \tag{25}$$

Let $\aleph_0 \leqq c_0 < < \hat{c}_m < \aleph_\beta = \sup(\mu < m) c_\mu$. Then, by (25), there are $v_0 < < \hat{v}_m < n$ with $b_{v_\mu} \geqq c^+_\mu$ for $\mu < m$. Then $\Pi(\mu < m) c^+_\mu \geqq \aleph_\beta$, and it is sufficient to prove

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (c^+_\mu)^r_{\mu<m}.$$

Case 2b. $\beta = \alpha+1$. Then $b_0,, \hat{b}_n \geqq \aleph_\alpha$; $b_0 \dots \hat{b}_n > \aleph_\alpha$. Let $N = \{\nu : b_\nu \geqq \aleph_0\}$. By putting $c = \aleph_0$ in (ii) we find $|N| \geqq \aleph'_\alpha$. We may assume $0,1 \in N$. Put $c_\nu = b_\nu - r + 2$ if $\nu \notin N$, and $c_\nu = b_\nu$ if $\nu \in N$. Then $c_0,, \hat{c}_n \geqq 3$. Also, for $\nu \notin N$,

$$b_\nu = c_\nu + (r-2) < c_\nu + 2^{r-2} < \tfrac{1}{2}c_\nu^r + \tfrac{1}{2}c_\nu^r = c_\nu^r,$$

$$\aleph_\alpha < b_0 \dots \hat{b}_n \leqq (c_0 \dots \hat{c}_n)^r; \quad c_0 \dots \hat{c}_n > \aleph_\alpha; \quad c_2 \dots \hat{c}_n > \aleph_\alpha.$$

It suffices to prove that

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (\aleph_0, \aleph_0, (c_\nu + (r-2))_{2 \leqq \nu < n})^r$$

if $r \geqq 2$; $c_2 \dots \hat{c}_n \geqq \aleph_\beta$. It now follows that to settle case 2 it suffices to prove

(*) COROLLARY 12.

$$\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (d_\nu + (r-2))^r_{\nu<n}$$

if

$$r, n \geqq 2; \quad d_0 = d'_0; \quad d_1 \geqq \aleph_0; \quad d_0 \dots \hat{d}_n \geqq \aleph_\beta; \quad n < \omega_{\beta \dot{-} 1}; \quad 3 \leqq d_0,, \hat{d}_n < \aleph_\beta.$$

PROOF OF COROLLARY 11.

Case 1. $\beta = \beta \dot{-} 1$. If $r = 2$, then the assertion is $\aleph_\beta \nrightarrow (3)^2_{\aleph_\beta}$, and this is true. Now Lemma 5F gives $\aleph_{\beta+1} \nrightarrow (4)^3_{\aleph_\beta}$, and repeated application of Lemma 5D proves the assertion for $r \geqq 3$.

Case 2. $\beta = \alpha+1$. If $r = 2$, then we have to prove $\aleph_{\alpha+1} \nrightarrow (3)^2_{\aleph_\alpha}$. This is true by Theorem 8. Now Lemmas 5F and 5D establish the assertion for $r \geqq 3$, and Corollary 11 follows.

PROOF OF COROLLARY 12.

Case 1. $r = 2$.

Case 1a. $\beta = \alpha+1$. Then $d_0,, \hat{d}_n \geqq \aleph_\alpha < d_0 \dots \hat{d}_n \leqq (\aleph_\alpha)^{|n|}$; $\omega_{\mathrm{cf}(\alpha)} \leqq n < \omega_\alpha$. Hence, by Theorem 9, $\aleph_{\alpha+1} \nrightarrow (d_0,, \hat{d}_n)^2$ which is the assertion.

Case 1b. $\beta = \beta \dot{-} 1$. If $\beta = \mathrm{cf}(\beta) > 0$, then $d_0 \dots \hat{d}_n \leqq 2^{d_0 + \dots + \hat{d}_n} < \aleph_\beta$ which is a contradiction, and if $\beta = 0$, then $d_0 \dots \hat{d}_n < \aleph_0$ which is a contradiction. Hence $\beta > \mathrm{cf}(\beta)$. If $\sup(\nu < n) d_\nu = e < \aleph_\beta$, then $\aleph_\beta \leqq d_0 \dots \hat{d}_n \leqq e^{|n|} < \aleph_\beta$ which is false. Hence $\sup(\nu < n) d_\nu = \aleph_\beta$, and if $m = \omega_{\mathrm{cf}(\beta)}$, then there are $\nu_0 < \dots < \hat{\nu}_m < n$ such that $d_{\nu_0} < \dots < \hat{d}_{\nu_m}$ and $\sup(\mu < m) d_{\nu_\mu} = \aleph_\beta$. Then

$$\aleph_\beta \leqq \Sigma(\mu < m) d_{\nu_\mu} < \Pi(\mu < m) d_{\nu_\mu}.$$

Hence, by Theorem 9, $\aleph_{\beta+1} \nrightarrow (d_{\nu_\mu})^2_{\mu<m}$ and therefore $\aleph_\beta \nrightarrow (d_\nu)^2_{\nu<n}$.

Case 2. $r \geqq 3$. We may assume $\aleph_{\beta+(r-3)} \nrightarrow (d_\nu + (r-3))^{r-1}_{\nu<n}$. Then, by Lemma 5A, $\aleph_{\beta+(r-2)} \nrightarrow (d_\nu + (r-2))^r_{\nu<n}$, and Corollary 12 is proved. This completes the proof of Theorem I.

15. 11. The second Main Theorem. We shall now discuss the I-relation in the most general case. It will be convenient to introduce the remainder function $\varrho(\alpha)$ which is defined by the relations $\alpha = \omega\gamma(\alpha) + \varrho(\alpha)$; $\varrho(\alpha) < \omega$.

(*) THEOREM II. *Let* $n \geqq 2$, *and suppose that* $2 \leqq r < b_0, \hat{b}_n \leqq \aleph_\alpha$. *Consider the relations:*

(R*) $$\aleph_\alpha \to (b_0, \hat{b}_n)^r;$$

(IIA) $$\varrho(\alpha) \geqq r-2, \text{ and } b_0, \hat{b}_n \leqq \aleph_{\alpha \dot{-} (r-2)};$$

(IIB) $$b_0 > \aleph_{\alpha \dot{-} (r-2)};$$

(IIC) $$\varrho(\alpha) < r-2, \text{ and } b_0, \hat{b}_n \leqq \aleph_{\alpha \dot{-} (r-2)};$$

(IIC1) $$b_0, \hat{b}_n < \aleph_{\alpha \dot{-} (r-2)};$$

(IIC2) $$b_0 = \aleph_{\alpha \dot{-} (r-2)}.$$

Then we have the following results:

(i) *If* (IIA) *holds, then the truth of* (R*) *has been discussed in Theorem I.*

(ii) *If* (IIB) *holds, then* (R*) *is false.*

(iii) *If* (IIC) *and* (IIC1) *hold, then a necessary and sufficient condition for* (R*) *is* $b_0 \ldots \hat{b}_n < \aleph_{\alpha \dot{-} (r-2)}$.

(iv) *If* (IIC) *and* (IIC2) *hold, then a necessary condition for* (R*) *is that* $\aleph_{\alpha \dot{-} (r-2)}$ *be inaccessible.*

We note that (IIB) implies $\aleph_{\alpha \dot{-} (r-2)} < b_0 \leqq \aleph_\alpha$ and hence $r \geqq 3$.

PROOF OF THEOREM II. Put $\gamma = \alpha \dot{-} (r-2)$.

PROOF OF (ii). It suffices to prove that

$$\aleph_{\gamma+(r-2)} \nrightarrow (\aleph_{\gamma+1}, r+1)^r \text{ for } r \geqq 3.$$

We shall in fact prove a stronger result ($\delta = \gamma + 1$):

(*) COROLLARY 13. *If* $r \geqq 3$ *and* $\aleph_\delta$ *is not inaccessible, then*

(26) $$\aleph_{\delta+(r-3)} \nrightarrow (\aleph_\delta, r+1)^r.$$

PROOF. We use induction over r. If $r = 3$, we have to prove $\aleph_\delta \nrightarrow (\aleph_\delta, 4)^3$, and this follows from Corollary 5. If $\delta = \mathrm{cf}(\delta)$, then this leads, by Lemma 5B, to $\aleph_{\delta+1} \nrightarrow \nrightarrow (\aleph_\delta, 5)^4$, and if $\delta > \mathrm{cf}(\delta)$, then this last relation follows from Theorem 13. Thus Corollary 13 is proved for $r < 5$. Suppose now that, for some $r \geqq 5$ and some δ, we have $\aleph_{\delta+(r-4)} \nrightarrow (\aleph_\delta, r)^{r-1}$. Then, by Lemma 5C, we deduce (26). This proves Corollary 13 and so part (ii).

PROOF OF (iii). We have to prove the following two results:

(27) If (IIC) and (IIC1) hold and $b_0 \ldots \hat{b}_n < \aleph_{\alpha \dot{-} (r-2)}$, then (R*) follows.

(28) If (IIC), (IIC1) and (R*) hold, then $b_0 \ldots \hat{b}_n < \aleph_{\alpha \dot{-} (r-2)}$.

PROOF OF (27). Since $\varrho(\alpha) < r-2$, γ is of the second kind, and $r \geqq 3$. If $\gamma = 0$, then $n < \omega$ and $b_0, \hat{b}_n < \omega$. In this case (R*) follows from Ramsey's theorem. Now let $\gamma > 0$. By Lemma 2 it suffices to prove $(s = r - \varrho(\alpha))$.

(*) COROLLARY 14. *If* $s \geqq 3$; $n \geqq 2$; $\gamma = \gamma \dot{-} 1 > 0$; $\aleph_0 \leqq d_0,, \hat{d}_n < \aleph_\gamma$; $d_0 \ldots \hat{d}_n < \aleph_\gamma$, *then*

$$\aleph_\gamma \to (d_0,, \hat{d}_n)^s. \tag{29}$$

PROOF OF COROLLARY 14. $|n| < 2^{|n|} \leqq d_0 \ldots \hat{d}_n = d < \aleph_\gamma$;

$$d_0,, \hat{d}_n \leqq d.$$

There is $\beta < \gamma$ with $d < \aleph_\beta$. Then, by Theorem 3,

$$\aleph_{(\beta+1)+(s-1)} \to (\aleph_{\beta+2}, (\aleph_{\beta+1})_n)^s,$$

and hence (29) follows.

PROOF OF (28). If we assume $b_0 \ldots \hat{b}_n \geqq \aleph_\gamma$ then, by Theorem I (v),

$$\aleph_{\gamma+(r-2)} \nrightarrow (b_0,, \hat{b}_n)^r.$$

But $\gamma + (r-2) > \alpha$. Hence (R*) is false which is the desired contradiction. This establishes (iii).

PROOF OF (iv). It suffices to prove the following statement.

(30) If $\varrho(\alpha) < r-2$, and if $\aleph_\gamma$ is not inaccessible, then $\aleph_\alpha \nrightarrow (\aleph_\gamma, r+1)^r$.

PROOF OF (30). We have $r \geqq 3$. Hence, by Corollary 13,

$$\aleph_{\gamma+(r-3)} \nrightarrow (\aleph_\gamma, r+1)^r.$$

As $\gamma + (r-3) \geqq \alpha$, the conclusion follows. This concludes the proof of Theorem II.

16. THE RELATION I IN THE CASE OF A FINITE NUMBER OF FINITE CARDINALS

We shall now investigate relations $a \to (b_0,, \hat{b}_n)^r$ in the special case when $2 \leqq n < \omega$; $r \geqq 2$; $b_0,, \hat{b}_n < \aleph_0$. By Ramsey's theorem there is a least finite number a such that $a \to (b_\nu)^r_{\nu<n}$, and we shall denote this number by $f(b_0,, b_{n-1}, r)$. In contrast to the infinite case we cannot yet find the exact value of this function f but we can give some estimates of its value. We restrict ourselves to the case $n = 2$, and we put $f(b, b, r) = g(b, r)$. We assume that $b_0, b_1 \geqq 1$. The main results known so far are:

16. 1. $f(b_0, b_1, 2) \leqq \binom{b_0 + b_1 - 2}{b_0 - 1}$ (see [8]).

16. 2. $g(b, 2) \geqq 2^{\frac{1}{2}b}$ (see [9]).

P. ERDŐS and R. RADO [3] have obtained the following upper estimate for $g(b, r)$. Put $a * b = a^b$ and, generally, $a_0 * a_1 * * a_m = a_0 * (a_1 * * a_m)$ for $2 \leqq m < \omega$.

16. 3. If $2 \leqq r \leqq b < \omega$, then

$$g(b, r) \leqq 2 * (2^{r-1}) * (2^{r-2}) * * (2^2) * (2b - 2r + 1)$$

and hence $g(b, r) \leqq 2 * 2 * * 2 * (k_r b)$ (r "factors" in all), where the positive real number k_r depends on r only. In the case $r=2$ the estimates 16. 1 and 16. 2 show that neither is very far from best possible. For fixed $r \geqq 3$, say $r=3$, it was not known at the time [3] was written whether the order of magnitude in 16. 3 was approximately best possible. P. ERDŐS proved a result in such a direction:

16. 4. There is a positive real number c such that $g(b, 3) \geqq 2^{cb^2}$ for all b. This is stated, without detailed proof, in [9].

It is reasonable to conjecture that, in fact,

$$g(b, 3) \geqq 2^{2^{c_3 b}}$$

for some absolute real constant $c_3 > 0$ and that, more generally,

$$g(b, r) \geqq 2 * 2 * * 2 * (c_r b) \qquad (r \text{ "factors"}) \tag{1}$$

for some real positive c_r which is independent of b. By means of the methods of section 14 we can prove the following "stepping-up" lemma.

LEMMA 6. *There is a real number* $c \geqq 1/10$ *such that*

$$g(b, r) \geqq 2 * (c g(b, r-1)) \qquad \textit{for} \quad r > 4.$$

Using this lemma we can deduce from 16. 2 that for $r \geqq 3$

$$g(b, r) \geqq 2 * 2 * * 2 * (\tfrac{1}{2} c^{r-3} b) \qquad (r-1 \text{ "factors"}).$$

This result approaches the conjecture (1) but a big gap still exists in the case $r=3$ between the conjecture and the established estimate. Since these results are obviously not final we omit the proofs. Further special results concerning the function f are discussed in [10], [11], [12], [13].

17. DISCUSSION OF THE RELATION II

In this section we shall prove some negative results of the form

$$a \nrightarrow (b)^{<\aleph_0}_c.$$

The connection of such results with the abstract measure problem was mentioned in 8. 2.

We need some preliminary results. We shall use the definitions of 3. 2.

17. 1. (a) If $a < b$, then $a \nrightarrow (b)^{<\aleph_0}_2$.

(b) If $c \geqq \aleph_0$, then $c \nrightarrow (\aleph_0)^{<\aleph_0}_c$.

(c) $\aleph_0 \nrightarrow (\aleph_0)^{<\aleph_0}_2$.

PROOF OF (a). This follows from $a \nrightarrow (b)^r_2$ ($r \geqq 1$).

PROOF OF (b). If $|S| = c$ then there is, for every r, a partition

$$[S]^r = \Sigma'(v < \omega(c)) I(r, v)$$

such that $|I(r, v)| \leqq 1$ for all r and v. This proves (b).

PROOF OF (c). This result is essentially [3], p. 435, example 2. Let $S=[0, \omega)$ and $r \geqq 1$. Then $[S]^r = I(r, 0)+'I(r, 1)$, where $I(r, 0) = [S]^r\{\{x_0,, x_{r-1}\}_< : x_0 < r\}$. If $X=\{x_0,, \hat{x}_\omega\}_< \subset S$ then, for every $r > x_0$, we have $\{x_0,, x_{r-1}\} \in I(r, 0)$ and $\{x_r,, x_{2r-1}\} \in I(r, 1)$ which implies the assertion.

17. 2. Let $a, b \geqq \aleph_0$; $c \geqq 2$; $a \nrightarrow (b)^{<\aleph_0}_c$. Then

$$2^a \nrightarrow (b)^{<\aleph_0}_c.$$

PROOF. 1. Let $a=\aleph_\alpha$; $m=\omega(c)$; $S=[0, \omega_\alpha)$. Then, for $r \geqq 1$, there is a partition

$$[S]^{r-1} = \Sigma'(\nu < m) I^*(r, \nu)$$

such that, given $D \in [S]^b$, there are infinitely many r which satisfy

$$[D]^{r-1} \not\subset I^*(r, \nu) \quad \text{for} \quad \nu < m.$$

Then there is for $r \geqq 4$ a partition

$$[V]^r = \Sigma'(\nu < m) I(r, \nu)$$

such that, in the notation of section 14,

$$I(r, 1) = K_{01} + P_{01} + \bar{I}_1; \quad \bar{I}(r, \nu) = \bar{I}_\nu \qquad (2 \leqq \nu < m).$$

2. Let $X \in [V]^b$. We want to show that there are infinitely many r such that

$$[X]^r \not\subset I(r, \nu) \qquad \text{for} \quad \nu < m.$$

We may assume that there are a number $r \geqq 4$ and a number $\nu < m$ such that $[X]^r \subset$ $\subset I(r, \nu)$. Then $[X]^r K_{s,1-s} = \varnothing$ for some s, and by 13. 7 there is $X' \in [X]^b$ with $[X']^r \subset K$. Now, $[X']^r P_{t,1-t} = \varnothing$ for some t, and by 13. 11 there is $X'' = \{x_0,, \hat{x}_k\}_< \in$ $\in [X']^b$ with $[X'']^r \subset P_{0,,0}$. Then $k \geqq \omega(b)$ and $x_\lambda x_{\lambda+1} < x_\mu x_{\mu+1}$ for $\lambda < \mu < k \dot{-} 1$. Put $D = \{x_\lambda x_{\lambda+1} : \lambda < \omega(b)\}$. Then $|D| = b$, and hence there is an infinite set $R \subset [4, \omega)$ such that $[D]^{r-1} \not\subset I^*(r, \nu)$ for $r \in R$ and $\nu < m$.

3. Now let $r \in R$ and $\nu < m$. Let us suppose that $[X]^r \subset I(r, \nu)$. Let $L \in [D]^{r-1}$. Then $L = \{x_{\lambda_\varrho} x_{\lambda_\varrho+1} : \varrho < r-1\}$, where $\lambda_0 < < \lambda_{r-2} < \omega(b)$. Put $\lambda_{r-1} = \lambda_{r-2} + 1$. Then, by 13. 14, $x_{\lambda_\varrho} x_{\lambda_\varrho+1} = x_{\lambda_\varrho} x_{\lambda_{\varrho+1}}$ for $\varrho < r-1$ and so, by definition of $I(r, \nu)$,

$$L = \{x_{\lambda_\varrho} x_{\lambda_\varrho+1} : \varrho < r-1\} = \delta'(x_{\lambda_0},, x_{\lambda_{r-1}}) \in I^*(r, \nu);$$

$$[D]^{r-1} \subset I^*(r, \nu)$$

which is a contradiction. This proves that

$$[X]^r \not\subset I(r, \nu) \quad \text{for} \quad r \in R \quad \text{and} \quad \nu < m$$

and so completes the proof of 17. 2.

17. 3. Let $a > a'$; $b \geqq \aleph_0$; $c \geqq 2$. Suppose that $a_0 \nrightarrow (b)^{<\aleph_0}_c$ for every $a_0 < a$. Then $a \nrightarrow (b)^{<\aleph_0}_c$.

PROOF. Put $\omega(a') = k$; $\omega(c) = m$. Let $S = \Sigma'(\varkappa < k) S_\varkappa$ and $|S_\varkappa| < |S| = a$ for $\varkappa < k$. Then there are partitions

$$[S_\varkappa]^r = \Sigma'(\nu < m) I(\varkappa, r, \nu) \quad \text{(partition } \Delta_{\varkappa r}\text{)}$$

for $\varkappa<k$ and $r<\omega$, and partitions

$$[[0, k)]^r = \Sigma'(v<m) I^*(r, v) \quad \text{(partition } \Delta_r^*\text{)}$$

for $r<\omega$ such that the following conditions hold.

(1) If $\varkappa<k$ and $X\in[S_\varkappa]^b$, then there are infinitely many r such that $|\Delta_{\varkappa r}|>1$ in $[X]^r$.

(2) If $M\in[[0, k)]^b$, then there are infinitely many r such that $|\Delta_r^*|>1$ in $[M]^r$.

Let $r\geqq 3$. Then there is a partition

$$[S]^r = \Sigma'(v<m) I(r, v) \quad \text{(partition } \Delta_r\text{)}$$

such that the following rules are satisfied. Let $A=\{x_0,, x_{r-1}\}_<\subset S$; $\varkappa_0\leqq\leqq\varkappa_{r-1}<<k$; $x_\varrho\in S_{\varkappa_\varrho}$ for $\varrho<r$.

If $\varkappa_0=\varkappa_{r-1}$ and $A\in I(\varkappa_0, r, v)$, then $A\in I(r, v)$. If $\varkappa_0<<\varkappa_{r-1}$ and $\{\varkappa_0,, \varkappa_{r-1}\}\in\in I^*(r, v)$, then $A\in I(r, v)$. If $\varkappa_0<\varkappa_1=\varkappa_{r-1}$, then $A\in I(r, 0)$. If $\varkappa_0=\varkappa_{r-2}<\varkappa_{r-1}$, then $A\in I(r, 1)$.

Now let $X\in[S]^b$. We want to find infinitely many r such that

(3) $$[X]^r\not\subset I(r, v) \quad \text{for} \quad v<m.$$

We may assume that $[X]^p\subset I(p, v_0)$ for some $p\in[3, \omega)$ and some $v_0<m$. If there are numbers $\varkappa_0<\varkappa_1<k$ with $|XS_{\varkappa_0}|, |XS_{\varkappa_1}|\geqq p-1$, then we can choose $v_1\in[0, 2)-\{v_0\}$ and obtain $[X]^p I(p, v_1)\neq\varnothing$ which contradicts $[X]^p\subset I(p, v_0)$. Hence there is at most one $\varkappa<k$ with $|XS_\varkappa|\geqq p-1$. Put $M=\{\varkappa: XS_\varkappa\neq\varnothing\}$.

Case 1. $|M|=b$. Then we choose $x_\varkappa\in XS_\varkappa$ for $\varkappa\in M$ and put $X'=\{x_\varkappa: \varkappa\in M\}$. Then by (2) there is an infinite set $R\subset[0, \omega)$ such that, for $r\in R$, $|\Delta_r^*|>1$ in $[M]^r$. Then, for $r\in R$, $|\Delta_r|>1$ in $[X']^r$, and hence also in $[X]^r$. This proves (3).

Case 2. $|M|<b$. Then there is $\varkappa_0<k$ such that $|XS_\varkappa|<p-1$ for $\varkappa\neq\varkappa_0$. Then $b=|X|\leqq|XS_{\varkappa_0}|+(p-2)|M|$; $|XS_{\varkappa_0}|=b$, and we put $X'=XS_{\varkappa_0}$. Then $X'\subset S_{\varkappa_0}$; $|X'|=b$, and by (1) there is an infinite set $R\subset[0, \omega)$ such that, for $r\in R$, $|\Delta_{\varkappa_0 r}|>1$ in $[X']^r$. Then, for $r\in R$, $|\Delta_r|>1$ in $[X']^r$ and hence also in $[X]^r$. This proves 17. 3.

17. 4. If a, b, c are such that $a_0\nrightarrow(b)_c^{<\aleph_0}$ for every $a_0<a$, then

$$a\nrightarrow(b^+)_c^{<\aleph_0}.$$

PROOF. Put $\omega(a)=n$; $\omega(b)=k$; $\omega(c)=m$. If $r<\omega$ and $n_0<n$, then there is a partition

$$[[0, n_0)]^r = \Sigma'(v<m) I(n_0, r, v) \qquad \text{(partition } \Delta_{n_0 r}\text{)}$$

such that whenever $Y\in[[0, n_0)]^b$, then there are infinitely many r such that $|\Delta_{n_0 r}|>1$ in $[Y]^r$. Then for every r there is a partition

$$[[0, n)]^{r+1} = \Sigma'(v<m) I(r, v) \qquad \text{(partition } \Delta_r\text{)}$$

such that

$$I(r, v) = \{\{x_0,, x_r\}_<: \{x_0,, \hat{x}_r\}\in I(x_r, r, v)\} \qquad \text{for } v<m.$$

Now let $X \in [[0, n)]^{b^+}$. Then there is a set $\{x_0, , x_k\}_< \subset X$. Then $Y = \{x_0, , \hat{x}_k\} \in \in [[0, x_k)]^b$, and hence there is an infinite set $R \subset [0, \omega)$ such that $|\Delta_{x_k r}| > 1$ in $[Y]^r$ for every $r \in R$. Then, for $r \in R$, $|\Delta_r| > 1$ in $[Y + \{x_k\}]^{r+1}$ and hence in $[X]^{r+1}$. This proves 17. 4.

We now come to the main result of this section.

THEOREM 15. *Let $\alpha \geqq 0$, and let $\{d_0, , \hat{d}_k\}_<$ be the set of all strongly inaccessible cardinals not exceeding $\aleph_\alpha$. Then $k \geqq 1$, and*

$$\aleph_\alpha \nrightarrow (\aleph_{k-1})_2^{<\aleph_0} \quad \text{if} \quad k < \omega,$$
$$\aleph_\alpha \nrightarrow (\aleph_k)_2^{<\aleph_0} \quad \text{if} \quad k \geqq \omega.$$

PROOF. We use induction over α. If $\alpha = 0$ then $k = 1$, since $\aleph_0$ is strongly inaccessible, and the assertion holds by 17. 1 (c). Let $\beta > 0$, and suppose that the assertion holds for all $\alpha < \beta$. Let $\{d_0, , \hat{d}_l\}_<$ be the set of all strongly inaccessible cardinals not exceeding $\aleph_\beta$. Put $n = l - 1$ if $l < \omega$, and $n = l$ if $l \geqq \omega$. Then, by induction hypothesis, we have for $\alpha < \beta$

$$\aleph_\alpha \nrightarrow (\aleph_n)_2^{<\aleph_0}. \tag{4}$$

Case 1. $\beta > \mathrm{cf}(\beta)$. Then (4) implies, by 17. 3, the desired relation

$$\aleph_\beta \nrightarrow (\aleph_n)_2^{<\aleph_0}. \tag{5}$$

Case 2. $\beta = \mathrm{cf}(\beta)$.

Case 2a. $2^{\aleph_\gamma} \geqq \aleph_\beta$ for some $\gamma < \beta$. Then (4) holds for $\alpha = \gamma$ and hence, by 17. 2,

$$2^{\aleph_\gamma} \nrightarrow (\aleph_n)_2^{<\aleph_0}.$$

This implies (5).

Case 2b. $2^{\aleph_\gamma} < \aleph_\beta$ for every $\gamma < \beta$. Then $\aleph_\beta$ is strongly inaccessible; $l = \lambda + 1$; $d_\lambda = \aleph_\beta$. Then $\aleph_0 < \aleph_\beta = d_\lambda$, and hence $\lambda \geqq 1$.

Case 2b1. $\lambda < \omega$. Then, by induction hypothesis,

$$\aleph_\alpha \nrightarrow (\aleph_{\lambda-1})_2^{<\aleph_0} \quad \text{for } \alpha < \beta$$

and hence, by 17. 4,

$$\aleph_\beta \nrightarrow (\aleph_\lambda)_2^{<\aleph_0}.$$

But $\lambda = l - 1 = n$ so that (5) holds.

Case 2b2. $\lambda \geqq \omega$. Then, similarly,

$$\aleph_\alpha \nrightarrow (\aleph_\lambda)_2^{<\aleph_0} \quad \text{for } \alpha < \beta$$

and hence $\aleph_\beta \nrightarrow (\aleph_{\lambda+1})_2^{<\aleph_0}$, where $\lambda + 1 = l = n$. This proves Theorem 15.

Let $\{d_0, , \hat{d}_n\}_<$ be the set of all strongly inaccessible cardinals below some given cardinal. Then Theorem 15 yields the following results.

COROLLARY 15. (i) $d_\nu \nrightarrow (\aleph_\nu)_2^{<\aleph_0}$ *for* $\nu < \min(n, \omega)$;

(ii) $d_\nu \nrightarrow (\aleph_{\nu+1})_2^{<\aleph_0}$ *for* $\nu < n$;

(iii) $d_\nu \nrightarrow (d_\nu)_2^{<\aleph_0}$ *if* $\nu < n$ *and* $d_\nu > \aleph_\nu$;

(iv) *if all strongly inaccessible cardinals d are less than some fixed cardinal,*

and if $\{d_0,, \hat{d}_m\}_<$ *is the set of all such* d, *then*

$$\aleph_\alpha \nrightarrow (\aleph_m)_2^{<\aleph_0} \quad \textit{for all } \alpha.$$

Let $c \geqq \aleph_0$. Then, by employing at the start of the induction argument the relation 17. 1 (b) instead of 17. 1 (c) we obtain by the same method as was used in the proof of Theorem 15 the following result.

THEOREM 16. *Let* $\aleph_\alpha \geqq c \geqq \aleph_0$. *Denote by* $\{\hat{d}_0(c),, \hat{d}_k(c)\}_<$ *the set of all strongly inaccessible cardinals* d *such that* $c < d \leqq \aleph_\alpha$. *Then* $k \geqq 1$, *and*

$$\aleph_\alpha \nrightarrow (\aleph_{k-1})_c^{<\aleph_0} \quad \textit{if } k < \omega;$$

$$\aleph_\alpha \nrightarrow (\aleph_k)_c^{<\aleph_0} \quad \textit{if } k \geqq \omega.$$

The proof, as well as the analogue to Corollary 15, may be omitted.

18. THE RELATIONS IV, V AND VI. PROBLEMS

In this section we shall deal with some generalizations of the partition relations I and II. Let $a, r, n, b_0,, \hat{b}_n$ be given.

18. 1. DEFINITION. The relation *(partition relation IV)*

$$a \to [b_0,, \hat{b}_n]^r, \tag{1}$$

also written in the form $a \to [b_\nu]^r_{\nu<n}$, denotes the following statement. Whenever $|S| = a$ and $[S]^r = \Sigma'(\nu < n) I_\nu$, then there are a set $X \subset S$ and a number $\nu < n$ such that $|X| = b_\nu$ and $[X]^r I_\nu = \varnothing$.

18. 2. DEFINITION. If $b_0 = = \hat{b}_n = b$ and $|n| = c$, then (1) is also written in the form

$$a \to [b]^r_c. \tag{2}$$

18. 3. The relation *(partition relation V)*

$$a \to [b]^r_{c,d}$$

denotes the following statement. Whenever $|S| = a$ and $[S]^r = \Sigma'(\nu < \omega(c)) I_\nu$, then there are a set $X \subset S$ and a set $D \subset [0, \omega(c))$ such that $|X| = b$; $|D| \leqq d$, and

$$[X]^r \subset \Sigma(\nu \in D) I_\nu.$$

The relation (1) is only of interest if $r \geqq 2$; $a \geqq \aleph_0$; $n \geqq 2$; $r < b_0,, \hat{b}_n \leqq a$. In this section we shall mainly investigate the relations IV and V as well as problems suggested by them.

The following propositions follow immediately from our definitions.

18. 4. The relations $a \to (b_0, b_1)^r$ and $a \to [b_0, b_1]^r$ are equivalent. The relations $a \to (b)^r_c$ and $a \to [b]^r_{c,1}$ are equivalent. If $1 \leqq c < \omega$, then the relations $a \to [b]^r_{c,c-1}$ and $a \to [b]^r_c$ are equivalent.

For $r \geqq 3$ our results concerning the relations IV and V are rather incomplete. The positive relations will be deduced by means of the general methods used in the discussion of I-relations but to obtain our negative relations we shall employ new ideas for the construction of suitable counter examples. Interesting problems of a new type will arise.

Just like the relations I, II and III so the relations IV and V possess obvious monotonicity and other properties whose proof is left to the reader. We mention:

18. 5. Let $m \geqq 2$ and $v_0 < \ldots < \hat{v}_m < n$. Then, for any cardinals $b_0, \ldots, \hat{b}_n$, $a \to (b_{v_0}, \ldots, \hat{b}_{v_m})^r$ implies $a \to [b_0, \ldots, \hat{b}_n]^r$. In particular, if $\mu < \nu < n$ and $a \to (b_\mu, b_\nu)^r$, then $a \to [b_0, \ldots, \hat{b}_n]^r$.

18. 6. Let the cardinals a, b, c, d, e satisfy $c < d \leqq e$. Then $a \to [b]^r_{d,c}$ implies $a \to [b]^r_e$.

18. 7. If $a \geqq \aleph_0$, then $a \to [a]^r_{c,a}$ for all c, r. If $c \leqq d$, then $a \to [b]^r_{c,d}$ for all $b \leqq a$ and all r. If $c > b \geqq \aleph_0$, then $a \to [b]^r_c$ for $a \geqq b$ and all r. If $c \geqq e$, then $a \to [b]^r_{c,d}$ implies $a \to [b]^r_{e,d}$.

Up to 18. 10 we shall mainly be concerned with IV-relations. We shall then consider V-relations and in particular mention some of the unsolved problems. Finally, VI-relations will be briefly considered in 18. 19.

By Theorem I we have the following results:

(i) $\aleph_\alpha \to (\aleph_\beta, \aleph_\gamma)^2$ holds if $\beta, \gamma < \alpha$.

(ii) A necessary condition for $\aleph_\alpha \to (\aleph_\alpha, \aleph_\gamma)^2$ is $\gamma \leqq \mathrm{cr}(\alpha)$.
This condition is at the same time sufficient except possibly when $\gamma = \mathrm{cf}(\alpha)$ and $\aleph'_\alpha$ is inaccessible.

Taking into consideration 18. 4—18. 6 we see that the principal problems about IV-relations for $r = 2$ concern the truth of relations of theform $a \to [b_\nu]^2_{\nu < n}$, where $a = \aleph_\gamma$;

$$\aleph_{\mathrm{cr}(\gamma)} < b_0 \leqq \aleph_\gamma; \quad b_1 = = \hat{b}_n = a; \quad 2 \leqq n \leqq \omega_\gamma.$$

If a' is inaccessible, then there remain unsolved problems (see Problem 1). The complete discussion of the cases when a' is not inaccessible will be given by Theorems 17, 18, 20, 21, 22. For $r \geqq 4$ we have only isolated results.

Consider first the case $a = \aleph_{\alpha+1}$ when $\mathrm{cr}(\alpha+1) = \mathrm{cf}(\alpha)$. Here we have the best possible negative result:

$$\aleph_{\alpha+1} \nrightarrow [b_\nu]^2_{\nu < \omega_{\alpha+1}}$$

if $b_0 \geqq \aleph'^+_\alpha$; $b_1, \ldots, \hat{b}_{\omega_{\alpha+1}} = \aleph_\alpha$. The proof differs slightly according to whether $\alpha = \mathrm{cf}(\alpha)$ or $\alpha > \mathrm{cf}(\alpha)$. We first prove

(*) THEOREM 17. $\aleph_{\alpha+1} \nrightarrow [\aleph_{\alpha+1}]^2_{\aleph_{\alpha+1}}$ *for every* α.

Instead of Theorem 17 we shall prove the more general Theorem 17A which will have an application in the discussion of the polarized relation.

(*) THEOREM 17A. *Let* $|S| = \aleph_{\alpha+1}$. *Then there is a partition*

$$[S]^2 = \Sigma'(\nu < \omega_{\alpha+1}) I_\nu \tag{3}$$

which has the following property. Whenever $A, B \subset S$; $|A| = \aleph_\alpha$; $|B| = \aleph_{\alpha+1}$, *and* $\nu_0 < \omega_{\alpha+1}$, *then there are elements* $x \in A$ *and* $y \in B$ *such that* $\{x, y\} \in I_{\nu_0}$.

A suggestive notation for the assertion of this theorem would be

$$\aleph_{\alpha+1} \nrightarrow \begin{bmatrix} \aleph_\alpha \\ \aleph_{\alpha+1} \end{bmatrix}^{1,1}_{\aleph_{\alpha+1}}.$$

PROOF. Put $a=\aleph_\alpha$; $m=\omega_\alpha$; $n=\omega_{\alpha+1}$. Let $S=\{y_0,, \hat{y}_n\}_{\neq}$. Then we can write $[S]^a=\{X_0,, \hat{X}_n\}_{\neq}$.

1. Let $\varrho<n$. Put $S_\varrho=\{y_0,, \hat{y}_\varrho\}$ and $Z_\varrho=\{X_\pi: \pi<\varrho \wedge X_\pi \subset S_\varrho\}$. We can write

$$S_\varrho = \{x(\varrho, \mu): \mu<m_\varrho\}_{\neq}$$

and

$$Z_\varrho \times [0, \varrho) = \{(X(\varrho, \mu), \nu(\varrho, \mu)): \mu<n_\varrho\},$$

where m_ϱ and n_ϱ are initial ordinals not exceeding m. We can find inductively numbers $\sigma(\varrho, \lambda)<m_\varrho$, for $\lambda<n_\varrho$, such that $x(\varrho, \sigma(\varrho, \mu)) \in X(\varrho, \mu) - \{x(\varrho, \sigma(\varrho, \lambda)): \lambda<\mu\}$ for $\mu<n_\varrho$. Then $x(\varrho, \sigma(\varrho, \mu)) \in X(\varrho, \mu)$ for $\mu<n_\varrho$; $\sigma(\varrho, \mu) \neq \sigma(\varrho, \lambda)$ for $\lambda<\mu<n_\varrho$.

2. Let $\pi<\varrho<n$. Then there is exactly one $\tau(\varrho, \pi)<m_\varrho$ with $x(\varrho, \tau(\varrho, \pi))=y_\pi$. There is a partition (3) such that

$$\{y_\pi, y_\varrho\} \in I_{\nu(\varrho,\mu)}, \text{ if } \mu<n_\varrho \text{ and } \tau(\varrho, \pi)=\sigma(\varrho, \mu).$$

This condition does not define the partition since the $\{y_\pi, y_\varrho\}$ with $\tau(\varrho, \pi) \notin \{\sigma(\varrho, \mu): \mu<n_\varrho\}$ may be placed into any arbitrary class I_ν.

Now let $A, B \subset S$; $|A|=a$; $|B|=a^+$; $\nu_0<n$. Then there is $\varrho_0<n$ with $A \in Z_{\varrho_0}$. Next, we can find $y_\varrho \in B$ with $\nu_0, \varrho_0<\varrho<n$. Then $(A, \nu_0) \in Z_\varrho \times [0, \varrho)$, and hence there is $\mu<n_\varrho$ with $(A, \nu_0)=(X(\varrho, \mu), \nu(\varrho, \mu))$. Then $x(\varrho, \sigma(\varrho, \mu))=y_\pi$ for some $\pi<\varrho$, and we have

$$x(\varrho, \sigma(\varrho, \mu))=y_\pi=x(\varrho, \tau(\varrho, \pi)); \quad \tau(\varrho, \pi)=\sigma(\varrho, \mu);$$

$$\{y_\pi, y_\varrho\} \in I_{\nu(\varrho,\mu)}=I_{\nu_0}; \quad y_\pi=x(\varrho, \sigma(\varrho, \mu)) \in X(\varrho, \mu)=A; \quad y_\varrho \in B.$$

This proves that the partition (3) has the required property, and Theorem 17A follows.

We are now going to sharpen Theorem 17.

(*) THEOREM 18.

$$\aleph_{\alpha+1} \nrightarrow [\aleph_\alpha'^+, (\aleph_{\alpha+1})_{\aleph_{\alpha+1}}]^2 \quad \textit{for all } \alpha.$$

PROOF. If $\alpha=\mathrm{cf}(\alpha)$, then the assertion follows from Theorem 17. Now let $\alpha>\mathrm{cf}(\alpha)$. We consider the set $V'(\alpha)$ introduced in 11. 3, together with its two orders $x<y$ and $x \prec y$. Put $a=\aleph_\alpha$; $m=\omega_\alpha$; $n=\omega_{\alpha+1}$; $S=V'(\alpha)$. Then we can write $S=\{y_0,, \hat{y}_n\}_{\neq}$. For $P, Q \subset S$ the relation $P<Q$ means that whenever $x \in P$ and $y \in Q$ then $x<y$. If $P=\{x\}$ then we write $x<Q$ instead of $\{x\}<Q$. Similarly we use $P \prec Q$. We write $[S]^a=\{X_0,, \hat{X}_n\}_{\neq}$.

1. Let $\varrho<n$; $S_\varrho=\{y_0,, \hat{y}_\varrho\}$; $Z_\varrho=\{X_\pi: \pi<\varrho \wedge X_\pi \prec y_\varrho \prec X_\pi\}$. We can write

$$S_\varrho = \{x(\varrho, \mu): \mu<m_\varrho\}_{\neq};$$

$$Z_\varrho \times [0, \varrho) = \{(X(\varrho, \mu), \nu(\varrho, \mu)): \mu<n_\varrho\},$$

where m_ϱ and n_ϱ are initial ordinals not exceeding m. We can find inductively numbers

$\sigma(\varrho, \lambda) < m_\varrho$ for $\lambda < n_\varrho$ such that

$$x(\varrho, \sigma(\varrho, \mu)) \in X(\varrho, \mu) - \{x(\varrho, \sigma(\varrho, \lambda)) : \lambda < \mu\} \quad \text{for } \mu < n_\varrho.$$

Then

$$x(\varrho, \sigma(\varrho, \mu)) \in X(\varrho, \mu) \quad \text{for} \quad \mu < n_\varrho;$$

$$\sigma(\varrho, \mu) \neq \sigma(\varrho, \lambda) \quad \text{for} \quad \lambda < \mu < n_\varrho.$$

2. Let $\pi < \varrho < n$. Then there is exactly one $\tau(\varrho, \pi) < m_\varrho$ with $x(\varrho, \tau(\varrho, \pi)) = y_\pi$. There is a partition

$$[S]^2 = I + '\Sigma'(\nu < n) I_\nu$$

defined by the rules:

$$\{y_\pi, y_\varrho\} \in I_{\nu(\varrho,\mu)} \quad \text{if} \quad \tau(\varrho, \pi) = \sigma(\varrho, \mu);$$

$$\{y_\pi, y_\varrho\} \in I \quad \text{if} \quad \tau(\varrho, \pi) \notin \{\sigma(\varrho, \mu) : \mu < n_\varrho\}.$$

It now suffices to prove that this partition has the following properties:

(i) If $X \subset S$ and $[X]^2 I = \emptyset$, then $|X| \leqq a'$.

(ii) If $X \subset S$; $\nu_0 < n$; $[X]^2 I_{\nu_0} = \emptyset$, then $|X| \leqq a$.

3. Proof of (i). Let $X \subset S$ and $[X]^2 I = \emptyset$. Then we can write

$$X = \{y_{\varrho_0}, \hat{y}_{\varrho_k}\}_<.$$

Let $\{\pi, \varrho\}_< \subset \{\varrho_\varkappa : \varkappa < k\}$. Then there is $\mu < n_\varrho$ such that $\{y_\pi, y_\varrho\} \in I_{\nu(\varrho,\mu)}$; $\tau(\varrho, \pi) = \sigma(\varrho, \mu)$;

$$y_\pi = x(\varrho, \tau(\varrho, \pi)) = x(\varrho, \sigma(\varrho, \mu)) \in X_{\varrho\mu} \in Z_\varrho.$$

By definition of Z_ϱ we have $X_{\varrho\mu} \prec y_\varrho < X_{\varrho\mu}$; $y_\pi \prec y_\varrho < y_\pi$. Hence tp $(X, <) = k^*$, and by 11. 5 (ii), $|X| = |k| \leqq a'$. This proves (i).

4. Proof of (ii). Let $X \subset S$; $\nu_0 < n$; $|X| = a^+$. We want to find $x, y \in X$ with $\{x, y\} \in I_{\nu_0}$. It is well known that there are sets $A, B \in [X]^{a^+}$ with $A < B$. This follows for instance from 11. 5 (ii) and [1], p. 446, Lemma 1. There is $\varrho_0 < n$ with $X_{\varrho_0} \subset B$. There is $\lambda < n$ with $[0, \varrho_0) + \Sigma(y_\pi \in X_{\varrho_0})[0, \pi) = [0, \lambda)$. There is $y_\varrho \in A$ with $\lambda, \nu_0 < \varrho < n$. Then $(X_{\varrho_0}, \nu_0) \in Z_\varrho \times [0, \varrho)$, and hence there is $\mu < n_\varrho$ with $(X_{\varrho_0}, \nu_0) = (X(\varrho, \mu), \nu(\varrho, \mu))$. There is $\pi < \varrho$ with $x(\varrho, \sigma(\varrho, \mu)) = y_\pi = x(\varrho, \tau(\varrho, \pi))$. Then $\tau(\varrho, \pi) = \sigma(\varrho, \mu)$; $\{y_\pi, y_\varrho\} \in I_{\nu(\varrho,\mu)} = I_{\nu_0}$;

$$y_\pi = x(\varrho, \sigma(\varrho, \mu)) \in X(\varrho, \mu) = X_{\varrho_0} \subset B \subset X; \quad y_\varrho \in A \subset X.$$

This proves (ii) and completes the proof of Theorem 18.

Let us now consider the case $r \geqq 3$. By Theorem 11 we have $(*)$ $\aleph_{\alpha+1} \nrightarrow \nrightarrow [\aleph_{\alpha+1}, r+1]^r$. The following theorem gives a best possible generalization of this result.

$(*)$ Theorem 19. *For $r \geqq 3$ and every α,*

$$\aleph_{\alpha+1} \nrightarrow [r+1, (\aleph_{\alpha+1})_{\aleph_{\alpha+1}}]^r.$$

This theorem will follow as immediate corollary of Theorem 28 which will be proved in 19. 2. It is clear that Theorem 19 does not settle the problem of deciding whether

for any given cardinals $b_0,, \hat{b}_n < \aleph_{\alpha+1}$ we have $\aleph_{\alpha+1} \to [b_0,, \hat{b}_n]^r$. We shall consider such problems later, in 18. 9.

Let us now turn to relations of the form $\aleph_\alpha \to [b_0,, \hat{b}_n]^r$ when $\alpha > \mathrm{cf}(\alpha)$. Here our results are almost complete for every $r \geqq 2$. Unsolved problems remain only when $\aleph'_\alpha$ is inaccessible and greater than $\aleph_0$.

Consider first the case when $\alpha > \mathrm{cf}(\alpha) = \beta + 1$ so that $\mathrm{cr}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.

Case 1. $r = 2$. We have to discuss the relation $\aleph_\alpha \to [b, (\aleph_\alpha)_c]^2$ when $\aleph'_\beta < b \leqq \aleph_\alpha$ and $2 \leqq c \leqq \aleph_\alpha$.

Case 2. $r \geqq 3$. Then we have $\aleph_\alpha \to (b_0, b_1)^r$ for every $b_0, b_1 < \aleph_\alpha$. For there is $\beta_0 < \alpha$ with $b_0, b_1 < \aleph_{\beta_0}$, and then, by Theorem I,

$$\aleph_\alpha > \aleph_{\beta_0 + (r-2)} \to (b_0, b_1)^r.$$

Also, by Theorem 12, $\aleph_\alpha \not\to (\aleph_\alpha, r+1)^r$. Thus there only remains to discuss the relation $\aleph_\alpha \to [b, (\aleph_\alpha)_c]^r$ when $r < b \leqq \aleph_\alpha$ and $2 \leqq c \leqq \aleph_\alpha$. The following best possible theorem settles all these questions for $c > \aleph'_\alpha$ when $\aleph_\alpha$ is singular.

(*) THEOREM 20. *If* $r \geqq 2$; $\alpha > \mathrm{cf}(\alpha)$; $c > \aleph'_\alpha$, *then*

$$\aleph_\alpha \to [\aleph_\alpha]^r_c.$$

Instead of Theorem 20 we shall prove the following stronger theorem involving a V-relation.

(*) THEOEREM 20A. *If* $r \geqq 2$ *and* $\aleph'_\alpha < c < \aleph_\alpha$, *then*

$$\aleph_\alpha \to [\aleph_\alpha]^r_{c, \aleph'_\alpha}.$$

It is clear from 18. 6 that Theorem 20A implies Theorem 20.

PROOF. Let $|S| = \aleph_\alpha$; $[S]^r = \Sigma'(\nu < \omega(c)) I_\nu$ (partition Δ). Then, by Lemma 3, there is a set $T = \Sigma'(\mu < m) S_\mu \subset S$ such that $m = \omega_{\mathrm{cf}(\alpha)}$; $|T| = \aleph_\alpha$, and Δ is canonical in $(S_0,, \hat{S}_m)$. Let $r_0 + + \hat{r}_m = r$. Then there is $f(r_0,, \hat{r}_m) < \omega(c)$ such that whenever $X \subset T$ and $|XS_\mu| = r_\mu$ for $\mu < m$, then $X \in I_{f(r_0,, \hat{r}_m)}$. Hence

$$[T]^r \subset \Sigma(r_0 + + \hat{r}_m = r) I_{f(r_0,, \hat{r}_m)},$$

and the assertion follows from

$$|\{(r_0,, \hat{r}_m) : r_0 + + \hat{r}_m = r\}| \leqq |m|^r = \aleph'_\alpha.$$

The following best possible theorem settles the case when $c \leqq \aleph'_\alpha$ and $\alpha > \mathrm{cf}(\alpha) = \beta + 1$.

(*) THEOREM 21. *Let* $\alpha > \mathrm{cf}(\alpha) = \beta + 1$ *and* $c \leqq \aleph_{\beta+1}$. *Then*

(i) $\aleph_\alpha \not\to [\aleph'^+_\beta, (\aleph_\alpha)_c]^2$;

(ii) $\aleph_\alpha \not\to [r+1, (\aleph_\alpha)_c]^r$ *for* $r \geqq 3$.

PROOF. We may assume $c = \aleph_{\beta+1}$. Let $\omega_{\beta+1} = n$; $S = \Sigma'(\nu < n) S_\nu$; $|S_\nu| < |S| = \aleph_\alpha$ for $\nu < n$.

PROOF OF (i). By Theorem 18, there is a partition

$$[[0, n)]^2 = \Sigma'(\nu < n) I_\nu$$

which brings into evidence the relation

$$\aleph_{\beta+1} \nrightarrow [\aleph'^{+}_{\beta}, (\aleph_{\beta+1})_{\aleph_{\beta+1}}]^2.$$

This means that if $D, E \subset [0, n)$ then $[D]^2 I^*_0 = \varnothing$ implies $|D| \leqq \aleph'_\beta$, and, for $1 \leqq v < n$, $[E]^2 I^*_v = \varnothing$ implies $|E| \leqq \aleph_\beta$. Then

$$[S]^2 = \Sigma'(v<n) I_v,$$

where

$$I_v = \Sigma(\{\lambda, \mu\} \in I^*_v)[S_\lambda, S_\mu]^{1,1} \qquad \text{for } 1 \leqq v < n.$$

Put $D(X) = \{v : XS_v \neq \varnothing\}$ for $X \subset S$. Then, if $X \subset S$ and $[X]^2 I_0 = \varnothing$, we have $[D(X)]^2 I^*_0 = \varnothing$ and hence $|X| = |D(X)| \leqq \aleph'_\beta$. If $Y \subset S$; $1 \leqq v < n$; $[Y]^2 I_v = \varnothing$; $|Y| = \aleph_\alpha$, then $|D(Y)| = \aleph_{\beta+1}$; $[D(Y)]^2 I^*_v = \varnothing$ which is a contradiction. This proves (i).

PROOF OF (ii). Let $r \geqq 3$. Then, by Theorem 19, there is a partition

$$[[0, n)]^r = \Sigma'(v<n) I^{*\,\}}_v$$

which brings into evidence the relation

$$\aleph_{\beta+1} \nrightarrow [\gamma+1, (\aleph_{\beta+1})_{\aleph_{\beta+1}}]^r.$$

Then

$$[S]^r = \Sigma'(v<n) I_v,$$

where

$$I_v = \Sigma(\{v_0,, v_{r-1}\} \in I^*_v)[S_{v_0},, S_{v_{r-1}}]^{1,,1} \quad \text{for} \quad 1 \leqq v < n.$$

Then exactly as in the proof of (i), we obtain the desired properties of this last partition, and Theorem 21 follows.

The relation of Theorem 20 is valid for every singular $\aleph_\alpha$, and Theorem 21 shows that this relation is best possible provided that $\aleph'_\alpha$ is not inaccessible. If, on the other hand, $\aleph'_\alpha$ is inaccessible then we have the following result which is in some ways stronger.

(∗) THEOREM 22. *Let* $r \geqq 2$ *and* $\alpha > \mathrm{cf}(\alpha)$. *Then*

(i) $\quad \aleph_\alpha \nrightarrow [\aleph_\alpha]^r_{2^{r-1}}$.

If, in addition, either $\mathrm{cf}(\alpha) = 0$, *or* $\mathrm{cf}(\alpha) > 0$ *and* $\aleph'_\alpha$ *is measurable,* then*

(ii) $\quad \aleph_\alpha \to [\aleph_\alpha]^r_c$ *for* $c > 2^{r-1}$;

(iii) $\quad \aleph_\alpha \to [\aleph_\alpha]^r_{c, 2^{r-1}}$ *for* $c < \aleph_\alpha$.

PROOF OF (i). Let $n = \omega_{\mathrm{cf}(\alpha)}$; $S = \Sigma'(v<n) S_v$; $|S_v| < |S| = \aleph_\alpha$ for $v < n$. Then there is a partition

$$[S]^r = \Sigma'(p \leqq r \wedge r_0,, r_{p-1} \geqq 1 \wedge r_0 + + r_{p-1} = r) I(r_0,, r_{p-1}),$$

where $I(r_0,, r_{p-1})$ is the set of all $A \in [S]^r$ such that, for some $v_0 < < v_{p-1} < n$, we have $|AS_{v_\lambda}| = r_\lambda$ for $\lambda < p$. It follows that if $X \in [S]^{\aleph_\alpha}$ then $|XS_v| \geqq r$ for at least r values of v. But then $[X]^r I(r_0,, r_{p-1}) \neq \varnothing$ for every choice of $(r_0,, r_{p-1})$, and since there are exactly 2^{r-1} such systems the assertion follows.

* i. e., does not possess property P_3 of [24]. See 8. 2.

PROOF OF (iii). Let $|S| = \aleph_\alpha$; $n = \omega_{\mathrm{cf}(\alpha)}$;

$$[S]^r = \Sigma'(\mu < \omega(c)) I_\mu \qquad \text{(partition } \Delta\text{)}.$$

Then, by Lemma 3B, there is a set $T = \Sigma'(\nu < n) S_\nu \subset S$ such that Δ is super-canonical in $(S_0, , \hat{S}_n)$, and $|S_\nu| < |T| = \aleph_\alpha$ for $\nu < n$. Put $D = \{\mu : [T]^r I_\mu \neq \varnothing\}$. Then, by definition of super-canonicity, $|D| \leqq 2^{r-1}$, and the assertion follows.

PROOF OF (ii). This relation follows from (iii) by 18. 6. This proves Theorem 22.

REMARK. In some sense (iii) is best possible. For we have

(iv) $$\aleph_\alpha \nrightarrow [\aleph_\alpha]^r_{\aleph'_\alpha, d} \quad \text{if} \quad d < \aleph'_\alpha < \aleph_\alpha \quad \text{and} \quad r \geqq 2.$$

To prove this, let n, S, S_ν be as in the proof of (i). Put $D(X) = \{\nu : XS_\nu \neq \varnothing\}$ for $X \subset S$. Then

$$[S]^r = \Sigma'(E \in [[0, n)]^{\leqq r}) I(E) \quad \text{(partition } \Delta\text{)},$$

where

$$I(E) = [S]^r \{X : D(X) = E\}.$$

We have $|\Delta| \leqq \aleph'_\alpha$. Now let $X \subset S$ and $|X| = \aleph_\alpha$. Then $|D(X)| = \aleph'_\alpha$ and hence

$$|\{E : [X]^r I(E) \neq \varnothing\}| = \aleph'_\alpha$$

which proves (iv), in fact by means of the same partition for all d.

Up to this point the following problem remains open. Let $\alpha > \mathrm{cf}(\alpha)$ and let $\aleph'_\alpha$ be inaccessible. Is then

$$\aleph_\alpha \rightarrow [b, (\aleph_\alpha)_{c-1}]^r$$

true for $3 \leqq r < b < \aleph_\alpha$; $2 \leqq c \leqq 2^{r-1}$? We shall show that this problem can be reduced to a finite combinatorial problem provided either $\aleph'_\alpha = \aleph_0$ or $\aleph'_\alpha$ is measurable.

18. 8. DEFINITION. For $r \geqq 1$ and every m denote by F_{rm} the set of all functions f which are defined on the set V_r of all systems $(r_0, , r_{p-1})$ with $r_0, , r_{p-1} \geqq 1$ and $r_0 + + r_{p-1} = r$, and whose values lie in $[0, m)$. We have $|V_r| = 2^{r-1}$.

($*$) THEOREM 23. *Let $r \geqq 1$. Suppose that $a > a' = \aleph_0$ or, more generally, $a > a'$ and $a' \rightarrow (a', a')^2$. Let $b_0, , \hat{b}_m \leqq a$. Then the relation*

(4) $$a \rightarrow [b_0, , \hat{b}_m]^r$$

holds if and only if the following finite combinatorial condition is satisfied: Either (a) $m > 2^{r-1}$ *or* (b) $m \leqq 2^{r-1}$ *and, given any function $f \in F_{rm}$, there always exists a number $\nu = \nu(f) < m$ such that at least one of the following four conditions* (i) – (iv) *holds:*

(i) $b_\nu \leqq (r-1)^2$; $b_\nu = c_0 + + \hat{c}_k$ *for some k and some $c_0, , \hat{c}_k \geqq 1$ such that whenever $\varkappa_0 < < \hat{\varkappa}_p < k$, and $r_\pi \leqq c_{\varkappa_\pi}$ for $\pi < p$ and $(r_0, , \hat{r}_p) \in V_r$, then $f(r_0, , \hat{r}_p) \neq \nu$.*

(ii) $(r-1)^2 < b_\nu \leqq a'$; $f(1, , 1) \neq \nu$.

(iii) $(r-1)^2 < b_\nu < a$; $f(r) \neq \nu$.

(iv) $b_\nu = a$; $f(r_0, , \hat{r}_p) \neq \nu$ *for all* $(r_0, , \hat{r}_p) \in V_r$.

REMARKS. 1. The theorem implies that if $m \leqq 2^{r-1}$ and $a > a'$; $b_0, , \hat{b}_m \leqq a$; $a' \to (a', a')^r$, then (4) is equivalent to the relation

$$a \to [b_{\lambda_0}, , \hat{b}_{\lambda_{m_0}}, (a')_{m_1}, (a'^{+})_{m_2}, (a)_{m_3}]^r, \tag{5}$$

where

$$\{\lambda_0, , \hat{\lambda}_{m_0}\}_< = \{\nu : b_\nu \leqq (r-1)^2\}; \quad m_1 = |\{\nu : (r-1)^2 < b_\nu \leqq a'\}|;$$

$$m_2 = |\{\nu : a' < b_\nu < a\}|; \quad m_3 = |\{\nu : b_\nu = a\}|.$$

Also, if (5) holds for one such a it holds for all such a.

2. The theorem implies that (4) holds whenever $a > a'$; $a' \to (a', a')^r$; $b_0, , \hat{b}_m < a$, and $(r-1)^2 < b_\nu < a$ for at least two values of $\nu < m$. For in this case either (a) or (b) (iii) holds.

3. The hypothesis $a' \to (a', a')^r$ is only required for showing that (b) implies (4).

PROOF. Put $l = \omega(a')$. I. Suppose that (4) holds for some $r, a, m, b_0, , \hat{b}_m$ such that $a > a'$ and $r \geqq 1$. Let $m \leqq 2^{r-1}$, and $S = \Sigma'(\lambda < l) S_\lambda$, where $|S_\lambda| < |S| = a$ for $\lambda < l$. Let $f \in F_{rm}$. Then a partition

$$[S]^r = \Sigma'(\nu < m) I(\nu)$$

is defined by the following rule. If $A \in [S]^r$; $\lambda_0 < < \hat{\lambda}_p < l$; $|A S_{\lambda_\pi}| = r_\pi$ for $\pi < p$; $(r_0, , \hat{r}_p) \in V_r$, then $A \in I(f(r_0, , \hat{r}_p))$. By (4) there are $\nu < m$ and $X \in [S]^{b_\nu}$ such that $[X]^r I(\nu) = \varnothing$. Then there are numbers $\mu_0 < < \hat{\mu}_k < l$ such that $X \subset \Sigma(\varkappa < k) S_{\mu_\varkappa}$ and $|X S_{\mu_\varkappa}| = c_\varkappa \geqq 1$ for $\varkappa < k$. Then $c_0 + + \hat{c}_k = b_\nu$. Let $\varkappa_0 < < \hat{\varkappa}_p < k$; $r_\pi \leqq c_{\varkappa_\pi}$ for $\pi < p$, and $(r_0, , \hat{r}_p) \in V_r$. Then there is $A \in [X]^r$ such that $|A S_{\mu_{\varkappa_\pi}}| = r_\pi$ for $\pi < p$. Then $A \in I(f(r_0, , \hat{r}_p))$. On the other hand, $A \in [X]^r$ and hence $A \notin I(\nu)$. Therefore $f(r_0, , \hat{r}_p) \neq \nu$.

Case 1. $b_\nu \leqq (r-1)^2$. Then (i) holds.

Case 2. $(r-1)^2 < b_\nu \leqq a'$.

Case 2a. $c_\varkappa \geqq r$ for some $\varkappa < k$. Then we may take above $p = 1$ and $r_0 = r$, and (iii) follows.

Case 2b. $c_\varkappa < r$ for all $\varkappa < k$. Then $k \geqq r$, and we may take $p = r$ and $r_0 = = \hat{r}_p = 1$. Then (ii) holds.

Case 3. $a' < b_\nu < a$. Then $c_\varkappa \geqq r$ for some $\varkappa < k$, and as in case 2a we deduce that (iii) holds.

Case 4. $b_\nu = a$. Then $c_\varkappa \geqq r$ for at least r values of $\varkappa$, and (iv) holds since in this case any system $(r_0, , \hat{r}_p) \in V_r$ may be taken.

II. Let either (a) or (b) hold. Put $n = \min(m, 2^{r-1}+1)$. Let $|S| = a$; $[S]^r = \Sigma'(\mu < m) I(\mu)$. Then $[S]^r = \Sigma'(\nu < n) I'(\nu)$ (partition Δ), where

$$I'(\nu) = I(\nu) \qquad \text{for } 1 \leqq \nu < n.$$

Then, by Lemma 3B, there is a set $T = \Sigma'(\lambda < l) S_\lambda \subset S$ such that Δ is super-canonical in $(S_0, , \hat{S}_l)$; $|S_\lambda| = a_\lambda < a = |T|$ for $\lambda < l$, and $r \leqq a_0 < < \hat{a}_l$. This means that there is a function $f \in F_{rn}$ such that $A \in I'(f(r_0, , \hat{r}_p))$ whenever $A \in [T]^r$; $|A S_{\lambda_\pi}| = r_\pi$ for $\pi < p$; $\lambda_0 < < \hat{\lambda}_p < l$; $(r_0, , \hat{r}_p) \in V_r$.

Case 1. (a) holds. Then $n > 2^{r-1}$, and there is $v < n$ such that $f(r_0,, \hat{r}_p) \neq v$ for all $(r_0,, \hat{r}_p) \in V_r$. Then

$$[T]^r I(v) \subset [T]^r I'(v) = \varnothing; \quad |T| = a \geqq b_v,$$

so that the requirement for (4) is satisfied.

Case 2. (b) holds. Then $n = m$, and $I'(v) = I(v)$ for $v < m$. There is $l_0 < l$ such that for every $v < m$ we have either $b_v = a$ or $b_v \leqq a_{l_0}$. If (i) holds then we can choose $X_\varkappa \in [S_{l_0+\varkappa}]^{c_\varkappa}$ for $\varkappa < k$. Put $X = \Sigma(\varkappa < k) X_\varkappa$. Then $|X| = b_v$ and $[X]^r I(v) = \varnothing$ as required by (4). If (ii) holds then we choose $x_\lambda \in S_\lambda$ for $\lambda < l$ and put $X = \{x_0,, \hat{x}_l\}$. Then $|X| = a' \geqq b_v$; $[X]^r I(v) = \varnothing$. If (iii) holds then $|S_{l_0}| \geqq b_v$ and $[S_{l_0}]^r I(v) = \varnothing$. If (iv) holds then $|T| = a = b_v$ and $[T]^r I(v) = \varnothing$. This proves Theorem 23.

18. 9. Let $r \geqq 3$; $1 \leqq c < 2^{r-1}$. By Theorem 23 there is a least finite number $b = f^*(r, c)$ such that whenever $a > a' = \aleph_0$, then $a \nrightarrow [b, (a)_c]^r$. The choice of a is irrelevant. The value of $f^*(r, c)$ can be found by solving a finite combinatorial problem which we are unable to do. We have only very incomplete results which we do not propose to discuss in this paper.

18. 10. Let us now return to partition relations whose left hand side is a cardinal of the first kind. As has already been pointed out our results here are rather incomplete. First a "stepping up" proposition.

(∗) THEOREM 24. *Let*

$$r \geqq 1; \quad a \geqq \aleph_0; \quad r < b_0,, \hat{b}_m \leqq a. \tag{6}$$

Then $a \rightarrow [b_v]^r_{v<m}$ *implies* $a^+ \rightarrow [b_v + 1]^{r+1}_{v<m}$.

The proof is parallel to that of Lemma 2 and is omitted. One might conjecture that, in analogy to Lemma 5, under the hypothesis (6) and some other fairly wide assumptions

$$a \nrightarrow [b_v]^r_{v<m} \quad \text{implies} \quad a^+ \nrightarrow [b_v + 1]^{r+1}_{v<m} \tag{7}$$

but we have only been able to prove this in very special cases.

A best possible result is given by the following theorem.

(∗) THEOREM 25.

$$\aleph_2 \rightarrow [\aleph_0, \aleph_1, \aleph_1]^3, \tag{8}$$

$$\aleph_2 \nrightarrow [\aleph_1, \aleph_1, \aleph_1]^3. \tag{9}$$

PROOF OF (8). We have $\aleph_1 \rightarrow (\aleph_0, \aleph_1)^2$ and hence $\aleph_1 \rightarrow [\aleph_0, \aleph_1]^2$, $\aleph_1 \rightarrow \rightarrow [\aleph_0, \aleph_1, \aleph_1]^2$, and (8) follows from Theorem 24. We omit the proof of (9) since it employs a rather special method.

By Theorem 17 we have $\aleph_1 \nrightarrow [\aleph_1]^2_c$ for $2 \leqq c \leqq \aleph_1$. Hence the conjecture (7) would imply that

$$\aleph_2 \nrightarrow [\aleph_1]^3_c \qquad \text{for } 2 \leqq c \leqq \aleph_1,$$

but we are unable to prove this relation. Thus the simplest unsolved problem here is

(∗) PROBLEM 3.

$$? \; \aleph_2 \nrightarrow [\aleph_1]^3_4.$$

We cannot even prove the weaker relation

$$\aleph_2 \nrightarrow [\aleph_2, \aleph_1, \aleph_1, \aleph_1]^3.$$

We mention that the proof of the conjecture (7) would not settle all the problems arising in the present context. Thus we have, by Theorem 22, $\aleph_\omega \rightarrow [\aleph_\omega]^2_3$. Hence, by Theorem 24, $\aleph_{\omega+1} \rightarrow [\aleph_\omega]^3_3$. Also, by Theorem I, $\aleph_{\omega+1} \rightarrow (\aleph_0, \aleph_\omega)^3$ i. e. $\aleph_{\omega+1} \rightarrow$ $\rightarrow [\aleph_0, \aleph_\omega]^3$. Therefore, trivially, $\aleph_{\omega+1} \rightarrow [\aleph_0, \aleph_\omega, b]^3$ for any b. Hence one might conjecture that a best possible negative result is

$$\aleph_{\omega+1} \nrightarrow [\aleph_1, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}]^3. \tag{10}$$

This problem remains unsolved, and it can certainly not be settled by means of the conjecture (7). Instead of (10) we can only prove the weaker relation

$$\aleph_{\omega+1} \nrightarrow [\aleph_2, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}]^3$$

which, in fact, follows from our next theorem.

(∗) THEOREM 26. (i) *Let* $a > a' = \aleph_0$. *Then*

$$a^+ \nrightarrow [\aleph_2, a, a^+]^3.$$

(ii) *Let* $a > a' > \aleph_0$ *and suppose that* $a' \rightarrow (a', a')^3$. *Then*

$$a^+ \nrightarrow [a'^{++}, a, a^+]^3.$$

We shall prove Theorem 26 in section 19. Many further problems could be stated here but we are not even able to give a complete discussion of the unsolved problems. Now we turn to the relation V.

18. 11. Let $|S| = a \geqq \aleph_0$ and $r \geqq 1$. Then there is a partition

$$[S]^r = \Sigma'(v < \omega(a)) I_v$$

such that $|I_v| = 1$ for $v < \omega(a)$. Hence we have: If $a \geqq \aleph_0$ and $r \geqq 1$, then the relation

$$a \rightarrow [b]^r_{a,d}$$

holds if and only if, either (i) $b < \aleph_0$ and $d \geqq \binom{b}{r}$, or (ii) $b \geqq \aleph_0$ and $d \geqq b$. Therefore in studying relations $a \rightarrow [b]^r_{c,d}$ it suffices to consider the case $c < a$.

(∗) **18. 12.** Consider first the case $a > a'$. Then, by Theorem I, $a \rightarrow (b)^r_c$ holds for b, $c < a$, and therefore $a \rightarrow [b]^r_{c,1}$. Hence we need only consider relations of the form

$$a \rightarrow [a]^r_{c,d} \tag{11}$$

where $r \geqq 1$ and $d < c < a$. Theorems 20A, 21 and 22 give an almost complete discussion of the relation (11). We have, assuming (∗): $a \rightarrow [a]^r_{c,d}$ if either (i) $a' \leqq d \leqq c < a$ or (ii) $a' = \aleph_0$ and $2^{r-1} \leqq d \leqq c < \aleph_0$. $a \nrightarrow [a]^r_{c,d}$ if either (iii) $d < a' \leqq c$ or (iv) $d < a' = e^+$ and $d < c$, for some e, or (v) $d < c$, 2^{r-1}.

These statements follow immediately from the theorems quoted, except that relating to (iii). Let us, therefore, assume that $d < a' = c < a$. Let $n = \omega(a')$; $S =$

$= \Sigma'(v<n) S_v$; $|S_v| < a = |S|$ for $v<n$. Then there is a partition $[S]^r = \Sigma'(v<n) I_v$ where, for $A \in [S]^r$, we have $A \in I_{v_0}$ whenever $v_0 = \min (AS_v \neq \emptyset) v$. Now let $X \in [S]_a$. Then $|\{v: XS_v \neq \emptyset\}| = a'$ and hence $|\{v: [X]^r I_v \neq \emptyset\}| = a' > d$. This proves $a \nrightarrow [a]^r_{c,d}$.

If the truth of the relation $a \rightarrow [a]^r_{c,d}$, where $a > a'$, is not decided by any of the results relating to (i)—(v) above, then we have

$$2^{r-1} \leqq d < c < a' = a'^{-} > \aleph_0$$

so that a' is inaccessible and greater than $\aleph_0$. Thus we do not know whether for such an a the relation $a \rightarrow [a]^2_{3,2}$ is true or false.

18. 13. We now consider the case when $a = a'$ and $r = 2$. If a is inaccessible then, of course, every problem remains open. Suppose now that $a = e^+$. By 18. 11 we need only discuss the relation $e^+ \rightarrow [b]^2_{c,d}$ where $b \leqq e^+$ and $e \geqq c > d$. It follows from Theorem 17 that $e^+ \nrightarrow [e^+]^2_{c,d}$ for $d < c \leqq e$. On the other hand we have, by Theorem 2, $e^+ \rightarrow (e)^2_c$ for $c < e'$ and, by Theorem I, $e^+ \rightarrow (b)^2_c$ if $b < e$ and $c < e$. Hence we have

(∗) **18. 14.** Let $c \geqq \aleph_0$. Then

$$e^+ \rightarrow [e]^2_{c,1} \quad \text{for} \quad c < e',$$

$$e^+ \rightarrow [b]^2_{c,1} \quad \text{for} \quad b, c < e.$$

Furthermore, $c^+ \nrightarrow (3)^2_c$ by Theorem 8, and $d^{++} \rightarrow (3)^2_d$ for $d \geqq \aleph_0$, by Theorem 2. Hence, by an obvious transitivity property of our relations,

(∗) **18. 15.** $c^+ \nrightarrow [d^{++}]^2_{c,d}$ for $c > d \geqq \aleph_0$.

We can also say something about the case $d < \aleph_0$. By Ramsey's theorem, there is a least number $f(d) < \aleph_0$ such that $f(d) \rightarrow (3)^2_d$. Then, by the same transitivity property, $c^+ \nrightarrow [f(d)]^2_{c,d}$ for $c \geqq \aleph_0$. Hence, given $d < \aleph_0 \leqq c$, there exists a least number $g_0(c, d) < \aleph_0$ such that $c^+ \nrightarrow [g_0(c, d)]^2_{c,d}$, and we have $g_0(c, d) \leqq f(d)$. As a corollary we obtain $c^+ \nrightarrow [\aleph_0]^2_{c,d}$ for $d < \aleph_0 \leqq c$. In fact it can be proved that $g_0(c, d) = d + 2$. This follows easily if instead of Theorem 8 we use a result of P. ERDŐS and J. TUKEY * which states that the complete graph of power c^+ can be decomposed into the union of c trees, if $c \geqq \aleph_0$.

By comparing the results proved in 18. 13, 18. 14 and 18. 15 we see that in the case $a = a' = e^+$ the following problem remains open:

$$?\ c^+ \rightarrow [d^+]^2_{c,d} \quad \text{for} \quad c > d \geqq \aleph_0.$$

The simplest unsolved cases are:

(∗) PROBLEM 3. 1. (a) $?\ \aleph_2 \rightarrow [\aleph_1]^2_{\aleph_1, \aleph_0}$;

(b) $?\ \aleph_3 \rightarrow [\aleph_2]^2_{\aleph_2, \aleph_1}$;

$?\ \aleph_3 \rightarrow [\aleph_1]^2_{\aleph_2, \aleph_0}$.

Problem 3. 1 (a) was known to us before we introduced the relation V. We came

* This result, for $c = \aleph_0$, was first proved by ERDŐS and TUKEY but not published. Their proof is published in [23].

to it when considering a problem of ULAM. It seems to be the most difficult and interesting unsolved problem on the relation V.

Added in proof (23. III. 1965). It has been recently proved by F. ROWBOTTOM that Gödel's axiom of constructibility implies

$$\aleph_2 \nrightarrow [\aleph_1]^2_{\aleph_1,\aleph_0}.$$

18. 16. We now consider relations of the form $a^+ \rightarrow [b]^2_{c,d}$ where $a > a'$. It can be seen from 18. 13—18. 15 that the only case with $b = a$ which still needs discussing is

$$? \quad a^+ \rightarrow [a]^2_{c,d} \quad \text{for} \quad a' \leqq c < a; \; d \geqq 1. \tag{12}$$

Also, the only case with $c = a$ is

$$? \quad a^+ \rightarrow [d^+]^2_{a,d} \quad \text{for} \quad a > d \geqq \aleph_0. \tag{13}$$

About (12) we now prove:

(*) **18. 17.**

$$a^+ \nrightarrow [a]^2_{a',d} \quad \text{if} \quad a > a' > d; \tag{14}$$

$$a^+ \rightarrow [a]^2_{\bullet,a'} \quad \text{if} \quad a > a' \text{ and } c < a. \tag{15}$$

PROOF OF (14). Let $a = \aleph_\alpha$. We use the definitions and notation of 11. 3. Let $S = V'(\alpha)$ and $m = \omega(a')$. Then there is a partition

$$[S]^2 = \Sigma'(\nu < m) I_\nu$$

where $I_\nu = [S]^2\{\{x, y\}_< : xy = \nu\}$ for $\nu < m$. If $X \subset S$; $D \subset [0, m)$; $|D| \leqq d$; $[X]^2 \subset \subset \Sigma(\nu \in D) I_\nu$, then there is $\nu < m$ with $D \subset [0, \nu)$. Then $\{x, y\}_{\neq} \subset X$ implies $xy < \nu$, and

$$|X| \leqq \Pi(\mu < \nu) \aleph_{\alpha_\mu} \leqq (\aleph_{\alpha_\nu})^{|\nu|} < \aleph_\alpha$$

as required for a proof of (14).

PROOF OF (15). By Theorem 20A, $a \rightarrow [a]^2_{c,a'}$ which implies (15).

About (13) we prove:

18. 18. $a^+ \nrightarrow [d^+]^2_{a,d}$ if $a' < d' \leqq d < a$.

PROOF. 1. Let $a = \aleph_\alpha$; $S = V'(\alpha)$; $m = \omega(a')$. We can write

$$\{(\varrho, \sigma, \lambda) : \varrho < \sigma < \omega_{\alpha_\lambda} \wedge \lambda < m\} = \{(\varrho_\nu, \sigma_\nu, \lambda_\nu) : \nu < \omega_\alpha\}_{\neq}.$$

Then $[S]^2 = \Sigma'(\nu < \omega_\alpha) I_\nu$, where the I_ν are defined as follows. If $\{x, y\}_< \subset S$; $xy = \lambda$; $x = (x_0, , \hat{x}_m)$; $y = (y_0, , \hat{y}_m)$; $(x_\lambda, y_\lambda, \lambda) = (\varrho_\nu, \sigma_\nu, \lambda_\nu)$, then $\{x, y\} \in I_\nu$.

2. Let $X \subset S$; $[X]^2 \subset \Sigma(\nu \in D) I_\nu$; $D \subset [0, \omega_\alpha)$; $|D| \leqq d$. Put $D_\lambda = \{\tau : \tau < \omega_{\alpha_\lambda} \wedge \wedge (\exists \nu)(\nu \in D \wedge \tau \in \{\varrho_\nu, \sigma_\nu\})\}$ for $\lambda < m$. Then $|D_\lambda| \leqq 2|D| \leqq d$. If $\{x, y\}_{\neq} \subset X$; $x = = (x_0, , \hat{x}_m)$; $y = (y_0, , \hat{y}_m)$, then there is $\nu \in D$ with $\{x, y\} \in I_\nu$. Put $xy = \lambda$. Then we have: If $x < y$, then $(x_\lambda, y_\lambda, \lambda) = (\varrho_\nu, \sigma_\nu, \lambda_\nu)$; and if $x > y$, then $(y_\lambda, x_\lambda, \lambda) = (\varrho_\nu, \sigma_\nu, \lambda_\nu)$. Hence in any case,

$$x_\lambda, y_\lambda \in \{\varrho_\nu, \sigma_\nu\}; \quad x_\lambda, y_\lambda \in D_\lambda; \quad x_\lambda \neq y_\lambda.$$

3. Let $x=(x_0,, \hat{x}_m)\in X$. Put $f(x)=\big(f_0(x),,\hat{f_m}(x)\big)$ where, for $\lambda<m$, $f_\lambda(x)=x_\lambda$ if $x_\lambda\in D_\lambda$, and $f_\lambda(x)=0$ otherwise. It follows from 2 that $\{x,y\}_{\neq}\subset X$ implies $f(x)\neq f(y)$. Hence, since $a'<d'$,

$$|X|=|\{f(x): x\in X\}| \leqq \Pi(\lambda<m)\big(|D_\lambda|+1\big)\leqq d^{a'}=d.$$

This proves 18. 18.

We do not know what happens when the condition $a'<d'$ is replaced by $a'\leqq d'$. The simplest unsolved problem here is

(*) PROBLEM 3. 2.

$$? \quad \aleph_{\omega 2+1}\to[\aleph_{\omega+1}]^2_{\aleph_{\omega 2},\aleph_\omega}.$$

REMARKS. Our proof gives in fact more than $a^+\nrightarrow[d^+]^2_{a,d}$ for $a'<d'\leqq d<a$. For the partition which put this relation into evidence is independent of d so that it has the required property for all d simultaneously. One could ask quite generally whether whenever it is known that $a\nrightarrow[q(d)]^2_{c,d}$ for some fixed a, c and every member d of a set M, it is then always possible to find a single partition which has the required property simultaneously for all $d\in M$.

We wish to remark that one can obtain new problems of the Ramsey type relating to the V-relation in the case of finite sets, i. e. when $a<\aleph_0$, but we do not investigate this.

Having just discussed a generalization of the ordinary partition relation I we are now going to introduce a similar generalisation of the relation II.

18. 19. DEFINITION. The relation

$$a\to[b]^{<\aleph_0}_{c_0,,\hat{c}_\omega} \quad \text{(relation VI)}$$

expresses the following condition. Whenever $|S|=a$ and

$$[S]^r = \Sigma'\big(v<\omega(c_r)\big)I(r,v) \quad \text{for} \quad r<\omega,$$

then there are a set $X\in[S]^b$ and numbers r_0 and $v_0(r)<\omega(c_r)$ such that

$$[X]^rI\big(r,v_0(r)\big)=\varnothing \quad \text{for} \quad r\geqq r_0.$$

Clearly, by 3. 2 the relations $a\to(b)^{\leq\aleph_0}_2$ and $a\to[b]^{<\aleph_0}_{2,,\hat{2}}$ are equivalent. Also, if $c_r\leqq d_r$ for $r<\omega$, then the relation

$$a\to[b]^{\aleph_0}_{c_0,,\hat{c}_\omega}$$

implies

$$a\to[b]^{<\aleph_0}_{d_0,,\hat{d}_\omega}.$$

This shows that the relation VI leads to new problems only in cases when $a\nrightarrow(b)^{\leq\aleph_0}_2$, and here there are interesting and perhaps difficult questions. With our present methods we cannot solve even the simplest problems. We now state some of the simplest unsolved problems.

PROBLEM 4. Is it true that, either when $c_r=\aleph_0$ for all r or merely when $\sup(r<\omega)c_r=\omega$, we have

$$\text{either} \quad \aleph_0\to[\aleph_0]^{<\aleph_0}_{c_0,,\hat{c}_\omega} \quad \text{or} \quad 2^{\aleph_0}\to[\aleph_0]^{<\aleph_0}_{c_0,,\hat{c}_\omega}?$$

We can only prove the following simple result.

THEOREM 27. *If* $2 \leqq m < \omega$ *then* $2^{\aleph_0} \nrightarrow [\aleph_0]^{<\aleph_0}_{m,,m}$.

PROOF. Let S be the set of all real numbers x in $0 \leqq x \leqq 1$. For $r \geqq 1$ and $A = \{a_0,, a_{r-1}\}_< \subset S$ put

$$f(A) = f(a_0,, a_{r-1}) = |\{\varrho : \varrho < r-1 \wedge a_{\varrho+1} - a_\varrho \geqq 1/r\}|.$$

Then there is a partition

$$[S]^r = \Sigma'(v<m) I(r, v)$$

such that, for $A \in [S]^r$, we have

$$A \in I(r, v) \quad \text{if} \quad v = \min(f(A), m-1).$$

Now let $X \in [S]^{\aleph_0}$. We shall find r_0 such that* $[X]^r I(r, v) \neq \varnothing$ for $r \geqq r_0$ and $v < m$. We proceed as follows. We may assume that $X = \{x_0,, \hat{x}_\omega\}_<$. There is $r_0 \geqq m$ such that $x_{\mu+1} - x_\mu \geqq 1/r_0$ for all $\mu < m-1$. Let $r \geqq r_0$ and $v < m$. Then, for all sufficiently large $n < \omega$, $f(x_0,, \hat{x}_v, x_{n+v},, \hat{x}_{n+r}) = v$, and Theorem 27 is proved. We have in fact proved somewhat more than is stated in the theorem since our partition is in a certain sense independent of m. If m increases by 1 then one class splits into two classes while the other classes remain unchanged. An obvious modification of the proof shows that, more generally, if $|S| = 2^{\aleph_0}$ then there are partitions

$$[S]^r = \Sigma'(v<r) I(r, v),$$

for $r < \omega$, such that, given any set $X \in [S]^{\aleph_0}$ and any number $v < \omega$, there is a number $r_0(X, v) < \omega$ such that

$$[X]^r I(r, v) \neq \varnothing \quad \text{for} \quad r \geqq r_0(X, v).$$

Since our stepping-up method does not seem to work in problems of this kind we do not know whether

$$2^{2^{\aleph_0}} \nrightarrow [\aleph_0]^{<\aleph_0}_{3,,3}.$$

19. FURTHER REFINEMENTS OF RELATIONS I AND IV

Corollary 7, with $\beta = 0$ and $r = 3$, gives $\aleph_1 \nrightarrow (\aleph_1, 4)^3$. Thus if $|S| = \aleph_1$ then there is a partition $[S]^3 = I_0 + I_1$ such that whenever $X \subset S$ and $[X]^3 \subset I_0$, then $|X| < \aleph_1$, and if $Y \subset S$ and $[Y]^3 \subset I_1$, then $|Y| < 4$. The following problem arises: let $|S| = \aleph_1$ and $[S]^3 = I_0 + I_1$. Suppose that whenever $X \subset S$ and $[X]^3 \subset I_0$, then $|X| < \aleph_1$. Does this imply that there always is $Y \subset S$ with $|Y| = 4$ and $|[Y]^3 I_1| \geqq 2$ or perhaps even $|[Y]^3 I_1| \geqq 3$? If the answer is in the affirmative then we denote this fact by the relations

$$\aleph_1 \to \left(\aleph_1, \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\right)^3 \quad \text{or} \quad \aleph_1 \to \left(\aleph_1, \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right)^3$$

respectively.

* It will be seen that r_0, for the purpose of this proof, need only satisfy a condition which is weaker than what follows.

Generally we introduce the following extension of the I-relation $a \to (b_0, \hat{b}_m)^r$ and IV-relation $a \to [b_0, \hat{b}_m]^r$.

19. 1. DEFINITION. Let, for each $v < m$, the symbol Γ_v denote either a cardinal b_v or a pair $\begin{bmatrix} i_v \\ j_v \end{bmatrix}$ of finite cardinals. Then the relation

$$a \to (\Gamma_0, \hat{\Gamma}_m)^r$$

is said to hold if the following condition is satisfied. Whenever $|S| = a$ and $[S]^r = \Sigma(v < m) I_v$, then there always exist a set $X \subset S$ and a number $v < m$ such that either $\Gamma_v = b_v$; $|X| = b_v$; $[X]^r \subset I_v$ or $\Gamma_v = \begin{bmatrix} i_v \\ j_v \end{bmatrix}$; $|X| = i_v$; $|[X]^r I_v| \geqq j_v$.

19. 2. DEFINITION. Let Γ_v be as in definition 19. 1. Then the relation

$$a \to [\Gamma_0, \hat{\Gamma}_m]^r$$

is said to hold if the following condition is satisfied. Whenever $|S| = a$ and $[S]^r = \Sigma'(v < m) I_v$, then there always exist a set $X \subset S$ and a number $v < m$ such that either $\Gamma_v = b_v$; $|X| = b_v$; $[X]^r I_v = \varnothing$ or $\Gamma_v = \begin{bmatrix} i_v \\ j_v \end{bmatrix}$; $|X| = i_v$; $|[X]^r \Sigma(\mu \neq v) I_\mu| \geqq j_v$. Our new relations coincide with the I-relations and the IV-relations if all $\Gamma_v = b_v$. Just as in the case of the relations I and IV we shall use the obvious abbreviations when a number of Γ_v are equal. Clearly the genuinely new cases in which the new relations have to be studied are of the following form. Suppose that we know that $a \nrightarrow (b_0, \hat{b}_m)^r$ and that some of the b_v are finite. Then we replace some of these b_v by a symbol $\begin{bmatrix} b_v \\ j_v \end{bmatrix}$ and can then ask whether the new relation, now of the form $a \to (\Gamma_0, \hat{\Gamma}_m)^r$, is true. We cannot give a systematic discussion. We are going to prove only some isolated results relating to cases where either interesting new phenomena arise of where these results help us in deciding the truth of some of the original relations I or IV.

(*) THEOREM 28. *If* $a \geqq \aleph_0$ *and* $r \geqq 3$, *then*

$$a^+ \nrightarrow \left[\begin{bmatrix} r+1 \\ 3 \end{bmatrix}, (a^+)_{a+} \right]^r.$$

PROOF. Put $n = \omega(a^+)$ and $S = [0, n)$. Then we can write $[S]^a = \{A_0, \hat{A}_n\}_{\neq}$. For $v < n$ put

$$Z_v = \{A_\mu : \mu < v \wedge A_\mu \subset [0, v)\}.$$

Then $Z_v = \{A_{v\varrho} : \varrho < \varphi_v\}_{\neq}$ for some $\varphi_v \leqq v$. For fixed $v < n$ we can find, by transfinite construction, sets

$$X(v, \varrho, \sigma) \in [S]^{r-1} \quad \text{for} \quad \varrho < \varphi_v \quad \text{and} \quad \sigma < v$$

such that $X(v, \varrho, \sigma) \subset A_{v\varrho}$ for $\varrho < \varphi_v$ and $\sigma < v$, and

$$X(v, \varrho_0, \sigma_0) X(v, \varrho_1, \sigma_1) = \varnothing \quad \text{if} \quad (\varrho_0, \sigma_0) \neq (\varrho_1, \sigma_1). \tag{1}$$

Then there is a partition

$$[S]^r = \Sigma'(\sigma < n) I_\sigma$$

such that, for $A=\{v_0,, v_{r-1}\}_< \subset S$ and $1 \leqq \sigma < n$, we have $A \in I_\sigma$ if and only if

$$\{v_0,, v_{r-2}\} = X(v_{r-1}, \varrho, \sigma) \quad \text{for some} \quad \varrho < \varphi_{v_{r-1}}.$$

This partition has the desired properties. For:

1. Let $B=\{v_0,, v_r\}_< \subset S$; $|[B]^r(I_1 + + \hat{I}_n)| \geqq 3$. Then there are sets X_0, X_1 such that $\{X_0, X_1\}_{\neq} \subset [B]^r$; $v_r \in X_0 X_1$; $X_0 \in I_{\sigma_0}$; $X_1 \in I_{\sigma_1}$; $1 \leqq \sigma_0 \leqq \sigma_1 < n$. Then $X_0 - \{v_r\} = X(v_r, \varrho_0, \sigma_0)$; $X_1 - \{v_r\} = X(v_r, \varrho_1, \sigma_1)$; $(\varrho_0, \sigma_0) \neq (\varrho_1, \sigma_1)$. Then, by (1), $(X_0 - \{v_r\})(X_1 - \{v_r\}) = \varnothing$; $2(r-1) \leqq |B - \{v_r\}| = r$ which is a contradiction.

2. Let $S' \subset S$; $|S'| = a^+$; $1 \leqq \sigma_0 < n$. Choose $A \in [S']^a$. Then $A = A_{v_0}$ for some $v_0 < n$. Then there is v with $v_0, \sigma_0 < v < n$; $v \in S'$; $A_{v_0} \subset [0, v)$. Then $A_{v_0} \in Z_v$ and hence $A_{v_0} = A_{v\varrho_0}$ for some $\varrho_0 < \varphi_v$. Then

$$X(v, \varrho_0, \sigma_0) \subset A_{v\varrho_0} = A_{v_0} \subset [0, v)$$

and therefore $X(v, \varrho_0, \sigma_0) + \{v\} \in [S']^r I_{\sigma_0}$. Hence $[S']^r I_{\sigma_0} \neq \varnothing$, and Theorem 28 follows.

REMARKS. 1. Theorem 19 is a corollary of Theorem 28.

2. By arguments similar to those used in the proof of Theorem 28 it would be easy to determine the least $j(s) < \omega$ such that

$$a^+ \nrightarrow \left[\begin{bmatrix} r+s \\ j(s) \end{bmatrix}, (a^+)_{a^+}\right]^r$$

but we omit this.

In some sense Theorem 28 is best possible. For we have

(*) THEOREM 29. *If* $a \geqq \aleph_0$ *and* $r \geqq 3$, *then*

$$a^+ \rightarrow \left[\begin{bmatrix} r+1 \\ 2 \end{bmatrix}, a^+\right]^r. \tag{2}$$

We note that (2) is the same as $a^+ \rightarrow \left(\begin{bmatrix} r+1 \\ 2 \end{bmatrix}, a^+\right)^r$. The proof is easy and will be omitted. It follows from Theorems 28 and 29 that, for $a \geqq \aleph_0$ and $r \geqq 3$,

$$a^+ \rightarrow \left(\begin{bmatrix} r+1 \\ 2 \end{bmatrix}, a^+\right)^r, \tag{3}$$

$$a^+ \nrightarrow \left(\begin{bmatrix} r+1 \\ 3 \end{bmatrix}, a^+\right)^r. \tag{4}$$

Lemma 5B shows that whenever $r \geqq 3$ and $\aleph_{\alpha+1} \nrightarrow (r+1, \aleph_{\alpha+1})^r$ then, for every s,

$$\aleph_{\alpha+1+s} \nrightarrow (r+1+s, \aleph_{\alpha+1})^{r+s}.$$

The question arises whether such a stepping-up method works for our generalized relations. By an application of the Ramification Lemma we can step up the relation (3) and obtain

(*) THEOREM 29A. *If* $\alpha \geqq 0$ *and* $r \geqq 3$, *then*

$$\aleph_{\alpha+1+s} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} r+1+s \\ 2+s \end{bmatrix}, \aleph_{\alpha+1}\right)^{r+s} \qquad \textit{for all } s.$$

We omit the proof. The problem whether this theorem is best possible remains open. We cannot similarly step up the formula (4), i. e. we cannot prove that

$$\aleph_{\alpha+1+s} \nrightarrow \left(\begin{bmatrix} r+1+s \\ 3+s \end{bmatrix}, \aleph_{\alpha+1}\right)^{r+s},$$

not even in the simplest case $\alpha=0$; $r=3$; $s=1$.

In what follows we restrict ourselves for the sake of brevity to the generalized I-relation.

Consider the formula

$$a \nrightarrow \left(\begin{bmatrix} r+1 \\ j \end{bmatrix}, a\right)^{r}, \tag{5}$$

where $r \geqq 3$ and $a > a'$. We mention without proof that if a' is accessible then, by means of the usual methods, one can prove that the least j for which (5) holds is again $j=3$ the case $a > a' = \aleph_0$. The following result covers.

(*) THEOREM 30. *Let $a > a'$ and $r \geqq 3$. Then*

$$a \nrightarrow \left(\begin{bmatrix} r+1 \\ 3 \end{bmatrix}, a\right)^{r}, \quad \textit{provided that } a' \nrightarrow (a', a')^{r}; \tag{6}$$

$$a \nrightarrow \left(\begin{bmatrix} r+1 \\ 4 \end{bmatrix}, a\right)^{r}. \tag{7}$$

PROOF OF (6). Let $|S|=a$; $[S]^r = I(0) +' I(1)$ (partition Δ). Let $\omega(a')=n$. Then, by Lemma 3B, there is a set $S' = \Sigma'(v<n) S_v \subset S$ such that $\aleph_0 \leqq |S_v| < |S'| = a$ for $v<n$, and Δ is supercanonical in $(S_0, \ldots, \hat{S}_n)$. This means that there is $f(r_0, \ldots, \hat{r}_t) < 2$ such that $A \in I(f(r_0, \ldots, \hat{r}_t))$ whenever $A \in [S']^r$; $\{v: AS_v \neq \varnothing\} = \{v_0, \ldots, \hat{v}_t\}_<$; $|AS_{v_\lambda}| = r_\lambda$ for $\lambda < t$.

Case 1. $f(r_0, \ldots, \hat{r}_t) = 1$ whenever $r_0 + \ldots + \hat{r}_t = r$. Then $[S']^r \subset I(1)$; $|S'| = a$.

Case 2. There is $(r_0, \ldots, \hat{r}_t)$ with $f(r_0, \ldots, \hat{r}_t) = 0$.

Case 2a. $t \in \{1, r\}$. Then, clearly, there is $X \in [S']^{\aleph_0}$ with $[X]^r \subset I(0)$.

Case 2b. $1 < t < r$. Then there is $\sigma < t$ with $r_\sigma \geqq 2$. Choose $X_0 \in [S']^{r+1}$ such that $|X_0 S_\tau| = r_\tau$ for $\tau \in [0, t) - \{\sigma\}$, and $|X_0 S_\sigma| = r_\sigma + 1$. Then there are exactly $r_\sigma + 1$ sets $A \in [X_0]^r$ with $|AS_\sigma| = r_\sigma$, and all these sets A belong to $I(0)$. Hence $|[X_0]^r I_0| \geqq r_\sigma + 1 \geqq 3$, and (6) follows.

PROOF OF (7). Let $S = \Sigma'(v<n) S_v$; $n = \omega(a')$; $|S_v| < |S| = a$ for $v<n$. Let $A \subset S$; $\{v: AS_v \neq \varnothing\} = \{v_0, \ldots, \hat{v}_t\}_<$; $|AS_{v_\tau}| = r_\tau$ for $\tau < t$. Put $g(A) = (r_0, \ldots, \hat{r}_t)$. Then there is a partition $[S]^r = I_0 +' I_1$ such that

$$I_0 = [S]^r \{A: g(A) \in \{(2, \ldots, 2), (1, 2, \ldots, 2)\}\}.$$

Then, if $X \subset S$ and $[X]^r \subset I_1$, it follows that $|X| < a$. Now let $Y \subset S$; $|Y| = r+1$;

$$g(Y) = (r_0, \ldots, \hat{r}_t); \quad \lambda = |[Y]^r I_0| \geqq 1.$$

We want to deduce that $\lambda < 4$.

Case 1. $r = 2s$. Then $s \leqq t \leqq s+1$.

Case 1a. $t=s$. Then there is $\sigma<t$ with $r_\sigma=3$ and $r_\tau=2$ for $\tau\neq\sigma$. Then $\lambda=3$.

Case 1b. $t=s+1$. Then there is $\sigma<t$ with $r_\sigma=1$ and $r_\tau=2$ for $\tau\neq\sigma$. Then $\lambda=1$.

Case 2. $r=2s+1$. Then $s+1\leqq t\leqq s+2$.

Case 2a. $t=s+1$. Then $\lambda\leqq 3$.

Case 2b. $t=s+2$. Then $\lambda\leqq 2$. This proves (7) and completes the Proof of Theorem 30.

REMARK. It is worth noting that in the case of the relation (6) the stepping-up method does not seem to work, and so the following simple problem remains unsolved.

(*) PROBLEM 5.

$$?\ \aleph_{\omega+1}\to\left(\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\aleph_\omega\right)^4.$$

By Theorem 30,

$$\aleph_\omega\to\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix},\aleph_\omega\right)^3.$$

To conclude this section we shall apply some of the results so far obtained to prove Theorem 26 which was stated in 18. 10.

PROOF OF THEOREM 26. We are given that $a>a'$ and $a'\to(a',a')^3$, and we have to deduce that

$$a^+\nrightarrow[a'^{++},a,a^+]^3. \tag{8}$$

Let $|S|=a^+$. We have, by Theorems 28 and I respectively, $a^+\nrightarrow\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix},a^+\right)^3$ and $a^+\nrightarrow(a,a'^+)^3$. Hence there are partitions

$$[S]^3=I_0+'I_1=J_0+'J_1$$

such that

$$\text{if } X\in[S]^4,\ \text{then}\ \ |[X]^3I_0|<3, \tag{9}$$

$$a^+\notin[I_1]_3, \tag{10}$$

$$a\notin[J_0]_3, \tag{11}$$

$$a'^+\notin[J_1]_3. \tag{12}$$

We now form the new partition

$$[S]^3=K_0+K_1+K_2\qquad(\text{partition }\Delta),$$

where

$$K_0=J_0-I_0;\quad K_1=J_1-I_0;\quad K_2=I_0.$$

We now show that Δ has the properties required by (8).

1. Let $[X]^3\subset K_1+K_2$. Then $|X|<a'^{++}$. For suppose that $|X|\geqq a'^{++}$. Then, by Theorem I, $|X|\to(a'^+,a')^3$ and hence $|X|\to\left(a'^+,\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right)^3$. There is $X'\subset X$ such that either (i) $|X'|=a'^+$ and $[X']^3\subset K_1\subset J_1$ which contradicts (12), or (ii) $|X'|=4$ and $3\leqq|[X']^3K_2|=|[X']^3I_0|$ which contradicts (9).

2. Let $[X]^3 \subset K_2 + K_0$. Then $|X| < a$. For suppose $|X| \geqq a$. Then, by Theorem 30, $|X| \to \left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}, a\right)^3$, and hence there is $X' \subset X$ such that either (i) $|X'| = 4$ and $3 \leqq \leqq |[X']^3 K_2| = |[X']^3 I_0|$ which contradicts (9), or (ii) $|X'| = a$ and $[X']^3 \subset K_0 \subset J_0$ which contradicts (11).

3. Let $[X]^3 \subset K_0 + K_1$. Then

$$[X]^3 \subset (J_0 - I_0) + (J_1 - I_0) = [S]^3 - I_0 = I_1$$

and hence, by (10), $|X| < a^+$. Our three results 1, 2 and 3 prove (8).

20. FURTHER PROBLEMS RELATED TO THE ORDINARY PARTITION RELATION I

In this section we shall formulate some general problems concerning partitions. Here we have no essentially new results. As applications of our results about I-relations we shall obtain the answers to a number of simple questions and we shall point out some interesting unsolved problems of a new type.

20. 1. Let $m \geqq 1$, and let a, a_ν, b_ν, c_ν be cardinals, for $\nu < m$. Let $|S| = a$. If $a \nrightarrow (b_0, , \hat{b}_m)^r$ then there is a partition $[S]^r = \Sigma(\nu < m) I_\nu$ (partition Δ) such that $b_\nu \notin [I_\nu]_r$ for $\nu < m$. One can ask the question whether there is a partition Δ satisfying $b_\nu \notin [I_\nu]_r$ for $\nu < m$ and, in addition, having the property that whenever $\nu < m$ and $X \in [S]^{c_\nu}$ then $a_\nu \in [[X]^r I_\nu]_r$. The fact that the answer to this question is negative will be expressed by the relation

$$(1) \qquad (a, a_0, , \hat{a}_m) \to \begin{pmatrix} b_0, , \hat{b}_m \\ c_0, , \hat{c}_m \end{pmatrix}^r.$$

Explicitly, (1) has the following meaning: if $|S| = a$ and $[S]^r = I_0 + + \hat{I}_m$, then either (i) there is $\nu < m$ with $b_\nu \in [I_\nu]_r$, or (ii) there are $\nu < m$ and $X \in [S]^{c_\nu}$ with $a_\nu \notin [[X]^r I_\nu]_r$. It follows from this definition that the relation (1) is increasing in a and in each a_ν, and decreasing in each b_ν and in each c_ν. Also, (1) is always true if there is ν with $a_\nu \geqq b_\nu$. We shall investigate the special case when (1) is of the form

$$(2) \qquad (a, a_0, 0) \to \begin{pmatrix} b_0, a^+ \\ c_0, a^+ \end{pmatrix}^r.$$

We shall write (2) more simply as

$$(a, a_0) \to (b_0, c_0)^r.$$

Thus the relation

$$(3) \qquad (a, b) \to (c, d)^r$$

means: if $|S| = a$ and $[S]^r = I_0 + I_1$, then either (i) $c \in [I_0]_r$ or (ii) there is $X \in [S]^d$ with $b \notin [[X]^r I_0]_r$. The relation (3) is increasing in a and b, and decreasing in c and d. The negation of (3) is

$$(a, b) \nrightarrow (c, d)^r$$

and means: if $|S| = a$, then there is a partition $[S]^r = I_0 + I_1$ such that (i) $c \notin [I_0]_r$

and (ii) whenever $X \in [S]^d$ then $b \in [[X]^r I_0]_r$. The following remarks establish connections between our new relation and the ordinary I-relation.

20. 2. (i) If $a \to (c, d)^r$ and $b \geqq r$, then $(a, b) \to (c, d)^r$.

(ii) If $a \nrightarrow (c, d_0)^r$ and $d \to (b, d_0)^r$, then $(a, b) \nrightarrow (c, d)^r$.

PROOF OF (i). Let $|S| = a$ and $[S]^r = I_0 + I_1$. Then there are two cases:

Case 1. $c \in [I_0]_r$.

Case 2. $d \in [I_1 - I_0]_r$. Then there is $X \in [S]^d$ with $[X]^r \subset I_1 - I_0$. Then $[X]^r I_0 = \varnothing$ and hence $b \notin [[X]^r I_0]_r$.

PROOF OF (ii). Let $|S| = a$. Then there is a partition $[S]^r = I_0 + I_1$ such that $c \notin [I_0]_r$ and $d_0 \notin [I_1]_r$. Let $X \in [S]^d$. Then there are two cases:

Case 1. $b \in [[X]^r I_0]_r$.

Case 2. $d_0 \in [[X]^r I_1]_r$. Then $d_0 \in [[X]^r I_1]_r \subset [I_1]_r$ which is a contradiction. This proves 20. 2.

As corollary of 20. 2 and Theorem I we have for $r = 2$:

(*) **20. 3.**

(i) $(a, 2) \to (c, d)^2$ if $a \geqq \aleph_0$ and $c, d < a$.

(ii) $(a, b) \nrightarrow (a, a)^2$ if $b < a$ and a is infinite and not inaccessible.

(iii) $(\aleph_\alpha, 2) \to (\aleph_{\mathrm{cr}(\alpha)}, \aleph_\alpha)^2$ except possibly when $\mathrm{cr}(\alpha) > 0$ and $\aleph_{\mathrm{cr}(\alpha)}$ is inaccessible.

(iv) $(\aleph_\alpha, \aleph_{\mathrm{cr}(\alpha)}) \nrightarrow (\aleph^+_{\mathrm{cr}(\alpha)}, \aleph_\alpha)^2$ except possibly when $\mathrm{cr}(\alpha) > 0$ and $\aleph_{\mathrm{cr}(\alpha)}$ is inaccessible.

PROOF OF (i). By Theorem I, $a \to (c, d)^2$. Hence the conclusion follows from 20. 2 (i).

PROOF OF (ii). Put $a = \aleph_\alpha$. By Theorem I we have $a \nrightarrow (a, \aleph^+_{\mathrm{cr}(\alpha)})^2$ and $a \to (b, \aleph^+_{\mathrm{cr}(\alpha)})^2$, and the conclusion follows from 20. 2 (ii).

PROOF OF (iii). By Theorem I, $\aleph_\alpha \to (\aleph_{\mathrm{cr}(\alpha)}, \aleph_\alpha)^2$, and the conclusion follows from 20. 2 (i).

PROOF OF (iv). By Theorem I we have $\aleph_\alpha \nrightarrow (\aleph^+_{\mathrm{cr}(\alpha)}, \aleph_\alpha)^2$ and $\aleph_\alpha \to (\aleph_{\mathrm{cr}(\alpha)}, \aleph_\alpha)^2$, and the conclusion follows from 20. 2 (ii).

The results just proved show that here we get new problems concerning the relation (3) only if $a = d = \aleph_\alpha$ and $\mathrm{cr}(\alpha) < \alpha \doteq 1$. Thus we have to investigate the cases

(i) $a = \aleph_{\beta+1}$, where $\beta > \mathrm{cf}(\beta)$,

and

(ii) $a > a'$.

In case (i) we have no further results and the following are the simplest of the open problems:

(*) PROBLEM 6.

$$? \ (\aleph_{\omega+1}, \aleph_1) \to (\aleph_\omega, \aleph_{\omega+1})^2.$$

$$? \ (\aleph_{\omega+1}, \aleph_1) \to (\aleph_n, \aleph_{\omega+1})^2 \quad \text{for} \quad 2 \leqq n < \omega.$$

In fact we cannot even decide whether $(\aleph_{\omega+1}, \aleph_n) \to (\aleph_\omega, \aleph_\omega)^2$ holds for any $n < \omega$. This problem seems to be interesting and difficult. There are many classes of problems where the first difficulty arises for the cardinal $\aleph_{\omega+1}$. We shall formulate some of

these in connection with polarized partition relations. Here we are going to formulate another unsolved problem belonging into the general field under dicsussion.

PROBLEM 7. Let $|S| = \aleph_{\omega+1}$ and $[S]^2 = I_0 + I_1$. Suppose that whenever $X \in [S]^{\aleph_1}$, then $\aleph_1 \in [[X]^2 I_1]_2$. Does this imply that $\aleph_{\omega+1} \in [I_1]_2$?

It follows from the definition of the relation (1) that if

$$(\aleph_{\omega+1}, 0, \aleph_1) \nrightarrow \begin{pmatrix} \aleph_1 & \aleph_{\omega+1} \\ \aleph_1 & \aleph_1 \end{pmatrix}^2,$$

then the answer to the question in Problem 7 is in the affirmative.

Let us return to the relation (3). We want to consider the case $a > a'$. Here we have the following results which often allow us to reduce the cardinals which enter a relation under discussion.

20. 4. Let $r \geqq 1$ and $a > a'$.

(i) If $(a, b) \to (c, a)^r$, then $(a', b) \to (c, a')^r$.

$(*)$ (ii) If $c < a$ and $(a', b) \to (c, a')^r$, then $(a, b_0) \to (c, a)^r$, where $b_0 = b$ if either $r = 2$ or $b \geqq \aleph_0$, and $b_0 = (b-1)(r-1)+1$ otherwise.

PROOF. Let $\omega(a') = n$; $|S| = a$; $N = [0, n)$.

PROOF OF (i). Let $[N]^r = I_0^* +' I_1^*$; $S = \Sigma'(v<n) S_v$; $|S_\mu| < |S_\nu| < a$ for $\mu < \nu < n$. Then $[S]^r = I_0 +' I_1$, where

$$I_0 = \Sigma(\{\nu_0, \ldots, \nu_{r-1}\}_< \in I_0^*)[S_{\nu_0}, \ldots, S_{\nu_{r-1}}]^{1,\ldots,1}.$$

Then we have the following cases:

Case 1. $c \in [I_0]_r$. Then there is $X \in [S]^c$ with $[X]^r \subset I_0$. Put $N' = \{v : XS_v \neq \varnothing\}$. Then $|N'| = c$; $[N']^r \subset I_0^*$; $c \in [I_0^*]_r$.

Case 2. There is $X \in [S]^a$ with $b \notin [[X]^r I_0]_r$. Put $N' = \{v : XS_v \neq \varnothing\}$. Then $|N'| = a'$.

Case 2a. $b \in [[N']^r I_0^*]_r$. Then there is $N'' \in [N']^b$ with $[N'']^r \subset I_0^*$. Then there are $x_v \in XS_v$ for $v \in N''$. Put $X' = \{x_v : v \in N''\}$. Then $X' \in [X]^b$; $[X']^r \subset I_0$; $b \in [[X]^r I_0]_r$ which is a contradiction.

Case 2b. $b \notin [[N']^r I_0^*]_r$. This proves (i). We did not require $(*)$ for this part.

PROOF OF (ii). Let $[S]^r = I_0 +' I_1$ (partition Δ). Then, by Lemma 3, there is a set $S' = \Sigma'(v<n) S_v \subset S$ with $c \leqq |S_\mu| < |S_\nu| < |S'| = a$ for $\mu < \nu < n$, such that Δ is canonical in $(S_0, \ldots, \hat{S}_n)$. Choose $x_v \in S_v$ for $v < n$. Then $[N]^r = I_0^* +' I_1^*$, where $I_0^* = \{\{\nu_0, \ldots, \nu_{r-1}\}_< : \{x_{\nu_0}, \ldots, x_{\nu_{r-1}}\} \in I_0\}$. We have the cases:

Case 1. $c \in [I_0^*]_r$. Then there is $N' \in [N]^c$ with $[N']^r \subset I_0^*$. Put $X = \{x_v : v \in N'\}$. Then $|X| = c$; $[X]^r \subset I_0$; $c \in [I_0]_r$.

Case 2. There is $N' \in [N]^{a'}$ with $b \notin [[N']^r I_0^*]_r$. Put $X = \Sigma(v \in N') S_v$. Then $|X| = a$. Let $X' \subset X$; $[X']^r \subset I_0$. Put $N'' = \{v : X'S_v \neq \varnothing\}$. Then $[N'']^r \subset I_0^*$; $N'' \subset N'$, and hence $|N''| < b$.

Case 2a. $|X'S_v| < r$ for $v \in N''$.

Case 2a1. $b < \aleph_0$. Then $|X'| \leqq |N''|(r-1) \leqq (b-1)(r-1) < b_0$; $b_0 \notin [[X]^r I_0]_r$.

Case 2a2. $b \geqq \aleph_0$. Then $|X'| \leqq |N''|(r-1) < b = b_0$; $b_0 \notin [[X]^r I_0]_r$.

Case 2b. $|X'S_\nu| \geqq r$ for some $\nu \in N''$. Then, since Δ is canonical, we have $[S_\nu]^r \subset I_0$; $|S_\nu| \geqq c$; $c \in [I_0]_r$. This proves (ii).

The following is a corollary of 20. 4.

20. 5. Let $r \geqq 1$ and $a > a'$. Then

(i) $\quad (a, a'^+) \to (c, a)^r \qquad$ for $c < a$;

(ii) $\quad (a, a') \nrightarrow (c, a)^r \qquad$ for $c > a'$.

To prove (i) we notice that, trivially, $(a', a'^+) \to (c, a')^r$, and 20. 4 (ii) gives the result.

PROOF OF (ii). If $(a, a') \to (c, a)^r$ then, by 20. 4 (i), $(a', a') \to (c, a')^r$. But this is obviously false as is shown by the partition in which $I_1 = \varnothing$.

It follows from 20. 5 that if $a' < c < a$, then the relation $(a, b) \to (c, a)^r$ holds if and only if $b > a'$.

The first unsolved problems arise for $a = \aleph_{\omega_{\omega+1}}$, when $a' = \aleph_{\omega+1}$. We have, by 20. 5 (ii), $(a, a') \nrightarrow (c, a)^2$ for $c > a'$. The question is to decide if this is best possible. By 20. 3 (ii) we have $(a', a'^-) \nrightarrow (a', a')^2$ and hence, by 20. 4 (i), $(a, a'^-) \nrightarrow (a', a)^2$ which does not yet answer our question. The following problems remain open:

$$? \ (\aleph_{\omega_{\omega+1}}, \aleph_1) \to (\aleph_\omega, \aleph_{\omega_{\omega+1}})^2;$$

$$? \ (\aleph_{\omega_{\omega+1}}, \aleph_1) \to (\aleph_n, \aleph_{\omega_{\omega+1}})^2$$

for $2 \leqq n < \omega$. By 20. 4 this reduces to Problem 6.

Consider now the case $r = 3$. Here we have the following nontrivial results.

(∗) **20. 6.** If $3 \leqq b < c < \omega$, then

(i) $\quad (a^+, b) \to (c, a^+)^3 \qquad$ if $a \geqq \aleph_0$;

(ii) $\quad (a, b) \to (c, a)^3 \qquad$ if $a > a' > a'^-$.

The proof of (i) can be conducted by induction on c, and (ii) follows from (i) by means of 20. 4. We omit the details in order to save space.

By comparing these relations with trivial applications of 20. 2 we see that the following are among the simplest problems that remain unsolved.

(∗) PROBLEM 8.

$$? \ (\aleph_3, \aleph_0) \to (\aleph_1, \aleph_3)^3,$$

$$? \ (\aleph_2, 4) \to (\aleph_1, \aleph_1)^3,$$

$$? \ (\aleph_2, \aleph_0) \to (\aleph_1, \aleph_1)^3.$$

Finally we formulate a typical instance of another class of unsolved problems for $r = 3$.

(∗) PROBLEM 9. Let $|S| = \aleph_2$. Does there exist a partition $[S]^3 = I_0 + I_1$ such that:

(i) $\aleph_1 \notin [I_\nu]_3$ for $\nu < 2$;

(ii) whenever $X \in [S]^{\aleph_1}$, then there are sets $X_0, X_1 \in [X]^{\aleph_0}$ such that $[X_\nu]^3 \subset I_\nu$ for $\nu < 2$?

REMARK. We know that there is a 3-partition such that (i) holds since, by Theorem I, $\aleph_2 \nrightarrow (\aleph_1, \aleph_1)^3$. Also, the formula $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0, \aleph_0)^3$ implies that whenever $X \in [S]^{\aleph_1}$ then either X_0 or X_1 exists satisfying the requirement stated in (ii). But it does not necessarily follow that both, X_0 and X_1, always exist simultaneously.

PART II

POLARIZED PARTITIONS

We are now going to discuss relations of the form

$$\binom{a}{b} \rightarrow \binom{a_0, a_1}{b_0, b_1}^{1,1}$$

which will briefly be denoted by

$$\binom{a}{b} \rightarrow \binom{a_0, a_1}{b_0, b_1}.$$

The commas will be omitted whenever possible. When any of a, b, a_ν, b_ν are infinite, we shall always put

$$a = \aleph_\alpha; \quad b = \aleph_\beta; \quad a_\nu = \aleph_{\alpha_\nu}; \quad b_\nu = \aleph_{\beta_\nu}.$$

It will be shown that if $a, b \geqq \aleph_0$ then the discussion of the general case can be reduced to that of the two special cases $\alpha = \beta$ and $\alpha + 1 = \beta$. We shall also discuss the "relation with alternatives"

$$\binom{a}{b} \rightarrow \binom{a_0 \vee a_1, a_2 \vee a_3}{b_0 \vee b_1, b_2 \vee b_3}$$

which was defined in 3. 3.

21. PRELIMINARIES

21. 1. DEFINITIONS. Let $ST = \varnothing$. We shall write instead of $[S, T]^{1,1}$, which was defined in Section 2, the symbol $[S, T]$. Let

$$[S, T] = I_0 + I_1. \tag{1}$$

Relative to a partition (1) we put, for $x_0 \in S$; $y_0 \in T$; $\nu < 2$,

$$P_\nu(x_0) = T\{y: \{x_0, y\} \in I_\nu\},$$
$$Q_\nu(y_0) = S\{x: \{x, y_0\} \in I_\nu\}.$$

Also, $[I_\nu]$ denotes the set of all pairs (c, d) such that there are sets $X \in [S]^c$ and $Y \in [T]^d$ with* $[X, Y] \subset I_\nu$.

First we prove a negative result.

21. 2. $\binom{a}{a} \nrightarrow \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ for $a \geqq 0$.

* It will always be clear from the context to which partition (1) these notions refer.

PROOF. Let $\omega(a)=n$; $S=\{x_0,, \hat{x}_n\}_{\neq}$; $T=\{y_0,, \hat{y}_n\}_{\neq}$; $ST=\varnothing$;

$$[S, T] = I_0 +' I_1,$$

where $I_0=\{\{x_\mu, y_\nu\}: \mu \leqq \nu < n\}$. Let $\mu, \nu < n$. Then

$$|Q_0(y_\nu)| = |\nu + 1| \leqq a; \quad |P_1(x_\mu)| = |\mu| < a.$$

This proves the result. The case $\alpha=\beta$ is closely connected with the theory of set mappings.

21. 3. DEFINITION. Let $|S|=a$. A set mapping on S is a function f: $S \to \mathbf{P}(S)$ such that $x \notin f(x)$ for $x \in S$. The set mapping is of order p if $|f(x)|<p$ for $x \in S$. If $S' \subset S$ then we put $f(S')=\Sigma(\dot{x} \in S')f(x)$. The set S' is called f-free if $S'f(S')=\varnothing$.

21. 4. A set family $(A_\nu: \nu \in N)$ is said to possess the property $D(c, d)$ if $N' \in [N]^c$ implies $|\Pi(\nu \in N')A_\nu| < d$. We express this by writing $(A_\nu: \nu \in N) \in D(c, d)$. The set mapping $f(x)$ on S has the property $D(c, d)$ whenever the set family $(f(x): x \in S) \in D(c, d)$. The property $D(c, d)$, with a different notation, was introduced in [29], p. 871, definition (1. 3).

For the sake of brevity we introduce the following definition

21. 5. DEFINITION. The relation

$$a \to [[p, c, d, q]] \tag{2}$$

expresses the following condition. Whenever $|S|=a$, and f is a set mapping on S of order p having the property $D(c, d)$, then there exists a f-free set of cardinal q. It follows that the relation (2) is increasing in a and decreasing in each of p, c, d, q. The relation (2), in a different notation, was introduced in [14], p. 281. We need

($*$) LEMMA 7. *Let $a=a'$ and $|S|=a^+$. Then there is a set family $\mathbf{F}=(A_\nu: \nu \in N)$ such that:*

(i) $|N|=a^+$; (ii) $A_\nu \in [S]^a$ *for* $\nu \in N$; (iii) $\mathbf{F} \in D(2, a)$; (iv) *whenever* $N' \in [N]^{a^+}$, *then* $|S-\Sigma(\nu \in N')A_\nu| < a^+$.

COROLLARY. If $a=a'$ then $a^+ \to [[a,^+ 2, a, a^+]]$. Lemma 7 is a theorem of A. HAJNAL [14]. We shall apply it to obtain partition relations, and we shall also deduce further results on set mappings. Some of the open problems stated in [14] will be settled. In section 27 we shall return to the theory of set mappings and shall formulate the simplest problems which still remain unsolved.

As a corollary of Lemma 7 we have

($*$) THEOREM 31. *If $a=a'$ then* $\begin{pmatrix} a^+ \\ a^+ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^+, a \vee a^+ \\ a^+, 2 \vee 1 \end{pmatrix}$.

PROOF. Let $n=\omega(a^+)$;

$$S=\{x_0,, \hat{x}_n\}_{\neq}; \quad T=\{y_0,, \hat{y}_n\}_{\neq}; \quad ST=\varnothing.$$

Let the family $\mathbf{F}=(A_\nu: \nu \in N)$ have the properties stated in Lemma 7. By (i) and (iii) we can write $\{A_\nu: \nu \in N\}=\{F_0,, \hat{F}_n\}_{\neq}$. Then we have

$$[S, T] = I_0 +' I_1 \qquad \text{(partition } \Delta),$$

where $I_1 = \{\{x_\mu, y_\nu\}: x_\mu \in F_\nu\}$. Then Δ has the required properties. For let $T' \in [T]^{a^+}$. Put $\mathbf{F}' = \{F_\nu: y_\nu \in T'\}$. Then $|\mathbf{F}'| = a^+$ and hence, by (iv), $|S - \Sigma(y_\nu \in T') Q_1(y_\nu)| = |S - \Sigma(F_\nu \in \mathbf{F}') F_\nu| < a^+$. Hence, if $S' \subset S$ and $[S', T'] \subset I_0$, then $|S'| < a^+$. On the other hand, by (iii), $|Q_1(y_\mu) Q_1(y_\nu)| = |F_\mu F_\nu| < a$ for $\mu < \nu < n$ and, by (ii), $|Q_1(y_\nu)| < a^+$ for $\nu < n$. This proves Theorem 31.

REMARK. If $a > a'$ then the conclusion of Theorem 31 is in general false. We shall return to this point later.

(∗) THEOREM 32. *If* $a \geqq \aleph_0$ *then, putting* $b = a^+$, *we have*

$$\binom{b}{b} \nrightarrow \binom{b \vee a,\ b \vee a}{a \vee b,\ a \vee b}. \tag{3}$$

PROOF. Let S and T be as in the preceding proof. By Theorem 17A there is a partition $[S]^2 = I_0^* +' I_1^*$ such that, whenever $S' \in [S]^a$; $S'' \in [S - S']^b$; $\lambda < 2$, then $[S', S'']I_\lambda^* \neq \varnothing$. Then the partition $[S, T] = I_0 +' I_1$, defined by

$$I_0 = \{\{x_\mu, y_\nu\}: \{x_{2\mu}, x_{2\nu+1}\} \in I_0^*\},$$

has the properties required by (3), and Theorem 32 follows.

(∗) COROLLARY 16. *If* $a \geqq \aleph_0$ *then*

$$\binom{a}{a^+} \nrightarrow \binom{a \quad a}{a^+ \quad a^+}.$$

We shall need the following theorem of A. TARSKI*.

(∗) LEMMA 8. *Let* $a, b \geqq \aleph_0$; $|S| = a$; $\mathbf{F} = (A_\nu: \nu \in N)$; $|N| = a^+$; $A_\nu \in [S]^{\geqq b}$ *for* $\nu \in N$. *Then*

(i) *if* $a' \neq b'$ *then* $\mathbf{F} \notin D(a^+, b)$;

(ii) *if* $c < b$ *then* $\mathbf{F} \notin D(a^+, c)$.

22. POSITIVE RESULTS FOR THE CASES $\alpha = \beta$ AND $\alpha + 1 = \beta$

(∗) THEOREM 33. *If* $a \geqq \aleph_0$ *and* $a_1 < a$, *then* $\binom{a}{a^+} \nrightarrow \binom{a \quad a_1}{a^+ \quad a^+}$.

PROOF. *Case* 1. $a = \aleph_0$. The result is trivial for $a_1 = 0$. The conclusion would follow for all a_1 if we can prove the following more general proposition:

$$\begin{cases} \text{If} \quad a \geqq \aleph_0;\ c < a < b';\ \binom{a}{b} \nrightarrow \binom{a \quad c}{b \quad b}, \\ \\ \text{then} \qquad\qquad\qquad\quad \binom{a}{b} \nrightarrow \binom{a \quad c+1}{b \quad\ b}. \end{cases} \tag{4}$$

PROOF OF (4). Let $ST = \varnothing$; $|S| = a$; $|T| = b$;

$$[S, T] = I_0 + I_1; \quad (a, b) \notin [I_0].$$

* [15] p. 211 Theorem 51, and p. 213 Corollary 6 for (i) and (ii) respectively.

Then there are $X_0 \in [S]^c$ and $Y_0 \in [T]^b$ with $[X_0, Y_0] \subset I_1$. Put $Y_1 = Y_0 - \Sigma(x \in S - X_0) P_1(x)$. Then $[S - X_0, Y_1] \subset I_0$; $|S - X_0| = a$; $|Y_1| < b$; $|\Sigma(x \in S - X_0) Y_0 P_1(x)| = b$; $|S - X_0| = a < b'$, and hence there is $x_0 \in S - X_0$ with $|Y_0 P_1(x_0)| = b$. Then $[X_0 + \{x_0\}, Y_0 P_1(x_0)] \subset I_1$; $|X_0 + \{x_0\}| = c + 1$, and (4) follows.

Case 2. $a > \aleph_0$. We define a_2 as follows. If $a = a'$ then $a_2 = a_1$, and if $a > a'$ then $a_2 = a_1^+ + a'^+$. Then in any case, $a_1 \leqq a_2 < a$ and $a_2' \neq a'$. Put $a^+ = b$. Let $ST = \varnothing$;

$$|S| = a; \quad |T| = b; \quad [S, T] = I_0 +' I_1.$$

Put $T_0 = T\{y: |Q_1(y)| \geqq a_2\}$; $\mathbf{F} = (Q_1(y): y \in T_0)$.

Case 2a. $\mathbf{F} \notin D(b, a_2)$. Then there is $T_1 \in [T_0]^b$ such that $|\Pi(y \in T_1) Q_1(y)| \geqq a_2$. Then

$$[\Pi(y \in T_1) Q_1(y), T_1] \subset I_1; \quad (a_1, b) \in [I_1].$$

Case 2b. $\mathbf{F} \in D(b, a_2)$. Then, by Lemma 8 (i), $|T_0| < b$, and hence $|T - T_0| = b$. Since $a_2^+ \leqq a$, there is a partition $S = \Sigma'(\mu < m) S_\mu$ with $|S_\mu| = a$ for $\mu < m$, where $m = \omega(a_2^+)$. But $|Q_1(y)| < a_2$ for $y \in T - T_0$. Hence, given $y \in T - T_0$ there is $\mu(y) < m$ with $S_{\mu(y)} Q_1(y) = \varnothing$. Then there are a number $\mu_0 < m$ and a set $Y_0 \in [T - T_0]^b$ such that $\mu(y) = \mu_0$ for $y \in Y_0$. Put $X_0 = S_{\mu_0}$. Then $|X_0| = a$; $X_0 Q_1(y) = \varnothing$ for $y \in Y_0$, and $[X_0, Y_0] \subset I_0$; $(a, b) \in [I_0]$, and Theorem 33 follows.

Our next theorem is now almost trivial.

THEOREM 34. *Let* $c < \aleph_0 \leqq a$. *Then* $\binom{a}{a^+} \to \binom{a \quad a}{a^+ \quad c}$.

PROOF. Let this be true for $c = c_0 < \aleph_0$. It suffices to deduce that it holds for $c = c_0 + 1$. Let $|S| = a$; $|T| = a^+$; $ST = \varnothing$; $[S, T] = I_0 +' I_1$; $(a, a^+) \notin [I_0]$. Then there are sets $S' \in [S]^a$; $T' \in [T]^{c_0}$ with $[S', T'] \subset I_1$.

Case 1. $|S' Q_1(y)| < a$ for $y \in T - T'$. Put

$$T(a_0) = (T - T')\{y: |S' Q_1(y)| = a_0\} \text{ for } a_0 < a.$$

Then there is $a_0 < a$ with $|T(a_0)| = a^+$. We can write $S' = \Sigma'(\mu < m) S_\mu$, where $m = \omega(a_0^+)$ and $|S_\mu| = a$ for $\mu < m$. If $y \in T(a_0)$ then $|S' Q_1(y)| = a_0 < |m|$, and hence there is $\mu(y) < m$ with $S_{\mu(y)} Q_1(y) = \varnothing$. Then there are $Y_0 \in [T(a_0)]^{a^+}$ and $\mu_0 < m$ with $\mu(y) = \mu_0$ for $y \in Y_0$. Put $X_0 = S_{\mu_0}$. Then $X_0 Q_1(y) = \varnothing$ for $y \in Y_0$, and $[X_0, Y_0] \subset I_0$; $(a, a^+) \in [I_0]$ which is a contradiction.

Case 2. There is $y_0 \in T - T'$ with $|S' Q_1(y_0)| = a$. Then

$$[S' Q_1(y_0), T' + \{y_0\}] \subset I_1; \quad (a, c_0 + 1) \in [I_1],$$

and Theorem 34 follows.

LEMMA 9. *Let* $f(x)$ *be a set mapping of order* p *on* S, *where* $|S| = a \geqq \aleph_0$ *and* $p < a$. *Then there exists a* f*-free set of cardinal* a.

This lemma was first proved by P. ERDŐS using $(*)$. It can be proved without assuming $(*)$. See [16] and [17].

A corollary of Lemma 9 is

THEOREM 35. *If* $a \geqq \aleph_0$ *and* $b_1 < a$, *then* $\binom{a}{a} \to \binom{a \quad 1}{a \quad b_1}$.

PROOF. Let $n=\omega(a)$; $S=\{x_0,, \hat{x}_n\}_{\neq}$; $T=\{y_0,, \hat{y}_n\}_{\neq}$; $ST=\varnothing$; $[S, T] = I_0 +' I_1$. Assume that $(1, b_1)\notin[I_1]$. Define a set mapping f on $[0, n)$ by putting

$$f(\mu) = ([0, n)-\{\mu\})\{v: y_v\in P_1(x_\mu)\} \quad \text{for} \quad \mu<n.$$

Then $|f(\mu)| \leqq |P_1(x_\mu)|<b_1$ for $\mu<n$, and by Lemma 9 there is a f-free set $N\in[[0, n)]^a$. Then $y_v\notin P_1(x_\mu)$ for $\mu, v\in N'$ and hence $[\{x_\mu: \mu\in N\}, \{y_2: v\in N\}]\subset I_0$; $(a, a)\in[I_0]$, and Theorem 35 follows.

($*$) THEOREM 36. *Let $a=a'$ and $d^+<a$. Then $a\to[[a, a, d, a]]$.*

PROOF. Let this be false. Then there is a set mapping f of order a on a set S, where $|S|=a$, such that $f\in D(a, d)$ and, at the same time, there is no f-free set of cardinal a. Put $n=\omega(d^+)$. We define sets $S_0,, \hat{S}_n$. Let $v<n$, and let $S_0,, \hat{S}_v\in[S]^{<a}$. We now define S_v. Put $S_v^* = S_0 + + \hat{S}_v$; $S_v^{**}=f(S_v^*)$. Since $a=a'$ we have $|S_v^*|<a$ and $|S_v^{**}|<a$. Hence $S_v' = S-(S_v^* + S_v^{**})\neq\varnothing$. Let S_v be a maximal f-free subset of S_v'. Then $1\leqq|S_v|<a$ and $S_\mu S_v=\varnothing$ for $\mu<v$. This defines $S_0,, \hat{S}_n$. Put $S^* = S_0 + + \hat{S}_n$ and $S^{**}=f(S^*)$. Then $|S^*|\geqq|n| = d^+$. Also, since $|n|<a$, we have $|S^* + S^{**}|<a$. Put $T = S-(S^* + S^{**})$. Then $|T|=a$. Let $x\in T$. Then, by the maximality of S_v, we have $f(x)S_v\neq\varnothing$ for $v<n$. Hence, for $x\in T$,

$$|f(x)S^*| = \Sigma(v<n)|f(x)S_v|\geqq d^+.$$

Put $|S^*|=c$.

Case 1. $c^+<a$. Then $|\{f(x)S^*: x\in T\}|\leqq 2^{|S^*|}=c^+<a$, and there are a set $T'\in[T]^a$ and a set $A\in[S]^{\geqq d^+}$ such that $f(x)S^*=A$ for $x\in T'$. Then

$$|\Pi(x\in T')f(x)S^*| = |A|\geqq d^+$$

which contradicts the hypothesis $f\in D(a, d)$.

Case 2. $c^+\geqq a$. Then $c^+=a$. Consider the family $\mathbf{F}=(f(x)S^*: x\in T)$. Since $f\in D(a, d)=D(c^+, d)$, we have $\mathbf{F}\in D(c^+, d)$. On the other hand an application of Lemma 8 (ii), with a, b, c, S, N in the Lemma replaced by c, d^+, d, S^*, T respectively, yields $\mathbf{F}\notin D(c^+, d)$. This contradiction proves Theorem 36.

($*$) THEOREM 37. *Let $a>a'$. Then*

(i) $a\to[[a, a, d, a']]$ *for* $d<a$;

(ii) $a\nrightarrow[[a, a, 1, a'^+]]$.

Part (i) can be deduced from Theorem 36 in the usual way by means of Lemma 3, and part (ii) is established by means of a trivial "canonical" counter example. Since Theorem 37 will not be used in our discussion we omit the proof.

($*$) THEOREM 38. *If $a\geqq\aleph_0$ and $c_0^+, c_1^+<a$, then*

$$\binom{a}{a}\to\binom{a,\ a\vee c_0}{a,\ c_1\vee a}.$$

PROOF. Let $n=\omega(a)$; $N=[0, n)$; $S=\{x_0,, \hat{x}_n\}_{\neq}$; $T=\{y_0,, \hat{y}_n\}_{\neq}$; $ST=\varnothing$; $[S, T] = I_0 +' I_1$.

Case 1. $a=a'$. We define set mappings f_0 and f_1 on N as follows.

$$f_0(v)=[0, v)\ \{\mu: x_\mu \in Q_1(y_v)\} \qquad \text{for } v<n;$$

$$f_1(\mu)=[0, \mu)\ \{v: y_v \in P_1(x_\mu)\} \qquad \text{for } \mu<n.$$

Then f_0 and f_1 are of order a.

Case 1a. $f_0 \notin D(a, c_0)$. Then there is $N' \in [N]^a$ with $|\Pi(v \in N')f_0(v)| \geqq c_0$. Put $X'=\Pi(v \in N')\, Q_1(y_v)$ and $Y'=\{y_v: v \in N'\}$. Then $[X', Y'] \subset I_1$; $|X'| \geqq c_0$; $|Y'|=a$; $(c_0, a) \in [I_1]$.

Case 1b. $f_1 \notin D(a, c_1)$. Then, by symmetry, $(a, c_1) \in [I_1]$.

Case 1c. $f_\varkappa \in D(a, c_\varkappa)$ for $\varkappa<2$. Then, by Theorem 36, there is a set $N_0 \in [N]^a$ which is f_0-free. By applying Theorem 36 to the set mapping $N_0 f_1(\mu)$ we obtain a set $N_1 \in [N_0]^a$ which is both f_0-free and f_1-free. Let $N_1=\{\lambda_0, , \hat{\lambda}_n\}_<$; $X=\{x_{\lambda_{2\mu}}: \mu<n\}$; $Y=\{y_{\lambda_{2\nu+1}}: \nu<n\}$. Let $x_\sigma \in X$ and $y_\tau \in Y$. If $\sigma<\tau$ then $\sigma \notin f_0(\tau)$; $x_\sigma \notin Q_1(y_\tau)$, and if $\sigma \geqq \tau$ then $\tau<\sigma$; $\tau \notin f_1(\sigma)$; $y_\tau \notin P_1(x_\sigma)$. In either case, $\{x_\sigma, y_\tau\} \in I_0$. Hence $[X, Y] \subset I_0$; $(a, a) \in [I_0]$.

Case 2. $a>a'$. Let $\varrho=\omega(a')$ and

$$c_0, c_1 \leqq a_0 < \hat{a}_\varrho < a = \sup(\sigma<\varrho) a_\sigma.$$

By Lemma 3A there are sets S_σ, T_σ and numbers $h(\sigma, \tau)<2$ such that $\Sigma'(\sigma<\varrho)\, S_\sigma \subset S$; $\Sigma'(\sigma<\varrho)\, T_\sigma \subset T$;

$$|S_\sigma|=|T_\sigma|=a_\sigma \qquad \text{for } \sigma<\varrho,$$

and

$$[S_\sigma, T_\tau] \subset I_{h(\sigma,\tau)} \qquad \text{for } \sigma, \tau<\varrho.$$

Let

$$U=\{u_0, , \hat{u}_\varrho\}_{\neq}; \quad W=\{w_0, , \hat{w}_\varrho\}_{\neq}; \quad UW=\varnothing.$$

Then

$$[U, W] = I_0^* +' I_1^*$$

where

$$I_0^*=\{\{u_\sigma, w_\tau\}: h(\sigma, \tau)=0\}.$$

Since a' is regular we have, by case 1,

$$\binom{a'}{a'} \to \binom{a', a' \vee 1}{a', 1 \vee a'}.$$

Then there are the following cases:

Case 2a. $(a', a') \in [I_0^*]$. Then there are sets $U_0 \in [U]^{a'}$ and $W_0 \in [W]^{a'}$ with $[U_0, W_0] \subset I_0^*$. Put $X_0=\Sigma(u_\sigma \in U_0)\, S_\sigma$ and $Y_0=\Sigma(w_\tau \in W_0)\, T_\tau$. Then

$$[X_0, Y_0] \subset I_0; \quad |X_0|=|Y_0|=a; \quad (a, a) \in [I_0].$$

Case 2b. $(a', 1) \in [I_1^*]$. Then there are a set $U_0 \in [U]^{a'}$ and an element $w_{\tau_0} \in W$ with $[U_0, \{w_{\tau_0}\}] \subset I_1^*$. Put $X_0=\Sigma(u_\sigma \in U_0)\, S_\sigma$ and $Y_0=T_{\tau_0}$. Then $[X_0, Y_0] \subset I_1$; $|X_0|=a$; $|Y_0|=a_{\tau_0} \geqq c_1$; $(a, c_1) \in [I_1]$.

Case 2c. $(1, a') \in [I_1^*]$. Then, by symmetry, $(c_0, a) \in [I_1]$. This proves Theorem 38.

(*) THEOREM 39. *If* $a \geqq \aleph_0$ *then*

$$\binom{a^+}{a^+} \to \binom{a,\ a^+ \vee a}{a,\ a \vee a^+}.$$

PROOF. We shall deal with the cases $a = a'$ and $a > a'$ simultaneously. Put $\varrho = \omega(a')$; $n = \omega(a)$; $m = \omega(a^+)$. Let $X_0 Y_0 = \varnothing$; $|X_0| = |Y_0| = a^+$; $[X_0, Y_0] = I_0 +' I_1$. We assume that

$$(a^+, a), (a, a^+) \notin [I_1] \tag{5}$$

and we shall deduce that $(a, a) \in [I_0]$. If $a > a'$ then we choose $a_0,, \hat{a}_\varrho$ with $a_\sigma = a'_\sigma$ for $\sigma < \varrho$ and

$$a' < a_0 < < \hat{a}_\varrho < a = \sup\,(\sigma < \varrho) a_\sigma. \tag{6}$$

If $A \in [X_0]^a$ and $B \in [Y_0]^{a^+}$, then

$$[A,\ B - \Sigma(x \in A) P_0(x)] \subset I_1.$$

Hence, by (5),

$$|B - \Sigma(x \in A) P_0(x)| \leqq a. \tag{7}$$

By symmetry, if $A \in [X_0]^{a^+}$ and $B \in [Y_0]^a$, then

$$|A - \Sigma(y \in B) Q_0(y)| \leqq a. \tag{8}$$

Now let

$$A \in [X_0]^a; \quad B \in [Y_0]^{a^+}; \quad a' < p = p' < a.$$

We shall show that there are a set $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{P}(A)$ and a function $U(X)$ from $\mathbf{A}^*$ into $\mathbf{P}(B)$ such that

$$|\mathbf{A}^*| \leqq a; \tag{9}$$

$$\mathbf{A}^* \subset [A]^p; \tag{10}$$

$$[X, U(X)] \subset I_0 \quad \text{for} \quad X \in \mathbf{A}^*; \tag{11}$$

$$|B - \Sigma(X \in \mathbf{A}^*) U(X)| \leqq a. \tag{12}$$

This is a generalization of Theorem 33 for the case $a > a'$. In the proof that follows we cannot apply Lemma 8 directly but our proof is based on the same ideas as Tarski's proof in the corresponding case.

Put $Y_1 = B\{y: |A Q_0(y)| < p\}$ and $Y_2 = B - Y_1$. If we assume that $|Y_1| = a^+$ then, since by Theorem 34 $\binom{a}{a^+} \to \binom{a\ a}{1\ a^+}$, it follows from $[A, Y_1] \subset I_0 + I_1$ that either $(a, 1) \in [[A, Y_1] I_0]$ which contradicts the definition of Y_1, or $(a, a^+) \in [[A, Y_1] I_1]$ which contradicts (5). Hence $|Y_1| \leqq a$. There is a partition $A = \Sigma'(\sigma < \varrho) A_\sigma$ with $|A_\sigma| = a_\sigma$ for $\sigma < \varrho$. Put $\mathbf{A}^* = \Sigma(\sigma < \varrho)[A_\sigma]^p$. Then $|\mathbf{A}^*| \leqq \leqq \Sigma(\sigma < \varrho)\, a_\sigma^p = a$, and (9) and (10) hold. We put $U(X) = Y_2\{y: X \subset A Q_0(y)\}$ for $X \in \mathbf{A}^*$. If, now, $y \in Y_2$ then there is $X \in \mathbf{A}^*$ with $y \in U(X)$. For otherwise $|A_\sigma Q_0(y)| < p$ for $\sigma < \varrho$ and, using the definition of Y_2 and the fact that $|\varrho| = a' < p = p'$, we obtain the contradiction $p \leqq |A Q_0(y)| = \Sigma(\sigma < \varrho) |A_\sigma Q_0(y)| < p$. This shows that $Y_2 = = \Sigma(X \in \mathbf{A}^*) U(X)$, and (11) and (12) follow. By symmetry we have: If $A \in [X_0]^{a^+}$;

$B \in [Y_0]^a$; $a' < p = p' < a$, then there are a set $\mathbf{B}^* \subset \mathbf{P}(B)$ and a function $V(Y)$ from $\mathbf{B}^*$ into $\mathbf{P}(A)$ such that

$$|\mathbf{B}^*| \leqq a; \tag{13}$$

$$\mathbf{B}^* \subset [B]^p; \tag{14}$$

$$[V(Y), Y] \subset I_0 \quad \text{for} \quad Y \in \mathbf{B}^*; \tag{15}$$

$$|A - \Sigma(Y \in \mathbf{B}^*) V(Y)| \leqq a. \tag{16}$$

Let $X_0 = \{x_{0,,} \hat{x}_m\}_{\neq}$; $Y_0 = \{y_{0,,} \hat{y}_m\}_{\neq}$; $S = [0, m)$. For $X \subset X_0$; $Y \subset Y_0$; $S' \subset S$ put $M(X) = \{\mu : x_\mu \in X\}$; $M(Y) = \{\nu : y_\nu \in Y\}$;

$$X(S') = \{x_\mu : \mu \in S'\}; \quad Y(S') = \{y_\nu : \nu \in S'\}.$$

We now define a ramification system $\mathbf{R}$ on S of length ϱ and order n. We use the notation of Lemma 1. Let $\sigma < \varrho$. We assume that for $\tau < \sigma$ and $\nu_{0,,} \nu_\tau < n$ the sets $F(\nu_{0,,} \hat{\nu}_\tau)$ and $S(\nu_{0,,} \nu_\tau)$ have already been defined. Now let $\nu_{0,,} \hat{\nu}_\sigma < n$. We have to define $F(\nu_{0,,} \hat{\nu}_\sigma)$ and $S(\nu_{0,,} \nu_\sigma)$ for $\nu_\sigma < n$. Throughout the rest of the whole proof we abbreviate, whenever possible, the sequence $\nu_{0,,} \hat{\nu}_\sigma$ to the single letter ν. If $|S'(\nu)| \leqq a$ then we put $F(\nu) = S'(\nu)$ and $S(\nu, \nu_\sigma) = \varnothing$ for $\nu_\sigma < n$. Now let $|S'(\nu)| = a^+$. We recall that ordinals of the form 2λ are called even and those of the form $2\lambda + 1$ odd.

Case 1. $a = a'$.

Case 1a. σ even. Then we choose

$$R_0(\nu) = \{x(\nu, \nu_\sigma) : \nu_\sigma < n\}_{\neq} \subset [X(S'(\nu))]^a.$$

Put

$$E_1(\nu) = Y\big(S'(\nu)\big) - \Sigma(\nu_\sigma < n) P_0\big(x(\nu, \nu_\sigma)\big);$$

$$R(\nu) = M\big(R_0(\nu)\big); \quad E(\nu) = M\big(E_1(\nu)\big); \quad F(\nu) = R(\nu) + E(\nu).$$

Then $S'(\nu) - F(\nu) = \Sigma(\nu_\sigma < n) S(\nu, \nu_\sigma)$, where

$$S(\nu, \nu_\sigma) = S'(\nu) M\big(P_0(x(\nu, \nu_\sigma))\big) - F(\nu) \qquad \text{for } \nu_\sigma < n.$$

This follows by a straightforward application of the definitions given above.

Case 1b. σ odd. Then choose

$$R_1(\nu) = \{y(\nu, \nu_\sigma) : \nu_\sigma < n\}_{\neq} \subset [Y(S'(\nu))]^a.$$

Put

$$E_0(\nu) = X\big(S'(\nu) - \Sigma(\nu_\sigma < n) Q_0\big(y(\nu, \nu_\sigma)\big);$$

$$R(\nu) = M\big(R_1(\nu)\big); \quad E(\nu) = M\big(E_0(\nu)\big); \quad F(\nu) = R(\nu) + E(\nu).$$

Then $S'(\nu) - F(\nu) = \Sigma(\nu_\sigma < n) S(\nu, \nu_\sigma)$, where

$$S(\nu, \nu_\sigma) = S'(\nu) M\big(Q_0(y(\nu, \nu_\sigma))\big) - F(\nu) \qquad \text{for } \nu_\sigma < n.$$

This follows by symmetry from case 1a.

Case 2. $a > a'$.

Case 2a. σ even. Then choose $R_0(v) \in [X(S'(v))]$. Let*

$$\mathbf{A}^*(v) = \{X(v, v_\sigma) : v_\sigma < n\}$$

be a subset of $\mathbf{P}(R_0(v))$ and $U(v, X)$ a function on $\mathbf{A}^*(v)$ such that (9)—(12) hold for $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(v)$; $U(X) = U(v, X)$;

$$A = R_0(v); \quad B = Y(S'(v)); \quad p = a_\sigma.$$

Put

$$E_1(v) = Y(S'(v)) - \Sigma(v_\sigma < n)\, U(v, X(v, v_\sigma));$$

$$R(v) = M(R_0(v)); \quad E(v) = M(E_1(v)); \quad F(v) = R(v) + E(v).$$

Then $S'(v) - F(v) = \Sigma(v_\sigma < n)\, S(v, v_\sigma)$, where

$$S(v, v_\sigma) = M(U(v, X(v, v_\sigma))) - F(v) \qquad \text{for } v_\sigma < n.$$

This follows from our definitions.

Case 2b. σ odd. Then choose $R_1(v) \in [Y(S'(v))]^a$. Let

$$\mathbf{B}^*(v) = \{Y(v, v_\sigma) : v_\sigma < n\}$$

be a subset of $\mathbf{P}(R_1(v))$ and $V(v, Y)$ a function on $\mathbf{B}^*(v)$ such that (13)—(16) hold for $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}^*(v)$; $V(Y) = V(v, Y)$;

$$A = X(S'(v)); \quad B = R_1(v); \quad p = a_\sigma.$$

Put

$$E_0(v) = X(S'(v)) - \Sigma(v_\sigma < n)\, V(v, Y(v, v_\sigma));$$

$$R(v) = M(R_1(v)); \quad E(v) = M(E_0(v)); \quad F(v) = R(v) + E(v).$$

Then $S'(v) - F(v) = \Sigma(v_\sigma < n)\, S(v, v_\sigma)$, where

$$S(v, v_\sigma) = M(V(v, Y(v, v_\sigma))) - F(v) \qquad \text{for } v_\sigma < n.$$

This follows by symmetry from case 2a. We have completed the definition of the ramification system $\mathbf{R}$ on S and, irrespective whether $a = a'$ or $a > a'$,

(17) $\mathbf{R}$ is of length ϱ and of order n.

We now define for $v_\sigma < n$ a set $f(v, v_\sigma) \subset R(v)$. If $|S'(v)| \leqq a$ then we put $f(v, v_\sigma) = \varnothing$. Now let $|S'(v)| = a^+$.

Case I. $a = a'$.

Case Ia. σ even. Then put $f(v, v_\sigma) = M(\{x(v, v_\sigma)\})$. Then

$$f(v, v_\sigma) \subset M(R_0(v)) = R(v).$$

Case Ib. σ odd. Then put $f(v, v_\sigma) = M(\{y(v, v_\sigma)\})$. Then

$$f(v, v_\sigma) \subset M(R_1(v)) = R(v).$$

Case II. $a > a'$.

* There is no risk of confusing the function $X(S')$ defined for subsets S' of S, and the function $X(v, v_\sigma)$ defined for sequences $v_0, , v_\sigma$. Similarly later with $Y(S')$ and $Y(v, v_\sigma)$.

Case IIa. σ even. Then put $f(v, v_\sigma) = M(X(v, v_\sigma))$. Then

$$f(v, v_\sigma) \subset M(R_0(v)) = R(v).$$

Case IIb. σ odd. Then put $f(v, v_\sigma) = M(Y(v, v_\sigma))$. Then

$$f(v, v_\sigma) \subset M(R_1(v)) = R(v).$$

This completes the definition of $f(v, v_\sigma)$ for $\sigma < \varrho$ and $v_0,, v_\sigma < n$. We have in any of our cases

$$F(v) = R(v) + E(v); \quad f(v, v_\sigma) \subset R(v)$$

and, by definition,

$$|R(v)| \leqq a. \tag{18}$$

We also have

$$|E(v)| \leqq a. \tag{19}$$

For in case 1 this follows from (7) and (8), and in case 2 from (12) and (16). Now we have, using (17), (18) and (19),

$$|S| = a^+; \quad |\varrho| < a^+; \quad |n| < a^+; \quad |F(v)| < a^+.$$

Hence Lemma 1 (v) applies to **R** and yields numbers $v_0,, \hat{v}_\varrho < n$ such that

$$\Pi(\sigma < \varrho) S(v, v_\sigma) \neq \varnothing.$$

From now on $v_0,, \hat{v}_\varrho$ are fixed. Put $Z_\sigma = f(v, v_\sigma)$ for $\sigma < \varrho$;

$$S_0 = \{2\tau : \tau < \varrho\}; \quad S_1 = \{2\tau + 1 : \tau < \varrho\};$$

$$X^* = \Sigma(\sigma \in S_0) X(Z_\sigma); \quad Y^* = \Sigma(\sigma \in S_1) Y(Z_\sigma).$$

To complete the proof it suffices to show that

$$X^* \in [X_0]^a; \quad Y^* \in [Y_0]^a; \tag{20}$$

$$[X^*, Y^*] \subset I_0. \tag{21}$$

PROOF OF (20). $X^* \subset X_0$; $Y^* \subset Y_0$. By Lemma 1 (i),

$$R(v_0,, \hat{v}_\sigma) R(v_0,, \hat{v}_\tau) = \varnothing \qquad \text{for } \sigma < \tau < \varrho.$$

Case A. $a = a'$. Then $|Z_\sigma| = |f(v, v_\sigma)| = 1$ and hence

$$|X^*| = |S_0| = a; \quad |Y^*| = |S_1| = a.$$

Case B. $a > a'$. Let $\sigma < \varrho$. If σ is even then, by definition of $f(v, v_\sigma)$ and (10), $|Z_\sigma| = |M(X(v, v_\sigma))| = a_\sigma$, and if σ is odd then $|Z_\sigma| = |M(Y(v, v_\sigma))| = a_\sigma$. Hence $|X^*| = \Sigma(\sigma \in S_0) a_\sigma = a$; $|Y^*| = \Sigma(\sigma \in S_1) a_\sigma = a$.

PROOF OF (21). Let $\sigma \in S_0$; $\tau \in S_1$. Then $\sigma \neq \tau$. It suffices to show that

$$[X(Z_\sigma), Y(Z_\tau)] \subset I_0. \tag{22}$$

Case α. $\sigma < \tau$. Then

$$Z_\tau = f(v_0,, v_\tau) \subset R(v_0,, \hat{v}_\tau) \subset S'(v_0,, \hat{v}_\tau) \subset S(v_0,, v_\sigma).$$

Case $\alpha 1$. $a=a'$. Then

$$[X(Z_\sigma), Y(Z_\tau)]\subset[\{x(v_0,, v_\sigma), Y(S(v_0,, v_\sigma))]\subset[\{x(v, v_\sigma)\}\, Y(M(P_0(x(v, v_\sigma))))] =$$
$$= [\{x(v, v_\sigma)\}, P_0(x(v, v_\sigma))]\subset I_0.$$

Case $\alpha 2$. $a>a'$. Then $Z_\sigma=M\big(X(v, v_\sigma)\big)$ and

$$S(v, v_\sigma)\subset M\big(U(v, X(v, v_\sigma))\big).$$

Hence

$$Y(Z_\tau)\subset Y\big(S(v_0,, v_\sigma)\big)\subset U\big(v, X(v, v_\sigma)\big).$$

But $X(Z_\sigma)=X(v, v_\sigma)$. By (11), when applied to $\mathbf{A}^*(v)$,

$$[X(Z_\sigma), Y(Z_\tau)]\subset[X(v, v_\sigma), U(v, X(v, v_\sigma))]\subset I_0.$$

This completes the proof of (22) in case α.

Case β. $\tau<\sigma$. Then (22) follows exactly as in case α, for reasons of symmetry. This proves Theorem 39.

As an immediate consequence of Theorem 39 we have

(∗) COROLLARY 17.

$$\binom{a^+}{a^+}\to\binom{a\ a}{a\ a}\quad\text{for}\quad a\geqq\aleph_0.$$

In [1] it is proved that $\binom{\aleph_0}{\aleph_1}\to\binom{\aleph_0\ \aleph_0}{\aleph_1\ \aleph_0}$. Using (∗) we shall now prove the following generalization of this result.

(∗) THEOREM 40. *If* $a'=\aleph_0$ *then*

$$\binom{a}{a^+}\to\binom{a\ \ a}{a^+\ \aleph_0}.$$

PROOF. Let $|A|=a$; $|B|=a^+$; $AB=\varnothing$; $[A, B] = I_0+I_1$;

$$(a, a^+)\notin[I_0].$$

In the proof that follows we shall always suppose that $A_\nu\in[A]^a$ and $B_\nu\in[B]^{a^+}$. We can write $a = a_0++\hat{a}_\omega$, where $a_0,, \hat{a}_\omega<a$. We define inductively D_ν, B_ν, A_ν, y_ν for $\nu<\omega$ as follows. By Theorem 33 there are $D_0\in[A]^{a_0}$ and $B_0\subset B$ with $[D_0, B_0]\subset I_1$. By Theorem 34 there are $A_0\subset A$ and $y_0\in B_0$ with $[A_0, \{y_0\}]\subset I_1$. Generally, for $1\leqq\nu<\omega$: By Theorem 33 there are $D_\nu\in[A_{\nu-1}]^{a_\nu}$ and $B_\nu\subset B_{\nu-1}-\{y_{\nu-1}\}$ with $[D_\nu, B_\nu]\subset I_1$. By Theorem 34 there are $A_\nu\subset A_{\nu-1}$ and $y_\nu\in B_\nu$ with $[A_\nu, \{y_\nu\}]\subset I_1$. Put $X = D_0++\hat{D}_\omega$; $Y=\{y_0,, \hat{y}_\omega\}$. Then $X\in[A]^a$ and $Y\in[B]^{\aleph_0}$. If $r\leqq s$ then $[D_r, \{y_s\}]\subset[D_r, B_s]\subset[D_r, B_r]\subset I_1$. If $r>s$ then $[D_r, \{y_s\}]\subset[A_s, \{y_s\}]\subset I_1$. Hence $[X, Y]\subset I_1$, and Theorem 40 follows.

(∗) THEOREM 41. *If* $a>a'$ *and* $b<a$, *then*

$$\binom{a}{a^+}\to\binom{a\ a}{a\ b}.$$

PROOF. We may assume that $a'<b = b'<a$. Put $\varrho=\omega(a')$. Let $b<a_0<<\hat{a}_\varrho<$ $<a = \sup(\sigma<\varrho)a_\sigma$; $a_\sigma=a'_\sigma$ for $\sigma<\varrho$.

$$X_0Y_0 = \varnothing; \quad |X_0|=a; \quad |Y_0|=a^+; \quad [X_0, Y_0] = I_0+'I_1.$$

We may suppose that

$$(a, b)\notin[I_1]. \tag{23}$$

Now let $a'<p = p'<a$. Let $A\in[X_0]^a$ and $B\in[Y_0]^{a^+}$. Then there are a set $\mathbf{A}^*\subset\mathbf{P}(A)$ and a function $U(X)$ from $\mathbf{A}^*$ into $\mathbf{P}(B)$ such that

$$|\mathbf{A}^*|\leqq a; \tag{24}$$

$$\mathbf{A}^*\subset[A]^p; \tag{25}$$

$$[X, U(X)]\subset I_0 \quad \text{for} \quad X\in\mathbf{A}^*; \tag{26}$$

$$|B-\Sigma(X\in\mathbf{A}^*)U(X)| \leqq a. \tag{27}$$

The proof is identical, including the notation, with that of (9)—(12) in the proof of Theorem 39. We now define a ramification system $\mathbf{R}$ on $S=Y_0$ of length ϱ and order $n=\omega(a)$. Let $\sigma<\varrho$ and $v_0,, \hat{v}_\sigma<n$. We write v in place of $v_0,, \hat{v}_\sigma$.

If $|S'(v)|\leqq a$ then put $R(v)=\varnothing$ and $E(v)=F(v)=S'(v)$ and $S(v, v_\sigma)=\varnothing$ for $v_\sigma<n$.

Now let $|S'(v)|=a^+$. Then we choose any set $R(v)\in[S'(v)]^a$. Then there are a set $\mathbf{A}^*(v)\subset\mathbf{P}(X_0)$ and a function $U(v, X)$ on $\mathbf{A}^*(v)$ such that (24)—(27) hold for $A=X_0$; $B=S'(v)-R(v)$; $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^*(v)$; $U(X)=U(v, X)$ and $p=a_\sigma$. We can write $\mathbf{A}^*(v) = \{X(v, v_\sigma): v_\sigma<n\}$. Put $S(v, v_\sigma)=U\big(v, X(v, v_\sigma)\big)$ for $v_\sigma<n$;

$$E(v) = S'(v)-\Sigma(v_\sigma<n)S(v, v_\sigma); \quad F(v) = R(v)+E(v).$$

Then

$$S'(v)-F(v) = \Sigma(v_\sigma<n)S(v, v_\sigma).$$

This defines $\mathbf{R}$. Lemma 1 (v) applies. For we have $|S|=a^+$; $|\varrho| = a'<a^+$; $|n| = a<a^+$;

$$|F| = |R+(E-R)| = |R+\big((S'(v)-R)-\Sigma(v_\sigma<n)U(v, X(v, v_\sigma))\big)| \leqq$$
$$\leqq |R|+|(S'(v)-R)-\Sigma\big(X\in\mathbf{A}^*(v)\big)U(v, X)| \leqq a.$$

By Lemma 1 (v) there are $v_0,, \hat{v}_\varrho<n$ with $S'(v_0,, \hat{v}_\varrho)\neq\varnothing$. From now on $v_0,, \hat{v}_\varrho$ are fixed. Let $\sigma<\varrho$. Then $|S'(v)|=a^+$. There is a one-one map

$$X\to H(v, X)$$

of $[X_0]^{a_\sigma}$ onto $[R(v)]^{a_\sigma}$. Put

$$f(\sigma)=H\big(v, X(v, v_\sigma)\big).$$

Then $f(\sigma)\in[R(v)]^{a_\sigma}$. Put $A_\sigma=X(v, v_\sigma)$; $B_\sigma=f(\sigma)$;

$$A = A_0++\hat{A}_\varrho; \quad B = B_0++\hat{B}_\varrho.$$

Then

$$A\in[X_0]^a; \quad B\in[Y_0]^a. \tag{28}$$

If $\sigma<\tau<\varrho$, then $B_\tau = f(\tau)\subset R(v_0,, \hat{v}_\tau)\subset S'(v_0,, \hat{v}_\tau)\subset S(v, v_\sigma)$. By (26), $[X(v, v_\sigma), U(v, X(v, v_\sigma))]\subset I_0$. Hence

$$[A_\sigma, B_\tau]\subset I_0 \quad \text{for} \quad \sigma<\tau<\varrho. \tag{29}$$

By Lemma 3A there are sets $A'_\sigma\in[A]^{a_\sigma}$ and $B'_\sigma\in[B]^{a_\sigma}$ and numbers $h(\sigma,\tau)<2$ such that $A'_\sigma A'_\tau = B'_\sigma B'_\tau = \varnothing$ for $\sigma<\tau<\varrho$, and

$$[A'_\sigma, B'_\tau]\subset I_{h(\sigma,\tau)} \quad \text{for} \quad \sigma,\tau<\varrho. \tag{30}$$

Let $M_0=\{u_0,, \hat{u}_\varrho\}_{\neq}$; $M_1=\{v_0,, \hat{v}_\varrho\}_{\neq}$; $M_0M_1=\varnothing$;

$$[M_0, M_1] = I_1^* +' I_1^*, \tag{31}$$

where

$$I_0^*=\{\{u_\sigma, v_\tau\}: h(\sigma,\tau)=0\}.$$

By Theorem 38,

$$\binom{a'}{a'}\to\binom{a', a'\vee 1}{a', 1\vee a'}.$$

By applying this formula to the partition (31) we see that we have only to consider the following three cases:

Case 1. There are $M\in[[0,\varrho)]^{a'}$ and $\tau_0<\varrho$ such that

$$h(\sigma,\tau_0)=1 \quad \text{for} \quad \sigma\in M.$$

Then, by (30), $[A'', B'_{\tau_0}]\subset I_1$, where $A''=\Sigma(\sigma\in M)A'_\sigma$. Then $|A''|=a$; $(a, a_{\tau_0})\in[I_1]$ which contradicts (23).

Case 2. There are $\sigma_0<\varrho$ and $M\in[[0,\varrho)]^{a'}$ such that $h(\sigma_0,\tau)=1$ for $\tau\in M$. Then $[A'_{\sigma_0}, B'']\subset I_1$, where $B''=\Sigma(\tau\in M)B'_\tau$. Then $|B''|=a$. Choose $z_0\in A'_{\sigma_0}$. Then $[\{z_0\}, B'']\subset I_1$. Also, there is $\sigma_1<\varrho$ such that $z_0\in A_{\sigma_1}$. Hence, by (29), $B''\subset B_0++B_{\sigma_1}$, and we obtain the contradiction

$$a = |B''| \leqq |B_0++B_{\sigma_1}| = a_0++a_{\sigma_1}<a.$$

Case 3. There are sets $M', M''\in[[0,\varrho)]^{a'}$ such that

$$h(\sigma,\tau)=0 \quad \text{for} \quad \sigma\in M' \text{ and } \tau\in M''.$$

Put $A''=\Sigma(\sigma\in M')A'_\sigma$ and $B''=\Sigma(\tau\in M'')B'_\tau$. Then $A''\in[X_0]^a$; $B''\in[Y_0]^a$; $[A'', B'']\subset\subset I_0$. This proves Theorem 41.

(∗) THEOREM 42. *If* $a'=\aleph_0$ *then* $\binom{a}{a^+}\to\binom{a\,a}{a\,a}$.

PROOF. If $a=\aleph_0$ the assertion follows from Theorem 40. Now let $a>\aleph_0$ so that $a>a'=\aleph_0$. Let $|S|=a$; $|T|=a^+$; $ST=\varnothing$; $[S, T] = I_0+I_1$. The letter A will always denote subsets of S and the letter B subsets of T. Assume

$$(a, a)\nmid[I_0]. \tag{32}$$

Let

$$a_0<<\hat{a}_\omega<a = a_0++\hat{a}_\omega; \quad |A|=a; \quad |B|=a^+; \quad n<\omega.$$

Then, by (32) and Theorem 33, there are A', B' such that

$$A'\in[A]^{a_n}; \quad B'\in[B]^{a^+}; \quad [A', B']\subset I_1. \tag{33}$$

By (32) and Theorem 41, there are A'', B'' such that

$$A'' \in [A]^{a}; \quad B'' \in [B]^{a_n}; \quad [A'', B''] \subset I_1. \tag{34}$$

We now define inductively for $n < \omega$ the sets

$$A_n, A'_n, A''_n, A^*_n, B_n, B'_n, B''_n, B^*_n.$$

Put $A^*_0 = S$; $B^*_0 = T$. Let $n < \omega$, and suppose that A^*_v and B^*_v have been defined for $v \leqq n$ and that $A_v, A'_v, A''_v, B_v, B'_v, B''_v$ have been defined for $v < n$. Suppose also that $|A^*_n| = a$ and $|B^*_n| = a^+$. Then, applying (33) to $A = A^*_n$ and $B = B^*_n$, we find A'_n and B'_n such that

$$A'_n \in [A^*_n]^{a_n}; \quad B'_n \in [B^*_n]^{a^+}; \quad [A'_n, B'_n] \subset I_1. \tag{35}$$

Applying (34) to $A = A^*_n$ and $B = B'_n$, we find A''_n and B''_n such that

$$A''_n \in [A^*_n]^{a}; \quad B''_n \in [B'_n]^{a_n}; \quad [A''_n, B''_n] \subset I_1. \tag{36}$$

Put

$$A_n = A'_n; \quad B_n = B''_n; \quad A^*_{n+1} = A''_n; \quad B^*_{n+1} = B'_n. \tag{37}$$

This completes the inductive definition. We have, for $n < \omega$,

$$A^*_n \supset A^*_{n+1}; \quad B^*_n \supset B^*_{n+1}; \quad |A^*_n| = a; \quad |B^*_n| = a^+; \tag{38}$$

$$|A_n| = |B_n| = a_n. \tag{39}$$

Put $A = A_0 + + \hat{A}_\omega$ and $B = B_0 + + \hat{B}_\omega$. Then, by (39), $|A| = |B| = a$. Let $m, n < \omega$. It suffices to prove that

$$[A_m, B_n] \subset I_1. \tag{40}$$

If $m \leqq n$ then, by (37), (36), (38), (35),

$$A_m = A'_m; \quad B_n = B''_n \subset B'_n = B^*_{n+1} \subset B^*_{m+1} = B'_m,$$

$$[A_m, B_n] \subset [A'_m, B'_m] \subset I_1.$$

If $m > n$ then, by (37), (35), (38), (36),

$$B_n = B''_n; \quad A_m = A'_m \subset A^*_m \subset A^*_{n+1} = A''_n,$$

$$[A_m, B_m] \subset [A''_n, B''_n] \subset I_1.$$

This proves (40) and completes the proof of Theorem 42.

23. COUNTER EXAMPLES FOR THE CASES $\alpha = \beta$ AND $\alpha + 1 = \beta$

(*) THEOREM 43.

(i) *If* $a' > \aleph_0$, *then* $\binom{a^+}{a^+} \nrightarrow \binom{a, \; a \vee a^+}{a^+, \; \aleph_0 \vee 1}$.

(ii) *If* $a' = \aleph_0$, *then* $\binom{a^+}{a^+} \nrightarrow \binom{a, \; a \vee a^+}{a^+, \; \aleph_2 \vee 1}$.

(∗) COROLLARY 18. *If* $a' > \aleph_0$, *then*

$$\binom{a^+}{a^+} \nrightarrow \binom{a\ \ a}{a^+\ \aleph_0} \quad \text{and} \quad \binom{a}{a^+} \nrightarrow \binom{a\ \ a}{a^+\ \aleph_0}.$$

(∗) COROLLARY 19. *If* $a' = \aleph_0$, *then*

$$\binom{a^+}{a^+} \nrightarrow \binom{a\ \ a}{a^+\ \aleph_2} \quad \text{and} \quad \binom{a}{a^+} \nrightarrow \binom{a\ \ a}{a^+\ \aleph_2}.$$

PROOF OF THEOREM 43. Put $m = \omega(a)$ and $n = \omega(a^+)$. Let

$$ST = \varnothing; \quad |S| = |T| = a^+; \quad T = \{y_0, , \hat{y}_n\}_{\neq}.$$

By (∗) we can write $[S]^a = \{X_0, , \hat{X}_n\}_{\neq}$. Put $\mathbf{F}_\nu = \{X_0, , \hat{X}_\nu\}$ for $\nu < n$. We shall define a partition $[S, T] = I_0 + I_1$ by defining the sets $Q_1(y_\nu)$ for $\nu < n$. First we shall define elements $x(\nu, \sigma)$ of S for $\nu < n$ and $\sigma < m$. Let $\nu < n$ and suppose that $x(\mu, \sigma)$ has been defined for $\mu < \nu$ and $\sigma < m$. We have to define $x(\nu, \sigma)$ for $\sigma < m$.

If $\nu < m$ then we choose any set

$$\{x(\nu, 0), , \hat{x}(\nu, m)\}_{\neq} \subset S - \Sigma(\mu < \nu)\{x(\mu, 0), , \hat{x}(\mu, m)\}. \tag{1}$$

Now let $\nu \geqq m$. Then we can write $[0, \nu) = \{\mu(\nu, 0), , \hat{\mu}(\nu, m)\}_{\neq}$. Put $X_{\mu(\nu,\varrho)} = X(\nu, \varrho)$ and $y_{\mu(\nu,\varrho)} = y(\nu, \varrho)$ for $\varrho < m$. Then $\mathbf{F}_\nu = \{X(\nu, \sigma): \sigma < m\}_{\neq}$. We now define $x(\nu, 0), , \hat{x}(\nu, m)$ inductively. Let $\sigma < m$ and, let $x(\nu, 0), , \hat{x}(\nu, \sigma)$ be defined already. Put

$$T(\nu, \sigma) = \{x(\nu, \tau): \tau < \sigma\} + \Sigma(\varrho < \sigma)\{x(\mu(\nu, \varrho), \tau): \tau \leqq \sigma\}. \tag{2}$$

Then

$$|T(\nu, \sigma)| \leqq |\sigma| + |\sigma + 1| \cdot |\sigma| < a. \tag{3}$$

Hence, since $|X(\nu, \sigma)| = a$, we can choose

$$x(\nu, \sigma) \in X(\nu, \sigma) - T(\nu, \sigma). \tag{4}$$

This completes the definition of the $x(\nu, \sigma)$. We now put

$$Q(y_\nu) = \{x(\nu, \sigma): \sigma < m\} \quad \text{for} \quad \nu < n.$$

By (1), (2) and (4) we have

$$x(\nu, \tau) \neq x(\nu, \sigma) \quad \text{for} \quad \nu < n \quad \text{and} \quad \tau < \sigma < m. \tag{5}$$

Also,

$$Q_1(y_\nu) \subset S; \quad |Q_1(y_\nu)| = a \quad \text{for} \quad \nu < n. \tag{6}$$

We now prove that

$$\text{if } A_0 \in [S]^a \text{ and } B_0 \in [T]^{a^+}, \text{ then } [A_0, B_0] \not\subset I_0. \tag{7}$$

There is $\mu_0 < n$ with $A_0 = X_{\mu_0}$. Then, since $|B_0| = a^+$, there is ν_0 such that

$$m, \mu_0 < \nu_0 < n, \quad \text{and} \quad y_{\nu_0} \in B_0.$$

Then $X_{\mu_0} \in \mathbf{F}_{\nu_0}$ and hence $X_{\mu_0} = X(\nu_0, \sigma_0)$ for some $\sigma_0 < m$. Then, by (4), $x(\nu_0, \sigma_0) \in \in X(\nu_0, \sigma_0)$. Also, $x(\nu_0, \sigma_0) \in Q_1(y_{\nu_0})$. Hence $\{x(\nu_0, \sigma_0), y_{\nu_0}\} \in [A_0, B_0]I_1$, and (7)

follows. Next, we prove that

$$(8)\qquad \begin{cases} \text{if } \mu<\nu<n, \text{ then there is } \varrho(\mu,\nu)<m \text{ such that} \\ \text{whenever } \sigma>\varrho(\mu,\nu) \text{ and } x(\mu,\tau)=x(\nu,\sigma), \text{ then } \tau>\sigma. \end{cases}$$

In fact, if $\nu<m$ then we may put $\varrho(\mu,\nu)=0$. Now let $\nu\geqq m$. Then $\mu=\mu(\nu,\varrho_0)$ for some $\varrho_0<m$. We put $\varrho(\mu,\nu)=\varrho_0$. Then, if $\tau\leqq\sigma$ we have, by (2), $x(\mu,\tau)=$ $=x(\mu(\nu,\varrho_0),\tau)\in T(\nu,\sigma)$ and, by (4), $x(\mu,\tau)\neq x(\nu,\sigma)$. This proves (8). In view of (6) and (7) the parts (i) and (ii) of Theorem 43 follow from (9) and (10) respectively, where:

(9) If $a'>\aleph_0$ and $B\in[T]^{\aleph_0}$, then $|\Pi(y\in B)\,Q_1(y)|<a$.

(10) If $a'=\aleph_0$ and $B'\in[T]^{\aleph_2}$, then $|\Pi(y\in B')\,Q_1(y)|<a$.

PROOF OF (9). $B=\{y_{\nu_0},,\hat{y}_{\nu_l}\}$, where $\nu_0<<\hat{\nu}_l<n$ and $l\geqq\omega$. Since $a'>\aleph_0$, there is $\varrho_0<m$ such that

$$(11)\qquad \varrho(\nu_p,\nu_q)<\varrho_0 \quad \text{for} \quad p<q<\omega.$$

Let $x\in\Pi(p<\omega)\,Q_1(y_{\nu_p})$. Then there are $\sigma_p<m$ with $x=x(\nu_p,\sigma_p)$, for $p<\omega$. If $\sigma_0,,\hat{\sigma}_\omega>\varrho_0$ then, by (8), $\sigma_0>>\hat{\sigma}_\omega$ which is impossible. Hence there is $p_0<\omega$ with $\sigma_{p_0}\leqq\varrho_0$. Then $x\in\{x(\nu_{p_0},\sigma)\colon\sigma\leqq\varrho_0\}$ and hence

$$|\Pi(p<\omega)\,Q_1(y_{\nu_p})| \leqq |\Sigma(p<\omega)\,\{x(\nu_p,\sigma)\colon\sigma\leqq\varrho_0\}| \leqq |\varrho_0+1|\,\aleph_0<a.$$

This proves (9).

PROOF OF (10). Let $a_0<<\hat{a}_\omega<a=\sup(p<\omega)a_p$. Put

$$f(\varrho)=\min(\omega(a_\nu)>\varrho)\nu \quad \text{for} \quad \varrho<m.$$

Then $f(\varrho)<\omega$ and $\varrho<\omega(a_{f(\varrho)})$ for $\varrho<m$. We have

$$[B']^2=\Sigma(\lambda<\omega)\,I_\lambda^* \qquad \text{(partition } \Delta^*),$$

where, for $\lambda<\omega$,

$$I_\lambda^*=\{\{y_\mu,y_\nu\}\colon\mu<\nu<n\wedge y_\mu,y_\nu\in B'\wedge f(\varrho(\mu,\nu))=\lambda\}.$$

By Theorem I, $\aleph_2\to(\aleph_0)^2_{\aleph_0}$. Hence there are a set $B\in[B']^{\aleph_0}$ and a number $\lambda<\omega$ such that $[B]^2\subset I_\lambda^*$. We have $B=\{y_{\nu_0},,\hat{y}_{\nu_l}\}$, where $l\geqq\omega$ and $\nu_0<<\hat{\nu}_l<n$. It suffices to prove that $|\Pi(p<\omega)\,Q_1(y_{\nu_p})|<a$. By definition of I_λ^* we have

$$f(\varrho(\nu_p,\nu_q))=\lambda \quad \text{for} \quad p<q<\omega.$$

Put $\omega(a_\lambda)=\varrho_0$. Then

$$\varrho(\nu_p,\nu_q)<\omega(a_{f(\varrho(\nu_p,\nu_q))})=\omega(a_\lambda)=\varrho_0$$

for $p<q<\omega$. From here on the proof of (10) is identical with the proof of (9) from (11) onwards. This proves Theorem 43.

REMARK. In the proof of (ii), more precisely, in the proof of (10), we used the relation $\aleph_2\to(\aleph_0)^2_{\aleph_0}$ although by Theorem I the stronger relation $\aleph_2\to(\aleph_1)^2_{\aleph_0}$ holds. But in spite of this our proof does not in fact establish (ii) with $\aleph_2$ replaced by $\aleph_1$ since $\aleph_1\not\to(\aleph_0)^2_{\aleph_0}$, by Theorem I, and we cannot prove any special property of the partition Δ^* which would lead to the sharper result.

(*) 24. SUMMARY OF THE RESULTS ABOUT THE CASES $\alpha=\beta$ AND $\alpha+1=\beta$. PROBLEMS

Throughout this section (*) is supposed. We use the notation introduced at the beginning of Part II. We shall always assume that

$$\aleph_0 \leqq a \leqq b; \quad 0<a_0, a_1 \leqq a; \quad 0<b_0, b_1 \leqq b.$$

Case I. $a^+=b$. We have to discuss the relation

$$\binom{a}{a^+} \to \binom{a_0\ a_1}{b_0\ b_1} \tag{1}$$

where $a \geqq \aleph_0$.

Case IA. $\min(a_0, a_1)<a$. Then (1) holds by Theorem 33.

Case IB. $a_0=a_1=a$.

Case IB (i). $\max(b_0, b_1)=a^+$. Then it suffices to discuss the relation

$$\binom{a}{a^+} \to \binom{a\ \ a}{a^+\ b_1}. \tag{2}$$

Here we have the following results:

(2) is true if $a'>\aleph_0$ and $b_1<\aleph_0$ (Theorem 34)
(2) is true if $a'=\aleph_0$ and $b_1=\aleph_0$ (Theorem 40)
(2) is false if $a'>\aleph_0$ and $b_1=\aleph_0$ (Corollary 18)
(2) is false if $a \geqq \aleph_0$ and $b_1=a^+$ (Corollary 16)
(2) is false if $a'=\aleph_0$ and $b_1=\aleph_2$ (Corollary 19).

We do not know if (2) holds when $a>a'=\aleph_0$ and $b_1=\aleph_1$. Here the simplest unsolved problem is

PROBLEM 10.

$$? \binom{\aleph_\omega}{\aleph_{\omega+1}} \to \binom{\aleph_\omega\ \ \aleph_\omega}{\aleph_{\omega+1}\ \aleph_1}.$$

Case IB (ii). $b_0, b_1<a^+$. Here one might conjecture the following best possible result:

$$\binom{a}{a^+} \to \binom{a\ a}{a\ a} \quad \text{for} \quad a \geqq \aleph_0. \tag{3}$$

We distinguish three cases:

Case IB (ii) a. $a'=\aleph_0$. Then (3) holds by Theorem 42.

Case IB (ii) b. $a>a'>\aleph_0$. Then Theorem 41 shows that the following result, which is weaker than (3), holds:

$$\binom{a}{a^+} \to \binom{a\ a}{a\ b_1} \quad \text{for} \quad b_1<a.$$

We do not know whether (3) holds for any a with $a>a'>\aleph_0$. Here the simplest open problem is:

PROBLEM 11.

$$? \begin{pmatrix} \aleph_{\omega_1} \\ \aleph_{\omega_1+1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \aleph_{\omega_1} & \aleph_{\omega_1} \\ \aleph_{\omega_1} & \aleph_{\omega_1} \end{pmatrix}.$$

Case IB (ii) c. $a = a' > \aleph_0$. In this case we only have the following trivial remark. If, for some $b \leqq a$ and some $b_0, b_1 \leqq b$, we have $\binom{a}{b} \to \begin{pmatrix} a & a \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$, then $\binom{a}{a^+} \to$ $\to \begin{pmatrix} a & a \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$. Here the simplest unsolved problems are:

PROBLEM 12.

1) $$? \begin{pmatrix} \aleph_1 \\ \aleph_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \aleph_1 & \aleph_1 \\ \aleph_0 & \aleph_0 \end{pmatrix}; \quad ? \begin{pmatrix} \aleph_1 \\ \aleph_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \aleph_1 & \aleph_1 \\ \aleph_1 & \aleph_1 \end{pmatrix}.$$

2) $$? \begin{pmatrix} \aleph_2 \\ \aleph_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \aleph_2 & \aleph_2 \\ \aleph_1 & \aleph_1 \end{pmatrix}; \quad ? \begin{pmatrix} \aleph_2 \\ \aleph_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \aleph_2 & \aleph_2 \\ \aleph_2 & \aleph_0 \end{pmatrix},$$

$$? \begin{pmatrix} \aleph_2 \\ \aleph_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \aleph_2 & \aleph_2 \\ \aleph_2 & \aleph_2 \end{pmatrix}.$$

REMARK. We know that $\begin{pmatrix} \aleph_2 \\ \aleph_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \aleph_2 & \aleph_2 \\ \aleph_1 & \aleph_0 \end{pmatrix}$ since in fact, by Theorem 33,

$$\begin{pmatrix} \aleph_2 \\ \aleph_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \aleph_2 & \aleph_2 \\ \aleph_1 & \aleph_0 \end{pmatrix}.$$

Case II. $a = b$. Here the problems are more ramified.

Case II A. $a = a^-$. First of all, let us consider relations without alternatives. We assert that

(4) $$\binom{a}{a} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$$

holds if and only if

(5) $$\min(a_0, b_1) < a \quad \text{and} \quad \min(a_1, b_0) < a.$$

In fact, if (4) holds then, by 21. 2, the condition (5) follows. Now, vice versa, assume that (5) is true. To deduce (4) we have to establish the following propositions:

(6) If $b_0, b_1 < a$, then $\binom{a}{a} \to \begin{pmatrix} a & a \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$.

(7) If $a_1, b_1 < a$, then $\binom{a}{a} \to \begin{pmatrix} a & a_1 \\ a & b_1 \end{pmatrix}$.

In fact, (7) follows from Theorem 38. We shall deduce (6) from Theorem 44 which will be proved in section 26.

From Theorem 38 it is clear that in the case under discussion the only genuine problem for relations with alternatives is that of deciding the truth of the statement:

$$\binom{a}{b} \to \begin{pmatrix} a, a \vee a_1 \\ a, b_1 \vee a \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad a_1, b_1 < a,$$

and again Theorem 38 shows that this statement is true. Thus case II A is settled.

Case II B. $a=c^+$. Again we begin with relations without alternatives. We have to discuss the relation

$$\binom{c^+}{c^+} \to \binom{a_0\ a_1}{b_0\ b_1}. \tag{8}$$

If either $a_0=b_1=c^+$ or $a_1=b_0=c^+$, then (8) is false by 21. 2. Now suppose that $\min(a_0, b_1) \leqq c$ and $\min(a_1, b_0) \leqq c$. For reasons of symmetry it suffices to consider the following cases:

Case II Ba. $a_0, a_1, b_0, b_1 \leqq c$. Then (8) holds by Corollary 17.

Case II Bb. $a_0=a_1=c^+$; $b_0, b_1 \leqq c$. Then (8) holds if and only if $\min(b_0, b_1)<c$. For if $\min(b_0, b_1)<c$ then (8) follows from Theorem 33, and if $b_0=b_1=c$ then (8) is false by Corollary 16.

Case II Bc. $a_0=b_0=c^+$; $a_1, b_1 \leqq c$.

Case II Bc (i). $a_1, b_1<c$. Then (8) holds by Theorem 38.

Case II Bc (ii). $a_1 \leqq c$; $b_1=c$. Here we have the following results:

(9) If $a_1=1$ then (8) holds by Theorem 35;

(10) if $a_1>1$ and $c=c'$, then (8) is false by Theorem 31;

(11) $\begin{cases} \text{if either } a_1 \geqq \aleph_2 \text{ and } c'=\aleph_0, \\ \text{or } a_1 \geqq \aleph_0 \text{ and } c'>\aleph_0, \text{ then (8) is false by Theorem 43.} \end{cases}$

Thus here the simplest unsolved problems are:

PROBLEM 13.

$$? \quad \binom{\aleph_{\omega+1}}{\aleph_{\omega+1}} \to \binom{\aleph_{\omega+1}\ a_1}{\aleph_{\omega+1}\ \aleph_\omega} \quad \text{for} \quad 2 \leqq a_1 \leqq \aleph_1.$$

$$? \quad \binom{\aleph_{\omega_1+1}}{\aleph_{\omega_1+1}} \to \binom{\aleph_{\omega_1+1}\ a_1}{\aleph_{\omega_1+1}\ \aleph_{\omega_1}} \quad \text{for} \quad 2 \leqq a_1 < \aleph_0.$$

Case II Bd. $a_0=c^+$; $a_1, b_0, b_1 \leqq c$. Here we have: If $\min(b_0, b_1)<c$ then (8) holds by Theorem 33. There remains to consider the relation

$$\binom{c^+}{c^+} \to \binom{c^+\ a_1}{c\ \ c}. \tag{12}$$

If $a_1<\aleph_0$ then (12) is true by Theorem 34. If either $c'>\aleph_0$ and $a_1 \geqq \aleph_0$, or $c'=\aleph_0$ and $a_1 \geqq \aleph_2$, then (12) is false by Theorem 43. If $c=\aleph_0$ and $a_1=\aleph_1$, then (12) is false by Theorem 32. If $c'=\aleph_0$ and $a_1=\aleph_0$, then (12) is true by Theorem 40. Here the simplest unsolved problem is

PROBLEM 14.

$$? \quad \binom{\aleph_{\omega+1}}{\aleph_{\omega+1}} \to \binom{\aleph_{\omega+1}\ \aleph_1}{\aleph_\omega\ \ \aleph_\omega}.$$

Thus many cases under II B are settled if we restrict ourselves to relations without alternatives. Let us now consider in case II B relations with alternatives. We shall show, without going into details, that the theorems proved so far, together with

Problems 13 and 14, essentially cover all cases. We want to consider relations of the form

$$\binom{c^+}{c^+} \to \binom{a_0 \vee a_1,\ a_2 \vee a_3}{b_0 \vee b_1,\ b_2 \vee b_3}, \tag{13}$$

where $c \geqq \aleph_0$ and $1 \leqq a_\nu, b_\nu \leqq c^+$ for $\nu < 4$. We make a fresh start with our subdivision into cases.

Case A*. There is $\nu < 4$ with $a_\nu, b_\nu \leqq c$. Then we may assume $a_0, b_0 \leqq c$. By Theorem 39 we have $\binom{c^+}{c^+} \to \binom{a_0,\ c^+ \vee c}{b_0,\ c \vee c^+}$. Hence (13) is true if there are $r, s \in \{2, 3\}$ with $a_r, b_s \leqq c$. Hence we may assume that $a_2 = a_3 = c$,$^+$ and it suffices to discuss relations of the form

$$\binom{c^+}{c^+} \to \binom{a_0 \vee a_1,\ c^+}{b_0 \vee b_1,\ d}, \tag{14}$$

where $a_0, b_0 \leqq c$ and $1 \leqq d \leqq c^+$. We shall in fact not make any use of these last inequalities. If $d_0, d_1 < c$ then, by Theorem 38, $\binom{c^+}{c^+} \to \binom{c^+ \vee d_1,\ c^+}{d_0 \vee c^+,\ c^+}$. Therefore (14) holds whenever there are $r, s \in \{0, 1\}$ with $a_r, b_s < c$. Hence we may assume that either $a_0, a_1 \geqq c$ or $b_0, b_1 \geqq c$.

Case A* 1. $d = c^+$. Then we may suppose that $a_0, a_1 \geqq c$. If $a_0 = a_1 = c$ and $b_0 = b_1 = 1$, then (14) holds by Theorem 35. On the other hand we have the following negative results:

If $c = c'$ then $\binom{c^+}{c^+} \not\to \binom{c \vee c^+,\ c^+}{2 \vee 1,\ c^+}$ (Theorem 31).

If $c > c' = \aleph_0$ then $\binom{c^+}{c^+} \not\to \binom{c \vee c^+,\ c^+}{\aleph_2 \vee 1,\ c^+}$ (Theorem 43).

If $c > c' > \aleph_0$ then $\binom{c^+}{c^+} \not\to \binom{c \vee c^+,\ c^+}{\aleph_0 \vee 1,\ c^+}$ (Theorem 43).

Thus the following refinements of Problem 11 remain open:

$$? \quad \binom{\aleph_{\omega+1}}{\aleph_{\omega+1}} \to \binom{\aleph_\omega \vee \aleph_{\omega+1},\ \aleph_{\omega+1}}{b_0 \vee 1,\ \aleph_{\omega+1}} \quad \text{for} \quad 2 \leqq b_0 \leqq \aleph_1;$$

$$? \quad \binom{\aleph_{\omega_1+1}}{\aleph_{\omega_1+1}} \to \binom{\aleph_{\omega_1} \vee \aleph_{\omega_1+1},\ \aleph_{\omega_1+1}}{b_0 \vee 1,\ \aleph_{\omega_1+1}} \quad \text{for} \quad 2 \leqq b_0 < \aleph_0.$$

Case A* 2. $d = c$. If $b_0, b_1 < c$ then (14) holds by Theorem 33, and if $b_0 = b_1 = c^+$ then (14) is false by 21. 2. These remarks lead us to consider relations of the form

$$\binom{c^+}{c^+} \to \binom{a_0 \vee a_1,\ c^+}{c \vee c^+,\ c}. \tag{15}$$

We note that the case

$$\binom{c^+}{c^+} \to \binom{a_0 \vee a_1,\ c^+}{c \vee b_1,\ c}, \quad \text{where } b_1 \leqq c,$$

will not be covered but we shall omit its discussion. If $a_0 < \aleph_0$ then (15) holds by Theorem 34, and if $c' > \aleph_0$ and $a_0 = \aleph_0$, then (15) is false by Theorem 43.

Case A*. 3. $d < c$. If $\min(b_0, b_1) \leqq c$ then (14) holds by Theorem 33, and in the remaining case $b_0 = b_1 = c^+$ the relation (14) is false by 21. 2.

Case B*. $\max(a_\nu, b_\nu) = c^+$ for $\nu < 4$. If there is $\nu \in \{0, 2\}$ such that either $a_\nu = a_{\nu+1} = c^+$ or $b_\nu = b_{\nu+1} = c^+$, then (13) reduces to a relation of the form (14) which has already been discussed. Hence it only remains to discuss relations of the form

$$\binom{c^+}{c^+} \to \binom{c^+ \vee a_1,\ c^+ \vee a_3}{b_0 \vee c^+,\ b_2 \vee c^+}, \tag{16}$$

where $a_1, a_3, b_0, b_2 \leqq c$. If $\min(a_1, a_3, b_0, b_2) < c$ then (16) is true by Theorem 33, and in the remaining case $a_1 = a_3 = b_0 = b_2 = c$ (16) is false by Theorem 32.

25. LEMMAS FOR THE CASE $\beta > \alpha + 1$

LEMMA 10. *Let* $\aleph_0 < 2^a < b$; $c < b$; $b > b'$. *Then*

(i) *If* $\binom{a}{b} \to \binom{a_0\ a_1}{b\ \ b}$, *then* $\binom{a}{b'} \to \binom{a_0\ a_1}{b'\ b'}$.

(ii) *If* $\binom{a}{b'} \to \binom{a_0\ a_1}{b'\ b'}$, *then* $\binom{a}{b} \to \binom{a_0\ a_1}{b\ \ b}$.

(iii) *If* $\binom{a}{b} \to \binom{a_0\ a_1}{b\ \ 1}$, *then* $\binom{a}{b'} \to \binom{a_0\ a_1}{b'\ 1}$.

(iv) *If* $\binom{a}{b'} \to \binom{a_0\ a_1}{b'\ 1}$, *then* $\binom{a}{b} \to \binom{a_0\ a_1}{b\ \ c}$.

PROOF. Let $m = \omega(b')$; $|A| = a$; $|B| = b$; $AB = AS = \varnothing$, where $S = [0, m)$. There are numbers $b_0, \hat{b}_m$ and sets $B_0, \hat{B}_m$ such that $2^a, c < b_0 < < \hat{b}_m < b$;

$$B = \Sigma'(\nu < m) B_\nu; \quad |B_\nu| = b_\nu = b'_\nu \quad \text{for} \quad \nu < m.$$

PROOF OF (i). Let $[A, S] = I_0^* +' I_1^*$. Then $[A, B] = I_0 +' I_1$, where

$$I_0 = \Sigma(\{x, \nu\} \in I_0^*)[\{x\}, B_\nu].$$

By hypothesis there are a number $\varkappa < 2$ and sets $X \in [A]^{a_\varkappa}$; $Y \in [B]^b$ with $[X, Y] \subset I_\varkappa$. Put $Y' = \{\nu\colon YB_\nu \neq \varnothing\}$. Then $Y' \in [S]^{b'}$; $[X, Y'] \subset I_\varkappa^*$, and (i) follows.

PROOF OF (ii). Let $[A, B] = I_0 +' I_1$ and $\nu < m$. Then

$$|\{Q_0(y)\colon y \in B_\nu\}| \leqq 2^a < b_\nu = |B_\nu|,$$

and there are sets $A'_\nu \subset A$ and $B'_\nu \in [B_\nu]^{b_\nu}$ such that $Q_0(y) = A'_\nu$ for $y \in B'_\nu$. Then $[A, S] = I_0^* +' I_1^*$, where $I_0^* = \{\{x, \nu\}\colon x \in A'_\nu \wedge \nu < m\}$. By hypothesis there are a number $\varkappa < 2$ and sets $X \in [A]^{a_\varkappa}$; $Y' \in [S]^{b'}$ such that $[X, Y'] \subset I_\varkappa^*$. Put $Y = \Sigma(\nu \in Y') B'_\nu$. Then $Y \in [B]^b$; $[X, Y] \subset I_\varkappa$, and (ii) is proved.

PROOF OF (iii). Let $I_\varkappa^*$, $I_\varkappa$ be as in the proof of (i). Put $c_0 = b$; $c_1 = 1$. By hypothesis

there are a number $\varkappa<2$ and sets $X\in[A]^{a_\varkappa}$; $Y\in[B]^{c_\varkappa}$ such that $[X, Y]\subset I_\varkappa$. Put $Y'=\{v: YB_v\neq\varnothing\}$. Then $Y'\subset S$; $[X, Y']\subset I^*_\varkappa$. If $\varkappa=0$ then $|Y|=b$; $|Y'|=b'$, and if $\varkappa=1$ then $|Y'|=1$. This proves (iii).

PROOF OF (iv). Let $I_\varkappa$, B'_v, A'_v, $I^*_\varkappa$ be as in the proof of (ii). Put $c_0=b'$; $c_1=1$. Then there are a number $\varkappa<2$ and sets $X\in[A]^{a_\varkappa}$; $Y'\in[S]^{c_\varkappa}$ such that $[X, Y']\subset I^*_\varkappa$. Put $Y=\Sigma(v\in Y')B'_v$. Then $Y\subset B$; $[X, Y]\subset I_\varkappa$. If $\varkappa=0$ then $|Y'|=b'$; $|Y|=b$, and if $\varkappa=1$ then $Y'=\{v_0\}$ for some $v_0<m$, and we have $|Y|=|B'_{v_0}|=b_{v_0}>c$. This proves (iv) and completes the proof of Lemma 10.

LEMMA 11. *Let* $\aleph_0<2^a<b'$. *Then* $\binom{a}{b}\to\binom{a\ a}{b\ b}$.

REMARK. Lemma 11 is obviously not best possible. It will be used in the proof of Theorem 44 which gives a necessary and sufficient condition for $\binom{a}{b}\to\binom{a\ a}{b\ b}$.

PROOF. Let $|A|=a$; $|B|=b$; $AB=\varnothing$; $[A, B]=I_0+'I_1$. Then

$$b=\Sigma(A'\subset A)|B\{y: Q_0(y)=A'\}|.$$

Since $|\mathbf{P}(A)|=2^a<b'$, there are sets $A'\subset A$ and $B'\in[B]^b$ such that $Q_0(y)=A'$ for $y\in B'$.

Case 1. $|A'|=a$. Then $[A', B']\subset I_0$.

Case 2. $|A'|<a$. Then $|A-A'|=a$; $[A-A', B']\subset I_1$. This proves Lemma 11.

26. POLARIZED PARTITION RELATIONS IN THE GENERAL CASE. DISCUSSION AND PROBLEMS

In the general case we do not investigate relations with alternatives. It is obvious that such relations only lead to interesting question provided $a'=b'$ but we omit this. We shall discuss the relation

$$\binom{a}{b}\to\binom{a_0\ a_1}{b_0\ b_1}.$$

We begin by considering the special case when $a_0=a_1=a$ and $b_0=b_1=b$. We need some definitions.

26. 1. DEFINITION. The *distance* $d(\alpha, \beta)$ of two ordinals α, β is defined by the equations

$$d(\alpha, \alpha+\delta)=d(\alpha+\delta, \alpha)=\delta \quad \text{for all } \alpha, \delta.$$

We put $d(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)=d(\alpha, \beta)$.

26. 2. DEFINITION. Cardinals a, b are called *disjoint* if $a, b\geqq\aleph_0$ and

$$d(x, y)>1 \quad \text{for } x\in\{a, a'\} \text{ and } y\in\{b, b'\}.$$

(∗) THEOREM 44. *Let* $a, b\geqq\aleph_0$. *Then* $\binom{a}{b}\to\binom{a\ a}{b\ b}$ *if and only if* a *and* b *are disjoint.*

PROOF. Put

$$P=\left\{(a, b): a, b\geqq\aleph_0\wedge\binom{a}{b}\to\binom{a\ a}{b\ b}\right\}.$$

Throughout the proof we suppose $a, b \geqq \aleph_0$. We shall frequently use, without reference, the following propositions:

1. If $a^+ < b$, then $(a, b) \in P$ if and only if $(a, b') \in P$ (Lemma 10).
2. If $a^+ < b'$ then $(a, b) \in P$ (Lemma 11).
3. If $d(a, b) \leqq 1$ then $(a, b) \notin P$ (21. 2 and Corollary 16).

In proving the theorem we may assume $a \leqq b$.

Case 1. a, b disjoint. Then $a^+ < b$.

Case 1a. $a^+ < b'$. Then $a^+ < b' = b''$; $(a, b') \in P$; $(a, b) \in P$.

Case 1b. $a^+ \geqq b'$. Then $b'^+ < a$. Since $d(a', b') > 1$ we have $(a', b') \in P$. Then $(a, b') \in P$; $(a, b) \in P$.

Case 2. a, b not disjoint.

Case 2a. $b \leqq a^+$. Then $d(a, b) \leqq 1$; $(a, b) \notin P$.

Case 2b. $b > a^+$. Then $d(a', b) \geqq d(a, b) > 1$, and since a, b are not disjoint, at least one of the following four cases arises:

Case 2b1. $d(a, b') \leqq 1$. Then $(a, b') \notin P$; $(a, b) \notin P$.

Case 2b2. $a' = b'$. Then $(a', b') \notin P$; $(a', b) \notin P$. Let us assume that $(a, b) \in P$. Then $(a, b') \in P$. Then, since $(a, b') \in P$ but $(a', b') \notin P$, we have $a \leqq b'^+$. Then $a \leqq b'^+ = a'^+$; $a' \leqq a \leqq a'^+$; $a \in \{a', a'^+\}$. Hence a is regular; $(a, a) = (a, b') \in P$ which is a contradiction. Therefore $(a, b) \notin P$.

Case 2b3. $a'^+ = b'$. Then $(a', b') \notin P$. Let us assume that $(a, b) \in P$. Then $(a, b') \in P$; $d(a, a'^+) = d(a, b') > 1$; $a > a'$; $b' = a'^+ < a$; $b'^+ < a$; $(a', b') \in P$ which is a contradiction. Hence $(a, b) \notin P$.

Case 2b4. $a' = b'^+$. Then $(a', b') \notin P$. Let us assume that $(a, b) \in P$. Then $(a, b') \in P$. Then, since $(a, b') \in P$ but $(a', b') \notin P$, we have $a \leqq b'^+ = a'$; $a = a'$; $(a', b') = (a, b') \in P$ which is a contradiction. Hence $(a, b) \notin P$, and Theorem 44 follows.

26. 3. We now turn to the general case

$$\binom{a}{b} \to \binom{a_0\ a_1}{b_0\ b_1}. \tag{1}$$

Throughout we suppose that $a, b \geqq \aleph_0$ and

$$1 \leqq a_\nu \leqq a; \quad 1 \leqq b_\nu \leqq b \quad \text{for} \quad \nu < 2.$$

Also, $(*)$ will be assumed. The case $d(a, b) \leqq 1$ was discussed in section 24. We may therefore assume $a^+ < b$. By Theorem 44 the relation (1) holds whenever a, b are disjoint. We may now assume that a, b are not disjoint. Then at least one of the following six cases arises:

1. $a^+ = b'$; 2. $a = b'$; 3. $a = b'^+$;

4A. $a'^+ = b'$; 5A. $a' = b'$; 6A. $a' = b'^+$.

We now show that if $a \leqq b'^+$ and if one of the cases 4A, 5A, 6A holds, say the case $(3+k)A$, then already case k holds $(k = 1, 2, 3)$. In fact, under these circumstances

we have $a' \leqq a \leqq b'^{+} \leqq a'^{++}$, so that $a \in \{a', a'^{+}, a'^{++}\}$, and a is regular. Then case k applies. Thus we have the following six cases to deal with:

1. $a^{+} = b'$; 2. $a = b'$; 3. $a = b'^{+}$;
4. $a > b'^{+}$ and $a'^{+} = b'$; 5. $a > b'^{+}$ and $a' = b'$; 6. $a > b'^{+}$ and $a' = b'^{+}$

Clearly, the cases 1, 2, 3 are exclusive, and the cases 4, 5, 6 are exclusive. Also, in each of the cases 1, 2, 3, we have $a \leqq b'^{+}$ so that all six cases 1—6 are exclusive.

Our assumptions are therefore: $\aleph_0 < a^{+} < b$, and exactly one of the cases 1—6 applies. We note that by Theorem 44 in any of these cases,

$$\binom{a}{b} \nrightarrow \binom{a\ a}{b\ b}. \tag{2}$$

The discussion that follows will settle the truth of (1) in all cases except for the sub-case of case 3 which is given by the conditions

$$a = b'^{+}; \quad a^{+} < b;$$

$$a_0, a_1 < a; \quad b_0 = b_1 = b.$$

Case 1. $a^{+} = b'$ and $a^{+} < b$. Here we have the following two results which settle this case:

$$\binom{a}{b} \to \binom{a\ a_1}{b\ b} \quad \text{for} \quad a_1 < a. \tag{3}$$

PROOF. By Lemma 10 (ii) it suffices to prove

$$\binom{a}{b'} \to \binom{a\ a_1}{b'\ b'},$$

and this last relation follows from Theorem 33.

$$\binom{a}{b} \to \binom{a\ a}{b\ b_1} \quad \text{for} \quad b_1 < b. \tag{4}$$

PROOF. By Lemma 10 (iv) it suffices to prove $\binom{a}{b'} \to \binom{a\ a}{b'\ 1}$, and this last relation follows from Theorem 34.

We see from (2), (3), (4) that in case 1 the relation (1) holds if and only if either $\min(a_0, a_1) < a$ or $\min(b_0, b_1) < b$.

Case 2. $a = b'$ and $a^{+} < b$. We shall settle this case. By 21. 2 we have $\binom{a}{b'} \nrightarrow \binom{a\ 1}{1\ b'}$ and hence, by Lemma 10 (iii),

$$\binom{a}{b} \nrightarrow \binom{a\ 1}{1\ b}. \tag{5}$$

Case 2a. $b_0, b_1 < b$. Then

$$\binom{a}{b} \to \binom{a\ \ a}{b_0\ b_1}. \tag{6}$$

PROOF. Since $b' = a < a^{+} < b$ we may suppose that $a^{+} < b_0 = b_1 = b_1' < b$, and then (6) follows from Lemma 11.

Case 2b. $b_1 < b_0 = b$. Then

$$\binom{a}{b} \to \binom{a\ a_1}{b_0\ b_1} \tag{7}$$

holds if and only if $a_1 < a$.

PROOF. If (7) holds then, by (5), $a_1 < a$. Vice versa, if $a_1 < a$ then, by Theorem 35, $\binom{a}{b'} \to \binom{a\ a_1}{b'\ 1}$ which implies (7), by Lemma 10 (iv). This establishes the assertion relating to (7).

Case 2c. $b_0 < b_1 = b$. Then, by symmetry,

$$\binom{a}{b} \to \binom{a_0\ a}{b_0\ b_1}$$

holds if and only if $a_0 < a$.

Case 2d. $b_0 = b_1 = b$. Then (1) holds if and only if

$$a_0, a_1 < a \quad \text{and} \quad \min(a_0, a_1) < a^- . \tag{8}$$

PROOF. We have $b' = a < a^+ < b$. First of all, suppose that (1) holds. If we then assume that $a_0 = a$ then

$$\binom{b'}{b} \to \binom{b'\ 1}{b\ b}$$

and so, by Lemma 10 (i), $\binom{b'}{b'} \to \binom{b'\ 1}{b'\ b'}$ which contradicts (5). Hence $a_0, a_1 < a$. Next, if we assume that $\min(a_0, a_1) \geqq a^-$ then $b'^- = a^- \leqq a_0 < a = b'$; $b' = c^+$ for some c, and

$$\binom{c^+}{b} \to \binom{c\ c}{b\ b}.$$

Therefore, by Lemma 10 (i), $\binom{c^+}{c^+} \to \binom{c\ c}{c^+\ c^+}$ which contradicts Theorem 32. Hence $\min(a_0, a_1) < a^-$, and (8) follows.

Now suppose, vice versa, that (8) is satisfied. By Lemma 10 (ii), the relation (1) is a consequence of

$$\binom{a}{b'} \to \binom{a_0\ a_1}{b'\ b'}.$$

Hence it suffices to prove the following two propositions:

(9) If $a = a^-$ and $a_0, a_1 < a$, then $\binom{a}{b'} \to \binom{a_0\ a_1}{b'\ b'}$.

(10) If $a = c^+$ and $a_1 < c$, then $\binom{a}{b'} \to \binom{c\ a_1}{b'\ b'}$.

In fact, (9) follows from Lemma 11, and (10) follows from Theorem 33.

By analysing the results in cases 2a-2d it will be seen that we have proved:

In case 2 the relation (1) holds if and only if at least one of the following three conditions (α), (β), (γ) is satisfied:

(α) $b_0, b_1 < b$;

(β) there is $\nu < 2$ with $a_\nu < a$ and $b_\nu < b$;

(γ) $\min(a_0, a_1) < a^-$ and $a_0, a_1 < a$.

Case 3. $a = b'^+$ and $a^+ < b$. Here there remain some open questions. First we prove:

$$\binom{a}{b} \to \begin{pmatrix} a & a \\ b & b_1 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad b_1 < b. \tag{11}$$

PROOF. By Theorem 33, $\binom{a}{b'} \to \begin{pmatrix} a & a \\ b' & 1 \end{pmatrix}$, and (11) follows from Lemma 10 (iv).

By comparing (2) and (11) we see that to settle case 3 we have to investigate the relation

$$\binom{a}{b} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b & b \end{pmatrix} \tag{12}$$

when $\min(a_0, a_1) < a$. By Lemma 10 (i) and (ii) the relation (12) is equivalent to $\binom{a}{b'} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b' & b' \end{pmatrix}$, and this last relation was discussed in section 24.

Corresponding to the cases IB (i) and IB (ii) in section 24 we distinguish now the cases $\max(a_0, a_1) = a$ and $a_0, a_1 < a$.

Case 3a. $\max(a_0, a_1) = a$. We have to study the relation

$$\binom{a}{b} \to \begin{pmatrix} a & a_1 \\ b & b \end{pmatrix}. \tag{13}$$

This relation can be discussed completely. As pointed out above, (13) is equivalent to

$$\binom{a}{b'} \to \begin{pmatrix} a & a_1 \\ b' & b' \end{pmatrix}. \tag{14}$$

If we put $b' = c$ then (14) becomes

$$\binom{c^+}{c} \to \begin{pmatrix} c^+ & a_1 \\ c & c \end{pmatrix}.$$

Here $c = c' = b'$. By section 24, case IB (i) we have:

$$\begin{cases} \text{If } b' > \aleph_0 \text{ then (13) is true for } a_1 < \aleph_0 \text{ and false for } a_1 \geqq \aleph_0. \\ \text{If } b' = \aleph_0 \text{ then (13) is true for } a_1 \leqq \aleph_0 \text{ and false for } a_1 > \aleph_0. \end{cases} \tag{15}$$

Case 3b. $a_0, a_1 < a$. This case reduces to section 24, case IB (ii) c where we had only trivial results. Although the problems in our present case are equivalent to those stated in the earlier section we state here explicitly those equivalent to problem 12.1:

PROBLEM 15.

$$? \quad \binom{\aleph_{\omega_1}}{\aleph_2} \to \begin{pmatrix} \aleph_{\omega_1} & \aleph_{\omega_1} \\ \aleph_0 & \aleph_0 \end{pmatrix};$$

$$? \quad \binom{\aleph_{\omega_1}}{\aleph_2} \to \begin{pmatrix} \aleph_{\omega_1} & \aleph_{\omega_1} \\ \aleph_1 & \aleph_1 \end{pmatrix}.$$

Case 4. $a'^{+}=b'$; $a>b'^{+}$; $a^{+}<b$. Here we shall obtain a complete discussion. We prove:

(16) $$\binom{a}{b}\to\binom{a\ a_1}{b\ b} \quad \text{for} \quad a_1<a.$$

PROOF. By (11) we have, for $a_1<a$,

$$\binom{a}{b'}\to\binom{a\ a_1}{b'\ b'}.$$

Hence, by Lemma 10 (ii), (16) follows.

(17) $$\binom{a}{b}\to\binom{a\ a}{a\ b_1} \quad \text{for} \quad b_1<b.$$

PROOF. By (15),

$$\binom{a}{b'}\to\binom{a\ a}{b'\ 1},$$

and (17) follows by Lemma 10 (iv).

It follows from (2), (16), (17) that in case 4 the relation (1) holds if and only if either $\min(a_0, a_1)<a$ or $\min(b_0, b_1)<b$.

Case 5. $a'=b'$; $a>b'^{+}$; $a^{+}<b$. Here we obtain a complete discussion.

(18) $$\binom{a}{a}\not\to\binom{1\ a}{b\ 1}.$$

PROOF. By (5), $\binom{a}{b'}\not\to\binom{1\ a}{b'\ 1}$, and (18) follows by Lemma 10 (iii).

(19) $$\binom{a}{b}\to\binom{a\ a}{b_0\ b_1} \quad \text{if} \quad b_0, b_1<b.$$

PROOF. We may assume $a^{+}<b_0=b_1=b_1'<b$. Then (19) follows from Lemma 11.

(20) $$\binom{a}{b}\to\binom{a\ a_1}{a\ b_1} \quad \text{if } a_1<a \text{ and } b_1<b.$$

PROOF. By (7), $\binom{a}{b'}\to\binom{a\ a_1}{b'\ 1}$, and (20) follows by Lemma 10 (iv).

(21) $$\binom{a}{b}\to\binom{a_0\ a_1}{b\ b} \quad \text{if} \quad a_0, a_1<a.$$

PROOF. We may assume $b'^{+}<a_0=a_1=a_1'<a$. Then, by Theorem 44, $\binom{a}{b'}\to\binom{a_0\ a_1}{b'\ b'}$, and (21) follows by Lemma 10 (ii).

It now follows from (18)—(21) that in case 5 the relation (1) holds if and only if either $a_0, a_1<a$, or $b_0, b_1<b$, or there is $\nu<2$ with $a_\nu<a$ and $b_\nu<b$.

Case 6. $a'=b'^{+}$; $a>b'^{+}$; $a^{+}<b$. Here we have a complete discussion.

(22) $$\binom{a}{b}\to\binom{a\ a_1}{b\ b} \quad \text{if} \quad a_1<a.$$

PROOF. By (4), $\binom{a}{b'} \to \binom{a\ a_1}{b'\ b'}$, and (22) follows from Lemma 10 (ii).

(23) $$\binom{a}{a} \to \binom{a\ a}{a\ b_1} \quad \text{if} \quad b_1 < b.$$

PROOF. By (3), $\binom{a}{b'} \to \binom{a\ a}{b'\ 1}$, and (23) follows from Lemma 10 (iv).

It follows from (2), (22), (23) that in case 6 the relation (1) holds if and only if either $\min(a_0, a_1) < a$ or $\min(b_0, b_1) < b$.

27. THE THEORY OF SET MAPPINGS.

In this section we shall state some problems and results concerning the set mapping relation

(1) $$a \to [[p, c, d, q]]$$

which was defined in 21. 5. It follows almost immediately from that definition that

(2) $$\text{if} \quad a \to (c+d, q)^2 \quad \text{then} \quad a \to [[a^+, c, d, q]].$$

Problems about this relation were first stated in [21] and discussed in [14]. Throughout this section let $a \geqq \aleph_0$. Our Theorem 36 states that

$$(*)\ a \to [[a, a, d, a]] \quad \text{if} \quad a = a' \quad \text{and} \quad d^+ < a,$$

and Theorem 37 states that

$$(*)\ a \to [[a, a, d, a']] \quad \text{if} \quad a > a' \quad \text{and} \quad d < a;$$

$$a \not\to [[a, a, 1, a'^+]] \quad \text{if} \quad a > a'.$$

On the other hand, using the method of canonical partitions employed in Lemma 3, it is easy to prove

$(*)$ THEOREM 45. *If* $c, d < a$ *and* $a > a'$, *then* $a \to [[a, c, d, a]]$.

We omit the proof. Thus if $p \leqq a$ and $a > a'$ then the relation (1) is completely discussed. The case on inaccessible cardinals is settled by Theorem 36. We therefore restrict ourselves to a discussion of the relation

(3) $$a^+ \to [[a^+, c, d, q]].$$

When $d < a$ then Theorem 36 gives a best possible positive result. We are therefore led to consider the relation

$$a^+ \to [[a^+, c, a, q]].$$

Here Lemma 9, which is a theorem of [14], yields:

$$a^+ \not\to [[a^+, 2, a, a^+]] \quad \text{if} \quad a = a'.$$

On the other hand, from $a^+ \to (a^+, a')^2$ we obtain, by (2),

(∗) THEOREM 46. $a^+ \to [[a^+, a^+, a, a']]$.

Thus (3) is settled in the case when a is regular. For singular a the following relations are still left undecided by the theorems listed so far:

(4) $$? \quad a^+ \to [[a^+, c, a, q]] \text{ for } 2 \leqq c \leqq a^+ \text{ and } a' < q \leqq a^+.$$

In [14], Problem 1, the simplest case of (4) is stated, which is to decide the truth of

$$\aleph_{\omega+1} \to [[\aleph_{\omega+1}, 2, \aleph_\omega, \aleph_1]].$$

We cannot solve the problem (4) but by a direct application of some of the results of the present paper we can obtain a partial solution.

By using the method of proof of $a^+ \nrightarrow (a^+, (3)_{a'})^2$ (Theorem 10) as well as the relation $a'^{++} \to (3)^2_{a'}$ one can obtain

(∗) THEOREM 47. $a^+ \nrightarrow [[a^+, a^+, a, a'^{++}]]$.

By putting $d = a$ it is seen that Theorems 46 and 47 leave undecided only the following case:

(∗) PROBLEM 16. $? \; a^+ \to [[a^+, a^+, a, a'^+]]$ if $a > a'$. On the other hand, Theorem 43 implies

(∗) THEOREM 48. *Let* $a > a'$, *and suppose that either* (i) $c \geqq \aleph_2$ *and* $a' = \aleph_0$, *or* (ii) $c \geqq \aleph_0$ *and* $a' > \aleph_0$. *Then*

$$a^+ \nrightarrow [[a^+, c, a, a^+]].$$

Using the ramification method of Lemma 1 but also some new ideas one can prove:

(∗) THEOREM 49. *If* $c < a$ *and* $a > a'$, *then* $a^+ \to [[a^+, c, a, a]]$.

Detailed proofs of Theorems 47, 48, 49 are reserved for a later publication. The following problems remain unsolved:

(A) $$? \quad a^+ \to [[a^+, c, a, a^+]]$$

if either (i) $2 \leqq c \leqq \aleph_1$ and $a' = \aleph_0$, or (ii) $2 \leqq c < \aleph_0$ and $a > a' > \aleph_0$.

(B) $$? \quad a^+ \to [[a^+, a, a, q]] \text{ if } a' < q \leqq a.$$

Thus the simplest open questions in this connection are

(∗) PROBLEM 17.

(i) $? \; \aleph_{\omega+1} \to [[\aleph_{\omega+1}, c, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}]]$ for $2 \leqq c \leqq \aleph_1$;

$? \; \aleph_{\omega_1+1} \to [[\aleph_{\omega_1+1}, c, \aleph_{\omega_1}, \aleph_{\omega_1+1}]]$ for $2 \leqq c < \aleph_0$.

(ii) $? \; \aleph_{\omega+1} \to [[\aleph_{\omega+1}, \aleph_\omega, \aleph_\omega, q]]$ for $\aleph_1 \leqq q \leqq \aleph_\omega$;

$? \; \aleph_{\omega_1+1} \to [[\aleph_{\omega_1+1}, \aleph_{\omega_1}, \aleph_{\omega_1}, q]]$ for $\aleph_2 \leqq q \leqq \aleph_{\omega_1}$.

Finally we mention that we have omitted the investigation of the case

$$a^+ \to [[a^{++}, c, d, q]],$$

i. e. the case where the set mapping is not restricted at all. Most of the problem in this case are equivalent to problems about the ordinary partition relation I and their complete discussion would be very lengthy.

Added in proof (20. IV. 1965): Recently A. H. KRUSE (A note on the partition calculus of P. Erdős and R. Rado, *Journ. London Math.* Soc., **40** (1965), pp. 135—148) proved a number of negative partition relations mostly of the form $a \nrightarrow (b, r+1)^r$.

MATHEMATICAL INSTITUTE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
BUDAPEST

MATHEMATICAL INSTITUTE
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY,
BUDAPEST

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
THE UNIVERSITY,
READING, ENGLAND

(Received 23 April 1964)

References

[1] P. ERDŐS and R. RADO, A partition calculus in set theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62** (1956), pp. 427—489.
[2] A. TARSKI, Quelques théorèmes sur les alephs, *Fundam. Math.*, **7** (1925), pp. 1—14.
[3] P. ERDŐS and R. RADO, Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **2** (1952), pp. 417—439.
[4] P. ERDŐS and A. HAJNAL, On the structure of set mappings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 111—131.
[5] A. TARSKI, Some problems and results relevant to the foundation of set theory, *Proc. Internat. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Sciences*, Stanford, Calif., USA, 1960.
[6] P. ERDŐS and G. FODOR, Some remarks on set theory. VI, *Acta Sci. Math. Szeged*, **18** (1957), pp. 243—260.
[7] P. ERDŐS and A. TARSKI, On families of mutually exclusive sets, *Annals of Math.*, **44** (1943), pp. 315—329.
[8] P. ERDŐS and G. SZEKERES, A combinatorial problem in geometry, *Comp. Math.*, **2** (1935), pp. 463—470.
[9] P. ERDŐS, Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), pp. 292—294.
[10] P. ERDŐS, Remarks on a theorem of Ramsey, *Bull. Research Council of Israel*, Section F., 1947.
[11] P. ERDŐS, Graph theory and probability, *Canad. Journ. of Math.*, **11** (1959), pp. 34—38.
[12] R. E. GREENWOOD and R. M. GLEASON, Combinatorial relations and chromatic graphs, *Canad. Journ. of Math.*, **7** (1955), pp. 1—7.
[13] P. ERDŐS, Graph theory and probability II, *Canad. Journ. of Math.*, **13** (1961), pp. 346—352.
[14] A. HAJNAL, Some results and problems on set theory, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), pp. 277—298.
[15] A. TARSKI, Sur la décomposition des ensembles en sousensembles presque disjoint, *Fundam. Math.* **14** (1929), pp. 205—215.
[16] P. ERDŐS, Some remarks on set theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), pp. 127—141.
[17] A. HAJNAL, Proof of a conjecture of S. Ruziewicz, *Fundam. Math.*, **50** (1961), pp. 123—128.

[18] F. P. RAMSEY, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **30** (1930), pp. 264–286.
[19] W. SIERPIŃSKI, Sur un problème de la théorie des relations, *Annali R. Scuola Normale Superiore de Pisa*, Ser. 2, **2** (1933), pp. 285–287.
[20] G. KUREPA, On the cardinal number of ordered sets and of symmetrical structures in dependence of the cardinal numbers of its chains and antichains, *Glanick Mat. Fiz. i Astr.*, **14** (1952), pp. 183–203.
[21] P. ERDŐS and G. FODOR, Some remarks on set theory. V, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12** (1956), pp. 250–260.
[22] W. SIERPIŃSKI, Concernant l'hypothèse du continu, *Acad. Royale Serbe Bull. de l'acad. Sci. Math. et Naturelles*, Sér. A. Sc. Math. et Phys., **1** (1933), pp. 67–73.
[23] P. ERDŐS and S. KAKUTANI, On non-denumerable graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1963), pp. 457–461.
[24] P. ERDŐS and A. TARSKI, On some problems involving inaccessible cardinals, *Essays on the foundations of mathematics*, Jerusalem (1961), pp. 50–82.
[25] P. HANF, On a problem of Erdős and Tarski, *Notices of the AMS*, **9** (1962), p. 229.
[26] A. HAJNAL, Remarks on a theorem of W. P. Hanf, *Fundam. Math.*, **54** (1964), pp. 109–113.
[27] DANA SCOTT, Measurable cardinals and constructible sets, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. des Sci. Math., Astr. et Phys.*, **7** (1959), pp. 145–149.
[28] H. J. KIESLER, Some applications of the theory of models to set theory, *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1960. International Congress*, Stanford (1962), pp. 80–86.
[29] P. ERDŐS and A. HAJNAL, On a property of families of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), pp. 87–123.
[30] H. J. KIESLER and A. TARSKI, From accessible to inaccessible cardinals, *Fundam Math.*, **53** (1964), pp. 225–308.

ÜBER EINE REKTIFIZIERBARE NICHTEUKLIDISCHE NEILSCHE PARABEL

Von

K. FLADT (Calw, Deutschland)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

1. Bekanntlich war die euklidische *semikubische* oder *Neilsche Parabel* die erste Kurve, die man als elementar rektifizierbar erkannte. In nichthomogenen rechtwinkligen Koordinaten $x_1|x_2$ hat sie die Gleichung $x_1^3 = cx_2^2$. Es ist nun sehr merkwürdig, daß in der nichteuklidischen Geometrie die elementare Rektifizierbarkeit nicht für beliebiges c, sondern nur für ein bestimmtes c zutrifft. Wir wollen das Problem aber nicht nur für die Neilsche Parabel, sondern für eine beliebige zur Achse $x_2 = 0$ symmetrische Kurve 3. Ordnung lösen, die im Ursprung einen Rückkehrpunkt hat. Eine solche hat wie in der euklidischen Geometrie die Gleichung

$$x_2^2 = \frac{x_1^3}{\alpha x_1 + \beta}. \tag{1}$$

Eine Parameterdarstellung erhält man, indem man die Kurve mit dem Ursprungsstrahl

$$x_2 = \lambda x_1 \tag{2}$$

schneidet. Sie wird

$$x_1 = \frac{\beta\lambda^2}{1-\alpha\lambda^2}, \quad x_2 = \frac{\beta\lambda^3}{1-\alpha\lambda^2} \tag{3}$$

oder in homogenen Koordinaten $x_1|x_2|x_3$

$$\varrho x_1 = \beta\lambda^2, \quad \varrho x_2 = \beta\lambda^3, \quad \varrho x_3 = 1-\alpha\lambda^2. \tag{4}$$

Bezeichnet man die Ableitungen nach λ durch Striche, so kommt

$$\varrho x_1' = 2\beta\lambda, \quad \varrho x_2' = 3\beta\lambda^2, \quad \varrho x_3' = -2\alpha\lambda, \tag{5}$$

Dann folgt

$$x_2x_3' - x_3x_2' = \beta\lambda^2(\alpha\lambda^2 - 3), \quad x_3x_1' - x_1x_3' = 2\beta\lambda, \quad x_1x_2' - x_2x_1' = \beta^2\lambda^4. \tag{6}$$

Nun lautet die Formal für das nichteuklidische Bogenelement

$$ds = \frac{\sqrt{(\widehat{x\,dx}|\widehat{x\,dx})}}{(x|x)}, \tag{7}$$

wo

$$(x|x) \equiv k(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2,$$

$$(\widehat{x\,dx}|\widehat{x\,dx}) \equiv (x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2)^2 + (x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3)^2 + k(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)^2 \tag{8}$$

ist. Mit (6) und (4) kommt

$$(\widehat{xdx}\,|\,\widehat{xdx}) = \beta^2\lambda^2\{\lambda^2(\alpha\lambda^2-3)^2+4+k\beta^2\lambda^6\}\,d\lambda^2 \tag{9}$$

$$(x|x) = k\beta^2\lambda^4(1+\lambda^2)+(1-\alpha\lambda^2)^2, \tag{10}$$

also

$$ds = \frac{\beta\lambda\sqrt{(\alpha^2+k\beta^2)\lambda^6-6\alpha\lambda^4+9\lambda^2+4}}{k\beta^2\lambda^4(1+\lambda^2)+(1-\alpha\lambda^2)^2}\,d\lambda. \tag{11}$$

2. Wir setzen

$$\lambda^2=\mu \tag{12}$$

und erhalten

$$ds = \frac{\beta\sqrt{(\alpha^2+k\beta^2)\mu^3-6\alpha\mu^2+9\mu+4}}{2\{k\beta^2(\mu^3+\mu)+(1-\alpha\mu)^2\}}\,d\mu. \tag{13}$$

Soll nun die Kurve elementar rektifizierbar sein, so muß sich unter der Wurzel ein quadratischer Faktor abscheiden lassen, d. h. die Gleichung

$$(\alpha^2+k\beta^2)\mu^3-6\alpha\mu^2+9\mu+4=0 \tag{14}$$

muß eine Doppelwurzel haben, ihre Diskriminante also verschwinden. Für die allgemeine Gleichung

$$a_0\mu^3+a_1\mu^2+a_2\mu+a_3=0 \tag{15}$$

sei

$$3a_0a_2-a_1^2=\Delta_1,\quad 9a_0a_3-a_1a_2=\Delta_2,\quad 3a_1a_3-a_2^2=\Delta_3. \tag{16}$$

Dann ist ihre Diskriminante

$$\Delta=\frac{1}{3}(4\Delta_1\Delta_3-\Delta_2^2). \tag{17}$$

In unserem Falle ist

$$a_0=\alpha^2+k\beta^2,\quad a_1=-6\alpha,\quad a_2=9,\quad a_3=4. \tag{18}$$

Daher

$$\Delta_1=-9(\alpha^2-3k\beta^2),\quad \Delta_2=9\{4(\alpha^2+k\beta^2)+6\alpha\},\quad \Delta_3=-9(8\alpha+9), \tag{19}$$

$$\Delta=-108\{4\alpha^3(\alpha+1)+k\beta^2(8\alpha^2+36\alpha+27)+4(k\beta^2)^2\}. \tag{20}$$

$\Delta=0$ liefert

$$-k\beta^2=\frac{1}{8}\left[8\alpha^2+36\alpha+27\pm\sqrt{(8\alpha^2+36\alpha+27)^2-64\alpha^3(\alpha+1)}\right]. \tag{21}$$

Nun gilt die sonderbare Identität

$$(8\alpha^2+36\alpha+27)^2-64\alpha^3(\alpha+1)\equiv(8\alpha+9)^3, \tag{22}$$

sodaß

$$-k\beta^2=\left(\alpha+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{27}{16}\pm\sqrt{8\left(\alpha+\frac{9}{8}\right)^3}. \tag{23}$$

Wir beschränken uns auf die *hyperbolische Geometrie* $k<0$. Für $\alpha>0$ sind dann nach (21) beide Werte von $-k\beta^2$ *positiv*, also gibt es dann 4 *reelle* Werte von β.

Für $\alpha=0$ wird $\beta_1=0$, was ausgeschlossen ist, und

$$\beta_2=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{-k}}. \tag{24}$$

Als Kurve ergibt sich dann die *spezielle Neilsche Parabel*

$$x_1^3=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{-k}}x_2^2, \tag{25}$$

auf die wir in Nr. 4 zurückkommen.

Die Wurzel in (23) ist *reell*, solange $\alpha+\frac{9}{8}\geqq 0$, $\alpha\geqq-\frac{9}{8}$ ist. Für $\alpha=-\frac{9}{8}$ wird $-k\beta^2<0$, also β imaginär.

3. Es bleibt also nur noch das Intervall $-\frac{9}{8}<\alpha<0$ zu untersuchen. Dazu setzen wir (wegen des im Folgenden zweckmäßigen Masstabs)

$$-24\,\beta^2=y,\quad \alpha=x \tag{26}$$

und betrachten die beiden Kurven

$$y_1=2\left(x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{27}{8}, \tag{27}$$

$$y_2^2=32\left(x+\frac{9}{8}\right)^3 \tag{28}$$

in der euklidischen Ebene. Dann muß festgestellt werden, wo im Intervall $-\frac{9}{8}<\alpha<0$ die Größe

$$y=y_1+y_2 \tag{27}$$

positiv ist.

(27) ist eine Parabel mit Scheitel $-\frac{9}{8}\left|-\frac{27}{8}\approx-2{,}2\right|-3{,}4$. Sie schneidet die x-Achse innerhalb des Intervalls im Punkte $\frac{-9+3\sqrt{3}}{4}\Big|\,0\approx-0{,}95|0$. Für $x=-\frac{9}{8}$ ist $y_1=-\frac{27}{32}=-0{,}8$.

(28) ist eine Neilsche Parabel mit Scheitel $-\frac{9}{8}\Big|\,0\approx-1{,}1|0$. Die beiden Kurven schneiden sich im Punkt $-1\left|-\frac{1}{4}\approx-1\right|-0{,}2$ und berühren sich nach (21) im Punkt $0\left|\frac{27}{4}\approx 0\right|6{,}7$, weil dort $y_1'=y_2'$ ist, und zwar berühren sie sich dort *dreipunktig*, sodaß sie sich zugleich schneiden und die Parabel (27) in diesem Punkt von der einen Seite der Kurve (28) auf die andere übertritt. Da für $x>0$ $y_1>|y_2|$

ist, wird also für $x<0$ in der Nähe der y-Achse $y_1<|y_2|$. Das bestätigt sich wie folgt:

Wir betrachten zunächst negative Werte von y_2.

Im Intervall $-\frac{9}{8}<x\leqq-\frac{9+3\sqrt{3}}{4}$ ist $y_1<0$, $y_2<0$, also $y<0$, β imaginär.

Im Intervall $\frac{9+3\sqrt{3}}{4}\leqq x<0$ ist $y_1>0$, $y_2<0$, also $y_1+y_2=y_1-|y_2|<0$, da die Parabel (27) unterhalb der Neilschen Parabel verläuft. Also ist β imaginär.

Für $x=0$ ist $y=0$.

Jetzt betrachten wir positive Werte von y_2.

Im Intervall $-\frac{9}{8}<x<-1$ ist $y_1<0$, $y_2>0$, $y=y_1+y_2=-|y_1|+y_2<0$, β imaginär. Für $x=-1$ ist $y=0$. Im Intervall $-1<x<\frac{-9+3\sqrt{3}}{4}$ ist $y_1<0, y_2>0$, $y=y_1+y_2=-|y_1|+y_2>0$, β *reell*. Für $x=\frac{-9+3\sqrt{3}}{4}$ ist $y_1=0$, $y_2>0$, $y=$ $=y_1+y_2>0$, β *reell*. Im Intervall $\frac{-9+3\sqrt{3}}{4}<x<0$ ist $y_1>0, y_2>0, y=y_1+y_2>0$, β *reell*. Für $x=0$ ist $y=2y_1>0$, β *reell*.

Zusammenfassend gilt: Es gibt *reelle* Werte von $\beta\neq0$ und zwar deren 2 für $-1<\alpha<0$, deren 4 für $\alpha>0$.

4. Für die *rektifizierbare Neilsche Parabel* (25) wird nun

$$(\beta 0)\qquad ds=\frac{\beta\sqrt{-27\mu^3+36\mu+16}}{-27(\mu^3+\mu)+4}\,d\mu=\frac{\beta(3\mu+2)\sqrt{4-3\mu}}{4-27(\mu^3+\mu)}\,d\mu.$$

Die Nennerfunktion hat nun einen reellen Faktor $\mu_1-\mu$, wo $\mu_1\approx0{,}145$. Es wird dann

$$4-27(\mu^3+\mu)-4+27(\mu_1^3+\mu_1)=-27(\mu-\mu_1)\{\mu^2+\mu\mu_1+\mu_1^2+1\}.$$

Daß der zweite Faktor aus zwei imaginären Faktoren besteht, folgt aus $+\mu_1^2-$ $-4(\mu_1^2+1)=-4-3\mu_1^2$. Damit wird

$$(\beta 1)\qquad ds=-\frac{\beta(3\mu+2)\sqrt{4-3\mu}}{27(\mu-\mu_1)\left\{\left(\mu+\frac{\mu_1}{2}\right)^2+\frac{3\mu_1^2+4}{4}\right\}}\,d\mu.$$

Das Integral ist zwar elementar, aber schrecklich auszurechnen.

(Eingegangen am 29. April 1964.)

EINIGE MERKWÜRDIGKEITEN BEI SPEZIELLEN EBENEN KURVEN DER HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE

Von

K. FLADT (Calw, Deutschland)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

1. Das „Übertragen" ebener Kurven aus der euklidischen in die hyperbolische Geometrie ist mit sonderbaren Schwierigkeiten verbunden. Vor allem werden alle Rechnungen viel verwickelter und die einfachen metrischen Ergebnisse in der euklidischen Geometrie, besonders in Bezug auf Flächen und Volumina, Bogenlängen und Oberflächen sind nicht mehr vorhanden. Auch führen die oft so verschiedenen Möglichkeiten, ein und dieselbe euklidische Kurve geometrisch zu erzeugen, auf ganz verschiedene hyperbolische Kurven. Eine ausführliche Darstellung einer „Analytischen Geometrie spezieller ebener Kurven"[1] würde in der hyperbolischen Geometrie sehr umfangreich werden. Immerhin sind einige Ergebnisse so merkwürdig und auch verhältnismäßig kurz zu entwickeln, daß sich ihre Mitteilung lohnen mag. Wegen der gebrauchten Formeln und ihrer Herleitung verweisen wir auf das in Fußnote[2] genannte Buch, stellen aber die wichtigsten und noch einige weitere, auf deren Herleitung wir aber verzichten müssen, in der folgenden Nr. 2 zusammen.

2. (1.) *Polarkoordinaten:* $\overline{OP}=r$, $\sphericalangle POP_1=\varphi$.

(2.) *Weierstraßsche Koordinaten*[3] (Fig. 1)

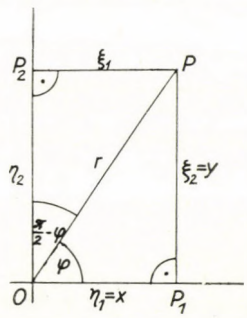


Fig. 1

$$\mathrm{S}\overline{PP_2} = \mathfrak{x}_1 = \mathrm{S}\xi_1 = \mathrm{S}r\cos\varphi,$$

$$\mathrm{S}\overline{PP_1} = \mathfrak{x}_2 = \mathrm{S}\xi_2 = \mathrm{S}r\sin\varphi,$$

$$\mathrm{C}\overline{OP} = \mathfrak{x}_3 = \mathrm{C}r,$$

wobei

$$(1) \qquad (\mathfrak{x}|\mathfrak{x}) \equiv k(\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_2^2)+\mathfrak{x}_3^2 = 1.$$

(3.) *Tangenskoordinaten* $\mathrm{T}\,\overline{OP_1}=x_1=\mathrm{T}\eta_1$, $\mathrm{T}\,\overline{OP_2}=x_2\mathrm{T}\eta_2$.

Da

$$(2) \qquad \left\{\cos\varphi = \frac{\mathrm{T}\mu_1}{\mathrm{T}r} = \frac{x_1}{\mathrm{T}r} = \frac{\mathrm{S}\xi_1}{\mathrm{S}r} = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathrm{S}r} = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_2\mathrm{T}\varrho}\right\}$$

$$\left\{\sin\varphi = \frac{\mathrm{T}\mu_2}{\mathrm{T}r} = \frac{x_2}{\mathrm{T}r} = \frac{\mathrm{S}\xi_2}{\mathrm{S}r} = \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathrm{S}r} = \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_3\mathrm{T}\varrho}\right\}$$

[1] Für die euklidische Geometrie vgl. K. FLADT, *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven* (Frankfurt a. M., 1962).

[2] K. FLADT, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Elementargeometrie III (Stuttgart, 1961), Abschnitt V 3 u. VII 1 bis 4.

[3] Wir gebrauchen die allgemeinen Funktionen $\mathrm{C}\varphi$, $\mathrm{S}\varphi$, $\mathrm{T}\varphi$, $\mathrm{Ct}\varphi$ s. op. cit[2] VII 1a.

so ist

$$x_1 = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_3}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_3}. \tag{3}$$

(4.) *Homogene Koordinaten* $x_1|x_2|x_3$,

$$x_1 : x_2 : x_3 = \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3. \tag{4}$$

Regel: $x_3 = 1$ gibt Tangens- $(x|x) = 1$ aber Weierstraßsche Koordinaten.

(5.) *Lobatschefskische Koordinaten* $x = \eta_1$, $y = \mathfrak{x}_2$ (Fig. 2), wobei

$$\mathrm{S}y = \mathrm{S}r \sin\varphi, \quad \mathrm{T}x = \mathrm{T}r \cos\varphi, \tag{5}$$

$$x_1 = \mathrm{T}x, \quad x_2 = \frac{\mathrm{T}y}{\mathrm{C}x} \tag{6}$$

$$\varrho x_1 = \mathrm{S}x, \quad \varrho x_2 = \mathrm{T}y, \quad \varrho x_3 = \mathrm{C}x; \tag{7}$$

$$\mathrm{T}x = \frac{x_1}{x_3}, \quad \mathrm{S}x = \frac{x_1}{\sqrt{kx_1^2 + x_3^2}}, \quad \mathrm{C}x = \frac{x_3}{\sqrt{kx_1^2 + x_3^2}};$$

$$\mathrm{T}y = \frac{x_2}{\sqrt{kx_1^2 + x_3^2}}, \quad \mathrm{S}y = \frac{x_2}{\sqrt{(x|x)}}, \quad \mathrm{C}y = \frac{\sqrt{kx_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{(x|x)}}.$$

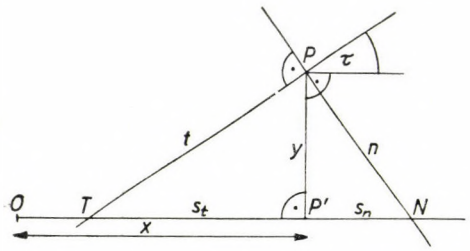


Fig. 2

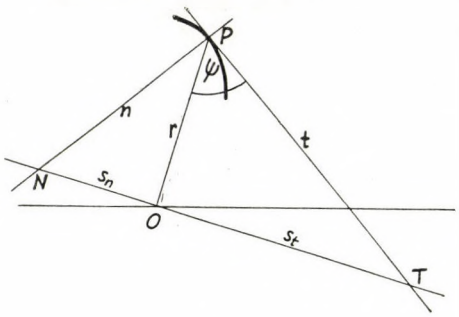


Fig. 3

$$\mathrm{tg}\,\tau = \frac{y'}{\mathrm{C}y} = \frac{\sqrt{(x|x)}}{x_3\,dx - x_1\,dx_3}\left(dx_2 - \frac{(x|dx)\,x_2}{(x|x)}\right) \tag{8}$$

$$\mathrm{T}s_n = y'\,\mathrm{T}y, \quad \mathrm{T}s_1 = \frac{\mathrm{S}y\,\mathrm{C}y}{y'} \tag{9}$$

$$\mathrm{T}n = \frac{\mathrm{S}y\sqrt{y'^2 + \mathrm{C}^2 y}}{\mathrm{C}^2 y}, \quad \mathrm{T}t = \frac{\mathrm{T}y\sqrt{y'^2 + \mathrm{C}^2 y}}{y'}. \tag{10}$$

(6.) In Polarkoordinaten ist (Fig. 3):

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\mathrm{S}r}{r'} \tag{11}$$

(12) $$\mathrm{T}n_1 = r', \quad \mathrm{T}s_1 = \frac{\mathrm{S}^2 r}{r'}$$

(13) $$\mathrm{T}n = \frac{\sqrt{r'^2 + \mathrm{S}^2 r}}{\mathrm{C}r}, \quad \mathrm{T}t = \frac{\mathrm{S}r\sqrt{r'^2 + \mathrm{S}^2 r}}{r'\mathrm{C}r}.$$

(7.) *Bogenelementquadrat*

(14) $$ds^2 = dr^2 + \mathrm{S}^2 r d\varphi^2 = \mathrm{C}^2 y\, dx + dy^2 = \frac{(d\mathfrak{x}|d\mathfrak{x})}{k} = \frac{(x|x)(dx|dx) - (x|dx)^2}{k(x|x)^2} =$$

$$= \frac{(\widehat{x\,dx}|\widehat{x\,dx})}{(x|x)^2} \equiv \frac{(x_2 dx_3 - x_3 dx_2)^2 + (x_3 dx_1 - x_1 dx_3)^2 + k(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^2}{(x|x)^2}.$$

(8.) *Sektordifferential*

(15) $$dF_1 = \frac{1 - \mathrm{C}r}{k} d\varphi = \frac{\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_2 d\mathfrak{x}_1}{1 + \mathfrak{x}^3} = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{\sqrt{(x|x)}\,(\sqrt{(x|x)} + x_3)}.$$

(9.) *Streifendifferential*

(16) $$dF_2 = \mathrm{S}y dx = \frac{x_2(x_3\, dx_1 - x_1\, dx_3)}{\sqrt{(x|x)}\,(kx_1^2 + x_3^2)}.$$

(10.) *Krümmungsgradius* ϱ (x' ist die Ableitung von x nach einem beliebigen Parameter):

(17) $$\mathrm{T}\varrho = \frac{1}{(xx'x'')}\left\{\frac{(x|x)(x'|x') - (x|x')^2}{k(x|x)}\right\}^{3/2} = \frac{1}{(\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'')}\left(\frac{\mathfrak{x}'|\mathfrak{x}'}{k}\right)^{3/2} =$$

$$= \frac{(r'^2 + \mathrm{S}^2 r)^{3/2}}{\mathrm{C}r(2r'^2 + \mathrm{S}^2 r) - r''\mathrm{S}r} = \frac{(y'^2 + \mathrm{C}^2 y)^{3/2}}{k\mathrm{S}y(2y'^2 + \mathrm{C}^2 y) + \mathrm{C}yy''}.$$

Wendepunkte aus

(18) $$(xx'x'') = 0 \text{ oder } \mathrm{C}r(2r'^2 + \mathrm{S}^2 r) - r''\mathrm{S}r = 0$$

$$\text{oder } k\mathrm{S}y(2y'^2 + \mathrm{C}^2 y) + \mathrm{C}yy'' = 0.$$

(11.) Hoch- und Tiefpunkte aus $\tau = 0$ oder

(19) $$(x|x)dx_2 - (x|dx)x_2 = 0 \text{ oder } d\mathfrak{x}_2 = 0.$$

Seitenpunkte aus

(20) $$x_3 dx_1 - x_1 dx_3 = 0.$$

3. Aufgaben zu den *Lobatschefskischen Koordinaten*

(1.) s_t ist konstant für die *Exponentialkurven.*

1. Fall $k = -1$ *Hyperbolische Exponentialkurve*

$$\frac{\mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y}{y'} = \text{const} = \lambda > 0, \qquad \mathrm{th}\, y = \mathrm{th}\, be^{\frac{x}{\lambda}}.$$

Es sei $\operatorname{tg}\tau=\dfrac{\operatorname{sh} y}{\lambda}=1$ für $x=0$, d. h. $\lambda=\operatorname{sh} b$, also

$$(I_1)\qquad \operatorname{th} y=\operatorname{th} be^{\frac{x}{\operatorname{sh} b}}.$$

Für $x=0$ wird $y=b$, für $x<0$ nimmt y ab und strebt für $x\to-\infty$ gegen 0. Für $x>0$ wächst y solange bis $y=\infty$, $\operatorname{th} y=1$, $x=\operatorname{sh} b \ln\operatorname{cth} b$ ist. Die Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen ist $\operatorname{sh} b \arcsin\operatorname{th} b$, zwischen der Kurve, der x-Achse und der Geraden $\pi/2 \operatorname{sh} b$.

2. Fall $k=+1$. *Sphärische Exponentialkurve.*

$$(I_2)\qquad \operatorname{tg} y=\operatorname{tg} be^{\frac{x}{\sin b}}.$$

Für $x\to-\infty$ ewiger rhytmischer Umlauf um die endlich lange x-Achse, für $x\to\infty$ desgl. um den Pol der x-Achse.

(2) s_n ist konstant,

(1.) wenn $k=-1$, für y' $\operatorname{th} y=\text{const}=\lambda$, $\operatorname{ch} y=\operatorname{ch} be^{\lambda x}$. Für $x=0$ wird $y=b$; für $x<0$ nimmt $\operatorname{ch} y$ ab bis $\operatorname{ch} y=\operatorname{ch} be^{\lambda x}=1$, $y=0$, $x=-\dfrac{1}{\lambda}\ln\operatorname{ch} b$. Dort ist $\operatorname{tg}\tau=\dfrac{\lambda}{\operatorname{sh} y}=\infty$, $\tau=\dfrac{\pi}{2}$. Dies sei für $b=0$, $x=0$ der Fall, sodaß

$$(II_1)\qquad \operatorname{ch} y=e^{\lambda x}.$$

(2.) wenn $k=+1$, für $\cos y=\cos be^{-\lambda x}$. Für $x=0$ wird $y=b$. Für $x<0$ nimmt $\cos y$ zu bis $\cos be^{-\lambda x}=1$, y ab bis $y=0$, $x=\dfrac{1}{\lambda}\ln\cos b$. Dort ist $\operatorname{tg}\tau=\dfrac{\lambda}{\sin y}=\infty$, $\tau=\dfrac{\pi}{2}$. Dies sei für $b=0$, $x=0$ der Fall, sodaß (II_2) $\cos y=e^{-\lambda x}$. Für $x>0$ nimmt $\cos y$ ab, y wächst bis $y=\dfrac{\pi}{2}$, das für $x=+\infty$ mit $\operatorname{tg}\tau=\lambda$ erreicht wird (Pol der x-Achse asymptotischer Punkt). Ein Wendepunkt aus $\sin y=\sqrt{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}-\lambda^2}$.

(3.) $t=\text{const}=\pm \mathrm{T}b$ gibt die hyperbolische *Traktrixkurve* mit den Parametergleichungen

$$(III)\qquad \left.\begin{aligned} x &= \mp \mathrm{T}b \operatorname{arth} u \pm \mathrm{AT}(\mathrm{T}bu)\\ \mathrm{S}y &= \mathrm{S}b\sqrt{1-u^2}\end{aligned}\right\}\quad \left(\sqrt{1-u^2}=e^{\pm\frac{2s}{\mathrm{T}b}}\right).$$

(4.) Die *trigonometrischen Kurven.* Die *Sinuslinie* entstehe wie in der euklidischen Geometrie (Fig. 4):

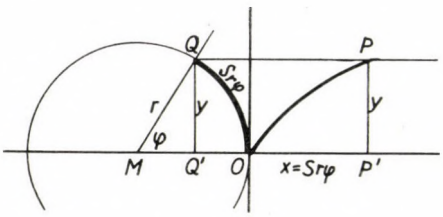


Fig. 4

$$\overline{P'P}=\overline{Q'Q}=y,$$

$$\overline{OP'}=\widehat{OQ}=\mathrm{S}r\sin\varphi,\quad \sin\varphi=\frac{\mathrm{S}y}{\mathrm{S}r},$$

also

$$(IV_1)\qquad \mathrm{S}y=\mathrm{S}r\sin\frac{x}{\mathrm{S}r}.$$

$$(1)\qquad \operatorname{tg}\tau=\frac{y'}{\mathrm{C}y}=\frac{1}{\mathrm{C}^2 y}\cos\frac{x}{\mathrm{S}r},\quad \tau_0=\frac{\pi}{2}$$

(Wendepunkt!), erster Hochpunkt $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{S}r|r$, Fläche:

$$(2)\qquad \int_0^x \mathrm{S}y\,dx = 2\mathrm{S}^2 r \sin^2\frac{x}{2\mathrm{S}r},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}\mathrm{S}r} = \mathrm{S}^2 r.$$

Die *Cosinuslinie* ergibt sich mit $\overline{MQ'}=y$, $\cos\varphi = \frac{\mathrm{T}y}{\mathrm{T}r}$, also

$$(\mathrm{IV}_2)\qquad \mathrm{T}y = \mathrm{T}r\cos\frac{x}{\mathrm{S}r},$$

$$(3)\qquad \operatorname{tg}\tau = -\frac{\mathrm{C}y}{\mathrm{C}r}\sin\frac{x}{\mathrm{S}r},$$

τ in $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{S}r|0$ gleich $-\frac{\pi}{4}$, erster Hochpunkt $0|r$, Fläche:

$$(4)\qquad \int_0^x \frac{\mathrm{T}r\cos\frac{x}{\mathrm{S}r}\,dx}{\sqrt{1+k\mathrm{T}^2 r\cos^2\frac{x}{\mathrm{S}r}}} = \frac{\mathrm{S}r}{\sqrt{-k}}\int_{(0)}^{(x)} \frac{d\left(\sqrt{-k}\,\mathrm{S}r\sin\frac{x}{\mathrm{S}r}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{-k}\,\mathrm{S}r\sin\frac{x}{\mathrm{S}r}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\mathrm{S}r}{\sqrt{-k}}\operatorname{arsh}\sqrt{-k}\left(\mathrm{S}r\sin\frac{x}{\mathrm{S}r}\right),$$

also

$$\frac{\mathrm{S}r}{\sqrt{-k}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\mathrm{S}r} = r\mathrm{S}r.$$

Die *Tangenslinie* folgt mit $y=\overline{OT}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{Ty}{\mathrm{T}r}$, also

$$(\mathrm{IV}_3)\qquad \mathrm{T}y = \mathrm{S}r\operatorname{tg}\frac{x}{\mathrm{S}r},$$

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\tau = \frac{\mathrm{C}y}{\cos^2\frac{x}{\mathrm{S}r}},\quad \tau_0 = \frac{\pi}{4},$$

Fläche

$$(6)\qquad -\frac{\mathrm{S}^2 r}{\mathrm{C}r}\int_0^x \frac{d\left(\frac{\operatorname{Cot} r}{\sqrt{-k}}\cos\frac{x}{\mathrm{S}r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\operatorname{Cot} r}{\sqrt{-k}}\cos\frac{x}{\mathrm{S}r}\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{S^2 r}{Sr}\left(\operatorname{arch}\frac{\operatorname{Cot} r}{\sqrt{-k}} - \operatorname{arch}\left(\frac{\operatorname{Cot} r}{\sqrt{-k}}\cos\frac{x}{Sr}\right)\right).$$

Die Abszisse des 1. Fernpunkts folgt aus $Ty = \frac{1}{\sqrt{-k}}$ und ist

$$x_1 = Sr \operatorname{arc\,cot}(\operatorname{sh}\sqrt{-k}r). \tag{7}$$

Die Tangenslinie hat von $\varphi_1 = \frac{x_0}{Sr}$ bis $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ eine Unterbrechnung. Die Asymptote im ersten Fernpunkt schneidet $x_2 = 0$ unter dem Winkel $\arccos(\operatorname{th}^2\sqrt{-k}r)$.

4. Aufgaben zu den *Polarkoordinaten*.

(1.) s_n ist konstant für $r' = \text{const} = a$, d. h. die *Archimedische Spirale*

$$r = Ta \cdot \varphi. \tag{IV}$$

(2.) Die *logarithmische Spirale* wird mit $\operatorname{tg}\psi = \frac{Sr}{r'} = \text{const}$

$$T\frac{r}{2} = T\frac{a}{2}\, e^{\varphi \operatorname{ctg}\psi} \tag{V}$$

(3.) s_t ist konstant für $\frac{S^2 r}{r'} = \text{const} = -\operatorname{Cot} a$ d. h. die *hyperbolische Spirale* $Tr = \frac{Ta}{\varphi}$. Sie hat mit $\varphi = \pm \operatorname{th} a$ die Asymptoten $(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)x_1 + (\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)x_2 - \frac{\varphi}{\sqrt{-k}}x_3 = 0$.

5. *Mittelpunktskegelschnitte*. Ihre Gleichung ist

$$k(\varrho_1 x_3^2 + \varrho_2 x_2^2) + \varrho_3 x_3^2 = 0. \tag{V}$$

Insbesondre hat man eine Ellipse für $0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2$ mit den Halbachsen a und b, $\varrho_1 = \operatorname{Cot}^2 a$, $\varrho_2 = \operatorname{Cot}^2 b$, $\varrho_3 = -k$. Parameterdarstellung:

$$\sigma x_1 = \frac{1-\lambda^2}{\sqrt{-k\varrho_1}}, \quad \sigma x_2 = \frac{2\lambda}{\sqrt{-k\varrho_2}}, \quad \sigma x_3 = \frac{1+\lambda^2}{\sqrt{\varrho_3}}, \tag{1}$$

$$(x'x''x''') = \frac{8}{-k\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}}, \tag{2}$$

$$\operatorname{Cot}\varrho^{2/3} = \frac{(-k)^{1/3}}{(\varrho_1\varrho_2\varrho_3)^{1/3}} = \frac{-\varrho_2\varrho_3(1-\lambda^2)^2 - 4\varrho_3\varrho_1\lambda^2 + \varrho_1\varrho_2(1+\lambda^2)^2}{\varrho_1(1-\lambda^2)^2 + 4\varrho_2\lambda^2 - \varrho_3(1+\lambda^2)^2}. \tag{3}$$

$\lambda = 0$ gibt für die *Ellipse*

$$T\varrho_a = \frac{T^2 b}{Ta}, \quad T\varrho_b = \frac{T^2 a}{Tb} \tag{4}$$

und damit die *hyperbolische* (!) Konstruktion der Fig. 5. Gleichung von AC: $x_1 = \mathrm{T}ax_3$, BD: $x_2 = \mathrm{T}bx_3$, OD: $\mathrm{T}ax_1 = \mathrm{T}bx_2$. $\overline{OE} = \varrho_a$, $\overline{OF} = \varrho_b$,

$$(5) \qquad \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = 4\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \frac{\varrho_1(1-\lambda^2)^2 + 4\varrho_2\lambda^2 - \varrho_3(1+\lambda^2)^2}{\{\varrho_2\varrho_3(1-\lambda^2)^2 + 4\varrho_3\varrho_1\lambda^2 - \varrho_1\varrho_2(1+\lambda^2)^2\}^2}.$$

6. *Parabeln.*[4] Davon gibt es drei Arten

1. Art (VI_1) $2\varrho_1 x_1(\sqrt{-k}\,x_1 - x_3) + \sqrt{-k}\,\varrho_2 x_2^2 = 0$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$, $0 < \varrho_1 < \varrho_2$: *Elliptische Parabel*; $\varrho_1 < \sigma < \varrho_2$: *Konvexe hyperbolische Parabel;* $0 < \varrho_2 < \varrho_1$: *Konkave hyperbolische Parabel.*

2. Art (VI_2) $-2\varrho_1(\sqrt{-k}\,x_1 - x_3)x_3 + k\varrho_2 x_2^2 = 0$, $0 < \varrho_1 < \varrho_2$ *Zweiteilige Parabel;*

3. Art (VI_3) $\varrho'(x|x) - x_2(\sqrt{-k}x_1 - x_3) = 0$, $\varrho' > 0$ *Oskulierende Parabel.*

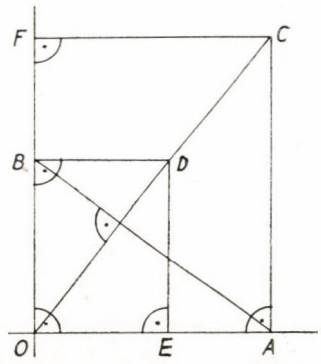


Fig. 5

1. Art: (VI_1) hat die Parameterdarstellung

(1_1) $\sigma x_1 = 2\varrho_1\lambda^2$, $\sigma x_2 = 2\varrho_1\lambda$,
$\sigma x_3 = \sqrt{-k}(2\varrho_1\lambda^2 + \varrho_2)$, sodaß

(2_1) $(xx'x'') = -8\varrho_1^2\varrho_2\sqrt{-k}$

$$(3_1) \qquad \mathrm{Cot}^{2/3}\,\varrho = -\frac{(-k)^{4/3}}{\varrho_1^{2/3}\varrho_2^{1/3}} \cdot \frac{4\varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1)\lambda^2 + \varrho_2^2}{4(\varrho_2 - \varrho_1)\lambda^2 + \varrho_2}$$

$$(4_1) \qquad \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \frac{4\varrho_1^2\varrho_2\{4(\varrho_2 - \varrho_1)\lambda^2 + \varrho_2\}}{-k\{4\varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1)\lambda^2 + \varrho_2^2\}^2}$$

$$(5_1) \qquad dF_2 = \frac{8\varrho_1^2\lambda^2\,d\lambda}{(-k)(4\varrho_1\lambda^2 + \varrho_2)\sqrt{\varrho_2^2 + 4\varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1)\lambda^2}}$$

Streifendifferential. Für die *konkave hyperbolische Parabel* kommt mit $2\sqrt{\varrho_1(\varrho_1 - \varrho_2)}\lambda = \varrho_2 \sin\varphi$

$$F_2 = \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}}\left(1 - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2\cos^2\varphi}\right) d\varphi = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}}\,\varphi - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\varrho_1\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{\varphi_1(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

$$F_2 = \int_0^{\pi/2} = \left(\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}} - 1\right)\frac{\pi}{2},$$

$2F_2 \int_0^{\pi/2}$ ist die Fläche zwischen der Parabel und der Geraden $x_1 = \dfrac{\varrho_2}{\sqrt{-k}(2\varrho_1 - \varrho_2)}x_3$ durch die Fernpunkte der Parabel.

[4] Vgl. dem diese Zeitschrift, Tomus XIII, 1962, Seite 38.

Die Gleichung der Parabeltangente ist $(xx'\xi)=0$ oder

$$(6_1) \qquad \sqrt{-k}\{(2\varrho_1\lambda^2-\varrho_2)\xi_1+2\varrho_2\lambda\xi_2\}-2\varrho_1\lambda^2\xi_3=0.$$

Sie trifft $\xi_2=0$ in $\dfrac{\xi_1}{\xi_2}=\dfrac{2\varrho_1\lambda^2}{\sqrt{-k}(2\varrho_1\lambda^2-\varrho_2)}$.

Für die Asymptoten in den Fernpunkten ist

$$\varphi=\frac{\pi}{2}, \quad \lambda=\frac{\varrho_2}{2\sqrt{\varrho_1(\varrho_1-\varrho_2)}},$$

also

$$\frac{\xi_1}{\xi_3}=-\frac{\varrho_2}{\sqrt{-k}(2\varrho_1-3\varrho_2)}.$$

Die 2. Art kann ähnlich behandelt werden. Die 3. Art sei ausführlicher behandelt. Die *Parabel* (VI_3) berührt den absoluten Kegelschnitt $(x|x)=0$ im Punkt $(1|0|\sqrt{-k})$ und schneidet ihn im Punkt $(-1|0|\sqrt{-k})$ mit der Asymptote $\varrho'-(\sqrt{-k}x_1+x_3)+x_2=0$. (In Fig. 6 ist das euklidische Abbild der Parabel gezeichnet.)

Mittels der Parallelen zu $x_2=0$

$$(1) \qquad x_2=\lambda(\sqrt{-k}x_1-x_3)$$ [5]

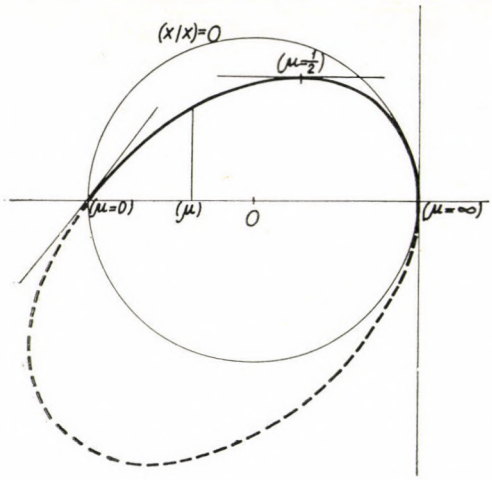


Fig. 6

folgt die Parameterdarstellung

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned}\sigma x_1&=\lambda(\varrho' k\lambda-1)+\varrho'\\ \sigma x_2&=2\sqrt{-k}\,\varrho'\lambda\\ \sigma x_3&=\sqrt{-k}\{\lambda(\varrho' k\lambda-1)-\varrho'\}\end{aligned}\right\}.$$

Daraus folgt weiter

$$(3) \qquad kx_1^2+x_3^2=4k\varrho'\lambda(k\varrho'\lambda-1),$$

$$(4) \qquad (x|x)=-4k\varrho'\lambda.$$

Die Parabelpunkte sind also für $\lambda>0$ eigentlich. Wir setzen daher

$$(5) \qquad \lambda=\mu^2$$

und erhalten

$$\sigma x_1=\mu^2(\varrho' k\mu^2-1)+\varrho',$$

$$(2') \qquad \sigma_2 x=2\sqrt{-k}\,\varrho'\mu^2,$$

$$\sigma x_3=\sqrt{-k}\{\mu^2(\varrho' k\mu^2-1)-\varrho'\},$$

$$(6) \qquad \sigma x_1'=2(2\varrho' k\mu^2-1), \quad \sigma x_2'=4\sqrt{-k}\,\varrho', \quad \sigma x_3'=\sqrt{-k}\cdot 2(2\varrho' k\mu^2-1).$$

[5] Bei dieser Annahme wird für die eigentlichen Kurvenpunkte $\lambda>0$, s. Gl. (4) unten. Außerdem wird nach (6') $\dfrac{x_2}{x_3}>0$, d. h. die Kurve liegt in der positiven Halbebene.

Damit wird

$$dF = \frac{\sqrt{\varrho'}}{\sqrt{-k}}\left(2-\frac{1}{1-k\varrho'\mu^2}\right)d\mu. \tag{7}$$

Wir integrieren zwischen 0 und μ, wo die Grenze $\mu=0$ dem Punkt $(-1|0|\sqrt{-k})$ zukommt. So folgt

$$\overset{\mu}{\underset{0}{F}} = 2\frac{\sqrt{\varrho'}}{\sqrt{-k}}\mu+\frac{1}{(-k)}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{-k\varrho'}\,\mu). \tag{8}$$

Der Hochpunkt folgt aus (19) der Nr. 2 für $\mu=\frac{1}{2}$, $\lambda=\frac{1}{4}$. Es ergibt sich weiter

$$\widehat{xdx}_1 = 4k\varrho'^2(1+k_1\mu^4)\,d\mu, \quad \widehat{xdx}_2 = 4\sqrt{-k}\,\varrho'(1-2\varrho' k\mu^2)\,d\mu, \tag{9}$$

$$\widehat{xdx}_3 = -4\sqrt{-k}\,\varrho'^2(1-k\mu^4)\,d\mu,$$

$$\widehat{xdx}\,|\,\widehat{xdx} = 16k\varrho'^2(4k\varrho'\mu^2-1), \quad (x|x)^2 = 16k^2\varrho'^2\mu^4, \tag{10}$$

und damit

$$ds = \frac{\sqrt{1-4k\varrho'\mu^2}}{\sqrt{-k}\,\mu}\,d\mu. \tag{11}$$

Sei (12) $1-4k\varrho'\mu^2=u^2$, so kommt

$$ds = \frac{1}{\sqrt{-k}}\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du, \tag{12}$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{-k}}\left(u+\frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\right)+\text{const} = \tag{13}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-k}}\left(\sqrt{1-4k\varrho'\mu^2}+\ln\frac{\sqrt{1-4k\varrho'\mu^2}-1}{\mu}\right)+\text{const}.$$

Wir berechnen noch

$$\sigma x_1'' = 8\varrho' k\mu, \quad \sigma x_2'' = 0, \quad \sigma x_3'' = \sqrt{-k}\cdot 8\varrho' k\mu, \tag{14}$$

$$\operatorname{Cot}\varrho = \frac{8k^2\varrho'^{3/2}\mu^3}{(\sqrt{1-4k\varrho'\mu^2})^3}. \tag{15}$$

Setzt man $-4k\varrho'\mu^2 = v$ (was man von Anfang an hätte tun können), so kommt

$$\overset{v}{\underset{0}{F}} = \frac{1}{-k}\left(v+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}v\right), \tag{8'}$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{-k}}\left(\sqrt{1+v}+\ln\frac{\sqrt{1+v}-1}{\sqrt{v}}+\text{const}, \tag{13'}$$

$$\operatorname{cth}^{2/3}(\sqrt{-k}\,\varrho) = \frac{v}{1+v}. \tag{15'}$$

Aus (15′) folgt aber, da $v>0$ ist, daß $\operatorname{cth}(\sqrt{-k}\varrho)<1$, also ϱ imaginär wird. Das bedeutet aber, daß die *oskulierende Parabel* an einer endlichen Stelle keinen Krümmungskreis, sondern eine *Krümmungsabstandslinie* im Abstand ϑ besitzt, sodaß

$$\operatorname{th}^{2/3}(\sqrt{-k}\,\vartheta)=\frac{v}{1+v} \tag{15″}$$

ist.

(Eingegangen am 4. Mai 1964.)

LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE À L'AIDE DE LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

Par

F. CONSTANTINESCU (Cluj, Roumanie)

(*Présenté par* B. SZ.-NAGY)

Dans ce qui suit, nous nous occupons de l'équation fonctionelle

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \dots & f(x+nh) \\ f(x+h) & f(x+2h) & \dots & f(x+\overline{n+1}\,h) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ f(x+nh) & f(x+\overline{n+1}\,h) & \dots & f(x+2nh) \end{vmatrix} = 0$$

où $f(x)$ est une fonction continue sur l'axe réel et x et h sont des grandeurs variables. On peut montrer sans difficulté [2] que, $f(x)$ étant une solution continue de l'équation (1), elle satisfait à une relation de la forme

$$(2)\qquad a_0(h)f(x)+a_1(h)f(x+h)+\dots+a_n(h)f(x+nh) = 0$$

pour tout x et $0<h<H$, H étant un nombre positif et $a_0(h)$, $a_1(h)$, ..., $a_n(h)$ des fonctions continues de h qui ne s'annulent simultanément pour aucune valeur de h et qui s'expriment par les valeurs de la fonction $f(x)$ sur les noeuds $0, h, \dots, nh$. L'équation fonctionnelle (1) a été résolue par des méthodes habituelles [2], [5]. Dans cette note, nous voulons résoudre l'équation (1), en utilisant la théorie des distributions, d'après une idée de I. FENYŐ [4]. Pour cela, nous utiliserons le théorème suivant [6]:

Étant donné une distribution A au support limité et désignant par une étoile le produit de composition des distributions, toute solution de l'équation

$$(3)\qquad A * f = 0$$

dans le cadre des distributions peut être approchée aussi bien que l'on veut (la convergence étant prise au sens de la théorie des distribution) par des solutions de l'équation (3) qui sont des fonctions habituelles, indéfiniment dérivables.

Si nous prenons

$$(4)\qquad A = \sum_{j=0}^{n} a_j \delta(x-jh)$$

où $\delta(x)$ est la fonction de Dirac et a_j des nombres pas tous nuls, l'équation (3) devient

$$(5)\qquad \sum_{j=0}^{n} a_j f(x+jh) = 0.$$

Revenons maintenant à l'équation (1) et soit $\bar{f}(x)$ une de ses solutions continues.

En fixant h dans (2) dans l'intervalle $(0, H)$, nous trouvons que $\bar{f}(x)$ satisfait à une équation aux différences finies du type (5). Mais il résulte du théorème énoncé que la fonction $\bar{f}(x)$ est limite des fonctions habituelles indéfiniment dérivables, solutions de l'équation (5). D'autre part, de la théorie des équations à différences finies [3], on sait que les solutions indéfiniment dérivables de l'équation (5) forment un sous-espace Ω_h qui coïncide avec son adhérence dans $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire $\bar{f}(x) \in \Omega_h$. Donc toute solution continue de l'équation fonctionelle (1) est indéfiniment dérivable dans le sens habituel. Cela une fois connu, la solution de l'équation (1) ne présente plus de difficultés. Elle peut être faite par exemple par des opérations élémentaires sur le déterminant (1), [1].

(Reçu le 27 mai 1964)

Bibliographie

[1] F. CONSTANTINESCU, Reducerea unei ecuaţii funcţionale la o ecuaţie diferenţială, *Studii şi Cercetări mat. Cluj*, **2** (1963), p. 247—251.

[2] N. GHIORCOIAŞIU, H. ROŞCĂU, L'integration d'une équation fonctionnelle, *Mathematica*, **4** (**27**), 1 (1962), p. 21—32.

[3] А. О. Гельфанд, *Исчисление конечных разностей* (Москва, 1952).

[4] I. FENYŐ, Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), p. 383—396.

[5] F. RADÓ, Caractérisation de l'ensemble des intégrales des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre donné, *Mathematica*, **4** (27), 1 (1962), p. 131—143.

[6] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions, II* (Paris, 1959).

ZUR ERWEITERUNG ALGEBRAISCHER STRUKTUREN DURCH RECHTSQUOTIENTENBILDUNG

Von

H. J. WEINERT (Potsdam, DDR)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

Es sei $\mathfrak{R}$ eine Halbgruppe und $\mathfrak{n}$ eine Unterhalbgruppe (zweiseitig) regulärer Elemente aus $\mathfrak{R}$. Unter einer Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R},\mathfrak{n})$ von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{n}$ verstehen wir eine Oberhalbgruppe von $\mathfrak{R}$ mit Einselement, in der jedes Element $\alpha\in\mathfrak{n}$ ein Inverses α^{-1} besitzt und deren Elemente als „Rechtsquotienten" $a\alpha^{-1}$ mit $a\in\mathfrak{R}$ und $\alpha\in\mathfrak{n}$ dargestellt werden können. Bekanntlich existiert eine solche (dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R},\mathfrak{n})$ genau dann, wenn die folgende Bedingung $Q_r(\mathfrak{R},\mathfrak{n})$ erfüllt ist (vgl. [1], [2]): Zu je zwei Elementen $a\in\mathfrak{R}$ und $\alpha\in\mathfrak{n}$ gibt es Elemente $l\in\mathfrak{R}$ und $\lambda\in\mathfrak{n}$ mit $a\lambda=\alpha l$.

In der vorliegenden Note ergänzen wir unsere Untersuchungen aus [2] durch folgende Aussage:

SATZ. *Es sei* $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R},\mathfrak{n})$ *eine Rechtsquotientenhalbgruppe von* $\mathfrak{R}$ *nach* $\mathfrak{n}$ *und* $\mathfrak{T}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{S},\mathfrak{s})$ *eine Rechtsquotientenhalbgruppe von* $\mathfrak{S}$ *nach einer Unterhalbgruppe* $\mathfrak{s}$ *von* $\mathfrak{S}$. *Dann ist* $\mathfrak{T}$ *auch schon als Rechtsquotientenhalbgruppe* $\mathfrak{T}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R},\mathfrak{t})$ *von* $\mathfrak{R}$ *zu gewinnen, wobei man für* $\mathfrak{t}$ *etwa die Halbgruppe derjenigen Elemente aus* $\mathfrak{R}$ *nehmen kann, die in* $\mathfrak{T}$ *ein Inverses besitzen.*

Die Nacheinanderanwendung zweier Erweiterungen einer Halbgruppe $\mathfrak{R}$ durch Rechtsquotientenbildung führt also aus der maximalen Rechtsquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{R}$ (vgl. [2], § 4, Satz 3) nicht heraus und damit zu nichts wesentlich Neuem. Dieses Ergebnis überträgt sich sofort auf die Erweiterung eines Halbringes bzw. eines Ringes $\mathfrak{R}$ durch Rechtsquotientenbildung, da sich die entsprechend definierten Rechtsquotientenstrukturen $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R},\mathfrak{n})$, wobei $\mathfrak{n}$ ebenfalls Unterhalbgruppe der multiplikativen Halbgruppe $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{R}$ ist, nach [2], § 5 auf die Betrachtung der Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R},\mathfrak{n})$ und nachträgliche Fortsetzung der Addition von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R},\mathfrak{n})$ zurückführen lassen.

Es versteht sich, daß die analogen Aussagen bezüglich der Linksquotientenbildung gelten. Auf die Verhältnisse bei der Nacheinanderanwendung von Rechts- und Linksquotientenerweiterungen wird in einer späteren Arbeit eingegangen werden.

BEWEIS DES SATZES. Wir betrachten die Menge $\bar{\mathfrak{s}}$ derjenigen Elemente von $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R},\mathfrak{n})$, die in $\mathfrak{T}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{S},\mathfrak{s})$ ein Inverses besitzen; dann ist $\bar{\mathfrak{s}}$ ersichtlich Unterhalbgruppe von $\mathfrak{S}$ und es gilt $\mathfrak{T}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{S},\bar{\mathfrak{s}})$ (vgl. auch [2], § 4, Satz 2). Zur Vereinfachung der Bezeichnung nehmen wir an, daß $\mathfrak{s}$ selbst bereits diese zu $\mathfrak{T}$ gehörige maximale „Nennerhalbgruppe" $\bar{\mathfrak{s}}$ ist. Dann gilt natürlich $\mathfrak{s}\supseteq\mathfrak{n}$, da ja die Elemente von $\mathfrak{n}$ bereits in $\mathfrak{S}$ invertierbar sind. Ist nun $c\gamma^{-1}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{s}$, so folgt aus $\gamma\in\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{s}$ auch $c=c\gamma^{-1}\gamma\in\mathfrak{s}$.

Weiter ist dann $\mathfrak{t}=\mathfrak{s}\cap\mathfrak{N}$ die Halbgruppe der Elemente aus $\mathfrak{N}$, die in $\mathfrak{T}$ ein Inverses haben. Insbesondere gilt dann $\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{t}$ und nach dem soeben Festgestellten folgt aus $c\gamma^{-1}\in\mathfrak{s}$ stets $c\in\mathfrak{t}$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{t}$ der Bedingung $Q_r(\mathfrak{N},\mathfrak{t})$ genügt. Dazu seien $a\in\mathfrak{N}$ und $t\in\mathfrak{t}$ vorgegeben; nach $Q_r(\mathfrak{S},\mathfrak{s})$ gibt es wegen $a\in\mathfrak{S}$ und $t\in\mathfrak{s}$ Elemente $c\gamma^{-1}\in\mathfrak{s}$ und $b\beta^{-1}\in\mathfrak{S}$ mit

$$ac\gamma^{-1}=tb\beta^{-1}.$$

Auf γ und β aus $\mathfrak{n}$ wenden wir $Q_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ an und erhalten Elemente $l\in\mathfrak{N}$ und $\lambda\in\mathfrak{n}$, die $\gamma\lambda=\beta l$ erfüllen. Daraus folgt aber

$$ac\lambda=tbl,$$

wobei wie behauptet $bl\in\mathfrak{N}$ und $c\in\mathfrak{t}$, $\lambda\in\mathfrak{t}$, also $c\lambda\in\mathfrak{t}$ gilt. Es existiert also die Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{t})$, die natürlich $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ enthält. In ihr besitzen alle Elemente von $\mathfrak{t}$ und damit sogar alle Elemente $c\gamma^{-1}$ von $\mathfrak{s}\subseteq\mathfrak{S}$ ein Inverses. Weiter lassen sich alle Elemente von $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{t})$ in der Form at^{-1} mit $a\in\mathfrak{N}$, $t\in\mathfrak{t}$ schreiben; wegen $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{t}\subseteq\mathfrak{s}$ ist also $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{t})$ auch die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) Rechtsquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{s}$, d. h. es gilt

$$\mathfrak{T}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{S},\mathfrak{s})=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{t}).$$

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE POTSDAM,
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

(Eingegangen am 2. Juni 1964.)

Literaturverzeichnis

[1] K. MURATA, On the quotient semi-group of a nonkommutative semi-group, *Osaka math. J.*, **2** (1950), S. 1–5.

[2] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), S. 209–227.

NOTES ON INTERPOLATION. IX

(APPROXIMATIVE REPRESENTATION OF FOURIER-TRANSFORM)

By

J. BALÁZS (Budapest) and P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

1. The physicists are often interested in approximative expressions of Fourier-transform of functions which are only experimentally known. One encounters analogous problems in the calculus of probability in connection with stationary stochastic processes. We shall deal with these questions without loss of generality in one dimension only. We have to investigate approximative expressions for

$$F(x) = \int_0^\infty f(t) e^{ixt}\, dt,$$

if $f(t)$ is given only by measurements at finitely many points t_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, otherwise we know only the continuity of $f(t)$ on $[0, \infty)$, and the limes-relation

$$f(t) = O(e^{-ct})$$

with some positive $c > \frac{1}{2}$, if $t \to \infty$. We have to search for approximative expressions for

$$\Phi(x, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty \varphi(t) e^{-t+ixt}\, dt \tag{1.2}$$

if the function $\varphi(t)$ is known only for finitely many $t = \eta_\nu$ $(\geqq 0)$ places:

$$\varphi(\eta_\nu) = y_\nu = \text{given} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$

(which we may choose as we wish), $\varphi(t)$ is continuous for $t \geqq 0$ and

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) e^{-c_1 t} = 0 \tag{1.4}$$

with some positive $c_1 < \frac{1}{2}$. To make it a meaningful problem some plausible requirements must be fulfilled. Denoting the approximative expression for $\Phi(x, \varphi)$ by $\Phi_n(x, \varphi)$ they are the following.

a) If $\varphi(t) \equiv \pi_k(t)$ is a polynomial of degree $\leqq k$, then for $n > k$ we have *identically*

$$\Phi_n(x, \pi_k) \equiv \Phi(x, \pi_k),$$

i. e. the approximative expression should be *exact* (Gauss—Jacobi-type postulate).

b) if $n \to \infty$, then

$$\Phi_n(x, \varphi) \to \Phi(x, \varphi)$$

uniformly on the whole real axis.

Of course an explicit estimation of the error would be desirable but *only* from continuity and (1. 4) no such estimation can be derived.

2. It is plausible to choose as η_ν points the ξ_ν (positive and simple) zeros of the nth Laguerre-polynomial

$$L_n^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} e^x (e^{-x} x^n)^{(n)}, \tag{2. 1}$$

$$L_n^*(0) = 1.$$

Denoting as usual the fundamental functions of the Lagrange-interpolation, by

$$l_\nu(x) = \frac{L_n^*(x)}{L_n^{*\prime}(\xi_\nu)(x-\xi_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{2. 2}$$

essential role will be played in this investigation by the expressions

$$\psi_\nu(x) = \psi_{\nu n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty l_\nu(t) e^{-t+ixt}\, dt. \tag{2. 3}$$

As well-known (see [1], p. 97 with $y = \xi_\nu$)

$$(n+1)\frac{L_{n+1}^*(\xi_\nu) L_n^*(x)}{x-\xi_\nu} = \sum_{j=0}^{n-1} L_j^*(\xi_\nu) L_j^*(x).$$

Further (the same page, replacing n by $(n+1)$ and x by ξ_ν) we have

$$(n+1) L_{n+1}^*(\xi_\nu) = -n L_{n-1}^*(\xi_\nu)$$

i. e.

$$-n L_{n-1}^*(\xi_\nu) L_n^{*\prime}(\xi_\nu) l_\nu(x) = \sum_{j=0}^{n-1} L_j^*(\xi_\nu) L_j^*(x).$$

Since (ibidem p. 98 with $x = \xi_\nu$)

$$L_n^{*\prime}(\xi_\nu) = -\frac{n L_{n-1}^*(\xi_\nu)}{\xi_\nu}$$

we get

$$l_\nu(x) = \frac{1}{\xi_\nu L_n^{*\prime}(\xi_\nu)^2} \sum_{j=0}^{n-1} L_j^*(\xi_\nu) L_j^*(x). \tag{2. 4}$$

Putting it into (2. 3) we obtain

$$\psi_\nu(x) = \frac{1}{\xi_\nu L_n^{*\prime}(\xi_\nu)^2} \sum_{j=0}^{n-1} L_j^*(\xi_\nu) \cdot \int_0^\infty \{L_j^*(t) e^{-t}\} e^{ixt}\, dt.$$

Using (2. 1) partial integration gives for the integral on the right the form

$$\frac{(-1)^j}{j!} (ix)^j \int_0^\infty e^{-(1-ix)t} \cdot t^j\, dt = \frac{(-ix)^j}{(1-ix)^{j+1}}$$

and hence

$$\psi_\nu(x) = \frac{1}{\xi_\nu L_n^{*\prime}(\xi_\nu)^2} \cdot \frac{1}{(1-ix)} \sum_{j=0}^{n-1} L_j^*(\xi_\nu) \left(\frac{x}{i+x}\right)^j. \tag{2. 5}$$

These functions $\psi_\nu(x)$ are once for all calculable. It would be desirable to find asymptotical formulae for them with reasonable error-term for large n's uniformly in ν.

3. *Now we assert that*

$$\Phi_n(x, \varphi) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(\xi_\nu)\psi_{\nu n}(x)$$

with $\psi_{\nu n}(x)$ *from* (2. 3) *fulfil our stipulations* a) *and* b).

Namely, if $\varphi(t) \equiv \pi_k(t)$, then for $n > k$ we have, as well-known,

$$\pi_k(t) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \pi_k(\xi_\nu) l_\nu(t)$$

i. e. identically

$$\Phi(x, \pi_k) = \sum_{\nu=1}^{n} \pi_k(\xi_\nu) \int_0^\infty l_\nu(t) e^{-t+ixt}\, dt = \sum_{\nu=1}^{n} \pi_k(\xi_\nu)\psi_{\nu n}(x) = \Phi_n(x, \pi_k).$$

Hence a) is fulfilled indeed.

In order to show that requirement b) is fulfilled we have to show that for arbitrary real x and arbitrarily small $\varepsilon > 0$ the inequality

$$|\Phi_n(x, \varphi) - \Phi(x, \varphi)| \leqq \varepsilon$$

holds, whenever $n > n_0(\varepsilon)$. With the notation

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi(\xi_\nu) l_\nu(t) = L_n(t, \varphi) \tag{3. 1}$$

we have

$$\Phi_n(x, \varphi) - \Phi(x, \varphi) = \int_0^\infty \{L_n(t, \varphi) - \varphi(t)\} e^{-t+ixt}\, dt$$

and hence by Cauchy's inequality

$$|\Phi_n(x, \varphi) - \Phi(x, \varphi)|^2 \leqq \int_0^\infty \{L_n(t, \varphi) - \varphi(t)\}^2 e^{-t}\, dt.$$

Hence, if we succeed in proving

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \{L_n(t, \varphi) - \varphi(t)\}^2 e^{-t}\, dt = 0 \tag{3. 2}$$

for the functions (1. 4), we will be ready with verifying b).

4. In proving (3. 2) we shall use also ideas of papers VI and VIII of this series; actually the problem of this note gave rise to paper VIII (see EGERVÁRY—TURÁN [2], BALÁZS—TURÁN [3]).

We shall use the following special case of a theorem of S. BERNSTEIN. If $g(x)$ is continuous along the real axis and

$$\lim_{x\to\pm\infty} |g(x)|e^{-c_1x^2} = 0, \tag{4. 1}$$

then for arbitrarily small $\varepsilon_1>0$ and suitable polynomial $\pi_l(x)$ the inequality

$$|g(x)-\pi_l(x)|e^{-c_1x^2} \leqq \varepsilon_1 \tag{4. 2}$$

holds.

With our $\varphi(x)$ for $x\geqq 0$ we consider $g(x)=\varphi(x^2)$ on the whole real axis. From (1. 4) we see that (4. 1) is satisfied; hence from (4. 2) we have for a suitable polynomial $\pi_l(x)$ the inequality

$$|\varphi(x^2)-\pi_l(x)|e^{-c_1x^2} \leqq \varepsilon_1 \tag{4. 3}$$

on the real axis. Replacing x by $(-x)$ we get here also the inequality

$$|\varphi(x^2)-\pi_l(-x)|e^{-c_1x^2} \leqq \varepsilon_1 . \tag{4. 4}$$

From (4. 3) and (4. 4) we get on the real axis the inequality

$$\left|\varphi(x^2)-\frac{\pi_l(x)+\pi_l(-x)}{2}\right| e^{-c_1x^2} \leqq \varepsilon_1 . \tag{4. 5}$$

Since the polynomial

$$\frac{1}{2}\{\pi_l(x)+\pi_l(-x)\}$$

is even, it can be written as $h(x^2)$ where $h(t)$ is a polynomial; thus we obtained (replacing x^2 by x) that for arbitrarily small $\varepsilon_1>0$ and suitable $h(x)$ polynomial the inequality

$$|\varphi(x)-h(x)|e^{-c_1x} \leqq \varepsilon_1 \tag{4. 6}$$

holds for $x\geqq 0$.

Let the degree of $h(x)$ be k and $n>k$. Then

$$\int_0^\infty \{L_n(t,\varphi)-\varphi(t)\}^2 e^{-t}\,dt = \int_0^\infty \{L_n(t,\varphi-h)-[\varphi(t)-h(t)]\}^2 e^{-t}\,dt \leqq \tag{4. 7}$$

$$\leqq 2\left\{\int_0^\infty L_n(t,\varphi-h)^2 e^{-t}\,dt+\int_0^\infty [\varphi(t)-h(t)]^2 e^{-t}\,dt\right\} \overset{\text{def}}{=} 2\{I_1+I_2\}.$$

As to I_2 (4. 6) gives at once

$$I_2 \leqq \varepsilon_1^2 \int_0^\infty e^{(2c_1-1)t}\,dt = \frac{\varepsilon_1^2}{1-2c_1}. \tag{4. 8}$$

As to I_1 we have

$$I_1 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \{\varphi(\xi_\mu) - h(\xi_\mu)\} \cdot \{\varphi(\xi_\nu) - h(\xi_\nu)\} \cdot \int_0^\infty l_\mu(t) l_\nu(t) e^{-t}\, dt;$$

owing to the well-known orthogonality of the $l_\mu(t)$'s and (4. 6) this gives

$$I_1 \leqq \varepsilon_1^2 \sum_{\mu=1}^{n} e^{2c_1\xi_\mu} \int_0^\infty l_\mu(t)^2 e^{-t}\, dt. \tag{4. 9}$$

Hence if the last sum does not exceed a bound, independent of n and ε_1, (3. 2) will be proved.

5. In order to prove this last assertion we consider the polynomial of degree $\leqq (2n-1)$

$$G_n(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{\mu=1}^{n} e^{2c_1\xi_\mu} \cdot \left\{1 - \frac{L_n^{*\prime\prime}(\xi_\mu)}{L_n^{*\prime}(\xi_\mu)} (x-\xi_\mu)\right\} \cdot l_\mu(x)^2 + \sum_{\mu=1}^{n} 2c_1 e^{2c_1\xi_\mu} \cdot (x-\xi_\mu) l_\mu(x)^2. \tag{5. 1}$$

As well-known (and easy to verify) we have

$$\begin{aligned} G_n(\xi_\mu) &= e^{2c_1\xi_\mu}, \\ G_n'(\xi_\mu) &= 2c_1 e^{2c_1\xi_\mu}. \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Putting

$$e^{2c_1x} - G_n(x) = W_n(x), \tag{5. 2}$$

this gives

$$W_n(\xi_\mu) = W_n'(\xi_\mu) = 0. \tag{5. 3}$$

Obviously

$$\lim_{x \to +\infty} W_n(x) = +\infty. \tag{5. 4}$$

If there exists a $\xi \geqq 0$ with $W_n(\xi) < 0$, then $W_n(x)$ would have at least $(2n+1)$ positive roots (counted according multiplicity). But then Rolle's theorem would give that $W_n^{(2n)}(x)$ would have a (positive) root and this contradicts to the fact that

$$W_n^{(2n)}(x) = (2c_1)^{2n} e^{2c_1x} > 0.$$

Hence for $x \geqq 0$ (even for all real x's)

$$W_n(x) \geqq 0. \tag{5. 5}$$

Multiplying by e^{-x} and integrating over $(0, \infty)$ and taking in account that for $\mu = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_0^\infty (x-\xi_\mu) l_\mu(x)^2 e^{-x}\, dx = \frac{1}{L_n^{*\prime}(\xi_\mu)^2} \int_0^\infty \frac{L_n^*(x)}{x-\xi_\mu} \cdot L_n^*(x) e^{-x}\, dx = 0$$

we get that the sum in (4. 9) is

$$\leqq \int_0^\infty e^{(2c_1-1)x}\,dx = \frac{1}{1-2c_1},$$

which completes the proof.

MATHEMATICAL INSTITUTE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,
BUDAPEST

MATHEMATICAL INSTITUTE
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY
BUDAPEST

(Received 9 June 1964)

Literature

[1] G. SZEGŐ, Orthogonal polynomials, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, Vol. **XXIII** (1939).
[2] E. EGERVÁRY and P. TURÁN, Notes on interpolation. VI, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), pp. 55–68.
[3] J. BALÁZS and P. TURÁN, Notes on interpolation. VIII, *Ibid.*, **12** (1961), pp. 469–474.

KONVERGENZBESCHLEUNIGUNG BEI MONOTONEN VEKTORFOLGEN

Von

J. W. SCHMIDT (Dresden)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

I. Problemstellung

A. Das Vorgehen zur Konvergenzverbesserung werde zuerst bei Zahlenfolgen erläutert. Gegeben seien die Folgen

$$x_n = x^* + a\lambda^n + o(\lambda^n), \quad y_n = x^* + b\lambda^n + o(\lambda^n).$$

Sie konvergieren im Falle $|\lambda| < 1$ linear gegen x^*. Die hieraus gebildeten Zahlenfolgen

$$u_n = x_n + \frac{d_n z_n}{z_{n-1} - z_n}, \quad v_n = y_n - \frac{e_n z_n}{z_{n-1} - z_n} \tag{1. 1}$$

mit $z_n = y_n - x_n$, $d_n = x_n - x_{n-1}$ und $e_n = y_{n-1} - y_n$ streben wesentlich schneller gegen x^*, denn man bestätigt

$$u_n = x^* + o(\lambda^n), \quad v_n = x^* + o(\lambda^n).$$

Diese Konstruktion ist eine Abwandlung des mit einer Folge auskommenden δ^2-Verfahrens von AITKEN [1] (KUMMER [5])

$$w_n = x_n + \frac{d_n d_n}{d_{n-1} - d_n} = x^* + o(\lambda^n). \tag{1. 2}$$

B. Nach SCHRÖDER [7], [8] kann man aus dem Bestehen der Ungleichungen

$$\mathbf{x} \leqq \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \leqq \mathbf{T}^+\mathbf{x} + \mathbf{T}^-\mathbf{y} + \mathbf{s}, \quad \mathbf{T}^+\mathbf{y} + \mathbf{T}^-\mathbf{x} + \mathbf{s} \leqq \mathbf{y} \tag{1. 3}$$

mit zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ die Existenz einer Lösung $\mathbf{x}^*$ des linearen Gleichungssystems (m Gleichungen mit m Unbekannten)

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s} \tag{1. 4}$$

und die Einschließung

$$\mathbf{x} \leqq \mathbf{x}^* \leqq \mathbf{y} \tag{1. 5}$$

folgern. Beginnt man die Iterationen

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}^+\mathbf{x}_n + \mathbf{T}^-\mathbf{y}_n + \mathbf{s}, \quad \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{T}^+\mathbf{y}_n + \mathbf{T}^-\mathbf{x}_n + \mathbf{s} \tag{1. 6}$$

mit den Vektoren $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ und $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}$, gilt darüberhinaus

$$\mathbf{x}_0 \leqq \ldots \leqq \mathbf{x}_n \leqq \mathbf{x}_{n+1} \leqq \ldots \leqq \mathbf{x}^* \leqq \ldots \leqq \mathbf{y}_{n+1} \leqq \mathbf{y}_n \leqq \ldots \leqq \mathbf{y}_0 . \tag{1. 7}$$

Besitzt die Matrix $\mathbf{T} = (t_{ik})$ in jeder Zeile mindestens ein Element $t_{ik} \neq 0$, so sind in (1. 5) und (1. 7) die strengen Ungleichungen erfüllt, wenn dies in der Voraus-

setzung (1. 3) der Fall ist. (Verwendete Bezeichnungen: $\mathbf{x}=(x_i)\leqq\mathbf{y}=(y_i)$ bedeutet $x_i\leqq y_i$ für die Komponenten x_i und y_i $(i=1,\ldots,m)$; $\mathbf{x}<\mathbf{y}$ bedeutet $x_i<y_i$ $(i=1,\ldots,m)$, $\mathbf{T}^+=(t_{ik}^+)$ mit $t_{ik}^+=\max\{t_{ik},0\}$, $\mathbf{T}^-=(t_{ik}^-)$ mit $t_{ik}^-=\min\{t_{ik},0\}$, $|\mathbf{T}|=(|t_{ik}|)$, also $\mathbf{T}=\mathbf{T}^++\mathbf{T}^-$, $|\mathbf{T}|=\mathbf{T}^+-\mathbf{T}^-$; $\mathbf{T}^+$ ist isoton, $\mathbf{T}^-$ antiton).

Man kann genau dann Folgen $\{\mathbf{x}_n\}$ und $\{\mathbf{y}_n\}$ angeben, für die (1. 7) gilt und die gegen $\mathbf{x}^*$ konvergieren, wenn der Spektralradius $\varrho(|\mathbf{T}|)$ kleiner als eins ist. Die Hinlänglichkeit wurde in [6] durch Angabe von Startvektoren $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}_0$ nachgewiesen.

C. Zum Beispiel bei der Diskretisierung von Randwertaufgaben treten vielfach Systeme auf, für die $\varrho(|\mathbf{T}|)\approx 1$ ist, so daß die Konvergenz von (1. 6) nicht befriedigt und ein Interesse an einer Konvergenzbeschleunigung besteht. ALBRECHT [3] (s. auch COLLATZ [4]) entwickelte hierzu auf der Grundlage des δ^2-Verfahrens (1. 2) eine Methode, die im Falle von isotonem $\mathbf{T}=\mathbf{T}^+$ und von antitonem $\mathbf{T}=\mathbf{T}^-$ anwendbar ist und die gleichzeitig eine einfache Fehlerabschätzung zuläßt.

In der vorliegenden Mitteilung wird von den Formeln (1. 1) ausgegangen, um zu einem konvergenzverbessernden Verfahren bei Vektorfolgen zu gelangen, welches zusätzlich eine Eingrenzung der Lösung gestattet. Es werden dazu Vektoren $\mathbf{u}_n$ und $\mathbf{v}_n$ ermittelt, welche die Lösung $\mathbf{x}^*$ enger als $\mathbf{x}_n$ und $\mathbf{y}_n$ einschließen: $\mathbf{x}_n\leqq\mathbf{u}_n\leqq\mathbf{x}^*\leqq\mathbf{v}_n\leqq\mathbf{y}_n$. Die obigen Einschränkungen bezüglich $\mathbf{T}$ können fortfallen. Auch sind an die $\mathbf{x}_n$ und $\mathbf{y}_n$ keine zusätzlichen Voraussetzungen zu stellen. Dafür benötigt man beide Folgen.

Zur Bestimmung von $\mathbf{u}_n$ und $\mathbf{v}_n$ ist ein lineares Ungleichungssystem von $2m$ Ungleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen. Es stimmt bis auf eine Transformation mit dem überein, auf welches man bei der Ermittlung der Startvektoren $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}_0$ geführt wird, so daß sich die in [6] aufgezeigten Möglichkeiten übertragen lassen. Bei veränderter Beweismethode ergeben sich auch Erweiterungen.

Den Abschluß bilden numerische Beispiele.

II. Herleitung des Verfahrens

A. Zur Abkürzung seien die Vektoren

$$\mathbf{z}_n=\mathbf{y}_n-\mathbf{x}_n,\quad \mathbf{d}_n=\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_{n-1},\quad \mathbf{e}_n=\mathbf{y}_{n-1}-\mathbf{y}_n \tag{2. 1}$$

eingeführt. $\mathbf{T}$ habe in jeder Zeile ein von Null verschiedenes Element, und in (1. 3) mögen die strengen Ungleichungen gelten. Dann folgen aus (1. 6) und den entsprechend verschärften Ungleichungen (1. 7) die Beziehungen

$$\mathbf{z}_n>\mathbf{0},\quad \mathbf{d}_n>\mathbf{0},\quad \mathbf{e}_n>\mathbf{0},$$

$$\mathbf{0}<\mathbf{z}_n-\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n+\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n\leqq\mathbf{z}_n-\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n\leqq\mathbf{z}_n-\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n-\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n \tag{2. 2}$$

und

$$\mathbf{z}_{n+1}=|\mathbf{T}|\mathbf{z}_n,\quad \mathbf{d}_{n+1}=\mathbf{T}^+\mathbf{d}_n-\mathbf{T}^-\mathbf{e}_n,\quad \mathbf{e}_{n+1}=\mathbf{T}^+\mathbf{e}_n-\mathbf{T}^-\mathbf{d}_n,$$

$$\mathbf{d}_{n+1}+\mathbf{e}_{n+1}=\mathbf{z}_n-\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n+\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n.$$

Die in den Vektoren

$$\mathbf{u}_{n+1}=\mathbf{x}_{n+1}+\alpha\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n-\beta\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n,\quad \mathbf{v}_{n+1}=\mathbf{y}_{n+1}-\beta\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n+\alpha\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n \tag{2. 3}$$

auftretenden Zahlen α und β sollen derart bestimmt werden, daß eine engere Eingrenzung der Lösung als mit $\mathbf{x}_{n+1}$ und $\mathbf{y}_{n+1}$ erreicht wird. Hierzu bildet der folgende Satz die Grundlage.

SATZ. *Die Zahlen α und β mögen*

1. *nichtnegativ sein und*
2. *die Ungleichungen*

$$\alpha(\mathbf{z}_n - \mathbf{T}^+\mathbf{z}_n) + \beta\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n \leqq \mathbf{d}_{n+1}, \quad \beta(\mathbf{z}_n - \mathbf{T}^+\mathbf{z}_n) + \alpha\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n \leqq \mathbf{e}_{n+1} \tag{2. 4}$$

erfüllen. Dann besitzt (1. 4) *eine Lösung* $\mathbf{x}^*$, *für welche*

$$\mathbf{x}_{n+1} \leqq \mathbf{u}_{n+1} \leqq \mathbf{x}^* \leqq \mathbf{v}_{n+1} \leqq \mathbf{y}_{n+1} \tag{2. 5}$$

gilt.

BEWEIS. Aus der ersten Voraussetzung und $\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n \leqq \mathbf{0}$ ergeben sich unmittelbar die Ungleichungen $\mathbf{x}_{n+1} \leqq \mathbf{u}_{n+1}$, $\mathbf{v}_{n+1} \leqq \mathbf{y}_{n+1}$. Mit dem Nachweis von (1. 3) für die Vektoren $\mathbf{u}_{n+1}$ und $\mathbf{v}_{n+1}$ folgt somit über (1. 5) die Behauptung.

Durch Addition der Ungleichungen (2. 4) erhält man

$$(\alpha+\beta)(\mathbf{z}_n - \mathbf{T}^+\mathbf{z}_n + \mathbf{T}^-\mathbf{z}_n) = (\alpha+\beta)(\mathbf{d}_{n+1} + \mathbf{e}_{n+1}) \leqq \mathbf{d}_{n+1} + \mathbf{e}_{n+1},$$

also $0 \leqq \alpha+\beta \leqq 1$ und daher über $(\alpha+\beta)\mathbf{z}_{n+1} = (\alpha+\beta)(\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n - \mathbf{T}^-\mathbf{z}_n) \leqq \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}$ die erste der Ungleichungen (1. 3) $\mathbf{u}_{n+1} \leqq \mathbf{v}_{n+1}$.

Wendet man auf die erste Ungleichung (2. 4) den isotonen Operator $\mathbf{T}^+$ und auf die zweite den ebenfalls isotonen Operator $-\mathbf{T}^-$ an und addiert beide, kommt man zu

$$\alpha\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n - \alpha\mathbf{T}^+\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n + \beta\mathbf{T}^+\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n - \beta\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n + \beta\mathbf{T}^-\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n - \alpha\mathbf{T}^-\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n \leqq$$
$$\leqq \mathbf{T}^+\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{T}^-\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+2} - \mathbf{x}_{n+1}.$$

Diese Ungleichung stimmt, wie man nach geringen Umformungen sieht, mit

$$\mathbf{u}_{n+1} \leqq \mathbf{T}^+\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{T}^-\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{s}$$

überein. Ebenso bestätigt man die dritte der Forderungen (1. 3). Damit ist der Satz bereits bewiesen.

Man wird den Ansatz (2. 3) abändern in

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} + \alpha\mathbf{T}^+\mathbf{z} - \beta\mathbf{T}^-\mathbf{z}, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{y}_{n+1} - \beta\mathbf{T}^+\mathbf{z} + \alpha\mathbf{T}^-\mathbf{z}, \tag{2. 6}$$

falls ein Eigenvektor $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ zum dominanten Eigenwert $\gamma = \varrho(|\mathbf{T}|) > 0$ der (nichtzerfallenden) Matrix $|\mathbf{T}|$ bekannt ist. Die Aussage des obigen Satzes bleibt dann erhalten, wenn die Ungleichungen (2. 4) durch

$$\alpha(\mathbf{z} - \mathbf{T}^+\mathbf{z}) + \beta\mathbf{T}^-\mathbf{z} \leqq \mathbf{d}_{n+1}, \quad \beta(\mathbf{z} - \mathbf{T}^-\mathbf{z}) + \alpha\mathbf{T}^+\mathbf{z} \leqq \mathbf{e}_{n+1} \tag{2. 7}$$

ersetzt werden und die Voraussetzung $\gamma < 1$ hinzukommt. Aus ihr folgt die Isotonie von $|\mathbf{T}|(|\mathbf{I} - |\mathbf{T}|)^{-1}$, welche beim Übergang von $(\alpha+\beta)(\mathbf{z} - |\mathbf{T}|\mathbf{z}) \leqq \mathbf{z}_n - |\mathbf{T}|\mathbf{z}_n$ zu $(\alpha+\beta)|\mathbf{T}|\mathbf{z} \leqq \mathbf{z}_{n+1}$ ausgenutzt wird. Dieser Schluß tritt beim Nachweis von $\mathbf{u}_{n+1} \leqq \mathbf{v}_{n+1}$ auf; weiterer Ergänzungen bedarf der jetzige Beweis zur Aussage (2. 5) nicht.

B. Zur Angabe einer Lösung von (2. 4) werden folgende Abkürzungen eingeführt ($\mathbf{z}_n=(z_{n,i})$, $\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n=(\mathbf{T}^-z_{n,i})$, usw.):

$$\gamma_i=\frac{d_{n+1,i}-\mathbf{T}^-z_{n,i}}{z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i}-\mathbf{T}^-z_{n,i}},\quad \sigma_i=\frac{-\mathbf{T}^-z_{n,i}}{z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i}} \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{2. 8}$$

und

$$\varkappa=\min_{i=1,\ldots,m}\gamma_i,\quad \nu=\max_{i=1,\ldots,m}\gamma_i,\quad \sigma=\max_{i=1,\ldots,m}\sigma_i. \tag{2. 9}$$

Wegen (2. 2) sind die Nenner von γ_i und σ_i ungleich Null und gilt

$$0\leqq\sigma_i,\ \sigma<1 \qquad (i=1,\ldots,m). \tag{2. 10}$$

AUSSAGE 1. *Die Zahlen*

$$\alpha=\varkappa+\frac{(\varkappa-\nu)\sigma}{1-\sigma}\beta,\quad =1-\nu+\frac{(\varkappa-\nu)\sigma}{1-\sigma} \tag{2. 11}$$

bilden eine Lösung des Ungleichungssystems (2. 4).

Der Beweis wird indirekt geführt. Für eine Komponente i sei

$$\alpha(z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i})+\beta\mathbf{T}^-z_{n,i}>d_{n+1,i}$$

und für eine eventuell andere j sei

$$\beta(z_{n,j}-\mathbf{T}^+z_{n,j})+\alpha\mathbf{T}^-z_{n,j}>e_{n+1,j},$$

also

$$\left\{(z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i})+\frac{\sigma}{1-\sigma}(z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i}+\mathbf{T}^-z_{n,i})\right\}\varkappa- \tag{2. 12}$$

$$-\left\{\mathbf{T}^-z_{n,i}+\frac{\sigma}{1-\sigma}(z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i}+\mathbf{T}^-z_{n,i})\right\}\nu+\mathbf{T}^-z_{n,i}>d_{n+1,i}$$

und

$$\left\{\mathbf{T}^-z_{n,j}+\frac{\sigma}{1-\sigma}(z_{n,j}-\mathbf{T}^+z_{n,j}+\mathbf{T}^-z_{n,j})\right\}\varkappa- \tag{2. 13}$$

$$-\left\{(z_{n,j}-\mathbf{T}^+z_{n,j})+\frac{\sigma}{1-\sigma}(z_{n,j}-\mathbf{T}^+z_{n,j}+\mathbf{T}^-z_{n,j})\right\}\nu+z_{n,j}-\mathbf{T}^+z_{n,j}>e_{n+1,j}.$$

Wegen (2. 2) und (2. 10) ist die eine geschweifte Klammer positiv,

$$z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i}+\frac{\sigma}{1-\sigma}(z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i}+\mathbf{T}^-z_{n,i})>0 \qquad (i=1,\ldots,m),$$

während für die andere geschweifte Klammer über

$$\frac{\sigma}{1-\sigma}\geqq\frac{\sigma_i}{1-\sigma_i},\qquad \frac{\sigma}{1-\sigma}(1-\sigma_i)-\sigma_i\geqq 0$$

$$\mathbf{T}^-z_{n,i}+\frac{\sigma}{1-\sigma}(z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i}+\mathbf{T}^-z_{n,i})\geqq 0 \qquad (i=1,\ldots,m)$$

folgt. Daher ist es zuläßig, in (2. 12) bzw. (2. 13) $\varkappa$ und ν durch γ_i bzw. γ_j zu ersetzen, womit sich dann unmittelbar ein Widerspruch ergibt:

$$(z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i}-\mathbf{T}^-z_{n,i})\gamma_i+\mathbf{T}^-z_{n,i} = d_{n+1,i} > d_{n+1,i}$$

und

$$(z_{n,j}-\mathbf{T}^+z_{n,j}-\mathbf{T}^-z_{n,j})(-\gamma_j)+z_{n,j}-\mathbf{T}^+z_{n,j} = -d_{n+1,j}+z_{n,j}-\mathbf{T}^+z_{n,j}+\mathbf{T}^-z_{n,j} =$$

$$= e_{n+1,j} > e_{n+1,j}.$$

Zur Lösung des Systems (2. 7) hat man Überall $\mathbf{z}_n$ gegen $\mathbf{z}$ auszutauschen.

C. Daß die Vorschrift (2. 3) und (2. 11) eine Erweiterung von (1. 1) auf Vektorfolgen darstellt, erkennt man deutlich im Falle $\mathbf{T}=\mathbf{T}^+$. Dann sind $\sigma=0$,

$$\alpha = \varkappa = \min_{k=1,\ldots,m} \frac{d_{n+1,k}}{z_{n,k}-z_{n+1,k}} > 0, \quad \beta = 1-\nu = \min_{k=1,\ldots,m} \frac{e_{n+1,k}}{z_{n,k}-z_{n+1,k}} > 0,$$

und die Vektoren $\mathbf{u}_{n+1}$ und $\mathbf{v}_{n+1}$, welche die Lösung entsprechend (2. 5) einschließen, lauten

(2. 14)
$$u_{n+1,i} = x_{n+1,i}+z_{n+1,i} \min_{k=1,\ldots,m} \frac{d_{n+1,k}}{z_{n,k}-z_{n+1,k}},$$

$$v_{n+1,i} = y_{n+1,i}-z_{n+1,i} \min_{k=1,\ldots,m} \frac{e_{n+1,k}}{z_{n,k}-z_{n+1,k}} \qquad (i=1, \ldots, m).$$

Diese Formeln weisen unmittelbar auf (1. 1) hin.

III. Ergänzungen

A. Im vorangehenden Abschnitt wurde mit (2. 11) eine einfach zu ermittelnde Lösung des Ungleichungssystems (2. 4) angegeben. Sie wird außer für $\mathbf{T}=\mathbf{T}^+$ im allgemeinen nicht die optimale Lösung sein. Zu deren Bestimmung soll jetzt ein iteratives Verfahren beschrieben werden.

Eine Lösung (α^*, β^*) von (2. 4) wird im Hinblick auf (2. 3) optimal genannt, wenn für jede weitere Lösung (α, β) die Ungleichungen $\alpha \leqq \alpha^*$ und $\beta \leqq \beta^*$ folgen; man erhält dann $\mathbf{u}_n(\alpha, \beta) \leqq \mathbf{u}_n(\alpha^*, \beta^*)$ und $\mathbf{v}_n(\alpha^*, \beta^*) \leqq \mathbf{v}_n(\alpha, \beta)$. Es gibt höchstens eine optimale Lösung. Beginnend mit den Werten (2. 11) als α_0 und β_0 wird in folgender Weise iteriert (n fest):

(3. 1)
$$\alpha_\mu = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{d_{n+1,i}-\beta_{\mu-1}\mathbf{T}^-z_{n,i}}{z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i}}, \quad \beta_\mu = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{e_{n+1,i}-\alpha_{\mu-1}\mathbf{T}^-z_{n,i}}{z_{n,i}-\mathbf{T}^+z_{n,i}}$$

$$(\mu=1, 2, \ldots),$$

d. h. α_μ bzw. β_μ ist die größte Lösung des Systems

$$\alpha(\mathbf{z}_n-\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n) \leqq \mathbf{d}_{n+1}-\beta_{\mu-1}\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n$$

bei bekanntem $\beta_{\mu-1}$ bzw. des Systems

$$\beta(\mathbf{z}_n-\mathbf{T}^+\mathbf{z}_n) \leqq \mathbf{e}_{n+1}-\alpha_{\mu-1}\mathbf{T}^-\mathbf{z}_n$$

bei bekanntem $\alpha_{\mu-1}$. Man bestätigt die Monotonie $\alpha_{\mu-1} \leqq \alpha_\mu$, $\beta_{\mu-1} \leqq \beta_\mu$ und (α_μ, β_μ) als eine Lösung des Gesamtsystems (2. 4). Weiterhin sind die Folgen $\{\alpha_\mu\}$ und $\{\beta_\mu\}$ wegen (2. 10) konvergent. Ihre Grenzwerte α^* und β^* erfüllen das Gleichungssystem

$$\alpha = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{d_{n+1,i} - \beta \mathbf{T}^- z_{n,i}}{z_{n,i} - \mathbf{T}^+ z_{n,i}}, \quad \beta = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{e_{n+1,i} - \alpha \mathbf{T}^- z_{n,i}}{z_{n,i} - \mathbf{T}^+ z_{n,i}} \tag{3. 2}$$

und damit auch alle Ungleichungen (2. 4). Wegen (2. 10) ist die Lösung von (3. 2) eindeutig. Es sei nun (α, β) eine weitere Lösung von (2. 4). Ausgehend von diesen Werten kann durch die Iteration (3. 1) eine Lösung $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ der Ungleichungen (2. 4) gewonnen werden, die gleichzeitig den Gleichungen (3. 2) genügt und für die $\bar{\alpha} \geqq \alpha$ und $\bar{\beta} \geqq \beta$ gilt, also erhält man wegen der eindeutigen Lösbarkeit von (3. 2) $\alpha^* = \bar{\alpha} \geqq \alpha$ und $\beta^* = \bar{\beta} \geqq \beta$. Somit besteht die

AUSSAGE 2. *Das Ungleichungssystem* (2. 4) *besitzt genau eine optimale Lösung* (α^*, β^*). *Sie ergibt sich aus den Grenzwerten* $\alpha^* = \lim \alpha_\mu$ *und* $\beta^* = \lim \beta_\mu$ *der Iteration* (3. 1).

B. Das Vorgehen zur Konvergenzbeschleunigung beim Verfahren in Gesamtschritten (1. 6) läßt sich auf die Iteration in Einzelschritten (ALBRECHT [2]) übertragen. Besonders übersichtlich kann dies mit einer in [2] benutzten Methode geschehen, so daß auf eine explizite Angabe der Ergebnisse verzichtet werden kann.

C. Schließlich sei erwähnt, daß sich die Iteration (3. 1) auf Ungleichungssysteme mit mehr als zwei Unbekannten

$$\gamma - \mathbf{S}_i \gamma \leqq \mathbf{c}_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{3. 3}$$

($\mathbf{c}_i$, γ r-dimensionale Vektoren, $\mathbf{S}_i \geqq \mathbf{0}$ r-reihige Matrizen) erweitern läßt. Es gibt genau eine optimale Lösung γ^*, und die Iteration

$$\gamma_\mu = \min_{i=1,\ldots,m} (\mathbf{c}_i + \mathbf{S}_i \gamma_{\mu-1}) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

konvergiert gegen sie, d. h. $\gamma^* = \lim \gamma_\mu$, wenn wie in (2. 4) wegen (2. 10) die Spektralradien von $\mathbf{S}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ kleiner als eins sind. Ein Anfangsvektor γ_0 kann bei dem Ansatz daß seine Komponenten alle gleich sind, leicht gefunden werden.

Ein in γ isotones Funktional nimmt bei den Nebenbedingungen (3. 3) für γ^* sein Maximum an.

IV. Numerische Beispiele

A. Zur Vorführung der Konvergenzverbesserung wird ein System (1. 4) von einer sehr geringen Anzahl von Unbekannten benutzt. Das Verfahren wurde auch an umfangreicheren Systemen überprüft. Es seien

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}4 \\ -0{,}2 & 1{,}1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Da $\varrho(|\mathbf{T}|)$ recht nahe bei eins liegt, konvergiert die Iteration (1. 6) langsam. Geeignete Startvektoren $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}_0$ erhält man nach [6] mit dem Gewichtsvektor $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{x}_0 = -\begin{pmatrix}2{,}352\\3{,}360\\4{,}704\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix}3{,}747\\5{,}352\\7{,}493\end{pmatrix},\quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix}0{,}7\\1{,}0\\1{,}4\end{pmatrix}.$$

Die erzielten Verbesserungen $\mathbf{u}_n$ und $\mathbf{v}_n$ nach Aussage 1 (2. 11) bzw. $\mathbf{u}_n^*$ und $\mathbf{v}_n^*$ nach Aussage 2 sind der Tabelle zu entnehmen.

	1		2		3		5		11		51	
$\mathbf{x}_n\|\mathbf{y}_n$	−1,829	3,746	−1,357	3,382	−1,098	3,094	−0,585	2,580	0,315	1,681	0,99742	1,00256
	−2,622	4,696	−2,270	4,282	−1,756	3,806	−1,095	3,126	0,086	1,923	0,99653	1,00349
	−4,345	6,458	−3,533	5,631	−3,073	5,081	−2,077	4,074	−0,329	2,322	0,99499	1,00497
$\mathbf{u}_n\|\mathbf{v}_n$	−1,826	3,742	0,488	1,480	0,689	1,316	0,779	1,231	0,902	1,104	0,99962	1,00043
	−2,618	4,690	0,247	1,620	0,618	1,451	0,731	1,334	0,881	1,153	0,99954	1,00060
	−4,339	6,449	0,012	1,932	0,405	1,625	0,648	1,457	0,814	1,207	0,99928	1,00081
	$\approx x_1$	$\approx y_1$	$\approx x_{13}$	$\approx y_{13}$	$\approx x_{17}$	$\approx y_{16}$	$\approx x_{20}$	$\approx y_{19}$	$\approx x_{25}$	$\approx y_{24}$	$\approx x_{65}$	$\approx y_{64}$
	0	0	11	11	14	13	15	14	14	13	14	13
$\mathbf{u}_n^*\|\mathbf{v}_n^*$	−0,766	2,874	0,810	1,284	0,876	1,090	0,912	1,069	0,961	1,033	0,99985	1,00013
	−1,130	3,649	0,742	1,340	0,846	1,130	0,894	1,104	0,953	1,056	0,99982	1,00021
	−2,216	4,838	0,667	1,505	0,755	1,171	0,830	1,133	0,923	1,064	0,99970	1,00026
	$\approx x_4$	$\approx y_4$	$\approx x_{20}$	$\approx y_{19}$	$\approx x_{23}$	$\approx y_{24}$	$\approx x_{26}$	$\approx y_{27}$	$\approx x_{32}$	$\approx y_{32}$	$\approx x_{72}$	$\approx y_{72}$
	3	3	18	17	20	21	21	22	21	21	21	21

Die letzte Zeile bei $\mathbf{u}_n|\mathbf{v}_n$ und $\mathbf{u}_n^*|\mathbf{v}_n^*$ gibt die Zahl der eingesparten Schritte an; der Gewinn an Iterationsschritten wächst also anfangs, so daß es nicht sinnvoll ist, bei der endgültigen Anordnung der Rechnung nach jedem Schritt eine Konvergenzverbesserung durchzuführen. Dies wird jeweils nach einer bestimmten, vom speziellen System abhängenden Zahl von Schritten geschehen. Im vorliegenden Beispiel wir man etwa nach jedem dritten Schritt eine Konvergenzverbesserung einschieben. Im Falle $\mathbf{T}=\mathbf{T}^+$ nimmt der Gewinn an Iterationsschritten im allgemeinen ständig zu.

Die Zahl der Rechenoperationen zur Bestimmung von $\mathbf{x}_n$ und $\mathbf{y}_n$ ist proportional m^2. Die anschließende Berechnung von $\mathbf{u}_n$ und $\mathbf{v}_n$ läßt sich so durchführen, daß für sie diese Zahl nur proportional m ist, wenn auch mit einem größeren Proportionalitätsfaktor. (m Zahl der Reihen von $\mathbf{T}$.)

B. Das beschriebene Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung läßt sich unmittelbar auf lineare Integralgleichungen

$$x(t) = \int_b^b T(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau + s(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

erweitern, da nach SCHRÖDER [8] die in I genannten Einschließungen z. B. bei stetigen Kernen ebenfalls gelten. Die Extrema in (2. 9), (3. 1) und (3. 2) sind jetzt bezüglich des Arguments t zu bilden.

Die Randwertaufgabe

$$-x'' = t^2 x - 0{,}5x + 1, \quad x(\pm 1) = 0$$

läßt sich mit Hilfe der Greenschen Funktion G zu $-x''$ und zu den genannten Randbedingungen als Integralgleichung

$$x(t) = \int_{-1}^{+1} G(t,\tau)\{\tau^2 x(\tau) - 0{,}5x(\tau)\}\,d\tau + \int_{-1}^{+1} G(t,\tau)\,d\tau$$

darstellen. Die sich somit ergebenden Iterationen (1. 6) können wieder als Differentialgleichungen geschrieben werden. Wegen $G(t,\tau) \geqq 0$ lauten sie

$$-x''_{n+1} = t^2 x_n - 0{,}5y_n + 1, \quad x_{n+1}(\pm 1) = 0;$$

$$-y''_{n+1} = t^2 y_n - 0{,}5x_n + 1, \quad y_{n+1}(\pm 1) = 0.$$

Auch die Bedeutung von $\mathbf{T}^+$ und $\mathbf{T}^-$ liest man aus der Integralgleichung ab.

Im Falle der Startfunktionen

$$x_0 = -k(1-t^2), \quad y_0 = k(1-t^2), \qquad k \geqq 1$$

erhält man durch Lösen einfacher Differentialgleichungen

$$\mathbf{T}^+ x_0(t) = -k\frac{1-t^2}{60}(3+3t^2-2t^4), \quad \mathbf{T}^+ y_0(t) = k\frac{1-t^2}{60}(3+3t^2-2t^4),$$

$$\mathbf{T}^- y_0(t) = -k\frac{1-t^2}{60}(12{,}5-2{,}5t^2), \quad \mathbf{T}^- x_0(t) = k\frac{1-t^2}{60}(12{,}5-2{,}5t^2),$$

$$s(t) = \frac{1}{2}(1-t^2)$$

und somit die Funktionen

$$x_1(t) = \frac{1-t^2}{30}(15-7{,}75k-0{,}25kt^2+kt^4),$$

$$y_1(t) = \frac{1-t^2}{30}(15+7{,}75k+0{,}25kt^2-kt^4),$$

welche z. B. für jedes $k \geqq 1$ die Lösung x^* der Randwertaufgabe einschließen.

Zur Konvergenzverbesserung sind die Funktionen $z_0 = y_0 - x_0$, $\mathbf{T}^{\pm} z_0 = \mathbf{T}^{\pm} y_0 - \mathbf{T}^{\pm} x_0$ und $d_1 = x_1 - x_0$ zu errechnen. Über (2. 9) und (2. 11) ergeben sich danach

$$\sigma = \frac{-\mathbf{T}^- z_0(0)}{z_0(0) - \mathbf{T}^+ z_0(0)} = \frac{25}{114},$$

$$\varkappa = \frac{d_1(0) - \mathbf{T}^- z_0(0)}{z_0(0) - \mathbf{T}^+ z_0(0) - \mathbf{T}^- z_0(0)} = \frac{1}{2} + \frac{30}{139k},$$

$$\nu = \frac{d_1(1) - \mathbf{T}^- z_0(1)}{z_0(1) - \mathbf{T}^+ z_0(1) - T^- z_0(1)} = \frac{1}{2} + \frac{30}{132k}$$

und

$$\alpha = 0{,}5 + \frac{0{,}2126}{k}, \quad \beta = 0{,}5 - \frac{0{,}2305}{k}.$$

Die hiermit entsprechend (2. 3) ermittelten Funktionen

$$u_1(t) = \frac{1-t^2}{30}(12{,}7566 + 1{,}2141t^2 - 0{,}4252t^4)$$

$$v_1(t) = \frac{1-t^2}{30}(13{,}0340 + 1{,}2230t^2 - 0{,}4610t^4)$$

sind wesentlich bessere Schranken für x^* als x_1 und y_1. Der Quotient der Verbesserung

$$\frac{y_1(0) - x_1(0)}{v_1(0) - u_1(0)} = 56k$$

kann mit k sogar beliebig groß gemacht werden.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
I. INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

(Eingegangen am 2. Juli 1964.)

Literaturverzeichnis

[1] A. C. AITKEN, On the iterative solution of a system of linear equations, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **A 63** (1950), S. 52–80.
[2] J. ALBRECHT, Monotone Iterationsfolgen und ihre Verwendung zur Lösung linearer Gleichungssysteme, *Num. Math.*, **3** (1961), S. 345–358.
[3] J. ALBRECHT, Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge, *Num. Math.*, **4** (1962), S. 196–208.
[4] L. COLLATZ, Teoretische Grundlagen der Numerischen Mathematik, *J.-Ber. Deutsch. Math. Verein.*, **65** (1962), S. 72–96.
[5] E. E. KUMMER, Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen, *J. Reine Angew. Math.*, **16** (1837), S. 206–214.
[6] J. W. SCHMIDT, Ausgangsvektoren für monotone Iterationen bei linearen Gleichungssystemen, *Num. Math.*, **6** (1964), S. 78–88.
[7] J. SCHRÖDER, Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **3** (1959), S. 28–44.
[8] J. SCHRÖDER, Anwendung von Fixpunktsätzen bei der numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen in halbgeordneten Räumen, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **4** (1959), S. 177–192.

ÜBER DIE SEQUENZIELLE BERECHENBARKEIT VON REKURSIVEN WORTFUNKTIONEN DURCH KELLERSPEICHER

Von

RÓZSA PÉTER (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. KALMÁR)

Meinem Meister LÁSZLÓ KALMÁR *zu seinem 60-sten Geburtstag mit großer Dankbarkeit und Freundschaft*

Einleitung

I

L. KALMÁR hat meine Aufmerksamkeit auf das folgende Problem gelenkt, das auch mit seinen Untersuchungen sowohl über die formelgesteuerten Rechenautomaten, als auch über die qualitative Informationstheorie zusammenhängt, aber in den letzten Jahren auch auf anderen verschiedenen Gebieten, auch in der mathematischen Linguistik, besonders bei der automatischen Übersetzung, eine wichtige Rolle erhalten hat.[1]

Es handelt sich dabei um Funktionen, welche gewisse Zeichenreihen in andere übertragen. Genauer sind diese Zeichenreihen „Worte", d. h. Elemente einer „Wortemenge" über einem gegebenen, endlichen „Alphabet" (das bedeutet eine endliche Menge beliebiger Zeichen, die „Buchstaben" genannt werden), welche aus dem mit „Λ" bezeichneten „leeren Wort" ausgehend durch endlichmalige Anknüpfung je eines Buchstaben entstehen. Bei der „Berechnung" der aufeinanderfolgenden Zeichen eines Funktionswertes werden die einzelnen Zeichen der Argumente in Betracht gezogen. Es ist unbequem unter diesen Zeichen hin und her zu laufen, darum ist es erwünscht ein „sequenzielles" Berechnungsverfahren zu suchen, wobei die Zeichen der Argumente der Reihe nach herangezogen werden, und nie zu einem früher betrachteten zurückzukehren ist. Offenbar gelingt das nicht ohne weiteres für beliebige Wortfunktionen. Doch ein gewisses Hilfsmittel: die Verwendung von „Kellerspeichern" kann uns dazu verhelfen.

Ein Kellerspeicher ist ein Speicher, in welchen Buchstaben des Alphabets, eventuell auch einige andere „Hilfsbuchstaben" gesetzt werden können; und diese können davon wieder herausgenommen werden, auch so, daß der betreffende Buchstabe dort gestrichen wird, aber auch so, daß der herausgenommene Buchstabe auch darin bestehen bleibt (als ob nur ein „Abzug" davon herausgenommen würde); mit den folgenden Vorschriften: Durch Einsetzen eines Buchstaben werden alle im Kellerspeicher bereits enthaltenen Buchstaben um einen Platz tiefer gedrückt, und es kann immer nur der oberste (zuletzt hineingesteckte) Buchstabe davon herausgenommen werden. Wird davon ein Buchstabe bei Streichung herausgenommen, dann erheben sich alle anderen im Kellerspeicher enthaltenen Buchstaben

[1] Siehe z. B. die Arbeit mit hinzugefügter Bibliographie: A. G. OETTINGER, Automatic syntactic analysis and the pushdown store, *Proceedings of Symposia in applied Mathematics*, **12** (1961), S. 104–129.

„elastisch" um einen Platz. Was bei einem Schritt der Berechnung des Funktionswertes getan werden soll, kann außer dem eben betrachteten Zeichen des Argumentes auch von den obersten Zeichen der Kellerspeicher (von den „Gipfelzeichen") abhängen.

Natürlich können dabei nur Kellerspeicher festgesetzter Anzahl verwendet werden, da sonst bei jeder Stelle jeder Buchstabe der Argumente in je einen Kellerspeicher gesetzt werden könnte, und so stets zur Verfügung stehen würde, also jede Berechnungsart der Funktionswerte trivialerweise sequenziell wäre.

In der Literatur[1] wurden zu vielen speziellen Zwecken immer ad hoc Methoden für sequenziellen Berechnungen mit Hilfe von Kellerspeichern angegeben; und es wurde erwünscht, eine in möglichts großer Allgemeinheit gebrauchbare Methode zu finden.

In vorliegender Arbeit gebe ich eine solche allgemeine Methode zur sequenziellen Berechnung jeder primitiv- und sogar jeder partiell-rekursiven Wortfunktion (bei endlichem Alphabet) an; ich zeige auch umgekehrt, daß alle mit Hilfe von Kellerspeichern einer festgesetzten Anzahl sequenziell berechenbaren Wortfunktionen (bei beliebigem Alphabet) in einer (mit Hilfsbuchstaben erweiterten) Wortemenge partiell-rekursiv sind.

Als *Korollar* ergibt sich daraus, daß auch jene gegenseitige Übersetzungen der verschiedenen Formen der Ausdrücke, deren Primitiv-Rekursivität ich in verschiedenen Arbeiten bewiesen habe,[2] mit Hilfe von Kellerspeichern sequenziell durchgeführt werden können.

Die Grundidee ist sehr einfach: die Benutzung von Kellerspeichern macht jedes Hin- und Herlaufen unter den Buchstaben der Argumente möglich, ohne den sequenziellen Charakter der Berechnung zu stören. Es können ja alle Buchstaben der Argumente in einen Kellerspeicher gegossen werden, wo man sie bis zum Schluß aufbewahrt; braucht man bei der Berechnung einen gewissen Buchstaben aus diesen, so können daraus die darüber stehenden Buchstaben in einen anderen Kellerspeicher gegossen, und nach getaner Arbeit wieder zurückgegossen werden. Dasselbe kann auch mit Zwischenwerten der Berechnung getan werden, zu welchen man bei Rekursionen ja oft zurückgreifen muß.

Auf die Reduktion der Anzahl der zur Berechnung der rekursiven Funktionen nötigen Kellerspeicher auf eine feste Mindestanzahl, was auf Kosten der Anzahl der Stadien und der Berechnungsschritte jedenfalls möglich ist, gehe ich in dieser Arbeit nicht ein.*

II

Hier zähle ich auf, was ich aus der Theorie der rekursiven Wortfunktionen verwenden werde.[3]

[2] R. PÉTER, Über die Rekurzivität einiger Übersetzungs-Transformationen, *Publications of the Math. Inst. of the Hungarian Acad. of Sciences*, **7** (1962), I. Mitteilung S. 69—78, II. Mitteilung S. 373—384; R. PÉTER, Über die Primitiv-Rekursivität einiger den Aufbau von Formeln charakterisierenden Wortfunktionen, *diese Acta*, **14** (1963), S. 149—172.

* *Zusatz bei der Korrektur:* Inzwischen hat J. URBÁN bewiesen, daß man sich immer auf Systeme mit 3 Speichern beschränken kann.

[3] Siehe R. PÉTER, Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche, *diese Acta*, I. Teil **12** (1961), S. 271—314; II. Teil **13** (1962), S. 1—24; Berichtigungen dazu in der in Fußnote[2] zuletzt zitierten Arbeit.

In einer Wortemenge M_A über einem beliebigen Alphabet A gelten als

Ausgangsfunktionen: bei beliebigem natürlichen Zahl n die Leerfunktion:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \wedge$$

und die Identitätsfunktionen:

$$f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = x_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

ferner die „Nachfolgerfunktionen":

$$f(x) = xb,$$

wo b ein beliebiges Element des Alphabets ist.

Aus diesen entstehen sämtliche primitiv-rekursive Funktionen der Wortemenge durch eine endliche Kette von **Substitutionen** der Form:

$$\text{(S)} \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = g(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

wo m und n beliebige natürliche Zahlen, ferner

$$g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) \text{ und } g(x_1, \ldots, x_m)$$

bereits als primitiv-rekursiv erkannte Funktionen sind; und von **primitiven Rekursionen** der Form:

$$\text{(R)} \qquad \begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, \wedge) &= g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, xb) &= g_b(x_1, \ldots, x_n, x, f(x_1, \ldots, x_n, x), f(x_1, \ldots, x_n, {}^{-1}(xb))), \end{aligned}$$

wo n eine beliebige natürliche Zahl, $g(x_1, \ldots, x_n)$ und $g_b(x_1, \ldots, x_n, x, y_1, y_2)$ für jedes $b \in A$ bereits als primitiv-rekursiv erkannte Funktionen sind; ferner ist die Bedeutung der Funktion ${}^{-1}x$ — womit zugleich ich auch eine Funktion x^{-1} angebe (in der Definition (R) kann nämlich x als $(xb)^{-1}$ aufgefasst werden):

$$\wedge^{-1} = \wedge \qquad {}^{-1}\wedge = \wedge$$

und für eine von 0 verschiedene natürliche Zahl n

$$(b_1 \ldots b_n)^{-1} = b_1 \ldots b_{n-1} \qquad {}^{-1}(b_1 \ldots b_n) = b_2 \ldots b_n$$

(die für $n = 1$ natürlich beide $\wedge$ bedeuten), wo $b_1, \ldots, b_n$ beliebige Elemente des Alphabets sind. Sowohl x^{-1}, als auch ${}^{-1}x$ sind primitiv-rekursiv in M_A.

Die charakteristische Funktion $f_B(x_1, \ldots, x_n)$ einer Wortbeziehung $B(x_1, \ldots, x_n)$ kann etwa durch

$$f_B(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls} \quad B(x_1, \ldots, x_n) \\ b_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert werden, wobei b_0 ein beliebig festgesetztes Element des Alphabets ist; und B wird dann eine in M_A primitiv-rekursive Beziehung genannt, wenn f_B eine in M_A primitiv-rekursive Funktion ist.

Der festgesetzte Buchstabe b_0 kann auch dazu verwendet werden, daß man die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... der Reihe nach mit

$$\wedge, \; b_0, \; b_0 b_0, \; b_0 b_0 b_0, \; \ldots$$

identifiziert.

Damit kann auch die „Ordnung" $o(x)$ von x, d. h. die Anzahl der Buchstaben des Wortes x, als in M_A primitiv-rekursive Funktion definiert werden.

Auch die Beziehung $N(x)$: „eine natürliche Zahl zu sein" ist primitiv-rekursiv in M_A.

Auf der rechten Seite der Definition von $f(x_1, \ldots, x_n, xb)$ in (R) treten $f(x_1, \ldots, x_n, (xb)^{-1})$ und $f(x_1, \ldots, x_n, {}^{-1}(xb))$ auf. Hier können $(xb)^{-1}$ und ${}^{-1}(xb)$ als die „unmittelbaren Vorgänger" von xb betrachtet werden. Als sämtliche Vorgänger eines Wortes gelten — außer $\wedge$ — seine zusammenhängende Bestandteile. Z. B. sind die Vorgänger des Wortes $x = b_1 b_2 b_3$ (mit $b_1, b_2, b_3 \in A$) in einer zweckmäßigen Reihenfolge:

$$\wedge,\ b_1,\ b_2,\ b_1 b_2,\ b_3,\ b_2 b_3,\ b_1 b_2 b_3 = x.$$

Daß y ein Vorgänger von x ist, wird mit $y \leqq x$ bezeichnet; diese Beziehung ist primitiv-rekursiv in M_A.

Auch die Funktion $b(x)$, durch welche ich hier den letzten Buchstaben von x bezeichnen werde, ferner die konstanten Worte, und das Aneinanderknüpfen endlichvieler Worte sind in M_A primitiv-rekursiv.

Zu den in M_A primitiv-rekursiven Beziehungen gehört auch die Gleichheit $x = y$ zweier Worte, ferner sind zusammen mit B_1 und B_2 auch ihre aussagenlogischen Verknüpfungen: $B_1 \& B_2$ („und"), $B_1 \vee B_2$ („oder"), $\neg B_1$ („nicht") primitiv-rekursiv in M_A.

Es wird oft benutzt, daß die *endliche Fallunterscheidung* eine primitiv-rekursive Operation ist, d. h.: Zusammen mit den Funktionen $f_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m+1)$ und solcher Beziehungen $B_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, von welchen an jeder Stelle nur eine bestehen kann, ist auch die Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{falls} \quad B_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n), & \text{falls} \quad B_m(x_1, \ldots, x_n) \\ f_{m+1}(x_1, \ldots, x_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv-rekursiv in M_A.

Es wird ferner benutzt, daß in M_A jeder endlichen Wortefolge $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ein Wort $c_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ zugeordnet werden kann, das bei festem n eine primitiv-rekursive Funktion der Glieder der Folge ist, welche aus ihm mit Hilfe der ebenfalls primitiv-rekursiven Funktion $k_j(x)$ wie folgt zurückerhalten werden können: für $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ gilt

$$k_j(c_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)) = x_j.$$

Ich gehe auch auf in M_A primitiv-rekursive unendliche Folgen ein.

Eine primitiv-rekursive Funktion $u(x)$ (welche neben x auch von Parametern abhängig sein kann) soll eine primitiv-rekursive Folge genannt, und auch mit $u_{o(x)}$ bezeichnet werden, wenn sie nur von der Ordnung von x abhängt (also keine von den Gliedern der Folge

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots$$

verschiedene Werte annimmt). Die aus den Gliedern dieser Folge bestehende Menge soll mit U bezeichnet werden.

Man erhält nun sämtliche partiell-rekursive Funktionen der Wortmenge M_A aus den Ausgangsfunktionen, wenn man zu den Bildungsschemata (S) und (R) auch das Schema der „μ-Operation":

$$(\mu) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = \mu_u^U[g(x_1, \ldots, x_n, u) = \Lambda]$$

hinzunimmt, wo n eine beliebige natürliche Zahl, U die Menge der Glieder einer primitiv-rekursiven Folge $u_{o(x)}$ (welche auch von $x_1, \ldots, x_n$ abhängig sein kann[4]) und $g(x_1, \ldots, x_n, x)$ eine primitiv-rekursive Funktion in M_A ist; ferner die rechte Seite den Wert u_i mit dem kleinsten i bedeutet, für den $g(x_1, \ldots, x_n, u_i) = \Lambda$ gilt, falls es überhaupt solche Elemente von U existieren, und sonst undefiniert ist.

Beschränkt man sich auf solche $g(x_1, \ldots, x_n, x)$ und $u_{o(x)}$, für welche der Fall der Undefiniertheit an keiner Stelle vorkommt, so gelangt man zur Klasse der in M_A allgemein-rekursiven Funktionen.

§ 1. Bezeichnungen

Wenn nichts anderes gesagt wird, werden die Funktionen, um die es sich handelt, in einer Wortemenge M_A über einem endlichen Alphabet A definiert, dessen Elemente, die „Buchstaben", mit b bezeichnet werden (auch mit Indizes versehen).

Übereinkommen der kürzeren Redeweise halber: nehmen wir an, daß am Grund jedes Kellerspeichers das Zeichen L (die „Leere") ist; so ist das Gipfelzeichen jedes leeren Kellerspeichers L. Ferner, falls ein Zeichen gestrichen wird, dann sagen wir, daß dafür l gesetzt wird; und als Gipfelzeichen eines beliebigen Speichers wird das von oben aus erste darin enthaltene von l verschiedene Zeichen betrachtet. Natürlich darf dann weder L noch l unter den Elementen des Alphabets A vorkommen. Diese Hilfszeichen sind zu unterscheiden von „Λ", das ausgeschrieben und in gleicher Weise wie Zeichen des Alphabets behandelt werden muß (im Ergebnis aber natürlich als etwas nicht vorhandenes zu betrachten ist); es kann ja vorkommen, daß in der Berechnung ein Zwischenwert gleich Λ ist, und damit hat man genau so zu verfahren, wie mit den anderen Zwischenwerten.

Statt von unten nach oben werde ich die in einem Kellerspeicher enthaltenen Zeichen von links nach rechts aufzeichnen.

Unter den Kellerspeichern, die zur Berechnung einer Funktion dienen, wird immer auch ein ausgezeichnetes (mit I bezeichnetes) „Input", und ein ausgezeichnetes (mit O bezeichnetes) „Output" vorkommen. Alle Speicher werden durch große Buchstaben bezeichnet, und ihr momentanes Gipfelzeichen mit dem entsprechenden kleinen Buchstaben (so ist z. B. i das momentane Gipfelzeichen von I).

Die Berechnung des Wertes einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ in M_A für Argumente

$$b_{1,1} \ldots b_{1,a_1}, \ldots, b_{n,1} \ldots b_{n,a_n}$$

wird immer damit beginnen, daß diese Argumentzeichenkette von rechts nach links, Zeichen für Zeichen (auch das Komma, das ebenfalls kein Element von A sein darf, als ein Zeichen betrachtet) in I gegossen wird, so daß am Anfang der

[4] Das wurde zwar in meiner in Fußnote[3] zitierten Arbeit nicht hervorgehoben, aber der dortige Beweis geht ohne weiteres auch in diesem Fall.

Inhalt von I (nach L)

$$b_{n,a_n}\ldots b_{n,1}, \ldots, b_{1,a_1}\ldots b_{1,1}$$

und von allen anderen Speichern L ist. Zum Schluß wird in O nach dem L der Funktionswert an dieser Stelle als eine Kette aus Elementen von A und $\wedge$ erscheinen, die ich symbolisch durch

$$„f(b_{1,1}\ldots b_{1,a_1}, \ldots, b_{n,1}\ldots b_{n,a_n})"$$

bezeichnen werde; in allen anderen Speichern wird L stehen. I und O werden dadurch ausgezeichnet, daß in I nichts hineingetan, aus O nichts herausgenommen wird; sie behalten aber diese ausgezeichnete Rolle nicht, wenn das f-berechnende Kellerspeichersystem als ein Hilfsmittel zur Berechnung einer anderen Funktion (als „Unterprogramm") verwendet wird.

Das Berechnungsverfahren verläuft in einzelnen „Stadien", die mit q (mit Indizes) bezeichnet werden. Es beginnt nach der Eintragung der Argumente in I mit dem Stadium q_1 (eventuell auch mit oberem Index versehen); und endet mit einem Stadium, das nur „Stop" verlangt.

Was in einem Moment des Berechnens zu tun ist, hängt vom momentanen Stadium und von den momentanen Gipfelzeichen der Speicher ab. Von diesen abhängig werden neue Gipfelzeichen und ein neues Stadium eingestellt (die nicht notwendig abweichen von den früheren). Bei der kurzen Andeutung eines Berechnungsschrittes werde ich nur die dabei berührten Gipfelzeichen angeben. Daß man z. B. in einem Stadium q_t, falls das Gipfelzeichen eines Speichers K nicht L ist, das Gipfelzeichen von I dort zu streichen, in K zu übertragen, und auf das Stadium $q_{t'}$ zu übergehen hat, das werde ich kurz wie folgt andeuten:

$$q_t(k \neq L)|(i \to \mathrm{K})q_{t'}.$$

Daß dasselbe mit Beibehaltung von i in I geschehen soll, das werde ich mit

$$q_t(k \neq L)|(i \to \mathrm{I})(i \to \mathrm{K})q_{t'}$$

andeuten. Sollte i nur gestrichen, und nirgends übertragen werden, das wird durch

$$(l \to i)$$

angedeutet (wodurch — wie gesagt — nicht l zum Gipfelzeichen von I wird). Außer den Gipfelzeichen und l können auch Buchstaben des Alphabets, oder das Komma, oder $\wedge$ in einen Speicher eingetragen werden, was z. B. mit

$$(, \to \mathrm{K})$$

angedeutet werden kann.

Ein Strich über eine Zeichenkette hat folgende Bedeutung:

$$\overline{b_1^* b_2^* \ldots b_a^*} = b_a^* \ldots b_2^* b_1^*$$

wobei die Zeichen b^* (mit Indizes) Buchstaben oder Hilfszeichen sind; und entsprechend bedeutet

$$„\bar{f}(x)"$$

die Zeichenkette, die durch Umkehrung der Zeichenkette entsteht, welche den Wert der Funktion f an der Stelle x angibt.

§ 2. Sequenzielle Berechnung der Ausgangsfunktionen

Die sequenzielle Berechnung der in Einleitung II angegebenen Ausgangsfunktionen benötigt außer I und O keinen Kellerspeicher.

Zur Berechnung von

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \wedge$$

genügen zwei Stadien, q_1 und q_2; das Berechnen beginnt mit q_1, und besteht aus folgenden Schritten:

$$q_1(i \neq L)|(l \to i)q_1$$
$$q_1(i = L)|(\wedge \to \mathrm{O})q_2$$
$$q_2|\ \text{Stop!}$$

Dasselbe gilt für die Berechnung von

$$f(x) = xb,$$

aber natürlich mit anderem q_1. Die Berechnungsschritte sind hier:

$$q_1(i \neq L)|(i \to \mathrm{O})q_1$$
$$q_1(i = L)|(b \to \mathrm{O})q_2$$
$$q_2|\ \text{Stop!}$$

Die Berechnung von

$$f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = x_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ist schon etwas umständlicher; benötigt aber außer I und O ebenfalls keinen Kellerspeicher. Hier gibt es Stadien q_t für $t = 1, 2, \ldots, j-1$ (für $j = 1$ fallen diese freilich aus), mit der Wirkung:

$$q_t(i \neq ,)|(l \to i)q_t$$
$$q_t(i = ,)|(l \to i)q_{t+1}$$

dann q_j, q_{j+1} und q_{j+2}, mit der Wirkung:

$$q_j(i \neq ,)|(i \to \mathrm{O})q_j$$
$$q_j(i = ,)|(l \to i)q_{j+1}$$
$$q_{j+1}(i \neq L)|(l \to i)q_{j+1}$$
$$q_{j+1}(i = L)|q_{j+2}$$
$$q_{j+2}|\ \text{Stop!}$$

(Für $j = n$ ist q_{j+1} natürlich überflüssig: für $i = L$ kann man von q_n gleich auf „Stop" übergehen.)

§ 3. Die Vererbung der sequenziellen Berechenbarkeit bei Substitution

Wir gehen aus einer Definition (S) der Einleitung II aus, also aus

$$\text{(S)} \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = g\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big),$$

wobei die Funktionen

$$g(x_1, \ldots, x_m),\ g_1(x_1, \ldots, x_n),\ \ldots,\ g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

bereits durch endliche Kellerspeichersysteme sequenziell berechnet werden können, welche der Reihe nach mit den Input-Speichern

$$\mathrm{I}_g,\ \mathrm{I}_{g_1}, \ldots,\ \mathrm{I}_{g_m}$$

beginnen, und mit den Output-Speichern

$$\mathrm{O}_g,\ \mathrm{O}_{g_1}, \ldots,\ \mathrm{O}_{g_m}$$

endigen, welche bei der Berechnung der Werte von f aber als gewöhnliche Kellerspeicher wirken werden. Außer diesen — von welchen O_g mit O identifiziert werden kann — wird aber neben I noch ein Kellerspeicher $\bar{\mathrm{I}}$ notwendig sein, da die Argumente nach einander in $\mathrm{I}_{g_1}, \ldots, \mathrm{I}_{g_m}$ eingetragen werden, und deshalb inzwischen aufbewahrt werden müssen. (Die Bezeichnung $\bar{\mathrm{I}}$ weist darauf hin, das in diesen Speicher die Zeichen von I in verkehrter Reihenfolge hineinkommen.)

Für Argumente

$$x_1 = b_{1,1} \ldots b_{1,a_1},\ \ldots,\ x_n = b_{n,1} \ldots b_{n,a_n}$$

(wobei jedes der Indizes a auch 0 sein kann, was ein Argument $\wedge$ bedeutet) ist der Inhalt von I zu Beginn (abgesehen vom untersten Zeichen L, das ich nur bei leeren Speichern ausschreiben werde):

$$b_{n,a_n} \ldots b_{n,1},\ \ldots,\ b_{1,a_1} \ldots b_{1,1}.$$

Es kommt nach Ausführung der ersten Berechnungsschritte:

$$q_1(i \neq L) | (i \to \bar{\mathrm{I}})\, q_1$$

$$q_1(i = L) | q_2,$$

durch welche I entleert wird,

$$b_{1,1} \ldots b_{1,a_1},\ \ldots,\ b_{n,1} \ldots b_{n,a_n}$$

das ich kurz mit s bezeichnen werde, in $\bar{\mathrm{I}}$.

Mit dieser Bezeichnung lautet unsere Aufgabe: $f(s)$ zu berechnen. Zu diesem Zweck soll s — wieder umgekehrt — in I_{g_1} kommen, aber falls $m \neq 1$ ist, auch in $\bar{\mathrm{I}}$ aufbewahrt werden, was nur durch vorläufiges Eingießen in einen Speicher und Zurückgießen geschehen kann. (Eine solche Forderung wird in den weiteren oft vorkommen, und immer ähnlich wie hier erledigt werden.) Doch falls $m \neq 1$ ist, steht dafür auch I_{g_2} zur Verfügung, so daß kein weiterer Kellerspeicher aufzunehmen ist. Also, wenn $m = 1$ ist, dann sind die weiteren Schritte der Berechnung:

$$q_2(\bar{i} \neq L) | (i \to \mathrm{I}_{g_1}) q_2$$

$$q_2(\bar{i} = L) | Q_{g_1},$$

durch welche $\bar{\mathrm{I}}$ entleert wird, uns $\bar{s}$ in I_{g_1} kommt, wonach mit den durch Q_{g_1} angedeuteten (nach Annahme) bereits bekannten Schritten der Wert von g_1 an dieser Stelle berechnet wird.[5]

Ist aber $m>1$, so geschieht die Füllung von I_{g_1} und I_{g_2} parallel durch die folgenden Schritte:

$$q_2(\bar{i}\neq L)|(\bar{i}\to\bar{\mathrm{I}})(\bar{i}\to\mathrm{I}_{g_1})q_3$$

$$q_3|(\bar{i}\to\mathrm{I}_{g_2})q_2.$$

Was nun bei $q_2(\bar{i}=L)$ geschehen soll, das hängt davon ab, ob $m=2$ oder $m>2$ ist. Ist $m=2$, dann sind die weiteren Schritte — da bisher schon $\bar{s}$ sowohl in I_{g_1} als auch in I_{g_2} gekommen ist —

$$q_2(\bar{i}=L)|Q_{g_1}$$

$$Q_{g_1}|Q_{g_2}$$

(wo Q_{g_2} mit sinngemäßer Änderung ähnliches als Q_{g_1} bedeutet).

Ist aber $m>2$, so muß s noch aufbewahrt werden, also aus I_{g_2} — wieder rückgekehrt — in $\bar{\mathrm{I}}$ zurückkommen. Von hier aus wird dann parallel I_{g_2} und I_{g_3} mit $\bar{s}$ gefüllt. So geschieht für $m>2$ bei $q_2(\bar{i}=L)$:

$$q_2(\bar{i}=L)|q_4$$

$$q_4(i_{g_2}\neq L)|(i_{g_2}\to\bar{\mathrm{I}})q_4$$

$$q_4(i_{g_2}=L)|q_5$$

$$q_5(\bar{i}\neq L)|(\bar{i}\to\bar{\mathrm{I}})(i\to\bar{\mathrm{I}}_{g_2})q_6$$

$$q_6|(\bar{i}\to\mathrm{I}_{g_3})q_5$$

und was im Fall $q_5(\bar{i}=L)$ geschehen soll, das hängt wieder davon ab, ob $m=3$ oder $m>3$ ist. Im Fall $m=3$ folgt

$$q_5(\bar{i}=L)|Q_{g_2}$$

$$Q_{g_2}|Q_{g_3};$$

für $m>3$ muß aber $\bar{s}$ aus I_{g_3} wieder als s auf den Aufbewahrungsort $\bar{\mathrm{I}}$ gebracht, und von hieraus I_{g_3} und I_{g_4} parallel mit $\bar{s}$ gefüllt werden, usw.

So kommt man zuletzt zu Q_{g_m} (m ist eine gegebene Zahl), und danach ist alles leer, außer den Output-Speichern

$$\mathrm{O}_{g_1},\ \ldots,\ \mathrm{O}_{g_m}$$

[5] Die Bezeichnung $q_2(\bar{i}=L)|Q_{g_1}$ bedeutet also eine Folge von Schritten, deren erster die Form $q_2(\bar{i}=L)|q_1^{(g_1)}$ hat, wo $q_1^{(g_1)}$ das Anfangsstadium der Berechnung von g_1 ist, und die übrigen die Schritte dieser Berechnung sind (ebenfalls mit Unterscheidung durch Stadienindizes g_1). Ähnlicherweise bedeutet $Q_{g_1}|\ldots$ den Schritt oder die Schrittfolge $q^{(g_1)}|\ldots$, wobei $q^{(g_1)}$ das Endstadium der Berechnung von g_1 ist. Ähnlich sollen die analogen Bezeichnungen verstanden werden.

welche der Reihe nach durch

$$„g_1(s)“, \ldots, „g_m(s)“$$

gefüllt worden sind. Diese sollen in umgekehrter Reihenfolge in den Input I_g hineinkommen, was durch die folgenden Schritte geschieht:

$$Q_{g_m} | q^{(m)}$$

wo für $j = m, m-1, \ldots, 2$

$$q^{(j)}(o_{g_j} \neq L) | (o_{g_j} \rightarrow I_g) q^{(j)}$$

$$q^{(j)}(o_{g_j} = L) | (, \rightarrow I_g) q^{(j-1)}$$

$$q^{(1)}(o_{g_1} \neq L) | (o_{g_1} \rightarrow I_g) q^{(1)}$$

$$q^{(1)}(o_{g_1} = L) | Q_g$$

(wo Q_g mit sinngemäßer Änderung wieder dasselbe wie Q_{g_1} bedeutet); wodurch zum Schluß alles entleert worden ist, nur $O_g = O$ gefüllt wurde, und zwar gerade mit

$$„g(g_1(s), \ldots, g_m(s))“$$

d. h. mit „$f(s)$“. So hat man vom letzten Schritt von Q_g nur auf das „Stop-Stadium“ zu übergehen.

§ 4. Die Vererbung der sequenziellen Berechenbarkeit bei primitiver Rekursion

Nun gehen wir von einer Definition (R) der Einleitung II aus, also aus

$$f(x_1, \ldots, x_n, \wedge) = g(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{(R)} \qquad f(x_1, \ldots, x_n, xb) = g_b(x_1, \ldots, x_n, x, f(x_1, \ldots, x_n, x), f(x_1, \ldots, x_n, {}^{-1}(xb))),$$

wobei die Funktionen

$$g(x_1, \ldots, x_n), \quad g_b(x_1, \ldots, x_n, x, y_1, y_2)$$

für jedes b bereits durch endliche Kellerspeichersysteme sequenziell berechnet werden können.

Hier sind zwei Einrichtungen denkbar. In der einen wären zum Kellerspeichersystem für f alle Speicher all dieser Systeme hinzuzunehmen, was eine große (jedoch, wegen der Endlichkeit des Alphabets, eine endliche) Zahl von Speichern ergeben würde. Es ist aber auch denkbar, daß dieselben Speicher zur Berechnung von verschiedenen Funktionen gebraucht werden können; dann hat man nur nachzusehen, welches System aus den meisten Speichern besteht, und nur soviele müssen zum Kellerspeichersystem für f hinzugenommen werden. Das Berechnungsverfahren ist bei beiden Einrichtungen dasselbe; ich werde bequemlichkeitshalber die erste gebrauchen.

Es sollen also alle Kellerspeichersysteme der Funktionen g und g_b (für jedes $b \in A$), die mit den Input-Speichern I_g bzw. I_{g_b} beginnen, und mit O_g bzw. O_{g_b}

endigen, in unser System aufgenommen werden. Ferner müssen hier die Belegungen sowohl der Parameter $x_1, \ldots, x_n$, als auch der Rekursionsvariable x, ferner auch die Zwischenwerte der zu berechnenden Funktion f immer wieder herangezogen, also aufbewahrt bleiben; das kann durch je zwei Kellerspeicher geschehen, von welchen eines wieder durch die Benutzung eines im richtigen Moment leeren (sonst anderen Zwecken dienenden) Speicher erspart werden kann. So werden als neue Speicher neben I und O noch fünf für die Parameter-, Rekursionsvariablen- und Zwischenwerte aufgenommen:

$$\mathrm{P},\quad \mathrm{R},\quad \overline{\mathrm{R}},\quad \mathrm{Z},\quad \overline{\mathrm{Z}}.$$

Für Argumente

$$x_1 = b_{1,1}\ldots b_{1,a_1},\ \ldots,\quad x_n = b_{n,1}\ldots b_{n,a_n},\quad x = b_1\ldots b_a$$

(worunter wieder auch Argumente $\wedge$ vorkommen können), ist der Inhalt von I zu Beginn

$$b_a\ldots b_1,\ b_{n,a_n}\ldots b_{n,1},\ \ldots,\ b_{1,a_1}\ldots b_{1,1}.$$

(1) Als Vorbereitung der Berechnung werden (für $n \neq 0$) daraus die Belegungen der Parameter (auch die Komma) in P übertragen, durch folgende Schritte: bei $n \neq 1$ für $j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$q_j^{(1)}(i \neq ,)\,|\,(i \to \mathrm{P})\,q_j^{(1)}$$

$$q_j^{(1)}(i = ,)\,|\,(i \to \mathrm{P})\,q_{j+1}^{(1)}$$

$$q_n^{(1)}(i \neq ,)\,|\,(i \to \mathrm{P})\,q_n^{(1)}$$

$$q_n^{(1)}(i = ,)\,|\,(l \to i)\,q_1^{(2)}.$$

Danach ist der Inhalt von I

$$b_a\ldots b_1$$

(was auch $\wedge$ sein kann), und der Inhalt von P

$$b_{1,1}\ldots b_{1,a_1},\ \ldots,\ b_{n,1}\ldots b_{n,a_n}$$

das ich wieder kurz mit s bezeichnen werde.

Mit dieser Bezeichnung ist unsere Aufgabe

$$f(s, b_1\ldots b_a)$$

zu berechnen.

(2) Das beginnt mit der Berechnung von $f(s, \wedge)$ d. h. von $g(s)$. Dazu muß s in I_g gegossen werden (aber auch aufbewahrt bleiben, was z. B. mit Verwendung des noch leeren R geschehen kann), wo es als $\bar{s}$ erscheint; und dann wird das Berechnen von g bei diesem Inputinhalt in Gang gesetzt, das durch eine — nach Annahme bekannte — Schrittenfolge Q_g erfolgt. Hier verzweigt sich das Verfahren, je nachdem $i = \wedge$ oder $i \neq \wedge$ ist. Im ersten Fall ist der in O_g erhaltene Wert „$f(s, \wedge)$" gerade der gesuchte Funktionswert; diese Zeichenreihe soll in unveränderter Reihenfolge in O kommen, was z. B. durch Verwendung von $\overline{\mathrm{Z}}$ vermittelt werden kann. Vor-

läufig soll also „$\bar{f}(s, \wedge)$" in $\overline{Z}$ kommen:

$$q_1^{(2)}(p \neq L)\,|\,(p \to P)\,(p \to R)\,q_2^{(2)}$$
$$q_2^{(2)}\,|\,(p \to I_g)\,q_1^{(2)}$$
$$q_1^{(2)}(p = L)\,|\,q_3^{(2)}$$
$$q_3^{(2)}(r \neq L)\,|\,(r \to P)\,q_3^{(2)}$$
$$q_3^{(2)}(r = L)\,|\,Q_g$$
$$Q_g\,|\,q_4^{(2)}$$
$$q_4^{(2)}(i = \wedge)\,|\,q_5^{(2)}$$
$$q_4^{(2)}(i \neq \wedge)\,|\,q_1^{(4)}$$
$$q_5^{(2)}(o_g \neq L)\,|\,(o_g \to \overline{Z})\,q_5^{(2)}$$
$$q_5^{(2)}(o_g = L)\,|\,q_1^{(3)}.$$

(3) Nun folgt „*Finish*" (was bei $i \neq \wedge$ für $i = L$ erfolgen wird): der erhaltene Funktionswert wird aus $\overline{Z}$ in O gegossen, dann wird nach Entleerung der noch nicht leeren, von O verschiedenen Speicher (die immer nur $\overline{Z}$, O_g, $\overline{R}$, P sein können) halt gemacht. Dabei kann man gleich darauf Rücksicht nehmen, daß im „Finish-Stadium" bei $i \neq \wedge$ nur das „Ende" des Inhaltes von $\overline{Z}$ (von rechts bis zum ersten Komma) in O zu überschütten ist:

$$q_1^{(3)}\,|\,(l \to i)\,q_2^{(3)}$$
$$q_2^{(3)}(\bar{z} \neq ,)(\bar{z} \neq L)\,|\,(\bar{z} \to O)\,q_2^{(3)}$$
$$q_2^{(3)}(\bar{z} = ,)\,|\,q_3^{(3)}$$
$$q_3^{(3)}(\bar{z} \neq L)\,|\,(l \to \bar{z})\,q_3^{(3)}$$
$$q_3^{(3)}(\bar{z} = L)\,|\,q_4^{(3)}$$
$$q_2^{(3)}(\bar{z} = L)\,|\,q_4^{(3)}$$
$$q_4^{(3)}(o_g \neq L)\,|\,(l \to o_g)\,q_4^{(3)}$$
$$q_4^{(3)}(o_g = L)\,|\,q_5^{(3)}$$
$$q_5^{(3)}(\bar{r} \neq L)\,|\,(l \to \bar{r})\,q_5^{(3)}$$
$$q_5^{(3)}(\bar{r} = L)\,|\,q_6^{(3)}$$
$$q_6^{(3)}(p \neq L)\,|\,(l \to p)\,q_6^{(3)}$$
$$q_6^{(3)}(p = L)\,|\,q_7^{(3)}$$
$$q_7^{(3)}\,|\,\text{Stop!}$$

(4) Wenn aber in dem Stadium $q_4^{(2)}$ nicht $i = \wedge$ gilt, dann gilt $i = b_1$, und es beginnt ein Verfahren, das bei Einstellung immer neuer i (durch $(l \to i)$) bis $i = L$ immer wiederholt wird.

Man erhält darüber eine bessere Übersicht, wenn man eine fortgeschrittenere Situation in Betracht zieht, z. B. wobei eben b_3 für i eingestellt wurde (was durch

das zweite Verwenden von $(l \to i)$ erfolgt ist). In dieser Situation enthalten

P	I	$\overline{\mathrm{R}}$	$\overline{\mathrm{Z}}$	O_g
s	$b_a \ldots b_4 b_3$	$b_2, b_2 b_1$	„$\bar{f}(s, b_2)$", „$\bar{f}(s, b_1 b_2)$"	„$f(s, \wedge)$"

und alle anderen Speicher sind leer. Nun werden die Inhälte von $\overline{\mathrm{R}}$ und $\overline{\mathrm{Z}}$ in R bzw. Z überschüttet:

R	Z
$b_1 b_2, b_2$	„$f(s, b_1 b_2)$", „$f(s, b_2)$"

so sieht man, daß sich in R die b_2 enthaltenden Vorgänger von $b_1 b_2$ angesammelt haben, und in Z die entsprechenden Funktionswerte. Die hierzu nötigen Schritte sind:

(*)
$$q_1^{(4)}(\bar{r} \neq L) \mid (\bar{r} \to \mathrm{R}) q_1^{(4)}$$
$$q_1^{(4)}(\bar{r} = L) \mid q_2^{(4)}$$
$$q_2^{(4)}(\bar{z} \neq L) \mid (\bar{z} \to \mathrm{Z}) q_2^{(4)}$$
$$q_2^{(4)}(\bar{z} = L) \mid q_1^{(5)}.$$

(5) Unsere nächste Aufgabe ist die Berechnung von $f(s, b_3)$ d. h. von

$$g_{b_3}(s, \wedge, f(s, \wedge), f(s, \wedge))$$

(da $b_3 = \wedge b_3$, und $^{-1}(\wedge b_3) = \wedge$ ist). Zu diesem Zweck muß in I_{g_i} die Zeichenreihe

$$\text{„}\bar{f}(s, \wedge)\text{"}, \text{„}\bar{f}(s, \wedge)\text{"}, \wedge, \bar{s}$$

gebracht werden.

Beide „$\bar{f}(s, \wedge)$" können aus O_g hergebracht werden, wo aber „$f(s, \wedge)$" auch aufbewahrt bleiben soll; dazu kann man I_g zu Hilfe nehmen. Endlich kommt $\bar{s}$ aus P hierher, wo es — mit Verwendung von I_g — auch aufbewahrt bleibt:

$$q_1^{(5)}(o_g \neq L) \mid (o_g \to \mathrm{O}_g)(o_g \to \mathrm{I}_g) q_2^{(5)}$$
$$q_2^{(5)} \mid (o_g \to \mathrm{I}_{g_i}) q_1^{(5)}$$
$$q_1^{(5)}(o_g = L) \mid q_3^{(5)}$$
$$q_3^{(5)}(i_g \neq L) \mid (i_g \to \mathrm{O}_g) q_3^{(5)}$$
$$q_3^{(5)}(i_g = L) \mid (, \to \mathrm{I}_{g_i}) q_4^{(5)}$$
$$q_4^{(5)}(o_g \neq L) \mid (o_g \to \mathrm{O}_g)(o_g \to \mathrm{I}_g) q_5^{(5)}$$
$$q_5^{(5)} \mid (o_g \to \mathrm{I}_{g_i}) q_4^{(5)}$$
$$q_4^{(5)}(o_g = L) \mid (, \to \mathrm{I}_{g_i}) q_6^{(5)}$$
$$q_6^{(5)}(i_g \neq L) \mid (i_g \to \mathrm{O}_g) q_6^{(5)}$$
$$q_6^{(5)}(i_g = L) \mid (\wedge \to \mathrm{I}_{g_i}) q_7^{(5)}$$
$$q_7^{(5)} \mid (, \to \mathrm{I}_{g_i}) q_8^{(5)}$$
$$q_8^{(5)}(r \neq L) \mid (, \to \mathrm{R}) q_9^{(5)}$$
$$q_8^{(5)}(r = L) \mid q_9^{(5)}$$

$(* *)$
$$q_9^{(5)}(p \neq L)\,|\,(p \to \mathrm{P})\,(p \to \mathrm{I}_g)\,q_{10}^{(5)}$$
$$q_{10}^{(5)}\,|\,(p \to \mathrm{I}_{g_i})\,q_9^{(5)}$$
$$q_9^{(5)}(p = L)\,|\,q_{11}^{(5)}$$
$$q_{11}^{(5)}(i_g \neq L)\,|\,(i_g \to \mathrm{P})\,q_{11}^{(5)}$$
$$q_{11}^{(5)}(i_g = L)\,|\,q_{12}^{(5)}$$
$$q_{12}^{(5)}(\bar{r} \neq L)\,|\,(, \to \overline{\mathrm{R}})\,q_1^{(6)}$$
$$q_{12}^{(5)}(\bar{r} = L)\,|\,q_1^{(6)}.$$

(6) Bereits das Überschütten von s aus P in I_{g_i} (bei Aufbewahrung in P), dessen Beginn ich mit $(* *)$ bezeichnet habe, und was nun folgt, wird noch oft wiederholt werden. Wir schieben noch die Berechnung von $f(s, b_3)$ auf, um in den „Rekursionsvariablenspeicher" einige, die späteren vorbereitende Schritte zu tun. Es wird aus I — ohne dort gestrichen zu werden — b_3 in R gebracht, dann das „Ende" von R (von rechts bis zum ersten Komma, oder — in Stadien, wobei hier kein Komma enthalten ist — bis L) in den „Sammelplatz" $\overline{\mathrm{R}}$ gegossen (wo damit das Ansammeln der Werte b_3, b_2b_3, $b_1b_2b_3$ — vorläufig umgekehrt — beginnt). So werden die Inhälte dieser Speicher zu

R	$\overline{\mathrm{R}}$
$b_1b_2,\ b_2,\ b_3$	L
$b_1b_2,\ b_2$	b_3.

Erst danach wird das aufgeschobene Berechnen von g_i bei dem in I_{g_i} vorhandenen Inputinhalt in Gang gesetzt, und durch eine — nach Annahme bekannte — Schrittenfolge Q_{g_i} durchgeführt, wodurch zum Schluß das gewünschte „$f(s, b_3)$" in O_{g_i} erscheint:

$$q_1^{(6)}\,|\,(i \to \mathrm{I})\,(i \to \mathrm{R})\,q_2^{(6)}$$
$$q_2^{(6)}(r \neq ,)\,(r \neq L)\,|\,(r \to \overline{\mathrm{R}})\,q_2^{(6)}$$
$$q_2^{(6)}(r = ,)\,|\,(l \to r)\,Q_{g_i}$$
$$q_2^{(6)}(r = L)\,|\,Q_{g_i}$$
$$Q_{g_i}\,|\,q_3^{(6)}$$
$$q_3^{(6)}(\bar{z} \neq L)\,|\,(, \to \overline{\mathrm{Z}})\,q_1^{(7)}$$
$$q_3^{(6)}(\bar{z} = L)\,|\,q_1^{(7)}.$$

(7) Hier verzweigt sich das Verfahren je nachdem das in O_{g_i} erhaltene Ergebnis der letzte bei dem aktuellen i erzielte Funktionswert ist (wie bei $i = b_1$) oder nicht (wie bei $i = b_3$); das merkt man daran, ob R bereits entleert ist oder nicht. Im ersten Fall wird der Inhalt von O_{g_i} (nach dem vorigen Dahinsetzen eines Kommas) nur an den „Sammelplatz" $\overline{\mathrm{Z}}$ gebracht, (wo die Werte „$\bar{f}(s, b_3)$", „$\bar{f}(s, b_2b_3)$", „$\bar{f}(s, b_1b_2b_3)$", angesammelt werden), und durch $(l \to i)$ ein neues Argumentzeichen

(eventuell L) eingestellt. Im zweiten Fall wird der Inhalt von O_{g_i} — mit Benutzung von I_g — nicht nur in $\overline{\mathrm{Z}}$, sondern zugleich auch in I_{g_i} gegossen, womit das Berechnen eines neuen g_i-Wertes beginnt:

$$
\begin{aligned}
& q_1^{(7)}(r=L)\,|\,q_2^{(7)} \\
& q_2^{(7)}(o_{g_i}\neq L)\,|\,(o_{g_i}\to\overline{\mathrm{Z}})\,q_2^{(7)} \\
(***)\qquad & q_2^{(7)}(o_{g_i}=L)\,|\,(l\to i)\,q_1^{(9)} \\
& q_1^{(7)}(r\neq L)\,|\,q_3^{(7)} \\
& q_3^{(7)}(o_{g_i}\neq L)\,|\,(o_{g_i}\to \mathrm{O}_{g_i})\,(o_{g_i}\to\overline{\mathrm{Z}})\,q_4^{(7)} \\
& q_4^{(7)}\,|\,(o_{g_i}\to \mathrm{I}_{g_i})\,q_3^{(7)} \\
& q_3^{(7)}(o_{g_i}=L)\,|\,(,\to \mathrm{I}_{g_i})\,q_1^{(8)}.
\end{aligned}
$$

(8) Unser nächstes Ziel ist im betrachteten Fall

$$f(s, b_2b_3) \text{ d. h. } g_{b3}(s, b_2, f(s, b_2), f(s, b_3))$$

zu berechnen. Zu diesem Zweck muß in I_{g_i} die Zeichenfolge

$$,,\bar{f}(s, b_3)'',\ ,,\bar{f}(s, b_2)'',\ b_2,\ \bar{s}$$

gebracht werden.

$$,,\bar{f}(s, b_3)'',$$

ist bereits schon hier. Da bei der momentanen Situation außerdem in

I	P	R	$\overline{\mathrm{R}}$	Z	$\overline{\mathrm{Z}}$
$b_a\ldots b_4b_3$	s	b_1b_2, b_2	b_3	$,,f(s, b_1b_2)''$, $,,f(s, b_2)''$	$,,\bar{f}(s, b_3)''$

ist, so kann $,,\bar{f}(s, b_2)''$ vom Ende von Z (mit Streichung), dann b_2 vom Ende von R, endlich $\bar{s}$ aus P daher gebracht werden. Das letzte beginnt mit einem Schritt, den ich mit $(**)$ bezeichnet habe, wobei das momentane Stadium $q_9^{(5)}$ war. Wie ich schon angedeutet habe, wiederholt sich alles von hier an, wodurch erst $,,f(s, b_2b_3)''$ dann $,,f(s, b_1b_2b_3)''$ berechnet und — vorläufig umgekehrt — in den „Sammelplatz" $\overline{\mathrm{Z}}$ gebracht, R und Z aber entleert wird. Die genannten Schritte sind:

$$
\begin{aligned}
& q_1^{(8)}(z\neq ,)\,(z\neq L)\,|\,(z\to \mathrm{I}_{g_i})\,q_1^{(8)} \\
& q_1^{(8)}(z=,)\,|\,(z\to \mathrm{I}_{g_i})\,q_2^{(8)} \\
& q_1^{(8)}(z=L)\,|\,(,\to \mathrm{I}_{g_i})\,q_2^{(8)} \\
& q_2^{(8)}(r\neq ,)\,(r\neq L)\,|\,(r\to \mathrm{R})\,(r\to \mathrm{I}_g)\,q_3^{(8)} \\
& q_3^{(8)}\,|\,(r\to \mathrm{I}_{g_i})\,q_2^{(8)} \\
& q_2^{(8)}(r=,)\,|\,q_4^{(8)} \\
& q_2^{(8)}(r=L)\,|\,q_4^{(8)} \\
& q_4^{(8)}(i_g\neq L)\,|\,(i_g\to \mathrm{R})\,q_4^{(8)} \\
& q_4^{(8)}(i_g=L)\,|\,(,\to \mathrm{I}_{g_i})\,q_9^{(5)}.
\end{aligned}
$$

(9) Kehren wir jetzt zu dem mit $(***)$ bezeichneten Schritt zurück, wo ein neues Argumentzeichen — eventuell L — und das Stadium $q_1^{(9)}$ eingestellt wurde. War das eingestellte Zeichen von I nicht L, so steht man vor einem Stadium $q_1^{(4)}$ von dem an sich alles wiederholt. Ist aber das neu eingestellte Zeichen von I bereits L, so steht man vor dem „Finish-Stadium" $q_2^{(3)}$:

$$q_1^{(9)}(i \neq L) \mid q_1^{(4)}$$

$$q_1^{(9)}(i = L) \mid q_2^{(3)}$$

und damit gelangt man dann zum „Stop!"

Da nach § 2 die Ausgangsfunktionen mit Benutzung endlich vieler Kellerspeicher (nämlich der Anzahl 0) sequenziell berechnet werden können, und diese Eigenschaft sich nach § 3 und § 4 bei Substitutionen und primitiven Rekursionen vererbt, *so sind sämtliche primitiv-rekursive Funktionen einer Wortemenge über endliches Alphabet mit Hilfe von Kellerspeichern einer festen (nur von der Anzahl der im Aufbau der betreffenden Funktion verwendeten Substitutionen und Rekursionen abhängigen) Anzahl sequenziell berechenbar.*

Korollar: In meinen in Fußnote[2] zitierten Arbeiten habe ich die Primitiv-Rekursivität der gegenseitigen Übersetzungen der verschiedenartigen Klammerformen und klammerfreien Formen von Ausdrücken, die aus Variablen durch gegebene Operationen aufgebaut werden, in Wortemengen bewiesen, deren Alphabete die Folge der Variablen (und eventuell auch eine unendliche Operationszeichenfolge) enthielten, und daher unendlich waren. Betrachtet man aber die gegenseitigen Übersetzungen der verschiedenen Formen eines gegebenen Ausdrucks, so enthält dieser jedenfalls nur endlich viele Variablen- und Operationszeichen; daher kann man sich bei jeder Übersetzung auf eine Wortemenge mit endlichem Alphabet beschränken, in welcher die Übersetzungs-Transformationen für Ausdrücke, die bei festgewählten m und n aus höchstens n Variablen durch höchstens m gegebene Operationen aufgebaut werden, primitiv-rekursiv sind. So folgt aus dem Ergebnis dieses Paragraphen, daß *die gegenseitigen Übersetzungen von „volleingeklammerten", „konventionell eingeklammerten", „nicht-konsequent-konventionell eingeklammerten" und verschiedenen* LUKASIEWICZ*schen und* PAWLAK*schen klammerfreien Formen der Ausdrücke* (die in den zitierten Arbeiten exakt definiert wurden) *mit Hilfe von endlichen Kellerspeichersystemen sequenziell durchgeführt werden können.*

§ 5. Die Vererbung der sequenziellen Berechenbarkeit bei μ-Operation

Endlich betrachten wir eine Definition (μ) der Einleitung II, also

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu_u^U [g(x_1, \ldots, x_n, u) = \wedge],$$

wo U die Menge der Werte einer (neben eventuell $x_1, \ldots, x_n$) nur von $o(x)$ abhängigen Funktion $u(x) = u_{o(x)}$ bedeutet, und die Funktionen

$$u(x), \quad g(x_1, \ldots, x_n, u)$$

bereits durch endliche Kellerspeichersysteme sequenziell berechnet werden können, mit Input I_u bzw. I_g und Output O_u bzw. O_g.

Da $u(x)$ (eventuell neben $x_1, \ldots, x_n$) nur von $o(x)$ abhängt, kann man sich auf x-Argumente der Form

$$x = b_0 b_0 \ldots b_0$$

beschränken, wo b_0 ein festgewähltes Element des Alphabets ist, und man hat für beliebig gegebene Argumente $x_1, \ldots, x_n$ die kürzeste solche b_0-Kette x zu suchen, für welche $g(x_1, \ldots, x_n, u(x))$ den Wert $\wedge$ annimmt. Da man mit immer längeren Ketten Versuch zu machen hat, und die gegebenen Argumente dabei immer wieder herangezogen werden, brauchte man zu ihrer Aufbewahrung eigentlich je zwei Kellerspeicher; aber je einer von diesen läßt sich durch einen für andere Zwecke bestimmten, im notwendigen Augenblick leeren Speicher ersetzen, welche inzwischen auch zur Aufbewahrung der Zwischenwerte genügen. So werden zu den Speichern der Berechnung von u und g neben I und O noch zwei Kellerspeicher, $\bar{\mathrm{I}}$ für die Argumente $x_1, \ldots, x_n$, und X für $x = b_0 b_0 \ldots b_0$ (welches sich bei Umkehrung nicht ändert) hinzugenommen.

Für Argumente

$$x_1 = b_{1,1} \ldots b_{1,a_1}, \ldots, x_n = b_{n,1} \ldots b_{n,a_n}$$

ist zu Beginn der Inhalt von I

$$b_{n,a_n} \ldots b_{n,1}, \ldots, b_{1,a_1} \ldots b_{1,1}$$

das genau so wie bei der Substitution, in $\bar{\mathrm{I}}$ übergeschüttet (und in der dortigen Reihenfolge mit s bezeichnet) wird; durch folgende Schritte:

$$q_1 (i \neq L) \mid (i \to \bar{\mathrm{I}}) q_1$$
$$q_1 (i = L) \mid q_1^{(1)}$$

(1) Nach dieser Vorbereitung hat man zuerst mit $u(\wedge)$ Versuch zu machen, also (falls $u(x)$ auch von $x_1, \ldots, x_n$ abhängig wäre, erst $\bar{s}$, dann) $\wedge$ in I_u zu bringen, und mit diesem Inputinthalt das Berechnungsverfahren Q_u im Speichersystem für u in Bewegung zu setzen. In einer späteren ähnlichen Situation wird man den Inputinhalt aus X herausholen, aber auch dort aufbewahren; darauf nehme ich gleich jetzt Rücksicht, das momentan leere I_g benutzend:

$$q_1^{(1)} (x = L) \mid (\wedge \to \mathrm{I}_u) Q_u$$
$$q_1^{(1)} (x \neq L) \mid q_2^{(1)}$$
$$q_2^{(1)} (x \neq L) \mid (x \to \mathrm{X})\,(x \to \mathrm{I}_g) q_3^{(1)}$$
$$q_3^{(1)} \mid (x \to \mathrm{I}_u) q_2^{(1)}$$
$$q_2^{(1)} (x = L) \mid q_4^{(1)}$$
$$q_4^{(1)} (i_g \neq L) \mid (i_g \to \mathrm{X}) q_4^{(1)}$$
$$q_4^{(1)} (i_g = L) \mid Q_u .$$

(2) Zum Schluß erscheint „$u(x^*)$" in O_u, wo x^* jetzt das $\wedge$, später immer den Inhalt von X bedeutet, welches immer eine Kette $b_0 b_0 \ldots b_0$ sein wird; und man hat bei diesem u-Argument den Wert von g zu berechnen. So muß in das (bereits entleerte) I_g

„$\bar{u}(x^*)$". $\bar{s}$

gebracht werden, und zugleich sowohl „$u(x^*)$" als auch s aufbewahrt bleiben, wozu man z. B. I_u und O_g zu Hilfe nehmen kann. Nach Entleerung von O_g kann das Berechnungsverfahren Q_g für g in Gang gesetzt werden:

$$Q_u|q_1^{(2)}$$
$$q_1^{(2)}(o_u \neq L)|(o_u \to \mathrm{O}_u)(o_u \to \mathrm{I}_u)q_2^{(2)}$$
$$q_2^{(2)}|(o_u \to \mathrm{I}_g)q_1^{(2)}$$
$$q_1^{(2)}(o_u = L)|(, \to \mathrm{I}_g)q_3^{(2)}$$
$$q_3^{(2)}(\bar{i} \neq L)|(\bar{i} \to \bar{\mathrm{I}})(\bar{i} \to \mathrm{O}_g)q_4^{(2)}$$
$$q_4^{(2)}|(\bar{i} \to \mathrm{I}_g)q_3^{(2)}$$
$$q_3^{(2)}(\bar{i} = L)|q_5^{(2)}$$
$$q_5^{(2)}(o_g \neq L)|(o_g \to \bar{\mathrm{I}})q_5^{(2)}$$
$$q_5^{(2)}(o_g = L)|Q_g.$$

(3) Danach ist die Situation:

I	$\bar{\mathrm{I}}$	X	I_u	O_u	I_g	O_g
		$x^* =$				
L	s	$\wedge$ oder $b_0 \ldots b_0$	„$\bar{u}(x^*)$"	L	L	„$g(s, u(x^*))$"

Jetzt ist nachzuprüfen, ob der Wert von g für die Argumente $s, u(x^*)$ gleich $\wedge$ ist (dies kann sich auch als eine Kette $\wedge\wedge\ldots\wedge$ ergeben). Ist das der Fall, so geht man auf „Finish" über. Ist das nicht der Fall, dann setzt man b_0 in X, entleert alles außer $\bar{\mathrm{I}}$ und X, und kehrt zu $q_1^{(1)}$ zurück, von wo an sich alles wiederholt, bis man zu einem x^* mit

$$g(s, u(x^*)) = \wedge$$

gelangt. Dann und nur dann, wenn f an der beachteten Stelle nicht definiert ist, wird das nie geschehen, also unser Berechnungsverfahren nie zu einem Abschluß kommen.

Die besprochenen Schritte sind:

$$Q_g|q_1^{(3)}$$
$$q_1^{(3)}(o_g = \wedge)|(l \to o_g)q_1^{(3)}$$
$$q_1^{(3)}(o_g \neq \wedge)|q_2^{(3)}$$
$$q_2^{(3)}(o_g = L)|q_1^{(4)} \quad (\text{„Finish"})$$
$$q_2^{(3)}(o_g \neq L)|(b_0 \to \mathrm{X})q_3^{(3)}$$
$$q_3^{(3)}(o_g \neq L)|(l \to o_g)q_3^{(3)}$$
$$q_3^{(3)}(o_g = L)|q_4^{(3)}$$
$$q_4^{(3)}(i_u \neq L)|(l \to i_u)q_4^{(3)}$$
$$q_4^{(3)}(i_u = L)|q_1^{(1)}.$$

(4) „Finish": Als man dazu gelangt, wurde O_g bereits entleert; man hat noch X und $\bar{I}$ zu entleeren, dann den Inhalt von I_u in O überzuschütten. Hier erscheint dann

$$„u(x^*)" = „u_{o(x^*)}"$$

wo $x^* = b_0 b_0 \ldots b_0$ die kürzeste b_0-Kette ist (die auch leer, d. h. gleich $\wedge$ sein kann), für welche

$$g(s, u_{o(x^*)}) = \wedge$$

ist. Die Schritte vom „Finish" sind die folgenden:

$$q_1^{(4)}(x \neq L) \mid (l \to x) q_1^{(4)}$$

$$q_1^{(4)}(x = L) \mid q_2^{(4)}$$

$$q_2^{(4)}(\bar{i} \neq L) \mid (l \to i) q_2^{(4)}$$

$$q_2^{(4)}(\bar{i} = L) \mid q_3^{(4)}$$

$$q_3^{(4)}(i_u \neq L) \mid (i_u \to \mathrm{O}) q_3^{(4)}$$

$$q_3^{(4)}(i_u = L) \mid q_4^{(4)}$$

$$q_4^{(4)} \mid \mathrm{Stop!}$$

Da nach § 4 die primitiv-rekursiven Funktionen von M_A mit je einem endlichen Kellerspeichersystem sequenziell berechnet werden können, und nach diesem Paragraph sich diese Eigenschaft bei μ-Operationen vererbt, *so ist auch jede in einer Wortemenge mit endlichem Alphabet partiell-rekursive Funktion mit Hilfe von Kellerspeichern einer festen (nur von der Anzahl der im Aufbau der betreffenden Funktion verwendeten Substitutionen, Rekursionen und μ-Operationen abhängigen) Anzahl sequenziell berechenbar;* in dem Sinne, daß es ein derartiges Kellerspeichersystem, und ein dies benützendes Berechnungsverfahren gibt, welcher nach Eingießen der Argumente in das Input des Systems in Gang gesetzt, dann und nur dann zu einem „Stop-Stadium" kommt, wenn die betrachtete Funktion an der betrachteten Stelle definiert ist, und in diesem Fall im Output den Wert der Funktion an der genannten Stelle liefert.

§ 6. Die Partiell-Rekursivität der durch Kellerspeichersysteme sequenziell berechenbaren Funktionen

Darunter, daß durch ein Kellerspeichersystem mit Input I, Output O, und weitere Kellerspeichern $Z_1, \ldots, Z_m$ für die Zwischenergebnisse, eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ in einer Wortemenge M_A über einem beliebigen Alphabet A — welches die Zeichen „ $\wedge$ und L nicht enthält — partiell berechnet wird, soll folgendes verstanden werden:

Es gibt eine endliche Folge

$$q_1, q_2, \ldots, q_e$$

von Stadien, und endlich viele zu diesen gehörigen „Berechnungsschritte", so daß falls beliebige Worte von M_A als Argumente gewählt wie bisher in I gegossen werden, wobei der Inhalt der anderen Speicher L ist, und das Stadium q_1 eingesetzt wird, die Berechnungsschritte entweder nie zu einer „Stop-Situation" führen, wobei im Output nach L eine Kette von Elementen des Alphabets und $\wedge$-Zeichen enthalten ist, aber in allen anderen Speichern L — in diesem Fall ist f an der betrachteten Stelle nicht berechenbar —; oder führen die Berechnungsschritte nach endlich vieler Anwendung zu einer „Stop-Situation" — in diesem Fall ist der Wert von f an der betrachteten Stelle der Inhalt von O, abgesehen vom ersten Zeichen L (wobei die $\wedge$-Zeichen freilich als nicht anwesend zu betrachten sind).

Dabei besteht ein Berechnungsschritt darin, daß für den Index des momentanen Stadiums (das jedenfalls eine natürliche Zahl sein muß) und für die momentanen Inhalte der Speicher (die immer mit L beginnen und sonst kein L enthalten) neue Werte gesetzt werden, welche in einer Wortemenge M_{A^*} von all diesen früheren Werten primitiv-rekursiv abhängen. Das Alphabet A^* entsteht aus A durch Hinzunahme der Hilfselemente „ $\wedge$ und L (eine andere Bezeichnung der Hilfselemente, oder die Hinzunahme weiterer Hilfselemente würde den folgenden Gedankengang nicht stören).

Die bisherigen Berechnungen — wie man leicht sieht — waren so geschaffen (als Inhälte der dabei verwendeten Speicher sind die in ihnen enthaltenen Zeichenreihen ohne die Zeichen l zu betrachten). Ein angewandter Berechnungsschritt bestand immer darin, daß das Gipfelzeichen eines Speichers gestrichen, oder an den Gipfel eines Speichers das Gipfelzeichen eines anderen Speichers, oder ein Komma, oder $\wedge$, oder ein Element von A gebracht, ferner ein neues Stadium eingesetzt wurde, immer davon abhängig, was der momentane Stadium ist, und ob die Gipfelzeichen gewisser Speicher bestimmte Hilfszeichen sind oder nicht. Die übersichtlichkeitshalber verwendeten oberen Indizes der q können freilich vermieden werden, und die Stadien in der Reihenfolge ihres Auftretens mit

$$q_1, q_2, \ldots, q_e$$

bezeichnet werden. Da in jedem Fall endlich viele Berechnungsschritte vorgeschrieben wurden, ergibt in jeder Situation eine endliche Fallunterscheidung, was zu tun ist. Das zeigt am besten ein einfaches

Beispiel: Betrachten wir die in § 2 inbegriffene Berechnung der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 .$$

Die Inhälte der Speicher werde ich durch entsprechende griechische Buchstaben bezeichnen. Der momentane Stadienindex sei t, die momentanen I- und O-Inhälte seien ι bzw. ω; und diese sollen bei dem aktuellen Berechnungsschritt in t', ι' bzw. ω' übergehen. Diese Übergänge ergeben sich nach den in § 2 für unsere Funktion angegebenen Berechnungsschritten wie folgt (ich erinnere daran, daß $b(x)$ den letzten Buchstaben des Wortes x bedeutet, und x^{-1} den Rest von x, wenn dieser

von ihm weggelassen wird):

t	ι	ω	t'	ι'	ω'		
1	ι	ω	1	ι^{-1}	ω	falls	$b(\iota)\neq,$
			2	ι^{-1}	ω	falls	$b(\iota)=,$
2	ι	ω	2	ι^{-1}	$\omega b(\iota)$	falls	$b(\iota)\neq,$
			3	ι^{-1}	ω	falls	$b(\iota)=,$
3	ι	ω	3	ι^{-1}	ω	falls	$b(\iota)\neq L$
			4	ι	ω	falls	$b(\iota)=L$

Demnach gelten:

$$t'=\begin{cases}1 \text{ falls} & t=1\,\&\,b(\iota)\neq, \text{ gilt}\\ 2 \text{ falls} & (t=1\,\&\,b(\iota)=,)\ \vee\\ & \vee\,(t=2\,\&\,b(\iota)\neq,) \text{ gilt}\\ 3 \text{ falls} & (t=2\,\&\,b(\iota)=,)\ \vee\\ & \vee\,(t=3\,\&\,b(\iota)\neq L) \text{ gilt}\\ 4 \text{ sonst.}\end{cases}$$

(Eigentlich folgt aus den obigen unmittelbar $t'=4$ nur dann, wenn $t=3\,\&\,b(\iota)=L$ gilt, aber außer den Fällen, bei welchen $t'=1, 2, 3$ war, kann nur dieser Fall vorkommen. Ähnliches gilt auch für die folgenden Definitionen.)

$$\iota'=\begin{cases}\iota & \text{falls } t=3\,\&\,b(\iota)=L\\ \iota^{-1} & \text{sonst,}\end{cases}$$

$$\omega'=\begin{cases}\omega b(\iota) & \text{falls } t=2\,\&\,b(\iota)\neq,\\ \omega & \text{sonst.}\end{cases}$$

So sieht man, daß jedes von t', ι', ω' durch eine endliche Fallunterscheidung, mit Verwendung primitiv-rekursiver Funktionen und Beziehungen von t, ι, ω definiert werden kann, und daher eine primitiv-rekursive Funktion von t, ι und ω ist.

Ähnliches gilt für alle bisher behandelten Berechnungsverfahren, nur müssen bei verwickelteren Berechnungen Fallunterscheidungen unter viel mehr Fällen gemacht werden.

Kehren wir nun zurück zum

allgemeinen Fall: Es soll also $f(x_1, \ldots, x_n)$ durch ein Kellerspeichersystem

(K) $$\mathrm{I},\ \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_m,\ \mathrm{O}$$

in der Wortemenge M_A über einem Alphabet A (welches die Hilfszeichen nicht enthält) partiell berechnet werden können, in endlich vielen Stadien

$$q_1, q_2, \ldots, q_t, \ldots, q_e$$

wobei das Anfangsstadium q_1 ist; und zwar durch endlich viele Berechnungsschritte, welche je eine momentane Situation

$$t,\quad \iota,\quad \zeta_1, \ldots, \zeta_m,\quad \omega$$

in eine neue Situation

$$t', \quad \iota', \quad \zeta_1', \ldots, \zeta_m', \quad \omega'$$

überführen, wo

$$t' = t'(t, \iota, \zeta_1, \ldots, \zeta_m, \omega), \quad \iota' = \iota'(t, \iota, \zeta_1, \ldots, \zeta_m, \omega),$$
$$\zeta_j' = \zeta_j'(t, \iota, \zeta_1, \ldots, \zeta_m, \omega) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\omega' = \omega'(t, \iota, \zeta_1, \ldots, \zeta_m, \omega)$$

gegebene, in M_{A^*} primitiv-rekursive Funktionen von $t, \iota, \zeta_1, \ldots, \zeta_m, \omega$ sind, wobei die Werte von t' natürliche Zahlen sind, nicht größer als e, und die Werte von $\iota', \zeta_1', \ldots, \zeta_m'$ und ω' solche Worte von M_{A^*}, welche mit L beginnen, und sonst kein L enthalten.

Ich behaupte, daß *die durch den Kellerspeichersystem* (K) *partiell berechenbare Funktion* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *in der Wortemenge* M_{A^*} *partiell-rekursiv ist; und kann sie durch das Kellerspeichersystem für alle Argumente aus* M_A *berechnet werden, so ist sie in* M_{A^*} *allgemein-rekursiv.*

Beweis: Nach Einleitung II kann zur Folge, welche eine momentane Situation charakterisiert, ein einziges Wort von M_{A^*} zugeordnet werden:

$$u = c_{m+2}(t, \iota, \zeta_1, \ldots, \zeta_m, \omega)$$

woraus die einzelnen Glieder der Folge durch

$$t = k_0(u), \quad \iota = k_1(u), \quad \zeta_1 = k_2(u), \ldots, \zeta_m = k_{m+1}(u), \quad \omega = k_{m+2}(u)$$

zurückgewonnen werden können, wobei c_{m+2} und k_j in M_{A^*} primitiv-rekursive Funktionen sind. Daher sind die von diesen primitiv-rekursiv abhängigen Funktionen

$$t', \iota', \zeta_1', \ldots, \zeta_m', \omega'$$

alle in M_{A^*} primitiv-rekursive Funktionen von u (z. B. ist

$$t' = t'(k_0(u), k_1(u), \ldots, k_{m+2}(u))),$$

und deshalb auch das Wort

$$u' = c_{m+2}(t', \iota', \zeta_1', \ldots, \zeta_m', \omega')$$

durch welches die neue Situation nach dem aktuellen Berechnungsschritt charakterisiert wird. Diese Funktion soll kurz mit

$$u' = u'(u)$$

bezeichnet werden.

Zu Beginn der Berechnung von f an einer gegebenen Stelle wird die Situation durch

$$u_0 = c_{m+2}(1, L\bar{s}, L, L, \ldots, L)$$

charakterisiert, wo s (wie schon oft) die gegebene Stelle $x_1, \ldots, x_n$ representiert, welche durch Nacheinandersetzen von Argumenten und Komma-Zeichen entstehend, eine in M_{A^*} primitiv-rekursive Funktion der Argumente ist, und dasselbe gilt auch für $\bar{s}$. Wird also eine Funktion $u(s, x)$ in M_{A^*} durch die folgende primitive

Rekursion definiert (wobei nach Einleitung II $N(x)$ die Beziehung „natürliche Zahl, d. h. der Form $b_0b_0...b_0$ zu sein" ist):

$$u(s, \wedge) = c_{m+2}(1, L\bar{s}, L, \ldots, L)$$

$$u(s, xb) = \begin{cases} u'(u(s, x)) & \text{falls } N(xb) \\ \text{und etwa } \wedge & \text{sonst,} \end{cases}$$

so hängt der Wert der Funktion

$$u_{o(x)}(s) = u(s, o(x))$$

außer dem Parameter s nur von $o(x)$ ab, und diese Funktion (deren Werte eine Menge U bilden) nimmt für

$$o(x) = \wedge,\ b_0,\ b_0b_0,\ b_0b_0b_0, \ldots$$

der Reihe nach die bei der Berechnung aufeinanderfolgenden Situationen charakterisierenden Worte als Werte an.

Dann und nur dann, wenn man dabei nie zu einer „Stop-Situation" kommt, also zu einer Situation, wobei die in M_{A^*} primitiv-rekursive Beziehung

$$B(s, x) \equiv k_1(u_{o(x)}(s)) = k_2(u_{o(x)}(s)) = \ldots = k_{m+1}(u_{o(x)}(s)) = L \,\&\, \& k_{m+2}(u_{o(x)}(s)) \neq L \,\&\, \neg(, \leqq k_{m+2}(u_{o(x)}(s)))$$

besteht, ist f an der betrachteten Stelle nicht durch (K) berechenbar. Kommt man für ein $o(x)$ zu einer solchen Situation, so ist der Wert von f an der betrachteten Stelle der Inhalt von O, abgesehen vom ersten Zeichen (das L ist), also

$$^{-1}k_{m+2}(u_{o(x)}(s)).$$

Daher ist (statt der Kürzung s wieder $x_1, \ldots, x_n$ gesetzt), falls die charakteristische Funktion der Beziehung $B(x_1, \ldots, x_n, x)$ mit $f_B(x_1, \ldots, x_n, x)$ bezeichnet wird,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = {}^{-1}k_{m+2}(\mu_u^U[f_B(x_1, \ldots, x_n, u) = \wedge])$$

eine in M_{A^*} partiell-rekursive — und falls sie für alle Argumente aus M_A durch (K) berechenbar ist, allgemein-rekursive — Funktion, wie behauptet wurde.

MATHEMATISCHES INSTITUT
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITÄT,
BUDAPEST

(Eingegangen am 12. August 1964.)

ÜBER DIE APPROXIMATION IM STARKEN SINNE

Von

L. LEINDLER (Szeged)

(*Vorgelegt von* G. ALEXITS)

Einleitung

Bezeichne $f(x)$ eine nach 2π-periodische, stetige Funktion, $s_n(x)$ die n-te Partialsumme ihrer Fourierreihe, $\tilde{f}(x)$ bzw. $\tilde{s}_n(x)$ die konjugierten Funktionen von $f(x)$, bzw. $s_n(x)$. Bezeichne ferner $h_n(f, p; x)$ die starken Summen

$$h_n(f, p; x) = \left\{\frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n}|s_v(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p}.$$

Das Problem der Approximation im starken Sinne, d. h. die Konvergenzgeschwindigkeit der Mittel $h_n(f, p; x)$ wurde von ALEXITS [1] aufgeworfen und teilweise gelöst. Neulich haben sich verschiedene Verfasser (ALEXITS [2], ALEXITS—KRÁLIK [3], [4], ALEXITS—LEINDLER [5]) mit den Fragen der Approximation im starken Sinne beschäftigt und mehrere interessante Ergebnisse erreicht. In dieser Arbeit beweisen wir mit der Methode der erwähnten Arbeiten einen allgemeinen Satz.

Bezeichne $E_n(f)$ den im Sinne der Metrik des Raumes $C(0, 2\pi)$ erreichbaren besten Annäherungsgrad von $f(x)$ mit trigonometrischen Polynomen n-ter Ordnung. Sei $\|\alpha_{nk}\|$ eine positive, summierende Dreiecksmatrix und bezeichne

$$T_n(x) = T_n(f, p, \|\alpha\|; x) = \left\{\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p}$$

die starken Mittel bezüglich der durch $\|\alpha_{nk}\|$ bestimmten Summationsmethode, wobei $p>0$ ist und

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}$$

bedeutet. Wir setzen

$$A_n(m, l) = \sum_{k=l+1}^{m}\alpha_{nk}.$$

SATZ I. *Existiert eine Indexfolge* $\{N_m\}$ $(N_0=0)$ *und eine Zahl* $q'>1$ *derart, daß für* $N_{m_0-1}<n\leqq N_{m_0}$ *die Ungleichung*

$$(1)\qquad \left\{\sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m}(\alpha_{nk})^{q'}\right\}^{1/q'} \leqq KN_m^{-(1/p')}A_n(N_m, N_{m-2}) \quad (n=1, 2, \ldots;\ m=2, \ldots, m_0)$$

mit $p'=\frac{q'}{q'-1}$ *erfüllt sei, so gelten für alle* $p>0$ *die Ungleichungen*

$$\frac{1}{A_n(N_m, N_{m-2})} \sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m} \alpha_{nk}|s_k(x)-f(x)|^p \leqq K_1\left(E_{N_{m-2}}(f)\right)^p \tag{2}$$

$$(n=1, 2, \ldots;\ m=2, \ldots, m_0)$$

und

$$T_n(x) \leqq \left\{\frac{K_2}{A_n} \sum_{m=2}^{m_0} A_n(N_m, N_{m-2})\left(E_{N_{m-2}}(f)\right)^p\right\}^{1/p}, \tag{3}$$

wobei K, K_1 *und* K_2 *positive, nur von* $\|\alpha_{nk}\|$ *und* p *abhängige Konstanten sind.*

Daraus ergeben sich fast alle bisher erzielten Ergebnisse als Spezialfälle; ferner können wir aus Satz I auch neue Resultate herleiten, von welchen eins (Satz III) eine Vermutung von ALEXITS ([2] S. 330) widerlegt.

Kennt man den besten Annäherungsgrad einer Funktion $f(x)$ bzw. einer Funktionsklasse, so besagt (3), daß man manigfacherweise summierende Dreiecksmatrizen konstruieren kann, so daß die Mittel $T_n(f, p, \|\alpha\|; x)$ in der Größenordnung des besten Annäherungsgrades approximieren. Das leistet jede positive Matrix, deren Elemente der Bedingung (1) genügen und für welche die Produkte $A_n(N_m, N_{m-2})\left(E_{N_{m-2}}(f)\right)^p$ bezüglich m eine monoton wachsende geometrische Folge bilden.

Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß ein Analogon des Satzes I auch für die nach Orthogonalpolynomen fortschreitenden Entwicklungen unter der Annahme, daß die Gewichtsfunktion im Grundintervall der Forderung

$$0<m\leqq\varrho(x)\leqq M$$

Genüge leistet, gültig bleibt, da diese Systeme die beim Beweis benützten Eigenschaften des trigonometrischen Systems besitzen. (Für die detailierte Technik der Übertragung vgl. z. B. ALEXITS, *Convergence problems of orthogonal series* (Pergamon Press, 1961), S. 206—210 und 295—299.) Ähnlich gilt auch das lokalisierte Analogon des Satzes I. (S. z. B. [2].)

Aus dem Satz I ergeben sich manche Folgerungen, die ein gewisses Interesse zu haben scheinen. Nach einem Satz von JACKSON [6] gilt die Beziehung $E_n(f)=$ $=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$, wenn $f(x)$ überall r-mal differenzierbar und $f^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$ ist. Daraus und aus dem Satz I ergibt sich der

SATZ II. *Ist* $f(x)$ *überall* r*-mal differenzierbar und* $f^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$, *so gelten die Abschätzungen*

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \tag{4}$$

mit beliebigem $p>0$; *ferner gilt für* $\beta>(r+\alpha)p$

$$\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1}|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \tag{5}$$

gleichmäßig.

Im Spezialfall $p=1$ haben ALEXITS und KRÁLIK [4] die Behauptung (4) sogar für allgemeinere Systeme als das trigonometrische bewiesen. Im Spezialfall $\beta=1$

und $r=0$ enthält die Behauptung (5) ein Ergebnis von ALEXITS [2], das schon eine Verallgemeinerung eines Satzes von ALEXITS—KRÁLIK [3] war.

SATZ III. *Ist* $f(x)$ *überall r-mal differenzierbar und* $f^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$, *so gilt im Falle* $(r+\alpha)p<1$ *und beliebiges* $\gamma>0$ *die Beziehung*

$$\sigma_n^{\gamma}|f,p;x| = \left\{\frac{1}{A_n^{(\gamma)}}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\gamma-1)}|s_\nu(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \tag{6}$$

gleichmäßig.

Im Spezialfall $p=1$ und $r=0$ ergibt sich daraus die Lösung einer Frage von ALEXITS [2]. Für $r=0$, $\alpha<1$ und $p=1$ besagt also unser Satz III, daß die starken (C,γ)-Mittel für ein beliebiges $\gamma>0$ mit der Größenordnung der besten Annäherung approximieren, und es ist auch ersichtlich, daß sie für ein beliebiges $p>0$ ebenso gut approximieren wie die Mittel $T_n(f,p,\|1\|;x)$, bei welchen also $\alpha_{nk}=1$ ist.

Wir werden auch zeigen, daß die Bedingung $\beta>(r+\alpha)p$ in (5) notwendig ist, es gilt nämlich der folgende

SATZ IV. *Ist* $f(x)$ *überall r-mal differenzierbar und* $f^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$, *so gelten für* $\beta=(r+\alpha)p$ *nur die Abschätzungen*

$$T_n(f;x) = \left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1}|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p} = O\left(\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}}\right) \tag{7}$$

und

$$\tilde{T}_n(f;x) = \left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1}|\tilde{s}_k(x)-\tilde{f}(x)|^p\right\}^{1/p} = O\left(\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}}\right). \tag{8}$$

Es gibt nämlich solche Funktionen $f_1(x)$ *und* $f_2(x)$, *deren r-te Ableitungen existieren und zu* $\mathrm{Lip}\,\alpha$ *gehören, für welche aber in einzelnen Punkten*

$$T_n(f_1;x)\geqq c\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}} \quad bzw. \quad \tilde{T}_n(f_2;x)\geqq c\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}} \tag{9}$$

mit $c>0$ *gilt.*

Das Übergehen zur konjugierten Funktion hat nur im Fall $\alpha=1$ eine Bedeutung, da die $(C,1)$-Mittel der konjugierten Reihe nur im diesem Fall die konjugierte Funktion $\tilde{f}(x)$ besser approximieren als die $(C,1)$-Mittel der Fourierreihe die Funktion $f(x)$ selbst. Der Satz IV zeigt aber, daß diese Sonderstellung der konjugierten Funktion bei der starken Approximation nicht mehr auftritt. Es zeigt sich also, daß nicht die Klasse Lip 1, sondern der Fall $\beta=(r+\alpha)p$ bei der starken Approximation eine Sonderstellung hat; in [5] spielte der Fall $\alpha=1$ eine besondere Rolle, weil dort eben der Spezialfall $\beta=p=1$ und $r=0$ untersucht wurde.

Ich möchte Herrn Professor G. ALEXITS meinen aufrichtigen Dank für seine wertvollen Ratschläge bei der Fertigstellung dieser Arbeit aussprechen.

§ 1. Beweis des Satzes I

Wir nehmen an, daß es eine Indexfolge $\{N_m\}$ und eine Zahl q' mit der Eigenschaft (1) gibt. Zuerst werden wir die Ungleichung (2) beweisen. Bezeichne $T_n^*(x)$ das bestapproximierende trigonometrische Polynom höchstens n-ter Ordnung. Dann

gilt für $k \geqq n$ offenbar

$$s_k(T_n^*-f;\, x) = T_n^*(x) - s_k(f;\, x).$$

Es gilt also

$$(1.1)\qquad \frac{1}{A_n(N_m, N_{m-2})} \sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m} \alpha_{nk} |s_k(x)-f(x)|^p \leqq$$

$$\leqq \frac{C_p}{A_n(N_m, N_{m-2})} \sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m} \alpha_{nk}\left(|s_k(T_{N_{m-2}}^*-f;\, x)|^p + |T_{N_{m-2}}^*(x)-f(x)|^p\right) \leqq$$

$$\leqq C_p(E_{N_{m-2}}(f))^p + \frac{C_p}{A_n(N_m, N_{m-2})} \sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m} \alpha_{nk} |s_k(T_{N_{m-2}}^*-f;\, x)|^p.$$

Die zweite Summe können wir durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung abschätzen:

$$(1.2)\qquad \sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m} \alpha_{nk} |s_k(T_{N_{m-2}}^*-f;\, x)|^p \leqq$$

$$\leqq \left\{\sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m} (\alpha_{nk})^{q'}\right\}^{1/q'} \left\{\sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m} |s_k(T_{N_{m-2}}^*-f;\, x)|^{p'p}\right\}^{1/p'}.$$

Um die Ungleichung (2) zu beweisen, haben wir nur zeigen, daß für $q \geqq 2$

$$(1.3)\qquad \left\{\sum_{k=l}^{m} |s_k(g;\, x)|^q\right\}^{1/q} \leqq C_q m^{1/q} \max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} |g(x)|$$

gilt, woraus bekanntlich auch für ein beliebiges $0 < q^* \leqq q$

$$(1.4)\qquad \left\{\frac{1}{m}\sum_{k=l}^{m} |s_k(g;\, x)|^{q^*}\right\}^{1/q^*} \leqq C_q \max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} |g(x)|$$

folgt.

Es ist bekannt, daß

$$s_k(g;\, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+t) D_k(t)\, dt \quad \text{mit} \quad D_k(t) = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

ist, also besteht, wenn $I = [-\pi, \pi] - \left(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$ gesetzt wird,

$$(1.5)\qquad \sum_{k=l}^{m} |s_k(g;\, x)|^q \leqq C_1(q) \sum_{k=l}^{m} \left[\left(\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |g(x+t)|\, |D_k(t)|\, dt\right)^q + \left|\int_I g(x+t) D_k(t)\, dt\right|^q\right].$$

Hier ist

$$(1.6)\qquad \sum_{k=l}^{m}\left(\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |g(x+t)|\, |D_k(t)|\, dt\right)^q \leqq 2\sum_{k=l}^{m} \left(\max |g(x)|\right)^q \frac{(k+1)^q}{m^q} \leqq$$

$$\leqq C_2(q) m \left(\max |g(x)|\right)^q,$$

und

$$(1.7)\qquad \sum_{k=1}^{m}\left|\int_I g(x+t)\,D_k(t)\,dt\right|^q \leqq C_3(q)\sum_{k=1}^{m}\left(\left|\int_I g(x+t)\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\sin kt\,dt\right|^q + \left|\int_I g(x+t)\cos kt\,dt\right|^q\right) \equiv C_3(q)(\Sigma_1+\Sigma_2).$$

Nach der Ungleichung von Hausdorff—Yuong gelten die folgenden Abschätzungen mit $r=\dfrac{q}{q-1}$ $(q\geqq 2)$

$$(1.8)\qquad \Sigma_1 \leqq C_4(q)\left(\int_I \frac{|g(x+t)|^r}{|t|^r}\,dt\right)^{q/r} \leqq C_5(q)\,(\max|g(t)|)^q\cdot m$$

und

$$(1.9)\qquad \Sigma_2 \leqq C_6(q)\left(\int_I |g(x+t)|^r\,dt\right)^{q/r} \leqq C_7(q)\,(\max|g(t)|)^q.$$

Also ist (1. 3) nach (1. 5)—(1. 9) bewiesen.

Auf Grund von (1), (1. 2) und (1. 4) besteht dann

$$\sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m}\alpha_{nk}|s_k(T^*_{N_{m-2}}-f;\,x)|^p \leqq \left\{\sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m}(\alpha_{nk})^{q'}\right\}^{\frac{1}{q'}}\left\{\sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m}|s_k|^{pp'}\right\}^{\frac{1}{p'p}\cdot p} \leqq$$

$$\leqq KN_m^{-\frac{1}{p'}}A_n(N_m,N_{m-2})\cdot\left[C_q E_{N_{m-2}}(f)\,N_m^{\frac{1}{pp'}}\right]^p = O(1)\,A_n(N_m,N_{m-2})\,(E_{N_{m-2}}(f))^p.$$

Daraus und aus (1. 1) ergibt sich die Behauptung (2) sofort.

Die Abschätzung (3) folgt aus

$$T_n(x) \leqq \left\{\frac{1}{A_n}\sum_{m=2}^{m_0}\sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m}\alpha_{nk}|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p}$$

auf Grund von (2) unmittelbar.

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

§ 2. Beweis der Sätze II—IV

Beweis des Satzes II. Sei $\alpha_{nk}=k^{\beta-1}$ mit $\beta>(r+\alpha)p$ und $N_m=2^m$. Dann ist die Ungleichung (1) für jedes $q'>1$ erfüllt, für $2^{m_0-1}<n\leqq 2^{m_0}$ und $2\leqq m\leqq m_0$ gilt nämlich

$$\left\{\sum_{k=2^{m-2}+1}^{2^m}(k^{\beta-1})^{q'}\right\}^{\frac{1}{q'}} \leqq 4\left\{2^m\cdot 2^{m(\beta-1)q'}\right\}^{\frac{1}{q'}} = 4\cdot 2^{m\beta}\cdot 2^{-m\frac{1}{p'}} \leqq$$

$$\leqq 4^{1+\beta}2^{-m\frac{1}{p'}}\sum_{k=2^{m-2}+1}^{\min(2^m,n)}k^{\beta-1} = 4^{1+\beta}2^{-m\frac{1}{p'}}A_n(2^m,2^{m-2}).$$

Wir können also den Satz I anwenden, und dann kann man die Beziehung (4) aus

(2) leicht herleiten. Sei $2^{m-1}<2n\leqq 2^m$ und $m_0>m$. Dann gilt nach (2)

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p}\leqq\left\{\frac{4}{2^{(m-2)\beta}}\sum_{k=2^{m-2}+1}^{2^m}k^{\beta-1}|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p}\leqq$$

$$\leqq\left\{\frac{2^{4+2\beta}}{A_n(2^m,2^{m-2})}\sum_{k=2^{m-2}+1}^{2^m}k^{\beta-1}|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p}\leqq K_1 2^{\frac{4+2\beta}{p}}E_{2^{m-2}}(f),$$

woraus die Beziehung (4) nach dem Satz von JACKSON offenbar folgt.

Ferner gilt nach (3) mit $2^{m_0-1}<n\leqq 2^{m_0}$

$$\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n}k^{\beta-1}|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p}\leqq\left\{\frac{K_2}{n^\beta}\sum_{m=2}^{m_0}2^{m\beta}\left(E_{2^{m-2}}(f)\right)^p\right\}^{1/p}\equiv\Sigma_3.$$

Daraus folgt wegen $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$, $\beta>(r+\alpha)p$ und $2^{m_0-1}<n\leqq 2^{m_0}$

$$\Sigma_3\leqq O(1)\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{m=2}^{m_0}2^{m\beta}\frac{1}{2^{m(r+\alpha)p}}\right\}^{1/p}\leqq O(1)\left\{\frac{1}{n^\beta}\frac{2^{m_0\beta}}{2^{m_0(r+\alpha)p}}\right\}^{1/p}=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Damit haben wir auch die Beziehung (5) bewiesen.

BEWEIS DES SATZES III. Sei $\alpha_{nk}=A_{n-k}^{(\gamma-1)}$ mit $\gamma>0$ und $N_m=2^m$. Wählen wir q' derart, daß $(\gamma-1)q'>-1$ erfüllt ist. Wir beweisen, daß die Bedingung (1) besteht. Sei $2^{m_0-1}<n\leqq 2^{m_0}$. Ist $m\leqq m_0-2$, dann gilt

$$\left\{\sum_{k=2^{m-2}+1}^{2^m}(A_{n-k}^{(\gamma-1)})^{q'}\right\}^{1/q'}=O(1)\left\{\sum_{k=2^{m-2}+1}^{2^m}(n^{\gamma-1})^{q'}\right\}^{1/q'}=$$

$$=O(1)2^{m\frac{1}{q'}}n^{\gamma-1}=O(1)2^{-\frac{m}{p'}}2^m n^{\gamma-1}=O(1)2^{-\frac{m}{p'}}\sum_{k=2^{m-2}+1}^{2^m}A_{n-k}^{(\gamma-1)}.$$

Im Fall $m_0\leqq m>m_0-2$ gilt

$$\left\{\sum_{k=2^{m-2}+1}^{\min(2^m,n)}(A_{n-k}^{(\gamma-1)})^{q'}\right\}^{1/q'}=O(1)2^{m\left(\gamma-1+\frac{1}{q'}\right)}=O(1)2^{-\frac{m}{p'}}2^{m\gamma},$$

und da für $m>m_0-2$ die Summe der $A_{n-k}^{(\gamma-1)}$ der Bedingung

$$C_1(\gamma)2^{m\gamma}\leqq\sum_{k=2^{m-2}+1}^{\min(2^m,n)}A_{n-k}^{(\gamma-1)}\leqq C_2(\gamma)2^{m\gamma}$$

genügt, ist (1) für alle $m\leqq m_0$ erfüllt.

Auf Grund der Ungleichung (3) ergibt sich wegen $(r+\alpha)p<1$ $(2^{m_0-1}<n\leqq 2^{m_0})$

$$\sigma_n^\gamma|f,p;x|\leqq\left\{\frac{K_2}{A_n^{(\gamma)}}\left(\sum_{m=2}^{m_0-2}+\sum_{m=m_0-1}^{m_0}\right)\left(\sum_{k=2^{m-2}+1}^{2^m}A_{n-k}^{(\gamma-1)}\right)\left(E_{2^{m-2}}(f)\right)^p\right\}^{1/p}\leqq$$

$$\leqq\left\{\frac{K_3}{A_n^{(\gamma)}}\sum_{m=2}^{m_0-2}2^m n^{\gamma-1}2^{-m(r+\alpha)p}+\frac{K_4}{A_n^{(\gamma)}}\sum_{m=m_0-1}^{m_0}2^{m\gamma}2^{-m(r+\alpha)p}\right\}^{1/p}\leqq$$

$$\leqq\left\{K_5 n^{-1}2^{m_0-2}2^{-(m_0-2)(r+\alpha)p}+K_6 2^{-m_0(r+\alpha)p}\right\}^{1/p}=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Damit haben wir den Satz III bewiesen.

BEWEIS DES SATZES IV. Die Abschätzungen (7) und (8) folgen unmittelbar aus (3) mit $\alpha_{nk}=k^{\beta-1}$ und $N_m=2^m$, weil die Beziehungen $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$ und $E_n(\tilde{f})=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$ wegen $f^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$ bestehen (s. den Beweis des Satzes II).

Ist r eine gerade Zahl, so gilt die Ungleichung (9) in dem Punkt $x_0=0$ für die Funktion

$$f_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^{r+1+\alpha}}$$

bzw. für die Funktion

$$f_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k\alpha}}\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k}\left(\frac{\sin(5\cdot 2^k-l)x}{(5\cdot 2^k-l)^r l}-\frac{\sin(5\cdot 2^k+l)x}{(5\cdot 2^k+l)^r l}\right)$$

und diese Funktionen erfüllen die Bedingung $f_i^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$ $(i=1,2)$. In der Tat besteht wegen $\beta=(r+\alpha)p$

$$T_n(f_1;0)=\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n}k^{\beta-1}\left(\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{r+1+\alpha}}\right)^p\right\}^{1/p}\geqq$$

$$\geqq C_\beta\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}^{1/p}\geqq C'_\beta\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}}.$$

Wenn $4\cdot 2^\mu\leqq n<4\cdot 2^{\mu+1}$ ist, so gilt

$$\tilde{T}_n(f_2;0)\geqq\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\sum_{k=4\cdot 2^\nu+1}^{4\cdot 2^{\nu+1}}k^{\beta-1}|\tilde{s}_k(0)-\tilde{f}(0)|^p\right\}^{1/p}\geqq$$

$$\geqq\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\sum_{k=5\cdot 2^\nu+2^{\nu-1}}^{6\cdot 2^\nu-1}k^{\beta-1}|\tilde{s}_k(0)-\tilde{f}(0)|^p\right\}^{1/p}\equiv\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{\nu=1}^{\mu-1}I_\nu\right\}^{1/p}.$$

Jetzt schätzen wir I_ν ab:

$$I_\nu\geqq\sum_{k=11\cdot 2^{\nu-1}}^{6\cdot 2^\nu-1}k^{\beta-1}\left(\frac{1}{2^{\nu\alpha}}\sum_{l=k-10\cdot 2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\frac{1}{6^r 2^{\nu r}\cdot l}\right)^p\geqq$$

$$\geqq K_\beta 2^\nu 2^{\nu(\beta-1)}\cdot 2^{-\nu(\alpha+r)p}=K_\beta(>0).$$

Daraus ergibt sich für genügend große n

$$\tilde{T}_n(f_2;0)\geqq\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{\nu=1}^{\mu-1}K_\beta\right\}^{1/p}\geqq\frac{1}{2}K_\beta^{1/p}\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}},$$

also ist auch die zweite Ungleichung (9) erfüllt.

Es ist klar, daß die Funktion $f_1^{(r)}(x)$ zur Klasse $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$ gehört, und man kann leicht sehen, daß auch $f_2^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ gilt, wenn α kleiner als 1 ist; es ist

nämlich

$$f_2^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+r/2+1}}{2^{k\alpha}} \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(\frac{\sin(5\cdot 2^k - l)x}{l} - \frac{\sin(5\cdot 2^k + l)x}{l} \right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1+r/2}}{2^{k\alpha}} R_k(x),$$

wegen

$$\max_{-\pi \leqq x \leqq \pi} |R_k(x)| \leqq M \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

besteht also für $4\cdot 2^{\mu} \leqq n < 4\cdot 2^{\mu+1}$

$$\max_{-\pi \leqq x \leqq \pi} |f_2^{(r)}(x) - s_n^{(r)}(x)| \leqq M \sum_{k=\mu}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

folglich gilt $f_2^{(r)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

Im Falle $\alpha = 1$ wurde die Behauptung $f_2^{(r)}(x) \in \mathrm{Lip}\,1$ schon bewiesen (s. in [5] den Beweis des Satzes I).

Ist r eine ungerade Zahl, so erfüllen die Funktionen

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k\alpha}} \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(\frac{\cos(5\cdot 2^k - l)x}{(5\cdot 2^k - l)^r l} - \frac{\cos(5\cdot 2^k + l)x}{(5\cdot 2^k + l)^r l} \right)$$

und

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{r+1+\alpha}}$$

die Ungleichungen (9) im Punkt $x_0 = 0$ und die Bedingung $f_i^{(r)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ $(i = 1, 2)$.

Diese Behauptungen kann man genau so wie die vorangehenden beweisen. Damit haben wir den Satz IV vollständig bewiesen.

BOLYAI INSTITUT
JÓZSEF ATTILA UNIVERSITÄT,
SZEGED

(Eingegangen am 28. September 1964.)

Literaturverzeichnis

[1] G. ALEXITS, Une contribution á la théorie constructive des fonctions, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), S. 149–157.

[2] G. ALEXITS, Sur les bornes de la théorie de l'approximation des fonctions continues par polynômes, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **8** (1963), S. 329–340.

[3] G. ALEXITS–D. KRÁLIK, Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **8** (1963), S. 317–327.

[4] G. ALEXITS–D. KRÁLIK, Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Sci. Math.*, **25** (1965).

[5] G. ALEXITS–L. LEINDLER, Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), S. 27–32.

[6] D. JACKSON, *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*, Dissertation (Göttingen, 1911).

[7] H. LEBESGUE, Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, *Bull. Soc. Math. France*, **38** (1910), S. 184–210.

Printed in Hungary

Technikai szerkesztő: Szabados József

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1964. XII. 20. — Terjedelem: 23 (A/5) ív, — 9 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 64-5616

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be sent with short summary to:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newpapers (Budapest, I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciénces mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction avec court résumé à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Toute correspodance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи вместе с коротким резюме следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, I., Fő utca 32.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные

68,— forint

INDEX

Фидрих, Илона, О перенумерации графов 1
Ádám, A., Bemerkungen zum graphentheoretischen Satze von I. Fidrich 9
Moon, J. W., On extremal graphs containing no wheels 13
Steinig, J., A comparison of two inequalities for the triangle 19
Reid, J. D., On subcommutative rings 23
Alexits, G. und *Leindler, L.,* Über die Approximation im starken Sinne 27
Beaumont, R. A. and *Pierce, R. S.,* Quasi-isomorphism of direct sums of cyclic groups 33
Nöbauer, W., Über die Vollideale und Permutationspolynome eines Galoisfeldes 37
Alexits, G. und *Králik, D.,* Über die Approximation mit starken de la Vallée-Poussinschen Mitteln 43
Aczél, J. and *Hosszú, M.,* Further uniqueness theorems for functional equations 51
Moór, A., Untersuchungen über die oskulierenden Punkträume der metrischen Linienelementräume 57
Tamássy, L., Über autoparallele Flächen tensorial zusammenhängender Räume 75
Kamthan, P. K., On the mean values of an entire function represented by Dirichlet series. II 89
Erdős, P., Hajnal, A. and *Rado, R.,* Partition relations for cardinal numbers 93
Fladt, K., Über eine rektifizierbare nichteuklidische Neilsche Parabel 197
Fladt, K., Einige Merkwürdigkeiten bei speziellen ebenen Kurven der hyperbolischen Geometrie 201
Constantinescu, F., La solution d'une équation fonctionnelle à l'aide de la théorie des distributions 211
Weinert, H. J., Zur Erweiterung algebraischer Strukturen durch Rechtsquotientenbildung... 213
Balázs, J. and *Turán, P.,* Notes on interpolation. IX 215
Schmidt, J. W., Konvergenzbeschleunigung bei monotonen Vektorfolgen 221
Péter, Rózsa, Über die sequenzielle Berechenbarkeit von rekursiven Wortfunktionen durch Kellerspeicher 231
Leindler, L., Über die Approximation im starken Sinne 255

Index: 26.014

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, P. ERDŐS, L. FEJES TÓTH, L. KALMÁR, L. RÉDEI,
A. RÉNYI, B. SZ.-NAGY, K. TANDORI, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS XVI

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1965

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, I., Fő utca 32. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
РЕЗЮМЕ

Том XVI—Вып. 3—4

О ПЕРЕМЕНЕННОМ ГРАФЕ КОНЕЧНОГО ГРАФА

А. С. М. ван Роий (Филадельфия, США) и Х. С. Уильф (Филадельфия, США)

Переменный граф G' конечного графа G, не содержащего петель и многократных ребер, определяется следующим образом.

Каждому ребру G отнесем по новой вершине; эти будут вершины в G'. Две вершины G' соединим ребром в том и только в том случае, если соответствующие ребра в G имеют общую вершину.

По теореме 1, G' изоморфно G тогда и только тогда, если G является регулярным второй степени.

Теоремы 2 и 3 содержат утверждения о поведении последовательности $G, G', G'', \ldots$.

Теорема 4 дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы некоторый граф был переменным графом некоторого другого графа.

О КВАЗИЗАМКНУТЫХ ПРИМАРНЫХ ГРУППАХ

П. Д. Хилл (Атланта, Георгия, США) и С. К. Меджиббен (Лаббок, Техас, США)

Приведенная примарная абелева группа называется квазизамкнутой, если замыкание в p-адической топологии всякой своей сервантной подгруппы снова является сервантной подгруппой. В работе предлагаются различные характеристики квазизамкнутых групп и доказываются некоторые теоремы о них. В частности, доказывается существование квазизамкнутой группы, не являющейся замкнутой p-группой.

МАССОВОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ С ГРУППОВЫМ ПРИХОДОМ. II

Ф. Г. Фостер (Нью-Йорк, США) и А. Г. А. Д. Перера (Нью-Йорк, США)

Лица приходят к системе обслуживания по рекуррентному процессу по группам из r членов. Обслуживание происходит в отрезок времени с экспоненциальным распределением. Через $\xi(t)$, $\xi(\tau_n-0)$ и $\xi(\sigma_n+0)$ обозначаются число ожидающих во время t, в момент перед прибытием n-ой группы и в момент после окончания n-ого обслуживания, соответственно. Устанавливаются соотношения между порождающими функциями предельных распределений упомянутых процессов при $t \to +\infty$, соотв. $n \to +\infty$. Устанавливается также стационарное распределение времени занятости обслуживающей системы. Если считать лица, приходящих в одной и той же группе, одним лицом, времена обслуживания оказываются случайными величинами с гамма-распределением порядка r. В остальной части работы авторы изучают связь между порождающей функцией последней проблемы и порождающими функциями, упомянутыми выше.

ОДНА ХАРАКТЕРИСТИКА СТАНДАРТНЫХ ИДЕАЛОВ

М. Ф. Яновиц (Албюкерк, Нью Мексика, США)

Г. Грецер и Е. Т. Шмидт [5] ввели понятие стандартного идеала, а именно следующим образом. Идеал S структуры L называется стандартным в том и только в том случае, если следующее соотношение между a и b является сравнением в L: $a \equiv b$ тогда и только тогда, если для некоторого $s \in S$ имеем $a \cup b = (a \cap b) \cup s$.

Решаются некоторые проблемы из [5], и исследуется связь между ядрами гомоморфизмов и идеалами структур.

ТРИ ПРИМЕРА НА ХОПФОВСКОЕ СВОЙСТВО В КОММУТАТИВНЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

А. Л. С. Корнер (Оксфорд, Англия)

Группа G называется хопфовской, если все гомоморфизмы G на себя являются автоморфизмами.

В качестве первого примера указывается нехопфовская коммутативная группа с порядком группы автоморфизмов, равным 2. Этим самым решаются проблемы 3 и 4 работы [1].

Второй пример: нехопфовская группа, являющаяся прямой суммой двух хопфовских групп. Третий пример представляет собой усиление второго, поскольку здесь два хопфовские прямые слагаемого изоморфны.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ШТЕЙНГАУЗА

П. Ревес (Будапешт)

Главным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, для которой $M(\xi_i^2) \leqq K$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда найдутся последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots$ и случайная величина η так, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (\xi_{n_k} - \eta)$$

сходится с вероятностью 1, причем $c_1, c_2, \ldots$ — произвольная последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая условию $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$.

ОЦЕНКА СНИЗУ ОСНОВНОГО ТОНА ОДНОСВЯЗНОЙ МЕМБРАНЫ

Е. Макаи (Будапешт)

Рассмотрим в плоскости некоторую односвязную область, граница которой состоит из кусочно аналитических дуг, и обозначим через ϱ радиус наибольшего круга, вписываемого в область, а через Λ — частоту основного тона области, считанной мембраной, закрепленной на границе. Несколько лет тому назад для выпуклых областей И. Херш проверил неравенство $\Lambda \geqq \pi/(2\varrho)$. Если выпуклость области не предполагается, то найдется постоянное C, для которого $\frac{1}{2} \leqq C < \frac{\pi}{2}$ и $\Lambda < C/\varrho$.

НЕЙТРАЛЬНОСТЬ В СЛАБО МОДУЛЯРНЫХ СТРУКТУРАХ

Икбалунниса (Мадрас, Индия)

В статье [2] Грецер и Шмидт поставили следующий вопрос: Являются ли нейтральными все дистрибутивные идеалы в слабо модулярной структуре? Автор показывает с помощью контрпримера, что ответ на этот вопрос отрицателен.

ЛОГИЧЕСКАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ МЕЖДУ ОСНОВНЫМИ ТЕОРЕМАМИ ХАЙОША И ФРОБЕНИУСА—ШТИККЕЛЬБЕРГЕРА В ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Л. Редеи (Сегед)

Мы говорим, что комплекс A некоторой группы является однослойным произведением комплексов $A_1, \ldots, A_k$, если произведения вида $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ $(\alpha_1 \in A_1, \ldots, \alpha_k \in A_k)$ дают именно все элементы из A, один раз каждый. Комплекс называется симплексом, если его элементы составляют последовательность вида $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{e-1}$ $(e \geqq 2)$. (Между симплексами встречаются конечные циклические подгруппы.)

Пусть G — конечная абелева группа. Обозначим через $\mathfrak{S}$ произвольное представление G в виде однослойного произведения, в котором каждый сомножитель является симплексом, через S — один из этих сомножителей, и обозначим через $\hat{S}$ утверждение, по которому S является (циклической) группой. Тогда две основные теоремы, названные в заглавии, можно сформулировать при помощи кванторов $\forall, \exists$ следующим образом: Для всякой заданной группы G

$$\underset{\mathfrak{S}}{\exists} \underset{S}{\forall} \hat{S}, \quad \text{соотв.} \quad \underset{\mathfrak{S}}{\forall} \underset{S}{\exists} \hat{S}.$$

Мы видим, что эти две логические формулы получаются одна из другой с помощью перестановки $\forall \leftrightarrow \exists$. В этом заключается (до сих пор неизвестная) логическая двойственность двух основных теорем, почему их можно называть тоже первой, соответственно второй основной теоремой конечных абелевых групп. Интересно, что использование рассмотренной двойственности в ходе доказательства двух основных теорем, повидимому, невозможно, и что доказательство второй основной теоремы несоразмерно труднее, чем первой. Известно, что обе основные теоремы очень богаты следствиями.

НОВАЯ ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАЙОША

Л. Редеи (Сегед)

Основной проблемой новой теории конечных абелевых групп, начненной Хайошом, является изучение представлений некоторой конечной абелевой группы G в виде однослойных произведений типа

$$G = A_1 \circ \ldots \circ A_k,$$

причем $A_1, \ldots, A_k$ — комплексы из G (см. резюме предыдущей работы). Этой новой теорией занимались уже несколько рабог (см. библиографию), и хотя бы до сих пор решена лишь весьма малая часть возникших вопросов, тем не менее результаты уже делали возможным важные приложения в нескольких, удаленных друг от друга, областях. Настоящая работа имеет двойную цель, а именно обосновать теорию, а затем, в качестве применения, обобщить основную теорему Хайоша в такой значительной мере, что дальнейшее обобщение в некотором смысле оказывается невозможным.

Вообще при изучении упомянутых представлений в виде произведений большую помощь продают (комплексные) характеры группы G. Для такого характера χ и некоторого комплекса A группы G мы полагаем

$$\chi(A) = \sum_{\alpha \in A} \chi(\alpha).$$

Под нуллификатором комплекса A мы понимаем множество $\mathfrak{N}(A)$ всех характеров χ, для которых $\chi(A)=0$. Положим еще $O(H)$ для мощности конечного множества H и χ_1 для главного характера G (откуда $\chi_1(A)=O(A)$). Имеет место следующая

Основная лемма. Для комплексов $A_1, \ldots, A_k$ группы G равенство

$$G=A_1\circ\ldots\circ A_k$$

выполняется тогда и только тогда, если

$$O(G)=O(A_1)\ldots O(A_k),$$

и каждый характер $\chi\neq\chi_1$ группы G принадлежит некоторому из множеств $\mathfrak{N}(A_1), \ldots, \mathfrak{N}(A_k)$.

Таким образом, изучение основной проблемы переносится в теорию поля деления круга, и этот факт представляет собой некоторое развитие в большинстве вопросов. В частности, из основной леммы (далеко не тривиально) вытекает, что в случае $G=A_1\circ\ldots\circ A_k$ выполняется тоже равенство

$$G=A_1^{e_1}\circ\ldots\circ A_k^{e_k},$$

если

$$(e_i, O(A_i))=1 \qquad (i=1, \ldots, k).$$

Очевидно, что достаточно изучать нормированные представления $G=A_1\circ\ldots\circ A_k$, т. е. такие, что $1\in A_1, \ldots, A_k$. После всего этого обобщение основной теоремы Хайоша гласит так:

Если в нормированном представлении $G=A_1\circ\ldots\circ A_k$ каждое из $O(A_1), \ldots, O(A_k)$ является простым числом, то хотя бы один из сомножителей представляет собой группу.

(Если, в частности, все сомножители являются симплексами, то получается именно та часть основной теоремы Хайоша, которая относится к простым симплексам, и известно, что эта часть эквивалентна всей основной теореме Хайоша; наоборот, сформулированное обобщение теряет силу, если не все числа являются простыми.)

Доказательство очень сложно и содержит следующие пять случаев, среди которых III обобщает II, IV обобщает III, а V обобщает (одновременно) I и IV:

I. G является p-группой и $A_1, \ldots, A_k$ — простыми симплексами (Хайош);

II. $O(G)=p^2$ и G не является циклической;

III. G является элементарной p-группой;

IV. G является p-группой;

V. G является произвольной группой.

Самыми тонкими случаями оказываются I и (неожиданно) II. Случаи III и IV, наоборот, не вызывают особенных трудностей. В случае V доказательство снова довольно сложно. При исследовании случаев II, III, IV и V мы опираемся на основную лемму, а при доказательстве в случае I основная лемма не используется. (Однако, словно в качестве возмещения, применение основной леммы приведет к эквивалентному переформулированию первоначальной основной теоремы Хайоша в некоторую теорему покрытия относительно конечных абелевых групп).

О СУММИРУЕМОСТИ ПО ДЕ ЛА ВАЛЛЕ-ПУССЕНУ ОБЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Л. Леиндлер (Сегед)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система функций, ортонормированная на основном интервале (a, b), а $\lambda=\{\lambda_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой $\lambda_{n+1}-\lambda_n\leqq 1$. n-ая частичная сумма ряда (1) обозначается через $s_n(x)$, а n-ое среднее де ла Валле-Пуссена относительно λ того же ряда — через $V_n(\lambda; x)$, т. е.

$$s_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu(x) \quad \text{и} \quad V_n(\lambda; x)=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=n-\lambda_n+1}^{n} s_\nu(x).$$

Мы говорим, что ряд (1) (V, λ)-суммируем в пункте x, если $V_n(\lambda; x)$ сходится при $n \to \infty$.

Очевидно, что этот метод суммирования содержит $(C, 1)$-суммирование, первоначальный метод суммирования де ла Валле-Пуссена, а также простую сходимость.

В настоящей работе доказываются некоторые предложения относительно (V, λ)-суммирования, между прочим следующие.

Теорема 1. Для того, чтобы ортогональный ряд вида (1) был (V, λ)-суммируемым почти всюду на некотором множестве E, необходимо и достаточно, что частичные суммы $s_{\mu_n}(x)$ сходились почти всюду на E, причем $\mu_0 = 1$ и $\mu_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{\mu_k}$.

Теорема 2. Если выполняется условие (2), то ортогональный ряд (1) (V, λ)-суммируем почти всюду на основном интервале.

В последующих теоремах доказывается неусилимость условия (2), затем оценивается порядок роста средних $V_n(\lambda; x)$ и устанавливаются предложения относительно приближения с помощью средных $V_n(\lambda; x)$.

Теорема 7 утверждает, что из условия (2) вытекает справедливость предложения (12) для любой бесконечной последовательности $\{\nu_n\}$ натуральных чисел почти всюду на основном интервале.

Наконец доказывается, что для (V, λ)-суммируемости ряда (1) почти всюду, т. е для сходимости почти всюду ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |V_{n+1}(\lambda; x) - V_n(\lambda; x)|$$

необходимо и достаточно выполнение условия (13).

ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ ЛАГРАНЖЕВА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

О. Киш (Будапешт) и Й. Сабадош (Будапешт)

Обозначим через C множество вещественных функций, непрерывных на отрезке $[-1, +1]$. Если $f(x) \in C$, то $\|f\|$ ее норма, а $\omega(f, t)$ – модуль непрерывности. Пусть $\omega(t)$ есть модуль непрерывности любой фиксированной непостоянной функции из C. Обозначим через $C(\omega)$ множество тех функций $f(x)$ из C, для которых зависящее лишь от $f(x)$ положительное число $a(f)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\omega(f, t) \leqq a(f)\omega(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2).$$

Пусть $\lambda_n(X)$ есть постоянная Лебега, соответствующая матрице узлов Лагранжева интерполирования X, расположенных на отрезке $[-1, +1]$, а $L_n(f, X, x)$-итерполяционный многочлен Лагранжа не выше n-той степени, соответствующий матрице X и функции $f(x)$.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы:

1. Если верхний предел

$$\limsup_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{n^2 \lambda_n(X)}\right) \lambda_n(X) \tag{1}$$

положителен, то существует функция $f(x)$ из $C(\omega)$, для которой верхний предел

$$\limsup_{n \to \infty} \|f(x) - L_n(f, X, x)\| \tag{2}$$

также положителен.

2. Если (1) бесконечен, то для некоторой $f(x) \in C(\omega)$ и (2) бесконечен.

3. Если (1) равен нулю, то существует матрица узлов Лагранжева интерполирования Y такая, что

$$\lambda_n(Y) = \lambda_n(X) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

и для любой $f(x)$ из $C(\omega)$

(4) $$\limsup_{n\to\infty} \|f(x)-L_n(f, Y, x)\|$$

равен нулю.

4. Если

$$\lim_{t=0} \frac{t}{\omega(t)}=0$$

и верхний предел

(5) $$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n(X)$$

положителен, то существует матрица узлов Y и $f(x)\in C(\omega)$ такие, что имеет место (3) и (4) положителен.

5. Существует матрица Y и $f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$ такие, что (4) положителен и

$$\lambda_n(Y)=O(n) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

6. Если (5) бесконечен, то существует матрица Y и $f(x)\in C(\omega)$ такие, что имеет место (3) и (4) бесконечен.

Следствиями этих теорем являются некоторые результаты С. М. Лозинского, П. Эрдёша и П. Турана.

ОЦЕНКА ОБЪЕМА МНОГОГРАННИКА, ЛЕЖАЩЕГО В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Й. Молнар (Будапешт)

Доказывается следующая теорема.

Если каждая из n граней многогранника P_n^3, лежащего в трехмерном пространстве постоянной кривизны, представляет собой равносторонний треугольник стороны a, и расстояние любых двух вершин не меньше a, то

$$P_n^3 \geqq \frac{n-2}{2} P_4^3 .$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда P_n^3 является объединением тетраэдров, вершины которых являются тоже вершинами многогранника P_n^3.

ПРИМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ СТАТЬЕ М. Ф. ЯНОВИЦА

Е. Т. Шмидт (Будапешт)

Примыкая к работе М. Ф. Яновица (A characterisation of standard ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), стр. 289–301) автор показывает, что в структурах не все проективные идеалы являются ядрами гомоморфизмов.

О РАСПОЛОЖЕНИИ ТОЧЕК В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Л. Фейеш Тот (Будапешт)

Как нужно расположить n точек в эллиптической плоскости, чтобы наименьшее расстояние между ними было максимальным? Эта проблема решается для случая $n\leqq 6$.

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СИЛЬНО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

П. Ревес (Будапешт)

Равномерно ограниченная последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называется нормированной сильно мультипликативной системой (*ESMS*), если

$$E(\xi_{i_1}^{r_1}\xi_{i_2}^{r_2}\ldots\xi_{i_k}^{r_k})=E(\xi_{i_1}^{r_1})E(\xi_{i_2}^{r_2})\ldots E(\xi_{i_k}^{r_k}) \qquad (i_1<i_2<\ldots<i_k;\ k=1,2,\ldots)$$

$$E(\xi_i)=0, \quad E(\xi_i^2)=1,$$

причем числа $r_1, r_2, \ldots, r_k$ могут принимать значения 1 и 2. В работе доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ есть *ESMS*, то

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}}<x\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Теорема 2. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ есть *ESMS*, то

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n\log\log n}}\leqq 6\right\}=1.$$

Доказательство теоремы 2 основывается на следующей лемме.

Лемма 1. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ есть *ESMS*, то

$$E\{\sup_{1\leqq j\leqq n}(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_j)^4\}=O(n^2\log^3 n).$$

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ГРАФАХ

Б. Боллобаш (Будапешт)

Обобщенный граф состоит из n вершин и некоторых k-ек вершин. *Полный m-граф* состоит из m вершин и $\binom{m}{k}$ k-ек. Граф называется *насыщенным относительно полных m-графов*, если он не содержит полного m-графа, но после добавления произвольной новой k-ки он уже содержит некоторый полный m-граф.

Обобщенный граф называется *p-критическим*, если для зажимания всех k-ек графа требуются по крайней мере p вершин, но после пропуска любой k-ки остальные k-ки уже зажимаются $p-1$ вершинами.

Доказываются следующие две теоремы.

1. Если некоторый граф с n вершинами является насыщенным относительно полных $(k+l)$-графов, то он содержит по крайней мере $\binom{n}{k}-\binom{n-l}{k}$ k-ки, и существует единственный граф, состоящий из n вершин и $\binom{n}{k}-\binom{n-l}{k}$ k-ек, насыщенный относительно полных $k+l$-графов.

2. Всякий p-критический граф содержит не более $\binom{p+k-1}{k}$ k-ек, и если p-критический граф содержит такое число k-ек, то он состоит из одного полного $(p+k-1)$-графа и некоторых изолированных вершин.

VIII

О ЕДИНСТВЕННОМ РАЗЛОЖЕНИИ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ В МНИМЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЯХ

Эдит Ланци (Будапешт)

Хэйльбронн и Линфут доказали неэлементарным путем, что существуют не более десяти чисел $d<0$, при которых основная теорема теории чисел справедлива для алгебраических целых чисел из $P(\sqrt{d})$ (P — поле рациональных чисел). Девять таких d известны, но в соответствующих доказательствах находится разделение случаев и применяются алгоритм Эвклида, соответственно теоремы из теории идеалов.

В настоящей работе основная теорема теории чисел доказывается элементарно и единообразно для всех девяти d. Из метода автора получается также новая теорема, на основе которого в случае возможного десятого d следует проверить разложения только тех целых чисел из $P(\sqrt{d})$, модуль которых не превосходит некоторое значение, зависящее от d.

THE INTERCHANGE GRAPH OF A FINITE GRAPH

By

A. C. M. van ROOIJ and H. S. WILF* (Philadelphia, USA)

(*Presented by* G. HAJÓS)

Let G be a finite graph. The *interchange* graph G' of G, has a vertex corresponding to each edge of G, two vertices of G' being connected if the corresponding edges of G have a common vertex in G. In reference [1], the questions are raised of when G' can be isomorphic to G, and how to describe the sequence of iterated interchange graphs of a given G. We suppose that G has no loops and no multiple edges.

The *local degree* of a vertex a of a graph G is $\varrho(a)$, the number of edges of G emanating from a. If $v, v', \varepsilon, \varepsilon'$ denote the number of vertices and edges of G and G' respectively, then clearly $v'=\varepsilon$ and

$$\varepsilon'=\sum_{a\in G}\frac{\varrho(a)(\varrho(a)-1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{a\in G}\varrho(a)^2-\frac{1}{2}\sum_{a\in G}\varrho(a)=\frac{1}{2}\sum_{a\in G}\varrho(a)^2-\varepsilon. \tag{1}$$

Now if G is isomorphic to G' then in particular $v'=v, \varepsilon'=\varepsilon$ and so

$$v=v'=\varepsilon=\varepsilon'=\frac{1}{2}\sum_{a\in G}\varrho(a)^2-\varepsilon$$

whence

$$\left\{\frac{1}{v}\sum_{a\in G}\varrho(a)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\frac{4\varepsilon}{v}\right\}^{\frac{1}{2}}=2. \tag{2}$$

But also

$$\frac{1}{v}\sum_{a\in G}\varrho(a)=\frac{2\varepsilon}{v}=2. \tag{3}$$

Thus the positive numbers $\varrho(a)$ $(a\in G)$ have the same arithmetic mean and root mean square, and so they are all equal, their common value being 2 and we have

THEOREM 1. *$G=G'$ if and only if G is regular of degree 2.*

To investigate the sequence of iterated interchange graphs $G, G', G'', \ldots$ we first consider three mutually exclusive (but not exhaustive) families of graphs:

I. All $\varrho(a)=2$ $(a\in G)$

II. All $\varrho(a)\leqq 2$ $(a\in G)$ and some $\varrho(a)<2$.

III. All $\varrho(a)\geqq 2$ $(a\in G)$ and some $\varrho(a)>2$.

* The work of the second author was supported in part by the Argonne National Laboratory.

Now if a' is a vertex of the interchange graph G' of a graph G, suppose a' "comes from" an edge of G whose endpoints are a_1, a_2 in G. Then the local degree of a' in G' is

$$\varrho(a_1)+\varrho(a_2)-2.$$

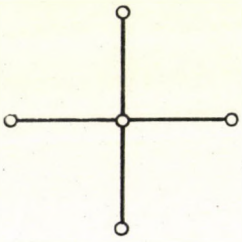
It follows that the graph mapping $G \to G'$ is an endomorphism of each of the classes I, II, III above. Suppose $G \in$ II. Then

$$v' = \varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{a\in G}\varrho(a) < \frac{1}{2}\sum_{a\in G} 2 = v.$$

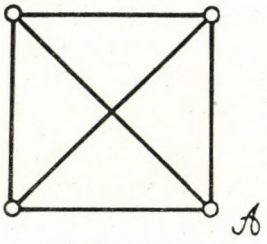
Hence for $G \in$ II, the sequence of graphs $G, G', G'', G''', \ldots$ degenerates to the null graph after finitely many steps.

Similarly if $G \in$ III we find $v' > v$ and so the sequence $G, G', G'', \ldots$ increases without bound.

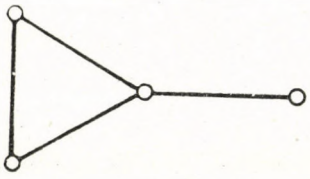
Now let G be arbitrary but connected. If any $\varrho(a) \geqq 4$ then G has the subgraph

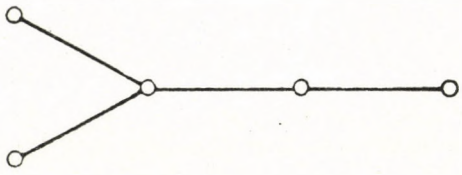


whose interchange

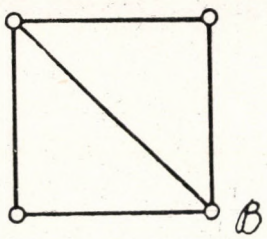


is of type III and so again $G, G', G'', \ldots$ increases without bound. Now suppose all $\varrho(a) \leqq 3$. If any point with $\varrho(a) = 3$ is connected to a point with $\varrho(a) \geqq 2$ then G contains one of the subgraphs

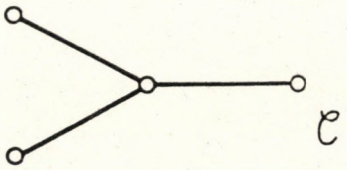




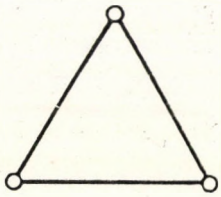
whose first or second interchange graph, respectively is $\mathscr{B}$,



of type III, and we have divergence once more. Finally, if all points with $\varrho(v)=3$ are connected only to points with $\varrho(v)=1$ then G is precisely the graph $\mathscr{C}$



whose interchange



is of type I which is regular of degree 2. We summarize with

THEOREM 2. *The sequence of graphs* $G, G', G'', \ldots$, *where* G *is connected,*

(a) *has ultimately steadily increasing numbers of vertices,*
(b) *is of the form* $G, G, G, G, \ldots$,
(c) *is of the form* $G, H, H, H, H, \ldots$,
(d) *is of the form* $G_1, G_2, \ldots, G_n, \Phi, \Phi, \Phi, \ldots$,
depending on whether

(a)′ G *has at least one* $\varrho(a)\geqq 3$ *and is not the special graph* $\mathscr{C}$,
(b)′ G *is regular of degree* 2,
(c)′ G *is the special graph* $\mathscr{C}$,
(d)′ G *has all* $\varrho(a)\leqq 2$ *and some* $\varrho(a)<2$,
respectively.

Naturally if G is not connected we may apply theorem 2 to each component.

Concerning the rate at which the number of edges grows under the iteration operation, let v_m, ε_m denote the number of vertices and edges in $G^{(m)}$. Then, from

(1), and the inequality

$$\sum_{a \in G} \varrho^2(a) \geqq \frac{1}{v}(\sum \varrho(a))^2 = \frac{4\varepsilon^2}{v}$$

we find that

$$\varepsilon_{m+1} \geqq 2\frac{\varepsilon_m^2}{v_m} - \varepsilon_m$$

and since $v_{m+1} = \varepsilon_m$, we have

$$\frac{v_{m+1}}{v_m} \geqq 2\frac{v_m}{v_{m-1}} - 1.$$

By induction, then,

$$\frac{v_m}{v_{m-1}} \geqq 2^{m-1}\left(\frac{\varepsilon}{v} - 1\right) + 1 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

where $\varepsilon = \varepsilon_0$, $v = v_0$, and finally,

$$v_m \geqq v \prod_{\varkappa=0}^{m-1} \{1 + 2^\varkappa \xi\} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

where

$$\xi = \frac{\varepsilon}{v} - 1.$$

The sign of equality holds in (4) for some $m > 0$ if and only if G is regular, and then it holds for all m. We may suppose $\xi > 0$ without loss of generality. For $m \to \infty$ the right side of (4) is

$$\sim v f\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^m 2^{\frac{1}{2}m(m-1)}$$

where

$$f(x) = \prod_{\varkappa=0}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{2^\varkappa}\right).$$

For a regular graph of local degree ζ, $\xi = \frac{1}{2}\zeta - 1$, so

$$v_m = v \prod_{\varkappa=0}^{m-1} [1 + (\zeta - 2)2^{\varkappa - 1}] \leqq v 2^{\frac{1}{2}m(m-3)} (\zeta - 2)^m f\left(\frac{2}{\zeta - 2}\right).$$

Any graph G that contains more than three vertices can be extended to a complete, hence regular, graph of local degree $v - 1 > 2$, so

$$\log_2 v_m \leqq \frac{1}{2}m^2 + m\left[\log_2(-3) - \frac{3}{2}\right] + \log_2 f\left(\frac{2}{v-3}\right) + \log_2 v. \tag{5}$$

On the other hand, as we remarked before, if G is a graph with property (a)′, then either G' contains $\mathscr{A}$ or G'' contains $\mathscr{B}$. Using (4) for $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ we see that for G either

$$v_m \geqq 4 \prod_{\mu=0}^{m-2}\left(1 + 2^\mu \cdot \frac{1}{2}\right) \geqq \prod_{\mu=0}^{m-2} 2^{\mu+1} = 2^{\frac{1}{2}(m-1)(m-5)}$$

or

$$v_m \geqq 4 \prod_{\mu=0}^{m-3} \left(1 + 2^{\mu} \cdot \frac{1}{4}\right) \geqq \prod_{\mu=0}^{m-3} 2^{\mu-2} = 2^{\frac{1}{2}(m-2)(m-7)}.$$

Combining this with (5) we find:

THEOREM 3. *For any graph G that has property* (a)′ *of theorem* 2,

$$\log_2 v_m = \tfrac{1}{2} m^2 + O(m) \qquad (m \to \infty).$$

Finally we give a necessary and sufficient condition for a graph H to be an interchange graph. The basic idea is the following. We can identify a vertex a of a graph G with the "pencil" of all edges containing a. Then we see that its image in G' is a complete subgraph, which is maximal if $\varrho(a) \geqq 3$. Conversely, every maximal complete subgraph in G' is the image of such a pencil, unless it is a triangle. In the latter case it is the image of either a pencil or a triangle in G. To distinguish these two cases we introduce the concepts of "even" and "odd" triangles.

A triangle D in a graph H is *even* if every vertex of H is joined with either 0 or 2 vertices of D; otherwise D is *odd*. Every triangle contained in a larger complete section of H is odd. The image in H' of any triangle of H is an even triangle in H'.

Before stating our theorem we define a notation: if a, b are vertices of a graph, we write $a \sim b$ for "a and b are joined", and $a \nsim b$ for "a and b are not joined".

The section of a graph G determined by the vertices $a_1, \ldots, a_n$ of G will be written as $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

THEOREM 4. *A graph H is the interchange graph of some graph G if and only if*

(i) *If H contains a section graph isomorphic with $\mathfrak{D}$, then one of its two triangles is even. In other words: If $\{a, b, c\}$ and $\{a, b, d\}$ are odd triangles in H, then $c = d$ or $c \sim d$.*

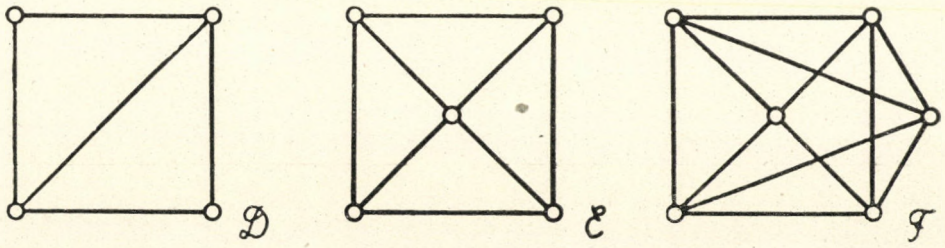
(ii) *H contains no section graph isomorphic with $\mathfrak{C}$.*

PROOF. The "only if" is easily verified. In proving the "if" clearly we may suppose H to be connected. One of the two following statements is true:

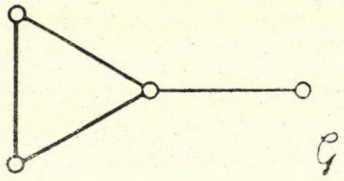
(I) H contains two even adjacent triangles.

(II) If two triangles in H have an edge in common, then one of them is odd.

We will prove that only three graphs have properties (i), (ii), and (I), viz. $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, and $\mathfrak{F}$.



These are the interchange graphs of $\mathcal{G}$, $\mathfrak{D}$, and $\mathcal{A}$, respectively.



After that, for any H that has the properties (i), (ii), and (II), we construct a G such that $H = G'$.

First suppose that H contains two even adjacent triangles $\{a, b, c\}$ and $\{a, b, d\}$. Then $c \not\sim d$, so $\{a, b, c, d\} = \mathfrak{D}$. If H is not $\mathfrak{D}$, it must contain a fifth vertex, e, joined to either a, b, c or d. We may assume that either $e \sim a$ or $e \sim c$.

$e \not\sim c$ implies $e \sim a$, so $e \sim b$ because $\{a, b, c\}$ is even. But $\{a, b, d\}$ is even, so $e \sim a$ and $e \sim b$ together imply $e \not\sim d$. Then $\{a, c, d, e\}$ is isomorphic with $\mathcal{C}$, contrary to our assumption (ii).

Hence, $e \sim c$. Again using the fact that $\{a, b, c\}$ and $\{a, b, d\}$ are even we see that either $e \sim a$ or $e \sim b$, but not both, and $e \sim d$. We may assume $e \sim a$, $e \not\sim b$. Then $\{a, b, c, d, e\} = \mathcal{E}$ and either $\{a, d, e\}$ or $\{a, c, e\}$ is even because of (i).

If H is not $\mathcal{E}$ there must exist a sixth vertex f of H, joined to one of the first five. It is easy to show now that H is necessarily $\mathcal{F}$.

Let G_1 be the class of all maximal complete subgraphs of H that are not even triangles.

Let G_2 be the class of those vertices $x \in H$ that are contained in some $A \in G_1$ and are not joined with any vertex outside A.

Let G_3 be the class of all edges of H that are contained in a unique *and* even triangle.

We define a graph G whose interchange graph is H as follows: The vertices of G are the elements of $G_1 \cup G_2 \cup G_3$; two of these vertices are joined if their intersection is non-void.

We construct a map $f: G' \to H$ as follows: Every $x \in G'$ corresponds to a pair (A, B) of vertices of G, and $A \cap B \neq \emptyset$. We will prove that $A \cap B$ contains only one point, and this point we call $f(x)$. This f turns out to be an isomorphism onto H. To show this we have to prove the following statements:

(α) For all $A, B \in G$ with $A \neq B$, $A \cap B$ contains at most one point. (Definition of f.)

(β) Every $a \in H$ is the intersection of certain $A, B \in G$ with $A \neq B$. (f is onto.)

(γ) These A and B are, except for their order, uniquely determined. (f is one-to-one.)

(δ) If $A_1, A_2, A_3 \in G$ are different, and $a \in A_1 \cap A_2$, $b \in A_2 \cap A_3$, then $a \sim b$. (If $x, y \in G'$ and $x \sim y$, then $f(x) \sim f(y)$.)

(ε) If $A_1, A_2, B_1, B_2 \in G$, $A_1 \neq A_2$, $B_1 \neq B_2$, $\{a\} = A_1 \cap A_2$, $\{b\} = B_1 \cap B_2$ and $a \sim b$, then one of the A_i's is one of the B_j's. (If $x, y \in G'$ and $f(x) \sim f(y)$, then $x \sim y$.)

(α) Suppose $A, B \in G$, $A \neq B$, $\{a, b\} \subset A \cap B$, $a \neq b$. Elements of G_3 are contained in no odd triangles, so $\{a, b\} \notin G_3$, and hence $A, B \in G_1$. Because A is maximal complete it must contain a c that is not in B. Then B must contain a d which is not joined to c. But then $\{a, b, c, d\}$ is a section, isomorphic with $\mathfrak{D}$.

(β) Take $a \in H$. First assume that a is in some even triangle $\{a, b, c\}$. Either $\{a, b\} \in G_3$ or $\{a, b\}$ is part of a triangle $\{a, b, d\}$ with $d \neq c$. Then by II, $\{a, b, d\}$ is odd, so it can be extended to a $C \in G_1$. Because $\{a, b, c\}$ is even, $d \nsim c$, so $c \notin C$.

Hence, there exists an $A \in G$ (which is either $\{a, b\}$ or C) for which $a \in A$, $b \in A$, $c \notin A$. For the same reason there exists a $B \in G$ with $a \in B$, $b \notin B$, $c \in B$. By (α), these A and B cannot have a point $e \neq a$ in common.

Now assume that a is not contained in any even triangle. Let A be a maximal complete section containing a. If a is not joined to any vertex outside A, take $B = \{a\}$. If $a \sim b$ for some $b \notin A$, let B be any maximal complete section containing a and b.

(γ) The proof of this statement is simple but too tedious to give it here. The arguments involved are of the same kind as those used in proving (β).

(δ) This is trivial because every $A \in G$ is complete.

(ε) If $a \sim b$, then by (γ) and by the construction given in (β), $b \in A_1 \cup A_2$, say $b \in A_1$. But for the same reasons $a \in B_1 \cup B_2$, say $a \in B_1$. Then $A_1 = B_1$ because of (α).

Trivially any automorphism of a graph G induces an automorphism of G'. Conversely, every automorphism of G' is induced by an automorphism of G if and only if G' has property II. (This follows easily from the construction given above and from the fact that G is determined by G' unless G' is a triangle.) In this connection the graphs $\mathcal{G}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}$, whose interchange graphs do not have property II, have been mentioned by O. ORE [1] (Fig. 15.4.2).

(Received 16 June 1964)

Bibliography

[1] O. ORE, *Theory of Graphs*, Amer. Math. Co. Coll. Publ. Vol. 38, 1962.

QUASI-CLOSED PRIMARY GROUPS

By

P. D. HILL (Atlanta, Ga., USA) and C. K. MEGIBBEN (Lubbock, Texas, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

1. Introduction. All groups considered in this paper are assumed to be additively written p-primary abelian groups (briefly, p-groups) for some fixed prime p. We follow throughout the notation and terminology of [3]. All topological references are to the p-adic topology.

A reduced p-group will be said to be *quasi-closed* if the closure of each of its pure subgroups is again a pure subgroup. It is evident that quasi-closed p-groups are without elements of infinite height and it is known that closed p-groups are quasi-closed. HEAD [4] has raised the following question: If G is a quasi-closed p-group, does it follow that G is a closed p-group? As we shall see, the answer is negative and those quasi-closed groups which are not closed p-groups seem to have a number of interesting properties.

2. The class of quasi-closed p-groups. In this section, G will always denote a p-group without elements of infinite height and $\bar{B}$ the torsion completion of G, that is, $\bar{B}$ is a closed p-group containing G as a pure subgroup with $\bar{B}/G$ divisible. By a subsocle of G, we shall mean a subgroup of $G[p]$. A subsocle S of G will be said to be non-discrete if $S \cap p^n G \neq 0$ for all positive integers n. If A is a subgroup of G, $\bar{A}$ will denote the closure of A in $\bar{B}$. The closure of A in G is, of course, $\bar{A} \cap G$.

The first property we observe of quasi-closed p-groups which does not in general hold for all p-groups without elements of infinite height (see [6]) is the fact that their subsocles support pure subgroups.

THEOREM 1. *If Q is a subsocle of the quasi-closed p-group G, then there is a pure subgroup H of G such that $H[p] = Q$.*

PROOF. From an observation in [5], we may assume that Q is closed. By a standard construction, there exists a direct sum A of cyclic groups pure in G and such that $A[p]$ is dense in Q. Let H be the closure of A in G. H is then pure and $H[p]$ and Q are equal since each is the closure of $A[p]$.

LEMMA. *If A is an unbounded pure subgroup of G and if H is a direct summand of $\bar{B}$ such that H/A is divisible, then the closure of A in G is pure if and only if $\{G, H\}[p] = \{G[p], H[p]\}$.*

PROOF. Observe that the closure of A in G is just $H \cap G$. Since A is pure in G and A is dense in $H \cap G$, it is not difficult to see that $H \cap G$ is pure in G if and only if it is neat — the point being that $(H \cap G)/A$ equals $(G/A)^1$ and the latter is divisible if neat. But since H is pure in $\bar{B}$, the equality $\{G, H\}[p] = \{G[p], H[p]\}$ is easily shown to be equivalent to the neatness of $H \cap G$ in G.

We can now establish a characterization of quasi-closed p-groups.

THEOREM 2. *G is quasi-closed if and only if $\bar{B}[p]=\{G[p], \bar{S}\}$ whenever S is a non-discrete subsocle of G.*

PROOF. The sufficiency of the condition follows immediately from our Lemma. Suppose then that G is quasi-closed and let S be a non-discrete subsocle of G. Then G has a basic subgroup $A+C$ where $C[p]$ is dense in S. Now let $x\in\bar{B}[p]$ and choose a basic subgroup C' of C such that $C/C'\cong C(p^\infty)$. Let y be an element of order p^2 in C but not in C'. It is then easy to construct a direct sum C'' of cyclic groups pure in G and such that (1) $C''[p]=C'[p]$ and (2) $x+y\in\bar{C}''$. Hence $x\in\{C, \bar{C}''\}\subseteq\{G, \bar{C}''\}$. Since $G\cap\bar{C}''$ must be pure in G, $x\in\{G[p], \bar{C}''[p]\}=\{G[p], \bar{S}\}$.

COROLLARY 1. *If G is quasi-closed and if G' is a pure subgroup of $\bar{B}$ such that $G'[p]=G[p]$, then G' is also quasi-closed.*

COROLLARY 2. *If G is quasi-closed and if G contains a basic subgroup of the unbounded direct summand H of $\bar{B}$, then $\{G, H\}=\bar{B}$.*

PROOF. Since G contains a basic subgroup of H, $\{G, H\}/G\cong H/(H\cap G)$ is divisible and therefore $\{G, H\}$ is pure in $\bar{B}$. We need only observe that $\bar{B}[p]\subseteq\{G, H\}$.

We can now give an example of a quasi-closed p-group which is not a closed p-group. BEAUMONT and PIERCE [1] have established the existence of a p-group G with basic subgroup isomorphic to $\sum_{n=1}^{\infty} C(p^n)$ and such that (i) $\bar{B}/G\cong C(p^\infty)$ and (ii) $H[p]\not\subseteq G$ whenever H is an unbounded direct summand of $\bar{B}$. Clearly this G is not a closed p-group. However, it is easy to see that $\bar{B}[p]=\{G[p], H[p]\}$ whenever H is an unbounded direct summand of $\bar{B}$ and therefore G is quasi-closed. Using Theorem 2, it is not difficult to show that (ii) holds for all quasi-closed p-groups which are not closed p-groups.

A characterization of quasi-closed p-groups less enlightening than Theorem 2 follows.

THEOREM 3. *A p-group G without elements of infinite height is quasi-closed if and only if G/A is a direct sum of a divisible group and a closed p-group whenever A is an unbounded pure subgroup of G.*

PROOF. The sufficiency follows from the easily proven observation that a pure subgroup A has pure closure in G if and only if $(G/A)^1$ is divisible.

Let G be quasi-closed, A an unbounded pure subgroup of G and H a direct summand of $\bar{B}$ such that H/A is divisible. Then the closure of A in G is $H\cap G$ and since this closure is pure, $(H\cap G)/A$ is divisible. We need only show then that $G/(H\cap G)$ is a closed p-group. But by Corollary 2, $G/(H\cap G)\cong\{G, H\}/H=$ $=\bar{B}/H\cong K$, where K is a complementary summand of H in $\bar{B}$.

The next theorem exhibits a striking property of those quasi-closed p-groups which are not closed p-groups.

THEOREM 4. *If G is quasi-closed but not a closed p-group, then G is essentially indecomposable, that is, every direct decomposition of G involves a bounded summand.*

PROOF. Let G be quasi-closed and suppose that $G=H+K$. If H and K are both unbounded, then Theorem 3 implies that both are closed p-groups and therefore that G itself is a closed p-group.

THEOREM 5. *If G is quasi-closed and if H is the closure in G of a pure subgroup, then H is quasi-closed. Moreover, if G is not a closed p-group and H is unbounded, then H is not a closed p-group.*

PROOF. The first assertion of the theorem is obvious. If H is an unbounded closed p-group, then H is an unbounded direct summand of G and Theorem 3 implies that its complement is also a closed p-group, that is, G itself is a closed p-group.

A most peculiar property of those quasi-closed groups which are not closed p-groups is implied by

THEOREM 6. *Let G be quasi-closed and let $B = B_1 + B_2$ be a basic subgroup of G with both B_1 and B_2 unbounded, then G is a subdirect sum of $\bar{B}_1$ and $\bar{B}_2$ with pure kernels.*

PROOF. By Corollary 2, $\{G, \bar{B}_1\} = \bar{B} = \{G, \bar{B}_2\}$, from which it follows that G is a subdirect sum of $\bar{B}_1$ and $\bar{B}_2$. The kernels are, of course, the closures in G of B_1 and B_2.

It is, in fact, easily seen that the property described in Theorem 6 characterizes quasi-closed p-groups.

3. An existence theorem. We now establish for quasi-closed groups which are not closed p-groups an existence theorem of some generality. The method of proof is but a slight modification of a technique used by CRAWLEY [2] and BEAUMONT and PIERCE [1].

THEOREM 7. *If $\bar{B}$ is an unbounded closed p-group having cardinality of the continuum and if A is a countable subgroup of $\bar{B}$, then there exists a pure subgroup G of $\bar{B}$ such that* (i) *$\bar{B}/G$ is divisible,* (ii) *$G \cap A = 0$ and* (iii) *G is quasi-closed.*

PROOF. We may assume that $A \subseteq \bar{B}[p]$. Let $A = \sum_{i=1}^{\infty} \{a_i\}$. We can then find a countable subgroup Q of $\bar{B}[p]$ such that $Q \cap A = 0$, and A is contained in the closure of Q. Since $\bar{B}$ has $2^{\aleph_0}$ unbounded direct summands with countable basic subgroups (each is determined uniquely by some countable subgroup of $\bar{B}$), we can index these unbounded direct summands H_λ by ordinals $\lambda < \Omega$, where Ω is the first ordinal of cardinality $2^{\aleph_0}$. Suppose that $\beta < \Omega$ and that for each $\lambda < \beta$ and $i < \omega$ we have chosen $x_{\lambda,i}$ in $H_\lambda[p]$ such that the subgroup T_β genareted by Q and the $a_i - x_{\lambda,i}$ satisfies the following conditions:

$$T_\beta \cap A[p] = 0 \quad \text{and} \quad T_\beta = Q + \sum_{\lambda<\beta} \sum_{i=1}^{\infty} \{a_i - x_{\lambda,i}\}.$$

Then $|T_\beta + A[p]| = \aleph_0 + |\beta| \aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ and since $|H_\beta[p]| = 2^{\aleph_0}$, there is an $x_{\beta,1}$ in $H_\beta[p]$ but not in $T_\beta + A[p]$. Then $\{a_1 - x_{\beta,1}\} \cap T_\beta = 0$ and $(T_\beta + \{a_1 - x_{\beta,1}\}) \cap \cap A[p] = 0$.

A similar cardinality argument yfelds the existence of the desired $x_{\beta,i}$ for all $i < \omega$, and we conclude that there exists for each $\lambda < \Omega$ and each $i < \omega$ an $x_{\lambda,i} \in H_\lambda[p]$ such that the subgroup T generated by Q and the $a_i - x_{\lambda,i}$ intersects $A[p]$ trivially

and has the direct decomposition

$$T = Q + \sum_{\lambda<\Omega} \sum_{i=1}^{\infty} \{a_i - x_{\lambda,i}\}.$$

We can then choose a subgroup S of $\bar{B}[p]$ such that $T \subseteq S$, S is dense in $\bar{B}[p]$ and S is maximal in $\bar{B}[p]$ with respect to $S \cap A = 0$. Then let G be a subgroup of $\bar{B}$ which is maximal with respect to $G[p] = S$. Since S is dense in $\bar{B}[p]$, G is pure in $\bar{B}$ and $\bar{B}/G$ is divisible (see [5]). Since clearly $G \cap A = 0$, it remains only to show that G is quasi-closed. We need only observe that if H is an unbounded direct summand of $\bar{B}$, then $H_\lambda \subseteq H$ for some λ and

$$\{G[p], H[p]\} \supseteq \{G[p], H_\lambda[p]\} = \bar{B}[p].$$

A slight modification of the proof of the preceding theorem yields

THEOREM 8. *If K is an unbounded quasi-closed p-group having cardinality of the continuum and if A is a countable subgroup of K, then there exists a pure subgroup G of K such that* (i) *K/G is divisible*, (ii) *$G \cap A = 0$ and* (iii) *G is quasi-closed.*

There remain a number of unanswered questions about quasi-closed p-groups. For example: Is there a quasi-closed p-group which is not a closed p-group having arbitrarily large final rank? If G is quasi-closed and has a countable basic subgroup, can $\bar{B}/G$ be uncountable? If G is quasi-closed and G' is a pure subgroup of $\bar{B}$ such that $G'[p] = G[p]$, does it follow that $G \cong G'$?

Finally, the authors wish to express their indebtedness to Professors BEAUMONT and PIERCE for a pre-print of [1].

(Received 7 July 1964)

Bibliography

[1] R. BEAUMONT and R. PIERCE, Some invariants of p-groups, *Michigan Math. J.*, **11** (1964), pp. 137–149.

[2] P. CRAWLEY, An infinite primary abelian group without proper isomorphic subgroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), pp. 463–467.

[3] L. FUCHS, *Abelian groups* (Budapest, 1958).

[4] T. HEAD, Remarks on a problem in primary abelian groups, *Bull. Soc. Math. France*, **91** (1963), pp. 109–112.

[5] P. HILL and C. MEGIBBEN, Minimal pure subgroups in primary groups, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964), pp. 251–257.

[6] C. MEGIBBEN, A note on a paper of Bernard Charles, *Bull. Soc. Math. France*, **91** (1963), pp. 453–454.

QUEUES WITH BATCH ARRIVALS. II*

By

F. G. FOSTER and A. G. A. D. PERERA (New York, USA)

(*Presented by* A. RÉNYI)

1. Introduction. We continue in this paper the study of queues with batch arrivals undertaken by FOSTER [1]. The model we consider, which we denote by $G^r/E_1/1$, is such that units arrive in batches of fixed size r at the instants of a renewal process with an arbitrary inter-arrival time distribution, $F(x)$, and are served at a single service channel one at a time with exponential service-time distribution of mean $1/\mu$. It will be convenient to take the mean of $F(x)$ as k/λ and to define ϱ as the ratio of the mean service time to the mean inter-arrival time, so that $\varrho = \lambda/k\mu$. (In [1] the mean of $F(x)$ was taken as $1/\lambda$ and ϱ was defined as λ/μ, so that basically the definition of ϱ is unchanged in the present paper.) The traffic intensity is thus $\tau = r\varrho$ and we assume $\tau < 1$. Define the Laplace transform

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x).$$

Let $\xi(t)$ denote the number of units in the system including the unit undergoing service (if any) at the instant t. We say that the system is in state j at time t if $\xi(t) = j$. For definiteness, we take $\xi(0) = 0$, and assume that an inter-arrival time starts at $t = 0$. Let τ_n be the instant of arrival of the nth batch, and define

$$p_j(n) = \mathbf{P}[\xi(\tau_n - 0) = j].$$

Then it was shown in [1] that the limiting probabilities

$$p_j = \lim_{n \to \infty} p_j(n)$$

exist, and that their generating function, $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$, is given by

$$P(z) = \prod_{m=1}^{r} \left(\frac{1 - \gamma_m}{1 - \gamma_m z} \right)$$

where $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ are the roots inside the unit circle of the equation,

$$\varphi\{\mu(1-z)\} = z^r.$$

* Research supported in part by National Science Foundation Grant NSF-GP-2074 at Columbia University.

2. Queue size after a departure. Let $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ denote the sequence of instants at which units depart from the system. Define

$$p_j^+(n) = \mathbf{P}[\xi(\sigma_n + 0) = j].$$

Clearly $p_j^+(n)$ is zero unless $j+n$ (number of arrivals up to the instant of the nth departure) is a multiple of r, i. e.,

$$p_j^+(n) \begin{cases} = 0 & \text{if} \quad n \neq sr - j \\ \neq 0 & \text{if} \quad n = sr - j. \end{cases} \tag{1}$$

It follows that the ordinary limit of $p_j^+(n)$ as $n \to \infty$ does not exist. We therefore consider the Césaro limit

$$p_j^+ = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_j^+(m). \tag{2}$$

In view of the relations (1), it is easy to show that this Césaro limit, if it exists, is also the Césaro limit of the sequence,

$$\frac{1}{r} p_j^+(sr - j) \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

We shall show in Theorem 1 below that the ordinary limit of this sequence exists. It then will follow that the Césaro limit (2) exists and

$$p_j^+ = \frac{1}{r} \lim_{s \to \infty} p_j^+(sr - j). \tag{3}$$

Define

$$P^+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^+ z^j.$$

3. Queue size at a random instant. Now let us introduce a third probability distribution,

$$p_j^*(t) = \mathbf{P}[\xi(t) = j], \tag{4}$$

and define

$$p_j^* = \lim_{t \to \infty} p_j^*(t). \tag{5}$$

The existence of these limits (5) is proved in Theorem 2 below. Define

$$P^*(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^* z^j.$$

4. Discussion of the main results. In this paper, we shall examine the relationships between the three distributions introduced above, $P(z)$, $P^+(z)$ and $P^*(z)$, and establish that

$$P^+(z) = \frac{1}{r} \frac{1 - z^r}{1 - z} P(z) \tag{6}$$

and

$$P^*(z) = 1-\tau+\tau z P^+(z). \tag{7}$$

These comprise Theorems 1 and 2 of the next section. The methods of proof are similar to those used in our paper [3]. KHINTCHINE's method [4] is used to prove Theorem 2, although it can be proved by several other methods (see [5]).

In this section we give intuitive interpretations of (6) and (7). For the special case of $r=1$, we may note first that (6) becomes identical with the result for the special case $k=1$ in our paper [3], and is proved in the same way.

Now for general r, p_j is the proportion of arriving batches that find j units present, and so if M_j denotes the number of transitions $j \to j+r$ over a given period of time, then asymptotically, over a long period,

$$p_j = \frac{M_j}{\sum_{i=0}^{\infty} M_i}.$$

Similarly if N_j denotes the number of transitions $j+1 \to j$ then asymptotically,

$$p_j^+ = \frac{N_j}{\sum_{i=0}^{\infty} N_i}.$$

Now asymptotically,

$$N_j = \begin{cases} M_0 + M_1 + \ldots + M_j & (j<r) \\ M_{j-r+1} + M_{j-r+2} + \ldots + M_j & (j \geqq r), \end{cases}$$

the two sides differing at most by one. Thus

$$\Sigma N_j = r \Sigma M_j$$

and so

$$p_j^+ = \begin{cases} \dfrac{1}{r}(p_0 + p_1 + \ldots + p_j) & (j<r) \\ \dfrac{1}{r}(p_{j-r+1} + p_{j-r+2} + \ldots + p_j) & (j \geqq r). \end{cases}$$

By taking generating functions, we get the result (6). We may remark that the argument makes no assumptions about the type of distributions, and so (6) should hold for the general model $G^r/G/1$, in which the input and output are arbitrary.

An intuitive interpretation of (7) can be given as follows. On account of the characteristic property of the exponential distribution, we can suppose that service goes on uninterrupted whether or not units are present to be served and a unit departs at the end of a service when there is at least one present, otherwise nothing happens and a fresh service starts. Accordingly, we may refer to the service end-points as real or virtual. With this interpretation service end-points form a Poisson process, or in other words services (real or virtual) end at random. Therefore, an instant chosen at random may be considered as a service end-point (real or virtual). Now with traffic intensity τ, the probability that no units are present at a random

instant is $1-\tau$. The service end-point chosen is thus virtual and

$$p_0^* = 1-\tau. \tag{8}$$

If on the other hand the system is not empty (with probability τ), the random instant chosen is a real service end-point, and the queue-size is about to be reduced by one. Thus

$$p_j^* = \tau p_{j-1}^+ \qquad (j>0). \tag{9}$$

Taking generating functions, we obtain (7) from (8) and (9).

5. Proofs of the main results. We now prove these results more rigorously. Let

$$\xi_n = \xi(\tau_n - 0), \quad \xi_n^+ = \xi(\sigma_n + 0).$$

THEOREM 1. *If* $\tau<1$, *the limits* p_j^+ *defined by* (3) *exist and*

$$P^+(z) = \frac{1}{r}\frac{1-z^r}{1-z}P(z).$$

PROOF. If $j<r$, then

$$\xi_{nr-j}^+ = j \Leftrightarrow \sigma_{nr-j} < \tau_{n+1} \Leftrightarrow \xi_{n+1} \leqq j.$$

Therefore,

$$p_j^+(nr-j) = \mathbf{P}[\sigma_{nr-j} < \tau_{n+1}] = \sum_{i=0}^{j} p_i(n+1). \tag{10}$$

If $j \geqq r$, say $j = sr+m$ $(s>0, m<r)$, then

$$\xi_{nr-j}^+ = ir+m \ (i=0, 1, \ldots, s) \Leftrightarrow \sigma_{nr-j} < \tau_{n+1} \Leftrightarrow \xi_{n+1} \leqq j.$$

Therefore,

$$\sum_{i=0}^{s} p_{ir+m}^+(nr-j) = \mathbf{P}[\sigma_{nr-j} < \tau_{n+1}] = \sum_{i=0}^{j} p_i(n+1). \tag{11}$$

Now in [1] it was shown that when $\tau<1$ the right hand sides of (10) and (11) tend to finite limits as $n\to\infty$. Therefore $\lim_{n\to\infty} p_j^+(nr-j)$ in (10) exists, and moreover by taking $s=1, 2, \ldots$ in succession in (11), we see that the limits of the individual probabilities in the summation on the left hand side of (11) also exist. Thus we have verified (3) for all j, and we have from (10)

$$p_j^+ = \frac{1}{r}(p_0+p_1+\ldots+p_j) \qquad (j<r) \tag{12}$$

and from (11),

$$\sum_{i=0}^{s} p_{j-ir}^+ = \frac{1}{r}(p_0+p_1+\ldots+p_j) \qquad (j \geqq r). \tag{13}$$

Replacing j by $j-r$ in (13) and subtracting, we obtain

$$p_j^+ = \frac{1}{r}(p_{j-r+1} + \cdots + p_j) \qquad (j \geqq r). \tag{14}$$

Theorem 1 is now immediate from (12) and (14) on taking generating functions.

THEOREM 2. *If $\tau < 1$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then the limits p_j^* defined by* (5) *exist and*

$$P^*(z) = 1 - \tau + \tau z \frac{1}{r} \frac{1-z^r}{1-z} P(z). \tag{15}$$

PROOF. We first prove the existence of the limits p_j^*. Denote the sequence of instants at which batches arrive to find the server idle by $t_1, t_2, \ldots$. This is a subsequence of the sequence $\{\tau_n\}$ of all arrival instants. Now $\{t_n\}$ is seen to be a renewal process, i. e. the random variables, $t_{n+1} - t_n$, $n = 1, 2, \ldots$, form a sequence of identically distributed independent positive random variables. Denote the common distribution function by $R(x)$, and let its nth convolution be $R_n(x)$. Now define

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(x).$$

Then $M(x)$ is the expected number of renewals in an interval x.

Define

$$G_j(x) = \mathbf{P}[\xi(t_n + x) = j,\ t_{n+1} - t_n > x],$$

the joint probability that a renewal interval exceeds x and that the queue size is j at time x after the last renewal. (Since $\{t_n\}$ is a renewal process, $G_j(x)$ does not depend on n.) We have then

$$1 - R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(x).$$

Now conditional upon the last renewal occurring at time x, the probability of a queue size of j at time $t > x$ is $G_j(t-x)$. Since the probability that the nth renewal occurs in $(x, x+dx)$ is $dR_n(x)$, we have by summing over all possibilities,

$$p_j^*(t) = G_j(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t G_j(t-x)\, dR_n(x) = G_j(t) + \int_0^t G_j(t-x)\, dM(x).$$

We may now apply a basic renewal theorem (cf. [6] p. 227) to establish the existence of these limits as $t \to \infty$. For this purpose, we have only to show that (i) $R(x)$ has a finite mean and (ii) $G_j(x)$ is of bounded variation and integrable in $(0, \infty)$.

Now in section 1, the limiting probability, p_0, that an arriving batch finds the server idle was seen to exist, and moreover $p_0 > 0$. Therefore the expected number of arrivals between any two successive renewal instants, t_n, t_{n+1}, has the finite value $1/p_0$. Since the mean inter-arrival time of batches is k/λ, it follows that the mean renewal interval is $k/(\lambda p_0) < \infty$, and this is the mean of $R(x)$.

Secondly, we have

$$0 \leqq G_j(x) \leqq 1 - R(x) \leqq 1,$$

and $1-R(x)$ is integrable in $(0, \infty)$, since we have just shown that $R(x)$ has a finite mean. Moreover, $1-R(x) \to 0$ as $x \to \infty$. The existence of the limits (5) is now established provided $R(x)$ is not a lattice distribution, which it is not since $F(x)$ is assumend not to be lattice.

We may obtain the formula (15) for the limits in the following manner. The limit p_j^* is the probability that the queue size is j at an arbitrarily chosen instant of time. We shall relate the queue size at this instant to that just before the preceding instant of arrival. In order to do this we need the distribution of the time interval, u, between these two instants. By an argument similar to that used by KHINTCHINE [4], or as a consequence of a known renewal theorem (cf. [6] p. 227) we get, provided $F(x)$ is not a lattice distribution,

$$\mathbf{P}[x < u \leqq x+dx] = \frac{\lambda}{k}\{1-F(x)\}dx.$$

Now let v^* denote the number of services (real or virtual) terminating during the interval u, and define

$$n_j = P[v^* = j],$$

$$N(z) = \sum_{j=0}^{\infty} n_j z^j.$$

Then we have

$$n_j = \frac{\lambda}{k}\int_0^{\infty} e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^j}{j!}\{1-F(x)\}dx.$$

Therefore,

$$N(z) = \varrho\frac{1-K(z)}{1-z}, \tag{16}$$

where

$$K(z) = \varphi\{\mu(1-z)\}.$$

If ξ^* is the queue size at the arbitrarily chosen instant, and ξ the queue size just before the preceding instant of arrival, we have

$$\xi^* = \max(\xi + r - v^*, 0).$$

Since u and ξ are clearly independent, so also are v^* and ξ. Therefore taking generating functions, we have

$$P^*(z) = P(z)z^r N\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{j=0}^{\infty} d_j(1-z^{-j}),$$

where

$$d_j = \mathbf{P}[\xi + r - v^* = -j].$$

By (16), we have now

$$P^*(z) = \varrho P(z)\frac{z^{r+1}}{z-1} - \frac{\varrho z}{z-1}z^r P(z)K\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{j=0}^{\infty} d_j(1-z^{-j}).$$

But by Theorem 1 of [1],

$$z^r P(z)K\left(\frac{1}{z}\right) = P(z) - \sum_{j=0}^{\infty} c_j(1-z^{-j}).$$

Therefore

$$P^*(z)=\varrho P(z)\frac{z^{r+1}}{z-1}-\frac{\varrho z}{z-1}\{P(z)-\sum c_j(1-z^{-j})\}+\sum d_j(1-z^{-j})=$$

$$=\varrho z\frac{1-z^r}{1-z}P(z)+\varrho\sum c_j\frac{1-z^{-j}}{1-z^{-1}}+\sum d_j(1-z^{-j}).$$

On the left hand side of this equation is a power series with non-negative powers. Therefore all terms on the right hand side with negative powers must cancel out leaving at most a constant. Thus

$$P^*(z)=C+\varrho z\frac{1-z^r}{1-z}P(z).$$

Normalizing, we obtain Theorem 2.

As an immediate corollary to Theorems 1 and 2 we have the result (7).

EXAMPLE 1. If the inter-arrival times are exponentially distributed, with

$$F(x)=1-e^{-\lambda x},$$

it was shown in [1] that

$$P(z)=\frac{(1-\tau)(1-z)}{1-z\left\{1+\frac{\tau}{r}(1-z^r)\right\}}.$$

Hence by Theorems 1 and 2 we have,

$$P^+(z)=\frac{1}{r}\frac{(1-\tau)(1-z^r)}{1-z\left\{1+\frac{\tau}{r}(1-z^r)\right\}}$$

and

$$P^*(z)=1-\tau+\tau z\frac{1}{r}\frac{1-z^r}{1-z}\frac{(1-\tau)(1-z)}{1-z\left\{1+\frac{\tau}{r}(1-z^r)\right\}}=\frac{(1-\tau)(1-z)}{1-z\left\{1+\frac{\tau}{r}(1-z^r)\right\}}.$$

We thus note that $P^*(z)=P(z)$ in this case. That this should be so when the input is Poisson is intuitively reasonable, since then arrivals are at random (cf. [3]).

EXAMPLE 2. If the inter-arrival times have the Erlang distribution,

$$F(x)=1-\sum_{j=0}^{k-1}e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^j}{j!},$$

it was shown in [1] that

$$P(z)=\prod_{m=1}^{r}\frac{1-\gamma_m}{1-\gamma_m z}$$

where the γ_m are the roots inside the unit circle of the equation,

$$\left(1+\frac{1-z}{k\varrho}\right)^{-k}=z^r.$$

It is easy to show that these roots are distinct. (See [3].) Therefore

$$P(z)=\sum_{m=1}^{r}\frac{D_m}{1-\gamma_m z}, \tag{17}$$

where

$$\frac{D_m}{1-\gamma_m}=\prod_{i\neq m}\frac{1-\gamma_i}{1-\gamma_i/\gamma_m}. \tag{18}$$

Thus

$$p_j=\sum_{m=1}^{r}D_m\gamma_m^j.$$

From (12), (14), (8) and (9) we now obtain

$$p_j^{+}=\begin{cases}\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{m=1}^{r}D_m\frac{1-\gamma_m^{j+1}}{1-\gamma_m} & (j<r)\\[2ex] \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{m=1}^{r}D_m\gamma_m^{j-r+1}\frac{1-\gamma_m^{r}}{1-\gamma_m} & (j\geqq r),\end{cases} \tag{19}$$

and

$$p_j^{*}=\begin{cases}1-r & (j=0)\\[2ex] \varrho\displaystyle\sum_{m=1}^{r}D_m\frac{1-\gamma_m^{j}}{1-\gamma_m} & (0<j<r)\\[2ex] \varrho\displaystyle\sum_{m=1}^{r}D_m\gamma_m^{j-r}\frac{1-\gamma_m^{r}}{1-\gamma_m} & (j\geqq r).\end{cases} \tag{20}$$

6. The occupation time. The occupation time at any instant is the total time it will take the server to serve all the units present at that instant. Denote the occupation time at time t by $\eta(t)$. We shall consider the limiting distribution,

$$W^{*}(x)=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}[\eta(t)\leqq x].$$

Define

$$\Omega^{*}(z)=\int_0^{\infty}e^{-sx}dW^{*}(x).$$

THEOREM 3. *The limiting distribution $W^{*}(x)$ exists and is given by*

$$\Omega^{*}(s)=P^{*}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right). \tag{21}$$

PROOF. At any time t each unit present has a service time whose distribution is exponential with Laplace transform $\dfrac{\mu}{\mu+s}$. On account of the characteristic property of the exponential distribution, the unexpired service time of the unit

under service has the same distribution. Therefore

$$\mathbf{P}[\eta(t)\leqq x]=\sum_{j=0}^{\infty}p_j^*(t)\left\{1-\sum_{i=0}^{j-1}e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^i}{i!}\right\},$$

where $p_j^*(t)$ is defined by (4). Since $\lim_{t\to\infty}p_j^*(t)=p_j^*$ exists, it follows that $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}[\eta(t)\leqq x]$ exists, and we have, by taking Laplace transforms,

$$\Omega^*(s)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j^*\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^j=P^*\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right).$$

7. Relationship between $G^r/E_1/1$ and $G/E_r/1$. In the batch arrival system $G^r/E_1/1$ let us regard the arriving batches as retaining their identity in the system: a batch is present until all its r units have been served. Then the total service time of a batch has an E_r distribution. Thus $G/E_r/1$ becomes the model in which the batches are the units. If $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ are the instants of departure in $G^r/E_1/1$, then $\sigma_r, \sigma_{2r}, \ldots$ are the instants of departure in $G/E_r/1$. The instants of arrival, $\tau_1, \tau_2, \ldots$ are the same in both models.

Denote by $\zeta(t)$ the number of units (i. e., previously called batches) present at time t in the system $G/E_r/1$, including the unit under service (if any). Then we have

$$\zeta(t)=\left[\frac{\xi(t)+r-1}{r}\right] \tag{22}$$

where $[x]$ denotes the integral part of x. We shall consider the three distributions related to the system $G/E_r/1$:

(i) $q_j(n)=\mathbf{P}[\zeta(\tau_n-0)=j]$

(ii) $q_j^*(t)=\mathbf{P}[\zeta(t)=j]$

(iii) $q_j^+(n)=\mathbf{P}[\zeta(\sigma_{nr}+0)=j]$.

(i) From (22) we have at the instant $t=\tau_n-0$,

$$q_j(n)=\begin{cases}p_0(n) & (j=0)\\ \sum_{m=0}^{r-1}p_{jr-m}(n) & (j>0).\end{cases}$$

The probabilities on the right hand side are known to converge as $n\to\infty$. Therefore

$$q_j=\lim_{n\to\infty}q_j(n)\qquad(j=0, 1, 2, \ldots)$$

exists and

$$q_j=\begin{cases}p_0 & (j=0)\\ \sum_{m=0}^{r-1}p_{jr-m} & (j>0).\end{cases} \tag{23}$$

Define

$$Q(z)=\sum_{j=0}^{\infty}q_jz^j.$$

We note here that in [1] the relationship between the generating functions $Q(z)$ and $P(z)$ was derived in the form:

$$Q(z)=\frac{1-z}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{P(\omega^j z^{1/r})}{1-\omega^j z^{1/r}} \tag{24}$$

where $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r$ are the rth roots of unity.

(ii) Again from (22) we have

$$q_j^*(t)=\begin{cases} p_0^*(t) & (j=0) \\ \sum_{m=0}^{r-1} p_{jr-m}^*(t) & (j>0). \end{cases}$$

By Theorem 2, the probabilities on the right hand side converge as $t\to\infty$. Therefore

$$q_j^*=\lim_{t\to\infty} q_j^*(t) \qquad (j=0, 1, 2, \ldots)$$

exists and

$$q_j^*=\begin{cases} p_0^* & (j=0) \\ \sum_{m=0}^{r-1} p_{jr-m}^* & (j>0). \end{cases} \tag{25}$$

Define

$$Q^*(z)=\sum_{j=0}^{\infty} q_j^* z^j.$$

By the same argument that was used in [1] we can obtain the relationship between $Q^*(z)$ and $P^*(z)$:

$$Q^*(z)=\frac{1-z}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{P^*(\omega^j z^{1/r})}{1-\omega^j z^{1/r}}. \tag{26}$$

We shall not however use this formula in the present paper.

(iii) From (22) we have at the instant $t=\sigma_{nr}+0$,

$$q_j^+(n)=\begin{cases} p_0^+(nr) & (j=0) \\ \sum_{m=0}^{r-1} p_{jr-m}^+(nr) & (j>0). \end{cases}$$

But by (1) this reduces to

$$q_j^+(n)=p_{jr}^+(nr) \qquad (j=0, 1, 2, \ldots).$$

Now by Theorem 1, we know that the limits

$$p_j^+=\frac{1}{r}\lim_{n\to\infty} p_j^+(nr-j)$$

exist. Therefore the limits

$$q_j^+=\lim_{n\to\infty} q_j^+(n)$$

exist, and we have

$$q_j^+ = rp_{jr}^+ \qquad (j=0, 1, 2, \ldots). \tag{27}$$

But from (12) and (14),

$$p_0^+ = \frac{1}{r} p_0, \quad p_{jr}^+ = \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{r-1} p_{jr-m} \qquad (j>0).$$

Therefore

$$q_j^+ = \begin{cases} p_0 & (j=0) \\ \sum_{m=0}^{r-1} p_{jr-m} & (j>0). \end{cases}$$

We now have by (23),

$$q_j^+ = q_j \qquad (j=0, 1, 2, \ldots),$$

i. e.,

$$Q^+(z) = Q(z). \tag{28}$$

This is consistent with the general result indicated in our paper [3], that for the general model $G/G/1$ the queue size distribution at instants just before arrivals should be identical with that at instants just after departures.

We may also remark that the occupation time distribution at any arbitrary instant for the model $G/E_r/1$ is identical with that for the batch arrival model and hence is given by (21).

EXAMPLE 3. If the inter-arrival times have the exponential distribution,

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

then by Example 1 and (23), (25), (28) and (24),

$$Q(z) = Q^*(z) = Q^+(z) = \frac{1-z}{r} \sum_{j=1}^{r} \frac{P(\omega^j z^{1/r})}{1-\omega^j z^{1/r}} =$$

$$= \frac{(1-\tau)(1-z)}{r} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{1-\omega^j z^{1/r}\{1+\varrho(1-z)\}} = \frac{(1-\tau)(1-z)}{1-z\left\{1+\frac{\tau}{r}(1-z)\right\}^r},$$

which is the known result for $E_1/E_r/1$ for traffic intensity τ. (See Example 3 in [1].)

EXAMPLE 4. *The model* $E_k/E_r/1$. If the inter-arrival times have the Erlang distribution,

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!},$$

then by (28), (23) and (17), we have

$$q_j = q_j^+ = \begin{cases} \sum_{m=1}^{r} D_m & (j=0) \\ \sum_{m=1}^{r} D_m \gamma_m^{(j-1)r+1} \dfrac{1-\gamma_m^r}{1-\gamma_m} & (j>0), \end{cases}$$

i. e.,

$$Q(z)=Q^{+}(z)=\sum_{m=1}^{r} D_m\left[1+\gamma_m z\frac{1-\gamma_m^r}{1-\gamma_m}\frac{1}{1-\gamma_m^r z}\right]= \tag{29}$$

$$=\sum_{m=1}^{r}\frac{D_m}{1-\gamma_m}\left[1-\gamma_m+\gamma_m z\frac{1-\gamma_m^r}{1-\gamma_m}\frac{1}{1-\gamma_m^r z}\right]=1-(1-z)\sum_{m=1}^{r}\frac{D_m\gamma_m}{(1-\gamma_m)(1-\gamma_m^r z)},$$

since $\sum_{m=1}^{r}\frac{D_m}{1-\gamma_m}=1$ by (18).

Again by (25) and (20), we have

$$q_j^*=\begin{cases}1-\tau & (j=0)\\ \tau-\dfrac{\tau}{r}\displaystyle\sum_{m=1}^{r} D_m\gamma_m\frac{1-\gamma_m^r}{(1-\gamma_m)^2} & (j=1)\\ \dfrac{\tau}{r}\displaystyle\sum_{m=1}^{r} D_m\gamma_m^{(j-2)r+1}\frac{1-\gamma_m^r}{1-\gamma_m} & (j>1),\end{cases}$$

from which we obtain

$$Q^*(z)=1-\tau(1-z)-\frac{\tau}{r}z(1-z)\sum_{m=1}^{r}\frac{D_m\gamma_m(1-\gamma_m^r)}{(1-\gamma_m)^2(1-\gamma_m^r z)}. \tag{30}$$

8. Comparison between two dual methods of deriving the model $E_k/E_r/1$. In the previous section we have derived formulae for $Q(z)$, $Q^*(z)$, and $Q^+(z)$ for $E_k/E_r/1$ by starting from the batch arrival model $E_k^r/E_1/1$. In our previous paper [3] by starting from the batch departure model $E_1/E_k^r/1$, we obtained an alternative set of formulae for these three distributions in terms of $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$, the reciprocals of the roots outside the unit circle of the equation

$$\left\{1+\frac{\varrho}{k}(1-z)\right\}^{-r}=z^k.$$

It was shown in [2] that there is a $1-1$ correspondence between the γ_m and the ε_m, and that the following relations exist:

$$\gamma_m^r=\varepsilon_m^k, \qquad \frac{\varrho}{1-\gamma_m}=\frac{\varepsilon_m}{1-\varepsilon_m}, \qquad \frac{D_m\gamma_m^{1-r}}{1-\gamma_m}=\frac{C_m}{1-\varepsilon_m},$$

where the C_m were defined by Equation (8) in [3], and the D_m by (18) of the present paper. We also have clearly

$$\sum_{m=1}^{r}\frac{D_m}{1-\gamma_m}=\sum_{m=1}^{r}\frac{C_m}{1-\varepsilon_m}=1.$$

By means of these relationships, it may be verified by substitution that the results (29) and (30) above are in fact identical with (32) and (34) in our previous paper [3].

(Received 25 July 1964)

References

[1] F. G. FOSTER, Queues with batch arrivals. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), pp. 1–10.
[2] F. G. FOSTER and K. M. NYUNT, Queues with batch departures. I, *Ann. Math. Statist.*, **32** (1961), pp. 1324–1332.
[3] F. G. FOSTER and A. G. A. D. PERERA, Queues with batch departures. II, *Ann. Math. Statist.*, **35** (1964), pp. 1147–1156.
[4] A. KHINTCHINE, Mathematical theory of a stationary queue, *Matem. Sbornik*, **39** (1932), pp. 73–84. (Russian, German summary).
[5] A. G. A. D. PERERA, Some theory of unit and batch size queues, Ph. D. Thesis, London University, 1962.
[6] L. TAKÁCS, *Introduction to the Theory of Queues* (Oxford University Press, 1962).

A CHARACTERISATION OF STANDARD IDEALS

By

M. F. JANOWITZ* (Albuquerque, New Mexico, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

§ 1. Introduction. G. GRÄTZER and E. T. SCHMIDT have recently investigated ideals S of a lattice having the property that the relation $a \equiv b \Leftrightarrow a \vee b = (a \wedge b) \vee s$ for suitable $s \in S$ is a congruence relation. They call such ideals *standard ideals* and show ([5], Theorem 11, p. 56) that an ideal of a section complemented lattice is the kernel of a homomorphism if and only if it is standard. In this paper, congruence relations will be investigated from a slightly different point of view. We shall abstract certain properties enjoyed by the kernel of any homomorphism, call an ideal having these properties a projective ideal, and then seek conditions which will guarantee that every projective ideal is the kernel of a homomorphism. Interestingly enough, for a fairly wide class of lattices, it will turn out that projective ideals are the same thing as standard ideals.

In § 4, we answer the following questions posed by GRÄTZER and SCHMIDT in [5]:

PROBLEM 5. Is a distributive (or at least a standard) ideal of a weakly modular lattice neutral?

PROBLEM 7. Is it possible to construct a relatively complemented lattice so that the lattice of all ideals of L is not weakly modular?

PROBLEM 8. Is every homomorphism kernel of a relatively complemented lattice a neutral ideal?

In § 5 we provide at least a start to answering their

PROBLEM 13. Describe those finite lattices in which we get a one-to-one correspondence between the homomorphisms and standard ideals, letting a homomorphism correspond to its kernel.

These questions are clearly related to Birkhoff's Problem No. 73.

PROBLEM 73. Find necessary and sufficient conditions, in order that the correspondence between the congruence relations and (neutral) ideals of a lattice be one-one.

§ 2 is essentially introductory in nature. In § 3, we define projective ideals and investigate their relationship to various other types of ideals. We devote sections 4—6 to the problem of deciding when a projective ideal is standard. Finally, in § 7, we investigate standard elements that possess complements.

* Research supported by the National Science Foundation, Grant GP-1816.

§ 2. Congruence relations. An equivalence relation Θ of a lattice L is called a *congruence relation* of L if $a \equiv b(\Theta), c \equiv d(\Theta) \Rightarrow a \vee c \equiv b \vee d(\Theta)$ and $a \wedge c \equiv b \wedge d(\Theta)$. A pair $a, b \in L$ with $a \geqq b$ is called a *quotient* and denoted a/b. F. MAEDA [7], Definition 4. 1, p. 32, defines a *quotient ideal* to be a set N of quotients such that: (i) $a/a \in N$ for all $a \in L$; (ii) if $a \geqq a_1 \geqq b_1 \geqq b$, then $a/b \in N$ implies $a_1/b_1 \in N$; (iii) $a \vee b/a \in N$ if and only if $b/a \wedge b \in N$; (iv) if $a/b \in N$, $b/c \in N$, then $a/c \in N$. A congruence relation Θ of L is said to collapse a quotient a/b if $a \equiv b(\Theta)$. By [7], Satz 4. 2, p. 35, the set of quotients collapsed by any congruence relation is a quotient ideal, and for every quotient ideal N there is exactly one congruence relation Θ such that N is the set of quotients collapsed by Θ. This will sometimes by indicated by writing $a \equiv b(N)$ in place of $a \equiv b(\Theta)$.

In the sequel L will always denote a lattice, $I(L)$ the lattice of all ideals of L, and $\Theta(L)$ the lattice of all congruence relations of L, partially ordered in the usual way: $\Theta_1 \leqq \Theta_2$ if and only if $a \equiv b(\Theta_1)$ implies $a \equiv b(\Theta_2)$. One then has ([3]) that $\Theta(L)$ is an upper continuous distributive lattice. It follows from this that $\Theta(L)$ is also a pseudo-complemented lattice. Our first project is the description of the pseudo-complement Θ^* of an element $\Theta \in \Theta(L)$. In order to do this we shall need the notion of *weak projectivity* due originally to DILWORTH ([2], Definition 2. 1, p. 349). A quotient a/b is called *weakly projective in one step* onto a quotient c/d if there exists an element t of L such that one of the following conditions holds: (i) $c = a \vee t$ and $d = b \vee t$; (ii) $c = a \wedge t$ and $d = b \wedge t$. We shall say that a/b is *weakly projective* onto c/d, and write $a/b \to c/d$, if there exist finitely many quotients $x_1/y_1, x_2/y_2, \ldots, x_n/y_n$ such that $a/b = x_1/y_1$, $c/d = x_n/y_n$, and x_i/y_i is weakly projective in one step onto x_{i+1}/y_{i+1} for $i = 1, 2, \ldots, n-1$. This is essentially the formulation given by GRÄTZER and SCHMIDT in [4], Definition 1, p. 151, and uses the term "weakly projective" in just the reverse sense from that of DILWORTH. It is important to notice that for any congruence relation Θ of L, if $a \equiv b(\Theta)$ and $a/b \to c/d$, then $c \equiv d(\Theta)$.

We are now ready to describe the pseudo-complement of a congruence relation. It turns out to be more convenient to work with quotient ideals. Accordingly, let N be a quotient ideal of L, and define N^* as follows: $a/b \in N^*$ if and only if $a/b \to c/d$ with $c/d \in N$ implies $c = d$. Evidently $a/a \in N^*$ for all $a \in L$, and $a/b \in N^*, a/b \to e/f$ implies $e/f \in N^*$. It follows from this that the first three conditions in the definition of quotient ideal hold. Suppose that $a/b, b/c \in N^*$. If $a/c \to e/g$ with $e/g \in N$, there must exist an element f such that $e \geqq f \geqq g$, $a/b \to e/f$, and $b/c \to f/g$. Since a/b and b/c are both elements of N^*, we have that $e = f = g$, whence $a/c \in N^*$. This shows that N^* is a quotient ideal. Now suppose that N_1 is a quotient ideal such that $N \cap N_1 = \{a/a; a \in L\}$. Then $a/b \in N_1, a/b \to c/d$ with $c/d \in N$ clearly implies that $c = d$. Thus $N_1 \leqq N^*$ and N^* is indeed the pseudo-complement of N.

GRÄTZER and SCHMIDT ([4], Definition 4, p. 162) call a lattice *weakly modular* if $a/b \to c/d$ $(a > b, c > d)$ implies the existence of elements a_1, b_1 such that $a \geqq a_1 > b_1 \geqq b$ and $c/d \to a_1/b_1$. In a weakly modular lattice the condition that $a/b \to c/d$ with $c \equiv d(\Theta)$ implies $c = d$ is equivalent to the condition that $a \geqq c \geqq d \geqq b$ with $c \equiv d(\Theta)$ implies $c = d$. Thus [4], Lemma 17, p. 163 follows immediately from the above observations.

In the case of an upper continuous lattice we are able to say a little more about the pseudo-complement of a congruence relation.

THEOREM 2. 1. *Let L be an upper continuous lattice, and let Θ^* be the pseudo-complement of a congruence relation Θ of L. Then $\{t; t\in L, t\equiv 0(\Theta^*)\}$ is a principal ideal of L.*

PROOF. Let $z=\vee\{t; t\in L, t\equiv 0(\Theta^*)\}$. It clearly suffices to show that $z\equiv 0(\Theta^*)$. We may regard z as the supremum of an increasing net $\{t_\delta\}_{\delta\in D}$ of elements of L such that $t_\delta\equiv 0(\Theta^*)$ for each $\delta\in D$. Suppose $z/0\to c/d$ with $c\equiv d(\Theta)$. There then exist a finite number of elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$ of L such that $c=[(\ldots[(z\vee x_1)\wedge x_2]\vee\ldots\ldots\wedge x_{n-1})\vee x_n]$, and $d=[(\ldots(0\vee x_1)\wedge x_2]\vee\ldots\wedge x_{n-1})\vee x_n]$. For each $\delta\in D$, let $c_\delta=[(\ldots[(t_\delta\vee x_1)\wedge x_2]\vee\ldots\wedge x_{n-1})\vee x_n]$. Then $t_\delta/0\to c_\delta/d$ and $c_\delta\equiv d(\Theta)$, whence $c_\delta=d$ for all $\delta\in D$. By successive applications of the definition of upper continuity, we conclude that $t_\delta\uparrow z$ implies $c_\delta\uparrow c$. But then $c=d$, and we have $z\equiv 0(\Theta^*)$ as desired.

§ 3. Types of ideals. In this section we shall define projective ideals and investigate their relationship to various other types of ideals. First we need to establish some terminology. A triple (a, b, c) of elements of L is called a *distributive triple*, written $D(a, b, c)$, if $(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$; it is called a *dual distributive triple* and denoted $D^*(a, b, c)$ if $(a\wedge b)\vee c=(a\vee c)\wedge(b\vee c)$. An element $z\in L$ is called *neutral* if $D(a, b, z)$ and $D^*(a, b, z)$ for all $a, b\in L$ and all permutations of the triple (a, b, z); it is called *standard* if $D(a, z, b)$ for all $a, b\in L$, and *distributive* if $D^*(a, b, z)$ for all $a, b\in L$. For each $x\in L$, let $(x]=\{a; a\in L, a\leqq x\}$, and if $e\leqq f$, let $[e, f]=\{a; a\in L, e\leqq a\leqq f\}$. If $a\vee x\geqq b\vee x$, $a\wedge x\geqq b\wedge x$ for some $x\in L$, we shall say that b is *subperspective* to a. Note that this differs from F. MAEDA's usage of the term in [7], Definition 1. 2, p. 71.

DEFINITION. An ideal J of L will be called: (a) *neutral*, *standard*, or *distributive* according to whether it is a neutral, standard, or distributive element of $I(L)$; (b) a *homomorphism kernel* if there exists a congruence relation Θ of L such that L/Θ has a zero element and $J=\{a; a\in L, a/\Theta=0/\Theta\}$; (c) *projective* if $a\in J$, b subperspective to a implies $b\in J$; (d) 0-projective if L has a zero element, and $a\in J$, $a\vee x\geqq b\vee x$, $a\wedge x=b\wedge x=0$ for some $x\in L$ implies $b\in J$; (e) a *p-ideal* if L has a zero element and J is closed under perspectivity.

A discussion of standard ideals can be found in [5], and one of distributive ideals in [8], pp. 620—622. We merely point out that an ideal J of L is standard if and only if the relation $a\equiv b(\Theta)$ if $a\vee b=(a\wedge b)\vee s$ for some $s\in J$ is a congruence relation of L (see [5], Theorem 2, p. 30); J is distributive if and only if the relation $a\equiv b(\Theta)$ if $a\vee t=b\vee t$ for some $t\in J$ is a congruence relation of L. For the case of a principal ideal $(z]$, the situation is that $(z]$ is a neutral, standard or distributive ideal according to whether z is a neutral, standard or distributive element of L (see [5], Lemma 4, p. 32 and Lemma 11, p. 41). It is also worth noting that the above definition is arranged in order of implication; that is, neutral ideal $\Rightarrow$ standard ideal $\Rightarrow$ distributive ideal $\Rightarrow$ homomorphism kernel $\Rightarrow$ projective ideal, and if L has a zero element, projective ideal $\Rightarrow$ 0-projective ideal $\Rightarrow$ p-ideal.

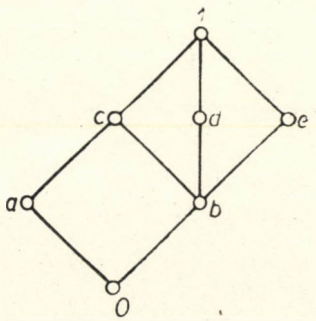


Fig. 1

Further insight is provided by the consideration of a few examples. In Fig. 1, $(a]$ is a homomorphism kernel that is not a distributive ideal; indeed,

$a \vee (d \wedge e) = c$, while $(a \vee d) \wedge (a \vee e) = 1$. Also $(c]$ is 0-projective but not projective; that $(c]$ is 0-projective follows from the fact that $(a]$ is a prime ideal. Noting that $c \vee e = d \vee e = 1$, while $c \wedge e = d \wedge e = b$, we see that $(c]$ is not a projective ideal. Incidentally, since $(b]$ is also a homomorphism kernel, this shows that the join of two homomorphism kernels need not be a homomorphism kernel. Curiously enough, as is shown by the next theorem, the lattice in Fig. 1 illustrates a quite general situation.

THEOREM 3. 1. *Let L be a lattice with* 0.

(i) *Any ideal of L containing a prime ideal is necessarily* 0*-projective.*

(ii) *Let Θ be a congruence relation of L, and let Θ^* be its pseudo-complement in $\Theta(L)$. If J is the kernel of Θ, J^* the kernel of Θ^*, then $J \vee J^*$ is a* 0*-projective ideal.*

PROOF. (i). Let P be a prime ideal and $J \supseteq P$. Suppose that $a \in J$, $a \vee x \geqq b \vee x$, and $a \wedge x = b \wedge x = 0$. If $b \in P$ there is nothing to prove, so we assume $b \notin P$. Since $b \wedge x = 0 \in P$, we must have $x \in P$. But then $x \in J$, and $b \leqq a \vee x$ shows that $b \in J$.

(ii). Let $a \in J \vee J^*$, $a \vee x \geqq d \vee x$, and $a \wedge x = d \wedge x = 0$. Then $a \leqq b \vee c$ with $b \in J$ and $c \in J^*$. Also, $d \equiv d \wedge (b \vee c \vee x) \equiv d \wedge (c \vee x)(\Theta)$ and $d \equiv d \wedge (b \vee c \vee x) \equiv \equiv d \wedge (b \vee x)(\Theta^*)$. Note that $d \wedge (b \vee x) \equiv d \wedge x \equiv 0(\Theta)$ and $d \wedge (c \vee x) \equiv d \wedge x \equiv 0(\Theta^*)$. This shows that $d \wedge (b \vee x) \in J$ and $d \wedge (c \vee x) \in J^*$; furthermore, $d \equiv [d \wedge (b \vee x)] \vee \vee [d \wedge (c \vee x)](\Theta \cap \Theta^*)$, whence $d = [d \wedge (b \vee x)] \vee [d \wedge (c \vee x)]$. But this places $d \in J \vee J^*$ as desired.

In Fig. 2, $(h]$ is a p-ideal that is not 0-projective and $(k]$ is a standard ideal that is not neutral. Finally, in Fig. 3, $(u]$ is a distributive ideal that is not standard. Note that we have failed to provide an example of a projective ideal that is not a homomorphism kernel. The reason for this is that so far we have been unable to find such an example. The next theorem provides further insight into the notion of projective ideal.

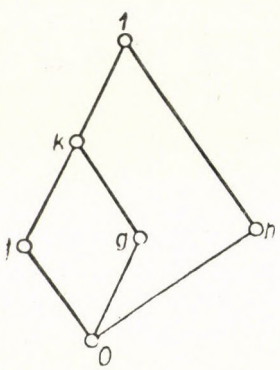


Fig. 2

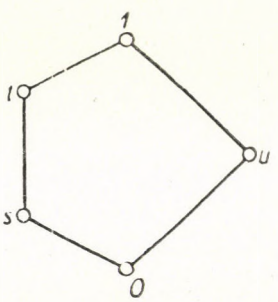


Fig. 3

THEOREM 3. 2. *Let J be an ideal of L. The following conditions are then equivalent:*

(i) *J is a projective ideal*;

(ii) $a \in J$, $x \wedge y \in J \Rightarrow (a \vee x) \wedge y \in J$;

(iii) $a \in J, b \in J, x \wedge y \in J \Rightarrow (a \vee x) \wedge (b \vee y) \in J$;
(iv) $a \in J, a \vee x \geqq b \vee x$ *with* $b \wedge x \in J \Rightarrow b \in J$.

PROOF. (i) $\Rightarrow$ (ii). Let $a \in J$ and $x \wedge y \in J$. Then $[(a \vee x) \wedge y] \vee x \leqq a \vee x = [a \vee (x \wedge y)] \vee x$, where $a \vee (x \wedge y) \in J$. Also, $[(a \vee x) \wedge y] \wedge x = x \wedge y \leqq [a \vee (x \wedge y)] \wedge x$. Since J is a projective ideal, we conclude that $(a \vee x) \wedge y \in J$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Let $a, b, x \wedge y \in J$. By (ii), $(a \vee x) \wedge y \in J$. A second application of (ii) now produces the fact that $(a \vee x) \wedge (b \vee y) \in J$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). If $a \in J, a \vee x \geqq b \vee x$ and $b \wedge x \in J$, then by (iii), $(a \vee b) \wedge (a \vee x) \in J$. Since $b \leqq (a \vee b) \wedge (a \vee x)$, we conclude that $b \in J$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). This is obvious.

§ 4. Section complemented lattices. A lattice is called *relatively complemented* if every interval $[e, f]$ is complemented; it is called *section complemented* if for each element e, there exists an element $d \leqq e$ such that every interval of the form $[d, f]$ is complemented. In a lattice with 0 this is equivalent to saying that every interval of the form $[0, f]$ is complemented.

In [5], GRÄTZER and SCHMIDT investigate the relationship between standard ideals and homomorphism kernels, showing that at least for section complemented lattices they are the same. In this paragraph we shall prove that every projective ideal of a section complemented lattice, every 0-projective ideal of a section complemented lattice with 0, and that every p-ideal of a relatively complemented lattice with 0 is a standard ideal. This will enable us to show that a standard ideal of a relatively complemented lattice need not be neutral.

THEOREM 4. 1. ([5], Theorem 11, p. 56). *In a section complemented lattice every homomorphism kernel is a standard ideal and every standard ideal is the kernel of precisely one homomorphism.*

THEOREM 4. 2. (i) *An ideal of a section complemented lattice with* 0 *is standard if and only if it is* 0*-projective.*

(ii) *An ideal of a section complemented lattice is standard if and only if it is projective.*

(iii) *An ideal of a relatively complemented lattice with* 0 *is standard if and only if it is a p-ideal.*

PROOF. (i) Let L be a section complemented lattice with 0. In view of Theorem 4. 1 and the fact that every homomorphism kernel is 0-projective, it suffices to show that every 0-projective ideal of L is a homomorphism kernel. Accordingly, let J be a 0-projective ideal of L, and let $N = \{a/b : a = b \vee t$ with $b \wedge t = 0$ for some $t \in J\}$. Since J is 0-projective, $a/b \in N$ implies that every complement of b in a is an element of J. The idea is to show that N is a quotient ideal of L. (a) Since $0 \in J$, it is evident that $a/a \in N$ for all $a \in L$. (b) Let $a \geqq a_1 \geqq b_1 \geqq b$ with $a/b \in N$. If $a_1 = b_1 \vee t_1$ with $b_1 \wedge t_1 = 0$, then $b \wedge t_1 = 0$. Let t be a complement of b in a. By assumption, $t \in J$. Since $b \wedge t = b \wedge t_1 = 0$ and $b \vee t_1 \leqq a = b \vee t$, we have $t_1 \in J$ and $a_1/b_1 \in N$. (c) Let $a \vee b = a \vee t_1, b = (a \wedge b) \vee t_2$ with $a \wedge t_1 = (a \wedge b) \wedge t_2 = 0$. Then $t_2 \wedge a = t_1 \wedge a = 0$, and $t_2 \vee a = t_1 \vee a = a \vee b$. It follows that $t_1 \in J$ if and only if $t_2 \in J$; i. e., that $a \vee b/a \in N$ if and only if $b/a \wedge b \in N$. (d) Let $a/b, b/c \in N$. If t_1 is a complement of b in a, t_2 is a complement of c in b, then $t_1 \vee t_2 \in J$. Since $a = c \vee t_1 \vee t_2$, c has a complement $t_3 \leqq t_1 \vee t_2$ in a. This puts $t_3 \in J$ and $a/c \in N$, thus completing

the proof that N is a quotient ideal. In order to show that J is a homomorphism kernel, we now simply note that $a \equiv 0(N) \Leftrightarrow a/0 \in N \Leftrightarrow a \in J$.

(ii) Let J be a projective ideal of the section complemented lattice L. For every interval $[e,f]$, $J \cap [e,f]$ is then a projective ideal of $[e,f]$. In particular, if $d \in L$ has the property that every interval of the form $[d,f]$ is complemented, then by part (i), $J \cap [d,f]$ is a standard ideal of the lattice $[d,f]$. One can show without difficulty that J is therefore a standard ideal of L.

(iii) Let L be a relatively complemented lattice with 0, and let J be a p-ideal of L. Define N as in part (i). The proof goes through exactly as in (i) with the exception of item (b): Let $a \geqq a_1 \geqq b_1 \geqq b$ with $a/b \in N$. Let t_1 be a complement of b_1 in a. Then $t_1 \wedge b = 0$, and by [7], Hilfssatz 1. 2, p. 6, b has a complement t in a such that $t \geqq t_1$. Then $a/b \in N$ implies $t \in J$, $t_1 \in J$, and finally that $a_1/b_1 \in N$.

COROLLARY. *In a section complemented lattice L the concepts of standard ideal, distributive ideal, projective ideal, and homomorphism kernel, all coincide. If L has a zero element one can add 0-projective ideal to this list, and if L is a relatively complemented lattice with 0, one can also add p-ideal.*

In view of the above results, it seems appropriate to ask if a homomorphism kernel of a relatively complemented lattice is necessarilly a neutral ideal. The next theorem shows that this need not be so.

THEOREM 4. 3. *Let L denote the lattice of closed subspaces of a Hilbert space H. Every homomorphism kernel of L is a neutral ideal if and only if H is a finite dimensional.*

PROOF. If H is finite dimensional, then L is an orthocomplemented modular lattice. By [1], Theorem 11, p. 125 (or by the fact that L is simple), every homomorphism kernel of L is a neutral ideal. Suppose conversely that every homomorphism kernel is neutral. Let F be the ideal formed by the finite dimensional subspaces of H. It is easily seen that F is a p-ideal, hence a neutral ideal of L. For arbitrary $S, T \in L$, let $x \in S \vee T$. If $\langle x \rangle$ denotes the subspace generated by x, then

$$\langle x \rangle \in F \cap (S \vee T] = F \cap ((S] \vee (T]) = (F \cap (S]) \vee (F \cap (T]).$$

This says that there exist finite dimensional subspaces $S_1 \subseteqq S$, $T_1 \subseteqq T$ such that $x \in S_1 \vee T_1 = S_1 + T_1$. But this puts $x \in S + T$, from which it follows that $S \vee T = S + T$. It is a well known fact (see, for example, [6], § 15, pp. 28—29) that H must therefore be a finite dimensional Hilbert space.

COROLLARY 1. *A standard ideal of a weakly modular lattice need not be neutral.*

COROLLARY 2. *There exists a relatively complemented lattice L such that $I(L)$ is not weakly modular.*

PROOF. By [5], Corollary 2, p. 45, every standard element of a weakly modular lattice is neutral. We may therefore take L to be the lattice of closed subspaces of an infinite dimensional Hilbert space.

COROLLARY 3. *A homomorphism kernel of a relatively complemented lattice need not be a neutral ideal.*

Corollaries 1, 2 and 3 provide answers to Problems 5, 7 and 8 of GRÄTZER and SCHMIDT mentioned in § 1.

§ 5. Principal ideals. We turn now to a consideration of homomorphism kernels that happen also to be principal ideals.

LEMMA 5. 1. *Let Θ be a congruence relation of a lattice L with 0, and suppose that $(z]$ is the kernel of Θ. If $a>b$ implies the existence of an element c such that $a/b \to c/0$ and $c \not\leqq b$ (respectively, $c \leqq a$ but $c \not\leqq b$), then z is a distributive (respectively, standard) element of L. Furthermore, Θ is the minimal congruence relation generated by $(z]$.*

PROOF. Suppose first that $a>b$ implies the existence of an element c such that $a/b \to c/0$ and $c \not\leqq b$. For arbitrary $x, y \in L$, let $a = (z \vee x) \wedge (z \vee y)$ and $b = z \vee (x \wedge y)$. Then $a \equiv b(\Theta)$, $a \geqq b$, and $a/b \to c/0$ implies $c \equiv 0(\Theta)$, whence $c \leqq z \leqq b$. Hence $a = b$, and we have that z is a distributive element of L. In order to show that Θ is the minimal congruence relation generated by $(z]$, we need only show that $e \equiv f(\Theta)$ implies $e \vee z = f \vee z$. But this follows immediately from the fact that $(e \vee f) \vee z/(e \wedge f) \vee z \to c/0$ implies $c \leqq z$.

Now suppose that $a>b$ implies the existence of an element c such that $a/b \to c/0$ with $c \leqq a$ but $c \not\leqq b$. Given $x, y \in L$, let $a = (z \vee x) \wedge y$ and $b = (z \wedge y) \vee (x \wedge y)$. Note that $a \geqq b$ and $a \equiv b(\Theta)$, so that $a/b \to c/0$ implies $c \leqq z$. Thus, if $a/b \to c/0$ with $c \leqq a$, we would have $c \leqq a \wedge z = y \wedge z \leqq b$. It follows that $a = b$, and consequently that z is standard.

A lattice L with 0 is called *weakly complemented* ([4], Definition 2, p. 152) if $a>b$ implies the existence of a non-zero element c such that $a/b \to c/0$. By [4], Theorem 4, p. 153, every congruence relation of L is the minimal one generated by its kernel if and only if L has a zero element and every homomorphic image of L is weakly complemented. We now seek conditions which will guarantee that every congruence relation is the minimal one generated by a distributive (standard) ideal.

THEOREM 5. 2. *Let L be a lattice with 0 having the property that every homomorphism kernel is a principal ideal. The following conditions are then equivalent:*

(i) *Every congruence relation of L is the minimal one generated by a distributive ideal.*

(ii) *$a>b \geqq d$ implies the existence of an element $c>d$ such that $a/b \to c/d$.*

(iii) *$a>b$ implies the existence of an element t such that $t \not\leqq b$ and $t \equiv 0(\Theta_{a/b})$, where $\Theta_{a/b}$ is the minimal congruence relation collapsing the quotient a/b.*

PROOF. (i) $\Rightarrow$ (ii). Let $a>b \geqq d$, and suppose that $(z]$ is the kernel of $\Theta_{a/b}$. DILWORTH [2], Lemma 2. 1, p. 349 has shown that $e \equiv f(\Theta_{a/b})$ if and only if there exist finitely many elements $x_0, x_1, \ldots, x_n$ such that $e \vee f = x_0 \geqq x_1 \geqq \ldots \geqq x_{n-1} \geqq x_n = e \wedge f$ and $a/b \to x_i/x_{i+1}$ for $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Now $a \vee z = b \vee z$, and if $z \vee d = d$, we would have $z \leqq d \leqq b$, and $a \leqq b \vee z = b$. Thus, $z \vee d > d$ and $z \vee d \equiv d(\Theta_{a/b})$. It follows that there exists an element c such that $z \vee d \geqq c > d$ and $a/b \to c/d$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Let $a, b \in L$ with $a>b$. If $(z]$ is the kernel of $\Theta_{a/b}$, then $a>b \geqq z \wedge b$. By (ii), there exists an element c such that $a/b \to c/z \wedge b$ and $c > z \wedge b$. Now $a/b \to c/z \wedge b$ implies $c \equiv 0(\Theta_{a/b})$, so that $c \leqq z$. Therefore $c \not\leqq b$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Suppose (i) fails. There then exists a congruence relation Θ and elements $a, b \in L$ such that $a > b$, $a \equiv b(\Theta)$, and $a \vee z > b \vee z$, where $(z]$ is the kernel of Θ. Thus, we may assume the existence of elements $a, b \in L$ such that $a > b \geqq z$ and $a \equiv b(\Theta)$. If $t \equiv 0(\Theta_{a/b})$, we have $t \equiv 0(\Theta)$ and $t \leqq z \leqq b$. Hence (iii) fails.

THEOREM 5. 3. *Let L be a lattice with 0 having the property that every homomorphism kernel is a principal ideal. The following conditions are then equivalent:*

(i) *Every congruence relation is the minimal one generated by a standard ideal.*

(ii) *$a > b \geqq d$ implies the existence of an element c such that $a \geqq c > d$ and $a/b \to c/d$.*

(iii) *$a > b$ implies the existence of an element t such that $t \leqq a$, $t \not\leqq b$ and $t \equiv 0(\Theta_{a/b})$.*

PROOF. (i) $\Rightarrow$ (ii). Let $a > b \geqq d$. If $(z]$ is the kernel of $\Theta_{a/b}$, we know that there exists an element $z_1 \leqq z$ such that $a = b \vee z_1$. If $z_1 \vee d = d$, we would have $z_1 \leqq d \leqq b$, a contradiction. Hence $a \geqq z_1 \vee d > d$. Since $z_1 \vee d \equiv d(\Theta_{a/b})$, there must therefore exist an element c such that $a \geqq z_1 \vee d \geqq c > d$ and $a/b \to c/d$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). If $a > b$, then $a > b \geqq z \wedge b$, where $(z]$ is the kernel of $\Theta_{a/b}$. By (ii), there exists an element c such that $a \geqq c > z \wedge b$ and $a/b \to c/z \wedge b$. Then $c \equiv 0(\Theta_{a/b})$, so that $c \leqq z$ and consequently $c \not\leqq b$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Let Θ be a congruence relation whose kernel is $(z]$. Given $x, y \in L$, let $a = (z \vee x) \wedge y$ and $b = (z \wedge y) \vee (x \wedge y)$. Then $a \equiv b(\Theta)$, so that if $t \equiv 0(\Theta_{a/b})$, then $t \equiv 0(\Theta)$ and $t \leqq z$. Therefore if $t \leqq a$, then $t \leqq a \wedge z = y \wedge z \leqq b$. This shows that $a = b$, and consequently that z is standard. Condition (iii) clearly implies condition (iii) of Theorem 5. 2, so that Θ is the minimal congruence relation generated by its kernel.

§ 6. Relatively atomic lattices. Before discussing homomorphism kernels of a relatively atomic lattice, we pause and introduce additional terminology. Borrowing some notation from F. MAEDA [7], we shall write $a \triangledown b$ for elements a, b of a lattice L with 0 in case $a \wedge b = 0$ and $D(a, x, b)$ for all $x \in L$. A relatively atomic lattice L will be called *compactly generated* if for any atom q and any set S of atoms, $q \leqq \vee \{p; p \in S\}$ implies the existence of a finite number of elements $p_1, p_2, \ldots, p_n$ of S such that $q \leqq p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$. If a lattice L has the property that any set of elements possessing an upper bound also possess a *least upper bound*, then L is said to be *conditionally complete*. If $\{a_\delta\}_{\delta \in D}$ is an increasing net of elements of L, then the notation $a_\delta \uparrow a$ denotes the fact that $a = \vee_{\delta \in D} a_\delta$. The lattice L is called *conditionally upper continuous* if it is conditionally complete, and for every increasing net $\{a_\delta\}_{\delta \in D}$ of elements, $a_\delta \uparrow a \Rightarrow a_\delta \wedge b \uparrow a \wedge b$ for all $b \in L$. We point out that by [7], Hilfssatz 1. 2, p. 71, a conditionally complete, relatively atomic lattice is conditionally upper continuous if and only if it is compactly generated. Finally, we shall call an ideal of a lattice *subcomplete* if it is closed under the formation of arbitrary suprema whenever they exist.

LEMMA 6. 1. *Let L be a compactly generated relatively atomic lattice. The following conditions are then equivalent:*

(i) $a \triangledown b$.

(ii) *There exist no atoms $p \leqq a$, $q \leqq b$ such that q is subperspective to p.*

PROOF. The proof is a slight variation of that of [7], Hilfssatz 1. 3, p. 72.

LEMMA 6. 2. *Let L be a compactly generated relatively atomic lattice. If $a_\delta \uparrow a$ and $a_\delta \triangledown b$ for all δ, then $a \triangledown b$.*

PROOF. If $a \triangledown b$ failed, there would exist atoms $p \leqq a, q \leqq b$ such that q is subperspective to p. However, since $\{a_\delta\}_{\delta \in D}$ is an increasing net of elements of L, $p \leqq \leqq \wedge_{\delta \in D} a_\delta$ implies the existence of an index $\delta_0 \in D$ such that $p \leqq a_{\delta_0}$. This contradicts the fact that $a_{\delta_0} \triangledown b$.

LEMMA 6. 3. *If J is a 0-projective ideal of the compactly generated relatively atomic lattice L, then $(a] \cap J = (0) \Rightarrow b \triangledown a$ for all $b \in J$.*

PROOF. Suppose $b \triangledown a$ failed for some $b \in J$. There would then exist atoms $p \leqq b, q \leqq a$ such that q is subperspective to p. Thus, for suitable $x \in L$, $p \vee x \geqq q \vee x$ and $p \wedge x \geqq q \wedge x$. We clearly must have $p \neq q$, so that $p \wedge x = q \wedge x = 0$. Using the fact that J is 0-projective, this puts $q \in J$, a contradiction.

LEMMA 6. 4. *Let Θ be a congruence relation of a relatively atomic, conditionally upper continuous lattice L. If the kernel of Θ is a subcomplete ideal of L, then it is a standard ideal; furthermore, Θ is then the minimal congruence relation generated by its kernel.*

PROOF. Let J be a subcomplete ideal which is the kernel of the congruence relation Θ. We must show that $a \equiv b(\Theta)$ implies $a \vee b = (a \wedge b) \vee s$ for some $s \in J$. Now if $a \equiv b(\Theta)$, we must have $a \vee b \equiv a \wedge b(\Theta)$. If p is an atom, $p \leqq a \vee b, p \not\leqq a \wedge b$, then $p \equiv p \wedge (a \vee b) \equiv p \wedge (a \wedge b) \equiv 0(\Theta)$. Hence, we may write $a \vee b = (a \wedge b) \vee s$, where s is the supremum of all those atoms p such that $p \leqq a \vee b$ and $p \wedge (a \wedge b) = 0$. Since J is subcomplete, we have $s \in J$.

LEMMA 6. 5. *Let I be a 0-projective ideal of the compactly generated relatively atomic lattice L. Let J be the set of all elements of L which can be expressed as the supremum of elements of I. Then J is a subcomplete homomorphism kernel of L. In particular, any subcomplete 0-projective ideal of L is a homomorphism kernel.*

PROOF. It clearly suffices to show that $N = \{a/b; p \leqq a, p \not\leqq b, p$ an atom implies $p \in I\}$ is a quotient ideal of L, since $a \equiv 0(N) \Leftrightarrow a/0 \in N \Leftrightarrow a \in J$. (i) It is obvious that $a/a \in N$ for all $a \in L$. (ii) Let $a \geqq a_1 \geqq b_1 \geqq b$ with $a/b \in N$. If p is an atom such that $p \leqq a_1$ and $p \not\leqq b_1$, then $p \leqq a$ and $p \not\leqq b$, whence $p \in I$ and $a_1/b_1 \in N$. (iii) We must show that $a \vee b/a \in N \Leftrightarrow b/a \wedge b \in N$. If p is an atom, $p \leqq b, p \not\leqq a \wedge b$, then $p \leqq a \vee b$ and $p \not\leqq a$. Thus $a \vee b/a \in N \Rightarrow b/a \wedge b \in N$. Suppose now that $b/a \wedge b \in N$ and $a \vee b/a \notin N$. There must then exist an atom p such that $p \leqq a \vee b, p \not\leqq a$ and $p \notin I$. By Lemma 6. 3, $x \triangledown p$ for all $x \in I$. Using the fact that L is compactly generated, we now produce a finite number of atoms $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ such that each $a_i \leqq a$, each $b_j \leqq b$, and $p \leqq a_1 \vee \ldots \vee a_m \vee b_1 \vee \ldots \vee b_n$. We may even assume that no $b_j \leqq a$, since any such b_j may be included in the a_i's. Then $b_j \leqq b$ and $b_j \not\leqq a \wedge b$, so that $b_j \in I$ $(j = 1, \ldots, n)$. Thus $b_0 = b_1 \vee \ldots \vee b_n \in I$, and consequently $b_0 \triangledown p$. But this means that $p = (b_0 \vee a_1 \vee \ldots \vee a_m) \wedge p = (a_1 \vee \ldots \vee a_m) \wedge p$, thereby showing that $p \leqq a$, a contradiction. Hence $b/a \wedge b \in N \Rightarrow a \vee b/a \in N$ as desired. (iv) Let $a/b, b/c \in N$. If p is an atom such that $p \leqq a$ and $p \not\leqq c$, then $p \not\leqq b$ implies $p \in I$ since $a/b \in N$, while $p \leqq b$ implies $p \in I$ from the fact that $b/c \in N$. Therefore N is a quotient ideal. Q. E. D.

Combining the above results, we have

THEOREM 6. 6. *Let J be a subcomplete ideal of a relatively atomic conditionally upper continuous lattice. Each of the following conditions on J is then equivalent: standard ideal; distributive ideal; homomorphism kernel; projective ideal; 0-projective ideal.*

If L is a relatively atomic lattice having the property that every element can be expressed as the supremum of a finite number of atoms, then the above theorem is true for any ideal J of L. In the case of an arbitrary relatively atomic lattice, we are able to dispose of principal homomorphism kernels in a fairly satisfactory manner.

THEOREM 6. 7. *For a principal ideal of a relatively atomic lattice L, the following concepts are equivalent: standard ideal; distributive ideal; homomorphism kernel; projective ideal.*

PROOF. Let $(z]$ be a projective ideal of L. Then, for arbitrary $a, b \in L$, $(a \vee z) \wedge$ $\wedge b \geqq (a \wedge b) \vee (z \wedge b)$. If there existed an atom $p \leqq (a \vee z) \wedge b$ such that $p \nleqq (a \wedge b) \vee$ $\vee (z \wedge b)$, then clearly $p \nleqq a$. Hence $p \vee a \leqq z \vee a$ and $p \wedge a \leqq z \wedge a$. Using the fact that $(z]$ is projective, we see that $p \leqq z$. But then $p \leqq z \wedge b \leqq (z \wedge b) \vee (a \wedge b)$, a contradiction. We conclude that $(a \vee z) \wedge b = (a \wedge b) \vee (z \wedge b)$.

It is of some interest to determine when a homomorphism kernel is a neutral ideal. A partial answer is provided in the next theorem.

THEOREM 6. 8. *Let L be a relatively atomic conditionally upper continuous lattice, and let J be a subcomplete standard ideal of L. The following conditions are equivalent:*

(i) *J is a neutral ideal.*

(ii) *p an atom, $p \notin J$ implies $p \triangledown a$ for all $a \in J$.*

(iii) *J has a complement J^* in $I(L)$ which is a 0-projective ideal.*

PROOF. (i) $\Rightarrow$ (ii). Let J be neutral, and suppose p is an atom not in J. If there existed an element $a \in J$ such that $p \triangledown a$ failed, then $(p \vee x) \wedge a > x \wedge a$ for some $x \in L$. Since L is relatively atomic, there must exist an atom q such that $q \leqq (p \vee x) \wedge a$ and $q \nleqq x \wedge a$. But $q \leqq (p \vee x) \wedge a$ implies that $q \in (p \vee x] \cap J = \{(p] \vee (x]\} \cap J =$ $= \{(p] \cap J\} \vee \{(x] \cap J\} = (x] \cap J$. Hence $q \leqq x$, so that $q = q \wedge x = q \wedge x \wedge a = 0$, a contradiction. We conclude that $p \triangledown a$ for all $a \in J$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Let $J^\triangledown = \{a; a \in L, a \triangledown b$ for all $b \in J\}$. By Lemma 6. 2, $J^\triangledown$ is a subcomplete ideal of L; furthermore, by (ii), if p is an atom, then either $p \in J$ or $p \in J^\triangledown$. Thus, for any $a \in L$, if we set $a_1 = \vee \{p: p$ is an atom, $p \leqq a, p \in J\}$, and $a_2 =$ $= \vee \{p: p$ is an atom, $p \leqq a, p \in J^\triangledown\}$, we have $a_1 \in J, a_2 \in J^\triangledown$, and $a = a_1 \vee a_2$. Hence $J^\triangledown$ is a complement of J in $I(L)$. To show that $J^\triangledown$ is 0-projective, let $a \in J^\triangledown$, and suppose that there exists an element $x \in L$ such that $a \vee x \geqq b \vee x$ and $a \wedge x =$ $= b \wedge x = 0$. If $p \leqq b$ is an atom, and $p \in J$, we would have $a \triangledown p$ and $p = (a \vee x) \wedge p =$ $= x \wedge p = 0$, a contradiction. Thus every atom dominated by b must be in $J^\triangledown$. It follows from this that $b \in J^\triangledown$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). If J^* is 0-projective and a complement of J in $I(L)$, then $a \in J$, $b \in J^*$ implies $a \triangledown b$ and $b \triangledown a$. Thus, $J^* \subseteq J^\triangledown$, and we see that $J^\triangledown$ is a complement of J in $I(L)$. By [5], Lemma 10, p. 40, it suffices to show that for all ideals I, K of $L, J \cap (I \vee K) = (J \cap I) \vee (J \cap K)$. Evidently, $(J \cap I) \vee (J \cap K) \subseteq J \cap (I \vee K)$. Let $x \in J \cap (I \vee K)$. Then $x \in J$ and $x \leqq a \vee b$ with $a \in I, b \in K$. For every atom p, either

$p \in J$ or $p \in J^{\nabla}$. As in the proof of (ii) $\Rightarrow$ (iii), we may write $a = a_1 \vee a_2$, $b = b_1 \vee b_2$ with $a_1, b_1 \in J$, and $a_2, b_2 \in J^{\nabla}$. Since $a_2 \vee b_2 \nabla x$, we then have $x = (a \vee b) \wedge x = (a_1 \vee a_2 \vee b_1 \vee b_2) \wedge x = (a_1 \vee b_1) \wedge x$. This puts $x \in (J \cap I) \vee (J \cap K)$, whence $J \cap (I \vee K) = (J \cap I) \vee (J \cap K)$.

COROLLARY 1. *If L is a relatively atomic conditionally upper continuous lattice in which the relation ∇ is symmetric, then every subcomplete 0-projective ideal of L is neutral.*

COROLLARY 2. *Let L be a relatively atomic upper continuous lattice. A standard element of L is neutral if and only if it has a standard complement.*

§ 7. The complement of a standard element. Theorem 6. 8 suggests that it might be of some interest to investigate standard elements that have complements. In Fig. 2 of § 3, k is a standard element having h as a complement; yet $(h]$ is not even 0-projective. Nonetheless, we shall be able to prove an analogue of Theorem 6. 8 that is valid in a quite general situation. In connection with this, we might just as well conform to the usual terminology and call a neutral element possessing a complement *central*. Central elements can also be characterized as follows (see [1], pp. 27—28): An element z of a lattice L with 0 and 1 is central if and only if there exist lattices L_1, L_2 and an isomorphism $\varphi: L \to L_1 \times L_2$ such that $z\varphi = (1, 0)$.

For the remainder of this section it will be assumed that L is a lattice with 0 and 1, that z and z' are complementary elements of L, that $\Theta = \Theta_{z/0}$, and that $\Theta' = \Theta_{z'/0}$. We shall call an element of L *dual distributive (dual standard)* if it is a distributive (standard) element of the dual of L.

LEMMA 7. 1. *The element z is standard if and only if z' is dual distributive and $a = (a \wedge z) \vee (a \wedge z')$ for all $a \in L$.*

PROOF. Let z be standard. Since $a \equiv (a \wedge z) \vee (a \wedge z') (\Theta)$, we know that there exists an element $z_1 \leqq z$ such that $a = (a \wedge z) \vee (a \wedge z') \vee z_1$. But then $z_1 \leqq a \wedge z$, and $a = (a \wedge z) \vee (a \wedge z')$. To show that z' is dual distributive, we need only prove that $z' \wedge (a \vee b) \leqq (z' \wedge a) \vee (z' \wedge b)$, since the reverse inequality always attains. Thus, we merely observe that $z' \wedge (a \vee b) = z' \wedge [(a \wedge z) \vee (b \wedge z) \vee (a \wedge z') \vee (b \wedge z') \leqq \leqq z' \wedge [z \vee (a \wedge z') \vee (b \wedge z')] = (a \wedge z') \vee (b \wedge z')$.

Suppose conversely that z' is dual distributive and that $a = (a \wedge z) \vee (a \wedge z')$ for all $a \in L$. We first prove that if $z \vee a = z \vee b$, $z \wedge a = z \wedge b$, then $a = b$. For if $z \vee a = z \vee b$, then $z' \wedge a = (z \vee a) \wedge z' = (z \vee b) \wedge z' = z' \wedge b$. Consequently, $a = (a \wedge z) \vee (a \wedge z') = (b \wedge z) \vee (b \wedge z') = b$. Now, for arbitrary $x, y \in L$, if we let $a = z \vee (x \wedge y)$, and $b = (z \vee x) \wedge (z \vee y)$, we have $z \wedge a = z \wedge b = z$, and $z' \wedge a = z' \wedge b = z' \wedge x \wedge y$. Thus $a = b$, and we see that z is distributive. By [5], Theorem 1, p. 28, z is in fact standard.

THEOREM 7. 2. *The following conditions are equivalent:*
(i) *z is central.*
(ii) *Both z and z' are standard.*
(iii) *For each $a \in L$, $a = (a \wedge z) \vee (a \wedge z')$, and $a = (a \vee \,.\,) \wedge (a \vee z')$.*

PROOF. (i) $\Rightarrow$ (ii). If z is central, then both z and z' are neutral elements of L.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). By Lemma 7. 1, $a = (a \wedge z) \vee (a \wedge z')$ for all $a \in L$. Using the fact

that both z and z' are standard, we have

$$(a \vee z) \wedge (a \vee z') = a \vee [z \wedge (a \vee z')] = a \vee (z \wedge a) = a.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Let $L_1 = (z]$, $L_2 = (z']$, and define a mapping $\varphi: L \to L_1 \times L_2$ by the formula $a\varphi = (a \wedge z, a \wedge z')$. The mapping φ clearly preserves order. In order to show that it is an isomorphism, we observe that the mapping $\psi: L_1 \times L_2 \to L$ defined by $(e, f)\psi = e \vee f$ is an order preserving mapping which is effective as the inverse of φ. For if $(e, f) \in L_1 \times L_2$, then $e \leqq (e \vee f) \wedge z \leqq (e \vee z') \wedge z = (e \vee z') \wedge (e \vee z) = e$ shows that $(e \vee f) \wedge z = e$; similarly $(e \vee f) \wedge z' = f$, whence $(e, f)\psi\varphi = (e, f)$. On the other hand, if $a \in L$, $a\varphi\psi = (a \wedge z, a \wedge z')\psi = (a \wedge z) \vee (a \wedge z') = a$. The proof that z is central is completed by noting that $z\varphi = (z, 0)$.

One would suspect on grounds of symmetry that z standard ought to be equivalent to z' being dual standard. The next theorem shows that this conjecture is manifestly false.

THEOREM 7. 3. *If z is standard, the following conditions are equivalent:*

(i) *z is central.*
(ii) *z' is standard.*
(iii) *$a = (a \vee z) \wedge (a \vee z')$ for all $a \in L$.*
(iv) *$z' \triangledown z$.*
(v) *z' is dual standard.*
(vi) *$(z']$ is the kernel of Θ^*, the pseudo-complement of Θ in $\Theta(L)$.*

PROOF. The equivalence of the first three conditions is a corollary of Theorem 7. 2, and (i) $\Rightarrow$ (iv) is obvious.

(iv) $\Rightarrow$ (v). By Lemma 7. 1, z' is dual distributive. In view of [5], Theorem 1, p. 28, we need only show that $z' \vee a = z' \vee b$, $z' \wedge a = z' \wedge b$ implies $a = b$. Using the fact that $z' \triangledown z$, we have that $z \wedge a = (z' \vee a) \wedge z = (z' \vee b) \wedge z = z \wedge b$; hence $a = (a \wedge z) \vee (a \wedge z') = (b \wedge z) \vee (b \wedge z') = b$.

(v) $\Rightarrow$ (iii). By the dual of Lemma 7. 1, z' dual standard implies that $a = (a \vee a) \wedge (a \vee z')$ for all $a \in L$.

(i) $\Rightarrow$ (vi). This is clear.

(vi) $\Rightarrow$ (ii) Since $(a \vee z') \wedge b \equiv (a \wedge b) \vee (z' \wedge b)(\Theta \cap \Theta^*)$, we have $(a \vee z') \wedge b = (a \wedge b) \wedge (z' \wedge b)$.

THEOREM 7. 4. *If $(z]$ is a homomorphism kernel of L, then z is central if and only if $(z']$ is the kernel of the pseudo-complement of Θ.*

PROOF. Suppose that $(z']$ is the kernel of Θ^*. Then, for $a, b \in L$, $(a \vee z) \wedge b \equiv (a \wedge b) \vee (z \wedge b)(\Theta \cap \Theta^*)$, and $(a \wedge z) \vee b \equiv (a \vee b) \wedge (z \vee b)(\Theta \cap \Theta^*)$. Thus z is both standard and dual standard. By [5], Lemma 13, p. 41, z is central. The reverse implication is obvious.

If L is a weakly complemented lattice, and if $(z]$ and $(z']$ are both homomorphism kernels, then $a \equiv b(\Theta \cap \Theta')$ implies $a = b$. To see this, we merely note that if $a \vee b / a \wedge b \to c/0$, then $c \equiv 0(\Theta \cap \Theta')$, whence $c \leqq z \wedge z' = 0$. This leads to

THEOREM 7. 5. *Let L be weakly complemented. If $(z]$ is a homomorphism kernel, then z is central if and only if $(z']$ is a homomorphism kernel.*

(Received 4 September 1964)

Bibliography

[1] G. BIRKHOFF, Lattice theory, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, **25** (New York, 1948).
[2] R. P. DILWORTH, The structure of relatively complemented lattices, *Annals of Math.*, **51** (1950), pp. 348–359.
[3] N. FUNAYAMA and T. NAKAYAMA, On the distributivity of a lattice of lattice-congruences, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), pp. 553–554.
[4] G. GRĀTZER and E. T. SCHMIDT, Ideals and congruence relations in lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 137–175.
[5] G. GRĀTZER and E. T. SCHMIDT, Standard ideals in lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), pp. 17–86.
[6] P. R. HALMOS, *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity* (New York, 1957).
[7] F. MAEDA, *Kontinuierlichen Geometrien* (Berlin, 1958).
[8] O. ORE, Theory of equivalence relations, *Duke Math. Journal*, **9** (1942), pp. 573–627.

THREE EXAMPLES ON HOPFICITY IN TORSION-FREE ABELIAN GROUPS

By

A. L. S. CORNER (Oxford, England)

(*Presented by* L. RÉDEI)

A group G is said to be *hopfian* (or a HOPF group) if every homomorphism of G onto itself is an automorphism. For a brief discussion of hopficity in the context of abelian groups, see G. BAUMSLAG [1]. All the groups in this note are torsion-free abelian, and written additively.

In this note I give three examples of groups which exhibit pathologies associated with the concept of hopficity. The first is a non-hopfian group whose automorphism group is of order two; since a group with automorphism group of order two is necessarily (directly) indecomposable, this provides at once an example of a non-hopfian group with finite automorphism group and an example of an indecomposable non-hopfian group ([1], Problems 3 and 4). The second is a non-hopfian group which is the direct sum of two hopfian groups: this is the unpublished example mentioned in [1]. The third, and deepest, example is a hopfian group G whose 'square' $G+G$ is non-hopfian. In fact, both the hopficity of G and the non-hopficity of $G+G$ are extreme: for the non-zero endomorphisms of G are all monomorphisms, while $G+G$ is isomorphic with a proper direct summand of itself.

Although the second example is obviously less far-reaching than the third, it is much simpler to construct, and I have included it for that reason. The first two examples are constructed by methods similar to those used by B. JÓNSSON in his construction of groups of finite rank with direct-decomposition pathologies [5]. The third example could also be handled in the same way, but the major difficulty is ring-theoretical rather than group-theoretical and it seems more convenient to base the construction on the main theorem of [2].

EXAMPLE 1. *A non-hopfian group whose automorphism group is of order two.*

Let a_k, b_k, c_n $(k, n \in Z; n \geqq 0)$ be a basis of a vector space V over the rationals, where Z denotes as usual the set of all integers, and let p, q, r, s, t be distinct prime numbers. Define G as a subgroup of V by

$$G = \{p^{-\infty}a_k,\ q^{-\infty}b_k,\ r^{-\infty}c_k,\ s^{-\infty}(a_k+b_k),\ t^{-\infty}(a_{k-1}+b_k+c_k) \quad (k \in Z)\},$$

where $c_k = 0$ for $k < 0$, and $p^{-\infty}a_k$ is an abbreviation for the set of elements $p^{-m}a_k$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Consider the endomorphism $\tilde{\omega}$ of V defined by

$$a_k\tilde{\omega} = a_{k-1}, \quad b_k\tilde{\omega} = b_{k-1} \quad (k \in Z),$$

$$c_n\tilde{\omega} = c_{n-1} \ (n \in Z, n \geqq 1), \quad c_0\tilde{\omega} = 0.$$

Then $c_k\tilde{\omega} = c_{k-1}$ $(k \in Z)$, so that $\tilde{\omega}$ maps the defining system of generators of G

onto itself; therefore ω induces a homomorphism ω of G onto itself which has non-trivial kernel. So G is certainly non-hopfian. Moreover, since $a_0\omega^n = a_{-n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, and these elements are linearly independent, the subring of the endomorphism ring $\mathbf{E}(G)$ generated by ω is isomorphic with $\mathbf{Z}[X]$, the ring of polynomials in a single indeterminate X with integer coefficients. We shall prove that this subring exhausts the whole of $\mathbf{E}(G)$, that is, that every endomorphism of G can be expressed as a polynomial in ω with integer coefficients. Since the only units of $\mathbf{Z}[X]$ are ± 1, this is enough to prove that the automorphism group of G is of order 2.

Consider an arbitrary endomorphism φ of G. Now it is easy to see that all the generators of each of the five types generate a fully invariant subgroup of G. Therefore for each $k \in Z$ there exist rational numbers $\alpha_k^h, \beta_k^h, \gamma_k^h, \xi_k^h, \eta_k^h$ $(h \in Z)$, almost all zero, such that

$$a_k\varphi = \sum_h \alpha_k^h a_h, \quad b_k\varphi = \sum_h \beta_k^h b_h, \quad c_k\varphi = \sum_h \gamma_k^h c_h,$$

$$(a_k + b_k)\varphi = \sum_h \xi_k^h (a_h + b_h), \quad (a_{k-1} + b_k + c_k)\varphi = \sum_h \eta_k^h (a_{h-1} + b_h + c_h),$$

where $\gamma_k^h = 0$ if $h < 0$ or $k < 0$. Substituting, we get

$$\sum_h (\alpha_k^h a_h + \beta_k^h b_h) = \sum_h \xi_k^h (a_h + b_h),$$

$$\sum_h (\alpha_{k-1}^h a_h + \beta_k^h b_h + \gamma_k^h c_h) = \sum_h \eta_k^h (a_{h-1} + b_h + c_h),$$

for each $k \in Z$. Hence, equating coefficients,

$$\alpha_k^h = \beta_k^h = \xi_k^h, \quad \alpha_{k-1}^h = \eta_k^{h+1}, \quad \beta_k^h = \eta_k^h \qquad (h, k \in Z),$$

$$\gamma_k^h = \eta_k^h \qquad (h, k \in Z;\ h \geqq 0).$$

Thus $\alpha_k^h = \beta_k^h = \xi_k^h = \eta_k^h$ $(h, k \in Z)$; and if $h \geqq 0$ each of these is equal also to γ_k^h. Moreover, $\alpha_k^h = \eta_{k+1}^{h+1} = \alpha_{k+1}^{h+1}$, so that $\alpha_k^h = \alpha_{k-h}^0$; and we observe that $\alpha_k^0 = \gamma_k^0$ vanishes whenever $k < 0$. Note also that $\alpha_k^0 = \alpha_0^{-k}$, so that all but a finite number of the α_k^0 are zero; and, since $\alpha_k^0 = \beta_k^0$, where the denominators of α_k^0 and of β_k^0 (in reduced form) can only be powers of the distinct primes p and q, respectively, the α_k^0 must all be integers. Finally, we have for each $k \in Z$,

$$a_k\varphi = \sum_h \alpha_{k-h}^0 a_h = \sum_{n \geqq 0} \alpha_n^0 a_{k-n} = a_k \sum_{n \geqq 0} \alpha_n^0 \omega^n,$$

and similarly $b_k\varphi = b_k \sum_{n \geqq 0} \alpha_n^0 \omega^n$, $c_k\varphi = c_k \sum_{n \geqq 0} \alpha_n^0 \omega^n$. It follows that $\varphi = \sum_{n \geqq 0} \alpha_n^0 \omega^n$, so that φ is a polynomial in ω with integer coefficients, as asserted.

EXAMPLE 2. *A non-hopfian group which is the direct sum of two hopfian groups.*

Let a_k, b_k, x_k, y_k $(k \in Z)$ be a basis of a vector space V over the rationals, and let p, q_k, r, s $(k \in Z)$ be distinct prime numbers. Then there exist integers r^*, s^* such that $rs^* - sr^* = 1$. For each $k \in Z$ define c_k, d_k by

$$a_k = rc_k + r^* d_k,$$

$$b_k = sc_k + s^* d_k.$$

Define A, B, C, D as subgroups of V by

$$A = \sum_k \left\{ p^{-\infty} a_k,\ q_k^{-\infty} x_k,\ \frac{1}{r}(a_k + x_k) \right\},$$

$$B = \sum_k \left\{ p^{-\infty} b_k,\ q_k^{-\infty} y_k,\ \frac{1}{s}(b_k + y_k) \right\},$$

$$C = \sum_k \{ p^{-\infty} c_k \},$$

$$D = \sum_k \left\{ p^{-\infty} d_k,\ q_k^{-\infty} x_k,\ q_k^{-\infty} y_k,\ \frac{1}{r}(r^* d_k + x_k),\ \frac{1}{s}(s^* d_k + z_k) \right\}.$$

It is easily verified that $A \cap B = C \cap D = 0$ and that

$$A + B = C + D$$

(cf. [5] § 1, or [4] Chap. VII, Ex. 17 (c)). As a direct sum of infinitely many isomorphic summands C is certainly non-hopfian; therefore so is $A + B$. It remains to be proved that A and B are both hopfian; and it is clearly enough to consider A.

Let $\varphi: A \to A$ be an epimorphism, and suppose for a contradiction that φ is not a monomorphism. Now the subgroups $\{p^{-\infty} a_k\ (k \in Z)\}$, $\{q_k^{-\infty} x_k\}$ $(k \in Z)$ of A are fully invariant and generate their direct sum in A; moreover the pure subgroup of A generated by their direct sum is the whole of A. It follows that φ induces epimorphic endomorphisms of these subgroups, and that at least one of these induced endomorphisms is not a monomorphism. But groups of finite rank are obviously hopfian, so φ induces an automorphism of each subgroup $\{q_k^{-\infty} x_k\}$; therefore, for each $k \in Z$,

$$x_k \varphi = \xi_k x_k,$$

where the rational number ξ_k is plus or minus a power of q_k. Consequently the endomorphism of $\{p^{-\infty} a_k\ (k \in Z)\}$ induced by φ cannot be a monomorphism, so there exist integers η_k $(k \in Z)$, almost all zero and of highest common factor unity, such that

$$\left(\sum_k \eta_k a_k\right)\varphi = 0.$$

But then the element $\left(\sum_k \eta_k (a_k + x_k)\right)\varphi = \sum_k \eta_k \xi_k x_k$ is divisible by s in A and therefore (by purity) also in $\{p^{-\infty} a_k\ (k \in Z)\}$; since $\xi_k x_k \notin sA$, it follows that $s \mid \eta_k\ (k \in Z)$, contrary to our choice of the η_k. The contradiction shows that φ must be a monomorphism and so an automorphism of A; and we have proved that A is hopfian.

EXAMPLE 3. *A hopfian group whose square is non-hopfian.*

The existence of this example is a consequence of the following two lemmas, the first of which complements Theorem A of [2]. (By a *ring* we mean here an associative ring with identity.)

LEMMA 1. *Let* $\mathbf{A}$ *be a countable ring whose additive group is torsion-free and reduced. Then there exists a countable, reduced, torsion-free group* G *whose endomorphism ring* $\mathbf{E}(G)$ *is isomorphic with* $\mathbf{A}$, *and such that if* $\omega \in \mathbf{E}(G)$ *then*

(i) *a necessary and sufficient condition for* ω *to be a monomorphism is that* ω *be right-cancellable in* $\mathbf{E}(G)$, *that is, that if* $\omega' \in \mathbf{E}(G)$ *and* $\omega'\omega = 0$, *then* $\omega' = 0$;

(ii) *a necessary (but not sufficient) condition for* ω *to be an epimorphism is that* ω *be a right unit of the quasi-endomorphism ring* $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{E}(G)$, *that is, that there exist* $\omega' \in \mathbf{E}(G)$ *such that* $\omega'\omega$ *is a non-zero integral multiple of the identity of* $\mathbf{E}(G)$.

LEMMA 2. *There exists a countable ring* $\mathbf{A}$ *whose additive group is free, such that* $\mathbf{A}$ *has no divisors of zero and there exists a* 2×2 *matrix over* $\mathbf{A}$ *which has a left inverse but no right inverse.*

Suppose that we have proved Lemmas 1 and 2. Apply Lemma 1 to a ring $\mathbf{A}$ with the properties of Lemma 2. The resulting group G has the property that every non-zero endomorphism of G is a monomorphism. In particular, every homo morphism of G onto itself is an automorphism of G; in other words, G is hopfian. Consider the square $G+G$. Its endomorphism ring $\mathbf{E}(G+G)$ is isomorphic with the ring of 2×2 matrices over $\mathbf{A}$. Therefore there is an endomorphism ω of $G+G$ which has a left inverse ω' (say), but no right inverse. Thus $\omega'\omega = 1$, while $\omega\omega'$ is an idempotent not equal to 1. Consequently $\omega\omega'$ projects $G+G$ onto the proper direct summand $(G+G)\omega\omega' = H$ (say). But the homomorphisms $G+G \to H$ and $H \to G+G$ induced respectively by ω' and by ω are easily seen to be inverses of one another ([3] Lemma 2). Hence $G+G$ is isomorphic with its proper direct summand H; and this implies that $G+G$ is non-hopfian.

PROOF OF LEMMA 1. We use the notation and results of [2]. Take the group G constructed in the proof of Theorem A of [2]. We recall that G is the pure subgroup of $\hat{A}$ (the completion of the additive group A of $\mathbf{A}$) generated by A and the subgroups $(\alpha_x 1 + \beta_x x)\mathbf{A}$ $(x \in A)$, where α_x, β_x $(x \in A)$ are suitably chosen elements of the completion $\hat{\mathbf{Z}}$ of the ring $\mathbf{Z}$ of integers; G is a sub-$\mathbf{A}$-module of $\hat{A}$, and every endomorphism of the group G coincides with the operation of scalar multiplication in the $\mathbf{A}$-module G by some element of $\mathbf{A}$. Let $\omega \in \mathbf{E}(G)$, and let a be the corresponding element of $\mathbf{A}$, so that $g\omega = ga$ $(g \in G)$.

(i) Suppose that ω is right-cancellable in $\mathbf{E}(G)$, and let $g \in \operatorname{Ker} \omega$. For some positive integer q we may write

$$qg = b + \sum_{x \in A} (\alpha_x 1 + \beta_x x) b_x, \tag{1}$$

where b and the b_x are elements of $\mathbf{A}$, almost all zero. Then

$$0 = qg\omega = qga = ba + \sum_{x \in A} (\alpha_x b_x a + \beta_x x b_x a).$$

Therefore by Lemma 2. 1 of [2], $ba = b_x a = x b_x a = 0$ $(x \in A)$. But, bearing in mind the isomorphism $\mathbf{E}(G) \cong \mathbf{A}$, we know that a is right-cancellable in $\mathbf{A}$. Therefore $b = b_x = 0$ $(x \in A)$, from which it follows at once that $g = 0$. Thus ω is a monomorphism.

The converse is trivial, and holds in an arbitrary group: if $\omega'\omega = 0$, where $\omega', \omega \in \mathbf{E}(G)$, then $G\omega' \subseteq \operatorname{Ker} \omega$.

(ii) Suppose that ω is an epimorphism. Since the identity 1 of $\mathbf{A}$ belongs to G, there is an element $g \in G$ such that $1 = g\omega = ga$; and, writing g in the form (1), we have

$$q1 = ba + \sum_{x \in A} (\alpha_x b_x a + \beta_x x b_x a).$$

Lemma 2. 1 of [2] implies that $ba=q1$; and letting ω' be the element of $\mathbf{E}(G)$ corresponding to b in the isomorphism $\mathbf{E}(G)\cong\mathbf{A}$, we have $\omega'\omega=q1_G$, as required.

REMARK. We make no use of Part (ii) of Lemma 1 and include it merely for completeness. For a group G constructed as in the proof of Theorem A of [2], it appears to be difficult to derive a useful necessary and sufficient condition for an endomorphism of G to be an epimorphism. However Lemma 1 does show that while the groups constructed in this way for a given ring $\mathbf{A}$ have in an obvious sense all the monomorphisms that are 'available in $\mathbf{A}$', they have relatively few epimorphisms.

PROOF OF LEMMA 2. In what follows we restrict the letters i and j, with or without suffixes, to the values 0 and 1 only. Let $\mathbf{S}$ be the free semigroup with identity generated by elements a_i^j, b_i^j, and let $\mathbf{ZS}$ be the semigroup ring of $\mathbf{S}$; we recall that the additive group of $\mathbf{ZS}$ is free on $\mathbf{S}$ as basis. Let $\mathbf{I}$ be the ideal of $\mathbf{ZS}$ generated by the elements

$$c_i^j=a_i^0b_0^j+a_i^1b_1^j-\delta_i^j, \tag{2}$$

where δ_i^j is the Kronecker delta, and take $\mathbf{A}=(\mathbf{ZS})/\mathbf{I}$. Let α_i^j, β_i^j be the images of a_i^j, b_i^j, respectively, under the canonical epimorphism $\mathbf{ZS}\to\mathbf{A}$. Then it follows from (2) that

$$\alpha_i^0\beta_0^j+\alpha_i^1\beta_1^j=\delta_i^j; \tag{3}$$

indeed, $\mathbf{A}$ is by construction the ring freely generated by the α_i^j, β_i^j subject to the relations (3). We prove that $\mathbf{A}$ has the properties required for Lemma 2.

Let $\mathbf{J}$ be the ideal of the semigroup $\mathbf{S}$ generated by the products $a_i^0b_0^j$, and write $\mathbf{T}=\mathbf{S}\setminus\mathbf{J}$ for the complement; thus a word in the a_i^j, b_i^j belongs to $\mathbf{T}$ if and only if it contains no subword of the form $a_i^0b_0^j$. Consider an element $s\in\mathbf{S}$; s is uniquely expressible in the form

$$s=t_0a_{i_1}^0b_0^{j_1}t_1\ \dots\ t_{m-1}a_{i_m}^0b_0^{j_m}t_m, \tag{4}$$

where $m\geqq 0$ and each t_k belongs to $\mathbf{T}$; we set $\mu(s)=m$ and

$$s^*=t_0c_{i_1}^{j_1}t_1\ \dots\ t_{m-1}c_{i_m}^{j_m}t_m. \tag{5}$$

Note that s belongs to $\mathbf{J}$ if and only if $\mu(s)\geqq 1$.

Let λ be the usual length function on the semigroup $\mathbf{S}$ defined as the homomorphism of $\mathbf{S}$ into the additive semigroup of natural numbers that takes the value 1 on each of the generators a_i^j, b_i^j. For each integer n define $\mathbf{S}^n$ to be the set of all s ($\in\mathbf{S}$) such that $\lambda(s)\leqq n$. Then $\mathbf{S}^n=\emptyset$ if $n<0$, $[1]=\mathbf{S}^0\subseteqq\mathbf{S}^1\subseteqq\mathbf{S}^2\subseteqq\dots$, $\mathbf{S}^m\mathbf{S}^n\subseteqq\subseteqq\mathbf{S}^{m+n}$, and the union of all the $\mathbf{S}^n$ exhausts $\mathbf{S}$; so that $\mathbf{S}^n$ ($n\in Z$) is an exhaustive increasing filtration on the semigroup $\mathbf{S}$.

For any subset $\mathbf{U}$ of $\mathbf{ZS}$, denote by $\mathbf{ZU}$ the subgroup of $\mathbf{ZS}$ that it generates. For $n=0, 1, 2, \dots$ and $m=-1, 0, 1, \dots, n$ take $\mathbf{S}_m^n$ to be the union of $\mathbf{S}^{n-1}$ with the set of all s ($\in\mathbf{S}$) such that $\lambda(s)=n$ and $\mu(s)\leqq m$. Then $\mathbf{S}^{n-1}=\mathbf{S}_{-1}^n\subseteqq\mathbf{S}_0^n\subseteqq\dots$ $\dots\subseteqq\mathbf{S}_n^n=\mathbf{S}^n$; indeed, since clearly $2\mu(s)\leqq\lambda(s)$ for each $s\in\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_m^n=\mathbf{S}^n$ as soon as $2m\geqq n$. Thus the $\mathbf{S}_m^n$ form an ascending sequence when taken in lexicographical

order of the ordered pairs (n, m). We prove, by induction on position in this sequence, that the family $[s^*\ (s\in\mathbf{S}^n_m)]$ is a basis of $\mathbf{ZS}^n_m$. Certainly the empty family $[s^*\ (s\in\mathbf{S}^0_{-1})]$ is a basis of the zero subgroup $\mathbf{ZS}^0_{-1}$. Suppose that $\mathbf{S}^n_m$ comes later than $\mathbf{S}^0_{-1}$ in the sequence, and that $[s^*\ (s\in\mathbf{S}^h_k)]$ is a basis of $\mathbf{ZS}^h_k$ whenever $\mathbf{S}^h_k$ comes earlier than $\mathbf{S}^n_m$. If $m=-1$, $\mathbf{S}^n_m$ coincides with an earlier member of the sequence, and the inductive step is trivial. Suppose then that $m\geqq 0$. Consider an element $s\in\mathbf{S}^n_m\setminus\mathbf{S}^n_{m-1}$, so that $\lambda(s)=n$, $\mu(s)=m$; and take s in the form (4). If $m=0$, then $s^*=s$. If $m\geqq 1$, then on substituting from (2) in (5) we find that

$$s^*=t_0(a^0_{i_1}b^{j_1}_0+a^1_{i_1}b^{j_1}_1-\delta^{j_1}_{i_1})t_1\ \ldots\ t_{m-1}(a^0_{i_m}b^{j_m}_0+a^1_{i_m}b^{j_m}_1-\delta^{j_m}_{i_m})t_m\equiv$$

$$\equiv t_0a^0_{i_1}b^{j_1}t_1\ \ldots\ t_{m-1}a^0_{i_m}b^{j_m}_0t_m=s\ \ (\mathrm{mod}\ \mathbf{ZS}^n_{m-1}).$$

Thus in either case $s\equiv s^*\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{ZS}^n_{m-1})$. Since the family of elements of $\mathbf{S}^n_m\setminus\mathbf{S}^n_{m-1}$ is linearly independent mod $\mathbf{ZS}^n_{m-1}$ and generates $\mathbf{ZS}^n_m$ mod $\mathbf{ZS}^n_{m-1}$, this implies that $[s^*(s\in\mathbf{S}^n_m\setminus\mathbf{S}^n_{m-1})]$ has the same properties, so that it is a basis of a direct complement in $\mathbf{ZS}^n_m$ of $\mathbf{ZS}^n_{m-1}$. But by the inductive hypothesis $[s^*\ (s\in\mathbf{S}^n_{m-1})]$ is a basis of $\mathbf{ZS}^n_{m-1}$. It follows that $[s^*\ (s\in\mathbf{S}^n_m)]$ is a basis of $\mathbf{ZS}^n_m$; and the proof of the inductive step is complete.

In particular, we have now proved that for each integer n, $[s^*\ (s\in\mathbf{S}^n)]$ is a basis of the subgroup $\mathbf{ZS}^n$ of $\mathbf{ZS}$. Since $\mathbf{ZS}$ is the union of the ascending sequence of subgroups $\mathbf{ZS}^n$, it follows that $[s^*\ (s\in\mathbf{S})]$ is a basis of $\mathbf{ZS}$. Now by definition $\mathbf{I}$ is the ideal of $\mathbf{ZS}$ generated by the c^j_i, and $\mathbf{J}$ is the ideal of $\mathbf{S}$ generated by the $a^0_ib^j_0$. Therefore by (4) and (5), $s^*\in\mathbf{I}$ whenever $s\in\mathbf{J}$. Moreover, it follows from what we have just proved that every element of $\mathbf{I}$ is a linear combination of elements of the form $s^*_1c^j_is^*_2$, where $s_1, s_2\in\mathbf{S}$; and we observe that $s^*_1c^j_is^*_2=s^*$, where $s=s_1a^0_ib^j_0s_2\in\mathbf{J}$. Hence the subfamily $[s^*\ (s\in\mathbf{J})]$ is a basis of $\mathbf{I}$. Since $\mathbf{ZT}$ has as basis the complementary subfamily $[s^*\ (s\in\mathbf{T})]=[t\ (t\in\mathbf{T})]$, it follows that $\mathbf{ZS}$ is the direct sum of its subgroups $\mathbf{I}$ and $\mathbf{ZT}$. Therefore the additive group of $\mathbf{A}\ (=(\mathbf{ZS})/\mathbf{I})$ is isomorphic with $\mathbf{ZT}$, and so is free of countable rank.

Now $b^0_0a^1_0$ and $b^1_0a^1_1$ are distinct elements of $\mathbf{T}$; so their sum is a non-zero element of $\mathbf{ZT}$ and as such cannot belong to the direct complement $\mathbf{I}$. Passing to the quotient, we deduce that in $\mathbf{A}$, $\beta^0_0\alpha^1_0+\beta^1_0\alpha^1_1\neq 0$; taken in conjunction with (3), this shows that

$$\begin{bmatrix}\alpha^0_0 & \alpha^1_0\\ \alpha^0_1 & \alpha^1_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^0_0 & \beta^1_0\\ \beta^0_1 & \beta^1_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}\beta^0_0 & \beta^1_0\\ \beta^0_1 & \beta^1_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha^0_0 & \alpha^1_0\\ \alpha^0_1 & \alpha^1_1\end{bmatrix}.$$

Thus (β^j_i) is a 2×2 matrix over $\mathbf{A}$ with a left inverse but no right inverse.

It only remains for us to prove that $\mathbf{A}$ has no zero-divisors. To this end, write $\mathbf{I}^n=\mathbf{I}+\mathbf{ZS}^n$, for each integer n; then $\mathbf{I}^n=\mathbf{I}$ if $n<0$, $\mathbf{I}^m\mathbf{I}^n\subseteqq\mathbf{I}^{m+n}$, and $\mathbf{ZS}$ is the union of the ascending sequence of subgroups $\mathbf{I}^n$. Note that $[s^*(s\in\mathbf{J}\cup\mathbf{S}^n)]$ is a basis of $\mathbf{I}^n$, so that $[s^*(s\in(\mathbf{J}\cup\mathbf{S}^n)\setminus(\mathbf{J}\cup\mathbf{S}^{n-1}))]=[t(t\in\mathbf{T},\lambda(t)=n)]$ is a basis of a direct complement of $\mathbf{I}^{n-1}$ in $\mathbf{I}^n$. Write also $\lambda'(x)=-\infty$ if $x\in\mathbf{I}$, $\lambda'(x)=n$ if $x\in\mathbf{I}^n\setminus\mathbf{I}^{n-1}$; then λ' is defined on the whole of $\mathbf{ZS}$, and for all $x, y\in\mathbf{ZS}$ we have

$$\lambda'(xy)\leqq\lambda'(x)+\lambda'(y). \tag{6}$$

To prove that $\mathbf{A}$ has no zero-divisors it is enough to show that strict inequality is impossible in (6); for since $\lambda'(x)=-\infty$ if and only if $x\in\mathbf{I}$ this implies the equivalent

result that **I** is a prime ideal of **ZS**. Suppose for a contradiction that $x, y \in \mathbf{ZS}$ are such that strict inequality holds for them in (6). Then $n = \lambda'(x)$ and $m = \lambda'(y)$ must both be non-negative integers, and we may write

$$x = x' + \sum_p \xi_p x_p, \quad y = y' + \sum_q \eta_q y_q,$$

where $x' \in \mathbf{I}^{n-1}$, $y' \in \mathbf{I}^{m-1}$, the x_p are distinct elements of **T** such that $\lambda(x_p) = n$, the y_q are distinct elements of **T** such that $\lambda(y_q) = m$, the ξ_p and η_q are non-zero integers, and at least one term $\xi_p x_p$ and at least one term $\eta_q y_q$ are present. Therefore

$$(\sum_p \xi_p x_p)(\sum_q \eta_q y_q) \equiv xy \equiv 0 \pmod{\mathbf{I}^{n+m-1}}. \tag{7}$$

Let p' (p'') run over the suffixes p for which x_p does (does not) end with an a_i^0; and let q' (q'') run over the suffixes q for which y_q does (does not) begin with a b_0^j. For each p' we put $\bar{x}_{p'} = x'_{p'} a_i^1$, where $x'_{p'}$ ($\in \mathbf{T}$) and i are such that $x_{p'} = x'_{p'} a_i^0$; and for each q' we put $\bar{y}_{q'} = b^j y'_{q'}$, where $y'_{q'}$ ($\in \mathbf{T}$) and j are such that $y_{q'} = b_0^j y'_{q'}$. Then (2) implies that

$$x_{p'} y_{q'} = x'_{p'}(-a_i^1 b_1^j + c_i^j + \delta_i^j) y'_{q'} \equiv -\bar{x}_{p'} \bar{y}_{q'} \pmod{\mathbf{I}^{n+m-1}};$$

so it follows from (7) that the element

$$-\sum_{p',q'} \xi_{p'} \eta_{q'} \bar{x}_{p'} \bar{y}_{q'} + \sum_{p',q''} \xi_{p'} \eta_{q''} x_{p'} y_{q''} + \sum_{p'',q'} \xi_{p''} \eta_{q'} x_{p''} y_{q'} + \sum_{p'',q''} \xi_{p''} \eta_{q''} x_{p''} y_{q''} \tag{8}$$

belongs to $\mathbf{I}^{n+m-1}$. But the words of the four types

$$\bar{x}_{p'} \bar{y}_{q'}, \; x_{p'} y_{q''}, \; x_{p''} y_{q'}, \; x_{p''} y_{q''} \tag{9}$$

are all elements of **T** of length $n+m$, so that they belong to a basis of a direct complement of $\mathbf{I}^{n+m-1}$ in $\mathbf{I}^{n+m}$. Consequently (8) must vanish; that is, the terms of (8) must cancel out. Now if two words in the list (9) are of one and the same type they differ either in their first n letters or in their last m letters, and if they are of different types they must differ in their n-th or $(n+1)$-th letter unless one is of the first type and the other is of the fourth. Thus the only cancellations possible in (8) are between terms of the first sum and terms of the fourth. Therefore the second and third sums in (8) must be empty. But we know that at least one $\xi_p x_p$ and one $\eta_q y_q$ are present, so one at least of the first and fourth sums is non-empty; and since its terms must cancel with terms of the other, both must be non-empty. However, if $-\xi_{p'} \eta_{q'} \bar{x}_{p'} \bar{y}_{q'}$ is a term of the first sum and $\xi_{p''} \eta_{q''} x_{p''} y_{q''}$ is a term of the fourth, then $\xi_{p'} \eta_{q''} x_{p'} y_{q''}$ is a term of the second sum, which therefore cannot be empty. The contradiction completes the proof of Lemma 2.

Note however that the fact that strict inequality is impossible in (6) implies at once that the congruence $xy \equiv 1 \pmod{\mathbf{I}}$ has only the trivial solutions $x \equiv y \equiv \pm 1$ in **ZS**. Therefore ± 1 are the only units of **A**; and it follows that the group G of Example 3 has automorphism group of order 2.

In conclusion, I would like to thank DR. M. NEWMAN for the suggestion to me that JÓNSSON techniques could be used to construct two hopfian groups whose direct sum is non-hopfian.

(Received 15 September 1964)

References

[1] G. BAUMSLAG, Hopficity and Abelian Groups, *Topics in Abelian Groups*, Scott (Foresman and Co., Chicago, 1963), pp. 331–335.

[2] A. L. S. CORNER, Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring, *Proc. London Math. Soc.*, **13** (1963), pp. 687–710.

[3] A. L. S. CORNER, On a conjecture of Pierce concerning direct decompositions of abelian groups, *Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups, Tihany* (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1964), pp. 43–48.

[4] L. FUCHS, *Abelian groups* (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1958).

[5] B. JÓNSSON, On direct decompositions of torsionfree abelian groups, *Math. Scand.*, **5** (1957), pp. 230–235.

ON A PROBLEM OF STEINHAUS

By

P. RÉVÉSZ (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Introduction

H. STEINHAUS [1] raised the following problem:

"Does there exist a family F of measurable functions such that

1. $|f(t)| = 1$ for $f \in F$

2. For each sequence $\{f_n(t)\}$ where $f_n(t) \in F$ the sequence

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$$

is divergent for almost all t?"

As far as I know the first result in connection with this problem is due to D. G. AUSTIN[1] who proved that if $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is a sequence of random variables with possible values 0 and 1, then it contains a subsequence $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots$ for which the strong law of large numbers is valid, i. e. there exists a random variable η such that

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_{n_1} + \xi_{n_2} + \ldots + \xi_{n_k}}{k} \to \eta\right\} = 1.$$

Somewhat later A. RÉNYI (oral communication) proved that if $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is a uniformly bounded sequence of random variables then it contains a subsequence for which the strong law of large numbers is valid. So RÉNYI has solved the original problem of STEINHAUS.

At the end of 1963 P. R. HALMOS asked: is the condition of uniform boundedness necessary in the theorem of RÉNYI? Answering the question of HALMOS I have proved (making use of the method of RÉNYI) in a letter which was sent to HALMOS in December 1963 the following:[2]

THEOREM 1. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of random variables for which $\mathbf{M}(\xi_i^2) \leqq K$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (where K is a positive constant). Then there exists a subsequence $n_1 < n_2 < \ldots$ of integers and a random variable η such that*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_{n_1} + \xi_{n_2} + \ldots + \xi_{n_k}}{k} \to \eta\right\} = 1.$$

In this paper we prove the following sharper

[1] Professor DARLING was so kind to inform me about this fact. DARLING himself gave another proof independently.

[2] Throughout the paper $\mathbf{M}(\ldots)$ denotes the expectation of the random variable in the brackets and $\mathbf{P}(\ldots)$ the probability of the event in the brackets.

THEOREM 2. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of random variables for which $\mathbf{M}(\xi_i^2) \leqq K$ $(i=1, 2, \ldots)$. Then there exists a subsequence $n_1 < n_2 < \ldots$ of integers and a random variable η such that*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i(\xi_{n_i} - \eta)$$

is convergent with probability 1 where $c_1, c_2, \ldots$ is an arbitrary sequence of real numbers for which $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$.

This theorem is well known under the condition $\mathbf{M}(\xi_i \xi_j) = 0$ $(i \neq j)$ (see for instance [6], p. 156).

This theorem and the KRONECKER lemma evidently imply

THEOREM 2. a. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of random variables for which $\mathbf{M}(\xi_i^2) \leqq K$ $(i=1, 2, \ldots)$. Then there exists a subsequence $n_1 < n_2 < \ldots$ of integers and a random variable η such that*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{c_1(\xi_{n_1} - \eta) + c_2(\xi_{n_2} - \eta) + \ldots + c_k(\xi_{n_k} - \eta)}{k} \to 0\right\} = 1$$

where $c_1, c_2, \ldots$ is an arbitrary sequence of real numbers for which $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{k^2} < +\infty$.

Evidently Theorem 2 is a generalization of Theorem 1 but we also give the proof of Theorem 1, because we think that the method of this proof is interesting in itself.

Similar questions are treated in the papers [2] and [3], where the authors prove that any uniformly bounded orthonormal sequence of random variables contains a subsequence for which the law of iterated logarithm and the central limit theorem are valid. Actually it is possible to obtain similar results omitting the condition of orthonormality, if we use the fact that any uniformly bounded sequence of random variables is weakly compact in the space of square integrable random variables (see the proof of our Theorem 1). In our proofs we use this fact, further — especially in the proof of Theorem 2 — also the method of the paper [2]; the well known method of proof of KOLMOGOROV's strong law of large numbers will be used too.

The problem what happens if we substitute the condition $\mathbf{M}(\xi_i^2) \leqq K$ by the condition $\mathbf{M}(|\xi_i|^{1+\varepsilon}) \leqq K$ $(0 \leqq \varepsilon < 1)$ in Theorem 1 is open.[3]

§ 1. The proof of Theorem 1

Our condition

$$\mathbf{M}(\xi_i^2) \leqq K \qquad (i=1, 2, \ldots) \tag{1}$$

implies that the sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is weakly compact in the Hilbert space of square

[3] *Added in proof (28. 9. 1965).* In connection with this problem very recently J. KOMLÓS has proved that if $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is a sequence of random variables for which $\mathbf{M}(|\xi_i|) \leqq K$ then there exists a subsequence $n_1, n_2, \ldots$, of the integers and a random variable η such that

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_{n_1} + \xi_{n_2} + \ldots + \xi_{n_k}}{k} \to \eta\right\} = 1.$$

integrable random variables, i. e. there exists a subsequence $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots$ of the given sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ and a random variable η such that

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{M}(\xi_{n_k}\psi) = \mathbf{M}(\eta\psi)$$

where ψ is any square integrable random variable. Let us put

$$\xi_{n_k} - \eta = \zeta_k. \tag{2}$$

Then ζ_k converges to 0 weakly, therefore there exists a subsequence $\{\zeta_{n_k}\}$ of the sequence $\{\zeta_k\}$ such that

$$|M(\zeta_{n_k}\zeta_{n_l})| \leqq \frac{1}{2^k} \qquad (l=1, 2, \ldots, k-1;\ k=2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Put

$$\sigma_k = \frac{\zeta_{n_1} + \zeta_{n_2} + \ldots + \zeta_{n_k}}{k}.$$

(1) and (3) easily imply that

$$\mathbf{M}(\sigma_k^2) = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

therefore

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}(\sigma_{k^2}^2) < \infty.$$

Using Beppo Levi's theorem we obtain

$$\mathbf{P}\{\sigma_{k^2} \to 0\} = 1. \tag{4}$$

Let N be an arbitrary integer between k^2 and $(k+1)^2$ (i. e. $k^2 \leqq N < (k+1)^2$). Then we have

$$\sigma_N = \frac{k^2}{N}\sigma_{k^2} + \frac{\zeta_{n_{k^2+1}} + \zeta_{n_{k^2+2}} + \ldots + \zeta_{n_N}}{N}$$

where by (4)

$$\mathbf{P}\left\{\frac{k^2}{N}\sigma_{k^2} \to 0\right\} = 1.$$

Let us put

$$\frac{\zeta_{n_{k^2+1}} + \zeta_{n_{k^2+2}} + \ldots + \zeta_{n_N}}{N} = \mu_{k,N}.$$

A simple calculation gives

$$\mathbf{M}(\mu_{k,N}^2) = O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

therefore

$$A_k = \sum_{N=k^2+1}^{(k+1)^2} \mathbf{M}(\mu_{k,N}^2) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

and thus

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty. \tag{5}$$

It follows from (5) by Chebyshev's inequality and the Borel—Cantelli lemma that for any $\varepsilon>0$ among the events

$$|\mu_{k,N}| \geqq \varepsilon$$

with probability 1 only finitely many will occur. So we have

$$\mathbf{P}\{\sigma_N \to 0\} = 1$$

and our Theorem 1 is proved.

§ 2. Proof of Theorem 2

Let us define the sequence $\{\zeta_k\}$ in the same way as we have already defined it in § 1 by (2). Namely let $\{\xi_{n_i}\}$ be a subsequence of $\{\xi_n\}$, which converges weakly to a random variable η and $\zeta_k = \xi_{n_k} - \eta$. Then ζ_k converges to 0 weakly, therefore we can select a subsequence $\{\zeta_{n_k}\}$ of the sequence $\{\zeta_k\}$ as follows:

$$\zeta_{n_1} = \zeta_1;$$

n_2 is an integer for which

$$|\mathbf{M}(\zeta_{n_2}\zeta_{n_1})| \leqq \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \left|\int_{A_1^{(1)}(1)} \zeta_{n_2}\zeta_{n_1} d\mathbf{P}\right| \leqq \frac{1}{2}$$

where[4]

$$A_1^{(1)}(1) = \left\{\omega : |\zeta_{n_1}(\omega)| \geqq \frac{1}{2}\right\}.$$

The integer n_3 is chosen so that

$$|\mathbf{M}(\zeta_{n_3}\zeta_{n_1})| \leqq \frac{1}{4}, \quad |\mathbf{M}(\zeta_{n_3}\zeta_{n_2})| \leqq \frac{1}{4}$$

further

$$\left|\int_{A_1^{(i)}(1)} \zeta_{n_3}\zeta_{n_1} d\mathbf{P}\right| \leqq \frac{1}{4}, \quad \left|\int_{A_1^{(i)}(1)} \zeta_{n_3}\zeta_{n_2} d\mathbf{P}\right| \leqq \frac{1}{4} \qquad (i=1,2)$$

$$\left|\int_{A_2^{(i)}(j)} \zeta_{n_3}\zeta_{n_1} d\mathbf{P}\right| \leqq \frac{1}{4}, \quad \left|\int_{A_2^{(i)}(j)} \zeta_{n_3}\zeta_{n_2} d\mathbf{P}\right| \leqq \frac{1}{4} \qquad (i=1,2;\ j=1,2)$$

should hold, where

$$A_1^{(i)}(1) = \left\{\omega : |\zeta_{n_1}(\omega)| \geqq \frac{1}{2^i}\right\} \qquad (i=1,2)$$

$$A_2^{(i)}(1) = \left\{\omega : |\zeta_{n_2} + \zeta_{n_1}| \geqq \frac{1}{2^i},\ |\zeta_{n_1}| < \frac{1}{2^i}\right\} \qquad (i=1,2)$$

$$A_2^{(i)}(2) = \left\{\omega : |\zeta_{n_2}| \geqq \frac{1}{2^i}\right\} \qquad (i=1,2).$$

[4] All random variables are defined on a probability space $\{\Omega, S, \mathbf{P}\}$. So $A_1^{(1)}(1)$ is an event $(A_1^{(1)}(1) \in S)$ containing those point of Ω for which $|\zeta_{n_1}(\omega)| \geqq \frac{1}{2}$.

If the sequence $n_1, n_2, \ldots, n_k$ is already defined, then we can choose the integer n_{k+1} so that the following inequalities should hold:

$$|\mathbf{M}(\zeta_{n_{k+1}}\zeta_{n_j})| \leqq \frac{1}{2^{k+1}} \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

and

$$\left| \int_{A_j^{(l)}(m)} \zeta_{n_{k+1}}\zeta_{n_p} d\mathbf{P} \right| \leqq \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$(j=m, m+1, \ldots, k;\ l=1, 2, \ldots, k;\ p=1, 2, \ldots, k;\ m=1, 2, \ldots, k)$$

where

$$A_j^{(l)}(m) = \left\{\omega: |\Theta_j^{(m)}| \geqq \frac{1}{2^l},\ |\Theta_{j-1}^{(m)}| < \frac{1}{2^l},\ |\Theta_{j-2}^{(m)}| < \frac{1}{2^l}, \ldots, |\Theta_m^{(m)}| < \frac{1}{2^l}\right\}$$

and

$$\Theta_j^{(m)} = \zeta_{n_m} + \zeta_{n_{m+1}} + \ldots + \zeta_{n_j}.$$

Now we can prove a lemma which is analogous to KOLMOGOROV's inequality.

LEMMA. *Put* $\eta_l = d_l\zeta_{n_l}$ $(l=1, 2, \ldots)$ *where* ζ_{n_l} *is the sequence of random variables defined above and* d_l *is an arbitrary sequence of real numbers such that* $|d_l| \leqq 1$ $(l=1, 2, \ldots)$. *Then we have for any* ε *with* $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$ *and for* $1 \leqq j < k$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{j \leqq l \leqq k} \left|\sum_{h=j}^{l} \eta_h\right| \geqq \varepsilon\right\} \leqq \frac{8K\sum_{l=j}^{k} d_l^2 + \frac{80}{2^j}}{\varepsilon^2}.$$

PROOF OF THE LEMMA. First of all we suppose that ε is one of the numbers $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^j}$.

Let us put

$$\Delta_l = \eta_j + \eta_{j+1} + \ldots + \eta_l \qquad (l=j, j+1, \ldots, k)$$

$$B = \{\omega: \sup_{j \leqq l \leqq k} |\Delta_l| \geqq \varepsilon\}$$

and

$$B_l = \{\omega: |\Delta_l| \geqq \varepsilon, |\Delta_{l-1}| < \varepsilon, \ldots, |\Delta_j| < \varepsilon\} \qquad (l=j, j+1, \ldots, k).$$

Clearly

$$B = \sum_{l=j}^{k} B_l.$$

Then we have

$$\mathbf{M}(\Delta_k^2) = \int_{\Omega} \Delta_k^2 d\mathbf{P} \leqq 2K\sum_{l=j}^{k} d_l^2 + \frac{4}{2^j},$$

$$\int_{\Omega} \Delta_k^2 d\mathbf{P} \geqq \int_{B} \Delta_k^2 d\mathbf{P} = \sum_{l=j}^{k} \int_{B_l} \Delta_k^2 d\mathbf{P}$$

and

$$\int_{B_l} \Delta_k^2 d\mathbf{P} = \int_{B_l} (\eta_j + \eta_{j+1} + \ldots + \eta_k)^2 d\mathbf{P} = \int_{B_l} (\eta_j + \eta_{j+1} + \ldots + \eta_l)^2 d\mathbf{P} +$$

$$+ \sum_{r=l+1}^{k} \int_{B_l} \eta_r^2 d\mathbf{P} + 2 \sum_{r=l+1}^{k} \sum_{q=j}^{r-1} \int_{B_l} \eta_q \eta_r d\mathbf{P} \geqq \int_{B_l} (\eta_j + \eta_{j+1} + \ldots + \eta_l)^2 d\mathbf{P} -$$

$$- \frac{8}{2^l} \geqq \varepsilon^2 \mathbf{P}(B_l) - \frac{8}{2^l}$$

therefore

$$2K \sum_{l=j}^{k} d^2 \geqq \varepsilon^2 \sum_{l=j}^{k} \mathbf{P}(B_l) - \frac{20}{2^j} = \varepsilon^2 \mathbf{P}(B) - \frac{20}{2^j}.$$

So we have proved our Lemma in the case $\varepsilon = \frac{1}{2^l}$ $(l = 1, 2, \ldots, j)$. We can obtain our inequality in the case $\frac{1}{2^{h-1}} \leqq \varepsilon < \frac{1}{2^h}$ $(h = 2, 3, \ldots, j)$ using the inequalities

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{j \leqq l \leqq k} |\Delta_l| \geqq \varepsilon\right\} \leqq \mathbf{P}\left\{\sup_{j \leqq l \leqq k} |\Delta_l| \geqq \frac{1}{2^h}\right\} \leqq \frac{2K \sum_{l=j}^{k} d_l^2 + \frac{20}{2^j}}{\left(\frac{1}{2^h}\right)^2} \leqq \frac{8K \sum_{l=j}^{k} d_l^2 + \frac{20}{2^j}}{\varepsilon^2}.$$

If $\varepsilon \geqq \frac{1}{2^j}$ our inequality is evident because its right hand side is larger than 1.

Thus the proof of our lemma is complete.

Now we can return to the proof of Theorem 2.

Let us put

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \zeta_{n_k}$$

$$\alpha_m = \sup_k \{|\sigma_{m+k} - \sigma_m|\}$$

$$\alpha = \inf_m \alpha_m.$$

Let ε be an arbitrary but fixed positive number $\left(0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}\right)$ and let m_0 be an integer for which $\frac{1}{2^{m_0}} < \varepsilon$ and $|c_k| \leqq k$ if $k \geqq m_0$. Using our lemma for $d_k = c_k$ and any $j \geqq m_0$ we obtain

$$\mathbf{P}\{\alpha_j \geqq \varepsilon\} \leqq \frac{8K \sum_{l=j}^{\infty} c_l^2 + \frac{80}{2^j}}{\varepsilon^2}.$$

Since $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ we have

$$\mathbf{P}\{\alpha \geqq \varepsilon\} = 0$$

but ε is any arbitrary positive number ($\leq \frac{1}{2}$) therefore

$$\mathbf{P}\{\alpha = 0\} = 1.$$

So we have proved our Theorem.

§ 3. An example

Let us recall the following well known

DEFINITION. The random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots$ are called equivalent if the joint distribution function of the random variables $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}$ ($i_j \neq i_l$ if $j \neq l$) depends only on k and it does not depend on the indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ i. e.

$$\mathbf{P}\{\xi_{i_1} < x_1, \xi_{i_2} < x_2, \ldots, \xi_{i_k} < x_k\} = F_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

In this § as an application of Theorem 2 we prove two theorems for equivalent random variables. The first (Theorem 3) is a strong law of large numbers, the second one (Theorem 4) is the KOLMOGOROV inequality for equivalent random variables.

THEOREM 3. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of equivalent random variables with finite variances ($\mathbf{M}(\xi_i^2) = K$) and $c_1, c_2, \ldots$ be any sequence of real numbers for which $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{k^2} < \infty$. Then there exists a random variable λ such that*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{c_1(\xi_1 - \lambda) + c_2(\xi_2 - \lambda) + \ldots + c_n(\xi_n - \lambda)}{n} \to 0\right\} = 1.$$

First of all we have to prove the following simple lemmas.

LEMMA 1. *A sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ of equivalent random variables with finite variances is weakly convergent to a random variable λ, i. e.*

$$\mathbf{M}(\xi_n \psi) \to \mathbf{M}(\lambda \psi)$$

for every square integrable ψ.

LEMMA 2. *The random variables $\xi_1 - \lambda, \xi_2 - \lambda, \ldots$ are equivalent (where λ is the weak limit of ξ_k).*

Lemma 1 evidently follows from the following

THEOREM OF E. SCHMIDT (see [4], [5]). *A bounded sequence $\{\alpha_n\}$ of elements of a Hilbert space H is weakly convergent if and only if the limits $\lim_{n \to \infty} (\alpha_n, \alpha_k)$ exist for $k = 1, 2, \ldots$.*

PROOF OF LEMMA 2. It is easy to see that λ is a BAIRE function of the random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots$, therefore the distribution functions $F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \ldots$ uniquely determine the distribution function of λ and the joint distribution function of $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}, \lambda)$. This latter distribution function obviously does not depend on the indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ therefore Lemma 2 is proved.

PROOF OF THEOREM 3. By our Theorem 2 there exists a sequence $n_1, n_2, \ldots$ of integers, such that

$$\mathbf{P}\left\{\frac{c_1(\xi_{n_1}-\lambda)+c_2(\xi_{n_2}-\lambda)+\ldots+c_k(\xi_{n_k}-\lambda)}{k}\to 0\right\}=1$$

and by our Lemma 2 the joint distribution function of $\{c_1(\xi_{n_1}-\lambda), c_2(\xi_{n_2}-\lambda), \ldots, c_k(\xi_{n_k}-\lambda)\}$ is equal to the joint distribution of $\{c_1(\xi_1-\lambda), c_2(\xi_2-\lambda), \ldots, c_k(\xi_k-\lambda)\}$. This fact proves our Theorem 3.

THEOREM 4. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of equivalent random variables with finite variances $(\mathbf{M}(\xi_i^2)=K)$ and λ be the weak limit of ξ_n. Then for any ε with $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{j=1}^{k} d_j(\xi_j-\lambda)\right|\geqq\varepsilon\right\}\leqq\frac{8K\sum_{j=1}^{n} d_j^2}{\varepsilon^2}$$

where $\{d_j\}$ is an arbitrary sequence of real numbers, such that $|d_j|\leqq 1$.

PROOF. We can prove this theorem by exactly the same technique as we have proved the previous Theorem, using the Lemma of § 2. Therefore we do not give the details of the proof.

Added in proof (28. 9. 1965). By similar methods one can prove the following more exact version of Theorem 2:

THEOREM 2.b. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of random variables for which $\mathbf{M}(\xi_i^2)\leqq K$ $(i=1, 2, \ldots)$. Then there exists a subsequence $n_1<n_2\ldots$ of integers and a random variable η such that the series $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(\xi_{n_i}-\eta)$ is convergent with probability 1 in any reordering of this series provided that $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2<\infty$ and if the sequence $\{\xi_i\}$ is uniformly bounded then the convergence of $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(\xi_{n_i}-\eta)$ implies $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2<\infty$.*

The proof of this theorem will be published in [7].

(Received 13 October 1964)

References

[1] *The New Scottish Book* (Wroclaw, 1946–1958), Problem 126.
[2] M. WEISS, On the law of iterated logarithm, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **92** (1959), pp. 531–553.
[3] G. MORGENTHALER, A central limit theorem for uniformly bounded orthonormal systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), pp. 281–311.
[4] W. SCHMEIDLER, *Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum* (Teubner, Stuttgart, 1954).
[5] A. RÉNYI, On stable sequences of events, *Sankhya*, **25** (1963), pp. 293–302.
[6] G. ALEXITS, *Convergence problems of orthogonal series* (Budapest, 1961).
[7] P. RÉVÉSZ, The laws of large numbers. (It will be appeared by Publishing House of Hungarian Academy of Sciences probably in 1966.)

A LOWER ESTIMATION OF THE PRINCIPAL FREQUENCIES OF SIMPLY CONNECTED MEMBRANES

By

E. MAKAI (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

Consider a simply connected plane domain D of area A bounded by piecewise analytical arcs and the principal frequency Λ of the domain. Λ may be defined by

$$\Lambda^2 = \min_{\psi} \frac{\iint_D (\psi_x^2 + \psi_y^2)\,dx\,dy}{\iint_D \psi^2\,dx\,dy} \tag{1}$$

where $\psi(x, y) = 0$ on the boundary of D and in the interior of the domain $\psi(x, y)$ is a positive analytical function.

Let ϱ be the radius of the greatest circle inscribed in D and let j_0 denote the first positive root of the Bessel function $J_0(x)$, i. e. $j_0 = 2.4048\ldots$. Then it is well known that

$$\Lambda \leqq \frac{j_0}{\varrho} \tag{2}$$

with equality only if D is a circle.

Some years ago a counterpart of this inequality was found by J. HERSCH [1], namely

$$\Lambda \geqq \frac{\pi}{2\varrho} \tag{3}$$

for all convex domains, with asymptotic equality if D is a rectangle with sides a, b and $b/a \to 0$.

The object of this paper is to show that *there exists a constant C such that*

$$\frac{1}{2} \leqq C < \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

and

$$\Lambda > \frac{C}{\varrho} \tag{5}$$

for each simply connected domain D.

In view of (2), (4) and (5) we may say, extending the terminology used in [3], p. 112, to simply connected non-convex domains, that Λ and ϱ^{-1} are comparable quantities.

The inequality of KRAHN and FABER, originally conjectured by RAYLEIGH, namely that of all domains of a given area the circular one has the least principal

frequency is also of a similar kind as (5) since it, too, gives a positive lower bound for the principal frequency.

The first part of inequality (4) follows from an argument similar to that of KRAHN [2].

It is known that the minimum problem (1) has a unique solution $f(x, y)$ satisfying itself, too, the conditions given immediately below formula (1) and $|f(x, y)|$ cannot have any local minimum inside D. The level lines of $f(x, y)$ will be labelled by a parameter τ, the meaning of which will be given as follows. If the function $f(x, y)$ assumes on one of its level lines the value z and $D(\tau)$ is a domain consisting of those points of D where $f(x, y) > z$, then the area of $D(\tau)$ should be equal to τ. The boundary of $D(\tau)$ will be termed the level line C_τ. Evidently

$$D(\tau') \subset D(\tau'') \text{ if } \tau' < \tau'' \tag{6}$$

and $D(A) = D$, so $0 \leqq \tau \leqq A$.

The domain $D(\tau)$ may be disconnected but each of its constituents is simply connected, otherwise $f(x, y)$ would have a local minimum inside D.

We introduce now in the domain D instead of the rectangular coordinates x, y the new coordinates τ and s, where s is an arc length counted from appropriate points of the possibly disconnected level line C_τ ranging from 0 to $L(\tau)$, the total length of the level line C_τ.

We introduce further the function $\varphi(\tau)$ defined by

$$f(x, y) = \varphi(\tau) \quad \text{on} \quad C_\tau. \tag{7}$$

$\varphi(\tau)$ is obviously monotonically decreasing in $0 \leqq \tau \leqq A$.

We have now

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \varphi'(\tau) = f_x x_\tau + f_y y_\tau$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 = f_x x_s + f_y y_s$$

and

$$x_s^2 + y_s^2 = 1.$$

From these we calculate

$$f_x^2 + f_y^2 = \frac{\varphi'^2(\tau)}{\Delta^2}, \quad \text{where} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_\tau & y_\tau \\ x_s & y_s \end{vmatrix}.$$

With the help of this we transform (1):

$$\Lambda^2 = \frac{\iint\limits_D (f_x^2 + f_y^2)\, dx\, dy}{\iint\limits_D f^2 dx\, dx} = \frac{\int\limits_0^A \varphi'^2(\tau) \int\limits_0^{L(\tau)} \frac{ds}{|\Delta|}\, d\tau}{\int\limits_0^A \varphi^2(\tau) \int\limits_0^{L(\tau)} |\Delta|\, ds\, d\tau}.$$

Since Δ may vanish on the boundary of D and likewise $1/\Delta$ may vanish in points where $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ (these points are either finite in number or they are countable) the integrals on the right hand side are possibly improper ones.

We have

$$d\tau = \iint_{D(\tau+d\tau)-D(\tau)} dx\,dy = \int_0^{L(\tau)} |\Delta|\,d\tau\,ds$$

and so

$$1 = \int_0^{L(\tau)} |\Delta|\,ds. \tag{8}$$

Since

$$\int_0^{L(\tau)} \frac{ds}{|\Delta|} \int_0^{L(\tau)} |\Delta|\,ds \geqq \left(\int_0^{L(\tau)} ds\right)^2 = [L(\tau)]^2 \tag{9}$$

we may write by virtue of (8) and (9)

$$A^2 = \frac{\int_0^A \varphi'^2(\tau)\left\{\int_0^{L(\tau)} \frac{ds}{|\Delta|}\right\} d\tau}{\int_0^A \varphi^2(\tau)\left\{\int_0^{L(\tau)} |\Delta|\,ds\right\} d\tau} = \frac{\int_0^A \varphi'^2(\tau)\left\{\int_0^{L(\tau)} \frac{ds}{|\Delta|} \int_0^{L(\tau)} |\Delta|\,ds\right\} d\tau}{\int_0^A \varphi^2(\tau)\,d\tau} \geqq$$

$$\geqq \frac{\int_0^A \varphi'^2(\tau) L^2(\tau)\,d\tau}{\int_0^A \varphi^2(\tau)\,d\tau} = \mu_1. \tag{10}$$

Let now $\varrho(\tau)$ be the radius of the greatest inscribed circle of $D(\tau)$. By (6) one has

$$\varrho(\tau') \leqq \varrho(\tau'') \quad \text{if} \quad \tau' < \tau''.$$

We shall use the classical isoperimetric inequality connecting the perimeter and area of a set of simply connected plane domains:

$$L(\tau) \geqq \sqrt{4\pi\tau} \tag{11}$$

and its refined form due to Bonnesen:

$$L(\tau) \geqq \frac{\tau}{\varrho(\tau)} + \pi\varrho(\tau). \tag{12}$$

Putting

$$\sigma = \pi\varrho^2$$

we define the function $M(\tau)$ by

$$M(\tau) = \sqrt{4\pi\tau} \quad \text{if} \quad 0 \leqq \tau < \sigma \quad \text{and} \quad M(\tau) = \frac{\tau}{\varrho} + \pi\varrho \quad \text{if} \quad \sigma \leqq \tau \leqq A.$$

This function satisfies the inequality

$$M(\tau) \leqq L(\tau) \quad \text{for} \quad 0 \leqq \tau \leqq A. \tag{13}$$

For $0 \leqq \tau \leqq \sigma$ this is a consequence of (11) while for $\sigma \leqq \tau \leqq A$ we use (12) and the fact that the function $g(x) = x + x^{-1}$ is increasing for $x > 1$. Indeed if $\tau \geqq \sigma$ we have

$$\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi\varrho(\tau)}} \geqq \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi\varrho}} \geqq 1$$

hence

$$L(\tau) \geqq \frac{\tau}{\varrho(\tau)} + \pi\varrho(\tau) = \sqrt{\pi\tau}\, g\left(\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi\varrho(\tau)}}\right) \geqq \sqrt{\pi\tau}\, g\left(\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi\varrho}}\right) = \frac{\tau}{\varrho} + \pi\varrho.$$

In view of (10) and (13) we can write

$$\Lambda^2 \geqq \mu_1 \geqq \frac{\int_0^A \varphi'^2(\tau) M^2(\tau)\, d\tau}{\int_0^A \varphi^2(\tau)\, d\tau} = \mu_2. \tag{14}$$

Our next aim is to find a lower bound for μ_2 minorising $M(\tau)$ by an appropriately chosen function $N(\tau)$ and substituting it into the quotient of (14).

The function $M(\tau)$ is in the class $C'(0, A)$ since

$$\lim_{\tau \to \sigma - 0} M(\tau) = \lim_{\tau \to \sigma + 0} M(\tau) = 2\pi\varrho \quad \text{and} \quad \lim_{\tau \to \sigma - 0} M'(\tau) = \lim_{\tau \to \sigma + 0} M'(\tau) = \frac{1}{\varrho}$$

hence it is concave in $(0, A)$ in the wider sense. So we can choose for $N(\tau)$ the linear function $(A + \sigma)\tau/(\varrho A)$ for which we have $N(0) = M(0)$ and $N(A) = M(A)$. We have now

$$\Lambda^2 \geqq \mu_2 > \left(\frac{A + \sigma}{\varrho A}\right)^2 \frac{\int_0^A \varphi'^2(\tau)\tau^2\, d\tau}{\int_0^A \varphi^2(\tau)\, d\tau}.$$

We shall prove that the second factor on the right hand side of this inequality is at least $1/4$ which proves the left hand side of (4). Indeed supposing only the existence of both integrals in the last quotient, we have that $\int_0^A \varphi(\tau)\varphi'(\tau)\tau\, d\tau$ exists and using $\varphi(A) = 0$ we find by a partial integration that

$$\int_0^A \{4\varphi'^2(\tau)\tau^2 - \varphi^2(\tau)\}\, d\tau - \int_0^A \{2\varphi'(\tau)\tau + \varphi(\tau)\}^2\, d\tau =$$

$$= -2\int_0^A \{2\varphi(\tau)\varphi'(\tau)\tau + \varphi^2(\tau)\}\, d\tau = -2[\varphi^2(\tau)\tau]_0^A = 0$$

from which

$$4\int_0^A \varphi'^2(\tau)\tau^2\,d\tau - \int_0^A \varphi^2(\tau)\,d\tau \geqq 0.$$

As to the second half of inequality (4) it suffices to produce an example for which $\Lambda < \pi/(2\varrho)$. Such an example is the following. Take the membrane $D(\varepsilon, \eta)$ of the form indicated in the figure. If we use the polar coordinates r, φ, it consists of the union of the sets of points characterized by the inequalities

$$\pi \leqq r \leqq 2\pi, \quad \varepsilon \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

and

$$0 \leqq r \leqq 3\pi, \quad 2\pi - \eta \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$

respectively. The principal frequency of this membrane, corresponding to the first boundary problem, will be denoted by $\Lambda(\varepsilon, \eta)$. If ε and η are both less than 1/10, say, then the diameter of the greatest circle inscribed in $D(\varepsilon, \eta)$ is π, hence $\pi/(2\varrho) = 1$. On the other hand it is known that

$$\lim_{\varepsilon, \eta \to 0} \Lambda(\varepsilon, \eta) = 1.*$$

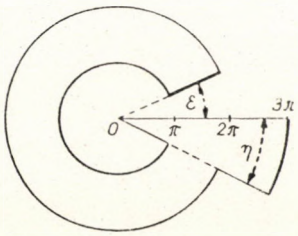


Fig. 1

If $\varepsilon = 0$ and $\eta = 1/10$, say, then by a well known theorem $\Lambda(0, 1/10) < 1$, so there exists a positive ε^*, less than 1/10, such that the principal frequency of the simply connected domain $D(\varepsilon^*, 1/10)$ is less then 1, i. e. $\Lambda(\varepsilon^*, 1/10) < \pi/(2\varrho)$. From this follows $C < \pi/2$.

(Received 1 October 1964)

References

[1] J. HERSCH, Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante. Evaluation par défaut et principe de maximum, *Z. Angew. Math. Phys.*, **11** (1960), pp. 387–413.
[2] E. KRAHN, Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, *Math. Annalen*, **94** (1924), pp. 97–100.
[3] G. PÓLYA and G. SZEGŐ, *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics* (Princeton Univ. Press, 1951).
[4] G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions*, 2nd ed. (Cambridge Univ. Press, 1952).

* The first eigenfunction in the limiting case (which, of course is the closure of a simply connected open domain) is $\frac{\sin r}{\sqrt{r}} \sin \frac{\varphi}{2}$.

NEUTRALITY IN WEAKLY MODULAR LATTICES*

By

IQBALUNNISA (Madras, India)

(*Presented by* L. RÉDEI)

G. GRÄTZER and E. T. SCHMIDT prove in their paper [2] that an element n of a weakly modular lattice is neutral if and only if it is distributive and ask the question: (Problem 5 of [2]) Is a distributive (or at least a standard) ideal of a weakly modular lattice neutral?

In what follows we give counter examples to show that a distributive ideal of a weakly modular lattice need not necessarily be standard and a standard ideal of a weakly modular lattice need not necessarily be neutral.

Consider the lattice L of figure 1. L consists of two classes I and J of elements. I and J are infinite modular lattices as shown in the figure. The lattice operations in L are defined thus: for any two elements in I or J the lattice sum or product is the corresponding sum or product as defined in the modular parts. For any a in I and b in J the lattice sum is the unit element and the lattice product is the null element. L is a weakly modular lattice as any two prime intervals of L are projective and any interval of L contains a prime interval.

Now the ideal I of L is a distributive ideal of L, but is not a standard ideal. For if B, C are the principal ideals generated by b and c respectively as marked in the figure; then $I+B = I+C =$ the whole lattice L and $IB=IC=$the null element. Yet B is strictly greater than C. Thus we conclude

THEOREM 1. *Any distributive ideal of a weakly modular lattice need not necessarily be standard.*

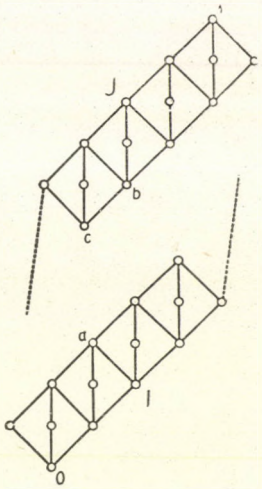


Fig. 1

Next consider the lattice M of figure 2. M is got by taking the direct product of the set of positive integers with a chain of 3 elements and inserting in every square thus formed an extra element, making every square a nondistributive, modular lattice of 5 elements. To this modular lattice is added a pair of elements x, 1 such that $x > a_i$ for each i; and $x+p_i = 1$ and $xp_i = a_i$ for any $p_i \notin (a_i)$ (where $p_i = b_i$, c_i, d_i or e_i) M is weakly modular as it enjoys the same property as the lattice L of figure 1.

Consider the ideal S of the lattice M consisting of all elements of M excepting x and 1. S is a standard ideal of M but is not neutral. For if $X=$the principal ideal

* Forms a part of the Doctorate Thesis submitted to the University of Madras in January 1964.

generated by x and Y = the ideal generated by the sequences (a_i) (b_i) and (d_i) then $S = S(X+Y) > SX+SY = Y$. Thus we have,

THEOREM 2. *A standard ideal of a weakly modular lattice is not always neutral.*

G. GRÄTZER and E. T. SCHMIDT have shown further that an element of a modular lattice or a relatively complemented lattice is neutral if and only if it is neutral in $(nx, n+x)$ for all x in the lattice. In what follows we prove that the same assertion is false in the case of weakly modular lattices (an answer to Problem 17 of [2]).

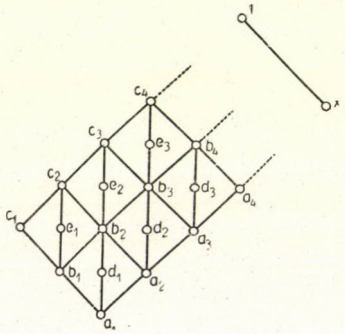


Fig. 2

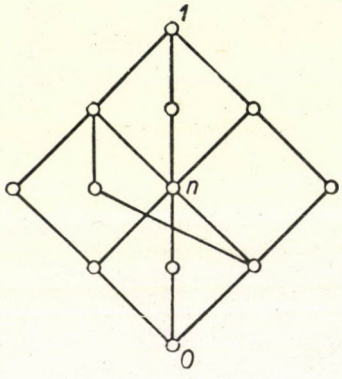


Fig. 3

THEOREM 3. *An element n of a weakly modular lattice L need not necessarily be neutral in L if it is neutral in every interval $(nx, n+x)$ for all x in L.*

PROOF. By an example.

Consider the lattice L as shown in figure 3. L is a simple lattice and hence is a weakly modular lattice. L being simple contains only two neutral elements, namely 0 and 1. Consider the element n as marked in the figure. As n is different from 0 and 1 n is not neutral in L; nevertheless n is neutral in every interval $(nx, n+x)$ for all x in L.

(Received 28 October 1964)

References

[1] G. BIRKHOFF, Lattice theory, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, Vol. **25**, Revised ed. (New York, 1948).

[2] G. GRÄTZER and E. T. SCHMIDT, Standard ideals in lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), pp. 17–86.

LOGISCHE DUALITÄT DER FROBENIUS—STICKELBERGERSCHEN UND HAJÓSSCHEN HAUPTSÄTZE DER THEORIE DER ENDLICHEN ABELSCHEN GRUPPEN

Von

L. RÉDEI (Szeged), Mitglied der Akademie

Der Satz von HAJÓS[1] über die endlichen abelschen Gruppen ist aus vielen bekannten Gründen (vgl. auch die nachstehende Arbeit [2]) ein Hauptsatz zu nennen. Einen entscheidenden Grund hierzu liefert die in den Titel gefaßte Dualität, die ich schon früher entdeckt, aber bisher nur in ungarischer Sprache publiziert habe.

Ein Produkt $P=A_1 \dots A_k$ von Komplexen $A_1, \dots, A_k$ einer Gruppe heißt schlicht, wenn jedes Element von P sich eindeutig als

$$\alpha_1 \dots \alpha_k \qquad (\alpha_i \in A_i;\ i=1, \dots, k)$$

darstellen läßt.

Ein Komplex bestehend aus den Elementen $1, \alpha, \dots, \alpha^{e-1}$, wobei α ein Gruppenelement von der endlichen Ordnung $n (\geqq e \geqq 2)$ ist, heißt ein Simplex. (Dieses ist also dann und nur dann eine — zyklische — Gruppe, wenn $n=e$ ist.)

Für einen Komplex A einer Gruppe bezeichnet $\hat{A}$ die Aussage, daß A eine Gruppe (Untergruppe der betrachteten Gruppe) ist.

Mit G, $\mathfrak{S}$ und S bezeichnen wir eine endliche abelsche Gruppe, eine Zerlegung von G in ein schlichtes Produkt von Simplexen bzw. einen der in $\mathfrak{S}$ auftretenden Faktoren.

Den Frobenius-Stickelbergerschen Hauptsatz kann man so aussprechen, daß sich G in ein schlichtes Produkt von zyklischen Untergruppen zerlegen läßt. Der Hajóssche Hauptsatz besagt, daß in jeder Zerlegung von G in ein schlichtes Produkt von Simplexen mindestens ein Faktor eine Gruppe ist. Beide Hauptsätze lassen sich mit Hilfe der logischen Quantoren $\forall$ und $\exists$ durch die (für jedes G gültigen) Formeln ausdrücken:

$$\underset{\mathfrak{S}}{\exists} \underset{S}{\forall} \hat{S} \quad \text{bzw.} \quad \underset{\mathfrak{S}}{\forall} \underset{S}{\exists} \hat{S}.$$

Man sieht, daß diese Formeln auseinander durch die Vertauschung $\forall \leftrightarrow \exists$ hervorgehen. Darin besteht die gemeinte logische Dualität beider Hauptsätze.

(Eingegangen am 1. Dezember 1964.)

[1] G. HAJÓS, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Z.*, **47** (1942), S. 427—467.

[2] L. RÉDEI, Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós, *Diese Acta*, **16** (1965), S. 329—373.

DIE NEUE THEORIE DER ENDLICHEN ABELSCHEN GRUPPEN UND VERALLGEMEINERUNG DES HAUPTSATZES VON HAJÓS

Von

L. RÉDEI (Szeged), Mitglied der Akademie

G. HAJÓS *zugeeignet*

Einleitung

In der „klassischen" Theorie der endlichen abelschen Gruppen stehen bekanntlich die Elemente und die Untergruppen dieser Gruppen im Vordergrund der Untersuchungen und es treten sonstige Komplexe (Untermengen) dieser Gruppen im allgemeinen nur in Hilfsrollen auf. In dieser Theorie ist bekanntlich die Untersuchung der Zerlegungen einer endlichen abelschen Gruppe in ein direktes Produkt von Untergruppen ein Problem von zentraler Bedeutung, die im wesentlichen durch den Hauptsatz von Frobenius und Stickelberger gelöst ist. Das Grundproblem der von G. HAJÓS ins Leben gerufenen neuen Theorie der endlichen abelschen Gruppen besteht viel allgemeiner in der Untersuchung der Zerlegungen dieser Gruppen in ein schlichtes Produkt von Komplexen (s. unten). Diese neue Theorie zeitigte schon bisher viele, teils noch nicht publizierte, meistens sehr überraschende, darunter auch hochwichtige Ergebnisse, von denen vor allem der Hauptsatz von HAJÓS zu nennen ist.

Vorliegende Arbeit hat den doppelten Zweck, eine knappe Einführung in diese Theorie auszuarbeiten, was bisher noch nicht geschehen ist, und teilweise als Anwendung die von uns neulich gefundene, denkbar schärfste Verallgemeinerung des Hajósschen Hauptsatzes zu beweisen. (Der Verfasser arbeitet auch an einer Monographie über endliche abelsche Gruppen unter Berücksichtigung ihrer neuen Theorie, jedoch ist die Fertigstellung dieser Monographie nicht in kurzer Zeit zu erwarten.)

Durchweg sei G eine endliche abelsche Gruppe mit dem Einselement ε. Oft wird vom Fall $G=\varepsilon$ stillschweigend abgesehen. (Wie hier, so identifizieren wir auch später Einermengen mit ihrem Element.)

$\langle\ \rangle$ bezeichnet die Menge der eingeklammerten Elemente.

$\{\ \}$ bezeichnet die durch die eingeklammerterten Elemente (oder allgemeiner durch die Elemente der eingeklammerten Komplexe) erzeugte Gruppe.

$O(\ )$ bezeichnet die Mächtigkeit einer endlichen Menge, insbesondere also auch die Ordnung einer endlichen (algebraischen) Struktur.

$o(\ )$ bezeichnet die Ordnung eines Gruppenelementes endlicher Ordnung.

Ein Produkt $A_1 \dots A_k$ von Komplexen von G definieren wir üblicherweise als den Komplex, der (für $k=0$ gleich ε ist und für $k \geqq 1$) aus allen Elementprodukten

$$\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_k \qquad (\alpha_i \in A_i;\ i = 1, \dots, k) \tag{1}$$

besteht. Also ist stets $O(A_1 \dots A_k) \leqq O(A_1) \dots O(A_k)$. Dieses $A_1 \dots A_k$ nennen wir ein *schlichtes* Produkt und bezeichnen es auch mit $A_1 \circ \dots \circ A_k$, wenn die Darstellung

(1) seiner Elemente eindeutig ist, d. h. wenn

$$O(A_1 \dots A_k) = O(A_1) \dots O(A_k)$$

ist. Ein schlichtes Produkt nennen wir *echt*, wenn kein Faktor ein Einerkomplex (d. h. Element von G) ist. Wir nennen es *vollständig*, wenn alle Faktoren von Primzahlmächtigkeit sind.

Wenn $A_1, \dots, A_k$ Untergruppen sind, so stimmt $A_1 \circ \dots \circ A_k$ mit dem direkten Produkt dieser Untergruppen überein, das wir üblicherweise auch mit $A_1 \times \dots \times A_k$ bezeichnen. Da also das schlichte Produkt eine Verallgemeinerung des direkten Produktes ist, lassen sich die auf das letztere bezüglichen Redensarten auch im Zusammenhang mit dem vorigen zum Teil ohne besondere Erklärung verwenden. So z. B. dürfen wir die Gleichung $A = A_1 \circ \dots \circ A_k$ eine schlichte Zerlegung von A nennen. Ähnlich nenne man $A_1, \dots, A_k$ die schlichten Faktoren von A. Oft ersparen wir uns das Beiwort „schlicht", wenn nämlich ohnehin klar ist, daß es sich um ein schlichtes Produkt handelt.

Gleich hier bemerken wir, daß wir für einen Komplex A einer Gruppe und für eine ganze Zahl c die c-te Potenz A^c von A üblicherweise als den Komplex der Elemente α^c ($\alpha \in A$) definieren. Falls A endlich ist, so gilt $O(A^c) \leqq O(A)$, und insbesondere für den inversen Komplex A^{-1} gilt dann $O(A^{-1}) = O(A)$. Bekanntlich ist ein Komplex A dann und nur dann eine Gruppe, wenn $A^{-1}A \subseteq A$ ist. Das schlichte Produkt $A \circ B$ von zwei Komplexen A und B von G existiert offenbar dann und nur dann, wenn $A^{-1}A \cap B^{-1}B = \varepsilon$ ist.

Für zwei Komplexe A und B von G sagen wir, daß A ein *(schlichter) Teiler* von B ist und schreiben hierfür $A|B$, wenn es einen dritten Komplex X von G mit $B = A \circ X$ gibt. (Also ist $A|B$ gleichbedeutend damit, daß A in mindestens einer schlichten Zerlegung von B als (schlichter) Faktor auftritt.) Aus $A|B$ folgt $O(A)|O(B)$. Man bemerke, daß jede Untergruppe H von G ein (schlichter aber im allgemeinen kein direkter) Teiler von G ist, da $G = H \circ X$ stets lösbar ist, und zwar sind die Lösungen X eben die sämtlichen Repräsentantensysteme von G nach H. (Hieraus sieht man, daß der Begriff der schlichten Produkte, wenn auch nur implizit und in sehr beschränktem Umfange, schon in der klassischen Theorie der endlichen abelschen Gruppen auftritt.)

Die aus der Definition folgenden einfachen Teilbarkeitseigenschaften von Komplexen brauchen wir nicht alle aufzuzählen. Erwähnt werde, daß diese Teilbarkeit transitiv ist und als Einheiten d. h. Teiler von ε die sämtlichen Elemente von G gelten. Zwei Komplexe A und B von G heißen *assoziiert*, wenn $A|B$ und $B|A$ gelten, d. h. ein Element $\gamma \in G$ mit $B = \gamma A (= \gamma \circ A)$ existiert. Unter den Assoziierten eines Komplexes von G tritt mindestens ein Komplex auf, der das Einselement ε enthält. Solche Komplexe heißen *normiert*. Ein Komplex hat im allgemeinen mehrere normierte Assoziierte. Eindeutigkeit besteht in dieser Hinsicht nur für die Komplexe, die Gruppen sind. Man bemerke, daß ein schlichtes Produkt von Komplexen offenbar alle Faktoren enthält, wenn diese normiert sind.

Nunmehr setzen wir endgültig fest, daß wir das Grundproblem der neuen Theorie der endlichen abelschen Gruppen in der Untersuchung der schlichten Zerlegungen

$$G = A_1 \circ \dots \circ A_k \tag{2}$$

von G bezeichnen.

Da $\gamma G = G$ ($\gamma \in G$) ist, genügt es (2) für normierte Faktoren $A_1, \ldots, A_k$ zu betrachten. In diesem Fall nennen wir auch die Zerlegung (2) *normiert*. Später unten werden wir uns fast ausschließlich auf normierte echte Zerlegungen (2) beschränken, jedoch mag mitunter und insbesondere im folgenden der allgemeine Fall zugelassen werden.

Ein schlichtes Produkt $A_1 \circ \ldots \circ A_k$ nennen wir *strengklassisch*, wenn seine sämtlichen Abschnitte d. h. seine Teilprodukte von der Form $A_1 \circ \ldots \circ A_i$ Gruppen sind; wir nennen ein schlichtes Produkt *klassisch*, wenn dieses nach passender Permutation der Faktoren strengklassisch wird.

Die klassischen Zerlegungen von G entspringen aus der klassischen Theorie der endlichen abelschen Gruppen und sind völlig bekannt. Liegt nämlich eine aufsteigende Untergruppenkette

$$\varepsilon = G_0 \subseteqq G_1 \subseteqq \ldots \subseteqq G_k = G \tag{3}$$

vor und nimmt man für jedes $i = 1, \ldots, k$ ein Repräsentantensystem A_i von G_i nach G_{i-1}, so gilt

$$G_i = A_1 \circ \ldots \circ A_i \qquad (i = 0, \ldots, k), \tag{4}$$

also ist jetzt (2) eine strengklassische Zerlegung. Es ist auch klar, daß umgekehrt auf diesem Wege alle strengklassischen Zerlegungen entstehen. Man nenne (3) die zur strengklassischen Zerlegung (2) gehörende Untergruppenkette, wenn (4) besteht. Entsprechend sage man dann, daß (2) eine zur Untergruppenkette (3) gehörende strengklassische Zerlegung ist. (In dieser Zugehörigkeit entsprechen echte Zerlegungen den echten Untergruppenketten und umgekehrt.)

Man bemerke, daß eine strengklassische Zerlegung dann und nur dann vollständig ist, wenn die zugehörige Untergruppenkette eine (aufsteigend geordnete) Kompositionsreihe ist.

Schlichte Zerlegungen von G, die nicht klassisch sind, lassen sich auf viele Arten konstruieren. Zu besonders einfachen Beispielen kommt man folgenderweise. Man nehme eine echte Untergruppe H von G, ein Repräsentantensystem R von G nach H und mindestens zwei verschiedene echte Untergruppen $U_1, \ldots, U_k$ (gleicher Ordnung) von H mit einem gemeinsamen Repräsentantensystem S von H nach $U_1, \ldots, U_k$. Dann bestehen die Zerlegungen

$$G = S \circ \bigcup_{\varrho \in R} \varrho U_\varrho,$$

wobei jedes U_ϱ ein U_i ($i = 1, \ldots, k$) bezeichnet. Diejenigen unter diesen Zerlegungen, in denen S keine Gruppe ist und nicht alle U_ϱ ($\varrho \in R$) miteinander gleich sind, sind offenbar nicht klassisch.

Um bezüglich klassischer Zerlegungen einen bald und auch später zu benützenden Hilfssatz zu formulieren, nennen wir sehr allgemein eine Menge $\mathfrak{M}$ von Komplexen von G *konsistent*, wenn unter ihnen kein Einerkomplex vorkommt, ferner für jeden Komplex $A \in \mathfrak{M}$ und für jeden Endomorphismus σ von G mit $O(A^\sigma) = O(A)$ die Bedingung $A^\sigma \in \mathfrak{M}$ erfüllt ist. (Z. B. ist die Menge der Komplexe von G von Primzahlmächtigkeit konsistent.)

HILFSSATZ 1. *Ist in einer schlichten Zerlegung von G mit Faktoren aus einer konsistenten Menge $\mathfrak{M}$ von Komplexen mindestens ein Faktor eine Gruppe und gilt ähnliches für alle schlichten Zerlegungen der echten Untergruppen von G mit Faktoren aus $\mathfrak{M}$, so ist die betrachtete Zerlegung von G klassisch.*

Um den leichten Beweis gleich hier auszuführen, setzen wir die Behauptung für die echten Untergruppen von G (statt G) voraus. Es sei

$$G = A_1 \circ \ldots \circ A_k \qquad (k \geqq 1) \tag{5}$$

die vorgelegte Zerlegung. Es darf angenommen werden, daß der erste Faktor A_1 eine Gruppe ist. Im Fall $k=1$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Im Fall $k \geqq 2$ nehmen wir einen Endomorphismus σ von G mit dem Kern A_1 zu Hilfe. (Ein passendes σ entsteht als das Produkt des natürlichen Homomorphismus von G auf die Faktorgruppe G/A_1 und eines Isomorphismus der letzteren auf eine Untergruppe von G.) Dann folgt aus (5)

$$G^\sigma = A_2^\sigma \circ \ldots \circ A_k^\sigma \tag{6}$$

und

$$O(A_i^\sigma) = O(A_i) \qquad (i = 2, \ldots, k).$$

Aus Letzterem und der Konsistenz von $\mathfrak{M}$ folgt $A_2^\sigma, \ldots, A_k^\sigma \in \mathfrak{M}$. Hieraus, aus $G^\sigma \subset G$ und der Induktionsvoraussetzung ergibt sich, daß die Zerlegung (6) klassisch ist. also mit passender Reihenfolge der Faktoren alle Abschnitte

$$A_2^\sigma \circ \ldots \circ A_i^\sigma \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Gruppen sind. Da A_1 der Kern von σ ist, sind die Urbilder dieser Gruppen gleich den Produkten

$$A_1 \circ \ldots \circ A_i \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

die also ebenfalls Gruppen sind. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Wir führen die Bezeichnung

$$[\alpha, e] = \langle \varepsilon, \alpha, \ldots, \alpha^{e-1} \rangle \qquad (\alpha \in G;\ o(\alpha) \geqq e \geqq 2)$$

ein und nennen diesen Komplex das durch α erzeugte *Simplex* von der Mächtigkeit e. Dieses ist offenbar dann und nur dann eine (zyklische) Gruppe, wenn $o(\alpha) = e$ ist. (Die Benennung „Simplex" hat schon früher der Verfasser eingeführt, aber der Begriff selbst stammt mit anderer Benennung im wesentlichen von HAJÓS, s. unten.)

Die Wichtigkeit der Simplexe liegt vor allem in ihrer Einfachheit und im Umstand, daß sich G nach jeder Untergruppe durch ein schlichtes Produkt von Simplexen repräsentieren läßt, was man leicht einsieht. (Mit anderen Worten bedeutet das, daß es unter den schlichten Kofaktoren einer Untergruppe von G stets auch schlichte Produkte von Simplexen gibt.)

G. HAJÓS hat die hohe Bedeutung der Simplexe erkannt. Und zwar besagt sein im Jahr 1938 entdeckter und im Jahr 1941 bewiesener Hauptsatz folgendes: *In jeder Zerlegung einer endlichen abelschen Gruppe in ein schlichtes Produkt von Simplexen ist mindestens ein Faktor eine Gruppe.* Gleich bemerken wir, daß nach obiger Definition die Simplexe von G offenbar eine konsistente Menge von Komplexen bilden, also nach Hilfssatz 1 der Hauptsatz von HAJÓS sich in folgender scharfen Form aussprechen läßt: *Jede Zerlegung einer endlichen abelschen Gruppe in ein schlichtes Produkt von Simplexen ist klassisch.*

Am Schluß dieser Arbeit haben wir das vollständige Verzeichnis der auf die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen bezüglichen Literatur zusammengestellt. Insbesondere findet sich bei HAJÓS [3] der Originalbeweis seines Hauptsatzes (man s. auch die früheren Mitteilungen HAJÓS [1, 2] in ungarischer Sprache mit im wesentlichen gleichem Inhalt).

In vieler Hinsicht verhält sich der HAJÓSSche Hauptsatz sehr geheimnisvoll. Insofern ist nämlich dieser von sehr spezieller Natur, als in ihm unter allen Komplexen nur von Simplexen die Rede ist, aber mit der ihm dadurch zukommenden formalen Einfachheit steht die unerwartete Schwierigkeit des Beweises in einem schroffen Gegensatz. Weder im HAJÓSschen, noch im erst nach 14 Jahren entstandenen einzigen weiteren Beweis von RÉDEI [8] konnte vom Frobenius-Stickelbergerschen Hauptsatz Gebrauch gemacht werden; jedoch besteht nach RÉDEI [13] zwischen beiden Hauptsätzen eine logische Dualität. Ein weiteres Geheimnis des HAJÓSschen Hauptsatzes ist seine verblüffende, fast kaleidoskopartige Vielseitigkeit, die merkwürdigerweise in einer Reihe seiner äquivalenten Umformulierungen zu Tage tritt. Diese Umformulierungen beziehen sich auf sehr fernliegende und hochinteressante Fragen, die also alle mit dem Hauptsatz gleich schwierig sind und erst durch ihn beantwortet werden konnten. So entstanden die Bestätigung der früher von vielen in Angriff genommenen berühmten Minkowskischen Vermutung über den „Grenzfall" von homogen linearen Diophantischen Ungleichungssystemen bzw. über die einfachen lückenlosen Bedeckungen des mehrdimensionalen Euklidischen Raumes mit parallelen kongruenten Würfeln eines Würfelgitters (HAJÓS [3]), eine Poleigenschaft meiner Zetafunktionen (RÉDEI [9]) und ein Überdeckungssatz für die endlichen abelschen Gruppen (RÉDEI [14]), um nur die wichtigsten Ergebnisse solcher Art zu nennen. Weitere, ähnlich interessante Ergebnisse von ebenfalls sehr verschiedener Natur entstanden im Rahmen der durch den Hajósschen Hauptsatz eingeleiteten Untersuchungen noch auf folgenden Gebieten: topologische Gruppen (FÁRY [1]), unendliche abelsche Gruppen (FUCHS [1, 2], RÉDEI [2]), Zetafunktionen für algebraische Strukturen (RÉDEI [8]), Trägheitssatz für endliche abelsche Gruppen (RÉDEI [8]), lückenhafte Polynome über endlichen Primkörpern (RÉDEI [5]), Gaussische Summen (RÉDEI [5]), elementare Zahlentheorie (RÉDEI [5]).

Es erhellt aus diesem flüchtigen Umschau, wie reich an Zusammenhängen die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen ist. Bezüglich der ebenfalls interessanten und ausgedehnten bisherigen Untersuchungen des Grundproblems selbst (wo beliebige Komplexe als Faktoren zugelassen werden), verweisen wir in zeitlicher Reihenfolge auf die Arbeiten von HAJÓS [4, 5], RÉDEI [5, 7], DE BRUIJN [1, 2] und SANDS [1, 2, 3].

Wir kommen auf den HAJÓSschen Hauptsatz zurück. Schon seit langem weiß man, daß dieser in seiner obigen Form nicht für Komplexe statt Simplexe verallgemeinert werden kann (s. z. B. HAJÓS [4, 5]). Jedoch geht das, wenn man den Satz in einer schon von HAJÓS [3] entdeckten, äquivalenten Umformulierung ausspricht, die er vermittels folgender Hilfssätze gewann.

HILFSSATZ 2. *Für Simplexe, deren Mächtigkeit eine zusammengesetzte Zahl ist, gilt die Zerlegungsformel*

$$[\alpha, ef] = [\alpha, e][\alpha^e, f] \qquad (o(\alpha) \geqq ef;\ e, f \geqq 2).$$

KOROLLAR. *Jedes Simplex läßt sich vollständig in ein schlichtes Produkt von Simplexen zerlegen.*

HILFSSATZ 3. *Ist ein Simplex durch eine Gruppe teilbar, die keine Einergruppe ist, so ist es selbst eine Gruppe.*

Hiervon ist Hilfssatz 2 trivialerweise richtig und das Korollar folgt aus ihm. Den leichten Beweis von HAJÓS für Hilfssatz 3 führen wir bequemlichkeitshalber (unwesentlich abgeändert) aus. Es sei

$$H|[\alpha, e]$$

angenommen, wobei $H \subseteqq G$ eine Gruppe und $O(H) \geqq 2$ ist. Es folgt $\varkappa[\alpha, e] = [\alpha, e]$ d. h.

$$\langle \varkappa, \varkappa\alpha, \ldots, \varkappa\alpha^{e-1} \rangle = \langle \varepsilon, \alpha, \ldots, \alpha^{e-1} \rangle$$

für jedes $\varkappa \in H$. Nach Multiplizieren mit α entsteht

$$\langle \varkappa\alpha^e, \varkappa\alpha, \varkappa\alpha^2, \ldots, \varkappa\alpha^{e-1} \rangle = \langle \alpha^e, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{e-1} \rangle.$$

Der Vergleich beider Gleichungen miteinander ergibt für ein $\varkappa \neq \varepsilon$ die Gleichung

$$\langle \varkappa, \alpha^e \rangle = \langle \varepsilon, \varkappa\alpha^e \rangle,$$

also muß $\alpha^e = \varepsilon$ sein. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Aus dem Korollar von Hilfssatz 2 folgt, daß jede Zerlegung von G in ein schlichtes Produkt von Simplexen zu einer ebensolchen, aber vollständigen Zerlegung verfeinert werden kann. Stets wenn in dieser mindestens ein Faktor eine Gruppe ist, muß nach Hilfssatz 3 auch schon für die vorgelegte Zerlegung ähnliches gelten. Damit haben wir bewiesen, daß *der* HAJÓS*sche Hauptsatz mit seinem auf vollständige Zerlegungen bezüglichen Teil äquivalent ist.*

Unser angekündigtes Ergebnis besagt nun, daß der HAJÓSsche Hauptsatz in seiner auf vollständige Zerlegungen bezüglichen äquivalenten Form seine Gültigkeit unerwartet allgemein für (normierte) Komplexe statt Simplexe behält. Das fassen wir in folgenden

SATZ 1 (verallgemeinerter Hauptsatz von HAJÓS). *In jeder normierten vollständigen Zerlegung einer endlichen abelschen Gruppe in ein schlichtes Produkt von Komplexen ist mindestens ein Faktor eine Gruppe.*

BEMERKUNG. Die genaue Benennung von Satz 1 sollte etwa „die Verallgemeinerung des auf vollständige Zerlegungen bezüglichen Teils des Hauptsatzes von HAJÓS" lauten, jedoch kann nach Obigem die von uns verwendete kurze Benennung nicht mißverstanden werden. Um aber die Dinge in ein ganz klares Licht zu setzen, bemerken wir, daß der HAJÓSsche Hauptsatz und Satz 1 sich in folgendem („alternativem") Satz vereinigen lassen: In einer normierten schlichten Zerlegung von G muß mindestens ein Faktor eine Gruppe sein, wenn alle Faktoren Simplexe oder alle von Primzahlmächtigkeit sind. Hiernach sind der HAJÓSsche Hauptsatz und Satz 1 der eine ein Gegenstück zum anderen, weshalb es angebracht wäre, Satz 1 etwa ein „Gegenstück zum HAJÓSschen Hauptsatz" zu nennen. Da aber aus diesem, wie oben auseinandergesetzt (nach dem Korollar von Hilfssatz 2 und nach Hilfssatz 3) der HAJÓSsche Hauptsatz folgt, schien uns richtiger zu sein für Satz 1 die oben angeführte Benennung zu verwenden.

Auch Satz 1 läßt sich nach Hilfssatz 1 verschärfen, da die Menge aller normierten Komplexe von G, die von Primzahlmächtigkeit sind, offenbar konsistent ist. Das führt aus Satz 1 zu folgendem

SATZ 1′ (scharfe Form des verallgemeinerten Hauptsatzes von HAJÓS). *Jede normierte vollständige Zerlegung einer endlichen abelschen Gruppe in ein schlichtes Produkt von Komplexen ist klassisch.*

Es wird in unserem Beweisverfahren ein springender Punkt sein, daß wir nicht zuerst Satz 1, sondern gleich den stärkeren Satz 1′ beweisen werden. Die dadurch erzielte Erleichterung des Beweises wird ganz wesentlich, das sich damit erklärt, daß wir einen Induktionsbeweis führen werden, wobei wir dank des Übergehens von Satz 1 auf Satz 1′ mit einer stärkeren Induktionsvoraussetzung werden arbeiten können. Leicht wird der Beweis, wie man das erwartet, auch so nicht, aber er wird reich an interessanten Wendungen sein.

Einige Teile des auszuführenden Beweises sind schon in unseren früheren Arbeiten enthalten, aber wir werden hier den ganzen Beweis lückenlos ausarbeiten. Das schien uns zur Bequemlichkeit des Lesers durchaus nötig zu sein, da dabei die zu wiederholenden Beweisteile mehr oder weniger abgeändert werden mußten.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile. Der erste Teil bringt eine knappe Einführung in die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen, im zweiten beweisen wir Satz 1′ für p-Gruppen, im dritten erstrecken wir den Beweis auf den allgemeinen Fall.

I. TEIL: EINFÜHRUNG IN DIE NEUE THEORIE DER ENDLICHEN ABELSCHEN GRUPPEN

§ 1. Hauptlemma

$\mathfrak{Z}$ bezeichnet den Ring der ganzen Zahlen. Um spätere Ausnahmen zu vermeiden, verstehen wir unter dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (der Elemente) der leeren Untermenge von $\mathfrak{Z}$ die Zahl 1.

$\mathfrak{Z}(G)$ bezeichnet den (natürlichen) Gruppenring von G, dessen Elemente also eindeutig durch die Basisdarstellung

$$\mathfrak{A}=\sum_{\gamma\in G} a_\gamma\gamma \qquad (a_\gamma\in\mathfrak{Z}) \tag{1}$$

(mit den Koeffizienten a_γ) angegeben sind; für dieses und ein weiteres Element

$$\mathfrak{B}=\sum_{\gamma\in G} b_\gamma\gamma \qquad (b_\gamma\in\mathfrak{Z})$$

gelten dann die Verknüpfungsregeln

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\sum_{\gamma\in G}(a_\gamma+b_\gamma)\gamma, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}=\sum_{\gamma,\delta\in G} a_\gamma b_\delta\gamma\delta.$$

$\mathfrak{N}$ ($\subset\mathfrak{Z}$) bezeichnet den Halbring der nichtnegativen ganzen Zahlen.

$\mathfrak{N}(G)$ ($\subset\mathfrak{Z}(G)$) bezeichnet den Halbring derjenigen Elemente von $\mathfrak{Z}(G)$, deren Koeffizienten in $\mathfrak{N}$ liegen. *Positiv* nennen wir ein Element $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{Z}(G)$, wenn $\mathfrak{A}\in\mathfrak{N}(G)$ und $\mathfrak{A}\neq 0$ ist.

$\bar{A}$ bezeichnet für einen Komplex A von G die *Quersumme* von A, die wir als das (positive) Element

$$\bar{A}=\sum_{\alpha\in A}\alpha$$

von $\mathfrak{J}(G)$ definieren. Die Abbildung $A\to\bar{A}$ liefert eine eineindeutige Einbettung der Menge aller Komplexe von G in $\mathfrak{J}(G)$. Für schlichte Produkte gilt dabei offenbar auch die Homomorphieeigenschaft

$$\overline{A\circ B}=\bar{A}\bar{B}.$$

Das ermöglicht, daß man die Untersuchung der schlichten Produkte von Komplexen von G auf die der (gewöhnlichen) Elementprodukte in $\mathfrak{J}(G)$ zurückführt. (Hier bemerken wir, daß HAJÓS [3] die Quersumme $\varepsilon+\alpha+\ldots+\alpha^{e-1}$ eines Simplexes $[\alpha, e]$ eine „Reihe" nennt.)

$\mathfrak{G}$ bezeichnet die Gruppe aller (komplexen) Charaktere (kurz die Charaktergruppe) von G.

χ bezeichnet, wenn nicht anderes gesagt wird, ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$. Das durch χ gelieferte Bild von $\gamma\in G$ (oder der Wert von χ an der Stelle γ) wird üblicherweise mit $\chi(\gamma)$ bezeichnet.

χ_1 bezeichnet das Einselement von $\mathfrak{G}$ d. h. den Hauptcharakter von G, definiert durch $\chi_1(\gamma)=1$ für alle $\gamma=G$.

Wir definieren die (ebenfalls mit χ zu bezeichnende) Fortsetzung von χ auf $\mathfrak{J}(G)$, indem wir für (1)

$$\chi(\mathfrak{A})=\sum_{\gamma\in G}a_\gamma\chi(\gamma) \tag{2}$$

setzen. Es ist klar, daß dann χ ein Homomorphismus des Gruppenringes $\mathfrak{J}(G)$ ist. Insbesondere ist $\chi_1(\mathfrak{A})$ gleich der Koeffizientensumme von $\mathfrak{A}$.

Wir definieren noch

$$\chi(A)=\chi(\bar{A})=\sum_{\alpha\in A}\chi(\alpha)\qquad(A\subseteq G,\neq\emptyset).$$

Hieraus folgt $\chi_1(A)=O(A)$.

G_χ und $\mathfrak{J}(G)_\chi$ bezeichnen den Kern von χ in G bzw. in $\mathfrak{J}(G)$. Das bedeutet, daß G_χ die aus den Lösungen von $\chi(\gamma)=1$ $(\gamma\in G)$ bestehende Untergruppe von G und $\mathfrak{J}(G)_\chi$ das aus den Lösungen von $\chi(\mathfrak{A})=0$ $(\mathfrak{A}\in\mathfrak{J}(G))$ bestehende Ideal von $\mathfrak{J}(G)$ ist. Bekanntlich gilt

$$\bigcap_{\chi\in\mathfrak{G}}G_\chi=\varepsilon. \tag{3}$$

Wir zeigen die ähnliche, weniger bekannte Beziehung

$$\bigcap_{\chi\in G}\mathfrak{J}(G)_\chi=0. \tag{4}$$

Die Determinante

$$|\chi(\gamma)|\qquad(\gamma\in G,\ \chi\in\mathfrak{G})$$

aller Charakterwerte ist bekanntlich von 0 verschieden. Hieraus folgt, daß die rechte Seite von (2) nur dann für alle χ verschwindet, wenn alle a_γ $(\gamma\in G)$ gleich 0 sind. Damit ist (4) bewiesen.

Es läßt sich (4) aussprechen als:

HILFSSATZ 4. *Eine Gleichung* $\mathfrak{A}=0$ $(\mathfrak{A}\in\mathfrak{Z}(G))$ *besteht dann und nur dann, wenn alle Charakterwerte* $\chi(\mathfrak{A})$ *gleich* 0 *sind. Allgemeiner besteht also eine Gleichung* $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ $(\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in\mathfrak{Z}(G))$ *dann und nur dann, wenn* $\chi(\mathfrak{A})=\chi(\mathfrak{B})$ *für alle* $\chi\in\mathfrak{G}$ *besteht.*

Nach diesem Hilfssatz ist jede Gleichung im Ring $\mathfrak{Z}(G)$ äquivalent mit einem Gleichungssystem im n-ten Kreisteilungskörper, wobei $n=\mathfrak{ch}(G)$ die Charakteristik von G, d. h. das Maximum der Ordnungen der Elemente von G ist.

Zu unseren Zwecken schließen wir noch aus Hilfssatz 4 und der Homomorphieeigenschaft der Charaktere auf folgenden

HILFSSATZ 5. *Für Elemente* $\mathfrak{A},\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_k$ *von* $\mathfrak{Z}(G)$ *ist die Gleichung*

$$\mathfrak{A}=\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{A}_i$$

gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$\chi(\mathfrak{A})=\prod_{i=1}^{k}\chi(\mathfrak{A}_i)\qquad(\chi\in\mathfrak{G})$$

Um diesen Hilfssatz auf die Quersumme $\mathfrak{A}=\bar{G}$ anzuwenden, bemerke man, daß $\chi_1(\bar{G})=O(G)$ und für $\chi\neq\chi_1$ stets $\chi(\bar{G})=0$ ist. Also haben wir

HILFSSATZ 6. *Für Elemente* $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_k$ *von* $\mathfrak{Z}(G)$ *gilt*

$$\bar{G}=\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{A}_i$$

dann und nur dann, wenn

$$O(G)=\prod_{i=1}^{k}\chi_1(\mathfrak{A}_i)$$

ist und für jeden Charakter $\chi\neq\chi_1$ *es mindestens ein* $i=1,\ldots,k$ *mit* $\chi(\mathfrak{A}_i)=0$ *gibt.*

$\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{N}(A)$ bezeichnen den *Nullifikator* eines Elementes $\mathfrak{A}\in\mathfrak{Z}(G)$ bzw. eines Komplexes $A\subset G$, d. h. die Menge der Charaktere χ mit $\chi(\mathfrak{A})=0$ bzw. $\chi(A)=0$. (Also ist $\mathfrak{N}(A)=\mathfrak{N}(\bar{A})$, weshalb $\mathfrak{N}(A)$ im wesentlichen ein Spezialfall von $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ ist.)

Man bemerke, daß nach dieser Definition sich im Hilfssatz 6 die zweite Bedingung in der Form

$$\mathfrak{G}\setminus\chi_1=\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_i)$$

schreiben läßt. (Mit $\setminus$ wird eine Differenzenmenge bezeichnet.)

Dieses berücksichtigend ergibt sich aus Hilfssatz 6 nach leichter Spezialisierung folgendes

HAUPTLEMMA. *Für Komplexe* $A_1,\ldots,A_k$ *von* G *gilt die schlichte Zerlegung*

$$G=A_1\circ\ldots\circ A_k \tag{5}$$

dann und nur dann, wenn

$$O(G)=O(A_1)\ldots O(A_k) \tag{6}$$

und (es für jeden Charakter $\chi \neq \chi_1$ mindestens ein $i = 1, \ldots, k$ mit $\chi(A_i) = 0$ gibt d. h.)

$$\mathfrak{G} \setminus \chi_1 = \mathfrak{N}(A_1) \cup \ldots \cup \mathfrak{N}(A_k) \tag{7}$$

ist.

BEMERKUNG. Dieses Hauptlemma ist in weniger klarer Form auch schon in den früheren Arbeiten aufgetreten und bietet ein handliches Mittel zur Untersuchung der Zerlegungen (5), wie wir das schon an Hand einiger einfachen Anwendungen bald erfahren werden.

§ 2. Zerlegungsklassen

Bei festem $\mathfrak{G}$ nennen wir für natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_k$ $(k \geqq 1)$ und für Untermengen $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_k$ von $\mathfrak{G} \setminus \chi_1$ mit

$$O(G) = n_1 \ldots n_k, \quad \mathfrak{G} \setminus \chi_1 = \mathfrak{N}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{N}_k$$

die (eventuell leere) Menge der Zerlegungen

$$G = A_1 \circ \ldots \circ A_k \qquad (O(A_i) = n_i, \mathfrak{N}(A_i) = \mathfrak{N}_i;\ i = 1, \ldots, l)$$

eine *Zerlegungsklasse* von G und bezeichnen diese mit

$$\begin{pmatrix} n_1 & \ldots & n_k \\ \mathfrak{N}_1 & \ldots & \mathfrak{N}_k \end{pmatrix}.$$

Echt nennen wir diese Zerlegungsklasse, wenn $n_1, \ldots, n_k \geqq 2$ ist; dann gehören in sie (falls sie nicht leer ist) nur echte Zerlegungen. Im wesentlichen genügt es unter allen Zerlegungsklassen die echten zu berücksichtigen.

Um die zu einer Zerlegungsklasse gehörenden Zerlegungen gut überblicken zu können, nennen wir zwei Komplexe A und B von G miteinander *äquivalent* und schreiben hierfür $A \approx B$, wenn $O(A) = O(B)$ und $\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}(B)$ ist. Für die entsprechenden Äquivalenzklassen (von Komplexen von G) führen wir die Bezeichnung $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ ein, wobei n eine natürliche Zahl und $\mathfrak{N}$ eine Untermenge von $\mathfrak{G}$ ist, und zwar soll $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ aus den Komplexen A von G bestehen, für die

$$O(A) = n, \quad \mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}$$

ist. Selbstverständlich kann eine Klasse $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ auch leer sein. (Über den Fall $n = 1$ bemerke man, daß dieser ganz ohne Interesse ist, da $\left\langle \begin{matrix} 1 \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ für $\mathfrak{N} = \emptyset$ einfach aus den Elementen von G besteht und für $\mathfrak{N} \neq \emptyset$ offenbar gleich $\emptyset$ ist. Ebenfalls ist $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle = \emptyset$, falls $\chi_1 \in \mathfrak{N}$ ist. Somit genügt es die $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ mit $n \geqq 2$ und $\mathfrak{N} \subseteq G \setminus \chi_1$ zu betrachten.)

Unmittelbar aus obigen Definitionen folgt

SATZ 2 (Unabhängigkeitssatz). *Die in eine Zerlegungsklasse* $\begin{pmatrix} n_1 & \dots & n_k \\ \mathfrak{N}_1 & \dots & \mathfrak{N}_k \end{pmatrix}$ *gehörenden Zerlegungen sind durch*

$$G = A_1 \circ \dots \circ A_k \quad \left(A_i \in \left\langle \begin{matrix} n_i \\ \mathfrak{N}_i \end{matrix} \right\rangle ;\ i = 1, \dots, l \right)$$

angegeben (wobei also die Faktoren voneinander unabhängig variieren).

Die Wichtigkeit dieses Satzes erhellt aus folgendem Zusatz, der nichts anderes ist, als eine äquivalente Umformulierung des Hauptlemmas.

ZUSATZ. *Die Zerlegungsklassen von G bilden eine Einteilung der Menge aller Zerlegungen von G in paarweise disjunkte Klassen.*

Nach diesem Satz und Zusatz ist das Problem der Bestimmung aller Zerlegungen von G vollständig auf die Bestimmung derjenigen nichtleeren Äquivalenzklassen $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ zurückgeführt, in denen $n | O(G)$ ist. Eine weitere Reduktion entsteht dadurch, daß offenbar nur diejenigen $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ in Betracht zu ziehen sind, die mindestens einen Teiler von G enthalten, aber man sieht aus Satz 2, daß diese Äquivalenzklassen nur Teiler von G enthalten, weshalb wir sie die *Teilerklassen* von G nennen. Als eine Ergänzung zu Satz 2 folgt hieraus, daß eine Zerlegungsklasse $\left\langle \begin{matrix} n_1 & \dots & n_k \\ \mathfrak{N}_1 & \dots & \mathfrak{N}_k \end{matrix} \right\rangle$ dann und nur dann nichtleer ist, wenn alle Äquivalenzklassen $\left\langle \begin{matrix} n_i \\ \mathfrak{N}_i \end{matrix} \right\rangle$ nichtleer, d. h. Teilerklassen sind $(i = 1, \dots, k)$.

Obwohl es hiernach zur Bestimmung der Zerlegungen von G genügt, die Teilerklassen zu bestimmen, hat man bei dieser Aufgabe im allgemeinen auch die übrigen nichtleeren Äquivalenzklassen $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ in Betracht zu ziehen. Offenbar ist nämlich eine Äquivalenzklasse $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ $(n | O(G))$ dann und nur dann eine Teilerklasse, wenn sie nichtleer ist und eine weitere nichtleere Äquivalenzklasse $\left\langle \begin{matrix} n' \\ \mathfrak{N}' \end{matrix} \right\rangle$ mit $nn' = O(G)$ und $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}' = \mathfrak{G} \setminus \chi_1$ existiert (die also auch eine Teilerklasse ist), woraus man sieht, wie die Teilerklassen unter allen Äquivalenzklassen von Komplexen auszusondern sind. Trotzdem ist das nicht die einzige Möglichkeit, um Aufklärungen über die Teilerklassen zu gewinnen, worüber wir manches noch in dieser Arbeit erfahren werden.

Es ist nützlich, in der Menge der Komplexe A von G mit $O(A) | O(G)$, in der Menge der nichtleeren Äquivalenzklassen $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ mit $n | O(G)$ und in der Menge der nichtleeren Zerlegungsklassen von G folgenderweise je eine Halbordnungsrelation einzuführen, die wir in allen drei Mengen mit $\prec$ bezeichnen. Für zwei Komplexe A und B von G mit $O(A), O(B) | O(G)$ soll $A \prec B$ bedeuten, daß

$$O(A) = O(B), \qquad \mathfrak{N}(A) \subset \mathfrak{N}(B)$$

ist. Für zwei nichtleere Äquivalenzklassen $\left\langle \begin{matrix} m \\ \mathfrak{M} \end{matrix} \right\rangle$ und $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ mit $m, n | O(G)$ soll $\left\langle \begin{matrix} m \\ \mathfrak{M} \end{matrix} \right\rangle < \left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ bedeuten, daß $m = n$ und $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ ist. Für zwei nichtleere Zerlegungsklassen

$$\mathfrak{Z}_1 = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_k \\ \mathfrak{M}_1 & \dots & \mathfrak{M}_k \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{Z}_2 = \begin{pmatrix} n_1 & \dots & n_l \\ \mathfrak{N}_1 & \dots & \mathfrak{N}_l \end{pmatrix}$$

soll $\mathfrak{Z}_1 < \mathfrak{Z}_2$ bedeuten, daß $\mathfrak{Z}_1 \neq \mathfrak{Z}_2$, $k = l$ und

$$\left\langle \begin{matrix} m_i \\ \mathfrak{M}_i \end{matrix} \right\rangle \leqq \left\langle \begin{matrix} n_i \\ \mathfrak{N}_i \end{matrix} \right\rangle \quad \text{(also gewiß } m_i = n_i) \qquad (i = 1, \dots k)$$

ist. In allen drei Fällen sage man für $<$ (von links nach rechts gelesen) *niedriger* oder (von rechts nach links gelesen) *höher*. Man sieht, daß die so halbgeordnet gewordenen drei Mengen im allgemeinen keine Verbände sind.

Als einfaches Beispiel fasse man die nichtleeren Zerlegungsklassen $\mathfrak{Z} = \left\langle \begin{matrix} m & n \\ \mathfrak{M} & \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ $(mn = O(G))$ für feste m und n ins Auge. Je enger dabei $\mathfrak{M}$, d. h. je niedriger die Teilerklasse $\left\langle \begin{matrix} m \\ \mathfrak{M} \end{matrix} \right\rangle$ ist, desto mehr muß $\mathfrak{N}$ umfassend, d. h. die Teilerklasse $\left\langle \begin{matrix} n \\ \mathfrak{N} \end{matrix} \right\rangle$ hoch ausfallen.

§ 3. Einige weitere Grundlegungen

Für zwei Teiler A und B von G nennen wir die Ersetzung

$$A \to B \tag{1}$$

zulässig, wenn durch diese Ersetzung jede schlichte Zerlegung von G, in der A als ein Faktor auftritt, wieder in eine schlichte Zerlegung von G übergeht. Wenn man alle schlichten Zerlegungen von G kennt, so sind hierdurch selbstverständlich auch schon alle zulässigen Ersetzungen bekannt, weshalb diese dann ohne Interesse sind. Die Wichtigkeit der zulässigen Ersetzungen liegt eben darin, daß sie zur Untersuchung der schlichten Zerlegungen von G geeignet sind.

Zur Zulässigkeit einer Ersetzung (1) ist (nach dem Hauptlemma) offenbar hinreichend, wenn

$$O(A) = O(B), \quad \mathfrak{N}(A) \subseteqq \mathfrak{N}(B) \tag{2}$$

ist, welche Bedingung (entsprechend den Fällen $=$ und $\subset$) sich auch so formulieren läßt, daß $A \approx B$ oder $A < B$ ist. Das bedeutet, daß die durch eine schlichte Zerlegung von G repräsentierte Zerlegungsklasse bei der Ausführung einer (zulässigen) Ersetzung (1) von der Eigenschaft (2) entweder invariant bleibt oder in eine höhere Zerlegungsklasse übergeführt wird. In dieser Arbeit werden nur solche zulässigen Ersetzungen (1) auftreten, die (2) genügen.

Als eine leichte, aber wichtige Anwendung beweisen wir folgende Ergänzung des Hauptlemmas.

SATZ 3. *In jeder echten schlichten Zerlegung von G haben alle Faktoren einen nichtleeren Nullifikator.*

KOROLLAR. *Eine echte Zerlegungsklasse* $\left\langle \begin{matrix} n_1 & \dots & n_k \\ \mathfrak{N}_1 & \dots & \mathfrak{N}_k \end{matrix} \right\rangle$ *(d. h. eine mit* $n_1, \dots, n_k \geqq 2$*) kann nur dann nichtleer sein, wenn* $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_k \neq \emptyset$ *ist.*

Die Behauptung des Satzes ist gleichbedeutend damit, daß aus der Annahme

$$A|G, \quad O(A) \geqq 2$$

das Bestehen von $\mathfrak{N}(A) \neq \emptyset$ folgt. Die Annahme $A|G$ bedeutet die Existenz eines Komplexes X von G mit

$$G = A \circ X.$$

Wenn $O(X) = 1$ ist, so ist $A = G$, woraus wegen $O(G) = O(A) \geqq 2$ die Behauptung $\mathfrak{N}(A) \neq \emptyset$ folgt. Wenn $O(X) \geqq 2$ ist, so nehme man einen Komplex B von G mit $O(B) = O(A)$, der zwei verschiedene Elemente von X enthält. Dann existiert das schlichte Produkt $B \circ X$ nicht, also ist die Ersetzung $A \to B$ nicht zulässig, woraus $\mathfrak{N}(B) \supsetneqq \mathfrak{N}(A)$, also $\mathfrak{N}(A) \neq \emptyset$ folgt. Damit ist Satz 3 bewiesen. Aus diesem folgt das Korollar.

Zum weiteren benötigen wir den Begriff der *potenzgleichen* Komplexe (Elemente); so nennen wir zwei Komplexe (Elemente) A und B einer beliebigen endlichen Gruppe, wenn sowohl A eine Potenz von B als auch B eine Potenz von A ist (woraus offenbar $O(A) = O(B)$ folgt). Insbesondere bedeutet also die Potenzgleichheit zweier Elemente α und β einer endlichen Gruppe einfach das Bestehen von $\{\alpha\} = \{\beta\}$ (woraus $o(\alpha) = o(\beta)$ folgt).

Es ist klar, daß die Potenzgleichheit ein Äquivalenzbegriff ist. Insbesondere besteht die Klasse der mit einem Gruppenelement α potenzgleichen Elemente aus den $\varphi(o(\alpha))$ Potenzen α^i $(0 \leqq i \leqq o(\alpha) - 1; (i, o(\alpha)) = 1)$, wobei φ die Eulersche Funktion ist.

Uns wird die Potenzgleichheit in zwei Fällen, nämlich zunächst für die Charaktere von G (d. h. für die Elemente von $\mathfrak{G}$) und später unten für die Komplexe von G interessieren.

$K(\mathfrak{G})$ bezeichnet den über dem rationalen Zahlkörper durch alle Charakterwerte $\chi(\gamma)$ $(\chi \in \mathfrak{G}, \gamma \in G)$ erzeugten Körper, den wir kurz den *Charakterkörper* von G nennen. Es folgt, daß dieser der $\mathfrak{ch}(G)$-te Kreisteilungskörper ist. (Man bemerke, daß der n-te Kreisteilungskörper den Grad $\varphi(n)$ hat, durch eine (komplexe) Einheitswurzel ϱ von n-ter Ordnung erzeugt wird und seine Automorphismen durch $\varrho \to \varrho^c$ $(0 \leqq c \leqq n-1; (c, n) = 1)$ angegeben sind.)

HILFSSATZ 7. *Die mit einem Charakter $\chi \in \mathfrak{G}$ potenzgleichen Charaktere χ' sind durch*

$$\chi'(\gamma) = \chi(\gamma)^\sigma \qquad (\gamma \in G)$$

angegeben, wobei σ die Automorphismen des Charakterkörpers $K(\mathfrak{G})$ durchläuft.

(Das ist selbstverständlich so gemeint, daß bei gegebenem χ verschiedene σ zum selben χ' führen können.)

Zum Beweis sei $n = \mathfrak{ch}(G)$. Dann ist $K(\mathfrak{G})$ der n-te Kreisteilungskörper, also sind einerseits durch $\chi^i((i, n) = 1)$ die mit χ potenzgleichen Charaktere, anderer-

seits durch $\varrho \to \varrho^i$ (mit denselben i) die Automorphismen von $K(\mathfrak{G})$ angegeben, wobei ϱ eine Einheitswurzel n-ter Ordnung aus $K(\mathfrak{G})$ ist. (Eindeutigkeit könnte in beiden Fällen durch je eine passende Einschränkung der zuzulassenden i erreicht werden, was jedoch jetzt unnötig ist.) Da stets $\chi^i(\gamma) = \chi(\gamma)^i$ ist ($\gamma \in G$), folgt daraus die Richtigkeit von Hilfssatz 7.

SATZ 4. *Der Nullifikator eines Elementes des Gruppenringes $\mathfrak{Z}(G)$, also auch der eines Komplexes von G ist stets (leer oder) die Vereinigungsmenge einiger Klassen potenzgleicher Charaktere.*

KOROLLAR. *Eine Zerlegungsklasse* $\left\langle \begin{matrix} n_1 & \dots & n_k \\ \mathfrak{N}_1 & \dots & \mathfrak{N}_k \end{matrix} \right\rangle$ *kann nur dann nichtleer sein, wenn alle $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_k$ Vereinigungsmengen von Klassen potenzgleicher Charaktere von G sind.*

Gilt nämlich $\chi(A) = 0$ für einen Charakter χ und für ein Element $A \in \mathfrak{Z}(G)$, so ist $\chi(A)^\sigma = 0$ für alle Automorphismen σ des Charakterkörpers $K(\mathfrak{G})$. Hieraus folgt nach Hilfssatz 7 die Gleichung $\chi'(A) = 0$ für alle mit χ potenzgleichen Charaktere χ'. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Das Korollar folgt aus der Definition der Zerlegungsklassen und aus dem Satz.

$\mathfrak{ch}(A)$ und $\mathfrak{ch}_0(A)$ bezeichnen für einen Komplex A von G die *Charakteristik* von A bzw. die *reduzierte Charakteristik* von A, die wir folgenderweise definieren. Zunächst sei A normiert. Für diesen Fall verstehen wir unter $\mathfrak{ch}(A)$ und $\mathfrak{ch}_0(A)$ das kleinste gemeinsame Vielfache aller $o(\alpha)$ ($\alpha \in A$) bzw. das von allen $o(\chi(\alpha))$ ($\chi \in \mathfrak{N}(A), \alpha \in A$); infolge obiger Vereinbarung ist also $\mathfrak{ch}_0(A) = 1$, falls $\mathfrak{N}(A) = \emptyset$. (Man bemerke, daß $\mathfrak{ch}(A)$ eine Verallgemeinerung des Begriffs der Charakteristik einer endlichen abelschen Gruppe ist; das berechtigt uns zur ähnlichen Bezeichnung und Benennung beider Begriffe.) Offenbar folgt aus den Definitionen

$$\mathfrak{ch}_0(A) | \mathfrak{ch}(A).$$

(Durch diese Teilbarkeit ist die Benennung „reduzierte Charakteristik" gerechtfertigt.) Nun gilt

HILFSSATZ 8. *Assoziierte normierte Komplexe von G sind von gleicher Charakteristik und auch von gleicher reduzierter Charakteristik.*

Noch vor dem Beweis erstrecken wir die Definitionen von $\mathfrak{ch}(A)$ und $\mathfrak{ch}_0(A)$ einfach durch

$$\mathfrak{ch}(A) = \mathfrak{ch}(A'), \qquad \mathfrak{ch}_0(A) = \mathfrak{ch}_0(A'),$$

wobei A' einen zu A assoziierten normierten Komplex bezeichnet. Aus Hilfssatz 8 folgt, daß $\mathfrak{ch}(A)$ und $\mathfrak{ch}_0(A)$ eindeutig durch A bestimmt sind, ferner folgt, daß Hilfssatz 8 seine Gültigkeit für beliebige assoziierte Komplexe von G behält.

Zum Beweis von Hilfssatz 8 betrachten wir zwei assoziierte normierte Komplexe A und B von G. Es genügt die Behauptungen

$$\mathfrak{ch}(B) | \mathfrak{ch}(A), \qquad \mathfrak{ch}_0(B) | \mathfrak{ch}_0(A)$$

zu beweisen.

Es gilt

$$B = \alpha^{-1} A$$

mit einem passenden $\alpha \in A$. Es folgt, daß $\mathfrak{ch}(B)$ das kleinste gemeinsame Vielfache aller

$$o(\alpha^{-1}\xi) \qquad (\xi \in A)$$

ist. Da aber $o(\alpha^{-1}\xi)$ ein Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $o(\alpha)$ und $o(\xi)$ ist, folgt hieraus die erste Behauptung. Da ferner $\mathfrak{N}(B) = \mathfrak{N}(A)$ ist, ist $\mathfrak{ch}_0(B)$ das kleinste gemeinsame Vielfache aller

$$o(\chi(\alpha^{-1}\xi)) \qquad (\chi \in \mathfrak{N}(A),\ \xi \in A).$$

Da diese Ordnung ein Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $o(\chi(\alpha))$ und $o(\chi(\xi))$ ist, ist auch die zweite Behauptung richtig. Damit ist Hilfssatz 8 bewiesen.

Man bemerke, daß $\mathfrak{ch}(A) = \mathfrak{ch}_0(A)$ ist, wenn A eine Untergruppe von G ist. Für Einerkomplexe A ist $\mathfrak{ch}(A) = \mathfrak{ch}_0(A) = 1$.

HILFSSATZ 9. *Für einen normierten Komplex A von G und für eine ganze Zahl a sind A und A^a dann und nur dann potenzgleich, wenn a zu $\mathfrak{ch}(A)$ prim ist.*

Die Potenzgleichheit von A und A^a ist nämlich äquivalent damit, daß für ein passendes Vielfaches b von a die Gleichung $A^b = A$ zutrifft. Da diese Gleichung bedeutet, daß $\alpha \to \alpha^b$ eine Permutation von A ist, folgt aus ihr (wegen der Endlichkeit von A), daß $\alpha \to \alpha^{b^i}$ für eine passende natürliche Zahl i die identische Abbildung von A ist. Damit ist zunächst bewiesen, daß A und A^a dann und nur dann potenzgleich sind, wenn für ein passendes Vielfaches c von a und für alle $\alpha \in A$ die Bedingung $\alpha^c = \alpha$, d. h. $c \equiv 1 \pmod{o(\alpha)}$ erfüllt ist. Hierfür läßt sich aber die einzige Bedingung $c \equiv 1 \pmod{\mathfrak{ch}(A)}$ nehmen. Da diese Bedingung mit einem Vielfachen c von a dann und nur dann erfüllbar ist, wenn $(a, \mathfrak{ch}(A)) = 1$ ist, ist Hilfssatz 9 bewiesen.

SATZ 5. *Für jeden Teiler A von G sind alle Ersetzungen*

$$A \to A^a \qquad ((a, \mathfrak{ch}_0(A)) = 1)$$

zulässig.

KOROLLAR. *Aus einer Zerlegung*

$$G = A_1 \circ \ldots \circ A_k$$

folgen alle Zerlegungen

$$G = A_1^{a_1} \circ \ldots \circ A_k^{a_k} \qquad ((a_i, \mathfrak{ch}_0(A_i)) = 1;\ i = 1, \ldots, k).$$

BEMERKUNG. Dieses Korollar ist natürlich bloß eine ausführlichere aber äquivalente Umformulierung des Satzes. Da assoziierte Komplexe gleiche reduzierte Charakteristik haben, genügt es den Satz (und das Korollar) für normierte Komplexe auszusprechen. Für diesen Fall folgt aus dem Satz wegen $\mathfrak{ch}_0(A) | \mathfrak{ch}(A)$ und wegen Hilfssatz 9, daß die Ersetzungen eines normierten Teilers A von G durch die mit diesem potenzgleichen Komplexe zulässig sind. Entsprechendes gilt für das Korollar, insofern man $A_1, \ldots, A_k$ normiert annimmt.) Wir bemerken noch Folgendes. Da $\mathfrak{ch}_0(A)$ ein Teiler von $O(G)$ ist, ist das Korollar insbesondere mit Exponenten $a_1, \ldots, a_k$

von der Eigenschaft $(a_i, O(G))=1$ $(i=1, \ldots, k)$ stets anwendbar. Indem wir für ein c mit $(c, O(G))=1$ den Automorphismus $\gamma \to \gamma^c$ von G einen *natürlichen* Automorphismus nennen, können wir diesen kleinen Teil des Korollars so formulieren, daß eine schlichte Zerlegung von G nicht zerstört wird, wenn alle Faktoren (voneinander unabhängig) beliebigen natürlichen Automorphismen von G unterworfen werden. Auch das ist keine Trivialität und könnte ohne das Hauptlemma (d. h. ohne Verwendung von Charakteren) schwer oder gar nicht bewiesen werden. Trivial ist der Spezialfall $a_1 = \ldots = a_k$, denn selbstverständlich darf auf die Faktoren gleichzeitig ein beliebiger (nicht nur natürlicher) Automorphismus ausgeübt werden, ohne daß hierdurch die Zerlegung zerstört wird.

Wie bemerkt, braucht Satz 5 nur für einen normierten Teiler A von G bewiesen zu werden. Im Beweis greifen wir am bequemsten auf Hilfssatz 6 (statt des Hauptlemmas) zurück. Da $A|G$ ist, gibt es einen Komplex B von G mit $G = A \circ B$, d. h.

$$\bar{G} = \bar{A}\bar{B}.$$

Wir betrachten einen Charakter $\chi \in \mathfrak{N}(\bar{A})$. Dann ist $\chi(\bar{A})=0$, d. h.

$$\sum_{\alpha \in A} \chi(\alpha) = 0.$$

Wegen $(a, \mathfrak{h}_0(A))=1$ ist a zu allen $o(\chi(\alpha))$ prim $(\alpha \in A)$, also läßt sich $\chi(\alpha)$ in voriger Gleichung durch $\chi(\alpha^a)(=\chi(\alpha)^a)$ ersetzen:

$$\sum_{\alpha \in A} \chi(\alpha^a) = 0.$$

Indem wir

$$\mathrm{A} = \sum_{\alpha \in A} \alpha^a \qquad (\in \mathfrak{J}(G))$$

setzen, läßt sich vorige Gleichung als $\chi(\mathrm{A})=0$ schreiben. Damit haben wir

$$\mathfrak{N}(\mathrm{A}) \supseteq \mathfrak{N}(\bar{A})$$

gewonnen. Da andererseits $\chi_1(\mathrm{A})=\chi_1(\bar{A})$ ist, folgt aus Hilfssatz 6 offenbar daß $\bar{G}=\bar{A}\bar{B}$ bei der Ersetzung $\bar{A} \to \mathrm{A}$ in die richtige Gleichung

$$\bar{G} = \mathrm{A}\bar{B}$$

übergeht. Hieraus folgt vor allem, da A und $\bar{B}$ positiv sind, daß in A nur Koeffizienten 1 und 0 auftreten können, d. h. alle α^a $(\alpha \in A)$ verschieden sind. Das bedeutet das Bestehen von

$$O(A^a) = O(A).$$

Da ferner hiernach A die Quersumme $\overline{A^a}$ des Komplexes A^a ist, folgt weiter $\bar{G} = \overline{A^a}\bar{B}$, d. h. $G = A^a \circ B$. Damit ist Satz 5 bewiesen und das Korollar mitbewiesen.

HILFSSATZ 10. *Der Nullifikator* $\mathfrak{N}([\alpha, e])$ *eines Simplexes* $[\alpha, e]$ *besteht aus den Charakteren* $\chi \in G$ *mit* $o(\chi(\alpha))|e$ *und* $\chi(\alpha) \neq 1$.

Das folgt nämlich aus der Gleichung

$$\chi([\alpha, e]) = 1 + \chi(\alpha) + \ldots + \chi(\alpha)^{e-1}.$$

HILFSSATZ 11. *Für den Nullifikator eines Komplexes*

$$A=\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_p\rangle \qquad (p \text{ Primzahl})$$

von G mit Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ *von p-Potenzordnung gilt*

$$\mathfrak{N}(A)=\bigcap_{i\neq j}\mathfrak{N}([\alpha_i^{-1}\alpha_j, p]) \qquad (i,j=1,\ldots,p).$$

BEMERKUNG. Es genügte diesen Durchschnitt auf die i und j mit $1\leqq i<j\leqq p$ zu erstrecken, da nach Hilfssatz 10 stets $\mathfrak{N}([\alpha, e])=\mathfrak{N}([\alpha^{-1}, e])$ ist.

Zum Beweis von Hilfssatz 11 betrachten wir

$$\chi(A) = \chi(\alpha_1)+\ldots+\chi(\alpha_p) \qquad (\chi\in\mathfrak{G}).$$

Die Glieder der rechten Seite sind Einheitswurzeln von p-Potenzordnung ($\geqq 1$), also ist $\chi(A)$ dann und nur dann gleich 0, wenn für jedes $i=1, \ldots, p$ die p Quotienten

$$(\chi(\alpha_i)^{-1}\chi(\alpha_j)=)\chi(\alpha_i^{-1}\alpha_j) \qquad (j=1,\ldots,p)$$

die verschiedenen p-ten komplexen Einheitswurzeln sind, d. h., wie leicht zu sehen, wenn alle Einheitswurzeln

$$\chi(\alpha_i^{-1}\alpha_j) \qquad (i\neq j;\ i,j=1,\ldots,p)$$

von p-ter Ordnung sind. Hieraus und aus Hilfssatz 10 folgt Hilfssatz 11.

SATZ 6. *Für eine Primzahl p und für zwei Komplexe A und B von G, von denen A von der Mächtigkeit p ist und nur Elemente von p-Potenzordnung enthält, gilt die Zerlegung*

$$G=A\circ B$$

dann und nur dann, wenn alle Zerlegungen

$$G=[\alpha^{-1}\alpha', p]\circ B \qquad (\alpha\neq\alpha';\ \alpha,\alpha'\in A)$$

gelten.

BEMERKUNG. Auch durch diesen Satz ist die Wichtigkeit der Simplexe stark unterstrichen. Beide Teile des Satzes ließen sich auch in der Sprache der Zulässigkeit von Ersetzungen von Komplexen formulieren, was dem Leser überlassen werden mag.

Wegen $O(A)=O([\alpha^{-1}\alpha', p])$ $(=p)$ und des Hauptlemmas läßt sich die Behauptung des Satzes so aussprechen, daß dann und nur dann

$$\mathfrak{G}\diagdown\chi_1 = \mathfrak{N}(A)\cup\mathfrak{N}(B)$$

ist, wenn alle Gleichungen

$$\mathfrak{G}\diagdown\chi_1 = \mathfrak{N}([\alpha^{-1}\alpha', p])\cup\mathfrak{N}(B) \qquad (\alpha\neq\alpha';\ \alpha,\alpha'\in A)$$

erfüllt sind, d. h. wenn die Gleichung

$$\mathfrak{G}\diagdown\chi_1=\Big(\bigcap_{\substack{\alpha,\alpha'\in A\\ \alpha\neq\alpha'}}\mathfrak{N}([\alpha^{-1}\alpha', p])\Big)\cup\mathfrak{N}(B)$$

erfüllt ist. Da der hier auftretende Durchschnitt nach Hilfssatz 11 gleich $\mathfrak{N}(A)$ ist, ist Satz 6 bewiesen.

II. TEIL: BEWEIS VON SATZ 1′ FÜR p-GRUPPEN

§ 4. Beweis für die vollständigen Zerlegungen von p-Gruppen mit Simplexfaktoren

Dieser Beweis ist unabhängig vom Hauptlemma und beruht auf folgendem, an sich interessantem (s. RÉDEI [8]).

SATZ 7. *Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ erzeugende Elemente einer endlichen abelschen p-Gruppe G von p^k-ter Ordnung so beschaffen, daß stets*

$$O(\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}\}) \geqq p^r \qquad (1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq k;\ 1 \leqq r \leqq k-1) \tag{1}$$

ist, so gibt es p-Potenzen $s_1, \ldots, s_k$ ($\geqq 1$) derart, daß die klassische Zerlegung

$$G = [\alpha_1^{s_1}, p] \circ \ldots \circ [\alpha_k^{s_k}, p] \tag{2}$$

gilt.

Im Fall $k = 1$ ist $G = \{\alpha_1\}$, $o(\alpha_1) = O(G) = p$, also $G = [\alpha_1, p]$, weshalb jetzt der Satz (mit $s_1 = 1$) richtig ist. Im Fall $k \geqq 2$ setzen wir den Satz für die kleineren Werte des Produktes $o(\alpha_1)\ldots o(\alpha_k)$ voraus. Es sei bemerkt, daß wegen (1) gewiß $o(\alpha_1), \ldots, o(\alpha_k) \geqq p$ ist.

Zuerst betrachten wir den Fall, daß in (1) stets $>$ gilt. Das bedeutet, daß (1) mit p^{r+1} statt p^r gilt. Wegen $O(G) = p^k$ folgt hieraus insbesondere $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_k\} = G$, also a fortiori $\{\alpha_1^p, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} = G$. Das alles bedeutet, daß alle Voraussetzungen des Satzes auch nach der Ersetzung $\alpha_1 \to \alpha_1^p$ erfüllt sind. Da dabei das Produkt $o(\alpha_1)\ldots o(\alpha_k)$ verkleinert wird, folgt aus der Induktionsvoraussetzung die Richtigkeit des Satzes für diesen Fall.

Wir haben noch den Fall zu betrachten, daß in (1) auch $=$ auftritt, d. h. bei passender Reihenfolge von $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ für eine Untergruppe

$$H = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \qquad (1 \leqq m \leqq k-1)$$

von G die Gleichung

$$O(H) = p^m$$

besteht. Offenbar sind dann die Voraussetzungen des Satzes für $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und H statt $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und G erfüllt, also existieren wegen der Induktionsvoraussetzung p-Potenzen $s_1, \ldots, s_m$ derart, daß die klassische Zerlegung

$$H = [\alpha_1^{s_1}, p] \circ \ldots \circ [\alpha_m^{s_m}, p]$$

gilt. Wir wählen die Reihenfolge von $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ so, daß diese Zerlegung sogar streng-klassisch ist. Andererseits nehmen wir den natürlichen Homomorphismus $\gamma \to \gamma'$ von G auf die Faktorgruppe G/H zu Hilfe. Es folgt

$$G/H = \{\alpha'_{m+1}, \ldots, \alpha'_k\}, \qquad O(G/H) = p^{k-m}.$$

Wird ferner (1) mit $1, \ldots, m, i_1, \ldots, i_r$ statt $i_1, \ldots, i_r$ angewendet, so folgt auch

$$O(\{\alpha'_{i_1}, \ldots, \alpha'_{i_r}\}) \geqq p^r \qquad (m+1 \leqq i_1 < \ldots i_r \leqq k-1).$$

Wieder ergibt sich aus der Induktionsvoraussetzung die Existenz von p-Potenzen

$s_{m+1}, \ldots, s_k$ derart, daß die klassische Zerlegung

$$G/H = [\alpha'^{s_{m+1}}_{m+1}, p] \circ \ldots \circ [\alpha'^{s_k}_k, p]$$

gilt. Bei passender Reihenfolge von $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_k$ wird auch diese Zerlegung streng-klassisch. Dieses mit dem vorigen (auf H bezüglichen) Resultat zusammen bedeutet, daß die Zerlegung (2) ebenfalls (streng-) klassisch ist. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Nunmehr können wir den Beweis von Satz 1′ für eine (vollständige) Zerlegung von der Form

$$G = [\alpha_1, p] \circ \ldots \circ [\alpha_k, p] \tag{3}$$

einer (endlichen abelschen) p-Gruppe G erbringen. Zu beweisen ist, daß diese Zerlegung klassisch ist.

Es ist klar, daß für $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ alle Voraussetzungen von Satz 7 erfüllt sind, also gilt eine klassische Zerlegung (2) mit passenden p-Potenzen $s_1, \ldots, s_k$. Sind diese gleich 1, so sind wir mit dem Beweis fertig. Im anderen Fall dürfen wir annehmen, daß in (2)

$$p | s_1, \ldots, s_m; \quad s_{m+1}, \ldots, s_k = 1$$

mit einem $m \geqq 1$ gilt. Es genügt hieraus einen Widerspruch zu gewinnen. Wir gehen von (3) auf eine Gleichung im Gruppenring $\mathfrak{Z}(G)$ über:

$$\vec{G} = \overline{[\alpha_1, p]} \ldots \overline{[\alpha_k, p]}.$$

Nach Multiplikation mit $\varepsilon - \alpha_1$ (und Vertauschung der Seiten) entsteht

$$(\varepsilon - \alpha_1^p)\overline{[\alpha_2, p]} \ldots \overline{[\alpha_k, p]} = 0.$$

Weitere Multiplikationen ergeben (wegen $p | s_1, \ldots, s_m$)

$$(\varepsilon - \alpha_1^{s_1}) \ldots (\varepsilon - \alpha_m^{s_m})\overline{[\alpha_{m+1}, p]} \ldots \overline{[\alpha_k, p]} = 0.$$

Nach Ausmultiplizieren der linken Seite muß sich das Glied ε gegen ein anderes Glied aufheben. Das steht aber mit der Existenz des schlichten Produktes auf der rechten Seite von (2) in Widerspruch. Damit ist Satz 1′ für den betrachteten Fall bewiesen.

§ 5. Beweis für elementare Gruppen von Primzahlquadratordnung

Dieser Teil des Beweises von Satz 1′ (vgl. RÉDEI [5]) wird ganz unerwartet schwierig, dafür aber sehr interessant, insofern er außer dem Hauptlemma auf folgendem eigenartigen Satz 8 bzw. auf dem sich aus diesem ergebenden, ebenfalls sehr bemerkenswerten Satz 9 beruht.

SATZ 8 (ein Satz für lückenhafte Polynome über endlichen Primkörpern). *Zerfällt ein (absteigend geordnetes) Polynom*

$$f(x) = x^{p-1} + \varkappa x^{\frac{p-1}{2}} + \ldots \qquad (p \text{ ungerade Primzahl}) \tag{1}$$

über dem Primkörper K von p-ter Ordnung in Linearfaktoren, so gilt

$$f(x)=x^{\frac{p-1}{2}u}\left(x^{\frac{p-1}{2}}-1\right)^{v}\left(x^{\frac{p-1}{2}}+1\right)^{w} \qquad (u+v+w=2) \tag{2}$$

mit passenden u, v, w.

(Wie hier, so auch später verden Elemente von K üblicherweise auch mit ganzen Zahlen bezeichnet, die dann selbstverständlich nur mod γ in Betracht kommen.)

Im Beweis wird für ein (absteigend geordnetes) mindestens zweigliedriges Polynom

$$\psi(x) = \alpha x^r+\beta x^s+\ldots \qquad (\alpha, \beta, \ldots \in K;\ \alpha, \beta \neq 0;\ r>s\geqq 0)$$

die Exponentendifferenz $r-s\,(>0)$ die *erste Lücke* dieses Polynoms genannt. Offenbar haben dann die Potenzen $\psi(x)^i$ $(p\nmid i)$ und im Fall $r<p$ der Differentialquotient $\psi'(x)$ dieselbe erste Lücke wie $\psi(x)$.

Wenn $f(x)$ höchstens zwei (nichtverschwindende) Glieder hat, so ist der Satz trivialerweise richtig. Deshalb werde angenommen, daß $f(x)$ mindestens dreigliedrig ist.

Wir setzen nach (1)

$$g(x)=xf(x)=x^p+\varkappa x^{\frac{p+1}{2}}+\ldots, \tag{3}$$

$$h(x)=g(x)-(x^p-x), \tag{4}$$

und bezeichnen mit n den Grad von $h(x)$. Es folgt

$$n\leqq\frac{p+1}{2} \tag{5}$$

und

$$h(0)=0. \tag{6}$$

Da ferner mit $f(x)$ zusammen auch $g(x)$ mindestens dreigliedrig ist, folgt

$$h(x)\neq 0,\ x. \tag{7}$$

Auch muß

$$h'(x)\neq 1 \tag{8}$$

sein, denn aus der Annahme $h'(x)=1$ und aus (6) ergibt sich wegen (5) die Gleichung $h(x)=x$, die aber nach (7) falsch ist. Man bemerke auch die aus (4) folgende Gleichung

$$g'(x) = h'(x)-1. \tag{9}$$

Mit $f(x)$ zusammen zerfüllt nach (3) auch $g(x)$ in Linearfaktoren über K. Es seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_l \in K$ die verschiedenen Nullstellen von $g(x)$. Für das Produkt

$$P(x) = (x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_l)$$

gelten dann die Teilbarkeiten

$$P(x)\,|\,g(x), \qquad \frac{g(x)}{P(x)}\,\Big|\,g'(x).$$

Da aber auch $P(x)|x^p-x$ gilt, gehen die vorigen Teilbarkeiten nach (4) und (9) in

$$P(x)\,|\,h(x), \qquad \frac{g(x)}{P(x)}\,\Big|\,h'(x-1)$$

über. Somit gilt

$$g(x)|h(x)(h'(x)-1). \tag{10}$$

Wegen (6) und (7_1) ist gewiß $n \geqq 1$. Hiernach und nach (5) ist $h'(x)$ vom Grad $n-1$. Da ferner nach (7_1) und (8) die rechte Seite von (10) von 0 verschieden ist, ist sie vom Grad $2n-1$. Andererseits hat nach (3) die linke Seite von (10) den Grad p, also ist $p \leqq 2n-1$. Hieraus und aus (5) folgt

$$n = \frac{p+1}{2}. \tag{11}$$

Da hiernach beide Seiten von (10) vom Grad p sind, ergibt sich

$$\lambda g(x) = h(x)(h'(x)-1)$$

mit einem $\lambda \in K$, $\neq 0$. Wir drücken dieses Resultat in der Form

$$2\lambda g(x) + 2h(x) = (h(x)^2)' \qquad (\lambda \neq 0) \tag{12}$$

aus. Außerdem werde bemerkt, daß nach (3), (4) und (11)

$$\varkappa \neq 0 \tag{13}$$

sein muß.

Da nun $g(x)$ mindestens dreigliedrig ist, ist $h(x)$ wegen (12) mindestens zweigliedrig. Es folgt, daß $h(x)$ und beide Seiten von (12) dieselbe erste Lücke haben. Da aber die erste Lücke der linken Seite von (12) nach (3) und (5) mindestens $\frac{p-1}{2}$ ist, gilt dasselbe auch für $h(x)$. Andererseits ist die erste Lücke von $h(x)$ wegen (5) und (6) höchstens $\frac{p-1}{2}$, also ist sie gleich $\frac{p-1}{2}$. Das bedeutet nach (6) und (11), daß $h(x)$ nur zwei Glieder enthält und diese den Grad $\frac{p+1}{2}$ bzw. 1 haben. Da ferner nach (3) und (4) der Anfangskoeffizient von $h(x)$ gleich $\varkappa$ ist, folgt

$$h(x) = \varkappa x^{\frac{p+1}{2}} + \mu x \qquad (\mu \neq 0 \tag{14}$$

mit passendem $\mu \in K$.

Nach (4) ist $g(x) = x^p - x + h(x)$. Also läßt sich (12) als

$$2\lambda(x^p-x) + (2\lambda+2)h(x) = (h(x)^2)'$$

schreiben. Diese Gleichung geht nach (14) in

$$2\lambda(x^p - x) + (2\lambda + 2)(\varkappa x^{\frac{p+1}{2}} + \mu x) = (\varkappa^2 x^{p+1} + 2\varkappa\mu x^{\frac{p+3}{2}} + \mu^2 x^2)'$$

über. Die rechte Seite ist gleich

$$\varkappa^2 x^p + 3\varkappa\mu x^{\frac{p+1}{2}} + 2\mu^2 x.$$

Mit Koeffizientenvergleich entstehen also die Gleichungen

$$2\lambda = \varkappa^2, \quad 2\lambda + 2 = 3\mu, \quad -\lambda + (\lambda + 1)\mu = \mu^2. \tag{15}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $\mu = 1$ oder $\mu = \lambda$. Der erste Fall scheidet aus, da dann $g(x)$ wegen (4) und (14) nur zwei Glieder hätte. Im übriggebliebenen zweiten Fall folgt aus den Gleichungen (15_2) und (15_1) $\mu = \lambda = 2$ und $\varkappa = \pm 2$. Andererseits ist nach (3), (4) und (14)

$$f(x) = x^{p-1} - 1 + \frac{1}{x}h(x) = x^{p-1} + \varkappa x^{\frac{p-1}{2}} + \mu - 1,$$

also ist

$$f(x) = x^{p-1} \pm 2x^{\frac{p-1}{2}} + 1 = (x^{\frac{p-1}{2}} \pm 1)^2.$$

Damit ist Satz 8 bewiesen.

Zum Weiteren brauchen wir zwei Hilfssätze.

HILFSSATZ 12. *Für einen endlichen Körper K von der Charakteristik p und für eine natürliche Zahl $n\,(<p)$ sind durch die Potenzsummen*

$$\varkappa_1^k + \ldots + \varkappa_n^k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

von Elementen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n \in K$ auch schon diese Elemente (bis auf ihre Reihenfolge) eindeutig bestimmt.

KOROLLAR. *Insbesondere wenn K ein Primkörper ist, sind*

$$\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{p-1} \in K$$

dann und nur dann die sämtlichen von 0 verschiedenen Elemente von K, wenn

$$\varkappa_1^k + \ldots + \varkappa_{p-1}^k = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k = 1, \ldots, p-2, \\ 1 & \text{für} \quad k = p-1 \end{cases}$$

ist.

Offenbar sind nämlich (wegen $n < p$) durch die im Hilfssatz angeführten Potenzsummen die elementarsymmetrischen Ausdrücke von $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ (nach den Newtonschen Formeln) eindeutig bestimmt. Hieraus folgt der Hilfssatz.

Der Teil „nur dann" des Korollars ist trivialerweise richtig. Hieraus und aus dem Hilfssatz folgt die Richtigkeit von „dann". Damit ist das Korollar bewiesen.

HILFSSATZ 13. *Für einen endlichen Primkörper K von ungerader Charakteristik p und für den quadratischen Charakter χ von K gilt*

$$\sum_{\xi}\chi(\xi^2+\varkappa)=\begin{cases}p-1 & (\varkappa=0),\\ -1 & (\varkappa\neq 0),\end{cases}$$

wobei $\varkappa$ ein beliebiges Element von K ist und ξ alle Elemente von K durchläuft.

Diese Formel stammt in einer anderen Form von JACOBSTHAL [1]. Die Summe auf der linken Seite werde mit $S(\varkappa)$ bezeichnet. Offenbar hängt $S(\varkappa)$ nur von $\chi(\varkappa)$ ab, nimmt also höchstens drei Werte an, die wir mit $W(0)$, $W(1)$, $W(-1)$ bezeichnen, so daß stets

$$S(\varkappa)=W(\chi(\varkappa))$$

ist. Da $\sum_{\varkappa} S(\varkappa)=0$ ist, folgt

$$W(0)+\frac{p-1}{2}(W(1)+W(-1))=0.$$

Offenbar ist aber $W(0)=p-1$, also gilt $W(1)+W(-1)=-2$. Folglich genügt es zu beweisen, daß es ein $\varkappa\in K$ mit $S(\varkappa)=-1$ gibt. Wegen $\sum_{\xi}\chi(\xi)=0$ bekommen wir mit leichten Umformungen

$$S(-1)=\sum_{\xi}\chi(\xi^2-1)=\sum_{\xi\neq 1}\chi\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)=\sum_{\xi\neq 1}\chi(\xi)=-\chi(1)=-1.$$

Damit ist Hilfssatz 13 bewiesen.

Als eine nicht ganz leichte Anwendung von Satz 8 entsteht:

SATZ 9. *Es mögen p und K dieselbe Bedeutung haben wie in Satz 8. Für ein System von p linearen Polynomen*

$$l_i(x) \qquad \left(i=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm\frac{p-1}{2}\right) \tag{16}$$

über K werde mit N die Anzahl derjenigen Stellen $\xi\in K$ bezeichnet, an denen die p Ersetzungswerte $l_i(\xi)$ verschieden (d. h. die sämtlichen verschiedenen Elemente von K) sind. Damit dann

$$N\geqq\frac{p-1}{2} \tag{17}$$

ist, ist notwendig und hinreichend, daß mit passender Numerierung der Polynome (16)

$$\left.\begin{aligned} l_i(x)&=l_0(x)+i^2(\alpha x+\beta)\\ l_{-i}(x)&=l_0(x)+i^2(\gamma x+\delta)\end{aligned}\right\}\qquad\left(i=1,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}\right) \tag{18}$$

ist $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in K)$ und einer der drei Fälle

1. $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, $\quad\chi(\alpha\gamma)\geqq 0$,
2. $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, $\quad\chi(\alpha\gamma)=-1$,
3. $\alpha=\gamma=0$, $\quad\chi(\beta\delta)=-1$

zutrifft, wobei χ den quadratischen Charakter für K bezeichnet, ferner ist dann N entsprechend diesen drei Fällen gleich $\frac{p-1}{2}$ bzw. $p-1$ bzw. p.

BEMERKUNG. Dieser Satz läßt sich unmittelbar in die Sprache der elementaren Zahlentheorie umsetzen. Dann handelt es sich um p lineare Polynome (16) über $\mathfrak{J}$, die an N mod p inkongruenten Stellen $x \in \mathfrak{J}$ in ein (volles) Restsystem mod p übergehen. Bei dieser Umdeutung hat man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ selbstverständlich aus $\mathfrak{J}$ zu nehmen, ferner werden dann obige drei Fälle der Reihe nach durch

1. $\alpha\delta - \beta\gamma \not\equiv 0 \pmod{p}, \left(\frac{\alpha\gamma}{p}\right) \geqq 0,$

2. $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0 \pmod{p}, \left(\frac{\alpha\gamma}{p}\right) = -1,$

3. $\alpha \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{p}, \quad \left(\frac{\beta\delta}{p}\right) = -1$

charakterisiert, wobei ( ) das Legendresche Symbol bezeichnet.

Den Beweis des Satzes beginnen wir mit der Bemerkung, daß für jedes lineare Polynom $l(x)$ über K die zum System (16) gehörende Anzahl N gegen die Ersetzung $l_i(x) \to l(x) + l_i(x)$ invariant ist. Wählt man insbesondere $l(x) = -l_0(x)$, so folgt, daß im Satz

$$l_0(x) = 0 \tag{19}$$

angenommen werden darf. (Mit dieser Vereinfachung ist fortan (18) zu verstehen).

Zunächst beweisen wir die einzig schwierige Behauptung des Satzes, daß aus der Annahme (17) bei passender Numerierung die Gleichungen (18) folgen.

Wegen (17) ist $N > 0$, also sind die Polynome (16) verschieden. Die von $l_0(x) = 0$ verschiedenen $l_i(x)$ mögen in ausführlicherer Schreibweise die folgenden sein

$$l_i(x) = \alpha_i x + \beta_i \qquad \left(\alpha_i, \beta_i \in K;\ i = \pm 1, \ldots, \pm\frac{p-1}{2}\right). \tag{20}$$

Aus der Annahme folgt, daß dieses System an mindestens $\frac{p-1}{2}$ Stellen $x \in K$ in das System der von 0 verschiedenen Elemente von K übergeht.

Wir werden wiederholt den Kunstgriff verwenden, daß wir x durch $x + \xi$ ersetzen, wobei ξ ein beliebiges Element von K ist. Dann gilt das soeben gesagte auch für

$$l_i(x + \xi) = \alpha_i x + (\alpha_i \xi + \beta_i) \qquad \left(i = \pm 1, \ldots, \pm\frac{p-1}{2}\right) \tag{21}$$

statt (20).

Als erstmalige Anwendung wählen wir ein $\xi = \xi_0$, wofür

$$\beta_i' = \alpha_i \xi_0 + \beta_i \qquad \left(i = \pm 1, \ldots, \pm\frac{p-1}{2}\right) \tag{22}$$

das System der von 0 verschiedenen Elemente von K repräsentiert; nach der Bemerkung über (20) existiert ein solches ξ_0. Da (21) für $\xi = \xi_0$ mit der Bezeichnung (22) in

$$\alpha_i x + \beta_i' \qquad \left(i = \pm 1, \ldots, \pm\frac{p-1}{2}\right) \tag{23}$$

übergeht, folgt, daß dieses System (außer der Stelle 0 noch) an mindestens $\frac{p-3}{2}$ von 0 verschiedenen Stellen $x \in K$ in das System der von 0 verschiedenen Elemente von K übergeht. Letzteres gilt dann an Stelle von (23) unverändert für die gebrochen linearen Funktionen

$$\left(\frac{\alpha_i x + \beta_i'}{x} = \right) \beta_i' \frac{1}{x} + \alpha_i,$$

also auch für die linearen Polynome

$$\beta_i' x + \alpha_i \qquad \left(i = \pm 1, \ldots, \pm \frac{p-1}{2}\right).$$

Auf diese läßt sich obiger Kunstgriff (mit leichter Änderung) anwenden, wodurch entsteht, daß für jedes $\xi \in K$ das System der linearen Polynome

$$\beta_i' x + (\beta_i' \xi + \alpha_i) \qquad \left(i = \pm 1, \ldots, \pm \frac{p-1}{2}\right)$$

an mindestens $\frac{p-3}{2}$ Stellen $x \in K$ in das System der von 0 verschiedenen Elemente von K übergeht. Das bedeutet nach dem Korollar von Hilfssatz 12, daß für jedes $\xi \in K$ das Gleichungssystem

$$\sum_i (\beta_i' x + (\beta_i' \xi + \alpha_i))^k = \begin{cases} 0 & (k = 1, \ldots, p-2), \\ -1 & (k = p-1) \end{cases} \tag{24}$$

mindestens $\frac{p-3}{2}$ Lösungen $x \in K$ hat. $\left(\sum_i$ und später unten $\prod_i$ bezeichnet Summen bzw. Produkte für $i = \pm 1, \ldots, \pm \frac{p-1}{2}\right)$.

Nach der bei (22) genannten Eigenschaft der Elemente β_i und wieder nach dem Korollar von Hilfssatz 12 verschwindet in den Gleichungen (24) der Koeffizient von x^k. Das bedeutet, daß der Grad von (24) kleiner als k, also für $k = 1, \ldots, \frac{p-3}{2}$ kleiner als $\frac{p-3}{2}$ ist. Es folgt, daß diese Gleichungen von der Form $0 = 0$ sein müssen. Insbesondere ist also in diesen Gleichungen das konstante Glied (d. h. der Koeffizient von x^0) gleich 0. Das bedeutet das Bestehen der Gleichungen

$$\sum_i (\beta_i' \xi + \alpha_i)^k = 0 \qquad \left(k = 1, \ldots, \frac{p-3}{2}\right)$$

für alle $\xi \in K$.

Damit ist nach den Newtonschen Formeln äquivalent, daß die ersten $\frac{p-3}{2}$ elementarsymmetrischen Ausdrücke der Elemente $\beta_i' \xi + \alpha_i$ gleich 0 sind, d. h. das Polynom

$$\prod_i (x - (\alpha_i' \xi + \alpha_i)) = x^{p-1} + \ldots$$

(für jedes $\xi \in K$) von der Form

$$x^{p-1} + \varkappa x^{\frac{p-1}{2}} + \dots$$

ist. Hieraus folgt nach Satz 8, daß zu jedem $\xi \in K$ ein Tripel von nichtnegativen ganzen Zahlen u, v, w mit

$$\prod_i (x - (\beta_i' \xi + \alpha_i)) = x^{\frac{p-1}{2}u} \left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)^v \left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)^w \qquad (u+v+w=2) \tag{25}$$

existiert. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Wenn alle $\frac{\alpha_i}{\beta_i'}$ gleich sind, so gibt es ein $\varkappa \in K$ mit

$$\alpha_i = \varkappa \beta_i' \qquad \left(i = \pm 1, \dots, \pm \frac{p-1}{2}\right). \tag{26}$$

Andererseits wählen wir zwei Elemente $\alpha, \beta \in K$ mit der Eigenschaft

$$\chi(\alpha\beta) = -1 \tag{27}$$

beliebig fest. Dann lassen sich die $l_i(x)$ wegen (22) so numerieren, daß

$$\beta_i' = i^2\alpha, \quad \beta_{-i}' = i^2\beta \qquad \left(i = 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right) \tag{28}$$

gilt. Aus (26) und (28) folgt noch

$$\alpha_i = i^2 \varkappa \alpha, \quad \alpha_{-i} = i^2 \varkappa \beta \qquad \left(i = 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right). \tag{29}$$

2. Im anderen Fall nimmt $\frac{\alpha_i}{\beta_i'}$ mindestens zwei verschiedene Werte an, die wir in der Form $-\lambda, -\mu$ ansetzen ($\lambda, \mu \in K$; $\lambda \neq \mu$). Es folgt, daß in beiden Systemen

$$\left.\begin{aligned} &\beta_i' \lambda + \alpha_i \quad (30) \\ &\beta_i' \mu + \alpha_i \quad (31) \end{aligned}\right\} \qquad \left(i = \pm 1, \dots, \pm \frac{p-1}{2}\right)$$

das Element 0 und auch je ein von 0 verschiedenes Element auftritt. Wegen (25) folgt hieraus (für $\xi = \lambda$ und $\xi = \mu$) daß in beiden Systemen (30) und (31) genau $\frac{p-1}{2}$ Elemente von 0 verschieden sind und diese beidemal die sämtlichen Nullstellen eines Polynoms $x^{\frac{p-1}{2}} - 1$ oder $x^{\frac{p-1}{2}} + 1$ bilden. Man berücksichtige, daß die Nullstellen des einen oder anderen sich mit passendem von 0 verschiedenem $\alpha \in K$ als $i^2\alpha$ $\left(i = 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right)$ angeben lassen. Zunächst für (30) gelten dann nach passender Numerierung der Polynome $l_i(x)$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\beta_i' \lambda + \alpha_i = i^2\alpha \quad (30') \\ &\beta_{-i}' \lambda + \alpha_{-i} = 0 \quad (30'') \end{aligned}\right\} \qquad \left(i = 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right).$$

(Mit der Reihenfolge der Polynome $l_i(x)$ für $i<0$ werden wir noch frei verfügen können.) Nach (30′) und (30″) geht (31) in

$$\left.\begin{array}{ll}(31') & \beta_i'(\mu-\lambda)+i^2\alpha \\ (31'') & \beta_{-i}'(\mu-\lambda)\end{array}\right\} \quad \left(i=1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$$

über. Da in (31″) nur von 0 verschiedene Elemente auftreten, muß nach obiger Bemerkung

$$\left.\begin{array}{ll}(32') & \beta_i'(\mu-\lambda)+i^2\alpha=0 \\ (32'') & \beta_{-i}'(\mu-\lambda)=i^2\beta\end{array}\right\} \quad \left(i=1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$$

gelten, nachdem man die $l_{-i}(x)$ passend numeriert und ein geeignetes von 0 verschiedenes $\beta \in K$ gewählt hat. Aus (32′), (32″), (30′), (30″) folgt mit der Bezeichnung

$$\nu = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$\beta_i' = -i^2\nu\alpha, \quad \beta_{-i}=i^2\nu\beta, \quad \alpha_i=i^2(1+\lambda\nu)\alpha, \quad \alpha_{-i}=-i^2\lambda\nu\beta \qquad \left(i=1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right).$$

Nach diesen Gleichungen und nach den vorigen (28) und (29) haben wir in beiden Fällen 1 und 2 Zusammenhänge von der Form

$$(33) \qquad \alpha_i=i^2\alpha^*, \quad \beta_i'=i^2\beta^*, \quad a_{-i}=i^2\gamma^*, \quad \beta_{-i}'=i^2\delta^* \qquad \left(i=1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$$

erhalten wobei $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*$ passende Elemente von K sind. Nun ist nach (22)

$$\beta_i=\beta_i'-\alpha_i\xi_0,$$

woraus nach (20)

$$l_i(x)=\alpha_i x+(\beta_i'-\alpha_i\xi_0) \qquad \left(i=\pm 1, \ldots, \pm\frac{p-1}{2}\right)$$

folgt. Setzt man rechts (33) ein (wobei man die Fälle $i>0$ und $i<0$ zu unterscheiden hat) und berücksichtigt (19), so sieht man, daß die Behauptung (18) bewiesen ist.

Um den noch übriggebliebenen Teil von Satz 9 zu beweisen, nehmen wir nach vorigem Resultat schon an, daß die Polynome (16) mit zunächst beliebigen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ den Bedingungen (18) genügen. Wir haben dann die Fälle aufzusuchen, in denen (17) zutrifft; auf diesem Wege wird der vollständige Beweis entstehen.

Wir setzen

$$f(x) = (\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta) = \alpha\gamma x^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)x+\beta\delta.$$

Es ist aus (18) klar, daß die Ersetzungswerte der Polynome (16) an einer Stelle $\xi \in K$ dann und nur dann die sämtlichen verschiedenen Elemente von K liefern, wenn $\alpha\xi+\beta$ und $\gamma\xi+\delta$ (von 0 verschieden und) von entgegengesetztem quadratischen Charakter sind, d. h. wenn $\chi(f(\xi))=-1$ ist. Also gilt

$$N=\sum_{f(\xi)\neq 0}\frac{1}{2}(1-\chi(f(\xi))),$$

wobei man über alle $\xi \in K$ mit $f(\xi)\neq 0$ zu summieren hat.

Mit N_0 bezeichnen wir die Anzahl der $\xi \in K$ mit $f(\xi)=0$. Dann folgt

$$N=\sum_{\xi} \frac{1}{2}(1-\chi(f(\xi)))-\frac{N_0}{2},$$

wobei $\sum_{\xi}$ bezeichnet, daß über alle $\xi \in K$ summiert wird. Hiernach haben wir

$$N = \tfrac{1}{2}(p-S-N_0)$$

mit

$$S=\sum_{\xi} \chi(f(\xi)).$$

Wir führen die Determinante

$$\Delta = \alpha\delta-\beta\gamma$$

ein, deren Quadrat also die Diskriminante von $f(x)$ ist, und bezeichnen den (genauen) Grad von $f(x)$ mit n $(=0, 1, 2)$. Die Werte von S, N_0 und N stellen wir entsprechend den möglichen fünf Fällen in folgender Tabelle zusammen, deren Richtigkeit wir leicht einsehen werden.

Fall		S	N_0	N
1.	$n=0, f(x)=0$	0	p	0
2.	$n=0, f(x)\neq 0$	$p\chi(\beta\delta)$	0	$\frac{1}{2}(1-\chi(\beta\delta))p$
3.	$n=1$	0	1	$\frac{1}{2}(p-1)$
4.	$n=2, \Delta=0$	$(p-1)\chi(\alpha\gamma)$	1	$\frac{1}{2}(1-\chi(\alpha\gamma))(p-1)$
5.	$n=2, \Delta\neq 0$	$-\chi(\alpha\gamma)$	2	$\frac{1}{2}(p-2+\chi(\alpha\gamma))$

Der Wert von S läßt sich nämlich in den Fällen 4 und 5 nach Hilfssatz 13 bestimmen. Alles übrige in dieser Tabelle ist trivialerweise richtig.

Nun sehen wir aus dieser Tabelle, daß die Bedingung (17) genau nur

im Fall 2 mit $\chi(\beta\delta)=-1$ und $N=p$,

im Fall 3 mit $N=\dfrac{p-1}{2}$,

im Fall 4 mit $\chi(\alpha\gamma)=-1$ und $N=p-1$, schließlich noch

im Fall 5 mit $\chi(\alpha\gamma)=1$ und $N=\dfrac{p-1}{2}$

erfüllt ist. In anderer Zusammenstellung bestätigt dieses Resultat die noch übriggebliebenen Behauptungen von Satz 9. Damit ist dieser Satz bewiesen.

Nunmehr wollen wir Satz 1′ für ein elementares G mit $O(G)=p^2$ beweisen, wobei p eine Primzahl bedeutet. Wir legen uns eine normierte vollständige Zerlegung

$$G = A \circ B$$

von G vor. Es ist zu beweisen daß diese Zerlegung klassisch ist. Diese Behauptung ist gleichbedeutend damit, daß A oder B eine Gruppe ist.

Im Fall $p=2$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Fortan sei $p\geqq 3$.

Es sei $\langle \alpha, \beta \rangle$ eine Basis von G, ferner sei ϱ eine komplexe Einheitswurzel p-ter Ordnung. Da jetzt die Charaktere $\chi \in \mathfrak{G} \setminus \chi_1$ von p-ter Ordnung sind, zerfällt $\mathfrak{G} \setminus \chi_1$ in $p+1$ Klassen $\mathfrak{C}_1, \ldots \mathfrak{C}_{p+1}$ von potenzgleichen Charakteren. Nach dem Hauptlemma und nach Hilfssatz 8 darf angenommen werden, daß der Nullifikator $\mathfrak{N}(A)$ von A mindestens $\frac{p+1}{2}$ Klassen $\mathfrak{C}_i$ $(i=1, \ldots, p+1)$ enthält.

Die für jedes $x=0, \ldots, p-1$ nach

$$\chi(\alpha)=\varrho^x, \quad \chi(\beta)=\varrho$$

bestimmten p Charaktere sind paarweise nicht äquivalent, weshalb durch sie nur eine der Klassen $\mathfrak{C}_i$ nicht repräsentiert ist. Man bemerke, daß diese Klasse nach passender Wahl der Basis $\langle \alpha, \beta \rangle$ beliebig vorgegeben werden kann. Folglich läßt sich annehmen, daß unter den betrachteten Charakteren mindestens $\frac{p+1}{2}$ im Nullifikator $\mathfrak{N}(A)$ liegen. Indem wir die Quersumme von A in der Form

$$\bar{A}=\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{a_i}\beta^{b_i} \qquad (a_0=b_0=0)$$

ansetzen, folgt, daß die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{p-1} \varrho^{a_i x+b_i}=0$$

mindestens $\frac{p+1}{2}$ Lösungen $x=0, \ldots, p-1$ hat. Da aber diese Gleichung für ein $x \in \mathfrak{J}$ dann und nur dann besteht, wenn $a_i x+b_i$ $(i=0, \ldots, p-1)$ ein (vollständiges) Restsystem mod p ist, läßt sich Satz 9 anwenden, wobei die Vereinfachung eintritt, daß nur die Fälle 2 und 3 in Betracht kommen. (Eine weitere kleine Vereinfachung entsteht wegen $a_0=b_0=0$.) Es folgt zunächst, daß die linearen Polynome

$$a_i x+b_i \qquad (i=1, \ldots, p-1)$$

abgesehen von der Reihenfolge mit Polynomen von der Form

$$i^2(ax+b), \quad i^2(cx+d) \qquad \left(i=1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$$

mod p kongruent sind, wobei a, b, c, d ganze Zahlen sind. Ferner ergibt sich aber, daß für diese Zahlen (entsprechend den Fällen 2 und 3 von Satz 9) einer der folgenden zwei Fälle zutrifft.

Entweder ist

$$ad-bc \equiv 0 \pmod{p}, \quad \left(\frac{ac}{p}\right)=-1$$

oder ist

$$a \equiv c \equiv 0 \pmod{p}, \quad \left(\frac{bd}{p}\right)=-1.$$

Im ersten Fall gibt es eine ganze Zahl t mit $\left(\frac{t}{p}\right) = -1$ und

$$\left.\begin{aligned} c &\equiv ta \\ d &\equiv tb \end{aligned}\right\} \pmod{p}.$$

Das bedeutet offenbar, daß $A = \{\alpha^a \beta^b\}$ ist.

Im zweiten Fall ergibt sich $A = \{\beta\}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

§ 6. Beweis für elementare Gruppen

Wir erstrecken den Beweis von Satz 1′ auf elementare Gruppen. Deshalb sei G elementar angenommen. Dann ist also G eine p-Gruppe. Wir setzen $O(G) = p^k$ und legen uns eine normierte vollständige Zerlegung

$$G = A_1 \circ \ldots \circ A_k \tag{1}$$

vor. Es ist zu beweisen, daß diese klassisch ist.

Im Fall $k = 1$ ist nichts zu beweisen. Den Fall $k = 2$ haben wir im vorigen § 5 eben erledigt. Im übriggebliebenen Fall $k \geqq 3$ setzen wir die Behauptung für $k-1$ voraus. Nach Hilfssatz 1 genügt es zu beweisen, daß in (1) mindestens ein Faktor eine Gruppe ist.

Für jedes $i = 1, \ldots, k$ wählen wir ein Element $\alpha_i \in A_i$, $\neq \varepsilon$. Nach Satz 6 bleibt (1) erhalten, wenn ein A_i durch die Gruppe

$$[\alpha_i, p] = \{\alpha_i\}$$

ersetzt wird, woraus wir wiederholt Gebrauch machen werden.

Vor allem folgt aus dieser Bemerkung das Bestehen von

$$G = \{\alpha_1\} \circ \ldots \circ \{\alpha_k\} \; (= \{\alpha_1\} \times \ldots \times \{\alpha_k\}).$$

Dieses bedeutet, daß die Menge $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$ eine Basis von G ist.

Hiernach bewirkt z. B. die Ersetzung $\alpha_1 \to \varepsilon$ einen Endomorphismus σ von G. Wegen

$$G = \{\alpha_1\} \circ A_2 \circ \ldots \circ A_k$$

ist also

$$G^\sigma = \{A_2^\sigma\} \circ \ldots \circ \{A_k^\sigma\}.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung folgt hieraus, daß ein Faktor, etwa A_2^σ eine Gruppe ist. Das bedeutet $A_2^\sigma = \{\alpha_2\}$, woraus $A_2 \subset \{\alpha_1, \alpha_2\}$ folgt.

Mit wiederholter Anwendung folgt hieraus (da in (1) nur endlich viele Faktoren vorhanden sind), daß mit passender Numerierung Relationen von der Form

$$A_2 \subset \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad A_3 \subset \{\alpha_2, \alpha_3\}, \ldots, A_i \subset \{\alpha_{i-1}, \alpha_i\} \quad \text{und} \quad A_j \subset \{\alpha_i, \alpha_j\}$$

bestehen, wobei $1 \leqq j < i \leqq k$ ist. Aus diesen folgt

$$A_j, \ldots, A_i \subset \{\alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_i\},$$

also

$$A_j \circ A_{j+1} \circ \ldots \circ A_i \subseteqq \{\alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_i\},$$

wobei die Existenz des schlichten Produktes auf der linken Seite durch (1) gesichert ist. Hier muß $=$ gelten, da beide Seiten von der gleichen Mächtigkeit p^{i-j+1} sind. Im Fall $i-j+1<k$ folgt hieraus nach der Induktionsvoraussetzung, daß mindestens ein Faktor auf der linken Seite eine Gruppe ist. Da wir in diesem Fall mit dem Beweis fertig sind, brauchen wir nur noch den Fall $j=1, i=k$ zu betrachten.

Dann hat man

$$A_1 \subset \{\alpha_k, \alpha_1\}, \quad A_2 \subset \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad A_3 \subset \{\alpha_2, \alpha_3\}, \ldots, A_k \subset \{\alpha_{k-1}, \alpha_k\}.$$

Wenn $A_1 = \{\alpha_1\}$ ist, ist der Beweis fertig. Im anderen Fall enthält A_1 mindestens ein Element von der Form

$$\alpha_1^u \alpha_k^v$$

mit $p \nmid v$. Da nach (1) $A_1 \cap A_k = \varepsilon$ ist, muß auch $p \nmid u$ sein. Mit nochmaliger Anwendung der obigen Bemerkung gewinnen wir

$$G = \{\alpha_1^u \alpha_k^v\} \circ A_2 \circ \ldots \circ A_k .$$

Wir bestimmen eine ganze Zahl t mit

$$tu+v \equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Ersetzung

$$\alpha_1 \to \alpha_k^t$$

bewirkt einen Endomorphismus τ von G. Hierfür gilt

$$(\alpha_1^u \alpha_k^v)^\tau = \alpha_k^{tu+v} = \varepsilon,$$

also folgt aus voriger Gleichung

$$G^\tau = A_2^\tau \circ \ldots \circ A_k^\tau .$$

Da aber $A_3, \ldots, A_k \subseteq \{\alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ ist, ist $A_i^\tau = A_i$ $(i=3, \ldots, k)$, also gilt

$$G = A_2^\tau \circ A_3 \circ \ldots \circ A_k .$$

(Die linke Seite ist gleich $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, aber das kommt nicht in Betracht.) Nach der Induktionsvoraussetzung tritt unter den Faktoren eine Gruppe auf. Wenn einer der Faktoren $A_3, \ldots, A_k$ eine Gruppe ist, sind wir mit dem Beweis fertig. Es bleibt noch der Fall übrig, daß A_2^τ eine Gruppe ist, aber dann ist wegen $A_2 \subset \{\alpha_1, \alpha_2\}$ offenbar auch A_2 eine Gruppe. Damit ist die Behauptung bewiesen.

§ 7. Beweis für p-Gruppen

Nunmehr können wir den Beweis von Satz 1′ für p-Gruppen ausführen. Zu diesem Zweck sei jetzt G eine endliche abelsche p-Gruppe, von der wir wegen des Resultats in § 6 annehmen dürfen, daß sie nicht elementar ist. Mit G_p bezeichnen wir die Untergruppe von G bestehend aus den Elementen $\gamma \in G$ mit $\gamma^p = \varepsilon$. (Also ist G_p die umfassendste elementare Untergruppe von G.) Nach der Annahme ist $G_p \subset G$.

Es sei eine beliebige vollständige Zerlegung von G mit normierten Faktoren vorgelegt. Diese läßt sich mit passender Reihenfolge der Faktoren in der Form

$$(1) \qquad G = A_1 \circ \ldots \circ A_k \circ B_1 \circ \ldots \circ B_l \quad (A_1, \ldots, A_k \subseteq G_p;\ B_1, \ldots, B_l \not\subseteq G_p;\ k \geqq 0;\ l \geqq 1)$$

ansetzen, wobei $l \geqq 1$ aus $G_p \subset G$ folgt. Wir haben zu beweisen, daß diese Zerlegung klassisch ist. Dabei darf nach Hilfssatz 1 vorausgesetzt werden, daß die normierten vollständigen Zerlegungen der echten Untergruppen von G klassisch sind, ferner genügt es dann zu beweisen, daß in (1) mindestens ein Faktor eine Gruppe ist. Wir nehmen an, daß in (1) kein Faktor eine Gruppe ist. Durch einen Widerspruch wird dann der Beweis entstehen.

Um im Beweis eine leichte aber wichtige Reduktion zu erreichen, greifen wir aus den Faktoren $B_1, \ldots, B_l$ je ein Element $\beta_1, \ldots, \beta_l \notin G_p$ heraus. Da $\varepsilon \in B_1, \ldots, B_l$ ist, folgt aus Satz 6 mit mehrmahliger Anwendung, daß sich in (1) die Faktoren $B_1, \ldots, B_l$ nacheinander durch die Simplexe $[\beta_1, p], \ldots, [\beta_l, p]$ ersetzen lassen. Also haben wir die ebenfalls vollständige Zerlegung

$$(2) \qquad G = A_1 \circ \ldots \circ A_k \circ [\beta_1, p] \circ \ldots \circ [\beta_l, p]$$

gewonnen, in der wieder kein Faktor eine Gruppe ist, da $o(\beta_1), \ldots, o(\beta_l)$ durch p^2 teilbar sind. Im Folgenden werden wir nur noch mit (2) statt (1) zu tun haben.

Nach dem Resultat in § 4 ist in (2) $k = 0$ unmöglich, also ist

$$k \geqq 1.$$

Aus den Komplexen $A_1, \ldots, A_k$ greifen wir je ein festes Element $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \neq \varepsilon$ heraus. Wieder nach Satz 6 folgt aus (2) und $\varepsilon \in A_1$ die vollständige Zerlegung

$$(3) \qquad G = [\alpha_1, p] \circ A_2 \circ \ldots \circ A_k \circ [\beta_1, p] \circ \ldots \circ [\beta_l, p].$$

Da hier der erste Faktor eine Gruppe ist, folgt nach Obigem aus der Induktionsvoraussetzung, daß diese Zerlegung klassisch ist. Folglich geht die rechte Seite von (3) nach Streichung eines passenden Faktors in eine klassische Zerlegung einer maximalen Untergruppe H von G über. Selbstverständlich kann der gestrichene Faktor nicht der erste sein, da die übrigen Faktoren keine Gruppen sind.

Wird in dieser Zerlegung von H der erste Faktor $[\alpha_1, p]$ wieder durch A_1 ersetzt, so haben wir ein Teilprodukt von (2) vor uns. Dieses wäre im Fall $A_1 \subseteq H$ wieder eine vollständige Zerlegung von H. Da aber in dieser kein Faktor eine Gruppe ist, obwohl doch diese Zerlegung nach der Induktionsvoraussetzung klassisch sein muß, folgt die Unmöglichkeit von $A_1 \subseteq H$. Da H eine maximale Untergruppe von G ist, ist $G^p \subseteq H$, also kann A_1 noch weniger in G^p liegen. Da ferner in diesem Schluß A_1 beliebig unter allen $A_1, \ldots, A_k$ sein durfte, haben wir weiter nur noch den Fall zu betrachten, daß kein Faktor $A_1, \ldots, A_k$ in G^p liegt. Deshalb dürfen wir die obigen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ außerhalb von G^p wählen.

Wir zeigen, daß dann ($k \geqq 2$ ist und) zu jedem $i = 1, \ldots, k$ ein $j = 1, \ldots, k$ mit $j \neq i$ und $A_j \subset \{\alpha_i, \alpha_j\}$ existiert.

Es genügt, diese Behauptung für $i = 1$ zu beweisen. Da die Zerlegung (3) klassisch ist und in ihr nur der erste Faktor eine Gruppe ist, gibt es in ihr (wegen $k + l \geqq 2$) einen weiteren Faktor A_j ($j = 2, \ldots, k$) oder $[\beta_j, p]$ ($j = 1, \ldots, l$) so beschaffen, daß das Produkt

$$[\alpha_1, p] A_j \quad \text{bzw.} \quad [\alpha_1, p][\beta_j, p]$$

eine Gruppe (von der Ordnung p^2) ist. Der zweite Fall kann nicht eintreten, da $o(\alpha_1)=p$, $p^2|o(\beta_j)$ und $\alpha_1 \notin G^p$ ist. Also trifft der erste Fall zu (woraus auch $k \geqq 2$ folgt). Diese Gruppe enthält die Elemente α_1 und α_j, muß also wegen $\{\alpha_1\} \neq \{\alpha_j\}$ gleich $\{\alpha_1, \alpha_j\}$ sein, woraus $A_j \subset \{\alpha_1, \alpha_j\}$ folgt. Damit ist die vorige Behauptung bewiesen.

Wiederholte Anwendung dieses Resultats ergibt, daß bei passender Numerierung der Faktoren $A_1, \ldots, A_k$ Relationen von der Form

$$A_2 \subset \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad A_3 \subset \{\alpha_2, \alpha_3\}, \ldots, A_r \subset \{\alpha_{r-1}, \alpha_r\}, \quad A_s \subset \{\alpha_r, \alpha_s\} \qquad (1 \leqq s < r \leqq k)$$

bestehen. (Näheres über r und s können wir nicht sagen.) Man lasse die ersten $s-1$ Relationen außer Acht. Aus den übrigen folgt

$$A_s, \ldots, A_r \subset \{\alpha_s, \ldots, \alpha_r\}.$$

Da für die links auftretenden Komplexe ihr schlichtes Produkt wegen (2) existiert, muß dieses (aus Anzahlgründen) eine vollständige Zerlegung der Gruppe auf der rechten Seite sein. Diese Gruppe ist aber elementar, also muß unter den Faktoren $A_s, \ldots, A_r$ nach dem Resultat in § 6 eine Gruppe vorkommen. Mit diesem Widerspruch ist Satz 1′ für p-Gruppen bewiesen.

III. TEIL: SCHLUSS DES BEWEISES VON SATZ 1′

§ 8. Beweis für nicht-p-Gruppen

Als Vorbereitung brauchen wir zwei auch an sich interessante Sätze und einige Hilfssätze.

SATZ 10. *Für jede natürliche Zahl $n>1$ ist die Gliederzahl einer verschwindenden (nichtleeren) Summe von n-ten (nicht notwendig verschiedenen) komplexen Einheitswurzeln nicht kleiner als der kleinste Primteiler von n.*

Der Beweis wird unerwartet mühsam. (Bezüglich ähnlicher Fragen s. man RÉDEI [10].)

Zuerst beweisen wir den Satz für ein (quadratfreies)

$$n = p_1 \ldots p_k \qquad (p_1 < \ldots < p_k \text{ Primzahlen}; \; k \geqq 1).$$

Es sei ϱ_j eine komplexe Einheitswurzel mit $o(\varrho_j)=p_j$ $(j=1, \ldots, k)$. Eine beliebige Summe S von n-ten komplexen Einheitswurzeln läßt sich dann in der Form

$$S = \sum_{i_1=0}^{p_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{p_k-1} a_{i_1} \cdots {}_{i_k} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_k^{i_k} \qquad (a_{i_1 \ldots i_k} \in \mathfrak{Z})$$

ansetzen. Die daraus nach Streichen aller $\varrho_1^{i_1}, \ldots, \varrho_k^{i_k}$ entstehende Summe (d. h. die Koeffizientensumme von S) werde mit S_0 bezeichnet. Zu beweisen ist, daß aus $S=0$ und $S_0>0$ stets $S_0 \geqq p_1$ folgt.

Vorläufig werde ein beliebiges S zugelassen. Für jedes $j=1, \ldots, k$ führen wir einen „Differenzenoperator" Δ_j ein, und zwar definieren wir

$$\Delta_j f(i_j) = f(i_j) - f(0) \qquad (j=1, \ldots, k;\ i_j=0, \ldots, p_j-1)$$

für jede Funktion f von i_j (die auch von weiteren Veränderlichen abhängen darf) mit Werten aus einem Modul und beweisen

$$S=\sum_{i_1=1}^{p_1-1} \cdots \sum_{i_k=1}^{p_k-1} \Delta_1 \ldots \Delta_k a_{i_1 \ldots i_k} \varrho_1^{i_1} \ldots \varrho_k^{i_k}. \tag{1}$$

Zu diesem Zweck berücksichtige man

$$1 = -\sum_{i_1=1}^{p_1-1} \varrho_1^{i_1}.$$

Bezeichnen also S' und S'' die Summe derjenigen Glieder von S, in denen $i_1 \neq 0$ bzw. $i_1 = 0$ ist, so folgt offenbar

$$S = S' + S'' = \sum_{i_j=1}^{p_1-1} \sum_{i_2=0}^{p_2-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{p_k-1} \Delta_1 a_{i_1 \ldots i_k} \varrho_1^{i_1} \ldots \varrho_k^{i_k}.$$

Mit Wiederholung dieses Verfahrens für $i_2, \ldots, i_k$ statt i_1 entsteht der Beweis.

Nunmehr nehmen wir $S=0$ und $S_0 > 0$ an. Zu beweisen ist, wie gesagt, $S_0 \geqq p_1$. Offenbar tritt keine wesentliche Änderung ein, wenn man S mit einem Potenzprodukt von $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ multipliziert, weshalb wir auch

$$a_{0 \ldots 0} > 0 \tag{2}$$

annehmen dürfen (woraus auch schon $S_0 > 0$ folgt).

Da die in (1) auftretenden Potenzprodukte eine Basis des n-ten Kreisteilungskörpers bilden, folgt aus $S=0$ das Gleichungssystem

$$\Delta_1 \ldots \Delta_k a_{i_1 \ldots i_k} = 0 \qquad (i_j = 0, \ldots, p_j - 1;\ j = 1, \ldots, k). \tag{3}$$

(Aus (1) folgt (3) nur für $i_1, \ldots, i_k > 0$, aber (3) ist trivialerweise erfüllt, wenn mindestens ein i_j gleich 0 ist.)

Wenn $k=1$ ist, so lautet (3) als $a_{i_1} - a_0 = 0$. Hieraus folgt $S_0 = p_1 a_0$. Da nach (2) $a_0 > 0$ ist, ist die Behauptung $S_1 \geqq p_1$ für diesen Fall richtig (was man übrigens sonst auch wußte).

Wenn $k=2$ ist, so lautet (3) als

$$a_{i_1 i_2} - a_{0 i_2} - a_{i_1 0} + a_{00} = 0 \qquad (i_1 = 0, \ldots, p_1 - 1;\ i_2 = 0, \ldots, p_2 - 1).$$

Hiernach gilt

$$a_{i_1 i_2} = f(i_1) + g(i_2)$$

mit nur von i_1 bzw. von i_2 abhängigen reellen ganzzahligen Funktionen f und g. Diese lassen sich als nichtnegativ annehmen, denn setzt man

$$m = \min_{i_1} f(i_1),$$

und

$$f_1(i_1) = f(i_1) - m, \quad g_1(i_2) = g(i_2) + m,$$

so gilt

$$a_{i_1 i_2} = f_1(i_1) + g_1(i_2).$$

Offenbar ist f_1 nicht negativ und es gilt $f_1(c) = 0$ für ein passendes $c = 0, \ldots, p_1 - 1$. Es folgt $g_1(i_2) = a_{ci_2}$, also ist auch g_1 nichtnegativ. Hiernach dürfen f und g tatsächlich als nichtnegativ angenommen werden. Da nun

$$S_0 = \sum_{i_1=0}^{p_1-1} \sum_{i_2=0}^{p_2-1} a_{i_1 i_2} = p_2 \sum_{i_1=0}^{p_1-1} f(i_1) + p_1 \sum_{i_2=0}^{p_2-1} g(i_2)$$

ist, wobei auf der rechten Seite beide Summen nicht negativ sind und (wegen $S_0 > 0$) mindestens eine von ihnen positiv ist, folgt hieraus die Behauptung $S_0 \geqq p_1$ für diesen Fall.

Es ist noch der Fall $k \geqq 3$ übrig. Für jedes $j = 1, \ldots, k$ bezeichnen wir mit I_j die Menge derjenigen $i_j = 0, \ldots, p_j - 1$, für die

$$a_{0 \ldots 0 i_j 0 \ldots 0} = 0 \tag{4}$$

ist. (Die linke Seite ist so gemeint, daß der j-te Index gleich i_j, die übrigen gleich 0 sind.) Wegen (2) folgt hieraus

$$0 \notin I_1, \ldots, I_k. \tag{5}$$

Wenn I_j für ein j gleich $\emptyset$ ist, d. h. die linke Seite von (4) stets positiv ist, so ist $S_0 \geqq p_j \geqq p_1$. Also darf weiterhin

$$I_1, \ldots, I_k \neq \emptyset \tag{6}$$

angenommen werden.

Wir setzen

$$\mathfrak{K} = \langle 1, \ldots, k \rangle$$

und bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ eine Untermenge von $\mathfrak{K}$. Von den Gleichungen (3) fassen wir eine beliebige mit

$$i_1 \in I_1, \ldots, i_k \in I_k \tag{7}$$

ins Auge. Da dabei nach (5) $i_1, \ldots, i_k \neq 0$ ist, läßt sich diese Gleichung als

$$\sum_{\mathfrak{M}} (-1)^{O(\mathfrak{M})} a_{x_1 \ldots x_k} = 0$$

schreiben, wobei $x_1, \ldots, x_k$ nach

$$x_j = \begin{cases} i_j & (j \in \mathfrak{M}), \\ 0 & (j \notin \mathfrak{M}) \end{cases}$$

zu bestimmen sind. Es folgt daraus die Ungleichung

$$\sum_{2 \mid O(\mathfrak{M})} a_{x_1 \ldots x_k} \geqq a_{0 \ldots 0}$$

offenbar. Wegen (4) und (7) fallen die Glieder mit $O(\mathfrak{M}) = 1$ weg, ferner darf rechts

wegen (2) 1 statt $a_{0\ldots0}$ geschrieben werden. Also ist

$$\sum_{2\mid O(\mathfrak{M}),\, O(\mathfrak{M})\geqq 3} a_{x_1\ldots x_k}\geqq 1.$$

Man summiere über alle $i_1, \ldots, i_k$ mit (7). So entsteht nach Einführung der Bezeichnung (vgl. (6))

$$n_j = O(I_j)\ (>0) \qquad (j=1, \ldots, k) \tag{8}$$

die Ungleichung

$$\sum_{2\mid O(\mathfrak{M}),\, O(\mathfrak{M})\geqq 3} \frac{n_1\ldots n_k}{\prod\limits_{j\in\mathfrak{M}} n_j}\, S_{\mathfrak{M}}\geqq n_1\ldots n_k,$$

wobei $S_{\mathfrak{M}}$ die Summe derjenigen $a_{i_1\ldots i_k}$ bezeichnet, in denen jedes i_j mit $j\in\mathfrak{M}$ in I_j fällt und die übrigen i_j gleich 0 sind.

Wird noch das Minimum aller Dreierprodukte $n_u n_v n_w$ $(1\leqq u<v<w\leqq k)$ mit m bezeichnet, so folgt aus voriger Ungleichung offenbar

$$\sum_{2\mid O(\mathfrak{M}),\, O(\mathfrak{M})\geqq 3} S_{\mathfrak{M}}\geqq m.$$

Somit ist

$$S_0\geqq\sum_{\mathfrak{M}} S_{\mathfrak{M}}\geqq m+\sum_{O(\mathfrak{M})=1} S_{\mathfrak{M}}.$$

Wenn nun $O(\mathfrak{M})=1$ ist, d. h. $\mathfrak{M}$ aus einem einzigen Element $j=1, \ldots, k$ besteht, so ist nach der Definition von I_j gewiß $S_{\mathfrak{M}}\geqq p_j-n_j$. Also ist

$$S_0\geqq m+\sum_{j=1}^{k}(p_j-n_j).$$

Es seien nun drei verschiedene u, v, w $(=1, \ldots, k)$ so gewählt, daß $m=n_u n_v n_w$ ist. A fortiori gilt dann

$$S_0\ \geqq\ n_u n_v n_w+p_u+p_v+p_w-n_u-n_v-n_w.$$

Da aber nach (6) und (8) stets $1\leqq n_j\ (\leqq p_j)$ ist, folgt hieraus offenbar

$$S_0\ \geqq\ p_u+p_v+p_w-2>p_1.$$

Damit ist Satz 8 für quadratfreie n bewiesen.

Um den Satz auch für ein n mit mehrfachen Primfaktoren zu beweisen, setzen wir seine Richtigkeit für die echten Teiler von n voraus. Es sei p eine Primzahl mit $p^2\mid n$, ferner sei ϱ eine komplexe Einheitswurzel mit $o(\varrho)=n$. Der Beweis beruht auf der einfachen Tatsache, daß die Potenzen $1, \varrho, \ldots, \varrho^{p-1}$ sowohl ein Repräsentantensystem der Gruppe $\{\varrho\}$ nach der Gruppe $\{\varrho^p\}$ als auch eine Basis des n-ten Kreisteilungskörpers bezüglich des $\frac{n}{p}$-ten Kreisteilungskörpers bilden. Es folgt, daß jede Summe S von Elementen aus $\{\varrho\}$ sich als

$$S=\sum_{i=1}^{p-1}\varrho^i S_i$$

schreiben läßt, wobei jedes S_i eine Summe von Elementen aus $\{\varrho^p\}$ ist, und daß im Fall $S=0$ die Gleichungen

$$S_0=\ldots=S_{p-1}=0$$

gelten. Dabei läßt sich annehmen, daß die Gliederzahl von S gleich der Summe der Gliederzahlen von $S_0, \ldots, S_{p-1}$ ist. Da nun n und $\frac{n}{p}$ dieselben Primteiler haben und Satz 10 nach der Induktionsvoraussetzung für $\frac{n}{p}$ richtig ist, folgt hieraus seine Richtigkeit für n. Damit ist Satz 10 bewiesen.

SATZ 11. *Existiert das schlichte Produkt $A\circ B\circ C$ von drei Komplexen A, B, C einer endlichen abelschen Gruppe G, von denen A und B normiert sind, sind ferner beide Teilprodukte $A\circ C$ und $B\circ C$ Gruppen, so ist auch C eine Gruppe.*

Wir haben $C^{-1}C\subseteq C$ zu beweisen. Da A normiert ist, ist $C\subseteq A\circ C$. Da ferner die rechte Seite eine Gruppe ist, folgt $C^{-1}C\subseteq A\circ C$. Ähnliches gilt mit B statt A, also ist

$$C^{-1}C\subseteq(A\circ C)\cap(B\circ C).$$

Deshalb genügt es zu beweisen, daß jedes Element ξ der rechten Seite in C enthalten ist. Es gilt

$$\xi=\alpha\gamma=\beta\gamma'$$

mit Elementen $\alpha\in A$, $\beta\in B$ und $\gamma, \gamma'\in C$. Da also $\alpha\varepsilon\gamma=\varepsilon\beta\gamma'$ ist, folgt hieraus wegen der Existenz von $A\circ B\circ C$ und der Normiertheit von A und B die Gleichung $\alpha=\varepsilon$. (Es folgen auch $\varepsilon=\beta$ und $\gamma=\gamma'$, jedoch brauchen wir davon keine Notiz zu nehmen.) Wir haben $\xi=\gamma$, also $\xi\in C$ erhalten. Damit ist Satz 11 bewiesen.

Bevor wir auch einige Hilfssätze vorausschicken, führen wir noch einige Bezeichnungen und Definitionen ein.

$G_{(p)}$ bezeichnet für eine Primzahl p die umfassendste p-Untergruppe von G. Die der direkten Zerlegung

$$G=\bigtimes_{p|O(G)} G_{(p)}$$

entsprechende Komponentenzerlegung der Elemente von G setzen wir in der Form

$$\gamma=\prod_{p|O(G)}\gamma_{(p)} \qquad (\gamma_{(p)}\in G_{(p)})$$

an. Das durch den Endomorphismus $\gamma\to\gamma_{(p)}$ von G auf $G_{(p)}$ gelieferte Bild eines Komplexes A von G wird mit $A_{(p)}$ bezeichnet und die *p-Komponente* von A genannt. (Es bilden $G_{(p)}$ und $\gamma_{(p)}$ je einen Spezialfall von $A_{(p)}$.)

HILFSSATZ 14. *Sind für einen Teiler A von G und für zwei verschiedene Primteiler p und q von $O(G)$ die Bedingungen*

$$O(A)=p, \quad A\subseteq G_{(p)}G_{(q)}$$

erfüllt, so ist

$$O(A_{(p)})=O(A)(=p), \quad \mathfrak{N}(A_{(p)})\supseteq\mathfrak{N}(A),$$

also ist

$$A\to A_{(p)}$$

eine zulässige Ersetzung.

Im Beweis darf A normiert angenommen werden. Wegen $A|G$ und Satz 3 ist $\mathfrak{N}(A)\neq\emptyset$. Es sei $\chi\in\mathfrak{N}(A)$, also $\chi(A)=0$, d. h.

$$\sum_{\alpha\in A}\chi(\alpha)=0.$$

Wegen der Annahme sind die Ordnungen der hier auftretenden Glieder Potenzprodukte von p und q. Da andererseits die Anzahl der Glieder gleich p ist, folgt aus dem Verschwinden der Summe offenbar, daß die Glieder die sämtlichen verschiedenen p-ten (komplexen) Einheitswurzeln sind. Hiernach ist $\mathfrak{h}_0(A)=p$, also ist nach Satz 5 jede Ersetzung

$$A\to A^a \qquad (p\nmid a)$$

zulässig. Da aber A^a für ein passendes a gleich der p-Komponente $A_{(p)}$ ist, ist damit Hilfssatz 14 bewiesen.

Ein in $G_{(p)}$ liegendes normiertes strengklassisches Produkt

$$P = X_1\circ\ldots\circ X_r \qquad (O(X_1)=\ldots=O(X_r)=p;\ r\geqq 1),$$

in dem die Faktoren $X_2, \ldots, X_r$ keine Gruppen sind, nennen wir kurz ein *p-Produkt*.

HILFSSATZ 15. *Wenn in zwei p-Produkten die ersten Faktoren voneinander verschieden sind und das schlichte Produkt der in ihnen auftretenden verschiedenen Faktoren existiert, so haben diese p-Produkte keinen gemeinsamen Faktor.*

Zum Zweck des Beweises nehmen wir an, daß die Behauptung falsch ist. Nach Streichen einiger der letzten Faktoren der angenommenen zwei p-Produkte erreichen wir, daß in den so übriggebliebenen zwei p-Produkten nur die letzten Faktoren miteinander gleich sind. Da die ersten Faktoren verschiedene Gruppen sind, wogegen keiner der übrigen Faktoren eine Gruppe ist, folgt, daß biede p-Produkte mindestens zwei Faktoren haben. Hiernach sind diese p-Produkte von der Form

$$P_1\circ X \text{ und } P_2\circ X,$$

wobei auch P_1 und P_2 p-Produkte sind, die aber keinen gemeinsamen Faktor enthalten. Es folgt, daß das schlichte Produkt $P_1\circ P_2\circ X$ existiert. Dabei ist $\varepsilon\in P_1, P_2$, ferner sind $P_1\circ X$ und $P_2\circ X$ Gruppen. Nach Satz 11 folgt hieraus, daß X eine Gruppe ist, aber das steht mit der Definition der p-Produkte in einem Widerspruch. Damit ist Hilfssatz 15 bewiesen.

HILFSSATZ 16. *Jedes von ε verschiedene Element ξ eines p-Produktes*

$$X_1\circ\ldots\circ X_r \qquad (r\geqq 1)$$

läßt sich derart in der Form

$$\xi=\xi_1\xi_2^{e_2}\ldots\xi_r^{e_r} \qquad (\xi_i\in X_i;\ i=1,\ldots,r;\ \xi\neq\varepsilon)$$

schreiben, daß jedes e_i entweder 0 oder zu p prim ist.

Wir machen die Induktionsvoraussetzung, daß die Behauptung für die kleineren r richtig ist. Es sei ξ ein Element des gegebenen p-Produktes. Dann läßt sich

$$\xi=\xi_m\ldots\xi_r \qquad (1\leqq m\leqq r;\ \xi_i\in X_i;\ i=m,\ldots,r;\ \xi_m\neq\varepsilon)$$

setzen. Für $m=1$ ist der Beweis fertig. Nachher sei $m\geqq 2$.

Im Fall $\xi_m^p \neq \varepsilon$ ist mit ξ_m^p zusammen auch ξ_m^{-p} ein von ε verschiedenes Element des Produktes $X_1 \circ \ldots \circ X_{m-1}$. Da auch dieses ein p-Produkt ist, folgt aus der Induktionsvoraussetzung eine Gleichung von der Form

$$\xi_m^{-p} = \xi_1 \xi_2^{e_2} \ldots \xi_{m-1}^{e_{m-1}} \qquad (\xi_i \in X_i;\ i = 1, \ldots, m-1;\ \xi_1 \neq \varepsilon),$$

wobei jedes e_i gleich 0 oder zu p prim ist. Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$\xi = \xi_1 \xi_2^{e_2} \ldots \xi_{m-1}^{e_{m-1}} \xi_m^{p+1} \xi_{m+1} \ldots \xi_r,$$

also ist die Behauptung in diesem Fall richtig.

Im übriggebliebenen Fall $\xi_m^p = \varepsilon$ betrachten wir die Gruppen

$$U = X_1 \circ \ldots \circ X_m, \quad V = X_1 \circ \ldots \circ X_{m-1}.$$

Wegen $O(U) = pO(V)$, $\xi_m \in U \setminus V$ und $o(\xi_m) = p$ gilt die direkte Zerlegung

$$U = V \times \{\xi_m\},$$

also folgt aus $U = V \circ X_m$, daß X_m (wegen $\varepsilon, \xi_m \in X_m$) von der Form

$$X_m = \bigcup_{e=0}^{p-1} \varkappa_e \xi_m^e \qquad (\varkappa_0, \ldots, \varkappa_{p-1} \in V;\ \varkappa_0 = \varkappa_1 = \varepsilon)$$

ist. Da X_m keine Gruppe ist, muß ($p \geqq 3$ sein und) ein $e = 2, \ldots, p-1$ mit $\varkappa_e \neq \varepsilon$ existieren. Wir nehmen eine ganze Zahl f mit

$$ef \equiv 1 \pmod{o(\varkappa_e)}.$$

Da $\varkappa_e^{-f}$ ein von ε verschiedenes Element von V ist, gilt wieder nach der Induktionsvoraussetzung eine Gleichung

$$\varkappa_e^{-f} = \xi_1 \xi_2^{e_2} \ldots \xi_{m-1}^{e_{m-1}} \qquad (\xi_i \in X_i;\ i = 1, \ldots, m-1;\ \xi_1 \neq \varepsilon),$$

wobei jedes e_i gleich 0 oder zu p prim ist. Hieraus und aus obiger Gleichung folgt

$$\xi = \xi_1 \xi_2^{e_2} \ldots \xi_{m-1}^{e_{m-1}} \varkappa_e^f \xi_m \xi_{m+1} \ldots \xi_r.$$

Da $\varkappa_e^f \xi_m = (\varkappa_e \xi_m^e)^f$ ist und das Element in den Klammern zu X_m gehört, ist die Behauptung auch im jetzt betrachteten Fall richtig. Damit ist Hilfssatz 16 bewiesen.

Nunmehr wollen wir Satz 1′ für ein beliebiges G beweisen. Zu diesem Zweck werde eine normierte vollständige Zerlegung

$$G = A_1 \circ \ldots \circ A_k \tag{9}$$

vorgelegt. Zu beweisen ist, daß diese klassisch ist. Da das für p-Gruppen schon bewiesen ist, nehmen wir an, daß G keine p-Gruppe ist. Für die Gruppen kleinerer Ordnung setzen wir die Behauptung voraus. Dann genügt es nach Hilfssatz 1 zu beweisen, daß in (9) mindestens ein Faktor eine Gruppe ist. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß in (9) kein Faktor eine Gruppe ist, und wollen daraus auf einen Widerspruch schließen. Um das zu ermöglichen, definieren wir die *Gesamtordnung* der Zerlegung (9) als das Produkt der Ordnungen der in den Faktoren $A_1, \ldots, A_k$ auftretenden Elemente und machen die weitere Voraussetzung, daß die Gesamtordnung von (9) möglichst klein ausfällt.

Den Beweis beginnen wir mit vier Feststellungen (a), (b), (c), (d) über die vorgelegte Zerlegung (9).

(a) *Zu jedem Primteiler p von $O(G)$ gibt es in* (9) *mindestens ein A_i mit $O(A_i)=p$ und $(A_i)_{(p)} \neq A_i$.*

Wenn das nämlich für ein p falsch ist, so gehören alle A_i mit $O(A_i)=p$ in $G_{(p)}$, woraus nach (9) folgt, daß $G_{(p)}$ das schlichte Produkt dieser A_i ist. Jedoch steht das in Widerspruch damit, daß kein A_i eine Gruppe ist und Satz 1′ für $G_{(p)}$ gilt. Damit ist (a) bewiesen.

Wir führen im Zusammenhang mit (9) die Bezeichnungen

$$p_1 = O(A_1), \ldots, p_k = O(A_k)$$

ein. (Also sind $p_1, \ldots, p_k$ Primzahlen mit $O(G)=p_1 \ldots p_k$, ferner sind nicht alle $p_1, \ldots, p_k$ gleich.)

Einen Faktor A_i aus (9) nennen wir *ausgezeichnet*, wenn $(A_i)_{(p_i)}$ eine Gruppe p_i-ter Ordnung und $\mathfrak{R}((A_i)_{(p_i)}) \supseteq \mathfrak{R}(A_i)$ ist (woraus folgt, daß die Ersetzung $A_i \to (A_i)_{(p_i)}$ zulässig ist).

(b) *Es gibt in* (9) *mindestens einen ausgezeichneten Faktor A_i.*

Wir bezeichnen mit p den kleinsten Primteiler von $O(G)$, nehmen nach (a) ein A_i mit $p_i=p$ und $(A_i)_{(p)} \neq A_i$. Wir zeigen gerade, daß dann A_i ein ausgezeichneter Faktor ist.

Zu diesem Zweck betrachten wir einen Charakter $\chi \in \mathfrak{R}(A_i)$. Dann ist

$$\chi(A_i) = \sum_{\alpha \in A_i} \chi(\alpha) = 0.$$

Da diese verschwindende Summe p-gliedrig und p der kleinste Primteiler von $O(G)$ ist, folgt aus Satz 10, daß unter den Gliedern $\chi(\alpha)$ mindestens eines eine durch p teilbare Ordnung hat. Da aber A_i normiert ist, kommt unter diesen Gliedern auch $\chi(\varepsilon)=1$ vor, also müssen die $\chi(\alpha)$ $(\alpha \in A_i)$ eben die sämtlichen verschiedenen p-ten komplexen Einheitswurzeln sein. Hieraus folgt vor allem

$$O((A_i)_{(p)}) = O(A_i) \, (=p),$$

ferner folgt $\chi((A_i)_{(p)}) = \chi(A_i) = 0$, also

$$\mathfrak{R}((A_i)_{(p)}) \supseteq \mathfrak{R}(A_i).$$

Hiernach ist die Ersetzung $A_i \to (A_i)_{(p)}$ zulässig. Die aus (9) nach dieser Ersetzung entstehende ebenfalls normierte vollständige Zerlegung ist aber wegen $(A_i)_{(p)} \neq A_i$ offenbar von kleinerer Gesamtordnung als (9), also muß unter ihren Faktoren (wegen der gemachten Minimalvoraussetzung) mindestens eine Gruppe auftreten. Dieser Faktor muß der (neue) Faktor $(A_i)_{(p)}$ sein, da die übrigen Faktoren $A_j (j \neq i)$ keine Gruppen sind. Damit ist (b) bewiesen.

Ein Teilprodukt

$$A_i \circ A_x \circ \ldots \circ A_z \circ A_j \tag{10}$$

der rechten Seite von (9), in welchem also $i, x, \ldots, z, j$ $(=1, \ldots, k)$ verschieden sind, nennen wir eine *Brücke* zwischen A_i und A_j, wenn diese beiden Faktoren ausgezeichnet sind,

$$p_i = p_x = \ldots = p_z \neq p_j \tag{11}$$

gilt und

$$(A_i)_{(p_i)} \circ A_x \circ \ldots \circ A_z \circ A_j \tag{12}$$

ein strengklassisches Produkt ist. Man bemerke, daß hiervon das Teilprodukt

$$(A_i)_{(p_i)} \circ A_x \circ \ldots \circ A_z$$

offenbar ein p_i-Produkt ist. Gibt es für zwei ausgezeichnete Faktoren A_i und A_j von (9) eine Brücke zwischen A_i und A_j, so sagen wir, daß der Faktor A_j ein *Nachfolger* des Faktors A_i ist.

(c) *In* (9) *hat jeder ausgezeichnete Faktor einen Nachfolger.*

Zum Beweis sei A_i ein ausgezeichneter Faktor. Das bedeutet, daß $(A_i)_{(p_i)}$ eine Gruppe ist und (9) durch die (zulässige) Ersetzung $A_i \to (A_i)_{(p_i)}$ wieder in eine normierte vollständige Zerlegung von G übergeführt wird. Da in dieser der neue Faktor $(A_i)_{(p_i)}$ eine Gruppe ist, folgt aus Hilfssatz 1 und der Induktionsvoraussetzung, daß sie klassisch ist. Nach passender Umordnung der Faktoren entsteht eine strengklassische Zerlegung

$$G = (A_i)_{(p_i)} \circ A_x \circ \ldots, \tag{13}$$

wobei $i, x, \ldots$ eine Permutation der Indizes $1, 2, \ldots, k$ ist. (Es mußte i an die erste Stelle kommen, da $A_1, \ldots, A_k$ keine Gruppen sind.) Es folgt, daß alle Abschnitte des Produktes (13) Gruppen sind. Unter diesen Abschnitten gibt es einen kürzesten, der keine p_i-Gruppe ist. Dieser werde in der Form (12) angesetzt, woraus offenbar (11) folgt. Es ist nur noch zu beweisen, daß in (12) der letzte Faktor A_j ausgezeichnet ist, denn daraus folgt, daß (11) ein Brücke zwischen A_i und A_j, also A_j ein Nachfolger von A_i ist.

Da das Produkt (12) eine Gruppe von der Ordnung $p_i p_x \ldots p_z p_j$ ist, die den Faktor A_j enthält, folgt aus (11)

$$A_j \subseteqq G_{(p_i)} G_{(p_j)}. \tag{14}$$

Wenn sogar $A_j \subseteqq G_{(p_j)}$ ist, so folgt auch, daß A_j die p_j-Komponente der Gruppe (12), also selbst eine Gruppe ist. Da aber das falsch ist, haben wir gewonnen, daß A_j nicht in $G_{(p_j)}$ liegt, d. h.

$$(A_j)_{(p_j)} \neq A_j \tag{15}$$

ist. Nun folgt aus (14) und $O(A_j) = p_j$ nach Hilfssatz 14, daß die Ersetzung

$$A_j \to (A_j)_{(p_j)}$$

zulässig ist. Wird diese an (9) ausgeführt, so entsteht eine ebenfalls normierte vollständige Zerlegung von G, die nach (15) von kleinerer Gesamtordnung ist als (9). Nach der Minimalvoraussetzung folgt hieraus, daß der neue Faktor $(A_j)_{(p_j)}$ eine Gruppe ist. Da hiernach der Faktor A_j von (9) ausgezeichnet ist, ist (c) bewiesen.

(d) *Mit passender Numerierung der Faktoren von* (9) *läßt sich erreichen, daß für ein* l *mit* $2 \leqq l \leqq k$ *die Faktoren* $A_1, \ldots, A_l$ *ausgezeichnet sind und jeder von ihnen ein Nachfolger des zyklisch vorangehenden Faktors ist.* (Das bedeutet, daß A_1 ein Nachfolger von A_l und A_i $(i = 2, \ldots, l)$ ein Nachfolger von A_{i-1} ist.)

Nach (b) läßt sich nämlich annehmen, daß A_1 ein ausgezeichneter Faktor in (9) ist. Mit wiederholter Anwendung von (c) läßt sich annehmen, daß in der Folge

$$A_1, \ldots, A_u \qquad (2 \leqq u \leqq k)$$

jedes Glied A_i ($i=2, \ldots, u$) ein Nachfolger von A_{i-1} ist, ferner ein A_t mit $1 \leqq t \leqq u-1$ ein Nachfolger von A_u ist. In der Folge

$$A_t, \ldots, A_u$$

ist dann jedes Glied ein Nachfolger des zyklisch vorangehenden. Damit ist (d) bewiesen.

Die in (d) verwendeten Bezeichnungen werden fortan beibehalten. Nach Definition gibt es dann l Brücken

$$A_i \circ A_{i1} \circ \ldots \circ A_{i\bar{i}} \circ A_{i'} \qquad (i=1, \ldots, l), \tag{16}$$

wobei

$$i' = \begin{cases} i+1 & \text{für } i=1, \ldots, l-1 \\ 1 & \text{für } i=l \end{cases} \tag{17}$$

zu verstehen ist, jedes $\bar{i}$ eine nichtnegative ganze Zahl ist ($i=1, \ldots, l$), ferner die

$$A_{ij} \qquad (i=1, \ldots, l; j=1, \ldots, \bar{i}) \tag{18}$$

passende Faktoren aus (9) bezeichnen. (Es ist denkbar, daß unter diesen Faktoren auch gleiche auftreten, aber bald wird unter anderem gezeigt, daß sie verschieden sind.)

Da die Faktoren $A_1, \ldots, A_l$ ausgezeichnet sind, gilt

$$(A_i)_{(p_i)} = \{\alpha_i\} \; (\neq A_i) \qquad (o(\alpha_i)=p_i;\ i=1, \ldots, l) \tag{19}$$

mit Erzeugenden $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ dieser Gruppen (die wir später unten noch passend wählen werden), ferner sind die Ersetzungen

$$A_i \to (A_i)_{(p_i)} \qquad (i=1, \ldots, l) \tag{20}$$

zulässig, also gilt die Zerlegung

$$G = (A_1)_{(p_1)} \circ \ldots \circ (A_l)_{(p_l)} \circ A_{l+1} \circ \ldots \circ A_k \tag{21}$$

(wobei die Faktoren $A_{l+1}, \ldots, A_k$ im Fall $l=k$ fehlen, ohne daß dadurch die Allgemeinheit der noch folgenden Ausführungen gestört wäre).

Aus (16) folgt auch, daß jedes

$$(A_i)_{(p_i)} \circ A_{i1} \circ \ldots \circ A_{i\bar{i}} \circ A_{i'} \qquad (i=1, \ldots, l) \tag{22}$$

ein strengklassisches Produkt und jedes

$$(A_i)_{(p_i)} \circ A_{i1} \circ \ldots \circ A_{i\bar{i}} \qquad (i=1, \ldots, l) \tag{23}$$

ein p_i-Produkt ist, ferner folgt

$$p_i = O(A_i) = O(A_{i1}) = \ldots = O(A_{i\bar{i}}) \neq O(A_{i'}) = p_{i'} \qquad (i=1, \ldots, l). \tag{24}$$

Nun liegt nach (19) kein $A_1, \ldots, A_l$ in einer p-Gruppe, wogegen nach (23) stets $A_{ij} \subseteq G_{(p_i)}$ ist, also sind die sämtlichen A_{ij} aus (18) von allen $A_1, \ldots, A_l$ verschieden. Da andererseits jedes A_{ij} unter $A_1, \ldots, A_k$ vorkommt, folgt, daß jedes A_{ij} unter $A_{l+1}, \ldots, A_k$ vorkommt. Damit haben wir erkannt, daß jedes p_i-Produkt (23) ein Teilprodukt der rechten Seite von (21) ist. Da andererseits die in (23) auftretenden

ersten Faktoren $(A_i)_{(p_i)}$ $(i=1, \ldots, l)$ wegen (21) verschieden sind, folgt aus beiden Feststellungen und aus Hilfssatz 15, daß die sämtlichen A_{ij} voneinander verschieden sind. Somit hat sich das für das folgende wichtige Ergebnis herausgestellt, daß die in den Brücken (16) auftretenden sämtlichen Faktoren

$$A_i (i=1, \ldots, l), \quad A_{ij} (i=1, \ldots, l;\ j=1, \ldots, \bar{\imath}) \tag{25}$$

verschieden sind, woraus folgt, daß das schlichte Produkt dieser Komplexe (existiert und) ein Teilprodukt der rechten Seite von (9) ist.

Wir kehren zu (19) zurück. Aus diesem folgt, daß die Gruppe $(A_i)_{(p_i)}$ mindestens ein Element außerhalb von A_i hat, weshalb wir fortan die bisherigen $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ den Bedingungen $\alpha_i \notin A_i$ $(i=1, \ldots, l)$ unterwerfen dürfen. Hierfür läßt sich $\alpha_{i'} \notin A_{i'}$ $(i=1, \ldots, l)$ schreiben. Da andererseits nach (19) $\alpha_{i'} \in (A_{i'})_{(p_{i'})}$, ferner nach (22) und (24)

$$A_{i'} \subseteq G_{(p_i)} G_{(p_{i'})} \qquad (i=1, \ldots, l) \tag{26}$$

ist, gilt

$$\alpha_{i'} \beta_i \in A_{i'} \qquad (i=1, \ldots, l;\ \beta_i \in G_{(p_i)},\ \neq \varepsilon) \tag{27}$$

mit passenden $\beta_1, \ldots, \beta_l$.

Über diese beweisen wir

$$\beta_i \in (A_i)_{(p_i)} \circ A_{i1} \circ \ldots \circ A_{i\bar{\imath}} \qquad (i=1, \ldots, l). \tag{28}$$

Da (22) ein strengklassisches Produkt ist, folgt aus (27), daß die Potenz $(\alpha_{i'} \beta_i)^{p_{i'}}$ in der p_i-Gruppe (23) liegt. Da aber nach (19) $\alpha_{i'}^{p_{i'}} = \varepsilon$ und nach (24) $p_{i'} \neq p_i$ ist, folgt hieraus die Behauptung (28).

Da die rechte Seite von (28) (d. h. das Produkt (23)) ein p_i-Produkt (also eine Gruppe) ist, gilt (28) auch mit β_i^{-1} statt β_i, ferner gilt wegen $\beta_i \neq \varepsilon$ auch $\beta_i^{-1} \neq \varepsilon$. Hiernach folgt aus Hilfssatz 16 (unter Berücksichtigung von (19)) das Bestehen von

$$\beta_i^{-1} = \alpha_i^{e_i} \alpha_{i1}^{e_{i1}} \ldots \alpha_{i\bar{\imath}}^{e_{i\bar{\imath}}} \qquad (i=1, \ldots, l) \tag{29}$$

mit passenden Elementen $\alpha_{ij} \in A_{ij}$ und ganzen Zahlen e_i, e_{ij} $(j=1, \ldots, \bar{\imath})$, von denen e_i durch p_i nicht teilbar und jedes e_{ij} entweder 0 oder durch p_i nicht teilbar ist.

Aus (29) ergibt sich

$$\varepsilon = \prod_{i=1}^{l} \alpha_i^{e_i} \beta_i \alpha_{i1}^{e_{i1}} \ldots \alpha_{i\bar{\imath}}^{e_{i\bar{\imath}}}. \tag{30}$$

Leicht wird es sich aber zeigen, daß diese Gleichung widerspruchsvoll ist, wodurch der Beweis von Satz 1′ beendet ist.

Wir bestimmen ganze Zahlen $f_1, \ldots, f_l$ mit

$$f_i \equiv \begin{cases} e_{i'} \pmod{p_{i'}}, \\ 1 \pmod{o(\beta_i)} \end{cases} \qquad (i=1, \ldots, l). \tag{31}$$

Das ist möglich, da $o(\beta_i)$ nach (27) eine p_i-Potenz und nach (24) $p_i \neq p_{i'}$ ist. Da nach (19) $o(\alpha_{i'}) = p_{i'}$ ist, folgt aus (31) und $p_{i'} \nmid e_{i'}$

$$(\alpha_{i'} \beta_i)^{f_i} = \alpha_{i'}^{e_{i'}} \beta_i, \quad (f_i,\ p_i p_{i'}) = 1 \qquad (i=1, \ldots, l). \tag{32}$$

Nach (17) werden die Zahlen $1, \ldots, l$ durch $i \to i'$ (zyklisch) permutiert, also darf im Produkt auf der rechten Seite von (30) $\alpha_{i'}^{e_{i'}}$ für $\alpha_i^{e_i}$ geschrieben werden. Hiernach und nach (31) verwandelt sich (30) in

$$\varepsilon = \prod_{i=1}^{l} (\alpha_{i'} \beta_i)^{f_i} \alpha_{i1}^{e_{i1}} \ldots \alpha_{i\bar{i}}^{e_{i\bar{i}}}. \tag{33}$$

Nun ist nach (26) und (32_2)

$$(f_i, \mathfrak{ch}(A_{i'})) = 1 \qquad (i = 1, \ldots, l). \tag{34}$$

Da ferner nach (23) stets $A_{ij} \subseteq G_{(p_i)}$, also $\mathfrak{ch}(A_{ij})$ eine p_i-Potenz ist, gilt für jedes e_{ij}

$$\text{entweder} \quad e_{ij} = 0 \quad \text{oder} \quad (e_{ij}, \mathfrak{ch}(A_{ij})) = 1 \qquad (i = 1, \ldots, l;\ j = 1, \ldots, \bar{i}). \tag{35}$$

Die bei (24) angeführten (verschiedenen) Faktoren der rechten Seite von (9) lassen sich (da $i \to i'$ eine Permutation von $1, \ldots, l$ ist) in der Form

$$A_{i'} \quad (i = 1, \ldots, l); \quad A_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, l;\ j = 1, \ldots, \bar{i})$$

angeben. Nach Satz 5 folgt also aus (34) und (35) die Existenz des schlichten Produktes der Komplexe

$$A_{i'}^{f_i} \quad (i = 1, \ldots, l); \quad A_{ij}^{e_{ij}} \qquad (i = 1, \ldots, l;\ j = 1, \ldots, \bar{i}).$$

Da aber das Produkt auf der rechten Seite von (33) wegen (27) und $\alpha_{ij} \in A_{ij}$ aus jedem dieser Komplexe genau ein Element als Faktor enthält, ferner unter diesen Faktoren die von der Form $(\alpha_{i'} \beta_i)^{f_i}$ von ε verschieden sind, steht das mit der Gleichung (33) in einem Widerspruch. Damit ist Satz 1′ bewiesen.

(Eingegangen am 1. Dezember 1964.)

Literaturverzeichnis

N. G. DE BRUIJN,
[1] On the factorization of finite Abelian groups, *Nederl. Akad. Wet., Proc.*, Ser. A **56** (1953), S. 258–264.
[2] On the factorization of cyclic groups, *Nederl. Akad. Wet., Proc.*, Ser A **56** (1953), S. 370–377.

I. FÁRY,
[1] Die Äquivalente des Minkowski–Hajósschen Satzes in der Theorie der topologischen Gruppen, *Comment. Math. Helv.*, **23** (1949), S. 283–287.

L. FUCHS,
[1] On the possibility of extending Hajós' theorem to infinite abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1958), S. 338–347.
[2] *Abelian Groups* (Budapest, 1958).

G. HAJÓS,
[1] Bedeckung mehrdimensionaler Räume mit Würfelgittern, *Mat. Fiz. Lapok*, **45** (1938), S. 171–190. (Ungarisch.)
[2] Einfache Bedeckung mehrdimensionaler Räume mit Würfelgittern, *Mat. Fiz. Lapok*, **48** (1941), S. 37–64. (Ungarisch.)
[3] Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Z.*, **47** (1942), S. 427–467.

[4] Sur la factorisation des groupes abeliens, *Časopis*, **74** (1950), S. 157–162.
[5] Sur le problème de factorisation des groupes cycliques, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950), S. 189–195.

E. JACOBSTHAL
[1] Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste, *Dissertation Berlin*, 1906.

L. RÉDEI,
[1] Bericht über die Arbeiten von Georg Hajós, *Mat. Fiz. Lapok*, **49** (1942), S. 1–16. (Ungarisch.)
[2] Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski–Hajós, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1949–50), S. 21–35.
[3] Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, *Comment. Math. Helv.*, **23** (1949), S. 272–282.
[4] Ein Beitrag zum Problem der Faktorisation von endlichen Abelschen Gruppen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950), S. 197–207.
[5] Zwei Lückensätze über Polynome in endlichen Primkörpern mit Anwendung auf die endlichen Abelschen Gruppen und die Gaussischen Summen, *Acta Math.*, **79** (1947), S. 273–290.
[6] Die Reduktion des gruppentheoretischen Satzes von Hajós auf den Fall von p-Gruppen, *Monatshefte f. Math.*, **53** (1949), S. 221–226.
[7] Zetafunktionen in der Algebra, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), S. 5–25.
[8] Neuer Beweis des Hajósschen Satzes über die endlichen Abelschen Gruppen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), S. 27–40.
[9] Die gruppentheoretischen Zetafunktionen und der Satz von Hajós, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), S. 271–279.
[10] Natürliche Basen des Kreisteilungskörpers, I, II, Abh., *Math. Sem. Univ. Hamburg*, **22** (1958), S. 201–214; **24** (1960), S. 12–40.
[11] *Algebra I* (Leipzig, 1959).
[12] Zum 50. Geburstage von Georg Hajós, *Mat. Lapok*, **13** (1962), S. 217–227. (Ungarisch.)
[13] Logische Dualität der Frobenius–Stickelbergerschen und Hajósschen Hauptsätze der Theorie der endlichen abelschen Gruppen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), S. 327.
[14] Ein Überdeckungssatz für endliche abelsche Gruppen im Zusammenhang mit dem Hauptsatz von Hajós, *Acta Sci. Math. Szeged*, **26** (1965), S. 55–61.

A. D. SANDS,
[1] On the factorisation of finite abelian groups. I, II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), S. 65–86; **13** (1962), S. 153–169.
[2] The factorisation of abelian groups, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **10** (1959), S. 81–91.
[3] The factorization of abelian groups, I, II, *Quart. J. Math.*, **10** (1959), S. 81–91; **13** (1962), S. 45–54.

T. SZELE,
[1] Neuer vereinfachter Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1949–50), S. 56–62.

ÜBER DIE VERALLGEMEINERTE DE LA VALLÉE—POUSSINSCHE SUMMIERBARKEIT ALLGEMEINER ORTHOGONALREIHEN

Von

L. LEINDLER (Szeged)

(*Vorgelegt von* G. ALEXITS)

Einleitung

Seien $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem und $\lambda=\{\lambda_n\}$ eine monotone, natürliche Zahlenfolge mit $\lambda_{n+1}-\lambda_n \leqq 1$. Die n-te Partialsumme, bzw. das n-te verallgemeinerte de la Vallée—Poussinsche Mittel bezüglich λ der Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2<\infty\right) \tag{1}$$

wird mit $s_n(x)$, bzw. $V_n(\lambda; x)$ bezeichnet, d. h. ist

$$s_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu(x), \quad V_n(\lambda; x)=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=n-\lambda_n+1}^{n} s_\nu(x).$$

Die Reihe (1) heißt an einer Stelle x (V, λ)-*summierbar* zur Funktion $f(x)$, die im Falle $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2<\infty$ durch den Riesz—Fischerschen Satz bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt ist, wenn für $n\to\infty$

$$V_n(\lambda; x)\to f(x)$$

gilt.

In dieser Arbeit beweisen wir einige Sätze über die (V, λ)-Summierbarkeit. Sei $\mu_0=1$ und $\mu_n=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{\mu_k}$.

SATZ I. *Damit die Orthogonalreihe* (1) *auf einer Menge E fast überall* (V, λ)-*summierbar ist, ist notwendig und hinreichend die Konvergenz der Partialsummen* $s_{\mu_n}(x)$ *auf E fast überall.*

Man kann einsehen, daß der Satz I im Falle $\lambda_n=n$ den bekannten Satz von S. KACZMARZ [3] enthält.

Aus dem Menschoff—Rademacherschen Satz und aus dem Satz I ergibt sich unmittelbar:

SATZ II. *Unter der Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2\log^2 n<\infty \qquad \left(C_n^2=\sum_{\nu=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} c_\nu^2\right) \tag{2}$$

ist die Orthogonalreihe (1) *in* (a, b) *fast überall* (V, λ)-*summierbar.*

Der folgende Satz beweist die Unverschärfbarkeit des Satzes II.

SATZ III. *Ist* $\{C_n\}$ *eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge, für die*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \log^2 n = \infty \qquad \left(C_n^2 = \sum_{\nu=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} c_\nu^2\right) \tag{3}$$

gilt, so gibt es ein Orthonormalsystem $\{\Phi_n(x)\}$ *derart, daß* $|\Phi_n(x)| \leqq M$ $(x \in (a, b);$ $n = 1, 2, \ldots)$ *und die Orthogonalreihe*

$$\sum c_n \Phi_n(x) \tag{4}$$

fast überall nicht (V, λ)*-summierbar ist.*

Der folgende Satz bezieht sich auf die Größenordnung der Mittel $V_n(\lambda; x)$ der Orthogonalreihe (1).

SATZ IV. *Sichert die Bedingung*

$$\sum c_n^2 \varrho_n^2 < \infty \qquad (1 \leqq \varrho_n \leqq \log n) \tag{5}$$

die (V, λ)*-Summierbarkeit der Reihe* (1) *für jede die Bedingung* (5) *erfüllenden Koeffizientenfolgen* $\{c_n\}$ *auf einer Menge* $E \subset (a, b)$*, so folgt aus den Bedingungen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \gamma_n^2 < \infty, \quad \frac{\varrho_n}{\gamma_n} \leqq \frac{\varrho_{n+1}}{\gamma_{n+1}} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_n}{\gamma_n} \to \infty \tag{6}$$

für die Mittel $V_n(\lambda; x)$ *der Reihe* (1) *die Abschätzung*

$$V_n(\lambda; x) = o_x\left(\frac{\varrho_n}{\gamma_n}\right) \tag{7}$$

auf E fast überall .

Über die Approximation mit Mitteln $V_n(\lambda; x)$ beweisen wir die folgenden Sätze:

SATZ V. *Sichert die Bedingung* (5) *die* (V, λ)*-Summierbarkeit der Reihe* (1) *für jede die Bedingung* (5) *erfüllenden Koeffizientenfolgen* $\{c_n\}$ *auf einer Menge* $E \subset (a, b)$ *fast überall, so folgt aus dem Erfülltsein der Bedingungen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \varrho_n^2 l_n^2 < \infty, \quad l_n \leqq l_{n+1} \quad \text{und} \quad l_{\mu_{n+1}} \leqq K l_{\mu_n} \qquad (1 \leqq K < \sqrt{2}), \tag{8}$$

daß die Mittel $V_n(\lambda; x)$ *der Reihe* (1) *auf E fast überall mit dem Annäherungsgrad*

$$V_n(\lambda; x) - f(x) = o_x(l_n^{-1}) \tag{9}$$

approximieren.

SATZ VI. *Ist die Folge* $\{l_n\}$ *monoton wachsend und*

$$l_{\mu_{n+1}} \leqq K l_{\mu_n} \quad (1 \leqq K < \sqrt{2}) \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{k} l_{\mu_i}^2 = O(l_{\mu_k}), \tag{10}$$

dann folgt schon aus der Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 l_n^2 < \infty, \tag{11}$$

daß die Mittel $V_n(\lambda; x)$ *der Orthogonalreihe* (1) *in* (a, b) *fast überall mit dem Annäherungsgrad* (9) *approximieren.*

Wir haben früher in [4] bewiesen, daß die Folge

$$\sigma_n(\{\nu\}; x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_{\nu_i}(x)$$

unter der Bedingung $\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty$ für eine beliebige, nicht notwendigerweise monotone Folge $\{\nu_k\}$ von verschiedenen natürlichen Zahlen fast überall konvergiert. Im folgenden werden wir u. a. die Konvergenz der Folge

$$V_n(\lambda; \{\nu\}; x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=n-\lambda_n+1}^{n} s_{\nu_i}(x)$$

untersuchen. Es gilt der

SATZ VII. *Ist die Bedingung* (2) *erfüllt, so gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion* $f(x)$ *derart, daß*

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=n-\lambda_n+1}^{n} [s_{\nu_i}(x) - f(x)]^2 \to 0 \tag{12}$$

für jede unendliche Folge $\{\nu_n\}$ *von verschiedenen natürlichen Zahlen im Intervall* (a, b) *fast überall gilt.*

Wegen

$$\left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=n-\lambda_n+1}^{n} s_{\nu_i}(x) - f(x) \right| \leqq \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=n-\lambda_n+1}^{n} (s_{\nu_i}(x) - f(x))^2 \right\}^{1/2}$$

ist auch die Folge $V_n(\lambda; \{\nu\}; x)$ *unter der Bedingung* (2) *in* (a, b) *fast überall konvergent.*

Die Orthogonalreihe (1) heißt an der Stelle x $|V, \lambda|$-summierbar, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |V_{n+1}(\lambda; x) - V_n(\lambda; x)| < \infty$$

gilt. Wir beweisen den

SATZ VIII. *Damit die Reihe* (1) *für jedes Orthonormalsystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall* (a, b) *fast überall* $|V, \lambda|$*-summierbar sei, ist die Bedingung*

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m < \infty \qquad \left(C_m^2 = \sum_{n=\mu_{m+1}}^{\mu_{m+1}} c_n^2 \right) \tag{13}$$

notwendig und hinreichend.

Wir beweisen umgekehrt:

Ist $\sum_{m=0}^{\infty} C_m = \infty$, *so ist schon die Rademachersche Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r_n(x) \quad (r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x) \tag{14}$$

nicht fast überall $|V, \lambda|$*-summierbar.*

§ 1. Hilfssätze

HILFSSATZ I. *Sei* $\{l_n\}$ *eine positive, monotone Zahlenfolge mit* $l_{\mu_{n+1}} \leqq c l_{\mu_n}$, $1 \leqq c < \sqrt{2}$. *Dann folgt aus der Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 l_n^2 < \infty \tag{1.1}$$

die Abschätzung

$$V_k(\lambda; x) - s_{\mu_{n-1}}(x) = o_x(l_k^{-1}) \tag{1.2}$$

für jede n *und* k *mit* $\mu_{n-1} < k \leqq \mu_n$ *in* (a, b) *fast überall.*

BEWEIS. Mit einfacher Rechnung ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \int_a^b (s_{\mu_n}(x) - V_{\mu_n}(x))^2 \, dx \leqq \sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \sum_{k=\mu_n - \lambda_{\mu_n}+2}^{\mu_n} \left(1 - \frac{\mu_n + 1 - k}{\lambda_{\mu_n}}\right)^2 c_k^2 \leqq \tag{1.3}$$

$$\leqq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=\mu_{m-1}+1}^{\mu_m} c_k^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{((\mu_m - \mu_n + \lambda_{\mu_n})^+)^2 l_{\mu_n}^2}{\lambda_{\mu_n}^2}.$$ [1]

Wir zeigen, daß

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \lambda_{\mu_n}^{-2} ((\mu_m - \mu_n + \lambda_{\mu_n})^+)^2 = O(l_{\mu_m}^2) \tag{1.4}$$

ist. Nach der Definition von μ_n ist

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \left(\left(1 - \frac{\mu_n - \mu_m}{\lambda_{\mu_n}}\right)^+\right)^2 = \tag{1.5}$$

$$= l_{\mu_m}^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \left(\left(1 - \lambda_{\mu_n}^{-1} \sum_{k=m}^{n-1} \lambda_{\mu_k}\right)^+\right)^2 \equiv l_{\mu_m}^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 A_n^2.$$

Nach der Definition von μ_n und der Bedingung über $\{\lambda_n\}$ gilt die Ungleichung

[1] α^+ bezeichnet den positiven Teil von α.

$\lambda_{\mu_{m+1}} \leqq 2\lambda_{\mu_m}$; somit besteht für $n > m$

$$A_n = \left(1 - \lambda_{\mu_n}^{-1} \sum_{k=m}^{n-1} \lambda_{\mu_k}\right)^+ \leqq \left(1 - (2\lambda_{\mu_{n-1}})^{-1} \sum_{k=m}^{n-1} \lambda_{\mu_k}\right)^+ =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - (2\lambda_{\mu_{n-1}})^{-1} \sum_{k=m}^{n-2} \lambda_{\mu_k}\right)^+ \leqq \left(\frac{1}{2} - (4\lambda_{\mu_{n-2}})^{-1} \sum_{k=m}^{n-2} \lambda_{\mu_k}\right)^+ =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - (4\lambda_{\mu_{n-2}})^{-1} \sum_{k=m}^{n-3} \lambda_{\mu_k}\right)^+ \leqq \ldots \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m},$$

woraus wegen (1. 5) und der Bedingung $l_{\mu_{n+1}} < c l_{\mu_n} \quad (c < \sqrt{2})$

$$R_m \leqq l_{\mu_m}^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-m} = O(l_{\mu_m}^2)$$

folgt, wie (1. 4) behauptet. Auf Grund von (1. 1), (1. 3) und (1. 4) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \int_a^b (s_{\mu_n}(x) - V_{\mu_n}(\lambda; x))^2 \, dx < \infty.$$

So ergibt sich durch Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 (s_{\mu_n}(x) - V_{\mu_n}(\lambda; x))^2$$

fast überall konvergiert, also gilt fast überall

$$s_{\mu_n}(x) - V_{\mu_n}(\lambda; x) = o_x(l_{\mu_n}^{-1}). \tag{1. 6}$$

Ähnlich kann man mit einfacher Rechnung einsehen, daß

$$\sum_{n=2}^{\infty} l_n^2 \lambda_n \int_a^b (V_n(\lambda; x) - V_{n-1}(\lambda; x))^2 \, dx \leqq \tag{1. 7}$$

$$\leqq \sum_{n=2}^{\infty} l_n^2 \sum_{k=n-\lambda_{n-1}+1}^{n-1} \frac{(\lambda_{n-1} + (n-k)(\lambda_{n-1} - \lambda_n))^2 c_k^2}{\lambda_n \lambda_{n-1}^2} + O(1)$$

ist. Ist $\lambda_n \not\equiv 1$, dann definieren wir eine Indexfolge $\{m_i\}$. Sei $m_1 = 1$. Ist $l \geqq 1$, dann bedeutet m_{2l} die größte natürliche Zahl n, für die $\lambda_n = \lambda_{m_{2l-1}}$ ist, m_{2l+1} die größte natürliche Zahl n, für welche die Ungleichungen $n > m_{2l}$ und $\lambda_n > \lambda_{n-1}$ bestehen.[2] Wir können die Summe (1. 7) in zwei Summen zerlegen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} l_n^2 \sum_{k=n-\lambda_{n-1}+1}^{n-1} \gamma_{k,n} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=m_{2l-1}+1}^{m_{2l}} l_n^2 \sum_{k=n-\lambda_{n-1}+1}^{n-1} \gamma_{k,n} + \tag{1. 8}$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=m_{2l}+1}^{m_{2l+1}} l_n^2 \sum_{k=n-\lambda_{n-1}+1}^{n-1} \gamma_{k,n} \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

[2] Ist die Folge $\{\lambda_n\}$ von irgendwo konstant bzw. wachsend, dann ist m_{2l} bzw. m_{2l+1} unendlich.

wobei

$$\gamma_{k,n}=\lambda_n^{-1}\lambda_{n-1}^{-2}c_k^2\big(\lambda_{n-1}+(n-k)(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\big)^2.$$

Die erste Summe können wir folgenderweise abschätzen:

$$\sum_1 \leqq \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=m_{2l-1}+1}^{m_{2l}} l_n^2 \sum_{k=n-\lambda_{m_{2l}}+1}^{n-1}\lambda_n^{-1}c_k^2.$$

Bezeichne $\{n_i(k)\}$ $(1\leqq i\leqq\lambda_k)$ die Indizes n, für die der Koeffizient c_k^2 mit l_n^2/λ_n multipliziert wird, dann ist

$$\sum_1 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \sum_{i=1}^{\lambda_k} l_{n_i(k)}^2 \lambda_{n_i(k)}^{-1}. \tag{1.9}$$

Da die Ungleichung $n_i(k)-\lambda_{n_i(k)}+1\leqq k$ besteht, gilt auch $r-\lambda_r<k$ für jede $r\leqq n_i(k)$ wegen der Monotonie der Folge $\{n-\lambda_n\}$. Mit einfacher Rechnung ergibt sich im Falle $\mu_l<k\leqq\mu_{l+1}$ und $\mu_{l+p_i}<n_i(k)\leqq\mu_{l+p_i+1}$ für $2\leqq j\leqq p_i$

$$\lambda_{\mu_{l+j}}\geqq\mu_{l+j}-k\geqq\mu_{l+j}-\mu_{l+1}=\sum_{k=l+1}^{l+j-1}\lambda_{\mu_k}.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\lambda_{\mu_{l+j}}\geqq 2^{j-2}\lambda_{\mu_{l+1}}$$

für $2\leqq j\leqq p_i$. Dann ist nach der Bedingung bezüglich $\{l_n\}$

$$\frac{l_{n_i(k)}^2}{\lambda_{n_i(k)}}\leqq\frac{l_{n_i(k)}^2}{\lambda_{\mu_{l+p_i}}}\leqq\frac{l_k^2c^{2(p_i+1)}}{\lambda_k 2^{p_i-2}}\leqq 8\frac{l_k^2}{\lambda_k}.$$

Daraus und aus (1.9) folgt nach (1.1)

$$\sum_1 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \sum_{i=1}^{\lambda_k} 8\frac{l_k^2}{\lambda_k}=8\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2 l_k^2<\infty. \tag{1.10}$$

Ist $m_{2l}<n\leqq m_{2l+1}$, dann gilt die Darstellung

$$\lambda_n=n-\sum_{k=1}^{l}(m_{2k}-m_{2k-1})=n-B_l$$

nach der Definition von $\{\lambda_n\}$ und $\{m_i\}$. Danach können wir die zweite Summe in (1.8) folgenderweise abschätzen:

$$\sum_2 \leqq \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=m_{2l}+1}^{m_{2l+1}} l_n^2 \sum_{k=n-\lambda_{n-1}+1}^{n-1}\frac{(n-1-B_l+k-n)^2}{(n-1-B_l)^3}c_k^2 \leqq \tag{1.11}$$

$$\leqq 2^5\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=m_{2l}+1}^{m_{2l+1}} l_n^2 \sum_{k=n-\lambda_{n-1}+1}^{n-1}\frac{(k-B_l)^2c_k^2}{(n-B_l)^3}\leqq 2^5\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=m_{2l}+1}^{m_{2l+1}} l_n^2 \sum_{k=B_l+1}^{n}\frac{(k-B_l)^2c_k^2}{(n-B_l)^3}\leqq$$

$$\leqq 2^5\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=m_{2l-1}+1}^{m_{2l+1}} c_k^2\sum_{v=l}^{\infty}\sum_{n=\max(k,m_{2v}+1)}^{m_{2v+1}}\frac{((k-B_v)^+)^2l_n^2}{(n-B_v)^3}.$$

Bezeichne $N_k = \max(k, m_{2l}+1)$. Da $N_k - B_l = \lambda_{N_k}$ gilt, können wir die folgende Abschätzung herleiten:

$$\sum_{\nu=l}^{\infty} \sum_{n=\max(k,\, m_{2\nu}+1)}^{m_{2\nu+1}} \frac{((k-B_\nu)^+)^2 l_n^2}{(n-B_\nu)^3} \leqq$$

$$\leqq ((k-B_l)^+)^2 \left(\sum_{n=N_k}^{N_k+\lambda_{N_k}} \frac{c^8 l_{N_k}^2}{(n-B_l)^3} + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=N_k+2^r\lambda_{N_k}+1}^{N_k+2^{r+1}\lambda_{N_k}} \frac{c^{2(r+4)} l_{N_k}^2}{(n-B_l)^3} \right) \leqq$$

$$\leqq ((k-B_l)^+)^2 l_{N_k}^2 \left(\lambda_{N_k}^{-2} c^8 + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c^{2(r+4)}}{2^{2r}\lambda_{N_k}^2} \right) \leqq$$

$$\leqq ((k-B_l)^+)^2 \lambda_{N_k}^{-2} c^4 l_k^2 \left(c^8 + \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-2r} c^{2(r+4)} \right) = O(l_k^2).$$

Daraus und aus (1. 11) ergibt sich auch $\Sigma_2 < \infty$ wegen (1. 1). Somit bekommen wir aus (1. 7) nach dem Satz von B. LEVI, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 \lambda_n (V_n(\lambda; x) - V_{n-1}(\lambda; x))^2 < \infty$$

in (a, b) fast überall gilt, und so besteht

$$\sum_{k=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} l_k^2 \lambda_k (V_k(\lambda; x) - V_{k-1}(\lambda; x))^2 = o_x(1) \tag{1.12}$$

fast überall.

Sei $\mu_{n-1} < k \leqq \mu_n$. Dann ist nach (1. 12)

$$|V_k(\lambda; x) - V_{\mu_{n-1}}(\lambda; x)| = \left| \sum_{m=\mu_{n-1}+1}^{k} V_m(\lambda; x) - V_{m-1}(\lambda; x) \right| \leqq \tag{1.13}$$

$$\leqq \left\{ \sum_{m=\mu_{n-1}+1}^{k} l_m^2 \lambda_m (V_m(\lambda; x) - V_{m-1}(\lambda; x))^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{m=\mu_{n-1}+1}^{k} \frac{1}{l_m^2 \lambda_m} \right\}^{1/2} = o_x(l_k^{-1})$$

fast überall.

Auf Grund von (1. 6) und (1. 13) ergibt sich die Relation (1. 2), wie wir es behauptet haben.

HILFSSATZ II. *Sei* $\{p_m\}$ *eine Indexfolge:* $(1 \leqq) p_1 < p_2 < \ldots < p_m < \ldots$. *Gelten*

$$\gamma_n \leqq \gamma_{n+1} \quad \textit{und} \quad \sum_{k=0}^{n} \gamma_{\mu_k}^2 = O(\gamma_{\mu_n}^2), \tag{1.14}$$

dann folgt aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \gamma_n^2 < \infty, \tag{1.15}$$

daß die Partialsummen $s_{\mu_n}(x)$ *der Reihe* (1) *die Funktion* $f(x)$ *in* (a, b) *fast überall*

mit dem Annäherungsgrad

$$s_{\mu_n}(x)-f(x)=o_x(\gamma_{\mu_n}^{-1}) \tag{1.16}$$

approximieren.

BEWEIS. Nach (1. 14) und (1. 15) gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{\mu_n}^2\int_a^b(s_{\mu_n}(x)-f(x))^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{\mu_n}^2\sum_{m=n}^{\infty}\sum_{k=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}}c_k^2=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}}c_k^2\sum_{n=0}^{m}\gamma_{\mu_n}^2=O(1)\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_{\mu_m}^2\sum_{k=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}}c_k^2<\infty.$$

Nach dem B. Levischen Satz konvergiert die integrierte Reihe in (a, b) fast überall, daher besteht (1. 16) fast überall, w. z. b. w.

HILFSSATZ III ([5], Hilfssatz I). *Sei* $\{p_m\}$ *eine Indexfolge:* $(1\leqq)p_1<p_2<\ldots$ $\ldots<p_m<\ldots$. *Sind* $\{u_n\}$ *eine beliebige, und* $\{v_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit* $v_{p_m+1}=\ldots=v_{p_{m+1}}$ $(m=1, 2, \ldots)$, *so folgt aus der Konvergenz der* p_m*-ten Partialsummen der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ *die Konvergenz der* p_m*-ten Partialsummen* s_{p_m} *der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *und es gilt für* $s=\lim_{m\to\infty}s_{p_m}$ *die Beziehung*

$$|s_{p_m}-s|=o(v_{p_{m+1}}^{-1}).$$

HILFSSATZ IV. ([5], Hilfssatz III). *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz* III *und der ergänzenden Voraussetzung* $v_n\to\infty$ *folgt aus der Konvergenz der* p_m*-ten Partialsummen der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n^{-1}$ *die Abschätzung* $\sum_{n=1}^{p_m}u_n=o(v_{p_m})$.

HILFSSATZ V ([6]). *Ist für die Menge* $E\subset[0, 1]$ $\mu(E)>0$, *dann gibt es eine natürliche Zahl* $N=N(E)$ *und eine reelle Zahl* $A=A(E)$ *derart, daß*

$$\int_E\left|\sum_{k=\nu}^{\mu}\varrho_kr_k(x)\right|dx\geqq A\left(\sum_{k=\nu}^{\mu}\varrho_k^2\right)^{1/2}$$

für jedes $\{\varrho_k\}$ *und für jede* $\mu\geqq\nu\geqq N$ *gilt.*

§ 2. Beweis der Sätze

BEWEIS DES SATZES I. Aus dem Hilfssatz I mit $l_n\equiv1$ ergibt sich die Behauptung des Satzes I unmittelbar.

BEWEIS DES SATZES III. Die Behauptung des Satzes III ergibt sich aus dem Satz I und aus dem folgenden Ergebnis von [2]: *Unter den Bedingungen des Satzes* III *gibt es ein gleichmäßig beschränktes Orthonormalsystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *derart, daß die* μ_n*-ten Partialsummen der Reihe* (4) *fast überall divergieren.*

BEWEIS DES SATZES IV. Sei $v_k = \varrho_{\mu_n}/\gamma_{p_n}$ für $\mu_{n-1} < k \leqq \mu_n$. Auf Grund der Bedingungen (6) besteht

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 v_k^{-2} \varrho_k^2 \leqq \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \frac{\gamma_k^2}{\varrho_k^2} \varrho_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \gamma_k^2 < \infty,$$

also ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k^{-1} \varphi_k(x) \tag{2.1}$$

auf der Menge E (V, λ)-summierbar, d. h. die μ_n-ten Partialsummen der Reihe (2. 1) konvergieren. Durch Anwendung des Hilfssatzes IV ergibt sich

$$s_{\mu_n}(x) = o_x(v_{\mu_n}) = o_x\left(\frac{\varrho_{\mu_n}}{\gamma_{\mu_n}}\right) \tag{2.2}$$

auf E fast überall. Aus dem Hilfssatz I mit $l_n = \gamma_n/\varrho_n$ folgt

$$V_k(\lambda; x) - s_{\mu_{n-1}}(x) = o_x\left(\frac{\varrho_k}{\gamma_k}\right) \tag{2.3}$$

für jede n und k mit $\mu_{n-1} < k \leqq \mu_n$ auf E fast überall. Aus (2. 2) und (2. 3) ergibt sich die Abschätzung (7).

Damit haben wir den Satz IV bewiesen.

BEWEIS DES SATZES V. Sei $\tilde{l}_k = l_{\mu_n}$ für $\mu_n < k \leqq \mu_{n+1}$. Nach (8) ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{l}_n \varphi_n(x) \tag{2.4}$$

auf der Menge E fast überall (V, λ)-summierbar; d. h. die μ_n-ten Partialsummen von (2. 4) konvergieren nach dem Satz I auf E fast überall. Dann wenden wir für die Reihe (2. 4) den Hilfssatz III an, so ergibt sich nach (8) auf E fast überall

$$s_{\mu_n}(x) - f(x) = o_x(\tilde{l}_{\mu_{n+1}}^{-1}) = o_x(l_{\mu_n}^{-1}). \tag{2.5}$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes I bekommen wir, daß

$$V_k(\lambda; x) - s_{\mu_{n-1}}(x) = o_x(l_k^{-1}) \tag{2.6}$$

für jedes n und k mit $\mu_{n-1} < k \leqq \mu_n$ in (a, b) fast überall gilt. Aus den Abschätzung (2. 5) und (2. 6) folgt die Behauptung (9) nach (8), womit der Satz V bewiesen ist.

BEWEIS DES SATZES VI. Nach (10) kann man den Hilfssatz II anwenden, daher gilt die Abschätzung

$$s_{\mu_n}(x) - f(x) = o_x(l_{\mu_n}^{-1})$$

in (a, b) fast überall. Auf Grund der Bedingung (11) kann man den Hilfssatz I anwenden und so bekommen wir die Abschätzung

$$V_k(\lambda; x) - s_{\mu_{n-1}}(x) = o_x(l_k^{-1})$$

für jede n und k mit $\mu_{n-1} < k \leqq \mu_n$ in (a, b) fast überall.

Aus den Obigen folgt die Behauptung des Satzes VI.

BEWEIS DES SATZES VII. Die Bedingung (2) sichert die Konvergenz der Folge $\{s_{\mu_n}(x)\}$ fast überall gegen eine quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$. Es sei $m\ (\geqq 2)$ eine beliebige natürliche Zahl, für die $C_m \neq 0$ ist. Dann sei $\nu_0(m)=\mu_m$ und $\nu_i(m)$ $(1 \leqq i \leqq N_m)$ die kleinste natürliche Zahl, für die die Ungleichungen

$$\sum_{n=\nu_{i-1}(m)+1}^{\nu_i(m)} c_n^2 \geqq \frac{C_m^2}{m+1} \quad \text{und} \quad \nu_i(m) \leqq \mu_{m+1}$$

bestehen. Offensichtlich gilt $N_m \leqq m+1$. Es seien

$$\psi_i^{(m)}(x) = s_{\nu_i(m)}(x) - s_{\nu_{i-1}(m)}(x) \qquad (1 \leqq i \leqq N_m).$$

Nach dem wohl bekannten Lemma von MENCHOFF und RADEMACHER existieren nichtnegative Funktionen $\delta_m(x)$, für die

$$|s_{\nu_i(m)} - s_{\mu_m}(x)| = \left| \sum_{j=1}^{i} \psi_j^{(m)}(x) \right| \leqq \delta_m(x) \qquad (1 \leqq i \leqq N_m) \tag{2.7}$$

in (a, b) überall gilt und

$$\int_a^b \delta_m^2(x)\,dx \leqq A \log^2 N_m \sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} c_n^2 \leqq A_1 \log^2 m \sum_{n=m_m+1}^{\mu_{m+1}} c_n^2$$

st. Daraus folgt nach (2), daß

$$\sum_{m=2}^{\infty} \int_a^b \delta_m^2(x)\,dx < \infty$$

ist, somit konvergiert die Reihe $\sum_{m=2}^{\infty} \delta_m^2(x)$ fast überall, also gilt nach (2. 7)

$$s_{\nu_i(m)}(x) - s_{\mu_m}(x) \to 0$$

fast überall, d. h. auch $s_{\nu_i(m)}(x)$ $(m \to \infty)$ konvergiert in (a, b) fast überall gegen die Funktion $f(x)$. Wir definieren nun eine Indexfolge $\{\bar{\nu}_n\}$ folgenderweise: Ist $\nu_i(m) \leqq \nu_n < \nu_{i+1}(m)$, so sei $\bar{\nu}_n = \nu_i(m)$, ist $\nu_{N_m}(m) \leqq \nu_n < \nu_0(m+1)$, so sei $\bar{\nu}_n = \nu_{N_m}(m)$. Offenbar gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{\lambda_m} \sum_{n=m-\lambda_m+1}^{m} (s_{\nu_n}(x) - f(x))^2 \leqq \tag{2.8}$$

$$\leqq \frac{2}{\lambda_m} \sum_{n=m-\lambda_m+1}^{m} (s_{\nu_n}(x) - s_{\bar{\nu}_n}(x))^2 + \frac{2}{\lambda_m} \sum_{n=m-\lambda_m+1}^{m} (s_{\bar{\nu}_n}(x) - f(x))^2.$$

Da nach dem Obigen $s_{\bar{\nu}_n}(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ fast überall gilt, konvergiert das zweite

Glied fast überall gegen 0. Mit einfacher Rechnung erhalten wir [3]

$$\sum_{n=\mu_1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b (s_{\nu_n}(x)-s_{\bar{\nu}_n}(x))^2dx=\sum_{n=\mu_1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=\bar{\nu}_n+1}^{\nu_n}c_k^2\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu_m\leqq\nu_n<\mu_{m+1}}^{(n)}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=\bar{\nu}_n+1}^{\nu_n}c_k^2\leqq$$

$$\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu_m\leqq\nu_n<\mu_{m+1}}^{(n)}\frac{1}{\lambda_n}\right)\frac{C_m^2}{m+1}\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\mu_{m+1}-1}\frac{1}{\lambda_n}\right)\frac{C_m^2}{m+1}\leqq$$

$$\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_m^2}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{n=\mu_{k-1}}^{\mu_k-1}\frac{1}{\lambda_n}=$$

$$=O(1)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_m^2}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\lambda_{\mu_{k-1}}}(\mu_k-\mu_{k-1})=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}C_m^2<\infty.$$

Daraus folgt auf Grund des Satzes von B. LEVI, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}(s_{\nu_n}(x)-s_{\bar{\nu}_n}(x))^2$$

fast überall konvergiert. Mit Anwendung des Kroneckerschen Lemmas (siehe z. B. [1], S. 68) ergibt sich, daß

$$\frac{1}{\lambda_m}\sum_{n=1}^{m}(s_{\nu_n}(x)-s_{\bar{\nu}_n}(x))^2\to 0$$

fast überall gilt. Daraus folgt die Behauptung (12) des Satzes VII nach (2. 8).

BEWEIS DES SATZES VIII. *Hinlänglichkeit.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $c_0=c_1=0$ angenommen werden. Mit einfacher Rechnung ergibt sich

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_a^b|V_{n+1}(\lambda;x)-V_n(\lambda;x)|\,dx=$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left\{\sum_{k=n-\lambda_n+2}^{n+1}[(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(k-n-1)+\lambda_n]^2c_k^2\right\}^{1/2}\equiv\Sigma_1.$$

Bezeichne l_n die größte natürliche Zahl, für die $\mu_{l_n}\leqq n-\lambda_n+1$ ist und m_n die kleinste natürliche Zahl, für die $\mu_{m_n}\geqq n$ gilt. Wenn $\mu_l<k\leqq\mu_{l+1}$ $(l_n\leqq l\leqq m_n-1)$ ist, gilt $k-n-1+\lambda_n\leqq 2\lambda_{\mu_l}$, somit können wir die obige Abschätzung fortsetzen:

$$\Sigma_1=O(1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\sum_{l=l_n}^{m_n-1}\left\{\sum_{k=\mu_l+1}^{\mu_{l+1}}\lambda_{\mu_l}^2c_k^2\right\}^{1/2}\equiv\Sigma_2.$$

Bezeichne n_l, die größte natürliche Zahl, für die $n_l-\lambda_{n_l}+2<\mu_{l+1}$ ist, und bezeichne k_l jene natürliche Zahl, für die $\mu_{k_l-1}\leqq n_l<\mu_{k_l}$ gilt. Wenn es solche größte natür-

[3] $\Sigma^{(n)}$ bedeutet, daß man in bezug auf n zu summieren hat.

liche Zahl n_l nicht gibt, so setzen wir $n_l=\infty$ und $k_l=\infty$. Dann ist

$$\sum_2 = O(1)\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_{\mu_l}C_l\sum_{k=l}^{k_l-1}\sum_{n=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}}\frac{1}{\lambda_n^2} = O(1)\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_{\mu_l}C_l\sum_{k=l}^{k_l-1}\frac{1}{\lambda_{\mu_k}} \equiv \sum_3 .$$

Da die Ungleichung $\mu_k-\lambda_{\mu_k}<\mu_{l+1}$ für $l+2\leqq k\leqq k_l-1$ besteht, gilt auch die Ungleichung $2^{k-l-2}\lambda_{\mu_{l+1}}\leqq\lambda_{\mu_k}$ auf Grund der Definition von $\{\mu_k\}$. Also ist nach (13)

$$\sum_3 = O(1)\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_{\mu_l}C_l\frac{1}{\lambda_{\mu_l}}<\infty,$$

womit wir auf Grund des B. Levischen Satzes, nach den Vorangehenden, die Hinlänglichkeit bewiesen haben.

Notwendigkeit. Ist die Reihe (14) in $(0, 1)$ fast überall $|V, \lambda|$-summierbar, dann gibt es nach dem Satz von EGOROFF eine Konstante M und eine meßbare Menge $G(\subset(0,1))$ mit $\mu(G)>1-\varepsilon$, so daß

$$\sum_{n=2}^{\infty}|V_{n+1}(\lambda;x)-V_n(\lambda;x)|<M \qquad (x\in G) \tag{2.9}$$

besteht. Durch Anwendung des Hilfssatzes V ergibt sich aus (2. 9)

$$M\mu(G)\geqq\sum_{n=2}^{\infty}\int_G|V_{n+1}(\lambda;x)-V_n(\lambda;x)|\,dx\geqq \tag{2.10}$$

$$\geqq\frac{A}{4}\sum_{n=2N(G)}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left\{\sum_{k=n-\lambda_n+2}^{n+1}((\lambda_{n+1}-\lambda_n)(k-n-1)+\lambda_n)^2c_k^2\right\}^{1/2}\geqq$$

$$\geqq\frac{A}{16}\sum_{n=2N(G)}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{k\geqq n-\frac{3}{4}\lambda_n}^{n+1}c_k^2\right\}^{1/2}.$$

Da $n+2\geqq\left(n+\frac{3}{4}\lambda_n+1\right)-\frac{3}{4}\lambda_{(n+\frac{3}{4}\lambda_n)}$ ist, folgt aus (2. 10)

$$\sum_{n=2N}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{n+\frac{3}{4}\lambda_n}}\left\{\sum_{k=n+2}^{n+\frac{3}{4}\lambda_n}c_k^2\right\}<M.$$

Daraus und aus (2. 10) erhalten wir

$$\sum_{n=2N}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{k=n-\frac{3}{4}\lambda_n}^{n+\frac{3}{4}\lambda_n}c_k^2\right\}^{1/2}\equiv\sum_4<\infty. \tag{2.11}$$

Offensichtlich gilt

$$\sum_{l=2N}^{\infty}\sum_{n=\mu_l+\frac{1}{4}\lambda_{\mu_l}}^{\mu_l+\frac{3}{4}\lambda_{\mu_l}}\frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{k=n-\frac{3}{4}\lambda_n}^{n+\frac{3}{4}\lambda_n}c_k^2\right\}^{1/2}\equiv\sum_5\leqq\sum_4. \tag{2.12}$$

Ist $\mu_l+\frac{1}{4}\lambda_{\mu_l}\leqq n\leqq\mu_l+\frac{3}{4}\lambda_{\mu_l}$, dann sind $n+\frac{3}{4}\lambda_n\geqq\mu_l+\frac{1}{4}\lambda_{\mu_l}+\frac{3}{4}\lambda_{\mu_l}=\mu_{l+1}$

und $n-\frac{3}{4}\lambda_n \leqq \mu_l+\frac{3}{4}\lambda_{\mu_l}-\frac{3}{4}\lambda_{(\mu_l+\frac{3}{4}\lambda_{\mu_l})} \leqq \mu_l$, somit gilt die Ungleichung

$$(2.13)\quad \sum_5 \geqq \sum_{l=2N}^{\infty} \sum_{n=\mu_l+\frac{1}{4}\lambda_{\mu_l}}^{\mu_l+\frac{3}{4}\lambda_{\mu_l}} \frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{k=\mu_l+1}^{\mu_{l+1}} c_k^2\right\}^{1/2} \geqq \frac{1}{4}\sum_{l=2N}^{\infty}\sum_{n=\mu_l+1}^{\mu_{l+1}} \frac{1}{\lambda_n} C_l \geqq \frac{1}{8}\sum_{l=2N}^{\infty} C_l.$$

Aus (2. 11), (2. 12) und (2. 13) ergibt sich

$$\sum_{l=1}^{\infty} C_l < \infty.$$

Damit haben wir den Satz VIII vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 7. Januar 1965.)

Schriftenverzeichnis

[1] G. ALEXITS, *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Budapest, 1960).
[2] L. CSERNYÁK—L. LEINDLER, Über die Konvergenz der Partialsummen der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **27** (1966).
[3] S. KACZMARZ, Über die Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **96** (1925), S. 148—151.
[4] L. LEINDLER, Über die starke Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), S. 82—91.
[5] L. LEINDLER, Über die Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), S. 129—138.
[6] W. ORLICZ, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, *Studia Math.*, **6** (1936), S. 20—38.

ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ ЛАГРАНЖЕВА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

О. КИШ (Будапешт) и Й. САБАДОШ (Будапешт)

(Представлено П. Тураном)

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Обозначения. Обозначим через C множество вещественных функций, непрерывных на отрезке $[-1, +1]$. Если $f(x) \in C$, то ее норма определяется равенством

$$\|f(x)\| = \max_{-1 \leqq x \leqq +1} |f(x)|,$$

а модуль непрерывности — формулой

$$\omega(f, t) = \max_{\substack{-1 \leqq x+h \leqq +1 \\ h \leqq t}} |f(x+h) - f(x)| \qquad (0 \leqq t \leqq 2).$$

Пусть $\omega(t)$ есть модуль непрерывности любой фиксированной непостоянной функции из C. Обозначим через $C(\omega)$ множество тех функций $f(x)$ из C, для которых зависящее лишь от $f(x)$ положительное число $a(f)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\omega(f, t) \leqq a(f)\omega(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2).$$

Эти множества функций изучались С. М. Лозинским в работе [1]. (Числа, стоящие в квадратных скобках, относятся к списку литературы, цитируемой в конце статьи.)

Обозначим через X бесконечную треугольную матрицу вещественных чисел

$$\begin{gathered} x_{00} \\ x_{01}, x_{11} \\ x_{02}, x_{12}, x_{22} \\ \cdots\cdots\cdots, \end{gathered}$$

удовлетворяющих неравенствам

$$-1 \leqq x_{kn} \leqq +1 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$x_{in} \neq x_{kn} \qquad (0 \leqq i < k \leqq n,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Фундаментальные многочлены Лагранжева интерполирования, соответствующие узлам X, определяются равенством

$$l_{kn}(X, x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_{in}}{x_{kn} - x_{in}} \qquad (0 \leqq k \leqq n,\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

а постоянные Лебега — формулой

$$\lambda_n(X)=\max_{-1\leqq x\leqq +1}\sum_{k=0}^{n}|l_{kn}(X,x)| \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Наконец, интерполяционный многочлен Лагранжа n-той степени, соответствующий узлам X и функции $f(x)\in C(\omega)$

$$L_n(f,X,x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_{kn})l_{kn}(X,x) \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

2. Теоремы С. М. Лозинского. Хорошо известна следующая теорема: если функция $f(x)$ из C и матрица узлов X таковы, что

$$\lim_{n\to\infty}\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\lambda_n(X)=0,$$

то последовательность интерполяционных многочленов $L_n(f,X,x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[-1,+1]$. Поэтому имеет место следующий результат работы [1]:

Теорема 1 С. М. Лозинского. *Если модуль непрерывности $\omega(t)$ и матрица узлов X таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n(X)=0, \tag{1.2.1}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-L_n(f,X,x)\|=0, \tag{1.2.2}$$

для любой функции $f(x)$ из $C(\omega)$.

Является ли достаточное условие (1. 2. 1) необходимым для того, чтобы (1. 2. 2) выполнялось для всех функций $f(x)$ из $C(\omega)$? На этот вопрос отвечают следующие результаты С. М. Лозинского, опубликованные без доказательства в работе [1]:

Теорема 2 С. М. Лозинского. *Если $\omega(t)$ удовлетворяет хотя бы одному из условий*

$$\limsup_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n>0, \tag{1.2.3}$$

$$\liminf_{t\to 0}\frac{\omega(t^2)}{\omega(t)}>0, \tag{1.2.4}$$

и матрица узлов X такова, что

$$\limsup_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n(X)>0, \tag{1.2.5}$$

то для некоторой функции $f(x)$ *из* $C(\omega)$

$$\limsup_{n\to\infty} \|f(x)-L_n(f, X, x)\|>0. \tag{1.2.6}$$

Теорема 3 С. М. Лозинского. *Пусть ни условие* (1. 2. 3), *ни условие* (1. 2. 4) *не выполняется. Тогда найдутся матрицы узлов* X *и* Y *такие, что*

$$\lambda_n(X)=\lambda_n(Y) \qquad (n=0, 1. 2, \ldots), \tag{1.2.7}$$

(1. 2. 2) *выполняется для всех* $f(x)$ *из* $C(\omega)$, *существует функция* $f(x)$ *из* $C(\omega)$, *для которой*

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(f, Y, x)\|=\infty. \tag{1.2.8}$$

Таким образом, если условие (1. 2. 3) или (1. 2. 4) выполняется, то (1. 2. 1) необходимо и достаточно для выполнения (1. 2. 2) для всех функций $f(x)$ из $C(\omega)$, а если (1. 2. 3) и (1. 2. 4) не выполняется, то ни условие (1. 2. 1), ни любое другое условие, выраженное только через $\omega(t)$ и $\lambda_n(X)$, не является одновременно необходимым и достаточным для того, чтобы соотношение (1. 2. 2) выполнялось для всех $f(x)$ из $C(\omega)$.

3. Теоремы П. Эрдёша и П. Турана. Пусть условия (1. 2. 3) и (1. 2. 4) не выполняются. Нельзя ли ослабить условие (1. 2. 1), достаточное для выполнения соотношения (1. 2. 2) для всех функций $f(x)$ из $C(\omega)$?

В том случае, когда

$$\omega(t)=t^{\alpha} \qquad (0<\alpha<1), \tag{1.3.1}$$

т. е. $C(\omega)$ совпадает с множеством функций Lip α, и условие (1. 2. 1) можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(X)n^{-\alpha}=0, \tag{1.3.2}$$

это условие не может быть существенно ослабленно, так как имеет место доказанная в работе [2] следующая

Теорема 1 П. Эрдёша и П. Турана. *Пусть* $0<\beta<1$. *Обозначим через* $M(\beta)$ *множество тех матриц узлов* X, *для которых при любом* $\varepsilon>0$ *существуют положительные числа* $b(\varepsilon)$ *и* $c(\varepsilon)$, *с которыми выполняются неравенства*

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n(X)n^{-\beta-\varepsilon}<b(\varepsilon),$$

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n(X)n^{-\beta+\varepsilon}>c(\varepsilon).$$

Если $\alpha<\beta$, *то существует такая матрица* Y *из* $M(\beta)$ *и такая функция* $f(x)$ *из* Lip α, *для которых имеет место* (1. 2. 8).

В работе [2] доказанны также следующие результаты:

Теорема 2 П. Эрдёша и П. Турана. *Если* $\alpha<\dfrac{\beta}{\beta+2}$ *и* $Y\in M(\beta)$, *то в* Lip α *есть функция* $f(x)$, *для которой выполняется соотношение* (1. 2. 8).

Теорема 3 П. Эрдёша и П. Турана. *Если* $\frac{\beta}{2+\beta}<\alpha$, *то существует матрица узлов* X *из* $M(\beta)$, *для которой соотношение* (1. 2. 2) *выполняется при любой функции* $f(x)$ *из* Lip α.

Мы видим, что для узлов X из $M(\beta)$ выполнения условия $\alpha \geqq \frac{\beta}{\beta+2}$ необходимо для выполнения соотношения (1. 2. 2) при любых $f(x)$ из Lip α и это условие нельзя заменить более сильным условием $\alpha > \frac{\beta}{\beta+2}$.

4. Результаты, доказанные в настоящей работе. Ниже мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Если модуль непрерывности* $\omega(t)$ *и матрица узлов* X *таковы, что*

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left[\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right]\lambda_n(X)>0,$$

то существует функция $f(x)$ *из* $C(\omega)$, *для которой*

$$\limsup_{n\to\infty} \|f(x)-L_n(f, X, x)\|>0. \tag{1. 4. 1}$$

Теорема 2. *Если*

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left[\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right]\lambda_n(X)=\infty,$$

то для некоторой $f(x)$ *из* $C(\omega)$

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(f, X, x)\|=\infty. \tag{1. 4. 2}$$

Теорема 3. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left[\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right]\lambda_n(X)=0, \tag{1. 4. 3}$$

то существует матрица узлов Y *такая, что*

$$\lambda_n(X)=\lambda_n(Y) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{1. 4. 4}$$

и для любой функции $f(x)$ *из* $C(\omega)$

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x)-L_n(f, Y, x)\|=0. \tag{1. 4. 5}$$

Теорема 4. *Если множество* $C(\omega)$ *не совпадает с* Lip 1 *и*

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n(X)>0,$$

то существует матрица узлов Y *и функция* $f(x)$ *из* $C(\omega)$ *такие, что вы-*

полняется равенство (1. 4. 4) *и*

$$\limsup_{n\to\infty} \|f(x)-L_n(f, Y, x)\|>0. \tag{1.4.6}$$

Теорема 5. *Существует матрица узлов* Y *и функция* $f(x)$ *из* Lip 1 *такие, что выполняется* (1. 4. 6) *и*

$$\lambda_n(Y)=O(n) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Теорема 6. *Если*

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n(X)=\infty,$$

то существует матрица Y *и функция* $f(x)$ *из* $C(\omega)$ *такие, что выполняется равенство* (1. 4. 4) *и*

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(f, Y, x)\|=\infty. \tag{1.4.7}$$

Теоремы 4 и 5 показывают, что условие (1. 2. 1), достаточное для выполнения (1. 2. 2), если $f(x)\in C(\omega)$, не может быть ослаблено. В силу теоремы 1 условие (1. 4. 3) необходимо для выполнения (1. 2. 2), если $f(x)\in C(\omega)$. Ввиду теоремы 3 необходимое условие (1. 4. 3) не может быть усилено.

5. Следствия теорем 1—6. Ниже мы покажем, что *теорема* 2 С. М. Лозинского *является следствием теоремы* 1, *а теорема* 3 С. М. Лозинского *следует из теорем* 3 *и* 6.

В том случае, когда

$$\omega(t)=t^{\alpha} \qquad (0<\alpha\leqq 1),$$

теоремы 1—6 могут быть сформулированы следующим образом: Если $\alpha<1$ и

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n(X)n^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}}>0,$$

то в множестве функций Lip α существует функция $f(x)$, для которой выполняется неравенство (1. 4. 1). Если $\alpha<1$ и

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n(X)n^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}}=\infty, \tag{1.5.1}$$

то функцию $f(x)$ из Lip α можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношеи (1. 4. 2). Если $\alpha=1$, или $\alpha<1$ и

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(X)n^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}}=0, \tag{1.5.2}$$

то существует матрица Y такая, что выполняется равенство (1. 4. 4) и для любой $f(x)$ из Lip α имеет место (1. 4. 5). Если $\alpha<1$ и

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n(X)n^{-\alpha}>0,$$

то Y и $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ можно выбрать так, чтобы имели место (1. 4. 4) и (1. 4. 6). Если

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n(X) n^{-\alpha} = \infty, \tag{1. 5. 3}$$

то существует Y и $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, для которых выполняется (1. 4. 4) и (1. 4. 7).

Если $X\in M(\beta)$ и $\alpha<\beta$, $\alpha<\dfrac{\beta}{2+\beta}$ $\left(\text{т. е. } \beta>\dfrac{2\alpha}{1-\alpha}\right)$ или $1>\alpha>\dfrac{\beta}{2+\beta}$ $\left(\text{т. е. } \beta<\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)$, то (1. 5. 3), (1. 5. 1) и (1. 5. 2) соответственно выполняются, поэтому *теоремы* 1—3 П. Эрдёша и П. Турана *являются следствиями теорем* 6, 2 *и* 3.

Рассмотрим теперь случай

$$\omega(t)=\begin{cases} |\ln n|^{-\alpha}, & \text{если} \quad 0<t\leqq e^{-\alpha} \\ \alpha^{-\alpha}, & \text{если} \quad e^{-\alpha}<t\leqq 2 \end{cases} \qquad (\alpha>0).$$

Эта функция непрерывна, монотонно возрастает, $\lim\limits_{t\to 0}\omega(t)=0$, частное $\dfrac{\omega(t)}{t}$ монотонно убывает (ибо производная от $\dfrac{t}{\omega(t)}$ неотрицательна). Поэтому $\omega(t)$ является модулем непрерывности самой себя (см. [3], стр. 109). Так как

$$\lim_{t=0}\frac{\omega(t^2)}{\omega(t)}=\lim_{t=0}\frac{|\ln t|^{\alpha}}{|2\ln t|^{\alpha}}=\frac{1}{2^{\alpha}}>0,$$

то по теореме 2 С. М. Лозинского условие

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n(X)(\ln n)^{-\alpha}=0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-L_n(f, X, x)\|=0 \tag{1. 5. 4}$$

выполнялось для всех функций $f(x)$ из множества $C(\omega)$.

Займемся, наконец, случаем

$$\omega(t)=\begin{cases} \exp\left(-|\ln t|^{\alpha}\right), & \text{если} \quad 0<t\leqq \exp\left(-\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) \\ \exp\left(-\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right), & \text{если} \quad \exp\left(-\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)<t\leqq 2 \end{cases} \qquad (0<\alpha<1).$$

Эта функция также является модулем непрерывности самой себя. Очевидно

$$\lim_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n=\lim_{n\to\infty}\exp\left[-(\ln n)^{\alpha}\right]\ln n=0,$$

$$\lim_{t=0}\frac{\omega(t^2)}{\omega(t)}=\lim_{t=0}\exp\left[|\ln t|^{\alpha}-(2|\ln t|^{\alpha})\right]=0$$

(заметим, что в случае тригонометрического интерполирования условие,

аналогичное условию (1. 2. 4), не выполняется лишь при $\alpha > \frac{1}{2}$; для тригонометрического интерполирования теоремы, аналогичные теоремам 1—6, были сформулированы в работах [4]—[6]). Если

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(X) \exp[-(\ln n)^\alpha] = 0,$$

то (1. 5. 4) имеет место для всех $f(x)$ из $C(\omega)$. Если

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n(X) \exp\{-[2\ln n + \ln \lambda_n(X)]^\alpha\} > 0,$$

т. е.

$$\limsup_{n\to\infty} \{[2\ln n + \ln \lambda_n(X)]^\alpha - \ln \lambda_n(X)\} < \infty, \tag{1. 5. 5}$$

то по теореме 1 для некоторой функции $f(x)$ из $C(\omega)$ имеет место (1. 4. 1). Условие (1. 5. 5) выполняется, например, если

$$\lambda_n(X) = \exp(2^\alpha + \varepsilon)(\ln n)^\alpha \qquad (\varepsilon > 0),$$

и не выполняется, например, если

$$\lambda_n(X) = \exp(2^\alpha - \varepsilon)(\ln n)^\alpha \qquad (\varepsilon > 0).$$

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

1. Определение функции $f(x)$. Фиксируем любую матрицу узлов X. В работе [2] доказано, что при $n \geqq 1$ расстояние между любой парой узлов x_{in} и x_{jn} не может быть меньше, чем

$$\frac{1}{n^2 \lambda_n(X)}. \tag{2. 1. 1}$$

Обозначим через z_n любую точку отрезка $[-1, +1]$, в которой функция Лебега

$$\sum_{i=0}^{n} |l_{in}(X, x)|$$

принимает свое наибольшее значение $\lambda_n(X)$.

Определим для каждого $n \geqq 0$ непрерывную функцию $g_n(x)$ следующим образом:

$$g_n(x_{in}) = \operatorname{sign} l_{in}(X, z_n) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$g_n(x)$ линейна между каждой парой соседних узлов x_{in} и x_{jn}, она постоянна вне наименьшего отрезка, содержащего все узлы x_{in}. Очевидно,

$$|g_n(x)| \leqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; \ -1 \leqq x \leqq +1), \tag{2. 1. 2}$$

$$L_n(g_n, X, z_n) = \sum_{i=0}^{n} l_{in}(X, z_n) g_n(x_{in}) = \sum_{i=0}^{n} |l_{in}(X, z_n)| = \lambda_n(X) \tag{2. 1. 3}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ввиду того, что расстояние между соседними узлами x_{in} и x_{jn} не меньше чем (2. 1. 1),

(2. 1. 4) $$|g_n(x+h)-g_n(x)| \leqq 2n^2\lambda_n(X)h \qquad (n=0, 1, 2, \ldots;\ -1 \leqq x \leqq +1).$$

Наконец, функции $g_n(x)$ принадлежат множеству Lip 1 и поэтому при любом модуле непрерывности $\omega(t)$

$$g_n(x) \in C(\omega) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

(Мы воспользовались соотношением

$$\mathrm{Lip}\, 1 \subset C(\omega).$$

Оно приведенно в [1] и следует при $T=2$ из легко доказываемого неравенства

(2. 1. 5) $$t \leqq \frac{2T}{\omega(T)}\omega(t) \qquad (0<t \leqq T \leqq 2)$$

(см., например, [3], стр. 111).)

Если для некоторого m

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(g_m, X, x)-g_m(x)\| > 0,$$

то теорема 1 доказана. Поэтому можно считать, что

(2. 1. 6) $$\lim_{n\to\infty} \|L_n(g_m, X, x)-g_m(x)\| = 0 \qquad (m=0, 1, 2, \ldots).$$

Фиксируем любой модуль непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющий условию

(2. 1. 7) $$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X) > 0.$$

Пусть положительное число α и возрастающая последовательность натуральных чисел n_i удовлетворяет следующим условиям:

(2. 1. 8) $$\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)\lambda_{n_i}(X) \geqq a \qquad (i=1, 2, 3, \ldots),$$

(2. 1. 9) $$\|L_{n_j}(g_{n_i}, X, x)-g_{n_i}(x)\| \leqq 1 \qquad (i=1, 2, 3, \ldots; j>i),$$

(2. 1. 10) $$\lambda_{n_1}(X) \geqq 4,\ \lambda_{n_{i+1}}(X) \geqq 4\lambda_{n_i}(X) \qquad (i=1, 2, 3, \ldots),$$

(2. 1. 11) $$n_{i+1} \geqq 2n_i \qquad (i=1, 2, 3, \ldots).$$

Это возможно ввиду (2. 1. 7), (2. 1. 6) и доказанного С. Н. Бернштейном для всех X соотношения

(2. 1. 12) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(X) = \infty.$$

Пусть

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_{n_i}(x)}{\lambda_{n_i}(X)} \qquad (-1\leqq x\leqq +1).$$

Стоящий справа ряд сходится, так как имеет место (2. 1. 2) и (2. 1. 10).

2. Доказательство соотношения $f(x)\in C(\omega)$. Очевидно

$$|f(x+h)-f(x)|\leqq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)|}{\lambda_{n_i}(X)} \qquad (0<h\leqq t\leqq 2,\ |x|\leqq 1). \tag{2. 2. 1}$$

Обозначим через j наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию

$$n_j^2\lambda_{n_j}(X)h\geqq 1. \tag{2. 2. 2}$$

Если $j\geqq 2$, $i<j$, то ввиду (2. 1. 4) и (2. 1. 11)

$$\frac{|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)|}{\lambda_{n_i}(X)}\leqq 2n_i^2h\leqq 2\cdot 4^{i-j+1}n_{j-1}^2h. \tag{2. 2. 3}$$

Из (2. 1. 5) и (2. 1. 8) получаем:

$$n_{j-1}^2h\leqq\frac{2\omega(h)}{\lambda_{n_{j-1}}(X)\,\omega\left(\dfrac{1}{n_{j-1}^2\lambda_{n_{j-1}}(X)}\right)}\leqq\frac{2\omega(h)}{a}. \tag{2. 2. 4}$$

Если $1\leqq j\leqq i$, то из (2. 1. 2), (2. 1. 10), (2. 1. 8), (2. 2. 2) и монотонности модуля непрерывности следует:

$$\frac{|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)|}{\lambda_{n_i}(X)}\leqq\frac{2}{4^{i-j}\lambda_{n_j}(X)}\leqq\frac{2\omega\left(\dfrac{1}{n_j^2\lambda_{n_j}(X)}\right)}{4^{i-j}a}\leqq\frac{2\omega(h)}{4^{i-j}a}. \tag{2. 2. 5}$$

Резюмируя (2. 2. 1) и (2. 2. 3)—(2. 2. 5) имеем:

$$|f(x+h)-f(x)|\leqq\frac{2\omega(h)}{a}\left(2\sum_{i=1}^{j-1}4^{i-j+1}\sum_{i=j}^{\infty}4^{j-i}\right)<\frac{8\omega(h)}{a}\leqq\frac{8\omega(t)}{a}.$$

Поэтому

$$f(x)\in C(\omega),$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство неравенства (1. 4. 1). Очевидно

$$f(z_{n_k})-L_{n_k}(f,X,z_{n_k})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_{n_i}(z_{n_k})-L_{n_k}(g_{n_i},X,z_{n_k})}{\lambda_{n_i}(X)} \qquad (k=1,2,3,\ldots). \tag{2. 3. 1}$$

Если $k\geqq 2$, $i<k$, то ввиду (2. 1. 9) и (2. 1. 10)

$$\frac{|g_{n_i}(z_{n_k})-L_{n_k}(g_{n_i},X,z_{n_k})|}{\lambda_{n_i}(X)}\leqq 4^{-i}. \tag{2. 3. 2}$$

На основании (2. 1. 3)

$$\frac{L_{n_k}(g_{n_k}, X, z_{n_k})}{\lambda_{n_k}(X)} = 1. \tag{2. 3. 3}$$

В силу (2. 1. 2) и (2. 1. 10)

$$\frac{|g_{n_i}(z_{n_k})|}{\lambda_{n_i}(X)} \leqq \frac{1}{4^i} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots;\ i \geqq k). \tag{2. 3. 4}$$

Если $1 \leqq k < i$, то, принимая во внимание очевидное неравенство

$$|L_{n_k}(g_{n_i}, X, z_{n_k})| \leqq \lambda_{n_k}(X)\|g_{n_i}\| = \lambda_{n_k}(X), \tag{2. 3. 5}$$

из (2. 1. 10) получаем:

$$\frac{|L_{n_k}(g_{n_i}, X, z_{n_k})|}{\lambda_{n_i}(X)} \leqq \frac{\lambda_{n_k}(X)}{\lambda_{n_i}(X)} \leqq 4^{k-i}. \tag{2. 3. 6}$$

Резюмируя (2. 3. 1)—(2. 3. 4) и (2. 3. 6), имеем:

$$f(z_{n_k}) - L_{n_k}(f, X, z_{n_k}) \leqq \sum_{i=1}^{k-1} 4^{-i} - 1 + \sum_{i=k}^{\infty} 4^{-i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{k-i} = -\frac{1}{3} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом

$$\limsup_{n \to \infty} \|f(x) - L_n(f, X, x)\| \geqq \frac{1}{3} > 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 С. М. ЛОЗИНСКОГО

1. Первый случай. Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$\limsup_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n > 0. \tag{3. 1. 1}$$

Тогда положительное число a и возрастающую последовательность натуральных чисел n_i можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \ln n_i \geqq a \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3. 1. 2}$$

С другой стороны, в силу известной теоремы С. Н. Бернштейна для любой матрицы узлов X выполняется соотношение

$$\lambda_n(X) \geqq b \ln n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3. 1. 3}$$

где b некоторое положительное число, $b \leqq 1$.

Обозначим через k_i натуральное число, для которого выполняется неравенство

$$b k_i^2 \ln k_i \leqq n_i < b(k_i + 1)^2 \ln (k_i + 1) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3. 1. 4}$$

Для достаточно больших i из (3. 1. 4) следует:

$$n_i \leqq k_i^3, \quad \ln k_i \geqq \frac{\ln n_i}{3}. \tag{3.1.5}$$

Положим в (2. 1. 5)

$$t = \frac{1}{k_i^2 \lambda_{k_i}(X)}, \quad T = \frac{1}{k_i^2 b \ln k_i}.$$

Ввиду (3. 1. 3) $t \leqq T$ и поэтому

$$\omega\left(\frac{1}{k_i^2 \lambda_{k_i}(X)}\right) \geqq \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{k_i^2 b \ln k_i}\right) \frac{b \ln k_i}{\lambda_{k_i}(X)}.$$

Принимая во внимание (3. 1. 4), (3. 1. 5) и (3. 1. 2) и монотонность модуля непрерывности получаем:

$$\omega\left(\frac{1}{k_i^2 \lambda_{k_i}(X)}\right) \lambda_{k_i}(X) \geqq \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{k_i^2 b \ln k_i}\right) b \ln k_i \geqq \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \frac{b}{6} \ln n_i \geqq \frac{ab}{6}. \tag{3.1.6}$$

Поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2 \lambda_n(X)}\right) \lambda_n(X) \geqq \limsup_{i\to\infty} \omega\left(\frac{1}{k_i^2 \lambda_{k_i}(X)}\right) \lambda_{k_i}(X) \geqq \frac{ab}{6} > 0.$$

Но тогда по теореме 1 существует функция $f(x)$ из $C(\omega)$, для которой

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(f, X, x) - f(x)\| > 0, \tag{3.1.7}$$

что и требовалось доказать.

2. Замечания. 1. В предыдущем доказательстве мы не использовали в явном виде условия

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \lambda_n(X) > 0. \tag{3.2.1}$$

Однако, ввиду (3. 1. 3) оно следует из использованного нами неравенства (3. 1. 1).

2. Если

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = \infty,$$

то в (3. 1. 2) и (3. 1. 6) можно заменить a на 2^i и поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2 \lambda_n(X)}\right) \lambda_n(X) = \infty.$$

3. Второй случай. Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$\liminf_{t=0} \frac{\omega(t^2)}{\omega(t)} = l > 0, \tag{3.3.1}$$

а узлы интерполирования X условию (3. 2. 1). Мы покажем, что тогда

снова выполняется неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X) > 0 \tag{3. 3. 2}$$

и поэтому по теореме 1 существует функция $f(x)$ из $C(\omega)$, для которой имеет место (3. 1. 7).

Предположим, сначала, что существует бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел n_i, для которых

$$\lambda_{n_i}(X) \geqq n_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда ввиду монотонности модуля непрерывности и (2. 1. 5)

$$\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)\lambda_{n_i}(X) \geqq \omega\left(\frac{1}{\lambda_{n_i}(X)^2}\right)\lambda_{n_i}(X) =$$

$$= \frac{\omega\left(\frac{1}{\lambda_{n_i}(X)^2}\right)}{\omega\left(\frac{1}{\lambda_{n_i}(X)}\right)}\,\omega\left(\frac{1}{\lambda_{n_i}(X)}\right)\lambda_{n_i}(X) \geqq \frac{\omega(2)}{4}\cdot\frac{\omega\left(\frac{1}{\lambda_{n_i}(X)^2}\right)}{\omega\left(\frac{1}{\lambda_{n_i}(X)}\right)}.$$

Поэтому и на основании (3. 3. 1)

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X) \geqq \limsup_{i\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)\lambda_{n_i}(X) \geqq$$

$$\geqq \liminf_{i\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)\lambda_{n_i}(X) \geqq \frac{\omega(2)}{4}\cdot\liminf_{i\to\infty}\frac{\omega\left(\frac{1}{\lambda_{n_i}(X)^2}\right)}{\omega\left(\frac{1}{\lambda_{n_i}(X)}\right)} \geqq \frac{\omega(2)}{4}\,l > 0,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь

$$\lambda_n(X) \geqq n^2 \qquad (n \geqq N).$$

Тогда при $n \geqq N$ ввиду монотонности модуля непрерывности

$$\omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X) \geqq \omega\left(\frac{1}{n^4}\right)\lambda_n(X) = \frac{\omega\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)}\cdot\frac{\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n(X).$$

Поэтому и на основания (3. 3. 1) и (3. 2. 1)

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X) \geqq \left[\liminf_{t=0}\frac{\omega(t^2)}{\omega(t)}\right]^2 \limsup_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n(X) > 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

1. Определение функции $f(x)$. Пусть матрица узлов X и модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяют условию

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X)=\infty. \tag{4.1.1}$$

Нам надо построить функцию $f(x)$ из $C(\omega)$, для которой

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(f, X, x)\| = \infty. \tag{4.1.2}$$

Если это имеет место для одной из функций $g_m(x)$, определенных в начале § 2 и принадлежащих множеству $C(\omega)$, то доказательство теоремы завершено. Поэтому мы можем считать, что

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(g_m, X, x)-g_m(x)\|<\infty \qquad (m=0, 1, 2, \ldots). \tag{4.1.3}$$

Пусть возрастающая последовательность натуральных чисел n_i удовлетворяет следующим условиям.

$$\omega\left(\frac{1}{n_{i+1}^2\lambda_{n_{i+1}}(X)}\right)\lambda_{n_{i+1}}(X)\geqq 2\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)\lambda_{n_i}(X) \qquad (i=1, 2, 3, \ldots), \tag{4.1.4}$$

$$n_{i+1}\geqq 2n_i \qquad (i=1, 2, 3, \ldots), \tag{4.1.5}$$

$$\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)\geqq 4\omega\left(\frac{1}{n_{i+1}^2\lambda_{n_{i+1}}(X)}\right) \qquad (i=1, 2, 3, \ldots), \tag{4.1.6}$$

$$\omega\left(\frac{1}{n_k^2\lambda_{n_k}(X)}\right)\lambda_{n_k}(X)\geqq 3\sum_{i=1}^{k-1}\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)|L_{n_k}(g_{n_i}, X, x)| \qquad (k\geqq 2,\ |x|\leqq 1). \tag{4.1.7}$$

Это возможно ввиду (4. 1. 1), (2. 1. 12), формулы

$$\lim_{t=0}\omega(t)=0$$

и (4. 1. 3).

Определим функцию $f(x)$ формулой

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)g_{n_i}(x) \qquad (-1\leqq x\leqq +1).$$

Стоящий справа ряд сходится ввиду (4. 1. 6) и (2. 1. 2).

2. Доказательство соотношения $f(x)\in C(\omega)$. Очевидно

$$|f(x+h)-f(x)|\leqq\sum_{i=1}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)| \tag{4.2.1}$$

$$(0<h\leqq t\leqq 2,\ |x|\leqq 1).$$

Обозначим через j наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию

$$n_j^2\lambda_{n_j}(Xh)h\geqq 1. \tag{4.2.2}$$

Если $j\geqq 2$, $i<j$, то ввиду (2.1.4), (4.1.4) и (4.1.5)

$$\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)|\leqq 2\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)n_i^2\lambda_{n_i}(x)h\leqq \tag{4.2.3}$$

$$\leqq 2\cdot 8^{i-j+1}\omega\left(\frac{1}{n_{j-1}^2\lambda_{n_{j-1}}(X)}\right)n_{j-1}^2\lambda_{n_{j-1}}(X)h.$$

В (2.1.5) возьмем h вместо t и $n_{j-1}^2\lambda_{n_{j-1}}(X)$ вместо $\frac{1}{T}$:

$$\omega\left(\frac{1}{n_{j-1}^2\lambda_{n_{j-1}}(X)}\right)n_{j-1}^2\lambda_{n_{j-1}}(X)h\leqq 2\omega(h). \tag{4.2.4}$$

Если $i\geqq j\geqq 1$, то, используя (4.1.6), (2.1.2), (4.2.2) и монотонность модуля непрерывности, получаем:

$$\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)|\leqq 2\cdot 4^{j-i}\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_j}(X)}\right)\leqq 2\cdot 4^{j-i}\omega(h). \tag{4.2.5}$$

Резюмируя (4.2.1)—(4.2.5), имеем:

$$|f(x+h)-f(x)|\leqq 2\omega(h)\left(2\sum_{i=1}^{j-1}8^{i-j+1}+\sum_{i=j}^{\infty}4^{j-i}\right)<8\omega(t).$$

Таким образом $f(x)$ принадлежит множеству $C(\omega)$, что и требовалось доказать.

3. Доказательство формулы (4.1.2). Очевидно

$$L_{n_k}(f, X, z_{n_k})=\sum_{i-1}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)L_{n_k}(g_{n_i}, X, z_{n_k})\qquad(k=1, 2, 3, \ldots)$$

(точка z_{n_k} была определена в начале § 2). Ввиду (4.1.7)

$$\sum_{i=1}^{k-1}\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)L_{n_k}(g_{n_i}, X, z_{n_k})\geqq-\frac{1}{3}\,\omega\left(\frac{1}{n_k^2\lambda_{n_k}(X)}\right)\lambda_{n_k}(X)\qquad(k\geqq 2).$$

Из (2.1.3) получаем:

$$\omega\left(\frac{1}{n_k^2\lambda_{n_k}(X)}\right)L_{n_k}(g_{n_k}, X, z_{n_k})=\omega\left(\frac{1}{n_k^2\lambda_{n_k}(X)}\right)\lambda_{n_k}(X)\qquad(k=1, 2, 3, \ldots).$$

Наконец, из (2.3.5) и (4.1.6) следует:

$$\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)L_{n_k}(g_{n_i}, X, z_{n_k})\geqq-\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(X)}\right)\lambda_{n_k}(X)\geqq-4^{k-i}\omega\left(\frac{1}{n_k^2\lambda_{n_k}(X)}\right)\lambda_{n_k}(X).$$

$$(i>k\geqq 1).$$

Таким образом,

$$L_{n_k}(f, X, z_{n_k}) \geqq \omega\left(\frac{1}{n_k^2 \lambda_{n_k}(X)}\right) \lambda_{n_k}(X)\left(1-\frac{1}{3}-\sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{k-i}\right)=\frac{1}{3}\,\omega\left(\frac{1}{n_k^2 \lambda_{n_k}(X)}\right) \lambda_{n_k}(X)$$

$$(k=1, 2, 3, \ldots).$$

Воспользовавшись (4. 1. 4), приходим к неравенству

$$L_{n_k}(f, X, z_{n_k}) \geqq \frac{1}{3} 2^{k-1} \omega\left(\frac{1}{n_1^2 \lambda_{n_1}(X)}\right) \lambda_{n_1}(X).$$

Поэтому

$$\lim_{k \to \infty} L_{n_k}(f, X, z_{n_k}) = \infty$$

и, тем более,

$$\limsup_{n \to \infty} \|L_n(f, X, x)\| = \infty,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

1. Видоизмененная матрица узлов Чебышева. Обозначим через τ любую последовательность чисел t_n, удовлетворяющих условию

$$1 \leqq t_n < 3 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

через $T_{n+1}(x)$ многочлен Чебышева $n+1$-ой степени $\cos (n+1) \arccos x$, через Z матрицу их корней

$$z_{in}=\cos \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \qquad (i=0, 1, \ldots, n;\ n=0, 1, 2, \ldots),$$

а через $U(\tau)$ матрицу узлов

$$u_{in}=\begin{cases} z_{in}, & \text{если} \quad 1 \leqq i \leqq n, \\ \cos \dfrac{1}{n+1} \dfrac{\pi}{2} t_n, & \text{если} \quad i=0. \end{cases}$$

Докажем некоторые свойства матриц $U(\tau)$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

2. Первое свойство матрицу $U(\tau)$. Пусть при некотором фиксированном n матрица узлов X удовлетворяет условию

$$\lambda_n(X) > \lambda_n(Z).$$

Покажем, что число t_n можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda_n(U(\tau)) = \lambda_n(X).$$

Фундаментальные многочлены интерполирования по узлам $U(\tau)$ можно записать в виде

$$l_{0n}(U(\tau), x) = \frac{T_{n+1}(x)}{x - z_{0n}} \cdot \frac{u_{0n} - z_{0n}}{T_{n+1}(u_{0n})}, \tag{5.2.1}$$

$$l_{in}(U(\tau), x) = l_{in}(Z, x) \frac{x - u_{0n}}{x - z_{0n}} \cdot \frac{z_{in} - z_{0n}}{z_{in} - u_{0n}} \qquad (1 \leqq i \leqq n). \tag{5.2.2}$$

Эти многочлены, а вместе с ними и постоянная Лебега $\lambda_n(U(\tau))$, являющаяся максимумом суммы их абсолютных значений, непрерывно зависят от параметра t_n. Если $t_n = 1$, то u_{0n} и z_{0n} совпадают и поэтому

$$\lambda_n(U(\tau)) = \lambda_n(Z).$$

Если $t_n \to 3$, то $u_{0n} \to z_{1n}$ и поэтому $|l_{0n}(U(\tau), x)|$, $|l_{1n}(U(\tau), x)|$ и вместе с ними $\lambda_n(U(\tau)) \to \infty$. Из сказанного и теоремы Больцано следует наше утверждение.

3. Второе свойство матрицы $U(\tau)$. Докажем, что

$$\sum_{i=2}^{n} |l_{in}(U(\tau), x)| = O(\ln n) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots;\ |x| \leqq 1). \tag{5.3.1}$$

Воспользуемся формулами

$$\frac{z_{in} - z_{0n}}{z_{in} - u_{0n}} = 1 + \frac{u_{0n} - z_{0n}}{z_{in} - u_{0n}} \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{5.3.2}$$

$$z_{0n} - u_{0n} = \cos \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{2} - \cos \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{2} t_n = 2 \sin \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{4} (t_n + 1) \cdot \tag{5.3.3}$$

$$\cdot \sin \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{4} (t_n - 1) < 2 \sin \frac{\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$u_{0n} - z_{in} > z_{1n} - z_{2n} = \cos \frac{3}{n+1} \frac{\pi}{2} - \cos \frac{5}{n+1} \frac{\pi}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{2\pi}{n+1} \sin \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{2} \qquad (2 \leqq i \leqq n),$$

$$\frac{z_{0n} - u_{0n}}{u_{0n} - z_{in}} < \frac{\sin \dfrac{\pi}{n+1}}{\sin \dfrac{2\pi}{n+1}} = \frac{1}{2 \cos \dfrac{\pi}{n+1}} \leqq 1 \qquad (2 \leqq i \leqq n). \tag{5.3.4}$$

Пусть

$$-1 \leqq x \leqq u_{0n}. \tag{5.3.5}$$

Тогда

$$0 \leqq \frac{u_{0n} - x}{z_{0n} - x} \leqq 1. \tag{5.3.6}$$

Ввиду (5. 2. 2), (5. 3. 2), (5. 3. 4), (5. 3. 6) и свойства узлов Чебышева

$$\sum_{i=2}^{n} |l_{in}(U(\tau), x)| \leqq 2 \sum_{i=2}^{n} |l_{in}(Z, x)| = O(\ln n) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Пусть теперь

(5. 3. 7) $$u_{0n} < x \leqq 1.$$

Из (5. 2. 2) получаем:

(5. 3. 8) $$l_{in}(U(\tau), x) = (-1)^i \frac{T_{n+1}(x)}{x - z_{in}} \cdot \frac{\sqrt{1 - z_{in}^2}}{n+1} \cdot \frac{x - u_{0n}}{x - z_{0n}} \cdot \frac{z_{in} - z_{0n}}{z_{in} - u_{0n}} \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

В силу теоремы о среднем Лагранжа и неравенства А. А. Маркова

(5. 3. 9) $$\left\| \frac{T_{n+1}(x)}{x - z_{0n}} \right\| \leqq \| T'_{n+1}(x) \| \leqq (n+1)^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Кроме того

$$x - z_{in} > z_{1n} - z_{in} = \cos \frac{3}{n+1} \frac{\pi}{2} - \cos \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{i+2}{n+1} \frac{\pi}{2} \sin \frac{i-1}{n+1} \frac{\pi}{2}$$

$$(2 \leqq i \leqq n);$$

$$\sqrt{1 - z_{in}^2} = \sin \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} = \sin \frac{i+2}{n+1} \frac{\pi}{2} \cos \frac{i-1}{n+1} \frac{\pi}{2} + \sin \frac{i-1}{n+1} \frac{\pi}{2} \cos \frac{i+2}{n+1} \frac{\pi}{2} <$$

$$< \begin{cases} \sin \dfrac{i+2}{n+1} \dfrac{\pi}{2} + \sin \dfrac{i-1}{n+1} \dfrac{\pi}{2} & (1 \leqq i \leqq n-1), \\ \sin \dfrac{i+2}{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (1 \leqq i = n); \end{cases}$$

(5. 3. 10) $$\frac{\sqrt{1 - z_{in}^2}}{x - z_{in}} <$$

$$< \begin{cases} \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{\sin \dfrac{i-1}{n+1} \dfrac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{\sin \dfrac{i+2}{n+1} \dfrac{\pi}{2}} \right) < \dfrac{n+1}{2} \left(\dfrac{1}{i-1} + \dfrac{1}{i+2} \right), & \text{если} \quad 2 \leqq i \leqq n-1, \\ \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sin \dfrac{i-1}{n+1} \dfrac{\pi}{2}} < \dfrac{n+1}{2} \dfrac{1}{i-1}, & \text{если} \quad 2 \leqq i = n; \end{cases}$$

(5. 3. 11) $$x - u_{0n} < 1 - z_{1n} = 1 - \cos \frac{3}{n+1} \frac{\pi}{2} = 2 \sin^2 \frac{3}{n+1} \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi^2}{8(n+1)^2} \qquad (n \geqq 1).$$

Воспользовавшись формулами (5. 3. 8)—(5. 3. 11), (5. 3. 2) и (5. 3. 4), получаем:

$$\sum_{i=2}^{n} |l_{in}(U(\tau), x)| < \frac{9\pi^2}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = O(\ln n) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Формула (5. 3. 1) доказана.

4. Третье свойство матриц $U(\tau)$. Докажем, что последовательность

$$l_{0n}(U(\tau), x)+l_{1n}(U(\tau), x) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

ограничена на отрезке $[-1, +1]$.

Рассмотрим сначала случай

(5. 4. 1) $$1 \leqq t_n \leqq 2.$$

В этом случае

(5. 4. 2) $$|T_{n+1}(u_{0n})| = \left|\cos \frac{\pi}{2} t_n\right| = \sin \frac{\pi}{2}(t_n-1) \geqq t_n - 1 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Ввиду (5. 3. 3)

(5. 4. 3) $$z_{0n}-u_{0n} \leqq 2\frac{3\pi}{4}\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1}(t_n-1)=\frac{3\pi^2}{8}\frac{1}{(n+1)^2}(t_n-1) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Воспользовавшись формулами (5. 2. 1), (5. 3. 9), (5. 4. 2) и (5. 4. 3), получаем:

$$|l_{0n}(U(\tau), x)| \leqq (n+1)^2 \frac{3\pi^2}{8}\frac{1}{(n+1)^2}(t_n-1)\frac{1}{t_n-1}=\frac{3\pi^2}{8} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Очевидно

(5. 4. 4) $$u_{0n}-z_{1n}=\cos\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}t_n-\cos\frac{3}{n+1}\frac{\pi}{2}=$$

$$=2\sin\frac{3+t_n}{n+1}\frac{\pi}{4}\sin\frac{3-t_n}{n+1}\frac{\pi}{4}>2\sin\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{4} \qquad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

Ввиду (5. 3. 3)

$$z_{0n}-u_{0n} \leqq 2\sin\frac{3}{n+1}\frac{\pi}{4}\sin\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{4} \qquad (n \geqq 1).$$

Поэтому

(5. 4. 5) $$\frac{z_{0n}-u_{0n}}{u_{0n}-z_{1n}} < \frac{\sin\frac{3}{n+1}\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{n+1}} < 1 \qquad (n \geqq 2).$$

Кроме того

(5. 4. 6) $$\sqrt{1-z_{1n}^2}=\sin\frac{3}{n+1}\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{2}\frac{1}{n+1} \qquad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

Если выполняется условие (5. 3. 7), то

(5. 4. 7) $$\frac{x-u_{0n}}{x-z_{1n}}<1 \qquad (n \geqq 1).$$

Из (5. 3. 8), (5. 3. 9), (5. 4. 6), (5. 4. 7) и (5. 4. 5) следует:

$$|l_{1n}(U(\tau), x)| < (n+1)^2\frac{3\pi}{n+1}\frac{1}{n+1}=3\pi \qquad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

Пусть теперь выполняется условие (5. 3. 5). Имеет место аналогичное (5. 3. 9) неравенство

$$\left\|\frac{T_{n+1}(x)}{x-z_{1n}}\right\| \leqq (n+1)^2 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{5. 4. 8}$$

Из (5. 3. 8), (5. 4. 8), (5. 4. 6), (5. 3. 6), (5. 3. 2) и (5. 4. 5) получаем:

$$|l_{1n}(U(\tau), x)| < (n+1)^2 \frac{3\pi}{2} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1} \cdot 2 = 3\pi \qquad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

Таким образом, в случае (5. 4. 1) первые два фундаментальных многочлена, а значит и их сумма, ограничены.

Пусть теперь

$$2 < t_n < 3. \tag{5. 4. 9}$$

Ввиду (5. 2. 1) и (5. 3. 8)

$$l_{0n}(U(\tau), x) + l_{1n}(U(\tau), x) = \tag{5. 4. 10}$$

$$= \frac{T_{n+1}(x)}{x-z_{0n}} \left[\frac{u_{0n}-z_{0n}}{T_{n+1}(u_{0n})} - \frac{\sqrt{1-z_{1n}^2}}{n+1} \cdot \frac{x-u_{0n}}{x-z_{1n}} \cdot \frac{z_{1n}-z_{0n}}{z_{1n}-u_{0n}}\right] = \frac{T_{n+1}(x)}{x-z_{0n}} \cdot$$

$$\cdot \left\{\frac{u_{0n}-z_{1n}}{T_{n+1}(u_{0n})} + (z_{1n}-z_{0n})\left[\frac{1}{T_{n+1}(u_{0n})} - \frac{\sqrt{1-z_{1n}^2}}{n+1} \frac{1}{z_{1n}-u_{0n}} - \frac{\sqrt{1-z_{1n}^2}}{n+1} \cdot \frac{1}{x-z_{1n}}\right]\right\} \qquad (n \geqq 1).$$

Оценим фигурирующие здесь величины.

В силу (5. 4. 4)

$$u_{0n} - z_{1n} \leqq 2 \frac{3}{n+1} \frac{\pi}{2} \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{4} (3-t_n) = \frac{3\pi^2}{4} \frac{1}{(n+1)^2} (3-t_n) \qquad (n \geqq 2). \tag{5. 4. 11}$$

Очевидно

$$|T_{n+1}(u_{0n})| = \left|\cos \frac{\pi}{2} t_n\right| = \sin \frac{\pi}{2} (3-t_n) \geqq 3 - t_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{5. 4. 12}$$

$$z_{0n} - z_{1n} = \cos \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3}{n+1} \frac{\pi}{2} = \tag{5. 4. 13}$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{n+1} \sin \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi^2}{(n+1)^2} \qquad (n \geqq 1).$$

Воспользовавшись формулой Тейлора, получаем:

$$\frac{1}{T_{n+1}(u_{0n})} - \frac{\sqrt{1-z_{1n}^2}}{n+1} \cdot \frac{1}{z_{1n}-u_{0n}} = \frac{1}{T_{n+1}(u_{0n})} + \tag{5. 4. 14}$$

$$+ \frac{1}{T'_{n+1}(z_{1n})(z_{1n}-u_{0n})} = \frac{T_{n+1}(u_{0n}) - T'_{n+1}(z_{1n})(u_{0n}-z_{1n})}{T_{n+1}(u_{0n}) T'_{n+1}(z_{1n})(z_{1n}-u_{0n})} =$$

$$= \frac{T''_{n+1}(\xi)(u_{0n}-z_{1n})^2}{2T_{n+1}(u_{0n}) T'_{n+1}(z_{1n})(z_{1n}-u_{0n})} = \frac{T''_{n+1}(\xi)(u_{0n}-z_{1n})\sqrt{1-z_{1n}^2}}{2(n+1)T_{n+1}(u_{0n})}$$

$$(z_{1n} \leqq \xi \leqq u_{0n}, \ n=0, 1, 2, \ldots).$$

В силу неравенства В. А. Маркова

$$|T''_{n+1}(\xi)| < \frac{1}{3}(n+1)^4 \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{5.4.15}$$

Если

$$\cos\frac{\pi}{n+1} \leqq x \leqq 1, \tag{5.4.16}$$

то

$$x - z_{1n} \geqq \cos\frac{\pi}{n+1} - \cos\frac{3}{n+1}\frac{\pi}{2} = \tag{5.4.17}$$

$$= 2\sin\frac{5}{n+1}\frac{\pi}{4}\sin\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{4} \geqq \frac{5}{2}\frac{1}{(n+1)^2} \qquad (n \geqq 2).$$

Если

$$-1 \leqq x < \cos\frac{\pi}{n+1}, \tag{5.4.18}$$

то

$$z_{0n} - x > \cos\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{n+1} = \tag{5.4.19}$$

$$= 2\sin\frac{3}{n+1}\frac{\pi}{4}\sin\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{4} \geqq \frac{3}{2}\frac{1}{(n+1)^2} \qquad (n \geqq 1).$$

С помощью (5. 4. 10), (5. 3. 9), (5. 4. 11)—(5. 4. 15), (5. 4. 6) и (5. 4. 17) в случае (5. 4. 16), или (5. 4. 8) и (5. 4. 19) в случае (5. 4. 18) получаем:

$$|l_{0n}(U(\tau), x) + l_{1n}(U(\tau), x)| \leqq (n+1)^2 \left\{ \frac{3\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1)^2}(3-t_n)\frac{1}{3-t_n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{(n+1)^2}\left[\frac{\frac{(n+1)^4}{3}\frac{3\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1)^2}(3-t_n)\frac{3\pi}{2}\frac{1}{n+1}}{(n+1)(3-t_n)} + \frac{\frac{3\pi}{2}\frac{1}{n+1}}{(n+1)\frac{3}{2}\frac{1}{(n+1)^2}} \right] \right\} = O(1)$$

$$(n=2,3,4,\ldots).$$

Так как аналогичное неравенство справедливо и в случае (5. 4. 1), третье свойство узлов $U(\tau)$ доказано.

5. Четвертое свойство узлов $U(\tau)$. Покажем, что если для некоторого достаточно большого значения n

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} \left[|l_{0n}(U(\tau), x)| + |l_{1n}(U(\tau), x)| \right] \geqq \frac{1}{2}\lambda_n(U(\tau)), \tag{5.5.1}$$

то

$$u_{0n} - z_{1n} \leqq \frac{370}{n^2\lambda_n(U(\tau))}. \tag{5.5.2}$$

Так как сумма первых двух фундаментальных многочленов ограничена, последовательность постоянных Лебега любой матрицы узлов интерполирования стремится к бесконечности и n достаточно велико, то из (5. 5 1). следует:

$$\|l_{0n}(U(\tau), x)\| > \frac{1}{5}\lambda_n(U(\tau)), \tag{5. 5. 3}$$

причем имеет место (5. 4. 9), ибо в случае (5. 4. 1) первый фундаментальный многочлен ограничен. Ввиду (5. 2. 1), (5. 3. 9), (5. 3. 3) и (5. 4. 12)

$$\|l_{0n}(U(\tau), x)\| < (n+1)^2 \frac{\pi^2}{(n+1)^2}\frac{1}{3-t_n} = \frac{\pi^2}{3-t_n} \qquad (n \geqq 1). \tag{5. 5. 4}$$

В силу (5. 5. 3) и (5. 5. 4)

$$3 - t_n < \frac{5\pi^2}{\lambda_n(U(\tau))}.$$

Отсюда и из (5. 4. 11) получаем:

$$u_{0n} - z_{1n} < \frac{15\pi^4}{4}\frac{1}{n^2\lambda_n(U(\tau))} < \frac{370}{n^2\lambda_n(U(\tau))},$$

что и требовалось доказать.

6. Построение узлов Y. Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и матрица узлов X удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X) = 0. \tag{5. 6. 1}$$

Для тех n, для которых

$$\lambda_n(X) \leqq \lambda_n(Z), \tag{5. 6. 2}$$

пусть

$$y_{in} = x_{in} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Для остальных n положим

$$y_{in} = u_{in} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

и выберем число t_n так, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_n(U(\tau)) = \lambda_n(X).$$

Тогда условие

$$\lambda_n(Y) = \lambda_n(X)$$

выполнено для всех n.

Нам остается доказать, что для всякой $f(x)$ из $C(\omega)$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, Y, x) - f(x)\| = 0. \tag{5. 6. 3}$$

Обозначим через m_i последовательность тех значений n, для которых имеет место (5. 6. 2) или не выполняется ни (5. 6. 2), ни (5. 5. 1), а через n_i последовательность остальных значений n. Чтобы доказать (5. 6. 3), мы покажем,

что если последовательность m_i бесконечна, то

$$\lim_{i\to\infty} \|L_{m_i}(f, Y, x) - f(x)\| = 0, \tag{5.6.4}$$

и если последовательность n_i бесконечна, то

$$\lim_{i\to\infty} \|L_{n_i}(f, Y, x) - f(x)\| = 0. \tag{5.6.5}$$

7. Доказательство (5.6.4). Если модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n > 0,$$

то, как мы видели при доказательстве теоремы 2 С. М. Лозинского, (5.6.1) не выполняется. Поэтому в нашем случае

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0. \tag{5.7.1}$$

Так как

$$\lambda_n(Z) = O(\ln n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то для тех n, для которых имеет место (5.6.2),

$$\lambda_n(Y) = O(\ln n). \tag{5.7.2}$$

Если ни (5.6.2), ни (5.5.1) не выполняется, то в силу (5.3.1) снова выполняется (5.7.2). Поэтому

$$\lambda_{m_i}(Y) = O(\ln m_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5.7.3}$$

Если последовательность m_i бесконечна, то из (5.7.1) и (5.7.3) получаем:

$$\lim_{i\to\infty} \omega\left(\frac{1}{m_i}\right) \lambda_{m_i}(Y) = 0. \tag{5.7.4}$$

Так как

$$\|L_n(f, Y, x) - f(x)\| = O\left[\lambda_n(Y)\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)\right] = O\left[\lambda_n(Y)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

то из (5.7.4) следует (5.6.4).

8. Доказательство (5.6.5). Обозначим через k_i целую часть числа $\sqrt{n_i}+1$, а через $p_i(x)$ многочлен степени не выше k_i, наименее уклоняющийся на отрезке $[-1, +1]$ от функции $f(x)$. Очевидно

$$f(x) - L_{n_i}(f, Y, x) = f(x) - p_i(x) + L_{n_i}(p_i - f, Y, x) =$$

$$= f(x) - p_i(x) + \sum_{j=0}^{n_i} [p_i(y_{jn_i}) - f(y_{jn_i})]\, l_{jn_i}(Y, x) =$$

$$= f(x) - p_i(x) + \sum_{j=2}^{n_i} [p_i(y_{jn_i}) - f(y_{jn_i})]\, l_{jn_i}(Y, x) + [p_i(y_{0n_i}) - f(y_{0n_i})] \cdot$$

$$\cdot [l_{0n_i}(Y, x) + l_{1n_i}(Y, x)] + [p_i(y_{1n_i}) - p_i(y_{0n_i}) + f(y_{0n_i}) - f(y_{1n_i})]\, l_{1n_i}(Y, x) \qquad (n_i \geqq 2).$$

Поэтому

$$\|f(x)-L_{n_i}(f,Y,x)\| \leqq \|f(x)-p_i(x)\| \left(1+\left\| \sum_{j=2}^{n_i} |l_{jn_i}(Y,x)| \right\| + \|l_{0n_i}(Y,x)+l_{1n_i}(Y,x)\|\right) + \tag{5.8.1}$$

$$+(|f(y_{0n_i})-f(y_{1n_i})|+|p_i(y_{0n_i})-p_i(y_{1n_i})|)\|l_{1n_i}(Y,x)\|.$$

Оценим фигурирующие здесь величины. По теореме Джексона

$$\|f(x)-p_i(x)\| = O\left(\omega\left(f,\frac{1}{k_i}\right)\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{k_i}\right)\right) \qquad (i=1,2,3,\ldots). \tag{5.8.2}$$

В силу (5.3.1)

$$\sum_{j=2}^{n_i} |l_{jn_i}(Y,x)| = O(\ln n_i) = O(\ln k_i) \qquad (i=1,2,3,\ldots). \tag{5.8.3}$$

Выше мы доказали, что

$$\|l_{0n}(Y,x)+l_{1n}(Y,x)\| = O(1) \qquad (n=0,1,2\ldots). \tag{5.8.4}$$

Ввиду (5.7.1)

$$\lim_{i\to\infty} \omega\left(\frac{1}{k_i}\right)\ln k_i = 0. \tag{5.8.5}$$

Воспользовавшись (5.5.2), для достаточно больших i получаем:

$$|f(y_{0n_i})-f(y_{1n_i})| \leqq \tag{5.8.6}$$

$$\leqq \omega\left(f,\frac{370}{n_i^2\lambda_{n_i}(Y)}\right) \leqq 370\,\omega\left(f,\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(Y)}\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n_i^2\lambda_{n_i}(Y)}\right)\right).$$

Из теоремы о среднем Лагранжа, неравенства А. А. Маркова, ограниченности последовательности $\|p_i(x)\|$ и (5.5.2) для достаточно больших i следует:

$$|p_i(y_{1n_i})-p_i(y_{0n_i})| \leqq (y_{0n_i}-y_{1n_i})|p_i'(\xi)| \leqq \tag{5.8.7}$$

$$\leqq k_i^2(y_{0n_i}-y_{1n_i})\|p_i(x)\| \leqq O\left(\frac{k_i^2}{n_i^2\lambda_{n_i}(Y)}\right) = O\left(\frac{1}{n_i\lambda_{n_i}(Y)}\right).$$

Наконец,

$$\|l_{1n_i}(Y,x)\| \leqq \lambda_{n_i}(Y) \qquad (i=1,2,3,\ldots). \tag{5.8.8}$$

Резюмируя (5.8.1)—(5.8.8) и (5.6.1), приходим к (5.6.5). Доказательство теоремы 3 завершено.

§ 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

1. Видоизмененная матрица узлов Чебышева. Обозначим через q любую последовательность чисел q_n, удовлетворяющих условию

$$q_n \geqq 1 \qquad (n=1,2,3,\ldots), \tag{6.1.1}$$

через Z матрицу узлов

$$z_{kn}=\cos\frac{2k+1}{n+1}\frac{\pi}{2} \qquad (k=0,1,\ldots,n;\ n=0,1,2,\ldots), \tag{6.1.2}$$

являющихся корнями многочленов Чебышева

$$T_{n+1}(x)=\cos(n+1)\arccos x \qquad (n=0,1,2,\ldots,\ -1\leqq x\leqq 1). \tag{6.1.3}$$

Пусть

$$z_{nn-1}=\begin{cases}0, & \text{если } n \text{ четное число},\\ \sin\dfrac{\pi}{2n}, & \text{если } n \text{ нечетное число}.\end{cases} \tag{6.1.4}$$

Рассмотрим матрицы $V(q)$ следующих узлов:

$$v_{00}=0,\ v_{kn}=\frac{z_{kn-1}}{q_n} \qquad (k=0,1,\ldots,n;\ n=1,2,3,\ldots). \tag{6.1.5}$$

Докажем некоторые свойства этих матриц, которые понадобятся нам в дальнейшем.

2. Первое свойство матриц $V(q)$. Покажем, что

$$l_{kn}(V(q),x)=l_{kn-1}(Z,q_nx)-(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}T_n(q_nx)\,l_{kn-1}(Z,z_{nn-1}) \qquad (0\leqq k\leqq n-1), \tag{6.2.1}$$

$$l_{nn}(V(q)\,x)=\frac{T_n(q_nx)}{T_n(z_{nn-1})}. \tag{6.2.2}$$

В правой части формул (6.2.1) и (6.2.2) стоят многочлены n-той степени. Ввиду (6.1.5)

$$l_{kn-1}(Z,q_nv_{in})=l_{kn-1}(Z,z_{in-1})=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqq i=k\leqq n-1,\\ 0, & \text{если } 0\leqq i,k\leqq n-1,\ i\neq k.\end{cases}$$

Используя (6.1.5) и (6.1.4), получаем:

$$T_n(q_nv_{in})=T_n(z_{in-1})=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqq i\leqq n-1,\\ (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}, & \text{если } i=n.\end{cases} \tag{6.2.3}$$

Поэтому правые части формул (6.2.1) и (6.2.2) в точках v_{in} равны нулю, если $i\neq k$, и единице, если $i=k$. Отсюда следует (6.2.1) и (6.2.2).

3. Второе свойство матриц $V(q)$. Докажем, что

$$\lambda_n(V(q))\leqq aT_n(q_n)\ln n \qquad (n=2,3,4,\ldots), \tag{6.3.1}$$

где a некоторое положительное число.

Ввиду (6. 2. 1), (6. 2. 2) и (6. 2. 3)

$$\sum_{k=0}^{n}|l_{kn}(V(q),x)|\leqq\sum_{k=0}^{n-1}|l_{kn-1}(Z,q_nx)|+ \tag{6.3.2}$$

$$+|T_n(q_nx)|\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}|l_{kn-1}(Z,z_{nn-1})|\right).$$

Оценим стоящие справа величины.

Известно, что

$$\sum_{k=0}^{n-1}|l_{kn-1}(Z,y)|=O(\ln n)\qquad(n=2,3,4,\ldots;\ -1\leqq y\leqq 1).$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1}|l_{kn-1}(Z,q_nx)|=O(\ln n)\qquad\left(n=2,3,4,\ldots;\ -\frac{1}{q_n}\leqq x\leqq 1\right), \tag{6.3.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}|l_{kn-1}(Z,z_{nn-1})|=O(\ln n)\qquad(n=2,3,4,\ldots). \tag{6.3.4}$$

Так как

$$l_{kn-1}(Z,y)=(-1)^k\frac{T_n(y)}{y-z_{kn-1}}\frac{\sqrt{1-z_{kn-1}^2}}{n}\qquad(0\leqq k\leqq n-1), \tag{6.3.5}$$

то

$$\sum_{k=0}^{n-1}|l_{kn-1}(Z,q_nx)|\leqq|T_n(q_nx)|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{1-z_{kn-1}^2}}{|q_nx-z_{kn-1}|}. \tag{6.3.6}$$

Очевидно

$$\|T_n(q_nx)\|\leqq T_n(q_n)\qquad(n=0,1,2,\ldots), \tag{6.3.7}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{1-z_{kn-1}^2}}{|q_nx-z_{kn-1}|}<\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{1-z_{kn-1}^2}}{1-z_{kn-1}}= \tag{6.3.8}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}|l_{kn-1}(Z,1)|=O(\ln n)\qquad\left(n=2,3,4,\ldots;\ |x|>\frac{1}{q_n}\right).$$

Из (6. 3. 2)—(6. 3. 4) и (6. 3. 6)—(6. 3. 8) получаем:

$$\sum_{k=0}^{n}|l_{kn}(V(q),x)|=O(T_n(q_n)\ln n)\qquad(n=2,3,4,\ldots),$$

что и требовалось доказать.

4. Третье свойство матриц $V(q)$. Пусть

$$m=\left[\frac{n+8}{6}\right],\quad p=\left[\frac{n-2}{2}\right]. \tag{6.4.1}$$

Покажем, что

$$\sum_{k=m}^{p} |l_{kn}(V(q), 1)| \geqq bT_n(q_n) \ln n \qquad (n=6, 7, 8, \ldots), \tag{6.4.2}$$

где b некоторое положительное число (в силу (6. 3. 1) $b \leqq a$).

Ввиду (6. 2. 1), (6. 3. 5) и (6. 2. 3)

$$l_{kn}(V(q), 1) = l_{kn-1}(Z, q_n) - (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} T_n(q_n) l_{kn-1}(Z, z_{nn-1}) =$$

$$= (-1)^k \frac{T_n(q_n)}{q_n - z_{kn-1}} \frac{\sqrt{1-z_{kn-1}^2}}{n} - (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} T_n(q_n)(-1)^k \frac{T_n(z_{nn-1})}{z_{nn-1} - z_{kn-1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{1-z_{kn-1}^2}}{n} = (-1)^k T_n(q_n) \frac{\sqrt{1-z_{kn-1}^2}}{n} \left(\frac{1}{q_n - z_{kn-1}} + \frac{1}{z_{kn-1} - z_{nn-1}} \right)$$

$$(0 \leqq k \leqq n-1).$$

Поэтому

$$\sum_{k=m}^{p} |l_{kn}(V(q), 1)| = T_n(q_n) \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{p} \sqrt{1-z_{kn-1}^2} \left(\frac{1}{q_n - z_{kn-1}} + \frac{1}{z_{kn-1} - z_{nn-1}} \right) \geqq$$

$$\geqq T_n(q_n) \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{p} \frac{\sqrt{1-z_{kn-1}^2}}{z_{kn-1} - z_{nn-1}} \qquad (n \geqq 6).$$

Здесь

$$\sqrt{1-z_{kn-1}^2} = \sin \frac{2k+1}{2n} \pi \geqq \frac{1}{2} \qquad (m \leqq k \leqq p,\ n \geqq 6),$$

$$z_{kn-1} - z_{nn-1} \leqq z_{kn-1} = \sin \left(1 - \frac{2k+1}{n}\right) \frac{\pi}{2} \leqq \frac{n-2k-1}{2n} \pi \qquad (m \leqq k \leqq p,\ n \geqq 6).$$

Следовательно

$$\sum_{k=m}^{p} |l_{kn}(V(q), 1)| \geqq \frac{1}{\pi} T_n(q_n) \sum_{k=m}^{p} \frac{1}{n-2k-1} \geqq bT_n(q_n) \ln n \qquad (n \geqq 6),$$

что и требовалось доказать.

5. Четвертое свойство матриц $V(q)$. Пусть X есть любая матрица узлов Лагранжева интерполирования. Докажем, что, если для некоторого n

$$\lambda_n(X) > \lambda_n(V(1)), \tag{6.5.1}$$

то число q_n можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda_n(V(q)) = \lambda_n(X). \tag{6.5.2}$$

Из (6. 2. 1) и (6. 2. 2) видно, что фундаментальные многочлены $l_{kn}(V(q), x)$ $(0 \leqq k \leqq n)$ а поэтому и постоянная Лебега $\lambda_n(V(q))$ непрерывно зависит от параметра q_n. Так как

$$\lim_{q_n \to \infty} T_n(q_n) = \infty,$$

то ввиду (6. 2. 2) и (6. 2. 3)

$$\lim_{q_n \to \infty} |l_{nn}(V(q), 1)| = \infty$$

и, тем более,

(6. 5. 3) $$\lim_{q_n \to \infty} \lambda_n(V(q)) = \infty.$$

В силу теоремы Больцано, непрерывности $\lambda_n(V(q))$, (6. 5. 1) и (6. 5. 3) при некотором $q_n > 1$ выполняется (6. 5. 2), что и требовалось доказать.

6. Некоторые вспомогательные функции. Для $n \geqq 6$ определим непрерывные функции $g_n(x)$ следующим образом:

(6. 6. 1) $$g_n(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \geqq v_{m-1\,n} \quad \text{или} \quad x \leqq v_{p+1\,n},$$

(6. 6. 2) $$g(v_{kn}) = \operatorname{sign} l_{kn}(V(q), 1) \qquad (m \leqq k \leqq p),$$

функции $g_n(x)$ линейны между v_{kn} и $v_{k+1\,n}$, если $m-1 \leqq k \leqq p$ (числа m и p определены формулой (6. 4. 1)). Отметим некоторые свойства этих функций, которые потребуются нам в дальнейшем.

Очевидно

(6. 6. 3) $$|g_n(x)| \leqq 1 \qquad (n = 6, 7, 8, \ldots; \ -1 \leqq x \leqq 1)$$

и

(6. 6. 4) $$g_n(x) \in \operatorname{Lip} 1 \qquad (n = 6, 7, 8, \ldots).$$

Ввиду (6. 1. 5), (6. 1. 2) и (6. 4. 1)

$$v_{k-1\,n} - v_{kn} = \frac{1}{q_n}(z_{k-1\,n-1} - z_{kn-1}) = \frac{1}{q_n} 2 \sin \frac{k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{2n} \geqq \frac{1}{nq_n}$$

$$(m \leqq k \leqq p, \ n \geqq 6).$$

Поэтому

(6. 6. 5) $$|g_n(x+h) - g_n(x)| \leqq 2nq_n h \qquad (n \leqq 6, \ -1 \leqq x < x+h \leqq 1).$$

В силу (6. 6. 1), (6. 6. 2), (6. 4. 2) и (6. 3. 1)

(6. 6. 6) $$L_n(g_n, V(q), 1) = \sum_{k=0}^{n} g_n(v_{kn}) l_{kn}(V(q), 1) =$$

$$= \sum_{k=m}^{p} |l_{kn}(V(q), 1)| \geqq bT_n(q_n) \ln n \geqq \frac{b}{a} \lambda_n(V(q)) \qquad (n \geqq 6).$$

Наконец,

(6. 6. 7) $$\|L_k(g_n, V(q), x)\| \leqq \lambda_k(V(q)) \|g_n(x)\| = \lambda_n(V(q)) \qquad (n \geqq 6; \ k = 0, 1, 2, \ldots).$$

7. Определение матрицы узлов Y. Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и матрица узлов Лагранжева интерполирования X удовлетворяют условию

(6. 7. 1) $$\limsup_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \lambda_n(X) > 0.$$

Мы можем считать, что

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n = 0, \tag{6.7.2}$$

так как в противном случае утверждение теоремы 4 следует из теоремы 2 С. М. Лозинского. Обозначим через r_i последовательность значений n, для которой

$$\omega\left(\frac{1}{r_i}\right)\lambda_{r_i}(X) \geqq c \qquad (i=1, 2, 3, \ldots), \tag{6.7.3}$$

где c некоторое положительное число. Это возможно ввиду (6. 7. 1). Из (6. 7. 2) и (6. 7. 3) следует, что для достаточно больших i

$$\lambda_{r_i}(X) > a \ln r_i, \tag{6.7.4}$$

где a — фигурирующее в (6. 3. 1) положительное число. Мы можем считать, что последовательности r_i такова, что (6. 7. 4) имеет место для всех i и $r_i \geqq 6$.

Определим матрицу Y следующим образом:

$$y_{kn} = x_{kn} \qquad (k=0, 1, \ldots, n),$$

если не выполняется (6. 5. 1),

$$y_{kn} = v_{kn} \qquad (k=0, 1, \ldots, n),$$

если выполняется (6. 5. 1), причем число q_n выбирается так, чтобы имело место (6. 5. 2). Ввиду (6. 3. 1) и (6. 7. 4) второй случай имеет место в частности для $n=r_i$ $(i=1, 2, 3. . .)$.

Так как

$$\lambda_n(Y) = \lambda_n(X) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

то нам остается доказать, что для некоторой функции $f(x)$ из $C(\omega)$

$$\limsup_{n\to\infty} \| f(x) - L_n(f, Y, x)\| > 0. \tag{6.7.5}$$

Мы различим два случая: в первом случае

$$\limsup_{i\to\infty} q_{r_i} > 1, \tag{6.7.6}$$

во втором случае (см. (6. 1. 1))

$$\lim_{i\to\infty} q_{r_i} = 1. \tag{6.7.7}$$

8. Доказательство (6. 7. 5) для случая (6. 7. 6). В первом случае существует число d и бесконечная подпоследовательность s_i последовательности r_i, для которых

$$q_{s_i} \geqq d > 1 \qquad (i=1, 2, 3, \ldots).$$

Ввиду (6. 1. 2), (6. 1. 4) и (6. 1. 5) все узлы y_{ks_i} расположены на отрезке $\left[-\frac{1}{d}, +\frac{1}{d}\right]$. Поэтому интерполяционные многочлены $L_{s_i}(f, Y, x)$ не зависят

от значений функции $f(x)$ вне этого отрезка и следовательно существуют функции $f(x)$ из $C(\omega)$, для которых эти многочлены не сходятся к $f(x)$, например, в точке 1. Таким образом в случае (6. 7. 6) имеет место (6. 7. 5).

9. Построение функции $f(x)$ для случая (6. 7. 7). Пусть возрастающая подпоследовательность n_i последовательности r_i удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)\lambda_{n_i}(Y) \leqq c \qquad (i=1, 2, 3, \ldots), \tag{6.9.1}$$

$$q_{n_i} \leqq 2 \qquad (i=1, 2, 3, \ldots), \tag{6.9.2}$$

$$\lambda_{n_1}(Y) \geqq \frac{4a}{b}, \qquad \lambda_{n_i}(Y) \geqq \frac{4a}{b}\lambda_{n_{i-1}}(Y) \qquad (i=2, 3, 4, \ldots), \tag{6.9.3}$$

$$n_i\omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \leqq \frac{1}{2}n_{i+1}\omega\left(\frac{1}{n_{i+1}}\right) \qquad (i=1, 2, 3, \ldots). \tag{6.9.4}$$

Это возможно ввиду (6. 7. 3), (6. 7. 7), формулы С. Н. Бернштейна

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n(Y)=\infty,$$

и равенства

$$\lim_{t=0}\frac{t}{\omega(t)}=0,$$

которое эквивалентно следующему условию теоремы 4:

$$C(\omega) \neq \mathrm{Lip}\,1.$$

Мы можем также считать, что

$$\lim_{j\to\infty}\|L_{n_j}(g_{n_i}, Y, x)-g_{n_i}(x)\|=0 \qquad (i=1, 2, 3, \ldots),$$

и поэтому

$$\|L_{n_j}(g_{n_i}, Y, x)-g_{n_i}(x)\| \leqq \frac{b}{a} \qquad (j>i\geqq 1), \tag{6.9.5}$$

так как в противном случае (6. 7. 5) выполняется для некоторой функции $g_{n_i}(x)$, принадлежащей в силу (6. 6. 4) множеству Lip 1.

Пусть

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_{n_i}(x)}{\lambda_{n_i}(Y)} \qquad (-1\leqq x\leqq 1). \tag{6.9.6}$$

Стоящий справа ряд сходится ввиду (6. 6. 3) и справедливого ввиду (6. 9. 3) неравенства

$$\lambda_{n_i}(Y) \geqq 4^i \qquad (i=1, 2, 3, \ldots). \tag{6.9.7}$$

10. Доказательство соотношения $f(x)\in C(\omega)$. Покажем, что

$$|f(x+h)-f(x)|\leqq\frac{20}{c}\,\omega(t)\quad(0<h\leqq t\leqq 2,\ -1\leqq x<x+h\leqq 1)$$

и поэтому функция $f(x)$ принадлежит множеству $C(\omega)$.

Ввиду (6. 9. 6)

$$|f(x+h)-f(x)|\leqq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)|}{\lambda_{n_i}(Y)}. \tag{6. 10. 1}$$

Обозначим через j наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию

$$n_j h\geqq 1. \tag{6. 10. 2}$$

Если $j>i\geqq 1$, то в силу (6. 6. 5), (6. 9. 2), (6. 9. 1) и (6. 9. 4)

$$\frac{|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)|}{\lambda_{n_i}(Y)}\leqq\frac{4n_i h}{\lambda_{n_i}(Y)}\leqq\frac{4}{c}n_i\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)h\leqq\frac{1}{c}\,2^{3+i-j}n_{j-1}\omega\left(\frac{1}{n_{j-1}}\right)h. \tag{6. 10. 3}$$

Подставляя в (2. 1. 5) h вместо t и $\dfrac{1}{n_{j-1}}$ вместо T, получаем:

$$hn_{j-1}\,\omega\left(\frac{1}{n_{j-1}}\right)\leqq 2\omega(h). \tag{6. 10. 4}$$

Пусть теперь $i\geqq j\geqq 1$. Используя (6. 6. 3), (6. 9. 3), неравенство $a\geqq b$, (6. 9. 1) и (6. 10. 2), имеем:

$$\frac{|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)|}{\lambda_{n_i}(Y)}\leqq\frac{2}{\lambda_{n_i}(Y)}\leqq\frac{2\cdot 4^{j-i}}{\lambda_{n_j}(Y)}\leqq\frac{2}{c}\,4^{j-i}\omega\left(\frac{1}{n_j}\right)\leqq\frac{2}{c}\,4^{j-i}\omega(h). \tag{6. 10. 5}$$

Резюмируя (6. 10. 1) и (6. 10. 3)—(6. 10. 5), видим:

$$|f(x+h)-f(x)|\leqq\frac{2}{c}\,\omega(h)\left(\sum_{i=1}^{j-1}2^{3+i-j}+\sum_{i=j}^{\infty}4^{j-i}\right)<\frac{20}{c}\,\omega(h),$$

что и требовалось доказать.

11. Доказательство (6. 7. 5) для случая (6. 7. 7). Завершая доказательство теоремы 4, мы покажем, что

$$L_{n_j}(f, Y, 1)-f(1)\geqq\frac{b}{3a}\qquad(j=1, 2, 3, \ldots) \tag{6. 11. 1}$$

и поэтому (6. 7. 5) имеет место в случае (6. 7. 7).

Ввиду (6. 9. 6) и (6. 6. 1)

$$L_{n_j}(f, Y, 1)-f(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{L_{n_j}(g_{n_i}, Y, 1)}{\lambda_{n_i}(Y)}\qquad(j=1, 2, 3, \ldots)$$

и поэтому

$$(6.11.2)\qquad L_{n_j}(f, Y, 1)-f(1) \geqq \frac{L_{n_j}(g_{n_j}, Y, 1)}{\lambda_{n_j}(Y)} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{|L_{n_j}(g_{n_i}, Y, 1)|}{\lambda_{n_i}(Y)} -$$

$$- \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|L_{n_j}(g_{n_i}, Y, 1)|}{\lambda_{n_i}(Y)} \qquad (j=1, 2, 3, \ldots).$$

В силу (6. 6. 6)

$$(6.11.3)\qquad \frac{L_{n_j}(g_{n_j}, Y, 1)}{\lambda_{n_j}(Y)} \geqq \frac{b}{a} \qquad (j=1, 2, 3, \ldots).$$

На основании (6. 9. 5), (6. 6. 1) и (6. 9. 7)

$$(6.11.4)\qquad \sum_{i=1}^{j-1} \frac{|L_{n_j}(g_{n_i}, Y, 1)|}{\lambda_{n_i}(Y)} \leqq \frac{b}{a} \sum_{i=1}^{j-1} 4^{-i} < \frac{b}{3a} \qquad (j=2, 3, 4, \ldots).$$

Ввиду (6. 6. 7) и (6. 9. 3)

$$(6.11.5)\qquad \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|L_{n_j}(g_{n_i}, Y, 1)|}{\lambda_{n_i}(Y)} \leqq \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{b}{a} 4^{j-i} = \frac{b}{3a} \qquad (j=1, 2, 3, \ldots).$$

Резюмируя (6. 11. 2)—(6. 11. 5), получаем (6. 11. 1).

§ 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5

1. Определение матрицы узлов Y. Снова обозначим через Z узлы

$$(7.1.1)\qquad z_{kn} = \cos \frac{2k+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \qquad (0 \leqq k \leqq n;\ n=0, 1, 2, \ldots),$$

являющиеся корнями многочленов Чебышева

$$(7.1.2)\qquad T_{n+1}(x) = \cos (n+1) \arccos x \qquad (n=0, 1, 2, \ldots;\ -1 \leqq x \leqq 1),$$

а через Y следующую матрицу:

$$(7.1.3)\qquad y_{kn} = \begin{cases} z_{kn}, & \text{если } 0 \leqq k \leqq n,\ n \neq 6, 10, 14, \ldots, \\ z_{kn-2}, & \text{если } 0 \leqq k \leqq n-2,\ n=6, 10, 14, \ldots, \\ \sin \dfrac{1}{n-1} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } k=n,\ n=6, 10, 14, \ldots, \\ -y_{nn}, & \text{если } k=n-1,\ n=6, 10, 14, \ldots. \end{cases}$$

Мы докажем, что

$$(7.1.4)\qquad L_n(Y) = O(n),$$

если $n=6, 10, 14, \ldots$. Так как ввиду (7. 1. 3) и (7. 1. 1)

$$\lambda_n(Y) = \lambda_n(Z) = O(\ln n) \qquad (n \geqq 2,\ n \neq 6, 10, 14, \ldots),$$

то (7. 1. 4) имеет место для любых $n \geqq 1$, т. е. для узлов Y выполняется первое утверждение теоремы 5.

Мы покажем также, что последовательность

(7. 1. 5) $$L_n(|x|, Y, 1) \qquad (n=6, 10, 14, \ldots)$$

сходится к 2, и поэтому для функции $|x|$ из Lip 1

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(|x|, Y, x)-|x|\| \geqq 1.$$

Следовательно, и второе утверждение теоремы 5 имеет место.

2. Доказательство (7. 1. 4) при $n=6, 10, 14, \ldots$. Прежде всего заметим, что

(7. 2. 1) $$l_{kn}(Y, x)=l_{kn-2}(Z, x)-$$

$$-\frac{T_{n-1}(x)}{2y_{nn}}[(x+y_{nn})l_{kn-2}(Z, y_{nn})+(x-y_{nn})l_{kn-2}(Z, -y_{nn})]$$

$$(0\leqq k\leqq n-2, \quad n=6, 10, 14, \ldots),$$

(7. 2. 2) $$l_{n-1n}(Y, x)=\frac{T_{n-1}(x)}{2y_{nn}}(x-y_{nn}) \qquad (n=6, 10, 14, \ldots),$$

(7. 2. 3) $$l_{nn}(Y, x)=\frac{T_{n-1}(x)}{2y_{nn}}(x+y_{nn}) \qquad (n=6, 10, 14, \ldots),$$

так как стоящие справа многочлены n-той степени исчезают во всех узлах y_{in}, кроме y_{kn}, $-y_{nn}$, y_{nn} соответственно, где они равны единице (это следует из (7. 1. 1)—(7. 1. 3) и равенств

$$l_{kn-2}(Z, y_{in})=\begin{cases}0, & \text{если} \quad k\neq i\\ 1, & \text{если} \quad k=i\end{cases} \qquad (0\leqq k\leqq n-2, \quad 0\leqq i\leqq n-2, \quad n=6, 10, 14, \ldots),$$

(7. 2. 4) $$T_{n-1}(y_{in})=\begin{cases}0, & \text{если} \quad 0\leqq i\leqq n-2, \quad n=6, 10, 14, \ldots,\\ \cos(n-1)\dfrac{n-2}{n-1}\dfrac{\pi}{2}=1, & \text{если} \quad i=n, \quad n=6, 10, 14, \ldots.\\ \cos(n-1)\dfrac{n}{n-1}\dfrac{\pi}{2}=-1, & \text{если} \quad i=n-1, \quad n=6, 10, 14, \ldots.\end{cases}$$

Перепишем (7. 2. 1) в виде

(7. 2. 5) $$l_{kn}(Y, x)=l_{kn-2}(Z, x)-x\frac{T_{n-1}(x)}{2y_{nn}}[l_{kn-2}(Z, y_{nn})+l_{kn-2}(Z, -y_{nn})]-$$

$$-\frac{1}{2}T_{n-1}(x)l_{kn-2}(Z, y_{nn})+\frac{1}{2}T_{n-1}(x)l_{kn-2}(Z, -y_{nn})$$

$$(0\leqq k\leqq n-2, \quad n=6, 10, 14, \ldots).$$

Отсюда, из (7. 2. 2), (7. 2. 3) и неравенств

(7. 2. 6) $$|T_{n-1}(x)|\leqq 1 \qquad (n=6, 10, 14, \ldots, \ -1\leqq x\leqq 1),$$

$$|x-y_{nn}|+|x+y_{nn}|\leqq 2 \qquad (n=6, 10, 14, \ldots, \ -1\leqq x\leqq 1)$$

получаем:

$$(7.2.7)\qquad \sum_{k=0}^{n}|l_{kn}(Y,x)|\leqq\sum_{k=0}^{n-2}|l_{kn-2}(Z,x)|+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}|l_{kn-2}(Z,y_{nn})|+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}|l_{kn-2}(Z,-y_{nn})|+\frac{1}{2y_{nn}}\sum_{k=0}^{n-2}|l_{kn-2}(Z,y_{nn})+l_{kn-2}(Z,-y_{nn})|+\frac{1}{y_{nn}}$$

$$(n=6,10,14,\ldots,\ -1\leqq x\leqq 1).$$

Оценим фигурирующие справа величины.

Известно, что

$$(7.2.8)\qquad \sum_{k=2}^{n-2}|l_{kn-2}(Z,x)|=O(\ln n)\qquad (n=6,10,14,\ldots,\ -1\leqq x\leqq 1).$$

Ввиду (7.1.3)

$$(7.2.9)\qquad y_{nn}>\frac{1}{n-1}\qquad (n=6,10,14,\ldots).$$

Так как

$$(7.2.10)\quad l_{kn-2}(Z,x)=(-1)^k\frac{T_{n-1}(x)}{x-y_{kn}}\frac{\sqrt{1-y_{kn}^2}}{n-1}\qquad (0\leqq k\leqq n-2,\ n=6,10,14,\ldots),$$

то на основании (7.2.4)

$$(7.2.11)\qquad l_{kn-2}(Z,y_{nn})+l_{kn-2}(Z,-y_{nn})=$$

$$=(-1)^k\frac{\sqrt{1-y_{kn}^2}}{n-1}\left(\frac{1}{y_{nn}-y_{kn}}+\frac{1}{y_{nn}+y_{kn}}\right)=-(-1)^k\frac{\sqrt{1-y_{kn}^2}}{n-1}\cdot\frac{2y_{nn}}{y_{kn}^2-y_{nn}^2}$$

$$(0\leqq k\leqq n-1,\ n=6,10,14,\ldots).$$

В силу (7.2.11), и неравенства

$$\sqrt{1-y_{kn}^2}\leqq 1\qquad (0\leqq k\leqq n-2,\ n=6,10,14,\ldots),$$

полагая $l=n-2k-2$, имеем:

$$(7.2.12)\qquad \frac{1}{2y_{nn}}\sum_{k=0}^{n-2}|l_{kn-2}(Z,y_{nn})+l_{kn-2}(Z,-y_{nn})|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{|y_{kn}^2-y_{nn}^2|}=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{y_{nn}^2}+2\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-2}\frac{1}{y_{kn}^2-y_{nn}^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{1}{n-1}\frac{\pi}{2}}+2\sum_{l=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{l\pi}{n-1}-\sin^2\frac{1}{n-1}\frac{\pi}{2}}\right]<$$

$$<\frac{1}{n-1}\left[(n-1)^2+2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{2l}{n-1}\right)^2-\left(\frac{\pi}{2(n-1)}\right)^2}\right]=(n-1)\left[1+2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{4l^2-\frac{\pi^2}{4}}\right]=O(n)$$

$$(n=6,10,14,\ldots).$$

Резюмируя (7. 2. 7), (7. 2. 8), (7. 2. 12) и (7. 2. 9), получаем:

$$\sum_{k=0}^{n}|l_{kn}(Y, x)| = 2O(\ln n) + O(n) + n - 1 = O(n) \qquad (n = 6, 10, 14, \ldots),$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство сходимости (7. 1. 5) к 2. Ввиду (7. 2. 5), (7. 2. 2) и (7. 2. 3)

$$L_n(|x|, Y, 1) = \sum_{k=0}^{n} l_{kn}(Y, 1)|y_{kn}| = \sum_{k=0}^{n-2} l_{kn-2}(Z, 1)|y_{kn}| -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2} l_{kn-2}(Z, y_{nn})|y_{kn}| + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2} l_{kn-2}(Z, -y_{nn})|y_{kn}| -$$

$$-\frac{1}{2y_{nn}}\sum_{k=0}^{n-2}[l_{kn-2}(Z, y_{nn}) + l_{kn-2}(Z, -y_{nn})]|y_{kn}| + 1 \qquad (n = 6, 10, 14, \ldots).$$

Так как

$$\lambda_n(Z) = O(\ln n) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

то интерполяционные многочлены

$$\sum_{k=0}^{n-2} l_{kn-2}(Z, x)|y_{kn}| = L_n(|x|, Z, x) \qquad (n = 6, 10, 14, \ldots, \ -1 \leqq x \leqq 1)$$

равномерно сходятся к $|x|$. Поэтому последовательности

$$\sum_{k=0}^{n-2} l_{kn-2}(Z, 1)|y_{kn}|, \qquad \sum_{k=0}^{n-2} l_{kn-2}(Z, \pm y_{nn})|y_{kn}| \qquad (n = 6, 10, 14, \ldots)$$

сходятся к 1 и 0 соответственно.

Чтобы завершить доказательство теоремы 5, заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n-2}[l_{kn-2}(Z, y_{nn}) + l_{kn-2}(Z, y_{nn})]y_{kn} = 0,$$

так как

$$y_{\frac{n}{2}-1\,n} = 0$$

и ввиду (7. 2. 11), (7. 1. 3) и (7. 1. 1)

$$[l_{n-2-k\,n-2}(Z, y_{nn}) + l_{n-2-k\,n-2}(Z, -y_{nn})]|y_{n-2-k\,n}| =$$

$$= -[l_{k\,n-2}(Z, y_{nn}) + l_{k\,n-2}(Z, -y_{nn})] \qquad \left(0 \leqq k \leqq \frac{n}{2} - 2, \ n = 6, 10, 14, \ldots\right).$$

§ 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6

1. Определение матрицы узлов Y. Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и матрица узлов X удовлетворяют условию

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n(X)=\infty. \tag{8.1.1}$$

Мы можем считать, что

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n<\infty, \tag{8.1.2}$$

так как в противном случае в силу замечания 2 из § 3

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X)=\infty$$

и поэтому теорема 6 следует из теоремы 2.

Обозначим через r_k последовательность значений n, для которой ввиду (8.1.1) выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \omega\left(\frac{1}{r_k}\right)\lambda_{r_k}(X)=\infty. \tag{8.1.3}$$

Из (8.1.2) и (8.1.3) следует, что для достаточно больших k

$$\lambda_{r_k}(X)>a\ln r_k, \tag{8.1.4}$$

где a — фигурирующее в (6.3.1) положительное число. Мы можем считать, что последовательность r_k такова, что (8.1.4) имеет место для всех k и $r_k\geqq 6$.

Для матрицы Y, определенной в пункте 7 из § 6

$$\lambda_n(Y)=\lambda_n(X) \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 6, нам надо показать, что для некоторой функции $f(x)$ из $C(\omega)$

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(f,Y,x)\|=\infty. \tag{8.1.5}$$

Как и в § 6 мы различим два случая:

$$\limsup_{k\to\infty} q_{r_k}>1 \tag{8.1.6}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} q_{r_k}=1, \tag{8.1.7}$$

где q_{r_k} последовательность чисел, определенная при построении матрицы Y в § 6.

2. Доказательство (8.1.5) для случая (8.1.6). Мы покажем, что, если выполняется условие (8.1.6) и положительное число ε достаточно мало, то

$$\limsup_{n\to\infty}\left|L_n\left(\frac{1}{x-\varepsilon i}, Y, 1\right)\right| = \infty. \tag{8.2.1}$$

Поэтому (8.1.5) имеет место хотя бы для одной из вещественных функций

$$\operatorname{Re}\frac{1}{x-\varepsilon i}=\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}, \quad \operatorname{Im}\frac{1}{x-\varepsilon i}=\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Эти функции непрерывно дифференцируемы на отрезке $[-1, +1]$ и поэтому принадлежат множеству Lip 1.

Легко проверить известное равенство

$$L_n\left(\frac{1}{x-\varepsilon i}, Y, x\right)=\frac{w_n(\varepsilon i)-w_n(x)}{w_n(\varepsilon i)\,(x-\varepsilon i)} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$w_n(x)=c\prod_{k=0}^{n}(x-y_{kn}),$$

c любое отличное от нуля комплексное число. В частности

$$L_n\left(\frac{1}{x-\varepsilon i}, Y, 1\right)=\frac{w_n(\varepsilon i)-w_n(1)}{w_n(\varepsilon i)\,(1-\varepsilon i)}. \tag{8.2.2}$$

Для тех n, для которых выполняется условие (6.5.1), в частности для всех r_k, очевидно

$$w_n(x)=T_n(xq_n)\,(x-y_{nn}).$$

Поэтому

$$w_n(1)=T_n(q_n)\,(1-y_{nn}), \tag{8.2.3}$$

$$w_n(\varepsilon i)=T_n(\varepsilon i q_n)\,(\varepsilon i-y_{nn}). \tag{8.2.4}$$

Известно, что

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\right] \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Поэтому

$$T_n(q_n)=\frac{1}{2}\left[(q_n+\sqrt{q_n^2-1})^n+(q_n-\sqrt{q_n^2-1})^n\right],$$

$$T_n(\varepsilon i q_n)=\frac{1}{2}\left[(\varepsilon i q_n+i\sqrt{\varepsilon^2 q_n^2+1})^n+(\varepsilon i q_n-i\sqrt{\varepsilon^2 q_n^2+1})^n\right].$$

Очевидно

$$\lim_{n\to\infty}(1-y_{nn})=1, \quad \lim_{n\to\infty}(\varepsilon i-y_{nn})=\varepsilon i.$$

Отсюда при достаточно малом ε ввиду (8. 1. 6) получаем:

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{T_{r_k}(q_{r_k})}{|T_{r_k}(\varepsilon i q_{r_k})|}=\infty. \tag{8. 2. 5}$$

Из (8. 2. 2)—(8. 2. 5) следует (8. 2. 1).

3. Определение функции $f(x)$ для случая (8. 1. 7). Если для какой-нибудь функции $g_{r_k}(x)$, определенной в пункте 6 из § 6,

$$\limsup_{n\to\infty}\|L_n(g_{r_k}, Y, x)\|=\infty,$$

то теорема 6 доказана. Поэтому мы можем считать, что

$$\limsup_{n\to\infty}\|L_n(g_{r_k}, Y, x)\|<\infty \qquad (k=1, 2, 3, \ldots). \tag{8. 3. 1}$$

Пусть подпоследовательность n_k последовательности r_k удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\lambda_{n_k}(Y)\geqq\frac{3a}{b}2^k\sum_{i=1}^{k-1}2^{-i}\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)\|L_{n_k}(g_{n_i}, Y, x)\| \qquad (k=2, 3, \ldots) \tag{8. 3. 2}$$

(числа a и b определены в пункте 3 и 4 из § 6),

$$\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\lambda_{n_k}(Y)\geqq k\cdot 2^k \qquad (k=1, 2, 3, \ldots), \tag{8. 3. 3}$$

$$\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\geqq\frac{3a}{b}\omega\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots), \tag{8. 3. 4}$$

$$q_{n_k}\leqq 2 \qquad (k=1, 2, 3, \ldots) \tag{8. 3. 5}$$

(это возможно ввиду (8. 1. 3), (8. 3. 1), соотношения

$$\lim_{t=0}\omega(t)=0 \tag{8. 3. 6}$$

и (8. 1. 7)).

Определим функцию $f(x)$ формулой

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)g_{n_k}(x). \tag{8. 3. 7}$$

Стоящий справа ряд сходится в силу (6. 6. 3) и (8. 3. 6).

4. Доказательство соотношения $f(x)\in C(\omega)$. Ввиду (8. 3. 7)

$$|f(x+h)-f(x)|\leqq\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)|g_{n_k}(x+h)-g_{n_k}(x)| \qquad (-1\leqq x<x+h\leqq 1).$$

Обозначим через j наименьшее натуральное число, для которого

$$n_j h\geqq 1.$$

Пусть сначала $1 \leqq k < j$. Используя (6. 6. 5), (8. 3. 5) и (2. 1. 5) с h вместо t и $\frac{1}{n_k}$ вместо T, получаем:

$$2^{-k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)|g_{n_k}(x+h)-g_{n_k}(x)| \leqq 2^{2-k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)n_k h \leqq 2^{3-k}\omega(h).$$

Пусть теперь $k \geqq j \geqq 1$. Тогда ввиду (6. 6. 3) и монотонности модуля непрерывности

$$2^{-k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)|g_{n_k}(x+h)-g_{n_k}(x)| \leqq 2^{1-k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \leqq 2^{1-k}\omega(h).$$

Таким образом

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq \omega(h)\sum_{k=1}^{\infty} 2^{3-k} = 8\omega(h) \leqq 8\omega(t) \qquad (0 < h \leqq t \leqq 2),$$

т. е. $f(x)$ принадлежит множеству $C(\omega)$, что и требовалось доказать.

5. Доказательство (8. 1. 5) для случая (8. 1. 7). Ввиду (8. 3. 7)

$$L_{n_i}(f, Y, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)L_{n_i}(g_{n_k}, Y, 1) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Здесь на основании (6. 6. 6)

$$2^{-i}\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)L_{n_i}(g_{n_i}, Y, 1) \geqq \frac{b}{a}\,2^{-i}\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)\lambda_{n_i}(Y).$$

Используя (8. 3. 2) при $i \geqq 2$ получаем:

$$\left|\sum_{k=1}^{i-1} 2^{-k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)L_{n_i}(g_{n_k}, Y, 1)\right| \leqq \frac{b}{3a}\,2^{-i}\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)\lambda_{n_i}(Y).$$

Ввиду (6. 6. 7) и (8. 3. 4)

$$\left|\sum_{k=i+1}^{\infty} 2^{-k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)L_{n_i}(g_{n_k}, Y, 1)\right| \leqq \sum_{k=i+1}^{\infty} 2^{-k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\lambda_{n_i}(Y) \leqq$$

$$\leqq \frac{b}{3a}\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)\lambda_{n_i}(Y)\sum_{k=i+1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{b}{3a}\,2^{-i}\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)\lambda_{n_i}(Y).$$

Таким образом, принимая во внимание (8. 3. 3)

$$L_{n_i}(f, Y, 1) \geqq \frac{b}{3a}\,2^{-i}\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)\lambda_{n_i}(Y) \geqq \frac{b}{3a}\,i,$$

поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(f, Y, x)\| = \infty,$$

что и требовалось доказать.

§ 9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 С. М. ЛОЗИНСКОГО

Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условиям

$$\liminf_{t=+0} \frac{\omega(t^2)}{\omega(t)} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0. \tag{9.1}$$

Очевидно

$$\lim_{n\to\infty} \left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^{-1} = \infty, \tag{9.2}$$

и существует последовательность t_k такая, что

$$\lim_{k\to\infty} t_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\omega(t_k^2)}{\omega(t_k)} = 0.$$

Обозначим через $n_k - 1$ целую часть числа $\frac{1}{t_k}$. Тогда

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{n_k^2}\right)}{\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)} \leqq 2\frac{\omega\left(\frac{1}{n_k^2}\right)}{\omega\left(\frac{2}{n_k}\right)} \leqq 2\frac{\omega\left(\frac{1}{n_k^2}\right)}{\omega\left(\frac{1}{n_k-1}\right)} \leqq 2\frac{\omega(t_k^2)}{\omega(t_k)}$$

и поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{n_k^2}\right)}{\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)} = 0. \tag{9.3}$$

Известно, что

$$\lambda_n(Z) = O(\ln n) \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{9.4}$$

(Z — это матрица узлов Чебышева); и в силу (6. 3. 1)

$$\lambda_n(V(1)) = O(\ln n) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

($V(1)$ — определена в пункте 1 из § 6). Поэтому, и ввиду (9. 2) для всех достаточно больших значений $n \geqq N$

$$\lambda_n(Z) < \left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda_n(V(1)) < \left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (n \geqq N). \tag{9.5}$$

Определим матрицы узлов Лагранжева интерполирования X и Y следующим образом:

$$x_{in_k}=u_{in_k}, \quad y_{in_k}=v_{in_k} \qquad (i=0, 1, \ldots, n_k;\ n_k \geqq N),$$

$$\lambda_{n_k}(X)=\lambda_{n_k}(Y)=\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (n_k \geqq N) \tag{9. 6}$$

(это возможно ввиду (9. 5), первого свойства матриц $U(\tau)$, доказанного в пункте 2 из § 5, и четвертого свойства матриц $V(q)$, доказанного в пункте 5 из § 6). Для остальных значений n (для которых $n<N$, или $n \neq n_k$ $(k=1, 2, \ldots)$), которые обозначим через m_k $(k=1, 2, \ldots)$, положим

$$x_{im_k}=y_{im_k}=z_{im_k} \qquad (i=0, 1, \ldots, m_k;\ k=1, 2, \ldots).$$

Очевидно

$$\lambda_{m_k}(X)=\lambda_{m_k}(Y)=\lambda_{m_k}(Z) \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{9. 7}$$

Используя (9. 6) и (9. 3), получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n(Y)=\infty.$$

Из доказательства теоремы 6 видно, что тогда существует функция $f(x)$ из $C(\omega)$, для которой

$$\limsup_{n\to\infty} \|L_n(f, Y, x)\|=\infty.$$

Ввиду (9. 6) и (9. 3)

$$\lim_{k\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n_k^2\lambda_{n_k}(X)}\right)\lambda_{n_k}(X) \leqq \lim_{k\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n_k^2}\right)\lambda_{n_k}(X)=0,$$

с другой стороны, используя (9. 7), (9. 4) и (9. 1),

$$\omega\left(\frac{1}{m_k^2\lambda_{mk}(X)}\right)\lambda_{m_k}(X) \leqq O\left[\omega\left(\frac{1}{m_k}\right)\ln m_k\right] \to 0, \quad \text{если} \quad k\to\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X)=0.$$

Из доказательства теоремы 3 видно, что тогда для любой функции $f(x)$ из $C(\omega)$

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x)-L_n(f, X, x)\|=0.$$

Доказательство теоремы 3 С. М. Лозинского завершено.

(Поступила 15. 1. 1965.)

Список цитированной литературы

[1] С. М. Лозинский, Пространства $\tilde{C}_\omega$ и $\tilde{C}^*_\omega$ и сходимость интерполяционных процессов в них, *ДАН*, **59** (1948), стр. 1389—1392.
[2] P. Erdős—P. Turán, On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), стр. 47-65.
[3] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного* (Москва, Физматгиз, 1960).
[4] О. Киш, О сходимости интерполяционных процессов в некоторых пространствах функций, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, **7** (1962), стр. 65-75.
[5] О. Киш, О достаточном условии равномерной сходимости тригонометрического интерполирования, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, **7** (1962), стр. 385-394.
[6] О. Киш, Замечания о сходимости тригонометрического интерполирования, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, **9** (1964).

NOTES ON THE CONVERGENCE OF THE LAGRANGE INTERPOLATION

By

O. KIS (Budapest) and J. SZABADOS (Budapest)

(Summary)

Let $\omega(t)$ be the continuity module of a function continuous in $[-1, +1]$; $C(\omega)$ the set of continuous in $[-1, +1]$ functions with continuity module of order of magnitude $O(\omega(t))$. X denotes the matrix of arbitrary fundamental points of Lagrange interpolation belonging to $[-1, +1]$; $\lambda_n(X)$ the respective Lebesgue-constants; $L_n(f, X, x)$ the Lagrange interpolatory polynomials of order not greater than n of the $f(x)$ belonging to X.

In this paper we prove the undermentioned theorems:

1. If

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X) > 0$$

then there exists an $f(x) \in C(\omega)$ such that

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{|x|\leq 1} |f(x) - L_n(f, X, x)| > 0.$$

2. If

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X) = \infty$$

then there exists an $f(x) \in C(\omega)$ such that

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{|x|\leq 1} |L_n(f, X, x)| = \infty.$$

3. If

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(x) = 0$$

then there exists a matrix Y for which

$$\lambda_n(Y) = \lambda_n(X) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

furthermore, if only $f(x) \in C(\omega)$ then

$$\lim_{n\to\infty} \max_{|x|\leqq 1} |f(x) - L_n(f, X, x)| = 0.$$

4. If

$$\lim_{t=0} \frac{t}{\omega(t)} = 0,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \lambda_n(X) > 0$$

then there exists an $f(x) \in C(\omega)$ and a matrix Y such that

$$\lambda_n(Y) = \lambda_n(X) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{|x|\leqq 1} |f(x) - L_n(f, Y, x)| > 0.$$

5. There exists an $f(x) \in \mathrm{Lip}\, 1$ and a matrix Y such that

$$\lambda_n(Y) = O(n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{|x|\leqq 1} |f(x) - L_n(f, Y, x)| > 0.$$

6. If

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \lambda_n(X) = \infty$$

then there exists an $f(x) \in C(\omega)$ and a matrix Y such that

$$\lambda_n(Y) = \lambda_n(X) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{|x|\leqq 1} |L_n(f, Y, x)| = \infty.$$

VOLUMENABSCHÄTZUNG EINES POLYEDERS IN RÄUMEN KONSTANTER KRÜMMUNG

Von

J. MOLNÁR (Budapest)

Meinem geehrten Freund Prof. L. Fejes Tóth zu seinem 50-sten Geburtstag mit Liebe gewidmet

(*Vorgelegt von* L. FEJES TÓTH)

Der folgende Satz rührt von HABICHT und VAN DER WAERDEN [3] her: [1]

Besitzt ein gleichseitiges sphärisches n-Eck P_n mit der Seitenlänge a die Eigenschaft, daß je zwei ihrer Ecken einen Abstand $\geqq a$ haben, so ist

$$P_n \geqq (n-2)\,P_3 .^{2}$$

Im vorliegendem Aufsatz befassen wir uns mit dem dreidimensionalen Analogon dieser Ungleichung. Wir beweisen den

SATZ. *Besitzt in einem dreidimensionalen Raum konstanter Krümmung ein durch n gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a begrenztes Polyeder P_n^3 die Eigenschaft, daß je zwei ihrer Ecken einen Abstand $\geqq a$ haben, so ist*

$$P_n^3 \geqq \frac{n-2}{2} P_4^3 .$$

Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn P_n^3 die Vereinigung solcher Tetraedern ist, deren sämtliche Ecken auch Ecken des Polyeders P_n^3 sind.

BEWEIS. Wir schreiben einfachheitshalber $P = P_n^3$. Wir schlagen um jede Ecke O_i des Polyeders P eine Kugel K_i vom Radius $r = \frac{a}{2}$. Offensichtlich greifen die Kugeln $\{K_i\}$ nicht übereinander.

Es sei Z_i die zu der Kugel K_i gehörige DIRICHLETsche Zelle und $D_i = Z_i \cap P$ der Durchschnitt von Z_i und P.

Wir betrachten vier einander gegenseitig berührende Kugeln vom Radius r und das durch ihre Mittelpunkte bestimmte Tetraeder T. Wir bezeichnen mit $d_3(r)$ die Dichte der Kugeln in T und mit r_0 bzw. r_1 den Umkugelradius von T bzw. den Umkreisradius einer Dreiecksfläche von T.

Zunächst beweisen wir, daß die Dichte von K_i in D_i nicht größer ist als $d_3(r)$, dh. $\dfrac{K_i \cap D_i}{D_i} \leqq d_3(r)$.

Es bedeute $B(r) = O A_1 \ldots A_n$ eine folgenden Bedingungen genügende Pyramide: 1. der Abstand der Ecke O von der Fläche $A_1 \ldots A_n$ ist nicht kleiner als r, 2. der

[1] Vgl. MOLNÁR [4], s. auch FEJES TÓTH [2], 170.

[2] Wir bezeichnen eine Punktmenge und ihr zwei-, bzw. dreidimensionales Maß mit demselben Symbol.

Abstand jeder Kante $A_1A_2, \ldots, A_nA$ von O ist nicht kleiner als r_1, 3. $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n = r_0$.

Wir betrachten das Tetraeder $B^*(r) = O\,A_1A_2A_3$ mit folgenden Eigenschaften: 1. $OA_1 = r$, 2. $OA_1 \perp \Delta A_1A_2A_3$, 3. $A_1A_2 \perp A_2A_3$, 4. $OA_3 = r_0$ und 5. der Abstand der Kante A_2A_3 von O ist nicht kleiner als r_1.

Wir werden von folgendem von BÖRÖCZKY stammenden Satz gebraucht machen:[3]

Die Dichte einer Kugel mit dem Mittelpunkt O und Radius r in der Pyramide $B(r)$, sowohl im Tetraeder $B^*(r)$ ist nicht größer als $d_3(r)$.

Wenden wir uns jetzt dem Beweis der Ungleichung $\dfrac{K_i \cap P}{D_i} = \dfrac{K_i \cap D_i}{D_i} \leqq d_3(r)$ zu.

Es sei K_i^* eine mit K_i konzentrische Kugel vom Radius r_0. Wir beweisen die schärfere Ungleichung $\dfrac{K_i \cap D_i^*}{D_i^*} \leqq d_3(r)$, wo $D_i^* = D_i \cap K_i^*$ den Durchschnitt von D_i und K_i^* bedeutet. Ist D_i^* kein Polyeder so verstümmeln wir ihn so, daß ein konvexes Polyeder $\bar{D}_i^*$ entsteht, das folgenden Bedingungen genügt: 1. die neuen Ecken von $\bar{D}_i^*$ liegen auf K_i^*, 2. der Abstand jeder Fläche die O_i nicht enthält ist nicht kleiner als r, 3. der Abstand der nicht auf der Grenze von P liegenden Kantengeraden ist nicht kleiner als r_1.

Wir zerlegen $\bar{D}_i^*$ in O_i zusammentreffende Pyramiden deren Grundflächen Flächen von $\bar{D}_i^*$ sind. Es ist leicht einzusehen, daß diese Pyramiden vom Typus $B(r)$ oder $B^*(r)$ sind. Die Dichte der Kugel K_i in diesen Pyramiden ist nach BÖRÖCZKY's Satz nicht größer als $d_3(r)$; folglich ist

$$\frac{K_i \cap P}{D_i} \leqq d_3(r). \tag{1}$$

Nun schätzen wir die zu der Ecke O_i gehörige Raumwinkeln des Polyeders P ab.

Wir schlagen um eine Ecke eines Dreiecks Δ mit der Seitenlänge a eine Kreislinie K vom Radius $a/2$ (Abb. 1). Das dreieck Δ schneidet aus K einen Kreisbogen etwa von der Länge λ aus. Das Polyeder P schneidet aus der Kugel K_i ein gleichseitiges sphärisches Polygon P_{n_i} von der Seitenlänge λ aus, dessen sämtliche Eckenpaare einen Abstand $\geqq \lambda$ haben. Nun gilt nach dem Satz von HABICHT und VAN DER WAERDEN

$$P_{n_i} \geqq (n_i - 2)\,P_3,$$

wo n_i die Anzahl der in O_i zusammentreffenden Dreiecksflächen von P ist. Addieren wir die zur Ecke O_i gehörige Raumwinkeln P_{n_i} für sämtliche Ecken von P, so erhalten wir

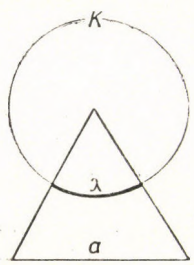


Abb. 1

$$\sum_{i=1}^{c} P_{n_i} \geqq \sum_{i=1}^{c} (n_i - 2)\,P_3 = (3n - 2c)\,P_3, \tag{2}$$

[3] S. BÖRÖCZKY—FLORIAN [1], S. 240—1.

wo c die Eckenzahl von P ist. Aus (1) und (2) ergibt sich

$$P=P_n^3 \leqq \sum_{i=1}^{c} D_i \leqq \frac{\sum_{i=1}^{c} K_i \cap P}{d_3(r)} = \frac{\sum_{i=1}^{c} P_{n_i} \frac{K_i}{F_i}}{d_3(r)} = \frac{K_i}{d_3(r)F_i} \sum_{i=1}^{c} P_{n_i} \leqq \frac{K_i}{d_3(r)F_i}(3n-2c)P_3,$$

wo F_i die Oberfläche von K_i ist. Offensichtlich ist $\frac{K_i}{F_i} = \frac{K_j}{F_j}$.

Da die Summe der Raumwinkeln von P_4^3 $4P_3$ ist, gilt $\frac{P_3 K_i}{d_3(r)F_i} = \frac{P_4^3}{4}$. Folglich erhalten wir

$$P_n^3 \leqq \frac{3n-2c}{4} P_4^3.$$

Da aber P_n^3 ein Dreieckspolyeder ist, gilt nach dem EULERschen Polyedersatz $c = \frac{4+n}{4}$. Ersetzen wir in der letzten Ungleichung c durch diesen Wert, so erhalten wir die gewünschte Ungleichung. Der Fall der Gleichheit leuchtet ein.

(Eingegangen am 9. Februar 1965.)

Literaturverzeichnis

[1] K. BÖRÖCZKY und A. FLORIAN, Über die dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15** (1964), S. 237–245.

[2] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1953).

[3] W. HABICHT und B. L. VAN DER WAERDEN, Lagerungen von Punkten auf der Kugel, *Math. Ann.*, **123** (1951), S. 223–234.

[4] J. MOLNÁR, Inhaltsabschätzung eines sphärischen Polygons, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), S. 67–70.

REMARK ON A PAPER OF M. F. JANOWITZ

By

E. T. SCHMIDT (Budapest)

(*Presented by* L. RÉDEI)

M. F. JANOWITZ has asked in his paper "A characterization of standard ideals" (*Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965)) the following question:

Is every projective ideal of a lattice a homomorphism kernel?

In this note we give a counter-example to show that a projective ideal need not necessarily be a homomorphism kernel.

Consider the lattice on Fig. 1.

We assert that the ideal $(a]$ is a projective ideal, but it is not a homomorphism kernel. Indeed, an ideal J is projective if and only if $a \in J$, $x \cap y \in J$ imply $(a \cup x) \cap y \in J$. (See in the paper of JANOWITZ, Theorem 3. 2). In our lattice $x \cap y \in (a]$, $(x, y \notin (a])$ if and only if $x = b$ and $c \leqq y \leqq g$ or $c = i$ (or symmetrically, interchanging x and y), and so wet get $(a \cup x) \cap y \in (a]$, i. e. $(a]$ is projective.

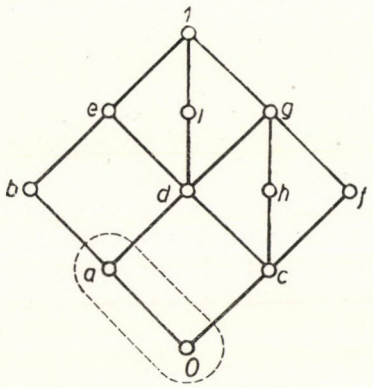


Fig. 1

Now we prove that $(a]$ is not a homomorphism kernel. Let us suppose that $a \equiv 0\ (\Theta)$ for a suitable congruence relation. Then

$$f = (a \cup h) \cap f \equiv (0 \cup h) \cap f = c\ (\Theta)$$

and so

$$b = (f \cup i) \cap b \equiv (c \cup i) \cap b = a\ (\Theta),$$

i. e. $b \equiv 0\ (\Theta)$.

This is a contradiction if $(a]$ should be a homomorphism kernel.

Our counter-example and the definition of projective ideals suggest the following conjecture.

The usual definition of the homomorphism kernel is of second order type (using a familiar logical expression). The question nat. arises whether the notion of homomorphism kernel can be characterized with first order term? This means precisely the following. Does a formula F of the first order logic with identity exist, such that F contains as primitive non logical constants the lattice operations and a symbol A for a subset of the universe and such that F is true, in a lattice L with a specified subset L' as the interpretation for A if and only if L' is a homomorphism kernel of L? Our conjecture is that such a universal first order formula does not exist (a universal first order formula is formed from an open formula by prefixing to it universal quantities binding all the variables).

(Received 16 March 1965)

DISTRIBUTION OF POINTS IN THE ELLIPTIC PLANE

By

L. FEJES TÓTH (Budapest), corresponding member of the Academy

The problem of distributing n points on the sphere so that the least distance between any two of them attains its maximum, has a rather vast literature involving the names of more than twenty people. The aim of this paper is to open a not less attractive field of research: the analogous problem in the elliptic plane. We shall refer to these two problems as to the *spherical* and the *elliptic problem.*

The elliptic geometry arises from the spherical geometry by abstractly identifying antipodal points. Thus the elliptic problem for n points arises from the spherical problem for $2n$ points by making the restriction that the set of points should be symmetric with respect to the center of the sphere. A more natural spherical interpretation of the elliptic problem reads as follows: On a sphere distribute n great circles so that the least angle included by any two of them should be as great as possible. Instead of great circles on a sphere we also can consider planes or lines in the Euclidean 3-space.

For 2 and 3 points the solution of the elliptic problem is trivial. Furthermore, since for 12 points the solution of the spherical problem is a centro-symmetric set of points, namely the vertices of a regular icosahedron, we also know the solution of the elliptic problem for 6 points. In the present paper we shall solve the elliptic problem for 4 and 5 points.

We consider a set of n points in the elliptic plane. Let d be the least distance which occurs between pairs of points. We associate with the set of points a *graph* by joining each pair of points having a distance equal to d by a straight segment. A well known theorem of Weierstrass implies the existence of a set of n points for which d attains its maximum. We shall call such a set a *best* one and the graph associated with a best set of points a *maximal graph.* The number of edges emanating from a point is said to be the *order* of the point. A point of order zero is said to be an *isolated point.*

The maximal graph of 2 points consists of a segment of length $\pi/2$. The maximal graph of 3 points is an equilateral triangle of side-length equal to $\pi/2$. Consider 3 points having a mutual distance equal to $\pi/2$. Then a point having a distance equal to $\pi/2$ from two of them coincides with the third point. Therefore in a set of more than 3 points we have $d<\pi/2$. It follows that in the maximal graph of 4 points each point is joined with each other one. In other words the maximal graph of 4 points is a *complete quadrilateral.* For supposing that a point is of order less than 3, we could isolate this point by moving it in such a way as to increase its distance from the point or from the two points it is connected with. Isolating in the same way the remaining points we would obtain a better set of 4 points.

We claim that in the elliptic plane there are exactly two kinds of equilateral complete quadrilaterals with different metrical properties. To see this we consider the spherical equivalent of such a quadrilateral. Let A, B, C, D be the four points under consideration on a sphere and A', B', C', D' the antipodal points. Choose the notations in such a way that $AB = AC = AD = d$.

Case 1. First we suppose that $BC > d$, $CD > d$, $DB > d$. Then $BC' = C'D = DB' = B'C = CD' = D'B = d$, showing that the points $A, \ldots, D'$ are the vertices of a cube (Fig. 1). We have $d = \arccos 1/3 \approx 70° 32'$.

Case 2. This is the case $BC = d$, $CD > d$, $DB > d$. Since $CD' = D'B = DB' = DC' = d$, the diameters AA', BB', CC', DD' are four of the diagonals of an icosahedron (Fig. 2). Now $d = \arccos 1/\sqrt{5} \approx 63° 26'$.

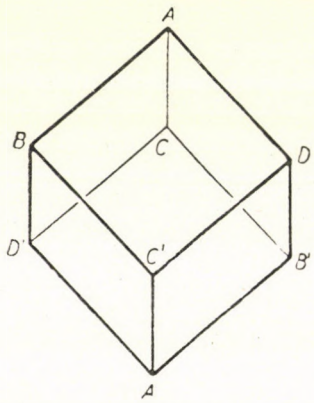


Fig. 1

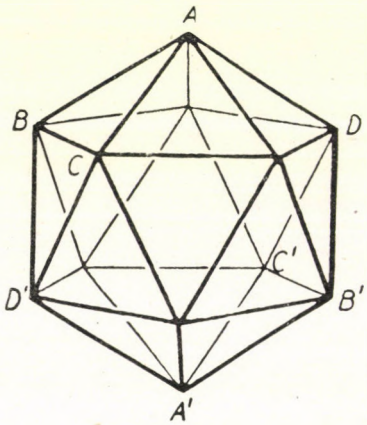


Fig. 2

The case $BC = CD = d$, $DB > d$ is the same as the Case 2 with C, A, B, D' instead of A, B, C, D. Since, furthermore, the case $BC = CD = DB = d$ cannot occure, the enumeration of the equilateral complete quadrangles is finished. We shall call the set of vertices of the obtained two quadrilaterals *cubic* and *icosahedral point-quadruples*.

Since in the cubic case the value of d is greater than in the icosahedral case, the best distribution of four points is a cubic quadruple.

Now we consider the case of 5 points. In the maximal graph of 5 points each point is at least of order three. For supposing that there is a point of order less than 3, this point could be isolated, and the above discussion shows that the remaining points must be the vertices of an equilateral complete quadrangle. But neither the cubic nor the icosahedral point-quadruple allows the possibility of a fifth point having a distance greater than d from each point of the quadruple. In fact, the open circular discs centered at the points of a cubic quadruple cover the elliptic plane completely, and in the case of an icosahedral quadruple these circles cover the plane with the exception of two points which correspond to the remaining pairs of antipodal vertices of the icosahedron.

Not all of the points can be of order 3 because otherwise the double number of edges would be 3·5. Let the point A be of order 4 and let B, C, D and E be the points A is connected with. We may suppose that $d \geqq \bar{d}$, where $\bar{d}$ is the value of d for an icosahedral quadruple (or quintuple). Then the angle ω spanned at A by any two of the points B, C, D and E satisfies the inequalities $72° \leqq \omega \leqq 144°$ with strict inequalities in the case $d > \bar{d}$, because otherwise the (elliptic) distance between these two points would be less than d. Choose the notation of the points B, C, D, E so that $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD \leqq 144°$. Then $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = 72°$. Thus one of the angles $\sphericalangle DAE$ and $\sphericalangle EAB$ equals 72° and the other equals 144°. Therefore the set of points A, B, C, D, E constitutes an icosahedral quintuple. This completes the discussion of the case of 5 points.

Recapitulating our results: *For $n \leqq 6$ the maximal graph of n points is a complete n-gon.*

Let us still point out the variety of the regular and semi-regular figures generated by the elliptic problem. For $n = 3, 4, 5$ and 6 we obtain the vertices of a regular octahedron, a cube, a pentagonal antiprism and a regular icosahedron. The best distribution of 3, 4 and 6 great circles form an octahedral, a cuboctahedral and an icosidodecahedral tessellation. According to a conjecture of A. HEPPES, for $n = 7$ the solution is given by the vertices and face-centers of a hexahedral (or octahedral) tessellation.

We include a list of publications dealing with the spherical problem. Besides the 13 authors it involves the names of 7 further mathematicians (K. BÖRÖCZKY, L. DANZER, Miss G. FREY, Miss J. GYŐRFFY, H. HADWIGER, D. KÓLYA, A. TARSKI) who contributed to this problem. The book "Regular Figures" of the author contains additional references about the famous "problem of thirteen spheres" which is closely related to the spherical problem for 13 points.

Bibliography concerning the spherical problem

H. S. M. COXETER, The problem of packing a number of equal non-overlapping circles on a sphere, *Transactions New York Acad. Sci.*, **24** (1962), pp. 320–31.

L. FEJES TÓTH, Über eine Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems, *Jber. dtsch. Math. Ver.*, **53** (1943), pp. 66–8.

L. FEJES TÓTH, On the densest packing of spherical caps, *Amer. Math. Monthly*, **56** (1949), pp. 330–1.

L. FEJES TÓTH, *Regular Figures* (Oxford–London–New York–Paris, 1964).

M. GOLDBERG, Packing of 33 equal circles on a sphere, *Elem. Math.*, **18** (1963), pp. 99–100.

W. HABICHT and B. L. VAN DER WAERDEN, Lagerung von Punkten auf der Kugel, *Math. Annalen*, **123** (1951), pp. 223–34.

E. JUCOVIČ, Umiestnenie 17, 25 a 33 bodov na guli, *Mat. Fyz. Časopis. Slovensk Akad. Vied.*, **9** (1959), pp. 173–6.

G. KRAMMER, Megjegyzések a gömbnek körökkel való kitöltéséhez és lefedéséhez, *Mat. Lapok*, **11** (1960), pp. 120–3.

J. MOLNÁR, Körelhelyezések a gömbön, *Mat. Lapok*, **4** (1953), pp. 113–23.

J. MOLNÁR, Körelhelyezések állandó görbületű felületeken, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **12** (1962), pp. 223–63.

R. M. ROBINSON, Arrangement of 24 points on a sphere, *Math. Annalen*, **144** (1961), pp. 17–48.

H. RUTISHAUSER, Über Punktverteilungen auf der Kugelfäche, *Comment. Math. Helv.*, **17** (1944–45), pp. 327–31.

K. SCHÜTTE and B. L. VAN DER WAERDEN, Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? *Math. Annalen*, **123** (1951), pp. 96–124.

J. STROHMAJER, Über die Verteilung von Punkten auf der Kugel, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.*, **6** (1963), 49–53.

P. M. L. TAMMES, On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen grains, *Rec. Trav. bot. neerl.*, **27** (1930), pp. 1–84.

B. L. VAN DER WAERDEN, Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze, *Math. Annalen*, **125** (1952), pp. 213–22.

B. L. VAN DER WAERDEN, Pollenkörner, Punktverteilungen auf der Kugel und Informationstheorie, *Die Naturwissenschaften*, **48** (1961), pp. 189–92.

SOME REMARKS ON STRONGLY MULTIPLICATIVE SYSTEMS

By

P. RÉVÉSZ (Budapest)

(*Presented by* G. ALEXITS)

Introduction

Let $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ be a probability space (i. e. Ω is an abstract space, $\mathfrak{S}$ is a σ-algebra of subsets of Ω and $\mathbf{P}$ is a probability measure defined on $\mathfrak{S}$ $(\mathbf{P}(\Omega)=1)$. Furthermore let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of uniformly bounded random variables defined on Ω with [1] $E(\xi_i)=0$, $E(\xi_i^2)=1$ (i. e. ξ_i $(i=1, 2, \ldots)$ is a measurable function with respect to $\mathfrak{S}$).

G. ALEXITS introduced the following definitions [2] (see [1]):

DEFINITION 1. The uniformly bounded sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is called a multiplicative system if

$$E(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k})=0 \qquad (i_1<i_2<\ldots<i_k;\ k=1, 2, \ldots) \tag{1}$$

DEFINITION 2. The uniformly bounded sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is called a strongly multiplicative system if the system $\{\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k}\}$ is an orthogonal system i. e. if

$$E(\xi_{i_1}^{r_1}\xi_{i_2}^{r_2}\ldots\xi_{i_k}^{r_k})=0 \qquad (i_1<i_2<\ldots<i_k;\ k=1, 2, \ldots) \tag{2}$$

where $r_1, r_2, \ldots, r_k$ can be equal to 1 or 2 but at least one element of the sequence $r_1, r_2, \ldots, r_k$ is equal to 1.

DEFINITION 3. The uniformly bounded sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is called an equinormed strongly multiplicative system (*ESMS*) if

$$E(\xi_i)=0,\ E(\xi_i^2)=1,$$

$$E(\xi_{i_1}^{r_1}\xi_{i_2}^{r_2}\ldots\xi_{i_k}^{r_k})=E(\xi_{i_1}^{r_1})E(\xi_{i_2}^{r_2})\ldots E(\xi_{i_k}^{r_k}) \qquad (i_1<i_2<\ldots<i_k;\ k=1, 2, \ldots) \tag{3}$$

where $r_1, r_2, \ldots, r_k$ can be equal to 1 or 2.

Evidently a sequence $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ of independent uniformly bounded random variables (with $E(\zeta_i)=0$, $E(\zeta_i^2)=1$) is an *ESMS*. Another example is the sequence $\{\sqrt{2}\sin n_k x\}$ on the interval $[0, 2\pi]$ if $n_{k+1}/n_k \geqq 3$ and if the probability measure $\mathbf{P}$ on the Borel measurable subsets of the interval $[0, 2\pi]$ is defined by $\mathbf{P}(A)=\frac{\lambda(A)}{2\pi}$, where λ is the common Lebesgue measure.

ALEXITS proved that an *ESMS* has the property of the independent random variables that $\sum_{i=1}^{\infty} c_i\xi_i$ is convergent if and only if $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2<\infty$. More exactly he proved

[1] Here and in what follows $E(\xi)$ means the expectation of ξ i. e. $E(\xi)=\int_{\Omega}\xi(\omega)d\mathbf{P}$.

[2] Here we give the original definitions of ALEXITS with a little modification.

THEOREM A. *If* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *is an ESMS then* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$ *is convergent if and only if* $\sum_{k=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$.

(In [1] this theorem is given in a more general form.)

The aim of the present paper is to study what other properties of the independent random variables remain valid for an *ESMS*. Namely we prove the central limit theorem and a law of iterated logarithm for *ESMS*. Let me recall here the well known forms of these theorems.

THEOREM B. *If* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ *is a sequence of independent uniformly bounded random variables with* $E(\zeta_i)=0$, $E(\zeta_i^2)=1$ *then*[3]

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_n}{\sqrt{n}}<x\right\}\to\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

for all real x.

THEOREM C. *If* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ *is a sequence of independent, uniformly bounded random variables with* $E(\zeta_i)=0$, $E(\zeta_i^2)=1$ *then*

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_n}{\sqrt{2n\log\log n}}=1\right\}=1.$$

A lot of generalizations of these theorems are known. Here we prove the following analogous forms:

THEOREM 1. *If* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *is an ESMS then*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}}<x\right\}\to\Phi(x).$$

THEOREM 2. *If* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *is an ESMS then*

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n\log\log n}}\leqq 6\right\}=1.$$

Unfortunately I cannot say anything about the question whether the constant 6 is the best possible or not. Similarly I do not know what is a lower limit of

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n\log\log n}}.$$

[3] The symbol $\mathbf{P}\{\ldots\}$ means the probability of the event in the brackets. For instance here $\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_1+\ldots+\zeta_n}{\sqrt{n}}<x\right\}$ is the $\mathbf{P}$ measure of the set of those $\omega\in\Omega$ for which the condition $\frac{\zeta_1(\omega)+\ldots+\zeta_n(\omega)}{\sqrt{n}}<x$ holds.

In the proof of Theorem 2 we make use of the following analogous of the Rademacher—Menshov inequality.

LEMMA 1. *Let* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *be an ESMS then*

$$E\{\sup_{1 \leqq j \leqq n} (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_j)^4\} = O(n^2 \log^3 n). \tag{4}$$

Let me mention that in the proof of this lemma we use only the fact that (3) holds if $k \leqq 4$. In the proof of Theorem 1 actually the condition (1) and the condition (3) in the case $k \leqq 2$ are used. It is not too difficult to show that condition (2) in itself does not imply Theorem 2.

§ 1. Proof of Theorem 1

In this proof we are making use of the classical method of characteristic functions. Let us introduce the following notations:

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_n}{\sqrt{n}} < x\right\} = F_n(x)$$

$$\varphi_n(t) = E\left(e^{it\frac{\eta_n}{\sqrt{n}}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_n(x).$$

It is enough to prove that for any t the characteristic function $\varphi_n(t)$ tends to the characteristic function of the normal distribution $\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$.

Now by the evident formula $e^z = (1+z)\, e^{\frac{z^2}{2} + o(z^2)}$ $(z \to 0)$ we have

$$\varphi_n(t) = E\left(e^{it\frac{\eta_n}{\sqrt{n}}}\right) = E\left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{it\xi_k}{\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{t^2}{2n}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2) + o(1)}\right].$$

By our conditions $\{\xi_i^2 - 1\}_{i=1}^{\infty}$ is a uniformly bounded orthogonal sequence, therefore by the strong law of large numbers

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \to 1\right\} = 1.$$

Evidently the sequence

$$e^{-\frac{t^2}{2n}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2) + o(1)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{it\xi_k}{\sqrt{n}}\right)$$

is uniformly bounded therefore by the Lebesgue theorem we have

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

So our theorem is proved.

§ 2. Proof of Lemma 1

It is much easier to prove that (4) holds if we substitute the right hand side of (4) by $O(n^2 \log^4 n)$. For our purpose this fact would be enough but I think that the mentioned, sharper version is interesting in itself. Of course (4) may be not the best possible inequality. Without the loss of generality we can assume that $n=2^v$.

First of all we introduce the following notations:

$$\eta_j = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_j$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha+1} + \xi_{\alpha+2} + \ldots + \xi_\beta$$

(where $\alpha = \mu 2^k$; $\beta = (\mu+1)\,2^k$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, 2^{v-k}-1$; $k = 0, 1, 2, \ldots, v-1$)

$$S = \sum_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^4 + 2 \sum_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^2 \sum_{(\gamma,\delta)\subset(\alpha',\beta')} \sigma_{\gamma\delta}^2$$

(where $\alpha' = (\mu+1)2^k$ and $\beta' = (\mu+2)\,2^k$ if $\alpha = \mu 2^k$ and $\beta = (\mu+1)\,2^k$). Here the sign

$$\sum_{(\gamma,\delta)\subset(\alpha',\beta')} \sigma_{\gamma\delta}^2 \tag{5}$$

means the sum of those $\sigma_{\gamma\delta}^2$ for which the interval (γ, δ) is a subset of the interval (α', β'). Especially if $\mu = 2^{v-k}-1$ then (5) is an empty sum (it is equal to 0).

First of all we have to see that

$$\max_{1 \le j \le 2^v} (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_j)^4 \le v^2 S.$$

To show it we consider the random variable η_j as the sum of some $\sigma_{\alpha\beta}$. Let us put

$$\eta_j = \sum_i \sigma_{\alpha_i \beta_i}$$

where $\beta_1 - \alpha_1 > \beta_2 - \alpha_2 > \ldots$. Evidently the number of the members of the sum $\sum_i \sigma_{\alpha_i\beta_i}$ is less than v. Therefore by the Schwarz inequality

$$\eta_j^4 = \left(\sum_i \sigma_{\alpha_i\beta_i}\right)^4 \le \left(v \sum_i \sigma_{\alpha_i\beta_i}^2\right)^2 \le v^2 S \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

The last step of this proof is to show that

$$E(S) = O(v 2^{2v}).$$

It is easy to see by a simple combinatorial argument that

$$E\left(\sum_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^4\right) = 2^{2v}$$

and

$$E\left(\sum_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^2 \sum_{(\gamma,\delta)\subset(\alpha',\beta')} \sigma_{\gamma\delta}^2\right) = \sum_{\alpha,\beta} E\left(\sigma_{\alpha,\beta}^2\right) \sum_{(\gamma,\delta)\subset(\alpha',\beta')} E\left(\sigma_{\gamma,\delta}^2\right) = \sum_{(\alpha,\beta)} (\beta-\alpha) \sum_{(\gamma,\delta)\subset(\alpha',\beta')} (\delta-\gamma) =$$

$$= O(v \cdot 2^{2v}).$$

So our Theorem is proved.

§ 3. Proof of Theorem 2

Let us try to estimate the expectation of $e^{\lambda_n \eta_n - \mu_n}$ where

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{\log\log n}{n}}$$

$$\mu_n = (6+\varepsilon)\log\log n \qquad (0<\varepsilon<1).$$

Then (by the inequality $e^x \leqq 1 + x + x^2$ (if $|x|$ is small enough)) for sufficiently large n we have

$$E(e^{\lambda_n \eta_n - \mu_n}) = e^{-\mu_n} E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_n \xi_k}\right) \leqq e^{-\mu_n} E\left(\prod_{k=1}^{n} (1 + \lambda_n \xi_k + \lambda_n^2 \xi_k^2)\right) =$$

$$= e^{-\mu_n}(1+\lambda_n^2)^n = e^{-\mu_n}\left[\left(1+\frac{\log\log n}{n}\right)^{\frac{n}{\log\log n}}\right]^{\log\log n} \leqq e^{-\mu_n} e^{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\log\log n} =$$

$$= e^{-\left(5+\frac{\varepsilon}{2}\right)\log\log n} = \frac{1}{(\log n)^{5+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Therefore putting $n = n_k = \left[\exp\left(k^{\frac{1}{5}-\frac{\varepsilon}{100}}\right)\right]$ we obtain

$$E(e^{\lambda_{n_k}\eta_{n_k} - \mu_{n_k}}) \leqq \frac{1}{k^{\left(1+\frac{\varepsilon}{25}\right)}}$$

and so

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(e^{\lambda_{n_k}\eta_{n_k} - \mu_{n_k}}) < +\infty. \tag{6}$$

By the Beppo Levi theorem (6) implies the convergence in Ω almost everywhere of the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_{n_k}\eta_{n_k} - \mu_{n_k}}$$

hence

$$e^{\lambda_{n_k}\eta_{n_k} - \mu_{n_k}} \leqq 1$$

for almost all ω i. e.

$$\lambda_{n_k}\eta_{n_k} - \mu_{n_k} \leqq 0$$

and

$$\frac{\lambda_{n_k}}{\mu_{n_k}}\eta_{n_k} = \frac{\eta_{n_k}}{\sqrt{n_k \log\log n_k}} \frac{1}{6+\varepsilon} \leqq 1 \quad \text{a. e.}$$

if n_k is great enough. More exactly for almost all $\omega \in \Omega$ there exists a $k(\omega)$ such that

$$\frac{\eta_{n_k}(\omega)}{\sqrt{n_k \log\log n_k}} \leqq 6+\varepsilon$$

if $k \geqq k(\omega)$. Or by other words

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\eta_{n_k}}{\sqrt{n_k \log\log n_k}} \leqq 6+\varepsilon\right\} = 1 \tag{7}$$

but ε is an arbitrary number, therefore we have

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\eta_{n_k}}{\sqrt{n_k \log\log n_k}} \leqq 6\right\} = 1.$$

To prove our theorem we have to estimate

$$\frac{\eta_n - \eta_{n_k}}{\sqrt{n \log\log n}}$$

if n goes between n_k and n_{k+1}. Evidently the interval $(n_k, n_{k+1}]$ contains $O\left(\frac{\exp(k^{1/5-\varepsilon/100})}{k^{4/5+\varepsilon/100}}\right)$ integers, hence we have by our Lemma 1

$$E\left\{\max_{n_k < n \leqq n_{k+1}} \left(\frac{\eta_n - \eta_{n_k}}{\sqrt{n \log\log n}}\right)^4\right\} = O\left(\frac{1}{k^{1+\frac{\varepsilon}{50}}}\right).$$

Therefore our theorem is proved by the Beppo Levi theorem.

(Received 9 April 1965)

References

[1] G. ALEXITS, Convergence problems of orthogonal series, *Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences* (Budapest, 1961).

ON GENERALIZED GRAPHS

By

B. BOLLOBÁS (Budapest)

(*Presented by* P. ERDŐS)

A *generalized graph* consists of a set of n vertices and a collection of k-tuples of these vertices (cf. TURÁN [1]). In what follows we shall refer to such a configuration as an *edge-graph* if $k=2$ and, usually, simply as a graph if $k>2$. A *complete m-graph* has m vertices and $\binom{m}{k}$ k-tuples. We say that a graph G is *m-saturated* if it contains no complete m-graph but loses this property when any new k-tuple is added.

TURÁN [2] proved the following theorem on edge-graphs in 1941: Let $n=g(m-1)+r$, where g, m, and r are integers such that $g\geqq 1$, $m\geqq 3$, $0\leqq r\leqq m-1$, and $n\geqq m$. Then an m-saturated edge-graph of n vertices can have at most

$$E_m=\frac{m-2}{2(m-1)}(n^2-r^2)+\binom{r}{2}$$

edges. The dual problem was recently solved by ERDŐS, HAJNAL, and MOON [3] who showed that such an edge-graph must have at least

$$e_m=(m-2)(n-m+2)+\binom{m-2}{2}=\frac{m-2}{2}(2n-m+1)$$

edges. These two results can be combined as follows: If G is an m-saturated edge-graph of n vertices and e edges, then

$$e_m\leqq e\leqq E_m.$$

The extremal edge-graphs for which $e=e_m$ or $e=E_m$ are also characterized in these papers.

Corresponding problems can be stated for generalized graphs. Let G be a $(k+l)$-saturated graph with n vertices and t k-tuples, where it is understood that $k+l\leqq n$. Let the maximum and minimum values of t over the class of such graphs G be denoted by $T_{k,l}$ and $t_{k,l}$, respectively. The value of $T_{k,l}$ is not known when $k\geqq 3$ and $l\geqq 1$. (Some rather rough estimates are contained in [4].) The object in this paper is to determine $t_{k,l}$ for all k and l.

Let $M(n,k,l)$ be the generalized graph of n vertices defined as follows: If the vertices have been numbered 1, 2, ..., n then the k-tuples are all those which contain

at least one of the first l vertices. $M(n, k, l)$ is obviously $(k+l)$-saturated, and it has

$$t(n, k, l)=\binom{n}{k}-\binom{n-l}{k}$$

k-tuples.

We now prove the following theorem.

THEOREM 1. $$t_{k,l}=t(n, k, l),$$

and $M(n, k, l)$ is the only $(k+l)$-saturated graph with n vertices and $t(n, k, l)$ k-tuples.

Our proof uses the following lemma.

LEMMA. *Let I denote an index set. For every $i\in I$ A_i and B_i are subsets of a set P with p elements satisfying the following conditions:*

1. $A_i\cap B_i=\emptyset$.
2. $A_i\not\subset A_j\cup B_j$, if $i\neq j$.

If there are a_i and b_i elements in A_i and B_i, respectively, then

$$(*)\qquad \sum_{i\in I}\frac{1}{\binom{p-b_i}{a_i}}\leqq 1,$$

with equality if and only if $B_i=B$ for all $i\in I$ and the sets A_i are the q-tuples of the set $P-B$ for some value of q.

REMARK. It follows from the second condition that no subset A_i can be the null set; B_i, however, may be the null set.

PROOF OF THE LEMMA. We use induction on p. If $p=1$ there can be only one pair of sets A_i and B_i; for these sets $a_i=1$ and $b_i=0$, so the inequality holds.

Suppose the inequality holds for all sets P with fewer than p elements and consider a set P with p elements. If there is an index $i_0\in I$ such that $a_{i_0}+b_{i_0}=p$, then $A_{i_0}\cup B_{i_0}=P$ by condition 1; hence $I=\{i_0\}$, by condition 2, and so

$$\sum_{i\in I}\frac{1}{\binom{p-b_i}{a_i}}=\frac{1}{\binom{p-b_{i_0}}{a_{i_0}}}=1.$$

Therefore, we may suppose that $a_i+b_i<p$ for all i. Let $P_1, P_2, \ldots, P_p$ denote the $(p-1)$-element subsets of P. For any integer v between 1 and p let

$$I_v=\{i: i\in I \text{ and } A_i\subset P_v\}$$

and

$$B_i^{(v)}=B_i\cap P_v.$$

The number of elements in $B_i^{(v)}$ will be denoted by $b_i^{(v)}$.

The sets A_i and $B_i^{(v)}$ for $i \in I_v$ satisfy the conditions of the lemma with respect to the set P_v; from the induction hypothesis it follows, therefore, that

$$\sum_{i \in I_v} \frac{1}{\binom{p-1-b_i^{(v)}}{a_i}} \leqq 1. \tag{1}$$

Consequently,

$$\sum_{v=1}^{p} \sum_{i \in I_v} \frac{1}{\binom{p-1-b_i^{(v)}}{a_i}} \leqq p. \tag{2}$$

To express the left-hand side in another way we determine the total contribution of terms associated with an arbitrary value of the index i.

There are $p-a_i-b_i$ sets P_v containing $A_i \cup B_i$. For each of these value of v there is a contribution of $\binom{p-1-b_i}{a_i}$ to the above sum. There are b_i sets P_v which contain A_i but not B_i. For each of these values of v there is a contribution of $\binom{p-b_i}{a_i}$. There are a_i sets P_v not containing A_i but these will give no contribution to the sum (2), since i does not belong to the corresponding sets I_v.

Therefore, the contribution of terms associated with the index i is

$$\frac{(p-a_i-b_i)}{\binom{p-1-b_i}{a_i}} + \frac{b_i}{\binom{p-b_i}{a_i}} = \frac{p}{\binom{p-b_i}{a_i}}.$$

Hence, inequality (2) is equivalent to the inequality

$$\sum_{i \in I} \frac{p}{\binom{p-b_i}{a_i}} \leqq p.$$

But this implies that $(*)$ holds, as was to be shown.

We now consider the cases for which equality holds in $(*)$. From the preceding argument it follows that this happens if and only if equality holds for each value of v in (1), i. e. if and only if $(* *)$ the sets A_i and B_i^v, for $i \in I_v$, have the property stated at the conclusion of the lemma for each value of v.

We shall show that for arbitrary i and j the sets A_i and A_j have the same number of elements and that $B_i = B_j$.

If $A_i \cup A_j = R \neq P$, then there is a set $P_{v_0} \supset R$. From this it follows, appealing to $(* *)$, that A_i and A_j have the same number of elements and $B_i \cap R = B_j \cap R = \varnothing$. Now we prove $B_i = B_j$. Suppose this does not hold. Then we may suppose that for an element x $x \in B_i, x \notin B_j$. Let y and z be elements of P such that $y \in A_i$, $y \notin A_j$; $z \notin A_i \cup B_i$, $z \in A_j$ (such elements exist because $A_i \subset A_j$, and $A_j \subset A_i \cup B_i$). The set $P_{v_1} = P - y$ contains A_j so by $(* *)$ there is an index k such that $A_k = A_j - z + x$ and so $x \notin B_k$. But then the set $P_{v_2} = P - z$ contains A_i, A_k and B_i, hence by $(* *)$ $B_k \cap P_{v_2} = B_i$, which is impossible, for the left hand side does not contain the element x of B_i.

If on the other hand $A_i \cup A_j = P$, we distinguish two possibilities:

1. The sets B_i, B_j are empty. If A_i and A_j have $p-1$ elements, the statement is true. If not, we may suppose A_i has at most $p-2$ elements. Let $P_{v_i} \supset A_{v_i}$ and $P_{v_j} \supset A_{v_j}$ be sets of $p-1$ elements. Then $P_{v_i} \cap P_{v_j}$ has $p-2$ elements. According to $(* *)$ there is a set $A_k \subset P_{v_i} \cap P_{v_j}$ with the same number of elements as A_i, and applying $(* *)$ for P_{v_j} this implies that A_k and A_j, so A_i, A_k and A_j all have the same number of elements.

2. The set B_i is not empty. Let x, y, z be three elements of P satisfying the following requirements: $x \in A_i$, $x \notin A_j$, $y \in B_i$, $z \in A_j$ and $z \notin A_i \cup B_i$. (Such elements exist by condition 2 of the lemma). The set $P_v = P - y$ contains A_i, so there is an index $k \in I$ such that $A_k = A_i - x + z$, for this set is in P_v and does not meet B_i. It is clear that $y \notin A_k \cup A_i$ and $x \notin A_k \cup A_j$, so neither $A_k \cup A_i$ nor $A_k \cup A_j$ is the set P. Consequently by the preceding argument, A_i, A_j and A_k all have the same number of elements and $B_i = B_j = B_k$.

This shows that if equality holds in $(*)$, then $B_i = B$ for all $i \in I$ and the sets A_i are certain q-element subsets of $P - B$. Since equality does hold in $(*)$ it must be that the sets A_i are all the q-element subsets of $P - B$.

This suffices to complete the proof of the lemma, by induction.

PROOF OF THE THEOREM. Let G be a $(k+l)$-saturated generalized graph of n vertices. We denote by S_α $(\alpha \in A)$ the various k-tuples belonging to G and by N_β $(\beta \in B)$ the remaining k-tuples of vertices. The vertices not belonging to the k-tuple S_α will be denoted by $\bar{S}_\alpha$. Since G is saturated we can certainly choose, for each set N_β, at least one set K_β of $k+l$ vertices all k-tuples of which belong to the graph G except the k-tuple N_β. Suppose, therefore, that $N_\beta, S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_s}$ are the k-tuples of K_β. If S_{α_i} has m vertices in common with N_β, then we say that N_β assigns a weight $\dfrac{1}{\binom{n-l-m}{k-m}}$ to S_{α_i}, for $\alpha_i \in A$ and $\beta \in B$.

(a) Let us denote by W_0 the weight assigned by N_β to the set of k-tuples of K_β. It is clear that W_0 is independent of β and G, and that each N_β assignes a weight of at least W_0 to the set of k-tuples of G.

(b) We shall show that the k-tuples N_β altogether assign a weight of at most 1 to an arbitrary S_α. Suppose S_α has a weight assigned to it by $N_{\beta_1}, \ldots, N_{\beta_r}$ and let $A_i = \bar{S}_\alpha \cap N_\beta$ for $i = 1, 2, \ldots, r$. Then A_i is the set of vertices of N_{β_i} which are not in S_α.

(c) Let B_i denote the set of vertices of K_{β_i} which are neither in N_{β_i} nor in S_α. Then $A_i \cap B_i = \varnothing$, and there are l vertices in $A_i \cup B_i$. $A_j \not\subset A_i \cup B_i$ if $i \neq j$, for N_{β_i} is the only k-tuple of K_{β_i} not belonging to G, and $A_j \subset A_i \cup B_i$ would imply $N_{\beta_j} \subset K_{\beta_i}$.

If we let m_i denote the number of elements of A_i, then to prove statement (b) we need only show that

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{\binom{(n-l)-(k-m_i)}{k-(k-m_i)}} \leqq 1, \quad \text{where} \quad I = (1, 2, \ldots, r). \tag{3}$$

But statement (c) means that the sets A_i and B_i, for $i \in I$, satisfy the conditions of our lemma with $P = \bar{S}_\alpha$, $p = n-k$, $a_i = m_i$, and $b_i = l - m_i$. Hence,

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{\binom{(n-k)-(l-m_i)}{m_i}} = \sum_{i \in I} \frac{1}{\binom{(n-k)-(k-m_i)}{k-(k-m_i)}} \leqq 1.$$

This proves statement (b).

Let there be t k-tuples S_α in G. Then there are $\binom{n}{k} - t$ k-tuples N_β. It follows from (a) that the k-tuples N_β altogether assign a weight of at least $\left(\binom{n}{k} - t\right) W_0$ to all the k-tuples S_α. From (b) it follows that the total weight assigned to the k-tuples S_α is at most t. Hence,

$$t \geqq \left(\binom{n}{k} - t\right) W_0,$$

or

$$t \geqq \frac{W_0 \binom{n}{k}}{1 + W_0}.$$

Equality holds here if and only if each N_β assignes a weight exactly W_0 and if each S_α is assigned the weight 1. It is easy to check that this is true for the graph $M(n, k, l)$. Therefore, t is at least as large as the number of k-tuples in $M(n, k, l)$, i. e. $t \geqq t(n, k, l)$.

If $t = t(n, k, l)$ for a graph G, then each N_β must assign a weight exactly W_0 and equality must hold in (3) for all $\alpha \in A$. Referring to the lemma this implies that the following two statements hold:

(4) For each k-tuple N_β not belonging to G there is exactly one set K_β of $k+l$ vertices such that N_β is the only k-tuple of K_β, since otherwise N_β would assign a weight more than W_0 to the set of S_α's.

(5) If $S_\alpha = (x_1, \ldots, x_k)$ is an arbitrary k-tuple of G, there is a set of j vertices $(0 \leqq j \leqq l-1)$: $T = (x_{k+1}, \ldots, x_{k+j})$ such that if $y_{k+j+1}, y_{k+j+2}, \ldots, y_{k+l}$ are arbitrary vertices of G $(x_\mu \neq y_\nu)$, then the set $(x_1, \ldots, x_{k+j}, y_{k+j+1}, \ldots, y_{k+l})$ contains only one k-tuple N_β not belonging to G. Fort his k-tuple N_β: $N_\beta \cap T = \varnothing$ and $S_\alpha \cap N_\beta$ has $k+j-l$ elements.

Suppose $t = t(n, k, l)$ for a graph G, we shall prove $G = M(n, k, l)$. In the following S_α and N_β will mean k-tuples belonging and not belonging to G respectively, S_{α_i} and N_{β_i} will denote special k-tuples of the corresponding type.

(6) If $l = 1$, (4) and (5) imply that for any set of $k+1$ vertices of G either all the k-tuples of this set are N_β's or only one of them; moreover for any k-tuple N_β there is only one set of $k+1$ vertices containing N_β, all the other k-tuples of which are S_α's; consequently for other sets of $k+1$ vertices containing N_β all the k-tuples of these sets are N_β's.

Let $K = (x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ be a set containing both S_α and N_β k-tuples: $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = S_{\alpha_1}$ and $(x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}) = N_{\beta_1}$. Let y be an arbitrary vertex

$(y \neq x_i)$. By (6) all the k-tuples of the set $Y=(y, x_2, \ldots, x_{k+1})$ are N_β's. This implies that if S_{α_2} is an arbitrary k-tuple of K belonging to G, then all the k-tuples of $S_{\alpha_2}+y$ are S_α's, except the k-tuple in Y. From this it follows that if a k-tuple of $Y+x_1$ contains x_1, it is a k-tuple S_α, otherwise it is a k-tuple N_β. By using this method repeatedly we get that in G all the k-tuples containing x_1 are S_α's, and all the others N_β's, i. e. $G=M(n, k, 1)$.

If $l \geqq 2$, let $S_{\alpha_1}=(x_2, x_3, \ldots, x_{k+1})$ be an arbitrary k-tuple in $K_{\beta_1}=$ $=(x_1, x_2, \ldots, x_{k+l})$, having $k-1$ common vertices with $N_{\beta_1}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. To prove $G=M(n, k, l)$ we must show that no N_β meets $K_{\beta_1}-N_{\beta_1}=(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})$. In order to verify this it is sufficient to show, that for an arbitrary vertex x_0 $(x_0 \neq x_1, \ldots, x_{k+l})$ $(x_0, x_2, \ldots, x_k)$ is the k-tuple of $(x_0, x_2, x_3, \ldots, x_{k+l}) = K_{\beta_2}$ not belonging to G.

Suppose that for a vertex x_0 this is not true. Appealing to (5) K_{β_2} contains a k-tuple, not belonging to G, and this k-tuple does not meet the set $(x_{k+2}, \ldots, x_{k+l})$. By a simple change of notation we can obtain that $(x_0, x_3, x_4, \ldots, x_{k+1})=N_{\beta_2}$ is this k-tuple. Then $(x_3, x_4, \ldots, x_{k+2}) = S_{\alpha_2} \subset K_{\beta_1}$ is a k-tuple of G, $S_{\alpha_2} \subset K_{\beta_2}$, and so by (5) it has the same number of common vertices with N_{β_1} as with N_{β_2}. This is a contradiction since S_{α_2} has $k-2$ and $k-1$ common vertices with the sets N_{β_1} and N_{β_2} respectively. This suffices to complete the proof of theorem 1.

A generalized graph G is said to be *p-critical* if the smallest number of vertices that can represent all the k-tuples of G is p, but upon omitting any k-tuple the remaining k-tuples can be represented by $p-1$ vertices. The following is an immediate consequence of theorem 1.

THEOREM 2. *A p-critical generalized graph can have at most* $\binom{p+k-1}{k}$ *k-tuples and the only p-critical graphs with this many k-tuples consist of a complete* $(p+k-1)$*-graph and isolated vertices.*

PROOF. If G has n vertices and is p-critical, then it is easily seen that the complementary graph of G is $(n-p+1)$-saturated. The result now follows from theorem 1.

REMARK. In proving theorem 1 we actually proved the following result: If G has n vertices and the addition of any new k-tuple increases the number of complete $(k+l)$-graphs in G, then G has at least $t(n, k, l)$ k-tuples with equality holding only if $G=M(n, k, l)$.

(Received 13 April 1965)

References

[1] P. TURÁN, Research Problems, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **6** (1961), pp. 417–423.
[2] P. TURÁN, On an extremal problem in graph theory, *Mat. Fiz. Lapok*, **48** (1941), pp. 436–452.
[3] P. ERDŐS, A. HAJNAL and J. W. MOON, A problem in graph theory, *Amer. Math. Monthly*, **71** (1964), pp. 1107–1110.
[4] GY. KATONA, T. NEMETZ and M. SIMONOVITS, On a graph-problem of Turán, *Mat. Lapok*, **15** (1964), pp. 228–238.

UNIQUE PRIME FACTORIZATION IN IMAGINARY QUADRATIC NUMBER FIELDS

By

EDIT LÁNCZI (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

We shall consider definite, non equivalent quadratic forms

$$ax^2+bxy+cy^2 \qquad (a>0)$$

with relatively prime integral coefficients. Let d denote the discriminant of these quadratic forms, i. e.

$$d = b^2-4ac.$$

It is obvious that $d\equiv 0$ or $1 \pmod 4$. Let $h(d)$ denote the class number of the mentioned quadratic forms.

HEILBRONN and LINFOOT [3], [4] gave a non-elementary proof for the existence of at most ten negative fundamental discriminants for which

$$h(d)=1.$$

Of these nine d are known, namely

$$d = -3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67, -163.$$

DICKSON has proved that no more d exists until $-15\cdot 10^5$. D. H. LEHMER improved this limit to $-5\cdot 10^9$.

It is known, that if P denotes the rational field, then one can make a one-to-one correspondence between the ideal classes of $P(\sqrt{d})$ and the classes of the mentioned quadratic forms. Thus the theorem of HEILBRONN and LINFOOT implies that in the mentioned nine cases the class number of $P(\sqrt{d})$ is 1, and this can be possible at most for one further negative d.

Recall that if the number of the ideal classes is 1, then the fundamental theorem of arithmetic holds for the integers of $P(\sqrt{d})$. Thus in the case of the mentioned nine d, the integers of $P(\sqrt{d})$ form a unique factorization domain.

If $|d|\leqq 11$, the mentioned domains are Euclidean. On the other hand, it is known that there does not exist more Euclidean rings among the integers of imaginary quadratic fields. Thus in the first five cases the Euclidean algorithm is a natural tool for proving the fundamental theorem of arithmetic. But in the last four cases, — as far as I know — there does not exist any proof which does not make use of the ideal classes. [1]

[1] HASSE [2] gave by ideal theoretic methods a necessary and sufficient condition for a domain of integrity to be a unique factorization domain, but he has not considered which algebraic number rings satisfy his conditions.

In this paper we are giving an elementary proof of the fundamental theorem of arithmetic for the integers of the mentioned nine fields $P(\sqrt{d})$ by making no use of Euclidean algorithm or ideal theory.

This proof is much shorter even in the Euclidean cases than the usual proofs, and besides, the method yields some information about the possible tenth imaginary $P(\sqrt{d})$.

Let $E(d)$ denote the ring of integers of the algebraic number field $P(\sqrt{d})$. We shall call the elements of $E(d)$ $E(d)$-integers. These are of the form $a+b\vartheta$ where a and b are rational integers and

$$\vartheta=\frac{1+\sqrt{d}}{2} \quad \text{if} \quad d=4k+1$$

and

$$\vartheta=\frac{\sqrt{d}}{2} \quad \text{if} \quad d=4k$$

(k is an integer).

It is known that the units of $E(d)$ are:

$$\pm 1, \quad \pm\vartheta, \quad \pm(-1+\vartheta) \quad \text{if} \quad d=-3$$

$$\pm 1 \quad \pm\vartheta \quad \text{if} \quad d=-4$$

and

$$\pm 1 \quad \text{for the other } d.$$

Let $N(\alpha)=|\alpha|^2$ denote the norm of the $E(d)$-integer α. It is easily shown that

$$N(x+y\vartheta) = x^2+xy+y^2 \quad \text{if} \quad d=-3$$

$$N(x+y\vartheta) = x^2+y^2 \quad \text{if} \quad d=-4$$

$$N(x+y\vartheta) = x^2+xy+2y^2 \quad \text{if} \quad d=-7$$

$$N(x+y\vartheta) = x^2+2y^2 \quad \text{if} \quad d=-8$$

$$N(x+y\vartheta) = x^2+xy+3y^2 \quad \text{if} \quad d=-11$$

$$N(x+y\vartheta) = x^2+xy+5y^2 \quad \text{if} \quad d=-19$$

$$N(x+y\vartheta) = x^2+xy+11y^2 \quad \text{if} \quad d=-43$$

$$N(x+y\vartheta) = x^2+xy+17y^2 \quad \text{if} \quad d=-67$$

$$N(x+y\vartheta) = x^2+xy+41y^2 \quad \text{if} \quad d=-163.$$

Recall that $E(d)$-integer α, different from 0 and unit, is called irreducible, if $\alpha=\beta\gamma$ ($\beta, \gamma \in E(d)$) implies that either β or γ is a unit.

If the norm of an $E(d)$-integer is a rational prime, then the $E(d)$-integer is irreducible.

THEOREM. *Let*

$$d=-3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67, -163.$$

Then every $E(d)$-integer different from 0 and units has a factorization into a finite number of irreducible $E(d)$-integers and such a factorization is unique apart from unit factors and the arrangement of the factors.[2]

PROOF. The proof of the decomposibility runs as usual. It is based on that if a product does not contain unit factors, then the norm of the product is greater than the norms of its factors.

We prove the uniqueness of the factorization by a unified method for every fixed d by induction on the norm of the $E(d)$-integers.

1. Let α be an $E(d)$-integer such that

$$N(\alpha)=2 \quad \text{if} \quad d=-4,\ -7,\ -8$$

$$N(\alpha)=3 \quad \text{if} \quad d=-3,\ -11$$

$$N(\alpha)=4 \quad \text{if} \quad d=-19,\ -43,\ -67,\ -163$$

these being the least values of norms of $E(d)$-integers different from 0 and units.

Then in the cases $N(\alpha)=2, 3$ the integer α is irreducible. The case $N(\alpha)=4$ occurs among the mentioned discriminants d only if $\alpha=\pm 2$ and these numbers are irreducible too. So the theorem holds for α if $N(\alpha)$ is as above.

2. Let us suppose that the theorem holds for every $E(d)$-integer, whose norm is less then n. We shall prove that it holds for every $E(d)$-integer α with norm n.

If, on the contrary, the theorem were false for α, then α would have at least two different decompositions

$$\alpha=\pi_1\pi_2\ldots\pi_r \tag{1}$$

and

$$\alpha=\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_s \tag{2}$$

where π_ν and ϱ_μ are irreducible $E(d)$-integers such that $r\geqq 2$, $s\geqq 2$ and

$$\pi_\nu \neq \varepsilon\varrho_\mu \qquad (\varepsilon \text{ is a unit}).$$

Let π_1 have the minimal norm among the π_ν, ϱ_μ, and suppose

$$N(\varrho_1)\leqq N(\varrho_2)\leqq\ldots\leqq N(\varrho_s);$$

and so

$$N(\pi_1)\leqq N(\varrho_1).$$

Let us consider

$$\alpha_0=\alpha\xi-\frac{\pi_1}{\varrho_1}\alpha\eta=\varrho_2\ldots\varrho_s(\varrho_1\xi-\pi_1\eta) \tag{3}$$

where the non-zero $E(d)$ integers ξ and η will be later chosen suitably. Obviously, α_0 is an $E(d)$ integer divisible by π_1. We shall show that ξ and η can be chosen such that α_0 is different from 0, $N(\alpha_0)$ is less than n and α_0 has again at least two different decompositions into irreducible factors, — which will be an obvious contradiction.

[2] After having prepared my paper, I have been informed that in the Czechoslovakian Mathematical Congress (Prague, 1949) J. MAŘIK gave a talk about this theorem. A short summary of his talk has been published in Czech (Casopis pro pestovani 1950 (164)). In his letter J. MAŘIK informed me that neither his proof nor the main ideas of his proof have been published anywhere.

If α_0 were 0, then

$$\varrho_1\xi=\pi_1\eta$$

i. e.

$$\pi_1|\varrho_1\xi$$

would follow. Thus, if ξ can be chosen so as to satisfy

$$N(\varrho_1\xi)<N(\alpha)$$

then $\varrho_1\xi$ has by the inductive hypothesis a unique factorization into irreducible factors and thus owing to $\pi_1\nmid\varrho_1$, if we choose ξ such, that

$$\pi_1\nmid\xi$$

then $\alpha_0\neq 0$ will follow.

In order to fulfill

$$N(\alpha_0)<N(\alpha)$$

we have to choose — according to (3) — the $E(d)$-integers ξ and η such that

$$|\varrho_1\xi-\pi_1\eta|<|\varrho_1|$$

i. e.

$$\left|\xi-\frac{\pi_1}{\varrho_1}\eta\right|<1.$$

Since π_1 does not occur in the decomposition of $\varrho_1\xi$ for a suitable ξ, it cannot occur in the decomposition of $\varrho_1\xi-\pi_1\eta$ either. Therefore (3) implies that α_0 has at least two distinct decompositions into irreducible factors.

Summarizing, we have to choose the $E(d)$-integers ξ and η such that

(4)
a) $\left|\xi-\frac{\pi_1}{\varrho_1}\eta\right|<1$

b) $\pi_1\nmid\xi$

c) $|\xi|<|\varrho_2\cdots\varrho_s|$.

We are going to prove that such a choice of the $E(d)$-integers ξ and η is possible.

Consider the lattice of the $E(d)$-integers. This is a parallelogram lattice in the plane. Figures 1 and 2 show the cases $d=4k+1$ and $d=4k$, respectively.

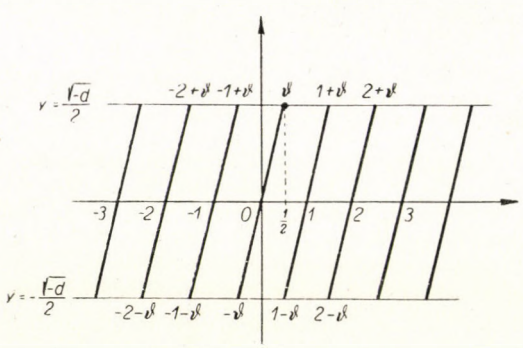


Fig. 1

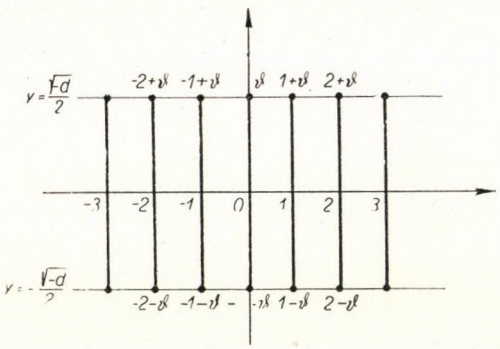


Fig. 2

The neighbouring sides of the fundamental parallelogram of the lattice are of length 1 and $|\vartheta|$, where

$$|\vartheta| = \sqrt{\frac{1-d}{4}} \quad \text{if} \quad d = 4k+1$$

(5)

$$|\vartheta| = \sqrt{\frac{-d}{4}} = \frac{\sqrt{-d}}{2} \quad \text{if} \quad d = 4k.$$

Let m denote the greater height of the fundamental parallelogram. Then

(6)
$$m = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{-d}}{2} < |\vartheta| & \text{if} \quad d = 4k+1 \\ \dfrac{\sqrt{-d}}{2} = |\vartheta| & \text{if} \quad d = 4k \end{cases}$$

Since $N(\pi_1) \leqq N(\varrho_1)$, therefore the point, corresponding to the number $\frac{\pi_1}{\varrho_1}$ lies in the interior or on the circumference of the unit circle having the origin 0 as centre.

Let us consider the numbers $\frac{\pi_1}{\varrho_1}\eta$, when η runs over the lattice points of the lattice R.

Multiplication by $\frac{\pi_1}{\varrho_1}$ means a contraction of the lattice R in the ratio $\left|\frac{\pi_1}{\varrho_1}\right|$ ($\leqq 1$) and a rotation of angle $\arg \frac{\pi_1}{\varrho_1}$ around 0, so the numbers $\frac{\pi_1}{\varrho_1}\eta$ form a parallelogram lattice R', whose fundamental parallelogram is similar to that of the lattice R. Thus the lengths of the sides of the fundamental parallelogram in R' are

(7)
$$\left|\frac{\pi_1}{\varrho_1}\right| \leqq 1 \quad \text{and} \quad \left|\frac{\pi_1}{\varrho_1}\right| \leqq |\vartheta|.$$

The greater height is of length

(8)
$$\left|\frac{\pi_1}{\varrho_1}\right| m \leqq m.$$

We see that requirement a) is fulfilled it R has a lattice point ξ and R' has a lattice point $\frac{\pi_1}{\varrho_1}\eta$, whose distance is less than 1. Otherwise expressed, the lattice R has a lattice point ξ, such that the unit circle around it contains in its interior a lattice point of R'.

In order to fulfill the requirements b) and c) too, we have to ensure that for this ξ, $\pi_1 \nmid \xi$ and $|\xi| < |\varrho_2 \dots \varrho_s|$ should be true.

We show that we can find a suitable lattice point ξ already among the lattice points of the lattice R either on the real axis or on the lines $y = \pm \frac{\sqrt{-d}}{2}$, i. e.

among

$$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots$$

$$\pm\vartheta, \quad \pm(1+\vartheta), \ldots$$

$$\pm(-1+\vartheta), \quad \pm(-2+\vartheta), \ldots.$$

I. Let us concentrate first of all on the first five cases, namely, if $|d| \leqq 11$. (These are the Euclidean cases.)

Next we prove a lemma.

LEMMA. *If the length of one of the sides of the fundamental parallelogram of a parallelogram lattice is at most* 1 *and the length of the corresponding height is less than* $\sqrt{3}$, *then the interior of a unit circle lying on the plane arbitrarily, contains at least one of the lattice points of the lattice.*

PROOF. Let us consider the lines of the lattice on which the distance of consecutive lattice points is at most 1. As the diameter of the circle is 2, therefore at least one of the mentioned lattice lines, say e, intersects the circle.

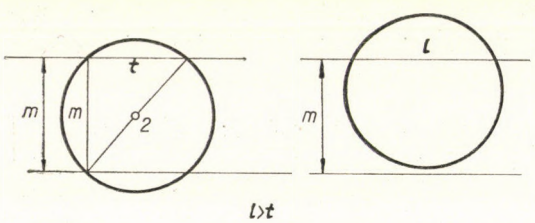


Fig. 3

Let us take the neighbouring lattice lines which are parallel to e. (See Figure 3.)

These lines cut from the circle chords. The longest chord assumes its minimal value (t) if the parallel lines have a symmetrical position with respect to the centre of the circle. (This is true even if only the line e intersects the circle.)

In that case too, — denoting by m the distance of the neighbouring lines of the lattice — we obtain

$$t = \sqrt{4-m^2} > \sqrt{4-3} = 1,$$

consequently, in the interior of the circle there is at least one lattice point on the chord t.

Now we are going to prove our theorem in the cases $|d| \leqq 11$.

In view of (7) and (8), the mentioned lattice R' satisfies the conditions of our lemma if $m < \sqrt{3}$, that is, if

$$m = \frac{\sqrt{-d}}{2} < \sqrt{3}$$

i. e. in the first five cases.

Now let us put our unit circle so that its centre should be a lattice point of the lattice R. Then by the lemma, condition a) is fulfilled.

The conditions b) and c) will also be satisfied if the centre of the circle is a lattice point ξ of R, which is an $E(d)$ unit.

This completes the proof of the theorem in the cases $|d| \leqq 11$.[3]

We mention that we can simplify our proof in the case $d = -3$ (Euler integers) and in the case $d = -4$ (Gaussean integers). We have only to make use of the fact that every point of the unit circle whose centre is the origin lies in at least one of the unit circles whose centres are the six or four units, respectively. So with the choices $\xi = \varepsilon$ (ε is a unit) and $\eta = 1$ all the conditions a), b) and c) are fulfilled. (See Figure 4.)

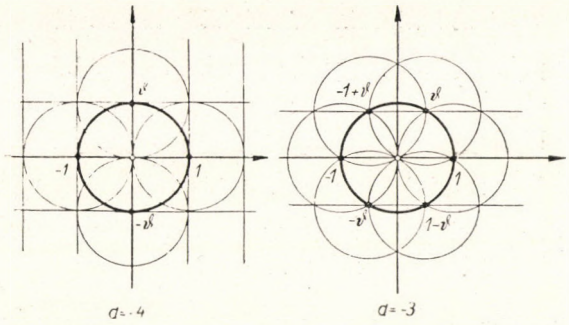


Fig. 4

II. We turn to the non-Euclidean cases; $|d| > 11$.

If the point $\frac{\pi_1}{\varrho_1}$ lies in the interior of the unit circle around the point 1 or -1, then by I, our theorem holds with the choices $\xi = 1$, or -1 and $\eta = 1$.

Thus we may suppose that $\frac{\pi_1}{\varrho_1}$ belongs to the shaded domain. (See Figure 5.)

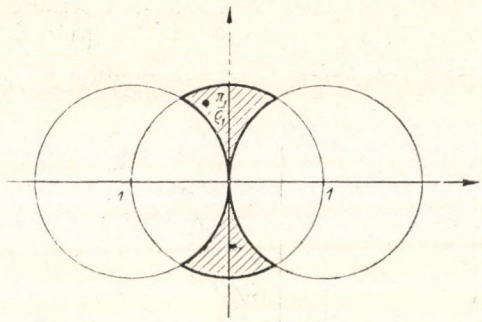


Fig. 5

Let us consider now the unit circles around the lattice points of the lattice R on the real axis and on the lines $y = \pm \frac{\sqrt{-d}}{2}$.

The union of the mentioned circle discs form along each line a domain, which is bounded by two curves consisting circle arcs. The minimal distance of the curves at a given domain is

$$2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 1. \tag{9}$$

(See Figure 6.)

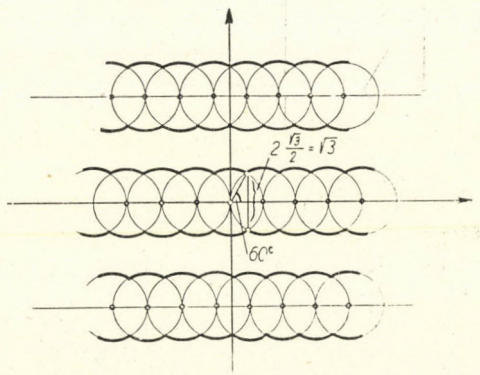


Fig. 6

[3] Note that in the last four cases we have $m > \sqrt{3}$. Thus we cannot continue proving the theorem in this way.

The lattice line of R' joining the origin with the point $\frac{\pi_1}{\varrho_1}$ contains by (7) lattice points of R' whose distance is at most 1. Therefore each of the upper, middle and lower domains contains by (9) at least one lattice point of the mentioned type. Hence to the mentioned point $\frac{\pi_1}{\varrho_1}\eta_0 \in R'$ there corresponds at least one point $\xi_0 \in R$ satisfying condition a). (Here η_0 is especially a rational integer.)

Evidently, every lattice line parallel to the mentioned line of the lattice R' has similar properties.

Of these we consider only the first lattice lines on the left and on the right, which are parallel to the mentioned line. Then we get in the upper, middle and lower domains altogether at least 9 corresponding pairs of points from R' and R, i. e. at least 9 values of ξ for which condition a) holds.

Let us examine these points ξ from the point of view of conditions b) and c).

It is obvious that $\xi = 0$ is never suitable, because it is divisible by an arbitrary π_1.

We shall show that we can select from the remained eight possibilities at least one which satisfies conditions b) and c) too.

First we give an upper estimation for $|\xi|$.

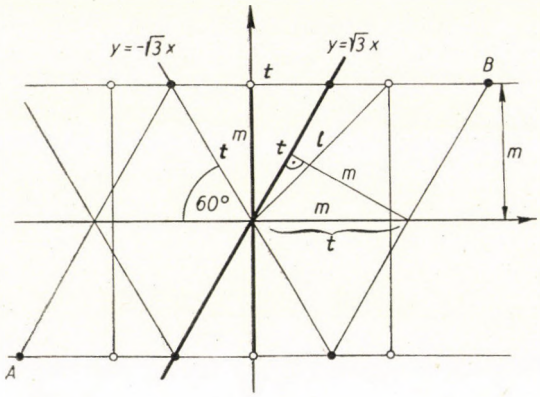


Fig. 7

The starting lattice line depends on the position of the point $\frac{\pi_1}{\varrho_1}$ (see Figure 5), and together with this line the parallel lines are also changing.

Let us see where they — in their extremal position — intersect the real axis and the lines $y = \pm \frac{\sqrt{-d}}{2}$. (See Figure 7.)

To this end we extend the domain containing $\frac{\pi_1}{\varrho_1}$ by the part of the unit circle spreading till the line

$$y = \pm \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} x = \pm \sqrt{3}x.$$

By symmetry, the extremal positions of the starting lattice line of R' are the lines $y = \pm\sqrt{3}x$ and the imaginary axis.

Note that the distance s of the examined lattice lines of R' is at most m. Therefore

$$s \leqq m.$$

Figure 7 shows the case $s = m$, that is, the case in which the intersection points have the greatest distance from the origin.

Now omit the points A and B, farthest from the origin, and the points on the real axis. Then we have four or six intersection points, respectively, in the extremal

position of the mentioned lattice lines. (See the marked points on Figure 7.) The maximal distance of these intersection points from the origin is

$$\max(m, t, l) = l = \sqrt{2}m = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{-d}}{2}. \tag{10}$$

(See Figure 8.)

Let us consider now the points of the lattice R, which are closest to the intersection points of the lattice lines and the circle around the origin with radius l. Of these only the non-real ones and those of greatest absolute value will be considered.

Thus we obtain four lattice points of R to which there exist lattice points $\frac{\pi_1}{\varrho_1}\eta$ in R' which satisfy condition a).

If we consider the mentioned $E(d)$-integers ξ, corresponding to all the possible points $\frac{\pi_1}{\varrho_1}\eta$, then the absolute values of the $E(d)$ integers ξ will be as follows (in general, four different non-real ξ exist with the same absolute value):

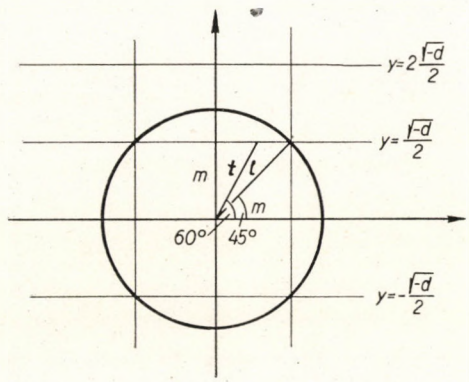


Fig. 8

1) Case $d = -19$

$$|\vartheta| = \sqrt{5},\quad |1+\vartheta| = \sqrt{7},\quad |2+\vartheta| = \sqrt{11}.$$

2) Case $d = -43$

$$|\vartheta| = \sqrt{11},\quad |1+\vartheta| = \sqrt{13},\quad |2+\vartheta| = \sqrt{17},\quad |3+\vartheta| = \sqrt{23}.$$

3) Case $d = -67$

$$|\vartheta| = \sqrt{17},\quad |1+\vartheta| = \sqrt{19},\quad |2+\vartheta| = \sqrt{23},\quad |3+\vartheta| = \sqrt{29},\quad |4+\vartheta| = \sqrt{37}.$$

4) Case $d = -163$

$$|\vartheta| = \sqrt{41},\quad |1+\vartheta| = \sqrt{43},\quad |2+\vartheta| = \sqrt{47},\quad |3+\vartheta| = \sqrt{53},$$
$$|4+\vartheta| = \sqrt{61},\quad |5+\vartheta| = \sqrt{71},\quad |6+\vartheta| = \sqrt{83}.$$

So we obtain for all the examined values of ξ:

$$\begin{aligned} &|\xi| \leqq \sqrt{11} \quad \text{if} \quad d = -19 \\ &|\xi| \leqq \sqrt{23} \quad \text{if} \quad d = -43 \\ &|\xi| \leqq \sqrt{37} \quad \text{if} \quad d = -67 \\ &|\xi| \leqq \sqrt{83} \quad \text{if} \quad d = -163. \end{aligned} \tag{11}$$

Let l_d^* denote the number max $|\xi|$ for d. We shall show that for every d there exist among the ξ one, which satisfies condition b) that is, for which $\pi_1 \nmid \xi$ with a suitable π_1.

Indeed, the norms of the mentioned $E(d)$-integers ξ are all rational primes, thus these $E(d)$ integers ξ are all irreducible. Thus they are divisible by the corresponding π_1 only if they are associated with π_1, that is, if

$$\xi = \varepsilon \pi_1$$

where ε is a unit, necessarily $\varepsilon = \pm 1$.

Thus only two numbers ξ do not satisfy condition b), that is, we have two $E(d)$ integers ξ which do satisfy condition b).

Now we have to deal with condition c) only.

By (11),

$$|\xi| \leqq l_d^* \tag{12}$$

therefore for $\varrho_2, \ldots, \varrho_s$ in (2) we obtain in the case

$$|\varrho_2 \ldots \varrho_s| \geqq l_d^* \tag{13}$$

from (12) and (13) the result

$$|\xi| < |\varrho_2 \ldots \varrho_s|. \tag{14}$$

Hence it is sufficient to deal with the case in which

$$|\varrho_2 \ldots \varrho_s| \leqq l_d^*. \tag{15}$$

Then certainly

$$|\varrho_v| \leqq l_d^* \qquad (v = 2, \ldots, s). \tag{16}$$

In view of the fact that the lines $y = \pm 2 \dfrac{\sqrt{-d}}{2}$ and the circle with the radius l_d^* have no points of intersection (see Figure 8), the numbers ϱ_v are either among the irreducible $E(d)$-integers enumerated on page 461 or among the $E(d)$-integers which have the same absolute values as these, or among the real irreducible $E(d)$-integers in the circle with radius l_d^*.

First we show that for an arbitrary d only

$$s = 2$$

is possible.

(i) Indeed, $s = 4$ is possible only in the case $d = -163$ and only with

$$\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = \pm 2.$$

But from this, using

$$|\pi_1| \leqq |\varrho_2|$$

we get

$$\pi_1 = \pm 2$$

which contradicts

$$\pi_\nu \neq \varepsilon \varrho_\mu \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

(ii) Further, $s = 3$ is possible only in the cases $d = -43, -67, -163$ with ϱ_2 and ϱ_3 equal to ± 2, or $\pm 2, \pm 3$. As above, we are led to a contradiction.

Thus we have proved that $s=2$ i. e.

$$\alpha=\varrho_1\varrho_2$$

where

$$|\varrho_\nu|\leqq l_d^*.$$

From

$$|\varrho_1|\leqq|\varrho_2|$$

we obtain

(17) $$|\alpha|\leqq l_d^{*2}.$$

Our argument shows that if the fundamental theorem is true for the $E(d)$-integers of absolute values not greater than l_d^{*2}, then it is true for all the $E(d)$-integers. Since there exist but a finite number of $E(d)$-integers in the circle with the radius l_d^{*2}, therefore we have to examine but a finite number of cases.

Note that from the definition of l_d and l_d^* it is obvious that

$$l_d^*\leqq l_d+1\leqq\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{-d}}{2}+1.$$

We have seen that if the fundamental theorem were false for an $E(d)$-integer α, with $|\alpha|\leqq l_d^{*2}$ than one of the decompositions of α would have exactly two irreducible factors. Let us see of what kind the other decomposition can be.

A) First suppose that none of the factors ϱ_1 and ϱ_2 is real. Then

$$N(\varrho_1)=p_1,\quad N(\varrho_2)=p_2.$$

Thus if α has two distinct decompositions, then

$$N(\alpha)=p_1p_2=N(\pi_1)N(\pi_2)\ldots N(\pi_t)$$

would follow. Hence $t\leqq 2$. But $t=1$ is a contradiction, thus we obtain $t=2$, i.e. the decompositions of α can be only of the form

$$\alpha=\pi_1\pi_2\quad\text{and}\quad\alpha=\varrho_1\varrho_2$$

where π_ν are non-real irreducible integers and the norms of π_ν are rational primes. (Otherwise $t=1$ would follow.)

Further

$$|\pi_1|=|\varrho_1|,\quad|\pi_2|=|\varrho_2|$$

and so

$$|\pi_\mu|\leqq l_d^*.$$

Hence π_1 and π_2 can occur only among the irreducible integers enumerated on page 461.

Further, on account of

$$p_1\leqq p_2\quad\text{and}\quad N(\pi_1)\leqq N(\varrho_1)=p_1$$

we get

$$N(\pi_1)=p_1\quad\text{and}\quad N(\pi_2)=p_2.$$

Here $p_1 \neq p_2$. For, on the contrary, — using that on the one hand

$$\pi_1 \neq \pm\varrho_1, \pm\varrho_2$$

$$\pi_2 \neq \pm\varrho_1, \pm\varrho_2$$

and on the other hand only four non-real $E(d)$-integers have the same norm —, we obtain

$$\pi_1 = \pm\pi_2, \quad \varrho_1 = \pm\varrho_2$$

Consequently,

$$\alpha = \pm\pi_1^2 = \pm\varrho_1^2$$

from which we get either

$$\pi_1 = \pm\varrho_1, \quad \text{or} \quad \pi_1 = \pm i\varrho_1.$$

The first case is a contradiction, and the second one can not happen in our cases $|d| > 4$. Thus we conclude that p_1 and p_2 are different, and so we may suppose that

$$p_1 < p_2.$$

α) Let

$$\pi_1 = a + \vartheta \qquad \varrho_1 = c + \vartheta$$

$$\pi_2 = b + \vartheta \qquad \varrho_2 = e + \vartheta.$$

Here

$$|a+\vartheta| = |c+\vartheta|, \quad |b+\vartheta| = |e+\vartheta|$$

and

$$\pi_1\pi_2 = \varrho_1\varrho_2.$$

Hence

$$ab = ce \quad \text{and} \quad a + b = c + e.$$

Thus either $a = c$ or $a = e$, whence either

$$\pi_1 = \varrho_1 \quad \text{or} \quad \pi_1 = \varrho_2$$

follows, which is a contradiction.

β) Let

$$\pi_1 = a + \vartheta \qquad \varrho_1 = c - \vartheta$$

$$\pi_2 = b + \vartheta \qquad \varrho_2 = e + \vartheta$$

Here

$$|a+\vartheta| = |c-\vartheta|, \quad |b+\vartheta| = |e+\vartheta|,$$

and so because of

$$\pi_1\pi_2 = \varrho_1\varrho_2$$

we obtain

$$ab + \vartheta^2 + (a+b)\vartheta = ce - \vartheta^2 + (c-e)\vartheta.$$

But $d = 4k + 1$ and so

$$\vartheta^2 = \left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)^2 = \frac{d-1}{4} + \vartheta.$$

Hence

$$ab + \frac{d-1}{4} + (a+b+1)\vartheta = ce - \frac{d-1}{4} + (c-e-1)\vartheta$$

i. e.

$$ab+\frac{d-1}{4}=ce-\frac{d-1}{4}$$

and

$$a+b+1 = c-e-1.$$

From the equations on the absolute values we obtain

$$a-c = -1, \quad b+e = -1$$

whence

$$(c-1)(-e-1)=ce-\frac{d-1}{2},$$

that is

$$2e(2c-1) = -2c+1+d$$

$$2e(2c-1) = -2c+4k+2.$$

Therefore

$$(2c-1)|(-c+2k+1).$$

Here

$k = -5$, $c=0, \pm1, \pm2$ if $d=-19$

$k = -11$, $c=0, \pm1, \pm2, \pm3$ if $d=-43$

$k = -17$, $c=0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$ if $d=-67$

$k = -41$, $c=0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6$ if $d=-163$

so we obtain

$$(2c-1)|(g-c)$$

where

$$g = -9, -21, -33, -81.$$

It is easy to check that the last divisibility relation is either impossible for the corresponding values of c and g, or it contradicts the possible values of a, b, c, e.

As all the cases in A) can be reduced to one of the cases α) and β), we arrive at the result that α can not have at least two decompositions containing only non-real factors.

B) Suppose that one of ϱ_1 and ϱ_2 is real, say $\varrho_1=p_1$. Thus

$$N(\alpha)=N(\varrho_1)N(\varrho_2)=p_1^2p_2^k \qquad (k=1 \text{ or } 2).$$

Hence

$$N(\pi_1)N(\pi_2)\ldots N(\pi_t)=p_1^2p_2^k$$

and so

$$p_1|N(\pi_1)\ldots N(\pi_t).$$

Since p_1 is prime and the fundamental theorem holds for the rational integers we infer that for some μ

$$p_1|N(\pi_\mu)=q^r$$

where q is a prime and $r=1$ or 2. From this

$$p_1 = q.$$

In the case $r=2$, hence we get

$$N(\pi_\mu) = p_1^2.$$

This implies that either $\pi_\mu = \pm \varrho_1$ if π_μ is real, — which is impossible, — or π_μ is non-real. In the latter case $N(\pi_\mu) = p_1^2$ is impossible, because otherwise

$$|\pi_\mu| = |\varrho_1| = p_1 \leqq l_d^*$$

would follow, and as before, the norms of non-real $E(d)$-integers of absolute value $\leqq l_d^*$ are always primes.

Hence we obtain $r=1$, that is

$$N(\pi_\mu) = p_1$$

where

$$p_1 = \varrho_1 \leqq l_d^* < 10$$

i. e. the possible values of p_1 are 2, 3, 5, 7. From table on page 461 we see that only $p_1 = 5, 7$ may occur as norms in the case $d = -19$. But this contradicts the fact that

$$l_{-19}^* < 5.$$

Similarly we get a contradiction if ϱ_2 is real. So we have proved that α can have no two distinct decompositions into irreducible factors in the case B).

This completes the proof of the theorem.

It is worth-while mentioning that from the proof of our theorem we get also the following result.

THEOREM. *Let*

$$C_d = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{-d}}{2} + 1$$

and suppose that in $P(\sqrt{d})$ the norm of every non-real integer of absolute value non-greater than C_d is a rational prime. If the fundamental theorem of arithmetic holds for the integers of $P(\sqrt{d})$ of absolute value $\leqq C_d^2$, then the fundamental theorem of arithmetic holds for every integer of $P(\sqrt{d})$.

(Received 12 May 1965)

References

[1] E. ZERMOLO, Elementare Betrachtungen zur Theorie der Primzahlen, *Göttinger Nachrichten Math.*, Neue Folge, **1** (1934), pp. 43—46.

[2] H. HASSE, Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen, *Journal für Math.*, **159** (1928), pp. 3—9.

[3] H. HILBRONN—E. H. LINFOOT, On the class number in imaginary quadratic fields, *Quarterly Journal of Math.*, **5** (1934), pp. 150—160.

[4] H. HILBRONN—E. H. LINFOOT, On the imaginary quadratic corpora of class number one, *Quarterly Journal of Math.*, **5** (1934), pp. 293—301.

Printed in Hungary

Technikai szerkesztő: Szabados József

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1965. V. 26. — Terjedelem: 17,75 (A/5) ív, — 30 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 65-5732

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be sent to:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newpapers (Budapest, I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Toute correspodance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, I., Fő utca 32.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные

54.— forint

INDEX

van Rooij, A. C. M. and *Wilf, H. S.*, The interchange graph of a finite graph 263
Hill, P. D. and *Megibben, C. K.*, Quasi-closed primary groups 271
Foster, F. G. and *Perera, A. G. A. D.*, Queues with batch arrivals. II 275
Janowitz, M. F., A characterisation of standard ideals 289
Corner, A. L. S., Three examples on hopficity in torsion-free abelian groups 303
Révész, P., On a problem of Steinhaus 311
Makai, E., A lower estimation of the principal frequencies of simply connected membranes .. 319
Iqbalunnisa, Neutrality in weakly modular lattices 325
Rédei, L., Logische Dualität der Frobenius—Stickelbergerschen und Hajósschen Hauptsätze der Theorie der endlichen abelschen Gruppen 327
Rédei, L., Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós 329
Leindler, L., Über die de la Vallée—Poussinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen 375
Киш, О. и *Сабадош, Й.*, Замечания о сходимости Лагранжева интерполирования 389
Molnár, J., Volumenabschätzung eines Polyeders in Räumen konstanter Krümmung 431
Schmidt, E. T., Remark on a paper of M. F. Janowitz 435
Fejes Tóth, L., Distribution of points in the elliptic plane 437
Révész, P., Some remarks on strongly multiplicative systems 441
Bollobás, B., On generalized graphs 447
Lánczi, Edit, Unique prime factorization in imaginary quadratic number fields 453

Index: 26.014