2341

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, P. ERDŐS, L. FEJES TÓTH, L. KALMÁR, L. RÉDEI,
A. RÉNYI, B. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS XIV FASCICULI 1–2

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1963

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, I., Fő utca 32. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, P. ERDŐS, L. FEJES TÓTH, L. KALMÁR, L. RÉDEI,
A. RÉNYI, B. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS XIV

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1963

ACTA MATH. HUNG.

INDEX

TOMUS XIV

ACZÉL, J. und DARÓCZY, Z., Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie 95
BLUNDON, W. J., Note on a paper of A. Heppes 317
CARLITZ, L., Some formulas of E. Feldheim 21
CORRÁDI, K. und HAJNAL, A., On the maximal number of independent circuits in a graph . 423
DARÓCZY, Z. und ACZÉL, J., Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie 95
DIRAC, G. A., Extensions of Turán's theorem on graphs 417
DIRAC, G. and ERDŐS, P., On the maximal number of independent circuits in a graph 79
ERDŐS, P. and DIRAC, G., On the maximal number of independent circuits in a graph .. 79
ERDŐS, P. and RÉNYI, A., Asymmetric graphs 295
FAITH, C. and UTUMI, Y., On a new proof of Litoff's theorem 369
FEJES TÓTH, L., Isoperimetric problems concerning tessellations 343
FLADT, K., Die Zentralprojektion einer Ebene auf eine andere in der hyperbolischen Geometrie 403
FREUD, G., Über die (C, 1)-Summen der Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen ... 197
GARG, K. M., Applications of Denjoy analogue. II 183
GARG, K. M., Applications of Denjoy analogue. III 187
GRÄTZER, G., On semi-disrete lattices whose congruence relations form a Boolean algebra. 441
HAJNAL, A. and CORRÁDI, K., On the maximal number of independent circuits in a graph . 423
HARDY, F. L., On groups of ring multiplications 283
HARRISON, D. K., IRWIN, J. M., PEERCY, C. L. and WALKER, E. A., High extensions of Abelian groups 319
HILTON, P. J. and YAHYA, S. M., Unique divisibility in Abelian groups 229
HOSSZÚ, M . und VINCZE, E., Über den wahrscheinlichsten Wert 131
HSU, L. C., On a method for expanding multiple integrals in terms of integrals of lower dimensions 359
IRWIN, J. M., HARRISON, D. K., PEERCY, C. L. and WALKER, E. A., High extensions of Abelian groups 319
KNAPOWSKI, S. and TURÁN, P., Comparative prime-number theory. IV 31
KNAPOWSKI, S. and TURÁN, P., Comparative prime-number theory. V 43
KNAPOWSKI, S. and TURÁN, P., Comparative prime-number theory. VI 65
KNAPOWSKI, S. and TURÁN, P., Comparative prime-number theory. VII 241
KNAPOWSKI, S. and TURÁN, P., Comparative prime-number theory. VIII 251
LÉVY, A., Remarks on a paper by J. Mycielski 125
MARCUS, S., Typologie des langues et modèles logiques 269
NIGAM, H. N., On generalised Laplace transform of two variables 331
PEERCY, C. L., HARRISON, D. K., IRWIN, J. M. and WALKER, E. A., High extensions of Abelian groups 319

PÉTER, RÓZSA, Über die Primitiv-Rekursivität einiger der Aufbau von Formeln charakterisierenden Wortfunktionen 149
PÉTER, RÓZSA, Programmierung und partiell-rekursive Funktionen 373
RÉNYI, A. and ERDŐS, P., Asymmetric graphs 295
RIBENBOIM, P., A theorem on linear transformations of torsion-free modules of infinite rank 353
SAXENA, R. B., On mixed type lacunary interpolation. II 1
SZÁSZ, F., Über Ringe mit Minimalbedingungen für Hauptrechtsideale. III 447
TURÁN, P. and KNAPOWSKI, S., Comparative prime-number theory. IV. 31
TURÁN, P. and KNAPOWSKI, S., Comparative prime-number theory. V 43
TURÁN, P. and KNAPOWSKI, S., Comparative prime-number theory. VI 65
TURÁN, P. and KNAPOWSKI, S., Comparative prime-number theory. VII 241
TURÁN, P. and KNAPOWSKI, S., Comparative prime-number theory. VIII 251
UTUMI, Y. and FAITH, C., On a new proof of Litoff's theorem 369
VEIDINGER, L., Error bounds in finite-difference approximations to solutions of symmetric hyperbolic systems 173
VINCZE, E. und HOSSZÚ, M., Über den wahrscheinlichsten Wert 131
WALKER, E. A., HARRISON, D. K., IRWIN, J. M. and PEERCY, C. L., High extensions of Abelian groups 319
WALLACE, A. D., Relative ideals in semigroups. II 137
WEINERT, H. J., Über Halbringe und Halbkörper. II 209
ZEITLER, H., Hyperbolische Trigonometrie im Poincaréschen Kreismodell 123
YAHYA, S. M. and HILTON, P. J., Unique divisibility in Abelian groups 229

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
Том XIV—Вып. 1—2

РЕЗЮМЕ

О ЛАКУНАРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СМЕШАННОГО ТИПА. II

Р. Б. Саксена (Лукноу, Индия)

Обозначим через $\xi_{\nu,n-1}$ $(\nu=1, 2,..., n-1;\ n=4, 6, 8,...)$ корни многочленов степени $n-1$ Лежандра $P_{n-1}(x)$ и через $x_{\nu,n}$ $(\nu=1, 2,..., n;\ n=4, 6, 8,...)$ корни многочленов степени n

$$\Pi_n(x)=-n(n-1)\int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt.$$

Многочлены Лежандра нормируются так, что $P_{n-1}(1)=1$.

Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируемая один раз функция на отрезке $-1\leqq x\leqq 1$ и пусть $R_n(x;f)$ обозначает тот многочлен степени, не превосходящей $4n-3$, для которого

$$R_n(\xi_{\nu,n-1};\ f)=f(\xi_{\nu,n-1});\quad \frac{d}{dx}\{R_n(x;\ f)\}_{x=\xi_{\nu,n-1}}=f'(\xi_{\nu,n-1})$$

$$(\nu=1, 2,..., n-1)$$

и

$$R_n(x_{\nu,n};\ f)=f(x_{\nu,n});\quad \frac{d^2}{dx^2}\{R_n(x;\ f)\}_{x=x_{\nu,n}}=\delta_{\nu,n}$$

$$(\nu=1, 2,..., n),$$

где $\delta_{\nu,n}$ $(\nu=1, 2,..., n;\ n=4, 6, 8,...)$ — произвольные, фиксированные, вещественные числа. Существование и единственность таких многочленов $R_n(x;\ f)$ $(n=4, 6, 8,...)$ доказаны автором в работе [7].

В настоящей работе автор доказывает следующую теорему: Если $f'(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha>\frac{1}{2}$, и $\delta_{\nu,n}=o(n)$, то последовательность многочленов $R_n(x;\ f)$ равномерно стремится к функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ОТ Э. ФЕЛДГЕЙМ

Л. Карлиц (Дурам, США)

Э. Фелдгейм в своей работе [4] опубликовал ряд интересных соотношений относительно полиномов Эрмита и Лагерра. В настоящей статье автор дает элементарное доказательство для одной из формул Э. Фелдгейм, далее, заменяет одну ошибочную формулу Э. Фелдгейм правильной. Автор доказывает и дальнейшие, новые соотношения, подобные формулам Э. Фелдгейм, относительно полиномов Эрмита и Лагерра.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ. IV

С. Кнаповски (Познань) и П. Туран (Будапешт)

В этой работе авторы проливают дальнейший свет на распределение простых чисел в классе вычетов по модулю 8, показывая, что если l_1 и l_2 — нечетные числа и $l_1, l_2 \not\equiv 1 \bmod 8$, то при подходящей явной нумерической постоянной c_1 и обычном обозначении

$$\pi(x, k, l) = \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv l \bmod k}} 1$$

(p — простые числа) для $T > c_1$ имеет место неравенство

$$\max_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} \{\pi(x, 8, l_1) - \pi(x, 8, l_2)\} > \sqrt{T}\, e^{-23\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}}$$

(и, конечно, неравенство

$$\min_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} \{\pi(x, 8, l_1) - \pi(x, 8, l_2)\} < -\sqrt{T}\, e^{-23\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}}).$$

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ. V

С. Кнаповски (Познань) и П. Туран (Будапешт)

Пусть k — положительное целое число и такое, что при подходящей положительной нумерической постоянной c_1 и положительной $A(k)$ функции $L(s, \psi)$, принадлежащие модулю k, не исчезают ни в параллелограмме

$$\delta > \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq c_1 k^{10},$$

ни на отрезке

$$\delta = \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq A(k).$$

Тогда главный результат работы утверждает, что если $(l_1, k) = (l_2, k) = 1$, $l_1 \not\equiv l_2 \bmod k$, далее, при достаточно большой, положительной, нумерической постоянной c_2 имеем

$$T > \max\left\{e^{9e^{2c_2k^{20}}},\ e^{72e^{\frac{2}{A(k)^3}+18c_2^2k^{40}}}\right\},$$

то выполняются следующие неравенства:

$$\max_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} \left\{ \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l_1 \bmod k}} \frac{\Lambda(n)}{\log n} - \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l_2 \bmod k}} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \right\} > \sqrt{T}\, e^{-45\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}}$$

и

$$\min_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} \left\{ \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l_1 \bmod k}} \frac{\Lambda(n)}{\log n} - \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l_2 \bmod k}} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \right\} < -\sqrt{T}\, e^{-45\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}}.$$

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ. VI

С. Кнаповски (Познань) и П. Туран (Будапешт)

Пусть k такое, что при достаточно большой положительной нумерической постоянной c_1 и подходящей положительной $A(k)$ функции $L(s, x)$ $(s=\sigma+it)$, принадлежащие модулю k, не исчезают ни в параллелограмме

$$\sigma > \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq 2c_1 k^{10},$$

ни на отрезке

$$\sigma = \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq A(k).$$

Тогда, если $(l_1, k) = (l_2, k) = 1$, сравнения

$$x^2 \equiv l_1 \bmod k, \quad x^2 \equiv l_2 \bmod k$$

обладают одним и тем же числом решений, и для достаточно больших положительных нумерических постоянных c_2 имеет место неравенство

$$T > \max \left\{ e^{ec_2 k^{20}}, \; e^{2e^{\frac{1}{A(k)^3}} + c_2 k^{20}} \right\},$$

то, обозначая через $\pi(x, k, l)$ число простых p, меньших x и сравнимых l по модулю k, выполняются неравенства

$$\max_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} \{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)\} > \sqrt{T}\, e^{-44 \frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}}$$

и

$$\min_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} \{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)\} < -\sqrt{T}\, e^{-44 \frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}}.$$

О МАКСИМАЛЬНОМ КОЛИЧЕСТВЕ НЕЗАВИСИМЫХ КРУГОВ В ГРАФАХ

Г. Дирак (Гамбург) и П. Эрдёш (Будапешт)

В работе рассматривается вопрос об условиях, обеспечивающих существование k независимых кругов в данном конечном графе. (Два множества называются независимыми, если у них нет общих точек.) Результаты первой части резюмируются в следующей теореме:

Теорема I. Если $\mathcal{G}$ — конечный граф, не содержащий петель и многократных ребер, то в графе $\mathcal{G}$ найдутся k независимых кругов, коль скоро $k \geqq 3$ — данное целое число и выполняется неравенство

$$V_{\geqq 2k}(\mathcal{G}) - V_{\leqq 2k-2}(\mathcal{G}) \geqq k^2 + 2k - 4.$$

(Здесь $V_{\geqq 2k}(\mathcal{G})$ означает число точек степени не меньше $2k$ графа $\mathcal{G}$. Выражение $V_{\leqq 2k-2}(\mathcal{G})$ имеет аналогичное значение.)

Авторы доказывают упомянутую теорему с помощью одной теоремы К. Корради и А. Хайнала.

Результаты второй части — являющиеся перенесениями результатов первой части на случай графов, нарисуемых в плоскости — резюмируются в следующей теореме:

Теорема 2. Пусть $\mathcal{G}$ — конечный граф, нарисуемый в плоскости, и $k \geqq 3$ — натуральное число. Тогда в случае

$$V_{\geqq 2k}(\mathcal{G}) - V_{\leqq 2k-2}(\mathcal{G}) \geqq 5k - 7$$

$\mathcal{G}$ содержит k независимых кругов.

ЭНТРОПИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА И ХАРАКТЕРИСТИКА ЭНТРОПИИ ШЕННОНА

Я. Ацель и З. Дароци (Дебрецен)

Статья содержит, между прочим, доказательства следующих утверждений:

Теорема 1. Если функции

$$f^*(p) = \begin{cases} pf(p) & (p \neq 0) \\ 0 & (p = 0) \end{cases} \quad \text{и} \quad h^*(p) = \begin{cases} ph(p) & (p \neq 0) \\ 0 & (p = 0) \end{cases}$$

на отрезке [0,1] выпуклы в узком смысле, тогда для того, чтобы имело место соотношение

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} f^*(p_j)\right) = h^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} h^*(p_j)\right) \qquad \left(p_j \geqq 0, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали постоянные $A > 0$ и B такие, что в (0,1] выполняется

$$h(p) = Af(p) + B.$$

Теорема 2. Если функция

$$f^*(p) = \begin{cases} pf(p) & (p \neq 0) \\ 0 & (p = 0) \end{cases}$$

на отрезке [0,1] выпукла в узком смысле, тогда все решения уравнения

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p_j q_k f(p_j q_k)\right) = f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) f^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} q_k f(q_k)\right)$$

$$\left(p_j > 0,\ q_k > 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{m} q_k = 1\right)$$

имеют вид

$$f(p) = a \log p + b \qquad (a > 0),$$

или вид

$$f(p) = ap^{\alpha - 1} + b \qquad (\alpha > 1,\ a > 0 \text{ или } 0 < \alpha < 1,\ a < 0).$$

Следствие 2. Если функция

$$f^*(p) = \begin{cases} pg(-\log p) & (p \neq 0) \\ 0 & (p = 0) \end{cases}$$

на отрезке [0,1] выпукла в узком смысле, тогда энтропии положительного порядка

$$I_\alpha(P) = (1-\alpha)^{-1} \log\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^\alpha\right) \qquad (\alpha > 0,\ \alpha \neq 1)$$

и энтропия Шеннона

$$I_1(P) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log p_j$$

являются единственными аддитивными мерами информации вида

$$I(P) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j g(-\log p_j)\right) \qquad \left(p_j > 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right)$$

где аддитивность означает, что для любых двух независимых схем событий P и Q имеет силу соотношение

$$I(P * Q) = I(P) + I(Q)$$

($P * Q$ — прямое произведение P и Q). (Сравн. [2] и с нерешенной проблемой, опубликованной в [16]). Дальнейшее условие

$$I(P * Q) = I(P) + I(Q/P),$$

где

$$I(Q/P) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{k=1}^{m} q_{jk} g(-\log(q_{jk}))\right)$$

$$\left(p_j > 0,\ q_{jk} > 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{m} q_{jk} = 1\right)$$

означает условную энтропию, удовлетворяется уже только энтропией Шеннона.

Лемма 4. Для того, чтобы функция

$$f^*(p) = \begin{cases} p \cdot g(-\log p) & (p \neq 0) \\ 0 & (p = 0) \end{cases}$$

в (0,1] была выпуклой в узком смысле, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{k=1}^{m} f^*(q_{jk})\right) \leqq g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} f^*\left(\sum_{j=1}^{n} p_j q_{jk}\right)\right)$$

$$\left(p_j \geqq 0,\ q_{jk} \geqq 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1,\ \sum_{k=1}^{m} q_{jk} \leqq 1\right),$$

где знак равенства имеет силу только в случаях

$$q_{1k} = q_{2k} = \ldots = q_{nk} \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{и} \quad p_i = 1, \quad p_j = 0 \qquad (j \neq i),$$

то есть неравенства

$$I(Q/P) \leqq I(Q)$$

со знаком равенства только в том случае, если Q и P независимы. (Информация, получаемая из реализации схемы Q может только уменьшиться, если предварительно реализовать также схему P, и в самом деле уменьшится, если только P и Q не являются независимыми.)

Лемма 3. В случае непрерывных (или измеримых) в (0,1] функций $f^*(x)$ для того, чтобы сумма

$$\sum_{j=1}^{n} f^*(p_j) = c_n \qquad \left(p_j > 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right)$$

была независимой от $p_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ необходимо и достаточно, чтобы $f^*(p)$ в (0,1] имела вид

$$f^*(p) = a + bp.$$

Лемма 2. Единственными непрерывными решениями функционального уравнения

$$h_1(xm) = h_1(x) h_1(m) \qquad (x \in [1, \infty);\ m = 1, 2, \ldots)$$

являются функции

$$h_1(x) \equiv 0,$$

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in [2, \infty) \\ \text{произвольная непрерывная функция для } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если} \quad x = 1 \end{cases}$$

и $h_1(x) = x^a$ (a — произвольная постоянная).

Теорема 3. Единственным непрерывным решением функционального уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} F(p_j q_k) = \sum_{j=1}^{n} F(p_j) + \sum_{k=1}^{n} F(q_k)$$

$$\left(n = 1, 2, \ldots;\ \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{n} q_k = 1,\ p_j > 0,\ q_k > 0 \right)$$

является функция $F(x) = ax \log x$, где a — произвольная постоянная (сравн. [6]).

Лемма 2 и теорема 3 остаются справедливыми и в случае если в них вместо „непрерывно" везде писать „монотонно".

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ В КРУГОВОЙ МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ[1]

Г. Цеитлер (Веиден, НФР)

В отличие от указанной работы П. Саса, со круговой модели Пуанкаре здесь снимается теорема косинусов для углов (вторая теорема косинусов) относительно общего треугольника. Отсюда уже вытекает теорема синусов и теорема косинусов для сторон (первая теорема косинусов) и вместе с тем вся гиперболическая тригонометрия.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ РАБОТЕ И. МЫЧЕЛЬСКИ

А. Леви (Иерусалим, Израиль)

В работе автор определяет утверждения I, S_n, P_n, C_n (см. [8]), являющиеся следствиями аксиомы выбора, и изучает их связи без предположения аксиомы выбора. P_n: Если любой конечный подграф G^* графа G является n-хроматическим, то G сам тоже является n-хроматическим. C_n: Декартово произведение любого множества множеств из n элементов не пусто. В первой части работы обобщаются результаты работы [8], между прочим доказывается, что утверждения I и S_3 равносильны (теорема 1). Во второй, метаматематической, части показывается, что высказывания $S_2 \to C_3$ и $(\forall n)/C_n \to P_3$ не могут быть выведены из обычных аксиом теории множеств, например из системы аксиом S, заданной Мостовски в [6] (теоремы 4 и 5).

[1] Замечание к работе П. Саса, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), стр. 65—69.

О НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОМ ЗНАЧЕНИИ

М. Хоссу и Э. Винце (Мишкольц)

Для данных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n>2)$ некоторой последовательности измерений наиболее вероятное значение $x=M$ есть функция $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ максимизирующая функцию

$$D(x)=P(x_1-x)\,P(x_2-x)\ldots P(x_n-x),$$

где $P(t)$ означает вероятность того, что погрешность некоторого измерения равняется t.

А. Реньи выдвинул проблему о нахождении наиболее вероятного значения M при данной плотности вероятности $P(t)$ и, наоборот, о нахождении $P(t)$, если при данной функции $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполняется неравенство $D(M)\leqq D(x)$. Мы доказали, что при очевидных подходящих условиях возможны только два случая:

1) $$P(t)=\sqrt{\frac{B}{\pi}}\exp(-Bt^2), \quad M(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n};$$

2) $$P(t)=\frac{B^B \ln a}{\Gamma(B)}\exp[-B(a^{-t}+t\ln a)], \quad M(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$$

$$={}^a\log\frac{a^{x_1}+a^{x_2}+\ldots+a^{x_n}}{n}.$$

Подходящие условия состоят в следующем:

1) Непрерывная дифференцируемость;

2) внутренность: $\min x_i \leqq M \leqq \max x_i$;

3) ассоциативность: $M[M(x_1,\ldots,x_n),\ldots,M(x_{n^2-n+1},\ldots,x_{n^2})]=$
$=M[M(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}),\ldots,M(x_{i_{n^2-n+1}},\ldots,x_{i_{n^2}})]$,

где $i_1,\ldots,i_{n^2}$ является перестановкой индексов $1,\ldots,n^2$.

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ИДЕАЛАХ ПОЛУГРУПП. II (ОТНОШЕНИЯ ГРИНА)

А. Д. Веллес (Нью Орлинз)

Под полугруппой подразумевается непустое пространство Хаусдорфа, в котором определено непрерывное, ассоциативное умножение. В настоящей работе, представляющей собой продолжение работы [19], проводится дальше исследование относительных идеалов в полугруппах. Рассматриваются отношения Грина и обобщаются некоторые результаты Клиффорда-Миллера [2], Престона [13] и Шютценбергера [14].

О ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНОМ ХАРАКТЕРЕ ФУНКЦИЙ СЛОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ СТРОЕНИЕ ФОРМУЛ

Р. Петер (Будапешт)

К. Шютте[1] при своих исследованиях по теории доказательств, в качестве важных вспомогательных средств, ввел понятия положительных и отрицательных частей формул исчисления высказываний, именно с помощью неявного определения, исходящего изо всей формулы и позволяющего, на основе положительности или отрицательности данной частичной формулы (экземпляра), сделать заключение о тем же свойстве

своих частичных формул. Множество формул, о котором идет речь, является частным случаем понятия „упорядоченного свободного голоморфного множества", введенного в одной из моих предыдущих работ[2] (к которой я здесь добавляю тоже некоторые поправляющие замечания) с целью распространения теории рекурсивных функций на такие (строящиеся наподобие чисел) множества. С такой точки зрения определение Шютте является, так сказать, ровно „обратным" к примитивной рекурсии, ведь частичные формулы данной формулы считаются предшествующими ей.

Но если мы обращаемся с формулами как элементами некоторого „множества слов", считая их только последовательностями знаков, то определение может быть „повернуто". Это можно сделать посредством графа Канторовича формулы, если вершинам этого графа мы данным образом приписываем размещения с повторениями некоторых знаков; при этом требуется, чтобы каждой формуле принадлежало размещение более низкого класса, чем своим частичным формулам.

В §2 я очерчиваю, что элементам любого свободного голоморфного множества можно примитивно-рекурсивно на соответствующем множестве слов поставить в соответствие такой, отмеченный размещениями, граф Канторовича.

В §1 я провожу этот прием подробно для множества формул, рассмотренного Шютте и применяю это к доказательству того факта, что отношение „быть положительной (соотв. отрицательной) частью" является примитивно-рекурсивным на упомянутом множестве слов.

А. Эренфейхт и З. Павлак в совместной работе, находящейся в печати, изучают связь между различными способами бесскобочного написания данных формул и различными упорядочениями в последовательность вершин соответствующего графа Канторовича. Снова приписывая вершинам упомянутые размещения, в §3 я показываю, что упорядочения в последовательность, определимые примитивно-рекурсивными на соответствующем множестве слов соотношениями — такими являются, например, упорядочения, принадлежащие известному способу бесскобочного написания от Лукашевич и более новому от Павлак — могут быть получены примитивно-рекурсивно одно из другого. Применением последовательностей размещений, приписанных формулам, такие бесскобочные написания формул можно однозначно перевести на свои обычные скобочные формы, даже непосредственно одни на другие, а именно примитивно-рекурсивным образом.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л. Веидингер (Будапешт)

Пусть дана симметричная гиперболическая система уравнений

$$\mathbf{u}_t = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}_{x_i} + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)u + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$—матрица порядка p, $\mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t)$—симметричные матрицы порядка p, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$—векторы с p компонентами, $\mathbf{x}$—вектор с n компонентами. Ищется решение задачи Коши $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$. Предполагаем, что матрицы $\mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ обладают

ограниченными производными порядка $\leqq \left[\frac{n}{2}\right]+3$, а известные функции $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ обладают частными производными порядка $\leqq \left[\frac{n}{2}\right]+3$, интегрируемыми с квадратом.

Систему (1) заменяем системой конечно-разностных уравнений

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, (\nu+1)h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, \nu h)\,\mathbf{v}(\mathbf{x}, \nu h) + h\mathbf{B}(\mathbf{x}, \nu h)\,\mathbf{v}(\mathbf{x}, \nu h) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}, \nu h),$$

где $\mathbf{r}_j$—заданные векторы, а $\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)$—матрицы порядка p, обладающие ограниченными производными порядка $\leqq \left[\frac{n}{2}\right]+1$, и удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I}; \quad \sum_{j=1}^{m} r_j^i \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t).$$

Доказывается следующая теорема:

Пусть для любой функции $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)\,\mathbf{z}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\nu h} \leqq 1 + c_1 h \,\|\, \mathbf{z}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} \tag{2}$$

при $\nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{h}\right]$, где символ $\|\ \|_{\nu h}$ обозначает L_2-норму функции на гиперплоскости $t = \nu h$. Тогда

$$\max_{\mathbf{x};\ \nu=0,1,\ldots,\left[\frac{T}{h}\right]} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, \nu h) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \nu h)| < c_2 h.$$

Используя эту теорему, и теоремы Фридрихса и Лакса, которые устанавливают неравенство (2) для широких классов конечноразностных схем, мы можем получить оценку максимальной погрешности для этих схем.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОДНОГО АНАЛОГА ДАНЖУА. II (ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА МНОЖЕСТВ УРОВНЯ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДИНИ)

К. М. Гарг (Лукноу, Индия)

Пусть f — вещественная функция, определенная на отрезке I числовой оси и принимающая конечные значения. В качестве применений своей, опубликованной недавно [1], теоремы, являющейся аналогом теоремы Данжуа о производных Дини, автор доказывает следующие теоремы.

Теорема 1. Для почти всех значений $y \in f(I)$ точка $x \in f^{-1}(y)$ является

(b. 1) предельной точкой множества $f^{-1}(y)$ тогда и только тогда, если выполняется одно из следующих утверждений:

(i) $$D^+f(x) = +\infty, \quad D_-f(x) = -\infty, \quad D_+f(x) = D^-f(x) \neq 0,$$

(ii) $$D_+f(x) = -\infty, \quad D^-f(x) = +\infty, \quad D^+f(x) = D_-f(x) \neq 0,$$

(iii) $$D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty, \quad D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty;$$

(*b*. 2) двусторонней предельной точкой множества $f^{-1}(y)$ тогда и только тогда, если выполняется последнее утверждение.

Теорема 2. Если f обладает свойством Дарбу в I, то для почти всех значений $y \in f(I)$ точка $x \in f^{-1}(y)$ является

(*c*. 1) изолированной точкой $f^{-1}(y)$ тогда и только тогда, если на месте x функция f имеет производную, отличную от нуля;

(*c*. 2) односторонней предельной точкой $f^{-1}(y)$ тогда и только тогда, если выполняется одно из следующих утверждений:

(i) $$D^+f(x) = +\infty, \quad D_-f(x) = -\infty, \quad D_+f(x) = D^-f(x) \neq 0,$$

(ii) $$D_+f(x) = -\infty, \quad D^-f(x) = +\infty, \quad D^+f(x) = D_-f(x) \neq 0;$$

(*c*. 3) двусторонней предельной точкой $f^{-1}(y)$ тогда и только тогда, если

$$D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty, \quad D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty.$$

Как следствия, получаются несколько известных результатов С. Стоилова и М. Иосифеску.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОДНОГО АНАЛОГА ДАНЖУА. III (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗНЫХ ТИПИЧНЫХ МНОЖЕСТВ УРОВНЯ)

К. М. Гарг (Лукноу, Индия)

Пусть f — вещественная функция, определенная на отрезке I числовой оси и принимающая конечные значения. Пусть $Y_a(f)$ $(a = i, d, p, f, \infty, e, u, c)$ означает множество значений $y \in f(I)$, для которых множество уровня $f^{-1}(y)$ является соответственно изолированным, плотным в себе, совершенным, конечным, бесконечным, счетным, несчетным, мощности континуума. В качестве применений своей, опубликованной недавно [2], теоремы, являющейся аналогом теоремы Данжуа о производных Дини, автор доказывает следующие теоремы.

Теорема 1. Если через K обозначается множество тех точек $x \in I$, в которых

$$D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty, \quad D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty,$$

то

$$m(Y_u(f) - f(K)) = 0,$$

где $m(X)$ — лебегова мера множества X.

Теорема 2. Пусть f обладает свойством Дарбу в I. Положим D для множества точек $x \in I$, в которых f обладает производной (конечной или бесконечной), и $N = I - D$. Тогда

(*a*. 1) $$Y_i(f) \sim f(I) - f(N),$$

(*a*. 2) $$Y_d(f) \sim f(I) - f(D),$$

(*a*. 3) $$m(f(N) - Y(f)) = 0,$$

где $A \sim B$ означает, что симметричная разность множеств A и B имеет меру нуль.

Теорема 3. Если f непрерывна в I, а множества D, N, K определяются как выше, то

$$(b.1) \qquad m(Y_f(f)) = m(f(I)) - m(f(N)),$$

$$(b.2) \qquad m(Y_\infty(f)) = m(f(N)),$$

$$(b.3) \qquad m(Y_p(f)) = m(f(I)) - m(f(D)),$$

$$(b.4) \qquad m(Y_u(f)) \leqq m_i(f(K)),$$

$$(b.5) \qquad m(f(D) \cap f(N)) - m_i(f(D) \cap f(K)) \leqq m(Y_e(f)) \leqq m(f(D) \cap f(N)),$$

где $m_i(X)$ — внутренняя мера Лебега множества X.

В качестве следствий получаются новые, простые доказательства ряда известных результатов, большинство их в форме, более выразительной, чем оригинальная.

О $(C, 1)$-СУММАХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ

Г. Фрейд (Будапешт)

Пусть $\{p_\nu(d\alpha;\ x)\}$ — последовательность ортогональных относительно распределения $d\alpha$ многочленов на вещественной оси, и

$$(*) \qquad f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(d\alpha;\ f)\, p_\nu(d\alpha;\ x);$$

$$a_\nu(d\alpha;\ f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_\nu(d\alpha;\ x)\, d\alpha(x).$$

— разложение функции $f \in L(d\alpha)$. Положим $\Lambda_n(d\alpha; x)$ для функции Лебега $(C, 1)$-сумм разложения $(*)$.

Теорема 1. Пусть носитель распределения $d\alpha$ содержится в конечном промежутке $[a, b]$, и в некоторой точке $x \in (a, b)$ выполняются неравенства

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu^2(d\alpha; x) \leqq Rn$$

и

$$|\alpha(x) - \alpha(\xi)| \leqq M|x - \xi|, \quad \text{если} \quad |x - \xi| \leqq \Delta.$$

Тогда последовательность $\{\Lambda_n(d\alpha; x)\}$ ограничена числом, зависящим только от величин R, M, Δ, a, b и $\alpha(b) - \alpha(a)$.

Эта теорема уточняет прежний результат К. Тандори [10] и автора [5].

Теорема 2. Если $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна и для всех вещественных значений x имеем

$$a_1 e^{-b^2x^2} < \alpha'(x) < a_2 e^{-b^2x^2},$$

то разложение $(*)$ функции $f \in L_2(d\alpha)$ является сильно $(C\,1)$-суммируемым в каждой точке x, для которого

$$\int_x^{x+h} [f(\xi) - f(x)]^2\, d\xi = o(|h|).$$

Пусть $\sigma_n(d\alpha; f; x)$ означает $(C, 1)$-средние (средние Фейера) степени $n-1$ разложения $(*)$, Π_n — множество многочленов степени n и

$$E_n(f; a, b) = \min_{\varphi_n \in \Pi_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)|.$$

Теорема 4. Предположим, что носитель распределения $d\alpha$ содержится в конечном промежутке $[a, b]$ и последовательность $\{\Lambda_n(d\alpha; x)\}$ равномерно ограничена на множестве $\mathfrak{M} \subset [a, b]$. Тогда $|f(\xi) - \sigma_{n+1}(d\alpha; f; \xi)| \leqq \frac{20\,Q}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu(f; a, b)$ если $\xi \in \mathfrak{M}$, где Q не зависит ни от n, ни от выбора $f(x)$.

Эта теорема распространяет на разложение $(*)$ теорему С. Б. Стечкина [8] о рядах Фурье. Для того, чтобы последовательность $\{\Lambda_n(d\alpha; x)\}$ была ограниченной во всяком внутреннем подинтервале промежутка $[c, d] \subset [a, b]$, достаточно, чтобы $\alpha(x)$ была абсолютно непрерывной в $[c, d]$ и неравенство

$$(**) \qquad 0 < m \leqq \alpha'(x) \leqq M$$

выполнялось для почти всех $x \in [c, d]$.

Пусть F_r — один из r-кратных интегралов от $f \in L(d\alpha)$, и рассмотрим ряд

$$(***) \qquad f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(d\alpha, F_r)\, p_\nu^{(r)}(d\alpha; x).$$

Теорема 7. Если носитель распределения $d\alpha$ содержится в конечном промежутке $[a, b]$ и в промежутке $[c, d] \subset [a, b]$ выполняется $(**)$, то, обозначая через $\sigma_{n,r}(d\alpha; f; x)$ средние Фейера ряда $(***)$, имеем:

$$|f(x) - \sigma_{n,r}(d\alpha; f; x)| \leqq \frac{M(d\alpha; r, c_1, d_1)}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu(f; a, b),$$

если $x \in [c_1, d_1] \subset (c, d)$.

О ПОЛУКОЛЬЦАХ И ПОЛУПОЛЯХ. II

Г. И. Веинерт (Потсдам)

Продолжая исследования работы [8], в настоящей второй части мы останавливаемся на построении полуколец отношений и полуколец разностей и на изучении их взаимоотношений.

Пусть $\mathfrak{R}$ — полукольцо и $\mathfrak{n}$ — некоторая мультипликативная подполугруппа, состоящая из мультипликативно регулярных элементов $\mathfrak{R}$. Под полукольцом правых отношений $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ подразумевается надполукольцо полукольца $\mathfrak{R}$ с единичным элементом, в котором всякий элемент $\alpha \in \mathfrak{n}$ обладает обратным $\alpha^{-1} \in \mathfrak{S}$ и элементы которого могут быть представлены в виде $a\alpha^{-1}$, где $a \in \mathfrak{R}$ и $\alpha \in \mathfrak{n}$. Тогда теорема из § 5 говорит: $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ существует в том и только в том случае, если для каждой паре элементов $a \in \mathfrak{R}$, $\alpha \in \mathfrak{n}$ найдется пара элементов $l \in \mathfrak{R}$, $\lambda \in \mathfrak{n}$, удовлетворяющих равенству $a\lambda = \alpha l$; это условие обозначается через $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$. Если $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ существует, то оно является однозначно определенным (с точностью до изоморфизма) через $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{n}$, и найдется единственное максимальное полукольцо правых отношений $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R})$, содержащее все полукольца правых отношений $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$.

В качестве подготовки к этому в § 4 мы рассматриваем соответствующие предложения относительно полугрупп правых отношений $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ некоторой полугруппы $\mathfrak{R}$, получающиеся из вышесформулированных путем игнорирования сложения. Предложение о существовании и единственности (§ 4, теорема 1) принадлежит Мурата [6], здесь, однако, мы предлагаем доказательство, опирающееся на обобщение одного необходимого условия (см. § 4, правило Z) Мальцева [4] для вложимости регулярной полугруппы в группу, что значительно сокращает нужные вычисления. Существование максимальной полугруппы правых отношений $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R})$ доказывается в теореме 3, § 4. Напротив, теорема 2 содержит критерий для того, чтобы две группы знаменателей $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ привели к одной и той же полугруппе правых отношений $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_1) = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_2)$; при этом максимальная из этих полугрупп знаменателей состоит из всех элементов полугруппы $\mathfrak{R}$, обратимых в $\mathfrak{S}$, и характеризуется тем, что она содержит вместе с каждым произведением регулярных элементов полугруппы $\mathfrak{R}$ и все множители произведения.

На основании этих рассуждений доказательство вышеупомянутой теоремы § 5 о полукольцах требует лишь дополнительного расчета сложения. Далее, в дополнении 1, § 5 устанавливается, что полукольцо правых отношений $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ обладает нулевым элементом только в том случае, если это же обстоятельство имеет место для $\mathfrak{R}$. При этом некоторый нулевой элемент 0 полукольца $\mathfrak{R}$ является нулевым элементом и в полукольце $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, если равенство $0 \cdot a = 0$ выполняется для всех $a \in \mathfrak{n}$. Таким образом, вместе с $\mathfrak{R}$ тоже $\mathfrak{S}$ является кольцом, так что мы получаем теоремы Азано ([1], [2]). Наконец, во всего трех возможных случаях можно задать признаки для существования некоторого полуполя правых отношений $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R})$ полукольца $\mathfrak{R}$ (дополнение 2).

Аналогично определяется полукольцо правых разностей $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ для полукольца $\mathfrak{R}$ и подполумодуля $\mathfrak{m}$, состоящего из аддитивно регулярных элементов $\mathfrak{R}$; при этом без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{m}$ является даже идеалом полукольца $\mathfrak{R}$. Теорема в § 6 утверждает, что $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ существует тогда и только тогда, если выполняется соответствующее аддитивное условие $D_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ и два дальнейших условия B) и C); последние являются более сложными, но они могут быть заменены на более простые достаточные условия, как например аддитивная регулярность или коммутативность полукольца $\mathfrak{R}$ (дополнение 1). В частности, условие $D_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ является необходимым и достаточным для существования некоторого кольца правых разностей $\mathfrak{D}_r(\mathfrak{R})$ аддитивно регулярного полукольца $\mathfrak{R}$ (дополнение 2).

Далее, согласно дополнению 3, полукольцо правых разностей $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ является мультипликативно регулярным слева в том и только в том случае, если из $a \neq b$, $c \neq \gamma$, где $a, b, c \in \mathfrak{R}$; $\gamma \in \mathfrak{m}$, всегда вытекает $ca + \gamma b \neq cb + \gamma a$. Для этого достаточно, чтобы для любой пары $a \in \mathfrak{R}$, $b \in \mathfrak{R}$ хотя бы одно из уравнений $a + x_1 = b$, $x_2 + a = b$, $b + x_3 = a$, $x_4 + b = a$ обладало решением $x_i \in \mathfrak{R}$, что мы сокращаем через $(*)$. Наконец, дополнение 4 гласит так: Всякое полуполе $\mathfrak{H}$ или вовсе не обладает, или обладает только одним (нетривиальным) полукольцом правых разностей, а именно кольцом разностей $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$; последнее обстоятельство имеет место тогда и только тогда, если $\mathfrak{H}$ является аддитивно регулярным и, следовательно, коммутативным. При этом $\mathfrak{R}$ не должно быть полем, ни даже мультипликативно регулярным. $\mathfrak{R}$ является полем в том и только в том случае, если для любого элемента $b \in \mathfrak{H}$, отличного от единичного элемента $e \in \mathfrak{H}$, одно из уравнений $e + y + bx = x + by$, $e + bx = x$, $e + y = by$ разрешимо элементами $x \in \mathfrak{H}$, $y \in \mathfrak{H}$. Наконец для того, чтобы $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ было полем,

вышеупомянутое условие $(*)$ тоже является достаточным, но не необходимым. Путем относящихся к этому контрпримеров, в конце § 6 решается проблема, поставленная Редеи в [7], стр. 167.

В § 7 мы рассматриваем тот случай, когда для некоторого полукольца $\mathfrak{R}$ существуют и полукольцо правых отношений $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$, и полукольцо правых разностей $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$. Тогда если полугруппа $\mathfrak{n}$ и идеал $\mathfrak{m}$ удовлетворяют тоже условию $Q_r(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ (что всегда имеет место, например, в случае $\mathfrak{mn} = \mathfrak{nm}$ или $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{m} \neq 0$), то найдется общее надполукольцо $\mathfrak{O} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{mn}^{-1})$, которое может быть получено указанным образом и как полукольцо правых отношений полукольца $\mathfrak{T}$, и как полукольцо правых разностей полукольца $\mathfrak{S}$ (теорема 1). Если при этом шаг от $\mathfrak{R}$ до $\mathfrak{T}$ является максимальным, то и шаг от $\mathfrak{S}$ до $\mathfrak{O}$ максимален; с другой стороны, максимальность шага от $\mathfrak{R}$ до $\mathfrak{S}$ не обязательно влечет то же свойство шага от $\mathfrak{T}$ до $\mathfrak{O}$ за собой, так что в общем случае можно утверждать только следующее: $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{D}_r(\mathfrak{R})) \geqq \mathfrak{D}_r(\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}))$ (ограничение теоремы 2 на коммутативное сложение). Это имеет место и в случае, когда $\mathfrak{D}_r(\mathfrak{R})$ является даже кольцом и $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R})$ — полуполем (откуда впрочем вытекает коммутативность сложения в полукольце $\mathfrak{R}$). Поэтому в теореме 3 мы снова резюмируем наши результаты (ср. тоже соответствующие графы).

Szegedi Nyomda V. 62-4603

ON MIXED TYPE LACUNARY INTERPOLATION. II

By

R. B. SAXENA (Lucknow, India)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. In the previous paper [7] we have been dealing with the following problem: Given $(2n-1)$ points in $[-1, 1]$

$$1 = x_1 > \xi_1 > x_2 > \xi_2 > \ldots > \xi_{n-1} > x_n = -1 \tag{1.1}$$

x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ being the real zeros of

$$\pi_n(x) \equiv -n(n-1) \int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\, dt \equiv (1-x^2) P'_{n-1}(t), \tag{1.2}$$

where $P_k(x)$ is the k^{th} LEGENDRE polynomial with the normalisation $P_k(1) = 1$; and ξ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ are the zeros of $P_{n-1}(x)$ and arbitrary numbers

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}; \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1} \\ &\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \quad \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n. \end{aligned} \tag{1.3}$$

To obtain the polynomial $R_n(x)$ of degree $\leqq 4n-3$ such that

$$\begin{aligned} &R_n(\xi_\nu) = \alpha_\nu, \quad R'_n(\xi_\nu) = \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \\ &R_n(x_\nu) = \gamma_\nu, \quad R''_n(x_\nu) = \delta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{1.4}$$

It turned out that these polynomials are uniquely determined if n is even. So that through out this paper we shall take $n = 2k \geqq 4$. For the form of these polynomials we have

$$R_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_\nu A_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \beta_\nu B_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu C_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu D_\nu(x), \tag{1.5}$$

where $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$, $C_\nu(x)$ and $D_\nu(x)$ are uniquely determined polynomials each of degree $\leqq 4n-3$. The explicit expressions of these polynomials which we have found in [7] are the following:

(a) *Expression for* $A_\nu(x)$ $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$.

$$\begin{aligned} A_\nu(x) = {} & \frac{\pi_n^2(x) h_\nu(x)}{\pi_n^2(\xi_\nu)} + \frac{\pi_n(x)\pi'_n(x) H_\nu(x)}{\pi_n^2(\xi_\nu)} + \\ & + \frac{\pi_n(x)\pi'_n(x) P_{n-1}(x) P''_{n-1}(x)}{\pi_n^2(\xi_\nu) P'^3_{n-1}(\xi_\nu)} \int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}\, dt + \\ & + \frac{n(n-1)\pi_n(x) P^2_{n-1}(x)}{(1-\xi_\nu^2)\pi_n^2(\xi_\nu) P'^2_{n-1}(\xi_\nu)} \left[\xi_\nu \left(1 + \frac{5}{7} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}\, dt \right) P_{n-1}(x) + \left(\frac{7}{5} + \xi_\nu \int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}\, dt \right) \right], \end{aligned} \tag{1.6}$$

where $h_\nu(x)$ and $H_\nu(x)$ are the fundamental polynomials (degree $2n-2$) of first and second kind respectively of HERMITE interpolation based on our ξ_ν points. For the explicit expressions of $h_\nu(x)$ and $H_\nu(x)$, we have

$$h_\nu(x) = \left\{1 - \frac{P''_{n-1}(\xi_\nu)}{P'_{n-1}(\xi_\nu)}(x-\xi_\nu)\right\}\lambda_\nu^2(x) \qquad (1 \leqq \nu \leqq n-1), \tag{1.7}$$

and

$$H_\nu(x) = (x-\xi_\nu)\lambda_\nu^2(x) \qquad (1 \leqq \nu \leqq n-1), \tag{1.8}$$

where $\lambda_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ are the fundamental polynomial (degree $n-2$) of LAGRANGE interpolation based on our the same points ξ_ν whose expression is the following

$$\lambda_\nu(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(x-\xi_\nu)P'_{n-1}(\xi_\nu)}. \tag{1.9}$$

(b) *Expression for* $B_\nu(x)$ $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$:

$$B_\nu(x) = \frac{\pi_n^2(x)P_{n-1}(x)\lambda_\nu(x)}{\pi_n^2(\xi_\nu)P'_{n-1}(\xi_\nu)} - \frac{\pi_n(x)\pi'_n(x)P_{n-1}(x)}{\pi_n^2(\xi_\nu)P'^2_{n-1}(\xi_\nu)}\left[\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}dt - \right. \tag{1.10}$$

$$-\left\{\frac{4}{7n(n-1)(1+\xi_\nu)} + \frac{5}{14}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}dt\right\}P_{n-1}(x) -$$

$$\left. -\left\{\frac{4}{5n(n-1)(1+\xi_\nu)} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}dt\right\}\right].$$

(c) *Expressions for* $C_\nu(x)$:

$$C_1(x) = P_{n-1}^2(x)\left[\frac{3+x}{4}l_1^2(x) - \frac{1-x^2}{4}l_1(x)l'_1(x) + \pi_n(x)\left\{+\left(\frac{37}{112} + \right.\right.\right. \tag{1.11}$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{56n(n-1)}\right)P_{n-1}(x) + \left(\frac{37}{80} + \frac{1}{40n(n-1)}\right)\right\}\right],$$

$$C_n(x) = P_{n-1}^2(x)\left[\frac{3-x}{4}l_n^2(x) + \frac{1-x^2}{4}l_n(x)l'_n(x) + \right. \tag{1.12}$$

$$\left. + \pi_n(x)\left\{-\left(\frac{37}{112} + \frac{1}{56n(n-1)}\right)P_{n-1}(x) + \left(\frac{37}{80} + \frac{1}{40n(n-1)}\right)\right\}\right]$$

and for $2 \leqq v \leqq n-1$,

$$C_v(x) = \frac{P_{n-1}^2(x)}{P_{n-1}^2(x_v)}\left[l_v^2(x) + \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_v)}\left\{\int_x^1 \frac{l_v'(t)}{t-x_v}\,dt - \right.\right. \tag{1.13}$$

$$-\frac{1}{P_{n-1}(x_v)}\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\,dt + \left(\frac{2x_v}{7(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)} + \frac{5}{14P_{n-1}(x_v)}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{14}\int_{-1}^{1}\frac{l_v'(t)}{t-x_v}\,dt\right)P_{n-1}(x) + \left(\frac{2}{5(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)} + \frac{1}{2P_{n-1}(x_v)}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\,dt - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{l_v'(t)}{t-x_v}\,dt\right)\right\}\Bigg].$$

(d) *Expressions for* $D_v(x)$:

$$D_1(x) = -\frac{\pi_n(x)P_{n-1}^2(x)}{n^2(n-1)^2}\left\{\frac{1}{7}P_{n-1}(x) + \frac{1}{5}\right\} \tag{1.14}$$

$$D_n(x) = \frac{\pi_n(x)P_{n-1}^2(x)}{n^2(n-1)^2}\left\{\frac{1}{7}P_{n-1}(x) - \frac{1}{5}\right\} \tag{1.15}$$

and for $2 \leqq v \leqq n-1$,

$$D_v(x) = \frac{\pi_n(x)P_{n-1}^2(x_v)}{2\pi_n'(x_v)P_{n-1}^2(x_v)P_{n-1}''(x_v)}\left[\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\,dt - \right. \tag{1.16}$$

$$\left. - P_{n-1}(x)\left\{\frac{2}{7(1-x_v^2)} + \frac{5}{14}\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\,dt\right\} - \left\{\frac{2}{5(1-x_v^2)} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\,dt\right\}\right].$$

2. In this paper we shall study the convergence of these interpolatory polynomials. Let us consider the sequence of points:

$$1 = x_{1n} > \xi_{1n} > x_{2n} > \ldots > \xi_{n-1,n-1} > x_{nn} = -1 \qquad (n = 4, 6, \ldots, 2k, \ldots) \tag{2.1}$$

which stand for the zeros of $\pi_n(x)P_{n-1}(x)$. Forming the interpolation polynomials for each $n = 2k$, we shall write the fundamental polynomials as $A_{v,n-1}(x)$, $B_{v,n-1}(x)$, $C_{v,n}(x)$ and $D_{v,n}(x)$. Let $f(x)$ be a function defined for $[-1, 1]$, we consider the sequence of polynomials:

$$R_n(x,f) = \sum_{v=1}^{n-1} f(\xi_{v,n-1})A_{v,n-1}(x) + \sum_{v=1}^{n-1} f'(\xi_{v,n-1})B_{v,n-1}(x) + \tag{2.2}$$

$$+ \sum_{v=1}^{n} f(x_{vn})C_{vn}(x) + \sum_{v=1}^{n}\delta_{vn}(x)D_{vn}(x)$$

with arbitrary numbers δ_{vn}. We prove the following

THEOREM. *Let $f'(x)$ belong to* Lip $\alpha(\alpha > \frac{1}{2})$ *in* $[-1, 1]$. *Supposing*

$$\sigma_{vn} = o(n), \tag{2. 3}$$

the sequence $R_n(x, f)$ converges uniformly to $f(x)$ in $[-1, 1]$.

3. Some other representations of the fundamental polynomials. The forms of the fundamental polynomials given in § 1 are more suited for verification purposes but they are unsuitable for convergence problem. However, according to our needs we shall obtain some other representations in some what simplified form of these fundamental polynomials. For this purpose we shall make use of the following results:

For $v = 2, 3, \ldots, n-1$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{P'_{n-1}(t)}{t - x_v}\, dt = \frac{2x_v}{1 - x_v^2} - \frac{2}{(1 - x_v^2) P_{n-1}(x_v)} \qquad (n \text{ even})^1 \tag{3. 1}$$

and

$$\int_{-1}^{1} \frac{l'_v(t)}{t - x_v}\, dt = -\frac{1}{(1 - x_v^2) P_{n-1}^2(x_v)}\,.^2 \tag{3. 2}$$

Further we shall need

LEMMA 3. 1. *For* $v = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}(t)}{t - \xi_v}\, dt = \frac{1}{(1 - \xi_v^2) P'_{n-1}(\xi_v)}\,.$$

PROOF. We can easily prove the following result[3]

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{z - x} \{P_n(x) P_{n-1}(z) - P_{n-1}(x) P_n(z)\}\, dx = -\frac{2}{n}\,.$$

Putting $z = \xi_v$, we get owing to $P_{n-1}(\xi_v) = 0$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}(x)}{x - \xi_v}\, dx = -\frac{2}{n P_n(\xi_v)}\,.$$

From the recurrence relations for $P(x)$, we have

$$n P_n(\xi_v) = -(1 - \xi_v^2) P'_{n-1}(\xi_v)$$

and this proves our lemma.

[1] Lemma 6.1 [1].
[2] Lemma 9.1 [1].
[3] WHITTAKAR and WATSON [9], p. 326, Ex. 20.

We shall also make use of the differential equation satisfied by $P_m(x)$

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0. \tag{3.3}$$

(i) Thus for $D_v(x)$, $2\leqq v\leqq n-1$, we have the forms:

$$D_v(x)=-\frac{\pi_n(x)P_{n-1}^2(x)}{2n(n-1)P_{n-1}^3(x_v)P_{n-1}''(x_v)}\left[\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\,dt-\right. \tag{3.4}$$

$$\left.-P_{n-1}(x)\left\{\frac{2+5x_v}{7(1-x_v^2)}-\frac{5}{7(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right\}-\left\{\frac{2+5x_v}{5(1-x_v^2)}-\frac{1}{(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right\}\right]$$

and

$$D_v(x)=-\frac{\pi_n(x)P_{n-1}^2(x)}{2n(n-1)P_{n-1}^3(x_v)P_{n-1}''(x_v)}\left[\int_{1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\,dt-\right. \tag{3.5}$$

$$\left.-P_{n-1}(x)\left\{\frac{2+5x_v}{7(1-x_v^2)}-\frac{5}{7(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right\}-\left\{\frac{2-5x_v}{5(1-x_v^2)}+\frac{1}{(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right\}\right].$$

(ii) The alternative forms for $C_v(x)$ $(2\leqq v\leqq n-1)$ will be obtained by using (3. 1) and (3. 2) which give

$$C_v(x)=\frac{P_{n-1}^2(x)}{P_{n-1}^2(x_v)}\left[l_v^2(x)-\frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_v)}\left\{\int_{-1}^{x}\frac{l_v'(t)}{t-x_v}\,dt+\right.\right. \tag{3.6}$$

$$+\frac{1}{P_{n-1}(x_v)}\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\,dt+P_{n-1}(x)\left(\frac{15}{14(1-x_v^2)P_{n-1}^2(x_v)}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{x_v}{(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right)+\left(\frac{3}{2(1-x_v^2)P_{n-1}^2(x_v)}-\frac{2+5x_v}{5(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right)\right\}\right]$$

and

$$C_v(x)=\frac{P_{n-1}^2(x)}{P_{n-1}^2(x_v)}\left[l_v^2(x)-\frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_v)}\left\{\int_{1}^{x}\frac{l_v'(t)}{t-x_v}\,dt+\right.\right. \tag{3.7}$$

$$+\frac{1}{P_{n-1}(x_v)}\int_{1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\,dt+P_{n-1}(x)\left(\frac{15}{14(1-x_v^2)P_{n-1}^2(x_v)}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{x_v}{(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right)-\left(\frac{3}{2(1-x_v^2)P_{n-1}^2(x_v)}+\frac{2-5x_v}{5(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right)\right\}\right].$$

Applying partial integration, the term $l_v^2(x)$ will be cancelled and we obtain using $l_v(\pm 1)=0$ and (1. 2) in the case $x<x_v$, the form

$$(3.8)\quad C_v(x) = -\frac{\pi_n(x)P_{n-1}^2(x)}{n(n-1)P_{n-1}^3(x_v)}\left[\int_{-1}^{x}\frac{l_v(t)}{(t-x_v)^2}dt+\frac{1}{P_{n-1}(x_v)}\int_{-1}^{x}\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_v}dt+\right.$$

$$+P_{n-1}(x)\left\{\frac{15}{14(1-x_v^2)P_{n-1}^2(x_v)}-\frac{x_v}{(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right\}+$$

$$\left.+\left\{\frac{3}{2(1-x_v^2)P_{n-1}^2(x_v)}-\frac{2+5x_v}{5(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right\}\right]$$

and in the case $x_v<x$,

$$(3.9)\quad C_v(x) = -\frac{\pi_n(x)P_{n-1}^2(x)}{n(n-1)P_{n-1}^3(x_v)}\left[\int_{1}^{x}\frac{l_v(t)}{(t-x_v)^2}dt+\frac{1}{P_{n-1}(x_v)}\int_{1}^{x}\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_v}dt+\right.$$

$$+P_{n-1}(x)\left\{\frac{15}{14(1-x_v^2)P_{n-1}^2(x_v)}-\frac{x_v}{(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right\}-$$

$$\left.-\left\{\frac{3}{2(1-x_v^2)P_{n-1}^2(x_v)}+\frac{2-5x_v}{5(1-x_v^2)P_{n-1}(x_v)}\right\}\right].$$

(iii) Further on using (1. 9) and Lemma 3. 1, we have for the $B_v(x)$ $(1\leqq v\leqq n-1)$, the forms:

$$(3.10)\quad B_v(x) = \frac{\pi_n^2(x)P_{n-1}^2(x)}{\pi_n^2(\xi_v)P'^2_{n-1}(\xi_v)(x-\xi_v)}+\frac{n(n-1)\pi_n(x)P_{n-1}^2(x)}{\pi_n^2(\xi_v)P'^2_{n-1}(\xi_v)}\left[\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_v}dt-\right.$$

$$-P_{n-1}(x)\left\{\frac{4}{7n(n-1)(1+\xi_v)}+\frac{5}{7(1-\xi_v^2)P'_{n-1}(\xi_v)}\right\}-$$

$$\left.-\left\{\frac{4}{5n(n-1)(1+\delta_v)}+\frac{1}{(1-\xi_v^2)P'_{n-1}(\xi_v)}\right\}\right]$$

and

$$(3.11)\quad B_v(x) = \frac{\pi_n^2(x)P_{n-1}^2(x)}{\pi_n^2(\xi_v)P'^2_{n-1}(\xi_v)(x-\xi_v)}+\frac{n(n-1)\pi_n(x)P_{n-1}^2(x)}{\pi_n^2(\xi_v)P'^2_{n-1}(\xi_v)}\left[\int_{1}^{x}\frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_v}dt-\right.$$

$$-P_{n-1}(x)\left\{\frac{4}{7n(n-1)(1+\xi_v)}+\frac{5}{7(1-\xi_v^2)P'_{n-1}(\xi_v)}\right\}-$$

$$\left.-\left\{\frac{4}{5n(n-1)(1+\xi_v)}-\frac{1}{(1-\xi_v^2)P'_{n-1}(\xi_v)}\right\}\right].$$

(iv) Similarly we get for $A_v(x)$, the forms:

$$A_v(x) = \frac{\pi_n^2(x)h_v(x)}{\pi_n^2(\xi_v)} + \frac{n(n-1)\pi_n(x)P_{n-1}^3(x)}{\pi_n^2(\xi_v)P_{n-1}'^2(\xi_v)(x-\xi_v)} + \tag{3.12}$$

$$+ \frac{n(n-1)\pi_n(x)P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)P_{n-1}'^2(\xi_v)\pi_n^2(\xi_v)}\left\{2\xi_v\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_v}\,dt + \xi_v + \frac{7}{5} + \frac{24\xi_v}{7(1-\xi_v^2)P_{n-1}'(\xi_v)}\right\}$$

and

$$A_v(x) = \frac{\pi_n^2(x)h_v(x)}{\pi_n^2(\xi_v)} + \frac{n(n-1)\pi_n(x)P_{n-1}^3(x)}{\pi_n^2(\xi_v)P_{n-1}'^3(\xi_v)(x-\xi_v)} + \tag{3.13}$$

$$+ \frac{n(n-1)\pi_n(x)P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)\pi_n^2(\xi_v)P_{n-1}'^2(\xi_v)}\left\{2\xi_v\int_{1}^{x}\frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_v}\,dt + \xi_v + \frac{7}{5} + \frac{52\xi_v}{7(1-\xi_v^2)P_{n-1}'(\xi_v)}\right\}.$$

These forms are now convenient ones for the estimitation purposes. In §§ 5 – 8, we shall be dealing with the estimitations of the fundamental polynomials. But before doing so, we shall state in § 4 few well-known facts about LEGENDRE polynomials which we shall repeatedly make use of.

4. Some well-known facts about Legendre polynomials. For $-1 \leqq x \leqq 1$

$$|P_m(x)| \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi m}}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \tag{4.1}$$

$$(1-x^2)^{\frac{3}{4}}|P_{n-1}'(x)| \leqq \sqrt{2n} \qquad (n \geqq 4), \tag{4.2}$$

$$|P_m(x)| \leqq 1 \tag{4.3}$$

$$|\pi_n(x)| \leqq \sqrt{\frac{2n}{\pi}}. \tag{4.4}$$

We have further for $v = 2, 3, \ldots, \frac{n}{2}$ and $n = 4, 6, \ldots$, the estimation

$$|P_{n-1}(x_v)| > \frac{1}{\sqrt{8v\pi}}.^4 \tag{4.5}$$

For the fundamental polynomials $l_v(x)$ we have FEJÉR's result

$$lj^2(x) \leqq \sum_{v=1}^{n} l_v^2(x) \leqq 1 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1,\ n = 4, 6, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.6}$$

Further let

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \pi$$

[4] BALÁZS and TURÁN [2], Lemma 2. 1.

be the zeros of $P_{n-1}(\cos\theta)$. Then we have

$$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n-1}\leqq\theta_\nu\leqq\frac{\nu\pi}{n} \tag{4.7}$$ [5]

and

$$|P'_{n-1}(\cos\theta_\nu)|\sim\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}(n-1)^{\alpha+2}\qquad\left(0<\theta_\nu\leqq\frac{\pi}{2}\right). \tag{4.8}$$ [6]

The following identities play an important role in our estimation work.

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{(1-\xi_\nu^2)P'^2_{n-1}(\xi_\nu)}=1 \tag{4.9}$$ [7]

and

$$1-P^2_{n-1}(x)=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1-x^2}{1-\xi_\nu^2}\,\frac{P^2_{n-1}(x)}{P'^2_{n-1}(\xi_\nu)(x-\xi_\nu)^2}. \tag{4.10}$$ [8]

We further have

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}h_\nu(x)\equiv 1 \tag{4.11}$$

and as FEJÉR proved, we have for $\nu=1, 2, \ldots, n-1$ and $-1\leqq x\leqq 1$

$$h_\nu(x)\geqq 0. \tag{4.12}$$

5. Estimation of $D_\nu(x)$. In this § we shall estimate the quantity

$$\sum_{\nu=1}^{n}|D_\nu(x)|.$$

From (1. 14), (1. 15), (4. 1), (4. 2) and (4. 3) we have for $n=4, 6, \ldots$ and $-1\leqq x\leqq 1$

$$|D_1(x)|=O(n^{-4}),\quad |D_n(x)|=O(n^{-4}). \tag{5.1}$$

For $D_\nu(x)$ $(2\leqq\nu\leqq n-1)$, we have the

LEMMA 5. 1. *For* $n=4, 6, \ldots$ *and* $-1\leqq x\leqq 1$

$$|D_\nu(x)|=O(n^{-3})(1-x_\nu^2)\nu^{\frac{3}{2}}|l_\nu(x)|+O(n^{-\frac{9}{2}})\nu^{\frac{5}{2}}\quad \textit{for}\quad 2\leqq\nu\leqq\frac{n}{2}$$

and

$$|D_\nu(x)|=O(n^{-3})(1-x_\nu^2)(n-\nu)^{\frac{3}{2}}|l_\nu(x)|+O(n^{-\frac{9}{2}})(n-\nu)^{\frac{5}{2}}\quad \textit{for}\quad \frac{n}{2}+1\leqq\nu\leqq n-1.$$

PROOF. It is sufficient to prove the result in the first case.
Let us suppose that

$$x<x_\nu.$$

[5] SZEGÖ [8], p. 118, formula (6. 21. 7).
[6] SZEGÖ [8], p. 232, formula (8. 9. 2).
[7] EGERVÁRY and TURÁN [4], p. 264.
[8] EGERVÁRY and TURÁN [4], p. 265, formula (7. 1).

Since we have

$$\left| \int_{-1}^{x} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\, dt \right| \leqq 2\left(\frac{1}{x_\nu - x} + \frac{1}{1-x_\nu^2}\right),$$

hence from (3. 4) and (4. 3)

$$|D_\nu(x)| = O(1)\frac{P_{n-1}^2(x)|l_\nu(x)|}{P_{n-1}^2(x_\nu)|P''_{n-1}(x_\nu)|} + O(n^{-2})\frac{|\pi_n(x)|P_{n-1}^2(x)}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}^4(x_\nu)|P''_{n-1}(x_\nu)|}.$$

Now from (3. 3) we have

$$(1-x_\nu^2)P''_{n-1}(x_\nu) = -n(n-1)P_{n-1}(x_\nu).$$

Therefore

$$|D_\nu(x)| = O(n^{-2})\frac{(1-x_\nu^2)P_{n-1}^2(x)|l_\nu(x)|}{|P_{n-1}^3(x_\nu)|} + O(n^{-4})\frac{|\pi_n(x)|P_{n-1}^2(x)}{|P_{n-1}^5(x_\nu)|}$$

which owing to (4. 5) gives

$$|D_\nu(x)| = P_{n-1}^2(x)\{O(n^{-2})(1-x_\nu^2)\nu^{\frac{3}{2}}|l_\nu(x)| + O(n^{-\frac{7}{2}})\nu^{\frac{5}{2}}\}. \tag{5. 2}$$

For $x_\nu < x$, the estimation runs similarly for we have again

$$\left| \int_{x}^{1} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\, dt \right| < 2\left(\frac{1}{x_\nu - x} + \frac{1}{1-x_\nu^2}\right).$$

For $x = x_\nu$, the estimation obviously holds.

Now from (5. 2) and (4. 1) it follows that

$$|D_\nu(x)| = O(n^{-3})(1-x_\nu^2)\nu^{\frac{3}{2}}|l_\nu(x)| + O(n^{-\frac{9}{2}})\nu^{\frac{5}{2}} \tag{5. 3}$$

for $2 \leqq \nu \leqq \dfrac{n}{2}$ and $-1 < x < 1$.

But owing to $|D_\nu(\pm 1)| = 0$, (5. 3) holds for $-1 \leqq x \leqq 1$. Hence our Lemma is proved.

From (5. 1) and Lemma 5. 1 we have

LEMMA 5. 2. *For* $n = 4, 6, \ldots$ *and* $-1 \leqq x \leqq 1$,

$$\sum_{\nu=1}^{n} |D_\nu(x)| = O(n^{-1}).$$

PROOF.

$$\sum_{\nu=1}^{n} |D_\nu(x)| = O(n^{-4}) + O(n^{-3})\left\{ \sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} \nu^{\frac{3}{2}}|l_\nu(x)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^{n-1} (n-\nu)^{\frac{3}{2}}|l_\nu(x)| \right\} + O(n^{-\frac{9}{2}})\left\{ \sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} \nu^{\frac{5}{2}} + \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^{n-1} (n-\nu)^{\frac{5}{2}} \right\}.$$

Using SCHWARTZ's inequality we have

$$\sum_{v=1}^{n} |D_v(x)| = O(n^{-4}) + O(n^{-3}) \left(\sum_{v=1}^{\frac{n}{2}} v^3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{v=1}^{n} l_v^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} + O(n^{-1})$$

which owing to (4. 6) proves the Lemma.

6. Estimation of $C_v(x)$. Here we shall estimate the quantity

$$\sum_{v=1}^{n} |C_v(x)|.$$

We first prove

LEMMA 6. 1. *For $n=4, 6, \ldots$ and $-1 \leqq x \leqq 1$, the estimation*

$$|C_1(x)| = O(n), \qquad |C_n(x)| = O(n)$$

holds.

It is sufficient to prove the result for $C_1(x)$. From (1. 11), (4. 3), (4. 6) we have

$$|C_1(x)| \leqq 1 + \frac{1-x^2}{4} l_1'(x) + |\pi_n(x)|.$$

Using BERNSTEIN inequality and (4. 4), the lemma is proved.

For the further fundamental polynomials we have

LEMMA 6. 2. *For $n=4, 6, \ldots$ and $-1 \leqq x \leqq 1$ we have the estimation*

$$|C_v(x)| = O(1)\sqrt{v} + O(1)\, v\, |l_v(x)| \quad \text{for} \quad 2 \leqq v \leqq \frac{n}{2}$$

and

$$|C_v(x)| = O(1)\sqrt{n-v} + O(1)(n-v)|l_v(x)| \quad \text{for} \quad \frac{n}{2} + 1 \leqq v \leqq n-1.$$

PROOF. Again it is sufficient to prove the case $2 \leqq v \leqq \frac{n}{2}$. First let $x < x_v$, then using the representation (3. 8) we have

$$|C_v(x)| \leqq \left[\frac{|\pi_n(x)| P_{n-1}^2(x)}{|P_{n-1}^3(x_v)|} \left| \int_{-1}^{x} \frac{l_v(t)}{(t-x_v)^2}\, dt \right| + \frac{|\pi_n(x)| P_{n-1}^2(x)}{P_{n-1}^4(x_v)} \left| \int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_v}\, dt \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{5|\pi_n(x)| P_{n-1}^2(x)}{(1-x_v^2)|P_{n-1}^5(x_v)|} \right] = J_1 + J_2 + J_3.$$

If Φ_v's stand for the zeros of $P_{n-1}'(\cos\theta)$ and θ_v's for the zeros of $P_{n-1}(\cos\theta)$ then we have obviously

$$0 = \Phi_1 < \theta_1 < \Phi_2 < \theta_2 < \ldots < \Phi_v < \theta_v < \ldots < \pi$$

and now we have $(2 \leqq v \leqq n-1)$

$$(1-x_v^2) = (1-\cos^2 \Phi_v) = \sin^2 \Phi_v > \frac{4}{\pi^2} \Phi_v^2 > \frac{4}{\pi^2} \theta_{v-1}^2 .$$

Applying BRUN's estimation (4. 7) we have

$$(6.\ 1) \qquad (1-x_v^2) > \frac{4}{\pi^2}\left(v-\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{(n-1)^2} > \frac{v^2}{4(n-1)^2} .$$

Thus for

$$J_3 = \frac{5|\pi_n(x)| P_{n-1}^2(x)}{n(n-1)(1-x_v^2)|P_{n-1}^5(x_v)|}$$

we have owing to (6. 1), (4. 1), (4. 2) and (4. 5)

$$(6.\ 2) \qquad J_3 = O(1)\sqrt{v} .$$

For

$$J_2 = \frac{|\pi_n(x)| P_{n-1}^2(x)}{n(n-1)P_{n-1}^4(x_v)} \left| \int_{-1}^{x} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_v}\, dt \right|$$

we have

$$J_2 < \frac{2(1-x_v^2)P_{n-1}^2(x)}{n(n-1)P_{n-1}^4(x_v)} \left| \frac{P'_{n-1}(x)}{x-x_v} \right| + \frac{2|\pi_n(x)| P_{n-1}^2(x)}{n(n-1)(1-x_v^2)P_{n-1}^4(x_v)} .$$

Using the identity

$$\frac{P'_{n-1}(x)}{x-x_v} = \frac{P'_{n-1}(1)}{1-x_v} l_1(x) + P''_{n-1}(x_v) l_v(x) + \frac{P'_{n-1}(t)}{1+x_v} l_n(x)$$

which we can write it as

$$(6.\ 3) \qquad \frac{P'_{n-1}(x)}{x-x_v} = \frac{(1+xx_v)}{1-x_v^2} P'_{n-1}(x) + P''_{n-1}(x_v) l_v(x)$$

and (6. 1), (4. 1), (4. 2), (4. 3) and (4. 5) we have

$$(6.\ 4) \qquad J_2 = O(n) \frac{|l_v(x)|}{\sqrt{v}} + O(1).$$

$$(6.\ 5) \qquad J_1 = \frac{|\pi_n(x)| P_{n-1}^2(x)}{n(n-1)P_{n-1}^3(x_v)} \left| \int_{-1}^{x} \frac{l_v(t)}{(t-\varkappa_v)^2}\, dt \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{|\pi_n(x)| P_{n-1}^2(x)}{n(n-1)P_{n-1}^3(x_v)} \left| \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{(t-x_v)^2} \right| \leqq \frac{P_{n-1}^2(x)}{P_{n-1}^2(x_v)} |l_v(x)| = O(1)\, v\, |l_v(x)|.$$

Thus (6. 2), (6. 4) and (6. 5) prove the lemma, for $x<x_\nu$. For $x>x_\nu$, we use the representation (3. 9) for $C_\nu(x)$ and rest follows similarly. At $x=x_\nu$, the lemma obviously holds.

From Lemma 6. 1 and Lemma 6. 2, we atonce have the

LEMMA 6. 3. *For* $n=4, 6, \ldots$ *and* $-1\leqq x\leqq 1$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |C_\nu(x)| = O(n^{\frac{3}{2}}).$$

7. Estimation of $B_\nu(x)$. For the estimation of the quantity

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} |B_\nu(x)|$$

we shall require the estimation of

$$\left| \int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}\, dt \right|.$$

We shall therefore first prove the

LEMMA 7. 1. *In the case* $x<\xi_\nu<1$

$$\left| \int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}\, dt \right| < \frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{\xi_\nu - x} + \frac{1}{1-\xi_\nu}\right).$$

PROOF. From the recurrence relations for $P_n(x)$ we have

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{2n-1}\{P'_{n-1}(x) - P'_{n+1}(x)\}.$$

Hence

$$(2n-1)\int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}\, dt = \int_{-1}^{x} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}\, dt - \int_{-1}^{x} \frac{P'_{n+1}(t)}{t-\xi_\nu}\, dt =$$

$$= \frac{P_{n-1}(x)}{x-\xi_\nu} - \frac{P_{n+1}(x)}{x-\xi_\nu} + \int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}(t)}{(t-\xi_\nu)^2}\, dt - \int_{-1}^{x} \frac{P_{n+1}(t)}{(t-\xi_\nu)^2}\, dt.$$

We have owing to (4. 3)

$$\left| \int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}\, dt \right| \leqq \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4}{\xi_\nu - x} + \frac{2}{1+\xi_\nu}\right) < \frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{\xi_\nu - x} + \frac{1}{1-\xi_\nu^2}\right).$$

Similarly for $-1<\xi_v<x$, we have

$$\left|\int_x^1 \frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_v}\,dt\right| < \frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{x-\xi_v}+\frac{1}{1-\xi_v^2}\right).$$

We now prove the

LEMMA 7. 2. *For* $1\leqq v\leqq n-1$ *and* $-1\leqq x\leqq 1$

$$|B_v(x)| = O(n^{\frac{1}{2}})\frac{\sqrt{1-x^2}\,|P_{n-1}(x)|}{(1-\xi_v^2)P'^2_{n-1}(\xi_v)|x-\xi_v|}+O(n^{-\frac{3}{2}})+O(1)\frac{1}{(1-\xi_v^2)P^2_{n-1}(\xi_v)}.$$

PROOF. Let first be $x<\xi_v<1$, then the form (3. 10), (4. 3) and Lemma 7. 1 give

$$(7.1)\quad |B_v(x)| \leqq \frac{\pi_n^2(x)P^2_{n-1}(x)}{\pi_n^2(\xi_v)P'^2_{n-1}(\xi_v)|x-\xi_v|}+\frac{4n(n-1)|\pi_n(x)|P^2_{n-1}(x)}{(2n-1)\pi_n^2(\xi_v)P'^2_{n-1}(\xi_v)|x-\xi_v|}+$$

$$+\frac{4n(n-1)|\pi_n(x)|P^2_{n-1}(x)}{(2n-1)\pi_n^2(\xi_v)P'^2_{n-1}(\xi_v)(1-\xi_v^2)}+\frac{3|\pi_n(x)|P^2_{n-1}(x)}{\pi_n^2(\xi_v)P'^2_{n-1}(\xi_v)(1-\xi_v^2)}+$$

$$+\frac{2n(n-1)|\pi_n(x)|P'^2_{n-1}(x)}{\pi_n^2(\xi_v)|P'^3_{n-1}(\xi_v)|(1-\xi_v^2)} = J_4+J_5+J_6+J_7+J_8.$$

Now from (4. 7)

$$(7.2)\qquad (1-\xi_v^2) = 1-\cos^2\theta_v = \sin^2\theta_v > \frac{4}{\pi^2}\theta_v^2 > \frac{v^2}{(n-1)^2}.$$

We write

$$J_4 = \frac{\pi_n^2(x)P^2_{n-1}(x)}{\pi_n^2(\xi_v)P'^2_{n-1}(\xi_v)|x-\xi_v|}$$

in the form

$$J_4 = \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'^2_{n-1}(x)}{(1-\xi_v^2)P'^2_{n-1}(\xi_v)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}P^2_{n-1}(x)}{(1-\xi_v^2)P'^2_{n-1}(\xi_v)|x-\xi_v|}$$

and using (4. 2), (4. 8), (7. 2) we have for $1\leqq v\leqq \frac{n}{2}+1$

$$J_4 = O(1)\frac{\sqrt{1-x^2}P^2_{n-1}(x)}{(1-\xi_v^2)P'^2_{n-1}(\xi_v)|x-\xi_v|}.$$

$$(7.3)\qquad J_5 = \frac{4n(n-1)|\pi_n(x)|P^2_{n-1}(x)}{\pi_n^2(\xi_v)(2n-1)|1-\xi_v^2|P'^2_{n-1}(\xi_v)} =$$

$$= \frac{4n(n-1)\sqrt{1-x^2}P'_{n-1}(x)}{(2n-1)(1-\xi_v^2)P'^2_{n-1}(\xi_v)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}P^2_{n-1}(x)}{(1-\xi_v^2)P'^2_{n-1}(\xi_v)|x-\xi_v|}$$

and now using BERNSTEIN's inequality together with (4. 8) and (7. 2) we have

$$(7.4)\qquad J_5 = O(n)\frac{\sqrt{1-x^2}P^2_{n-1}(x)}{(1-\xi_v^2)P'^2_{n-1}(\xi_v)|x-\xi_v|}.$$

For

$$J_6 = \frac{4n(n-1)\,|\pi_n(x)|\,P_{n-1}^2(x)}{(2n-1)\,\pi_n^2(\xi_\nu)\,P_{n-1}'^2(\xi_\nu)(1-\xi_\nu^2)},$$

we use (4. 1), (4. 2), (4. 8) and (7. 2) which give

$$J_6 = O(n^{-1})\,|P_{n-1}(x)|. \tag{7. 5}$$

Similarly

$$J_7 = \frac{3\,|\pi_n(x)|\,P_{n-1}^2(x)}{\pi_n^2(\xi_\nu)\,P_{n-1}'^2(\xi_\nu)(1-\xi_\nu^2)} = O(n^{-\frac{1}{2}})\,|P_{n-1}(x)|.$$

Lastly for

$$J_8 = \frac{2n(n-1)\,|\pi_n(x)|\,P_{n-1}^2(x)}{\pi_n^2(\xi_\nu)\,|P_{n-1}'^3(\xi_\nu)|\,(1-\xi_\nu^2)}$$

we have in the same manner

$$J_8 = O(n^{\frac{1}{2}})\,\frac{|P_{n-1}(x)|}{(1-\xi_\nu^2)\,P_{n-1}^2(\xi_\nu)}. \tag{7. 7}$$

From (7. 3), (7. 4), (7. 5), (7. 6) and (7. 7) we have in the for $1 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2}+1$ and $-1<x<\xi_\nu<1$

$$|B_\nu(x)| = O(n)\,\frac{\sqrt{1-x^2}\,P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_n^2)\,P_{n-1}'^2(\xi_\nu)\,|x-\xi_\nu|} + O(n^{-1})\,|P_{n-1}(x)| + \tag{7. 8}$$

$$+ O(n^{\frac{1}{2}})\,\frac{|P_{n-1}(x)|}{(1-\xi_\nu^2)\,P_{n-1}^2(\xi_\nu)}.$$

The same estimation holds for $-1<\xi_\nu<x\leqq 1$. For $x=\xi_\nu$, it obviously holds. We also note that the lemma is again true for $\frac{n}{2}+1 \leqq \nu \leqq n-1$.

Now using (4. 1) we find

$$|B_\nu(x)| = O(n^{\frac{1}{2}})\,\frac{\sqrt{1-x^2}\,|P_{n-1}(x)|}{(1-\xi_\nu^2)\,P_{n-1}'^2(\xi_\nu)\,|x-\xi_\nu|} + O(n^{-\frac{3}{2}}) + \tag{7. 9}$$

$$+ O(1)\,\frac{1}{(1-\xi_\nu^2)\,P_{n-1}^2(\xi_\nu)}$$

holds for $-1<x<1$. But the continuity factor together with $B_\nu(\pm 1) = 0$ prove the result for $-1 \leqq x \leqq 1$. Hence our lemma is proved.

From lemma 7. 2, we have

LEMMA 7. 3. *For* $1 \leqq \nu \leqq n-1$ *and* $-1 \leqq x \leqq 1$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |B_\nu(x)| = O(n^{\frac{1}{2}}).$$

PROOF. From (7. 8) we have on using SCHWARTZ's inequality

$$\sum_{v=1}^{n-1}|B_v(x)| = O(n^{\frac{1}{2}})\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\frac{1-x^2}{1-\xi_v^2}\cdot\frac{P_{n-1}^2(x)}{P_{n-1}^2(\xi_v)(x-\xi_v)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\frac{1}{(1-\xi_v^2)P_{n-1}^2(\xi_v)}\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+O(n^{-\frac{1}{2}})+O(1)\sum_{v=1}^{n-1}\frac{1}{(1-\xi_v^2)P_{n-1}^2(\xi_v)}.$$

Now using the identities (4. 9) and (4. 10) we atonce get the lemma.

8. Estimation of $A_v(x)$. In this § we shall estimate the quantity

$$\sum_{v=1}^{n-1}|A_v(x)|.$$

We shall need the

LEMMA 8. 1. *For* $1\leqq v\leqq n-1$ *and* $-1\leqq x\leqq 1$

$$|A_v(x)| = O(n^{\frac{3}{2}})\frac{\sqrt{1-x^2}\,|P_{n-1}(x)|}{(1-\xi_v^2)P_{n-1}'^2(\xi_v)|x-\xi_v|}+O(n^{\frac{1}{2}})\frac{1}{v^2}+O(n^{-\frac{1}{2}})+O(n)h_v(x).$$

PROOF. Let first be $x<x_v$. Using the representation (3. 12), we having owing to lemma 7. 1,

$$|A_v(x)|\leqq\frac{\pi_n^2(x)h_v(x)}{\pi_n^2(\xi_v)}+\frac{n(n-1)|\pi_n(x)|\,|P_{n-1}^3(x)|}{|x-\xi_v|(1-\xi_v^2)^2P_{n-1}'^4(\xi_v)}+\frac{4n|\pi_n(x)|P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)^3P_{n-1}'^4(\xi_v)|x-\xi_v|}+$$

$$+\frac{4n|\pi_n(x)|P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)^4P_{n-1}'^4(\xi_v)}+\frac{3n(n-1)|\pi_n(x)|P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)^3P_{n-1}'^4(\xi_v)}+\frac{8n(n-1)|\pi_n(x)|P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)^4|P_{n-1}'^5(\xi_v)|}=$$

$$=J_9+J_{10}+J_{11}+J_{12}+J_{13}+J_{14}.$$

We note that the J's in this § are similar to those in § 7. The argument for their estimation is therefore the same. Hence we shall omit the details of the proof and only state the result.

For $1\leqq v\leqq\dfrac{n}{2}+1$, $x<x_v$

$$(8.\ 1)\qquad J_{10}=\frac{n(n-1)|\pi_n(x)|\,|P_{n-1}^3(x)|}{|x-\xi_v|(1-\xi_v^2)^2P_{n-1}'^4(\xi_v)}=O(n^2)\frac{\sqrt{1-x^2}\,|P_{n-1}^3(x)|}{(1-\xi_v^2)P_{n-1}'^2(\xi_v)|x-\xi_v|}.$$

$$(8.\ 2)\qquad J_{11}=\frac{4n|\pi_n(x)|P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)^3P_{n-1}'^4(\xi_v)|x-\xi_v|}=O(n^2)\frac{\sqrt{1-x^2}\,P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)P_{n-1}'^2(\xi_v)|x-\xi_v|}.$$

$$(8.\ 3)\qquad J_{12}=\frac{4n|\pi_n(x)|P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)^4P_{n-1}'^4(\xi_v)}=O(n)\frac{|P_{n-1}(x)|}{v^2}.$$

$$(8.\ 4)\qquad J_{13}=\frac{3n(n-1)|\pi_n(x)|P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)^3P_{n-1}'^4(\xi_v)}=O(1)|P_{n-1}(x)|.$$

$$(8.\ 5)\qquad J_{14}=\frac{8n(n-1)|\pi_n(x)|P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_v^2)^4|P_{n-1}'^5(\xi_v)|}=O(n^{-1})|P_{n-1}(x)|.$$

Lastly for

$$J_9 = \frac{\pi_n^2(x)h_\nu(x)}{\pi_n^2(\xi_\nu)},$$

we use (4. 12) and have

$$J_9 = O(n)h_\nu(x). \tag{8. 6}$$

Thus (8. 1)—(8. 6) give for $1 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2} + 1$ and $x < \xi_\nu$

$$|A_\nu(x)| = O(n^2)\frac{\sqrt{1-x^2}\,P_{n-1}^2(x)}{(1-\xi_\nu^2)P_{n-1}'^2(\xi_\nu)|x-\xi_\nu|} + O(n)\frac{|P_{n-1}(x)|}{\nu^2} + \\ + O(1)|P_{n-1}(x)| + O(n)h_\nu(x).$$

For $\xi_\nu < x$, the estimation runs similarly. In this case we start from the representation (3. 13) instead of (3. 12) and note that

$$\left|\int_x^1 \frac{P_{n-1}(t)}{t-\xi_\nu}\,dt\right| < \frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{x-\xi_\nu} + \frac{1}{1-\xi_\nu^2}\right).$$

For $x = \xi_\nu$, it again holds. In the case $\frac{n}{2} + 1 \leqq \nu \leqq n-1$ the same estimation holds. On using (4. 1) we get

$$|A_\nu(x)| = O(n^{\frac{3}{2}})\frac{\sqrt{1-x^2}\,|P_{n-1}(x)|}{(1-\xi_\nu^2)P_{n-1}'^2(\xi_\nu)|x-\xi_\nu|} + O(n^{\frac{1}{2}})\nu^{-2} + \\ + O(n^{-\frac{1}{2}}) + O(n)h_\nu(x) \quad \text{for} \quad -1 < x < 1. \tag{8. 7}$$

But the same argument as before that $|A_\nu(\pm 1)| = 0$ proves the lemma.

We now prove

LEMMA 8. 2. *For* $1 \leqq \nu \leqq n-1$ *and* $-1 \leqq x \leqq 1$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} |A_\nu(x)| = O(n^{\frac{3}{2}}).$$

PROOF. From lemma 8. 1 we have

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} |A_\nu(x)| = O(n^{\frac{3}{2}}) \sum_{\nu=1}^{n-1} \left|\frac{\sqrt{1-x^2}\,P_{n-1}(x)}{\sqrt{1-\xi_\nu^2}\,P_{n-1}'(\xi_\nu)(x-\xi_\nu)}\right| \left|\frac{1}{\sqrt{1-\xi_\nu^2}\,P_{n-1}'(\xi_\nu)}\right| + \\ + O(n^{\frac{1}{2}}) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^2} + O(n^{\frac{1}{2}}) + O(n) \sum_{\nu=1}^{n-1} h_\nu(x).$$

Using SCHWARTZ's inequality

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} |A_\nu(x)| = O(n^{\frac{3}{2}}) \left\{\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1-x^2}{1-\xi_\nu^2} \frac{P_{n-1}^2(x)}{P_{n-1}'^2(\xi_\nu)(x-\xi_\nu)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{(1-\xi_\nu^2)P_{n-1}^2(\xi_\nu)}\right\}^{\frac{1}{2}} + \\ + O(n^{\frac{1}{2}}) + O(n) \sum_{\nu=1}^{n-1} h_\nu(x).$$

which owing to the identities (4. 10), (4. 9) and (4. 11) completes the proof of Lemma 8. 2.

9. The approximating polynomial $\varrho_n(x)$. We shall need the following:

LEMMA 9. 1. *Let* $f'(x) \in \operatorname{Lip} \alpha$ $(0<\alpha<1)$ *in* $[-1, +1]$, *then there is a polynomial* $\varrho_n(x)$ *of degree atmost n possessing the following properties:*

$$|f(x)-\varrho_n(x)| \leqq k_1 n^{-1-\alpha}\{(\sqrt{1-x^2})^{\alpha+1}+n^{-1-\alpha}\}, \tag{9. 1}$$

$$|f'(x)-\varrho_n'(x)| \leqq k_2 n^{-\alpha}\{(\sqrt{1-x^2})^{\alpha}+n^{\alpha}\}, \tag{9. 2}$$

and

$$|\varrho_n''(x)| \leqq k_3 n^{2-2\alpha} \tag{9. 3}$$

uniformly in $-1 \leqq x \leqq +1$, *where* k_1, k_2, k_3, (*and then* $k_4, k_5, \ldots$) *are positive numerical constants.*

PROOF. The part (9. 1) of the above lemma is the particular case of the theorem of DZYADYK[9] while (9. 2) and (9. 3) are the consequences of (9. 1).

To prove (9. 2) of the above lemma[10] we define the numbers

$$n_i = 2^i n \qquad (i=0, 1, 2, \ldots)$$

then

$$f(x) = \varrho_n(x)+[\varrho_{2^1 n}(x)-\varrho_{2^0 n}(x)]+\ldots+[\varrho_{2^{i+1}n}(x)-\varrho_{2^i n}(x)]+\ldots = \tag{9. 4}$$

$$= \varrho_n(x)+U_{2^1 n}(x)+\ldots+U_{2^{i+1}n}(x)+\ldots = \varrho_n(x)+\sum_{i=0}^{\infty} U_{2^{i+1}n}(x),$$

where

$$U_{2^{i+1}n}(x) = \varrho_{2^{i+1}n}(x)-\varrho_{2^i n}(x). \tag{9. 5}$$

From (9. 5) owing to (9. 1) we have

$$|U_{2^{i+1}n}(x)| \leqq |\varrho_{2^{i+1}n}(x)-f(x)|+|f(x)-\varrho_{2^i n}(x)| \leqq$$

$$\leqq \frac{2^{\alpha+3}k_1}{(2^i n)^{\alpha+1}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{\alpha+1}+\frac{1}{(2^{i+1}n)^{\alpha+1}}\right].$$

Using the inequality of DZYADYK we have from (9. 6)

$$|U_{2^{i+1}n}'(x)| \leqq \frac{k_4}{(2^i n)^{\alpha}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{\alpha}+\frac{1}{(2^i n)^{\alpha}}\right]. \tag{9. 7}$$

Hence we atonce have from (9. 4) and (9. 7)

$$|f'(x)-\varrho_n'(x)| \leqq \frac{k_2}{n^{\alpha}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{\alpha}+\frac{1}{n^{\alpha}}\right], \quad \text{Q. E. D.} \tag{9. 8}$$

[9] V. K. DZYADYK, Constructive Characterisation of Functions satisfying the condition Lip α $(0<\alpha<1)$ on a finite segment of real axis (Russian), *Izv. Akad. Nauk. SSSR.*, Ser. mat. **20** (1956), pp. 623–642.

[10] The author is grateful to Prof. G. FREUD for his helpful suggestions in the proof of this lemma.

To prove the part (9. 3) we put[11]

$$n_0 = n,\ n_1 = \left[\frac{n}{2}\right], \ldots, n_{j+1} = \left[\frac{n_j}{2}\right], \ldots, n_r = 1,$$

$$r = \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] + 1.$$

Then we have

$$\varrho_n(x) = \sum_{j=0}^{r-1} [\varrho_{n_j}(x) - \varrho_{n_{j+1}}(x)] + \varrho_1(x). \tag{9. 9}$$

From (9. 1) we have

$$|\varrho_{n_j}(x) - \varrho_{n_{j+1}}(x)| \leqq \frac{k_5}{n_j^{\alpha+1}} \left[(\sqrt{1-x^2})^{\alpha+1} + \frac{1}{n_j^{\alpha+1}} \right]. \tag{9. 10}$$

Now using the inequality of DZYADYK we have from (9. 10)

$$|\varrho''_{n_j}(x) - \varrho''_{n_{j+1}}(x)| \leqq k_6 n_j^{1-\alpha} \left[(\sqrt{1-x^2})^{-1+\alpha} + n_j^{1-\alpha} \right] \leqq \tag{9. 11}$$

$$\leqq k_6 \left(\frac{n}{2^j}\right)^{1-\alpha} \left[(\sqrt{1-x^2})^{-1+\alpha} + \left(\frac{n}{2^j}\right)^{1-\alpha} \right].$$

Hence from (9. 9) we have

$$|\varrho''_n(x)| \leqq \sum_{j=0}^{r-1} |\varrho''_{n_j}(x) - \varrho''_{n_{j+1}}(x)| \leqq k_7 n^{1-\alpha} \left[(\sqrt{1-x^2})^{-1+\alpha} + n^{1-\alpha} \right] \leqq k_8 n^{2-2\alpha}.$$

10. Main Proof of the theorem. There holds the relation:

$$R_n(x, f) - f(x) = R_n(x; f - \varrho_n) + \varrho_n(x) - f(x)$$

which owing to (2. 2) and (9. 1) gives

$$|R_n(x, f) - f(x)| = \left| \sum_{\nu=1}^{n-1} [f(\xi_{\nu n}) - \varrho_n(\xi_{\nu n})] A_{\nu n}(x) + \right. \tag{10. 1}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n-1} [f'(\xi_{\nu n}) - \varrho'_n(\xi_{\nu n})] B_{\nu n}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_{\nu n}) - \varrho_n(x_{\nu n})] C_{\nu n}(x) +$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{n} [\delta_{\nu n} - \varrho''_n(x_{\nu n})] D_{\nu n}(x) + o(1) \right|.$$

From (9. 1) and lemma 8. 2 we have

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n-1} [f(\xi_{\nu n}) - \varrho_n(\xi_{\nu n})] A_{\nu n}(x) \right| \leqq \max |f(\xi_{\nu n}) - \varrho_n(\xi_{\nu n})| \sum_{\nu=1}^{n-1} |A_{\nu n}(x)| = \tag{10. 2}$$

$$= O(n^{-1-\alpha}) O(n^{\frac{3}{2}}) = O(n^{\frac{1}{2}-\alpha}) = o(1) \qquad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$$

[11] c. f. G. FREUD, On the Convergence of Hermite–Fejér interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), lemma IIIa p. 116.

and from (9. 1) and lemma 7. 3

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n-1} [f'(\xi_{\nu n}) - \varrho_n'(\xi_{\nu n})] B_{\nu n}(x) \right| = o(1). \tag{10. 3}$$

Similarly we get owing to (9. 1) and lemma 6. 3

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_{\nu n}) - \varrho_n(x_{\nu n})] C_{\nu n}(x) \right| = o(1) \tag{10. 4}$$

and from (2. 2), (9. 3) and lemma 5. 2

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} [\delta_{\nu n} - \varrho_n''(x_{\nu n})] D_{\nu n}(x) \right| = o(n) \sum_{\nu=1}^{n} |D_{\nu n}(x)| + \max |\varrho_n''(x_{\nu n})| \sum_{\nu=1}^{n} |D_{\nu n}(x)| = \tag{10. 5}$$

$$= o(1) + O(n^{2-2\alpha}) O(n^{-1}) = o(1) + O(n^{1-2\alpha}) = o(1).$$

Thus (10. 1) to (10. 5) complete the proof of our theorem.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
THE UNIVERSITY, LUCKNOW (INDIA)

(Received 15 October 1961)

References

[1] J. BALÁZS and P. TURÁN, Notes on interpolation. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 201—215.
[2] J. BALÁZS and P. TURÁN, Notes on interpolation. III, *ibid*, **9** (1958), pp. 195—214.
[3] J. BALÁZS and P. TURÁN, Notes on interpolation. IV, *ibid*, **9** (1958), pp. 243—258.
[4] E. EGERVÁRY and P. TURÁN, Notes on interpolation. V, *ibid*, **9** (1958), pp. 259—267.
[5] D. JACKSON, The Theory of Approximation, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, (1930).
[6] I. P. NATANSION, *Konstructive Funktionen Theorie*, Akademie Verlag (Berlin, 1955).
[7] R. B. SAXENA, On mixed type lacunary interpolation, to appear in Ganita (1961).
[8] G. SZEGÖ, Orthogonal Polynomials, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* (New York, 1939).
[9] E. T. WHITTAKAR and G. N. WATSON, *A course of Modern Analysis*, 4th edition (Cambridge 1935).

SOME FORMULAS OF E. FELDHEIM

By

L. CARLITZ (Durham, USA)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. Introduction. In his papers *Développments en série de polynomes d'Hermite et de Laguerre à l'aide des transformations de Gauss et de Hankel* [4], FELDHEIM has obtained a great number of interesting formulas involving both the HERMITE and LAGUERRE polynomials. In particular the following formulas [III, (74)]

$$(1)\quad \binom{2m}{m}(2m)!\,L_{2m}(a^2)+2\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{2m}{m-k}(2m-2k)!\,a^{4k}\cos 4k\theta\cdot L_{2m-2k}^{(4k)}(a^2)=$$
$$=H_{2m}(a\cos\theta)H_{2n}(a\sin\theta)$$

and [I, (30)]

$$(2)\quad H_n^2(x)H_n^2(y)=(n!)^2\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{2^{2n-2k}}{(k!)^2}H_{2k}(x)H_{2k}(y)L_{n-k}^{(2k)}(2x^2+2y^2)$$

seem to be especially noteworthy. (Note that the factor 2^{2n-2k} in the right member was omitted in the statement of FELDHEIM's formula.)

The object of the present paper is first to give an elementary proof of (1). We remark that since

$$(2m-2k)!\,a^{4k}L_{2m-2k}^{(4k)}(a^2)=(2m+2k)!\,a^{-4k}L_{2m+2k}^{(-4k)}(a^2),$$

(1) may be replaced by

$$(3)\quad \sum_{k=-m}^{m}(-1)^k\binom{2m}{m-k}(2m-2k)!\,a^{4k}\cos 4k\theta\cdot L_{2m-2k}^{(4k)}(a^2)=$$
$$=H_{2m}(a\cos\theta)H_{2n}(a\sin\theta).$$

We shall also prove the companion formula

$$(4)\quad \sum_{k=-m-1}^{m}(-1)^k\binom{2m+1}{m-k}(2m-2k)!\,a^{4k+2}\sin(4k+2)\theta\,L_{2m-2k}^{(4k+2)}(a^2)=$$
$$=H_{2m+1}(a\cos\theta)H_{2m+1}(a\sin\theta).$$

A number of related formulas are also obtained; see (10), (11) and (15) below.

As for (2) we point out that the formula is not correct. FELDHEIM obtained (2) from the equivalent formula

$$(5)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n^2(x)H_n^2(y)}{2^{2n}(n!)^2}t^n=\exp\left\{\frac{2t(x^2+y^2)}{1+t}\right\}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{2n}(x)H_{2n}(y)}{2^{2n}(n!)^2}\frac{t^n}{(1+t)^{2n+1}}$$

which is also not correct. In place of (5) we obtain

$$(6)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)H_n^2(y)}{2^{2n}(n!)^2}\,t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{t^r}{(1+t)^{2r+1}}\,H_{2r}\left(x\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)H_{2r}\left(y\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)\exp\left\{\frac{2(x^2+y^2)t}{1+t}\right\}.$$

This does not give rise to a formula like (2); however we shall prove the following symbolic identity:

$$(7)\qquad \frac{H_n^2(x)H_n^2(y)}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}k!\,k!}\,H^{2k}(x)H^{2k}(y)L_{n-k}^{(2k)}\left\{-\frac{1}{2}\left(H^2(x)+H^2(y)\right)\right\},$$

where on the right side it is understood that after expansion $H^{2r}(z)$ is replaced by $H_{2r}(z)$.

2. Proof of (3). We recall MEHLER's formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!}\,t^n = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{2xyt-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}\right\}.$$

Since the right member is equal to

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2xyt)^r}{r!}(1-t^2)^{-r-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2xyt)^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty} L_s^{(r-\frac{1}{2})}(x^2+y^2)t^{2s},$$

it follows that

$$H_{2m}(x)H_{2m}(y) = 2^{2m}(2m)!\sum_{r=0}^{m} \frac{(2xy)^{2r}}{(2r)!}\,L_{m-r}^{(2r-\frac{1}{2})}(x^2+y^2)$$

or if we prefer

$$(8)\qquad H_{2m}(a\cos\theta)H_{2m}(a\sin\theta) = 2^{2m}(2m)!\sum_{r=0}^{m} \frac{(\sin 2\theta)^{2r}a^{4r}}{(2r)!}\,L_{m-r}^{(2r-\frac{1}{2})}(a^2).$$

Since

$$(\sin 2\theta)^{2r} = (-1)^r 2^{-2r}\sum_{j=0}^{2r}(-1)^j\binom{2r}{j}\cos 4(r-j)\theta = 2^{-2r}\sum_{j=-r}^{r}(-1)^j\binom{2r}{r-j}\cos 4j\theta,$$

(8) becomes

$$(9)\qquad H_{2m}(a\cos\theta)H_{2m}(a\sin\theta) =$$

$$= 2^{2m}(2m)!\sum_{r=0}^{m}\frac{2^{-2r}a^{4r}}{(2r)!}\,L_{m-r}^{(2r-\frac{1}{2})}(a^2)\sum_{j=-r}^{r}(-1)^j\binom{2r}{r-j}\cos 4j\theta =$$

$$= 2^{2m}(2m)!\sum_{j=-m}^{m}(-1)^j a^{4j}\cos 4j\theta\sum_{r=0}^{m}\frac{2^{-2r}a^{4r-4j}}{(r+j)!\,(r-j)!}\,L_{m-r}^{(2r-\frac{1}{2})}(a^2).$$

The inner sum is equal to

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{2^{-2r} a^{4r-4j}}{(r+j)!\,(r-j)!} \sum_{s=0}^{m-r} (-1)^s \binom{m+r-\frac{1}{2}}{m-r-s} \frac{a^{2s}}{s!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2m-2j} (-1)^k a^{2k} \sum_{2r+s=2j+k} \frac{2^{-2r}}{(r+j)!\,(r-j)!} \binom{m+r-\frac{1}{2}}{m-r-s} \frac{1}{(k+2j-2r)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2m-2j} (-1)^k a^{2k} \sum_{2r+s=k} \frac{2^{-2r-2j} \left(k+2j+\frac{1}{2}\right)_{m-k-j+r}}{r!\,(r+2j)!\,(m-k-j+r)!\,(k-2r)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2m-2j} (-1)^k a^{2k} \frac{2^{-2j} \left(k+2j+\frac{1}{2}\right)_{m-k-j}}{(2j)!\,k!\,(m-k-j)!} \cdot \sum_{2r\leqq k} \frac{\left(-\frac{k}{2}\right)_r \left(-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)_r \left(m+j+\frac{1}{2}\right)_r}{r!\,(2j+1)_r (m-k-j+1)_r}.$$

The inner sum can be evaluated by means of SAALSCHÜTZ's theorem ([1], p. 9). We get after a little manipulation

$$\sum_{k=0}^{2m-2j} (-1)^k a^{2k} \frac{2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_{m+j} \left(\frac{1}{2}\right)_{m-j}}{k!\,(2m-2j-k)!\,(4j+k)!} =$$

$$= \frac{2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_{m+j} \left(\frac{1}{2}\right)_{m-j}}{(2m+2j)!} \sum_{k=0}^{2m-2j} (-1)^k \binom{2m+2j}{2m-2j-k} \frac{a^{2k}}{k!} =$$

$$= \frac{2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_{m+j} \left(\frac{1}{2}\right)_{m-j}}{(2m+2j)!} L_{2m-2j}^{(4j)}(a^2).$$

Thus (9) becomes

$$H_{2m}(a\cos\theta)\, H_{2m}(a\sin\theta) =$$

$$= 2^{4m}(2m)! \sum_{j=-m}^{m} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{m+j} \left(\frac{1}{2}\right)_{m-j}}{(2m+2j)!} a^{4j} \cos 4j\theta\, L_{2m-2j}^{(4j)}(a^2).$$

Since

$$\binom{2m}{m-j}(2m-2j)! = 2^{2m-2j} \frac{(2m)! \left(\frac{1}{2}\right)_{m-j}}{(m+j)!} = 2^{4m} \frac{(2m)! \left(\frac{1}{2}\right)_{m+j} \left(\frac{1}{2}\right)_{m-j}}{(2m+2j)!},$$

it is clear that we have proved (3).

Comparing (9) with (3) we have incidentally proved the following identity

$$(10) \qquad \binom{2m}{m-j}(2m-2j)!\, L_{2m-2j}^{(4j)}(x) = 2^{2m}(2m)! \sum_{r=0}^{m} \frac{2^{-2r} x^{2r-2j}}{(r-j)!\,(r+j)!} L_{m-r}^{(2r-\frac{1}{2})}(x).$$

3. Proof of (4). Exactly as above we have

$$H_{2m+1}(a\cos\theta)H_{2m+1}(a\sin\theta)= \tag{11}$$

$$= 2^{2m+1}(2m+1)!\sum_{r=0}^{m}\frac{a^{4r+2}(\sin 2\theta)^{2r+1}}{(2r+1)!}L_{m-r}^{(2r+\frac{1}{2})}(a^2).$$

Since

$$(\sin 2\theta)^{2r+1} = 2^{-2r-1}\sum_{j=-r-1}^{r}(-1)^j\binom{2r+1}{r-j}\sin(4j+2)\theta,$$

(11) becomes

$$H_{2m+1}(a\cos\theta)H_{2m+1}(a\sin\theta) =$$

$$= (2m+1)!\sum_{r=0}^{m}\frac{2^{2m-2r}a^{4r+2}}{(2r+1)!}L_{m-r}^{(2r+\frac{1}{2})}(a^2)\cdot\sum_{j=-r-1}^{r}(-1)^j\binom{2r+1}{r-j}\sin(4j+2)\theta =$$

$$= (2m+1)!\sum_{j=-m-1}^{m}(-1)^j a^{4j+2}\sin(4j+2)\theta\cdot\sum_{r=0}^{m}\frac{2^{2m-2r}a^{4r-4j}}{(r-j)!\,(r+j+1)!}L_{m-r}^{(2r+\frac{1}{2})}(a^2).$$

The inner sum is equal to

$$\sum_{r=0}^{m}\frac{2^{2m-2r}a^{4r-4j}}{(r-j)!\,(r+j+1)!}\sum_{s=0}^{m-r}(-1)^s\binom{m+r+\frac{1}{2}}{m+r-s}\frac{a^{2s}}{s!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2m-2j}(-1)^k a^{2k}\sum_{2r+s=k}\frac{2^{2m-2r-2j}\left(k+2j+\frac{3}{2}\right)_{m-k-j+r}}{r!\,(r+2j+1)!\,(m-k-j+r)!\,(k-2r)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2m-2j}(-1)^k a^{2k}\frac{2^{2m-2j}\left(k+2j+\frac{3}{2}\right)_{m-k-j}}{(2j+1)!\,k!\,(m-k-j)!}\cdot$$

$$\cdot\sum_{2r\leqq k}\frac{\left(-\frac{k}{2}\right)_r\left(-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)_r\left(m+j+\frac{3}{2}\right)_r}{r!\,(2j+2)_r(m-k-j+1)_r}.$$

Again the inner sum is SAALSCHÜTZian and we get

$$\sum_{k=0}^{2m-2j}(-1)^k a^{2k}\frac{2^{4m+1}\left(\frac{1}{2}\right)_{m-j}\left(\frac{3}{2}\right)_{m+j}}{k!\,(2m-2j-k)!\,(4j+k+2)!} =$$

$$= \frac{2^{4m+1}\left(\frac{1}{2}\right)_{m-j}\left(\frac{3}{2}\right)_{m+j}}{(2m+2j+2)!}L_{2m-2j}^{(4j+2)}(a^2).$$

Since

$$\frac{2^{4m+1}\left(\frac{1}{2}\right)_{m-j}\left(\frac{3}{2}\right)_{m+j}}{(2m+2j+2)!} = \frac{(2m-2j)!}{(m-j)!\,(m+j+1)!}$$

we have finally

$$H_{2m+1}(a\cos\theta)\,H_{2m+1}(a\sin\theta) =$$

$$= \sum_{j=-m-1}^{m} (-1)^j \binom{2m+1}{m-j} (2m-2j)!\, a^{4j+2} \sin(4j+2)\theta \cdot L_{2m-2j}^{(4j+2)}(a^2),$$

so that we have proved (4).

Note that corresponding to (10) we have the identity

$$\binom{2m+1}{m-j}(2m-2j)!\, L_{2m-2j}^{(4j+2)}(x) = (2m+1)! \sum_{r=0}^{m} \frac{2^{2m-2r}x^{2r-2j}}{(r-j)!\,(r+j+1)!} L_{m-r}^{(2r+\frac{1}{2})}(x). \tag{12}$$

4. The two formuals (10) and (12) can be combined in the following single statement.

$$\left(\begin{matrix} m \\ \frac{1}{2}(m-j) \end{matrix}\right)(m-j)!\, L_{m-j}^{(2j)}(x) = \tag{13}$$

$$= m! \sum_{\substack{r=0 \\ r\equiv m(\mathrm{mod}\,2)}}^{m} \frac{2^{m-r}x^{r-j}}{\left(\frac{1}{2}(r-j)\right)!\left(\frac{1}{2}(r+j)\right)!} L_{m-r}^{(r-\frac{1}{2})}(x),$$

where m is an arbitrary integer and $j \equiv m \pmod 2$.

If we multiply both sides of (13) by $x^m t^m$ and sum over m we get the following generating function:

$$\left(\frac{1}{2}xt\right)^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k L_{2k}^{(2\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+k+1)} t^{2k} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} I_{\alpha}\left(\frac{xt}{1-t^2}\right) e^{-xt^2/(1-t^2)}, \tag{14}$$

where α is not equal to a negative integer but is otherwise arbitrary. This formula is equivalent to the identity

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(\alpha+1)_n} L_{2n}^{(2\alpha)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2r}}{r!\,(\alpha+1)_r} L_{n-r}^{(\alpha+2r-\frac{1}{2})}(x), \tag{15}$$

which reduces to (13) when $\alpha = j$. The proof of (15) is exactly like the proof of (10) and (12).

If in the HARDY—HILLE formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y) = \frac{(xyt)^{-\alpha/2}}{1-t} \exp\left\{\frac{(x+y)t}{1-t}\right\} I_{\alpha}\left(\frac{2(xyt)^{\frac{1}{2}}}{1-t}\right)$$

we replace x, y, t by x^2, y^2, t^2 and combine with (14) we get

$$\frac{n!}{(\alpha+1)_n} L_n^{(\alpha)}(x^2) L_n^{(\alpha)}(y^2) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_r}{(\alpha+1)_r} L_{2r}^{(2\alpha)}(2xy) L_{n-r}^{(-\frac{1}{2})}((x-y)^2). \tag{16}$$

In view of the relation

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n!\, L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2),$$

(16) becomes

$$\frac{2^{2n} n!}{(\alpha+1)^n} L_n^{(\alpha)}(x^2) L_n^{(\alpha)}(y^2) = \tag{17}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \frac{2^{2r}\left(\frac{1}{2}\right)_r}{(n-r)!\,(\alpha+1)_r} L_{2r}^{(2\alpha)}(2xy) H_{2n-2r}(x-y).$$

In particular for $\alpha = 0$, (17) reduces to

$$2^{2n} L_n(x^2) L_n(y^2) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \frac{2^{2r}\left(\frac{1}{2}\right)_r}{r!\,(n-r)!} L_{2r}(2xy) H_{2n-2r}(x-y). \tag{18}$$

REMARK. The formula (14) may be compared with ([2], p. 138, formula (11b))

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\mu+1)+n\right)}{\Gamma(\mu+n+1)} t^n L_n^{(\mu)}(z) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{1+t}\right)^{\frac{1}{2}} (tz)^{-\frac{1}{2}\mu} \exp\left\{\frac{tz}{2(1+t)}\right\} I_{\mu/2}\left(\frac{tz}{2(1+t)}\right).$$

5. Proof of (6) and (7). We have ([3], p. 195, (37))

$$H_n^2(x) = \sum_{r=0}^{n} 2^r r! \binom{n}{r}^2 H_{2n-2r}(x) = n! \sum_{r=0}^{n} 2^{n-r} \binom{n}{r} \frac{H_{2r}(x)}{r!}.$$

This may be written in the following symbolic form:

$$H_n^2(x) = 2^n n!\, L_n\left(-\frac{1}{2} H^2(x)\right), \tag{19}$$

where after expansion on the right $H^{2r}(x)$ is replaced by $H_{2r}(x)$. It follows that

$$\frac{H_n^2(x) H_n^2(y)}{2^{2n}(n!)^2} = L_n\left(-\frac{1}{2} H^2(x)\right) L_n\left(-\frac{1}{2} H^2(y)\right). \tag{20}$$

Next in the identity ([3], p. 192, (42))

$$L_n(u) L_n(v) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(uv)^r}{(r!)^2} L_{n-r}^{(2r)}(u+v) \tag{21}$$

replace u, v by $-\frac{1}{2}H^2(x)$, $-\frac{1}{2}H^2(y)$. Since (21) is a polynomial identity in u, v this replacement is evidently permissible. Thus (20) becomes

$$\frac{H_n^2(x)H_n^2(y)}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{r=0}^{n} \frac{H^{2r}(x)H^{2r}(y)}{2^{2r}(r!)^2} L_{n-r}^{(2r)}\left\{-\frac{1}{2}(H^2(x)+H^2(y))\right\}. \tag{22}$$

This proves (7).

The identity (22) is equivalent to

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)H_n^2(y)}{2^{2n}(n!)^2}\cdot t^n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{H^{2r}(x)H^{2r}(y)}{2^{2r}(r!)^2} \frac{t^r}{(1-t)^{2r+1}}\cdot \tag{23}$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{t}{2(1-t)}(H^2(x)+H^2(y))\right\},$$

where of course the right member is symbolic.

To obtain a closed expression for the sum

$$H^{2r}(x)e^{\frac{1}{2}H^2(x)z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+2r}}{2^n n!} z^n \tag{24}$$

we differentiate the identity

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} t^n = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{x^2 - \frac{(x-ty)^2}{1-t^2}\right\}$$

$2r$ times with respect to y. This gives

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+2r}(x)H_n(y)}{2^n n!} t^n = (1-t^2)^{-r-\frac{1}{2}} H_{2r}\left(\frac{x-ty}{\sqrt{1-t^2}}\right) \exp\left\{x^2 - \frac{(x-ty)^2}{1-t^2}\right\}.$$

For $y=0$ this reduces to

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_{2n+2r}(x)}{2^{2n} n!} t^{2n} = (1-t^2)^{-r-\frac{1}{2}} H_{2r}\left(\frac{x}{\sqrt{1-t^2}}\right) \exp\left(\frac{-x^2t^2}{1-t^2}\right),$$

so that

$$H^{2r}(x) \exp\left(\frac{1}{2}H^2(x)z\right) = (1+2z)^{-r-\frac{1}{2}} H_{2r}\left(\frac{x}{\sqrt{1+2z}}\right) \exp\left(\frac{2x^2z}{1+2z}\right). \tag{25}$$

We now take

$$z = \frac{t}{1-t}, \quad t = \frac{z}{1+z}, \quad 1+2z = \frac{1+t}{1-t}, \quad \frac{z}{1+2z} = \frac{t}{1+t}.$$

Then (25) becomes

$$H^{2r}(x) \exp\left\{\frac{tH^2(x)}{2(1-t)}\right\} = \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{r+\frac{1}{2}} H_{2r}\left(x\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right) \exp\left(\frac{2x^2t}{1+t}\right).$$

Hence

$$H^{2r}(x)H^{2r}(y)\exp\left\{\frac{t}{2(1-t)}(H^2(x)+H^2(y))\right\}= \tag{26}$$

$$=\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{2r+1}H_{2r}\left(x\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)H_{2r}\left(y\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)\exp\left\{\frac{2(x^2+y^2)t}{1+t}\right\}.$$

Substituting from (26) in (23) we get

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n^2(x)H_n^2(y)}{2^{2n}(n!)^2}t^n= \tag{27}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2r}(r!)^2}\frac{t^r}{(1+t)^{2r+1}}H_{2r}\left(x\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)H_{2r}\left(y\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)\cdot\exp\left\{\frac{2(x^2+y^2)t}{1+t}\right\}.$$

If we replace x, y by

$$x\sqrt{\frac{1+t}{1-t}},\quad y\sqrt{\frac{1+t}{1-t}},$$

respectively, (27) becomes

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^{2n}(n!)^2}H_n^2\left(x\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)H_n^2\left(y\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)= \tag{28}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{H_{2r}(x)H_{2r}(y)}{2^{2r}(r!)^2}\frac{t^r}{(1+t)^{2r+1}}\exp\left\{\frac{2(x^2+y^2)t}{1+t}\right\}.$$

We remark that (27) can also be proved by FELDHEIM's method; indeed it should have been obtained in place of (5).

6. For $n=1$ the formula (2) happens to be correct. However for $n=2$ the right member of (2) is equal to

$$H_4(x)H_4(y)-16H_2(x)H_2(y)L_1^{(2)}(2x^2+2y^2)+64L_2(2x^2+2y^2)=$$

$$=16\{(4x^4-12x^2+3)(4y^4-12y^2+3)-4(2x^2-1)(2y^2-1)(3-2x^2-2y^2)+$$

$$+4[1-4(x^2-y^2)+2(x^2+y^2)^2]\}=$$

$$=16\{16x^4y^4-16x^4y^2-16x^2y^4+4x^4+4y^4+80x^2y^2-20x^2+20y^2+1\},$$

while

$$H_2^2(x)H_2^2(y)=(4x^2-2)^2(4y^2-2)=16(4x^4-4x^2+1)(4y^4-4y^2+1)=$$

$$=16(16x^4y^4-16x^4y^2-16x^2y^4+4x^4+4y^4+16x^2y^2-4x^2-4y^2+1).$$

It may be of interest to study the polynomial

$$F_n(x,y)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{H_{2r}(x)H_{2r}(y)}{2^{2r}(r!)^2}L_{n-r}^{(2r)}(2x^2+2y^2), \tag{29}$$

which has the generating function

$$(30)\quad \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,y)t^n = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{H_{2r}(x)H_{2r}(y)}{2^{2r}(r!)^2} \frac{t^r}{(1-t)^{2r+1}} \cdot \exp\left\{\frac{-2t(x^2+y^2)}{1-t}\right\}.$$

Making use of (1) we can obtain another expression for $F_n(x, y)$. In view of (30) it would help to find a closed expression for the sum

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{H_{2r}(x)H_{2r}(y)}{2^{2r}(r!)^2} z^r.$$

DUKE UNIVERSITY
DURHAM, USA

(Received 10 November 1961)

References

[1] W. N. Bailey, *Generalized hypergeometric series* (Cambridge, 1935).
[2] H. Buckholz, *Die Konfluente hypergeometrische Funktion* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953).
[3] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. 2 (New York, 1953).
[4] E. Feldheim, Développments en série de polynomes d'Hermite et de Laguerre a l'aide des transformations de Gauss et de Hankel. I, II, III, *Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen. Proceedings*, **43** (1940), pp. 224—239, 240—248, 379—386.

COMPARATIVE PRIME-NUMBER THEORY. IV

(PARADIGMA TO THE GENERAL CASE, $k=8$ AND 5)

By

S. KNAPOWSKI (Poznan) and P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

1. In papers II and III of this series[1] (see KNAPOWSKI—TURÁN [2]—[3]) we treated systematically the comparison-problem of the residue-classes 1 and $l \bmod k$. Now we turn to the much more difficult general case. In this case our results are very far from being complete. As an introduction to the following analysis as well as to treat a case which our methods can settle to a certain extent completely and without any conjectures, we shall treat in the paper in extenso the case $k=8$. As to the comparison of the residue-classes 1 and $l \bmod 8$ the strongest result is given by the Theorem 5. 1 of the paper II since the Theorem 2. 1 of paper III, which would give much stronger localisation, is not applicable to our cases. In the remaining cases however, when

(1. 1) $\qquad l_1$ and l_2 are among 3, 5, or 7 mod 8

we shall prove theorems of almost the same strength. More exactly we assert the

THEOREM 1. 1. *For $T>c_1$ and for all pairs l_1, l_2 with $l_1 \neq l_2$ among the numbers* 3, 5, 7 *we have*

$$\max_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} \{\pi(x, 8, l_1) - \pi(x, 8, l_2)\} > \sqrt{T}\, e_1\left(-23 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right). \tag{1. 2}$$

Since none of l_1 and l_2 is distinguished to the other, the same inequality holds interchanging l_1 and l_2. This Theorem 1. 1 is obviously in the direction of Problem 3 formulated in the paper [1]. As an easy consequence of Theorem 1. 1 we formulate the[2]

THEOREM 1. 2. *For $T>c_1$ we have the inequality*

$$W_8(T, l_1, l_2) > c_2 \log_2 T \tag{1. 3}$$

if only $l_1 \neq l_2$ and among 3, 5, 7.

According to Theorem 1. 1 of paper [3] we have, again without any conjectures, the inequality

$$W_8(T, 1, l) > c_3 \log_4 T \tag{1. 4}$$

[1] As in previous papers of this series $c_1, c_2, \ldots$ are always positive numerical, explicitely calculable constants. l is always supposed to be prime to the modulus $e_\nu(x) = e_{\nu-1}(e^x)$ and $\log_\nu x = \log_{\nu-1}(\log x)$.

[2] We remind the reader that $w_k(T, l_1, l_2)$ stands for the number of sign-changes of $\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)$ for $0 < x \leqq T$.

which is much weaker than (1. 3). Whether this is inherent with the matter (which we think is the case) or not, we cannot decide at present.

2. The fact that the congruence

$$x^2 \equiv l \bmod 8, \qquad l \not\equiv 1 \bmod 8 \tag{2. 1}$$

is not solvable gives at once that Theorem 1. 2 is a simple consequence of the

THEOREM 2. 1. *For $T > c_4$ and for all pairs l_1, l_2 with $l_1 \neq l_2$ among the numbers* 3, 5, 7 *we have*[3]

$$\max_{T^{1/3} \leqq x} \{\Pi(x, 8, l_1) - \Pi(x, 8, l_2)\} > \sqrt{T}\, e_1\left(-23 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right). \tag{2. 2}$$

A slight modification of the proof will lead to the

THEOREM 2. 2. *For $T > c_4$ and for all pairs l_1, l_2 with $l_1 \not\equiv l_2$ among the numbers* 3, 5, 7 *we have*

$$\max_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} \{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)\} > \sqrt{T}\, e_1\left(-23 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right). \tag{2. 3}$$

As an immediate corollary we have the following

THEOREM 2. 3. *For $T > c_4$ and for all pairs l_1, l_2 with $l_1 \neq l_2$ among the numbers* 3, 5, 7 *we have the inequalities*[4]

$$\begin{aligned} U_8(T, l_1, l_2) &> c_5 \log_2 T, \\ V_8(T, l_1, l_2) &> c_5 \log_2 T. \end{aligned} \tag{2. 4}$$

3. In the case $k = 5$ the situation is somewhat different. Again Theorem 5. 1 from the paper [2] settles the cases[5]

$$(1, 2)_5, \quad (1, 3)_5, \tag{3. 1}$$

for the case $(1, 4)_5$ however the Theorems 2. 1 or 2. 2 from the paper [3] furnish a much stronger result. The case $(2, 3)_5$ could be treated with the same results — apart from the occurring constants — as given in the case $k = 8$ by the theorems of this paper; since only slight readjustments are required we shall confine ourselves to indicate them by footnotes. However the remaining cases

$$(2, 4)_5, \quad \text{and} \quad (3, 4)_5 \tag{3. 2}$$

present an unpleasant (or pleasant?) surprise. The complete analoga of Theorems

[3] We remind the reader that $\Pi(x, k, l)$ denotes the sum $\sum_{n \leqq x,\, n \equiv l \bmod k} \frac{\Lambda(n)}{\log n}$ and in the next theorem $\psi(x, k, l)$ the sum $\sum_{n \leqq x,\, n \equiv l \bmod k} \Lambda(n)$.

[4] We remind the reader that $U_k(T, l_1, l_2)$ and $V_k(T, l_1, l_2)$ denote the number of sign-changes of $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$ and $\Pi(x, k, l_1) - \Pi(x, k, l_2)$ for $0 < x \leqq T$, resp.

[5] The case $(l_1, l_2)_k$ means throughout the whole series of these papers the comparison of the progressions $\equiv l_1$, resp. $\equiv l_2 \bmod k$.

2. 1, 2. 2 and 2. 3 of this paper could be proved without essential changes; we shall not do it. But as to

$$\begin{matrix}\pi(x,\,5,\,4)-\pi(x,\,5,\,2)\\ \pi(x,\,5,\,4)-\pi(x,\,5,\,3)\end{matrix} \tag{3. 3}$$

our methods do not work in their present shape, even supposing the truth of RIEMANN—PILTZ conjecture;[6] the reasons for it will be explained in the papers V and VI of this series.

4. All in all we have to prove only Theorem 2. 1 in all details. The proof is in principle similar to that of Theorem 3. 2 of paper [3], both proofs reduce the difficulties analogously to one which can be surmounted by a proper use of Lemma II of this paper ($\equiv$theorem 4. 1 of paper [3]). The inconvenient way however, the lower bound in Lemma II depends upon the b_j's, gives some indication where this last difficulty lies and at the same time gives a plausibility to the fact that this difficulty can be surmounted in different situations only on entirely different ways (as it is the case here and later).

Theorem 2. 1 contains three statements; it will suffice to treat one of them, e. g. the case

$$(3,\,5)_8 \tag{4. 1}$$

in the notation of (3. 1).

A further moment in the proof is a certain configurational statement concerning the early zeros of the L-functions mod 8 which we could surmount sofar only by some numerical data, kindly furnished to us by C. B. HASELGROVE. They are the following. For the character

$$\chi_1(n) = 1,\,1,\,-1,\,-1 \bmod 8 \tag{4. 2}$$

$L(s,\chi_1)$ vanishes for $\varrho^{(1)} = \varrho^{(1)}(\chi_1) = \frac{1}{2} + i\cdot 4{,}89\ldots$, for $\overline{\varrho^{(1)}}$ and apart from these $L(s,\chi_1)$ does not vanish for

$$0<\sigma<1, \quad |t|\leqq 7. \tag{4. 3}$$

For the character

$$\chi_2(n) = 1,\,-1,\,1,\,-1 \bmod 8 \tag{4. 4}$$

$L(s,\chi_2)$ vanishes for $\varrho^{(2)} = \varrho^{(2)}(\chi_2) = \frac{1}{2} + i\cdot 6{,}02\ldots$, for $\overline{\varrho^{(2)}}$ and apart from these $L(s,\chi_2)$ does not vanish in the rectangle (4. 3). For the character

$$\chi_3(n) = 1,\,-1,\,-1,\,1 \bmod 8 \tag{4. 5}$$

$L(s,\chi_3)$ vanishes for $\varrho^{(3)} = \varrho^{(3)}(\chi_3) = \frac{1}{2} + i\cdot 3{,}57\ldots$, for $\overline{\varrho^{(3)}}$ and apart from these $L(s,\chi_3)$ does not vanish in the rectangle (4. 3). Further data of HASELGROVE and Mr. D. DAVIES show a similar situation for $k|24$ and $k=5$, respectively. The mentioned configurational statement is in the case (4. 1) that there is a positive (numerical) α_1 such that the rectangle

$$0<\sigma<1, \quad |t|\leqq\alpha_1 \qquad (s=\sigma+it) \tag{4. 6}$$

[6] We remind the reader that this conjecture asserts that no $L(s,\chi)$ functions vanish in the half-plane $\sigma>\frac{1}{2}$ $(s=\sigma+it)$.

contains a unique couple of (complex-conjugate) simple zeros[7]

$$\varrho', \overline{\varrho'} \tag{4. 7}$$

of $L(s, \chi_1)\, L(s, \chi_2)$ and that for all other non-trivial zeros of $L(s, \chi_1)\, L(s, \chi_2)$ the inequality

$$|\varrho| > |\varrho'| + \alpha_2 \tag{4. 8}$$

is fulfilled, again with a positive (numerical) α_2. In order to make our proof for the case (4. 1) easier adaptable to the other cases as well as to the case $k = 5$, say, we shall not use the Haselgrove-values, only α_1 and α_2. (However in the paper VIII we shall need his data to a much larger extent.)

Mutatis mutandis we may assert the following Theorems.

THEOREM 4. 1. *For $T > c_4$ and $l = 3, 5, 7$ we have*

$$\max_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} \left\{ \pi(x, 8, l) - \frac{1}{4}\pi(x) \right\} > \sqrt{T} \cdot e_1\left(-23 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T} \right)$$

and[8]

$$\min_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} \left\{ \pi(x, 8, l) - \frac{1}{4}\pi(x) \right\} < -\sqrt{T} \cdot e_1\left(-23 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T} \right).$$

Further the

THEOREM 4. 2. *For $T > c_4$ and $l = 3, 5, 7$ we have for the number $Z_l(T)$ of sign-changes of the function*

$$\pi(x, 8, l) - \frac{1}{4}\pi(x)$$

in $0 < x \leqq T$ the lower bound

$$c_5 \log_2 T.$$

For a comparison of our above-stated results with the ones, attainable by older methods, we refer to our introductory paper [1].

5. In order to make, as told in paper I, this paper as self-consistent as possible, we shall quote explicitely our two main tools here, proved in papers [2] and [3] as Lemma I and II, respectively.

LEMMA I. *For $T > c_6$ there is a y_1 with*

$$\frac{1}{20} \log_2 T \leqq y_1 \leqq \frac{1}{10} \log_2 T \tag{5. 1}$$

[7] Necessarily on the line $\sigma = \frac{1}{2}$.

[8] The same holds replacing $\pi(x)$ by $\int_2^x \frac{dv}{\log v}$.

such that for all non-trivial zeros $\varrho = \sigma_\varrho + it_\varrho$ *of all* $L(s, \chi)$*-functions belonging to* mod 8 *we have*

$$\pi \geqq \left| \arc \frac{e^{it_\varrho y_1}}{\varrho} \right| \geqq \frac{c_7}{t_\varrho^6 \log^3(2+|t_\varrho|)}. \tag{5.2}$$

As to Lemma II let be

$$1 = |z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n| \tag{5.3}$$

and with a $0 < \varkappa \leqq \frac{\pi}{2}$

$$\varkappa \leqq |\arc z_j| \leqq \pi \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.4}$$

Let us be given a positive integer m and the index h so that

$$|z_h| > \frac{4n}{m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{5.5}$$

and fixed. Further we define B and the index h_1 by

$$B = \min_{h \leqq \xi < h_1} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\xi} b_j \tag{5.6}$$

if there is an index h_1 with

$$|z_{h_1}| < |z_h| - \frac{2n}{m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{5.7}$$

and

$$B = \min_{h \leqq \xi \leqq n} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\xi} b_j \tag{5.8}$$

otherwise.[9] Then we have the

LEMMA II. *If* $B > 0$ *then there are integers* ν_1 *and* ν_2 *with*

$$m + 1 \leqq \nu_1, \qquad \nu_2 \leqq m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right) \tag{5.9}$$

such that

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu_1} \geqq \frac{B}{2n+1} \left\{ \frac{n}{24\left(m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)} \right\}^{2n} \cdot \left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{5.10}$$

[9] Of course we *can* choose (5. 8) as the definition of h_1 always, but in *some* cases; like in paper [3], it was more advantageous to choose $h_1 < n$.

and

$$\text{(5. 11)} \qquad \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu_2} < -\frac{B}{2n+1}\left\{\frac{n}{24\left(m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)}\right\}^{2n}\left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)}.$$

Finally we shall need again the *Lemma* III.

LEMMA III. *There is a connected path V in the vertical strip $\frac{1}{5}\leqq\sigma\leqq\frac{2}{5}$, symmetrical to the real axis, consisting alternately of horizontal and vertical segments and increasing from $-\infty$ to $+\infty$ monotonically, such that for all L-functions* mod 8 *the inequality*

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| < c_8 \log^3(2+|t|)$$

holds.

Since the proof is mutatis mutandis the same as in the book of one of us (see TURÁN [1], Appendix III), we shall omit it.

6. Next we turn to the proof of Theorem 2. 1. We start with the notation (4. 2)—(4. 4) from the integral

$$\text{(6. 1)} \qquad J(T) = \frac{1}{4\pi i}\int_{(2)}\left(\frac{e^{y_1 s}}{s}\right)^{\nu}\frac{1}{s^{\alpha+1}}\left\{\frac{L'}{L}(s,\chi_1)-\frac{L'}{L}(s,\chi_2)\right\}ds,$$

where y_1 is defined by Lemma I the integer ν is restricted at present only by the requirement

$$\text{(6. 2)} \qquad \frac{\log T}{y_1}-\log^{0,9} T\leqq\nu\leqq\frac{\log T}{y_1}$$

and the (numerical constant) integer $\alpha\geqq 1$ will be chosen appropriately only later (in dependence *only* upon the constants α_1 and α_2 in (4. 6) resp. (4. 8)). Performing the integration in (6. 1) we get

$$\text{(6. 3)} \qquad J(T) = \sum_{\substack{n\leqq e^{\nu y_1}\\ n\equiv 5 \bmod 8}}\Lambda(n)\frac{\log^{\nu+\alpha}\frac{e^{\nu y_1}}{n}}{(\nu+\alpha)!}-\sum_{\substack{n\leqq e^{\nu y_1}\\ n\equiv 3 \bmod 8}}\Lambda(n)\frac{\log^{\nu+\alpha}\frac{e^{\nu y_1}}{n}}{(\nu+\alpha)!}=$$

$$=\int_1^{e^{\nu y_1}}\frac{\log^{\nu+\alpha}\frac{e^{\nu y_1}}{x}}{(\nu+\alpha)!}d_x\{\Pi(x,8,5)-\Pi(x,8,3)\}=\int_1^{e^{\nu y_1}}\{\Pi(x,8,3)-\Pi(x,8,5)\}\cdot$$

$$\cdot\left(\log x\frac{\log^{\nu+\alpha}\frac{e^{\nu y_1}}{x}}{(\nu+\alpha)!}\right)'dx.$$

Writing the integral as

$$\int_1^{e_1\left(\frac{v}{v+\alpha+1}y_1\right)} + \int_{e_1\left(\frac{v}{v+\alpha+1}y_1\right)}^{e_1(vy_1)} \stackrel{\text{def}}{=} J' + J'', \tag{6. 4}$$

the second factor in the integral in (6. 3) is of constant sign in each of our intervals. Hence if c_4 is sufficiently large, we have

$$|J'| < e^{y_1} \int_1^{e_1\left(\frac{vy_1}{v+\alpha+1}\right)} \left(\log x \frac{\log^{v+\alpha} \frac{e^{vy_1}}{x}}{(v+\alpha)!}\right)' dx < \tag{6. 5}$$

$$< \frac{y_1 e^{y_1}}{(v+\alpha)!} (vy_1)^{v+\alpha} < e_1\left(21 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right)$$

using (5. 1) and (6. 2). Further from (6. 2)

$$J'' \leqq \max_{x \leqq T} \{\Pi(x, 8, 5) - \Pi(x, 8, 3)\} \cdot \int_{e_1\left(\frac{vy_1}{v+\alpha+1}\right)}^{e_1(vy_1)} \left(-\log x \frac{\log^{v+\alpha} \frac{e^{vy_1}}{x}}{(v+\alpha)!}\right)' dx =$$

$$= \max_{x \leqq T} \{\Pi(x, 8, 5) - \Pi(x, 8, 3)\} \frac{1}{(v+\alpha)(v+\alpha)!} \left(vy_1 \frac{v+\alpha}{v+\alpha+1}\right)^{v+\alpha+1};$$

hence

$$\max_{x \leqq T} \{\Pi(x, 8, 5) - \Pi(x, 8, 3)\} \leqq (v+\alpha)(v+\alpha)! \left(\frac{v+\alpha+1}{vy_1(v+\alpha)}\right)^{v+\alpha+1} \cdot \tag{6. 6}$$

$$\cdot \left\{J(T) - e_1\left(21 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right)\right\}$$

and analogously

$$\min_{x \leqq T} \{\Pi(x, 8, 5) - \Pi(x, 8, 3)\} \leqq (v+\alpha)(v+\alpha)! \left(\frac{v+\alpha+1}{vy_1(v+\alpha)}\right)^{v+\alpha+1} \cdot \tag{6. 7}$$

$$\cdot \left\{J(T) + e_1\left(21 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right)\right\}.$$

Replacing Π by ψ the necessary (slight) change is the same as at the end of 10 in paper [2] and can be omitted.

7. Using Lemma III Cauchy's integral-theorem gives at once

$$\left| J(T) - \frac{1}{2} \sum'_{\varrho(\chi_1)} \frac{1}{\varrho^{\alpha+1}} \left(\frac{e^{y_1\varrho}}{\varrho}\right)^v + \frac{1}{2} \sum'_{\varrho(\chi_2)} \frac{1}{\varrho^{\alpha+1}} \left(\frac{e^{y_1\varrho}}{\varrho}\right)^v \right| = \tag{7. 1}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left| \int_V \left(\frac{e^{y_1 s}}{s}\right)^v \frac{1}{s^{\alpha+1}} \left\{\frac{L'}{L}(s, \chi_1) - \frac{L'}{L}(s, \chi_2)\right\} ds \right| < c_9 (5e^{\frac{2}{5}y_1})^v,$$

where the dash indicates that the summation is to be performed only upon zeros lying right to V. Owing to (6. 2) this is for sufficiently large c_4

$$< c_{10} T^{0,45}. \tag{7. 2}$$

Since further as well-known the number of non-trivial zeros of $L(s, \chi)$ with

$$r \leqq t_\varrho < r+1$$

is

$$< c_{11} \log (2+|r|),$$

the contribution of the ϱ's with

$$|\mathrm{Im}\ \varrho| > \log^{\frac{1}{10}} T$$

to the sum (7. 1) is owing to (5. 1) absolutely

$$< c_{12} \left(\frac{e^{y_1}}{\log^{\frac{1}{10}} T} \right)^{\nu} \leqq c_{12}.$$

Collecting this, (7. 1) and (7. 2) and (6. 6) we got

$$\max_{x \leqq T} \{\Pi(x, 8, 5) - \Pi(x, 8, 3)\} > \frac{(\nu+\alpha)(\nu+\alpha)!}{2} \left(\frac{\nu+\alpha+1}{\nu y_1 (\nu+\alpha)} \right)^{\nu+\alpha+1} \cdot \tag{7. 3}$$

$$\cdot \left\{ \sum'_{\varrho(\chi_1)}{}_{|t_\varrho| \leqq \log^{\frac{1}{10}} T} \varrho^{-\alpha-1} \left(\frac{e^{y_1 \varrho}}{\varrho} \right)^{\nu} - \sum'_{\varrho(\chi_2)}{}_{|t_\varrho| \leqq \log^{\frac{1}{10}} T} \varrho^{-\alpha-1} \left(\frac{e^{y_1 \varrho}}{\varrho} \right)^{\nu} - c_{13} T^{0,45} \right\}.$$

If again $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ is that zero of $L(s, \chi_1)\, L(s, \chi_2)$ in

$$\sigma \geqq \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq \log^{\frac{1}{10}} T$$

for which $\left| \frac{e^{y_1 \varrho}}{\varrho} \right|$ is maximal, (7. 3) gives at once

$$\max_{x \leqq T} \{\Pi(x, 8, 5) - \Pi(x, 8, 3)\} > \frac{(\nu+\alpha)(\nu+\alpha)!}{2} \left(\frac{\nu+\alpha+1}{\nu y_1 (\nu+\alpha)} \right)^{\nu+\alpha+1} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left(\frac{e^{\beta_0 y_1}}{|\varrho_0|} \right)^{\nu} \left(\sum'_{\varrho(\chi_1)}{}_{|t_\varrho| \leqq \log^{\frac{1}{10}} T} \varrho^{-\alpha-1} \left(\frac{e^{y_1(\varrho-\beta_0)}}{\varrho} |\varrho_0| \right)^{\nu} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum'_{\varrho(\chi_2)}{}_{|t_\varrho| \leqq \log^{\frac{1}{10}} T} \varrho^{-\alpha-1} \left(\frac{e^{y_1(\varrho-\beta_0)}}{\varrho} |\varrho_0| \right)^{\nu} \right) - c_{13} T^{0,45} \right\}$$

and taking in account that $L(s, \chi_1)\, L(s, \chi_2)$ is real on the real axis and also the

symmetry of V, we obtain also the inequality

$$(7.4)\quad \max_{x\leqq T}\{\Pi(x,8,5)-\Pi(x,8,3)\} > \frac{(\nu+\alpha)(\nu+\alpha)!}{2}\left(\frac{\nu+\alpha+1}{\nu y_1(\nu+\alpha)}\right)^{\nu+\alpha+1}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\frac{e^{\beta_0 y_1}}{|\varrho_0|}\right)^{\nu}\left(\operatorname{Re}\sum'_{\varrho(\chi_1)\atop |t_\varrho|\leqq \log^{\frac{1}{10}} T}\varrho^{-\alpha-1}\left(\frac{e^{y_1(\varrho-\beta_0)}}{\varrho}|\varrho_0|\right)^{\nu}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{Re}\sum'_{\varrho(\chi_2)\atop |t_\varrho|\leqq \log^{\frac{1}{10}} T}\varrho^{-\alpha-1}\left(\frac{e^{y_1(\varrho-\beta_0)}}{\varrho}|\varrho_0|\right)^{\nu}\right)-c_{13}T^{0,45}\right\}.$$

Analogous *upper* bound can be given[10] for

$$(7.5)\qquad \min_{x\leqq T}\{\Pi(x,8,5)-\Pi(x,8,3)\}$$

with a changed sign of inequality on the right.

8. Now we shall determine ν beyond (6.2) by using appropriately Lemma II. The z_j-numbers will be again of course the numbers

$$\frac{e^{y_1(\varrho-\beta_0)}}{\varrho}|\varrho_0|;$$

the definition of ϱ_0 gives

$$\max_j |z_j| = 1$$

immediately. As b_j's the $(\pm\varrho^{-\alpha-1})$-numbers will serve this time, with proper signs; let

$$(8.1)\qquad m=\left[\frac{\log T}{y_1}-\log^{0,9}T\right].$$

As to $\varkappa$ of Lemma II we have owing to (5.2) and $|t_\varrho|\leqq\log^{\frac{1}{10}}T$ for sufficiently large c_4 again

$$(8.2)\qquad \varkappa=\log^{-\frac{2}{3}}T,$$

further for n the upper bound

$$(8.3)\qquad \log^{\frac{1}{10}}T\cdot(\log_2 T)^3.$$

However in the choice of the indices h and h_1 we have now a situation, different from that in paper [3]. We choose now simply

$$(8.4)\qquad h_1=n$$

[10] Sofar e. g. the case $(2,3)_5$ runs quite parallel, only in (6.1) the factor $\frac{L'}{L}(s,\chi_1)-\frac{L'}{L}(s,\chi_2)$ has to be replaced by $\frac{i}{2}\left(\frac{L'}{L}(s;\chi^*)-\frac{L'}{L}(s,\overline{\chi^*})\right)$, $\chi^*(n)=1, i, -i, -1 \bmod 5$.

and if ϱ' is defined in (4. 7), let h be such that

$$\frac{e^{y_1(\varrho'-\beta_0)}}{\varrho'}|\varrho_0| \overset{\text{def}}{=} z_h, \quad \frac{e^{y_1(\overline{\varrho'}-\beta_0)}}{\overline{\varrho'}}|\varrho_0| \overset{\text{def}}{=} z_{h-1}. \tag{8. 5}$$

Then we have from (4. 6), (4. 7) and (8. 2) for sufficiently large c_4

$$|z_h| > e_1\left(-\frac{y_1}{2}\right) \geqq \log^{-\frac{1}{20}} T > \frac{4}{3+\frac{\pi}{\varkappa}} \sim \frac{4n}{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{8. 6}$$

i. e. (5. 5) is by this choice satisfied. Hence Lemma II is applicable; the resulting ν_1 and ν_2 satisfy the restriction (6. 2) owing to (8. 1) and the inequality

$$n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right) < \frac{1}{2}\log^{0,9} T$$

follows quite roughly (see (8. 3) and (8. 2)). Before applying it, we have to orientate about B in (5. 8); this will be done by the proper choice of the integer α in (6. 1) and by use of the configurational inequality (4. 8).

We distinguish two cases.

Case I.[11] ϱ' is a zero of $L(s, \chi_2)$ (and hence *not* of $L(s, \chi_1)$). Since χ_2 is real, we have without loss of generality

$$0 < \arg \varrho' \leqq \operatorname{arc\,tg} 2\alpha_1 \left(< \frac{\pi}{2}\right). \tag{8. 7}$$

Evidently each of our remaining $\sum_{j=1}^{\xi} b_j$-sums contains the terms

$$-\left(\frac{1}{(\varrho')^{\alpha+1}}+\frac{1}{(\overline{\varrho'})^{\alpha+1}}\right) = \frac{2}{|\varrho'|^{\alpha+1}}\cos\left((\alpha+1)\arg\varrho'+\pi\right). \tag{8. 8}$$

(8. 7) gives at once that for an infinity of integer α's

$$|(\alpha+1)\arg\varrho'+\pi| \leqq \frac{\pi}{4} \bmod (-\pi, \pi]. \tag{8. 9}$$

For these α's we have certainly

$$B \geqq 2\frac{\sqrt{2}}{2}|\varrho'|^{-\alpha-1} - \sum_{\varrho}|\varrho|^{-\alpha-1},$$

where the last sum contains owing to (4. 8) all zeros of $L(s, \chi_1)\, L(s, \chi_2)$ with

$$|\varrho| \geqq |\varrho'| + \alpha_2;$$

hence we can find a sufficiently large α from those satisfying (8. 9) so that

$$B > |\varrho'|^{-\alpha-1}. \tag{8. 10}$$

[11] Which is *actually* owing to (4. 2) and (4. 4) impossible but, as told, we want to use only the configurational assertion (4. 7)–(4. 8).

Case II. ϱ' is a zero of $L(s, \chi_1)$ (and not of $L(s, \chi_2)$). The only change in this case is that instead of (8. 8) we have

$$\frac{1}{(\varrho')^{\alpha+1}}+\frac{1}{(\overline{\varrho'})^{\alpha+1}}=\frac{2}{|\varrho'|^{\alpha+1}}\cos\left((\alpha+1)\arg\varrho'\right)$$

and hence instead of (8. 9) the first requirement for α is

$$|(\alpha+1)\arg\varrho'| \leqq \frac{\pi}{4} \bmod (-\pi, \pi].$$

Hence (8. 10) can be attained in all cases;[12] we fix α that way. Hence the application of Lemma II gives an integer ν_1 so that

$$\left(\frac{e^{\beta_0 y_1}}{|\varrho_0|}\right)^{\nu_1}\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\sum'_{\substack{\varrho(\chi_1)\\ |t_\varrho|\leqq \log^{10} T}}\varrho^{-\alpha-1}\left(\frac{e^{y_1(\varrho-\beta_0)}}{\varrho}|\varrho_0|\right)^{\nu_1}-\right.$$

$$\left.-\sum'_{\substack{\varrho(\chi_2)\\ |t_\varrho|\leqq \log^{10} T}}\varrho^{-\alpha-1}\left(\frac{e^{y_1(\varrho-\beta_0)}}{\varrho}|\varrho_0|\right)^{\nu_1}\right\}>\left(\frac{e^{\beta_0 y_1}}{|\varrho_0|}\right)^{\nu_1}\frac{c_{14}}{2n+1}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{n}{24\left(m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)}\right\}^{2n}\left(\frac{e^{y_1\left(\frac{1}{2}-\beta_0\right)}}{2|\varrho'|}|\varrho_0|\right)^{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)}\geqq\frac{c_{14}}{2n+1}|2\varrho'|^{-\frac{\log T}{y_1}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{n}{24\left(m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)}\right)^{2n}e_1\left\{\left(\frac{y_1}{2}\left(m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)\right)\right\}\cdot\left(\frac{e^{-\beta_0 y_1}}{|\varrho_0|}\right)^{-n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)}.^{13}$$

Taking in account (6. 2), (8. 3) and (8. 1) and $\beta_0 \leqq 1$ this is for sufficiently large c_4

$$>c_{15}\sqrt{T}\,e_1\left(-20\log|2\varrho'|\cdot\frac{\log T}{\log_2 T}\right)$$

and analogously

$$\left(\frac{e^{\beta_0 y_1}}{|\varrho_0|}\right)^{\nu_2}\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\sum'_{\substack{\varrho(\chi_1)\\ |t_\varrho|\leqq \log^{10} T}}\varrho^{-\alpha-1}\left(\frac{e^{y_1(\varrho-\beta_0)}}{\varrho}|\varrho_0|\right)^{\nu_2}-\right.$$

$$\left.-\sum'_{\substack{\varrho(\chi_2)\\ |t_\varrho|\leqq \log^{10} T}}\varrho^{-\alpha-1}\left(\frac{e^{y_1(\varrho-\beta_0)}}{\varrho}|\varrho_0|\right)^{\nu_2}\right\}<-c_{15}\sqrt{T}\cdot e_1\left(-20\log|2\varrho'|\cdot\frac{\log T}{\log_2 T}\right).$$

[12] In the case $(2, 3)_5$ the role of the „dominating part" $\pm((\varrho')^{-\alpha-1}+(\overline{\varrho'})^{-\alpha-1})$ will be played owing to the appearence of complex characters by $\pm 2i((\varrho')^{-\alpha-1}-(\overline{\varrho'})^{-\alpha-1})=|\varrho'|^{-\alpha-1}\cdot\sin\left((\alpha+1)\arg\varrho'\pm\frac{\pi}{2}\right)$ but the reasoning runs quite parallel.

[13] Since $|\varrho_0|>1$ and $m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)-\nu_1<n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)$.

Hence choosing c_4 sufficiently large this and (7. 4) give

$$\max_{x \leqq T} \{\Pi(x, 8, 5) - \Pi(x, 8, 3)\} > \tag{8. 9}$$

$$> \frac{\nu_1 + \alpha}{2} (\nu_1 + \alpha)! \left(\frac{\nu_1 + \alpha + 1}{\nu_1 y_1 (\nu_1 + \alpha)} \right)^{\nu_1 + \alpha + 1} c_{15} \sqrt{T} \cdot e_1 \left(- c_{16} \frac{\log T}{\log_2 T} \right).$$

Since from (6. 2) for sufficiently large c_4

$$\frac{\nu_1 + \alpha}{2} (\nu_1 + \alpha)! \left(\frac{\nu_1 + \alpha + 1}{\nu_1 y_1 (\nu_1 + \alpha)} \right)^{\nu_1 + \alpha + 1} > e_1 \left(- 21 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T} \right)$$

(8. 9) give

$$\max_{x \leqq T} \{\Pi(x, 8, 5) - \Pi(x, 8, 3)\} > \sqrt{T} \cdot e_1 \left(- 22 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T} \right)$$

and analogously

$$\min_{x \leqq T} \{\Pi(x, 8, 5) - \Pi(x, 8, 3)\} < - \sqrt{T} \cdot e_1 \left(- 22 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T} \right).$$

From these Theorem 2. 1 follows at once.

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE UNIVERSITY ADAM MICZKIEWICZ,
POZNAN

MATHEMATICAL INSTITUTE,
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY,
BUDAPEST

(Received 5 December 1961)

References

S. KNAPOWSKI and P. TURÁN [1], Comparative prime-number theory. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), pp. 299–314.
[2], Comparative prime-number theory. II, *ibid*, pp. 315–342.
[3], Comparative prime-number theory. III, *ibid*, pp. 343–364.

P. TURÁN [1], *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Akad. Kiadó, 1953). A rewritten new English edition will appear in the Interscience Tracts series.

COMPARATIVE PRIME-NUMBER THEORY. V

(SOME THEOREMS CONCERNING THE GENERAL CASE)

By

S. KNAPOWSKI (Poznan) and P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

1. In the previous papers II and III of this series (see KNAPOWSKI—TURÁN [2], [3]) we obtained rather far-reaching results on the comparison of the distribution of primes $\equiv 1$ and $\equiv l \bmod k$, or shortly in the case $(1, l)_k$. The difficulties of the general case, i. e. the case

$$(l_1, l_2)_k, \qquad l_1 \not\equiv l_2 \not\equiv 1 \bmod k \tag{1.1}$$

are indicated in our paper [4]; though in this paper more or less satisfactory results are given for the simplest case $k=8$, it was mentioned that already in the next difficult case $k=5$ the investigation of

$$\pi(x, 5, 2) - \pi(x, 5, 4)$$

cannot be touched at present. In the present paper we are going to investigate the general case. As explained in our paper [1] of this series, for general k practically nothing was known in this direction; hence also conditional results are of interest. Our general results are conditional; sometimes only Haselgrove's condition[1] is supposed, sometimes the „finite" RIEMANN—PILTZ conjecture, according to which no $L(s, \chi) \bmod k$ vanishes for a sufficiently large $c_1 \geqq 1$[2] for

$$\sigma > \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq c_1 k^{10}, \tag{1.2}$$

sometimes both, or what amounts to the same, no $L(s, \chi)$ with $\chi \neq \chi_0$ vanishes for

$$\sigma > \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq c_1 k^{10}$$

(1.3) and

$$\sigma = \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq A(k).$$

Then putting as usual

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \bmod k}} \Lambda(n) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x, k, l) \qquad \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \bmod k}} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(x, k, l)$$

we assert the

[1] We remind the reader that this condition means the existence of an $A = A(k)$ such that no $L(s, \chi) \bmod k$ vanishes in the parallelogramm $0 < \sigma < 1$, $|t| \leqq A(k)$ $(s = \sigma + it)$.

[2] As in the previous papers, $c_1, c_2, \ldots$ are always positive numerical, explicitly calculable constants, and $(l, k) = 1$, $e_\nu(x) = e_{\nu-1}(e^x)$, $\log_\nu x = \log_{\nu-1}(\log x)$.

THEOREM 1. 1. *Supposing the truth of the conjecture* (1. 3) *with sufficiently large* c_1 *and with sufficiently large* c_2

$$T > \max\left\{e_2(c_2k^{20}), e_1\left(2e_1\left(\frac{1}{A(k)^3}\right)+c_2k^{20}\right)\right\} \tag{1. 4}$$

we have for $l_1 \neq l_2$ *the inequalities*

$$\max_{T^{1/3}\leqq x\leqq T}\{\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)\} > \sqrt{T}\, e_1\left(-44\frac{\log T\log_3 T}{\log_2 T}\right) \tag{1. 5}$$

and

$$\max_{T^{1/3}\leqq x\leqq T}\{\Pi(x,k,l_1)-\Pi(x,k,l_2)\} > \sqrt{T}\, e_1\left(-44\frac{\log T\log_3 T}{\log_2 T}\right). \tag{1. 6}$$

Since none of l_1 and l_2 are distinguished to the other[3], they can be changed. Hence each of the functions

$$\psi(x,k,l_1) - \psi(x,k,l_2), \tag{1. 7}$$

$$\Pi(x,k,l_1) - \Pi(x,k,l_2) \tag{1. 8}$$

has a sign-change in $[T^{1/3}, T]$ whenever T satisfies (1. 4). Denoting as in the previous papers by $U_k(T, l_1, l_2)$ and $V_k(T, l_1, l_2)$ the number of sign-changes of the functions (1. 7) and (1. 8) for $0 < x \leqq T$, resp., this gives at once (like in our paper [2] of this series) the

THEOREM 1. 2. *For*

$$T > \max\left\{e_1(9e_1(2c_2k^{20})), e_1\left(72e_1\left(\frac{2}{A(k)^3}\right)+18c_2^2k^{40}\right)\right\}$$

the inequalities

$$U_k(T,l_1,l_2) > \frac{1}{2\log 3}\log_2 T,$$

$$V_k(T,l_1,l_2) > \frac{1}{2\log 3}\log_2 T$$

hold.

Of course this gives for the first sign-change an explicit upper bound, depending only upon k; however in the paper VII of this series we shall give such an upper bound supposing only Haselgrove's assumption, for $\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)$ at least.

2. What can be told upon

$$\pi(x,k,l_1) - \pi(x,k,l_2)$$

in the general case? If l_1 and l_2 are such that none of the congruences

$$x^2 \equiv l_1 \bmod k, \qquad x^2 \equiv l_2 \bmod k \tag{2. 1}$$

[3] In the course of the proof (see (8. 17)) we apparently make such a distinction. However, making it we shall be able to give „large positive" lower bound for max. and „large negative" upper bound for min. of $\Pi(x,k,l_1)-\Pi(x,k,l_2)$.

are solvable it follows at once from Theorem 1. 1 (replacing c_2 by a larger constant) that for

$$T > \max\left\{e_2(c_3 k^{20}),\ e_1\left(2e_1\left(\frac{1}{A(k)^3}\right)+c_4 k^{40}\right)\right\} \tag{2. 2}$$

the inequality

$$\max_{T^{1/3}\leqq x\leqq T}\{\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)\} > \sqrt{T}\, e_1\left(-45\,\frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right) \tag{2. 3}$$

holds. In the paper VI of this series however we shall prove (2. 3) under the weaker restriction that the number of solutions of the congruences in (2. 1) is *equal*. For the sake of orientation we remark that for odd k the number of those l-residue-classes for which the congruence $x^2 \equiv l \bmod k$ is not solvable, is obviously

$$\geqq (1-2^{-\nu(k)})\varphi(k)$$

($\nu(k)$ the number of different prime-factors of k) which certainly shows that for odd k „at least 25%" of all cases are covered even by (2. 1) and the value of the number $N_k(l)$ of incongruent solutions of $x^2 \equiv l \bmod k$ is for all $(l,k)=1$ either 0 or $N_k(1)$.

Does the Theorem in (2. 2)—(2. 3) make the results of our paper [4] superfluous? By no means. Putting $k=8$ the constant in (2. 2) becomes most probably so large that the truth of the corresponding RIEMANN—PILTZ conjecture cannot be verified by machines, so that in order to get in this case *unconditional* results special argument was necessary.

3. As to the race-problem we have shown in our paper [2] that for a „dense" sequence of integers

$$\pi(x_\nu, k, 1) > \frac{1}{\varphi(k)}\pi(x_\nu). \tag{3. 1}$$

However plausible we cannot prove at present the corresponding inequality for general $\pi(x,k,l_0)$ instead of $\pi(x,k,1)$. What we can prove in this direction is the

THEOREM 3. 1. *Supposing the truth of* (1. 3) *we have for each* $(l,k)=1$ *and*

$$T > \max\left\{e_2(c_2 k^{20}),\ e_1\left(2e_1\left(\frac{1}{A(k)^3}\right)+c_3 k^{20}\right)\right\} \tag{3. 2}$$

the inequalities

$$\max_{T^{1/3}\leqq x\leqq T}\left\{\Pi(x,k,l)-\frac{1}{\varphi(k)}\Pi(x)\right\} > \sqrt{T}\, e_1\left(-44\,\frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right) \tag{3. 3}$$

and

$$\min_{T^{1/3}\leqq x\leqq T}\left\{\Pi(x,k,l)-\frac{1}{\varphi(k)}\Pi(x)\right\} < -\sqrt{T}\, e_1\left(-44\,\frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right); \tag{3. 4}$$

the same holds for ψ *instead of* Π *too.*

Mutatis mutandis the analogous statements hold for

$$\Pi(x, k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Li} x \tag{3. 5}$$

and

$$\psi(x, k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} x \tag{3. 6}$$

too. However essentially new difficulties arise when trying to prove that for all $(l, k) = 1$ the function

$$\pi(x, k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Li} x \tag{3. 7}$$

changes sign infinitely often. This can be deduced supposing (1. 3) from Theorem (3. 1) mutatis mutandis if only the congruence $x^2 \equiv l \bmod k$ is not solvable; most probably this is the case generally too.

4. The proofs obviously reduce to that of Theorems 1. 1 and 3. 1; since the second follows that the first mutatis mutandis we shall confine ourselves to the proof of Theorem 1. 1. This will be rather intricate. It would be plausible to start from an integral of type

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \left(\frac{e^{y_1 s}}{s}\right)^{\nu} \frac{1}{\varphi(k)} \left\{ \sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)\right) \frac{L'}{L}(s, \chi) \right\} ds \tag{4. 1}$$

as previously. Everything goes smoothly until one comes to critical „generalized power-sum"

$$\sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)\right) \sum'_{\varrho(\chi)} \left(\frac{e^{y_1 \varrho}}{\varrho}\right)^{\nu}, \tag{4. 2}$$

where the last summation is to be extended over the non-trivial zeros of all $L(s, \chi)$-functions mod k in a domain, not depending upon ν. The one-sided second main theorem (stated as Lemma I in our paper [2]) as well as its generalized form (stated as Theorem 4. 1 in our paper [3]) cannot be used as previously since the „coefficients" $(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2))$ have no more a non-negative real part and not even an „essential part" of them can be singled out with non-negative real parts as in our paper [3]. As a remedy one might observe that changing the integral in (4. 1) suitably one can arrange that the critical sum should assume the form

$$\sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)\right) \sum'_{\varrho(\chi)} \frac{\eta_1^{\varrho}}{\varrho} \cdot \left(\frac{e^{y_1 \varrho}}{\varrho}\right)^{\nu} \tag{4. 3}$$

with an $\eta_1 > 0$ independent of ν; now the coefficients are the numbers

$$\left(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)\right) \frac{\eta_1^{\varrho}}{\varrho} \tag{4. 4}$$

and after appropriate choice of η_1 one could obtain a (weak) positive lower bound G for a *certain* partial-sum of

$$\text{(4. 5)} \qquad \operatorname{Re} \sum_{\chi} \left\{ (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \sum_{\varrho(\chi)} \frac{\eta_1^{\varrho}}{\varrho} \right\}$$

which offers hope to the smooth applicability of Theorem 4. 1 of our paper [3]. But to the applicability we need *another* partial-sum of (4. 5) and the difference must be estimated so well that positive lower bound G should not be destroyed. In order to meet this new difficulty we modify the integral (4. 1) so that the critical sum assumes the form

$$\text{(4. 6)} \qquad \sum_{\chi} \left\{ (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \sum_{\varrho(\chi)} \frac{(\eta_1 \cdot \eta_2^{\nu_0})^{\varrho}}{\varrho^{\nu_0+1}} \left(\frac{e^{y_1 \varrho}}{\varrho} \right)^{\nu} \right\}$$

with a suitable $\eta_2 > 0$ and suitable „large" positive integer ν_0 so that the „coefficients" are now the numbers

$$\text{(4. 7)} \qquad (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \frac{\eta_1^{\varrho}}{\varrho} \left(\frac{\eta_2^{\varrho}}{\varrho} \right)^{\nu_0}.$$

Using the estimation (4. 5) ν_0 can be determined by the application of Theorem 4. 1 (and even simpler) so that a *certain* partial-sum of

$$\text{(4. 8)} \qquad \operatorname{Re} \sum_{\chi} \left\{ (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \sum_{\varrho(\chi)} \frac{(\eta_1 \eta_2^{\nu_0})^{\varrho}}{\varrho^{\nu_0+1}} \right\}$$

could be sufficiently estimated from below. But owing to the rapid decrease of the terms in (4. 8) the above mentioned difficulty by the application of Theorem 4. 1 to the sum (4. 6), to the determination of ν, disappears now. Hence the characteristic novelty of the proof is quite shortly the *twice* application of Theorem 4. 1.

In the proofs assumption 1. 2 is not *very* deeply used; it seems to be within the possibilities to deduce Theorem 1. 1 only from Haselgrove's conditions (1. 3).

As to a comparison of the results of the present paper to those obtainable by the classical methods see our paper [1].

5. In the proof of Theorem 1. 1 we shall rise some lemmata used also in the previous papers of this series which we shall repeat without proofs to make the paper, as told, possibly self-contained.

LEMMA I. *Under Haselgrove's condition for*

$$\text{(5. 1)} \qquad \tau > \max \left\{ c_6, e_2(k), e_2\left(\frac{1}{A(k)^3} \right) \right\}$$

there is a y_1 *with*

$$\text{(5. 2)} \qquad \frac{1}{20} \log_2 \tau \leqq y_1 \leqq \frac{1}{10} \log_2 \tau$$

such that for all $\varrho = \sigma_\varrho + it_\varrho$*-zeros of all* $L(s, \chi)$*-functions* mod k *the inequality*

$$\pi \geqq \left| \arg \frac{e^{it_\varrho y_1}}{\varrho} \right| \geqq c_7 \frac{A(k)^3}{k(1+|t_\varrho|)^6 \log^3 k(2+|t_\varrho|)}$$

holds.

(For the proof see our paper [2].)
Further let m be a non-negative integer and

$$1 = |z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n| \tag{5.3}$$

so that with a $0 < \varkappa \leqq \frac{\pi}{2}$

$$\varkappa \leqq |\arg z_j| \leqq \pi \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.4}$$

Let the index h be such that

$$|z_h| \geqq \frac{4n}{m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{5.5}$$

and fixed. Further we define B for given b_j numbers by

$$B = \min_{h \leqq \xi \leqq n} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\xi} b_j. \tag{5.6}$$

Then we assert the

LEMMA II. *If* $B > 0$, *then there are integers* ν_1 *and* ν_2 *with*

$$m + 1 \leqq \nu_1, \quad \nu_2 \leqq m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right) \tag{5.7}$$

such that

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu_1} \geqq \frac{B}{2n+1} \left\{ \frac{n}{24\left(m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)} \right\}^{2n} \left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{5.8}$$

and

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu_2} \leqq -\frac{B}{2n+1} \left\{ \frac{n}{24\left(m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)} \right\}^{2n} \left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)}. \tag{5.9}$$

(For the proof see our paper [3]).[4]

[4] Here we need a slightly weaker form of this lemma as it is proved in [3]; the index h_1 there can be chosen as n here.

Further we shall need the[5]

LEMMA III. *Let m be non-negative integer, further $z_1, z_2, \ldots, z_n$ with* (5. 3). *Let h_2 be such that*

$$|z_{h_2}| > \frac{2n}{m+n}. \tag{5.10}$$

Finally B_1 and the index h_3 be defined by

$$B_1 = \min_{h_2 \leqq \xi < h_3} \left| \sum_{j=1}^{\xi}{}' b_j \right| \tag{5.11}$$

if there is a z_{h_3} with

$$|z_{h_3}| < |z_{h_2}| - \frac{n}{m+n} \tag{5.12}$$

and

$$B_1 = \min_{h_2 \leqq \xi \leqq n} \left| \sum_{j=1}^{\xi} b_j \right| \tag{5.13}$$

otherwise. Then there is an integer ν_3 with

$$m+1 \leqq \nu_3 \leqq m+n \tag{5.14}$$

so that

$$\left| \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu_3} \right| \geqq \left(\frac{n}{24e(m+2n)} \right)^n B_1 \left(\frac{|z_{h_2}|}{2} \right)^{m+n}.$$

6. We shall need three more lemmata. In these and in the proof we shall have beside c_1 and c_2 also $c_8, c_9, \ldots$, some of them immaterial but some of them must be chosen properly. These are c_1, c_2, c_{10} and c_{11}; first c_{10} must be chosen sufficiently large, then c_{11} large in dependence upon c_{10}, then c_1 large in dependence upon c_{10} and c_{11} and finally c_2 in dependence upon c_{10}, c_{11} and c_1. First we shall make some restrictions upon c_{10}; all these and the later ones are *lower* limitations. We have[6] for $x \geqq 2$

$$\left| \psi(x, k, l) - \frac{x}{\varphi(k)} + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{|t_\varrho| \leqq x} \frac{x^\varrho}{\varrho} \right| < c_8 \log^2 kx$$

and hence if no $L(s, \chi) \bmod k$ vanishes for

$$\sigma > \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq x$$

then

$$\left| \psi(x, k, l) - \frac{x}{\varphi(k)} \right| < c_9 \sqrt{x} \log^2 kx. \tag{6.1}$$

[5] For this lemma see KNAPOWSKI [1]. This makes the so-called second main-theorem (see TURÁN [1] or SÓS–TURÁN [1]) on the same way more elastic to applications as Lemma II the one-sided second main-theorem (see TURÁN [2]).

[6] This follows at once from (4. 43) on p. 233 (with $T = x$) of PRACHAR [1] (using (1. 3) to that extent that $L(s, \chi) \neq 0$ for $0 < s < 1$).

Then we chose

$$c_{10} \geqq \max\{(8c_9)^{\frac{5}{2}}, e^{800}\} \tag{6. 2}$$ [7]

and require

$$c_1 > 2^{-6} c_{10} \tag{6. 3}$$

so that

$$c_1 k^{10} \geqq c_{10} k^3,$$

i. e. no $L(s, \chi) \bmod k$ vanishes for

$$\sigma > \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq c_{10} k^3 \tag{6. 4}$$

owing to (1. 2).

Next we state the simple

LEMMA IV. *Supposing only the truth of* (1. 2), *for each* $(l, k) = 1$ *there is a prime* P *with* $P \equiv l \bmod k$ *such that*

$$(2 <) \frac{1}{2} c_{10} k^3 \leqq P \leqq c_{10} k^3. \tag{6. 5}$$

Namely we may apply (6. 1) owing to (6. 4) with $x = c_{10} k^3$ and $x = \frac{1}{2} c_{10} k^3$; this gives owing to (6. 4) and (6. 1)

$$\left| \sum_{\substack{\frac{1}{2} c_{10} k^3 < n \leqq c_{10} k^3 \\ n \equiv l \bmod k}} \Lambda(n) - \frac{c_{10}}{2} \frac{k^3}{\varphi(k)} \right| < 2c_9 \sqrt{c_{10} k^3} \cdot \log^2 (c_{10} k^4)$$

i. e.

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2} c_{10} k^3 < n \leqq c_{10} k^3 \\ n \equiv l \bmod k}} \Lambda(n) > \frac{c_{10}}{2} k^2 - 2c_9 \sqrt{c_{10} k^3} \log^2 (c_{10} k^4) >$$

$$> \frac{c_{10}}{2} k^2 - 2c_9 \cdot c_{10}^{\frac{3}{5}} \cdot k^{1,9} > \frac{c_{10}}{4} k^2$$

owing to (6. 2). Since further evidently

$$\sum_{\substack{p, \alpha \\ p^\alpha \leqq x \\ p^\alpha \equiv l \bmod k \\ \alpha \geqq 2}} \log p < 2\sqrt{x} \log x,$$

we have

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2} c_{10} k^3 < n \leqq c_{10} k^3 \\ n \equiv l \bmod k}} \log p > \frac{c_{10}}{4} k^2 - 2\sqrt{c_{10} k^3} (c_{10} k^3)^{\frac{1}{20}} > 0$$

owing to (6. 2) indeed.

[7] I. e. for $x \geqq c_{10}$ $\log x < x^{\frac{1}{20}}$.

7. Further we need the

LEMMA V. *Supposing for a fixed k the truth of* (1. 2) *only, then with the above* c_{10} *and some* $c_{11}>3$ *(depending on* c_{10}*) for all* l_1, l_2*-pairs* $(l_1 \not\equiv l_2)$ *the inequality*

$$(7.1)\qquad \max_{\frac{c_{10}}{3}k^3 \leqq \omega \leqq c_{10}k^3} \left| \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2)) \sum_{|t_\varrho| \leqq c_{11}k^4} \frac{\omega^\varrho}{\varrho} \right| > \frac{1}{4}\log k$$

holds (denoting again $\varrho=\sigma_\varrho+it_\varrho$*).*

For a proof we start from the formula[8] valid for $x=[x]$, χ' primitive character mod k', $y \geqq 2$, $x \geqq 2$

$$(7.2)\qquad \left| \sum_{n \leqq x}{}' \Lambda(n)\chi'(n) - E_0 x + \sum_{|t_\varrho| \leqq y} \frac{x^\varrho}{\varrho} + d_0(\chi') + v_0(\chi')\log x \right| <$$

$$< c_{12}\frac{x}{y}(\log^2 x + \log^2 k'y),$$

where $E_0 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ for $\chi' \begin{cases} = \chi_0' \\ \neq \chi_0' \end{cases}$ and $d_0(\chi')$, $v_0(\chi')$ are independent of x, y. Further if $\chi(n)$ is an arbitrary character mod k and $\chi'(n)$ is the equivalent character mod k' $(k'|k)$ then it is known[9]

$$(7.3)\qquad \sum_{n \leqq x}{}' \Lambda(n)\chi(n) = \sum_{n \leqq x}{}' \Lambda(n)\chi'(n) - \sum_{p^\alpha \leqq x,\, p|k,\, p\nmid k'}{}' \chi'(p^\alpha)\log p.$$

Putting (7. 2) into (7. 3), multiplying by $\frac{1}{\varphi(k)}(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2))$ we sum over χ's. Then we obtain

$$(7.4)\qquad \left| \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l_1 \bmod k}}{}' \Lambda(n) - \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l_2 \bmod k}}{}' \Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} d_0(\chi')(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2)) + \right.$$

$$+ \frac{\log x}{\varphi(k)} \sum_{\chi} v_0(\chi')(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2)) +$$

$$\left. + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2)) \sum_{|t_\varrho| \leqq y} \frac{x^\varrho}{\varrho} \right| < c_{12}\frac{x}{y}(\log^2 x + \log^2 ky),$$

since the set $\varrho(\chi')$ is, as well-known, identical with $\varrho(\chi)$.

Now we use (7. 4) with $x=P$ and $x=P-1$ where P is defined in Lemma IV with $l=l_1$, say. Then the contribution of the third sum on left is 0, that of the fourth

$$\frac{1}{\varphi(k)}\log\frac{P}{P-1}\sum_{\chi} v_0(\chi')(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2))$$

[8] See PRACHAR [1] pp. 228–229, Satz 4. 4. The term d_0 is owing to (4. 44) p. 233 of this book $O(\log k)$. Σ' means that the term corresponding to $n=x$ must be taken with coefficient $\frac{1}{2}$.

[9] See PRACHAR [1], p. 234.

and taking in account that[10] $v_0(\chi')$ is 0 or 1, this is absolutely

$$\leqq \log \frac{P}{P-1} \leqq \frac{1}{3}.$$

The contribution of the first sum is $\frac{1}{2}\Lambda(P)$, that of the second

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\log 2 & \text{if}^{11}\ P-1 \equiv l_2 \bmod k \text{ and power of 2,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence choosing

$$y = c_{11}k^4$$

we obtain

$$\text{(7. 5)} \qquad \left| \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \left\{ \sum_{|t_\varrho| \leqq c_{11}k^4} \frac{P^\varrho}{\varrho} - \sum_{|t_\varrho| \leqq c_{11}k^4} \frac{(P-1)^\varrho}{\varrho} \right\} \right| >$$

$$> \frac{1}{2}(3\log k - \log 2 - 1) - 2c_{12}\frac{P}{c_{11}k^4}(\log^2 P + \log^2 kP) > \frac{3}{2}\log k -$$

$$-0{,}9 - \frac{8c_{12}c_{10}}{c_{11}k}(32\log^2 k + \log^2 c_{10}) > \frac{3}{2}\log k - 1 > \frac{1}{2}\log k$$

if only

$$\text{(7. 6)} \qquad c_{11} \geqq c_{10} \quad \text{and} \quad c_{11} \geqq 80 c_{12} c_{10}\left(\log^2 c_{10} + 32 \max_{r \geqq 2} \frac{\log^2 x}{x}\right).$$

From (7. 5) Lemma V follows at once.

8. Let $\omega = \omega_0$ be a value for which (7. 1) is realized and we write shortly

$$\text{(8. 1)} \qquad c_1 k^{10} \overset{\text{def}}{=} L_1.$$

Then we assert the

LEMMA VI. *For* $l_1 \not\equiv l_2 \bmod k$, *supposing only* (1. 2) *there is an integer* v_0 *with*

$$\text{(8. 2)} \qquad \frac{L_1^2}{\log L_1} \leqq v_0 \leqq \frac{L_1^2}{\log L_1} + L_1^{1,16}$$

so that

$$\text{(8. 3)} \qquad \left| \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \sum_{|t_\varrho| \leqq L_1} \frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^\varrho}{\varrho^{v_0+1}} \right| > e_1\left(\frac{1}{30}L_1^2\right).$$

The hypothesis (1. 2) and Siegel's theorem (see SIEGEL [1]) according to which each $L(s, \chi) \bmod k$ has a zero in the domain

$$0 < \sigma < 1$$

$$\text{(8. 4)} \qquad |t| < \frac{c_{13}}{\log_3 (k + e_3(1))},$$

[10] See PRACHAR [1], p. 224.
[11] $P-1$ is even.

result that the non-trivial zero ϱ_1 with the minimal positive imaginary part of all $L(s, \chi)$-functions mod k with $\bar{\chi}(l_1) \neq \bar{\chi}(l_2)$ has the real part $\frac{1}{2}$, i. e.

$$\varrho_1 = \frac{1}{2} + it_1. \tag{8. 5}$$

Let further

$$\varrho_2 = \sigma_2 + it_2$$

be the non-trivial zero with the greatest imaginary part

$$\leqq c_{11} k^4 \tag{8. 6}$$

among all non-trivial zeros of all L-functions mod k with $\chi(l_1) \neq \chi(l_2)$ and

$$\varrho_3 = \sigma_3 + it_3 \tag{8. 7}$$

the non-trivial zero with the smallest imaginary part $\geqq (c_{11}+1)\, k^4$ among the above mentioned zeros. If

$$c_1 > 2^{-6}(c_{11}+1) \tag{8. 8}$$

(which is meant as a lower bound for c_1 as told in 5) then

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{1}{2}. \tag{8. 9}$$

We write the sum under consideration in the form

$$S \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\varphi(k)} \frac{(L_1^{\nu_0})^{\varrho_1}}{\varrho_1^{\nu_0}} \sum_{\chi}{}' \left\{ (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \cdot \sum_{|t_\varrho| \leqq L_1} \frac{\omega_0^\varrho}{\varrho} \left(\frac{L_1^{\varrho - \varrho_1}}{\varrho} \varrho_1 \right)^{\nu_0} \right. . \tag{8. 10}$$

We shall apply Lemma III with

$$\begin{aligned} z_j &= \frac{L_1^{\varrho - \varrho_1}}{\varrho} \varrho_1 \\ b_j &= \frac{\omega_0^\varrho}{\varrho} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \frac{1}{\varphi(k)}; \end{aligned} \tag{8. 11}$$

then assumption (1. 2) assures that $\max_j |z_j| = 1$ is fulfilled. Let further be

$$m = \left[\frac{L_1^2}{\log L_1} \right] \tag{8. 12}$$

and

$$z_{h_2} = \frac{L_1^{\varrho_2 - \varrho_1}}{\varrho_2} \varrho_1 \tag{8. 13}$$

$$z_{h_3} = \frac{L_1^{\varrho_3 - \varrho_1}}{\varrho_3} \varrho_1. \tag{8. 14}$$

9. We have to verify (5. 10) and (5. 12). First we remark that

$$n < c_{14} k L_1 \log(kL_1) < c_{15}(kL_1)^{1,05} = c_{15}\left(\frac{L_1^{1,1}}{c_1^{1/10}}\right)^{1,05} < L_1^{1,16} \tag{9. 1}$$

if only $c_1 > c_{15}^{10}$ and hence

$$\frac{2n}{m+n} < \frac{2n}{m} < \frac{4L_1^{1,16}}{L_1^2}\log L_1 < c_{16} L_1^{-4/5}, \tag{9. 2}$$

whereas from (8. 5), (8. 9) and (8. 6)

$$|z_{h_2}| = \left|\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right| \geqq \frac{\frac{1}{2}}{c_{11}k^4 + \frac{1}{2}} \geqq \frac{c_1^{2/5}}{3c_{11}} L_1^{-2/5} \tag{9. 3}$$

and hence if

$$\frac{c_1^{2/5}}{3c_{11}} > c_{16} \tag{9. 4}$$

(which again is to be interpreted as a lower bound for c_1 as told in 5) then (5. 10) is verified indeed. As to (5. 12) we remark that from (1. 2), (8. 13) and (8. 14) it follows taking in account (8. 9)

$$|z_{h_2}| - |z_{h_3}| = |\varrho_1|\left(\frac{1}{|\varrho_2|} - \frac{1}{|\varrho_3|}\right) \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_{11}k^4+1} - \frac{1}{(c_{11}+1)k^4}\right) >$$

$$> \frac{1}{4c_{11}^2}\cdot\frac{1}{k^4} = \frac{c_1^{2/5}}{4c_{11}^2}\cdot L_1^{-2/5}$$

whereas from (9. 2)

$$\frac{n}{m+n} < \frac{c_{16}}{2} L_1^{-4/5}$$

and hence if

$$c_1^{2/5} > 2c_{16}c_{11}^2 \tag{9. 5}$$

(again a lower bound for c_1) then (5. 12) is verified too. Before applying Lemma III we need a lower bound for B_1. Owing to the definition of B_1 is

$$B_1 = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)\right) \sum_{|t_\varrho| \leqq H(\chi)} \frac{\omega_0^\varrho}{\varrho}, \tag{9. 6}$$

where all $H(\chi)$'s are between $(c_{11}-1)\,k^4$ and $(c_{11}+2)\,k^4$ if only

$$c_{11} > c_{17}.$$

Replacing in (9. 6) however the inner sum by

$$\sum_{|t_\varrho| \leqq c_{11}k^4} \frac{\omega_0^\varrho}{\varrho}$$

the total-error cannot exceed absolutely

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\sum_{(c_{11}-1)k^4\leqq|t_\varrho|\leqq(c_{11}+2)k^4}^{\varrho(\chi)}\left|\frac{\omega_0^\varrho}{\varrho}\right|\leqq c_{18}\log(c_{11}k^4)\frac{\omega_0^{1/2}}{(c_{11}-1)k^4}$$

i. e. using $\omega_0\leqq c_{10}k^3$

$$(9.\,7)\qquad <c_{19}(4\log k+\log c_{11})\frac{\sqrt{c_{10}}}{c_{11}k^{5/2}}<4c_{19}\frac{\sqrt{c_{10}}\log c_{11}}{c_{11}}\cdot\frac{\log k}{k^{5/2}}.$$

Choosing now c_{11} so that

$$(9.\,8)\qquad 4\frac{c_{19}\log c_{11}}{c_{11}}<\frac{1}{8\sqrt{c_{10}}}$$

we get from (9. 8), (9. 7) and Lemma V

$$(9.\,9)\qquad |B_1|>\frac{1}{8}\log k.$$

Hence the application of Lemma III gives the existence of an integer v_0 with (8. 2) so that

$$(9.\,10)\qquad \left|\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2))\sum_{|t_\varrho|\leqq L_1}^{\varrho(\chi)}\frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^\varrho}{\varrho^{v_0+1}}\right|>$$

$$>\left(\frac{\sqrt{L_1}}{|\varrho_1|}\right)^{v_0}\frac{1}{8}\left(\frac{n}{24e(m+2n)}\right)^n\left(\frac{|z_{h_2}|}{2}\right)^{m+n}.$$

Owing to (8. 12) and (9. 1) we have

$$\frac{n}{24e(m+2n)}\geqq\frac{1}{24e(L_1^2+2L_1^{1,16})}>\frac{1}{200}L_1^{-2}$$

and hence the last but first factor in (9. 10) is

$$(9.\,11)\qquad >\left(\frac{1}{200}L_1^{-2}\right)^{L_1^{1,16}}>e_1(-3L_1^{1,16}\log L_1)$$

if only $c_1>c_{20}$. Further from (8. 4), (8. 5) and (8. 2) we get

$$(9.\,12)\qquad \left(\frac{\sqrt{L_1}}{|\varrho_1|}\right)^{v_0}\geqq\left(\frac{1}{1+c_{13}}\sqrt{L_1}\right)^{\frac{L_1^2}{\log L_1}}>e_1(0{,}45L_1^2)$$

if only $c_1>_{21}$.

Finally using (9. 3) and (9. 4) we get $c_1>c_{22}$

$$\left(\frac{|z_{h_2}|}{2}\right)^{m+n}>\left(\frac{c_1^{2/5}}{6c_{11}}L_1^{-2/5}\right)^{\frac{L_1^2}{\log L_1}+L_1^{1,16}}>\left(\frac{c_{16}}{2}L_1^{-2/5}\right)^{\frac{L_1^2}{\log L_1}+L_1^{1,16}}>e_1(-0{,}41L_1^2).$$

Collecting this, (9. 14), (9. 13) and (9. 11) we get for our sum in (8. 3) the lower bound

$$\frac{1}{8}e_1\left(\frac{L_1^2}{25}-3c_{15}L_1^{1,16}\log L_1\right)>e_1\left(\frac{1}{30}L_1^2\right)$$

indeed if only $c_1>c_{23}$.

We shall use Lemma VI in a bit different form. We may observe that the sum in (8. 3) is *real*; hence changing l_1 and l_2 if necessary we obtain that for an integer v_0 satisfying (8. 2) we have

$$(9.13)\qquad \frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{Re}\sum_{\chi}{}'(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2))\sum_{|t_\varrho|\leqq c_1 k^{10}}\frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^\varrho}{\varrho^{v_0+1}}\geqq e_1\left(\frac{1}{30}L_1^2\right).$$

Finally we shall need the

LEMMA VIII. *There is a connected path V in the vertical strip $\frac{1}{5}\leqq\sigma\leqq\frac{2}{5}$ symmetrical to the real axis, consisting alternately of horizontal and vertical segments and monotonically increasing from $-\infty$ to $+\infty$, on which for all $L(s,\chi)$-functions* mod k *the inequality*

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|<c_{24}\,k\log^3 k(2+|t|)$$

holds.

Since the proof follows mutatis mutandis that of the Appendix III of the book of one of us (see TURAN [1]) we omit it.

10. Now we can turn to the proof of Theorem 1. 1; it will suffice again to prove (1. 6). Let ω_0, v_0, L_1 and the order of l_1 and l_2 defined as previously and T satisfy (1. 4). We define further T_1 by

$$(10.1)\qquad T_1\overset{\text{def}}{=}\frac{T}{c_{10}k^3}\,e_1(-2L_1^2)$$

with the previously mentioned c_{10}. Choosing c_2 (in dependence upon c_{10} as told in 5) sufficiently large it follows from (1. 4) that $\tau=T_1$ satisfies 5. 1 and hence Lemma I is applicable. This gives the existience of a y_1 with

$$(10.2)\qquad \frac{1}{20}\log_2 T_1\leqq y_1\leqq\frac{1}{10}\log_2 T_1$$

so that for all ϱ's

$$(10.3)\qquad \pi\geqq\left|\arg\frac{e^{it_\varrho y_1}}{\varrho}\right|\geqq c_7\frac{A(k)^3}{k(1+|t_\varrho|)^6\log^3 k(2+|t_\varrho|)}$$

holds. If finally the integer v is at present restricted only by

$$(10.4)\qquad \frac{\log T_1}{y_1}-\log^{0,9}T_1\leqq v\leqq\frac{\log T_1}{y_1}$$

we consider the integral

$$(10.5)\quad J(T)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\left(\frac{e^{y_1 s}}{s}\right)^v\frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^s}{s^{v_0+1}}\cdot\frac{1}{\varphi(k)}\left\{\sum_{\chi(l_1)\neq\chi(l_2)}\chi(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2))\frac{L'}{L}(s,\chi)\right\}ds.$$

Replacing $\frac{L'}{L}(s,\chi)$ by its Dirichlet-series, the well-known integral-formula (d pos.

int.)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{\xi^s}{s^{d+1}}\,ds=\begin{cases}\dfrac{1}{d!}\log^d\xi & \text{for}\quad \xi\geqq 1,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

gives

$$J(T)=\sum_{\substack{n\leqq\omega_0 L_1^{\nu_0}e^{\nu y_1}\\ n\equiv l_2 \bmod k}}\Lambda(n)\frac{\log^{\nu+\nu_0}\dfrac{\omega_0 L_1^{\nu_0}e^{\nu y_1}}{n}}{(\nu+\nu_0)!}-\sum_{\substack{n\leqq\omega_0 L_1^{\nu_0}e^{\nu y_1}\\ n\equiv l_2 \bmod k}}\Lambda(n)\frac{\log^{\nu+\nu_0}\dfrac{\omega_0 L_1^{\nu_0}e^{\nu y_1}}{n}}{(\nu+\nu_0)!}$$

or putting

$$\omega_0 L_1^{\nu_0}e^{\nu y_1}\overset{\text{def}}{=}Y_1 \tag{10.6}$$

also

$$J(T)=\frac{1}{(\nu+\nu_0)!}\int_1^{Y_1}\left(\log x\log^{\nu+\nu_0}\frac{Y_1}{x}\right)d\big(\Pi(x,k,l_1)-\Pi(x,k,l_2)\big)= \tag{10.7}$$

$$=\frac{1}{(\nu+\nu_0)!}\int_1^{Y_1}\{\Pi(x,k,l_2)-\Pi(x,k,l_1)\}\cdot\left(\log x\log^{\nu+\nu_0}\frac{Y_1}{x}\right)'dx.$$

11. Since the function $\log x\log^{\nu+\nu_0}\dfrac{Y_1}{x}$ increases for $1\leqq x\leqq Y_1^{\frac{1}{\nu+\nu_0+1}}$ and then decreases, we split the last integral into

$$\frac{1}{(\nu+\nu_0)!}\int_1^{Y_1^{\frac{1}{\nu+\nu_0+1}}}\overset{\text{def}}{=}J_1 \tag{11.1}$$

$$\frac{1}{(\nu+\nu_0)!}\int_{Y_1^{\frac{1}{\nu+\nu_0+1}}}^{Y_1}\overset{\text{def}}{=}J_2. \tag{11.2}$$

Evidently

$$|J_1|<\frac{1}{(\nu+\nu_0+1)!}\left(\frac{\nu+\nu_0}{\nu+\nu_0+1}\right)^{\nu+\nu_0}Y_1^{\frac{1}{\nu+\nu_0+1}}\log^{\nu+\nu_0+1}Y_1.$$

From (10. 4), (8. 2), (10. 1) we have for $c_1>c_{25}$ the estimation

$$Y_1\leqq c_{10}k^3L_1^{2\frac{L_1^2}{\log L_1}}T_1=T_1\cdot c_{10}k^3\cdot e^{2L_1^2}=T, \tag{11.3}$$

from (1. 4), (8. 1) and (10. 1) for

$$c_1^2>\max_{x\geqq 2}\frac{\log(c_{10}x^3)}{x^{20}},\quad c_2>3c_1^2$$

the inequality

$$T_1 > \frac{T}{\log T}, \tag{11.4}$$

further from (10. 4), (10, 2), (1. 4) and (11. 7)

$$v > \frac{10 \log T_1}{\log_2 T_1} - \log^{0,9} T_1 > 2 \frac{\log T_1}{\log_2 T_1} > \frac{\log T}{\log_2 T}. \tag{11.5}$$

Hence

$$Y_1^{\frac{1}{v+v_0+1}} < Y_1^{\frac{1}{v}} < \log T$$

and

$$\frac{1}{(v+v_0+1)!}\left(\frac{v+v_0}{v+v_0+1}\right)^{v+v_0} \log^{v+v_0+1} Y_1 < 2\left(\frac{e}{v}\log Y_1\right)^{v+v_0+1} <$$

$$< 2(e \log_2 T)^{v+v_0+1} < 2e_1\left\{2\log_3 T\left(20\frac{\log T_1}{\log_2 T_1} + 2c_{10}^2 k^{20}\right)\right\} <$$

$$< e_1\left(41\frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right)$$

and thus

$$|J_1| < e_1\left(42\frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right). \tag{11.6}$$

Further from (11. 2) we get, using also (11. 4),

$$J_2 \leqq \max_{x \leqq T} \{\Pi(x, k, l_1) - \Pi(x, k, l_2)\} \cdot \frac{(\log Y_1)^{v+v_0+1}}{(v+v_0+1)!}\left(\frac{v+v_0}{v+v_0+1}\right)^{v+v_0} \tag{11.7}$$

and

$$J_2 \geqq \min_{x \leqq T} \{\Pi(x, k, l_1) - \Pi(x, k, l_2)\} \cdot \frac{(\log Y_1)^{v+v_0+1}}{(v+v_0+1)!}\left(\frac{v+v_0}{v+v_0+1}\right)^{v+v_0}. \tag{11.8}$$

12. Lemma VII and (10. 5) give

$$J(T) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi(l_1) \neq \chi(l_2)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \sum_{\varrho(\chi)}' \frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^{\varrho}}{\varrho^{v_0+1}} \cdot \left(\frac{e^{y_1 \varrho}}{\varrho}\right)^v - \tag{12.1}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{V}} \left(\frac{e^{y_1 s}}{s}\right)^v \frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^s}{s^{v_0+1}} \cdot \frac{1}{\varphi(k)} \left\{\sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \frac{L'}{L}(s, \chi)\right\} ds,$$

where the dash in the sum means that the summation is extended only over the zeros right to V. The last integral is absolutely

$$< 5^{2v} e^{\frac{2}{5} v y_1} c_{26} k \log^3 k \cdot (\omega_0 L_1^{v_0})^{\frac{2}{5}}$$

and hence owing to (1. 4), (10. 2), (10. 4), (8. 1) and (8. 2)

$$< c_{27} T^{0,45}. \tag{12.2}$$

Further, taking in account that the number of all zeros of all $L(s, \chi)$-functions mod k with imaginary parts between r and $r+1$ is

$$< c_{28} \varphi(k) \log k \, (2 + |r|), \tag{12. 3}$$

the contribution of the zeros with $|t_\varrho| > \log^{\frac{1}{10}} T_1$ to the sum on the right of (12. 1) is absolutely (roughly)

$$3c_{28} \sum_{n=[\log^{\frac{1}{10}} T_1]}^{\infty} \log kn \, \frac{\omega_0 L_1^{v_0}}{n^{v_0+1}} \frac{e^{vy_1}}{n^v} <$$

$$< c_{29} T \cdot \left(\frac{1}{2} \log^{\frac{1}{10}} T_1 \right)^{-v} < c_{29} \frac{T}{T_1} e_1 \left(\log^{0,9} T \cdot \log_2 T + 20 \frac{\log T}{\log_2 T} \right) < c_{30} T^{0,45}$$

owing to (10. 4), (10. 2), (10. 1) and (1. 4). Hence denoting the remaining sum on the right of (12. 1) by $Z(v)$ and collecting the previous estimations we get

$$\frac{(\log Y_1)^{v+v_0+1}}{(v+v_0+1)!} \max_{x \leqq T} \{\Pi(x, k, l_1) - \Pi(x, k, l_2)\} > Z(v) - c_{31} T^{0,45} \tag{12. 4}$$

and

$$\frac{(\log Y_1)^{v+v_0+1}}{(v+v_0+1)!} \min_{x \leqq T} \{\Pi(x, k, l_1) - \Pi(x, k, l_2)\} < Z(v) + c_{31} T^{0,45}. \tag{12. 5}$$

13. Now we estimate $Z(v)$ in (12. 4) and (12. 5) by proper choices of v from below and above, resp., by aid of lemmata I, II and VI. Let $\varrho_4 = \sigma_4 + it_4$ be one of the zeros of $L(s, \chi)$ $\chi(l_1) \neq \chi(l_2)$ with

$$|t_\varrho| \leqq \log^{\frac{1}{10}} T_1 \tag{13. 1}$$

for which

$$\left| \frac{e^{y_1 \varrho}}{\varrho} \right| = \text{maximal.} \tag{13. 2}$$

We write $Z(v)$ in the form

$$Z(v) = \frac{1}{\varphi(k)} \left(\frac{e^{y_1 \sigma_4}}{|\varrho_4|} \right)^v \cdot \sum_{\chi} \left\{ (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \cdot \right. \tag{13. 3}$$

$$\left. \cdot \sum_{\substack{\varrho(\chi) \\ |t_\varrho| \leqq \log^{\frac{1}{10}} T_1 \\ \varrho \text{ right to } V}} \frac{(\omega_0 L_1^{v_0}) \varrho}{\varrho^{v_0+1}} \cdot \left(\frac{e^{y_1(\varrho - \sigma_4)}}{\varrho} |\varrho_4| \right)^v \right\} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{e^{y_1 \sigma_4}}{|\varrho_4|} \right)^v Z_1(v).$$

The role of z_j's are played by the numbers

$$\frac{e^{y_1(\varrho - \sigma_4)}}{\varrho} |\varrho_4|$$

(and hence owing to the definition of ϱ_4 the condition $\max_j |z_j| = 1$ in Lemma II

is satisfied) and that of b_j's by the numbers

$$(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2))\frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^{\varrho}}{\varphi(k)\varrho^{v_0+1}}.$$

Then

$$\operatorname{arc} z_j = \operatorname{arc}\frac{e^{it_{\varrho}y_1}}{\varrho}$$

and hence from (10. 3) a lower bound for $|\operatorname{arc} z_j|$ is

$$c_7\frac{A(k)^3}{k(1+\log^{\frac{1}{10}}T_1)^6\log^3(2k\log^{\frac{1}{10}}T_1)}$$

which owing to (1. 4)

$$(13.4)\qquad > \log^{-\frac{2}{3}}T_1 \overset{\text{def}}{=} \varkappa.$$

Let further

$$(13.5)\qquad m=\left[\frac{\log T_1}{y_1}-\log^{0,9}T_1\right].$$

As to the index h let

$$(13.6)\qquad z_h=\frac{e^{y_1(\varrho_5-\sigma_4)}}{\varrho_5}|\varrho_4|,$$

where $\varrho_5=\frac{1}{2}+it_5$ is any zero of any $L(s,\chi)$ mod k with

$$(13.7)\qquad L_1-1\leqq t_5<L_1.$$

The number of z_j's is owing to (12. 3) and (1. 4)

$$\leqq c_{32}k\log^{\frac{1}{10}}T_1\cdot\log k(2+\log^{\frac{1}{10}}T_1)<\log^{\frac{1}{10}}T_1\cdot(\log_2 T_1)^3$$

if c_2 is sufficiently large in dependence of c_1 and c_{10}. Hence

$$(13.8)\qquad n<\log^{\frac{1}{10}}T_1\cdot(\log_2 T_1)^3.$$

We have to verify (5. 5). Since

$$(13.9)\qquad \frac{4n}{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)}<\frac{4\log^{\frac{1}{10}}T_1(\log_2 T_1)^3}{\frac{1}{2}\,10\,\frac{\log T_1}{\log_2 T_1}}$$

and

$$(13.10)\qquad |z_h|=\frac{e^{y_1\left(\frac{1}{2}-\sigma_4\right)}}{|\varrho_5|}|\varrho_4|>\frac{e^{-\frac{1}{2}y_1}}{1/2+L_1}\cdot\frac{1}{2}>\frac{1}{3c_1k^{10}}\log^{-\frac{1}{20}}T_1>\log^{-\frac{1}{10}}T_1$$

if only c_2 is sufficiently large in dependence upon c_1 and c_{10}. This and (13. 9) prove (5. 5) indeed.

14. In order to apply Lemma II we have to estimate B of this lemma from below. This will be done by Lemma VI or rather by its corollary (9. 13). This gives,

the estimation

$$B \geqq e_1\left(\frac{1}{30} L_1^2\right) - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} 2 \sum_{L_1 - 1 \leqq |t_\varrho|} \frac{(\omega_0 L_1^{\nu_0})}{|\varrho|^{\nu_0+1}} > \tag{14.1}$$

$$> e_1\left(\frac{1}{30} L_1^2\right) - c_{33} \log(kL_1) \cdot \frac{\omega_0}{L_1} 2^{\nu_0} > e_1\left(\frac{1}{30} L_1^2\right) - e_1\left(\frac{2L_1^2}{\log L_1}\right) > e_1\left(\frac{1}{40} L_1^2\right) > 1$$

if c_1 is sufficiently large in dependence upon c_{10}. Finally we have to verify that the interval, given in (5. 7) for ν_1 and ν_2 is contained in (10. 4). The first part of this assertion follows from (13. 5) at once; further from (13. 5), (13. 9) and (13. 4) we have

$$m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right) \leqq \frac{\log T_1}{y_1} - \log^{0,9} T_1 + \tag{14.2}$$

$$+ \log^{\frac{1}{10}} T_1 (\log_2 T_1)^3 (3 + \pi \log^{\frac{2}{3}} T_1) < \frac{\log T_1}{y_1}$$

indeed if and only if c_2 is sufficiently large in dependence of c_1 and c_{10}. Hence choosing $\nu = \nu_1$ we get from (13. 9) and (14. 2)

$$Z_1(\nu_1) > \frac{1}{3} \log^{-\frac{1}{10}} T_1 (\log_2 T_1)^{-3} \left(\frac{y_1}{26 \log T_1}\right)^{2 \log^{\frac{1}{10}} T_1 / (\log_2 T_1)^3} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} > e_1\{-2 \log^{\frac{1}{10}} T_1 \cdot (\log_2 T_1)^5\} \cdot \left(\frac{e^{y_1\left(\frac{1}{2}-\sigma_4\right)}}{2|\varrho_5|} |\varrho_4|\right)^{\nu_1} \cdot \left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)}$$

or by (13. 11), (13. 9), (13. 4), (13. 7), (13. 6), (10. 4) and (1. 4), choosing c_2 sufficiently large,

$$Z_1(\nu_1) > e_1\left(-21 \frac{\log T_1 \cdot \log_3 T_1}{\log_2 T_1}\right) \cdot e^{y_1\left(\frac{1}{2}-\sigma_4\right)\nu_1} |\varrho_4|^{\nu_1}. \tag{14.3}$$

Hence from (13. 3) and (10. 4) we get

$$Z(\nu_1) > e^{\frac{\nu_1 y_1}{2}} \cdot e_1\left(-21 \frac{\log T_1 \log_3 T_1}{\log_2 T_1}\right) > \sqrt{T_1}\, e_1\left(-22 \frac{\log T_1 \log_3 T_1}{\log_2 T_1}\right).$$

We get from (14. 3) and (11. 4)

$$Z(\nu_1) > \sqrt{T}\, e_1\left(-23 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right)$$

and analogously

$$Z(\nu_2) < -\sqrt{T}\, e_1\left(-23 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right).$$

Going back to (12. 4) and (12. 5) this gives

$$\max_{x \leqq T} \{\Pi(x, k, l_1) - \Pi(x, k, l_2)\} > \tag{14.4}$$

$$> \sqrt{T} \cdot e_1\left(-23 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right) (\nu_1 + \nu_0 + 1)! \log^{-\nu_1 - \nu_0 - 1} Y_1$$

and

$$\min_{x \leqq T} \{\Pi(x, k, l_1) - \Pi(x, k, l_2)\} \leqq \tag{14.5}$$

$$\leqq -\sqrt{T}\, e_1\left(-23\,\frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right)\cdot (v_2+v_0+1)!\log^{-v_2-v_0-1} Y_1.$$

Since from (10. 6)

$$(v_1+v_0+1)!\log^{-v_1-v_0-1} Y_1 > \left(\frac{v_1+v_0+1}{e\log Y_1}\right)^{v_1+v_0+1} = \tag{14.6}$$

$$= \left(\frac{v_1+v_0+1}{e(\log \omega_0 + v_0 \log L_1 + v_1 y_1)}\right)^{v_1+v_0+1} >$$

$$> e\left(\frac{1}{v_1}\log \omega_0 + \frac{v_0}{v_1}\log L_1 + \frac{1}{10}\log_2 T\right)^{-v_1-v_0-1},$$

we get using (7. 1), (5. 7) and (13. 5)

$$\frac{1}{v_1}\log \omega_0 \leqq \frac{\log (c_{10}k^3)}{9\,\dfrac{\log T_1}{\log_2 T_1}} < 1$$

and using (8. 2), (5. 7) and (13. 5)

$$\frac{v_0}{v_1}\log L_1 < \frac{2L_1^2}{\left(9\,\dfrac{\log T_1}{\log_2 T_1}\right)} < 1$$

if only c_2 is sufficiently large in dependence upon c_1 and c_{10}. Hence from (14. 6) and (1. 4)

$$(v_1+v_0+1)!\log^{-v_1-v_0-1} Y_1 > (\log_2 T)^{-v_1-v_0-1} >$$

$$> e_1\left\{-\log_3 T\left(1+2\,\frac{L_1^2}{\log L_1}+20\,\frac{\log T}{\log_2 T}\right)\right\} > e_1\left(-21\,\frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right),$$

choosing c_2 sufficiently large in dependence upon c_1 and c_{10}. Similarly

$$(v_2+v_0+1)!\log^{-v_2-v_0-1} Y_1 > e_1\left(-21\,\frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right).$$

Putting these into (14. 4) and (14. 5) Theorem 1. 1 follows at once.

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE UNIVERSITY ADAM MICZKIEWICZ,
POZNAN

MATHEMATICAL INSTITUTE,
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY,
BUDAPEST

(Received 10 January 1962)

References

S. KNAPOWSKI [1], Prime numbers in arithmetical progressions. I, *Acta Arithmetica* VI. 4, pp. 415—434.

S. KNAPOWSKI and P. TURÁN [1], Comparative prime-number theory. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), pp. 299—314.

[2], Comparative prime-number theory. II, *ibid.*, pp. 315—342.

[3], Comparative prime-number theory. III, *ibid.*, pp. 343—364.

[4], Comparative prime-number theory. IV, *ibid.*, **14** (1963), pp. 31—42.

K. PRACHAR [1], *Primzahlverteilung* (Springer Verl., 1957).

C. L. SIEGEL [1], On the zeros of Dirichlet *L*-functions, *Annals of Math.*, **46** (1945), pp. 409—422.

VERA T. SÓS—P. TURÁN [1], On some new theorems in the theory of diophantine approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 241—255.

P. TURÁN [1], *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Akad. Kiadó (Budapest, 1953). A completely rewritten English edition will appear in the Interscience Tracts series.

[2], On some further one-sided theorems of new type in the theory of diophantine approximation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961), pp. 455—468.

COMPARATIVE PRIME-NUMBER THEORY. VI

(CONTINUATION OF THE GENERAL CASE)

By

S. KNAPOWSKI (Poznan) and P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

1. In the previous paper V of this series we discussed oscillatory properties of

$$\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$$

and

$$\Pi(x, k, l_1) - \Pi(x, k, l_2)$$

for the general case

$$l_1 \not\equiv 1 \bmod k, \qquad l_2 \not\equiv 1 \bmod k \tag{1. 1}$$

or shortly, for the case $(l_1, l_2)_k$ with (1. 1). As one could except, the treatment[1] of

$$\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)$$

is much more difficult and we cannot cover the whole case (1. 1); what we can prove, refers to such l_1, l_2-pairs for which the number of incongruent solutions of the congruences

$$x^2 \equiv l_1 \bmod k, \quad x^2 \equiv l_2 \bmod k \tag{1. 2}$$

are equal. As easy to see, these cases make out a large part of all, in particular when k is very composite.[2] And even in these cases we cannot obtain unconditional results; we have to suppose that no $L(s, \chi)$ functions mod k with $\chi \neq \chi_0$ vanish in the domain

$$\sigma > \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq 2c_1 k^{10} \qquad (s = \sigma + it) \tag{1. 3}$$

with a sufficiently large c_1 and moreover also for

$$\sigma = \frac{1}{2}, \quad |t| \leqq A(k) \tag{1. 4}$$

with a positive $A(k)$. More exactly we assert the

[1] We remind the reader that $\pi(x, k, l)$ denotes the number of primes not exceeding x, which are $\equiv l \bmod k$, (l, k) is always 1. As in the previous papers, $c_1, \ldots$ always denote positive numerical explicitly calculable constants, further $e_1(x) = e^x$ and $e_\nu(x) = e_{\nu-1}(e_1(x))$, $\log_1 x = \log x$ and $\log_\nu x = \log_{\nu-1}(\log x)$, p always prime. Special attention must be given to the constants c_5, c_1 and c_2; c_5 must be sufficiently large, c_1 large in dependence of c_5 and c_2 large in dependence of c_5 and c_1.

[2] As remarked in KNAPOWSKI—TURÁN [3], for all $(l, k) = 1$ the number of solutions of $x^2 \equiv l \bmod k$ is either 0 or equal to that of $x^2 \equiv 1 \bmod k$.

THEOREM 1. 1. *If for a k the assertion* (1. 3)—(1. 4) *holds, then for*

$$T > \max\left\{e_2(c_2k^{20}),\ e_1\left(2e_1\left(\frac{1}{A(k)^3}\right)+c_2k^{20}\right)\right\} \tag{1. 5}$$

and all (l_1, l_2) *pairs with* (1. 2) *the inequalities*[3]

$$\max_{T^{1/3}\leqq x\leqq T}\{\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)\} > \sqrt{T}\,e_1\left(-44\frac{\log T\log_3 T}{\log_2 T}\right), \tag{1. 6}$$

$$\max_{T^{1/3}\leqq x\leqq T}\{\pi(x,k,l_2)-\pi(x,k,l_1)\} > \sqrt{T}\,e_1\left(-44\frac{\log T\log_3 T}{\log T_2}\right) \tag{1. 7}$$

hold.

The proof of this theorem will be perhaps the most complicated in this series, indeed a baroque one, the ideas being a suitable combination of those used in our papers [2] and [3]. That the difficulties are not very much to be seen on the length of the proof, is essentially due to the fact that we could take over from paper [3] of this series the rather difficult assertion (9. 13) without proof. Again it seems to be possible to deduce Theorem 1. 1 from Haselgrove-condition, i. e. that for a suitable $A = A(k)$ no $L(s, \chi)$ mod k vanishes in the parallelogramm

$$0 < \sigma < 1, \qquad |t| \geqq A(k). \tag{1. 8}$$

2. For the convenience of the reader we shall reproduce the necessary lemmata.

LEMMA I. *Under assumption* (1. 8) *for*

$$\tau > \max\left\{c_3,\ e_2(h),\ e_2\left(\frac{1}{A(k)^3}\right)\right\} \tag{2. 1}$$

there is a y_1 *with*

$$\frac{1}{20}\log_2\tau \leqq y_1 \leqq \frac{1}{10}\log_2\tau \tag{2. 2}$$

such that for all $\varrho = \sigma_\varrho + it_\varrho$ *non-trivial zeros of all* $L(s, \chi)$*-functions* mod k *the inequalities*

$$\pi \geqq \left|\arg\frac{e^{it_\varrho y_1}}{\varrho}\right| \geqq c_4\frac{A(k)^3}{k(1+|t_\varrho|)^6\log^3 k(2+|t_\varrho|)} \tag{2. 3}$$

$$\pi \geqq \left|\arg\frac{e^{i\frac{t_\varrho}{2}y_1}}{\varrho}\right| \geqq c_4\frac{A(k)^3}{k(1+|t_\varrho|)^6\log^3 k(2+|t_\varrho|)} \tag{2. 4}$$

hold.

For the proof see our paper [1].

3. Further let m be a non-negative integer and

$$1 = |z_1| \geqq |z_2| \leqq \ldots \geqq |z_n|, \tag{3. 1}$$

[3] Since *in the course of proof* l_1 will be distinguished to l_2, it was necessary to state both (1. 6) and (1. 7).

so that with a $0<\varkappa\leqq\frac{\pi}{2}$

$$\varkappa\leqq|\arg z_j|\leqq\pi \qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Let the index h be such that

$$|z_h|\geqq\frac{4n}{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{3.3}$$

and fixed. Further we define for given b_j numbers B and the index h_1 by

$$B=\min_{h<\xi<h_1}\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\xi}b_j \tag{3.4}$$

if there is an index h_1 with

$$|z_{h_1}|<|z_h|-\frac{2n}{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{3.5}$$

and

$$B=\min_{h\leqq\xi\leqq n}\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\xi}b_j \tag{3.6}$$

otherwise. Then we have the

LEMMA II. *If $B>0$, then there are integers v_1 and v_2 with*

$$m+1\leqq v_1,\quad v_2\leqq m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right) \tag{3.7}$$

such that

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}b_jz_j^{v_1}\geqq\frac{B}{2n+1}\left\{\frac{n}{24\left(m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)}\right\}^{2n}\left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{3.8}$$

and

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}b_jz_j^{v_2}\leqq-\frac{B}{2n+1}\left\{\frac{n}{24\left(m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)}\right\}^{2n}\left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{3.9}$$

For the proof see Theorem 4. 1 in our paper [2]. Further we shall need the

LEMMA III. *For sufficiently large c_5 there is an ω_0 with*

$$\frac{1}{3}c_5k^3\leqq\omega_0\leqq c_5k^3 \tag{3.10}$$

and with sufficiently large c_1

$$L_1\overset{\text{def}}{=}c_1k^{10} \tag{3.11}$$

such that with an appropriate order of the given l_1 and l_2, and with a suitable integer v_0 restricted by

$$\frac{L_1^2}{\log L_1} \leqq v_0 \leqq \frac{L_1^2}{\log L_1} + L_1^{1,16} \tag{3.12}$$

the inequality

$$\frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Re} \sum_{\chi} \left\{ (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \sum_{|t_\varrho| \leqq L_1}{}' \frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^\varrho}{\varrho^{v_0+1}} \right\} \geqq e_1\left(\frac{1}{30} L_1^2\right)$$

holds.

For the proof of this lemma see our paper [3] (see the corollary (9. 13) of Lemma VI there).

Finally we shall need the

LEMMA IV. *There is a connected path V in the vertical strip $\frac{1}{5} \leqq \sigma \leqq \frac{2}{5}$, symmetrical to the real axis, consisting alternately of horizontal and vertical segments and increasing monotonically from $-\infty$ to $+\infty$ such that on it for all $L(s, \chi)$-functions* mod k *the inequality*

$$\left| \frac{L'}{L}(s, \chi) \right| \leqq c_6 k \log^3 k(2 + |t|)$$

holds.

Since the proof is mutatis mutandis identical with that of Appendix III in the book of one of us (see TURÁN [1]), we shall omit it.

4. Next we turn to the proof of Theorem 1. 1. Let v_0, ω_0, L_1 and the order of l_1 and l_2 be defined as previously and let T satisfiy (1. 5). We define further T_1 by

$$T_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{T}{c_5 k^3} \cdot e_1(-2L_1^2). \tag{4.1}$$

Choosing in (1. 5) c_2 sufficiently large (in dependence upon c_5 and c_1) (2. 1) is with $\tau = T_1$ fulfilled and hence from Lemma I there is an y_1 with

$$\frac{1}{20} \log_2 T_1 \leqq y_1 \leqq \frac{1}{10} \log_2 T_1 \tag{4.2}$$

such that for all ϱ-zeros of all $L(s, \chi)$-functions mod k the inequalities

$$\pi \geqq \left| \arg \frac{e^{it_\varrho \frac{y_1}{2}}}{\varrho} \right| \geqq c_4 \frac{A(k)^3}{k(1 + |t_\varrho|)^6 \log^3 k(2 + |t_\varrho|)}, \tag{4.3}$$

$$\pi \geqq \left| \arg \frac{e^{it_\varrho y_1}}{\varrho} \right| \geqq c_4 \frac{A(k)^3}{k(1 + |t_\varrho|)^6 \log^3 k(2 + |t_\varrho|)} \tag{4.4}$$

hold. Let the integer v be temporarily restricted only by the inequality

$$\frac{\log T_1}{y_1} - \log^{0,9} T_1 \leqq v \leqq \frac{\log T_1}{y_1}. \tag{4.5}$$

If none of the congruences (1. 2) are soluble, the case is settled already in our paper [3]. If all solutions of the congruences (1. 2) are

$$x \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu \bmod k \qquad (\mu \geqq 1) \tag{4. 6}$$

and

$$x \equiv \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu \bmod k, \tag{4. 7}$$

respectively, then we start from the integral[4]

$$J(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \left(\frac{e^{y_1 s}}{s}\right)^{\nu} \frac{(\omega_0 L_1^{\nu_0})^s}{s^{\nu_0+1}} \cdot \frac{1}{\varphi(k)} \left\{ \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \cdot \right. \tag{4. 8}$$

$$\left. \cdot \frac{L'}{L}(s, \chi) - \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(\alpha_j) - \bar{\chi}(\beta_j)) \frac{L'}{L}(2s, \chi) \right\} ds.$$

Inserting the Dirichlet-series expansions we get

$$J(T) = \sum_{\substack{n \leqq e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0} \\ n = l_2 \bmod k}} \Lambda(n) \frac{\log^{\nu+\nu_0}\left(\dfrac{e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0}}{n}\right)}{(\nu+\nu_0)!} - \tag{4. 9}$$

$$- \sum_{\substack{n \leqq e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0} \\ n = l_1 \bmod k}} \Lambda(n) \frac{\log^{\nu+\nu_0}\left(\dfrac{e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0}}{n}\right)}{(\nu+\nu_0)!} + \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\substack{n \leqq e^{\frac{\nu y_1}{2}} \sqrt{\omega_0 L_1^{\nu_0}} \\ n \equiv \alpha_j \bmod k}} (\Lambda) n \frac{\log^{\nu+\nu_0} \dfrac{e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0}}{n^2}}{(\nu+\nu_0)!} -$$

$$- \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\substack{n \leqq e^{\frac{\nu y_1}{2}} \sqrt{\omega_0 L_1^{\nu_0}} \\ n \equiv \beta_j \bmod k}} \Lambda(n) \frac{\log^{\nu+\nu_0} \dfrac{e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0}}{n^2}}{(\nu+\nu_0)!}.$$

Let us observe that the contribution of the prime-squares to the first sum and that of the primes to the fourth one cancel, and analogous holds for the second and third sums. Hence

$$\left| J(T) - \left\{ \sum_{\substack{p \leqq e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0} \\ p \equiv l_2 \bmod k}} \log p \frac{\log^{\nu+\nu_0} \dfrac{e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0}}{p}}{(\nu+\nu_0)!} - \right. \right. \tag{4. 10}$$

$$\left. \left. - \sum_{\substack{p \leqq e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0} \\ p \equiv l_1 \bmod k}} \log p \frac{\log^{\nu+\nu_0} \dfrac{e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0}}{p}}{(\nu+\nu_0)!} \right\} \right| <$$

$$< c_7 \frac{\log^{\nu+\nu_0+1}(e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0})}{(\nu+\nu_0)!} \{(e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0})^{\frac{1}{3}} + k(e^{\nu y_1} \omega_0 L_1^{\nu_0})^{\frac{1}{4}}\}.$$

[4] By $(\omega_0 L_1^{\nu_0})^s$ we mean always $e_1\{s \log (\omega_0 L_1^{\nu_0})\}$ with the real value of the logarithm.

Since from (4. 5), (4. 1), (3. 11), (3. 10) and (3. 12) we have

$$e^{\nu y_1}\omega_0 L_1^{\nu_0} \leqq T, \tag{4. 11}$$

the expression in (4. 10) is owing to (1. 5)

$$< c_7 \frac{\log^{\nu+\nu_0+1} T}{(\nu+\nu_0)!}(T^{\frac{1}{3}} + kT^{\frac{1}{4}}) < c_8 T^{\frac{1}{3}} \frac{\log^{\nu+\nu_0+1} T}{(\nu+\nu_0)!} < \tag{4. 12}$$

$$< c_8 T^{\frac{1}{3}} \left(\frac{e \log T}{\nu}\right)^{\nu+\nu_0} \log T.$$

Taking into account (4. 2), (4. 5) and (1. 5) with a sufficiently large c_2 we get

$$\nu > 5 \frac{\log T_1}{\log_2 T_1} > e \frac{\log T}{\log_2 T}$$

and hence the expression in (4. 12) is

$$< c_8 T^{\frac{1}{3}} \log T (\log_2 T)^{\nu+\nu_0}. \tag{4. 13}$$

Since from (4. 5), (4. 2), (3. 12) and (1. 5) we have

$$\nu + \nu_0 < 20 \frac{\log T_1}{\log_2 T_1} + 2L_1^2 < 21 \frac{\log T}{\log_2 T}, \tag{4. 14}$$

choosing c_2 in (1. 5) sufficiently large, (4. 13) gives that the expression on the right of (4. 10) is

$$< c_9 T^{0,4} \tag{4. 15}$$

The expression in brackets on the left of (4. 10) is

$$= \int_1^{e^{\nu y_1}\omega_0 L_1^{\nu_0}} \log x \frac{\log^{\nu+\nu_0} \dfrac{e^{\nu y_1}\omega_0 L_1^{\nu_0}}{x}}{(\nu+\nu_0)!} d_x(\pi(x, k, l_2) - \pi(x, k, l_1))$$

and hence, putting

$$e^{\nu y_1}\omega_0 L_1^{\nu_0} \overset{\text{def}}{=} Y, \tag{4. 16}$$

after partial integration

$$= \int_1^Y (\pi(x, k, l_2) - \pi(x, k, l_1)) d_x \left(-\log x \cdot \frac{\log^{\nu+\nu_0} \dfrac{Y}{X}}{(\nu+\nu_0)!} \right) = \int_1^{Y_1} + \int_{Y_1}^Y \overset{\text{def}}{=} J_1 + J_2 \tag{4. 17}$$

with

$$Y_1 \overset{\text{def}}{=} Y^{\frac{1}{\nu+\nu_0+1}}. \tag{4. 18}$$

5. For the (trivial) estimation of $|J_1|$ from above we remark that the function

$$\log x \cdot \log^{\nu+\nu_0} \frac{Y}{X} \tag{5. 1}$$

increases for $1 \leqq x \leqq Y_1$ and decreases for $Y_1 \leqq x \leqq Y$. Hence

$$|J_1| \leqq Y_1 \log Y_1 \frac{\log^{\nu+\nu_0} \frac{Y}{Y_1}}{(\nu+\nu_0)!}. \tag{5. 2}$$

Since from (4. 16), (4. 11), (4. 18), (4. 5) and (4. 2) we have choosing c_2 sufficiently large in dependence of c_1

$$Y_1 \leqq T^{\frac{1}{\nu}} < \log T$$

and hence (roughly)

$$|J_1| \leqq \log^2 T \left(\frac{e \log T}{\nu} \right)^{\nu+\nu_0}$$

we get as in (4. 12)

$$|J_1| \leqq e_1 \left(21 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T} \right). \tag{5. 3}$$

Using again the remark in (5. 1) we have using (4. 11)

$$J_2 \leqq \log Y_1 \cdot \frac{\log^{\nu+\nu_0} \frac{Y}{Y_1}}{(\nu+\nu_0)!} \cdot \max_{x \leqq T} \{\pi(x, k, l_2) - \pi(x, k, l_1)\}$$

and hence from this, (4. 10), (4. 15) and (5. 3) we get

$$\log Y_1 \cdot \frac{\log^{\nu+\nu_0} \frac{Y}{Y_1}}{(\nu+\nu_0)!} \max_{x \leqq T} \{\pi(x, k, l_2) - \pi(x, k, l_1)\} \geqq J(T) - c_{10} T^{0,4} \tag{5. 4}$$

and analogously

$$\log Y_1 \cdot \frac{\log^{\nu+\nu_0} \frac{Y}{Y_1}}{(\nu+\nu_0)!} \min_{x \leqq T} \{\pi(x, k, l_2) - \pi(x, k, l_1)\} \leqq J(T) + c_{10} T^{0,4}. \tag{5. 5}$$

6. Since obviously $J(T)$ in (4. 8) can be written in the form

$$J(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \left(\frac{e^{y_1 s}}{s} \right)^{\nu} \frac{(\omega_0 L_1^{\nu_0})^s}{s^{\nu_0+1}} \cdot \frac{1}{\varphi(k)} \left\{ \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \cdot \frac{L'}{L}(s, \chi) \right\} ds +$$

$$+ \frac{2^{\nu+\nu_0}}{2\pi i} \int_{(2)} \left(\frac{e^{\frac{y_1}{2} s}}{s} \right)^{\nu} \frac{(\omega_0 L_1^{\nu_0})^{\frac{s}{2}}}{s^{\nu_0+1}} \cdot \frac{1}{\varphi(k)} \left\{ \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(\beta_j) - \bar{\chi}(\alpha_j)) \frac{L'}{L}(s, \chi) \right\} ds$$

the application of Cauchy's integral-theorem gives

$$(6.1)\qquad J(T)=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2))\sum_{\varrho(\chi)}'\frac{(\omega_0 L_1^{\nu_0})^{\varrho}}{\varrho^{\nu_0+1}}\cdot\left(\frac{e^{y_1\varrho}}{\varrho}\right)^{\nu}+$$

$$+\frac{2^{\nu_0}}{\varphi(k)}\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\chi}(\bar{\chi}(\beta_j)-\bar{\chi}(\alpha_j))\sum_{\varrho(\chi)}'\frac{(\omega_0 L_1^{\nu_0})^{\frac{\varrho}{2}}}{\varrho^{\nu_0+1}}\cdot\left(2\frac{e^{\frac{y_1}{2}\varrho}}{\varrho}\right)^{\nu}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(V)}\frac{Y^s}{s^{\nu+\nu_0+1}}\cdot\frac{1}{\varphi(k)}\left\{\sum_{\chi}(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2))\frac{L'}{L}(s,\chi)\right\}ds+$$

$$+\frac{2^{\nu+\nu_0}}{2\pi i}\int_{(V)}\frac{Y^{\frac{s}{2}}}{s^{\nu+\nu_0+1}}\cdot\frac{1}{\varphi(k)}\left\{\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\chi}(\bar{\chi}(\beta_j)-\bar{\chi}(\alpha_j))\frac{L'}{L}(s,\chi)\right\}ds,$$

where V is given by Lemma IV and the dash means that the summation refers to the non-trivial zeros right[5] to V. Using Lemma IV the two last integrals are absolutely

$$<c_{11}\{Y^{\frac{2}{5}}\cdot 5^{\nu+\nu_0}k\log^3 k+Y^{\frac{1}{5}}\cdot 10^{\nu+\nu_0}k^2\log^3 k\}$$

and hence using (4. 11), (4. 16) and (1. 5)

$$(6.2)\qquad <c_{12}T^{0,41}\cdot 10^{\nu+\nu_0}$$

if only c_2 in (1. 5) is sufficiently large. (4. 14) gives further from (6. 2) the upper bound

$$(6.3)\qquad c_{13}T^{0,42}.$$

We estimate roughly the contribution of the non-trivial zeros with

$$(6.4)\qquad |t_{\varrho}|>\log^{\frac{1}{10}}T_1$$

to the sums in (6. 1). Using the well-known[6] fact that the total-number of non-trivial zeros of L-functions mod k with imaginary parts between r and $r+1$ (r real) is

$$(6.5)\qquad \leqq c_{14}\varphi(k)\log k\,(2+|r|)$$

this contribution is absolutely

$$\leqq 2c_{14}\sum_{n\leqq[\log^{\frac{1}{10}}T_1]}\log kn\left(\frac{Y}{n^{\nu+\nu_0+1}}+2^{\nu+\nu_0}\frac{\sqrt{Y}}{n^{\nu+\nu_0+1}}\right)$$

and hence from (4. 14), (4. 16) and (4. 11)

$$<c_{15}\frac{T\log(k\log^{\frac{1}{10}}T_1)}{[\log T_1]^{\frac{\nu}{10}}}$$

[5] We remark that owing to the symmetry of V the sums occuring in (6. 1) are *real.*

[6] See PRACHAR [1].

and from (4. 2), (4. 5) and (1. 5) roughly

$$(6.\ 6) \qquad < c_{15}\frac{T}{T_1}e_1(2\log^{0,9}T\cdot\log_1 T) < c_{16}T^{0,42}$$

if only c_2 in (1. 5) is sufficiently large. If $\varrho_1 = \sigma_1 + it_1$ is a non-trivial zero of $L(s, \chi)$ with $\chi(l_1) \neq \chi(l_2)$ such that

$$(6.\ 7) \qquad |t_\varrho| \leqq \log^{\frac{1}{10}} T_1$$

and

$$\left|\frac{e^{y_1\varrho}}{\varrho}\right|$$

is maximal, (6. 1), (6. 3), (6. 6) and (5. 4) give the inequality[7]

$$(6.\ 8) \qquad \log Y_1 \cdot \frac{\log^{v+v_0}(Y)^{\frac{v+v_0}{v+v_0+1}}}{(v+v_0)!}\cdot \max_{x\leqq T}\{\pi(x,k,l_2)-\pi(x,k,l_1)\} \geqq$$

$$\geqq \left(\frac{e^{y_1\sigma_1}}{|\varrho_1|}\right)^v \left\{\frac{1}{\varphi(k)}\sum_\chi (\bar\chi(l_1)-\bar\chi(l_2))\sum''_{\varrho(\chi)} \frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^\varrho}{\varrho^{v_0+1}}\cdot\left(\frac{e^{y_1(\varrho-\sigma_1)}}{\varrho}|\varrho_1|\right)^v + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{v_0}}{\varphi(k)}\sum_{j=1}^{\mu}\sum_\chi (\bar\chi(\beta_j)-\bar\chi(\alpha_j))\sum''_{\varrho(\chi)} \frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^{\frac{\varrho}{2}}}{\varrho^{v_0+1}}\left(2\frac{e^{y_1\left(\frac{\varrho}{2}-\sigma_1\right)}}{\varrho}|\varrho_1|\right)^v\right\} - c_{17}T^{0,42}$$

and analogously from (5. 5) a reverse inequality for

$$\min_{x\leqq T}\{\pi(x,k,l_2)-\pi(x,k,l_1)\}.$$

We remark that the definition of ϱ_1 gives owing to the functional-equation

$$(6.\ 9) \qquad \sigma_1 \geqq \frac{1}{2}.$$

Further we shall use the known fact[8] that no $L(s, \chi)$ mod k vanishes for

$$(6.\ 10) \qquad \sigma > 1 - \frac{c_{18}}{\max\{\log k, \log^{4/5} k(2+|t|)\}} \qquad (t \neq 0).$$

This means owing to (1. 5), choosing c_2 sufficiently large that for our ϱ's

$$(6.\ 11) \qquad \sigma_\varrho \leqq 1 - \frac{c_{19}}{(\log_2 T_1)^{4/5}}$$

and owing to the functional-equation

$$(6.\ 12) \qquad \sigma_\varrho \geqq \frac{c_{19}}{(\log_2 T_1)^{4/5}}.$$

[7] The double dash means that the summation refers to the non-trivial zeros, right to V, satisfying the inequality (6. 7).

[8] See e. g. PRACHAR [1], p. 295.

7. The integer v was restricted so far only by (4. 5); we shall determine it exactly by Lemma II. Let us choose

$$m=\left[\frac{\log T_1}{y_1}-\log^{0,9}T_1\right]. \tag{7. 1}$$

We shall distinguish among the z_j's as „first class z_j's" the numbers

$$\frac{e^{y_1(\varrho-\sigma_1}}{\varrho}|\varrho_1|,$$

and as „second class z_j's" the numbers

$$2\frac{e^{y_1\left(\frac{\varrho}{2}-\sigma_1\right)}}{\varrho}|\varrho_1|.$$

Correspondingly we call „first class b_j's" the numbers

$$\frac{1}{\varphi(k)}\left(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2)\right)\frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^{\varrho}}{\varrho^{v_0+1}}$$

and „second class b_j's" the numbers

$$\frac{2^{v_0}}{\varphi(k)}\left(\bar{\chi}(\beta_j)-\bar{\chi}(\alpha_j)\right)\frac{(\omega_0 L_1^{v_0})^{\frac{\varrho}{2}}}{\varrho^{v_0+1}}.$$

It is trivial that $\max_j |z_j|=1$ among the z_j's of the first class; since

$$\left|2\frac{e^{y_1\left(\frac{\varrho}{2}-\sigma_1\right)}}{\varrho}|\varrho_1|\right|=2e^{-\frac{y_1\sigma_\varrho}{2}}\left|\frac{e^{y_1(\varrho-\sigma_1)}}{\varrho}|\varrho_1|\right|\leqq 2e^{-\frac{y_1\sigma_\varrho}{2}}$$

we get, using (6. 12), (4. 2) and (1. 5)

$$\left|2\frac{e^{y_1\left(\frac{\varrho}{2}-\sigma_1\right)}}{\varrho}|\varrho_1|\right|<2e_1\left\{-\frac{c_{19}}{40}(\log_2 T_1)^{\frac{1}{5}}\right\}<1$$

if only c_2 in (1. 5) is sufficiently large. Hence

$$\max_j |z_j|=1 \tag{7. 2}$$

is fulfilled. Owing to (6. 5) the total number n of our z_j's cannot exceed

$$c_{20}k\log^{\frac{1}{10}}T_1\cdot\log\left(2k\log^{\frac{1}{10}}T_1\right)$$

and hence owing to (1. 5), choosing c_2 sufficiently large, the inequality

$$n<\log^{\frac{1}{10}}T_1\cdot(\log_2 T_1)^3 \tag{7. 3}$$

holds. Owing to (4. 3)—(4. 4), choosing in (1. 5) c_2 sufficiently large we obtain at once that in (3. 2) we may choose

$$\varkappa = \log^{-\frac{2}{3}} T_1 . \tag{7. 4}$$

Next we have to choose the indices R and R_1. Let

$$\varrho_2 = \sigma_2 + it_2 \tag{7. 5}$$

be one of the non-trivial zeros of all $L(s, \chi)$-functions mod k with $\chi(l_1) \neq \chi(l_2)$ with the absolutely maximal imaginary part not exceeding L_1 and

$$\varrho_3 = \sigma_3 + it_3 \tag{7. 6}$$

that with the absolutely minimal t_ϱ for which[9]

$$(2L_1 \leqq)\, |t_3| \geqq L_1 + 1. \tag{7. 7}$$

Owing to (1. 3) we have

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{1}{2}. \tag{7. 8}$$

Let then be

$$z_h = \frac{e^{y_1(\varrho_2 - \sigma_1)}}{\varrho_2} |\varrho_1| \tag{7. 9}$$

$$z_{h_1} = \frac{e^{y_1(\varrho_3 - \sigma_1)}}{\varrho_3} |\varrho_1|. \tag{7. 10}$$

8. We assert that all z_j's of the second class are absolutely

$$\leqq |z_{h_1}|. \tag{8. 1}$$

Replacing their values, (8. 1) is equivalent with

$$2 \left| \frac{\varrho_3}{\varrho} \right| e^{y_1 \left(\frac{\sigma_\varrho}{2} - \sigma_3 \right)} \leqq 1 \tag{8. 2}$$

for all of our ϱ's. In order to prove it we remark that choosing c_2 in (1. 5) sufficiently large we have from (1. 5)

$$10 L_1 e_1 \left\{ -\frac{c_{18}}{40} (\log_2 T_1)^{\frac{1}{5}} \right\} < 1$$

and hence from (7. 7), (1. 5), (4. 2), (6. 7) and $|\varrho| \geqq \frac{1}{2}$

$$2 \left| \frac{\varrho_3}{\varrho} \right| e_1 \left(-\frac{c_{18}}{2} \cdot \frac{y_1}{\max \{\log k, \log^{4/5}(2 + |t_\varrho|)\}} \right) < 1$$

or owing to (7. 8)

$$2 \left| \frac{\varrho_3}{\varrho_1} \right| e_1 \left(y_1 \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_{18}}{\max \{\log k, \log^{4/5}(2 + |t_\varrho|)\}} \right) - \sigma_3 \right\} \right) < 1,$$

[9] The first, if c_1 in (3. 11) is sufficiently large.

what proves owing to (6. 10) the assertion (8. 2). *Hence all z_j's with index $\leqq h_1$ belong to the first class and B is defined by* (3. 4) (*not by* (3. 6)).

We have further to verify (3. 3) and (3. 5) for our choice (7. 9)—(7. 10). Since from (7. 4)

$$\frac{4n}{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} < 2\varkappa = 2\log^{-\frac{2}{3}} T_1,$$

it suffices to show owing to (4. 2), (6. 9) and (7. 8) that

$$\left|\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right| e_1 \left\{\frac{1}{10}\log_2 T_1 \left(\frac{1}{2}-\sigma_1\right)\right\} > 2\log^{-\frac{2}{3}} T_1$$

and owing to $\sigma_1 \leqq 1$, that

$$\left|\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right| > 2\log^{-\frac{1}{2}} T_1. \tag{8. 3}$$

But since (roughly)

$$|\varrho_1| \geqq \frac{1}{2}, \quad |\varrho_2| \leqq 1+\log^{\frac{1}{10}} T_1,$$

(8. 3) follows from (1. 5) if c_2 is sufficiently large. Hence (3. 3) is verified in our case.

In order to verify (3. 5) we write it in the form (taking in account (7. 9)—(7. 10) and (7. 8))

$$|\varrho_1|\left(\frac{1}{|\varrho_2|}-\frac{1}{|\varrho_3|}\right) > \frac{2n}{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} e_1\left\{y_1\left(\sigma_1-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

what is certainly true owing to (7. 4) and (4. 2) if

$$|\varrho_1|\left(\frac{1}{|\varrho_2|}-\frac{1}{|\varrho_3|}\right) > \log^{-\frac{1}{2}} T_1$$

or

$$|\varrho_1|\frac{|\varrho_3|-|\varrho_2|}{|\varrho_2|\,|\varrho_3|} > \log^{-\frac{1}{2}} T_1.$$

But this is true owing to (1. 5), choosing c_2 sufficiently large, since

$$|\varrho_3|-|\varrho_2| \geqq 1$$

$$\frac{1}{|\varrho_2|\,|\varrho_3|} \geqq \frac{1}{4L_1^2}, \quad |\varrho_1| \geqq \frac{1}{2}.$$

Hence Lemma II is applicable to our sum if the interval $\left(m+1, m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)$ is contained in the interval

$$\left(\frac{\log T_1}{y_1}-\log^{0,9} T_1, \frac{\log T_1}{y_1}\right)$$

(so that the requirement (4. 5) be fulfilled). Obviously it is enough to show that

$$n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right) \leqq \log^{0,9} T_1$$

and this follows at once from (7. 3) and (7. 4) if only c_2 in (1. 5) is sufficiently large. Thus we have to estimate B in (3. 4) from below. This is owing to (8. 1) a sum of the form

$$\frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Re} \sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)\right) \sum\nolimits'''_{\varrho(\chi)} \frac{(\omega_0 L_1^{\nu_0})^{\varrho}}{\varrho^{\nu_0+1}}$$

where the summation is extended to the non-trivial zeros of $L(s, \chi)$ right to V with $|t_\varrho| \leqq L_1$, and also to *some* with

$$L_1 < |t_\varrho| \leqq \log^{\frac{1}{10}} T_1 .$$

Replacing this sum by

$$\frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Re} \sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)\right) \sum_{|t_\varrho| \leqq L_1} \sum\nolimits_{\varrho(\chi)} \frac{(\omega_0 L_1^{\nu_0})^{\varrho}}{\varrho^{\nu_0+1}}$$

and taking in account (6. 5), the error is absolutely less than

$$c_{21} \log(kL_1)\omega_0 \cdot 2^{\nu_0} < e_1\left(2\frac{L_1^2}{\log L_1}\right)$$

owing to the definition of L_1, ω_0 and ν_0, if only c_1 is sufficiently large. But then Lemma III gives the estimation

$$B \geqq e_1\left(\frac{1}{30} L_1^2\right) - e_1\left(2\frac{L_1^2}{\log L_1}\right) > 1, \tag{8. 4}$$

if only c_1 is sufificiently large. Hence Lemma II gives the existence of integers ν_1 and ν_2 with

$$\frac{\log T_1}{y_1} - \log^{0,9} T_1 \leqq \nu_1 \leqq , \quad \nu_2 \leqq \frac{\log T_1}{y_1} \tag{8. 5}$$

such that the expression $D(\nu)$ in curly bracket on the right of (6. 8) (taking in account its *reality* and (7. 3), (7. 4), (1. 5)) is for $\nu = \nu_1$

$$> \frac{1}{3} \log^{-\frac{1}{10}} T_1 \cdot (\log_2 T_1)^{-3} \left\{ \frac{1}{24\left(\log T_1 + n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)} \right\}^{\log^{\frac{1}{10}} T_1 \cdot (\log_2 T_1)^3} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} .$$

Hence owing to the previous estimation

$$|z_h| > 2 \log^{-\frac{2}{3}} T_1$$

we get using also (7. 9), (7. 1) and (1. 5)

$$D(v_1) > e_1(-\log^{\frac{1}{2}} T_1)\left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{v_1} \cdot (\log^{-\frac{2}{3}} T_1)^{n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} >$$

$$> e_1(-\log^{\frac{4}{5}} T_1)\left(\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-\sigma_1\right)y_1}}{2|\varrho_2|}|\varrho_1|\right)^{v_1}.$$

Putting it into (6. 8) we get for the right side the lower bound

$$\frac{e^{\frac{v_1 y_1}{2}}}{(2|\varrho_2|)^{v_1}} \cdot e_1(-\log^{\frac{4}{5}} T_1) - c_{17} T^{0,42} > \sqrt{T_1}\, e_1\left(-21\frac{\log T_1 \log_3 T_1}{\log_2 T_1}\right) - c_{17} T^{0,42}.$$

Taking in account that from (4. 18), (4. 16), (4. 11), (4. 14), (4. 5), (4. 2) and also (1. 5) with sufficiently large c_2

$$\log Y_1 \frac{\log^{v_1+v_0}\left(Y^{\frac{v_1+v_0}{v_1+v_0+1}}\right)}{(v_1+v_0)!} < c_{22} \log T_1 \cdot \left(\frac{e}{v_1}\log T_1\right)^{v_1+v_0} < e_1\left(22\frac{\log T_1 \log_3 T_1}{\log_2 T_1}\right)$$

and also from (4. 1) and (1. 5)

$$T_1 > T e_1(-\log^{\frac{1}{2}} T)$$

the first part of the Theorem follows at once. Analogously the second part, choosing $v = v_2$.

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE UNIVERSITY ADAM MICZKIEWICZ,
POZNAN

MATHEMATICAL INSTITUTE,
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY,
BUDAPEST

(Received 20 January 1962)

References

S. KNAPOWSKI and P. TURÁN [1], Comparative prime-number theory. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), pp. 315–342.
[2], Comparative prime-number theory. III, *ibid*, pp. 343–364.
[3], Comparative prime-number theory. V, *ibid*, **14** (1963), pp. 43–63.
K. PRACHAR [1], *Primzahlverteilung* (Springer Verl., 1957).
P. TURÁN [1], *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Akad. Kiadó (Budapest, 1953). A completely rewritten English edition will appear in the Interscience Tracts series.

ON THE MAXIMAL NUMBER OF INDEPENDENT CIRCUITS IN A GRAPH

By

G. DIRAC (Hamburg) and P. ERDŐS (Budapest), member of the Academy

1. Introduction

In a recent paper [1] K. CORRÁDI and A. HAJNAL proved that if a finite graph without multiple edges contains at least $3k$ vertices and the valency of every vertex is at least $2k$, where k is a positive integer, then the graph contains k independent circuits, i. e. the graph contains as a subgraph a set of k circuits no two of which have a vertex in common. The present paper contains extensions of this theorem. In a recent paper [2] P. ERDŐS and L. PÓSA proved, among other things, that if a finite graph with or without loops and multiple edges contains n vertices and at least $n+4$ edges, then the graph contains two circuits without an edge in common. The present paper contains analogous results for planar graphs.

We adopt the following notation: $\bigcirc^k$ denotes a graph consisting of k independent circuits, $k\bigcirc$ denotes a graph consisting of k or more circuits no two of which have an edge in common. If $\mathcal{G}$ is a graph then $\mathfrak{V}(\mathcal{G})$ denotes the set of vertices of $\mathcal{G}$, $\mathfrak{V}_i(\mathcal{G})$ denotes the set of vertices of $\mathcal{G}$ having valency i in $\mathcal{G}$ (i being a non-negative integer), $\mathfrak{V}_{\leqq i}(\mathcal{G})$, $\mathfrak{V}_{\geqq i}(\mathcal{G})$ denote the set of vertices of $\mathcal{G}$ having valency $\leqq i$ and $\geqq i$, respectively, and $\mathfrak{E}(\mathcal{G})$ denotes the set of edges of $\mathcal{G}$. The valency of the vertex x in the graph $\mathcal{G}$ will be denoted by $v(x, \mathcal{G})$. $|\mathfrak{V}(\mathcal{G})|$ will be denoted by $V(\mathcal{G})$, $|\mathfrak{E}(\mathcal{G})|$ by $E(\mathcal{G})$ etc.

In this notation the theorem of CORRÁDI and HAJNAL quoted above states that if $\mathcal{G}$ is a finite graph without multiple edges and if $V(\mathcal{G}) \geqq 3k$ and $\mathfrak{V}_{\leqq 2k-1}(\mathcal{G}) = 0$, then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^k$; and the theorem of ERDŐS and PÓSA quoted above states that if $\mathcal{G}$ is a finite graph and $E(\mathcal{G}) \geqq V(\mathcal{G}) + 4$, then $\mathcal{G} \supset 2\bigcirc$.

2. Concerning the existence of two independent circuits in finite graphs without multiple edges

THEOREM 1. *Let $\mathcal{G}$ denote a finite graph without loops or multiple edges.*

I. *If $V(\mathcal{G}) \geqq 6$, $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) = 0$, and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq 4$, then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$.*

II. *If $V(\mathcal{G}) = 7$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq 6$, then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$.*

III. *If $V(\mathcal{G}) = 8$, $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq 6$, and if $\mathcal{G}$ does not contain a vertex having valency 4 joined to two vertices having valency 1 then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$.*

IV. *If $V(\mathcal{G}) \geqq 9$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq \frac{1}{2}V(\mathcal{G}) + 2$, then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$.*

V. *If $V(\mathcal{G}) \geqq 9$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) - V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) \geqq 4$, then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$.*

VI. *If* $V(\mathcal{G})=7$, $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})=5$, *and* $V_2(\mathcal{G})=V_3(\mathcal{G})=1$, *then* $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$.

VII. *If* $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})=5$, $V_3(\mathcal{G})=2$, *and* $V_{\leqq 2}(\mathcal{G})=1$, *then* $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$.

DEFINITION. A graph *barely satisfies* the conditions of I, III, IV, or Theorem 3, if it satisfies the conditions of I, III, IV, or Theorem 3, respectively, but when any one of its edges is deleted the remaining graph no longer does so.

It is easy to see that

(1) *If a graph satisfies the conditions of I or III or IV then it contains a subgraph having the same vertices which barely satisfies them.*

PROOF OF I. Suppose first that $V(\mathcal{G})=6$. Let the vertices of $\mathcal{G}$ be denoted by $g_1, g_2, \ldots, g_6$. The following two alternatives will be considered separately: (i) $\mathcal{G}$ contains two vertices of valency $\geqq 4$ not joined by an edge. (ii) Each pair of vertices of valency $\geqq 4$ are joined by an edge.

Assuming that (i) holds, it may be supposed that $v(g_1,\mathcal{G})\geqq 4$, $v(g_2,\mathcal{G})\geqq 4$ and $(g_1,g_2)\notin\mathcal{G}$. Then g_1 and g_2 are both joined to each of g_3, g_4, g_5, g_6. $V_0(\mathcal{G}-g_1-g_2)=0$ because $V_{\leqq 2}(\mathcal{G})=0$, and $V_{\geqq 2}(\mathcal{G}-g_1-g_2)\geqq 2$ because $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})\geqq 4$; it follows that $\mathcal{G}-g_1-g_2$ contains two edges without a common vertex, and hence $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$.

Assuming that (ii) holds, it may be supposed that g_1, g_2, g_3, g_4 each have valency $\geqq 4$. Each of them is joined to at least one of g_5 and g_6 and g_5 and g_6 are each joined to at least two of g_1, g_2, g_3, g_4. The three alternatives that g_5 is joined to exactly two, three or four of g_1, g_2, g_3, g_4 will be considered in turn: If $(g_5,g_1)\in\mathcal{G}$, $(g_5,g_2)\in\mathcal{G}$, $(g_5,g_3)\notin\mathcal{G}$ and $(g_5,g_4)\notin\mathcal{G}$ then $(g_6,g_3)\in\mathcal{G}$ and $(g_6,g_4)\in\mathcal{G}$, so in this case $\mathcal{G}$ contains the two independent circuits $[g_1,g_2,g_5]$ and $[g_3,g_4,g_6]$. If $(g_5,g_1)\in\mathcal{G}$, $(g_5,g_2)\in\mathcal{G}$, $(g_5,g_3)\in\mathcal{G}$ and $(g_5,g_4)\notin\mathcal{G}$, then $(g_6,g_4)\in\mathcal{G}$, and it may be supposed that $(g_6,g_1)\in\mathcal{G}$ (for $v(g_6,\mathcal{G})\geqq 3$), in this case $\mathcal{G}$ contains the two independent circuits $[g_2,g_3,g_5]$ and $[g_1,g_4,g_6]$. If $(g_5,g_i)\in\mathcal{G}$ for $i=1,2,3,4$, then it may be supposed that $(g_6,g_1)\in\mathcal{G}$ and $(g_6,g_2)\in\mathcal{G}$ (for $v(g_6,\mathcal{G})\geqq 3$) and in this case $\mathcal{G}$ contains the two independent circuits $[g_3,g_4,g_5]$ and $[g_1,g_2,g_6]$. Hence $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$ if (ii) holds. So I is true in the case $V(\mathcal{G})=6$.

The proof of I will now be completed by *reductio ad absurdum*. Assume that I is untrue. Then by (1) there exists a graph $\mathcal{G}_0$ with the following properties: $\mathcal{G}_0$ barely satisfies the conditions of I and $\mathcal{G}_0\not\supset\bigcirc^2$, and all graphs which satisfy the conditions of I and contain fewer vertices then $\mathcal{G}_0$ contain two independent circuits. $V(\mathcal{G}_0)\geqq 7$ because I is true for graphs with six vertices.

It is easy to see that

(2) *If a graph barely satisfies the conditions of* I *then at least one of the end-vertices of every edge has valency* 3 *or* 4, *and at least one vertex has valency* 3.

Let d denote a vertex of $\mathcal{G}_0$ having valency 3, and let d_1, d_2, d_3 denote the three vertices of $\mathcal{G}_0$ to which d is joined. The three alternatives $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \leqq 1$, $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) = 2$, $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) = 3$ will be considered separately.

Assuming that $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \leqq 1$, it may be supposed that $(d_1, d_3) \notin \mathcal{G}_0$ and $(d_2, d_3) \notin \mathcal{G}_0$. Let $\mathcal{G}' = (\mathcal{G}_0 - d) \cup (d_1, d_3) \cup (d_2, d_3)$. $\mathcal{G}'$ satisfies the conditions of I. Hence $\mathcal{G}' \supset \bigcirc^2$ because of the minimal nature of $\mathcal{G}_0$. It follows that $\mathcal{G}_0 \supset \bigcirc^2$. ($(d_1, d_3)$ can be replaced by $d \cup (d, d_1) \cup (d, d_3)$ if necessary, alternatively $d_3 \cup \cup (d_1, d_3) \cup (d_2, d_3)$ can be replaced by $d \cup (d, d_1) \cup (d, d_2)$ if necessary. This argument is used in [2].) This contradicts $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^2$.

Assuming that $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) = 2$, it may be supposed that $(d_1, d_2) \in \mathcal{G}_0$, $(d_1, d_3) \in \mathcal{G}_0$ and $(d_2, d_3) \notin \mathcal{G}_0$. There are two alternatives: $v(d_1, \mathcal{G}_0) \geqq 5$ and $v(d_1, \mathcal{G}_0) \leqq 4$. If $v(d_1, \mathcal{G}_0) \geqq 5$ then $(\mathcal{G}_0 - d) \cup (d_2, d_3)$ satisfies the conditions of I, and therefore contains two independent circuits because of the minimal nature of $\mathcal{G}_0$; it follows that $\mathcal{G}_0 \supset \bigcirc^2$ (replacing (d_2, d_3) by $d \cup (d, d_2) \cup (d, d_3)$ if necessary; this argument is used in [2]), in contradiction to $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^2$. If $v(d_1, \mathcal{G}_0) \leqq 4$ then a contradiction is arrived at as follows: $\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3 \not\supset \bigcirc$, so if it has ν connected components then it contains at most $V(\mathcal{G}_0) - 4 - \nu$ edges. Hence $E(\mathcal{G}_0) \leqq$ $\leqq V(\mathcal{G}_0) - 4 - \nu + v(d_2, \mathcal{G}_0) + v(d_3, \mathcal{G}_0) + 2$ (since $v(d_1, \mathcal{G}_0) \leqq 4$). On the other hand, summing the valencies of all the vertices of $\mathcal{G}_0$, $2E(\mathcal{G}_0) \geqq v(d_2, \mathcal{G}_0) + v(d_3, \mathcal{G}_0) +$ $+ 8 + 3(V(\mathcal{G}_0) - 4)$. From the two inequalities it follows that $V(\mathcal{G}_0) \leqq v(d_2, \mathcal{G}_0) +$ $+ v(d_3, \mathcal{G}_0) - 2\nu$. But d_2 and d_3 are each joined to at most one vertex of each connected component of $\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3$ because $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^2$, so $v(d_2, \mathcal{G}_0) \leqq \nu + 2$ and $v(d_3, \mathcal{G}_0) \leqq \nu + 2$. Hence $V(\mathcal{G}_0) \leqq 4$ which is a contradiction.

The only remaining alternative is that $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) = 3$. By (2) it may be assumed that $v(d_1, \mathcal{G}_0) \leqq 4$ and $v(d_2, \mathcal{G}_0) \leqq 4$. $\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3 \not\supset \bigcirc$ so $E(\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3) \leqq V(\mathcal{G}_0) - 5$. Consequently $E(\mathcal{G}_0) \leqq V(\mathcal{G}_0) + v(d_3, \mathcal{G}_0)$. On the other hand, summing the valencies of all the vertices of $\mathcal{G}_0$, $2E(\mathcal{G}_0) \geqq v(d_3, \mathcal{G}_0) +$ $+ 12 + 3(V(\mathcal{G}_0) - 4) = 3V(\mathcal{G}_0) + v(d_3, \mathcal{G}_0)$. From the two inequalities it follows that $v(d_3, \mathcal{G}_0) \geqq V(\mathcal{G}_0)$, which is absurd because $\mathcal{G}_0$ contains no loops or multiple edges.

The hypothesis that I is untrue leads to a contradiction, therefore I is true.

PROOF OF II. If $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) = 0$ then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$ by I. If $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) \neq 0$ then $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) = 1$. Suppose that $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) = 1$ and let v denote a vertex having valency $\leqq 2$. Then $V(\mathcal{G} - v) = 6$, $V_{\leqq 2}(\mathcal{G} - v) = 0$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G} - v) \geqq 4$. Therefore $\mathcal{G} - v \supset \bigcirc^2$ by I.

PROOF OF III. By (1) in order to prove III it is sufficient to prove it for graphs which barely satisfy its conditions. Let $\mathcal{G}$ denote a graph which barely satisfies the conditions of III.

(3) $V_{\leqq 3}(\mathcal{G}) \geqq 1$.

For if $V_{\geqq 3}(\mathcal{G})=0$ then the graph obtained by deleting any one edge from $\mathcal{G}$ satisfies the conditions of III.

If $V_0(\mathcal{G})\geqq 1$ *then* $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$.

For if a is a vertex of $\mathcal{G}$ having valency 0 then $V(\mathcal{G}-a)=7$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}-a)\geqq 6$, so $\mathcal{G}-a\supset\bigcirc^2$ by II. *In the remainder of the proof of* III *suppose that* $V_0(\mathcal{G})=0$.

If $V_2(\mathcal{G})\geqq 1$ *then it follows that* $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$.

For suppose that c is a vertex of $\mathcal{G}$ having valency 2 and is joined to the vertices c_1 and c_2. Either $(c_1, c_2)\notin\mathcal{G}$ or $(c_1, c_2)\in\mathcal{G}$. If $(c_1, c_2)\notin\mathcal{G}$ then let $\mathcal{G}'=(\mathcal{G}-c)\cup\cup(c_1, c_2)$. $V(\mathcal{G}')=7$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})\geqq 6$, consequently $\mathcal{G}'\supset\bigcirc^2$ by II. It follows that $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$. ($(c_1, c_2)$ can be replaced by $c\cup(c, c_1)\cup(c, c_2)$ if necessary. This argument is used in [2].)

Suppose that $(c_1, c_2)\in\mathcal{G}$. If $v(c_1, \mathcal{G})\geqq 5$ and $v(c_2, \mathcal{G})\geqq 5$, then $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}-c)=$ $=V_{\geqq 4}(\mathcal{G})\geqq 6$ and $V(\mathcal{G}-c)=7$, so $\mathcal{G}-c\supset\bigcirc^2$ by II. There remains the alternative that $v(c_1, \mathcal{G})\leqq 4$ or $v(c_2, \mathcal{G})\leqq 4$, let it be assumed that $v(c_1, \mathcal{G})\leqq 4$. It follows that $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$. For suppose on the contrary that $\mathcal{G}\not\supset\bigcirc^2$. Then $E(\mathcal{G}-c-c_1-c_2)\leqq 4$ because $\mathcal{G}-c-c_1-c_2\not\supset\bigcirc$. Hence $E(\mathcal{G})\leqq 4+v(c_1, \mathcal{G})-2+v(c_2, \mathcal{G})-2+3\leqq$ $\leqq 7+v(c_2, \mathcal{G})$. On the other hand, summing the valencies of all the vertices of $\mathcal{G}$, $2E(\mathcal{G})\geqq 5\cdot 4+v(c_2, \mathcal{G})+2 = 22+v(c_2, \mathcal{G})$ since $v(c, \mathcal{G})=2$ and $V_0(\mathcal{G})=0$. From the two inequalities it follows that $v(c_2, \mathcal{G})\geqq 8$ which is absurd because $\mathcal{G}$ contains no loops or multiple edges. Hence $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$ if $V_2(\mathcal{G})\geqq 1$. *In the remainder of the proof of* III *suppose that* $V_2(\mathcal{G})=0$.

If $V_3(\mathcal{G})\geqq 1$ *then it follows that* $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$.

For suppose that d is a vertex of $\mathcal{G}$ having valency 3 and is joined to the vertices d_1, d_2 and d_3. The two alternatives $E(\mathcal{G}(d_1, d_2, d_3))\leqq 1$ and $E(\mathcal{G}(d_1, d_2, d_3))\geqq 2$ will be considered separately.

Assuming that $E(\mathcal{G}(d_1, d_2, d_3))\leqq 1$, it may be supposed that $(d_1, d_3)\notin\mathcal{G}$ and $(d_2, d_3)\notin G$. Let $\mathcal{G}'=(\mathcal{G}-d)\cup(d_1, d_3)\cup(d_2, d_3)$. Clearly $V(\mathcal{G}')=7$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}')\geqq$ $\geqq V_{\geqq 4}(\mathcal{G})\geqq 6$, so $\mathcal{G}'\supset\bigcirc^2$ by II. It follows as in the proof of I that $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$.

Assuming that $E(\mathcal{G}(d_1, d_2, d_3))\geqq 2$, it may be supposed that $(d_1, d_2)\in\mathcal{G}$ and $(d_1, d_3)\in\mathcal{G}$. If any edge incident with d is deleted from $\mathcal{G}$ then the remaining graph does not contain two vertices of valency 1, therefore the remaining graph contains only five vertices of valency $\geqq 4$, since $\mathcal{G}$ barely satisfies the conditions of III. Consequently $v(d_1, \mathcal{G})=v(d_2, \mathcal{G})=v(d_3, \mathcal{G})=4$. It follows that $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$. For suppose on the contrary that $\mathcal{G}\not\supset\bigcirc^2$. Then $E(\mathcal{G}-d-d_1-d_2-d_3)\leqq 3$ because $\mathcal{G}-d-d_1-$ $-d_2-d_3\not\supset\bigcirc$. Hence $E(\mathcal{G})\leqq 3+5+5 = 13$. On the other hand, summing the valencies of all the vertices of $\mathcal{G}$, $2E(\mathcal{G})\geqq 6\cdot 4+3 = 27$, since $v(d, \mathcal{G})=3$. This contradiction proves that $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$ if $V_3(\mathcal{G})\geqq 1$.

It thus remains only to consider the case in which $V_i(\mathcal{G})=0$ *for* $i=0, 2$ *and* 3. By (3) there are then two alternatives: $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})=7$ and $V_1(\mathcal{G})=1$, or else $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})=6$ and $V_1(\mathcal{G})=2$.

Assume first that $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})=7$ and $V_1(\mathcal{G})=1$. Let b denote the vertex of $\mathcal{G}$ having valency 1. Then $V(\mathcal{G}-b)=7$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}-b)\geqq 6$. Therefore by II $\mathcal{G}-b\supset\bigcirc^2$.

Assume next that $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})=6$ and $V_1(\mathcal{G})=2$. Let b and b' denote the vertices of $\mathcal{G}$ having valency 1. Either b and b' are both joined to the same vertex, or they are not. If b and b' are both joined to the same vertex b_1 say, then it follows from the conditions of III that $v(b_1, \mathcal{G})\geqq 5$. Therefore $\mathcal{G}-(b, b_1)$ satisfies the conditions of III, in contradiction to the definition of $\mathcal{G}$. Hence b and b' are not both joined to the same vertex. Therefore $V(\mathcal{G}-b-b')=6$, $V_{\geqq 2}(\mathcal{G}-b-b')=0$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}-b-b')\geqq 4$. Consequently by I $\mathcal{G}-b-b'\supset\bigcirc^2$. III is now proved.

PROOF OF IV by *reductio ad absurdum*. Assume that IV is untrue. Then by (1) there exists a graph $\mathcal{G}_0$ with the following properties: $\mathcal{G}_0$ barely satisfies the conditions of IV and $\mathcal{G}_0\not\supset\bigcirc^2$, and all graphs which satisfy the conditions of IV and have fewer vertices than $\mathcal{G}_0$ contain two independent circuits.

(4) *At least one end-vertex of every edge contained in* $\mathcal{G}_0$ *has valency* 4, *and* $V_{\geqq 3}(\mathcal{G}_0)\geqq 1$.

For, since $\mathcal{G}_0$ barely satisfies the conditions of IV, if any edge is deleted from $\mathcal{G}_0$ the number of vertices of valency $\geqq 4$ is decreased; and if $V_{\geqq 3}(\mathcal{G}_0)=0$ then if any edge is deleted from $\mathcal{G}_0$, the remaining graph satisfies the conditions of IV, which contradicts the hypothesis that $\mathcal{G}_0$ barely satisfies the conditions of IV.

By summing the valencies of all the vertices of $\mathcal{G}_0$ we have that

(5) *If* $V_0(\mathcal{G}_0)=0$ *then* $E(\mathcal{G}_0)\geqq 1\frac{1}{4}V(\mathcal{G}_0)+3$, *if* $V_0(\mathcal{G}_0)=0$ *and* $V_2(\mathcal{G}_0)\geqq 1$, *then* $E(\mathcal{G}_0)\geqq 1\frac{1}{4}V(\mathcal{G}_0)+3\frac{1}{2}$, *and if* $V_0(\mathcal{G}_0)=0$ *and* $V_3(\mathcal{G}_0)\geqq 1$, *then* $E(\mathcal{G}_0)\geqq 1\frac{1}{4}V(\mathcal{G}_0)+4$.

It will now be proved that $V_i(\mathcal{G}_0)=0$ for $i=0, 2, 3$.

(6) $V_0(\mathcal{G}_0)=0$.

For suppose on the contrary that the vertex a of $\mathcal{G}_0$ has valency 0. If $V(\mathcal{G}_0)=9$ then $V(\mathcal{G}_0-a)=8$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0-a)\geqq 7$, so by III $\mathcal{G}_0-a\supset\bigcirc^2$, contrary to $\mathcal{G}_0\not\supset\bigcirc^2$ If $V(\mathcal{G}_0)\geqq 10$, then $\mathcal{G}_0-a$ satisfies the conditions of IV, and so $\mathcal{G}_0-a\supset\bigcirc^2$ because of the minimal property of $\mathcal{G}_0$ whereas $\mathcal{G}_0\not\supset\bigcirc^2$. Hence $V_0(\mathcal{G}_0)=0$.

(7) $V_2(\mathcal{G}_0)=0$.

For suppose on the contrary that the vertex c of $\mathcal{G}_0$ has valency 2 and is joined to the vertices c_1 and c_2. The two alternatives $(c_1, c_2)\notin\mathcal{G}_0$ and $(c_1, c_2)\in\mathcal{G}_0$ will be considered in turn and a contradiction will be derived in each case. If $(c_1, c_2)\notin\mathcal{G}_0$ then let $\mathcal{G}'=(\mathcal{G}_0-c)\cup(c_1, c_2)$. Clearly $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}')=V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0)$. If $V(\mathcal{G}_0)=9$ then $V(\mathcal{G}')=8$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}')\geqq 7$, consequently $\mathcal{G}'\supset\bigcirc^2$ by III, if $V(\mathcal{G}_0)\geqq 10$ then $\mathcal{G}'$ satisfies the conditions of IV, so $\mathcal{G}'\supset\bigcirc^2$ because of the minimal property of $\mathcal{G}_0$. From $\mathcal{G}'\supset\bigcirc^2$ it follows as in the proof of III that $\mathcal{G}_0\supset\bigcirc^2$, whereas $\mathcal{G}_0\not\supset\bigcirc^2$. Suppose next that $(c_1, c_2)\in\mathcal{G}_0$. By (4) $v(c_1, \mathcal{G}_0)=v(c_2, \mathcal{G}_0)=4$. $E(\mathcal{G}_0-c-c_1-c_2)\leqq$

$\leqq V(\mathcal{G}_0)-4$ because $\mathcal{G}_0-c-c_1-c_2 \not\supset \bigcirc$. It follows that $E(\mathcal{G}) \leqq V(\mathcal{G}_0)+3$, which contradicts (5). Hence $V_2(\mathcal{G}_0)=0$.

(8) $V_3(\mathcal{G}_0)=0$.

For suppose on the contrary that the vertex d of $\mathcal{G}_0$ has valency 3 and is joined to the vertices d_1, d_2 and d_3. The two alternatives $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \leqq 1$ and $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \geqq 2$ will be considered in turn and a contradiction derived in each case.

Assuming that $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \leqq 1$, it may be supposed that $(d_1, d_3) \notin \mathcal{G}_0$ and $(d_2, d_3) \notin \mathcal{G}_0$. Let $\mathcal{G}' = (\mathcal{G}_0 - d) \cup (d_1, d_3) \cup (d_2, d_3)$. Clearly $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}') \geqq V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0)$. If $V(\mathcal{G}_0)=9$ then $V(\mathcal{G}')=8$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}') \geqq 7$, and consequently $\mathcal{G}' \supset \bigcirc^2$ by III; if $V(\mathcal{G}_0) \geqq 10$ then $\mathcal{G}'$ satisfies the conditions of IV, and consequently $\mathcal{G}' \supset \bigcirc^2$ because of the minimal property of $\mathcal{G}_0$. From $\mathcal{G}' \supset \bigcirc^2$ it follows as in the proof of I that $\mathcal{G}_0 \supset \bigcirc^2$, whereas $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^2$. There remains the alternative that $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \geqq 2$. By (4) $v(d_1, \mathcal{G}_0) = v(d_2, \mathcal{G}_0) = v(d_3, \mathcal{G}_0) = 4$. $E(\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3) \leqq V(\mathcal{G}_0) - 5$ because $\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3 \not\supset \bigcirc$. It follows that $E(\mathcal{G}_0) \leqq V(\mathcal{G}_0)+5$, which contradicts (5). Hence $V_3(\mathcal{G}_0)=0$.

From the conditions of IV it follows that $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0) \geqq 7$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0) - V_{\leqq 3}(\mathcal{G}_0) \geqq 4$. By (6), (7) and (8) $V(\mathcal{G}_0) = V_1(\mathcal{G}_0) + V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0)$ and by (4) each vertex of valency 1 is joined to a vertex of valency 4. Let $\mathcal{G}''$ denote the graph obtained by deleting all vertices of valency 1 from $\mathcal{G}$. Clearly $V(\mathcal{G}'') = V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0) \geqq 7$, $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}'') = V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0) - V_1(\mathcal{G}_0) \geqq 4$ and $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}'')=0$. Therefore by I $\mathcal{G}'' \supset \bigcirc^2$, whereas $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^2$. This contradiction proves IV.

PROOF OF V. If $V_3(\mathcal{G})=0$ then $V(\mathcal{G}) = V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) + V_{\geqq 4}(\mathcal{G})$ and so $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq \frac{1}{2} V(\mathcal{G}) + 2$; hence by IV $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$. Suppose that $V_3(\mathcal{G}) \geqq 1$, and let $x_1, \ldots, x_u$ denote the vertices having valency 3 in $\mathcal{G}$. Let $y_1, \ldots, y_u$ be u distinct vertices none of which belong to $\mathcal{G}$, and let $\mathcal{G}^* = \mathcal{G} \cup \{y_1, \ldots, y_u\} \cup (x_1, y_1) \cup \ldots \cup (x_u, y_u)$. Clearly $V(\mathcal{G}^*) = V(\mathcal{G}) + u = V(\mathcal{G}) + V_3(\mathcal{G})$; $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}^*) = V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) + V_3(\mathcal{G})$; $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}^*) = V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) + V_3(\mathcal{G})$. Hence $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}^*) \geqq V_{\leqq 2}(\mathcal{G}^*) + 4$, since $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) + 4$. Also $V_3(\mathcal{G}^*)=0$. It follows that $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}^*) \geqq \frac{1}{2} V(\mathcal{G}^*) + 2$. Hence by IV $\mathcal{G}^* \supset \bigcirc^2$, consequently $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$. This proves V.

PROOF OF VI. Let the vertices of $\mathcal{G}$ be $g_1, g_2, \ldots, g_7$, where $v(g_1, \mathcal{G})=2$ and $v(g_2, \mathcal{G})=3$. Let g_8, g_9, g_{10} be three distinct vertices not belonging to $\mathcal{G}$ and let $\mathcal{G}^\circ = \mathcal{G} \cup \{g_8 g_9 g_{10}\} \cup (g_1, g_8) \cup (g_2, g_9) \cup (g_1, g_{10})$. Then $V(\mathcal{G}^\circ)=10$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}^\circ)=7$, so $\mathcal{G}^\circ \supset \bigcirc^2$ by IV, and consequently $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$.

PROOF OF VII. Construct $\mathcal{G}^+$ from $\mathcal{G}$ by adding a new vertex not in $\mathcal{G}$ and joining it by an edge to a vertex of $V_3(\mathcal{G})$. Then $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}^+)=6$, $V_3(\mathcal{G}^+)=1$, and $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}^+)=2$. Hence by V $\mathcal{G}^+ \supset \bigcirc^2$, consequently $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$.

REMARKS concerning Theorem 1. 1. IV *and* V *are equivalent*. For V has been deduced from IV, and IV clearly follows from V.

2. *If* $V(\mathcal{G}) \geqq 9$ *then* I *is a consequence of* V.

3. I, ..., VII *are best possible.* In order to demonstrate this we define the graphs $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ as follows: $\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \{x_1, x_2, x_3, y_1, \ldots, y_u\}$ $(u \geqq 3)$, $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{(x_1, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_1)(x_i, y_j)\}$ $(i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \ldots, u)$. $\mathcal{V}(\mathcal{A}') = \mathcal{V}(\mathcal{A}) \cup \{z_1 \ldots z_u\}$, $\mathcal{E}(\mathcal{A}') = \mathcal{E}(\mathcal{A}) \cup \{(y_1, z_1) \ldots (y_u, z_u)\}$. $\mathcal{V}(\mathcal{B}) = \{f_1 f_2 \ldots f_6\}$, $\mathcal{E}(\mathcal{B}) = \{(f_i, f_j)\} \cup (f_6, f_1) \cup (f_6, f_5) - (f_1, f_5)$ $(i = 1, \ldots, 5; \quad j = 1, \ldots, 5)$. $\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \mathcal{V}(\mathcal{B}) + f_7$, $\mathcal{E}(\mathcal{C}) = \mathcal{E}(\mathcal{B}) + (f_6, f_7)$. $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = \mathcal{V}(\mathcal{C}) + f_8$, $\mathcal{E}(\mathcal{D}) = \mathcal{E}(\mathcal{C}) + (f_6, f_8)$. $V(\mathcal{A}) \geqq 6$, $V_{\geqq 2}(\mathcal{A}) = 0$, and $V_{\geqq 4}(\mathcal{A}) = 3$ but $\mathcal{A} \not\supset \bigcirc^2$. $V(\mathcal{A}') \geqq 9$, $V_{\geqq 4}(\mathcal{A}') = \frac{1}{2} V(\mathcal{A}') + 1\frac{1}{2}$ but $\mathcal{A}' \not\supset \bigcirc^2$. $V(\mathcal{B}) = 6$, $V_4(\mathcal{B}) = 5$ and $V_2(\mathcal{B}) = 1$, but $\mathcal{B} \not\supset \bigcirc^2$. $V(\mathcal{C}) = 7$, $V_4(\mathcal{C}) = 5$, $V_3(\mathcal{C}) = 1$ and $V_1(\mathcal{C}) = 1$ but $\mathcal{C} \not\supset \bigcirc^2$. $V(\mathcal{D}) = 8$, $V_4(\mathcal{D}) = 6$, $V_1(\mathcal{D}) = 2$ but $\mathcal{D} \not\supset \bigcirc^2$.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ show that the conditions of I cannot be relaxed. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ and $\mathcal{A}'$, respectively, show that the conditions of II, III and IV cannot be relaxed. $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}'$ show that the conditions of V cannot be relaxed. $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$, respectively, show that the conditions of VI and VII cannot be relaxed.

For finite graphs without multiple edges which contain at least one loop a much weaker condition ensures the existence of two independent circuits.

THEOREM 2. *If* $\mathcal{G}$ *is a finite graph containing at least one loop but no multiple edges, and if* $V(\mathcal{G}) \geqq 3$ *and* $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq V_{\geqq 2}(\mathcal{G})$, *then* $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$.

PROOF. Let m denote a vertex of $\mathcal{G}$ which is incident with one or more loops. If $\mathcal{G} - m$ contains a loop, then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$. In what follows suppose that $\mathcal{G} - m$ contains no loop. Clearly $V_{\geqq 3}(\mathcal{G} - m) \geqq V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) - 1$, and $V_{\geqq 1}(\mathcal{G} - m) \leqq V_{\geqq 2}(\mathcal{G})$. Therefore $V_{\geqq 3}(\mathcal{G} - m) + 1 \geqq V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq V_{\geqq 2}(\mathcal{G}) \geqq V_{\geqq 1}(\mathcal{G} - m)$. Also $V(G - m) \geqq 2$. It follows that $\mathcal{G} - m \supset \bigcirc$, for if $\mathcal{H}$ is a finite graph without circuits and with at least two vertices, then $V_{\geqq 1}(\mathcal{H}) \geqq V_{\geqq 3}(\mathcal{H}) + 2$ as may easily be verified. Hence $\mathcal{G} \supset \bigcirc^2$.

REMARKS. 1. *The conditions of Theorem* 2 *cannot be relaxed.* The example of a graph consisting of a vertex incident with four loops joined to a vertex of valency 1 shows that the condition $V(\mathcal{G}) \geqq 3$ is essential. The example of a graph consisting of a vertex incident with at least two loops joined to every vertex of a path shows that the condition $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq V_{\geqq 2}(\mathcal{G})$ is essential.

2. *No result analogous to Theorems* 1 *and* 2 *can be obtained for graphs which may contain multiple edges.* This is shown by the example of a graph consisting of a vertex incident with any number of loops joined to the vertices of a path by any number of edges.

3. Concerning the existence of three or more independent circuits in finite graphs without multiple edges

THEOREM 3. *If* $\mathcal{G}$ *is a finite graph without loops or multiple edges and* k *is a natural number* $\geqq 3$, *and if* $V_{\geqq 2k}(\mathcal{G}) - V_{\leqq 2k-2}(\mathcal{G}) \geqq k^2 + 2k - 4$, *then* $\mathcal{G} \supset \bigcirc^k$.

N. B. Theorem 1. *V* states that this is true for $k = 2$ if $V(\mathcal{G}) \leqq 9$.

PROOF OF THEOREM 3 by *reductio ad absurdum*. Assume that Theorem 3 is untrue. Let $\varkappa$ denote the least value of k for which the assertion of Theorem 3 is false, and among the graphs $\mathcal{G}$ such that $V_{\geqq 2\varkappa}(\mathcal{G}) - V_{\leqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}) \geqq \varkappa^2 + 2\varkappa - 4$ and $\mathcal{G} \not\supset \bigcirc^\varkappa$ let $\mathcal{G}_0$ be one with the least possible number of vertices and barely satisfying the conditions of Theorem 3 with $k = \varkappa$. This will be shown to lead to a contradiction by a method amounting to an induction process starting from the particular case of the theorem of CORRÁDI and HAJNAL with $\varkappa^2 + 2\varkappa - 4 \leqq V(\mathcal{G}) \leqq \varkappa^2 + 2\varkappa - 3$ (note that $\varkappa^2 + 2\varkappa - 4 \geqq 3\varkappa + 2$ if $\varkappa \geqq 3$).

(1) *At least one of the end-vertices of every edge of* $\mathcal{G}_0$ *has valency* $2\varkappa$ *or* $2\varkappa - 1$.

For, since $\mathcal{G}_0$ barely satisfies the conditions of Theorem 3 with $k = \varkappa$, by deleting any edge from $\mathcal{G}_0$ either $V_{\geqq 2\varkappa}(\mathcal{G}_0)$ is decreased or $V_{\leqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}_0)$ is increased.

(2) $V_{\leqq 2\varkappa-1}(\mathcal{G}_0) \geqq 1$.

If $V(\mathcal{G}_0) \geqq \varkappa^2 + 2\varkappa - 2$ then $V_{\leqq 2\varkappa-1}(\mathcal{G}_0) \geqq 1$ because $\mathcal{G}_0$ barely satisfies the conditions of Theorem 3. If $\varkappa^2 + 2\varkappa - 4 \leqq V(\mathcal{G}_0) \leqq \varkappa^2 + 2\varkappa - 3$ then $V_{\leqq 2\varkappa-1}(\mathcal{G}_0) \geqq 1$ can be deduced with the help of the theorem of CORRÁDI and HAJNAL: if $V_{\leqq 2\varkappa-1}(\mathcal{G}_0) = 0$ then, since $\varkappa^2 + 2\varkappa - 4 \leqq 3\varkappa + 2$ because $\varkappa \geqq 3$, $\mathcal{G}_0 \supset \bigcirc^\varkappa$, which contradicts $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^\varkappa$.

(3) $V_0(\mathcal{G}_0) = 0$.

For if a is an isolated vertex of $\mathcal{G}_0$ then $V_{\geqq 2\varkappa}(\mathcal{G}_0 - a) - V_{\leqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}_0 - a) > \varkappa^2 + 2\varkappa - 4$ and $\mathcal{G}_0 - a \not\supset \bigcirc^\varkappa$, which contradicts the minimal property of $\mathcal{G}_0$.

(4) $V_1(\mathcal{G}_0) = 0$.

For if b is a vertex of $\mathcal{G}_0$ having valency 1 then $V_{\geqq 2\varkappa}(\mathcal{G}_0 - b) - V_{\leqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}_0 - b) \geqq \varkappa^2 + 2\varkappa - 4$ and $\mathcal{G}_0 - b \not\supset \bigcirc^\varkappa$, which contradicts the minimal property of $\mathcal{G}_0$.

(5) $\mathcal{G}_0$ *contains at least one triangle.*

For suppose on the contrary that $\mathcal{G}_0$ contains no triangle. By (2) $\mathcal{G}_0$ contains a vertex of valency $\leqq 2\varkappa - 1$, let e denote such a vertex and let $v(e, \mathcal{G}_0) = v$; by (3) and (4) $2 \leqq v \leqq 2\varkappa - 1$; let $e_1, \ldots, e_v$ denote the vertices of $\mathcal{G}_0$ to which e is joined. No two of $e_1, \ldots, e_v$ are joined by an edge because $\mathcal{G}_0$ contains no triangle by hypothesis. Let $\mathcal{G}' = (\mathcal{G}_0 - e) + (e_v, e_{v-1}) + \ldots + (e_v, e_1)$. Clearly $V_{\geqq 2\varkappa}(\mathcal{G}') \geqq V_{\geqq 2\varkappa}(\mathcal{G}_0)$ and $V_{\leqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}') \leqq V_{\leqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}_0)$, so $V_{\geqq 2\varkappa}(\mathcal{G}') - V_{\leqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}') \geqq \varkappa^2 + 2\varkappa - 4$, hence $\mathcal{G}' \supset \bigcirc^\varkappa$ by the minimal property of $\mathcal{G}_0$. It follows as in the proof of Theorem 1. I, that $\mathcal{G}_0 \supset \bigcirc^\varkappa$, whereas $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^\varkappa$. This contradiction proves (5).

Let x_1, x_2, x_3 be the vertices of a triangle contained in $\mathcal{G}_0$ and let $\mathcal{G}'' = \mathcal{G} - x_1 - x_2 - x_3$.

(6) $\mathcal{G}'' \not\supset \bigcirc^{\varkappa-1}$.

Because $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^\varkappa$.

Let s denote the set of those vertices of $\mathcal{G}''$ which are in $\mathcal{G}_0$ joined to all three vertices x_1, x_2, x_3.

(7) $|s| \leqq 2\varkappa - 2$.

Because by (1) at least two of x_1, x_2, x_3 have valency $\leqq 2\varkappa$ in $\mathcal{G}_0$.

It is easy to see that

(8) $\mathfrak{V}_{\geqq 2\varkappa}(\mathcal{G}_0) \subseteq \mathfrak{V}_{\geqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}'') \cup (s \cap \mathfrak{V}_{2\varkappa-3}(\mathcal{G}'')) \cup \{x_1 x_2 x_3\}$

and

(9) $\mathfrak{V}_{\leqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}_0) \supseteq \mathfrak{V}_{\leqq 2\varkappa-4}(\mathcal{G}') - (s \cap \mathfrak{V}_{2\varkappa-4}(\mathcal{G}'))$.

From (7), (8) and (9) and the conditions of Theorem 3 it follows that

(10) $V_{\geqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}'') - V_{\leqq 2\varkappa-4}(\mathcal{G}'') \geqq$
$\geqq V_{\geqq 2\varkappa}(\mathcal{G}_0) - V_{\leqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}_0) - 2\varkappa - 1 \geqq (\varkappa-1)^2 + 2(\varkappa-1) - 4.$

It follows from (10) that $\varkappa = 3$, because if $\varkappa \geqq 4$ then by (10) and by the minimal property of $\varkappa$, $\mathcal{G}'' \supset \bigcirc^{\varkappa-1}$ contrary to (6). If $\varkappa = 3$ then $V(\mathcal{G}_0) \geqq 11$ from the conditions of Theorem 3 with $k = 3$. The two alternatives $V(\mathcal{G}_0) = 11$ and $V(\mathcal{G}_0) \geqq 12$ will be considered in turn: If $V(\mathcal{G}_0) = 11$ then $V_{\leqq 5}(\mathcal{G}_0) = 0$ from the conditions of Theorem 3 with $k = 3$, hence in this case, by the theorem of HAJNAL and CORRÁDI [1], $\mathcal{G}_0 \supset \bigcirc^3$ contrary to hypothesis. If $V(\mathcal{G}_0) \geqq 12$ then $V(\mathcal{G}'') \geqq 9$, and by (10) $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}'') - V_{\geqq 2}(\mathcal{G}'') \geqq 4$, so in this case, by Theorem 1. V, $\mathcal{G}'' \supset \bigcirc^2$, which contradicts (6). The assumption that Theorem 3 is false therefore leads to a contradiction.

REMARKS. 1. Theorem 3 is probably not best possible. On the other hand if $V_{\geqq 2k}(\mathcal{G}) - V_{\geqq 2k-2}(\mathcal{G}) = 2k - 1$ then it is possible that $\mathcal{G} \not\supset \bigcirc^k$ whatever the values of $k (\geqq 3)$ and of $V(\mathcal{G})$. For example let $\mathfrak{V}(\mathcal{G}) = \{x_1, \ldots, x_{2k-1}, y_1, \ldots y_u, z_1 \ldots z_u\}$ $(u \geqq \frac{1}{2}(k+1))$ and $\mathscr{E}(\mathcal{G}) = \{(x_i, x_j), (x_i, y_h), (y_h, z_h)\}$ $(i = 1, \ldots, 2k-1;\ j = 1, \ldots, 2k-1;\ i \neq j;\ h = 1, \ldots, u)$. $V_{\geqq 2k}(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} V(\mathcal{G}) + \frac{1}{2}(2k-1)$.

2. It is worth noting, that in the proof of Theorem 3 only the particular case of the theorem of CORRÁDI and HAJNAL in which $k^2 + 2k - 4 \leqq V(\mathcal{G}) \leqq k^2 + 2k - 3$ was used. By a simpler method not using the theorem of CORRÁDI and HAJNAL at all the weaker result can be proved that corresponding to any integers $k \geqq 2$ and $c \geqq 1$ there exists a number $n(k, c)$ such that if the graph $\mathcal{G}$ satisfies the conditions $V_{\geqq 2k-1}(\mathcal{G}) \leqq c$ and $V(\mathcal{G}) \geqq n(k, c)$, then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^k$.

In the case of finite graphs without multiple edges which contain loops much weaker conditions than those of Theorem 3 ensure the existence of k independent circuits, as Theorem 4 shows. In any concrete case it is best to delete all vertices incident with loops (together with all edges incident with at least one of them) and apply Theorem 2 or Theorem 3 to the remaining graph however, because Theorem 4 takes into account all the most unfavourable situations.

THEOREM 4. *Let $\mathcal{G}$ be a finite graph without multiple edges and k a natural number $\geqq 3$. If exactly $k-1$ vertices of $\mathcal{G}$ are incident with loops, and $V(\mathcal{G}) \geqq k+1$ and $V_{\geqq k+2}(\mathcal{G}) - V_{\leqq k}(\mathcal{G}) \geqq k-2$, then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^k$. If exactly l vertices of $\mathcal{G}$ are incident with loops, where $l \leqq k-2$, and $V(\mathcal{G}) \geqq l+9$ and $V_{\geqq 2k-l}(\mathcal{G}) - V_{\leqq 2k-l-2}(\mathcal{G}) \geqq$ $\geqq (k-l)^2 + 2k - l - 4$, then $\mathcal{G} \supset \bigcirc^k$.*

PROOF. Let L denote the set of those vertices of $\mathcal{G}$ which are indicent with loops.

Suppose first that $|L|=k-1$, $V(\mathcal{G})\geqq k+1$ and $V_{\geqq k+2}(\mathcal{G})-V_{\geqq k}(\mathcal{G})\leqq k-2$. Then clearly $V_{\geqq 3}(\mathcal{G}-L)\geqq V_{\geqq k+2}(\mathcal{G})-k+1$ and $V_{\leqq 1}(\mathcal{G}-L)\leqq V_{\leqq k}(\mathcal{G})$. Hence $V_{\geqq 3}(\mathcal{G}-L)-V_{\leqq 1}(\mathcal{G}-L)\geqq +1$, consequently, since $V_{\leqq 1}(\mathcal{G}-L)\geqq 2$, $\mathcal{G}-L\supset\bigcirc$. Therefore $\mathcal{G}\supset\bigcirc^k$.

Suppose secondly that $|L|=l\leqq k-2$, $V(\mathcal{G})\geqq l+9$ and $V_{\geqq 2k-l}(\mathcal{G})-V_{\leqq 2k-l-2}(\mathcal{G})\geqq(k-2)^2+2k-l-4$. Clearly $V_{\geqq 2k-2l}(\mathcal{G}-L)\geqq V_{\geqq 2k-l}(\mathcal{G})-l$ and $V_{\leqq 2k-2l-2}(\mathcal{G}-L)\leqq V_{\leqq 2k-l-2}(\mathcal{G})$. Hence $V_{\geqq 2(k-l)}(\mathcal{G}-L)-V_{\leqq 2(k-l)-2}(\mathcal{G}-L)\geqq\geqq(k-l)^2+2(k-l)-4$. It follows by Theorem 1. V $(V(\mathcal{G}-L)\geqq 9)$ or Theorem 3 that $\mathcal{G}-L\supset\bigcirc^{k-l}$. Therefore $\mathcal{G}\supset\bigcirc^k$.

4. Concerning the existence of independent circuits in finite planar graphs without multiple edges

THEOREM 5. *Let $\mathcal{G}$ denote a finite planar graph without loops or multiple edges.*

I. *If* $V(\mathcal{G})\geqq 6$, $V_{\leqq 2}(\mathcal{G})=0$ *and* $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})\geqq 2$, *then* $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$.

II. *If* $V(\mathcal{G})\geqq 8$ *and* $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})\geqq\frac{1}{2}V(\mathcal{G})+1\frac{1}{2}$, *then* $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$.

III. *If* $V(\mathcal{G})\geqq 8$ *and* $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})-V_{\leqq 2}(\mathcal{G})\geqq 3$ *then* $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$.

If $V_{\geqq 2k}(\mathcal{G})-V_{\leqq 2k-2}(\mathcal{G})\geqq 5k-7$ *where k is an integer* $\geqq 3$, *then* $\mathcal{G}\supset\bigcirc^k$.

PROOF OF I. Suppose first that $V(\mathcal{G})=6$ and that $\mathcal{G}$ barely satisfies the conditions of I. Then clearly $V_3(\mathcal{G})\geqq 1$. Let $\mathcal{V}(\mathcal{G})=\{g_1g_2\ldots g_6\}$ and suppose that $v(g_1,\mathcal{G})=3$ and that g_1 is joined to g_2, g_3 and g_4 in $\mathcal{G}$.

(1) $(g_5,g_6)\in\mathcal{G}$.

(2) $v(g_5,\mathcal{G})=3$ *or* $v(g_6,\mathcal{G})=3$.

(3) $E(\mathcal{G}(g_2,g_3,g_4))\geqq 1$.

For if (1) or (2) or (3) were untrue then $(g_i,g_j)\in\mathcal{G}$ for $i=2,3,4$ and $j=1,5,6$ and so $\mathcal{G}$ would not be planar.

The three alternatives $E(\mathcal{G}(g_2,g_3,g_4))=1,2,3$ will now be considered in turn.

Assuming that $E(\mathcal{G}(g_2,g_3,g_4))=1$ it will be supposed that $(g_2,g_3)\in\mathcal{G}$. Then $(g_4,g_5)\in\mathcal{G}$ and $(g_4,g_6)\in\mathcal{G}$. In this case by (1) $\mathcal{G}\supset[g_1,g_2,g_3]\cup[g_4,g_5,g_6]$.

Assuming that $E(\mathcal{G}(g_2,g_3,g_4))=2$ it will be supposed that $(g_2,g_3)\in\mathcal{G}$ and $(g_2,g_4)\in\mathcal{G}$. Then either $v(g_3,\mathcal{G})\geqq 4$ or $v(g_4,\mathcal{G})\geqq 4$, because if $v(g_3,\mathcal{G})=v(g_4,\mathcal{G})=3$ then $v(g_5,\mathcal{G})\geqq 4$ or $v(g_6,\mathcal{G})\geqq 4$ since $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})\geqq 2$; and if e. g. $v(g_5,\mathcal{G})\geqq 4$ then $(g_3,g_5),(g_4,g_5)\in\mathcal{G}$ so (g_3,g_6), $(g_4,g_6)\notin\mathcal{G}$, therefore $v(g_6,\mathcal{G})\leqq 2$ whereas $V_{\geqq 2}(\mathcal{G})=0$. If e. g. $v(g_4,\mathcal{G})\geqq 4$ then $\mathcal{G}\supset[g_1,g_2,g_3]\cup[g_4,g_5,g_6]$.

Assume finally that $E(\mathcal{G}(g_2,g_3,g_4))=3$. At least one of g_2,g_3,g_4 is joined to both of g_5,g_6 because $v(g_5,\mathcal{G})\geqq 3$ and $v(g_6,\mathcal{G})\geqq 3$; suppose that $(g_4,g_5)\in\mathcal{G}$ and $(g_4,g_6)\in\mathcal{G}$, then $\mathcal{G}\supset[g_1,g_2,g_3]\cup[g_4,g_5,g_6]$. I is thus true if $V(\mathcal{G})=6$.

The proof of I will now be completed by *reductio ad absurdum*. Assume that I is untrue. Then there exists a planar graph $\mathcal{G}_0$ with the following properties: $\mathcal{G}_0$ barely satisfies the conditions of I and $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^2$, and all graphs which satisfy the conditions of I and have fewer vertices than $\mathcal{G}_0$ contain two independent circuits. $V(\mathcal{G}_0) \geqq 7$ because I is true for planar graphs with six vertices.

(4) *At least one of the end-vertices of each edge of* $\mathcal{G}_0$ *has valency* 3 *or* 4, *and at least one vertex of* $\mathcal{G}_0$ *has valency* 3.

Because $\mathcal{G}_0$ barely satisfies the conditions of I and $V(\mathcal{G}_0) \geqq 7$.

Let d denote a vertex of $\mathcal{G}_0$ having valency 3 and let d_1, d_2, d_3 be the three vertices of $\mathcal{G}_0$ to which d is joined. The three alternatives $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \leqq 1$, $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) = 2$, $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) = 3$ will be considered separately.

$E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \leqq 1$ leads to a contradiction exactly as in the proof of Theorem 1. I.

$E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) = 2$ and $(d_1, d_2), (d_1, d_3) \in \mathcal{G}_0$ and $v(d_1, \mathcal{G}_0) \geqq 5$ leads to a contradiction exactly as in the proof of Theorem 1. I. If $v(d_1, \mathcal{G}_0) \leqq 4$ then a contradiction is arrived at as follows: If $\mathcal{G} - d - d_1 - d_2 - d_3$ has v connected components, then $E(\mathcal{G}_0) \leqq V(\mathcal{G}_0) - 2 - v + v(d_2, \mathcal{G}_0) + v(d_3, \mathcal{G}_0)$ as before. On the other hand, summing the valencies of all the vertices of $\mathcal{G}_0$, $2E(\mathcal{G}_0) \geqq v(d_2, \mathcal{G}_0) + v(d_3, \mathcal{G}_0) + 3(V(\mathcal{G}_0) - 2)$. From the two inequalities it follows that $V(\mathcal{G}_0) \leqq v(d_2, \mathcal{G}_0) + v(d_3, \mathcal{G}_0) + 2 - 2v$. $v(d_2, \mathcal{G}_0) \leqq v + 2$ and $v(d_3, \mathcal{G}_0) \leqq v + 2$, since d_2 and d_3 are each joined to at most one vertex of each connected component of $\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3$ because $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^2$. Hence $V(\mathcal{G}_0) \leqq 6$ which contradicts $V(\mathcal{G}_0) \geqq 7$.

The only remaining alternative is that $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) = 3$. By (4) it may be assumed that $v(d_1, \mathcal{G}_0) \leqq 4$ and $v(d_2, \mathcal{G}_0) \leqq 4$. $\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3 \not\supset \bigcirc$ so $E(\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3) \leqq V(\mathcal{G}_0) - 4 - v$ where v is the number of connected components of $\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3$. Consequently $E(\mathcal{G}_0) \leqq V(\mathcal{G}_0) + v(d_3, \mathcal{G}_0) + 1 - v$. On the other hand, summing the valencies of all the vertices of $\mathcal{G}_0$, $2E(\mathcal{G}_0) \geqq v(d_3, \mathcal{G}_0) + \\ + 4 + 3(V(\mathcal{G}_0) - 2)$. From the two inequalities it follows that $V(\mathcal{G}_0) \leqq v(d_3, \mathcal{G}_0) + \\ + 4 - 2v$. But d_3 is joined to at most one vertex of each connected component of $\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3$ because $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^2$, so $v(d_3, \mathcal{G}_0) \leqq v + 3$. Hence $V(\mathcal{G}_0) \leqq 7 - v \leqq 6$. But $V(\mathcal{G}_0) \geqq 7$. With this contradiction the proof of I is complete.

PROOF OF II.

(5) *If* $\mathcal{H}$ *is a graph without loops or multiple edges and* $V(\mathcal{H}) = 6$, $V_{\geqq 4}(\mathcal{H}) = 5$ *and* $V_2(\mathcal{H}) = 1$, *then* $\mathcal{H}$ *is not planar.*

For suppose on the contrary that $\mathcal{H}$ is planar. Let b denote the vertex of $\mathcal{H}$ having valency 2 and let b_1, b_2 denote the two vertices of H to which b is joined. In $\mathcal{H} - b$ every vertex other than b_1 and b_2 has valency 4. Consequently $(b_1, b_2) \notin \mathcal{H}$ since $\mathcal{H}$ is planar. Therefore $(\mathcal{H} - b) \cup (b_1, b_2)$ is a planar graph without loops or

multiple edges containing five vertices each having valency 4. This contradiction proves (5).

Now suppose first that $V(\mathcal{G})=8$. Then $V_{\geqq 4}(\mathcal{G})\geqq 6$. $\mathcal{G}$ does not contain a vertex of valency 4 joined to two vertices of valency 1, because if it did then the graph obtained from $\mathcal{G}$ by deleting the two vertices of valency 1 together with the edges incident with them would contradict (5). Therefore $\mathcal{G}\supset\bigcirc^2$ by Theorem 1. III.

The proof of II will now be completed by *reductio ad absurdum*. Assume that II is untrue. Then there exists a planar graph $\mathcal{G}_0$ with the following properties: $\mathcal{G}_0$ barely satisfies the conditions of II and $\mathcal{G}_0\not\supset\bigcirc^2$, and all planar graphs which satisfy the conditions of II and have fewer vertices than $\mathcal{G}_0$ contain two independent circuits. It has just been proved that

(6) $V(\mathcal{G}_0)\geqq 9$.

As in the proof of Theorem 1. IV

(7) *At least one end-vertex of every edge contained in* $\mathcal{G}_0$ *has valency* 4, *and* $V_{\leqq 3}(\mathcal{G}_0)\geqq 1$.

By summing the valencies of all the vertices of $\mathcal{G}_0$ we have that

(8) *If* $V_0(\mathcal{G}_0)=0$ *then* $E(\mathcal{G}_0)\geqq 1\frac{1}{4}V(\mathcal{G}_0)+2\frac{1}{4}$, *if* $V_0(\mathcal{G}_0)=0$ *and* $V_2(\mathcal{G}_0)\geqq 1$ *then* $E(\mathcal{G}_0)\geqq 1\frac{1}{4}V(\mathcal{G}_0)+2\frac{3}{4}$, *and if* $V_0(\mathcal{G}_0)=0$ *and* $V_3(\mathcal{G}_0)\geqq 1$ *then* $E(\mathcal{G}_0)\geqq 1\frac{1}{4}V(\mathcal{G}_0)+3\frac{1}{4}$.

It will now be proved that $V_i(\mathcal{G}_0)=0$ for $i=0, 2, 3$.

(9) $V_0(\mathcal{G}_0)=0$.

For suppose on the contrary that the vertex a of $\mathcal{G}_0$ has valency 0. Then $(\mathcal{G}_0-a)$ satisfies the conditions of II (by (6)) and therefore $\mathcal{G}_0-a\supset\bigcirc^2$ by the minimal property of $\mathcal{G}_0$.

(10) $V_2(\mathcal{G}_0)=0$.

For suppose on the contrary that the vertex c of $\mathcal{G}_0$ has valency 2 and is joined to the vertices c_1 and c_2. The two alternatives $(c_1, c_2)\notin\mathcal{G}_0$ and $(c_1, c_2)\in\mathcal{G}_0$ will be considered in turn and a contradiction will be derived in both cases. If $(c_1, c_2)\notin\mathcal{G}$ then $(\mathcal{G}_0-c)\cup(c_1, c_2)$ satisfies the conditions of II (by (6)) and therefore contains two independent circuits (because of the minimal property of $\mathcal{G}_0$), it follows as in the proof of Theorem 1. III that $\mathcal{G}_0\supset\bigcirc^2$, whereas $\mathcal{G}_0\not\supset\bigcirc^2$. Suppose next that $(c_1, c_2)\in\mathcal{G}_0$. By (7) $v(c_1, \mathcal{G}_0)=v(c_2, \mathcal{G}_0)=4$. $E(\mathcal{G}_0-c-c_1-c_2)\leqq V(\mathcal{G}_0)-4$ because $\mathcal{G}_0-c-c_1-c_2\not\supset\bigcirc$. It follows that $E(\mathcal{G}_0)\leqq V(\mathcal{G}_0)+3$. By (8) $E(\mathcal{G}_0)\geqq$ $\geqq 1\frac{1}{4}V(\mathcal{G}_0)+2\frac{3}{4}$. From the two inequalities it follows that $V(\mathcal{G}_0)\leqq 1$, which contradicts (6). Hence $V_2(\mathcal{G}_0)=0$.

(11) $V_3(\mathcal{G}_0)=0$.

For suppose on the contrary that the vertex d of $\mathcal{G}_0$ has valency 3 and is joined to the vertices d_1, d_2 and d_3. The two alternatives $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3))\leqq 1$ and

$E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \geqq 2$ will be considered in turn and a contradiction derived in both cases.

Assuming that $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \leqq 1$, let it be supposed that $(d_1, d_3) \notin \mathcal{G}_0$ and $(d_2, d_3) \notin \mathcal{G}_0$. Then $(\mathcal{G}_0 - d) \cup (d_1, d_3) \cup (d_2, d_3)$ satisfies the conditions of II (by (6)) and therefore contains two independent circuits (because of the minimal property of $\mathcal{G}_0$), it follows as in the proof of Theorem 1. I that $\mathcal{G}_0 \supset \bigcirc^2$, whereas $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^2$. There remains the alternative that $E(\mathcal{G}_0(d_1, d_2, d_3)) \geqq 2$. By (7) $v(d_1, \mathcal{G}_0) = v(d_2, \mathcal{G}_0) = v(d_3, \mathcal{G}_0) = 4$. $E(\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3) \leqq V(\mathcal{G}_0) - 5$ because $\mathcal{G}_0 - d - d_1 - d_2 - d_3 \not\supset \bigcirc$. It follows that $E(\mathcal{G}_0) \leqq V(\mathcal{G}_0) + 5$. By (8) $E(\mathcal{G}_0) \geqq 1\frac{1}{4}(V(\mathcal{G}_0) + 3\frac{1}{4}$. From the two inequalities it follows that $V(\mathcal{G}_0) \leqq 7$, which contradicts (6). Hence $V_3(\mathcal{G}_0) = 0$.

From the conditions of II it follows that $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0) \geqq 6$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0) - V_{\leqq 3}(\mathcal{G}_0) \geqq 3$. By (9), (10) and (11) $V(\mathcal{G}_0) = V_1(\mathcal{G}_0) + V_{\geqq 4}(\mathcal{G}_0)$ and by (7) each vertex of valency 1 is joined to a vertex of valency 4. If $\mathcal{G}_0$ does not contain a vertex having valency 4 joined to at least two vertices having valency 1, then let $\mathcal{G}''$ denote the graph obtained by deleting all vertices of valency 1 from $\mathcal{G}_0$. Clearly $V(\mathcal{G}'') \geqq 6$, $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}'') \geqq 3$ and $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}'') = 0$. Therefore by I $\mathcal{G}'' \supset \bigcirc^2$, whereas $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^2$. This contradiction proves II in the case considered.

If $\mathcal{G}_0$ contains a vertex, say d, having valency 4 which is joined to two vertices of valency 1, say d_1 and d_2, then let d_3 and d_4 denote the remaining to vertices of $\mathcal{G}_0$ joined to d. Let $\mathcal{G}'' = (\mathcal{G}_0 - d) \cup (d_1, d_2) \cup (d_1, d_3) \cup (d_1, d_4)$. $\mathcal{G}''$ satisfies the conditions of II (by (6)) and therefore contains two independent circuits (because of the minimal property of G_0), it follows as in the proof of Theorem 1. I that $G_0 \supset \bigcirc^2$, whereas $G_0 \not\supset \bigcirc^2$. This contradiction proves II in the remaining case.

PROOF OF III. For $k = 2$ III follows from II in the same way as Theorem 1. V follows from Theorem 1. IV. For $k \geqq 3$ III will be proved by *reductio ad absurdum*. Assume that III is untrue. Let $\varkappa$ denote the least value of k for which the assertion of III is false, and among the planar graphs to which the assertion of III with $k = \varkappa$ does not apply let $\mathcal{G}_0$ be one with the least number of vertices and barely satisfying the conditions of III with $k = \varkappa$.

(12) *At least one of the end-vertices of every edge of* $\mathcal{G}_0$ *has valency* $2\varkappa$ *or* $2\varkappa - 1$.

For $\mathcal{G}_0$ barely satisfies the conditions of III with $k = \varkappa$.

(13) $V_{\geqq 2\varkappa - 1}(\mathcal{G}_0) \geqq 1$.

Because $\varkappa \geqq 3$ and $\mathcal{G}_0$ is planar.

(14) $V_{\leqq 1}(\mathcal{G}_0) = 0$.

For if x is a vertex of valency $\leqq 1$ in $\mathcal{G}_0$ then $V_{\geqq 2k}(\mathcal{G}_0 - x) - V_{\leqq 2k-2}(\mathcal{G}_0 - x) \geqq 5\varkappa - 7$ and $\mathcal{G}_0 - x \not\supset \bigcirc^\varkappa$, which contradicts the minimal property of $\mathcal{G}_0$.

(15) $\mathcal{G}_0$ *contains at least one triangle.*

Replace $\varkappa^2 + 2\varkappa - 4$ by $5\varkappa - 7$ in the proof of (5) in the proof of Theorem 3.

Let x_1, x_2, x_3 be the vertices of a triangle contained in $\mathcal{G}_0$ and let $\mathcal{G}'' = \mathcal{G} - x_1 - x_2 - x_3$.

(16) $\mathcal{G}'' \not\supset \bigcirc^{\varkappa-1}$.

Because $\mathcal{G}_0 \not\supset \bigcirc^{\varkappa}$.

Let s denote the set of those vertices of $\mathcal{G}''$ which are in $\mathcal{G}_0$ joined to all three vertices x_1, x_2, x_3.

(17) $|s| \leqq 2$.

Because $\mathcal{G}_0$ is planar.

From (17) and the conditions of III it follows as in the proof of Theorem 3 that

(18) $V_{\geqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}'') - V_{\leqq 2\varkappa-4}(\mathcal{G}'') \geqq V_{\geqq 2\varkappa}(\mathcal{G}_0) - V_{\leqq 2\varkappa-2}(\mathcal{G}_0) - 5 \geqq 5(\varkappa-1) - 7$.

It follows from (18) that $\varkappa = 3$, because if $\varkappa \geqq 4$ then, by (18) and the minimal property of $\varkappa$, $\mathcal{G}'' \supset \bigcirc^{\varkappa-1}$ contrary to (16). If $\varkappa = 3$ then $V_{\geqq 6}(\mathcal{G}_0) - V_{\leqq 4}(\mathcal{G}_0) \geqq 8$. In this case obviously $V(\mathcal{G}_0) \geqq 11$ because $\mathcal{G}_0$ is planar. Hence $V(\mathcal{G}'') \geqq 8$. Therefore, from the first part of III, $\mathcal{G}'' \supset \bigcirc^2$, wich contradicts (16). The assumption that III is false therefore leads to a contradiction. Theorem 5 is now proved.

REMARKS. 1. *The condition of* I *cannot be relaxed,* $V(\mathcal{G}) \geqq 6$, $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) = 0$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) = 1$ does not necessarily imply that the planar graph $\mathcal{G}$ contains two independent circuits. This is illustrated by the planar graphs consisting of a circuit together with a vertex not belonging to the circuit joined to every vertex of the circuit.

2. If $\mathcal{G}$ is planar and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq \frac{1}{2} V(\mathcal{G}) + 1\frac{1}{2}$ then $V(\mathcal{G}) \geqq 7$, as the reader can easily verify. If $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) \geqq \frac{1}{2} V(\mathcal{G}) + 1\frac{1}{2}$ and $V(\mathcal{G}) = 7$ then the planar graph $\mathcal{G}$ does not necessarily contain two independent circuits. For example if $\mathfrak{V}(X) = \{x_1, \ldots, x_7\}$ and $\mathfrak{E}(X) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7)\}$ then X is planar and contains no loops or multiple edges, and $V_4(X) = 5$, $V_1(X) = 2$, but $X \not\supset \bigcirc^2$.

If $\mathcal{G}$ is planar and $V(\mathcal{G}) = 8$ and $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} V(\mathcal{G}) + 1$, then $\mathcal{G}$ does not necessarily contain two independent circuits, as is shown by any graph Y obtained from X by subdividing an arbitrary edge through inserting a new vertex.

3. X shows that if $\mathcal{G}$ is planar, $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) - V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) = 3$ and $V(\mathcal{G}) = 7$ then $\mathcal{G}$ does not necessarily contain two independent circuits. $X - x_7$ shows that if $\mathcal{G}$ is planar, $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) - V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) = 3$ and $V(\mathcal{G}) = 6$ then $\mathcal{G}$ does not necessarily contain two independent circuits. Y shows that if $\mathcal{G}$ is planar, $V_{\geqq 4}(\mathcal{G}) - V_{\leqq 2}(\mathcal{G}) = 2$ and $V(\mathcal{G}) = 8$ then $\mathcal{G}$ does not necessarily contain two independent circuits. III is surely not best possible for $k \geqq 3$.

4. The remarks after Theorem 2 apply equally to planar graphs, because the counterexamples described there are planar.

5. Concerning the existence of two circuits without a common edge in finite planar graphs

THEOREM 6. *If $\mathcal{G}$ is a finite planar graph which may contain multiple edges and loops, and if $E(\mathcal{G}) \geqq V(\mathcal{G}) + 3$, then $\mathcal{G} \supseteq 2\bigcirc$.*

NOTE. If $\mathcal{G}$ is finite and contains a loop and if $E(\mathcal{G}) \geqq V(\mathcal{G}) + 2$, a loop being counted as two edges, then $\mathcal{G} \supseteq 2\bigcirc$, whether $\mathcal{G}$ is planar or not. For if l is a loop then $E(\mathcal{G} - l) \geqq V(\mathcal{G})$, hence $\mathcal{G} - l \supseteq \bigcirc$, therefore $\mathcal{G} \supseteq 2\bigcirc$. If $E(\mathcal{G}) = V(\mathcal{G}) + 1$ then $\mathcal{G}$ need not contain two circuits without a common edge, a simple example is a path with a loop incident with one of its edges.

PROOF OF THEOREM 6 by *reductio ad absurdum*. Assume that Theorem 6 is untrue. Then there exists a finite planar graph $\mathcal{G}_0$ such that $E(\mathcal{G}_0) = V(\mathcal{G}_0) + 3$, and $\mathcal{G}_0 \not\supseteq 2\bigcirc$, and Theorem 6 is true for all graphs with fewer vertices than $\mathcal{G}_0$. Clearly $V(\mathcal{G}_0) \geqq 3$.

(1) *$\mathcal{G}_0$ contains no circuit having fewer than four edges.*

For if C is a circuit with fewer than four edges contained in $\mathcal{G}_0$ then $E(\mathcal{G}_0 - E(C)) \geqq V(\mathcal{G}_0)$, so $\mathcal{G}_0 - \mathscr{E}(C) \supseteq \bigcirc$ and consequently $\mathcal{G}_0 \supseteq 2\bigcirc$ contrary to hypothesis.

(2) $V_{\leqq 2}(\mathcal{G}_0) = 0$.

$V_0(\mathcal{G}_0) = 0$ because if a is an isolated vertex of $\mathcal{G}_0$ then $E(\mathcal{G}_0 - a) = V(\mathcal{G}_0 - a) + 4$, so $\mathcal{G}_0 - a \supseteq 2\bigcirc$ from the minimal property of $\mathcal{G}_0$, whereas $\mathcal{G}_0 \not\supseteq 2\bigcirc$. $V_1(\mathcal{G}_0) = V_2(\mathcal{G}_0) = 0$ can be proved by the same argument as is used in the proof of Theorem 3 in [2].

It follows from (2) that $2E(\mathcal{G}_0) \geqq 3V(\mathcal{G}_0)$. Consequently, since $E(\mathcal{G}_0) = V(\mathcal{G}_0) + 3$, $V(\mathcal{G}_0) \leqq 6$. On the other hand it follows easily from (1) and (2) that $V(\mathcal{G}_0) \geqq 6$. Hence $V(\mathcal{G}_0) = 6$. From this and (1) and (2) it follows easily that $\mathcal{G}_0$ contains a circuit having exactly four edges and vertices.

Let the vertices of $\mathcal{G}_0$ be denoted by $g_1, g_2, \ldots, g_6$ and suppose that $\mathcal{G}_0$ contains a circuit whose vertices are g_1, g_2, g_3, g_4 in this order. By (1) g_5 and g_6 are each joined to at most two of $g_1, \ldots, g_4$, therefore by (2) $(g_5, g_6) \in \mathcal{G}_0$ and by (1) it may be supposed without loss of generality that (g_1, g_6), (g_3, g_6), (g_2, g_5), $(g_4, g_5) \in \mathcal{G}_0$. So $\mathcal{G}_0$ contains the circuit $[g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6]$ and the edges (g_1, g_4), (g_2, g_5), (g_3, g_6). Therefore $\mathcal{G}_0$ is not planar. This contradiction proves Theorem 6.

REMARKS. 1. If $V(\mathcal{G}) \leqq 3$ and $E(\mathcal{G}) \geqq V(\mathcal{G}) + 2$ then $\mathcal{G} \supseteq 2\bigcirc$, as the reader may very easily verify.

2. If $V(\mathcal{G}) \geqq 4$ and $E(\mathcal{G}) \leqq V(\mathcal{G}) + 2$ then the planar graph $\mathcal{G}$ need not contain two circuits without a common edge. This is illustrated by the graph containing

four vertices, each pair of distinct vertices joined by one edge (this graph is 3-fold connected) and by all graphs obtained from this graph through subdividing edges by the insertion of new vertices (these graphs are all 2-fold connected) — in other words by the complete 4-graph and the topological complete 4-graphs.

MATHEMATISCHES SEMINAR
DER UNIVERSITÄT HAMBURG

MATHEMATICAL INSTITUTE,
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY,
BUDAPEST

(Received 27 March 1962)

References

[1] K. CORRÁDI and A. HAJNAL, On the maximal number of independent circuits of a graph (to appear).
[2] P. ERDŐS and L. PÓSA, On the maximal number of disjoint circuits of a graph. *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), pp. 3—12.

CHARAKTERISIERUNG DER ENTROPIEN POSITIVER ORDNUNG UND DER SHANNONSCHEN ENTROPIE

Von

J. ACZÉL und Z. DARÓCZY (Debrecen)

Herrn P. ERDŐS *zum 50-sten Geburtstag mit Freundschaft und Verehrung gewidmet*

(*Vorgelegt von* A. RÉNYI)

Einleitung

Das von R. V. HARTLEY [12] und C. E. SHANNON [17], [18], [19] eingeführte logarithmische Informationsmaß

$$I(p) = -\log_2 p \tag{1}$$

eines Ereignisses von der Wahrscheinlichkeit p kann durch die Forderung der *Additivität*

$$I(pq) = I(p) + I(q), \tag{2}$$

der Monotonie (oder Stetigkeit) der Funktion $I(p)$ und der (unwesentlichen) Normierung

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \tag{3}$$

charakterisiert werden. Tatsächlich ist

$$I(p) = c \log_2 p$$

die allgemeinste monotone (stetige) Lösung von (2) (s. etwa [1] Nr. 2.1.2, 2. 1.4), und (3) ergibt $c = -1$, also (1).

C. E. SHANNON [17], [18], [19] hat

$$I_1(\mathfrak{P}) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log_2 p_j \tag{4}$$

als Informationsmaß (Entropie) eines (endlichen) Ereignisschemas (einer Wahrscheinlichkeitsverteilung) $\mathfrak{P}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1)$ eingeführt. Wir werden (4) die *Shannonsche Entropie* nennen. A. RÉNYI [15], [16] hat als weitere Informationsmaße von $\mathfrak{P}$ die Entropien α-ter *Ordnung* $(\alpha > 0)$

$$I_\alpha(\mathfrak{P}) = (1-\alpha)^{-1} \log_2 \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^\alpha \right) \qquad (\alpha \neq 1) \tag{5}$$

vorgeschlagen. Offenbar ist

$$I_1(\mathfrak{P}) = \lim_{\alpha \to 1} I_\alpha(\mathfrak{P}).$$

— In den Arbeiten [7], [8] und [2] von A. J. CHINTSCHIN und A. ADAM werden sogar

noch allgemeinere Ausdrücke der Gestalt

$$I(\mathfrak{P}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j g(-\log_2 p_j)\right) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right) \tag{6}$$

unter der Voraussetzung der Stetigkeit und strengen Monotonie von g, sowie *der Konvexität (im engen Sinne) von*

$$f^*(x) = \begin{cases} xg(-\log_2 x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

als Informationsmaße betrachtet.

A. RÉNYI hat in [16] die von ihm definierten Entropien (5) der Ordnung α (ohne der Einschränkung $\alpha > 0$) und die Shannonsche Entropie (4) axiomatisch charakterisiert (und nachträglich gezeigt, daß sich in (4) nur für $\alpha > 0$ vernünftige Informationsmaße ergeben). Dies gelang unter Zuhilfenahme der Begriffe des Entropiegewinnes und der sogenannten unvollständigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, für die $p_1 + p_2 + \ldots + p_n < 1$ sein kann. Er hat aber an dem Kolloquium für Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik in Eisenstadt (November 1961) die Frage aufgeworfen (vgl. auch [15]), ob man nicht ohne Verwendung unvollständiger Verteilungen für Ereignissysteme mit vollständigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (vollständige Ereignisschemata) die Informationsmsaße (4) und (5) selbst einfach wieder durch die *Additivität*, d. h. durch die Verallgemeinerung

$$I(\mathfrak{P} * \mathfrak{Q}) = I(\mathfrak{P}) + I(\mathfrak{Q}) \tag{7}$$

von (2) unter den Ausdrücken (6) charakterisieren kann. In (7) sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zwei unabhängige vollständige Ereignisschemata (Wahrscheinlichkeitsverteilungen) und $\mathfrak{P} * \mathfrak{Q}$ ist ihre Vereinigung (ihr direktes Produkt). Ausführlicher ausgeschrieben bedeutet (7) die Funktionalgleichung

$$g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p_j q_k g(-\log_2 p_j - \log_2 q_k)\right) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j g(-\log_2 p_j)\right) + \tag{8}$$

$$+ g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} q_k g(-\log_2 q_k)\right) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{m} q_k = 1\right).$$

In dieser Arbeit wollen wir beweisen, daß (8) die Entropien (4) und (5) tatsächlich charakterisiert. Dies löst zugleich eine von A. RÉNYI in [16] (S. 552) vorgelegte offene Frage. — Wir setzen die Chintschin—Adamsche Bedingung der strengen Konvexität von

$$f^*(x) = \begin{cases} xg(-\log_2 x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

voraus, woraus — wie wir sehen werden — auch die Stetigkeit und strenge Monotonität von g folgen. Dies wird auch den Vorteil haben, daß sich außer (4) die Formel (5) eben mit $\alpha > 0$ ergibt, die unpraktischen Entropien nichtpositiver Ordnung also automatisch ausgeschlossen werden. (Unabhängig davon werden wir im § 4 auch zeigen, daß die Entropie 0-ter Ordnung der einzige Ausdruck der Gestalt (6) ist, der von den p_j unabhängig ist.)

RÉNYI hat in [15], [16] mit Hilfe des Begriffes der Informationsgewinne α-ter Ordnung auch angegeben, welche Eigenschaften die Shannonsche Entropie (4) unter den Entropien α-ter Ordnung charakterisieren (wir betrachten hier die Shannonsche Entropie als Entropie 1-ter Ordnung). Am Ende der vorliegenden Arbeit wollen wir darauf hinweisen, daß die Shannonsche Entropie unter den Informationsmaßen der Gestalt (6) bei Bestehen der Chintschinschen Voraussetzungen auch durch die Bedingung

$$I(\mathfrak{P} * \mathfrak{Q}) = I(\mathfrak{P}) + I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P}) \tag{9}$$

charakterisiert werden kann[1] (vgl. auch [7]). (9) ist stärker als (7), da hier auch Abhängigkeit der vollständigen Ereignisschemata $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zugelassen wird. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sind auch hier die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse von $\mathfrak{P}$, dagegen ist q_{jk} die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses Q_k unter Voraussetzung von P_j ($j=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, m$) und die *bedingte Entropie* $I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P})$ ist in Analogie zu (6) der folgende Ausdruck

$$I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{k=1}^{n} q_{jk} g(-\log_2 q_{jk})\right). \tag{10}$$

— Unter den $I_\alpha(\mathfrak{P})$ ist $I_1(\mathfrak{P})$ sogar durch Forderung von (9) für $m=n=2$ allein bestimmt.

Bezüglich des Ausdruckes (10) werden wir im § 4 auch zeigen, daß die Konvexität von

$$f^*(x) = \begin{cases} xg(-\log_2 x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

(und im wesentlichen nur sie) das Bestehen der üblichen Ungleichung

$$I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P}) < I(\mathfrak{Q})$$

sichert (eine Art von Monotonie) und dies ist auch eine Begründung für die Chintschin—Adamsche Bedingung.

Der Ausdruck (6) kann noch etwas umgeformt werden: Führen wir nämlich die Funktion

$$f(x) = g(-\log_2 x) \tag{11}$$

ein, so wird laut der Chintschin—Adamschen Bedingung auch

$$f^*(x) = \begin{cases} xf(x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

im engen Sinne konvex und damit $f(x)$ stetig und streng monoton sein; weiter geht

[1] Auch hier wird mit $\mathfrak{P} * \mathfrak{Q}$ die *Vereinigung der beiden Schemata* $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bezeichnet (wie in [7], [8]; was aber von der üblichen Definition des *direkten Produktes zweier Verteilungen* abweicht): Besteht das Schema $\mathfrak{P}$ aus den Elementarereignissen P_j mit den Wahrscheinlichkeiten $p_j = w(P_j)$ ($j=1, 2, \ldots, n$), das Schema $\mathfrak{Q}$ aus den von den vorigen nicht unbedingt unabhängigen Ereignissen Q_k mit den Wahrscheinlichkeiten $w(Q_k)$ ($k=1, 2, \ldots, n$), so besteht die Vereinigung $\mathfrak{P} * \mathfrak{Q}$ aus den Ereignissen $P_j Q_k$ mit den Wahrscheinlichkeiten $w(P_j Q_k) = w(P_j)\, w(Q_k/P_j) = p_j q_{jk}$ ($j=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, m$).

(6) in

$$I(\mathfrak{P}) = -\log_2 f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) = -\log_2 M(\mathfrak{P}) \tag{12}$$

über. Für den *Mittelwert*

$$M(\mathfrak{P}) = f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right) \tag{13}$$

gilt laut (7) die *multiplikative* Eigenschaft

$$M(\mathfrak{P} * \mathfrak{Q}) = M(\mathfrak{P})\, M(\mathfrak{Q}), \tag{14}$$

oder ausführlicher (vgl. (8))

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p_j q_k f(p_j q_k)\right) = f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) f^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} q_k f(q_k)\right) \tag{15}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{m} q_k = 1\right).$$

Wir wollen diese Funktionalgleichung (15) lösen. (Diese „mittlere Wahrscheinlichkeit" $M(\mathfrak{P})$ eines Ereignisschemas — vgl. auch [2] — ist auch sonst interessant: sie hat laut (14) ähnlich zur Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses die Eigenschaft, bei Vereinigung von unabhängigen Ereignisschemata multipliziert zu werden.)

Was die zugelassenen Werte der Veränderlichen in (2), (8) oder (15) betrifft, könnten natürlich die p, q, p_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ und q_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ als Wahrscheinlichkeiten beliebige reelle Zahlen im abgeschlossenen Intervall [0, 1] sein $\left(\text{mit der Einschränkung } \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{m} q_k = 1\right)$. Da aber in (1), (4), (6), (8) Logarithmen von p, q, p_j und q_k vorkommen, schließen wir den Wert 0 aus und beschränken uns auf den halboffenen Intervall (0, 1].

Wir werden also beweisen, daß alle Lösungen der in (0, 1] als gültig vorausgesetzten Funktionalgleichung (15), wo

$$f^*(x) = \begin{cases} x f(x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

im engen Sinne konvex ist, die folgenden sind:

$$f(x) = a \log_2 x + b \qquad (a > 0) \tag{16}$$

$$f(x) = a x^{\alpha - 1} + b \qquad (\alpha > 1,\ a > 0 \text{ oder } 0 < \alpha < 1,\ a < 0). \tag{17}$$

— (16) gehört zur Shannonschen Entropie, (17) zu den Rényischen Entropien der Ordnung α.

Zu diesem Zwecke beweisen wir zuerst im § 1 zwei Hilfssätze aus der Theorie der dynamischen Programmierung, dann untersuchen wir im § 2 in welchem Ausmaße die Funktion f in (13) bestimmt ist. Auf dieser Grundlage beweisen wir den oben angekündigten Satz im § 3, indem wir noch Funktionalgleichungen der Gestalt

$$f_1(tm) = f_1(t) + f_1(m) \tag{18}$$

und

$$h_1(tm) = h_1(t) h_1(m)$$

lösen ($t \in [1, \infty)$, m durchläuft die positiven ganzen Zahlen). Hier verwenden wir einen für die Informationstheorie auch sonst wichtigen Satz von P. ERDŐS ([9] vgl. auch [13], [14] und [16]).

Wir werden (18) im § 4 auch zur neuen Lösung der Verallgemeinerung eines von T. W. CHAUNDY und J. B. MC LEOD in [6] betrachteten, ebenfalls mit den Entropiebegriff zusammenhängenden Problemes verwenden.

§ 1. Hilfssätze

Von der Einleitung sieht man klar, daß für das weitere die folgenden Definitionen grundlegend sind:

DEFINITION 1. **K** *ist die Menge aller im halboffenen Intervall* (0, 1] *definierten Funktionen f, für die die Funktion*

$$f^*(x) = \begin{cases} xf(x) & \text{für} \quad x \in (0, 1] \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \tag{19}$$

im abgeschlossenen Intervall [0, 1] *im engen Sinne konvex ist.*

Hierbei nennen wir eine Funktion f^* in [0, 1] *im engen Sinne konvex* (vgl. etwa [3]), falls für alle $x_1 \neq x_2 \in [0, 1]$ und für alle $0 < p_1 < 1$

$$f^*(p_1 x_1 + (1-p_1)x_2) < p_1 f^*(x_1) + (1-p_1) f^*(x_2) \tag{20}$$

gilt (Jensensche Ungleichung).

Alle $f \in \mathbf{K}$ *sind in* (0, 1] *streng monoton wachsend.* Tatsächlich folgt aus (20) mit $x_2 = 0$ wegen $f^*(0) = 0$

$$f^*(p_1 x_1) < p_1 f^*(x_1)$$

für alle $0 < p_1 < 1$, $x_1 \neq 0$, d. h. wegen (19)

$$p_1 x_1 f(p_1 x_1) < p_1 x_1 f(x_1)$$

$$f(p_1 x_1) < f(x_1)$$

für alle $0 < p_1 < 1$, $x_1 \in (0, 1]$, und das war unsere Behauptung.

Andererseits folgt aus der Konvexität von f^* ihre Stetigkeit im offenen Intervall (0, 1) (s. etwa [3]) und somit auch die *Stetigkeit* von

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{x}$$

in (0, 1). Hieraus und aus dem strengen Wachsen von $f(x)$ in (0, 1] folgt die Existenz von

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) \leqq f(1). \tag{21}$$

Wir werden sehen, daß man für unsere Zwecke ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1)$ voraussetzten kann, so daß *aus* $f \in \mathbf{K}$ *die Stetigkeit und strenge Monotonie von f in* (0, 1] *folgt.*

DEFINITION 2. *Mittelwert des Ereignisschemas (der Wahrscheinlichkeitsverteilung)* $\mathfrak{P}$ *mit den Wahrscheinlichkeiten* $p_1, p_2, \ldots, p_n \left(p_j \geqq 0, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right)$ *bezüglich der in* (0, 1] *stetigen und streng monotonen Funktion* f *wird die Größe*

$$M(\mathfrak{P}) = f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) \tag{13}$$

genannt. Dabei wird für $p_j f(p_j)$ *im Falle* $p_j = 0$ *im Sinne von* (19) *durchwegs* 0 *eingesetzt.*

(13) hat auch dann einen Sinn, wenn f nur in (0, 1) stetig ist und (21) besteht. Ist ein $p_k = 1$, so müssen wegen $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1, p_j \geqq 0$ die übrigen $p_j (j \neq k)$ verschwinden, so daß $M(\mathfrak{P}) = f^{-1}(f(1)) = 1$ *unabhängig von* $f(1)$ ist. Deshalb *kann man* $f(1) = \lim_{x \to 1-0} f(x)$, also $f(x)$ *auch in* $x = 1$ *als stetig voraussetzen.*

Aus (13) sieht man sofort, daß $M(\mathfrak{P})$ in das Intervall (0, 1] fällt. Es entsteht die Frage, ob bei gegebenem f und bei beweglichen p_j auch das ganze Intervall (0, 1] durch $M(\mathfrak{P})$ ausgefüllt wird. Wir werden zeigen, daß dies bei $f \in \mathbf{K}$ tatsächlich der Fall ist.

Da $M(\mathfrak{P})$ auf den selben Stellen ihre Extrema erreicht, wo (vgl. (19)) $\sum_{j=1}^{n} f^*(p_j)$, und da (19) konvex ist, reduziert sich die Frage auf Untersuchung der Funktion

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} f^*(p_j) \tag{22}$$

bei konvexem f^* $(f^*(0) = 0)$ im Gebiete $p_j \geqq 0, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Es gilt etwas allgemeiner der

HILFSSATZ 1. *Im Gebiete* $\mathbf{G} = \left((x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \geqq 0, \sum_{j=1}^{n} x_j = c\right)$ *gilt für*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f^*(x_j) \tag{22}$$

bei konvexem f^* *und bei* $f^*(0) = 0$

$$\max_{\mathbf{G}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(c) \tag{23}$$

und

$$\min_{\mathbf{G}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n f^*\left(\frac{c}{n}\right). \tag{24}$$

(23) wurde von R. BELLMAN [5], (24) durch A. WOUK [20] bewiesen, der Vollständigkeit halber beweisen wir sie aber auch hier, umsomehr, da in [5] die Bedingungen für (23) mit $f^*(0) = 0$ ergänzt werden müssen und die in [20] im Rahmen der Theorie der dynamischen Programmierung bewiesene Formel (24) eine unmittelbare Folge der Jensenschen Ungleichung ist.

BEWEIS. Der Satz ist für $c=0$ trivial. Wir setzen also

$$c \neq 0$$

voraus. Da f^* konvex ist und die Summe von konvexen Funktionen wieder konvex ist, ist die durch (22) angegebene F eine konvexe Funktion von n Veränderlichen. $\mathbf{G}$ ist ein konvexes Polyeder im n-dimensionalen Raum mit den Eckpunkten

$$e_j = (\overbrace{0}^{1}, \ldots, \overbrace{0}^{j-1}, \overbrace{c}^{j}, \overbrace{0}^{j+1}, \ldots, \overbrace{0}^{n}),$$

also gilt für einen beliebigen Punkt $x \in \mathbf{G}$

$$x = \sum_{j=1}^{n} q_j e_j \qquad \left(q_j = \frac{x_j}{c} \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\right).$$

Wegen der Jensenschen Ungleichung für konvexe Funktionen mehrerer Veränderlichen (s. etwa [11] Nr. 3.12) gilt

$$F(x) = F\left(\sum_{j=1}^{n} q_j e_j\right) \leqq \sum_{j=1}^{n} q_j F(e_j) = f^*(c) \sum_{j=1}^{n} q_j = f^*(c)$$

(wegen $f^*(0)=0$). Damit ist (23) bewiesen.

Noch einfacher ist der Beweis von (24). Aus der Jensenschen Ungleichung für Funktionen einer Veränderlichen ([11] Nr. 3.5, 3.6) folgt sofort

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(x_1) + f^*(x_2) + \ldots + f^*(x_n) \geqq n f^*\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = n f^*\left(\frac{c}{n}\right),$$

also (24) (auch ohne $f^*(0)=0$ und ohne $x_j \geqq 0$). — Beide Extrema werden von F aufgenommen.

HILFSSATZ 2. *Ist $f \in \mathbf{K}$ gegeben, so füllen die Mittelwerte*

$$M(\mathfrak{P}) = f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) \qquad \left(p_j \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right) \tag{13}$$

das halboffene Intervall $(0, 1]$ *aus.*

BEWEIS. Wir verwenden den Hilfssatz 1 für $c=1$ und für (19), und erhalten

$$\max_{\mathbf{G}} \sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j) = f(1)$$

$$\min_{\mathbf{G}} \sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j) = n \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right),$$

also nimmt $f(M(\mathfrak{P}))$ alle Werte zwischen $f\left(\frac{1}{n}\right)$ und $f(1)$ an (wegen der Stetigkeit von f), woraus die Behauptung sofort folgt.

Aus dem Beweise von (24) sieht man auch, daß bei $f \in \mathbf{K}$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j) > f\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left(p_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right), \tag{25}$$

falls wenigstens ein $p_k \neq \frac{1}{n}$ ist.

§ 2. Eindeutigkeit der Funktionen f in (13)

Setzen wir in (15) $q_k=\frac{1}{m}$ $(k=1, 2, \ldots, m)$, so erhalten wir

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f\left(\frac{p_j}{m}\right)\right)=f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right)\frac{1}{m} \tag{26}$$

oder mit der Bezeichnung

$$f_{(m)}(x)=f\left(\frac{x}{m}\right) \tag{27}$$

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right)=f_{(m)}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f_{(m)}(p_j)\right). \tag{28}$$

Dies wirft die Frage auf, in welchem Maße die Funktion f in (13) bei gegebenem $M(\mathfrak{P})$ bestimmt ist, d. h. welcher Zusammenhang zwischen den Funktionen f und h aus dem Bestehen von

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right)=h^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j h(p_j)\right) \tag{29}$$

folgt. Für Mittelwerte der Gestalt

$$\mathfrak{M}(x, p)=f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j)\right) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} p_j=1\right)$$

gilt

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j)\right)=h^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j h(x_j)\right)$$

$\left(\text{für veränderliche } x_j \text{ und feste oder veränderliche } p_j, j=1, 2, \ldots, n, \sum_{j=1}^{n} p_j=1\right)$

dann und nur dann, falls

$$h(x) = Af(x)+B \tag{30}$$

ist (s. etwa [1] Nr. 2.2.7, 3.1.3, [11] Nr. 3.2, 3.3, wo auch die zu (26) analoge Gleichung, allerdings bei Zulassen beliebiger positiver — nicht nur ganzen — m gelöst wird). Die Lösung von (29) ist eine analoge, aber, wie wir sehen werden, wesentlich schwierigere Aufgabe. Wir werden sie für $f, h\in\mathbf{K}$ lösen und wieder zu (30) gelangen.

Es gilt nämlich der

SATZ 1. *Ist $f, h\in\mathbf{K}$, so ist zum Bestehen von*

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right)=h^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j h(p_j)\right) \qquad \left(p_j\geqq 0, \sum_{j=1}^{n} p_j=1\right) \tag{29}$$

notwendig und hinreichend, daß es Konstante $A>0$ und B gebe derart, daß

$$h(x) = Af(x)+B. \tag{30}$$

BEWEIS. (29) läßt sich mit

$$G(x)=h(f^{-1}(x)) \tag{31}$$

in die Gestalt

$$G\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} p_j G(f(p_j)) \qquad \left(p_j \geqq 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right) \tag{32}$$

schreiben. Wir werden beweisen, daß *aus* (32) *für* $f, h \in \mathbf{K}$ *und für etwa stetige* G

$$G(x) = Ax + B \qquad (A > 0)$$

folgt. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

1. *Ist* G *eine Lösung von* (32), *so ist auch jede Funktion*

$$H(x) = G(x) - (Ax + B) \tag{33}$$

mit beliebigen Konstanten A, B *eine Lösung:*

$$H\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} p_j H(f(p_j)) \qquad \left(p_j \geqq 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right). \tag{34}$$

Tatsächlich folgt aus (32) (falls die Summationsgrenzen nicht ausgeschrieben sind, ist im folgenden immer von $j=1$ bis $j=n$ zu summieren; über die p_j setzen wir immer $\sum p_j = 1$, $p_j \geqq 0$; $j = 1, 2, \ldots, n$ voraus):

$$H(\sum p_j f(p_j)) = G(\sum p_j f(p_j)) - (A \sum p_j f(p_j) + B) =$$
$$= \sum p_j G(f(p_j)) - \sum p_j (A f(p_j) + B) = \sum p_j H(f(p_j))$$

und das war die Behauptung 1.

Natürlich ist mit G auch H stetig. Da A und B in (33) beliebig sind, können wir die Werte von H in zwei Punkten beliebig wählen. Wir wählen sie so, daß

$$H(f(\tfrac{1}{2})) = H(f(\tfrac{1}{4})) = 0 \tag{35}$$

sei. (Die Determinante des Gleichungssystems

$$G(f(\tfrac{1}{2})) - A f(\tfrac{1}{2}) - B = 0$$
$$G(f(\tfrac{1}{4})) - A f(\tfrac{1}{4}) - B = 0$$

für A, B ist von 0 verschieden wegen der strengen Monotonie von f.)

2. *Für diese Funktion* H *gilt die Jensensche Funktionalgleichung*

$$H\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{H(u) + H(v)}{2} \tag{36}$$

für gewisse u, v.

Wir schreiben (34) mit $n+1$ statt n und mit $p_{n+1} = \frac{1}{2}$, $p_j = x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, dann wird wegen (35)

$$H(\Sigma x_j f(x_j) + \tfrac{1}{2} f(\tfrac{1}{2})) = \Sigma x_j H(f(x_j)) \qquad (\Sigma x_j = \tfrac{1}{2},\ x_j \geqq 0;\ j = 1, 2, \ldots, n). \tag{37}$$

Wir bezeichnen $\frac{1}{2} f(\frac{1}{2}) = c$ und verwenden (34) mit $2n$ statt n und mit $p_j = x_j$, $p_{n+j} = y_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum x_j = \sum y_j = \frac{1}{2}$, so wird wegen (37)

$$H(\sum x_j f(x_j) + \sum y_j f(y_j)) = \sum x_j H(f(x_j)) + \sum y_j H(f(y_j)) =$$
$$= H(\sum x_j f(x_j) + c) + H(\sum y_j f(y_j) + c) \qquad (\sum x_j = \sum y_j = \tfrac{1}{2},\ x_j \geqq 0,\ y_j \geqq 0). \tag{38}$$

Aus (38) folgt speziell bei $x_j = y_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$H(2\sum x_j f(x_j)) = 2H(\sum x_j f(x_j) + c)$$

und deshalb geht (38) in

$$H\left(\frac{2\Sigma x_j f(x_j) + 2\Sigma y_j f(y_j)}{2}\right) = \frac{H(2\Sigma x_j f(x_j)) + H(2\Sigma y_j f(y_j))}{2} \tag{39}$$

über. Mit

$$u = 2\sum x_j f(x_j), \quad v = 2\sum y_j f(y_j) \qquad \left(\sum x_j = \sum y_j = \tfrac{1}{2},\ x_j \geqq 0,\ y_j \geqq 0\right) \tag{40}$$

wird aus (39)

$$H\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{H(u) + H(v)}{2}, \tag{36}$$

und das war die Behauptung 2.

3. $H(f(x)) = 0$ *für alle* $x \in (0, \frac{1}{2}]$.

Um dies zu beweisen, untersuchen wir, welche Werte die durch (40) definierten u, v annehmen können. Da

$$f^*(x) = \begin{cases} xf(x) & (x \in (0, 1]) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

konvex ist, gilt laut Hilfssatz 1

$$\max_{\mathbf{G}} \Sigma x_j f(x_j) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\min_{\mathbf{G}} \Sigma x_j f(x_j) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2n}\right)$$

für $\mathbf{G} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_j \geqq 0,\ \sum x_j = \frac{1}{2}\}$. Wegen der Stetigkeit von f nehmen also die u, v in (40) bei fixem n alle Werte zwischen $f\left(\frac{1}{2n}\right)$ und $f\left(\frac{1}{2}\right)$ an. — Nehmen wir nun ein beliebiges $x \in (0, \frac{1}{2}]$, so gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß $x > \frac{1}{2n}$. Bei diesem n nehmen also u und v in (40) alle Werte zwischen $f\left(\frac{1}{2n}\right)$ und $f\left(\frac{1}{2}\right)$ an und für diese u, v gilt die Jensensche Funktionalgleichung (36), deren allgemeine stetige Lösung (vgl. etwa [1] Nr. 2.1.3, 2.1.4, [11] Nr. 3.8) die lineare Funktion ist. Da aber H laut (35) in zwei — wegen der Monotonie von f — verschiedenen und in $\left[f\left(\frac{1}{2n}\right), f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ liegenden Punkten verschwindet, ist H in diesem ganzen Intervall identisch gleich 0, insbesondere auch $H(f(x)) = 0$ und das war die Behauptung 3.

4. $H(f(x)) = 0$ *auch für alle* $x \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Um dies zu beweisen, zeigen wir, daß das obere Ende des Intervalles in dem $H(f(x))$ verschwindet, nur 1 sein kann.

Wir beginnen mit der Definition der Funktion

$$\bar{f}(x)=xf(x)+(1-x)f\left(\frac{1-x}{2}\right) \tag{41}$$

für $x\in(0,1]$. $\bar{f}(x)$ ist offenbar auch *stetig*. Andererseits folgt laut einer bekannten Ungleichung (s. [11] Nr. 3.17, [10], [4] Ch. 1 §§ 28—31) aus $x_k\geqq x_{k+1}$, $y_k\geqq y_{k+1}$ $(k=1,2,\ldots,r-1)$, $\sum_{k=1}^{m}x_k<\sum_{k=1}^{m}y_k$ $(m=1,2,\ldots,r-1)$, $\sum_{k=1}^{r}x_k=\sum_{k=1}^{r}y_k$ und aus der Konvexität im engen Sinne von $f^*(x)$ die Gültigkeit von

$$\sum_{k=1}^{r}f^*(x_k)<\sum_{k=1}^{r}f^*(y_k). \tag{42}$$

Da $f^*(x)=xf(x)$ laut Voraussetzung konvex ist und für $x'>x\in(\frac{1}{3},1]$ auch $x_1=x>\frac{1-x}{2}=x_2=x_3$, $y_1=x'>\frac{1-x'}{2}=y_2=y_3$, $x_1=x<x'=y_1$, $x_1+x_2=\frac{1+x}{2}<\frac{1+x'}{2}=y_1+y_2$, $x_1+x_2+x_3=1=y_1+y_2+y_3$ bestehen, gilt (42) mit $r=3$:

$$\bar{f}(x)=xf(x)+\frac{1-x}{2}f\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{1-x}{2}f\left(\frac{1-x}{2}\right)=\sum_{k=1}^{3}f^*(x_k)<\sum_{k=1}^{3}f^*(y_k)=$$

$$=x'f(x)+(1-x')f\left(\frac{1-x'}{2}\right)=\bar{f}(x')$$

d. h. auch $\bar{f}(x)$ ist *streng monoton wachsend in* $(\frac{1}{3},1]$ (und, wie man ebenso sieht, nimmt $\bar{f}(x)$ in $(0,\frac{1}{3})$ ebenfalls streng monoton ab). Dies kann man auch unabhängig von (42) so einsehen.[2] Aus Hilfssatz 1 (vgl. (25)) folgt, daß der Wert der Funktion (41) nicht kleiner als $f(\frac{1}{3})$ sein kann, da doch $f(\frac{1}{3})$ das — nur bei $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{3}$ angenommene — absolute Minimum der Funktion

$$F(x_1,x_2,x_3)=x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+x_3f(x_3)\qquad(x_k\geqq 0,\ x_1+x_2+x_3=1) \tag{43}$$

ist, und (41) den Wert der Funktion (43) für $x_1=x$, $x_2=x_3=\frac{1-x}{2}$ darstellt.

Andererseits nimmt (41) den Wert $f(\frac{1}{3})$ tatsächlich an, offenbar bei $x=\frac{1}{3}$. Also hat die als Summe streng konvexer Funktionen streng konvexe Funktion (41) ihr Minimum bei $x=\frac{1}{3}$, muss also in $(\frac{1}{3},1]$ *streng monoton wachsen* (s. Figur).

Andererseits gilt

$$\bar{f}(x)<f(x)\quad\text{in}\quad(\tfrac{1}{3},1), \tag{44}$$

da

$$f(x)>f\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

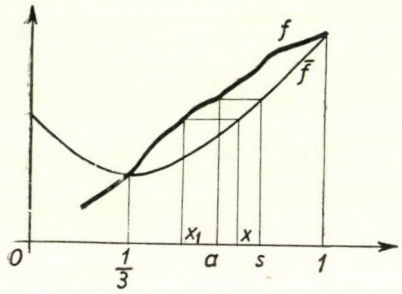
[2] Die hier folgende Verkürzung unseres Beweises für Behauptung 4 — der auf ähnlichen Gedanken beruhte — verdanken wir Herrn P. BÁRTFAI.

$\left(x > \frac{1}{3} > \frac{1-x}{2}, f \text{ streng monoton wachsend}\right)$ und

$$\bar{f}(x) = xf(x) + (1-x)f\left(\frac{1-x}{2}\right) < xf(x) + (1-x)f(x) = f(x)$$

ist, dagegen

(45) $$\bar{f}(\tfrac{1}{3}) = f(\tfrac{1}{3}), \quad \bar{f}(1) = f(1).$$



Jetzt kehren wir zu unserer Behauptung 4 zurück und bezeichnen mit a den größten x-Wert, so daß

(46) $$H[f(x)] = 0 \quad \text{falls} \quad x \in (0, a].$$

Aus 3 folgt, daß $a \geqq \frac{1}{2}$ ist. Wir wollen $a = 1$ beweisen. Wir setzen ad absurdum voraus, daß

(47) $$a < 1$$

ist.

Von (44) und (45) folgt wegen der Stetigkeit von f und $\bar{f}$ die Existenz eines $a < s < 1$ derart, daß

$$f(a) = \bar{f}(s),$$

und für alle $a < x < s$ je eines Wertes $\frac{1}{3} < x_1 < a$ derart, daß

(48) $$f(x_1) = \bar{f}(x).$$

Laut Gleichung (34) $\left(n = 3, p_1 = x, p_2 = p_3 = \frac{1-x}{2}\right)$ gilt für $x \in (a, s]$

(49) $$H(\bar{f}(x)) = H\left(xf(x) + (1-x)f\left(\frac{1-x}{2}\right)\right) = xH[f(x)]$$

$\left(\text{da } H\left(f\left(\frac{1-x}{2}\right)\right) = 0 \text{ ist, wegen (46) und wegen } \frac{1-x}{2} < \frac{1}{2} \leqq a\right)$. Es gibt aber ein x_1 $(\frac{1}{3} < x_1 < a)$ derart, daß (48) erfüllt ist, also laut (49), (48) und (46)

$$xH[f(x)] = H[\bar{f}(x)] = H[f(x_1)] = 0$$

besteht, d. h.

$$H[f(x)] = 0 \quad \text{falls} \quad x \in (a, s)$$

gilt, also war a doch nicht die größte Zahl, für die (46) gilt. Dies ist ein Widerspruch: (47) gilt also nicht, sondern es ist $a = 1$ und damit ist auch die Behauptung 4 bewiesen.

Da also laut 3 und 4

$$H(f(x)) \equiv 0 \quad \text{für alle} \quad x \in (0, 1]$$

ist, folgt aus (33)

$$G(f(x)) = Af(x) + B,$$

wie behauptet. Aus (31) erhält man dann

$$h(x) = Af(x) + B. \tag{30}$$

Da $f(x)$ und $h(x)$ beide streng monoton wachsen, muß $A > 0$ sein. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

§ 3. Der Hauptsatz

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den folgenden

SATZ 2. *Ist $f \in \mathbf{K}$, so läßt sich jede Lösung der Funktionalgleichung*

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p_j q_k f(p_j q_k)\right) = f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) f^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} q_k f(q_k)\right) \tag{15}$$

$$\left(p_j > 0,\ q_k > 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{m} q_k = 1\right)$$

in einer der Gestalten

$$f(x) = a \log_2 x + b \qquad (a > 0) \tag{16}$$

$$f(x) = ax^{\alpha-1} + b \qquad (\alpha > 1,\ a > 0,\ \text{oder}\ 0 < \alpha < 1,\ a < 0) \tag{17}$$

darstellen.

BEWEIS. Wie wir am Anfang des § 2 gesehen haben, folgt aus (15) für $q_k = \frac{1}{m}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) mit der Bezeichnung

$$f_{(m)}(x) = f\left(\frac{x}{m}\right) \tag{27}$$

das Bestehen von

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) = f_{(m)}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f_{(m)}(p_j)\right), \tag{28}$$

für $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, $p_j > 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) aber wegen der Ausbreitung der Definition von $f^*(x) = xf(x)$ ($x > 0$) durch $f^*(0) = 0$ bleibt (28) auch dann gültig, wenn gewisse $p_j = 0$ sind. (Wenn etwa $p_n = p_{n-1} = \ldots = p_{r+1} = 0$ ist, so wird aus (28)

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{r} p_j f(p_j)\right) = f_{(m)}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{r} p_j f_{(m)}(p_j)\right) \qquad \left(\sum_{j=1}^{r} p_j = 1;\ p_j > 0;\ j = 1, 2, \ldots, r\right)$$

wieder eine Gleichung von derselben Gestalt mit weniger aber nichtverschwindenden p_j). — Nun ist schon (28) eine Funktionalgleichung der Gestalt (29), es folgt also aus Satz 1, daß

$$f_{(m)}(x) = A_{(m)} f(x) + B_{(m)}$$

(die „Konstanten" $A_{(m)} = A(m)$, $B_{(m)} = B(m)$ hängen natürlich von m ab) oder mit (27)

$$f\left(\frac{x}{m}\right) = A(m) f(x) + B(m) \tag{50}$$

($x \in (0, 1]$, m durchläuft die positiven ganzen Zahlen)

gilt. Im folgenden wollen wir diese Funktionalgleichung (50) lösen.

Wir setzen in (50) $x=1$ und subtrahieren die so erhaltene Gleichung

$$f\left(\frac{1}{m}\right)=A(m)f(1)+B(m)$$

von (50):

$$f\left(\frac{x}{m}\right)=A_{(m)}(f(x)-f(1))+f\left(\frac{1}{m}\right).$$

Mit der Bezeichnung

$$f_1(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)-f(1), \quad t=\frac{1}{x} \tag{51}$$

gelten also

$$f_1(tm) = A(m)f_1(t)+f_1(m) \tag{52}$$

und

$$f_1(1)=0. \tag{53}$$

— Mit $t=n$ (n eine beliebige positive ganze Zahl) folgt wegen der Symmetrie der linken Seite in m und n aus (52)

$$f_1(mn) = A(m)f_1(n)+f_1(m) = A(n)f_1(m)+f_1(n).$$

Wir fixieren $n=2$:

$$(A(m)-1)f_1(2) = (A(2)-1)f_1(m)$$

und beobachten, daß mit $f(x)$ auch $f_1(t)$ *streng monoton* ist, also wegen (53) $f_1(2)\neq 0$ sein muß, und erhalten so mit der Bezeichnung $c=\dfrac{A(2)-1}{f_1(2)}$ (konstant)

$$A(m) = cf_1(m)+1,$$

so daß (52) in

$$f_1(tm) = cf_1(t)f_1(m)+f_1(t)+f_1(m) \tag{54}$$

übergeht.

Zur Lösung von (54) unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Falls $c=0$ ist, so wird

$$f_1(tm) = f_1(t)+f_1(m) \quad (t\in[1,\infty),\ m \text{ durchläuft die positiven ganzen Zahlen}), \tag{18}$$

2. falls dagegen $c\neq 0$ ist, so kann (54) mit der Bezeichnung

$$h_1(t) = cf_1(t)+1 \tag{55}$$

in

$$h_1(tm) = h_1(t)h_1(m) \quad (t\in[1,\infty),\ m \text{ durchläuft die positive ganze Zahlen}) \tag{56}$$

umgeschrieben werden.

In den hier folgenden beiden Lemmata werden wir zeigen, daß im wesentlichen

$$f_1(t) = -a\log_2 t \tag{57}$$

bzw.

$$h_1(t)=t^{1-\alpha} \tag{58}$$

die allgemeinen stetigen Lösungen von (18) und (56) sind. Also ergeben sich laut (55) und (51)

$$f(x) = a \log_2 x + b \tag{59}$$

bzw.

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} - 1}{c} + b' = a x^{\alpha-1} + b. \tag{60}$$

Diese Funktionen sind beliebig oft differenzierbar. Da $f \in \mathbf{K}$ sein soll, wird in (59) wegen

$$(xf(x))'' = (ax \log_2 x + bx)'' = a \frac{\log_2 e}{x} > 0$$

$a > 0$ sein. In (60) soll

$$(xf(x))'' = (ax^{\alpha} + bx)'' = a\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} > 0$$

sein, also $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ und falls $\alpha > 1$, so auch $a > 0$, falls $0 < \alpha < 1$ so $a < 0$ und falls $\alpha < 0$ so $a > 0$. $f(x) = ax^{\alpha-1} + b$ ist aber bei $\alpha < 0$, $a > 0$ nicht wachsend, so daß der letzte Fall nicht eintreten kann (in diesem Falle würde auch die mit $f^*(0) = 0$ *ergänzte* Funktion $f^*(x) = xf(x)$ nicht mehr konvex sein). Somit erhalten wir (16) und (17) und der Satz 2 ist bewiesen.

Es bleibt noch übrig, die folgenden zwei Lemmata zu beweisen:

LEMMA 1. *Die allgemeine stetige Lösung von*

$$f_1(tm) = f_1(t) + f_1(m) \qquad (t \in [1, \infty),\ m \text{ durchläuft die positiven ganze Zahlen}) \tag{18}$$

ist

$$f_1(t) = -a \log_2 t, \tag{57}$$

wo a eine beliebige Konstante ist.

BEWEIS. Mit $m = 1$ folgt aus (18)

$$f_1(1) = 0. \tag{61}$$

Setzt man in (18) (n eine beliebige positive ganze Zahl)

$$t = n, \tag{62}$$

so erhält man

$$f_1(mn) = f_1(m) + f_1(n). \tag{63}$$

Andererseits gilt wegen (18), (61) und wegen der Stetigkeit von $f_1(t)$

$$\lim_{m \to \infty} (f_1(m+1) - f_1(m)) = \lim_{m \to \infty} \left(f_1\left[m\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right] - f_1(m) \right) =$$

$$= \lim_{m \to \infty} f_1\left(1 + \frac{1}{m}\right) = f_1(1) = 0.$$

Nach einem bekannten Satze von P. ERDŐS ([9], vgl. auch [14] und [16]) ist die

allgemeine Lösung von (63), für die $\lim_{m\to\infty}(f_1(m+1)-f_1(m))=0$ gilt,

$$f_1(m)=a'\log m, \tag{64}$$

wo a' eine beliebige Konstante ist. Verwenden wir statt ihr

$$a = -a'\log 2,$$

so wird aus (64)

$$f_1(m) = -a\log_2 m. \tag{65}$$

Bisher haben wir (vgl. (62)) (18) im wesentlichen nur für ganze t ausgenützt, und auch die Lösung nur für ganze Werte erhalten.

Setzen wir nun in (18) $t=\frac{k}{m}$ (auch $k\geqq m$ eine positive und ganze Zahl), so erhalten wir wegen (65)

$$-a\log_2 k=f_1(k)=f_1\left(\frac{k}{m}m\right)=f_1\left(\frac{k}{m}\right)+f_1(m)=f_1\left(\frac{k}{m}\right)-a\log_2 m,$$

d. h.

$$f_1(t) = -a\log_2 t$$

für jede rationale Zahl in $[1,\infty)$. Ist nun $t\in[1,\infty)$ irrational, so gibt es eine Folge $r_n\to t$ von rationalen Zahlen und wegen der Stetigkeit von f_1 gilt

$$f_1(t)=\lim_{n\to\infty}f_1(r_n)=-a\log_2 t, \quad \text{w. z. b. w.}$$

LEMMA 2. *Die allgemeine stetige Lösungen von*

$$h_1(tm) = h_1(t)h_1(m) \tag{56}$$

($t\in[1,\infty)$, *m durchläuft die positiven ganzen Zahlen*)

sind

$$h_1(t)\equiv 0, \tag{66}$$

$$h_1(t)=\begin{cases}0 & \text{für} \quad t\in[2,\infty),\\ 1 & \text{für} \quad t=1,\\ \text{beliebig stetig} & \text{für} \quad t\in[1,2]\end{cases} \tag{67}$$

und

$$h_1(t)=t^{1-\alpha}, \tag{68}$$

wo α *eine beliebige Konstante ist.*

Der Beweis verläuft ähnlich wie der vom Lemma 1, doch ergeben sich auch neue Schwierigkeiten: Setzen wir in (56) $m=1$, so erhalten wir entweder $h_1(t)\equiv 0$, d. h. (66) oder

$$h_1(1)=1. \tag{69}$$

Wir untersuchen weiter den letzteren Fall und unterscheiden zwei Unterfälle:

1. für irgendein m gilt $h_1(m)=0$ und
2. $h_1(m)$ ist für kein positives ganzes m gleich 0.

1. Ist für ein m $h_1(m)=0$, so folgt aus (56) $h_1(tm)=0$ für $t\in[1,\infty)$, also

$$h_1(t)=0 \quad \text{für} \quad t\in[m,\infty), \tag{70}$$

insbesondere $h_1(n)=0$ für $n \geqq m$. Wegen (69) gibt es ein $1 \leqq m_0 \leqq m$ derart, daß

$$h_1(m_0) \neq 0, \quad \text{aber} \quad h_1(n)=0 \quad \text{für} \quad n > m_0.$$

So wird laut (70) auch $h_1(t) \equiv 0$ in $[m_0+1, \infty)$. Weiter folgt aus (56)

$$h_1(t)=\frac{h_1(tm_0)}{h_1(m_0)}, \tag{71}$$

und für $t \in [2, \infty) \subseteq \left[\frac{m_0+1}{m_0}, \infty\right)$ wird $tm_0 \in [m_0+1, \infty)$, d. h. wegen (71)

$$h_1(t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad t \in [2, \infty). \tag{72}$$

Sind aber (72) und (69) erfüllt und $h_1(t)$ stetig, aber sonst in (1, 2) beliebig, so besteht die Funktionalgleichung (56) immer, und so erhalten wir die Lösung (67).

2. Ist $h_1(m) \neq 0$ für alle positive ganze m, so folgt aus (56) mit $t=m$

$$h_1(m^2)=h_1(m)^2 > 0. \tag{73}$$

Aus (56) folgt auch

$$h_1(m^2n^2)=h_1(m^2)h_1(n^2),$$

so daß wir mit

$$f_0(m) = \log h_1(m^2), \tag{74}$$

was wegen (73) immer einen Sinn hat, wieder

$$f_0(mn) = f_0(m)+f_0(n) \tag{63}$$

erhalten und auch hier ist wegen (74), (56), (69) und wegen der Stetigkeit von $h_1(t)$

$$\lim_{m\to\infty}(f_0(m+1)-f_0(m))=\lim_{m\to\infty}\log\left(h_1\left[m^2\left(1+\frac{1}{m}\right)^2\right]\Big/h_1(m^2)\right)=$$

$$=\log\lim_{m\to\infty}h_1\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^2\right)=\log h_1(1)=0.$$

So folgt aus dem oben zitierten Satz von ERDŐS wieder

$$f_0(m) = a' \log m,$$

d. h. laut (74)

$$h_1(m^2)=e^{\frac{a'}{2}\log m^2}=(m^2)^{1-\alpha} \qquad \left(\alpha=1-\frac{a'}{2}\right). \tag{75}$$

Setzen wir in (56) $m=j^2$, $t=\frac{k^2}{j^2}$ $(k^2 \geqq j^2)$, so erhalten wir wegen (75)

$$(k^2)^{1-\alpha}=h_1(k^2)=h_1\left(\frac{k^2}{j^2}j^2\right)=h_1\left(\frac{k^2}{j^2}\right)h_1(j^2)=h_1\left(\frac{k^2}{j^2}\right)(j^2)^{1-\alpha},$$

also

$$h_1(t)=t^{1-\alpha} \quad \text{für alle} \quad t=\frac{k^2}{j^2} \in [1, \infty).$$

Da auch diese Zahlen überall dicht in $[1, \infty)$ liegen, ergibt die Stetigkeit von h_1

$$h_1(t) = t^{1-\alpha} \quad \text{in} \quad [1, \infty), \tag{68}$$

und damit ist Lemma 2 vollständig bewiesen.

Aus Lemma 2 folgt übrigens Lemma 1 ($h_1(t) = e^{f_1(t)}$), wir wollten aber den Beweis des schwierigeren Lemmas 2 durch den des einfacheren Lemmas 1 vorbereiten.

Bei dem Beweis vom Satz 2 kommen die Lösungen (66) und (67) von Lemma 2 natürlich nicht in Betracht, da wegen (55) und (51)

$$h_1(t) = cf\left(\frac{1}{t}\right) - cf(1) + 1 \qquad (c \neq 0)$$

auch streng monoton ist, wir wollten aber die auch in sich als interessant erscheinenden Lemmata 1, 2 unter etwas allgemeineren Voraussetzungen beweisen. — *Die Lemmata* 1 *und* 2 *bleiben aber auch gültig, wenn man in ihnen das Wort „stetig" überall durch „monoton" ersetzt*, da laut eines anderen Satzes von P. ERDŐS ([9] vgl. auch [13]) auch alle monotone Lösungen der Funktionalgleichung (63) von der Gestalt (64) sind und da aus dem Bestehen von (57) bzw. (68) für $t = r = \frac{k}{m}$ bzw. $t = r = \frac{k^2}{j^2}$ auch unter Voraussetzung der Monotonie von f_1 bzw. h_1 ihre Gültigkeit für beliebige $t \in [1, \infty)$ folgt (man braucht nur je eine wachsende und eine abnehmende Folge von rationalen Zahlen bzw. ihrer Quadraten zu betrachten, die zu t konvergieren).

Aus Satz 2 ergeben sich für den Hauptgegenstand unserer Arbeit die folgenden Korollarien:

KOROLLAR 1. *Ist*

$$f^*(x) = \begin{cases} xf(x) & \text{für} \quad x \in (0, 1], \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \tag{19}$$

in $[0, 1]$ *im engen Sinne konvex, so sind*

$$M_1(\mathfrak{P}) = \prod_{j=1}^{n} p_j^{p_j}$$

und

$$M_\alpha(\mathfrak{P}) = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \qquad (\alpha > 0, \alpha \neq 1)$$

die allgemeinste Mittelwerte von der Gestalt

$$M(\mathfrak{P}) = f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f(p_j)\right) \qquad \left(p_j > 0, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right), \tag{13}$$

die multiplikativ

$$M(\mathfrak{P} * \mathfrak{Q}) = M(\mathfrak{P})\, M(\mathfrak{Q}) \tag{14}$$

sind (d. h. für die (15) *gilt).*

Wegen (11) wird aus (16) und (17)

$$g(t) = -at+b \qquad (a>0)$$

bzw.

$$g(t)=a2^{(1-\alpha)t}+b \qquad (\alpha>1, a>0 \quad \text{oder} \quad 0<\alpha<1, a<0),$$

und wir haben (vgl. auch (12)) das

KOROLLAR 2. *Ist*

$$f^*(x)=\begin{cases} xg(-\log_2 x) & \text{für} \quad x\in(0,1], \\ 0 & \text{für} \quad x=0 \end{cases}$$

in [0, 1] *im engen Sinne konvex, so sind die Entropien positiver Ordnung*

$$I_\alpha(\mathfrak{P}) = (1-\alpha)^{-1}\log_2\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^\alpha\right) \qquad (\alpha>0, \alpha\neq 1) \tag{5}$$

und die Shannonsche Entropie

$$I_1(\mathfrak{P})=\sum_{j=1}^{n} p_j \log_2\frac{1}{p_j} \tag{4}$$

die einzigen Informationsmaße der Gestalt

$$I(\mathfrak{P})=g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j g(-\log_2 p_j)\right) \qquad \left(p_j>0, \sum_{j=1}^{n} p_j=1\right), \tag{6}$$

die additiv

$$I(\mathfrak{P}*\mathfrak{Q}) = I(\mathfrak{P})+I(\mathfrak{Q}) \tag{7}$$

sind (d. h. für die (8) *gilt).*

§ 4. Bemerkungen

1. Wie man aus dem Beweise des Satzes 2 (und der Korollarien) gleich sieht, haben wir (15) — also auch (8) — (für beliebige $p_j>0$ mit $\sum_{j=1}^{n} p_j=1$, aber) nur für

$$q_k=\frac{1}{m} \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

ausgenützt.

Unser Korollar 2 beantwortet auch eine von A. RÉNYI in [16] (S. 552) aufgeworfene offene Frage bezüglich unvollständiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zeigt, daß man in seinem „Theorem 2" (S. 553) die Einschränkung „with $g(x)=g_\alpha(x)$ where $g_\alpha(x)$ is defined by (2. 13), $\alpha>0$" durch $g(-\log_2 x)\in\mathbf{K}$ ersetzen kann.

2. Natürlich bleiben unsere Überlegungen mutatis mutandis auch dann gültig, wenn die Funktionenklasse **K** statt der Konvexität mit der Konkavität im engen Sinne in [0, 1] der Funktionen

$$f^*(x)=\begin{cases} xf(x) & \text{für} \quad x\in(0,1], \\ 0 & \text{für} \quad x=0 \end{cases}$$

definiert wird. — Die Funktionen

$$f^*(x)=\begin{cases} ax^\alpha+bx & \text{für } x\in(0,1],\\ 0 & \text{für } x=0\end{cases}$$

sind bei $\alpha<0$ — da $\lim_{x\to 0}(ax^\alpha+bx)=\pm\infty$ ist — weder konvex noch konkav im *abgeschlossenen* Intervall [0, 1], und *das* schließt die Entropien negativer Ordnung aus.

Ebenfalls würden unsere Betrachtungen mit kleineren Veränderungen gültig bleiben, wenn in der Definition von **K** nur Konvexität im breiteren Sinne von $f^*(x)$ gefordert wäre, dann würde aber auch $\alpha=0$,

$$f(x)=\frac{a}{x}+b,$$

$$f^*(x)=\begin{cases} a+bx & \text{für } x\in(0,1],\\ 0 & \text{für } x=0\end{cases}$$

($a<0$) in Frage kommen. In diesem Falle ist aber

$$M_0(\mathfrak{P})=f^{-1}\left(\sum_{j=1}^n p_j f(p_j)\right)=\frac{1}{n}$$

und natürlich auch

$$I_0(\mathfrak{P})=-\log_2 M(\mathfrak{P})=\log_2 n$$

(wegen (12)) von den p_j unabhängig und deshalb als Informationsmaß nicht brauchbar. Deshalb war es zweckmäßig, sich bei der Definition von **K** auf in engem Sinne konvexe f^* zu beschränken.

Unabhängig davon, ob $f\in\mathbf{K}$ ist oder nicht, wollen wir zeigen, daß

$$M(\mathfrak{P})=f^{-1}\left(\sum_{j=1}^n p_j f(p_j)\right)\qquad\left(\sum_{j=1}^n p_j=1,\ p_j>0\right), \tag{13}$$

oder

$$I(\mathfrak{P})=g^{-1}\left(\sum_{j=1}^n p_j g(-\log_2 p_j)\right)\qquad\left(\sum_{j=1}^n p_j=1,\ p_j>0\right) \tag{6}$$

dann und nur dann von den p_j unabhängig ist, wenn

$$f(x)=\frac{a}{x}+b,$$

d. h.

$$g(t)=a2^t+b$$

ist.

Dies ergibt sich mit $xf(x)=xg(-\log_2 x)=f^*(x)$ aus dem folgenden

LEMMA 3. *Ist $f^*(x)$ in (0, 1] stetig, so ist*

$$f^*(p_1)+f^*(p_2)+\ldots+f^*(p_n)=c_n\qquad(p_1+p_2+\ldots+p_n=1,\ p_j>0,\ j=1,2,\ldots,n) \tag{76}$$

dann und nur dann von den p_j unabhängig, wenn

$$f^*(x) = a+bx \quad in \quad (0, 1] \tag{77}$$

ist.

Wir werden dies sogar unter der schwächeren Voraussetzung beweisen, daß (76) nur für ein einziges $n>2$ gültig ist. (Auch die Stetigkeitsvoraussetzung läßt sich mildern.)

BEWEIS. Wir nehmen zwei beliebige Zahlen $q_1, q_2 \in (0, \frac{1}{2})$ an. Es gibt offenbar $p_j>0$ $(j=3, \ldots, n)$, so daß

$$q_1+q_2+p_3+\ldots+p_n = 1 \tag{78}$$

sei. Wir setzen in (76) einmal $p_1=q_1, p_2=q_2$, das anderemal $p_1=p_2=\frac{q_1+q_2}{2}$ ein und wählen $p_3, \ldots, p_n$, so daß (78) erfüllt sei (vgl. [1] Nr. 2.1.4). Dann erhalten wir

$$f^*(q_1)+f^*(q_2)+f^*(p_3)+\ldots+f^*(p_n) = c_n$$

bzw.

$$2f^*\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)+f^*(p_3)+\ldots+f^*(p_n)=c_n.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen vergleichen, erhalten wir die Jensensche Funktionalgleichung

$$f^*\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)=\frac{f^*(q_1)+f^*(q_2)}{2} \quad \text{für alle} \quad q_1, q_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

(vgl. (36)), und da $f^*(x)$ als stetig vorausgesetzt wurde, gilt

$$f^*(x) = a+bx \quad \text{für alle} \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Insbesondere sehen wir aus (76), wenn wir alle $p_j < \frac{1}{2}$ wählen, daß *nur*

$$c_n = an+b \tag{79}$$

sein kann. Es sei endlich $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, dann setzen wir in (76) $p_1=x$, und so sind alle p_j $(j=2, 3, \ldots, n)$ in $(0, \frac{1}{2})$, so daß wegen (79) und wegen der sich in $(0, \frac{1}{2})$ schon als gültig erwiesenen Formel (77)

$$f^*(x)+(n-1)a+b(1-x) = an+b$$

besteht. Also gilt

$$f^*(x) = a+bx \quad \text{auch für alle} \quad x \in [\tfrac{1}{2}, 1],$$

und damit ist Lemma 3 vollständig bewiesen.

3. Mit Hilfe der Lemmata 1 und 3 kann man auch eine neue Lösung einer Verallgemeinerung der folgenden Fragestellung von T. W. CHAUNDY—J. B. MC LEOD [6] geben. Das von ihnen gelöste — aus der statistischen Thermodynamik herkommende — Problem war, daß

$$F(x) = ax \log x \tag{80}$$

die einzige stetige Lösung von

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} F(p_j q_k) = \sum_{j=1}^{n} F(p_j) + \sum_{k=1}^{m} F(q_k) \tag{81}$$

$$\left(n, m = 1, 2, \ldots;\ \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{m} q_k = 1;\ 0 \leqq p_j \leqq 1, j = 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqq q_k \leqq 1, k = 1, 2, \ldots, m\right)$$

ist.[3] Wir werden (81) *nur für* $n = m$, $p_j \neq 0$, $q_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *voraussetzen* (letztere Einschränkung ist vorteilhaft, weil (80) für $x = 0$ nicht definiert ist), und beweisen den

SATZ 3. *Die allgemeinste in* $(0, 1]$ *stetige Lösung der Funktionalgleichung*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} F(p_j q_k) = \sum_{j=1}^{n} F(p_j) + \sum_{k=1}^{n} F(q_k), \tag{82}$$

$$\left(n = 1, 2, \ldots;\ \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{n} q_k = 1;\ p_j > 0, q_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n\right)$$

ist

$$F(x) = ax \log x \qquad (x \in (0, 1]). \tag{80}$$

BEWEIS. Man setze in (82) $q_k = \dfrac{1}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ um

$$n \sum_{j=1}^{n} F\left(\frac{p_j}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} F(p_j) + nF\left(\frac{1}{n}\right)$$

zu erhalten. Dies können wir auch in die Gestalt

$$\sum_{j=1}^{n}\left(F\left(\frac{p_j}{n}\right) - \frac{1}{n} F(p_j)\right) = F\left(\frac{1}{n}\right)$$

schreiben, d. h. für

$$f_n^*(x) = F\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{n} F(x) \tag{83}$$

gilt

$$\sum_{j=1}^{n} f_n^*(p_j) = F\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} p_j = 1;\ p_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$$

[3] Wie es sich von einem Briefe des Herrn W. B. BROWN, auf den sich die Arbeit [6] beruft, herausstellte, handelt es sich hier auch um eine Charakterisierung einer Entropie, nämlich der thermodynamischen, die aber mit der Shannonschen (4) identisch ist: Es wird vorausgesetzt, daß

$$I(\mathfrak{P}) = \sum_{j=1}^{n} F(p_j)$$

besteht, F stetig ist und die Additivitätsbedingung (7) erfüllt ist. Dann zeigt Satz 3, daß (abgesehen von einer multiplikativen Konstante) nur die Shannonsche Entropie (4) diese beiden Bedingungen erfüllt.

eine Gleichung der Gestalt (76). Laut Lemma 3 wird

$$f_n^*(x) = a_n + b_n x \quad \text{in} \quad (0, 1] \tag{84}$$

und (s. (79))

$$F\left(\frac{1}{n}\right) = a_n n + b_n . \tag{85}$$

Aus (82) folgt aber für $n = 1$ $F(1) = 0$, und aus (83) und (84) $F\left(\frac{1}{n}\right) = f_n^*(1) = a_n + b_n$, was mit (85) verglichen $a_n = 0$, $b_n = F\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \neq 1)$ ergibt, so daß (83) und (84) in die auch für $n = 1$ gültige Gleichung

$$F\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} F(x) + F\left(\frac{1}{n}\right) x \qquad (x \in (0, 1], n = 1, 2, \ldots) \tag{86}$$

übergehen. Dividieren wir durch $\frac{x}{n}$ und schreiben $x = \frac{1}{t}$,

$$f_1(t) = tF\left(\frac{1}{t}\right), \tag{87}$$

so wird aus (86)

$$f_1(tn) = f_1(t) + f_1(n) \qquad (t \in [1, \infty);\ n = 1, 2, \ldots),$$

d. h. (18). Da mit $F(x)$ auch $f_1(t)$ in $[1, \infty)$ stetig ist, folgt aus Lemma 1 $f_1(t) = -a \log t$ und aus (87) mit $x = \frac{1}{t}$

$$F(x) = ax \log x \qquad (x \in (0, 1]) \text{ w. z. b. w.} \tag{80}$$

Wie die Lemmata 1, 2 und 3, so kann auch der Satz 3 unter anderen Bedingungen etwa *Monotonie* von $F(x)/x$ statt Stetigkeit (oder unter schwächeren Voraussetzungen) bewiesen werden.

4. Wir haben am Anfang dieser Arbeit erwähnt, daß die Entropie (1) eines Ereignisses aus der Additivität (2) und der *Monotonie* von $I(p)$ abgeleitet werden kann. Im folgenden wollen wir zeigen, daß bei der Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung (5) und der Shannonschen Entropie (4) eines Ereignisschemas unter den Informationsmaßen (6) *die* neben der Additivität (7) noch vorausgesetzte *Bedingung* $f(x) = g(-\log_2 x) \in \mathbf{K}$ *eben mit einer Art Monotonie von* $I(\mathfrak{P})$ *äquivalent ist, nämlich mit dem Bestehen der* wichtigen *Ungleichung*

$$I(\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{P}) \leqq I(\mathfrak{Q}) \tag{88}$$

(die Information, die aus einer Realisierung des Ereignisschemas $\mathfrak{Q}$ *gewonnen wird, kann sich nur verkleinern, wenn wir zuvor ein anderes Ereignisschema* $\mathfrak{P}$ *realisieren), mit Gleichheitszeichen nur falls* $\mathfrak{Q}$ *von* $\mathfrak{P}$ *unabhängig ist* (vgl. auch [7] § 1, [8] § 1 und [2]). Hierbei ist (vgl. (10))

$$I(\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{P}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{k=1}^{m} f^*(q_{jk})\right) \qquad \left(p_j \geqq 0, q_{jk} \geqq 0, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1, \sum_{k=1}^{m} q_{jk} \leqq 1\right) \tag{89}$$

und (vgl. (6))

$$I(\mathfrak{Q}) = g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} f^*(q_k)\right) \qquad \left(q_k = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{jk}\right), \tag{90}$$

wobei

$$f^*(x) = \begin{cases} x g(-\log_2 x) & \text{für} \quad x \in (0, 1], \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \tag{91}$$

und $p_j \geqq 0$, $q_{jk} \geqq 0$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ aber $\sum_{j=1}^{m} q_{jk} \leqq 1$ ist (d. h. wie auch in [8] § 1 *auch unvollständige Ereignisschemata zugelassen werden*).

(88) folgt aus der Konvexität im engen Sinne von (91) wegen der Jensenschen Ungleichung ([11] Nr. 3. 5, 3. 6)

$$g(I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P})) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_j f^*(q_{jk}) \geqq \sum_{k=1}^{m} f^*\left(\sum_{j=1}^{n} p_j q_{jk}\right) = \sum_{k=1}^{m} f^*(q_k) = g(I(\mathfrak{Q}))$$

(da $g(t) = f(2^{-t})$ bei streng wachsendem f streng abnehmend ist) mit Gleichheitszeichnen nur im Falle $p_j = 0$ $(j \neq j_i,\ i = 1, 2, \ldots, l)$, $q_{j_1 k} = q_{j_2 k} = \ldots = q_{j_l k}$ (für alle k).

Umgekehrt *folgt die Konvexität im engen Sinne von* (91) *falls g streng monoton abnimmt*[4] schon *aus dem Spezialfall* $m = 1$, $n = 2$ *von* (88), d. h. aus

$$g^{-1}(p_1 f^*(q_{11}) + p_2 f^*(q_{21})) < g^{-1}(f^*(p_1 q_{11} + p_2 q_{21}))$$

$$(p_1 + p_2 = 1;\ 0 < p_1 < 1,\ 0 \leqq q_{j1} \leqq 1, j = 1, 2;\ q_{11} \neq q_{21})$$

(vgl. (89) und (90)). Dann ist nämlich

$$p_1 f^*(q_{11}) + p_2 f^*(q_{21}) > f^*(p_1 q_{11} + p_2 q_{21}) \quad (p_1 + p_2 = 1)$$

für alle $0 < p_1 < 1$, $0 \leqq q_{j1} \leqq 1$ $(j = 1, 2;\ q_{11} \neq q_{21})$, und das ist die Jensensche Ungleichung (20), d. h. $f^*(x)$ ist in [0, 1] im engen Sinne konvex.

Wir haben also das

LEMMA 4. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die streng wachsende Funktion* $f(x) = g(-\log_2 x) \in \mathbf{K}$ *sei, d. h. für die Konvexität im engen Sinne der Funktion*

$$f^*(x) = \begin{cases} x g(-\log_2 x) & \textit{für} \quad x \in (0, 1], \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \end{cases} \tag{91}$$

$(g(t)$ *streng abnehmend*$)$ *ist die Bedingung*

$$I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P}) \leqq I(\mathfrak{Q}) \tag{88}$$

mit (89) *und* (90), *wobei das Gleichheitszeichen nur in dem Falle besteht, wo* $\mathfrak{Q}$ *von* $\mathfrak{P}$ *unabhängig ist.*

Insbesondere kann also im Korollar 2 die Forderung der Konvexität im engen Sinne von $f^*(x)$ durch diese „Monotonitäts"-Bedingung ersetzt werden.

[4] Ist g streng monoton *wachsend*, so wird $f^*(x)$ im engen Sinne *konkav*, was aber im Wesen nichts ändert (s. Bemerkung 2).

5. Wie in der Einleitung erwähnt (vgl. auch [15]), *erfüllt unter den* $I_\alpha(\mathfrak{P})$ *nur* $I_1(\mathfrak{P})$ *die stärkere Additivitätsbedingung*

$$I(\mathfrak{P} * \mathfrak{Q}) = I(\mathfrak{P}) + I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P}), \tag{9}$$

falls die bedingte Entropie $I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P})$ *für vollständige Ereignisschemata durch* (10) *definiert wird, insbesondere*

$$I_1(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P}) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{k=1}^{m} q_{jk} \log_2 q_{jk}$$

$$I_\alpha(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P}) = (1-\alpha)^{-1} \log_2 \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{k=1}^{m} q_{jk}^\alpha \right) \qquad (\alpha \neq 1) \tag{92}$$

$\left(p_j > 0,\ q_{jk} > 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{m} q_{jk} = 1 \right)$ *ist.* Tatsächlich bedeutet (9) für $I_\alpha(\mathfrak{P})$ $(\alpha \neq 1)$ und für $m = n = 2$

$$(1-\alpha)^{-1} \log_2 \left[p_1^\alpha (q_{11}^\alpha + (1-q_{11})^\alpha) + (1-p_1)^\alpha (q_{21}^\alpha + (1-q_{21})^\alpha) \right] =$$

$$= (1-\alpha)^{-1} \log_2 \left(p_1^\alpha + (1-p_1)^\alpha \right) + (1-\alpha)^{-1} \log_2 \left[p_1 (q_{11}^\alpha + (1-q_{11})^\alpha) + \right.$$

$$\left. + (1-p_1)(q_{21}^\alpha + (1-q_{21})^\alpha) \right],$$

d. h. mit

$$Q_1 = q_{11}^\alpha + (1-q_{11})^\alpha, \quad Q_2 = q_{21}^\alpha + (1-q_{21})^\alpha \tag{93}$$

sollte

$$p_1^\alpha Q_1 + (1-p_1)^\alpha Q_2 = \left(p_1^\alpha + (1-p_1)^\alpha \right)\left(p_1 Q_1 + (1-p_1) Q_2 \right) =$$

$$= \left(p_1 p_1^\alpha + p_1 (1-p_1)^\alpha \right) Q_1 + \left(p_1^\alpha (1-p_1) + (1-p_1)^\alpha (1-p_1) \right) Q_2$$

bestehen, da aber Q_1 und Q_2 unabhängig veränderliche Größen sind (laut (93) und Hilfssatz 1 verändern sie sich zwischen $2^{1-\alpha}$ und 1), müßte

$$(1-p_1) p_1^\alpha = p_1 (1-p_1)^\alpha,$$

d. h. für *alle* $0 < p_1 < 1$

$$p_1^{\alpha-1} = (1-p_1)^{\alpha-1}$$

bestehen, was bei $\alpha \neq 1$ nicht möglich ist, und das war unsere Behauptung. — (Dagegen hat Herr RÉNYI in [15] gezeigt, daß eine modifizierte Form

$$I_\alpha(\mathfrak{P} * \mathfrak{Q}) = I_\alpha(\mathfrak{P}) + I_\alpha(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P})$$

von (9) auch für die Entropien der Ordnung $\alpha \neq 0$ gültig bleibt, falls die $I_\alpha(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P})$ $(\alpha \neq 0, 1)$ nicht durch die aus der üblichen (10) (vgl. [7] §§ 1—2) spezialisierten Formel (92), sondern durch

$$I_\alpha(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P}) = (1-\alpha)^{-1} \log_2 \left(\sum_{j=1}^{n} \left(p_j^\alpha \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_j^\alpha \right) \sum_{k=1}^{m} q_{jk}^\alpha \right)$$

definiert werden.) — Also *ist die Shannonsche Entropie die einzige der Gestalt* (6) *mit* $g(-\log_2 x) \in \mathbf{K}$, *die* (9) *mit* (10) *erfüllt.* — *Dasselbe gilt auch wenn* $I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P})$ *statt*

durch (10) *durch*

$$I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P}) = \sum_{j=1}^{n} p_j g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} q_{jk} g(-\log_2 q_{jk})\right)$$

definiert wird (dann gilt aber schon (88) nicht bei allen $g(-\log_2 x) \in \mathbf{K}$).

Natürlich ist in dieser letzten Aussage nichts überraschendes. CHINTSCHIN hat in [7] (§ 2) den folgenden Eindeutigkeitssatz bewiesen: *Die durch* (4) *definierte Shannonsche Entropie ist die einzige, die die Bedingungen*

$$I(\mathfrak{P}) = I(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leqq I\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right), \tag{94}$$

$$I(\mathfrak{P} * \mathfrak{Q}) = I(\mathfrak{P}) + I(\mathfrak{Q}|\mathfrak{P}) \tag{9}$$

und

$$I(p_1, p_2, \ldots, p_n) = I(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0) \tag{95}$$

erfüllt. Nun ist die dritte Bedingung — (95) — bei jedem

$$I(\mathfrak{P}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} f^*(p_j)\right) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} p_j = 1,\ p_j \geqq 0\right) \tag{96}$$

(der Gestalt (6)) mit

$$f^*(x) = \begin{cases} x g(-\log_2 x) & \text{für} \quad x \in (0, 1], \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \tag{91}$$

erfüllt, und auch die erste — (94) — falls in (96) (bzw. (91)) $g(-\log_2 x) \in \mathbf{K}$ ist (Hilfssatz 2, (25)). Was aber die zweite Bedingung — (9) — betrifft, so ist ihr Spezialfall (7) der unabhängigen Ereignisschemata — wie wir in dieser Arbeit gesehen haben — unter den Ausdrücken der Gestalt (96) mit $g(-\log_2 x) \in \mathbf{K}$ genau von den Entropien positiver Ordnung und von der Shannonschen Entropie erfüllt, also muß es in dem Falle der abhängigen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ von (9) liegen, was eben die Shannonsche Entropie charakterisiert. Es ist interessant an diesem Bedingungssystem zu beobachten, wie der Entropiebegriff sukzessiv eingeengt wird.

MATHEMATISCHES INSTITUT,
KOSSUTH LAJOS UNIVERSITÄT,
DEBRECEN

(Eingegangen am 29. März 1962.)

Literaturverzeichnis

[1] J. ACZÉL, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Basel—Stuttgart und Berlin, 1961).
[2] A. ADAM, Anmerkungen betreffend eine „Statistische Technologie", *Unternehmensforschung*, **5** (1961), S. 172—181.
[3] E. F. BECKENBACH, Convex functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), S. 439—460.
[4] E. F. BECKENBACH—R. BELLMAN, *Inequalities*, Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzg. NF 30 (Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961).
[5] R. BELLMAN, *Dynamic programming* (Princeton, 1957).

[6] T. W. CHAUNDY—J. B. MC LEOD, On a functional equation, *Edinburgh Math. Notes*, **43** (1960), S. 7—8.
[7] А. Я. Хинчин, Понятие энтропии в теории вероятностей, Успехи Мат. Наук, **8** (1953), вып. 3(55), S. 3—20. (Auch in deutscher Sprache erschienen in dem Sammelband *Arbeiten zur Informationstheorie*. I, Berlin, 1957, S. 7—25).
[8] А. Я. Хинчин, Об основых теоремах теории информации, Успехи Мат. Наук, **11** (1956), вып. 1(67), S. 17—75. (Deutsch in den *Arbeiten zur Informationsteorie I.*, Berlin, 1957, S. 26—85).
[9] P. ERDŐS, On the distribution function of additive functions, *Ann. of Math.*, **47** (1946), S. 1—20.
[10] L. FUCHS, A new proof of an inequality of Hardy—Littlewood—Pólya, *Mat. Tidsskr.*, **B** (1947), S. 53—54.
[11] G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA, *Inequalities* (Cambridge, 1934, 1952).
[12] R. V. HARTLEY, Transmission of information, *Bell System Tech. J.*, **7** (1928), S. 535—563.
[13] L. MOSER—J. LAMBEK, On monotone multiplicative functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), S. 544—545.
[14] A. RÉNYI, On a theorem of P. Erdős and its application in information theory, *Mathematica* (Cluj), **1 (24)** (1959), S. 341—344.
[15] A. RÉNYI, Az információelmélet néhány alapvető kérdése, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **10** (1960), S. 251—282.
[16] A. RÉNYI, On measures of entropy and information, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1960. I (Berkeley, 1961, S. 547—561).
[17] C. E. SHANNON, A mathematical theory of communication. I, *Bell System Tech. J.*, **27** (1948), S. 379—423.
[18] C. E. SHANNON, A mathematical theory of communication. II, *Bell System Tech. J.*, **27** (1948), S. 623—656.
[19] C. E. SHANNON—W. WEAVER, *The mathematical theory of communication* (Urbana, 1949).
[20] A. WOUK, Concave functionals and a problem of Bellman, *Amer. Math. Monthly*, **68** (1961), S. 479—480.

HYPERBOLISCHE TRIGONOMETRIE IM POINCARÉSCHEN KREISMODELL*

Von

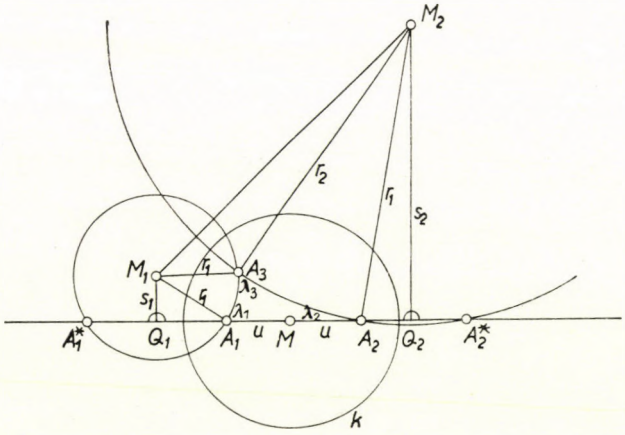
H. ZEITLER (Weiden, Deutschland)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Zur Entwicklung der hyperbolischen Trigonometrie kann man sich eines Modells bedienen. P. SZÁSZ verwendet z. B. in der genannten Arbeit das Poincarésche Kreismodell und liest aus ihm zwei Formeln für das rechtwinklige Dreieck ab, auf denen die gesamte Trigonometrie aufgebaut werden kann. Wir benützen das gleiche Modell, entnehmen ihm aber den Winkelkosinussatz. Das hat den Vorteil, daß man aus diesem Satz, genau wie in der sphärischen Trigonometrie, ohne weitere Benützung des Modells, den Sinussatz und den Seitenkosinussatz durch passende Umformungen folgern kann. Mit diesen Sätzen aber beherrscht man bereits die ganze Trigonometrie.

$A_1A_2A_3$ ist ein Dreieck, dessen Seite A_1A_2 durch den Mittelpunkt M des Fundamentalkreises k halbiert wird. Die Mittelpunkte der euklidischen Kreise unseres hyperbolischen Bündels durch A_i, A_3 sind M_i, ihre Radien r_i $(i=1, 2)$. A_i^* sind die zu A_i bezüglich k inversen Punkte, Q_i die Projektionen von M_i auf der Geraden A_1A_2. Hat k den Radius 1, so gilt also mit den Bezeichnungen der Figur

$$(1) \qquad MA_i^* = \frac{1}{u}, \quad A_iQ_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - u\right), \quad MQ_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + u\right) \qquad (i=1, 2).$$



Bezeichnen wir die Seiten des Dreiecks mit a_1, a_2, a_3, die gegenüber liegenden Winkel mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dann lautet der, zu beweisende Satz

$$(2) \qquad \cos\lambda_3 = -\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 + \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \operatorname{ch} a_3.$$

* Bemerkung zu einer Arbeit von P. Szász in *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), S. 65–69.

Beweis. Wir entnehmen aus Dreieck $M_iQ_iA_i$ (s_i negativ genommen, falls λ_i stumpf ist)

$$\cos\lambda_i = \frac{s_i}{r_i}, \quad \sin\lambda_i = \frac{A_iQ_i}{r_i} = \frac{1}{2r_i}\left(\frac{1}{u} - u\right). \tag{3}$$

Für die hyperbolische Länge a_3 der Seite A_1A_2 haben wir nach der Definition

$$e^{a_3} = \frac{1+u}{1-u} : \frac{1-u}{1+u} = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2,$$

woraus sich

$$\operatorname{ch} a_3 = \frac{(1+u^2)^2 + 4u^2}{(1-u^2)^2} \tag{4}$$

ergibt.

Andererseits, im Dreieck $M_1A_3M_2$ gilt nach dem Kosinussatz der euklidischen Trigonometrie (da doch $\sphericalangle M_1A_3M_2 = \pi - \lambda_3$ ausfällt)

$$M_1M_2^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\lambda_3$$

und im Sinne des Pythagoreischen Lehrsatzes besteht offenbar

$$Q_1Q_2^2 + (s_1 - s_2)^2 = M_1M_2^2,$$

also wir haben

$$Q_1Q_2^2 - 2s_1s_2 = r_1^2 - s_1^2 + r_2^2 - s_2^2 + 2r_1r_2\cos\lambda_3.$$

Hier ist aber

$$r_1^2 - s_1^2 = A_1Q_1^2 = A_2Q_2^2 = r_2^2 - s_2^2,$$

also durch Division mit $2r_1r_2$, wegen

$$Q_1Q_2 = 2MQ_1 = u + \frac{1}{u}, \quad A_iQ_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - u\right)$$

ergibt sich mit Rücksicht auf (3)

$$\cos\lambda_3 + \cos\lambda_1\cos\lambda_2 = \frac{1}{2r_1r_2}\left\{\left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - u\right)^2\right\} = \tag{5}$$

$$= \frac{2(1+u^2)^2 - (1-u^2)^2}{4r_1r_2u^2} = \frac{(1+u^2)^2 + 4u^2}{4r_1r_2u^2}.$$

Aus (3), (4) und (5) folgt schon (2), w. z. b. w.

Der Beweis wurde für ein Spezialdreieck geführt. Durch passende hyperbolische Bewegung (euklidische Inversion an einem Bündelkreis) ist es möglich jedes beliebige Dreieck in diese spezielle Lage zu bringen. Weil bei einer solchen Abbildung die Winkel und Seiten des Dreiecks invariant bleiben ist damit der Satz allgemein bewiesen.

Noch wesentlich einfacher gestaltet sich der Beweis, wenn der Fundamentalkreis zu einer euklidischen Geraden entartet ist.

(Eingegangen am 16. April 1962.)

REMARKS ON A PAPER BY J. MYCIELSKI

By

A. LÉVY (Jerusalem, Israel)

(*Presented by* L. KALMÁR)

Consider the following statements:

I In every Boolean algebra there is a proper maximal ideal.

S_n Let M be a set of pairwise disjoint sets each of which has exactly n members and let R be a symmetric relation whose field is incluedd in the union set of M. If for every finite subset N of M there exists an $f \in \bigtimes_{X \in N} X$ such that for every X, $Y \in N$ $f(X)\, Rf(Y)$ then there exists an $F \in \bigtimes_{X \in M} X$ such that for every X, $Y \in M$ $F(X) R F(Y)$.[1]

P_n If G is a graph such that every finite subgraph G^* of G is n-colorable (i. e., the vertices of G^* can be divided among n classes so that no two vertices joined by an edge in G^* are in the same class) then G itself is n-colorable.

C_n The Cartesian product of a family of sets which have n members each is not void.

MYCIELSKI mentions in [8] that, without using the axiom of choice, the following statements are provable.

(1) $$I \leftrightarrow S_n \qquad (n \geqq 4)$$

(2) $$S_4 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2$$

(3) $$S_n \rightarrow P_n \rightarrow C_n \qquad (n \geqq 2)$$

(4) $$P_{n+1} \rightarrow P_n \qquad (n \geqq 2)$$

(5) $$P_2 \leftrightarrow C_2$$

We shall strengthen (1) by proving $I \leftrightarrow S_3$. Then it will be shown that S_2 does not imply C_3 and hence, a fortiori, $S_2 \rightarrow I$ is unprovable. Finally we shall show that $(\forall n) C_n$ does not imply P_3.

THEOREM 1. $S_3 \leftrightarrow I$.

PROOF. By (1) and (2) $I \rightarrow S_3$; we shall prove $S_3 \rightarrow I$. Assume S_3 and let B be a Boolean algebra. Let $Q = \{\langle uv \rangle \mid u, v \in B \wedge u \leqq v\}$, let $\langle uv \rangle^* = \{\{\langle u0 \rangle, \langle v0 \rangle\}, \{\langle u0 \rangle, \langle v1 \rangle\}, \{\langle u1 \rangle, \langle v1 \rangle\}\}$ and let $M = \{\langle uv \rangle^* \mid \langle uv \rangle \in Q\}$. Let $\langle uv \rangle$, $\langle u'v' \rangle \in Q$, $g \in \langle uv \rangle^*$, $h \in \langle u'v' \rangle^*$; we define R by: *gRh if and only if on the finite subalgebra $[u, v, u', v']_B$ of B (the subalgebra of B generated by $\{u, v, u', v'\}$) there is a proper maximal ideal K such that $g(u) = 0 \leftrightarrow u \in K$, $g(v) = 0 \leftrightarrow v \in K$, $h(u') = 0 \leftrightarrow u' \in K$, $h(v') = 0 \leftrightarrow v' \in K$.* If N is a finite subset of M let $C = \{u, v \mid \langle uv \rangle^* \in N\}$. Since C is

[1] n will vary over the positive integers throughout the paper. $\times$ denotes the Cartesian product operator.

finite there is a proper maximal ideal K' on the finite subalgebra of B generated by C. For $\langle uv\rangle^* \in N$ we define $f(\langle uv\rangle^*)$ to be the function $g \in \langle uv\rangle^*$ such that $g(u) = 0 \leftrightarrow u \in K'$, $g(v) = 0 \leftrightarrow v \in K'$. For $\langle uv\rangle^*$, $\langle u'v'\rangle^* \in N$ $K = K' \cap [u, v, u', v']_B$ is a proper maximal ideal in $[u, v, u', v']_B$ and hence $f(\langle uv\rangle^*)\, Rf(\langle u'v'\rangle^*)$. By S_3 there is a function F on M such that for $X, Y \in M$ $f(X) \in X$ and $F(X) R F(Y)$. We define

(6) $\quad J = \{w \mid (\exists u, v, g)(\langle uv\rangle \in Q \wedge F(\langle uv\rangle^*) = g \wedge w \in \{u, v\} \wedge g(w) = 0)$.

We shall see that J is a proper maximal ideal of B. We note first that

(7) $\quad$ *If* $w \in J$, $\langle u'v'\rangle \in Q$, $F(\langle u'v'\rangle^*) = g'$, $w \in \{u', v'\}$ *then* $g'(w) = 0$.

To prove (7), let u, v, g be as in (6). Since $g = F(\langle uv\rangle^*)$, $g' = F(\langle u'v'\rangle^*)$ we have $g R g'$ and hence, by the definition of R, $g'(w) = g(w) = 0$. Let $u, v \in J$, we shall see that $u + v \in J$. Let $g = F(\langle u, u+v\rangle^*)$ $h = F(\langle v, u+v\rangle^*)$, hence $g R h$ and by the definition of R there is a proper maximal ideal K in $[u, v, u+v]_B$ such that $u, v \in K$ (since $g(u) = 0$, $h(v) = 0$, by $u, v \in J$ and (7)) and also $u + v \in K \leftrightarrow g(u+v) = 0$; but since $u, v \in K$ $u + v \in K$, thus $g(u+v) = 0$ and by (6) $u + v \in J$. We shall now see that if $w \in B$ then exactly one of w, $-w$ is a member of J. Let $g = F(\langle 0w\rangle^*)$ $h = F(\langle 0, -w\rangle^*)$ then $g R h$ and hence, in similarity to what was done above, $g(w) = 0 \leftrightarrow h(-w) = 1$ and by (6) and (7) exactly one of w, $-w$ is in J. Let $g = F(\langle 00\rangle^*)$, then $g R g$, hence, by the definition of R, $g(0) = 0$, and hence, by (6), $0 \in J$.

If in the formulation of S_n R would be a completely symmetric ternary relation (instead of being a binary relation) then also S_2 were equivalent to I, as shown by Łoś and Ryll—Nardzewski in [4], § 5. However, as S_2 is formulated here all one can prove is Theorem 2. Consider the statements:

I^* For every Boolean algebra B there exists a subset J such that: 1. $x \in J \wedge y \leqq x \rightarrow y \in J$ and 2. $x \in J \leftrightarrow -x \notin J$.

I^{**} For every Boolean algebra B there exists a subset J such that $x \in J \leftrightarrow -x \notin J$.

THEOREM 2. $S_2 \rightarrow I^*$.

PROOF. Assume S_2 and let B be a Boolean algebra. For $u \in B$ let $u^* = \{\langle u0\rangle, \langle u1\rangle\}$, let $M = \{u^* \mid u \in B\}$ and let R be defined by $\langle ui\rangle R \langle vj\rangle$, *for* $i, j \leqq 1$, *if and only if on the finite subalgebra* $[u, v]_B$ *of* B *there is a proper maximal ideal* K *such that* $i = 0 \leftrightarrow u \in K$ $j = 0 \leftrightarrow v \in K$. It is easily seen that the assumptions of S_2 are satisfied and hence there exists a function F as required by S_2. Put $J = \{u \mid F(u^*) = \langle u0\rangle\}$. J is easily seen to fulfil the requirements of I^*.

(8) $\quad I^* \rightarrow I^{**}$ (the proof is obvious).

THEOREM 3. $I^{**} \leftrightarrow C_2$.

PROOF. To prove I^{**} from C_2 apply C_2 to the family $M = \{\{x, y\} \mid x, y \in B \wedge y = -x\}$. To prove C_2 from I^{**}, let M be a set of pairwise disjoint sets each of which has two members and let K be the union of the members of M. Let A be the free Boolean algebra generated by K, let E be the ideal in A generated by the set $\{x \cdot y + (-x) \cdot (-y) \mid (\exists Z \in M)\,(x \neq y \wedge x, y \in Z)\}$ and let $B = A/E$. As is easily seen $1 \notin E$ and hence B is a Boolean algebra. It follows immediately from the definition of E that if $x, y \in Z \in M \wedge x \neq y$ then $x/E = -(y/E)$. Let J be a set as required in I^{**}; we define a function F on M by putting for $Z \in M$

$F(Z) =$ *that member* x *of* Z *for which* $x/E \in J$.

We have $F \in \bigtimes_{Z \in M} Z$.

In the metamathematical part of this paper methods due to FRAENKEL and MOSTOWSKI will be used. In particular, the construction in the proof of Theorem 4 is a special case of the construction of MOSTOWSKI in [7].

Let $\mathfrak{S}$ be the set theory given in MOSTOWSKI [6]. This is a set theory of the BERNAYS—GÖDEL type which permits the existence of urelements and which does not have the axiom of choice among its axioms.

THEOREM 4. *If* $\mathfrak{S}$ (*or the system A, B, C of* GÖDEL [1]) *is consistent then* $S_2 \to C_3$ *is unprovable in* $\mathfrak{S}$.[2]

PROOF. If $\mathfrak{S}$ is consistent then by the construction of GÖDEL [1] we know that the system A, B, C, D, E of [1] is consistent. The same conclusion is obtained also from the assumption that the system A, B, C of [1] is consistent. From the consistency of the system A, B, C, D, E, taking the group $\mathfrak{G}$ in MOSTOWSKI [6] to be the one element group, we get the consistency of a system $\mathfrak{S}^*$ which is $\mathfrak{S}$ with the axiom of choice and the axiom „There exists a denumerable set of urelements" added. To show that $S_2 \to C_3$ is unprovable in $\mathfrak{S}$ we shall show that the system $\mathfrak{S} + \{S_2, \sim C_3\}$ is consistent by giving an interpretation of the latter system in $\mathfrak{S}^*$. In order to do it we shall now proceed within $\mathfrak{S}^*$.

Let K be a denumerable set of urelements. We define $K_0 = K$, $K_\eta = K \cup \bigcup_{\mu<\eta} P(K_\mu)$, where $P(x)$ is the power set of x. If there exists an η such that $x \in K_\eta$ we say that x is a *K-element*. Let Φ be the group of all permutations of K. For $\varphi \in \Phi$ and a K-element x we define $\varphi(x)$ by recursion as follows.

(9) *For* $x \in K$ $\varphi(x)$ *is already defined; for* $x \notin K$ $\varphi(x) = \{\varphi(y) | y \in x\}$.

One can easily verify (see [6]) that

(10) $(\varphi\psi)(x) = \varphi(\psi(x))$ $1(x) = x$ (where 1 is the identity).

Since K is denumerable there is a one one correspondence between the denumerable set $\omega \times 3$ and K. Let $k_{i,j}$ be the member of K corresponding to $\langle ij \rangle$, thus $K = \{k_{i,j} | i < \omega \wedge j < 3\}$. Let $K^{(i)} = \{k_{i,0}, k_{i,1}, k_{i,2}\}$; let χ_l be that member of Φ for which $\chi_l(k_{i,j}) = k_{i,j}$ for $i \neq l$ and $\chi_l(k_{l,0}) = k_{l,1}$, $\chi_l(k_{l,1}) = k_{l,2}$, $\chi_l(k_{l,2}) = k_{l,0}$. Let Ψ be the subgroup of Φ generated by $\{\chi_i | i < \omega\}$. Let the variables a, b, c range over the set of finite subsets of ω. A permutation $\varphi \in \Psi$ is said to be *b-identical* if $\varphi(k_{i,j}) = k_{i,j}$ for every $i \in b$; the group of all b-identical members of Ψ will be denoted with Ψ^b. An element x is said to be *b-symmetric* if x is a K-element and $\varphi(x) = x$ for every $\varphi \in \Psi^b$. We define M_η by recursion as follows

(11) $x \in M_\eta \leftrightarrow x \in K \vee (\forall y \in x)(\exists \xi < \eta)(y \in M_\xi) \wedge (\exists b)(x$ *is b-symmetric*).

If there exists an η such that $x \in M_\eta$ we say that x is an *M-element*. By (11) x is an M-element if and only if $x \in K$ or every member of x is an M-element and for some b x is b-symmetric. A class X is called an *M-class* if $(\forall y \in X)$ (y is an M-element)

[2] By the method of MENDELSON [5] one can prove Theorems 4 and 5 with the conclusions changed to „... is unprovable in the system A, B, C of GÖDEL [1]."

$\wedge\ (\exists b)\,(\forall \varphi \in \Psi^b)\,(\forall y \in X)\,(\varphi(y) \in X)$. One can easily verify that

(12) *Every finite set of M-elements is an M-element.*

As shown by MOSTOWSKI [6], if we interpret $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}^*$ by replacing the primitive notions ‚*element*', ‚*class*', ‚$\in$', and ‚0' of $\mathfrak{S}$ by the notions ‚*M-element*', ‚*M-class*', ‚$\in$' and ‚0' of $\mathfrak{S}^*$, respectively, all the axioms (and the theorems) of $\mathfrak{S}$ will go over to theorems of $\mathfrak{S}^*$. In order to prove the consistency of $\mathfrak{S}+\{S_2, \sim C_3\}$ we shall show that S_2 goes over to a theorem of $\mathfrak{S}^*$, whereas C_3 goes over to a sentence refutable in $\mathfrak{S}^*$. Using the standard absoluteness results, which are proved in MOSTOWSKI [6], the absoluteness of the notion of finiteness (see [2]) and (12) we see that S_2 goes over to a sentence equivalent to

$S_2^{(M)}$ Let Q be an M-element which is a set of pairwise disjoint sets having two members each and let R be an M-element which is a symmetric relation whose field is included in the union set of Q. If for every finite subset N of Q there exists an M-element $f \in \bigtimes_{X \in N} X$ such that $f(X)\,Rf(Y)$ holds for every $X, Y \in N$, then there exists an M-element $F \in \bigtimes_{X \in Q} X$ such that $F(X)\,RF(Y)$ holds for every $X, Y \in Q$ and that C_n goes over to a sentence equivalent to

$C_n^{(M)}$ For every M-element Q which is a family of pairwise disjoint sets having n members each there exists an M-element C which is a set such that for every $Y \in Q$ $Y \cap C$ has exactly one member.

As was shown by MOSTOWSKI in [7] $C_3^{(M)}$ does not hold, whereas $C_2^{(M)}$ does hold. (In order to obtain this from [7], take in condition (K), in [7] p. 151, $n=3$, $Z=\{2\}$ and $G=$the cyclic group of order 3, then condition (K) is not satisfied — see the proof of Theorem IV. In consequence the proof of Theorem III establishes $C_2^{(M)} \wedge \sim C_3^{(M)}$.)

To prove $S_2^{(M)}$ assume the hypothesis of $S_2^{(M)}$. Since $C_2^{(M)}$ holds there is an M-element C which has exactly one member in common with each member of Q. Since Q, R and C are M-elements they are b-symmetric for some b (the separate b's for Q, R and C can be replaced by their union). Let u, v be K-elements; we define $u \sim_b v \leftrightarrow (\exists \varphi \in \Psi^b)\,(\varphi(u)=v)$. One can easily see, by (10), that $\sim_b$ is reflexive, symmetric and transitive. For a K-element u let $E_b(u) = \{v | v \sim_b u\}$. Let

$$\Psi_c = \{\varphi | \varphi \in \Psi \wedge (\forall i, j)\,(i \in \omega - c \wedge j < 3 \to \varphi(k_{i,j}) = k_{i,j})\}.$$

Let $\varphi \in \Psi^b$ then $\varphi = \tau\sigma$ where τ and σ are defined by

$$i \in a \wedge j < 3 \to \sigma(k_{i,j}) = k_{i,j} \wedge \tau(k_{i,j}) = \varphi(k_{i,j})$$

$$i \in \omega - a \wedge j < 3 \to \sigma(k_{i,j}) = \varphi(k_{i,j}) \wedge \tau(k_{i,j}) = k_{i,j}.$$

Obviously $\sigma \in \Psi^{a \cup b}$ and $\tau \in \Psi_{a-b}$. Let u be an M-element, then u is a-symmetric for some a. For $\varphi \in \Psi^b$ we have, by (10), $\varphi(u) = (\tau\sigma)(u) = \tau(\sigma(u)) = \tau(u)$ (where τ and σ are as above) and hence $E_b(u) = \{\varphi(u) | \varphi \in \Psi^b\} = \{\tau(u) | \tau \in \Psi_{a-b}\}$. It is easily seen that Ψ_{a-b} has exactly $3^{|a-b|}$ members ($|a-b|$ denotes the cardinality of $a-b$). Let $\Omega = \{\tau | \tau \in \Psi_{a-b} \wedge \tau(u) = u\}$. The number of left cosets of Ω in Ψ_{a-b} is a factor of $3^{|a-b|}$ and hence a power of 3. The correspondence $\varphi \to \varphi(u)$ between the left cosets of Ω in Ψ_{a-b} and the members of $E_b(u)$ is one one, because if $\varphi = \psi\tau$, where $\varphi, \psi \in \Psi_{a-b}$, $\tau \in \Omega$ then $\varphi(u) = \psi\tau(u) = \psi(u)$; if on the other hand $\varphi(u) = \psi(u)$ then

$\psi^{-1}\varphi(u)=u$, hence $\psi^{-1}\varphi\in\Omega$. Therefore the number of the members of $E_b(u)$ is a finite power of 3. By S_2, which follows from the axiom of choice, there exists a function G on Q such that for every X, $Y\in Q$ $G(X)RG(Y)$. Since Q is b-symmetric we have $X\in Q\wedge Y\sim_b X\to Y\in Q$, hence Q is a union of $\sim_b$-equivalence classes, i. e., $Q=\bigcup_{\lambda<\alpha} Q_\lambda$, where Q_λ, $\lambda<\alpha$, is a $\sim_b$-equivalence class. $|Q_\lambda|$ is a finite power of 3 and hence odd. We define now the function F on Q as follows: If for most members X of Q_λ $G(X)\in C$ then we put $F(X)=$ *the single member of* $X\cap C$ for every $X\in Q_\lambda$; if for most members X of Q_λ $G(X)\notin C$ then we put $F(X)=$ *the single member of* $X-C$ for every $X\in Q_\lambda$. Every member of F is of the form $\langle X, y\rangle$, where $y\in X\in Q$, hence, by (12), $\langle X, y\rangle$ is an M-element. In order to prove that F is an M-element we have to show that F is b-symmetric. Since Ψ^b is a group it is enough to show, by (10), that $\varphi(F)\subseteq F$ for every $\varphi\in\Psi^b$. $\varphi(F)=\{\varphi(\langle X, F(X)\rangle)|X\in Q\}=$ $=\{\langle\varphi(X), \varphi(F(X))\rangle|X\in Q\}$. For $X\in Q$ let $X\in Q_\lambda$; since Q_λ is a $\sim_b$-equivalence class and $\varphi\in\Psi^b$ we have $\varphi(X)\in Q_\lambda$. Since $F(X)\in X$ we have, by (9), $\varphi(F(X))\in\varphi(X)$. Since C is b-symmetric $\varphi(F(X))\in C$ if and only if $F(X)\in C$. F is defined so that either $F(Y)$ is the single member of $Y\cap C$ for all $Y\in Q_\lambda$ or $F(Y)$ is the single member of $Y-C$ for all $Y\in Q_\lambda$, hence $F(\varphi(X))=\varphi(F(X))$ and therefore $\varphi(F)=$ $=\{\langle\varphi(X), F(\varphi(X))\rangle|X\in Q\}\subseteq F$. We shall now see that F satisfies the requirement of $S_2^{(M)}$. Let $X\in Q_\lambda$, $Y\in Q_\mu$. Since X and Y are M-elements they are a-symmetric for some a. Consider now the pairs of the form $\langle\varphi(X), \varphi(Y)\rangle$, where $\varphi\in\Psi_{a-b}$. As was shown above all the members of Q_λ are of the form $\psi(X)$ for some $\psi\in\Psi_{a-b}$ and all the members of Q_μ are of the form $\psi(Y)$ for some $\psi\in\Psi_{a-b}$. Let $\Omega_1=$ $=\{\psi|\psi\in\Psi_{a-b}\wedge\psi(X)=X\}$ and let m_1 be the order of Ω_1. For every $Z\in Q_\lambda$ $\varphi(X)=Z$ for exactly m_1 different φ's in Ψ_{a-b} (since those φ's form a left coset of Ω_1 in Ψ_{a-b}). Since for most members U of Q_λ we have $G(U)=F(U)$ therefore for most members φ of Ψ_{a-b} we have $G(\varphi(X))=F(\varphi(X))$. Similarly we get that for most members φ of Ψ_{a-b} $G(\varphi(Y))=F(\varphi(Y))$. Hence, for at least one $\varphi\in\Psi_{a-b}$ we have $G(\varphi(X))=$ $=F(\varphi(X))$ and $G(\varphi(Y))=F(\varphi(Y))$. Since, by our assumption about G, $G(\varphi(X))$ $RG(\varphi(Y))$ we get $F(\varphi(X))$ $RF(\varphi(Y))$, i. e., there exist x, y such that $\langle\varphi(Y), y\rangle\in F$ and $\langle x, y\rangle\in R$. Since F and R are b-symmetric and $\varphi^{-1}\in\Psi^b$ we have $\langle\varphi(X), x\rangle$, $\langle X, \varphi^{-1}(x)\rangle$, $\langle Y, \varphi^{-1}(y)\rangle\in F$ and $\langle\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)\rangle\in R$, i. e., $F(X)RF(Y)$.

THEOREM 5. *If* $\mathfrak{S}$ (*or the system A, B, C of* GÖDEL [1]) *is consistent then* $(\forall n)C_n\to$ P_3 *is unprovable in* $\mathfrak{S}$.

PROOF. In analogy to what was mentioned in the beginning of the proof of Theorem 4 we have to give an interpretation of the system $\mathfrak{S}+\{(\forall n)C_n, \sim P_3\}$ in $\mathfrak{S}^*$. We use the interpretation given in [3] which is like that of Theorem 4 only that $K^{(i)}$ has p_i members instead of 3 ($p_0, p_1, \ldots$ are the primes in increasing order) and the permutation χ_t of K is the identity outside $K^{(i)}$ and is a cyclic permutation on $K^{(i)}$. It is shown in [3] that $(\forall n)C_n$ goes over to a sentence provable in $\mathfrak{S}^*$. By the standard absoluteness results P_3 goes over to

$P_3^{(M)}$ If G is an M-element which is a graph every finite subgraph of which is 3-colorable then there exist three M-elements Q_1, Q_2, Q_3 which are pairwise disjoint sets whose union is the set of vertices of G such that no two members of Q_l, $l=1, 2, 3$, are joined by an edge in G.

We shall disprove $P_3^{(M)}$. $K^{(i)} = \{k_{i,j} | j < p_i\}$. Put

$$G = \{\langle k_{i,j}, k_{i,j+1}\rangle | i < \omega \wedge j < p_i - 1\} \cup \{\langle k_{i,p_i-1}, k_{i,0}\rangle | i < \omega\}.$$

Let G^* be a finite subgraph of G. G^* is obviously a subgraph of

$$G_n = \{\langle k_{i,j}, k_{i,j+1}\rangle | i \leqq n \wedge j < p_i - 1\} \cup \{\langle k_{i,p_i-1}, k_{i,0}\rangle | i \leqq n\}$$

for some n. G_n is 3-colorable being the union of unconnected cycles, hence G^* is 3-colorable. Assume now that there are 3 M-elements, Q_1, Q_2, Q_3 such that $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 = K$ and no two members of Q_l, $l = 1, 2, 3$, are joined by an edge of G. Since Q_l is an M-element Q_l is b_l-symmetric for some b_l. Let $b = b_1 \cup b_2 \cup b_3$ and let $i \notin b$, $i > 0$. $k_{i,0} \in Q_l$ for some l, $1 \leqq l \leqq 3$. Since Q_l is b-symmetric and $\chi_i \in \Psi^b$ $\chi_i(k_{i,0}) = k_{i,1} \in Q_l$. By the definition of G $\langle k_{i,0}, k_{i,1}\rangle \in G$, but since $k_{i,0}, k_{i,1} \in Q_l$ this contradicts our assumption about the Q_l's.[3]

HEBREW UNIVERSITY,
JERUSALEM, ISRAEL

(Received 16 April 1962)

References

[1] K. GÖDEL, *The consistency of the continuum hypothesis* (Princeton, 1940).
[2] A. LÉVY, The independence of various definitions of finiteness, *Fundamenta Mathematicae*, **46** (1958), pp. 1–13.
[3] A. LÉVY, Axioms of multiple choice, *ibid*, **50** (1962), pp. 475–483.
[4] J. ŁOŚ and C. RYLL-NARDZEWSKI, Effectiveness of the representation theory for Boolean algebras, *ibid*, **41** (1955), pp. 49–56.
[5] E. MENDELSON, The independence of a weak axiom of choice, *Journal of Symbolic Logic*, **21** (1956), pp. 350–366.
[6] A. MOSTOWSKI, Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip, *Fundamenta Mathematicae*, **32** (1939), pp. 201–252.
[7] A. MOSTOWSKI, Axiom of choice for finite sets, *ibid*, **33** (1945), pp. 137–168.
[8] J. MYCIELSKI, Some remarks and problems on the colouring of infinite graphs and the theorem of Kuratowski, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), pp. 125–129.

[3] In the same way one can show that $(\forall n) C_n$ does not imply even the weaker statement „If G is a graph such that every finite subgraph G^* of G is 3-colorable then G is n-colorable for some $n < \omega$ (or, even, $\aleph_\lambda$-colorable for some ordinal λ)".

ÜBER DEN WAHRSCHEINLICHSTEN WERT

Von

M. HOSSZÚ (Miskolc) und E. VINCZE (Miskolc)

(*Vorgelegt von* A. RÉNYI)

1. Zu Beginn möchten wir einige Bemerkungen zu den Elementen der Fehlerrechnung machen. Eine Aufgabe der Fehlerrechnung besteht darin, daß man für die Bestimmung irgendeiner unbekannten Größe x unter konstanten physikalischen Bedingungen n voneinander unabhängige Messungen oder Beobachtungen (z. B. Längenmessungen bei konstanter Temperatur) durchführt, und wenn diese Messungen in der Folge $x_1, \ldots, x_n$ sind, sucht man den wahrscheinlichsten Wert x. Es sei $P(t)$ *die Dichtefunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung der bei der Messung der Veränderlichen* x *vorkommenden Fehler*, dann ist

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = P(x_1 - x) \ldots P(x_n - x)$$

die n-dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, daß man die Messungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bekommt.

Das übliche Verfahren ist, den Wert von x als den „wahrscheinlichsten Wert" zu bezeichnen, der den Wert von $D(x_1, \ldots, x_n, x)$ bei gegebenen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ maximalisiert. Statt $D(x_1, \ldots, x_n, x)$ werden wir im folgenden kurz $D(x)$ schreiben.

Falls sich die gemessenen Werte x_i um eine bestimmte Stelle x z. B. nach dem GAUSSschen Fehlergesetz

$$P(t) = ae^{-mt^2} \qquad (m > 0)$$

verteilen, so ist

$$D(x) = a^n \exp\left[-m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2\right],$$

der sein Maximum in dem Falle annimmt, wenn

$$S(x)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2$$

minimal ist, d. h.

$$\frac{dS(x)^2}{dx} = -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - x) = 0$$

gilt, woraus wir das arithmetische Mittel

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

als „wahrscheinlichsten" Wert erhalten.

Wenn nun das GAUSSsche Fehlergesetz gültig ist, dann gilt auch „*das Prinzip des Minimums der Quadratsumme*" und der wahrscheinlichste Wert ist das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der gemessenen Werte x_i (vgl. [2]).

Es ist jedoch leicht nachweisbar, daß das Prinzip des Minimums der Quadratsumme nur dann gültig ist, wenn sich die Fehler nach dem GAUSSschen Fehlergesetz verteilen; d. h. das arithmetische Mittel ist nur dann der wahrscheinlichste Wert x, bzw. nimmt die Funktion

$$D(x) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i - x)$$

ihr Maximum nur dann an der Stelle $\bar{x}$ an, wenn

$$P(t) = ae^{-mt^2}$$

ist, vorausgesetzt, daß $P(t)$ eine stetig differenzierbare Funktion darstellt. Dieses ist sehr einfach zu beweisen (vgl. z. B. [4], [1]), des weiteren möchten wir jedoch der Vollständigkeit halber einen Beweis vorführen, der selbst den unter [4] erbrachten Beweis einigermaßen vereinfacht.

Fürwahr, wenn

$$\frac{dD(x)}{dx} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{P'(x_i - x)}{P(x_i - x)} \prod_{j=1}^{n} P(x_j - x)\Bigg|_{x=\bar{x}} = 0$$

ist, dann genügt die Funktion $f(t) = P'(t)/P(t)$ der Gleichung

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} f(y_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x) = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Es genügt, den Fall $n = 3$ zu betrachten, bei dem die aufzulösende Funktionalgleichung

$$f(y_1) + f(y_2) = -f[-(y_1 + y_2)] = f^*(y_1 + y_2)$$

ist. Wenn nun $y_2 = 0$ ist, dann ergibt sich

$$f^*(y_1) = f(y_1) + f(0) = f(y_1),$$

weil $f(0) = 0$ mit $y_1 = y_2 = 0$ aus (1) folgt. Demnach können wir die Gleichung

$$f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2)$$

schreiben, woraus sich zufolge der Stetigkeit von $f(t)$ die Lösung $f(t) = ct$ ergibt. Schließlich erhält man aus $P'(t)/P(t) = ct$ die Lösung

$$\log P(t) = \log a + \frac{1}{2} ct^2 \qquad (P > 0),$$

d. h.

$$P(t) = ae^{\frac{1}{2} ct^2} = ae^{-mt^2},$$

was wir beweisen wollten.

Dieser Gedankengang gilt auch im Falle, wenn man statt des arithmetischen Mittels das quasiarithmetische Mittel nimmt.

2. Sowohl auf Grund der vorangehenden, als auch laut den Ausführungen unter [4] wirft sich die Frage auf, was der wahrscheinlichste Wert

$$\tilde{x} = M(x_1, \ldots, x_n)$$

sei, wenn die Beobachtungen nach einer nicht GAUSSschen Verteilungsdichtefunktion verteilt sind, und welche jene Verteilungsdichtefunktion $P(t)$ sei, bei der eine gegebene Funktion M der wahrscheinlichste Wert sein wird.

Zuerst untersuchen wir die erste Frage. Es gilt das folgende

LEMMA 1. *Der wahrscheinlichste Wert* $x = M(x_1, \ldots, x_n)$, *der die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion*

$$D(x) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i - x)$$

maximalisiert, ist translation-automorph, d. h. es gilt

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) + t = M(x_1 + t, x_2 + t, \ldots, x_n + t). \tag{2}$$

Der folgende einfache Beweis rührt von Prof. A. RÉNYI (briefliche Mitteilung) her. Den Beweis genügt es für den Fall $n = 2$ durchführen.

Da die Funktion

$$D(x) = P(x_1 - x)P(x_2 - x)$$

an der Stelle $x = M(x_1, x_2)$ für alle x_1, x_2 maximal ist, wird auch die Funktion

$$D(x') = P(x_1' - x')P(x_2' - x')$$

an der Stelle $x' = M(x_1', x_2')$ maximal. Es seien nun $x_1' = x_1 + t$, $x_2' = x_2 + t$, dann ist

$$D(x') = P[x_1 - (x' - t)]P[x_2 - (x' - t)] = D(x' - t),$$

also gilt

$$x' - t = M(x_1, x_2) = M(x_1 + t, x_2 + t) - t,$$

w. z. b. w.

3. Betrachten wir den speziellen Fall, wenn der wahrscheinlichste Wert M ein quasiarithmetisches Mittel [1] ist, d. h.

$$M(x_1, x_2, x_3) = \varphi^{-1}\left[\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3)}{3}\right]$$

gilt, wo $\varphi(t)$ und ihre Umkehrfunktion $\varphi^{-1}(t)$ streng monoton sind, dann ist

$$\varphi^{-1}\left[\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3)}{3}\right] + t = \varphi^{-1}\left[\frac{\varphi(x_1 + t) + \varphi(x_2 + t) + \varphi(x_3 + t)}{3}\right],$$

und wenn wir den Wert t festhalten und die Bezeichnung $\varphi(x_i) = \xi_i$ benützen, ergibt sich

$$\psi_t\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3}\right) = \frac{\psi_t(\xi_1) + \psi_t(\xi_2) + \psi_t(\xi_3)}{3} \tag{3}$$

mit der Bezeichnung

$$\varphi[\varphi^{-1}(\xi) + t] = \psi_t(\xi).$$

Aus (3) erhalten wir mit den vorigen Bezeichnungen die Gleichung

$$\psi_t(\xi) = \varphi[\varphi^{-1}(\xi) + t] = a_t\xi + b_t,$$

d. h.

$$\varphi(x+t) = a(t)\varphi(x) + b(t).$$

Bezüglich $\varphi(x)$ sind die allgemeinsten (z. B. stetigen) Lösungen dieser Gleichung die Funktionen

$$\varphi(x) = \alpha x + \gamma$$

und

$$\varphi(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma,$$

wo $\alpha\beta \neq 0$ wegen $\varphi(x) \not\equiv$ konst. ist (vgl. [1]).

In diesem Falle erhielten wir den

SATZ 1. *Wenn die Verteilungsdichtefunktion $P(t)$ stetig differenzierbar und nicht identisch konstant ist und der wahrscheinlichste Wert M ein quasiarithmetisches Mittel ist, dann gilt entweder*

$$M(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

oder

$$M(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\beta}\log\frac{e^{\beta x_1} + e^{\beta x_2} + e^{\beta x_3}}{3} = {}^a\log\frac{a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3}}{3} \qquad (a = e^{\beta}).$$

4. Ähnlich wie wir es im Falle des arithmetischen Mittels gemacht haben, untersuchen wir jetzt, unter welcher Funktion $P(t)$ das Mittel

$$M(x_1, x_2, x_3) = {}^a\log\frac{a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3}}{3}$$

der wahrscheinlichste Wert sein wird. Dazu muß man für f die Funktionalgleichung

$$f\left({}^a\log\frac{a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3}}{3} - x_1\right) + f\left({}^a\log\frac{a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3}}{3} - x_2\right) +$$

$$+ f\left({}^a\log\frac{a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3}}{3} - x_3\right) = 0,$$

d. h.

$$f\left({}^a\log\frac{a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3}}{3a^{x_1}}\right) + f\left({}^a\log\frac{a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3}}{3a^{x_2}}\right) + f\left({}^a\log\frac{a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3}}{3a^{x_3}}\right) = 0$$

auflösen. Führen wir die Bezeichnungen

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = f\left({}^a\log\frac{t}{3}\right), \quad \frac{a^{x_i}}{a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3}} = y_i \qquad (i = 1, 2, 3;\ y_i > 0)$$

ein, dann erhalten wir

$$g(y_1) + g(y_2) + g(y_3) = 0, \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

also ist

$$g(z_1+\tfrac{1}{3})+g(z_2+\tfrac{1}{3})+g(z_3+\tfrac{1}{3})=0, \qquad z_1+z_2+z_3=0.$$

Die allgemeinste stetige Lösung dieser Gleichung ist

$$g(t+\tfrac{1}{3}) = bt, \quad g(t) = b(t-\tfrac{1}{3})$$

also erhält man

$$f(t)=\frac{P'(t)}{P(t)}=\frac{b}{3}(a^{-t}-1),$$

woraus sich

$$P(t)=Ae^{-B(a^{-t}+t\ln a)} \tag{4}$$

ergibt.

Es gilt also der

SATZ 2. *Die Funktion* (4) *ist die einzige stetig differenzierbare und nicht identisch konstante Fehlerverteilungsdichtefunktion, zu der das exponentielle Mittel*

$$M(x_1, x_2, x_3)=a\log\frac{a^{x_1}+a^{x_2}+a^{x_3}}{3}$$

als der wahrscheinlichste Wert gehört.

BEMERKUNG. Analog, mit ähnlichem Ergebnis, kann man auch den Fall der quasilinearen Mittel behandeln.

D. h. erhalten wir außer der normalen Verteilung auch eine verwandte *nichtsymmetrische* Verteilung, die auch noch nach ausgeführter Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\,dt=1$$

zwei Konstanten (mit einem mehr als die normale Verteilung) enthält.

Im Falle $a>1$ ist diese Normierung folgende:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\,dt=A\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-B(a^{-t}-\ln a^{-t})\right]dt=\frac{A}{\ln a}\int_0^{\infty}e^{-By}y^{B-1}dy=1 \qquad (B>0),$$

wo $y=a^{-t}$ $(a>1)$ ist. Da die Formel

$$\Gamma(x)=p^x\int_0^{\infty}u^{x-1}e^{-pu}du \qquad (p>0,\ x>0)$$

gilt, erhält man

$$A=\frac{B^B\ln a}{\Gamma(B)} \qquad (B>0).$$

Ganz ähnlich erhalten wir im Falle $0<a<1$ dasgleiche Ergebnis.

Zusammenfassend erhielten wir folgendes Ergebnis:

Wenn man in bezug auf das Vorhandensein zufälliger, aus Messungen herrührender Fehler „vernünftige" Bedingungen fordert, dann ergibt sich die Verteilungsdichtefunktion $P(t)$, bzw. das Mittel M (als der wahrscheinlichste Wert):

$$P(t)=\begin{Bmatrix}\sqrt{\dfrac{B}{\pi}}\exp(-Bt^2)\\ \dfrac{B^B\ln a}{\Gamma(B)}\exp[-B(a^{-t}+t\ln a)]\end{Bmatrix} \quad \textit{und} \quad M(x_1,\ldots,x_n)=\begin{Bmatrix}\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}\\ {}^a\log\dfrac{a^{x_1}+\ldots+a^{x_n}}{n}\end{Bmatrix}.$$

Diese „vernünftigen" Bedingungen sind folgende:

1. *stetig Differenzierbarkeit*,
2. *Internität:* $\min x_i \leqq M(x_1,\ldots,x_n)\leqq \max x_i$;
3. *Assoziativität:* $M[M(x_1,\ldots,x_n),\ldots,M(x_{n^2-n+1},\ldots,x_{n^2})] =$
$= M[M(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}),\ldots,M(x_{i_{n^2-n+1}},\ldots,x_{i_{n^2}})]$,

wo $i_1,\ldots,i_{n^2}$ eine Permutation der Indexe $1,\ldots,n^2$ ist. (Aus den Bedingungen 1—3. folgt, daß $M(x_1,\ldots,x_n)$ ein quasiarithmetisches Mittel ist.)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT,
MISKOLC

(Eingegangen am 27. Mai 1960; in veränderter Form am 19. März 1961.)

Literaturverzeichnis

[1] J. ACZÉL, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Basel, 1961).
[2] Á. CSÁSZÁR, Sur une caractérisation de la répartition normale de probabilités, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), S. 359—382.
[3] S. DWINAS, A deduction of the Laplace-Gauss law of errors, *Revista Mat. Hisp.-Amer.* (4), **8** (1948), S. 12—18.
[4] A. RÉNYI, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Berlin, 1962), S. 311.

RELATIVE IDEALS IN SEMIGROUPS. II

(THE RELATIONS OF GREEN)

By

A. D. WALLACE (New Orleans, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

0. We continue the study of relative ideals in semigroups mentioned in [18] and initiated in [19]. In particular, we study the relations of GREEN [5] and generalize certain propositions of CLIFFORD—MILLER [2], PRESTON [13] and SCHUTZENBERGER [14].

The bulk of this material was presented in my lectures on this subject in 1957—58 (at which time Professor PRESTON was a patient and very helpful auditor) and continued in the lectures of 1959—60. The influencie of Professor CLIFFORD should be manifest.

1. A semigroup is a non-void HAUSDORFF space together with a continuous associative multiplication, denoted by juxtaposition.

In all that follows S will denote a semigroup.

We shall generally not distinguish between x and $\{x\}$ and write, for example, $x \cup A$ in place of $\{x\} \cup A$. Moreover, inclusive quantifiers will be omitted if no confusion is likely to arise, so that $\{x | x^2 = x\}$ is written for the lengthier $\{x | x \in S$ and $x^2 = x\}$.

Let T be a subset of S and *contrary to the convention in* [19] *any hypotheses on T will be stated expressly*, either for a section or a proposition.

For $A \subset S$, let

$$L(A) = A \cup TA, \quad J(A) = A \cup TA \cup AT \cup TAT, \quad R(A) = A \cup AT$$

$$H(A) = L(A) \cap R(A).$$

Relativizing the notions introduced by GREEN [5], we define

$$\mathfrak{L} = \{(x, y) | L(x) = L(y)\}, \quad \mathfrak{J} = \{(x, y) | J(x) = J(y)\},$$

$$\mathfrak{R} = \{(x, y) | R(x) = R(y)\},$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}.$$

When it is desirable to call attention to T, we may write $L(A; T)$ for $L(A)$ and $\mathfrak{L}(T)$ for $\mathfrak{L}$, and so on.

The sets (relations) $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{H}$ are equivalences (reflexive, symmetric and transitive) and $\mathfrak{L}$ (respectively $\mathfrak{R}$) is a right (respectively left) congruence. Here, denoting the diagonal of $S \times S$ by Δ and noting that $S \times S$ will (unless the contrary is stated) be regarded as a semigroup with coordinatewise multiplication, a subset $\mathfrak{C}$ of $S \times S$ will be termed a *left congruence* if it is an equivalence such that $\Delta \mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}$; similarly for a *right congruence*.

Upon putting

$$L_a = \{x | L(x) = L(a)\}$$

(with obvious usage for R_a, J_a and H_a) it is clear that L_a is an L-slice (L-tranche, equivalence class modulo $\mathfrak{L}$) and, indeed, the L-slice containig a. It turns out easily enough that

$$H_a = L_a \cap R_a.$$

Finally we write

$$\mathfrak{L} \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{D} = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{L},$$

one of these equalities being a definition and the other a theorem, (2. 2), where $\circ$ denotes the usual composition of sets in a cartesian product.

2. We begin this section with a proposition of lemma-character which extends somewhat the results of GREEN [5]. Although in this proposition it is not required that the functions f and g be continuous, it is clear that if this is stipulated then their restrictions (as indicated below) are homeomorphisms. In applications of this result we do not generally assert that the functions therein constructed have this property, in the interest of briefer statements. Nevertheless, the reader is asked to keep this in mind.

(2. 1) *Let* $f, g: S \to S$ *such that* $f(zx) = zf(x)$ *and* $g(zx) = zg(x)$ *for all* x *and* z *in* S *and let*

$$f(q) = p \quad \text{and} \quad g(p) = q.$$

(i) $f(L(q)) = L(p)$ *and* $g(L(p)) = L(q)$, *the so-restricted functions being mutual inverses of one-another and so one-to-one.*

(ii) $f(L_q) = L_p$ *and* $g(L_p) = L_q$.

Assume henceforth that $R(p) = R(q)$.

(iii) *For* $x \in L(q)$, $R(f(x)) = R(x)$ *and for* $x \in L(p)$, $R(g(x)) = R(x)$.

(iv) *If* $T^2 \subset T$, *then*

$$f(L(q) \cap R(x)) = L(p) \cap R(x)$$

and

$$g(L(p) \cap R(x)) = L(q) \cap R(x).$$

(v) $f(L_q \cap R_x) = L_p \cap R_x$.

PROOF. Frequently we shall prove only one-half of a result leaving to the reader the (generally obvious) inference that the rest follows in the same way. Notice also that once (i) is verified, then from

$$A \subset L(q), \quad B \subset L(p), \quad f(A) \subset B \quad \text{and} \quad g(B) \subset A,$$

it may be inferred that $f(A) = B$ and $g(B) = A$. Thus only the essential inclusions will be proved and the application of this remark will be left to the reader.

(i) $f(L(q)) = f(q \cup qT) = f(q) \cup Tf(q) = p \cup pT = L(p)$.

Now, if $x \in L(q)$, then $x = q$ or $x = tq$ for some $t \in T$. The first case being simpler than the second, we give the latter:

$$g(f(x)) = g(tf(q)) = g(tp) = tg(p) = tq = x.$$

From $g(f(x))=x$ for $x\in L(q)$ and $f(g(x))=x$ for $x\in L(p)$ and from the equality proved above we infer that the restrictions of f and g to the sets $L(q)$ and $L(p)$ are mutual inverses.

(ii) If $x\in L_q$ then

$$L(f(x))=f(L(x))=f(L(q))=L(p)$$

so that $f(x)\in L_p$ and hence $f(L_q)\subset L_p$. Similarly we obtain $g(L_p)\subset L_q$ and a preliminary remark applies to complete the proof.

(iii) If $x\in L(q)$, then $x=q$ or $x=tq$ for some $t\in T$. The latter case being the more complex, we prove only it. From the hypothesis we have $q\cup qT = p\cup pT$ and thus $tq\cup tqT = tp\cup tpT$, so that

$$x\cup xT = tf(q)\cup tf(q)T = f(tq)\cup f(tq)T = f(x)\cup f(x)T.$$

(iv) If $y\in L(q)\cap R(x)$, then $f(y)\in L(p)$ by (i) and also $R(y)\subset R(x)$ since $T^2\subset T$. But $R(y)=R(f(y))$ by (iii) and hence $f(y)\in R(x)$.

(v) The proof of this is similar to the proof of (iv).

(2. 2) $\mathfrak{L}\circ\mathfrak{R}=\mathfrak{R}\circ\mathfrak{L}$.

PROOF. $(p, r)\in\mathfrak{L}\circ\mathfrak{R}$, then, for some $q\in S$ we have $(p, q)\in\mathfrak{R}$ and $(q, r)\in\mathfrak{L}$. From $(p, q)\in\mathfrak{R}$ we infer that

$$p=q \quad \text{or} \quad \begin{matrix} p=qa \\ q=pb \end{matrix} \quad \text{with} \quad a, b\in T$$

and we define

$$f(x)=x=g(x) \quad \text{or} \quad \begin{matrix} f(x)=xa \\ g(x)=xb \end{matrix}$$

so that $f(q)=p$ and $g(p)=q$. From $r\in L(q)$, $R(f(r))=R(r)$ or $(f(r), r)\in\mathfrak{R}$, in view of (2. 1, (iii)). From (i) of (2. 1) it ensues that $L(f(r))=L(p)$ since $f(r)\in L(p)$ and thus by definition, $(p, f(r))\in\mathfrak{L}$. Accordingly the left member of the desired equality is a subset of the right member. Let $\varphi: S\times S\to S\times S$ be defined by $\varphi(x, y)=(y, x)$. We have, in virtue of the usual properties of $\circ$ and φ,

$$\mathfrak{R}\circ\mathfrak{L}=\varphi(\mathfrak{R})\circ\varphi(\mathfrak{L})=\varphi(\mathfrak{L}\circ\mathfrak{R})\subset\varphi(\mathfrak{R}\circ\mathfrak{L})=\varphi(\mathfrak{L})\circ\varphi(\mathfrak{R})=\mathfrak{L}\circ\mathfrak{R},$$

and the proof is complete.

The above result is due to GREEN [5] for $T=S$. It follows from the permutability of $\mathfrak{L}$ and $\mathfrak{R}$ that $\mathfrak{D}$ is an equivalence and thus that a D-slice (D-tranche, equivalence class modulo $\mathfrak{D}$) is the union of all the L-slices which meet it and as well the union of all the R-slices which meet it. The equality stated in (2. 2) is entirely equivalent to

$$L_x\cap R_y\neq\square \text{ if and only if } L_y\cap R_x\neq\square.$$

(2. 3) (i) *If* $R(xa)=R(x)$, *then* $H_xa=H_{xa}$ *and* $L_xa=L_{xa}$.

(ii) *These are equivalent:*

$$H_xa=H_x, \quad xa\in H_x, \quad x\in H_{xa} \quad \textit{and} \quad H_xa\cap H_x\neq\square.$$

Moreover, any one of them implies $L_xa=L_x$.

PROOF. (i) To employ the notation of (2. 1), we put $p=xa$ and $q=x$ so that $p=qa$. If $p=q$, then $q=pb$ with $b=a$ and if $p\neq q$, then, from $R(p)=R(q)$ we have $q=pb$ for some $b\in T$. As in the proof of (2. 2) we put $f(w)=w=g(w)$ in the first instance and $f(w)=wa$ and $g(w)=wb$ in the second instance. We have

$$H_x a = f(L_x \cap R_x) = f(L_q \cap R_x) = L_p \cap R_x = L_{xa} \cap R_{xa} = H_{xa}$$

using (v) of (2. 1). The second part follows in the same way using (ii) of (2. 1).

(ii) Clearly $xa\in H_x a$ if $H_x a=H_x$ and $xa\in H_x$ is equivalent to $x\in H_{xa}$ since $\mathcal{H}$ is an equivalence on S. From $x\in H_{xa}$ we have certainly $R(xa)=R(x)$ and $L(xa)=L(x)$ so that, by (i), $H_x a=H_{xa}=L_{xa}\cap R_{xa}=L_x\cap R_x=H_x$. Finally, if $y\in H_x a\cap H_x$, then $y=za$ for some $z\in H_x$ and $za\in H_z$ which, as we have shown, implies $H_z a=H_z$. But $H_z=H_x$ and the proof of this part of (ii) is complete. The second part of (ii) follows from (i) and the part already proved.

We write

$$\{E=x\,|\,x^2=x\}$$

(the set of *idempotents* of S) and observe that this is a closed set which is non-void whenever S contains a non-void compact subset A satisfying $A^2\subset A$.

The following result is due, in the case $T=S$, to CLIFFORD and MILLER [2].

(2. 4) *If* $xy\in R_x\cap L_y$, *then*

$$zH_y=H_{xy}=H_x w=R_x\cap L_y, \quad \textit{for any} \quad z\in H_x \quad \textit{and} \quad w\in H_y.$$

PROOF. Let $w\in H_y$ so that $R(w)=R(y)$ and

$$R(xw)=xR(w)=xR(y)=R(xy)=R(x),$$

the latter from the fact that $xy\in R_x$. From (2. 3, (i)) we have $H_x w=H_{xw}$ while, on the other hand, from $L(xy)=L(y)$ and the left-right dual of (2. 3, (i)) we obtain $xH_y=H_{xy}$ so that, since $w\in H_y$, $xw\in L_{xy}$. Thus $R(xw)=R(xy)$ and $L(xw)=L(xy)$ and we have $H_x w=H_{xw}=H_{xy}=R_x\cap L_y$ and the remaining of the sequence of equalities follows by left-right duality.

A *subgroup* of S is such a non-void subset $G\subset S$ that $xG=G=Gx$ for each $x\in G$. The significance of a *maximal subgroup* should be clear.

For $T=S$ the following very elegant proposition was proved by GREEN [5]:

(2. 5) *If* $H_x^2\cap H_x\neq\square$ *then* H_x *is a subgroup and if* $T=S$ *then it is a maximal subgroup.*

PROOF. This is immediate from (2. 4), since if a, b $ab\in H_x$, then $ab\in R_a\cap L_b$ and $H_a=H_b=H_{ab}$. That, when $T=S$, H_x is a *maximal* subgroup, we leave to the reader.

The next result is immediate:

(2. 6) *If* G *is a subgroup of* S, *then, using* $T=G$, $G=H_x$ *for any* $x\in G$.

The results stated in (2. 7), which afford some extensions of results in CLIFFORD and MILLER [2], seem not to be in final form and we omit the proof.

(2. 7) *If* $xy \in R_x \cap L_y$, *then, in addition to the conclusions of* (2. 4), $R_y \cap L_x = H_e$ *for some* $e \in E$ *and this a subgroup. Moreover, there exist elements* x' *and* y' *such that*

$$ex' = x', \quad x'x = e = yy', \quad y'e = y'$$

$$xe = x \quad \text{and} \quad ey = y.$$

In addition,

$$H_e y = H_y, \quad H_y y' = H_e = x' H_e, \quad x H_e = H_x$$

and the indicated multiplications are homeomorphisms on the affected H-slices. Finally, if $T^2 \subset T$ *and if* $xT \subset T \supset Ty$, *then the following* CLIFFORD *diagram is valid; rows denoting R-slices, columms denoting L-slices and the total diagram a subset of a D-slice:*

e	x'	y
y'	$y'x'$	$y'y$
x	xx'	xy

Coversely, but with no assumptions on T, if $e \in E$, *if* $x \in L_e$ *and if* $y \in R_e$, *then* $xy \in R_x \cap L_y$.

(2. 8) *If* $e \in E$, *then in order that* D_e *be a subsemigroup of S, it is necessary and sufficient that* D_e *be a subset of* $\cup \{H_x | x \in E\}$.

3. In this section we are concerned, among other things, with connections between relations defined earlier. The first two results are stated more generally than needed in this note but will be useful later in this series. For both of these results, (3. 1) and (3. 2), we suppose that

$$f: X \times Y \to Z$$

is continuous and that the three spaces are HAUSDORFF. In the interest of brevity we write, for $A \subset X$ and $B \subset Y$,

$$AB = f(A \times B).$$

(3. 1) *If B is a compact subset of Y, then the set*

$$\{(x_1, x_2) | x_1 B \subset x_2 B\} \quad \text{and} \quad \{(x_1, x_2) | x_1 \cup x_1 B \subset x_2 \cup x_2 B\}$$

are closed.

There are analogous results which we shall use without statement but to which the above is an adequate clue.

The closure, interior and boundary of a subset A of a topological space will be denoted by A^*, A°, and $F(A)$.

(3. 2) (Koch's Lemma [7]). *Let C be a compact subset of Y and let M be a subset of X on which there is defined a relation* $\leqq$ *satisfying*

(a) $m \leqq m$ *for any* $m \in M$,

and

(b) *If* $m \leqq m'$ *then* $mC \subset m'C$.

(i) *If* $A(m)=\{m'|m'\in M \text{ and } m'\leqq m\}$ *and if* $a\in\bigcap\{A(m)^*|m\in M\}$, *then*

$$aC = \bigcap\{mC|m\in M\}.$$

(ii) *If* $B(m)=\{m'|m'\in M \text{ and } m'\geqq m\}$ *and if* $b\in\bigcap\{B(m)^*|m\in M\}$, *then*

$$bC=(MC)^*.$$

If A is a non-void subset of S, we write, for $n\geqq 1$,

$$O_n(A)=A^n\cup A^{n+1}\cup A^{n+2}\ldots \quad \text{and} \quad \Gamma_n(A)=O_n(A)^*$$

and, for simplicity,

$$\Gamma(A)=\Gamma_1(A).$$

Moreover,

$$N(A) = \bigcap\{\Gamma_n(A)|n\leqq 1\}.$$

A *left T-ideal* of S is such a non-void set $A\subset S$ that $TA\subset A$. Similarly, one defines *right T-ideal* and *T-ideal* will be used for *bilateral* or *two-sided T-ideal*. If $T=S$, then one speaks of *left ideal* rather than *left S-ideal*, and so on.

If $\Gamma(A)$ is compact then $N(A)$ is an ideal of $\Gamma(A)$ and in particular when card $A=1$ then $N(A)$ is the unique minimal ideal of $\Gamma(A)$ as well as the unique maximal subgroup of $\Gamma(A)$, and $\Gamma(A)$ is commutative, see for example [7]. It is useful to note that if $x\in N(x)$ and if $\Gamma(x)$ is compact, then $N(x)=\Gamma(x)$ and thus $\Gamma(x)$ is a group.

(3. 3) *If* M *is a compact subset of* S, *if* $x\in S$, *if* $\Gamma(x)$ *is compact and if* $xM=M$, *then* $yM=M$ *for each* $y\in\Gamma(x)$ *and the function* $m\to ym$ *maps* M *homeomorphically onto* M; *that is to say,* $\Gamma(x)$ *acts as a group of homeomorphism taking* M *onto* M *though* $\Gamma(x)$ *need not be a group If also* $x\in M$, *then* $\Gamma(x)$ *is a subgroup of* S *and* $\Gamma(x)\subset$ $\subset M$ *whether or not* M *is a subsemigroup.*

PROOF. The first part of the assertion is a result of [7]. If e is the idempotent in $N(x)$ then, since $eM=M$ and $x\in M$, we have $x=ex$ and thus $x=ex\in N(x)x\subset N(x)$ so that by a preceding remark we know that $\Gamma(x)$ is a group.

Now, if x' is the inverse of x in $\Gamma(x)$, then

$$e=x'x\in x'M=M.$$

For any $y\in\Gamma(x)$ we have

$$y=ye\in yM=M.$$

(3. 4) *If* T *is closed and if* S *is compact, then*

$$L(a)\subset L(b)\subset L(ab)$$

implies that $L(a)=L(b)=L(b)x$ *for each* $x\in\Gamma(b)$ *and that* $\Gamma(b)$ *is a subgroup of* S *contained in* L_a.

This result follows almost at once from the preceding and is a generalization of a result in KOCH and WALLACE [8], as is the following:

(3. 5) *Let* S *be compact and let* T *be a closed subsemigroup.*

(i) *If* $L(x)\subset L(y)\subset J(x)$, *then* $L(x)=L(y)$.

(ii) $\mathfrak{D}=\mathfrak{J}$.

We omit the proof of this (see [8]) but note that it follows from (3. 3) and is simplified by the following device of adjoining a unit: If ω is not an object in S, let $S' = S \cup \omega$ and $T' = T \cup \omega$, the topology of S' being such that a set is open if and only if its intersections whith S and with ω are each open and with the multiplication being extended by $x\omega = x = \omega x$ for each $x \in S'$.

(3. 6) *For any subset T of S the following inclusions are valid:*

$$\nabla \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{R} \subset \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{J}.$$

If T is compact, then $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, and $\mathcal{J}$ are closed and if also S is compact, then $\mathcal{D}$ is closed and if, in addition, $T^2 \subset T$, then $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. Moreover,

$$\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{L}\mathcal{R} \subset \mathcal{D},$$

so that, for any $x, y \in S$,

$$H_x H_y \subset L_x R_y \subset D_{xy}.$$

Thus, (3. 6) is a compilation of previous results and generalizes results in [2] and [8]. Relative to the inclusion $\mathcal{L}\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$, this follows from the fairly obvious fact that, if $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are any relations on S, then

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \subset (\triangle \mathcal{B}) \circ (\mathcal{A} \triangle).$$

An act is such a function

$$a: M \times X \to X$$

that

(i) M is a semigroup
(ii) X is a non-void HAUSDORFF space
(iii) a is continuous and, upon writing $mx = a(m, x)$,

$$m_1(m_2 x) = (m_1 m_2)x$$

for any $m_1, m_2 \in M$ and any $x \in X$.

It is convenient to rephrase the above by saying that „M acts on X" or „M acts on the left of X", it being assumed what is meant by „M acts on the right of X".

If S is *compact* and if $\mathcal{C}$ is a closed left congruence on S, then S acts on the left of the quotient space $S/\mathcal{C}$ in such a way that the diagram is analytic (independent of the path, commutative):

$$\begin{array}{ccc} S \times (S/\mathcal{C}) & \longrightarrow & S/\mathcal{C} \\ {\scriptstyle i \times f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} \\ S \times S & \longrightarrow & S \end{array}$$

where f is the natural map, i the identity, the lower horizontal arrow denoting the multiplication in S and the upper horizontal arrow denoting the action of S on $S/\mathcal{C}$.

In particular, if S is compact and if T is a closed subsemigroup, it follows that S acts (on the *left*) of $S/\mathcal{R}$.

If $\mathcal{C}$ is a closed congruence and if S is compact, then $\Delta/\mathcal{C}$ is a semigroup, the natural map being a homomorphism, *map* being always used in the sence of *continuous* function. In particular, S being compact and T a closed subsemigroup, if T is also *normal in* S ($xT = Tx$ for each $x \in S$), then the relations $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$, and $\mathcal{J}$ are the same and thus $S/\mathcal{J}$ (say) is a semigroup.

Returning to the general case in which $\mathcal{C}$ is an unspecified closed congruence on the compact semigroup S, it is important to observe that, not only is $S/\mathcal{C}$ a semigroup, but that S acts (on either side) of $S/\mathcal{C}$.

4. We formulate a generalization of the REES—SUSCHKEWITSCH Theorem ([17], [18], and the references in [3]) and note that, except where specified, T is a random subset of S. For this purpose some definitions are necessary.

Let

$$H = \cup\{H_e | e \in E\}$$

so that if $x \in H$ then x is an element of one and only one group H_e for $e \in E$. Let $u(x) = e$ and let $v(x)$ be the inverse of x in H_e. It follows that $u: H \to E$ and $v: H \to H$ and that we have, quite clearly, $u(u(x)) = u(x)$ and $v(v(x)) = x$.

(4. 1) *Let* $Z = S \times S \times S$ *with the multiplication*

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x, yzx'y', z')$$

so that Z *is a semigroup and define* $f: Z \to S$ *by*

$$f(x, y, z) = xyz$$

so that f *is a continuous homomorphism.*

For any $e \in E$ *let*

$$Z_e = (L_e \cap E) \times H_e \times (R_e \cap E)$$

and denote by K_e *the image of* Z_e *under* f. *If*

$$M_e = \{x | xe, ex \in H\}$$

define

$$g: M_e \to Z$$

by

$$g(x) = (u(xe), exe, u(ex)).$$

Then:

(i) $K_e \subset M_e$

(ii) $g(K_e) \subset Z_e$

(iii) $fg|K_e$ *is the identity*

(iv) $gf|Z_e$ *is the identity*

(v) $fg(M_e) \subset M_e$ *and on* M_e, $fgfg = fg$

(vi) $K_e \subset L_e H_e R_e = L_e R_e = D_e$

and if $D_e \subset H$, *then the inclusion is an equality and* K_e *is a subsemigroup.*

PROOF. We omit most of the details since they differ little from those in the proof of the less general result in [18]. By changing the ordet of the factors of Z_e, which was kindly suggested by G. B. PRESTON, the situation becomes a little easier and more elegant.

To begin with, let $e_1 \in L_e \cap E$, $t \in H_e$ and $e_2 \in R_e \cap E$ and put $x = e_1 t e_2$. A brief argumentation shows that

$$ex = te_2, \quad exe = t, \quad xe = e_1 t.$$

Since $(e, e_1) \in \mathfrak{L}$, we have $e_1 H_e = H_{e_1}$ by (2. 3) and therefore (and dually)

$$u(e_1 t) = e_1 \quad \text{and} \quad u(te_2) = e_2 .$$

The proofs of (i), (iii), and (iv) proceed as in [18].

Relative to the proof of (v) it may be observed that if $x \in M_e$ then $xe \in H_{e_1}$ for a suitable $e_1 \in E$ and so $u(xe) = e_1$. From this and from $(xe)e = xe$ we have $(H_{e_1}) \cap H_{e_1}$ non-void and by (2. 3) we see that $H_{e_1} e = H_{e_1}$ so that $e_1 = e_1 e$. A straightforward computation shows that

$$xu(ex) = f(g(x)) = u(ex)x$$

and the argument is then along the lines of [18].

As to (vi) we have $L_e R_e \subset D_e$ by (2. 2). If $p \in D_e$ then $L(e) = L(x)$, $R(e) = R(y)$, $R(x) = R(p)$ and $L(y) = L(p)$ for suitable x and y, from the definition of $\mathfrak{D}$ and (3. 6). From the last (converse) part of (2. 7) and may, therefore, apply the first part of (2. 7), so that $p \in xH_e y \subset L_e H_e R_e$ which is clearly a subset of $L_e R_e$. This proves the two equalities in (vi). Since, by definition, $K_e = (L_e \cap E) H_e (R_e \cap E) \subset$ $\subset L_e H_e R_e$, we suppose next that $D_e \subset H$. In this we take $p \in D_e$ and we may assume that the elements x and y in the second sentence of this paragraph are, in addition, idempotents. The third sentence then shows that $D_e \subset K_e$.

I am grateful to G. B. PRESTON for suggesting this final argument as well as (2. 8).

If S is compact and if T is closed, then $\mathfrak{H}$ is closed by (3. 6) so that $S/\mathfrak{H}$ is a compact HAUSDORFF space and the natural map $h: S \to S/\mathfrak{H}$ is also closed. Since E, the set of idempotents of S, is closed, it follows that $H = h^{-1}(h(E))$ is also closed. As shown in [18], the functions u and v defined for $T = S$ are continuous and since these functions restricted to H (defined for any T) are the functions u and v defined for this T, then the latter pair is also continuous. Following A. H. CLIFFORD, we use the term *iseomorphism* for simultaneous isomorphism and homeomorphism. Thus we have:

(4. 2) *If T is closed and if S is compact, then u retracts H onto E, the function v is an involutorial homeomorphism taking H onto H and the functions f and g are continuous. Thus K_e is iseomorphic with $(L_e \cap E) \times H_e \times (R_e \cap E)$ and also $fgfg$ is a retraction.*

Spezializing to $T = S$, as in [18], we have:

(4. 3) *If S is compact, then for any $e \in E \cap K$, where K is the minimal ideal of S, we have K and $(Se \cap E) \times eSe \times (eS \cap E) = Z_e$ and each of the sets K, $K \cap E$, $Se \cap E$, eSe, $eS \cap E$ is a retract of S.*

Taking $T = S$ and assuming that S has a minimal right ideal and a minimal left ideal [1] we have the following useful special cases, $e \in K \cap E$:

(i) If card $eSe = 1$ then K is isomorphic with $(Se \cap E) \times (eS \cap E)$ using the multiplication $(x, y)(z, w) = (x, w)$.

(ii) If card $(Se \cap E) = 1$ then K is isomorphic with $eSe \times (Se \cap E)$ using coordinatewise multiplication, eSe is a group and $xK = K$ for each $x \in K$ so that K is a minimal right ideal.

(iii) If card $(Se \cap E) = 1 =$ card $(eS \cap E)$, then K is a group and if card $(Se \cap E) =$ $= 1 =$ card (eSe) then every element of K is a right zero for S.

Applications of this have been given in [6], [17], [18], and elsewhere under the assumption that S is compact. We see, for example, that if S is homeomorphic with a plane one-dimensional continuum which does not cut the plane, then S has either a left zero or a right zero. An application of (4. 3) shows that if S is homeomorphic with an n-cell and if the minimal ideal of S contains the boundary of S, then S is its own minimal ideal, the multiplication in S is of the form $(x, y)(z, w) = (x, w)$ and all elements of S are, of course, idempotents. These simple examples indicate in a clear fashion the manner in which the topological properties of S necessarily influence the algebraic character of S.

5. The principal result of this section is a generalization, along the lines of PRESTON [13], of a proposition of SCHUTZENBERGER [14]. The proof, which was given in my lectures in 1958—59, is different from that of [13] and [14] and the modification indicated is also different from either of these two. I am grateful to G. B. PRESTON, V. R. HANCOCK and EDWARD TULLY (who were among my auditors) for their suggestions. Later, DR. TULLY extended the results in the discrete case, [15] and [16].

As usual, T is unrestricted except where noted and remains anonymous.

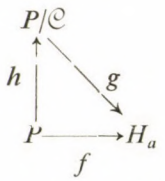
(5. 1) *Let S be compact and T closed, let $a \in S$, define*

$$P = \{x | xH_a = H_a\},$$

$$\mathcal{C} = \{(x, y) | x, y \in P \text{ and } xa = ya\}$$

and assume that card $H_a > 1$. Then P is a closed subsemigroup, $\mathcal{C}$ is a closed congruence on P and $P/\mathcal{C}$ is a group homeomorphic with H_a. In the diagram h is the natural map, f is defined by $f(x) = xa$ and g is such a homeomorphism that

$$gh = f;$$



If $a^2 = a$, then f is a homomorphism and g is an iseomorphism so that the multiplication determined in H_a by g is that of S. Moreover, for any $b \in D_a$, H_a and H_b are homeomorphic. Finally, if P is empty, then H_a contains only the element a.

PROOF. (A) Recall from (2. 3) that the following are equivalent:

$$xc \in H_c,\ xH_c \text{ intersects } H_c,\quad xH_c = H_c.$$

(B) If $xa = a$ $(xa = ya)$ then $xb = b$ $(xb = yb)$ for any $b \in R(a)$, a fact which is easily established.

(C) It is clear that P is a subsemigroup which is compact if S is compact, in virtue of the results of section 3 and, in the same way, it may be seen that $\mathcal{C}$ is closed if S is either compact or discrete.

(D) That $\mathcal{C}$ is reflexive, symmetric and transitive is immediate and to show that it is a congruence we have at once from $xa = ya$ the equality $zxa = zya$. From

(B), if $xa=ya$, then $xb=yb$ for any $b\in R(a)$, and if $z\in P$, then $za\in H_a\subset R(a)$ so that $xza=yza$ and the proof is complete.

(E) If $x\in P$ then there is an element x_1 in P such that $x_1xa=a$. For, $xa\in H_a$ and if $xa=a$, then we may take $x_1=x$ while if $xa\neq a$ then there is an $x_1\in T$ such that $a=x_1xa$. It then follows from (A) that $x_1\in P$.

(F) From (D) we know that $P/\mathcal{C}$ is a semigroup which is compact if S is compact and T is closed. Since P is non-void there is, by (E), an element x_0 in P such that $x_0a=a$. If $x\in P$ then $x_0xa=xa$, as in the proof of (D), so that $(x_0x, x)\in\mathcal{C}$ and thus $h(x)=h(x_0x)=h(x_0)h(x)$ so that $h(x_0)$ is a left unit for $P/\mathcal{C}$. Moreover, for $x\in P$, let x_1 be an element of P such that $x_1xa=a$, from (E). Then $x_1xa=x_0a$. Using the just-preceding argument it follows that $h(x_1)$ is a left inverse of $h(x)$ relative to the left unit $h(x_0)$. We conclude that $P/\mathcal{C}$ is a group.

(G) By definition, $f(x)=xa$ for any $x\in P$ and to show that such a g as stated exists, it is only necessary to observe that $h(x_1)=h(x_2)$ implies $f(x_1)=f(x_2)$ for any $(x_1, x_2)\in\mathcal{C}$. But this is quite clear and have existence of g and the equality $f=gh$. Moreover, g will be onto if f is onto and for this we take $z\in H_a$ and note that then either $z=a$ and hence $x_0a=a$ (by(F)) or else $z=ta$ for some $t\in T$. But from $ta\in H_a$ we infer that $t\in P$ and conclude that $f(P)=H_a$. To show that g is one-to-one, let $g(h(x_1))=g(h(x_2))$ so that $f(x_1)=f(x_2)$, whence $x_1a=x_2a$ and accordingly $h(x_1)=h(x_2)$. It follows from standard arguments that g is a homeomorphism.

(H) Let $a^2=a$ so that H_a is a group with unit a. Then $f(x_1x_2)=x_1x_2a=$ $=x_1\cdot ax_2a$ because $x_2a\in H_a$ and from this we see that $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$. From the equality $f=gh$ and from the fact that f is a homomorphism it is readily shown that g is an isomorphism.

(I) If $b\in D_a$ then $L(a)=L(c)$ and $R(c)=R(b)$ for some $c\in D_a$. Modifying the previous notation in an obvious fashion, it is readily shown that $P(H_a)=P(H_c)$ and $\mathcal{C}(H_a)=\mathcal{C}(H_c)$ and applying the above results to H_a and H_c it ensues that they are homeomorphic. Then using the left-right dual of this we see that H_c and H_b are homeomorphic.

The proof is complete.

6. This episode has been confined to an explication of the algebra and general topology of relative ideals and contains no results of a „geometric" nature, as did [19]. Applications of the results developed here will be exposed later.

After this paper had been completed, there appeared the book of CLIFFORD and PRESTON [3] and a rapid survey of this shows that some simplification and extension of the conclusions at which we arrive here might have been possible. In some instances, based on past experience, this may prove illusory since the argumentation used by these authors is designed for purposes of algebraic elegance and simplicity, and shows no concern for the facts of topological life. Thus, their treatment of the SCHUTZENBERGER group, more rapid than that given here, would require amplification to insure that it is a topological group (S compact and T closed). Moreover, they consider only the absolute case, $T=S$. The reader is also referred to [10].

We indicate briefly some special instances:

Denoting, as usual, by Δ the diagonal of $S\times S$, an equivalence $\mathcal{A}$ on S is a congruence if and only if it is a Δ-ideal. This way of doing things was used by NUMAKURA [12].

If S is compact and unital (has a unit) and if T is the maximal subgroup containing the unit, then $L(x)=Tx=L_x$ for each $x\in S$ and the quotient space $S/\mathfrak{L}$ is the orbit space obtained by regarding the group T as acting on the left of the space S. This may be translated to any idempotent e by taking T to be the maximal subgroup of S containing e and then $H_e=T$ is the maximal subgroup of eSe containing the unit e of eSe.

As indicated earlier, it is possible to consider situations in which T is „stable" [8] and thus to over to the relative case some results of GREEN [5], MUNN [11] and others without the devastatingly harsh hypothesis of minimality. Also, some of the results on the complements of the maximal T-ideals can be extended but the techniques used in [4] are not applicable since the quotient space is not a semigroup. Here one must return to first principles and the proofs are longer.

I am greatly obliged to MR. Y.-F. LIN for his comments and to the National Science Foundation for their support.

THE TULANE UNIVERSITY
OF NEW ORLEANS, USA

(Received 3 May 1962)

References

[1] A. H. CLIFFORD, Semigroups containing minimal ideals, *American Journal of Mathematics*, **70** (1948), pp. 521–526.
[2] A. H. CLIFFORD and D. D. MILLER, Regular D-classes in semigroups, *Transactions of the American Mathematical Society*, **82** (1956), pp. 270–280.
[3] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, The Algebraic Theory of Semigroups, *Mathematical Surveys 7, American Mathematical Society* (Providence, 1961).
[4] W. M. FAUCETT, R. J. KOCH and KATSUMI NUMAKURA, Complements of maximal ideals in compact semigroups, *Duke Mathematical Journal*, **22** (1955), pp. 655–662.
[5] J. A. GREEN, On the structure of semigroups, *Annals of Mathematics*, **54** (1951), pp. 163–172.
[6] R. P. HUNTER, Note on Arcs in semigroups, *Fundamenta Mathematicae*, **49** (1961), pp. 233–245.
[7] R. J. KOCH, On monothetic semigroups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **8** (1957), pp. 397–401.
[8] R. J. KOCH and A. D. WALLACE, Stability in semigroups, *Duke Mathematical Journal*, **24** (1957), pp. 193–196.
[9] R. J. KOCH and A. D. WALLACE, Admissibility of semigroup structures on continua, *Transactions of the American Mathematical Society*, **88** (1958), pp. 177–187.
[10] E. S. LYAPIN, *Semigroups* (Moscow, 1960).
[11] W. D. MUNN, Semigroups satisfying minimal conditions, *Proceedings of the Glasgow Mathematical Association*, **3** (1957), pp. 145–152.
[12] KATSUMI NUMAKURA, Theorems on compact totally disconnected semigroups and lattices, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **8** (1957), pp. 623–626.
[13] G. B. PRESTON, Matrix representations of semigroups, *Quarterly Journal of Mathematics* (Oxford Series) (2), **9** (1958), pp. 169–178.
[14] M. P. SCHUTZENBERGER, Sur une representation des demi-groupes, *Comptes Rendus Academie des Sciences de Paris*, **42** (1947), pp. 1907–2908.
[15] E. J. TULLY, Representation of a semigroup by transformations of a set (Tulane University dissertation, 1960).
[16] E. J. TULLY, Representations of a semigroup by transformations acting transitively on a set, *American Journal of Mathematics*, **83** (1961), pp. 533–551.
[17] A. D. WALLACE, The Rees-Suschkewitsch structure theorem for compact simple semigroups, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **42** (1956), pp. 430–432.
[18] A. D. WALLACE, Retractions in Semigroups, *Pacific Journal of Mathematics*, **7** (1957), pp. 1413–1517.
[19] A. D. WALLACE, Relative ideals in semigroups. I (Faucett's Theorem), *Colloquium Mathematicum*, **9** (1962), pp. 55–61.

ÜBER DIE PRIMITIV-REKURSIVITÄT EINIGER DEN AUFBAU VON FORMELN CHARAKTERISIERENDEN WORTFUNKTIONEN

Von

RÓZSA PÉTER (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. KALMÁR)

1. K. SCHÜTTE[1] hat für Formeln, die aus Aussagenvariablen durch Negationen, Konjunktionen und Disjunktionen (die bei ihm „Adjunktionen" genannt werden) aufgebaut werden, die Begriffe „Positivteil" bzw. „Negativteil" für gewisse Teilformeln einer Formel eingeführt, nämlich für diejenigen, aus deren Wahrheit bzw. Falschheit die Wahrheit der ganzen Formel folgt. (Man sieht, daß eine solche Eigenschaft eigentlich nicht einer Teilformel, sondern der Stelle dieser Teilformel zukommt: wird ein Positivteil bzw. Negativteil an der betreffenden Stelle durch eine beliebige andere Formel ersetzt, so ist hier auch diese neue Formel ein Positivteil bzw. Negativteil der entstehenden Formel.) Die Einführung der Begriffe „Positivteil" und „Negativteil" geschieht durch folgende Bedingungen (als Zeichen für die Negation, Disjunktion und Konjunktion benutze ich der Reihe nach $\neg$, $\vee$, $\&$):

T1. F selbst ist ein Positivteil der Formel F.

T2. Ist $\neg F_1$ ein Positivteil von F, so ist (an dieser Stelle) F_1 ein Negativteil von F.

T3. Ist $\neg F_1$ ein Negativteil von F, so ist (an dieser Stelle) F_1 ein Positivteil von F.

T4. Ist $(F_1 \vee F_2)$ ein Positivteil von F, so sind (an dieser Stelle) auch F_1 und F_2 Positivteile von F.

T5. Ist $(F_1 \,\&\, F_2)$ ein Negativteil von F, so sind (an dieser Stelle) auch F_1 und F_2 Negativteile von F.

Dabei soll eine Teilformel von F dann und nur dann als ein Positivteil oder Negativteil von F gelten, wenn sie diese Eigenschaft auf Grund der Definitionsregeln T1—T5 besitzt.

Nach diesen impliziten Definitionen kann man „nach innen", d. h. von der ganzen Formel ausgehend und zu Teilformeln der Teilformeln weiterschreitend, Schritt für Schritt für jede Teilformel entscheiden, ob sie ein Positivteil, oder ein Negativteil der betrachteten Formel ist, oder keine von beiden. Man hat das Gefühl, daß es sich hier um eine Art Rekursion handelt.

In einer früheren Arbeit[2] habe ich die rekursiven Definitionen auf „zahlenartig aufbaubaren" Mengen, worunter auch Formelnmengen gehören, untersucht.[3]

[1] K. SCHÜTTE, *Beweistheorie* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960).

[2] R. PÉTER, Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche, *diese Acta*, I. Teil **12** (1961), S. 271—314; II. Teil **13** (1962), S. 1—24.

[3] Ich benütze hier die Gelegenheit zu einigen Berichtigungen zu dieser Arbeit. Auf S. 274 des I. Teils wurde ein unmittelbarer Vorgänger eines Elementes x als ein Vorgänger nächstkleinerer Ordnung definiert. Das ist in gewissen Fällen, z. B. für Wortemengen eine geeignete Definition;

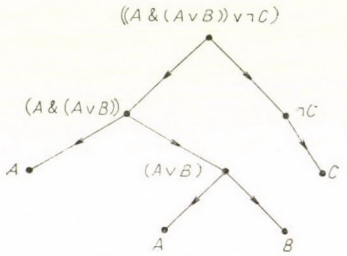
Die Elemente der aussagenlogischen Formelmenge bei SCHÜTTE lassen sich aus Aussagenvariablen (als 0-Elementen) durch Negationen, Disjunktionen und Konjunktionen (als Nachfolgerbildungen) „zahlenartig" aufbauen; und als Vorgänger einer Formel können dabei ihre Teilformeln betrachtet werden. Aber wenn man die positive oder negative Beschaffenheit einer Teilformel y der Formel x auf dieser Menge definieren versucht, so erhält man zunächst sozusagen gerade den Gegenteil einer primitiven Rekursion, da durch T1—T5 diese Beschaffenheit einer Teilformel von der Beschaffenheit eines Nachfolgers (und nicht Vorgängers) von x abhängt.

Rein formal betrachtet kann aber die Struktur einer Formel auch so dargestellt werden, daß man von der vollen Formel ausgeht, und in der Richtung der Teilformeln weitergeht. Das kann am besten durch einen Graphen veranschaulicht werden. Z. B. kann der Formel

(1) $$((A \,\&\, (A \vee B)) \vee \neg C)$$

der folgende Graph zugeordnet werden (wodurch die Formeln sukzessiv auf jene ihrer Teilformeln aufgelöst werden, auf welche sich ihre „Hauptoperation" bezieht):

(2)



Es genügt zu den Knotenpunkten, die keine Endpunkte sind, das gerade aktuelle Hauptoperationszeichen hinzuschreiben; an den Endpunkten stehen immer Zeichen

in anderen Fällen, z. B. für Formelnmengen ist es geeigneter, unter unmittelbaren Vorgängern eines Elementes $x = f^*(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ seine unmittelbare Konstituenten $x_1^*, \ldots, x_m^*$ zu verstehen. Die Beispiele 3′ und 4 auf S. 276 des I. Teils stimmen nur in diesem Fall.

Im Fall dieses Beispiels empfiehlt sich die Bemerkung (1) auf S. 299—301 des I. Teils anzuwenden, wobei die in der Fußnote[8] auf S. 1 des II. Teils verlangte Änderung, daß statt $f(x_1, \ldots, x_t, \ldots)$ überall $f(x, \ldots)$ zu setzen ist, nicht gemacht werden soll. Das ist auch garnicht notwendig, wenn als unmittelbare Vorgänger $x_1, \ldots, x_t$ gerade die unmittelbaren Konstituenten von x betrachtet werden, da in diesem Fall $x = f^*(x_1, \ldots, x_t)$ durch f^* und $x_1, \ldots, x_t$ eindeutig bestimmt ist.

Auf S. 286 des I. Teils wurde die Folge $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s$ sämtlicher Vorgänger von x mißverständlich angegeben; gemeint wurde darunter im Fall einer Wortemenge die auf S. 311 mit (V) bezeichnete Folge. Aber allgemein ist unmißverständlich und auch bequemer zu behandeln, wenn man in die betreffende Folge der Reihe nach alle Vorgänger von x_1, dann von x_2, usw. endlich von x_t je in ihrer Reihenfolge und zuletzt noch x aufnimmt, ohne Rücksicht auf eventuelle Wiederholungen. In diesem Fall sollte in Nr. 11 auf S. 287 des I. Teils statt dem kleinsten Index i, für welches $\bar{x}_j$ ein Vorgänger von x_i ist, das größte solche i bestimmt werden.

Auf S. 309 des I. Teils ist aus der mit $f_\alpha(x) = \mu_y[\ldots$ beginnenden Definition von $f_\alpha(x)$ der wichtige Teil

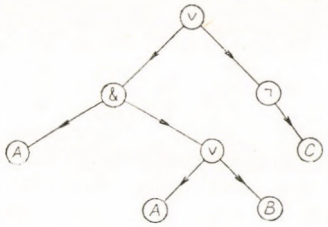
$$\&(-^1 y) - ^2 \leq \text{subst}\,(x, l_{o(y)}(x), \wedge)$$

weggeblieben.

Zusatz bei der Korrektur: Erst jetzt wurde mir bekannt, daß im Buch CURRY—FEYS: „Combinatory Logic" (1958) ein Begriff eingeführt wurde, der im wesentlichen mit der in meiner Arbeit [2] behandelten Verallgemeinerung des rekursiven Funktionsbegriffes übereinstimmt.

von Aussagenvariablen:

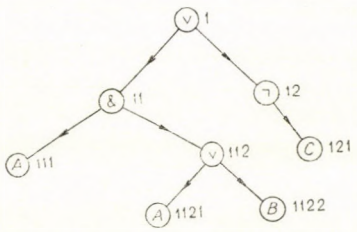
(3)



So erhält man im wesentlichen den bekannten KANTOROVITSCH-schen Graphen der Formel (1). Man sieht leicht, daß sich daraus unsere Formel eindeutig rekonstruieren läßt: Man beginnt mit den Variablen A und B der untersten „Schicht"; auf diese soll die jenem Punkt zugeordnete Operation bezogen werden, aus welchem Kanten zu A und B führen, also die Operation $\vee$. Hier setzt man für $\vee$ das erhaltene $(A \vee B)$. So haben wir in den Punkten der nächsten Schicht nach oben A, $(A \vee B)$, C. Zu den beiden ersten führen Kanten aus einem Punkt mit &, dorthin soll also $(A \,\&\, (A \vee B))$ gesetzt werden; zum dritten führt eine Kante aus einem Punkt mit $\neg$, dahin soll also $\neg C$ gesetzt werden. In den Punkten der nächsten Schicht nach oben stehen so $(A \,\&\, (A \vee B))$ und $\neg C$, und aus diesen ergibt der nächste Schritt unsere Formel.

Werden die Knotenpunkte ausserdem noch folgenderweise bezeichnet:

(4)



so kann dieser Graph (und daher auch unsere Formel) durch folgende Paarenfolge

(5) $$(\vee, 1),\quad (\&, 11),\quad (\neg, 12),\quad (A, 111),\quad (\vee, 112),$$
$$(C, 121),\quad (A, 1121),\quad (B, 1122)$$

vollkommen charakterisiert werden.

Diese Darstellung kann auch auf Elemente einer beliebigen freien holomorphen („zahlenartig aufbaubaren") Menge verallgemeinert werden; dies geschieht in § 2, wo auch allgemein die primitiv-rekursive Abhängigkeit dieser Darstellung von der ursprünglichen Form des betreffenden Elementes geschildert wird.

In (4) gehört zu jeder Teilformel eine kürzere Zahlenfolge als zu ihren Teilformeln, so das formal betrachtet der Übergang auf eine Formel von einer ihrer Teilformeln als der Übergang auf einen Vorgänger betrachtet werden kann. Exakt kann das durch primitive Rekursionen in einer „Wortemenge" durchgeführt werden, über das „Alphabet", das aus den Zeichen $\neg$, $\vee$, &, (,) und einer Folge von Variablenzeichen besteht.

In § 1 werde ich zeigen, daß die positive bzw. negative Beschaffenheit einer Teilformel einer Formel in dieser Wortemenge eine primitiv-rekursive Beziehung ist.

2. A. EHRENFEUCHT und Z. PAWLAK[4] untersuchen in einer gemeinsamen Arbeit, die im Erscheinen ist, die verschiedenen Arten der klammernfreien Bezeichnungsweisen von Formeln, und deren Zusammenhang damit, in welcher Reihenfolge die Knotenpunkte solcher Graphen, wie in meinem Beispiel der mit (3) bezeichnete ist, aufgezählt werden. Durch eine solche Reihenfolge, wie in meiner Folge (5) zu sehen ist, ergibt sich im wesentlichen eine von Z. PAWLAK stammende klammernfreie Schreibungsart; die bekannte LUKASIEWICZsche klammernfreie Schreibungsart würde sich hier durch die Reihenfolge

$$1, 11, 111, 112, 1121, 1122, 12, 121$$

ergeben.

In § 3 werde ich zeigen, daß sich die beiden Reihenfolgen in der bezüglichen Wortemenge in primitiv-rekursiver Abhängigkeit von einander angeben lassen (ähnliches gilt auch für andere Reihenfolgen).

Auch aus einer in LUKASIEWICZscher bzw. PAWLAKscher Form aufgeschriebenen Formel kann man eindeutig die bezügliche Variationenfolge — und dadurch den Formeln-Graphen, und so auch die übliche, mit klammern bezeichnete Form der Formel — erhalten; so ergibt sich auch eine unmittelbare Übersetzung der einen klammernfreien Form auf die andere. All das vollzieht sich primitiv-rekursiv auf der bezüglichen Wortemenge.

Betreffs der Kenntnisse über zahlentheoretische rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch.[5]

3. Ich werde von den Kenntnissen über Wortemengen[6] die folgenden benutzen.

1. Die Wortemenge H über einem Alphabet A (wo A eine beliebige Menge von Zeichen ist, die man auch „Buchstaben" nennt) enthält jene Zeichenreihen („Worte"), die von dem mit $\wedge$ bezeichneten leeren Wort (in der Rolle von 0) ausgehend durch Anknüpfen der Buchstaben von A (als „Nachfolgerbildungen") entstehen.

2. Eine auf H definierte und nur Werte von H annehmende Funktion (in den folgenden werden nur solche vorkommen) heißt primitiv-rekursiv in H, falls sie von $\wedge$ und von den Anknüpfungsfunktionen xc ausgehend (für alle $c \in A$) durch endlich viele Substitutionen und Anwendungen des folgenden Schemas der primitiven Rekursion definiert werden kann (wobei ${}^{-1}\wedge = \wedge$ und ${}^{-1}x$ für $x = c_1 c_2 \ldots c_n$ das Wort $c_2 \ldots c_n$ bedeutet):

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} f(\wedge) = b \\ \text{und für } c \in A \\ f(xc) = g_c(x, f(x), f({}^{-1}(xc))), \end{cases}$$

wobei $b \in A$ und g_c für jedes $c \in A$ eine bereits definierte primitiv-rekursive Funktion ist. Es können dabei auch beliebig viele Parameter auftreten.

3. Das Alphabet A jeder hier betrachteten Wortemenge enthält wenigstens zwei Elemente; seien a_0 und a_1 zwei fest gewählten Elemente von A. Die charakteris-

[4] Nach mündlicher Mitteilung von Z. PAWLAK.
[5] R. PÉTER, *Rekursive Funktionen* (Budapest, 1957), 2-te Auflage.
[6] Siehe Fußnote[2] und Fußnote[7].

tische Funktion $b(x_1, \ldots, x_n)$ einer Wortbeziehung $B(x_1, \ldots, x_n)$ kann durch

$$b(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls} \quad B(x_1, \ldots, x_n) \\ a_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert werden, und die Beziehung B wird primitiv-rekursiv in H genannt, falls b eine primitiv-rekursive Funktion in H ist.

4. Die natürlichen Zahlen

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots$$

können der Reihe nach mit

$$\wedge, \quad a_0, \quad a_0a_0, \quad a_0a_0a_0, \quad \ldots$$

identifiziert werden. Die Beziehung $B_N(x)$ „eine natürliche Zahl zu sein" ist primitiv-rekursiv in H.

5. Alle zahlentheoretische primitiv-rekursive Funktionen lassen sich zu primitiv-rekursive Funktionen in H ergänzen (ihre Ergänzungen werden ebenso bezeichnet wie die ursprünglichen zahlentheoretischen Funktionen).

6. Die „Ordnung" $o(x)$ des Wortes x, die $\wedge$ für $x = \wedge$ und n für $x = c_1c_2 \ldots c_n$ ist, ist primitiv-rekursiv in H.

7. Ist $b \in A$, so ist die Anzahl $h^b(x)$ der im Wort x enthaltenen Buchstaben b primitiv-rekursiv in H.

8. Die Identitätsfunktion $f(x) = x$, die Aneinanderknüpfungsfunktion $f(x, y) = xy$ und die Gleichheitsbeziehung $x = y$ sind primitiv-rekursiv in H.

9. Ähnlich wie ${}^{-1}x$ läßt sich auch x^{-1} definieren: $\wedge^{-1} = \wedge$ und für $x = c_1 \ldots c_{n-1}c_n$ bedeutet x^{-1} das Wort $c_1 \ldots c_{n-1}$. Sowohl ${}^{-1}x$ als auch x^{-1} sind primitiv-rekursiv in H.

10. Sei $b_i(x)$ für eine natürliche Zahl $1 \leqq i \leqq o(x)$ der i-te Buchstabe von x; für andere i oder x kann $b_i(x)$ etwa als $\wedge$ definiert werden (ähnliches gilt auch für die folgenden Definitionen). $b_i(x)$ ist primitiv-rekursiv in H.

11. Für eine natürliche Zahl i und für ein $b \in A$ sei das aus i b-Zeichen bestehende Wort mit

$$b^{(i)} = \underbrace{bb \ldots b}_{i\text{-mal}}$$

bezeichnet. $b^{(i)}$ ist in H eine primitiv-rekursive Funktion von i.

12. Für eine natürliche Zahl $i \leqq o(x)$ soll

$$e_i(x) \quad \text{bzw.} \quad l_i(x)$$

das aus den ersten bzw. letzten i Buchstaben von x bestehende Wort bedeuten. Auch diese Funktionen sind primitiv-rekursiv in H.

13. Dasselbe gilt für die Funktionen

$${}^{-i}x \text{ und } x^{-i},$$

die für eine natürliche Zahl $i \leqq o(x)$ den durch Weglassen von $e_i(x)$ vom Anfang bzw. von $l_i(x)$ vom Ende von x zurückbleibenden Rest von x bedeuten. Die in 8. definierten Funktionen ${}^{-1}x$ und x^{-1} sind die Spezielfälle für $i = 1$ dieser Funktionen.

14. Die i-te Iteration einer in H primitiv-rekursiven Funktion von x (unter der 0-ten Iteration x selbst verstanden) ist auch eine primitiv-rekursive Funktion von i und x in H.

15. Auch eine Funktion $\mathrm{subst}(x, y, z)$ ist primitiv-rekursiv in H, welche für $y \neq \Lambda$ das aus x dadurch entstehende Wort bezeichnet, daß in x jedes Vorkommen von y durch z ersetzt wird; vorausgesetzt, daß dadurch kein neues Vorkommen von y zustandekommt.

16. In (D) wird $f(xc)$ mit Hilfe von $f(x)$ und $f({}^{-1}(xc))$ definiert. x und ${}^{-1}(xc)$ gelten dabei als „unmittelbare Vorgänger" (d. h. Vorgänger nächstkleinerer Ordnung) von x. Als sämtliche Vorgänger eines Wortes werden außer Λ seine „Abschnitte" (zusammenhängende Bestandteile) betrachtet; für diese wird auch eine zweckmäßige Anordnung angegeben. Z. B. sind die Vorgänger des Wortes $c_1c_2c_3$ in dieser Reihenfolge

$$\Lambda, c_1, c_2, c_1c_2, c_3, c_2c_3, c_1c_2c_3.$$

Diese sind von $x = c_1c_2c_3$ abgesehen echte Vorgänger von x; die unmittelbaren Vorgänger von x sind c_1c_2 und c_2c_3.

Die Beziehungen

$$y \leqq x \text{ bzw. } y < x$$

„Vorgänger bzw. „echter Vorgänger von x zu sein" sind primitiv-rekursiv in H.

Nach 4. ist für natürliche Zahlen x und y die Beziehung $x < y$ gleichbedeutend mit $x < y$.

17. Aussagenlogische Verknüpfungen überführen in H primitiv-rekursive Beziehungen wieder in solche; ferner sind samt der Funktion $f(x)$ und der Beziehung $B(x, y)$ auch die Beziehungen

$$(Ey)[y \leqq f(x) \,\&\, B(x, y)] \quad \text{und} \quad (y)[y \leqq f(x) \to B(x, y)]$$

und auch die Funktion

$$\mu_y[y \leqq f(x) \,\&\, B(x, y)]$$

— welche, falls es Worte $y \leqq f(x)$ mit $B(x, y)$ gibt, das erste solche y in der festgelegten Reihenfolge der Vorgänger von $f(x)$, sonst aber Λ als Wert annimmt — primitiv-rekursiv in H. (Außer den ausgeschriebenen Variablen können immer auch beliebig viele Parameter auftreten.)

18. Es wird oft benutzt, daß falls $B_i(x_1, \ldots, x_n)$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ sich gegenseitig ausschließende primitiv-rekursive Beziehungen in H sind, dann auch die aus in H primitiv-rekursiven Funktionen $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, r, r+1)$ folgenderweise „zusammengeflickte" Funktion:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{falls} \quad B_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_r(x_1, \ldots, x_n), & \text{falls} \quad B_r(x_1, \ldots, x_n) \\ f_{r+1}(x_1, \ldots, x_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv-rekursiv in H ist.

19. Einer Wortefolge $x_0, x_1, \ldots, x_n$ kann ein Wort $c_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ als für festes n in H primitiv-rekursive Funktion derart zugeordnet werden, daß für

$i=0, 1, \ldots, n$ mit in H primitiv-rekursivem $k_y(x)$ und $\mathrm{long}(x)$

$$x_i = k_i(c_n(x_0, \ldots, x_n))$$

und

$$n = \mathrm{long}\,(c_n(x_0, \ldots, x_n))$$

gilt.

Mit in H primitiv-rekursivem $\bar{f}(z, x)$ (wo noch beliebigviele Parameter auftreten können) ist dann auch

$$c^{\bar{f}}(z, x) = c_{o(z)}(\bar{f}(0, x), \bar{f}(1, x), \ldots, \bar{f}(o(z), x))$$

primitiv-rekursiv in H.

20. Sei j die größte natürliche Zahl, für welche $a_0^{(j)}$ (siehe 11.) ein Vorgänger mindestens eines Gliedes der Folge $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ist, und sei

$$\alpha_{j+1} = a_1 a_0^{(j+1)} a_1.$$

Dann erhält man das in 19. eingeführte Wort

$$x = c_n(x_0, \ldots, x_n)$$

als

$$x = x_0\alpha_{j+1}x_1\alpha_{j+1}\ldots\alpha_{j+1}x_n\alpha_{j+1}.$$

Die Funktion $f_\alpha(x)$, welche, falls x ein Wort ist, das einer Folge zugeordnet wurde, dem darin benutzten „Trennzeichen" α_{j+1} gleich ist, und sonst den Wert $\wedge$ annimmt, ist primitiv-rekursiv in H. (So ist $f_\alpha(x) \neq \wedge$ gleichbedeutend damit, daß x einer Folge zugeordnet ist.) Damit gilt also für ein x, das einer Folge zugeordnet ist,

$$x = k_0(x)f_\alpha(x)k_1(x)f_\alpha(x)\ldots f_\alpha(x)k_{\mathrm{long}(x)}(x)f_\alpha(x).$$

Auch die „regelmäßigen Endstücke" dieses Wortes können in H primitiv-rekursiv definiert werden, durch eine Funktion $\bar{g}_r(x)$, wobei für $r \leqq \mathrm{long}\,(x)$

$$\bar{g}_r(x) = k_r(x)f_\alpha(x)\ldots f_\alpha(x)k_{\mathrm{long}(x)}(x)f_\alpha(x)$$

und sonst $\bar{g}_r(x) = \wedge$ gilt. (So ist $\bar{g}_0(x) = x$.)

21. Sind nun sämtliche Vorgänger eines Wortes x in der in 16. angegebenen Reihenfolge

$$\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{s(x)},$$

dann ist $s(x)$ primitiv-rekursiv in H und mit in H primitiv-rekursivem $v_y(x)$ gilt für $i=0, 1, \ldots, s(x)$

$$\bar{x}_i = v_i(x).$$

Ist ferner für ein $x = c_1c_2\ldots c_n$

$$\bar{x}_i = c_{i_1+1}c_{i_1+2}\ldots c_{i_1+i_2},$$

so ist

$$i = \binom{i_1+i_2}{2} + i_2,$$

und daher i eine zahlentheoretische primitiv-rekursive Funktion von i_1 und i_2.

22. Nun kann die „Wertverlaufsfunktion" $\varphi(x)$ einer Funktion $f(x)$ durch

$$\varphi(x) = c_{s(x)}(f(\bar{x}_0), f(\bar{x}_1), \ldots, f(\bar{x}_{s(x)}))$$

definiert werden, woraus sich für $i \leqq s(x)$

$$f(\bar{x}_i) = k_i(\varphi(x))$$

ergibt.

Wird in der Definition (D) in 1. $f(x)$ und $f(^{-1}(xc))$ durch $\varphi(x)$ bzw. $\varphi(^{-1}(xc))$ ersetzt, so wird aus (D) eine „Wertverlaufsrekursion" (D*); und auch die Anwendung von (D*) führt von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen von H nicht hinaus.

§ 1

4. Von nun an sei H die Wortemenge über das Alphabet

$$A = \{\neg, \vee, \&, (,), a_0, a_1, a_2, \ldots\},$$

wobei die Operationszeichen und Klammerzeichen, um Mißverständnisse zu vermeiden, als Buchstaben des Alphabets fett gedruckt werden, und $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Zeichen für Aussagenvariable sind. Die Trennzeichen können etwa aus a_0 und a_1 aufgebaut werden; $\wedge, a_0, a_0a_0, \ldots$ können der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen identifiziert werden. Um nicht auch die Ziffern 1 und 2 in das Alphabet aufnehmen zu müssen, benutzen wir in der Bezeichnung der Knotenpunkte der Formelngraphen statt diesen z. B. die Buchstaben $\neg$ und $\vee$, die ich mit a bzw. b bezeichnen werde. Das Wichtige ist nur, daß diese von a_0 verschieden sind. Dem ersten Knotenpunkt kann $\wedge$ zugeordnet werden.

Der Formelnbegriff (die Formeln als Worte betrachtet) wird, wie üblich, induktiv definiert: Aussagenvariablen sind Formeln, auch $\wedge$ (als eine leere Formel); falls dann F eine Formel ist, ist auch $\neg F$ eine Formel; ferner sind, falls F_1 und F_2 Formeln sind, auch $(F_1 \vee F_2)$ und $(F_1 \,\&\, F_2)$ Formeln. (Bekanntlich wird durch diese Klammernkonvention der Aufbau einer Formel eindeutig.)

Man zeigt genau so, wie ich in früheren Arbeiten[7] für gewisse Formelnarten ausführlich bewiesen habe, daß die Eigenschaften „eine Variable (hier Aussagenvariable) zu sein" und „eine Formel zu sein", primitiv-rekursive Beziehungen in H sind. Ihre charakteristischen Funktionen sollen mit $f_V(x)$ bzw. $f_F(x)$ bezeichnet werden.

Die Formel (1) der Nr. 1 lautet nach den eingeführten Bezeichnungen

$$((a_0 \,\&\, (a_0 \vee a_1)) \vee \neg a_2). \tag{6}$$

Man erhält den dazugehörigen Formelngraphen — und ähnlich den Graphen einer beliebigen Formel — indem man in den ersten Knotenpunkt diese Formel setzt, dann ihr „Hauptoperationszeichen" sucht (hier das zweite Zeichen $\vee$), und in die Endpunkte der aus diesem Knotenpunkt ausgehenden Kanten die auf den Seiten dieses Operationszeichens stehenden Formeln setzt; dann dasselbe Verfahren auf

[7] R. PÉTER, Über die Rekursivität einiger Übersetzungs-Transformationen und R. PÉTER, Über die „kürzeste" Form von Booleschen Funktionen, *Publications of the Math. Inst. of the Hungarian Acad. of Sciences*, 7 (1962), S. 69—78, bzw. S. 79—93.

diese Teilformeln wiederholt; usw. solange in den Teilformeln noch überhaupt Operationszeichen vorkommen. Nach endlich vielen Schritten kommt man zu den Endpunkten des Graphen, in welchen die Zeichen der in der Formel auftretenden Aussagenvariablen stehen. Dann ersetzt man die Teilformeln, welche in Knotenpunkten stehen, die keine Endpunkte sind (welche also noch Operationszeichen enthalten), durch ihre Hauptoperationszeichen.

Nun soll dem zum Ausgang gewählten Knotenpunkt noch $\wedge$ zugeordnet werden; und falls einem Knotenpunkt P bereits ein Wort w zugeordnet wurde, dann soll dem von links ersten (oder einzigen) Knotenpunkt, in welchen eine von P ausgehende Kante einläuft, wa zugeordnet werden, und den zweiten solchen Knotenpunkt — falls es gibt — wb. Mit diesen Bezeichnungen lautet die Paarenfolge (5) der Nr. 1:

(7) $\quad (\mathsf{v}, \wedge), (\&, a), (\neg, b), (a_0, aa), (\mathsf{v}, ab), (a_2, ba), (a_0, aba), (a_1, abb).$

5. Es wäre bequemer, wenn alle Operationen zweigliedrig wären. Das kann durch eine kleine formale Änderung erreicht werden: man hat nur das Zeichen $\neg$ nicht vor, sondern nach die Formel zu setzen, auf die es sich bezieht, und nach $\neg$ die leere Formel zu setzen. So schreibt man $(F\neg\wedge)$ statt $\neg F$. Die Formel (6) wird z. B. dadurch zu

(8) $$((a_0 \,\&\, (a_0 \,\mathsf{v}\, a_1)) \,\mathsf{v}\, (a_2 \neg \wedge)).$$

Falls x eine Formel ist, bezeichnen wir ihre derart modifizierte Form, worin also nur 2-gliedrige Operationen vorkommen, mit $f_2(x)$. Die Funktion $f_2(x)$, deren Wert belanglos ist, falls x keine Formel ist, kann in H als primitiv-rekursive Funktion definiert werden.

Seien nämlich (mit provisorischen Bezeichnungen) der Reihe nach

$$i(x) = \mu_i\big[i \leqq o(x) \,\&\, b_i(x) = \neg \,\&$$

$$\&\, (Et)[t \leqq x \,\&\, t \neq \wedge \,\&\, f_F(t) = \wedge \,\&\, t = e_{o(t)}(^{-i}x)]\big],$$

$$t(x) = \mu_t[t \leqq x \,\&\, t \neq \wedge \,\&\, f_F(t) = \wedge \,\&\, t = e_{o(t)}(^{-i(x)}x)],$$

$$f_1(x) = \mathrm{subst}\,(x, \neg\, t(x), (t(x)\neg\wedge)),$$

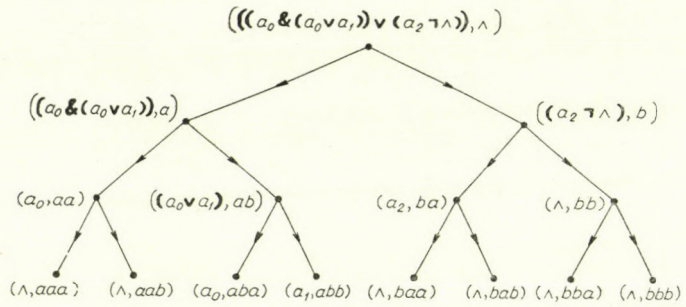
dann ergibt sich $f_2(x)$ durch sovielmalige Iteration dieser Substitution, wieviele $\neg$-Zeichen in x vorkommen, also durch $h^{\neg}(x)$-malige Iteration.

Genau so, wie für $f_F(x)$ sieht man ein, daß die Beziehung $f_{F_2}(x)$, „eine in der modifizierten Form geschriebene Formel zu sein", ebenfalls primitiv-rekursiv in H ist.

6. Wenn auf diese Weise alle Operationen als zweigliedrig betrachtet werden können, dann kann für jede Formel der Begriff der beiden Seiten der Hauptoperation eingeführt werden, wobei unter beiden Seiten $\wedge$ verstanden wird, falls die Formel kein Operationszeichen enthält (also entweder die leere Formel, oder eine Aussagenvariable ist). Damit kann man erreichen, daß sämtliche Endpunkte des Formelngraphen in derselben „Schicht" liegen, d. h. daß die ihnen zugeordneten, aus Zeichen a und b bestehenden Worte alle derselben Ordnung sind. So erhält man z. B. zur

mit (8) bezeichneten Formel x zunächst den folgenden Formelngraphen:

(9)



Die ersten Glieder der den Knotenpunkten der nächsten Schicht zugeordneten Paare wären schon alle $\wedge$. Die zweiten Glieder der im letzten Schicht stehenden Paare sind alle der Ordnung 3, da die betrachtete Formel als Element der bezüglichen Formelnmenge (nicht der Wortemenge) der Ordnung 3 ist. Diese Formeln-Ordnung, die ich mit $O(x)$ bezeichnen werde, kann in H primitiv-rekursiv definiert werden, da sie für eine leere Formel und für eine Aussagenvariable 0 ist, und für eine Formel, welche auch Operationszeichen enthält, um 1 größer ist, als die größere der Formeln-Ordnungen der beiden Seiten des Hauptoperationszeichens. Für das Hauptoperationszeichen $\mathrm{op}(x)$ von x, für die linke Seite $l_{\mathrm{op}}(x)$ und rechte Seite $r_{\mathrm{op}}(x)$ des Hauptoperationszeichens, endlich für $O(x)$ (die alle den Wert $\wedge$ annehmen sollen, falls x keine Formel ist), werde ich in der nächsten Nummer primitiv-rekursive Definitionen angeben. Unser modifizierter Grapf enthält jedenfalls

$$n(x) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{O(x)} = 2^{O(x)+1} \dot{-} 1$$

Knotenpunkte, und $n(x)$ ist mit $O(x)$ auch primitiv-rekursiv in H.

7. Die primitiv-rekursiven Definitionen für $\mathrm{op}(x)$, $l_{\mathrm{op}}(x)$ und $r_{\mathrm{op}}(x)$ lauten:

$$\mathrm{op}(x) = \begin{cases} \mu_y\big[y \leqq x \,\&\, (y = \vee \vee y = \& \vee y = \neg) \,\& \\ \quad \& (Eu)(Ev)[u \leqq x \,\&\, v \leqq x \,\&\, f_{F_2}(u) = \wedge \,\& \\ \qquad\qquad \& f_{F_2}(v) = \wedge \,\&\, x = (uyv)]\big], \\ \quad \text{falls} \quad f_{F_2}(x) = \wedge \,\&\, (\vee \prec x \vee \& \prec x \vee \neg \prec x) \\ \wedge \quad \text{sonst}, \end{cases}$$

$$l_{\mathrm{op}}(x) = \begin{cases} \mu_y[y \leqq x \,\&\, f_{F_2}(y) = \wedge \,\&\, e_{o(y)+1}(x) = (y \,\& \\ \qquad\qquad \& \, b_{o(y)+2}(x) = \mathrm{op}(x)], \\ \quad \text{falls} \quad \mathrm{op}(x) \neq \wedge \\ \wedge \quad \text{sonst}, \end{cases}$$

$$r_{\mathrm{op}}(x) = \begin{cases} {}^{-o(l_{\mathrm{op}}(x)+2)}(x^{-1}), \quad \text{falls} \quad \mathrm{op}(x) \neq \wedge \\ \wedge \quad \text{sonst}, \end{cases}$$

endlich

$$O(\wedge) = \wedge$$

und für $c \in A$

$$O(xc) = \begin{cases} \max\left(O(l_{\mathrm{op}}(xc)), O(r_{\mathrm{op}}(xc))\right)+1, & \text{falls} \quad \mathrm{op}(xc) \neq \wedge \\ \wedge \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist aber eine Wertverlaufsrekursion in H (und kann daher auf primitive Rekursion zurückgeführt werden). Denn, falls (mit provisorischer Bezeichnung)

$$i(x) = \mu_i\left[i \leqq o(x) \,\&\, b_i(x) = \mathrm{op}(x)\right]$$

gesetzt wird, und der Anfang x der Formel xc durch das Wort

$$c_1 c_2 \ldots c_{o(x)}$$

dargestellt wird, wo $c_1, c_2, \ldots, c_{o(x)}$ Buchstaben des Alphabets sind, dann ist für $\mathrm{op}(xc) \neq \wedge$

$$l_{\mathrm{op}}(xc) = c_2 c_3 \ldots c_{i(xc) \dot{-} 1}$$

und

$$r_{\mathrm{op}}(xc) = c_{i(xc)+1} \ldots c_{o(x)},$$

und daher, nach 21. in Nr. 3, wenn noch

$$j_1(x) = \binom{i(x) \dot{-} 1}{2} + i(x) \dot{-} 2 \quad \text{und} \quad j_2(x) = \binom{o(x) \dot{-} 1}{2} + o(x) \dot{-} (i(x)+1)$$

gesetzt wird, $l_{\mathrm{op}}(xc)$ der Vorgänger mit Index $j_1(xc)$, und $r_{\mathrm{op}}(xc)$ der Vorgänger mit Index $j_2(xc)$ von x, also, wenn die Wertverlaufsfunktion von $O(x)$ mit $\Omega(x)$ bezeichnet wird,

$$O\left(l_{\mathrm{op}}(xc)\right) = k_{j_1(xc)}(\Omega(x)) \quad \text{und} \quad O\left(r_{\mathrm{op}}(xc)\right) = k_{j_2(xc)}(\Omega(x)).$$

So wird aus der obigen zweiten Definitionsgleichung, für den Fall $\mathrm{op}(xc) \neq \wedge$

$$O(xc) = \max\left(k_{j_1(xc)}(\Omega(x)), k_{j_2(xc)}(\Omega(x))\right)+1,$$

und daher haben wir tatsächlich mit einer Definition nach Schema (D*) zu tun.

8. Die den Knotenpunkten des Graphen (9) zugeordneten Paare sollen nun von oben beginnend Schicht für Schicht, und in jeder Schicht von links nach rechts aufgezählt werden:

$$\begin{array}{l} (((a_0 \,\&\, (a_0 \vee a_1)) \vee (a_2 \urcorner \wedge)), \wedge), \quad ((a_0 \,\&\, (a_0 \vee a_1)), a), \\ ((a_2 \urcorner \wedge), b), \quad (a_0, aa), \quad ((a_0 \vee a_1), ab), \quad (a_2, ba), \\ (\wedge, bb), \quad (\wedge, aaa), \quad (\wedge, aab), \quad (a_0, aba), \quad (a_1, abb), \\ (\wedge, baa), \quad (\wedge, bab), \quad (\wedge, bba), \quad (\wedge, bbb). \end{array} \tag{10}$$

Zu einer beliebigen, ähnlich modifizierten Formel x gehört eine ähnliche Paarenfolge der Länge $n(x)$. Die Folge kann auch beliebig fortgesetzt werden, mit Paaren, deren erstes Glied immer $\wedge$ ist. Nun zeige ich, daß $g_z(x)$, welches, falls x eine (modifizierte) Formel ist, das der zur Formel x gehörigen $o(z)$-gliedrigen Paarenfolge zugeordnete Wort, und sonst $\wedge$ bedeutet, primitiv-rekursiv in H ist.

An (10) kann man nachprüfen, und auch allgemein sieht man leicht ein, daß (falls man mit dem 0-ten Paar beginnt) für eine natürliche Zahl $i>0$ das i-te Paar $\bar{f}(i, x)$ der unbeschränkt fortgesetzten Folge aus dem $\left[\frac{i \dot{-} 1}{2}\right]$-ten Paar derart entsteht, daß je nachdem i ungerade oder gerade ist, sein erster Komponent die linke oder rechte Seite des Hauptoperationszeichens des dortigen ersten Komponenten sein wird, und sein zweiter Komponent durch Hinzufügung von a oder b zum dortigen zweiten Komponenten zustandekommt. Wenn z keine natürliche Zahl ist, sei $\bar{f}(z, x) = \wedge$. Man erhält so die Definition:

$$\bar{f}(\wedge, x) = c_1(x, \wedge)$$

und für $d \in A$

$$\bar{f}(zd, x) = \begin{cases} c_1\left(l_{\mathrm{op}}\left(k_0\left(\bar{f}\left(\left[\frac{z}{2}\right], x\right)\right)\right), k_1\left(\bar{f}\left(\left[\frac{z}{2}\right], x\right)\right)a\right), \\ \qquad \text{falls} \quad B_N(zd) \,\&\, {}^2\!\not|\, zd \\ c_1\left(r_{\mathrm{op}}\left(k_0\left(\bar{f}\left(\left[\frac{z}{2}\right], x\right)\right)\right), k_1\left(\bar{f}\left(\left[\frac{z}{2}\right], x\right)\right)b\right), \\ \qquad \text{falls} \quad B_N(zd) \,\&\, {}^2|\, zd \\ \wedge \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Da falls zd eine natürliche Zahl ist,

$$zd = d_1 d_2 \ldots d_{o(zd)} \quad \text{mit} \quad d_1 = d_2 = \ldots = d_{o(zd)} = a_0$$

und

$$\left[\frac{z}{2}\right] = d_1 d_2 \ldots d_{o\left(\left[\frac{z}{2}\right]\right)}$$

ist, zeigt man ganz ähnlich, wie bei der Definition von $O(x)$ in Nr. 7, daß auch diese Definition eine Wertverlaufsrekursion, und demnach $\bar{f}(z, x)$ primitiv-rekursiv in H ist.

Damit ist aber auch (siehe 19. in Nr. 3)

$$g_z(x) = \begin{cases} c^{\bar{f}}(z, x), & \text{falls} \quad f_{F_2}(x) = \wedge \\ \wedge \quad \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv-rekursiv in H. Und dasselbe gilt für $g_{n(x) \dot{-} 1}(x)$, das der zur modifizierten Formel x gehörigen Folge (in unserem Beispiel der Folge (10)) zugeordnete Wort ist.

9. Aus dieser Folge sind nun die überflüssigen Paare, deren erster Komponent $\wedge$ ist, zu streichen. (Dadurch wird keine Änderung am Trennzeichen im Wort, das der Folge zugeordnet ist, notwendig werden (siehe 20. in Nr. 3): gerade darum wurde a und b von a_0 verschieden gewählt. So ist nämlich das zum Paar $(\wedge, c_1 c_2 \ldots c_r)$ gehörige Wort, wo jedes c_i entweder a oder b ist, $a_1 a_0 a_1 c_1 \ldots c_r a_1 a_0 a_1$, und im Trennzeichen jedes Paars kommt mindestens ein a_0 vor.) Wird die Beziehung $k_0(x) = \wedge$ mit $B(x)$ bezeichnet, und die Definition einer Funktion $f_B(x)$ angegeben (welche, falls $g_{n(x) \dot{-} 1}(x)$ für x gesetzt wird, die gewünschte Streichung von rechts nach links gehend ausführt):

$$f_B(\wedge) = \wedge$$

und für $c \in A$

$$f_B(xc) = \begin{cases} f_B\big((xc)^{-o(k_{\mathrm{long}(xc)}(xc)f_\alpha(xc))}\big), & \text{falls} \quad B(k_{\mathrm{long}(xc)}(xc)) \\ f_B\big((xc)^{-o(k_{\mathrm{long}(xc)}(xc)f_\alpha(xc))}\big)k_{\mathrm{long}(xc)}(xc)f_\alpha(xc) & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann sieht man nach den vorherigen Mustern wieder leicht, daß dies eine Wertverlaufsrekursion ist, und daher das der nach der genannten Streichung aus unserer modifizierten Folge x übrigbleibenden Folge zugeordnete Wort

$$f_B(g_{n(x)\dot{-}1}(x))$$

primitiv-rekursiv in H ist.

10. Um endlich zu einer solchen Folge zu kommen, wie für unser Beispiel die Folge (7) in Nr. 4 ist, hat man noch die solchen ersten Komponenten der Glieder der zuletzt erhaltenen Paarenfolge, welche auch Operationszeichen enthalten, durch ihre Hauptoperationszeichen zu ersetzen.

Sei

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{subst}\,(x, k_0(x), \mathrm{op}\,(k_0(x))), & \text{falls} \quad \mathsf{v} \prec k_0(x) \vee \mathbf{\&} \prec k_0(x) \vee \neg \prec k_0(x) \\ x \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$\bar{f}(z, x) = f(k_z(x)).$$

(Das hat freilich mit der gleich bezeichneten Funktion in Nr. 8, und auch mit den später gleich bezeichneten Funktionen nichts zu tun.) Dann wird die gewünschte Ersetzung durch (siehe 19. in Nr. 3)

$$g'(x) = c^{\bar{f}}\,(\mathrm{long}\,(f_B(g_{n(x)\dot{-}1}(x))), f_B(g_{n(x)\dot{-}1}(x)))$$

geleistet; falls also x eine Formel von ursprünglicher Form ist, so ist das davon in H primitiv-rekursiv abhängige

$$g(x) = g'(f_2(x))$$

das dem Graphen von x zugeordnete Wort.

11. Nun kann man die positive bzw. negative Beschaffenheit einer Teilformel einer Formel x primitiv-rekursiv definieren.

Falls x eine Formel, und y eine der Variationen der Elemente a und b ist, die einer der Knotenpunkten des zu x gehörigen Graphen zugeordnet wurde, dann sei

$$\mathrm{pos}\,(x, y) = \begin{cases} \wedge \\ a_0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{neg}\,(x, y) = \begin{cases} \wedge \\ a_0, \end{cases}$$

je nachdem die Teilformel von x, welche zum betreffenden Knotenpunkt gehört, ein Positivteil bzw. ein Negativteil von x ist. (Welche diese Teilformel ist, das erhält man nach den bisherigen leicht: wird (mit provisorischer Bezeichnung)

$$i(x, y) = \mu_i\big[i \leqq \mathrm{long}\,(f_B(g_{n(x)\dot{-}1}(f_2(x)))) \,\&\, y = k_1(k_i(f_B(g_{n(x)\dot{-}1}(f_2(x)))))\big]$$

gesetzt, so ist sie

$$k_0(k_{i(x,y)}(f_B(g_{n(x)\dot{-}1}(f_2(x))))).)$$

Nach T1—T5 in Nr. 1 hängt das von jener Teilfolge ab, die zum mit der Variation y^{-1} bezeichneten Knotenpunkt gehört, und zwar so, wie das in T1—T5 vorgeschrie-

ben ist. Falls x oder y nicht von der genannten Art ist, dann sei $\mathrm{pos}(x, y) = \mathrm{neg}(x, y) = a_0$.

Wird (mit provisorischen Bezeichnungen)

$$B(x, y) \equiv (Ei)\left[i \leqq \mathrm{long}(g(x)) \,\&\, y = k_1(k_i(g(x)))\right]$$

und

$$i(x, y) = \mu_i\left[i \leqq \mathrm{long}(g(x)) \,\&\, y = k_1(k_i(g(x)))\right]$$

gesetzt, so ist demnach

$$\mathrm{pos}(x, \wedge) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls} \quad f_F(x) = \wedge \\ a_0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{neg}(x, \wedge) = a_0,$$

ferner für $c \in A$

$$\mathrm{pos}(x, yc) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls} \quad f_F(x) = \wedge \,\&\, B(x, yc) \,\& \\ & \quad \&\,((k_0(k_{i(x,y)}(g(x))) = \neg \,\&\, \mathrm{neg}(x, y) = \wedge) \vee \\ & \quad \vee\,(k_0(k_{i(x,y)}(g(x))) = \vee \,\&\, \mathrm{pos}(x, y) = \wedge)) \\ a_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\mathrm{neg}(x, yc) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls} \quad f_F(x) = \wedge \,\&\, B(x, yc) \,\& \\ & \quad \&\,((k_0(k_{i(x,y)}(g(x))) = \neg \,\&\, \mathrm{pos}(x, y) = \wedge) \vee \\ & \quad \vee\,(k_0(k_{i(x,y)}(g(x))) = \,\& \,\&\, \mathrm{neg}(x, y) = \wedge)) \\ a_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Definitionsgleichungen (für die charakteristischen Funktionen der positiven bzw. negativen Beschaffenheit der Teilformel einer Formel x an der mit y bezeichneten Stelle) ergeben eine simultane Rekursion, und nach meiner in Fußnote[2] zitierten Arbeit kann diese auf primitive Rekursionen aufgelöst werden.

§ 2

12. Bei SCHÜTTE kommen erst Bezeichnungen wie $\vee(F, G)$ vor; nur später geht er auf zweiseitige Operationszeichen über. Für mehrgliedrigen Operationen muß man bei der ersten Bezeichnung bleiben. Man kann den Begriff des Formeln-Graphen für Elemente einer beliebigen freien holomorphen (das ist der exakte Begriff für „zahlenartig aufbaubaren") Menge $\overline{H}$ verallgemeinern. Diese Elemente werden von den Elementen einer Teilmenge $\overline{H}_0$ von $\overline{H}$ (von den „0-Elementen") ausgehend, durch Anwendung der Elemente einer Teilmenge $\overline{F}$ der auf $\overline{H}$ definierten und nur Werte aus $\overline{H}$ annehmenden Funktionen (der „Nachfolgerfunktionen") eindeutig aufgebaut.

Zur Untersuchung der formalen Aufbau der Elemente von $\overline{H}$ kann man auch allgemein eine Wortemenge H einführen, über das Alphabet A, das aus Zeichen für Elemente von $\overline{H}_0$ (kurz „0-Terme" gennant), für zu $\overline{F}$ gehörigen Funktionen (kurz „Nachfolgerzeichen" genannt), für die beiden Klammerzeichen (und), und für den Komma , besteht, ausserdem, wenn $\overline{H}_0 + \overline{F}$ endlich ist, aus einer hinzugenommenen Zeichenfolge $a_1, a_2, \ldots$.

Die Elemente von $\overline{H}$ als Zeichenreihen, d. h. als Worte von H betrachtet, sollen Elemententerme genannt werden. Man wählt zwei beliebige Elemente des Alphabets

für a_0 und a_1, und eine beliebige, a_0 nicht enthaltende Folge $a_1, a_2, \ldots$ aus den Elementen des Alphabets, wobei man leicht sieht, daß $a_{o(x)}$ und die Beziehung $B_{\bar{A}}(x)$ „zur Folge $a_1, a_2, \ldots$ zu gehören", primitiv-rekursiv in H sind.

Der Aufbau eines Elementenlermes x kann auch allgemein durch einen Graphen veranschaulicht werden: man geht von einem Knotenpunkt aus, dem x zugeordnet ist, und falls x der Form

$$x = f(x_1, \ldots, x_r)$$

ist, wo f ein Nachfolgerzeichen ist, und $x_1, \ldots, x_r$ Elementenlerme sind, dann zieht man aus dem Ausgangspunkt r Kanten, und deren neu gewonnenen Endpunkten ordnet man der Reihe nach $x_1, \ldots, x_r$ zu. Dasselbe Verfahren wird dann für jedes der Elementenlerme $x_1, \ldots, x_r$ wiederholt, usw. Man bezeichnet noch den Ausgangspunkt mit $\wedge$, die zu $x_1, \ldots, x_r$ gehörigen Punkte der Reihe nach mit $a_1, \ldots, a_r$; falls x_1 der Form $f_1(y_1, \ldots, y_s)$ ist (wo $y_1, \ldots, y_s$ Elementenlerme sind, und f_1 ein Nachfolgerzeichen ist), dann die neuen Endpunkte der aus dem zu x_1 gehörigen Punkt gezogenen Kanten der Reihe nach mit $a_1a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_s$, usw. Statt eines Elementenlerms der Form $f_i(\ldots)$ genügt es den bezüglichen Knotenpunkt mit f_i zu bezeichnen.

Ein Formeln-Graph ist immer ein gerichteter Wurzelbaum, in dem für jeden Knotenpunkt eine Reihenfolge für die von ihm ausgehenden Kanten angegeben ist. In den ausgezeichneten Knotenpunkt läuft keine Kante, in jeden anderen genau eine. Ein solcher Graph n-ten Grades, deren Knotenpunkte höchtsens der Ordnung m sind, kann durch $n-1$ Variationen (mit Wiederholungen) höchstens m-ter Klasse der Buchstaben $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vollständig charakterisiert werden, wobei mit einer Variation

$$d_1 \ldots d_l a_r$$

(wo jedes d_i mit irgendeinem a_j für $j = 1, 2, \ldots, m$ übereinstimmt) zusammen auch die Variation $d_1 \ldots d_l$, und für $r > 1$ auch die Variationen

$$d_1 \ldots d_l a_1, \quad d_1 \ldots d_l a_2, \quad \ldots, \quad d_1 \ldots d_l a_{r-1}$$

vorkommen müssen. (So zieht das Vorkommen einer Variation $k+1$-ter Klasse auch das Vorkommen von Variationen 1-ter, 2-ter, ..., k-ter Klasse nach sich.)

Ist eine solche Menge M von Variationen gegeben, dann baut man daraus den dazugehörigen Graphen so auf, daß man aus einem Punkt (das mit $\wedge$ bezeichnet wird) r_1 Kanten zieht, wenn r_1 Variationen erster Klasse in M vorkommen (diese müssen dann gerade $a_1, a_2, \ldots, a_{r_1}$ sein), und die erhaltenen Endpunkte der Reihe nach mit $a_1, a_2, \ldots, a_{r_1}$ bezeichnet; wenn auch Variationen zweiter Klasse in M vorkommen, so müssen diese mit einem der a_i $(i = 1, 2, \ldots, r_1)$ beginnen; für jedes solche i zieht man aus dem mit a_i bezeichneten Punkt soviele Kanten, wieviele mit a_i beginnenden Variationen 2-ter Klasse in M vorkommen, und bezeichnet ihre Endpunkte der Reihe nach mit diesen Variationen $a_ia_1, a_ia_2, \ldots$; usw.

Um dadurch den Aufbau eines Elementenlerms zu charakterisieren, hat man dem mit $d_1, \ldots d_l$ bezeichneten Punkt das Nachfolgerzeichen einer r-stelligen Funktion zuzuordnen, falls die Variationen

$$d_1 \ldots d_l a_1, \quad d_1 \ldots d_l a_2, \quad \ldots, \quad d_1 \ldots d_l a_r$$

vorkommen, und einen 0-Term, falls keine Variation $k+1$-ter Klasse mit dem Anfang $d_1 \ldots d_l$ vorkommt (d. h. falls mit $d_1 \ldots d_l$ ein Endpunkt des Graphen bezeichnet wurde).

Den Punkten der „untersten Schicht" des Graphen, die ja Endpunkte sind, werden so 0-Terme zugeordnet; diese sind aber Elemententerme. Wenn für alle Zeichen, die den Punkten eines Schichtes zugeordnet sind, gewisse Elemententerme gesetzt werden, so setzen wir folgenderweise Elemententerme für die Zeichen der darüber liegenden Schicht: Kommt in der betrachteten Schicht ein Punkt mit der Bezeichnung $d_1 \ldots d_l d_{l+1}$ vor, und ist r der Höchstindex, mit welcher in dieser Schicht $d_1 \ldots d_l a_r$ vorkommt, dann ist im darüberliegenden Schicht dem Punkt mit der Bezeichnung $d_1 \ldots d_l$ ein Nachfolgerzeichen f einer r-stelligen Funktion zugeordnet; für dieses f soll dann das Elemententerm $f(x_1, \ldots, x_r)$ gesetzt werden, wo $x_1, \ldots, x_r$ der Reihe nach die den mit

$$d_1 \ldots d_l a_1, \quad d_1 \ldots d_l a_2, \quad \ldots, \quad d_1 \ldots d_l a_r$$

bezeichneten Punkten unserer Schicht zugeordneten Elemententerme sind.

So kann auch im allgemeinen Fall der Aufbau eines Elemententerms durch eine endliche Menge von Paaren charakterisiert werden, deren erster Komponent ein Nachfolgerzeichen oder ein 0-Term ist, und der zweite eine Variation von Zeichen $a_1, a_2, \ldots$.

13. Ganz ähnlich, wie im II. Teil meiner in Fußnote[2] zitierten Arbeit die Beziehung „Elemententerm für ein Element einer gegebenen freien holomorphen Menge zu sein" in einer Wortemenge primitiv-rekursiv definiert wurde, kann auch in unserer Wortemenge H die Beziehung $B_E(x)$ „Elemententerm zu sein" und auch die Beziehung $B_{Em}(x)$ „modifizierter Elemententerm zu sein" für eine solche Modifikation, wobei alle im Aufbau des Elemententerms teilnehmenden Funktionen als gleichvielstellig aufzuschreiben sind, primitiv-rekursiv definiert werden. Wenn im Aufbau eines Elemententerms Funktionen von höchstens m Variablen auftreten, und f, eine dieser Funktionen, r-stellig ist, mit $r < m$, so soll bei der Modifikation für eine im Aufbau teilnehmende Konstituente $f(x_1, \ldots, x_r)$

$$f(x_1, \ldots, x_r, \wedge, \wedge, \ldots, \wedge)$$

gesetzt werden, mit $m - r$ leeren Argumenten.

Auch bei dem Übergang von einem Elemententerm auf seine modifizierte Form, und auch in den weiteren Untersuchungen, übernehmen die Argumente, d. h. die durch die „Hauptkommata" getrennten Teilelemententerme, die vorherige Rolle der beiden Seiten der im § 1 betrachteten „Hauptoperation". Unter Hauptkommata eines Elemententerms

$$x = f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

werden die hier ausgeschriebenen Kommata verstanden, die dadurch gekennzeichnet werden können, daß in ${}^{-2}x$ vor ihnen ebensoviele Anfangsklammern wie Endklammern stehen. Ihre Anzahl $f_K(x)$ ist um 1 kleiner, als die Argumentenanzahl, und kann wie folgt definiert werden:

$$f_K(\wedge) = \wedge$$

und für $c \in A$

$$f_K(xc) = \begin{cases} f_K(x), & \text{falls} \quad c \neq , \vee h({}^{-2}x) \neq h({}^{-2}x) \\ f_K(x) a_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die maximale Argumentenanzahl der im Aufbau eines Elemententerms x teilnehmenden Teilelemententerme soll mit $m(x)$ bezeichnet werden. Dann ist

$$m(x) = f_K(\mu_e[e \leqq x \,\&\, B_E(e) \,\&$$
$$\& \,(\bar{e})[(\bar{e} \leqq x \,\&\, B_E(\bar{e}) \to f_K(\bar{e}) \leqq f_K(e)]])a_0 .$$

Aus einem Teilelemententerm $y = f(x_1, \ldots, x_r)$ von x, mit $r < m(x)$ erhält man seine modifizierte Form durch

$$y^{-1}(,)^{(m(x) \dot{-} 1 \dot{-} f_K(y))}.$$

Diese benutzend beweist man ähnlich, wie für $f_2(x)$ in Nr. 5, daß die modifizierte Form $f_m(x)$ eines Elemententerms x primitiv-rekursiv in H ist.

Ganz nach Muster des II. Teils meiner in der Fußnote[2] zitierten Arbeit beweist man, daß das $o(z)$-te Argument eines Elemententermes x (so in der ursprünglichen wie in der modifizierten Form) eine primitiv-rekursive Funktion in H von z und x ist. Wie bereits gesagt, übernehmen diese Argumente die Rolle der beiden Seiten des in § 1 betrachteten „Hauptoperationszeichens"; auch die „Formeln-Ordnung" $O(x)$, das hier die Ordnung des durch den Elemententerm x dargestellten Elements von $\overline{H}$ in $\overline{H}$ bedeutet, ergibt sich für nicht-0-Terme ähnlich wie in Nr. 7 als um 1 mehr als das Maximum der Formeln-Ordnungen der Argumente von x.

14. Zu einem modifizierten Elemententerm x gehört ein dem Graphen (9) in Nr. 6 ähnlicher Graph, worin aus jedem Knotenpunkt genau $m(x)$ Kanten ausgehen, und daher die Ordnung des Graphen sich wieder einfach als in H primitiv-rekursive Funktion ergibt. Die dazu gehörige Menge von Paaren, deren erster Komponent ein (modifizierter) Teilelemententerm und zweiter Komponent eine Variation der Buchstaben $a_1, a_2, \ldots, a_{m(x)}$ ist, kann verschiedenartig in eine Folge geordnet werden. Der in Nr. 8 gewählten Reihenfolge (10) entsprechend sollen die Paare von oben beginnend Schicht für Schicht, und in jeder Schicht von links nach rechts aufgezählt werden.

Das dieser Paarenfolge zugeordnete Wort $g'(x)$ kann den Gedankengang in Nr. 8 verfolgend als eine primitiv-rekursive Funktion in H definiert werden, da (falls man mit dem 0-ten Paar beginnt) das i-te Paar aus dem $\left[\frac{i \dot{-} 1}{m(x)}\right]$-ten Paar derart entsteht, daß je nachdem

$$i \equiv 1, 2, \ldots, m(x) \qquad (\mathrm{mod}\ m(x)),$$

sein erster Komponent das 1-te, 2-te, ..., $m(x)$-te Argument des dortigen ersten Argumentes sein wird, und sein zweiter Komponent durch Hinzufügung von $a_1, a_2, \ldots, a_{m(x)}$ zum dortigen zweiten Argument zustandekommt.

15. Genau so wie in Nr. 9, kann man das jener Folge zugeordnete Wort, der durch Streichung der Paare mit leerem ersten Komponent entsteht, als in H primitiv-rekursive Funktion definieren. Auch die Ersetzung der übriggebliebenen solchen ersten Komponenten, die keine 0-Terme sind, durch ihre „Hauptoperationszeichen" (das hier für einen Elemententerm der Form $x = f(\ldots)$ das Zeichen f, also einfach $b_1(x)$ bedeutet) geht ganz ähnlich zum Gedankengang in Nr. 10.

Damit erweist es sich, daß der Graph, der in der geschilderten Weise einem Element x einer freien holomorphen Menge $\overline{H}$ zugeordnet wird, in der zu $\overline{H}$ ange-

passten Wortemenge H durch eine primitiv-rekursive Funktion des zu x gehörigen Elemententermes charakterisiert werden kann.

16. *Bemerkung.* Die in Nr. 12 gestellte Forderung, daß falls $\overline{H}_0 + \overline{F}$ endlich ist, dann eine Zeichenfolge $a_1, a_2, \ldots$ zum Alphabet A hinzugenommen werden soll, ist unwesentlich. Es genügt, daß A wenigstens zwei Buchstaben enthält (und das gilt in jedem Fall, da weder $\overline{H}_0$ noch $\overline{F}$ leer ist), die dann mit a_0 und a_1 bezeichnet werden können. Die Rolle der Buchstaben

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

können die Worte

$$a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(3)}, \ldots$$

übernehmen (siehe 11. in Nr. 3), und die Rolle einer Variation $d_1 d_2 \ldots d_l$, wobei jedes d_i ein a_j mit $j > 0$ ist, das der Folge $d_1, d_2, \ldots, d_l$ zugeordnete Wort

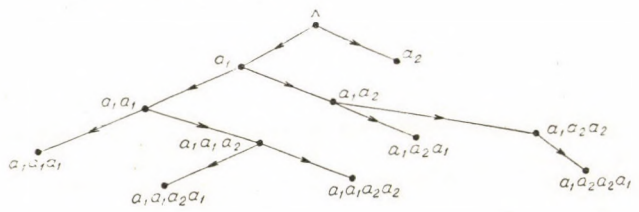
$$c_{l-1}(d_1, d_2, \ldots, d_l).$$

Sämtliche hier verwendeten Gedankengänge können mit sinngemäßen Abänderungen auch so durchgeführt werden; und ihre Ergebnisse bleiben dabei gültig.

In den Fällen vom § 1 und § 3 sind diese Abänderungen nicht notwendig, da $\overline{H}_0$ unendlich viele Zeichen (für Variable) enthält.

§ 3

17. Wie bereits in Nr. 2 erwähnt wurde, knüpfen sich die Untersuchungen von EHRENFEUCHT und PAWLAK über die verschiedenen klammernfreien Bezeichnungsweisen von Formeln an verschiedene Reihenfolgen der Knotenpunkte der entsprechenden Formeln-Graphen (in welchen aber bei ihnen keine Variationen, nur Operationszeichen bzw. Variablen den Knotenpunkten zugeordnet werden). Insbesondere gehört zu einem PAWLAKschen klammernfreien Bezeichnungsweise im wesentlichen jene Reihenfolge (P), die ich bisher verwendet habe: wo die Knotenpunkte von oben nach unten Schicht für Schicht, und in einer Schicht von links nach rechts aufgezählt werden. Die zur LUKASIEWICZ-schen klammernfreien Bezeichnungsweise gehörige Reihenfolge (L) ergibt sich, wenn man (vom Anfangspunkt ausgehend) so lange wie möglich links hinunterzugehen trachtet, und wenn das nicht mehr geht, bis zum von unten her ersten noch nicht erschöpften Verzweigungspunkt hinaufgeht, und von dort aus im bisher nicht erreichten Teil des Graphen dasselbe tut. Werden die Knotenpunkte mit den in dieser Arbeit eigenführten Variationen bezeichnet, so bedeutet das zum Beispiel für den Graphen



die Reihenfolge

$$\wedge, a_1, a_1a_1, a_1a_1a_1, a_1a_1a_2, a_1a_1a_2a_1, a_1a_1a_2a_2,$$
$$a_1a_2, a_1a_2a_1, a_1a_2a_2, a_1a_2a_2a_1, a_2.$$

Falls diese Variationen alle als Variationen 4-ter Klasse der Elemente $\wedge, a_1, a_2$ aufgefasst werden, indem man nötigenfalls die entsprechende Anzahl von $\wedge$ rechts anknüft, so haben wir hier gerade mit der in Betracht der Elemente $a_1, a_2, \ldots$ üblichen Anordnung der Variationen zu tun. In der Reihenfolge (P) würden hier Variationen von a_1 und a_2 der Reihe nach 0-ter, 1-ter, 2-ter, 3-ter, 4-ter Klasse vorkommen; für jede Klasse in der üblichen Reihenfolge.

In der Reihenfolge (P) besteht für zwei Variationen x und y die ordnende Relation $x \lesssim_P y$, falls $o(x) < o(y)$ gilt, oder ihr von links erster verschiedener Buchstabe in x von kleinerem Index als in y ist. In der Reihenfolge (L) gilt für zwei Variationen x und y die Relation $x \lesssim_L y$, falls ihr von links erster verschiedener Buchstabe in x entweder $\wedge$ oder von kleinerem Index als in y ist.

Wie in § 2 geschildert wurde, kann auch zu einer von EHRENFEUCHT und PAWLAK behandelten Formelnmenge $\overline{H}$ eine Wortmenge H angegeben werden, worin die jenen Paarenfolgen zugeordneten Worte $\bar{g}(x)$, welche die zu den Formeln von $\overline{H}$ gehörigen Formeln-Graphen charakterisieren, primitiv-rekursiv von den als Zeichenreihen x betrachteten Formeln abhängen. Die zweiten Komponenten der Paare dieser Folge sind Variationen, die in der Reihenfolge (P) geschrieben wurden. So sind die Glieder der den zur Formel x gehörigen Graphen charakterisierenden Variationenfolge in der Reihenfolge (P)

$$k_1(k_0(\bar{g}(x))), k_1(k_1(\bar{g}(x))), \ldots, k_1(k_{\log(\bar{g}(x))}(\bar{g}(x))),$$

und daher das dieser Variationenfolge zugeordnete Wort (siehe 19. in Nr. 3)

$$v_P(x) = c^{\bar{f}}(\log(\bar{g}(x)), x) \quad \text{mit} \quad \bar{f}(z, x) = k_1(k_{o(z)}(\bar{g}(x)))$$

primitiv-rekursiv in H. Von $v_P(x)$ ausgehend könnte man auch andere Reihenfolgen der Knotenpunkte des zu x gehörigen Formeln-Graphen primitiv-rekursiv in H definieren.

18. Man kann aber auch unmittelbar aus einer beliebigen Variationenfolge ausgehen, welche einen Formeln-Graphen charakterisiert. Nach Nr. 12 ist die Beziehung $B_{FG}(x)$, „das einer solchen Variationenfolge zugeordnete Wort zu sein, die einen Formeln-Graphen charakterisiert" die Konjunktion der folgenden Beziehungen:

$B_{Vf}(x)$, „x ist das einer Folge von Variationen der Elemente $a_1, a_2, \ldots$ zugeordnete Wort". (Nach Nr. 12 kann in keinen der Variationen ein a_j mit $j > o(x)$ vorkommen.)

$B_{-1}(x)$, „mit jedem Glied y kommt auch y^{-1} unter den Gliedern der zu x gehörigen Folge vor".

$B_I(x)$, „falls ein Glied y der zu x gehörigen Folge mit a_r endet, wo $r > 1$ ist, dann kommt auch $y^{-1}a_{r-1}$ unter den Gliedern der Folge vor".

Diese können der Reihe nach wie folgt definiert werden:

$$B_{Vf}(x) \equiv f_a(x) \neq \wedge \;\&\; (i)[i \leqq \log(x) \rightarrow$$
$$\rightarrow (b)[b \leqq k_i(x) \rightarrow (o(b) = 1 \rightarrow (Ej)[j \leqq o(x) \;\&\; b = a_j])]],$$
$$B_{-1}(x) \equiv (i)[i \leqq \log(x) \rightarrow (Ej)[j \leqq \log(x) \;\&\; k_j(x) = (k_i(x))^{-1}]],$$

dann, mit

$$j(i, x) = \mu_j[j \leqq o(x) \,\&\, l_1(k_i(x)) = a_j]$$

$$B_I(x) = (i)[i \leqq \text{long}\,(x) \to (l_1(k_i(x)) \neq a_1 \to \\ \to (Ej)\,[j \leqq \text{long}\,(x) \,\&\, k_j(x) = (k_i(x))^{-1} a_{j(i,x) \dot{-} 1}])].$$

So ist die Beziehung

$$B_{FG}(x) \equiv B_{Vf}(x) \,\&\, B_{-1}(x) \,\&\, B_I(x)$$

primitiv-rekursiv in H.

Es gelte nun $B_{FG}(x)$, und sei für die Variationen der zu x gehörigen Variationenfolge eine Reihenfolge (R) durch eine in H primitiv-rekursive ordnende Relation

$$R(x, y, z) \equiv y \lesssim_R z$$

gegeben (welche also in Bezug auf Variationen y und z der Folge irreflexiv, transitiv und trichotom ist). Dann ist für die Relation $B_R(x)$, „das einer solchen Variationenfolge der Reihenfolge (R) zugeordnete Wort zu sein, die einen Formeln-Graphen charakterisiert", laut der Definition

$$B_R(x) \equiv B_{FG}(x) \,\&\, (i)[i < \text{long}\,(x) \to k_i(x) \lesssim_R k_{i+1}(x)]$$

primitiv-rekursiv in H.

19. Ich zeige nun, daß falls R_1 und R_2 zwei in H primitiv-rekursive ordnende Relationen sind, und $B_{R_1}(x)$ gilt (also x das einer Formeln-Graphen-charakterisierenden Variationenfolge der Reihenfolge (R_1) zugeordnete Wort ist), dann das der in die Reihenfolge (R_2) umgeordnete Folge zugeordnete Wort $w_{R_2}(x)$ primitiv-rekursiv in H ist. (Falls $B_{R_1}(x)$ nicht gilt, kann man etwa $w_{R_2}(x) = \wedge$ definieren.)

Von der Reihenfolge (R_1) geht man so auf die Reihenfolge (R_2) über, daß man darin die erste Variation v sucht, nach welcher auch eine Variation vorkommt, die in (R_2) vor v stehen würde, und v nach die letzte solche Variation bringt; dann dieses Verfahren iteriert. Dabei rührt man jede Variation v nur einmal an; so genügt es gewiß sovielmal zu iterieren, wievielgliedrig die Folge ist.

Sei also

$$i = i(x) = \mu_i[i \leqq o(x) \,\&\, (Ej)[j \leqq o(x) \,\&\, j > i \,\&\, k_j(x) \lesssim_{R_2} k_i(x)]]$$

und

$$j = j(x) = \mu_j[j \leqq o(x) \,\&\, k_j(x) \lesssim_{R_2} k_{i(x)}(x) \,\& \\ \,\& \,(u)[u \leqq o(x) \to (u > j \to k_{i(x)}(x) \lesssim_{R_2} k_u(x))]].$$

Dann kann $w_{R_2}(x)$ für $B_{R_1}(x)$ mit Benutzung der Funktion

$$\bar{g}_r(x) = k_r(x) f_\alpha(x) \ldots f_\alpha(x) k_{\text{long}\,(x)}(x) f_\alpha(x)$$

(siehe 20. in Nr. 3) als die long (x)-te Iteration von $f_{i(x),\, j(x)}(x)$ für

$$f_{i,j}(x) = x^{-o(\bar{g}_i(x))} (\bar{g}_{i+1}(x))^{-o(\bar{g}_{j+1}(x))} k_i(x) f_\alpha(x) \bar{g}_{j+1}(x)$$

definiert werden. So ist $w_{R_2}(x)$ tatsächlich primitiv-rekursiv in H. (Dabei war zu beachten, daß falls kein i mehr mit der gewünschten Eigenschaft existiert, sowohl $i(x)$ als auch $j(x)$ gleich 0, und $f_{0,0}(x) = x$ ist.)

20. Wenn es sich speziell um die Reihenfolgen (P) und (L) handelt, dann ist nach Nr. 17, mit

$$i(y, z) = \mu_i[i \leqq \max(o(y), o(z)) \,\&\, b_i(y) \neq b_i(z)],$$

$$y \overset{\leqslant}{P} z \equiv o(y) < o(z) \vee \mu_{i_1}[i_1 \leqq o(x) \,\&\, b_{i(y,z)}(y) = a_{i_1}] <$$

$$< \mu_{i_2}[i_2 \leqq o(x) \,\&\, b_{i(y,z)}(z) = a_{i_2}],$$

und

$$y \overset{\leqslant}{L} z \equiv b_{i(y,z)}(y) = \wedge \vee \mu_{i_1}[i_1 \leqq o(x) \,\&\, b_{i(y,z)}(y) = a_{i_1}] <$$

$$< \mu_{i_2}[i_2 \leqq o(x) \,\&\, b_{i(y,z)}(z) = a_{i_2}].$$

Da diese Beziehungen primitiv-rekursiv in H sind, ergeben sich nach Nr. 19 die Reihenfolgen (P) und (L) der Knotenpunkte eines Formeln-Graphen auf primitiv-rekursive Weise von einander.

21. Bisher wurde der Formeln-Graph immer auf Grund der üblichen Klammern-Bezeichnungen für Formeln hergestellt. Man kann ihn aber auch aus klammernfreien Darstellungen von Formeln ausgehen.

Zum Beispiel erzählt über die Formel

$$((x + (y - z)) + (u : v))$$

Die LUKASIEWICZsche Bezeichungsweise

$$+ + x - yz : uv$$

folgendes: „Dies ist eine Summe, deren erstes Glied die Summe von x und von der Differenz der Variablen y und z ist, und deren zweites Glied der Quotient von u und v ist." Die PAWLAKsche Bezeichnungsweise

$$+ + : x - uvyz$$

erzählt dasselbe in folgender Reihenfolge: „Dies ist eine Summe, von dem das erste Glied eine Summe und das zweite Glied ein Quotient ist; und zwar enthält das erste Glied, das — wie gesagt — auch eine Summe ist, als erstes Glied x, und als zweites Glied eine Differenz; der Quotient — der wie gesagt, das zweite Glied der erstgenannten Summe ist — ist der Quotient von u und v; die Differenz, die das zweite Glied der zweitgenannten Summe ist, ist die Differenz von y und z. "Bei der LUKASIEWICZschen Formulierung werden immer erst die Glieder der letztgenannten Operation aufgezählt, bei der PAWLAKschen die Glieder der erstgenannten Operation.

Daraus ergibt sich die folgende Zuordnung von Variationen zu den Buchstaben unserer klammernfreien Formeln:

Dem ersten Buchstaben soll jedenfalls die leere Variation $\wedge$ zugeordnet werden. Nehmen wir an, daß den ersten i Buchstaben bereits je eine Variation zugeordnet wurde. Ein Zeichen einer r-gliedrigen Operation, das unter den ersten i Buchstaben vorkommt, soll „ungesättigt" genannt werden, wenn ihm die Variation w zugeordnet wurde, und wa_r in den bisherigen Zuordnungen noch nicht aufgetreten ist. Sei nun j für den LUKASIEWICZschen Fall das größte und für den PAWLAKschen Fall das kleinste solche Index bis i, daß der j-te Buchstabe ein ungesättigtes Operationszeichen ist, und wenn diesem Buchstaben die Variation w zugeordnet wurde, sei r_1 das Höchstindex, wofür wa_{r_1} unter den bisherigen Zuordnungen vorkommt — falls es

überhaupt ein solches r_1 gibt; wenn nicht, sei $r_1 = 0$. Dann soll dem $i+1$-ten Buchstaben wa_{r_1+1} zugeordnet werden. Dabei wurde in Betracht gezogen, daß eine Zeichenfolge, die mit einem Operationszeichen beginnt und aus Operationszeichen und Variablen besteht, dann und nur dann eine Formel LUKASIEWICZscher bzw. PAWLAKscher Form ist, wenn sein letzter Buchstabe der erste solche seiner Buchstaben ist, daß nachdem unsere Variationenzuordnung auch ihn erreicht hat, kein ungesättigtes Operationszeichen mehr vorhanden ist.

An unserem Beispiel prüft man leicht nach, dass dies die Zuordnungen

(L*)
$$\underset{\wedge}{+}\ \underset{a_1}{+}\ \underset{a_1a_1}{x}\ \underset{a_1a_2}{-}\ \underset{a_1a_2a_1}{y}\ \underset{a_1a_2a_2}{z}\ \underset{a_2}{:}\ \underset{a_2a_1}{u}\ \underset{a_2a_2}{v}$$

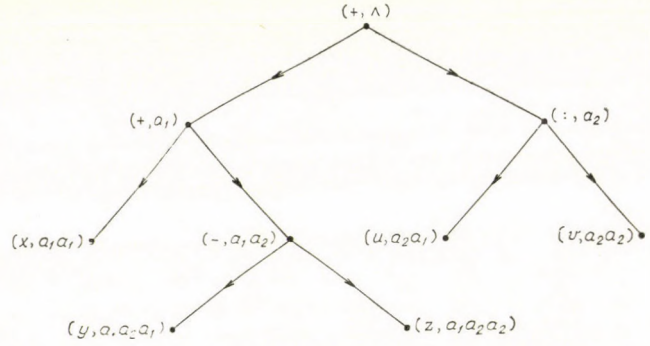
bzw.

(P*)
$$\underset{\wedge}{+}\ \underset{a_1}{+}\ \underset{a_2}{:}\ \underset{a_1a_1}{x}\ \underset{a_1a_2}{-}\ \underset{a_2a_1}{u}\ \underset{a_2a_2}{v}\ \underset{a_1a_2a_1}{y}\ \underset{a_1a_2a_2}{z}$$

ergibt, und so ergeben beide tatsächlich den zur Formel

$$\big((x+(y-z))+(u:v)\big)$$

gehörigen Formeln-Graphen:



Durch die in Nr. 19—20 angegebenen Umordnungen der auf solche Weise wie in (L*) bzw. in (P*) erhaltenen Variationenfolgen — und damit auch der ihnen entsprechenden Buchstabenfolgen — kann man so unmittelbar von einer in LUKASIEWICZscher Form geschriebenen Formel auf ihre PAWLAKsche Form übergehen, und umgekehrt. In den folgenden zeige ich, daß sich dies auf der entsprechenden Wortemenge H primitiv-rekursiv vollzieht. Dabei hat man hier Klammer- und Komma-Zeichen nicht in das Alphabet aufzunehmen, aber Operationszeichen für 1-, 2-, ... -gliedrige Operationen zu unterscheiden. Man zeigt ähnlich wie in meiner in Fußnote[2] zitierten Arbeit, daß die Beziehung $Z_r(x)$: „ein r-gliedriges Operationszeichen zu sein" primitiv-rekursiv in H ist.

22. Sei x eine Formel in LUKASIEWICZschen oder PAWLAKschen Form, als ein Wort von H betrachtet, und $\mathrm{var}(i, x)$ die Variation, die dem i-ten Buchstaben von x zugeordnet wird. Die Beziehung: „der i_1-te Buchstabe von x ist (bevor wir zum $i+1$-ten Buchstaben von x gelangen) ein ungesättigtes Operationszeichen"

kann wie folgt aufgeschrieben werden:

$$B_U(i_1, i, x) \equiv (Er)[r \leqq o(x) \,\&\, Z_r(b_{i_1}(x)) \,\&\, (j)[j \leqq i \to \mathrm{var}(j, x) \neq \mathrm{var}(i_1, x) a_r]].$$

Sei j_1 das kleinste, j_2 das größte so beschaffene i_1 unter $i+1$; so gilt

$$j_1 = j_1(i, x) = \mu_{i_1}[i_1 \leqq i \,\&\, B_U(i_1, i, x)]$$

und

$$j_2 = j_2(i, x) = \mu_{i_1}[i_1 \leqq i \,\&\, B_U(i_1, i, x) \,\&\, (i_2)[i_2 \leqq i \to (i_2 > i_1 \to \neg B_U(i_2, i, x))]].$$

Dann ist der in Nr. 21 angedeutete „Höchstindex" r_1:

$$r_1 = r_1(i, x) = \begin{cases} \mu_s[s < o(x) \,\&\, (Ei')[i' \leqq i \,\&\, \mathrm{var}(i', x) = \\ \quad = \mathrm{var}(j, x) a_s \,\&\, (i'')[i'' \leqq i \to \\ \quad \to \mathrm{var}(i'', x) \neq \mathrm{var}(j, x) a_{s+1}]]], \\ \text{falls } (Es)[s < o(x) \,\&\, (Ei')[i' \leqq i \,\&\, \mathrm{var}(i', x) = \\ \quad = \mathrm{var}(j, x) a_s]] \\ 0 \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei für j (hier und in den weiteren) im PAWLAKschen Fall j_1, im LUKASIEWICZschen Fall j_2 zu setzen ist.

Diese benutzend lautet die Definition von $\mathrm{var}(i, x)$, wofür, falls i keine natürliche Zahl ist, $\wedge$ gesetzt wird (siehe dazu auch 4. in Nr. 3):

$$\mathrm{var}(\wedge, x) = \wedge$$

und für $c \in A$

$$\mathrm{var}(yc, x) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls} \quad \neg B_N(yc) \vee y = \wedge \vee o(y) \geqq o(x) \\ \mathrm{var}(j(y, x), x) a_{r_1(y,x)+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

In den Definitionen von $j_1(y, x)$, $j_2(y, x)$ und $r_1(y, x)$ treten auch var-Werte auf, aber nur mit solchen ersten Argumenten, die Vorgänger von y sind; auch $j_1(y, x)$ und $j_2(y, x)$ selber sind Vorgänger von y. Daher handelt es sich hier um eine eingeschachtelte Wertverlaufsrekursion. Eine solche Definition läßt sich nach meiner in Fußnote[2] zitierten Arbeit auf primitive Rekursionen auflösen.

So ist die dem i-ten Buchstaben einer klammernfreien Formel x zugeordnete Variation, $\mathrm{var}_1(i, x)$ im PAWLAKschen, $\mathrm{var}_2(i, x)$ im LUKASIEWICZschen Fall, primitivrekursiv in H.

Dadurch wird nachträglich auch $B_U(i_1, i, x)$ zu einer primitiv-rekursiven Beziehung in H, und damit auch die Beziehung „eine Formel LUKASIEWICZscher bzw. PAWLAKscher Form zu sein", da dies mit

$$o(x) = \mu_i[i \leqq o(x) \,\&\, (i_1)[i_1 \leqq i \to \neg B_U(i_1, i, x)]]$$

gleichbedeutend ist.

23. Es sollen nun die Paare-Worte

$$c_1(b_i(x), \mathrm{var}(i, x))$$

für $i = 0, 1, \ldots, o(x)$ der Buchstaben von x und der ihnen zugeordneten Variationen gebildet werden. Wird

$$\bar{f}(z, x) = c_1(b_{o(z)+1}(x), \mathrm{var}(o(z)+1, x))$$

gesetzt, so ist nach 19. in Nr. 3 für eine nicht leere Formel x

$$c^{\bar{f}}(o(x) \dot{-} 1, x)$$

das Wort, welches der den zur Formel gehörigen Graphen charakterisierenden Paarenfolge zugeordnet ist, eine in H primitiv-rekursive Funktion.

Mit

$$\bar{f}(z, x) = \mathrm{var}_1(o(z) + 1, x)$$

ergibt

$$c^{\bar{f}}(o(x) \dot{-} 1, x)$$

für eine Formel x in PAWLAKscher Form das Wort, welches der dazugehörigen Variationenfolge in der Reihenfolge (P) zugeordnet ist. Nach Nr. 19—20 erhält man daraus das der in die Reihenfolge (L) umgeordneten Folge zugeordnete Wort als

$$p_L(x) = w_L(c^{\bar{f}}(o(x) \dot{-} 1, x)).$$

Mit

$$i(j', x) = \mu_i[i \leqq o(x) \,\&\, \mathrm{var}(i, x) = k_j, (p_L(x))]$$

und

$$\bar{\bar{f}}(z, x) = b_{i(o(z)+1, x)}(x)$$

ergibt

$$f_L(x) = c^{\bar{\bar{f}}}(o(x) \dot{-} 1, x)$$

das Wort, das der Folge der Buchstaben jenes Wortes zugeordnet ist, in welches x durch die Umordnung auf die LUKASIEWICZsche Form übergeht. Dieses Wort selbst ergibt sich dann mit Hilfe der durch

$$f(\wedge, x) = \wedge$$

und für $c \in A$

$$f(yc, x) = f(y, x) k_{o(y)}(f_L(x))$$

definierten Funktion als

$$f(o(x), x),$$

also als in H primitiv-rekursive Funktion von x.

Genau so erhält man aus einer in LUKASIEWICZscher Form gegebenen Formel x ihre Umformung auf die PAWLAKsche Form als eine in H primitiv-rekursive Funktion von x.

MATHEMATISCHES INSTITUT,
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITÄT,
BUDAPEST

(Eingegangen am 24. Mai 1962.)

ERROR BOUNDS IN FINITE-DIFFERENCE APPROXIMATIONS TO SOLUTIONS OF SYMMETRIC HYPERBOLIC SYSTEMS

By

L. VEIDINGER (Budapest)

(*Presented by* B. SZ.-NAGY)

The stability of finite-difference approximations to systems of partial differential equations has been investigated by various authors (see, for example, [1], [2] and [3]). In the present paper we show that the problem of obtaining pointwise error bounds in finite-difference approximations to solutions of symmetric linear hyperbolic systems can be reduced to the stability analysis of the finite-difference scheme. Using this result, and the theorems of K. O. FRIEDRICHS (see [1], p. 292) and P. D. LAX (see [3], p. 506) we derive a bound of order h for the pointwise error of certain classes of finite-difference schemes; h is the steplength in the time direction. For one particular finite-difference scheme such bounds were obtained by a somewhat different method in a paper of H. WEINBERGER (see [4]).

The system of first order equations

$$\mathbf{u}_t = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{u}_{x_i} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{1}$$

in the vector-valued function $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is called symmetric hyperbolic if $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ is a $p \times p$ matrix and the $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t)$ are symmetric $p \times p$ matrices; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ and $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ are vectors with p components; $\mathbf{x}$ is a vector with n components. The components x_i of the vector $\mathbf{x}$ are the space variables, the scalar t is the time variable.

We want to solve the initial value problem for the system (1); i. e. we seek a solution $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ which assumes prescribed initial values $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ on the non-characteristic initial hyperplane $t = 0$. The existence and uniqueness of the solution of the initial value problem was established by FRIEDRICHS.

We assume that the initial values $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ vanish outside a finite subset in the hyperplane $t = 0$, and that $\mathbf{f}$ vanishes outside a finite set in the slab $0 \leqq t \leqq T$. From the hyperbolicity of the system (1) it follows that the solution $\mathbf{u}$ vanishes outside a closed finite region in the slab $0 \leqq t \leqq T$.

In order to get an approximate solution of the initial value problem we replace the system (1) by explicit, two level difference equations i. e. equations of the form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, (\nu+1)h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{v}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \nu h) + h\mathbf{B}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{v}(\mathbf{x}, \nu h) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}, \nu h), \tag{2}$$

where the $\mathbf{C}^j = \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)$ are $p \times p$ matrices independent of h, the $\mathbf{r}_j$ are arbitrary vectors with n components and h is the time increment, that is the steplength in the t-direction. We assume that the matrices $\mathbf{C}^j$ satisfy the so-called consistency conditions

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j = \mathbf{I} \tag{3a}$$

and

$$\sum_{j=1}^{m} r_j^i \mathbf{C}^j = \mathbf{A}_i, \tag{3b}$$

where $\mathbf{I}$ is the unit matrix and the r_j^i are the components of the vector $\mathbf{r}_j$.

Our final aim is to estimate the maximum of $|\mathbf{u}(\mathbf{x}, \nu h) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \nu h)|$ for all $\mathbf{x}$ and for $\nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{h}\right]$.

Let $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ be any function vanishing outside a closed finite region in the slab $0 \leqq t \leqq T$. The L_2-norm of the function $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ on the hyperplane $t = \tau$, where $0 \leqq \tau \leqq T$, is defined as follows

$$\|\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)\|_\tau = \left[\int |\mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{2}},$$

where the integration is extended over the whole hyperplane $t = \tau$.

LEMMA 1. *If the function $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ has continuous first partial derivatives with respect to the space variables on the hyperplane $t = \tau$, then*

$$\|\mathbf{z}(x + h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, t)\|_\tau \leqq h \sum_{i=1}^{n} |r_j^i| \, \|\mathbf{z}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_\tau.$$

If the second partial derivatives with respect to the space variables are also continuous on the hyperplane $t = \tau$, then

$$\left\| \mathbf{z}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) - h \sum_{i=1}^{n} r_j^i \mathbf{z}_{x_i}(\mathbf{x}, t) \right\|_\tau \leqq \frac{1}{2} h^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |r_j^i| \, |r_j^k| \, \|\mathbf{z}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_\tau.$$

If $\mathbf{z}_t$ and $\mathbf{z}_{t^2}$ are continuous in the slab $\tau \leqq \sigma \leqq \tau + h$ then

$$\|\mathbf{z}(\mathbf{x}, t + h) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) - h\mathbf{z}_t(\mathbf{x}, t)\|_\tau \leqq \frac{1}{2} h^2 \max_{\tau \leqq \sigma \leqq \tau + h} \|\mathbf{z}_{t^2}(\mathbf{x}, t)\|_\sigma.$$

PROOF. We have

$$\mathbf{z}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) + h \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} r_j^i \mathbf{z}_{x_i}(\mathbf{x} + \sigma h \mathbf{r}_j, t) \, d\sigma, \tag{4}$$

whence by the obvious identity $\|\mathbf{z}_{x_i}(\mathbf{x} + \sigma h \mathbf{r}_j, t)\|_\tau = \|\mathbf{z}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_\tau$ it follows that

$$\|\mathbf{z}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, t)\|_\tau \leqq h \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} |r_j^i| \, \|\mathbf{z}_{x_i}(\mathbf{x} + \sigma h \mathbf{r}_j, t)\|_\tau \, d\sigma = h \sum_{i=1}^{n} |r_j^i| \, \|\mathbf{z}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_\tau.$$

Similarly to (4) we have

$$\mathbf{z}_{x_i}(\mathbf{x} + \sigma h \mathbf{r}_j, t) = \mathbf{z}_{x_i}(\mathbf{x}, t) + h \int_0^\sigma \sum_{k=1}^{n} r_j^k \mathbf{z}_{x_i x_k}(\mathbf{x} + \Theta h \mathbf{r}_j, t) \, d\Theta.$$

Insertion of this into (4) yields

$$\mathbf{z}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) - h \sum_{i=1}^{n} r_j^i \mathbf{z}_{x_i}(\mathbf{x}, t) = h^2 \int_0^1 \left[\int_0^\sigma \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} r_j^i r_j^k \mathbf{z}_{x_i x_k}(\mathbf{x} + \Theta h \mathbf{r}_j, t) \, d\Theta \right] d\sigma$$

whence the second inequality of the lemma immediately follows. The third inequality can be proved in the same way.

LEMMA 2. *Let* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ *be a solution of* (1), *which has continuous second partial derivatives in the slab* $0 \leqq t \leqq T$ *and vanishes outside a closed finite region in this slab. Then*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) + h\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + h^2\mathbf{y}(\mathbf{x}, t, h), \tag{5}$$

where

$$\|\mathbf{y}(\mathbf{x}, t, h)\|_\tau \leqq c_1 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{u}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_\tau + \frac{1}{2} \max_{\tau \leqq \sigma \leqq \tau+h} \|\mathbf{u}_{t^2}(\mathbf{x}, t)\|_\sigma \tag{6}$$

for $0 \leqq \tau \leqq T$. *Moreover, if* r *is an arbitrary positive integer and the* α_i *are non-negative integers such that* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = r$, *then*

$$\left\| \frac{\partial^r \mathbf{y}(\mathbf{x}, t, h)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_\tau \leqq c_2 \sum_{\substack{s \leqq r \\ \beta_1 \leqq \alpha_1, \dots, \beta_n \leqq \alpha_n}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^s \mathbf{u}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \right\|_\tau + \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{2} \max_{\tau \leqq \sigma \leqq \tau+h} \left\| \frac{\partial^r \mathbf{u}_{t^2}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_\sigma$$

provided the partial derivatives of $\mathbf{u}$ *appearing on the right side of* (7) *are continuous, and the matrices* $\mathbf{C}^j$ *have bounded partial derivatives up to order* r. *The values of the constans* c_1 *and* c_2 *depend on the bounds of the matrices* $\mathbf{C}^j$ *resp. their partial derivatives.*

PROOF. Let $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ be any function, which has continuous second partial derivatives in the slab $0 \leqq t \leqq T$, and vanishes outside a closed finite region in this slab. By the consistency conditions (3a)—(3b) we have

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + h \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}_{x_i}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \tag{8}$$

$$+ h \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t) r_j^i \mathbf{u}_{x_i}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) + h^2\mathbf{y}_1(\mathbf{x}, t, h),$$

where

$$\mathbf{y}_1(\mathbf{x}, t, h) = -\frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)\left[\mathbf{u}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - h \sum_{i=1}^{n} r_j^i \mathbf{u}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\right].$$

By Lemma 1

$$\|\mathbf{y}_1(\mathbf{x}, t, h)\|_\tau \leqq c_1 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{u}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_\tau.$$

Moreover, since

$$\frac{\partial^r \mathbf{y}_1(\mathbf{x}, t, h)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = -\frac{1}{h^2} \sum_{\substack{s \leqq r \\ \beta_1 \leqq \alpha_1, \dots, \beta_n \leqq \alpha_n}} K_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \frac{\partial^{r-s} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}} \left[\frac{\partial^s \mathbf{u}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} - h \sum_{i=1}^{n} r_j^i \frac{\partial^s \mathbf{u}_{x_i}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}\right],$$

where the $K^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}$ are positive integer constants, we find that

$$\left\| \frac{\partial^r \mathbf{y}_1(\mathbf{x}, t, h)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_\tau \leqq c_2 \sum_{\substack{s \leqq r \\ \beta_1 \leqq \alpha_1, \ldots, \beta_n \leqq \alpha_n}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^s \mathbf{u}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right\|_\tau .$$

If $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is a solution of (1), then from (8) we get

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + h\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) + h\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + h^2\mathbf{y}_1(\mathbf{x}, t, h). \tag{9}$$

On the other hand, we have

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + h\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t + h) + h^2\mathbf{y}_2(\mathbf{x}, t, h) \tag{10}$$

where

$$\mathbf{y}_2(\mathbf{x}, t, h) = -\frac{1}{h^2}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + h) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - h\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t)].$$

By Lemma 1

$$\|\mathbf{y}_2(\mathbf{x}, t, h)\|_\tau \leqq \frac{1}{2} \max_{\tau \leqq \sigma \leqq \tau + h} \|\mathbf{u}_{t^2}(\mathbf{x}, t)\|_\sigma$$

and

$$\left\| \frac{\partial^r \mathbf{y}_2(\mathbf{x}, t, h)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_\tau \leqq \frac{1}{2} \max_{\tau \leqq \sigma \leqq \tau + h} \left\| \frac{\partial^r \mathbf{u}_{t^2}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_\sigma .$$

(5) is a consequence of (9) and (10).

In what follows we shall need a generalization of the concept of partial derivative. The square integrable function $\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t)$ will be called a generalized partial derivative of the function $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ if for $0 \leqq \tau \leqq T$ a sequence of functions $\mathbf{z}_\nu(\mathbf{x}, t)$ having continuous partial derivatives of order q exists such that $\|\mathbf{z}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{z}_\nu(\mathbf{x}, t)\|_\tau \to 0$ and $\left\| \bar{\mathbf{z}}(x, t) - \frac{\partial^q \mathbf{z}_\nu(\mathbf{x}, t)}{\partial t^{\gamma_0} \partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_n^{\gamma_n}} \right\|_\tau \to 0$ as $\nu \to \infty$. We shall put $\bar{\mathbf{z}}(x, t) = \frac{\partial^q \mathbf{z}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^{\gamma_0} \partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_n^{\gamma_n}}$. It is easy to see that Lemma 1 and Lemma 2 remain valid if the partial derivatives are taken in this generalized sense.

LEMMA 3 (SOBOLEV's lemma). *If the function $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ possesses on the hyperplane $t = \tau$ generalized partial derivatives of order r with respect to the space variables, where $r \geqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, then $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ is continuous on this hyperplane and*

$$\max_x |\mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau)| \leqq c_3 \sum_{s \leqq r} \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = s} \left\| \frac{\partial^s \mathbf{z}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right\|_\tau ,$$

where c_3 is a constant independent of τ and the function $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$.

For a proof see [6], p. 64.

LEMMA 4. *If E_ν is the solution of the linear finite difference equation*

$$E_\nu = E_{\nu-1} + \alpha E_{\nu-1} h + \alpha h^2 \tag{11}$$

with the initial condition $E_0 = 0$, *then for* $h < 1$ *and* $\nu < \beta h^{-1}$ *we have* $E_\nu < \gamma h$; *the value of the constant* γ *depends only on* α *and* β.

PROOF. The solution of (11) is

$$E_\nu = \alpha h^2 (1+\alpha h)^{\nu-1} + h[(1+\alpha h)^{\nu-1} - 1].$$

Thus

$$E_\nu < (\alpha h^2 + h) e^{\alpha h \nu}$$

and hence by the condition $\nu < \beta h^{-1}$ we have $E_\nu < \gamma h$.

THEOREM 1. *We assume that*

(a) *The matrices* $\mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t)$ *and* $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ *have bounded partial derivatives, the functions* $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ *and* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ *have square integrable partial derivatives of all orders up to* $\left[\frac{n}{2}\right] + 3$.

(b) *The matrices* $\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)$ *satisfy the consistency conditions* (3*a*)—(3*b*), *and have bounded partial derivatives up to order* $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

(c) *If* $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ *is any square integrable function, then for* $\nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{h}\right]$ *the inequality*

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)\mathbf{z}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\nu h} \leqq (1 + c_4 h) \|\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} \tag{12}$$

holds, where c_4 *does not depend on* $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$, h *and* ν.

Let $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ *be the solution of the initial value problem for the system* (1), *and let* $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \nu h)$ *be the approximate solution determined from the finite-difference equations* (2). *Then*

$$\max_{\mathbf{x};\, \nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{h}\right]} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, \nu h) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \nu h)| < c_5 h,$$

where the value of the constant c_5 *depends on* c_4, *on the bounds of the partial derivatives of* $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)$ *and on the norms of the partial derivatives of* $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ *and* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

PROOF. By the fundamental existence and uniqueness theorem of FRIEDRICHS (see [5]) if the assumption (a) is satisfied, then the initial value problem for the system (1) has a unique solution $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ with continuous second partial derivatives (in the strict sense), moreover, the function $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ has generalized partial derivatives of all orders up to $\left[\frac{n}{2}\right] + 3$, and the norms of these generalized partial derivatives are bounded in terms of the partial derivatives of the given functions $\mathbf{u}_0(x)$ and $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Let us put $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Subtracting (2) from (5) we get

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, (\nu+1)h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \nu h) + \tag{13}$$

$$+ h\mathbf{B}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}(\mathbf{x}, \nu h) + h^2 \mathbf{y}(\mathbf{x}, \nu h, h).$$

Hence by the inequalities (6) and (12) it follows that

$$\|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{(\nu+1)h} \leqq \|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} + O\big(\|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} h + h^2\big)$$

Since the initial conditions for the differential and the difference equations are the same, we have $\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$. Thus by Lemma 4

$$\|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} = O(h) \tag{14}$$

for $\nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{h}\right]$.

We now differentiate the equations (13) to get

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, (\nu+1)h) = & \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \nu h) + \\ & + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_i}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \nu h) + h\mathbf{B}_{x_i}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}(\mathbf{x}, \nu h) + \\ & + h\mathbf{B}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, \nu h) + h^2\mathbf{y}_{x_i}(\mathbf{x}, \nu h, h). \end{aligned} \tag{15}$$

By (12) we have

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\nu h} \leqq (1 + c_4 h)\|\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h}. \tag{16}$$

From the consistency condition (3a) it follows that

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_i}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{O}.$$

Thus

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_i}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \nu h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_i}(\mathbf{x}, \nu h)[\mathbf{w}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \nu h) - \mathbf{w}(\mathbf{x}, \nu h)],$$

whence by Lemma 1 we get

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_i}(\mathbf{x}, t)\mathbf{w}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\nu h} = O\left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} h \right). \tag{17}$$

Using (16), (17), (14) and (7) we obtain from (15)

$$\|\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_{(\nu+1)h} \leqq \|\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} + O\left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} h + h^2 \right),$$

whence summing with respect to i we get

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_{(\nu+1)h} \leqq \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} + O\left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} h + h^2 \right).$$

Consequently by Lemma 4

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} = O(h) \tag{18}$$

for $\nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{h}\right]$.

Differentiating (15) we obtain for $i, k = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, (\nu+1)h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, \nu h) + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_k}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, \nu h) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_i x_k}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, \nu h) + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_i}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}_{x_k}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, \nu h) + \tag{19}$$

$$+ h\mathbf{B}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}(\mathbf{x}, \nu h) + h\mathbf{B}_{x_i}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}_{x_k}(\mathbf{x}, \nu h) +$$

$$+ h\mathbf{B}_{x_k}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, \nu h) + h\mathbf{B}(\mathbf{x}, \nu h)\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, \nu h) + h^2\mathbf{y}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, \nu h, h).$$

The norm of the first term on the right side can be estimated by (12)

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\nu h} \leqq (1 + c_4 h) \|\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h}. \tag{20}$$

Similar to (17) we have

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_k}(\mathbf{x}, t)\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\nu h} = O\left(\sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} h \right) \tag{21}$$

and

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_i}(\mathbf{x}, t)\mathbf{w}_{x_k}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\nu h} = O\left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} h \right). \tag{22}$$

In the same way we get

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\mathbf{w}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\nu h} = O\left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} h \right),$$

whence by (18) it follows that

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\mathbf{w}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\nu h} = O(h^2). \tag{23}$$

Using (20), (21), (22), (23) and (18) we obtain from (19)

$$\|\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_{(\nu+1)h} \leqq \|\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} + O\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} h + h^2 \right),$$

whence

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_{(\nu+1)h} \leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} + O\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} h + h^2 \right)$$

and, by Lemma 4

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{w}_{x_i x_k}(\mathbf{x}, t)\|_{\nu h} = O(h)$$

for $\nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{h}\right]$.

Continuing in this manner we find that

$$\sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=s} \left\| \frac{\partial^s \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right\|_{vh} = O(h)$$

for $s \leqq r = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$; $v = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{h}\right]$. Hence by Lemma 3 it follows that

$$|\mathbf{w}(\mathbf{x}, vh)| = O(h).$$

This proves Theorem 1.

Inequalities of the form (12) have been obtained for certain general classes of finite-difference schemes by FRIEDRICHS and LAX. As an immediate consequence of our Theorem 1 and FRIEDRICHS' theorem in [1] p. 292 we get:

THEOREM 2. *If assumptions* (a) *and* (b) *of Theorem* 1 *are satisfied, and the matrices* $\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t)$ *are symmetric and non-negative, then the pointwise error of the approximation by the finite-difference equations* (2) *is of order* h.

Theorem 2 may be applied to the finite-difference scheme, investigated by H. WEINBERGER (see [4] p. 56) and yields a bound of order h for the pointwise error.

As another application of Theorem 2 let us consider the following finite-difference scheme:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, (v+1)h) = \left[\mathbf{I} - \lambda \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, vh)\right]\mathbf{v}(\mathbf{x}, vh) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, vh)\mathbf{v}\left(\mathbf{x} + \frac{h}{\lambda}\mathbf{e}_i, vh\right) +$$
$$+ h\mathbf{B}(\mathbf{x}, vh)\mathbf{v}(\mathbf{x}, vh) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}, vh),$$

where λ is a constant and the $\mathbf{e}_i$ are unit vectors. This scheme can be derived from the equations (1) if we replace $\mathbf{u}_t$ by $\frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t+h) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{h}$; $\mathbf{u}_{x_i}$ by $\frac{\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_i, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\delta}$ (δ is the steplength in the space directions) and we put $\lambda = \frac{h}{\delta}$. From Theorem 2 it follows that if the $\mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t)$ are symmetric, non-negative matrices, and λ is chosen so small that $\frac{1}{\lambda}$ exceeds the largest eigenvalue of $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$, then the pointwise error of the approximation is of order h.

In the case of one space variable from Theorem 1 and Lax's theorem in [3] p. 506 we can immediately deduce

THEOREM 3. *The pointwise error of the approximation by the finite-difference equations* (2) *is of order* h *if in addition to conditions* (a) *and* (b) *of Theorem* 1 *the following conditions are satisfied:*

(d) *All eigenvalues* $\mu = \mu(x, t, \xi)$ *of the matrix* $\mathbf{G}(x, t, \xi) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{C}^j(x, t) e^{ir_j\xi}$ *satisfy*

$$|\mu(x, t, \xi)| < 1$$

for all x, t *and all real* $\xi \neq 0 \bmod 2\pi$.

(e) *For* ξ *near* 0

$$\mathbf{G}^*\mathbf{G} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}(x, t)\xi^{2q} + \mathbf{O}(\xi^{2q+1})$$

where $\mathbf{G}^*$ *is the conjugate transpose of* $\mathbf{G}$, *q is an integer independent of x, and* $\mathbf{Q}(x, t)$ *is positive definite for all values of x and t.*

Condition (d) is the so-called von NEUMANN stability criterion. It is a well-known fact that this condition is necessary for the convergence of the difference equations in the L_2-norm. Thus Theorem 3 yields a sufficient and „ almost necessary" criterion for the uniform convergence in the case of one space variable.

COMPUTING CENTRE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,
BUDAPEST

(Received 1 June 1962)

References

[1] P. D. LAX and R. D. RICHTMYER, Survey of stability of linear finite difference equations, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **9** (1956), pp. 267–293.

[2] В. С. Рябенький—А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений (Москва, 1956).

[3] P. D. LAX, On the stability of difference approximations to solutions of hyperbolic equations with variable coefficients, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **14** (1961), pp. 497–520.

[4] H. WEINBERGER, Error bounds in finite difference approximation to solutions of symmetric hyperbolic systems, *Journal Soc. Industr. Appl. Math.*, **7** (1959), pp. 49–75.

[5] K. O. FRIEDRICHS, Symmetric hyperbolic partial differential equations, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **7** (1954), pp. 345–392.

[6] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике (Ленинград, 1950).

APPLICATIONS OF DENJOY ANALOGUE. II*

(LOCAL STRUCTURE OF LEVEL SETS AND DINI DERIVATES)

By

K. M. GARG** (Lucknow, India)

(*Presented by* G. ALEXITS)

This is the second in series on *Applications of Denjoy analogue.*[1]

In the year 1925 S. STOÏLOW established the following set of results[2] on the local structure of the level sets[3] of a continuous function:

(I) *Let $f(x)$ be a continuous function. If y be a value not belonging to a certain set of exception of measure zero:*

(a) *at each point of the first species of the set $f^{-1}(y)$ one derivate is equal to its opposite*[4] *derivate;*

(b) *at each isolated point of the same set there exists a bilateral derivative;*

(c) *if the derivates of one side are bounded (the side being not necessarily the same when we pass from one point to another) the set is finite;*

(d) *if these derivates are finite the set is enumerable.*

In the year 1959 M. IOSIFESCU generalised the above results (I. a) and (I. b) to functions possessing the property of DARBOUX as follows:[5]

(II) *If $f(x)$ possesses the property of Darboux in I then, with the possible exception of a set of measure zero of values of y,*

* This research project was formerly supported by the Ministry of Scientific Research and Cultural Affairs, Govt. of India, and at present by the University Grants Commission of India.

** The author wishes to express his gratitude to U. K. SHUKLA for help and suggestions.

[1] The author has proved the following theorem called „Denjoy analogue" (see GARG [1]):

„Given an arbitrary finite real function $f(x)$ defined in a linear interval I, the DINI derivates of $f(x)$ at each point x, except possibly at a set $A \subset I$ for which $mf(A) = 0$, satisfy one of the following four relations:

(a. 1) $$D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x) \neq 0,$$

(a. 2) $$D^+f(x) = +\infty,\ D_-f(x) = -\infty,\ D_+f(x) = D^-f(x) \neq 0,$$

(a. 3) $$D_+f(x) = -\infty,\ D^-f(x) = +\infty,\ D^+f(x) = D_-f(x) \neq 0,$$

(a. 4) $$D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty,\ D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty.$$"

[2] See STOÏLOW [6], p. 135. These results were, in fact, proved by STOÏLOW in a series of three papers, viz. [4], [5], [6].

[3] If $f(x)$ be a real function defined in a linear interval I, then, for each $y \in f(I)$, the set

$$f^{-1}(y) \equiv \{x; f(x) = y\}$$

is known as the set of level y of $f(x)$, or as a *level set* of $f(x)$.

[4] The derivates D^+, D_- and D_+, D^- are known as two pairs of opposite derivates.

[5] See IOSIFESCU [2], p. 1918, th. 2. See also IOSIFESCU [3].

(a) *at each point* $x \in f^{-1}(y)$ *of the first species in* $f^{-1}(y)$ *there exists a derivate (finite or infinite) which is equal to the opposite derivate;*

(b) *at each point* $x \in f^{-1}(y)$ *isolated in* $f^{-1}(y)$ *there exists a unique derivative (finite or infinite).*

In the present paper we deduce from the DENJOY analogue two theorems giving the nature of DINI derivates in terms of the local structure of the level sets, one for arbitrary finite real functions and the other for functions possessing the property of DARBOUX. The first theorem leads to generalisations and strengthening of (I. c) and (I. d), and the second theorem provides, in the case of (II), the nature of the remaining two derivates of $f(x)$ at a non-isolated point of the first species of $f^{-1}(y)$, and the nature of derivates of $f(x)$ at a point of the second species of $f^{-1}(y)$.

1. Let $f(x)$ be an arbitrary finite real function defined in a linear interval I. According to the DENJOY analogue[6] there exists a set $A \subset I$, possibly void, such that

$$m f(A) = 0, \tag{1}$$

and at each point $x \in C(A)$ one of the following four relations holds:

(a. 1) $D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x) \neq 0$;

(a. 2) $D^+f(x) = +\infty, \quad D_-f(x) = -\infty, \quad D_+f(x) = D^-f(x) \neq 0$;

(a. 3) $D_+f(x) = -\infty, \quad D^-f(x) = +\infty, \quad D^+f(x) = D_-f(x) \neq 0$;

(a. 4) $D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty, \quad D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty$.

Let, further,

$$Y = f(I) - f(A). \tag{2}$$

We then have, by (1),

$$m\{f(I) - Y\} = 0, \tag{3}$$

and for every $y \in Y$, since $Y \cdot f(A) = 0$, the level set $f^{-1}(y) \subset C(A)$, and so one of the relations (a. 1) to (a. 4) holds at each point $x \in f^{-1}(y)$.

Now, let $y \in Y$. If a point $x \in f^{-1}(y)$ is a limit point of $f^{-1}(y)$ from the right, then $f(x)$ has at x a right derivate, median or extreme, equal to zero. The same holds for the left of x.

Hence, if (a. 1) holds at a point $x \in f^{-1}(y)$, then x is an isolated point of $f^{-1}(y)$, and in case (a. 2) or (a. 3) holds at a point $x \in f^{-1}(y)$, then x is not a limit point of $f^{-1}(y)$ from one side at least.

We have, therefore,

THEOREM 1. *If* $f(x)$ *be a finite real function defined in a linear interval* I, *then, with the possible exception of a set of measure zero of values of* $y \in f(I)$, *any point* $x \in f^{-1}(y)$ *is*

(b. 1) *a limit point of* $f^{-1}(y)$ *only if one of the following three relations holds at* x:

(i) $D^+f(x) = +\infty, \quad D_-f(x) = -\infty, \quad D_+f(x) = D^-f(x) \neq 0$,

(ii) $D_+f(x) = -\infty, \quad D^-f(x) = +\infty, \quad D^+f(x) = D_-f(x) \neq 0$,

(iii) $D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty, \quad D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty$;

[6] See foot-note [1].

(b. 2) *a limit point of* $f^{-1}(y)$ *from both the sides only if the last relation holds at* x.

Since at a point where one of the above relations (i), (ii), (iii) holds $f(x)$ has on both the sides at least one derivate infinite, it follows from (b. 1) that

COROLLARY 1. *If* $f(x)$ *be a finite real function defined in* I, *then, for almost every value of* y *in* $f(I)$, *the level set* $f^{-1}(y)$ *is isolated if* $f(x)$ *has no infinite derivate, on one side at least, at each point of* $f^{-1}(y)$.

In case $f(x)$ is continuous, the level sets $f^{-1}(y)$ are closed, and since a bounded closed set cannot be isolated unless it is finite, the above corollary leads to

COROLLARY 2.[7] *If* $f(x)$ *be a continuous function defined in a bounded real interval* I, *then, for almost every value of* y *in* $f(I)$, *the level set* $f^{-1}(y)$ *is finite if* $f(x)$ *has no infinite derivate, on one side at least, at each point of* $f^{-1}(y)$.

Again, since $f^{-1}(y)$ is unenumerable only if it contains points which are limit points of the set from both the sides, it follows from (b. 2) that

COROLLARY 3. *If* $f(x)$ *be a finite real function defined in* I, *then, for almost every value of* y *in* $f(I)$, *the level set* $f^{-1}(y)$ *is at most enumerable if* $f(x)$ *has at each point of* $f^{-1}(y)$ *either an upper derivate* $< +\infty$, *or a lower derivate* $> -\infty$.

This evidently implies the following

COROLLARY 3'.[8] *If* $f(x)$ *be a finite real function defined in* I, *then, for almost every value of* y *in* $f(I)$, *the level set* $f^{-1}(y)$ *is at most enumerable if* $f(x)$ *has at each point of* $f^{-1}(y)$ *at least one derivate finite.*

2. Let $f(x)$ be a finite function possessing the property of DARBOUX in I.

In case

$$D^+f(x) > 0 > D_+f(x),$$

every right-nbd. of x contains points x_1 and x_2 such that

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} > 0, \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} < 0,$$

that is, such that

$$f(x_1) > f(x) > f(x_2).$$

Since $f(x)$ possesses the property of DARBOUX, there exists between x_1 and x_2 a point x' such that

$$f(x') = f(x).$$

Thus every right-nbd. of x contains a point x' such that $f(x') = f(x)$.

Hence, if $D^+f(x)$ and $D_+f(x)$ are non-zero and of opposite sign, x is on its right a limit point of the set $f^{-1}\{f(x)\}$.

In case $D^+f(x)$ and $D_+f(x)$ are non-zero and of the same sign, x evidently cannot be on its right a limit point of the set $f^{-1}\{f(x)\}$.

[7] This corollary strengthens the results (I. c) and (I. d) of STOÏLOW. In fact, it proves that the hypothesis of (I. d) suffices to prove the thesis of (I. c).

[8] This corollary strengthens as well as generalises the result (I. d).

The above statements equally hold for the left of x.

Hence, for a function $f(x)$ which possesses the property of DARBOUX in I, y being any value taken by $f(x)$ in I,

(i) if $f(x)$ satisfies the relation (a. 1)[9] at a point $x \in f^{-1}(y)$, then x is an isolated point of $f^{-1}(y)$;

(ii) if $f(x)$ satisfies one of the relations (a. 2), (a. 3) at a point $x \in f^{-1}(y)$, then x is a limit point of $f^{-1}(y)$ from one and only one side;

(iii) if $f(x)$ satisfies the relation (a. 4) at a point $x \in f^{-1}(y)$, then x is a limit point of $f^{-1}(y)$ from both the sides.

But, as we have deduced from the DENJOY analogue in § 1, there exists a set $Y \subset f(I)$ such that

$$m\{f(I) - Y\} = 0,$$

and for each $y \in Y$, the function $f(x)$ satisfies one of the relations (a. 1) to (a. 4) at every point $x \in f^{-1}(y)$.

Hence we have

THEOREM 2. *If a finite real function $f(x)$ possesses the property of Darboux in I, then, with the possible exception of a set of measure zero of values of $y \in f(I)$, any point $x \in f^{-1}(y)$ is*

(c. 1) *an isolated point of $f^{-1}(y)$ if, and only if, $f(x)$ has a non-zero derivative at x;*

(c. 2) *a limit point of $f^{-1}(y)$ from one side alone if, and only if, one of the following two relations holds at x:*

(i) $$D^+f(x) = +\infty, \quad D_-f(x) = -\infty, \quad D_+f(x) = D^-f(x) \neq 0,$$

(ii) $$D_+f(x) = -\infty, \quad D^-f(x) = +\infty, \quad D^+f(x) = D_-f(x) \neq 0;$$

(c. 3) *a limit point of $f^{-1}(y)$ from both the sides if, and only if,*

$$D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty, \quad D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty.$$

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND ASTRONOMY,
UNIVERSITY OF LUCKNOW, INDIA.

(Received 8 June 1962)

References

[1] K. M. GARG, An analogue of Denjoy's theorem, *Ganita*, **12** (1961), pp. 9–14.
[2] M. IOSIFESCU, Propriétés différentielles des fonctions réelles d'une variable réelle, jouissant de la propriété de Darboux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), pp. 1918–1919.
[3] M. IOSIFESCU, Über die differenzialen Eigenschaften der reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen, *Rev. Math. Pures Appl.*, **4** (1959), pp. 457–466.
[4] S. STOÏLOW, Sur les transformations continues d'une variable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **179** (1924), pp. 807–810.
[5] S. STOÏLOW, Sur l'ensemble où une fonction continue a une valeur constante, *ibid*, **179** (1924), pp. 1585–1586.
[6] S. STOÏLOW, Sur l'inversion des fonctions continues, *Bull. Soc. Math. France*, **53** (1925), pp. 135–148.

[9] (a. 1) to (a. 4) are the relations as given in § 1.

APPLICATIONS OF DENJOY ANALOGUE. III*

(DISTRIBUTION OF VARIOUS TYPICAL LEVEL SETS)

By

K. M. GARG** (Lucknow, India)

(*Presented by* G. ALEXITS)

In part II[1] of the present series we have studied the local structure of the level sets of a real function $f(x)$, defined in a real interval I, in terms of the DINI derivates of $f(x)$. In the present part III we determine the LEBESGUE-measure[2] of the sets $Y_\alpha(f)$ $(\alpha = i, d, p, f, \infty, e, u, c)$, denoting respectively the sets of values $y \in f(I)$ for which the level sets

$$f^{-1}(y) \equiv \{x;\, x \in I, f(x) = y\}$$

are isolated, dense-in-itself, perfect, finite, infinite, enumerable, unenumerable, or have the power of the continuum, in terms of the derivability of $f(x)$.

1. Arbitrary functions

Let, first, $f(x)$ be an arbitrary finite real function defined in I. According to the corollary 3 of part II, th. 1, there exists a set $Y \subset f(I)$ such that

$$m\{f(I) - Y\} = 0, \tag{1}$$

and for any $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ is unenumerable only if it contains a point where

$$D^+f = D^-f = +\infty, \quad D_+f = D_-f = -\infty. \tag{2}$$

Let K denote the set of points in I where the relation (2) holds. We then have

$$Y \cdot Y_u(f) \subset f(K).$$

* This research project was formerly supported by the Ministry of Scientific Research and Cultural Affairs, Government of India, and at present by the University Grants Commission of India.

** The author wishes to express his gratitude to U. K. SHUKLA for his help and suggestions.

[1] See GARG [3]. We shall hereafter refer this paper as „part II".

[2] In case $f(x)$ is *continuous*, all the sets $Y_\alpha(f)$ $\alpha = i, d, p, f, \infty, e, u, c)$ are measurable in the sense of LEBESGUE.

For, it has been proved by S. MAZURKIEWICZ and W. SIERPIŃSKI ([8], pp. 161, 163) that, for a continuous function $f(x)$, the set $Y_\infty(f)$ is a $F_{\sigma\delta}$ and the set $Y_u(f)$ is analytic in the sense of SOUSLIN. The set $Y_f(f)$ is then evidently a $G_{\delta\sigma}$ and the set $Y_e(f)$ is complementary analytic. The set $Y_p(f)$ has been shown by SIERPIŃSKI ([12], p. 370) to be a $F_{\sigma\delta}$. As the level sets of a continuous function are all closed (see R. VAIDYANATHASWAMY [13], p. 67, th. I), assuming the interval I to be finite we have

$$Y_i(f) = Y_f(f), \quad Y_d(f) = Y_p(f), \quad Y_u(f) = Y_c(f).$$

It may further be remarked that for any continuous function $f(x)$, with the possible exception of an enumerable set of values of y, every level set $f^{-1}(y)$ is non-dense, of the first category and of measure zero. See S. MARCUS ([6], p. 412; 7, p. 127) and R. VAIDYANATHASWAMY ([13], p. 68),

This proves that

$$Y_u(f)-f(K)\subset f(I)-Y,$$

which with the help of (1) gives

$$m\{Y_u(f)-f(K)\}=0. \tag{3}$$

We thus have the following

THEOREM 1. *If $f(x)$ be a finite real function defined in I, and if K denotes the set of points in I where*

$$D^+f=D^-f=+\infty, \quad D_+f=D_-f=-\infty,$$

then we have

$$m\{Y_u(f)-f(K)\}=0.^3$$

This theorem evidently implies that

COROLLARY 1. *A finite real function $f(x)$ fulfils the Banach's condition (T_2) if the values taken by $f(x)$ at the points where its both the upper derivates are $+\infty$, and both the lower derivates are $-\infty$, form a set of measure zero.*

2. Functions possessing the property of Darboux

Let, next, $f(x)$ be a finite function possessing the property of DARBOUX in I. According to the theorem 2 of part II, there exists a set $Y\subset f(I)$ such that

$$m\{f(I)-Y\}=0, \tag{1}$$

and for every $y\in Y$, a point $x\in f^{-1}(y)$ is an isolated point of $f^{-1}(y)$ if $f(x)$ is derivable at x.

Hence, if D denotes the set of points in I where $f(x)$ has a derivative (finite or infinite), and if $N=I-D$, for every $y\in Y$,

(i) $f^{-1}(y)$ is isolated iff $f^{-1}(y)\subset D$,

and

(ii) $f^{-1}(y)$ is dense-in-itself iff $f^{-1}(y)\subset N$.

We, therefore, have

$$Y\cdot Y_i(f)=Y-f(N), \tag{2}$$

and

$$Y\cdot Y_d(f)=Y-f(D). \tag{3}$$

Since a level set which is not isolated is necessarily infinite, the relation (2) further implies that

$$Y\cdot f(N)\subset Y_\infty(f). \tag{4}$$

The relations (2), (3) and (4) prove, with the help of (1), that

[3] In case $f(x)$ is BOREL-measurable, the set $Y_u(f)$ is analytic (see S. BRAUN [1], p. 169, th. 3), and so is measurable in the sense of LEBESGUE. Hence the above theorem 1 then gives

$$m\,Y_u(f)\leqq m_i f(K).$$

THEOREM 2. *Let $f(x)$ be a finite real function possessing the property of Darboux in I. If D denotes the set of points in I where $f(x)$ has a derivative (finite or infinite), and if $N = I - D$, then*

(a. 1) $$Y_i(f) \sim f(I) - f(N),$$

(a. 2) $$Y_d(f) \sim f(I) - f(D),$$[4]

and

(a. 3) $$m\{f(N) - Y_\infty(f)\} = 0,$$

where $A \sim B$ if $A = B - E_1 + E_2$, E_1 and E_2 being sets of measure zero.

It follows from (a. 1) that

COROLLARY 1. *For a finite real function $f(x)$ possessing the property of Darboux in I, the values taken by $f(x)$ at the points where it has no derivative (finite or infinite) form a set of measure zero if, and only if, $f^{-1}(y)$ is isolated for almost every $y \in f(I)$.*

From (a. 2) it follows that

COROLLARY 2.[5] *For a finite real function $f(x)$ possessing the property of Darboux in I, the values taken by $f(x)$ at the points where it has a derivative (finite or infinite) form a set of measure zero if, and only if, $f^{-1}(y)$ is dense-in-itself for almost every $y \in f(I)$.*

It also follows from (a. 2) that

$$m\{f(I) - f(D)\} = 0$$

iff $m\ Y_d(f) = 0$, i. e. iff almost every level set of $f(x)$ contains an isolated point. Hence

COROLLARY 3.[6] *For a finite real function $f(x)$ possessing the property of Darboux in I, the complement of the set of values taken by $f(x)$ at the points where it has a derivative (finite or infinite) is of measure zero if, and only if, for almost every $y \in f(I)$, the level set $f^{-1}(y)$ contains an isolated point.*

In case $f(x)$ also fulfils the BANACH's condition (T_1), we have $m Y_\infty(f) = 0$, which implies with the help of (a. 3) that $mf(N) = 0$. Hence, we further have

COROLLARY 4.[7] *A finite real function $f(x)$ possessing the property of Darboux fulfils the Banach's condition (T_1) only if the valeus taken by $f(x)$ at the points where it has no derivative (finite or infinite) form a set of measure zero.*

[4] In case $f(x)$ is BOREL-measurable, the set $Y_d(f)$ is analytic (see BRAUN [1], p. 169, th. 2), and so is measurable in the sense of LEBESGUE. The set $f(I)$, being an interval is measurable, and the set $f(D)$, being similar to $f(I) - Y_d(f)$, is then also measurable.

Hence, in case a finite real function $f(x)$ possessing the property of DARBOUX is BOREL-measurable, the relation (a. 2) becomes

$$m Y_d(f) = mf(I) - mf(D).$$

[5] This result has recently been proved by M. IOSIFESCU [4], p. 1919, th. 5].

[6] This result was proved, in part, by S. MARCUS ([6], p. 411, § 3) for continuous functions, and in the above form by IOSIFESCU ([4], p. 1919, th. 4).

[7] This result provides a generalisation of the necessity part of theorem 1 of S. SAKS ([11], p. 130) (or see SAKS [10], p. 278, th. (6. 2)). IOSIFESCU has also proved this result. See IOSIFESCU [4], p. 1918, th. 3, or IOSIFESCU [5], p. 727, § 4.

3. Continuous functions

Let now $f(x)$ be a continuous real function defined in a finite interval I. As the level sets of $f(x)$ are all closed, we have

$$(*) \qquad Y_i(f) = Y_f(f), \quad Y_d(f) = Y_p(f), \quad Y_u(f) = Y_c(f),$$

and so it suffices to consider only the sets $Y_f(f)$, $Y_\infty(f)$, $Y_e(f)$, $Y_u(f)$ and $Y_p(f)$. We have already observed in the foot-note [2], p. 189 that each of these sets is measurable in the sense of LEBESGUE. The following theorem determines the measures of these sets in terms of the derivability of $f(x)$:

THEOREM 3. *Let $f(x)$ be a continuous real function defined in a finite real interval I. If D denotes the set of points I where $f(x)$ has a derivative (finite or infinite), $N = I - D$, and K denotes the set of knot-points[8] of $f(x)$, we have*

(b. 1) $m\,Y_f(f) = mf(I) - mf(N)$,

(b. 2) $m\,Y_\infty(f) = mf(N)$,

(b. 3) $m\,Y_p(f) = mf(I) - mf(D)$,

(b. 4) $m\,Y_u(f) \leqq m_i f(K)$,

and

(b. 5) $m\{f(D)\cdot f(N)\} - m_i\{f(D)\cdot f(K)\} \leqq m\,Y_e(f) \leqq m\{f(D)\cdot f(N)\}$.

PROOF. As the function $f(x)$ is continuous, it evidently possesses the property of DARBOUX in I. It, therefore, follows from theorem 2, with the help of relations (*) given above, that

$$(1) \qquad Y_f(f) \sim f(I) - f(N),$$

and

$$(2) \qquad Y_p(f) \sim f(I) - f(D).$$

Since the sets $Y_f(f)$ and $Y_p(f)$ are measurable, and $f(I)$ is a closed interval, the relations (1) and (2) prove that the sets $f(N)$ and $f(D)$ are also measurable, and imply thereby the relations (b. 1) and (b. 3).

As

$$Y_\infty(f) = f(I) - Y_f(f),$$

the relation (b. 2) clearly follows from (b. 1).

Next, we have from theorem 1,

$$m\{Y_u(f) - f(K)\} = 0,$$

and the set $Y_u(f)$ being measurable, this clearly implies (b. 4).

Further, since

$$Y_p(f) \subset Y_u(f),$$

[8] A continuous function $f(x)$ is said to have a *knot-point* at x if

$$D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty, \quad D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty.$$

See G. C. YOUNG [14], p. 168.

and

$$Y_e(f) = Y_\infty(f) - Y_u(f), \tag{3}$$

we have

$$Y_e(f) \subset Y_\infty(f) - Y_p(f). \tag{4}$$

Since each of the sets in (4) is measurable, and $Y_p(f) \subset Y_\infty(f)$, we get

$$m\,Y_e(f) \leqq m\,Y_\infty(f) - m\,Y_p(f),$$

which with the help of (b. 2) and (b. 3) gives

$$\begin{aligned} m\,Y_e(f) &\leqq mf(N) - \{mf(I) - mf(D)\} = \\ &= mf(N) + mf(D) - mf(I) = \\ &= m\{f(N) + f(D)\} + m\{f(N)\cdot f(D)\} - mf(I) = \\ &= m\{f(N)\cdot f(D)\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Again, by the help of (3) we have

$$Y_e(f) \supset f(D)\cdot Y_e(f) = f(D)\cdot Y_\infty(f) - f(D)\cdot Y_u(f). \tag{6}$$

As $f(D)$ has already been proved to be measurable, each set in the relation (6) is measurable. Since $Y_u(f) \subset Y_\infty(f)$, this relation gives with the help of (b. 2) and (b. 4),

$$m\,Y_e(f) \geqq m\{f(D)\cdot f(N)\} - m\{f(D)\cdot Y_u(f)\} \geqq m\{f(D)\cdot f(N)\} - m_i\{f(D)\cdot f(K)\}. \tag{7}$$

The relations (5) and (7) together prove (b. 5).

This completes the proof of our theorem 3.

4. Applications

Following are some of the direct applications of theorem 3:

(i) We have already observed in the proof of theorem 3 that for a continuous function $f(x)$ the sets $f(D)$ and $f(N)$ are measurable. Hence

COROLLARY 1. *If $f(x)$ is continuous, the sets of values taken by $f(x)$ at the points where it has a derivative (finite or infinite), and the set of values taken by $f(x)$ at the points where it has no derivative, are both measurable in the sense of Lebesgue.*

(ii) As $f(x)$ fulfils BANACH's condition (T_1) iff $m\,Y_\infty(f) = 0$, it follows from (b. 2) that

COROLLARY 2.[9] *A continuous function $f(x)$ fulfils the Banach's condition (T_1) if, and only if, the values assumed by $f(x)$ at the points where it has no derivative (finite or infinite) form a set of measure zero.*

[9] This is a well known theorem of S. SAKS. See SAKS [11], p. 130, th. 1; or SAKS [10], p. 278, th. (6. 2).

(iii) As $f(x)$ fulfils BANACH's condition (T_2) iff $m\,Y_u(f)=0$, and as $Y_p(f)\subset Y_u(f)$, it follows from (b. 3) that

COROLLARY 3.[10] *If a continuous function $f(x)$ fulfils the Banach's condition (T_2) in I, then*

$$mf(D)=mf(I),$$

where D denotes the set of points where $f(x)$ has a derivative (finite or infinite).

(iv) Let now $f(x)$ be a continuous function in I which fulfils the LUSIN's condition (N). Since then $f(x)$ also fulfils the BANACH's condition (T_2),[11] it follows from the last corollary that

$$mf(D)=mf(I). \tag{1}$$

Let D^* denote the set of points in I where $f(x)$ has a finite derivative. Then, since $f(x)$ has an infinite derivative at each point of $(D-D^*)$, we have

$$m(D-D^*)=0,^{12}$$

which implies, because of the condition (N) satisfied by $f(x)$, that

$$mf(D-D^*)=0. \tag{2}$$

The relations (1) and (2) evidently give

$$mf(D^*)=mf(I).$$

Hence, we have

COROLLARY 4.[13] *If a continuous function $f(x)$ fulfils the Lusin's condition (N) in I, then*

$$mf(D^*)=mf(I),$$

where D^* denotes the set of points in I where $f(x)$ has a finite derivative.

(v) In case $mf(D)=0$, it follows from (b. 3) that

$$m\,Y_p(f)=mf(I).$$

Since $f^{-1}(y)$ is non-void for every $y\in f(I)$, and is non-dense except for an at most enumerable set of values of y (see foot-note [2], p. 189), it follows that

COROLLARY 5.[14] *If a continuous function $f(x)$, defined in I, is such that the values taken by $f(x)$ at the points where it has a derivative (finite or infinite) form a set of measure zero, then, for almost every $y\in f(I)$, the level set $f^{-1}(y)$ is perfect, non-dense and non-void.*

(vi) Since $Y_p(f)\subset Y_u(f)$, it follows from (b. 3) and (b. 4) that

$$mf(I)-mf(D) \;=\; m\,Y_p(f)\leqq m\,Y_u(f)\leqq m_i f(K)\leqq m_e f(K)\leqq mf(I).$$

[10] This result has recently been proved by S. MARCUS ([6], p. 410, § 3).
[11] See SAKS [10], p. 284, th. (7. 3).
[12] See SAKS [10], p. 270, th. (4. 4).
[13] This result has also been proved by MARCUS ([6], p. 412, § 4).
[14] This result has been proved by S. MINAKSHISUNDARAM ([9], p. 33) in the particular case of non-differentiable functions, and in the above form by MARCUS ([6], p. 412, § 5).

Hence, in case $mf(D)=0$, the set $f(K)$ is measurable and

$$mf(K)=mf(I).$$

We, therefore, have the following

COROLLARY 6.[15] *If a continuous function $f(x)$, defined in I, is such that the values taken by $f(x)$ at the points where it has a derivative (finite or infinite) form a set of measure zero, then*

$$mf(K)=mf(I),$$

where K denotes the set of knot-points of $f(x)$.

(vii) The theorem 3 determines exactly, for a continuous function $f(x)$, the measures of the sets $Y_f(f)$, $Y_\infty(f)$ and $Y_p(f)$. It determines exactly the measures of $Y_e(f)$ and $Y_u(f)$ in case

(1) $$m_i\{f(D)\cdot f(K)\}=0.$$

For then, by (b. 5),

(2) $$m\,Y_e(f)=m\{f(D)\cdot f(N)\},$$

and, by the help of (b. 2),

$$m\,Y_u(f)=m\,Y_\infty(f)-m\,Y_e(f)=mf(N)-m\{f(D)\cdot f(N)\}=$$
$$=m\{f(N)-f(D)\}=m\{f(I)-f(D)\},$$

for $f(I)=f(D)+f(N)$. Hence, we then have

(3) $$m\,Y_u(f)=mf(I)-mf(D).$$

But this relation on comparison with (b. 3) yields

(4) $$m\,Y_u(f)=m\,Y_p(f).$$

Thus, the condition (1) implies the relations (2), (3) and (4). However, for the relations (2) and (3) to hold, the condition (1) is not necessary, whereas the condition (4), which has been shown to be necessary, is also sufficient.

For, in case (4) holds, (3) follows from (b. 3), and then with the help of (b. 2),

$$m\,Y_e(f)=m\,Y_\infty(f)-m\,Y_u(f)=mf(N)-\{mf(I)-mf(D)\}=$$
$$=m\{f(N)+f(D)\}+m\{f(N)\cdot f(D)\}-mf(I)=m\{f(D)\cdot f(N)\},$$

which proves the relation (2).

We have thus proved the following two corollaries:

COROLLARY 7. *If a continuous function $f(x)$ is such that*

$$m_i\{f(D)\cdot f(K)\}=0,$$

where D denotes the set of points where $f(x)$ has a derivative (finite or infinite) and K denotes the set of knot-points of $f(x)$, then almost every unenumerable level set of $f(x)$ is perfect.

[15] This proves the statement (v) of GARG ([2], p. 11), viz. „A continuous nowhere differentiable function maps its knot-points into a set of positive measure."

COROLLARY 8. *If a continuous function $f(x)$, defined in I, is such that almost every unenumerable level set of $f(x)$ is perfect, then*

$$m\,Y_e(f) = m\{f(D)\cdot f(N)\}, \tag{c. 1}$$

$$m\,Y_u(f) = mf(I) - mf(D), \tag{c. 2}$$

where D denotes the set of points where $f(x)$ has a derivative (finite or infinite) and $N = I - D$.

It still remains to determine exactly the measures of the sets $Y_e(f)$ and $Y_u(f)$ in case $m\,Y_u(f) > m\,Y_p(f)$.

(viii) In case a continuous function $f(x)$, defined in I, is such that

$$m\{f(D)\cdot f(N)\} = 0, \tag{1}$$

as $K \subset N$, we evidently have

$$m\{f(D)\cdot f(K)\} = 0. \tag{2}$$

It then follows from corollary 7 that almost every unenumerable level set of $f(x)$ is perfect, and so, in turn, from corollary 8 that

$$m\,Y_e(f) = m\{f(D)\cdot f(N)\} = 0, \tag{3}$$

and

$$m\,Y_u(f) = mf(I) - mf(D). \tag{4}$$

These relations give, with the help of (b. 3),

$$m\,Y_\infty(f) = m\,Y_e(f) + m\,Y_u(f) = m\,Y_p(f). \tag{5}$$

Hence, we have

COROLLARY 9. *If a continuous function $f(x)$ is such that it takes almost each of its values either only at points where it is derivable, or only at points where it is not derivable, then the values y for which $f^{-1}(y)$ is enumerable form a set of measure zero and almost each of its infinite level sets is perfect.*

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND ASTRONOMY,
UNIVERSITY OF LUCKNOW, INDIA

(Received 3 September 1962)

References

[1] S. BRAUN, Quelques théorèmes sur les cribles boreliens, *Fund. Math.*, **20** (1933), pp. 166–172.
[2] K. M. GARG, An analogue of Denjoy's theorem, *Ganita*, **12** (1961), pp. 9–14.
[3] K. M. GARG, Applications of Denjoy analogue. II (Local structure of level sets and Dini derivates), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), pp. 183–188.
[4] M. IOSIFESCU, Propriétés différentielles des fonctions réelles d'une variable réelle, jouissant de la propriété de Darboux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), pp. 1918–1919.
[5] M. IOSIFESCU, Über eine Erweiterung eines Satzes von S. Stoïlow, *Rev. Math. Pures Appl.*, **4** (1959), pp. 725–729.

[6] S. MARCUS, Sur un théorème de M. S. Stoïlow, concernant les fonctions continues d'une variable réelle, *ibid*, **2** (1957), pp. 409–412.
[7] S. MARCUS, Sur certains problèmes et théorèmes concernant la continuité et la dérivabilité des fonctions, *Monat. Math.*, **64** (1960), pp. 119–130.
[8] S. MAZURKIEWICZ and W. SIERPIŃSKI, Sur un problème concernant les fonctions continues, *Fund. Math.*, **6** (1924), pp. 161–169.
[9] S. MINAKSHISUNDARAM, On the roots of a continuous non-differentiable function, *Jour. Indian Math. Soc.*, **4** (1940), pp. 31–33.
[10] S. SAKS, *Theory of the Integral* (Warszawa–Lwów, 1937).
[11] S. SAKS, Sur certaines classes de fonctions continues, *Fund. Math.*, **17** (1931), pp. 124–151.
[12] W. SIERPIŃSKI, Sur l'ensemble de valeurs qu'une fonction continue prend une infinité non dénombrable de fois, *ibid*, **8** (1926), pp. 370–373.
[13] R. VAIDYANATHASWAMY, On continuous functions of a real variable, *Proc. Indian Acad. Sci.*, **9** (1939), pp. 67–71.
[14] G. C. YOUNG, On infinite derivates, *Quart. Jour. Math.*, **47** (1916), pp. 127–175.

ÜBER DIE $(C, 1)$-SUMMEN DER ENTWICKLUNGEN NACH ORTHOGONALEN POLYNOMEN

Von

G. FREUD (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. ALEXITS)

Einleitung

Der klassische Satz von L. FEJÉR über die $(C, 1)$-Summierbarkeit der Fourierschen Reihen stetiger Funktionen, und gewisse Verallgemeinerungen dessen wurden vor 10 Jahren von K. TANDORI [10] und dem Verfasser [5] auf Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen übertragen. Diese Untersuchungen werden in § 1 vorliegender Arbeit in einer verschärften Form wiedergegeben. Weiter zeigen wir in § 2, daß der Fejérsche Satz sogar für solche orthogonalen Polynomreihen gültig ist, für welche die Gewichtsfunktion $w(x)$ die Ungleichungen

$$a_1 e^{-b^2x^2} \leqq w(x) \leqq a_2 e^{-b^2x^2}$$

befriedigen; bekanntlich ist das für die Hermitesche Orthogonalpolynome der Fall.

In § 3 wird der Grad der Annäherung der $(C, 1)$-Summen der Orthogonalentwicklung einer stetigen Funktion $f(x)$ untersucht.

Es ist ein klassisches Resultat von S. N. BERNSTEIN, daß eine nach 2π periodische Funktion $f(x) \in \operatorname{Lip} \alpha$ durch die Fejérschen Mittel ihrer Fourierschen Reihe für $0 < \alpha < 1$ in der Größenordnung $O(n^{-\alpha})$ bzw. für $\alpha = 1$ in der Größenordnung $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ gleichmäßig approximiert wird, und daß diese Größenordnungen bestmöglich sind. Die Untersuchungen von S. N. BERNSTEIN wurden in einer jüngst erschienenen Arbeit [8] von S. B. STEČKIN weitergeführt. Er zeigte, daß für die $(C, 1)$-Summen $\sigma_n(f, x)$ der Fourierreihe einer beliebigen 2π-periodischen stetigen Funktion $f(x)$ die Ungleichung

$$|f(x) - \sigma_n(f; x)| \leqq \frac{B_1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(f) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

gültig ist. Dabei ist B_1 eine absolute Konstante, und $E_\nu(f)$ bezeichnet, wie üblich, die Abweichung des trigonometrischen Polynoms höchstens ν-ter Ordnung von $f(x)$, welche die Funktion $f(x)$ im Tschebischeffschen Sinne bestmöglich approximiert. Er zeigte auch, daß die Ungleichung im folgenden Sinne bestmöglich ist: Es sei $F = \{F_n\}$ eine abnehmende Nullfolge, $F_1 \neq 0$, und $C(F)$ bezeichne die Klasse der 2π-periodischen stetigen Funktionen, welche durch trigonometrischen Polynome so gut approximiert werden können, daß für jede natürliche Zahl n die Ungleichung $E_n(f) \leqq F_n$ besteht. Dann ist

$$\sup_{C(F)} \max_x |f(x) - \sigma_n(f; x)| > \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu .$$

Die Frage, ob das Ergebnis von BERNSTEIN auf die $(C, 1)$-Summen orthogonaler Polynomreihen ausgedehnt werden kann, wurde von G. ALEXITS [1] gestellt. Er

zeigte folgendes: Es sei $w(x)$ eine im endlichen Intervall $[a, b]$ definierte L-integrierbare Funktion und $\{p_n(w, x)\}$ sei die Folge der bezüglich der Gewichtsfunktion $w(x)$ orthogonalen Polynome. Genügt w in einem Teilintervall $[c, d] \subset (a, b)$ der Ungleichung $w(x) \geqq m > 0$, dann ist für jede Funktion $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha < \frac{1}{2}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} |f(x) - s_\nu(f; x)| = O(n^{-\alpha}) \tag{2}$$

gleichmäßig in jedem inneren Teilintervall von $[c, d]$ gültig. Dabei ist $s_\nu(f; x)$ die Teilsumme ν-ten Grades der Orthogonalentwicklung

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) p_k(w; x).$$

Dieses Ergebnis von G. ALEXITS ergibt unter der Voraussetzung $\alpha < \frac{1}{2}$ sogar für Fouriersche Reihen einen neuen Satz, welcher aus dem Resultate von S. N. BERNSTEIN keineswegs folgt, dieses aber enthält. Doch hat es den Mangel, daß der Satz für $\frac{1}{2} \leqq \alpha < 1$ seine Gültigkeit verliert.

In vorliegender Arbeit soll gezeigt werden, daß (1) auch für Reihenentwicklungen nach orthogonalen Polynomen unter passenden Voraussetzungen bezüglich der Belegung gültig ist. Insbesondere ergibt sich dann für $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ die Ausdehnung des Bernsteinschen Satzes; sie ist für $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ in dem Satze von G. ALEXITS enthalten, aber für $\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1$ neu. Den Beweis dieses Satzes geben wir in § 3. In § 4 beschäftigen wir uns mit einer Verallgemeinerung: wir betrachten die $(C, 1)$-Summen von Reihen, welche sich durch gliedweises Differenzieren aus einer Entwicklung nach orthogonalen Polynomen ergeben.* Wir zeigen, daß die Abschätzung (1) auch auf diese Reihen ihre Gültigkeit behält.

§ 1. Abschätzung der Lebesgueschen Funktionen der $(C, 1)$-Summen

Es sei $\alpha(x)$ eine in $(-\infty, +\infty)$ definierte Belegungsfunktion (d. h.: eine nicht abnehmende Funktion, welche unendlich viele verschiedene Werte annimmt, und für welche die Momente $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ existieren). Weiter sei $\{p_n(d\alpha; x)\}$ das System der Orthogonalpolynome bezüglich der Belegung $d\alpha$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(d\alpha; x) p_m(d\alpha; x) d\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m, \end{cases}$$

$$p_n(d\alpha; x) = \gamma_n(d\alpha) x^n + \gamma_{n,1} x^{n-1} + \ldots + \gamma_{n,n}, \quad \gamma_n(d\alpha) > 0.$$

Für das Verhalten der $(C, 1)$ Summen der Orthogonalentwicklung

$$f(x) \sim \sum a_\nu(d\alpha; f) p_\nu(d\alpha; x); \quad a_\nu(d\alpha, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_\nu(d\alpha; x) d\alpha(x) \tag{3}$$

* Das Konvergenzverhalten solcher Reihen wurde zuerst in der Arbeit [5] des Verfassers untersucht.

einer Funktion $f(x) \in L(d\alpha)$ sind die „Lebesgueschen Funktionen der $(C, 1)$-Summation" der Reihe (1) maßgebend (vgl. G. Alexits [2]). Aus einer früheren Arbeit des Verfassers [5] folgt schon, daß diese Lebesgueschen Funktionen unter folgenden Bedingungen in jedem inneren Teilintervalle von $[c, d]$ gleichmäßig beschränkt sind: a) Die Belegung hat den endlichen Träger $[a, b]$; b) $\alpha(x)$ ist absolut stetig; c) es ist $0 < m < \alpha'(x)$ für $x \in [c, d]$.

Das Ziel dieses Paragraphen ist, dieses Ergebnis zu präzisieren. Als wichtigste Folgerung wird sich die Verallgemeinerung des Satzes von K. TANDORI und des Verfassers auf eine Klasse von Belegungen mit unendlichen Träger (vgl. § 2.) ergeben, gleichzeitig schaffen wir das Fundament zu den Resultaten der folgenden Paragraphen. Für den Kern der Teilsumme ν-ten Grades $s_\nu(d\alpha; f; x)$ der Reihe (3) ist bekanntlich die Christoffel—Darboux-sche Summenformel

$$K_\nu(d\alpha; x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\nu-1} p_k(d\alpha; x) p_k(d\alpha; \xi) =$$

$$= \frac{\gamma_{\nu-1}(d\alpha)}{\gamma_\nu(d\alpha)} \frac{p_\nu(d\alpha; x) p_{\nu-1}(d\alpha; \xi) - p_{\nu-1}(d\alpha; x) p_\nu(d\alpha; \xi)}{x - \xi}$$

gültig. Aus diesen K_ν bildet man die Lebesguesche Funktionen der $(C, 1)$-Summen:

$$\Lambda_n(d\alpha; x) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{\nu=1}^{n} K_\nu(d\alpha; x, \xi) \right| d\alpha(\xi). \tag{4}$$

Nach der ersten Form der K_ν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\nu^2(d\alpha; x, \xi) d\alpha(\xi) = \sum_{k=0}^{\nu-1} p_k^2(d\alpha; x) = K_\nu(d\alpha; x, x). \tag{5}$$

Es sei nun $f \in L_2(d\alpha)$, δ_n eine Folge positiver Zahlen, über welche wir später noch verfügen werden, $E_n(x)$ sei das Intervall $[x - \delta_n; x + \delta_n]$, und $R_n(x)$ das Komplement von $E_n(x)$. Es sei weiter

$$F_n(f, x; \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \xi \in E_n(x) \\ \dfrac{f(\xi)}{x - \xi} & \text{für} \quad \xi \in R_n(x) \end{cases}$$

was wir kurz als „Funktion F_n" bezeichnen werden. Mit diesen Bezeichnungen

$$s_{\nu-1}(d\alpha; f; x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\nu(d\alpha; x, \xi) f(\xi) d\alpha(\xi) = \tag{6}$$

$$= \int_{E_n(x)} K_\nu(d\alpha; x, \xi) f(\xi) d\alpha(\xi) +$$

$$+ \frac{\gamma_{\nu-1}(d\alpha)}{\gamma_\nu(d\alpha)} [p_\nu(d\alpha; x) a_{\nu-1}(d\alpha; F_n) - p_{\nu-1}(d\alpha; x) a_\nu(d\alpha; F_n)].$$

Das erste Glied an der rechten Seite kann recht einfach abgeschätzt werden:

$$(7)\qquad \left|\int_{E_n(x)} K_\nu(d\alpha; x, \xi) f(\xi)\, d\alpha(\xi)\right| \leqq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} K_\nu^2(d\alpha; x, \xi)\, d\alpha(\xi)} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\int_{E_n(x)} f^2 d\alpha(\xi)} = \sqrt{K_\nu(d\alpha; x, x) \int_{E_n(x)} f^2(\xi)\, d\alpha(\xi)} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{K_n(d\alpha; x, x) \int_{E_n(x)} f^2(\xi)\, d\alpha(\xi)} \quad \text{für} \quad \nu \leqq n.$$

Auf das zweite Glied an der rechten Seite ziehen wir einen Kunstgriff zur Hilfe, welcher für Fouriersche Reihen zuerst von T. CARLEMAN [3] angewandt wurde. Dieser Kunstgriff wurde zuerst von K. TANDORI [10] in die Theorie der Orthogonalpolynomreihen eingeführt und durch den Verfasser [5] präzisiert. Aus (6) und (7) folgt durch summieren nach ν und nachträgliche Anwendung der Cauchy-schen Ungleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} |s_\nu(d\alpha; f; x)| \leqq n \sqrt{K_n(d\alpha; x, x) \int_{E_n(x)} f^2(\xi)\, d\alpha(\xi)} +$$

$$+ 2 \max_{\nu \leqq n} \left\{ \frac{\gamma_{\nu-1}(d\alpha)}{\gamma_\nu(d\alpha)} \right\} \sqrt{K_{n+1}(d\alpha; x, x) \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2(d\alpha; F_n)}.$$

Infolge der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2(d\alpha; F_n) \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} F_n^2(f, x, \xi)\, d\alpha(\xi).$$

Mit der Bezeichnung

$$\max_{\nu \leqq n} \frac{\gamma_{\nu-1}(d\alpha)}{\gamma_\nu(d\alpha)} = \Gamma_n(d\alpha)$$

erhält man endlich

$$(8)\qquad \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} |s_\nu(d\alpha; f; x)| \leqq \sqrt{K_n(d\alpha; x, x) \int_{E_n(x)} f^2(\xi)\, d\alpha(\xi)} +$$

$$+ 2 \frac{\Gamma_n(d\alpha)}{n} \sqrt{K_{n+1}(d\alpha; x, x) \int_{-\infty}^{+\infty} F_n^2(f, x; \xi)\, d\alpha(\xi)}.$$

Wir bezeichnen mit

$$\sigma_n(d\alpha; f; x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu(d\alpha; f; x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

die $(C, 1)$-Summen von (3). Wir setzen

$$f^*(\xi) = \operatorname{sign} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} K_\nu(d\alpha; x, \xi) \right\};$$

dann ist offenbar

$$\Lambda_n(d\alpha; x) = \sigma_n(d\alpha; f^*; x),$$

und aus (8) ergibt sich wegen $f^{*2}=1$:

$$\Lambda_n(d\alpha; x) \leqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} |s_\nu(d\alpha; f^*; x)| \leqq \tag{9}$$

$$\leqq \sqrt{K_n(d\alpha; x, x)[\alpha(x+\delta_n)-\alpha(x-\delta_n)]} + 2\frac{\Gamma_n(d\alpha)}{n}\sqrt{K_{n+1}(d\alpha; x, x)\int_{R_n(x)}\frac{d\alpha(\xi)}{(x-\xi)^2}}.$$

Als erste Anwendung der Abschätzung (9) zeigen wir folgende — nicht allzu wesentliche — Verallgemeinerung des Freud—Tandori-schen Satzes:

SATZ 1. *Die Belegung $d\alpha$ habe den endlichen Träger $[a, b]$; für einen Punkt $x \in (a, b)$ sei $K_n(d\alpha; x, x) \leqq L_n$ und*

$$|\alpha(x)-\alpha(\xi)| \leqq M|x-\xi| \quad \text{für} \quad |x-\xi| \leqq \Delta; \tag{10}$$

dann ist die Folge $\{\Lambda_n(d\alpha; x)\}$ beschränkt, und die Schranke ist nur von den Größen $L, M, \Delta, a, b, \alpha(b)-\alpha(a)$ abhängig.

Dieser Satz präzisiert ein wenig die Abschätzung, welche aus dem Satze des Verfassers über die $(C, 1)$-Summation der Reihe (3) folgt. Es wird in § 3 in dieser verschärften Form gebraucht.

BEWEIS. Aus der Voraussetzung, daß $d\alpha$ den endlichen Träger $[a, b]$ hat, folgt

$$\Gamma_n \leqq |a| + |b|$$

(vgl. G. ALEXITS [2] S. 28). Wir setzen $\delta_n = n^{-1}$ und $n > \Delta^{-1}$; es ist dann

$$\int_{R_n(x)}\frac{d\alpha(\xi)}{(x-\xi)^2} = \int_a^{x-\Delta}\frac{d\alpha(\xi)}{(x-\xi)^2} + \int_{x+\Delta}^{b}\frac{d\alpha(\xi)}{(x-\xi)^2} + \int_{x-\Delta}^{x-\frac{1}{n}}\frac{d\alpha(\xi)}{(x-\xi)^2} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\Delta}\frac{d\alpha(\xi)}{(x-\xi)^2}. \tag{11}$$

Infolge (10) ergibt sich mit Hilfe einer partiellen Integration

$$\int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\Delta}\frac{d\alpha(\xi)}{(x-\xi)^2} = \frac{\alpha(\xi)-\alpha(x)}{(\xi-x)^2}\Bigg|_{x+\frac{1}{n}}^{x+\Delta} + 2\int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\Delta}\frac{\alpha(\xi)-\alpha(x)}{(\xi-x)^3}\,d\xi \leqq \frac{1}{\Delta^2}[\alpha(x+\Delta)-\alpha(x)] +$$

$$+ 2M\int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\Delta}\frac{d\xi}{(\xi-x)^2} \leqq \frac{M}{\Delta} + 2M\int_{x+\frac{1}{n}}^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi-x)^2} = M\left(\frac{1}{\Delta}+2n\right) \leqq 3Mn,$$

und genau so erhält man

$$\int_{x-\Delta}^{x-\frac{1}{n}}\frac{d\alpha(\xi)}{(x-\xi)^2} \leqq 3Mn;$$

es folgt dann weiter aus (11)

$$\int_{R_n(x)} \frac{d\alpha(\xi)}{(x-\xi)^2} \leqq \frac{1}{\Delta^2}[\alpha(b)-\alpha(a)]+6Mn$$

und unter Beachtung dieser Abschätzung ergibt sich aus (9)

$$\Lambda_n(d\alpha; x) \leqq \sqrt{L(n+1)}\left\{\frac{\sqrt{2M}}{n}+\right. \tag{12}$$

$$\left.+\frac{2}{n}(|a|+|b|)\sqrt{\frac{1}{\Delta^2}[\alpha(b)-\alpha(a)]+6Mn}\right\} = O(1) \quad \text{w. z. b. w.}$$

BEMERKUNG. Die Folgerungen, welche sich aus der Beschränktheit der Folge $\{\Lambda_n(d\alpha; x)\}$ auf einer Menge $\mathfrak{M}$ ergeben sind im Buche von G. ALEXITS [2] eingehend behandelt. Es seien folgende zwei solche Folgerungen hervorgehoben:

a) Die Reihe (3) ist für jede Funktion $f \in L_2(d\alpha)$ fast überall auf $\mathfrak{M}$ gegen $f(x)$ stark $(C, 1)$-summierbar.

b) Aus $f \in L_2(d\alpha)$ folgt, daß für jede Folge natürlicher Zahlen $\{\nu_n\}$ mit $\nu_{n+1}/\nu_n \geqq q > 1$ die Folge $s_{\nu_n}(d\alpha; f; x)$ für fast alle $x \in \mathfrak{M}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Ist außer den Voraussetzungen des Satzes 1 auch die Bedingung (14) des nächstfolgenden Satzes begfriedigt, dann ist die Reihe (3) in diesem Punkte x stark $(C, 1)$-summierbar. Der Beweis ergibt sich genau so, wie der des etwas schwächeren Satzes bei G. FREUD [5] oder bei dem folgenden Satze 2.

Was die Bedingung $K_n(d\alpha; x, x) = O(n)$ betrifft, diese ist sicher gleichmäßig in jedem inneren Teilintervall von $[c, d] \subset (a, b)$ erfüllt, falls in $[c, d]$ fast überall $\alpha'(x) \geqq m > 0$ gültig ist. Sie ist auch befriedigt, wenn $\alpha(x)$ absolut stetig ist und für die Funktion

$$w(x) = \begin{cases} \alpha'(x) & \text{für} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{für} \quad x \notin [a, b] \end{cases}$$

die Abschätzung

$$\int_a^b \left| \frac{w(x+h)-w(x)}{w(x)} \right| dx = O\left(\log^{\gamma} \frac{1}{|h|}\right) \qquad (\gamma > 1)$$

gültig ist (vgl. G. FREUD [6]).

§ 2. Die $(C, 1)$-Summierbarkeit der Orthogonalpolynomreihe bei gewissen Belegungen mit unendlichem Träger

SATZ 2. *Es sei $\alpha(x)$ absolut stetig und für jedes reelle x sei*

$$\alpha_1'(x) = a_1 e^{-b^2x^2} < \alpha'(x) < a_2 e^{-b^2x^2} = \alpha_2'(x) \qquad (a_1 > 0) \tag{13}$$

dann ist die Entwicklung (3) *einer Funktion $f \in L_2(d\alpha)$ in jedem solchen Punkte x stark $(C, 1)$-summierbar, für welche*

$$\int_x^{x+h} [f(\xi)-f(x)]^2 \, d\xi = o(|h|) \tag{14}$$

erfüllt ist. Ist (14) *gleichmäßig auf einer beschränkten Menge* $\mathfrak{M}$ *gültig, dann strebt* $\sigma_n(d\alpha; f; x)$ *auf* $\mathfrak{M}$ *gleichmäßig gegen* $f(x)$.

BEWEIS. Aus (13) folgt (vgl. G. SZEGŐ [9])

$$\gamma_n(d\alpha_2) \leqq \gamma_n(d\alpha) \leqq \gamma_n(d\alpha_1) \quad \text{und} \quad K_{n+1}(d\alpha; x, x) \leqq K_{n+1}(d\alpha_1; x, x).$$

Die zu den Belegungen $\alpha_1(x) = \int_{-\infty}^{x} a_1 e^{-b^2\xi^2} d\xi$ bzw. $\alpha_2(x) = \int_{-\infty}^{x} a_2 e^{-b^2\xi^2} d\xi$ gehörenden Orthogonalpolynome kann man mit Hilfe der Hermiteschen Polynome ausdrücken:

$$p_n(d\alpha_1; x) = \sqrt{\frac{b}{a_1}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(bx)$$

und

$$p_n(d\alpha_2; x) = \sqrt{\frac{b}{a_2}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(bx).$$

Es ergibt sich weiter

$$\gamma_n(d\alpha_1) = \sqrt{\frac{b}{a_1}} \sqrt{\frac{2^n}{n! \sqrt{\pi}}}\, b^n, \quad \gamma_n(d\alpha_2) = \sqrt{\frac{b}{a_2}} \sqrt{\frac{2^n}{n! \sqrt{\pi}}}\, b^n.$$

Es ist also

$$\frac{\gamma_{\nu-1}(d\alpha)}{\gamma_\nu(d\alpha)} \leqq \frac{\gamma_{\nu-1}(d\alpha_1)}{\gamma_\nu(d\alpha_2)} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a_2}{2a_1}} \sqrt{\nu}$$

und (vgl. (7))

$$\Gamma_n(d\alpha) \leqq \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a_2}{2a_1}} \sqrt{n} = O(\sqrt{n}). \tag{15}$$

Wir wollen auch

$$K_{n+1}(d\alpha_1; x, x) = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^2(d\alpha_1; x; x) = \frac{b}{\sqrt{\pi}\, a_1} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H_\nu^2(bx)}{2^\nu \nu!}$$

abschätzen. Das geschieht am einfachsten mit Hilfe der bekannten Formel

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_\nu^2(x)}{2^\nu \nu!} t^\nu = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left\{\frac{2tx^2}{1+t}\right\} \qquad (|t| < 1). \tag{16}$$

Man setze hier $t = t_n = 1 - \frac{1}{n}$:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H_\nu^2(x)}{2^\nu \nu!} < \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_\nu^2(x)}{2^\nu \nu!} t_n^\nu = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}} \exp\left\{\frac{2t_n x^2}{1+t_n}\right\} = O(\sqrt{n}),$$

also auch $K_{n+1}(d\alpha_1; x, x) = O(\sqrt{n})$ und

$$K_{n+1}(d\alpha; x, x) \leqq K_{n+1}(d\alpha_1; x, x) = O(\sqrt{n}). \tag{17}$$

Die Abschätzung (17) ist mit einer von x nicht abhängenden Konstanten gültig, falls x eine beschränkte Menge durchlauft.

Aus (8), (13), (14), (15) und (17) ergibt sich mit $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}|f(x)-s_\nu(d\alpha;f;x)| = O(\sqrt[4]{n})\sqrt{\int_{x-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{1}{\sqrt{n}}}[f(\xi)-f(x)]^2 a_2 e^{-b^2\xi^2}d\xi} +$$

$$+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\sqrt{\int_{-\infty}^{x-\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{[f(\xi)-f(x)]^2}{(\xi-x)^2}a_2 e^{-b^2\xi^2}d\xi + \int_{x+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\infty}\frac{[f(\xi)-f(x)]^2}{(\xi-x)^2}a_2 e^{-b^2\xi^2}d\xi}.$$

Das erste Glied an der rechten Seite strebt wegen (14) gegen Null. Unter Beachtung von (15) ergibt sich mit Hilfe einer partiellen Integration, daß auch das zweite Glied an der rechten Seite gegen Null strebt. Damit haben wir den Satz 2 bewiesen.

Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, daß alle unsere Abschätzungen auf $\mathfrak{M}$ gleichmäßig gültig sind.

Die Bedeutung des Satzes 2 ist, daß es das erste Resultat über das Konvergenzverhalten der Reihe (3) zu sein scheint, unter den Bedingungen, daß der Träger der Belegung unendlich ist und bei der Wahl der Gewichtsfunktion eine gewisse Willkür zugelassen wird. Die hier angewandte Methode versagt allerdings schon für Laguerresche Polynome.

BEMERKUNG. Wie in § 1 läßt sich zeigen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes 2 die Folge $\{\Lambda_n(d\alpha; x)\}$ in jedem endlichen Intervall gleichmäßig beschränkt ist.

§ 3. Approximation durch die $(C, 1)$-Summen der Orthogonalpolynomentwicklung

Wir bezeichnen mit Π_n die Menge der Polynome höchstens n-ten Grades, $f(x)$ sei eine in $[a, b]$ stetige Funktion, und es sei

$$E_n(f; a, b) = \min_{\varphi_n \in \Pi_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x)-\varphi_n(x)|.$$

Nach einem klassischen Satze von E. BOREL gibt es ein $T_n(f) \in \Pi_n$ für welches dieses Minimum angenommen wird:

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)-T_n(f;x)| = E_n(f; a, b).$$

Ferner betrachten wir die Summen

$$V_n(d\alpha;f;x) = \frac{1}{n-n_1}\sum_{\nu=n_1+1}^{n} s_\nu(d\alpha;f;x) \qquad \left(n_1 = \left[\frac{n}{2}\right]\right). \tag{18}$$

Als Summationsverfahren Fourierschen Reihen wurden diese von CH. DE LA VALLÉE

POUSSIN eingeführt. Es ist

$$V_n(d\alpha; f; x) = \frac{n+1}{n-n_1}\,\sigma_{n+1}(d\alpha; f; x) - \frac{n_1+1}{n-n_1}\,\sigma_{n_1+1}(d\alpha; f; x). \tag{19}$$

HILFSSATZ 3. *Der Träger der Belegung $d\alpha$ liege in dem endlichen Intervall $[a, b]$ und es gebe eine Punktmenge $\mathfrak{M} \subset [a, b]$ so daß für $x \in \mathfrak{M}$ die Folge $\{\Lambda_n(d\alpha; x)\}$ gleichmäßig beschränkt ist. Dann gibt es eine von $f(x)$ und n nicht abhängende Konstante Q so daß für jede in $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ und $\xi \in \mathfrak{M}$*

$$|f(\xi) - V_n(d\alpha; f; \xi)| \leqq Q E_{n_1}(f; a, b) \tag{20}$$

gültig ist.

Der Beweis dieses Hilfssatzes ergibt sich genau in derselben Weise, wie des entsprechenden bekannten Satzes von DE LA VALLÉE POUSSIN, wo nur die trigonometrische Reihe betrachtet wird (vgl. etwa И. П. НАТАНСОН [7]).

SATZ 4. *Unter denselben Voraussetzungen, wie in Hilfssatz* 3

$$|f(\xi) - \sigma_{n+1}(d\alpha; f; \xi)| \leqq \frac{20Q}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu(f; a, b) \quad \text{für} \quad \xi \in \mathfrak{M}.$$

BEWEIS. Es sei $n_0 = n, n_1 = \left[\frac{n}{2}\right], \ldots, n_{\nu+1} = \left[\frac{n_\nu}{2}\right], \ldots, n_s = \left[\frac{n_{s-1}}{2}\right] = 1, n_{s+1} = 0;$ dann ist

$$\sigma_{n+1}(d\alpha; f; x) = \frac{s_0(d\alpha; f; x)}{n+1} + \sum_{r=0}^{s} \frac{n_r - n_{r+1}}{n+1}\, V_{n_r}(d\alpha; f; x). \tag{21}$$

Aus Hilfssatz 3 erhalten wir dann

$$|f(\xi) - \sigma_{n+1}(d\alpha; f; \xi)| \leqq \frac{2E_0(f; a, b)}{n+1} + Q \sum_{r=0}^{s} \frac{n_r - n_{r+1}}{n+1} E_{n_{r+1}}(f; a, b) \leqq$$

$$\leqq 2Q\left\{\frac{1}{n+1} E_0(f; a, b) + \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{s-1} \frac{n_r - n_{r+1}}{n_{r+1} - n_{r+2}} \sum_{\nu=n_{r+2}+1}^{n_{r+1}} E_\nu(f; a, b)\right\} \leqq$$

$$\leqq \frac{20Q}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu(f; a, b), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ist insbesondere $f \in \operatorname{Lip} \alpha$ dann ist nach dem Satze von D. JACKSON $E_\nu(f; a, b) = O(\nu^{-\alpha})$ und

$$f(\xi) - \sigma_n(d\alpha; f; \xi) = \begin{cases} O(n^{-\alpha}) & \text{für} \quad \alpha < 1 \\ O\left(\dfrac{\log n}{n}\right) & \text{für} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

gleichmäßig für $\xi \in \mathfrak{M}$.

SATZ 5. *Die Belegung $d\alpha$ habe den endlichen Träger $[a, b]$ und $\alpha(x)$ sei in $[c, d] \subset (a, b)$ absolut stetig, ferner es sei*

$$0 < m \leqq \alpha'(x) \leqq M \quad \text{fast überall für} \quad x \in [c, d],$$

wobei die positiven Zahlen m und M von x nicht abhängen. Ferner sei $f(x)$ eine, in $[a, b]$ stetige Funktion. Dann gibt es eine Funktion $K(\delta)$ die weder von n noch von der Wahl von $f(x)$ abhängt, so daß für $\xi \in [c+\delta, d-\delta]$

$$|f(\xi) - \sigma_{n+1}(d\alpha; f; \xi)| \leqq \frac{K(\delta)}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu(f; a, b)$$

gültig ist.

BEWEIS. Aus $\alpha'(x) \geqq m > 0$ folgt, daß gleichmäßig in jedem inneren Teilintervall von $[c, d]$, $\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^2(d\alpha; x) = O(n)$ ist (vgl. etwa G. FREUD [5]). Es folgt weiter aus dem Satze 1, daß in jedem inneren Teilintervall von $[c, d]$ $\Lambda_n(d\alpha; x)$ gleichmäßig beschränkt ist. Unter Beachtung dieser Tatsachen folgt Satz 5 aus Satz 4.

§ 4. Untersuchung der $(C, 1)$-Summen der differenzierten Orthogonalpolynomentwicklung

Folgender Satz ist eine Variante eines Satzes von J. CZIPSZER und Verf. [4] über trigonometrische Polynome. Die Übertragung auf rationale Polynome bietet keine Schwierigkeiten.

SATZ 6. *Es sei $f(x)$ r-mal stetig differenzierbar in $[a, b]$, $\varphi_n \in \Pi_n$ und*

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in [a, b], \tag{22}$$

dann gibt es von f und n nicht abhängende Zahlen $C_r(a, b, \delta)$ so daß

$$|f^{(r)}(x) - \varphi^{(r)}(x)| \leqq C_r(a, b, \delta) \cdot [n(n-1)\ldots(n-r+1) + E_{n-r}(f^{(r)}; a, b)] \tag{23}$$

für $x \in [a+\delta, b-\delta]$, $\delta < \frac{b-a}{2}$.

BEWEIS. Es genügt den Satz für $r = 1$ zu beweisen; der allgemeine Fall erhält man durch wiederholte Anwendung dieses speziellen Falles. Wir führen mit Hilfe der Formel $\cos\Theta = \frac{2x-a-b}{b-a}$ die neue Veränderliche Θ ein. Die Intervalle $\Theta \in [0, \pi]$ und $x \in [a, b]$ entsprechen einander, und $\varphi_n(x)$ ist ein trigonometrisches Polynom in Θ. Aus dem erwähnten Satze folgt dann

$$\left| \frac{d}{d\Theta} [f(x) - \varphi_n(x)] \right| = \frac{b-a}{2} |\sin\Theta| \, |f'(x) - \varphi_n'(x)| \leqq G^* \left[n\varepsilon + E_n\left(\frac{df}{d\Theta}\right) \right],$$

wo G^* eine absolute Konstante ist.

Die Funktion $\frac{df}{d\Theta} = -\frac{b-a}{2} \sin\Theta f'(x)$ wird durch das trigonometrische Polynom höchstens n-ter Ordnung $-\frac{b-a}{2} \sin\Theta T_{n-1}(f'; x)$ mit einem Fehler nicht

größer als $\frac{b-a}{2}\, E_{n-1}(f'; a, b)$ approximiert es ist, also

$$E_n\left(\frac{df}{d\Theta}\right) \leqq \frac{b-a}{2} E_{n-1}(f'; a, b),$$

also

$$|f'(x) - \varphi_n'(x)| \leqq \frac{C_1^{**}}{|\sin \Theta|}[n\varepsilon + E_{n-1}(f'; a, b)],$$

und hieraus folgt man den Satz für $r = 1$ w. z. b. w.

Es sei $F_r(t)$ ein r-tes Integral von $f(t) \in L(d\alpha)$ in $[a, b]$

$$F_r(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(d\alpha; F_r)\, p_\nu(d\alpha; x)$$

und wir betrachten die durch gliedweises Differenzieren entstehende Reihe

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(d\alpha; F_r)\, p_\nu^{(r)}(d\alpha; x)^* \tag{24}$$

welche im allgemeinen nicht mehr eine Orthogonalentwicklung ist. Es seien $V_{n,r}(d\alpha; f; x)$ bzw. $\sigma_{n,r}(d\alpha; f; x)$ die de la Vallée Poussinschen bzw. Fejérschen Summen der Reihe (24).

SATZ 8. *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes* 3 *gilt für eine beliebige in* $[a, b]$ *stetige Funktion* $f(x)$

$$|f(x) - \sigma_{n,r}(d\alpha; f; x)| \leqq \frac{K_1(d\alpha; r, c_1, d_1)}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu(f; a, b) \qquad (x \in [c_1, d_1]), \tag{25}$$

wo $K_1(d\alpha; r, c_1, d_1)$ *weder von n und x noch von der Wahl von* $f(x)$ *abhängt.*

Als Spezialfall dieses Satzes ergibt sich, daß unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 6 die Reihe (24) für jede in $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ in jedem abgeschloßenen Teilintervall von (c, d) gleichmäßig gegen $f(x)$ $(C, 1)$-summierbar ist.

BEWEIS. Aus den Beziehungen

$$\sigma_{n,r}(d\alpha; f; x) = \sigma_n^{(r)}(d\alpha; F_r; x), \quad V_{n,r}|d\alpha; f; x) = V_n^{(r)}(d\alpha; F_r; x)$$

folgt wegen (21)

$$\sigma_{n+1,r}(d\alpha; f; x) = \sum_{\varrho=0}^{s} \frac{n_\varrho - n_{\varrho+1}}{n} V_{n_\varrho, r}(d\alpha; f; x),$$

also

$$|f(x) - \sigma_{n+1,r}(d\alpha; f; x)| \leqq \sum_{\varrho=0}^{s} \frac{n_\varrho - n_{\varrho+1}}{n} |f(x) - V_{n_\varrho, r}(d\alpha; f; x)|. \tag{26}$$

Nach Hilfssatz 3 ist für beliebiges $\delta > 0$

$$|F_r(x) - V_n(F_r, x)| \leqq Q E_{n_1}(F_r) \quad \text{für} \quad c + \delta \leqq x \leqq d - \delta$$

* Die ersten $r-1$ Glieder dieser Reihe verschwinden natürlich für jede Wahl von f. Hiraus folgt, daß die Reihe (24) von der Wahl von $F_r(x)$ nicht abhängt.

also infolge Satz 6

$$|f(x)-V_{n,r}(f;x)| \leqq C_r Q[n(n-1)\ldots(n-r+1)E_{n_1}(F_r)+E_{n-r}(f)]$$

für $c+2\delta \leqq x \leqq d-2\delta$. Nach einer wohlbekannten Ungleichung der Approximationstheorie ist

$$E_{n_1}(F_r) \leqq \frac{D_r}{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-r+1)} E_{n_1-r}(f) \quad \text{für} \quad n_1 \geqq r,$$

und hieraus folgt weiter

$$|f(x)-V_{n,r}(f;x)| \leqq Q' E_{n_1-r}(f). \tag{27}$$

Aus (26) und (27) folgt dann (25) genau in derselben Weise, wie im vorigen Paragraphen Satz 4 aus (21) abgeleitet wurde, w. z. b. w.

Herrn Professor G. SZEGŐ und meinen Kollegen Herrn J. CZIPSZER bin ich für das sorgfältige Lesen des Manuskriptes für Dank verpflichtet.

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST

(Eingegangen am 12. Juli 1962.)

Literaturverzeichnis

[1] G. ALEXITS, Une contribution à la théorie constructive des Fonctions, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **19** (1958), S. 149–157.
[2] G. ALEXITS, *Convergence problems of orthogonal series* (Pergamon Press, 1962).
[3] T. CARLEMAN, A theorem concerning Fourier series, *Proc. London Math. Soc.*, **9** (1911), S. 369–409.
[4] J. CZIPSZER–G. FREUD, Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynome trigonométrique et par ses dérivées successives, *Acta Mathematica*, **99** (1958), S. 33–51.
[5] G. FREUD, Über die starke $(C, 1)$-Summierbarkeit von orthogonalen Polynomreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), S. 83–88.
[6] G. FREUD, Über orthogonale Polynome, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), S. 291–298.
[7] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Государственное издательство технико-теоретической литературы (Москва—Ленинград, 1949).
[8] С. Б. Стечкин, О приближении периодических функций суммами Феиера, Труды Мат. инст. им. Стеклова, **62** (1961), S. 48—61.
[9] G. SZEGŐ, *Orthogonal Polynomials*, 2 Aufl. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., Band 23, 1959.
[10] K. TANDORI, Über die Cesarosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), S. 73–81.

ÜBER HALBRINGE UND HALBKÖRPER. II

Von

H. J. WEINERT (Potsdam, DDR)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

Einleitung

In dem vorliegenden zweiten Teil (vgl. [8]) wenden wir uns der Konstruktion von Quotientenhalbringen und von Differenzenhalbringen und der Untersuchung ihrer gegenseitigen Beziehungen zu. Dabei lassen sich diese Konstruktionen selbst insofern zusammenfassen, als sie zunächst nur für die multiplikative bzw. additive Halbgruppe eines vorgegebenen Halbringes $\mathfrak{R}$ durchgeführt werden, was ja bis auf die Schreibweise auf dasselbe hinausläuft, und nachträglich erst die zweite Rechenoperation einbezogen wird, indem man ihre Fortsetzbarkeit von $\mathfrak{R}$ auf die bereits konstruierte Quotienten- bzw. Differenzenstruktur von $\mathfrak{R}$ diskutiert.

Für das Erste verwenden wir, daß eine von ASANO ([1], [2]) für die Existenz gewisser Rechtsquotientenringe angegebene notwendige und hinreichende Bedingung die gleiche Rolle auch schon für die Konstruktion von Rechtsquotientenhalbgruppen spielt (vgl. § 4, Satz 1). Dieses Ergebnis stammt bereits von MURATA [6], doch geben wir hier einen Beweis, der sich auf eine Verallgemeinerung einer von MALCEV in [4] angegebenen notwendigen Bedingung für die Einbettbarkeit einer regulären Halbgruppe in eine Gruppe stützt, was auch den rechentechnischen Aufwand merklich verringert. Weiterhin untersuchen wir, welche verschiedenen „Nennerhalbgruppen" $\mathfrak{n}$ einer Halbgruppe $\mathfrak{R}$ zur gleichen Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ führen (§ 4, Satz 2) und zeigen, daß mit einer Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ stets eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte maximale Rechtsquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{R}$ existiert (§. 4, Satz 3).

Geht man nun von einem Halbring $\mathfrak{R}$ aus, so läßt sich die Addition von $\mathfrak{R}$ stets auf eine und nur eine Weise zu einer Addition in jeder Rechtsquotientenhalbgruppe der multiplikativen Halbgruppe von $\mathfrak{R}$ fortsetzen, so daß wir alle bisherigen Aussagen für Quotientenhalbringe übernehmen können (§ 5, Satz). Auch übertragen sich die wichtigsten Eigenschaften eines Halbringes $\mathfrak{R}$ (wie Kommutativität, Regularität, Ringeigenschaft) auf jeden Rechtsquotientenhalbring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$; jedoch kann $\mathfrak{R}$ ein Nullelement haben, ohne daß dies für $\mathfrak{S}$ zutrifft. Nach Klärung dieser Verhältnisse (Zusatz 1) können in Zusatz 2 in drei insgesamt möglichen Fällen Kriterien für die Existenz eines Rechtsquotientenhalbkörpers zu einem Halbring $\mathfrak{R}$ angegeben werden.

Gestützt auf die nun additiv zu lesenden Sätze über Halbgruppen aus § 4 werden in § 6 Differenzenhalbringe untersucht. Man gewinnt einen Überblick über die Strukturverhältnisse möglicher Rechtsdifferenzenhalbringe $\mathfrak{T}$ eines Halbringes $\mathfrak{R}$: So kann man sich stets auf solche Subtrahendenmengen beschränken, welche zweiseitige Ideale von $\mathfrak{R}$ sind, und die Multiplikation in $\mathfrak{T}$ läßt sich überraschend einfach auf Rechnungen in $\mathfrak{R}$ zurückführen. Will man jedoch umgekehrt entsprechende Rechtsdifferenzenhalbmoduln $\mathfrak{T}$ des (als Halbmodul aufgefaßten) Halbringes $\mathfrak{R}$

durch Fortsetzung der Multiplikation zu Rechtsdifferenzenhalbringen machen, so sind zwei weitere notwendige und hinreichende Bedingungen zu berücksichtigen (vgl. § 6, Satz). Letztere sind jedoch in wichtigen Fällen, insbesondere für additiv reguläre oder kommutative Halbringe, von selbst erfüllt, was auch wieder eine Satz 3 von § 4 entsprechende Maximalitätsaussage und ein einfaches Kriterium für die Existenz eines Rechtsdifferenzenringes zu einem Halbring $\mathfrak{R}$ gestattet (Zusätze 1 und 2).

Von den wichtigsten Eigenschaften eines Halbringes $\mathfrak{R}$ übertragen sich dagegen (auch im additiv und multiplikativ kommutativen Falle, ja sogar bei geordneten Halbringen) multiplikative Regularität bzw. Halbkörpereigenschaft im allgemeinen nicht auf Rechtsdifferenzenhalbringe von $\mathfrak{R}$. In den Zusätzen 3 und 4 geben wir je eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Übertragbarkeit dieser Eigenschaften an; insbesondere ist für sie die in § 1 eigenführte Eigenschaft $(*)$ hinreichend, aber nicht notwendig, womit auch ein in RÉDEI [7] (§ 48, S. 167) gestelltes Problem gelöst ist.

Schon aus letzterem ergibt sich, daß eine Nacheinanderanwendung von Quotienten- und Differenzenbildung in der einen und anderen Reihenfolge nicht immer zum gleichen Ergebnis führt. In § 7, der diesen Fragen gewidmet ist, wird zunächst überhaupt ein hinreichendes (und mit gewissen Einschränkungen auch notwendiges) Kriterium dafür angegeben, daß zwei bestimmte Erweiterungen dieser Art auch nacheinander und damit innerhalb eines gemeinsamen Oberhalbringes durchgeführt werden können (Satz 1). Für den Satz 2, der diese Überlegungen auf die größtmögliche Wahl beider Schritte überträgt, beschränken wir uns auf Halbringe mit kommutativer Addition. Sie liegt übrigens stets vor, wenn zu einem Halbring $\mathfrak{R}$ sowohl ein Rechtsquotientenhalbkörper als auch ein Rechtsdifferenzenring existieren, ein Fall, für den wir unsere Ergebnisse nochmals in Satz 3 zusammenfassen.

§ 4. Konstruktion von Quotientenhalbgruppen

Wir beweisen erneut den folgenden Satz von MURATA ([6]) über die Einbettung einer Halbgruppe $\mathfrak{R}$ in eine Oberhalbgruppe $\mathfrak{S}$, in der vorgegebene reguläre Elemente von $\mathfrak{R}$ Inverse besitzen und deren Elemente Rechtsquotienten von Elementen aus $\mathfrak{R}$ sind.

SATZ 1. *Es sei $\mathfrak{R}$ eine multiplikative Halbgruppe und $\mathfrak{n}$ eine Unterhalbgruppe (zweiseitig) regulärer Elemente aus $\mathfrak{R}$. Existieren dann zu je zwei Elementen $a \in \mathfrak{R}$ und $\alpha \in \mathfrak{n}$ zwei Elemente $l \in \mathfrak{R}$ und $\lambda \in \mathfrak{n}$, die die Beziehung*

$$a\lambda = \alpha l$$

erfüllen, so gibt es eine Oberhalbgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ mit Einselement,[1] *in der jedes $\alpha \in \mathfrak{n}$ ein Inverses $\alpha^{-1} \in \mathfrak{S}$ hat und deren Elemente in der Form $a\alpha^{-1}$ mit $a \in \mathfrak{R}$, $\alpha \in \mathfrak{n}$ dargestellt werden können, und umgekehrt. Im Falle der Existenz ist dann die Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{n}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

[1] Hat $\mathfrak{R}$ ebenfalls ein Einselement, so fällt dies wegen der Existenz regulärer Elemente mit dem von $\mathfrak{S}$ zusammen.

BEWEIS. Das angegebene Kriterium, welches wir im folgenden auch mit $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ zitieren werden, ist jedenfalls notwendig. Mit $a \in \mathfrak{N}$ und $\alpha \in \mathfrak{n}$ ist nämlich $\alpha^{-1}a$ ein Element aus $\mathfrak{S}$, so daß es Elemente $l \in \mathfrak{N}$ und $\lambda \in \mathfrak{n}$ gibt, für die $\alpha^{-1}a = l\lambda^{-1}$ und damit $a\lambda = \alpha l$ gilt.

Als nächstes folgern wir aus dem Kriterium $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ eine Regel, deren Notwendigkeit für die Existenz von $\mathfrak{S}$ man auch sofort unmittelbar einsieht.

REGEL Z. *Sind a, b, c, y, u, v Elemente von $\mathfrak{N}$, δ und ξ Elemente von $\mathfrak{n}$, so folgt aus den drei angegebenen Relationen stets auch die Gültigkeit der vierten, unterstrichenen Gleichung:*[2]

$$a\xi = by \quad c\xi = \delta y$$

$$\underline{au = bv} \quad cu = \delta v.$$

Zum Beweis wählen wir $l \in \mathfrak{N}$, $\lambda \in \mathfrak{n}$ mit $u\lambda = \xi l$. Aus

$$\delta y l = c\xi l = cu\lambda = \delta v\lambda$$

entnehmen wir $yl = v\lambda$ und erhalten damit gemäß

$$au\lambda = a\xi l = byl = bv\lambda$$

wie behauptet $au = bv$.

Schließlich läßt sich das Rechnen in $\mathfrak{S}$ wie folgt auf das Rechnen mit Elementen aus $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{n}$ zurückführen:[3]

I. Es ist $a\alpha^{-1} = b\beta^{-1}$ genau dann, wenn Elemente $l \in \mathfrak{N}$, $\lambda \in \mathfrak{n}$ existieren mit $a\lambda = bl$ und $\alpha\lambda = \beta l$.

II. $a\alpha^{-1} \cdot b\beta^{-1} = at(\beta\tau)^{-1}$, wobei die Elemente $t \in \mathfrak{N}$, $\tau \in \mathfrak{n}$ die Beziehung $b\tau = \alpha t$ erfüllen.

Wegen $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ gibt es nämlich bei I solche Elemente mit $\alpha\lambda = \beta l$, woraus durch Multiplikation mit $a\alpha^{-1} = b\beta^{-1}$ auch $a\lambda = bl$ folgt, während sich umgekehrt aus $a = bl\lambda^{-1} = b\beta^{-1}\alpha$ wieder $a\alpha^{-1} = b\beta^{-1}$ ergibt. Entsprechend beruht II auf $\alpha^{-1}b = t\tau^{-1}$.

Wir entnehmen daraus, daß $\mathfrak{S}$ im Falle der Existenz bis auf Isomorphie durch $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{n}$ eindeutig bestimmt ist, und werden nun eine solche Oberhalbgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{N}$ unter Beachtung von I und II konstruieren. Dazu definieren wir in der Menge $\mathfrak{N} \times \mathfrak{n}$ aller Paare (a, α) die folgende Äquivalenzrelation:

I. Es sei $(a, \alpha) \sim (b, \beta)$ genau dann, wenn Elemente $l \in \mathfrak{N}$, $\lambda \in \mathfrak{n}$ existieren, die $a\lambda = bl$ und $\alpha\lambda = \beta l$ erfüllen.

Wir vermerken sogleich, daß damit nach der Regel Z sogar $au = bv$ für beliebige Elemente u und v aus $\mathfrak{N}$ mit $\alpha u = \beta v$ gilt. Insbesondere folgt aus $\alpha l' = \beta\lambda'$ dann also $al' = b\lambda'$, so daß unsere ersichtlich reflexive Relation auch symmetrisch ist. Gilt schließlich noch $(b, \beta) \sim (c, \gamma)$, so zieht die wegen $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ existierende Relation $\alpha\lambda\varkappa = \beta l\varkappa = \gamma k$ entsprechend auch $a\lambda\varkappa = bl\varkappa = ck$ nach sich, was $(a, \alpha) \sim (c, \gamma)$ und damit die Transitivität zeigt.

[2] Mit $\mathfrak{N} = \mathfrak{n}$ erhält man die von MALCEV in [4] angegebene notwendige „Bedingung Z" für die Einbettung einer regulären Halbgruppe in eine Gruppe.

[3] Im kommutativen Falle (und auch schon dann, wenn $\mathfrak{n}$ im Zentrum von $\mathfrak{N}$ liegt) hat man mit $l = a$, $\lambda = \beta$ (bei I) bzw. $t = b$, $\tau = \alpha$ (bei II) die üblichen Relationen.

Nun sei $\overline{\mathfrak{S}}$ die Menge der durch I bestimmten Klassen von $\mathfrak{N}\times\mathfrak{n}$, in der wir durch

II. $\quad (a,\alpha)(b,\beta)=(at,\beta\tau) \quad \text{mit} \quad t\in\mathfrak{N},\tau\in\mathfrak{n} \quad \text{und} \quad b\tau=\alpha t$

eine Multiplikation definieren. In der Tat ist diese Vorschrift sowohl von der Wahl von t und τ als auch von der Wahl der Repräsentanten (a,α) und (b,β) unabhängig; wir können beide Beweise zusammenfassen, indem wir für $(a,\alpha)=(a',\alpha')$, $(b,\beta)=(b',\beta')$ und

$$(a',\alpha')\,(b',\beta')=(a't',\beta'\tau') \quad \text{mit} \quad b'\tau'=\alpha't'$$

$(at,\beta\tau)=(a't',\beta'\tau')$ zeigen. Dazu lösen wir $\beta\tau\lambda=\beta'\tau'l$ nach $Q_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$, erhalten (unter Verwendung der Bemerkung nach I) daraus $b\tau\lambda=b'\tau'l$, also $\alpha t\lambda=\alpha't'l$ und damit wieder $at\lambda=a't'l$, was den Beweis bereits vollendet.

Ferner ist die in $\overline{\mathfrak{S}}$ eingeführte Multiplikation assoziativ und damit $\overline{\mathfrak{S}}$ eine Halbgruppe, was man wohl am einfachsten durch geeignete Wahl der bei den Produktbildungen auftretenden Hilfselemente nachweist:

$$\begin{aligned}
\big[(a,\alpha)\,(b,\beta)\big]\,(c,\gamma) &= (at,\beta\tau)\,(c,\gamma) && \text{mit} \quad b\cdot\tau=\alpha\cdot t\\
&= (ats\varrho,\gamma\sigma\varrho) && \text{mit} \quad c\cdot\sigma\varrho=\beta\tau\cdot s\varrho\\
(a,\alpha)\big[(b,\beta)\,(c,\gamma)\big] &= (a,\alpha)\,(b\tau s,\gamma\sigma) && \text{mit} \quad c\cdot\sigma=\beta\cdot\tau s\\
&= (ats\varrho,\gamma\sigma\varrho) && \text{mit} \quad b\tau s\cdot\varrho=\alpha\cdot ts\varrho.
\end{aligned}$$

Weiterhin bilden genau die Paare $(a\gamma,\gamma)$ mit festem $a\in\mathfrak{N}$ für alle $\gamma\in\mathfrak{n}$ jeweils eine Klasse in $\mathfrak{N}\times\mathfrak{n}$, also ein Element von $\overline{\mathfrak{S}}$. Vermöge der Zuordnung

$$a\to(a\gamma,\gamma) \quad \text{für alle} \quad a\in\mathfrak{N}$$

wird also $\mathfrak{N}$ eineindeutig und wegen

$$(a\gamma,\gamma)\,(b\gamma,\gamma)=(a\gamma t,\gamma\tau)=(ab\gamma\tau,\gamma\tau) \quad \text{mit} \quad b\gamma\cdot\tau=\gamma\cdot t$$

relationsreu auf die Menge dieser Elemente von $\overline{\mathfrak{S}}$ abgebildet. Das für beliebige Strukturen gültige Einbettungsverfahren[4] liefert dann eine zu $\overline{\mathfrak{S}}$ isomorphe Oberhalbgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{N}$ mit dem Einselement (γ,γ) und dem jeweils zu (α,β) inversen Element (β,α). Schließlich kann jedes Element $(a,\alpha)\in\mathfrak{S}$ gemäß

$$(a,\alpha)=(a\alpha,\alpha)\,(\alpha,\alpha\alpha)=(a\alpha,\alpha)\,(\alpha\alpha,\alpha)^{-1}=a\cdot\alpha^{-1}$$

als Rechtsquotient geschrieben werden, womit unser Satz bewiesen ist.

In Ergänzung zu Satz 1 sei bemerkt, daß natürlich mit $\mathfrak{N}$ auch $\mathfrak{S}$ kommutativ ist. Weiterhin ist ein in $\mathfrak{N}$ linksreguläres Element von $\mathfrak{N}$ auch in $\mathfrak{S}$ linksregulär, während diese Aussage für rechtsreguläre Elemente von $\mathfrak{N}$ nur dann allgemein gilt, wenn die Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}$ auch Linksquotientenhalbgruppe ist (vgl. weiter unten). Dagegen kann man leicht zeigen, daß mit $\mathfrak{N}$ auch $\mathfrak{S}$ links- bzw. rechtsregulär ist.

Während $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n}_1)$ durch $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{n}_1$ eindeutig bestimmt ist, kann es durchaus verschiedene Halbgruppen $\mathfrak{n}_i\subseteq\mathfrak{N}$ geben, die zur gleichen Halbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n}_i)$ führen. Zunächst ist klar, daß insbesondere die Menge $\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{N}$ aller in $\mathfrak{S}$ invertierbaren

[4] Vgl. etwa RÉDEI [7], § 35.

Elemente von $\mathfrak{R}$ eine Halbgruppe bildet, für die $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ und $\mathfrak{n}\supseteq\mathfrak{n}_i$ gilt. Wir zeigen:

SATZ 2. *Unter allen Halbgruppen $\mathfrak{n}_i$ regulärer Elemente von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_i)$ ist die maximale Halbgruppe $\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{R}$ aller in $\mathfrak{S}$ invertierbaren Elemente dadurch ausgezeichnet, daß sie neben $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ noch folgende Bedingung erfüllt:*

Aus $ab\in\mathfrak{n}$ für beliebige reguläre Elemente a und b von $\mathfrak{R}$ folgt $a\in\mathfrak{n}$ und $b\in\mathfrak{n}$.

Weiterhin kann $\mathfrak{n}$ aus irgendeiner der Halbgruppen $\mathfrak{n}_i$ durch Hinzunahme aller regulären Elemente a und b von $\mathfrak{R}$ mit $ab\in\mathfrak{n}_i$ gewonnen werden.

Schließlich gilt $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_1)=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_2)$ genau dann, wenn zu jedem $\alpha_1\in\mathfrak{n}_1$ Elemente $\xi_2\in\mathfrak{n}_2$ und $x\in\mathfrak{R}$ mit $\xi_2=\alpha_1 x$ und zu jedem $\alpha_2\in\mathfrak{n}_2$ Elemente $\xi_1\in\mathfrak{n}_1$ und $x\in\mathfrak{R}$ mit $\xi_1=\alpha_2 x$ existieren.

BEWEIS. Wir zeigen als erstes, daß mit $ab=\tau\in\mathfrak{n}_i$ auch a und b Inverse in $\mathfrak{S}$ haben. Jedenfalls gilt $a\cdot b\tau^{-1}=1$, so daß $b\tau^{-1}$ Rechtinverses von a ist. Aus $a\cdot b\tau^{-1}\cdot a=a$ und der Linksregularität von a in $\mathfrak{S}$ (vgl. oben) folgt aber $b\tau^{-1}\cdot a=1$, womit $a^{-1}=b\tau^{-1}$ und daher auch $b^{-1}=\tau^{-1}a$ folgt. Hat umgekehrt ein Element $c\in\mathfrak{R}$ ein Inverses $c^{-1}\in\mathfrak{S}$, so gilt $c^{-1}=r\varrho^{-1}$ mit $cr=\varrho\in\mathfrak{n}_i$. Genau die regulären Elemente a und b von $\mathfrak{R}$ mit $ab\in\mathfrak{n}_i$ müssen also zu $\mathfrak{n}_i$ hinzugenommen werden,[5] um zu der Halbgruppe der in $\mathfrak{S}$ invertierbaren Elemente $\mathfrak{n}$ zu gelangen, die somit ersichtlich auf die behauptete Weise gekennzeichnet ist.

Für die letzte Aussage genügt die Feststellung, daß damit jedes $\alpha_1^{-1}\in\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_1)$ als $\alpha_1^{-1}=x\xi_2^{-1}$ in $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_2)$ enthalten ist und umgekehrt.

Nachdem wir durch Satz 2 einen gewissen Überblick über diejenigen Halbgruppen $\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{R}$ erhalten haben, die zur gleichen Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ führen, wenden wir uns nun einer Aussage über die verschiedenen möglichen Oberstrukturen von $\mathfrak{R}$ dieser Art zu:

SATZ 3. *Existiert zu einer Halbgruppe $\mathfrak{R}$ überhaupt eine Rechtsquotientenhalbgruppe, so gibt es auch eine maximale Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R})$ von $\mathfrak{R}$, die alle anderen als Unterstrukturen enthält und bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.*

BEWEIS. Es sei $\{\mathfrak{n}_i\}$ eine beliebige Menge von Unterhalbgruppen $\mathfrak{n}_i$ von $\mathfrak{R}$, die aus multiplikativ regulären Elementen bestehen und $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_i)$ erfüllen. Wir zeigen, daß dann auch die von der Vereinigungsmenge $\bigcup\mathfrak{n}_i$ der $\mathfrak{n}_i$ erzeugte Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}$ der Bedingung $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ genügt. Nun ist jedes Element $\alpha\in\mathfrak{n}$ ein endliches Produkt $\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n$ von Elementen aus $\bigcup\mathfrak{n}_i$. Wir schließen durch vollständige Induktion nach n und nehmen an, daß die Bedingung $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ für alle $\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\in\mathfrak{n}$ gilt, also für beliebiges $a\in\mathfrak{R}$

$$a\cdot\lambda=\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\cdot l \quad \text{mit} \quad \lambda\in\mathfrak{n}, \quad l\in\mathfrak{R}$$

erfüllt ist. Da α_n wenigstens in einer der Unterhalbgruppen $\mathfrak{n}_{i_0}$ liegt, folgt weiter aus $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_{i_0})$

$$l\cdot\varkappa=\alpha_n\cdot k \quad \text{mit} \quad \varkappa\in\mathfrak{n}_{i_0}, \quad k\in\mathfrak{R},$$

[5] Übrigens kann man auch unabhängig von $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_i)$ zeigen, daß auf diese Weise aus einer Halbgruppe $\mathfrak{n}_i$ mit $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_i)$ eine Halbgruppe $\mathfrak{n}$ mit $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ und der in Satz 2 angegebenen Bedingung entsteht.

woraus sich mit

$$a\cdot\lambda\varkappa=\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\cdot k \quad \text{mit} \quad \lambda\varkappa\in\mathfrak{n}, \quad k\in\mathfrak{N}$$

die Bedingung $Q_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ für alle $\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\in\mathfrak{n}$ ergibt.

Natürlich gelten die entsprechenden Aussagen für Linksquotientenhalbgruppen $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ mit der Bedingung $Q_l(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$, die besagt, daß es zu je zwei Elementen $a\in\mathfrak{N}$ und $\alpha\in\mathfrak{n}$ Elemente $l'\in\mathfrak{N}$ und $\lambda'\in\mathfrak{n}$ gibt, die $\lambda' a=l'\alpha$ erfüllen. Wir zeigen jedoch sogleich durch ein Beispiel, daß es Halbgruppen gibt, für die (etwa) Rechts-, aber keine Linksquotientenhalbgruppen existieren. Dazu sei $\mathfrak{N}$ die durch die Gleichungen $ca=b$, $cb=a$ definierte Halbgruppe, deren Elemente also eindeutig in der Form

$$a^{i_1}b^{j_1}\ldots a^{i_r}b^{j_r}c^k$$

(mit entsprechenden Verabredungen über die auftretenden nichtnegativen ganzzahligen Exponenten) angegeben werden können. Dann sind gerade die Potenzen von c die regulären Elemente von $\mathfrak{N}$, die eine Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}$ mit $Q_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ bilden. Dagegen ist $\lambda' a=l'c^k$ für jedes $k\geqq 1$ unerfüllbar, da für jedes $\lambda'=c^{k'}$ stets $\lambda' a=a$ oder $\lambda' a=b$ gilt, so daß es keine Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}'$ von $\mathfrak{n}$ mit $Q_l(\mathfrak{N},\mathfrak{n}')$ gibt.

Existieren jedoch zu $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{n}$ sowohl eine Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ als auch eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{T}=\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$, so sind diese

$$\text{vermöge} \quad a\alpha^{-1}\to\alpha^{-1}a \quad \text{invers-},$$

$$\text{vermöge} \quad a\alpha^{-1}\to\lambda'^{-1}l' \quad \text{direkt-}$$

isomorph, und wegen $a\alpha^{-1}=\lambda'^{-1}l'$ ist die Rechtsquotientenhalbgruppe auch Linksquotientenhalbgruppe und umgekehrt. Da offensichtlich $Q_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ und $Q_l(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ aus der Gültigkeit der Komplexrelationen $a\mathfrak{n}=\mathfrak{n}a$ für alle $a\in\mathfrak{N}$ (nicht aber umgekehrt) folgen, ist diese letztere Bedingung für die Existenz von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ hinreichend, aber keineswegs notwendig.[6] Sie ist natürlich stets erfüllt, wenn $\mathfrak{n}$ im Zentrum von $\mathfrak{N}$ liegt.

Schließlich ist (insbesondere für unsere nachfolgenden Anwendungen auf Halbringe) noch die Bemerkung vorteilhaft, daß man zwei und damit endlich viele Elemente der Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ gemäß

$$a\alpha^{-1}=a\sigma(\alpha\sigma)^{-1}$$

$$b\beta^{-1}=b\beta^{-1}(\beta s)(\alpha\sigma)^{-1}=bs(\alpha\sigma)^{-1} \quad \text{mit} \quad \alpha\sigma=\beta s$$

mit „gleichem Nenner" $\alpha\sigma$ schreiben kann.

§ 5. Quotientenhalbringe und Quotientenhalbkörper

SATZ. *Es sei $\mathfrak{N}$ ein Halbring und $\mathfrak{n}$ eine multiplikative Unterhalbgruppe multiplikativ regulärer Elemente aus $\mathfrak{N}$. Dann ist das in § 4 angegebene Kriterium $Q_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ notwendig und hinreichend für die Existenz eines Oberhalbringes $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{N}$ mit Einselement, in dem jedes $\alpha\in\mathfrak{n}$ ein Inverses $\alpha^{-1}\in\mathfrak{S}$ besitzt und dessen Elemente als Rechtsquotienten $a\alpha^{-1}$ mit $a\in\mathfrak{N}$, $\alpha\in\mathfrak{n}$ geschrieben werden können. Im Falle der Existenz ist*

[6] Mit $\mathfrak{n}=\mathfrak{N}$ findet sich $a\mathfrak{N}=\mathfrak{N}a$ für alle $a\in\mathfrak{N}$ in MALCEV [5] als hinreichende Bedingung für die Einbettung einer regulären Halbgruppe in eine Gruppe.

der Rechtsquotientenhalbring $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ *durch* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{n}$ *bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, und es gibt dann einen eindeutig bstimmten maximalen Rechtsquotientenhalbring* $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R})$.

Existiert neben $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ *entsprechend ein Linksquotientenhalbring* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$, *so ist dieser auch Rechtsquotientenhalbring und umgekehrt.*[7]

BEWEIS. In Ergänzung zu Satz 1 von § 4 zeigen wir: Ist $\mathfrak{S}$ ein solcher Oberhalbring von $\mathfrak{R}$, so läßt sich die Addition in $\mathfrak{S}$ auf Operationen mit Elementen aus $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{n}$ zurückführen:

III. $a\alpha^{-1} + b\beta^{-1} = (a\sigma + bs)(\alpha\sigma)^{-1}$, wobei die Elemente $s \in \mathfrak{R}$ und $\sigma \in \mathfrak{n}$ die Beziehung $\alpha\sigma = \beta s$ erfüllen.

Damit ist $\mathfrak{S}$ auch als Halbring bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Ist umgekehrt $\mathfrak{R}$ ein Halbring, der $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ erfüllt, und $\mathfrak{S}$ die bereits konstruierte Quotientenhalbgruppe der Halbgruppe $\mathfrak{R}$, so definieren wir durch III mit Hilfe der Addition in $\mathfrak{R}$ eine Addition in $\mathfrak{S}$. Zum Beweis der Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl von s und σ sowie von der Schreibweise beider Summanden sei $a\alpha^{-1} = a'\alpha'^{-1}$, $b\beta^{-1} = b'\beta'^{-1}$ und

$$a'\alpha'^{-1} + b'\beta'^{-1} = (a'\sigma' + b's')(\alpha'\sigma')^{-1} \quad \text{mit} \quad \alpha'\sigma' = \beta's'.$$

Wir lösen nun $\alpha\sigma\lambda = \alpha'\sigma' l$ nach $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$, woraus einerseits $a\sigma\lambda = a'\sigma' l$, andererseits $\beta s\lambda = \beta' s' l$ und daraus wieder $bs\lambda = b's' l$ folgt. Wegen $\alpha\sigma\lambda = \alpha'\sigma' l$ und $(a\sigma + bs)\lambda = (a'\sigma' + b's')l$ gilt damit

$$(a\sigma + bs)(\alpha\sigma)^{-1} = (a'\sigma' + b's')(\alpha'\sigma')^{-1}.$$

Auch sieht man leicht, daß die Addition von $a = a\gamma\gamma^{-1}$ und $b = b\gamma\gamma^{-1}$ nach III mit der Addition von a und b in $\mathfrak{R}$ übereinstimmt (vgl. auch das Nachstehende).

Bei der Nachrechnung der Gültigkeit des assoziativen und distributiven Gesetzes kann man erhebliche Mühe einsparen, wenn man alle bzw. einige der auftretenden Elemente gemäß der obigen Bemerkung mit „gleichem Nenner" schreibt und nachprüft, daß dann gemäß III und I

$$a\alpha^{-1} + b\alpha^{-1} = (a + b)\alpha^{-1}$$

gilt. So ergibt sich z. B. die zweite Relation des distributiven Gesetzes gemäß:

$$\begin{aligned} (a\alpha^{-1} + b\alpha^{-1})c\gamma^{-1} &= (a+b)\alpha^{-1}c\gamma^{-1} \\ &= (a+b)t(\gamma\tau)^{-1} \qquad \text{mit} \quad c\tau = \alpha t \\ a\alpha^{-1}c\gamma^{-1} + b\alpha^{-1}c\gamma^{-1} &= at(\gamma\tau)^{-1} + bt(\gamma\tau)^{-1} \quad \text{mit} \quad c\tau = \alpha t \\ &= (at + bt)(\gamma\tau)^{-1}. \end{aligned}$$

Die übrigen Behauptungen unseres Satzes folgen nun aus den Überlegungen in § 4 über Quotientenhalbgruppen.

Wie man leicht nachprüft, übertragen sich jeweils von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ die Kommutativität und Links- bzw. Rechtsregularität bezüglich beider Operationen, sowie die Eigenschaft $(*)$ (vgl. § 1). Weiterhin gilt:

[7] Wir verwenden die gleichen Symbole $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$, $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R})$ und $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ wie in § 4 nun für die entsprechenden Halbringe, während $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ bzw. $Q_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ ohnehin die gleiche Bedeutung behalten.

ZUSATZ 1. *Hat* $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ *ein Nullelement* $x\xi^{-1}$, *so hat auch* $\mathfrak{N}$ *ein Nullelement* o, *und es ist* $x=o$ *und* $x\xi^{-1}=o$; *umgekehrt liefert dagegen das Nullelement* o *von* $\mathfrak{N}$ *das Nullelement von* $\mathfrak{S}$ *(für welches dann nach der ersten Behauptung* $x\xi^{-1}=o\xi^{-1}=o$ *gelten muß) dann und nur dann, wenn* o *alle Elemente aus* $\mathfrak{n}$ *von links annulliert.*[8]

Insbesondere ist also ein annullierendes Nullelement o *von* $\mathfrak{N}$ *auch annullierendes Nullelement von* $\mathfrak{S}$.

Mit $\mathfrak{N}$ *ist schließlich auch* $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ *ein Ring.*[9]

BEWEIS. Ist $x\xi^{-1}$ Nullelement von $\mathfrak{S}$, so folgt aus

$$a\xi^{-1}+x\xi^{-1}=x\xi^{-1}+a\xi^{-1}=a\xi^{-1}$$

$a+x=x+a=a$ für alle $a\in\mathfrak{N}$, d. h., x ist das Nullelement von $\mathfrak{N}$. Ist umgekehrt o das Nullelement von $\mathfrak{N}$, so ist ein Element $o\xi^{-1}$ (zunächst bei festem ξ) dann und nur dann Nullelement von $\mathfrak{S}$, wenn $o\sigma=o$ für alle $\sigma\in\mathfrak{n}$ gilt (woraus dann auch $o\sigma^{-1}=o$ und insbesondere $o\xi^{-1}=o$ folgt). Aus letzterem ergibt sich nämlich $o\xi^{-1}$ als Nullelement von $\mathfrak{S}$ durch Einsetzen in III.[10] Ist aber $o\xi^{-1}$ Nullelement von $\mathfrak{S}$, so gilt

$$a(\xi\sigma)^{-1}+o\xi^{-1}=o\xi^{-1}+a(\xi\sigma)^{-1}=a(\xi\sigma)^{-1}$$

für alle $a\in\mathfrak{N}$ und alle $\sigma\in\mathfrak{n}$, woraus aber

$$a+o\sigma=o\sigma+a=a$$

und damit $o\sigma=o$ folgt. Die letzte Behauptung erhält man nun aus $a\alpha^{-1}+(-a)\alpha^{-1}=o\alpha^{-1}=o$.

Unter Verwendung von Zusatz 1 ergibt sich weiter, daß die Existenz (vom Nullelement verschiedener) additiver Idempotente für $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ gleichzeitig zutrifft oder nicht. Das gleiche gilt für die Aussage, daß alle Elemente additiv idempotent sind.

Wir nehmen nun an, daß $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$ sogar Halbkörper ist. Hat $\mathfrak{N}$ kein Nullelement, so gilt das gleiche für $\mathfrak{S}$, und man kann $\mathfrak{n}=\mathfrak{N}$ wählen. Hat $\mathfrak{N}$ ein Nullelement o, welches alle anderen Elemente von $\mathfrak{N}$ von links annulliert, so ist o auch Nullelement von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{n}=\mathfrak{N}\setminus\{o\}$ wählbar; abgesehen davon, daß $\mathfrak{N}=\mathfrak{S}$ einer der Sonderfälle der Ordnung 2 ist (vgl. § 2), gilt dann auch $o\mathfrak{N}=\mathfrak{N}o=o$. Hat aber $\mathfrak{N}$ ein Nullelement, welches wenigstens ein $a\neq o$ aus $\mathfrak{N}$ nicht von links annulliert, so hat $\mathfrak{S}$ kein Nullelement. Dann sind alle Elemente von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$ invertiertbar, mithin regulär, also auch das Nullelement o von $\mathfrak{R}$; man kann also $\mathfrak{n}=\mathfrak{N}$ wählen. Wir entnehmen daraus den

ZUSATZ 2. *Es existiert genau in den folgenden drei Fällen ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter Rechtsquotientenhalbkörper* $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N})$ *zu einem multiplikativ regulären*

[8] Insbesondere also stets bei additiver Regularität von $\mathfrak{N}$, vgl. § 1.

[9] „Ringe" mit nichtkommutativer Addition besitzen keine multiplikativ regulären Elemente (vgl. § 2) und kommen mithin für die Quotientenbildung ohnehin nicht in Frage. Übrigens kann $\mathfrak{S}$ ein Ring sein, ohne daß dies für $\mathfrak{N}$ zutrifft.

[10] Im additiv nichtkommutativen Falle beachte man, daß sich III auch in der Form $a\alpha^{-1}+b\beta^{-1}=(as+b\sigma)(\beta\sigma)^{-1}$ mit $\alpha s=\beta\sigma$ ausdrücken läßt.

Halbring $\mathfrak{R}$*:*

a) $\mathfrak{R}$ *hat kein Nullelement und erfüllt* $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$.
b) $\mathfrak{R}$ *hat ein annullierendes Nullelement und erfüllt* $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}\setminus\{o\})$.
c) $\mathfrak{R}$ *hat ein multiplikativ reguläres Nullelement und erfüllt* $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$.[11]

§ 6. Differenzenhalbringe und Differenzenringe

Aus Satz 1 von § 4 entnehmen wir zunächst, daß es zu einem Halbmodul $\mathfrak{R}$ und einem Unterhalbmodul $\mathfrak{m}$ (zweiseitig additiv) regulärer Elemente aus $\mathfrak{R}$ genau dann einen Rechtsdifferenzenhalbmodul $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{R}$ mit Nullelement gibt, in dem jedes Element $\alpha \in \mathfrak{m}$ ein Entgegengesetztes $-\alpha \in \mathfrak{T}$ hat und dessen Elemente in der Form $a-\alpha = a+(-\alpha)$ mit $a \in \mathfrak{R}$ und $\alpha \in \mathfrak{m}$ geschrieben werden können, wenn die folgende Bedingung $D_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ erfüllt ist: *Zu je zwei Elementen* $a \in \mathfrak{R}$ *und* $\alpha \in \mathfrak{m}$ *existieren Elemente* $l \in \mathfrak{R}$ *und* $\lambda \in \mathfrak{m}$ *mit* $a+\lambda = \alpha + l$. Gleichheit und Addition zweier Elemente aus $\mathfrak{T}$ entsprechen dann den (additiv geschriebenen) Regeln I und II aus § 4; insbesondere ist $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{m}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Wir nehmen nun $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{T}$ als Halbringe an, beschränken uns aber auf den Fall, daß das Nullelement $o = \xi + (-\xi)$ von $\mathfrak{T}$ alle Elemente von $\mathfrak{T}$ bei der Multiplikation annulliert.[12] Daraus folgt jedenfalls, daß $\mathfrak{R}$ entweder kein oder ein ebenfalls annullierendes Nullelement hat, da ja das Nullelement von $\mathfrak{R}$ mit dem von $\mathfrak{T}$ wegen der Existenz additiv regulärer Elemente in $\mathfrak{R}$ übereinstimmen muß. Wir können aber sogleich mehr aussagen: Mit jedem Element $\alpha \in \mathfrak{m}$ hat dann auch jedes Element $a\alpha$ bzw. αa mit $a \in \mathfrak{R}$ ein Entgegengesetztes in $\mathfrak{T}$, nämlich $a(-\alpha)$ bzw. $(-\alpha)a$. Wir können uns also von vornherein auf die Betrachtung solcher Halbmoduln beschränken, die auch

$$\mathfrak{R}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \mathfrak{m}\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{m}$$

erfüllen, die also (zweiseitige) Ideale von $\mathfrak{R}$ sind.[13]

Aus der Existenz eines additiv regulären Ideals $\mathfrak{m}$ folgt dann auch die annullierende Eigenschaft eines in $\mathfrak{R}$ vorhandenen Nullelementes o: Es gilt dann nämlich zunächst für $\alpha \in \mathfrak{m}$, daß $o\alpha \in \mathfrak{m}$ reguläres additives Idempotent, mithin $o\alpha = o$ und entsprechend $\alpha o = o$ ist; damit gilt aber das gleiche für oa mit $a \in \mathfrak{R}$ wegen $oa = \alpha oa \in \mathfrak{m}$.

Weiterhin[14] ergeben sich für ein solches Ideal $\mathfrak{m}$ aus

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd \\ &= ac+bc+ad+bd\end{aligned}$$

[11] Ein Beispiel für diesen Fall wurde bereits in § 1 unter 2 erwähnt.

[12] Andernfalls gilt nämlich an Stelle von $(-\alpha)b = -(\alpha b)$ (vgl. § 1) nur noch $(-\alpha)b = -(\alpha b) + ob$ usw., wobei ob additiv idempotent und für Elemente b aus einem gewissen Unterhalbmodul von $\mathfrak{R}$ ungleich o ist. Das macht (auch bei kommutativer Addition) die Multiplikation in $\mathfrak{T}$ so unübersichtlich, daß sich allgemeine Aussagen für $\mathfrak{T}$ wie die folgende nicht mehr aussprechen lassen.

[13] Diese Fassung des Idealbegriffes für Halbringe findet sich in den in [8] zitierten Arbeiten von BOURNE, ZASSENHAUS, ISEKI und STEINFELD.

Übrigens könnten wir uns nach Satz 2 von § 4 sogar auf solche Ideale $\mathfrak{m}$ beschränken, die mit jeder Summe $a+b \in \mathfrak{m}$ regulärer Elemente von $\mathfrak{R}$ auch die Summanden a und b enthalten.

[14] Bei kommutativer Addition kann man sofort auf III schließen und zu dem nachfolgenden Satz übergehen, der dann einfach die Existenz des Differenzenhalbringes $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ zu jedem Ideal $\mathfrak{m}$ additiv regulärer Elemente aus $\mathfrak{R}$ aussagt.

folgende Additionsregeln für Produkte von Elementen aus $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{N}$:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \alpha\delta + bc &= bc + \alpha\delta \\ \alpha d + \beta c &= \beta c + \alpha d \\ a\delta + b\gamma &= b\gamma + a\delta \\ \alpha d + bc + bd &= bc + \alpha d + bd \\ &\vdots \\ ac + a\delta + bc &= ac + bc + a\delta. \end{aligned}$$

Da sich die Vertauschbarkeit $x+\xi = \xi+x$ von Elementen $x \in \mathfrak{N}$, $\xi \in \mathfrak{m}$ in $\mathfrak{N}$ auf die von x und $-\xi$ in $\mathfrak{T}$ überträgt, gilt schließlich für die Multiplikation in $\mathfrak{T}$:

$$\text{III} \qquad \begin{aligned} (a+(-\alpha))(b+(-\beta)) &= ab + a(-\beta) + (-\alpha)b + (-\alpha)(-\beta) \\ &= ab + (-\alpha)b + a(-\beta) + (-\alpha)(-\beta) \\ &= (ab + \alpha\beta) + (-(a\beta + \alpha b)) \\ &= (ab + \alpha\beta) + (-(\alpha b + a\beta)). \end{aligned}$$

Damit ist der Rechtsdifferenzenhalbring $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ bezüglich eines zweiseitigen Ideals $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{N}$ im Falle der Existenz bis auf Isomorphie durch $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{m}$ eindeutig bestimmt.

Um jedoch umgekehrt nachweisen zu können, daß ein Rechtsdifferenzenhalbmodul $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{N}$ bezüglich $\mathfrak{m}$ durch Definition der Multiplikation gemäß III zu einem Oberhalbring von $\mathfrak{N}$ wird, sind bei nichtkommutativer Addition weitere Bedingungen erforderlich. Ist nämlich $\mathfrak{T}$ Halbring, so bedeutet einmal die notwendige Gleichheit der beiden Formen des Produktes III, daß nach der Gleichheitsbeziehung I für $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{m}$ folgendes gilt:

B) Zu beliebigen Elementen $a \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$, $b \in \mathfrak{N}$ und $\beta \in \mathfrak{m}$ gibt es stets Elemente $y \in \mathfrak{N}$ und $\eta \in \mathfrak{m}$ mit

$$a\beta + \alpha b + y = \alpha b + a\beta + \eta \quad \text{und} \quad ab + y = ab + \eta.$$

Gemäß der (additiv geschriebenen) Regel Z folgt dann sogar aus

$$a\beta + \alpha b + u = \alpha b + a\beta + v \quad \text{stets} \quad ab + u = ab + v.$$

Zum zweiten ergibt sich aus der Gültigkeit des distributiven Gesetzes insbesondere, daß in dem Halbring $\mathfrak{T}$

$$ac - a\gamma + tc - t\gamma = (a+t)(c-\gamma) = ac + tc - a\gamma - t\gamma$$

und damit

$$ac - a\gamma + tc = ac + tc - a\gamma$$

und entsprechend

$$ca - \gamma a + ct = ca + ct - \gamma a$$

gelten. Wegen

$$ac - a\gamma + tc + a\gamma = ac + tc,$$

also

$$ac + x - \xi = ac + tc \quad \text{mit} \quad tc + a\gamma + \xi = a\gamma + x$$

zieht die letzte Relation also $ac+tc+\xi = ac+x$ nach sich. Damit haben wir eine aus der Halbringeigenschaft von $\mathfrak{T}$ folgende Aussage für $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{m}$ gefunden, die wir sogleich unter Verwendung der Regel Z fassen:

C) Für beliebige Elemente $a\in\mathfrak{N}$, $t\in\mathfrak{N}$, $c\in\mathfrak{N}$, $\gamma\in\mathfrak{m}$ sowie $u\in\mathfrak{N}$ und $v\in\mathfrak{N}$ folgt aus

$$tc+a\gamma+u = a\gamma+v \quad \text{stets} \quad ac+tc+u = ac+v$$

bzw. aus

$$ct+\gamma a+u = \gamma a+v \quad \text{stets} \quad ca+ct+u = ca+v.$$

Diese für die Halbringeigenschaft des Rechtsdifferenzenhalbmoduls $\mathfrak{T}$ notwendigen Bedingungen werden sich nun auch als hinreichend erweisen, und wir formulieren:

SATZ. *Es sei $\mathfrak{N}$ ein Halbring und $\mathfrak{m}$ ein Ideal additiv regulärer Elemente aus $\mathfrak{N}$. Dann ist für die Existenz eines Oberhalbringes $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{N}$ mit annullierendem Nullelement, in dem jedes Element $\alpha\in\mathfrak{m}$ ein Entgegengesetztes besitzt und dessen Elemente als Rechtsdifferenzen $a-\alpha = a+(-\alpha)$ mit $a\in\mathfrak{N}$, $\alpha\in\mathfrak{m}$ geschrieben werden können, notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{m}$ die Bedingungen $D_r(\mathfrak{N},\mathfrak{m})$, B) und C) erfüllt. Im Falle der Existenz ist der Rechstdifferenzenhalbring $\mathfrak{T}=\mathfrak{D}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{m})$ durch $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{m}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt; existiert auch ein Linksdifferenzenhalbring $\mathfrak{D}_l(\mathfrak{N},\mathfrak{m})$, so ist dieser auch Rechtsdifferenzenhalbring und umgekehrt.*

BEWEIS. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß in dem Rechtsdifferenzenhalbmodul $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{m}$ durch III eine Multiplikation definiert wird, die von der Wahl der Schreibweise der Faktoren unabhängig ist und $\mathfrak{T}$ zu einem Oberhalbring von $\mathfrak{N}$ macht; dabei sind wegen B) beide Formen des Produktes gleichwertig. Ist also $a-\alpha = a'-\alpha'$ mit $a+l = a'+\lambda$, $\alpha+l = \alpha'+\lambda$ und

$$(a'-\alpha')(b-\beta) = (a'b+\alpha'\beta)-(a'\beta+\alpha'b),$$

so folgt die Gleichheit mit $(ab+\alpha\beta)-(a\beta+\alpha b)$ allein unter Verwendung der für jedes Ideal $\mathfrak{m}$ gültigen Regeln A) gemäß

$$\begin{aligned} \alpha\beta+ab+l\beta+lb &= \alpha\beta+l\beta+ab+lb \\ &= \alpha'\beta+\lambda\beta+a'b+\lambda b \\ &= \alpha'\beta+a'b+\lambda\beta+\lambda b, \\ a\beta+\alpha b+l\beta+lb &= a\beta+l\beta+\alpha b+lb \\ &= a'\beta+\lambda\beta+\alpha'b+\lambda b \\ &= a'\beta+\alpha'b+\lambda\beta+\lambda b. \end{aligned}$$

Entsprechend rechnet man mit der zweiten Form des Produktes die Unabhängigkeit von der Schreibweise des rechten Faktors nach. Weiterhin stimmt die Multiplikation von $a=(a+\alpha)-\alpha$ und $b=(b+\beta)-\beta$ nach III mit der Multiplikation in $\mathfrak{N}$ überein gemäß

$$\big((a+\alpha)-\alpha\big)\big((b+\beta)-\beta\big) = (ab+a\beta+\alpha b+\alpha\beta+\alpha\beta)-(a\beta+\alpha\beta+\alpha b+\alpha\beta).$$

Das assoziative Gesetz prüft man in der ersten oder zweiten Form des Produktes durch direkten Ansatz unter Verwendung von A) nach.

Für den Nachweis des distributiven Gesetzes stellen wir zunächst fest, daß aus B) mit

$$t\gamma+\tau c+y = \tau c+t\gamma+\eta \quad \text{und} \quad tc+y = tc+\eta$$

in dem Halbmodul $\mathfrak{T}$ wegen

$$tc+y = tc-\tau c-t\gamma+\tau c+t\gamma+\eta = tc+\eta$$

die Beziehung

$$tc-\tau c-t\gamma = tc-t\gamma-\tau c$$

gilt. Weiterhin liefert C) in $\mathfrak{T}$

$$ac+tc-a\gamma = ac-a\gamma+tc.$$

Unter Verwendung dieser Hilfsmittel, von Regeln unter A) und von Folgerungen aus ihnen beim Auftreten entgegengesetzter Elemente berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\big[(a-\alpha+(b-\beta)\big](c-\gamma) &= \big[(a+t)-(\beta+\tau)\big](c-\gamma) \qquad \text{mit} \quad b+\tau=\alpha+t\\
&= (ac+tc+\beta\gamma+\tau\gamma)-(\beta c+\tau c+a\gamma+t\gamma)\\
&= \beta\gamma+\tau\gamma+ac+tc-a\gamma-t\gamma-\tau c-\beta c\\
&= \beta\gamma+\tau\gamma+ac-a\gamma+tc-t\gamma-\tau c-\beta c\\
&= \beta\gamma+\tau\gamma+ac-a\gamma+tc-\tau c-t\gamma-\beta c\\
&\qquad\qquad \text{mit} \quad tc-\tau c = -\alpha c+bc\\
&= \beta\gamma+ac-a\gamma-\alpha c+bc+\tau\gamma-t\gamma-\beta c\\
&\qquad\qquad \text{mit} \quad \tau\gamma-t\gamma = -b\gamma+\alpha\gamma\\
&= \beta\gamma+ac-a\gamma-\alpha c+bc-b\gamma+\alpha\gamma-\beta c\\
&= ac+\alpha\gamma-a\gamma-\alpha c+bc+\beta\gamma-b\gamma-\beta c\\
&= (ac+\alpha\gamma)-(\alpha c+a\gamma)+(bc+\beta\gamma)-(\beta c-b\gamma)\\
&= (a-\alpha)\,(c-\gamma)+(b-\beta)\,(c-\gamma).
\end{aligned}$$

Entsprechend verfährt man für die zweite Relation des distributiven Gesetzes.

In Ergänzung zu unserem Satz stellen wir noch fest, daß für ein Ideal $\mathfrak{m}$ additiv regulärer Elemente aus $\mathfrak{N}$ mit der Eigenschaft $D_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ die Bedingungen B) und C) in wichtigen Fällen von selbst erfüllt sind. Dies trifft jedenfalls zu, wenn für jedes Element $\alpha d \in \mathfrak{m}\mathfrak{N}$ bzw. $a\delta \in \mathfrak{N}\mathfrak{m}$ und jedes Element $bc \in \mathfrak{N}^2$

$$\alpha d+bc = bc+\alpha d \quad \text{bzw.} \quad a\delta+bc = bc+a\delta$$

gilt, also $\mathfrak{m}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{m}$ im additiven Zentrum von $\mathfrak{N}^2$ liegen. Letzteres wiederum ist erfüllt, wenn $\mathfrak{N}$ additiv regulär ist (da dann ja schon $\mathfrak{N}^2$ additiv kommutativ ist) oder wenn $\mathfrak{m}$ ein multiplikativ (links- oder rechts-) reguläres Element von $\mathfrak{N}$ enthält, woraus nämlich nach Regeln unter A) sogar die Kommutivität der Addition in $\mathfrak{N}$ folgt.

Weiterhin existiert unter den Idealen $\mathfrak{m}_i$ additiv regulärer Elemente von $\mathfrak{N}$, die $D_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{m}_i)$ und die eben angegebene Zentrumsbedingung erfüllen, stets ein eindeutig bestimmtes maximales Ideal dieser Art, was sich im wesentlichen bereits aus Satz 3 von § 4 ergibt. Insbesondere können wir also feststellen:

ZUSATZ 1. *Ist der Halbring* $\mathfrak{R}$ *additiv regulär oder kommutativ, so können im Satz die Bedingungen* B) *und* C) *entfallen, und es gibt mit einem Rechtsdifferenzenhalbring* $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ *stets einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten maximalen Rechtsdifferenzenhalbring* $\mathfrak{D}_r(\mathfrak{R})$.

ZUSATZ 2. *Zu einem additiv regulären Halbring* $\mathfrak{R}$ *existiert genau dann ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter Rechstdifferenzenring* $\mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}) = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$, *wenn die Bedingung* $D_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ *erfüllt ist.*

Wir untersuchen abschließend, welche Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ sich auf $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ übertragen. Zu ihnen gehören jedenfalls die Kommutativität sowie die Links- bzw. Rechtsregularität der Addition und auch die Eigenschaft $(*)$. Letzteres sieht man am schnellsten, wenn man entsprechend der Bemerkung in § 4 beide Elemente mit „gleichen Subtrahenden" $a-\alpha$ und $b-\alpha$ schreibt und für a und b in $\mathfrak{R}$ wegen $a \neq b$ die hier möglichen Fälle (vgl. § 1) durchgeht.

Für die Multiplikation stellen wir zunächst fest, daß mit $\mathfrak{R}$ auch $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ kommutativ ist, und daß ein Links- bzw. Rechtseinselement von $\mathfrak{R}$ auch Links- bzw. Rechtseinselement von $\mathfrak{T}$ ist. Weiterhin gilt: Ist $l \in \mathfrak{R}$ multiplikativ linksregulär (bzw. rechtsregulär) in $\mathfrak{R}$, so auch in $\mathfrak{T}$. Auch hier kommt man mit dem Ansatz

$$l(a-\alpha) = l(b-\alpha)$$

über $la = lb$, also $a = b$ schnell zum Ziel.

Dagegen übertragen sich multiplikative Links- bzw. Rechtsregularität wie auch die Halbkörpereigenschaft von $\mathfrak{R}$ im allgemeinen nicht auf $\mathfrak{T}$. So ist z. B. der Restklassenring $\mathfrak{T} = \mathbf{\Gamma}[x]/(x^2)$ des Polynomringes $\mathbf{\Gamma}[x]$ mit ganzzahligen Koeffizienten Differenzenring des Unterhalbringes $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{T}$, der aus den von $ax+b$ mit $a \geqq 0$, $b > 0$ repräsentierten Restklassen besteht, und $\mathfrak{R}$ ist im Gegensatz zu $\mathfrak{T}$ multiplikativ regulär.[15] Als Beispiel für das letztere betrachten wir im Bereich der reellen Zahlen den Quotientenhalbkörper $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{R})$ des Halbringes $\mathfrak{R} = \mathbf{N}[\pi]$ aller von 0 verschiedenen ganzrationalen Ausdrück in π mit Koeffizienten aus dem Halbring $\mathbf{N}_0$ der natürlichen Zahlen einschließlich der Zahl 0.[16] Während $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}) = \mathbf{\Gamma}[\pi]$ einen Ring und $\mathfrak{Q}(\mathfrak{D}(\mathfrak{R})) = \mathbf{P}(\pi)$ einen Körper liefert, ist

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{Q}(\mathfrak{R})) \subset \mathfrak{Q}(\mathfrak{D}(\mathfrak{R})) = \mathbf{P}(\pi)$$

zwar ein Ring, aber kein Halbkörper, da etwa das Element $1-\pi \in \mathfrak{D}(\mathfrak{S})$ in $\mathfrak{D}(\mathfrak{S})$ kein Inverses hat.

Jedoch können wir für die Übertragung dieser beiden Eigenschaften notwendige und hinreichende Bedingungen angeben. Dazu bemerken wir, daß in jedem dieser Fälle $\mathfrak{m}$ multiplikativ (links- oder rechts) reguläre Elemente enthält und damit die Addition in $\mathfrak{R}$ kommutativ ist, und wenden uns zunächst der ersten Fragestellung zu:

ZUSATZ 3. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein multiplikativ linksregulärer Halbring und* $\mathfrak{m}$ *ein Ideal additiv regulärer Elemente von* $\mathfrak{R}$. *Dann ist der Differenzenhalbring* $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ *genau dann multiplikativ linksregulär, wenn für beliebige Elemente* $a \in \mathfrak{R}$, $b \in \mathfrak{R}$, $c \in \mathfrak{R}$

[15] Wir werden in § 8 sogar zeigen, daß dieser Halbring $\mathfrak{R}$ geordnet werden kann.

[16] Durch die Wahl der transzendenten Zahl π an Stelle einer beliebigen Unbestimmten gilt auch dieses Gegenbeispiel (vgl. RÉDEI [7], § 48) sogar für geordnete Halbkörper.

und $\gamma \in \mathfrak{m}$ *gilt:*

$$\text{Aus} \quad a \neq b \quad \text{und} \quad c \neq \gamma \quad \text{folgt} \quad ca + \gamma b \neq cb + \gamma a.$$

Insbesondere ist diese Bedingung immer erfüllt, wenn $\mathfrak{R}$ *die Eigenschaft* $(*)$ *hat.*[17]

BEWEIS. Ist $\mathfrak{T}$ linksregulär, so folgt aus $a \neq b$ und $c \neq \gamma$ auch $(c-\gamma)a \neq (c-\gamma)b$ und damit $ca + \gamma b \neq cb + \gamma a$. Umgekehrt ergibt sich aus

$$(c-\gamma)(a-\alpha) = (c-\gamma)(b-\alpha) \quad \text{mit} \quad c \neq \gamma$$

sofort $ca + \gamma b = cb + \gamma a$, was nach unserer Bedingung nur für $a = b$, also $a - \alpha = b - \alpha$ möglich ist.

Erfüllt $\mathfrak{R}$ sogar $(*)$, so folgt aus $c + x = \gamma$ bzw. $c = \gamma + x$ mit $x \neq o$ aus $\mathfrak{R}$ und $ca + \gamma b = cb + \gamma a$ leicht $xa = xb$, also $a = b$, sodaß mit $c \neq \gamma$ und $a \neq b$ auch $ca + \gamma b \neq \neq cb + \gamma a$ gilt.

Es sei nun $\mathfrak{R} = \mathfrak{H}$ ein Halbkörper. Hier wissen wir bereits aus § 2, daß mit einem Element $(\neq o)$ in $\mathfrak{H}$ alle Elemente additiv regulär sind, und $\mathfrak{H}$ hat ersichtlich nur ein (nichttriviales) Ideal additiv regulärer Elemente, nämlich $\mathfrak{m} = \mathfrak{H}$. Darüber hinaus formulieren wir sogleich:

ZUSATZ 4. *Ein Halbkörper* $\mathfrak{H}$ *besitzt entweder keinen oder nur einen (nichttrivialen) Differenzenhalbring, nämlich den Differenzenring* $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$, *wobei letzteres genau dann eintritt, wenn* $\mathfrak{H}$ *additiv regulär und damit kommutativ ist. Für* $\mathfrak{R}$ *sind dabei die folgenden Fälle möglich:*

a) $\mathfrak{R}$ *ist multiplikativ nicht regulär;*

b) $\mathfrak{R}$ *ist zwar multiplikativ regulär, aber kein Körper;*

c) $\mathfrak{R}$ *ist Körper.*

Dabei tritt einer der beiden letzten Fälle ein, wenn $\mathfrak{H}$ *die Bedingung aus Zusatz* 3 *(für links- und rechtsseitige Regularität) erfüllt, und für* c) *ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend: Für jedes von dem Einselement* $e \in \mathfrak{H}$ *verschiedene Element* $b \in \mathfrak{H}$ *ist eine der Gleichungen*

$$e + y + bx = x + by, \quad e + bx = x, \quad e + y = by$$

mit Elementen $x \in \mathfrak{H}$, $y \in \mathfrak{H}$ *lösbar.*[18]

Schließlich ist die Eigenschaft $(*)$ *von* $\mathfrak{H}$ *hinreichend, aber nicht notwendig*[19] *dafür, daß der Differenzenring* $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ *sogar Körper ist.*

BEWEIS. Daß der Fall a) eintreten kann, zeigt der Quotientenhalbkörper $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{R})$ des oben angegebenen Unterhalbringes $\mathfrak{R}$ von $\Gamma[x]/(x^2)$; wir kommen auf dieses Beispiel im folgenden Paragraphen ohnehin ausführlicher zu sprechen. Den Fall b) belegt das zweite oben behandelte Beispiel. Für c) läuft die Lösbarkeit der Gleichung $e + y + bx = x + by$ wegen

$$e = x + by - (y + bx) = (e - b)(x - y)$$

[17] Für Rechtsregularität gilt entsprechendes mit $ac + b\gamma \neq bc + a\gamma$.

[18] Im Grunde genügt es, die erste dieser Gleichungen zu betrachten, da wir gemäß § 2 zu jedem Halbkörper ohne Nullelement ein annullierendes Nullelement adjungieren können.

[19] Mit dem diesbezüglichen Gegenbeispiel ist das in der Einleitung erwähnte Problem von RÉDEI gelöst.

gerade darauf hinaus, daß jedes (von o verschiedene) Element $e-b\in\mathfrak{R}$ und damit jedes Element $a-b=a(e-a^{-1}b)\in\mathfrak{R}$ ein Rechtsinverses besitzt; sie ist daher mit der Körpereigenschaft von $\mathfrak{R}$ gleichwertig. Erfüllt $\mathfrak{H}$ sogar $(*)$, so liefert $z+b=e$ bzw. $z+e=b$ mit $z\neq o$ aus $\mathfrak{H}$ sofort $e+bz^{-1}=z^{-1}$ bzw. $e+z^{-1}=bz^{-1}$.

Unseren Beweis beendet ein Beispiel eines Halbkörpers $\mathfrak{H}$, dessen Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ Körper ist, der aber nicht $(*)$ erfüllt. Dazu seien $\alpha_1<\alpha_2$ zwei positive reelle Nullstellen eines irreduziblen Polynoms $f(x)\in\mathbf{\Gamma}[x]$ und $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ die kleinsten reellen Halbkörper, die α_1 bzw. α_2 enthalten, die also aus allen (von 0 verschiedenen) gebrochen-rationalen Ausdrücken in α_1 bzw. α_2 mit Koeffizienten aus $\mathbf{N}_0$ bestehen. Ihre Differenzenringe $\mathfrak{R}_i=\mathfrak{D}(\mathfrak{H}_i)=\mathbf{P}(\alpha_i)$ stimmen mit den angegebenen algebraischen Zahlkörpern überein, doch erfüllen beide Halbkörper $\mathfrak{H}_i$ die Eigenschaft $(*)$ nicht. Ist nämlich a eine rationale Zahl mit $\alpha_1<a<\alpha_2$, so gilt

$$\alpha_1-a\notin\mathfrak{H}_1 \quad\text{und}\quad a-\alpha_2\notin\mathfrak{H}_2,$$

da diese Elemente negativ sind. Wäre nun etwa

$$a-\alpha_1=\frac{g(\alpha_1)}{h(\alpha_1)}\in\mathfrak{H}_1,$$

so folgte im Polynomring $\mathbf{\Gamma}[x]$

$$(a-x)\,h(x)-g(x)=f(x)\,t(x)$$

und damit

$$a-\alpha_2=\frac{g(\alpha_2)}{h(\alpha_2)}\in\mathfrak{H}_2$$

im Widerspruch zu $a-\alpha_2\notin\mathfrak{H}_2$.

Ein weiteres Beispiel dieser Art liefert der Halbkörper $\mathfrak{H}$, der aus allen reellen Zahlen

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$$

besteht, wobei a, b, c und d nichtnegative ganze Zahlen sind, die $a>b\sqrt{2}$, $c>d\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}>0$ erfüllen. Hier ist jedoch etwas Rechenaufwand erforderlich, um die Halbkörpereigenschaft von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}(\mathfrak{H})=\mathbf{P}(\sqrt{2})$ und etwa

$$(3+\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})=-\sqrt{2}\notin\mathfrak{H}$$

$$(3+2\sqrt{2})-(3+\sqrt{2})=\sqrt{2}\notin\mathfrak{H}$$

nachzuprüfen. Wir kommen auf damit zusammenhängende Fragen über Halbkörper nochmals in Teil III zu sprechen.

§ 7. Nacheinanderanwendung von Quotienten- und Differenzenhalbringbildung

Wir geben zunächst ein hinreichendes Kriterium dafür an, daß zwei bestimmte Erweiterungen $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ und $\mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ eines Halbringes $\mathfrak{R}$ durch Quotienten- bzw. Differenzenbildung nacheinander und damit innerhalb eines gemeinsamen Oberhalbringes von $\mathfrak{R}$ durchgeführt werden können und zeigen, daß dabei in beiden

Reihenfolgen vorgegangen werden kann. Die Elemente der Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}$ schreiben wir wieder mit griechischen Buchstaben, während wir die Elemente des Ideals $\mathfrak{m}$ durch Unterstreichung kennzeichnen. Übrigens gilt der nachfolgende Satz auch für $\mathfrak{D}_l(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ statt $\mathfrak{D}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ und damit entsprechend für die beiden übrigen Kombinationen.

SATZ 1. *Es sei $\mathfrak{N}$ ein Halbring, zu dem ein Rechtsquotientenhalbring $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ und ein Rechtsdifferenzenhalbring $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ existieren, wobei die Halbgruppe $\mathfrak{n}$ und das Ideal $\mathfrak{m}$ überdies der Bedingung $Q_r(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ genügen, d. h., daß es zu je zwei Elementen $\underline{a} \in \mathfrak{m}$, $\alpha \in \mathfrak{n}$ Elemente $\underline{l} \in \mathfrak{m}$ und $\lambda \in \mathfrak{n}$ mit $\underline{a}\lambda = \alpha \underline{l}$ gibt.*

Dann existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter kleinster Oberhalbring $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{N}$, in dem alle Elemente von $\mathfrak{n}$ ein Inverses und alle Elemente von $\mathfrak{m}$ ein Entgegengesetztes besitzen. Dabei gilt

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{O} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{m}) & & \mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathfrak{N} & \end{array}$$

d. h., $\mathfrak{O}$ ist sowohl Rechtsquotientenhalbring von $\mathfrak{T}$ (bezüglich der Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}$ multiplikativ regulärer Elemente von $\mathfrak{T}$), als auch Rechtsdifferenzenhalbring von $\mathfrak{S}$ (bezüglich des Ideals $\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}$ additiv regulärer Elemente $\underline{a}\alpha^{-1}$ von $\mathfrak{S}$).

BEWEIS. Da wir bereits im § 6 nachgewiesen haben, daß multiplikativ reguläre Elemente von $\mathfrak{N}$ auch beim Übergang zu $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ multiplikativ regulär bleiben, haben wir für $\mathfrak{n}$ nur noch $Q_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{n})$ zu zeigen. Sind nun $a - \underline{b} \in \mathfrak{T}$ und $\alpha \in \mathfrak{n}$ vorgegeben, so löst man

$$\begin{aligned} a\xi &= \alpha x \quad \text{nach} \quad Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}) \\ \underline{b}\eta &= \alpha \underline{y} \quad \text{nach} \quad Q_r(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \\ \xi\sigma &= \eta s \quad \text{nach} \quad Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}) \end{aligned}$$

und erhält mit $x\sigma - \underline{y}s \in \mathfrak{T}$, $\xi\sigma = \eta s \in \mathfrak{n}$ Elemente, die

$$(a - \underline{b})\,\xi\sigma = \alpha(x\sigma - \underline{y}s)$$

erfüllen. Es gibt also gemäß dem Satz von § 5 einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Rechtsquotientenhalbring $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{n})$, dessen Elemente die Form

$$(x - \underline{y})\,\xi^{-1}$$

mit $x \in \mathfrak{N}$, $\underline{y} \in \mathfrak{m}$ und $\xi \in \mathfrak{n}$ haben.

Damit ist aber $\mathfrak{O} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{n})$ ein Oberhalbring[20] von $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$, in dem jedes Element $\underline{a}\alpha^{-1} \in \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}$ ein Entgegengesetztes hat und dessen Elemente als Rechtsdifferenzen $x\xi^{-1} - \underline{y}\xi^{-1}$ mit $\underline{y}\xi^{-1} \in \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}$ geschrieben werden können. Auch sieht man leicht, daß die Menge $\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}$ Unterhalbmodul, wegen

$$\underline{a}\alpha^{-1}b\beta^{-1} = \underline{a}t(\beta\tau)^{-1} \quad \text{mit} \quad b\tau = \alpha t$$

Rechtsideal und gemäß

$$a\alpha^{-1}\underline{b}\beta^{-1} = a\underline{s}(\beta\sigma)^{-1} \quad \text{mit} \quad \underline{b}\sigma = \alpha\underline{s}$$

[20] Mit annullierendem Nullelement, vgl. Zusatz 1 von § 5.

auch Linksideal von $\mathfrak{S}$ ist, wobei für $s \in \mathfrak{m}$ nochmals von der Voraussetzung $Q_r(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ Gebrauch gemacht wird. Also ist $\mathfrak{D}$ zugleich der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Rechtsdifferenzenhalbring $\mathfrak{D}_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1})$. Schließlich ist $\mathfrak{D}$ in jedem Oberhalbring von $\mathfrak{R}$ enthalten, in dem die Elemente von $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{m}$ Inverse bzw. Entgegengesetzte besitzen.

Wir bemerken noch, daß für die Existenz eines Oberhalbringes $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{D} \supseteq \mathfrak{n}^{-1}$ und $\mathfrak{D} \supseteq -\mathfrak{m}$, dessen Elemente überdies die oben beschriebene Form haben, die Bedingung $Q_r(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ auch notwendig ist, wenn man nur $\mathfrak{m}$ als die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{R}$ wählt, die in $\mathfrak{D}$ ein Entgegengesetztes haben. Auch ist diese Bedingung jedenfalls dann stets erfüllt, wenn $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\mathfrak{m}$ gilt (erst recht also bei kommutativer Multiplikation) und auch dann, wenn $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$ nicht leer ist (erst recht also bei $\mathfrak{m} = \mathfrak{R}$). Letzteres ergibt sich sofort daraus, daß dann die nach $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ gültige Beziehung $a\lambda = \alpha l$ mit $a \in \mathfrak{m}$, $\alpha \in \mathfrak{n}$ und $l \in \mathfrak{R}$, $\lambda \in \mathfrak{n}$ nur mit einem Element $\delta \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$ von rechts multipliziert zu werden braucht.[21]

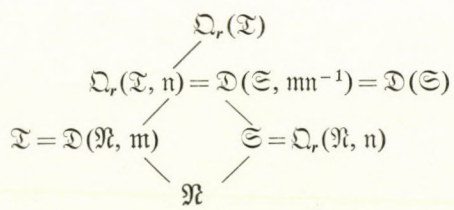
Von besonderem Interesse ist natürlich der Fall, daß in Satz 1 $\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{n}$ oder beide, natürlich unter Beachtung der zusätzlichen Bedingung $Q_r(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, maximal gewählt sind. Das ist (soweit überhaupt die maximale Wahl von $\mathfrak{m}$ gewährleistet ist, also jedenfalls bei kommutativer oder regulärer Addition) weitgehend möglich: Man zeigt dann nämlich ähnlich wie im Beweis von Satz 3 in § 4, daß es zu festem $\mathfrak{n}$ unter allen Idealen $\mathfrak{m}_i$, zu denen Rechtsdifferenzenhalbringe $\mathfrak{D}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{m}_i)$ existieren und die $Q_r(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n})$ erfüllen, ein eindeutig bestimmtes maximales Ideal gibt, und entsprechend für Unterhalbgruppen $\mathfrak{n}_i$ mit $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n}_i)$ und $Q_r(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}_i)$ bei festem $\mathfrak{m}$.[22] Insbesondere gilt dann im additiv kommutativen Falle:

SATZ 2. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Halbring mit kommutativer Addition, während $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ den gleichen Voraussetzungen wie im Satz 1 genügen.*

Ist dann $\mathfrak{m}$ (unter Beachtung der Bedingung $Q_r(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$) maximal gewählt, so ist auch $\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}$ das größtmögliche Ideal additiv regulärer Elemente von $\mathfrak{S}$, d. h., $\mathfrak{D}(\mathfrak{S}, \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}) = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{n})$ ist der maximale Differenzenhalbring $\mathfrak{D}(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{S}$.

Ist dagegen $\mathfrak{n}$ (unter Beachtung von $Q_r(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$) maximal gewählt, so braucht $\mathfrak{n}$ trotzdem nicht die größtmögliche Unterhalbgruppe multiplikativ regulärer Elemente von $\mathfrak{T}$ mit $Q_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{n})$ zu sein, und der maximale Rechstquotientenhalbring $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{T})$ kann $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{n})$ echt enthalten.

Für den Fall, daß beide maximal gewählt sind, gilt also folgendes Schema:



[21] Für einen additiv regulären und kommutativen Halbring $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{R}$ konstruiert D. BOCCIONI [3] einen solchen Oberring $\mathfrak{O} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{D}(\mathfrak{R}), \mathfrak{n})$ in einem Schritt. Doch genügt an Stelle der dort angegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Existenz von $\mathfrak{O}$: „Zu Elementen $a \in \mathfrak{R}$, $b \in \mathfrak{R}$, $\alpha \in \mathfrak{n}$ existieren Elemente $l \in \mathfrak{R}$, $k \in \mathfrak{R}$, $\lambda \in \mathfrak{n}$, die $a\lambda + ak = \alpha l + b\lambda$ erfüllen" in diesem Falle eben bereits die Bedingung $Q_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$. (Angaben in unserer Bezeichnungsweise und auf Rechtsquotientenbildung umgeformt.)

[22] Die gleichzeitige maximale Wahl von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ mit $Q_r(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ kann natürlich von geeigneten Oberkettenbedingungen abhängen.

BEWEIS. Es sei $\tilde{\mathfrak{m}} \supseteq \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}$ das maximale Ideal additiv regulärer Elemente von $\mathfrak{S}$. Wir betrachten den Durchschnitt $\Delta = \tilde{\mathfrak{m}} \cap \mathfrak{N}$, der ersichtlich aus den Elementen $a \in \mathfrak{N}$ mit $a\alpha^{-1} \in \tilde{\mathfrak{m}}$ für beliebiges $\alpha \in \mathfrak{n}$ besteht. Δ ist aber ein Ideal additiv regulärer Elemente von $\mathfrak{N}$, welches auch $Q_r(\Delta, \mathfrak{n})$ erfüllt; zu $a \in \Delta$ und $\alpha \in \mathfrak{n}$ gibt es nämlich wegen $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ jedenfalls Elemente $l \in \mathfrak{N}$, $\lambda \in \mathfrak{n}$ mit $a\lambda = \alpha l$, und wegen $l\lambda^{-1} = \alpha^{-1}a \in \tilde{\mathfrak{m}}$ gilt sogar $l \in \Delta$. Nach Wahl von $\mathfrak{m}$ ist daher $\Delta = \mathfrak{m}$ und $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}$.

Für den Rest der Behauptung greifen wir das Beispiel des Unterhalbringes $\mathfrak{N} = \{ax + b\}$ mit $a > 0$, $b > 0$ des Restklassenringes $\mathfrak{T} = \mathbf{\Gamma}[x]/(x^2)$ auf, wobei wir die Repräsentanten kleineren als 2. Grades einfach als die Elemente von $\mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{N}$ schreiben. Ersichtlich kann $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} = \mathfrak{N}$ gewählt werden, und wir erhalten den Differenzenring $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{N})$, den wir bereits mit $\mathbf{\Gamma}[x]/(x^2)$ identifiziert haben und denen Quotientenhalbkörper $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{N})$, der aus allen Quotienten

$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{mit} \quad a, b \neq 0, c, d \neq 0 \quad \text{aus} \quad \mathbf{N}_0$$

besteht. Hier fällt $\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1} = \mathfrak{N}\mathfrak{N}^{-1}$ mit $\mathfrak{S}$ zusammen, und es ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{Q}(\mathfrak{N}))$ zwar ein Ring, aber nicht wieder ein Halbkörper bzw. Körper. Im Einklang mit unseren Sätzen stimmt er mit dem Quotientenring $\mathfrak{Q}(\mathfrak{T}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{T}, \mathfrak{N})$ des Ringes $\mathfrak{T} = \mathbf{\Gamma}[x]/(x^2)$ überein, der aus allen Quotienten

$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{mit} \quad a, b \quad \text{aus} \quad \mathbf{\Gamma}, c, d \neq 0 \quad \text{aus} \quad \mathbf{N}_0$$

besteht. Es ist aber $\mathfrak{n} = \mathfrak{N}$ nicht die größte Halbgruppe multiplikativ regulärer Elemente aus $\mathfrak{T}$, vielmehr ist diese $\tilde{\mathfrak{n}} = \{cx + d\}$ mit $c, d \neq 0$ aus $\mathbf{\Gamma}$. Trotzdem gilt hier $\mathfrak{Q}(\mathfrak{T}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{T}, \tilde{\mathfrak{n}}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{T})$ und damit[23]

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{D}(\mathfrak{N})) = \mathfrak{D}(\mathfrak{Q}(\mathfrak{N})).$$

Ein zweites Beispiel dieser Art, wo aber $\mathfrak{Q}(\mathfrak{D}(\mathfrak{N}))$ sogar ein Körper ist und

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{D}(\mathfrak{N})) \supset \mathfrak{D}(\mathfrak{Q}(\mathfrak{N}))$$

gilt, haben wir bereits in § 6 mit $\mathfrak{N} = \mathbf{N}[\pi]$ ausgeführt. Wir können für solche Fälle auf Grund unserer bisherigen Überlegungen sofort allgemein formulieren:

SATZ 3. *Zu einem Halbring $\mathfrak{N}$ existieren genau dann sowohl ein Rechtsquotientenhalbkörper $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N})$ als auch ein Rechtsdifferenzenring $\mathfrak{D}_r(\mathfrak{N})$, wenn $\mathfrak{N}$ additiv und multiplikativ regulär ist und mit $\mathfrak{n} = \mathfrak{N} \setminus \{o\}$ bzw. $\mathfrak{n} = \mathfrak{N}$ die Bedingung $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ erfüllt. Insbesondere ist dann die Addition in $\mathfrak{N}$ kommutativ und es gilt:*

$$\begin{array}{lcl} & \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{D}(\mathfrak{N})) & \left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\} \textit{[Ring, nicht notw. Körper]} \\ & \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{S}, \mathfrak{N}\mathfrak{n}^{-1}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N})) & \\ \textit{[Ring]} \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{D}(\mathfrak{N}) \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}) & & \textit{[Halbkörper]} \\ & \mathfrak{N} & \end{array}$$

[23] Übrigens ist sogar $\mathfrak{Q}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{T}, \mathbf{\Gamma}) = \mathbf{P}[x]/(x^2)$, da man jedes Element von $\mathfrak{Q}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{T}, \tilde{\mathfrak{n}})$ umschreiben kann gemäß: $\dfrac{ax+b}{cx+d}\dfrac{cx-d}{cx-d} = \dfrac{(ad-bc)x+bd}{d^2}$.

Für die Körpereigenschaft von $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{D}(\mathfrak{N}))$ ist dabei notwendig, daß $\mathfrak{N}$ die Bedingungen aus Zusatz 3 von § 6 erfüllt und damit auch $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ multiplikativ regulär ist, was im multiplikativ kommutativen Falle auch bereits hinreicht.[24] Weiterhin ist natürlich $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{D}(\mathfrak{N}))$ stets dann ein Körper, wenn $\mathfrak{N}$ oder wenigstens $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N})$ die Eigenschaft ($*$) haben, da dann nach Zusatz 4 von § 6 ja bereits $\mathfrak{D}(\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}))$ Körper ist und mit $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{D}(\mathfrak{N}))$ zusammenfällt.

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE POTSDAM,
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

(Eingegangen am 15. August 1962.)

Literaturverzeichnis

[1] K. ASANO, Arithmetische Idealtheorie in nichtkommutativen Ringen, *Jap. J. of Math.*, **16** (1939), S. 1–36.
[2] K. ASANO, Über die Quotientenbildung von Schiefringen, *J. Math. Soc. Japan*, **1** (1949), S. 73–78.
[3] D. BOCCIONI, Semianelli complementarizzabili, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **24** (1955), S. 474–509.
[4] A. MALCEV, On the immersion of an algebraic ring into a field, *Math. Ann.*, **113** (1937), S. 686–891.
[5] A. MALCEV, Über die Einbettung von assoziativen Systemen in Gruppen. I, II (russisch), *Mat. Sbornik* (neue Serie), **6** (1939), S. 331–336; **8** (1940), S. 251–264.
[6] K. MURATA, On the quotient semi-group of a nonkommutative semi-group, *Osaka math. J.*, **2** (1950), S. 1–5.
[7] L. RÉDEI, *Algebra*, I. Teil, deutsche Ausg. (Leipzig, 1959).
[8] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), S. 365–378.

[24] Verf. konnte nicht klären, ob letzteres auch bei nichtkommutativer Multiplikation gilt.

Printed in Hungary

Technikai szerkesztő: Szabados József

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1962. XI. 21. – Terjedelem: 20 (A/5) ív – 8 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 62-4603

The Acta Mathematica publich papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en franaçis, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Toute correspodance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, I., Fő utca 32.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

60,– forint

INDEX

Saxena, R. B., On mixed type lacunary interpolation. II 1
Carlitz, L., Some formulas of E. Feldheim 21
Knapowski, S. and *Turán, P.*, Comparative prime-number theory. IV 31
Knapowski, S. and *Turán, P.*, Comparative prime-number theory. V 43
Knapowski, S. and *Turán, P.*, Comparative prime-number theory. VI 65
Dirac, G. and *Erdős, P.*, On the maximal number of independent circuits in a graph 79
Aczél, J. und *Daróczy, Z.*, Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der shannonschen Entropie 95
Zeitler, H., Hyperbolische Trigonometrie im Poincaréschen Kreismodell 123
Lévy, A., Remarks on a paper by J. Mycielski 125
Hosszú, M. und *Vincze, E.*, Über den wahrscheinlichsten Wert 131
Wallace, A. D., Relative Ideals in Semigroups. II 137
Péter, Rózsa, Über die Primitiv-Rekursivität einiger den Aufbau von Formeln charakterisierenden Wortfunktionen 149
Veidinger, L., Error bounds in finite-difference approximations to solutions of symmetric hyperbolic systems 173
Garg, K. M., Applications of Denjoy analogue. II 183
Garg, K. M., Applications of Denjoy analogue. III 187
Freud, G., Über die (C, 1)-Summen der Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen 197
Weinert, H. J., Über Halbringe und Halbkörper. II 209

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, P. ERDŐS, L. FEJES TÓTH, L. KALMÁR, L. RÉDEI,
A. RÉNYI, B. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS XIV FASCICULI 3–4

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1963

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, I., Fő utca 32. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
Том XIV—Вып. 3—4

РЕЗЮМЕ

ОДНОЗНАЧНАЯ ДЕЛИМОСТЬ В АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

П. Дж. Хильтон (Бэрмингем, Англия) и С. М. Яхиа (Райшхахи, Пакистан)

В работе исследуются абелевы группы, элементы которых однозначно делимы, или вообще делимы, на каждое простое число из некоторого множества P. Не трудно характеризовать эти группы через соответствующие свойства своих периодических частей и фактор-групп по частям.

Доказывается ряд теорем относительно P-делимых групп без кручения и показывается, что P-делимые группы обладают инжективными свойствами, аналогичными инжективным свойствам делимых групп.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ. VII

С. Кнаповски (Познань) и П. Туран (Будапешт)

В предыдущих двух статьях настоящей серии мы доказывали осцилляционные теоремы для функций[1]

$$\psi(x, k, l_1)-\psi(x, k, l_2), \quad \Pi(x, k, l_1)-\Pi(x, k, l_2) \qquad (l_1 \neq l_2)$$

при условии, что ни одна из функций $L(s, \chi)$ $(\chi \neq \chi_0) \bmod k$ не исчезает в областях

(A) $$\sigma > \tfrac{1}{2}, \quad |t| \leqq c_1 k^{10} \qquad (s=\sigma+it),$$

(B) $$\sigma = \tfrac{1}{2}, \quad |t| \geqq A(k) (\geqq 1).$$

Цель настоящей статьи — показать при условиях, более слабых, чем (A) и (B), что функция $\psi(x, k, l_1)-\psi(x, k, l_2)$ меняет знак во всяком интервале подходящей длины. Точнее говоря, доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.3. Если число k такое, что ни одна из функций $L(s, \chi) \bmod k$ не исчезает в области

$$0<\sigma<1, \quad |t| \geqq A(k) (\geqq 1) \qquad (s=\sigma+it),$$

то для любых $l_1 \neq l_2$ функция $\psi(x, k, l_1)-\psi(x, k, l_2)$ меняет знак в интервале

$$\omega \geqq x \geqq e^{2\sqrt{\omega}},$$

---

[1] Как обычно,

$$\psi(x, k, l)=\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \bmod k}} \Lambda(n) \qquad (l, k)=1$$

и

$$\Pi(x, k, l)=\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \bmod k}} \frac{\Lambda(n)}{\log n}.$$

если только

$$\omega \geqq \max\left(e^{k^{c_2}},\ e^{\overline{[A(k)]^3}}\right)$$

при достаточно большой c_2.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ. VIII

С. Кнаповски (Познань) и П. Туран (Будапешт)

Харди-Литлвуд и Ландау доказали, что соотношение

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{p\equiv 1 \bmod 4} e^{-px} - \sum_{p\equiv 3 \bmod 4} e^{-px}\right) = -\infty \tag{1.1}$$

эквивалентно тому, что функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} \qquad (s=\sigma+it) \tag{1.2}$$

не исчезает при $\sigma>\frac{1}{2}$.

Условие (1.1), в качестве гипотезы, принадлежит Чебышеву, и по существу означает, что „в смысле суммируемости по Абелю" существует более простых чисел вида $4l+3$, чем вида $4l+1$.

Харди-Литлвуд и Ландау доказали тоже, что упомянутое утверждение остается в силе, если заменить (1.1) условием

$$\lim_{x\to+0}\left(\sum_{p\equiv 1 \bmod 4} \log p\, e^{-px} - \sum_{p\equiv 3 \bmod 4} \log p\, e^{-px}\right) = -\infty. \tag{1.3}$$

В настоящей работе мы занимаемся теоремами упомянутого типа в случае mod 8. Теоремы 1.2 и 1.3 содержат результаты, аналогичные вышеуказанным, и их доказательства тоже представляют собой видоизменения соответствующих доказательств Харди-Литлвуда и Ландау.

Теорема 1.2. Если для некоторого $l\not\equiv 1 \bmod 8$ выполняется условие

$$\lim_{x\to+0}\left\{\sum_{p\equiv 1 \bmod 8} \log p\, e^{-px} - \sum_{p\equiv l \bmod 8} \log p\, e^{-px}\right\} = -\infty,$$

то ни одна из функций $L(s,\chi) \bmod 8$ $(\chi(l)\neq 1)$ не исчезает при $\sigma>\frac{1}{2}$.

Теорема 1.3. Если ни одна из функций $L(s,\chi) \bmod 8$ $(\chi=\chi_0)$ не исчезает при $\sigma>\frac{1}{2}$, то для всякого $l\not\equiv 1 \bmod 8$ имеем

$$\lim_{x\to+0}\left\{\sum_{p\equiv 1 \bmod 8} \log p\, e^{-px} - \sum_{p\equiv l \bmod 8} \log p\, e^{-px}\right\} = -\infty.$$

В случае, когда ни одна из $\sum$ не пробегает простые числа $\equiv 1 \bmod 8$, возникает новое явление, а именно, разность меняет знак при $x\to+0$ бесконечно много раз. Точнее говоря, проверяются следующие теоремы, являющиеся главными результатами работы.

Теорема 1.1. Если[1] $0<\delta<c_1$, то для любых $l_1 \not\equiv l_2 \not\equiv 1 \bmod 8$ имеет место неравенство

$$\max_{\delta \leqq x \leqq \delta^{1/3}} \left\{ \sum_{p \equiv l_1 \bmod 8} \log p\, e^{-px} - \sum_{p \equiv l_2 \bmod 8} \log p\, e^{-px} \right\} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{\delta}} \exp\left\{ -22 \frac{\log \frac{1}{\delta} \log_3 \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}} \right\}$$

без всякой гипотезы.

Теорема 1.4. Если $0<\delta<c_1$, то в случае $l \not\equiv 1 \bmod 8$ имеют место следующие неравенства:

$$\max_{\delta \leqq x \leqq \delta^{1/3}} \left\{ \sum_{n \equiv 1 \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} - \sum_{n \equiv l \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} \right\} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{\delta}} \exp\left(-22 \frac{\log \frac{1}{\delta} \log_3 \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}} \right)$$

и

$$\min_{\delta \leqq x \leqq \delta^{1/3}} \left\{ \sum_{n \equiv 1 \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} - \sum_{n \equiv l \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} \right\} <$$

$$< -\frac{1}{\sqrt{\delta}} \exp\left(-22 \frac{\log \frac{1}{\delta} \log_3 \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}} \right).$$

ТИПОЛОГИЯ ЯЗЫКОВ И ЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

С. Маркус (Букарест)

Назовем языком тройку $\{\Gamma, V, \Psi\}$, где Γ — некоторое множество (элементы которого называются словами), V — разложение множества Γ на попарно непересекающиеся подмножества, а Ψ — некоторое подмножество множества всех конечных последовательностей слов (т. е. множества всех предложений); предложения из Ψ называются намеченными предложениями. В случае $x \in \Gamma$ символом $V(x)$ обозначается элемент разложения V, содержащий x. В случае $x \in \Gamma$ через $S(x)$ обозначается множество тех $y \in \Gamma$, подстановка которых вместо элемента x в любом намеченном предложении снова дает намеченное предложение, и наоборот, заменяя y через x в намеченном предложении, содержащем y, снова получается намеченное предложение. Последовательность $V(x_1), V(x_2), \ldots, V(x_n)$ ($x_i \in \Gamma$) называется намеченной, если найдутся $y_i \in V(x_i)$ такие, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ есть намеченное предложение. $V(x)$ и $V(y)$ эквивалентны между собой, если замена одного из них в намеченной последовательности другим снова дает намеченную последовательность. Обозначим через $T(x)$ объединение множеств $V(y)$, эквивалентных в этом смысле множеству $V(x)$.

---

[1] $c_1, c_2, \ldots$ означают численные постоянные, вычисляемые в явном виде.

Язык $\{\Gamma, V, \Psi\}$ называется адекватным, если $S(x) \subset T(x)$ для всех $x \in \Gamma$; однородным, если $S(x) \cap V(y) \neq 0$ $(x, y \in \Gamma)$ влечет $S(y) \cap V(x) \neq 0$; простым, если $V(x) \cap S(x) = \{x\}$ для всех $x \in \Gamma$; наконец, язык называется изолирующим, если $V(x) = \{x\}$ для всех $x \in \Gamma$. В работе исследуются характеристические свойства перечисленных типов языков и их взаимоотношения. Приведенные результаты пополняют, и отчасти содержат некоторые теоремы работ [5], [14]; некоторые из них содержатся в книге И. И. Ревзина „Модели языка".

О ГРУППЕ КОЛЬЦЕВЫХ УМНОЖЕНИЙ

Ф. Л. Харди (Атланта, Георгия, США)

Кольцевые умножения, заданные на абелевой группе A, составляют абелеву группу Mult (A) (см. Фукс [2]). A называется ассоциативно замкнутой, соответственно лиево замкнутой, если умножения, определяющие ассоциативное соотв. лиевое кольцо, составляют подгруппу группы Mult (A). В работе исследуются ассоциативно замкнутые и лиево замкнутые группы, и в некоторых классах групп они определяются в явном виде.

Среди групп кручения ассоциативно замкнутыми являются точно те, в каждой p-компоненте которых базисная подгруппа является циклической, а лиево замкнутыми точно те, у которых эти подгруппы являются прямыми суммами самое большее двух циклических p-групп.

АСИММЕТРИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

П. Эрдёш и А. Реньи (Будапешт)

Граф называется симметрическим, если существует нетождественная перестановка вершин, переводящая граф в себя; если такой перестановки нет, граф называется асимметрическим. Асимметрический граф всегда можно превратить в симметрический путем отбрасывания некоторых ребер и присоединения каких-то отсутствующих ребер; такое преобразование называется симметризацией графа. Для некоторой симметризации асимметрического графа G рассмотрим сумму числа отброшенных ребер и числа присоединенных новых ребер; возьмем минимум этой суммы для всевозможных симметризаций графа G; полученное число обозначается через $A[G]$ и называется порядком асимметрии графа G.

Пусть $A(n)$ обозначает максимум чисел $A[G]$ для всех графов G, обладающих n вершинами. Согласно теореме 1 имеет место неравенство $A(n) \geqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Теорема 2 выражает, что при больших n большинство графов с n вершинами является асимметрическим и имеет приблизительно максимальный порядок асимметрии; точнее говоря, если делить число графов, обладающих данным числом вершин n и асимметрией $< \frac{n(1-\varepsilon)}{2}$, где $\varepsilon > 0$ произвольно, на число всех графов с n вершинами (т. е. на $2^{\binom{n}{2}}$), частное стремится к 0 при $n \to +\infty$. В § 3 изучается симметрия бесконечных графов, в § 4 — асимметрия графов с данным числом вершин и ребер, а в § 5 рассматриваются проблемы, связанные с асимметрией графов специальных типов.

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ РАБОТЕ А. ХЕППЕША

В. Дж. Бландон (Санкт-Джонс, Канада)

Автор замечает, что из конструкции, примененной Хеппешем в своей статье о решеткообразных заполнениях плоскости равными кругами, получается оценка, не фигурирующая в упомянутой статье, для плотности заполнений, больше чем четырехлистных. Автору удалось доказать [1], что для $k=5$ и $k=6$ указанная конструкция доставляет плотнейшее заполнение, но при достаточно больших значениях k существуют лучшие расположения.

ВЫСОКИЕ РАСШИРЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Д. К. Харрисон, Дж. М. Ирвин, К. Л. Пирси и Е. А. Уалкер

(Нью Мексико, США)

Пусть G — абелевая группа и H — подгруппа G, являющаяся максимальной по отношению к свойству $H\cap G'=0$, где $G'=\bigcap_n nG$; такая подгруппа называется высокой подгруппой группы G. Это понятие встречается первый раз в работе [6], где доказано, что H всегда является чистой подгруппой группы G, и что $G|H$ — делимая группа.

Соответственно этому экзактная последовательность $0\to H\xrightarrow{f} X\to D\to 0$ называется высоко-чистой, если $H^1=0$, D делимо и $f(H)$ является высокой подгруппой из X. Тогда X является высоким расширением с D подгруппы H.

Исследуется вопрос, которые элементы из $\mathrm{Ext}\,(D,H)$ представляют собой высокое расширение, и который H является высоко-инъективным в очевидном смысле слова. Оказывается, что высокие расширения образуют некоторую подгруппу $\mathbf{Hext}\,(B,H)$ от $\mathrm{Ext}\,(D,H)$, и в случае, когда D — группа кручения, $\mathbf{Hext}\,(B,H)$ равняется $\cap p\,\mathrm{Ext}\,(D,H)^1$, где p пробегает все простые числа.

В дальнейших главах исследуются функториальные свойства от $\mathbf{Hext}\,(B,H)$ и его обобщений. Последняя глава занимается $\mathbf{Shom}\,(A,B)$, который играет важную роль в исследованиях. Через $\mathbf{Shom}\,(A,B)$ обозначается подгруппа из $\mathrm{Hom}\,(A,B)$, состоящая из всех гомоморфизмов f с ядром, являющимся существенной подгруппой из A.

ОБ ОБОБЩЕННОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Х. Н. Нигам (Лукноу, Индня)

В работе исследуется интегральное преобразование вида

$$\Phi(p,q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px}e^{-\frac{1}{2}qx}\,W_{k+\frac{1}{2},m}(px)\,W_{k_1+\frac{1}{2},m_1}(qy)\cdot$$

$$\cdot(px)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(qy)^{-\lambda_1-\frac{1}{2}}f(x,y)\,dx\,dy,$$

где $W_{s,r}(x)$ — функция Уиттекера. Оно перейдет в двойное преобразование Лапласа (соотв. в pq-кратное последнего), если

$$\lambda=k=\pm m \quad\text{и}\quad \lambda_1=k_1=\pm m_1.$$

Автор доказывает теорему единственности для этого преобразования: если две непрерывные функции имеют одинаковые преобразования, то в первом квадранте плоскости эти функции совпадают. Теоремы 2 и 3, являющиеся аналогами хорошо известных теорем из теории обобщенного преобразования Лапласа функций одной переменной, устанавливают некоторые свойства рассмотренного преобразования, подобные свойствам свертки,

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С МОЗАИКАМИ

Л. Фейеш Тот (Будапешт)

Рассмотрим в евклидовой или в гиперболической плоскости некоторую правильную мозаику, у которой к всякой вершине принадлежат три ребра, выберем из нее n различных граней, и обозначим объединение последних через U. Как бы мы ни разбили U на n связных частей, наибольший из периметров частей будет $\geq \lambda$, где λ — периметр одной грани мозаики. Равенство имеет место лишь в случае правильного разбиения.

ОДНА ТЕОРЕМА О ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ МОДУЛЕЙ БЕСКОНЕЧНОГО РАНГА БЕЗ КРУЧЕНИЯ

П. Рибенбоим (Урбана, Иллиноис, США)

Пусть R — область целостности с единицей, а X, Y — R-модули бесконечного ранга.

Для подмодулей M и N модуля X (или Y) пишется $M \equiv N$, если $(M+N)(M \cap N)$ имеет конечный ранг.

Элементы $y_1, y_2 \in Y$ называются линейно независимыми относительно подмодуля T, если из $a_1, a_2 \in R$, $a_1 y_1 + a_2 y_2 \in T$ вытекает $a_1 = a_2 = 0$.

Для R-гомоморфизмов $f: X \to Y$ и $g: X \to Y$, обладающих конечными ядерными пространствами, соотношение $f \equiv g$ определяется следующими требованиями:

1. $fX \equiv gX$ (как подмодули модуля Y);

2. существует подмодуль T конечного ранга модуля Y такой, что множество всех $x(\in X)$, для которых $f(x)$ и $g(x)$ линейно независимы относительно T, является подмодулем конечного ранга модуля Y.

В работе доказывается следующая теорема.

Соотношение $f \equiv g$ имеет место в том и только в том случае, если для любого подмодуля Q модуля Y выполняется $f^{-1}(Q) \equiv g^{-1}(Q)$. ($f^{-1}(Q)$ означает полный прообраз подмодуля Q.)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫРАЖЕНИЯ n-КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЧЕРЕЗ $n-1$-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Л. Ц. Хсу (Чангчун, Китай)

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $m \geq 1$ раз непрерывно дифференцируема по переменной x_n в n-мерном шаре $G(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1)$. Обозначим через V_{n-1} замкнутое ограниченное множество в $n-1$ мерном пространстве, через $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ функции с непрерывными частными производными, через V_n n-

мерное множество точек, для которых

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in V_{n-1}, \quad \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Будем предполагать, что V_n содержится в G. Пусть

$$\Phi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{m!}{(2m!)} \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1)^m.$$

Автор доказывает, что

$$\int_{V_n} f dV_n = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m!} \int_{V_{n-1}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m-k-1} \Phi_m\right]_{x_n=\varphi_1}^{x_n=\varphi_2} dV_{n-1} + \varrho_m,$$

где

$$|\varrho_n| \leqq \left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}} m!}{\Gamma\left(m + \frac{n}{2} + 1\right)(2m)!}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{V_n} |f|^2 dV_n\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Он доказывает еще четыре теоремы такого типа.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЛИТОФФА

К. Фаит (Нью Брунсвик, США) и И. Утуми (Рочестер, США)

Простое, чисто теоретико-кольцевое доказательство теоремы о том, что всякое простое кольцо, содержащее минимальный односторонний идеал, локально представимо как кольцо матриц над некоторым телом.

ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЧАСТИЧНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Р. Петер (Будапешт)

О работе программы, принадлежащей некоторому вычислительному автомату, мы имеем впечатление, что она является каким-то образом рекурсивной. Эта работа приводит или не приводит к результату в зависимости от программы; кажется, будто результат программы была частично-рекурсивная функция от программы. Если программа содержит и переменные (параметры), т. е. является в действительности схемой программ, кажется, будто ее результат была частично-рекурсивная функция этих переменных. После точного определения необходимых понятий я доказываю, что в самом деле всё это так.

С другой стороны я показываю, что наоборот, предполагая, что содержание элементов памяти не подвергнуто ограничению, для каждой частично-рекурсивной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ найдется схема программ, зависящая от $x_1, \ldots, x_r$ и содержащая только простейшие одноадресные указания, которая — при достаточно большой емкости памяти — вычисляет эту функцию, т. е. работает так, что если подставить вместо переменных любые числа $a_1, \ldots, a_r$, то отправляющаяся таким образом программа приведет к результату тогда и только тогда, если φ определена в этой точке, а в качестве результата получается последовательность чисел

$$a_1, \ldots, a_r, \varphi(a_1, \ldots, a_r).$$

Если φ является общерекурсивной, то из этой схемы можно получить программу, которая — при упорядочении точек в последовательность — печатает на ленту последовательность значений функции.

Имея в виду действительные вычислительные автоматы, при достаточно большой емкости памяти и достаточно большом максимальном содержании элементов c', ограничиваясь на аргументы, не превосходящие M, для всякой частично-рекурсивной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ можно задать такую „не вполне вычисляющую" схему программ, применение которой к допустимым аргументам $a_1, \ldots, a_r$ либо не приведет к результату (из-за переливания, когда машина „звонит", или из-за неопределенности значения $\varphi(a_1, \ldots, a_r)$), либо имеет результатом последовательность чисел

$$a_1, \ldots, a_r, \ \varphi(a_1, \ldots, a_r).$$

Для примитивно-рекурсивной функции φ, если ограничиваться на аргументы, не превосходящие M, всегда можно задать емкость памяти и содержимость элементов (зависящие только от „длины" постройки φ), при которых существует схема программ, вполне вычисляющая функцию φ. Поэтому минимальную длину постройки можно рассмотреть как „степень простоты" примитивно-рекурсивной функции φ.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ НА ДРУГУЮ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

К. Фладт (Калв, Германия)

Работа посвящена изучению центральной проекции одной плоскости на другую в гиперболическом пространстве. Вводятся подходящие системы координат в различных случаях и исследуются конические сечения во второй плоскости, доставленные бесконечно удаленными точками первой плоскости. Дается полный перечень возможных случаев.

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ТУРАНА О ГРАФАХ

Г. А. Дирак (Гамбург)

В работе ограничиваемся конечными, ненаправленными графами, не содержащими петель и многократных ребер.

Теорема Турана о графах с одной стороны устанавливает максимальное число $d_k(n)$ ребер у графа с n вершинами, не содержащего полного k-графа, а с другой стороны утверждает, что при фиксированном значении n и k все графы, обладающие n вершинами, не содержащие полного k-графа и имеющие $d_k(n)$ ребер, изоморфны единственному графу $\Delta(n, k)$.

Главными результатами настоящей работы являются следующие две теоремы. Первая из них обобщает ту часть теоремы Турана, согласно которой графы с n вершинами и числом ребер, превосходящим $d_k(n)$, содержат хотя бы один полный k-граф; а вторая — ту часть, по которой среди графов, обладающих n вершинами и точно $d_k(n)$ ребрами, не содержат полного k-графа только те, которые изоморфны $\Delta(n, k)$.

Пусть $\langle k, K\rangle$ обозначает граф, полученный из некоторого полного k-графа опущением K ребер.

Теорема 3. При $n \geqq k+p \geqq 2p+2$, $p=0, 1, \ldots, k-2$, всякий граф с n вершинами и больше чем $d_k(n)$ ребрами содержит хотя бы один граф $\langle k+p, p\rangle$ (содержащий, в свою очередь, по крайней мере $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8p+1}$ различных графов типа $\langle k+p-1, p-1\rangle$).

Теорема 4. При $n \geqq k+p+1$, $p=0, 1, \ldots, k-3$, всякий граф, обладающий n вершинами и точно $d_k(n)$ ребрами, неизоморфный $\Delta(n, k)$, содержит хотя бы один граф $\langle k+p, p\rangle$.

О МАКСИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ НЕЗАВИСИМЫХ КРУГОВ В ГРАФАХ

К. Корради и А. Хайнал (Будапешт)

В работе авторы доказывают следующую гипотезу П. Эрдёша:

Теорема 1. Пусть k, n — заданные натуральные числа, выполняющие неравенство $n \geqq 3k$, и предположим, что каждая вершина графа $\mathcal{G}$ с n вершинами имеет порядок не меньше $2k$. Тогда $\mathcal{G}$ содержит k независимых кругов.

Метод доказательства попутно дает оценку для длин появляющихся кругов и позволяет доказать следующее уточнение упомянутой гипотезы.

Теорема 2. Пусть граф $\mathcal{G}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Пусть $n=lk+t$, где $0 \leqq t<k$. Тогда $\mathcal{G}$ содержит k кругов, $k-t$ из которых имеют длину, не превышающую l, а t имеют длину, не превышающую $l+1$.

В отличие от теоремы 1, результат которой является точным, полученные в теореме 2 оценки для длин кругов улучшаемы, если n является большим по сравнению с k. Однако стоит заметить, что в случае $3k \leqq n<4k$ результат теоремы 2 точен.

Полученные результаты дают сведения по конечным графам, не содержащим петель и многократных ребер.

О ПОЛУДИСКРЕТНЫХ СТРУКТУРАХ С ОТНОШЕНИЯМИ КОНГРУЭНЦИИ, СОСТАВЛЯЮЩИМИ БУЛЕВУЮ АЛГЕБРУ

Г. Грецер (Будапешт)

В качестве решения проблемы 6 работы [4] доказывается следующая теорема:

Теорема. Пусть L — полудискретная структура. $\theta(L)$ представляет собой булевую алгебру тогда и только тогда, если для любой пары p, q простых интервалов из соотношений $p \to q$, $p \succ q$ вытекает $q \to p$.

О КОЛЬЦАХ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ГЛАВНЫХ ПРАВЫХ ИДЕАЛОВ. III

Ф. Сас (Будапешт)

В настоящей статье под кольцом понимается ассоциативное кольцо. Кольцо A называется кольцом Артина, MHR-кольцом или MH_1R-кольцом, если в A выполняется условие минимальности соответственно для всех правых идеалов, для всех главных правых идеалов или для всех содержащихся в некотором главном правом идеале правых идеалов.

В § 1 рассматривается связь между мощностями структуры левых идеалов и структуры правых идеалов в кольцах Артина. Мы построили кольца Артина с единицей, содержащие n правых и $\aleph_\nu$ левых, соответственно $\aleph_\mu$ правых и $\aleph_\nu$ левых идеалов ($n \geqq 3$ — произвольное натуральное число; $\aleph_\nu$, $\aleph_\mu$ — любые бесконечные мощности).

В § 2 исследуются кольца с конечным числом правых идеалов и, в частности, кольца с тремя правыми идеалами.

В § 3 проверяется, что любое подкольцо радикального MH_1R-кольца тоже является радикальным MH_1R-кольцом, далее что в радикальных MH_1R-кольцах условие минимальности выполняется для подгрупп, лежащих в главных правых идеалах. В классе MHR-колец исследуются и общие радикалы Куроша.

В § 4 рассматриваются вполне приводимые кольца, и получается теоретико-модулярная характеристика полупростых колец Артина.

Szegedi Nyomda V. 63-2180

UNIQUE DIVISIBILITY IN ABELIAN GROUPS

By

P. J. HILTON (Birmingham, England) and S. M. YAHYA (Rajshahi, Pakistan)

(*Presented by* L. RÉDEI)

1. Introduction

The algebraic study which is the content of this paper arose and was motivated by consideration of the question of the existence of means on topological spaces. Let X be a topological space. By an *n-mean* in X, in the sense of AUMANN [1], we understand a map $m: X^n \to X$, where X^n is the n^{th} cartesian power of X, satisfying the conditions:

(1) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)m$ is symmetric in the variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

(2) $(x, x, \ldots, x)m = x$.

ECKMANN [3] has studied n-means from the point of view of homotopy theory.[1] It is then natural to replace conditions (1) and (2) above by homotopy conditions. We will then fix a base point x_* in X and understand all maps and homotopies to respect base points. We will adopt the

1. 1 DEFINITION. An *n-mean* in X is a map $m: X^n \to X$ satisfying the conditions

(1) For any permutation σ of n symbols $\sigma m \simeq m: X^n \to X$;

(2) $\Delta m \simeq 1$, where Δ is the diagonal map, $\Delta: X \to X^n$.

In this definition we understand σ to operate on X^n in the obvious way by permuting the variables.

ECKMANN studied those spaces admitting n-means by the application of various algebraic functors. Let us content ourselves by looking at the fundamental group. Parallel to the definition above we introduce the

1. 2 DEFINITION. An *n-mean* on a group π is a homomorphism $\mu: \pi^n \to \pi$ satisfying the conditions:

(1) For any permutation σ of n symbols, $\sigma\mu = \mu: \pi^n \to \pi$;

(2) $\Delta\mu = 1$, where Δ is the diagonal homomorphism, $\Delta: \pi \to \pi^n$. (Here again σ operates on π^n in the obvious way.)

Let π be the fundamental group of X, rel x_*. Then plainly π admits an n-mean if X admits an n-mean, and we have

THEOREM OF ECKMANN. *The group π admits an n-mean ($n \geqq 2$) if and only if π is abelian and, writing the composition in π additively, every element of π is uniquely divisible by n.*

PROOF. Let π be an additive abelian group and let every element of π be uniquely divisible by n. Then the map $\mu: \pi^n \to \pi$ given by $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\mu = \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ is plainly an n-mean. Conversely let $\mu: \pi^n \to \pi$ be an n-mean

[1] The theory of means in general categories is developed in [5].

on the (multiplicative) group π. Given $\xi \in \pi$, let $(\xi, e, \ldots, e)\mu = \eta$. Then $(e, \ldots, e, \xi, e, \ldots, e)\mu = \eta$ by (1), where ξ occurs in any position, so that $(\xi, \xi, \ldots, \xi)\mu = \eta^n$; this implies by (2) that $\eta^n = \xi$. Given $\xi, \xi' \in \pi$, let $(\xi, e, \ldots, e)\mu = \eta$, $(\xi', e, \ldots, e)\mu = \eta'$. Then $(\xi, \xi', e, \ldots, e)\mu = \eta\eta' = \eta'\eta$ by (1). Thus η commutes with η' whence η^n commutes with η'^n or ξ commutes with ξ'.

It remains to show that n^{th} roots are unique in π. Suppose then that $\xi^n = e$. If $(\xi, e, \ldots, e)\mu = \eta$, then $e = (e, e, \ldots, e)\mu = (\xi^n, e, \ldots, e)\mu = \eta^n = \xi$ and the theorem is proved.

Notice that if π admits an n-mean then that n-mean is unique.

Thus the study of spaces with n-means leads naturally to the study of groups with n-means and this study coincides with that of abelian groups in which each element is uniquely divisible by n; this motivates the contents of the present paper. We say that an abelian group A is uniquely divisible by n if each element of A is uniquely divisible by n, or equivalently if the homomorphism $A \to A$, given by multiplication by n, is an automorphism.

Now, we observe that, if P is the set of prime factors of n, then A is uniquely divisible by n if and only if A is uniquely divisible by p for each $p \in P$, or as we shall say, uniquely divisible by P. Thus we may generalise the notion of unique divisibility by n by considering the concept of unique divisibility by P, where P is any family (finite or not) of prime numbers. We also remark that the property of unique divisibility by P is equivalent to the pair of properties (i) divisibility by P, and (ii) P-torsion-free. Of course we understand that A is *P-torsion-free* if A has no p-torsion for $p \in P$. It is thus natural to consider these two properties separately and we thus devote a part of this paper to extending, to P-divisibility, familiar results on divisibility.

Notice that there is no gain in generality in considering a family N of natural numbers rather than a family of primes since (unique) divisibility by N coincides with (unique) divisibility by P, where P is the set of prime factors of members of N. If P is a family of primes it will however be convenient to introduce the notation P^* for the multiplicative semigroup generated by P.

In this paper we have not discussed generalizations to modules over arbitrary rings. Our object has been, instead, to stress the simplicity of the concepts of P-divisibility and P-torsion in the category of abelian groups. We have also not attempted to list *all* generalizations available, particularly if these are completely automatic, thus, for example, Proposition 1. 4 of (2; Chapter VII) generalizes immediately. We might mention in this connection the result that if A is uniquely divisible by P, then Hom (A, B) is also uniquely divisible by P.

2. Preliminary definitions and propositions

2. 1 DEFINITION. We shall call a group G *P-divisible* if each element of G is divisible by p, $p \in P$, and if this divisibility is unique then we shall call G *uniquely P-divisible*.

2. 2 DEFINITION. We say that a subgroup H of a group G is *P-pure*[2] if the equation $h = ng$, $h \in H$, $g \in G$, $n \in P^*$, implies that $h = nh'$ for some $h' \in H$.

[2] See FUCHS [6].

2.3 PROPOSITION. *A torsion group is $u-P$-divisible if and only if all its elements have orders prime to each $p \in P$.*

2.4 PROPOSITION. *Given an exact sequence $O \to A' \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{\mu} A'' \to O$, then*
(i) *if A', A'' are P-torsion-free then A is P-torsion-free:*
(ii) *if A is P-torsion-free and A' is P-pure in A, then A' and A'' are P-torsion-free.*

PROOF. (i) Let $a \in A$ and $pa = o$. Then $pa\mu = o$, whence $a\mu = o$, and so $a = a'\lambda$, $a' \in A'$. Thus $o = pa = pa'\lambda$, so $pa' = o$, $a' = o$, and finally $a = o$.

(ii) A', being a subgroup of A, is obviously P-torsion-free. Now let $pa'' = o$, $a'' \in A''$. Then $\exists a \in A$, such that $a\mu = a''$, and $pa\mu = o$, so $pa = a'\lambda$, $a' \in A'$. We now apply the P-purity of A' to deduce that $a'\lambda = pb'\lambda$, $b' \in A'$, whence $p(a - b'\lambda) = o$. But A is P-torsion-free so $a = b'\lambda$, and finally $a'' = o$.

2.5 PROPOSITION. *Given an exact sequence $o \to A' \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{\mu} A'' \to o$, then*
(i) *if A', A'' are P-divisible, A is P-divisible;*
(ii) *if A is P-divisible, and A' is P-pure in A then A' and A'' are P-divisible.*

PROOF. (i) Let $a \in A$. Then $a\mu = pb''$, $b'' \in A''$, since A'' is P-divisible. Let $b'' = b\mu$, so that $(a - pb)\mu = o$, $a - pb = a'\lambda$, $a' \in A'$. Thus $a = p(b + b'\lambda)$ where $a' = pb'$.
(ii) A'' as a homomorphic image of a P-divisible group, is again P-divisible. Now let $a' \in A'$. Then $a'\lambda = pb$, so that by the P-purity of A', $a' = pb'$, $b' \in A'$.
Propositions (2.4) and (2.5) together lead to the

2.6 PROPOSITION. *Given an exact sequence $O \to A' \to A \to A'' \to o$, then*
(i) *if A', A'' are $u-P$-divisible, then A is $u-P$-divisible;*
(ii) *if A is $u-P$-divisible and A' is P-pure in A, then A', A'' are $u-P$-divisible.*

2.7 COROLLARY. *In the exact sequence $o \to A_t \to A \to A_f \to o$, where A_t is the torsion subgroup of A, A is $u-P$-divisible if and only if A_t and A_f are $u-P$-divisible.*

We remark that, unless P is the family of all primes, it is not true that if A is $u-P$-divisible then A_t is necessarily a direct summand in A. Thus let P be a family of primes different from the complete family, so that there exists a prime $p \notin P$. We construct the following example, using one particular such p.

2.8 EXAMPLE. Let $A = \prod_{i \geqq 1} Z_{p^{2i}}$ (we understand by $\prod$ the direct product or unrestricted direct sum). We represent elements of A by means of their components; thus $\xi = (\xi_i)$, where $\xi \in A$, $\xi_i \in Z_{p^{2i}}$. Let $\xi = (p^i\eta_i)$, where η_i is a generator of $Z_{p^{2i}}$. Thus $\xi_i = p^i\eta_i$ is of order p^i, so, obviously, $\xi \notin A_t$. Let $\xi_{(i)}$ be the element of A given by

$$\xi_{(i)j} = o, \qquad j < i,$$
$$= p^j\eta_j, \qquad j \geqq i.$$

Then $\xi \equiv \xi_{(i)} \pmod{A_t}$, since $\xi - \xi_{(i)} = (p\eta_1, p^2\eta_2, \ldots, p^{i-1}\eta_{i-1}, o, o, \ldots) \in A_t$. But $\xi_{(i)}$ is divisible by p^i, so $\xi \bmod A_t$ is divisible by p^i, for arbitrary i. On the other hand no non-zero element of A is divisible by arbitrarily high powers of p. Thus A/A_t is not isomorphic to a subgroup of A, so A_t is not a direct summand in A. On the other hand A is $u-P$-divisible, as $p \notin P$.

From (2. 7) it follows that a $u-P$-divisible group is an extension of a $u-P$-divisible torsion group by a P-divisible torsion-free group and conversely (by 2. 6 (i)) every such extension is $u-P$-divisible. (2. 3) gives the (elementary) complete characterization of $u-P$-divisible torsion groups. We shall therefore investigate P-divisible torsion-free groups. We note that a divisible torsion-free group of rank r, where r is any cardinal, is completely characterized, being the direct sum of r copies of the group of rationals; naturally no such simple statement holds for P-divisible torsion-free groups.

3. P-divisible torsion-free groups

We first establish some notation.

Z: the group of integers.

Q: the group of rationals.

Q_P: the group of rationals with denominators n, $n \in P^*$.

P': the set of primes complementary to P.

A^r: $\oplus_r A$, the direct sum of r copies of A.

$\sum$: the sum of subgroups (or of elements).

We shall now prove a lemma.

3. 1 LEMMA. *A torsion-free group A of rank r can be embedded between Z^r and Q^r, thus $Z^r \subseteq A \subseteq Q^r$: and conversely any group A which can be so embedded is torsion-free of rank r.*

PROOF. Let (a_i) be a maximal independent set of A. Identifying the unity element of the i^{th} copy of Z with a_i we embed Z^r in A. Now for each $x \in A$, $\exists n \neq o$ such that $nx = y \in Z^r$. We map A to Q^r by $x \to \frac{y}{n}$. This is plainly a monomorphic embedding agreeing with the standard embedding of Z^r in Q^r. The converse is evident.

We will henceforth regard all torsion-free groups of rank r as embedded according to lemma 3. 1. With this convention we are able to prove

3. 2 THEOREM. *A torsion-free group A of rank r is P-divisible if and only if $Q_P^r \subseteq A \subseteq Q^r$.*

PROOF. Let $Q_P^r \subseteq A \subseteq Q^r$. Now for any $x \in Q^r$, $\exists$ an integer n, prime to P, with $nx \in Q_P^r$ and plainly Q_P^r is P-divisible. In particular let $x \in A$ and let $p \in P$. Then $nx = pb$, $b \in Q_P^r \subseteq A$. Let u, v be integers such that $1 = un + vp$. Then $x = unx + vpx = p(ub + vx)$ and $ub + vx \in A$. Thus A is P-divisible.

Conversely, let A be a P-divisible torsion-free group of rank r. Then $Z^r \subseteq A \subseteq Q^r$. Since A is P-divisible and contains Z^r it obviously contains Q_P^r. Hence $Q_P^r \subseteq A \subseteq Q^r$.

Before we discuss further P-divisible torsion-free groups we introduce a few more definitions and establish some elementary results.

3. 3 DEFINITION. We shall say that a group is a *P-group* if it has only elements of orders n, $n \in P^*$.

3. 4 DEFINITION. We shall say that A is *P-embedded* in B, written as $A \underset{P}{\subseteqq} B$, or B is a *P-extension* of A, if B/A is a P-group. If P is the set of all primes, we write $A \underset{t}{\subseteqq} B$, and refer to B as a t-extension of A.

3. 5 DEFINITION. B is called an *essential extension* of A, written as $A \underset{e}{\subseteqq} B$, if, for any $H \subseteqq B$, the relation $H \cap A = o$ implies that $H = o$. (See [4].)

Let the groups A_i, B_i, $i \in I$, be subgroups of a group B with $A_i \subseteqq B_i$.

3. 6 PROPOSITION. *If* $A_i \underset{P}{\subseteqq} B_i$, *then* $\Sigma A_i \underset{P}{\subseteqq} \Sigma B_i$.

PROOF. Let $\sum b_i, b_i \in B_i$, be a typical element of ΣB_i. Let $\lambda_i = \lambda_{A_i}(b_i)$ be the *height* of b_i over A_i, that is, the minimum positive integer k such that $kb_i \in A_i$. Since $b_i = 0$ for almost all i, $\lambda_i = 1$ for almost all i. Thus $\lambda = $ l. c. m. (λ_i) exists. Then $\lambda(\Sigma b_i) \in \Sigma A_i$, and clearly $\lambda \in P^*$.

3. 7 PROPOSITION. *If* $A_i \underset{P}{\subseteqq} B_i$, *then*

(i) $\cap A_i \underset{P}{\subseteqq} \cap B_i$ *if the indexing set I is finite;*

(ii) $\cap A_i \underset{P}{\subseteqq} \cap B_i$ *provided* $\cap A_i \underset{t}{\subseteqq} \cap B_i$.

PROOF. We shall prove (ii); (i) follows as a particular case of (ii).

Let $b \in \cap B_i$ and let $A = \cap A_i$, $\lambda_i = \lambda_{A_i}(b)$, $\lambda = \lambda_A(b)$. Since $A \subseteqq A_i$, $\lambda_i | \lambda$ so $\exists$ only finitely many different λ_i and l. c. m. $(\lambda_i) = \mu$ is defined with $\mu | \lambda$. Then $\mu b \in A_i$, each i, $\mu b \in A$, $\lambda | \mu$, whence $\lambda = \mu$; and clearly $\mu \in P^*$, since $\lambda_i \in P^*$.

3. 8 REMARK. That $\cap A_i \underset{t}{\nsubseteqq} \cap B_i$ is possible is clear from the example: $pZ \underset{P}{\subseteqq} Z$, each p, but $\cap pZ = o$, where P is taken to be the set of all primes.

3. 9 PROPOSITION. *If* $A_i \underset{e}{\subseteqq} B_i$, *then*

(i) $\cap A_i \underset{e}{\subseteqq} \cap B_i$ *if the indexing set I is finite:*

(ii) $\cap A_i \underset{e}{\subseteqq} \cap B_i$ *provided* $\cap A_i \underset{t}{\subseteqq} \cap B_i$.

PROOF. (i) Let i range over the integers $1 \leqq i \leqq k$. We shall prove the proposition by induction on k. It is trivial for $k = 1$, so we assume it true for $k-1$. Now let $H \cap \bigcap_{i=1}^{k} A_i = o$, $H \subseteqq \bigcap_{i=1}^{k} B_i$, and set $H \cap A_k = L$. Then $L \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i = o$, $L \subseteqq \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i$, so that, by the inductive hypothesis, $L = o$. Thus $H \cap A_k = o$, $H \subseteqq B_k$, so that $H = o$, and the inductive step is established.

(ii) Let $H \cap \bigcap A_i = o$, $H \subseteqq \cap B_i$. Let h be any element of H, and let $\lambda_i = \lambda_{A_i}(h)$, $\lambda = \lambda_A(h)$, where $A = \cap A_i$. Then $\lambda h = o$; moreover, $\exists$ only finitely many different λ_i and $\lambda =$ l. c. m. (λ_{i_k}). We renumber the A's and B's if necessary so that $\lambda =$ l. c. m. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Now $\{h\} \cap \bigcap_{i=1}^{k} A_i = o$, $\{h\} \subseteqq \bigcap_{i=1}^{k} B_i$, where $\{h\}$ is the cyclic subgroup of H generated by h. So $\{h\} = o$ from (i). Thus $h = o$. Since h is an arbitrary element of H, it follows that $H = o$.

3. 10 REMARK. That (ii) is not true without proviso can be shown by means of the example given in 3. 8.

3. 11 PROPOSITION. *If $A \underset{t}{\subseteq} B$ and B is torsion-free then B is an essential extension of A.*

PROOF. Let $H \subseteq B$ and $H \cap A = o$. Then $A \underset{t}{\subseteq} A \oplus H$, whence H is a torsion group, so that $H = o$.

We now return to the consideration of torsion-free groups X of rank r such that $Z^r \subseteq X \subseteq Q^r$.

3. 12 LEMMA. *Let X be a torsion-free group of rank r, let P be a family of primes and let P' be the complementary family. Then*

$$X = Y + Y',\ Z^r \subseteq Y \subseteq Q^r_P,\ Z^r \subseteq Y' \subseteq Q^r_{P'}.$$

Moreover Y, Y' are determined by X by means of-therela tions $Y = X \cap Q^r_P$, $Y' = X \cap Q^r_{P'}$.

PROOF. Suppose that $X = Y + Y' = W + W'$, $Z^r \subseteq Y$, $W \subseteq Q^r_P$, $Z^r \subseteq Y'$, $W' \subseteq Q^r_{P'}$. Then $\dfrac{X}{Z^r} = \dfrac{Y}{Z^r} \oplus \dfrac{Y'}{Z^r} = \dfrac{W}{Z^r} \oplus \dfrac{W'}{Z^r}$ since $Y \cap Y' = W \cap W' = Z^r$. But $\dfrac{X}{Z^r}$ is a torsion group, $\dfrac{Y}{Z^r}$, $\dfrac{W}{Z^r}$ are P-torsion groups, $\dfrac{X'}{Z^r}$, $\dfrac{W'}{Z^r}$ are P'-torsion groups. Thus $\dfrac{Y}{Z^r} = \dfrac{W}{Z^r}$ is the P-torsion subgroup of $\dfrac{X}{Z^r}$ and similarly $\dfrac{Y'}{Z^r} = \dfrac{W'}{Z^r}$. It follows that $Y = W$, $Y' = W'$.

Now to prove that $X = (X \cap Q^r_P) + (X \cap Q^r_{P'})$, it is sufficient to observe that the P-component of the torsion group $\dfrac{X}{Z^r}$ is precisely $\dfrac{X \cap Q^r_P}{Z^r}$. We omit the demonstration of this elementary result.

3. 13 THEOREM (i) *To each A, $Z^r \subseteq A \subseteq Q^r$, $\exists$ a unique B, $Q^r_P \subseteq B \subseteq Q^r$, such that B is a P-divisible P-extension of A.*

(ii) *For any B, $Z^r \subseteq B \subseteq Q^r$, $\exists$ a smallest $A = B_0$ such that $A \underset{P}{\subseteq} B$ and $Z^r \subseteq A \subseteq Q^r$. Then $B_0 = B \cap Q^r_{P'}$, and the set of A such that $A \underset{P}{\subseteq} B$ coincides with the set of groups (uniquely) expressible as $B_0 + G$, where $Z^r \subseteq G \subseteq Q^r_P \cap B$.*

PROOF (i) We define $B = \{x \in Q^r, \lambda_A(x) \in P^*\}$. B is a group for if $\lambda_A(x_i) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, then $\lambda_1\lambda_2(x_1 - x_2) \in A$, $\lambda_A(x_1 - x_2) | \lambda_1\lambda_2$, so $\lambda_A(x_1 - x_2) \in P^*$. It is obviously P-divisible and a P-extension of A, and so, by theorem 3. 2, $Q^r_P \subseteq B \subseteq Q^r$. Now let C, $Q^r_P \subseteq C \subseteq Q^r$, be a P-divisible P-extension of A. Let $x \in B$; then $\lambda x \in A \subseteq C$, for some $\lambda \in P^*$, and so $\exists\ y \in C$ with $\lambda x = \lambda y$; but Q^r is torsion-free, so $x = y$. Hence $B \subseteq C$. Let $x \in C$; since C is a P-extension of A, $\lambda_A(x) \in P^*$, so $x \in B$, and $C \subseteq B$. Thus $B = C$.

(ii) Since B is a P-extension of itself, it follows from 3. 7 that there exists a minimum A such that $Z^r \subseteq A \subseteq Q^r$ and $A \underset{P}{\subseteq} B$. For let $\{A_i\}$ be the set of all groups A_i

such that $Z^r \subseteqq A_i \subseteqq Q^r$ and $A_i \underset{P}{\subseteqq} B$. Since $\cap A_i \supseteqq Z^r$ and $B/Z^r \subseteqq Q^r/Z^r$ which is a torsion group, it follows that $\cap A_i \underset{t}{\subseteqq} B$. Thus if $B_0 = \cap A_i$, $B_0 \underset{P}{\subseteqq} B$ and is plainly the smallest A satisfying $A \underset{P}{\subseteqq} B$, $Z^r \subseteqq A \subseteqq Q^r$. We shall now show that $B_0 = B \cap Q^r_{P'}$. Let $B \cap Q^r_{P'} = C$. Then we must prove

(a) $C \underset{P}{\subseteqq} B$,

(b) if $Z^r \subseteqq D \subseteqq Q^r$ and $D \underset{P}{\subseteqq} B$, then $C \subseteqq D$.

Let $x \in B$, $x = (x_i) = \left(\frac{a_i}{b_i}\right)$, $b_i = m_i n_i$, where $m_i \in P^*$, $n_i \in P'^*$; let us without loss of generality suppose that $x_i \neq o$ only for $i = 1, 2, \ldots, k$ and put $m_1 m_2 \ldots m_k = m$. Then $mx \in C$, $m \in P^*$, which proves (a). Now suppose $D \underset{P}{\subseteqq} B$. Then, if $x \in C$, $x = \left(\frac{a_i}{b_i}\right)$, $b_i \in P'^*$. Now $wx \in D$ for some $w \in P^*$ and, if b is the product of the b_i, $b \in P'^*$, so that there exist integers u, v such that $wu - bv = 1$. Let $v_i = \frac{bv}{b_i}$. Then $wux - (v_i a_i) = \left(\frac{wua_i - v_i b_i a_i}{b_i}\right) = \left(\frac{a_i}{b_i}\right) = x$. But $wx \in D$ and $(v_i a_i) \in Z^r \subseteqq D$, so that $x \in D$ and (b) is proved. Now by 3.12, we have $A = A \cap Q^r_{P'} + A \cap Q^r_P$; thus also $A = B_0 + A \cap Q^r_P$ and the uniqueness of 3.12 ensures that the representation of A as $B_0 + G$, $Z^r \subseteqq G \subseteqq Q^r_P \cap B$ is unique. Conversely it is plain that if $Z^r \subseteqq G \subseteqq Q^r_P \cap B$, then $B_0 + G \underset{P}{\subseteqq} B$.

Notice that we have proved that, for any $A \underset{P}{\subseteqq} B$, the group $A \cap Q^r_{P'}$ depends only on B, being in fact B_0.

3. 14 COROLLARY. *If B is P-divisible, then $B = B_0 + Q^r_P$ and $A \underset{P}{\subseteqq} B$ if and only if $A = B_0 + G$ for some G, $Z^r \subseteqq G \subseteqq Q^r_P$.*

3. 15 REMARK. In Theorem 3.13 (i) B is an essential extension of A, being a torsion-free t-extension. Thus B is a maximal essential P-extension or a minimal P-injective P-extension as will be shown in the next section.

We shall now discuss the *functorial nature* of these maximal essential extensions. That is to say, we consider the category $\mathscr{A}_r$ of abelian groups A such that $Z^r \subseteqq A \subseteqq Q^r$ together with their homomorphisms; and we associate with each $A \in \mathscr{A}_r$ its unique P-divisible P-extension $B = F(A) \in \mathscr{A}_r$. We wish to associate with each homomorphism $\Phi: A_1 \to A_2$ in $\mathscr{A}_r$ a homomorphism $F(\Phi): F(A_1) \to F(A_2)$ in a functorial manner.

First, we prove a lemma.

3. 16 LEMMA. *Let X, Y, Z be abelian groups such that $X \underset{t}{\subseteqq} Y$, and Z is torsion-free. If two homomorphisms $\Phi_1, \Phi_2: Y \to Z$ agree on X, then they agree.*

PROOF. Let $y \in Y$, then $ky \in X$ for some integer k. Then $(ky)\Phi_1 = (ky)\Phi_2$ or $k(y\Phi_1) = k(y\Phi_2)$, so that $y\Phi_1 = y\Phi_2$ since Z is torsion-free.

We mention an obvious consequence of this elementary lemma.

3. 17 PROPOSITION. *If A, B are between Z^r and Q^r and if $\Phi: A \to B$ is the identity on Z then Φ is an inclusion map.*

PROOF. Let j_A, j_B denote the inclusions of A, B in Q^r. Now conside j_A and $\Phi j_B: A \to Q^r$. They agree on Z^r so, by lemma 3.16, $j_A = \Phi j_B$. This shows that qua elements of Q^r, a and $a\Phi$ are identical. This means that Φ is an inclusion map.

As a consequence of this proposition we may infer that if $Z^r \subseteqq A$, $B \subseteqq Q^r$ and if there is an isomorphism $A \cong B$ which is the identity on Z^r then $A = B$ and the isomorphism is the identity. This establishes the uniqueness, in a weak sense, of the embedding given by lemma 3. 1; if $Z^r \subseteqq A$, $B \subseteqq Q^r$ and $A \neq B$ then, of course there is no isomorphism connecting A and B which is the identity on Z^r.

However, our main application of lemma 3. 16 is

3. 18 THEOREM. *For any homomorphism $\Phi: A_1 \to A_2$, $\exists$ a unique homomorphism $F(\Phi): F(A_1) \to F(A_2)$ such that the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \subseteqq & F(A_1) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow F(\Phi) \\ A_2 & \subseteqq & F(A_2) \end{array}$$

Also the kernel of $F(\Phi)$ is a P-divisible P-extension of the kernel of Φ.

PROOF. That $F(\Phi)$ exists such that the diagram commutes follows at once from theorem 4. 2 below. $F(\Phi)$, moreover, is unique because any two candidates for $F(\Phi)$ agree on A_1 and hence on $F(A_1)$ by 3. 16.

Now let $x \in \ker F(\Phi)$. Then $\exists y \in F(A_1)$, $x = py$, $p \in P$. Then $xF(\Phi) = 0$ implies that $p(yF(\Phi)) = 0$, whence $yF(\Phi) = 0$ and so $y \in \ker F(\Phi)$. Thus $\ker F(\Phi)$ is P-divisible. Also $\exists \lambda \in P^*$, such that $\lambda x \in A_1$, and $(\lambda x)\Phi = o$ so that $\lambda x \in \ker \Phi$. Hence $\ker F(\Phi)$ is a P-extension of $\ker \Phi$.

This theorem makes the functorial nature of F quite clear. For plainly if $\Psi: A_2 \to A_3$ then $F(\Phi)F(\Psi)$ extends $\Phi\Psi$ so that $F(\Phi)F(\Psi) = F(\Phi\Psi)$ and obviously $F(1) = 1$. Also it is plain from theorem 3. 18 that the inclusion $A \subseteqq F(A)$ is a natural transformation from the identity to F.

4. Remarks on P-divisible groups and P-extensions

In this section we indicate the obvious generalization of the standard notions of divisible groups and group extensions to P-divisible groups and P-extensions.

4. 1 DEFINITION. We define a group G to be *P-injective* if for any $A \underset{P}{\subseteqq} B$ and any homomorphism $\Phi: A \to G$, $\exists$ an $\alpha: B \to G$, such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & A & \to & B \\ & & \Phi \downarrow & \swarrow \alpha & \\ & & G & & \end{array}$$

Then we have the following generalizations of standard theorems.

4. 2 THEOREM. *The group G is P-injective if and only if it is P-divisible.*

PROOF. Let G be P-injective, and let g be any element of G. Let us consider the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & pZ & \to & Z \\ & & \Phi \downarrow & \swarrow \alpha & \\ & & G & & \end{array}$$

in which $p \in P$, Φ maps p into g. Then $g = p\Phi = p\alpha = p(1\alpha)$. Hence G is p-divisible, $p \in P$, so G is P-divisible.

Conversely, let G be P-divisible and $\Phi: A \to G$, $A \underset{P}{\subseteqq} B$. Let us consider the pairs (A', Φ') where $A \subseteqq A' \subseteqq B$ and $\Phi': A' \to G$ agrees with Φ on A. We order these by $(A', \Phi') < (A'', \Phi'')$ if $A' \subseteqq A''$ and $\Phi''|A' = \Phi'$. This is inductive since $(\cup A_i, \Psi)$ is an upper bound of the chain (A_i, Φ_i), where $\Psi|A_i = \Phi_i$. Let $\bar{A}$ $(, \bar{\Phi})$ be a maximal extension of Φ. If $\bar{A} \neq B$, $\exists\, b \in B - \bar{A}$ and $\lambda_{\bar{A}}(b) = n \in P^*$ such that $nb = \bar{a} \in \bar{A}$. Since G is P-divisible, $\exists\, g \in G$ with $ng = \bar{a}\bar{\Phi}$. Extend $(\bar{A}, \bar{\Phi})$ to $((\bar{A}, b), \Psi)$ by setting $b\Psi = g$. This contradiction shows that $B = \bar{A}$.

We observe that a P-injective group is injective for a class of extensions broader than that of P-extensions. Namely if $A \subseteqq B$ and B/A has no P'-torsion, then, for a P-divisible group G any homomorphism $A \to G$ is extendable to B. The proof of this assertion simply consists of an elementary elaboration of the argument given above.

4. 3 THEOREM. *Any group A can be P-embedded in some P-injective group B.*

PROOF. Let us take a presentation of A as $o \to R \to F \to A \to o$. Replacing each Z in F by Q_P we embed F in G, $F \underset{P}{\subseteqq} G$, and G is P-divisible. Now

(i) the homomorphic image of a P-divisible group is P-divisible,
(ii) if $S \subseteqq K \underset{P}{\subseteqq} L$, then $K/S \underset{P}{\subseteqq} L/S$.

Thus $A = F/R \underset{P}{\subseteqq} G/R$ and G/R is P-divisible.

4. 4 THEOREM. *Given $A \underset{P}{\subseteqq} B$, $\exists\, H \subseteqq B$, such that $H \cap A = o$, and $A \oplus H/H \underset{Pe}{\subseteqq} B/H$.*

PROOF.[2] We order H with $H \cap A = o$ inductively and pick a maximal H. Now suppose $L/H \subseteqq B/H$, $A \oplus H/H \cap L/H = o$. Then $H \subseteqq L$ and $L \cap A = o$ so $L = H$.

4.5 THEOREM. *The following statements are equivalent:*
(i) *A is P-divisible.*
(ii) *A has no proper essential P-extension.*
(iii) *$A \underset{P}{\subseteqq} B$ implies that A is a direct summand in B.*

PROOF. (i)$\Rightarrow$(ii). Let $A \underset{P}{\subseteqq} B$ be essential. We extend $A \xrightarrow{1} A$ to $B \xrightarrow{\Psi} A$. Then $\ker \Psi \cap A = o$, so $\ker \Psi = o$. Thus Ψ is an isomorphism and $A = B$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). By 4. 4 $\exists\, H$, $H \cap A = o$, $A \oplus H/H \underset{Pe}{\subseteqq} B/H$. Hence $B = A \oplus H$.

[2] We are here and subsequently following ECKMANN and SCHOPF [4].

(iii)$\Rightarrow$(i). Let us P-embed A in a P-divisible group B. Then A being a direct summand of B is P-divisible.

Now let $A \underset{P}{\subseteq} G$ where G is P-injective and let $A \underset{Pe}{\subseteq} B$. Then the inclusion map $A \to G$ may be extended to a map $\Psi : B \to G$ which is monomorphic as B is an essential extension of A. Thus we may embed B in G by a map which is the identity on A. We regard all essential P-extensions of A as so embedded. Since the union of a chain of essential P-extensions of A, all contained in G, is again an essential P-extension, there exist maximal essential P-extensions of A in G. We describe a P-injective P-extension of A as *minimal* if it may be embedded in any other P-injective P-extension of A by a map which is the identity on A.

4. 6 THEOREM. *The extension B is a maximal essential P-extension of A if and only if it is a minimal P-injective P-extension of A.*

PROOF. Let B be a maximal essential P-extension of A and let C be an essential P-extension of B, which we may assume embedded in G. Since an essential extension of an essential extension of A is an essential extension of A, and a P-extension of a P-extension of A is a P-extension of A, it follows that C is an essential P-extension of A. Thus, by the maximality of B, $C = B$; and so, by (4. 5), B is P-injective. In fact we embedded B in G where G was a fixed but arbitrary P-injective P-extension of A, so B is minimal.

Conversely, let C be a minimal P-injective P-extension of A. Then C may be embedded in B, so that C is an essential P-extension of A. Also B may be embedded in C, since B is minimal, so that, by the maximality of B qua essential extension, $B = C$. This proves the theorem and also shows that the minimal P-injective P-extension of A is essentially unique.

Of course, Theorem 3. 13 discussed the special case of torsion-free groups of rank r. The group B there constructed as a P-divisible P-extension of A is certainly minimal and is thus the maximal essential P-extension of A. A special feature of the situation discussed in Theorem 3. 13 is that if $A \underset{P}{\subseteq} G$ where G is P-injective and *torsion-free* and if $A \underset{Pe}{\subseteq} B$, then the embedding of B in G is unique (see (3. 16)).

We close by remarking that (2. 5) leads to an evident characterization of P-divisible ($=P$-injective) groups. For given

$$0 \to A_t \to A \to A_f \to 0$$

then A is P-divisible if and only if A_t and A_f are P-divisible. P-divisible torsion-free groups are characterized in Theorem 3. 2. On the other hand, let the torsion group T be expressed (canonically) as $T_P \oplus T_{P'}$, where T_P, $T_{P'}$ are its P-component, P'-component respectively. $T_{P'}$ is always P-divisible; on the other hand T_P is P-divisible if and only if it is divisible, that is, if and only if it is a direct sum of groups Z_{p^∞}, $p \in P$.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
BIRMINGHAM, ENGLAND
DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
RAJSHAHI, PAKISTAN

(Received 10 January 1962)

References

[1] G. AUMANN, Über Räume mit Mittelbildungen, *Math. Annalen,* **119** (1943), pp. 210–215.
[2] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological Algebra,* (Princeton University Press, 1956).
[3] B. ECKMANN, Räume mit Mittelbildungen, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), pp. 329.
[4] B. ECKMANN, and A. SCHOPF, Über injective Moduln, *Archiv d. Math.*, **4** (1953), pp. 75–78.
[5] B. ECKMANN, T. GANEA and P. J. HILTON, Generalized means, *Studies in mathematical analysis and related topics, Stanford University Press* (1962), pp. 82–92.
[6] L. FUCHS, Notes on Abelian Groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), pp. 117–125.

COMPARATIVE PRIME-NUMBER THEORY. VII

(THE PROBLEM OF SIGN-CHANGES IN THE GENERAL CASE)

By

S. KNAPOWSKI (Poznań) and P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

1. In the previous two papers of this series we proved under the supposition that no $L(s, \chi)$ functions with $\chi \neq \chi_0 \bmod k$ $(s = \sigma + it)$ vanish for[1]

$$\sigma > 1/2, \quad |t| \leqq c_1 k^{10} \tag{1.1}$$

and

$$\sigma = 1/2, \quad |t| \leqq A(k) \quad (\leqq 1) \tag{1.2}$$

oscillation theorems for

$$\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$$

and

$$\Pi(x, k, l_1) - \Pi(x, k, l_2)$$

in the general case when only $l_1 \neq l_2$ was required; here as usual

$$\psi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \bmod k}} \Lambda(n) \tag{1.3}$$

$$\Pi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \bmod k}} \frac{\Lambda(n)}{\log n}. \tag{1.4}$$

As mentioned l. c. these results yield an explicit D depending only upon k such that differences of the functions in (1. 3) resp. (1. 4) have for $1 \leqq x \leqq D$ at least one sign-change. The aim of the present paper is, as mentioned already in paper V of this series, to prove this result for ψ directly, requiring only what we called Haselgrove's assumption (see (1. 5) below). At the same time we shall show that the differences $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$ actually change their sign infinitely often. Our results can be formulated as follows.

THEOREM 1. 1. *If for a k no $L(s, \chi) \bmod k$ vanish for $0 < \sigma < 1$, then each function $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$, $l_1 \neq l_2$, changes his sign infinitely often for $1 \leqq x < +\infty$.*

As to the first sign-change we have

THEOREM 1. 2. *If for a k no $L(s, \chi) \bmod k$ vanish for*

$$0 < \sigma < 1, \quad |t| \leqq A(k) \quad (\leqq 1),$$

[1] We remind the reader that, as in the previous papers of this series, $c_1, c_2, \ldots$ denote positive explicitely calculable numerical constants, $(l, k) = 1$, further $e_1(x) = e^x$ and $e_\nu(x) = e_1(e_{\nu-1}(x))$, $\log_1 x = \log x$, $\log_\nu x = \log(\log_{\nu-1} x)$.

then all functions

$$\psi(x, k, l_1)-\psi(x, k, l_2), \quad l_1 \neq l_2,$$

change their sign in the interval

$$1 \leqq x \leqq \max\left(e_2(k^{c_2}), e_2\left(\frac{2}{A(k)^3}\right)\right)$$

with a sufficiently large c_2.

Both Theorems 1. 1 and 1. 2 are easy corollaries of the following, stronger

THEOREM. 1. 3. *If for a* k *no* $L(s, \chi)$ mod k *vanishes for*

$$0<\sigma<1, \quad |t| \leqq A(k) \quad (\leqq 1) \tag{1. 5}$$

then all functions

$$\psi(x, k, l_1)-\psi(x, k, l_2), \quad l_1 \neq l_2, \tag{1. 6}$$

change their sign in the interval

$$\omega \leqq x \leqq e^{2\sqrt{\omega}}$$

if only

$$\omega \geqq \max\left(e_1(k^{c_2}), e_1\left(\frac{2}{A(k)^3}\right)\right) \tag{1. 7}$$

with a sufficiently large c_2.

As mentioned in paper I of this series, the problem of the first sign-change was the starting point of the present investigations; this motivates in itself why a separate paper is devoted to its study. The proof of Theorem 1. 3 is less complicated than those in papers V and VI, though it needs the weakest unproved assumption. The main difficulties are analogous to those in the latter papers but owing to the special situation the use of an appropriately chosen *two-sided* theorem (lemma I below) could meet the difficulties. The present proof breaks down for $\Pi(x, k, l_1)-\Pi(x, k, l_2)$ as well as for $\pi(x, k, l_1)-\pi(x, k, l_2)$.

As mentioned in paper I of this series, as far as we know no previously known methods can lead to results similar in character to our theorems.

As to the c_ν's, c_2, c_3 and c_5 matter. c_3 will be chosen sufficiently large, then c_5 large in dependence upon c_3 and finally c_2 in dependence upon c_3 and c_5.

2. We shall need the following lemmata.

LEMMA I. *For* $r>e_1(k^{c_3})$ *and* $l_1 \neq l_2$ *the inequality*

$$\int_1^r \frac{|\psi(v, k, l_1)-\psi(v, k, l_2)|}{v}\, dv > r^{1/4}$$

holds.

This is a weaker form of a result found by the first of us (see KNAPOWSKI [1]).[2]

[2] Here the same lower bound was proved for

$$\int_{re_1(-\log^{0,9} r)}^{r} v^{-1}|\psi(v, k, l_1)-\psi(v, k, l_2)|\,dv.$$

Further we need the

LEMMA II. *In the vertical strip* $\frac{1}{100} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{50}$ *there is a broken line* V, *symmetrical to the real axis, consisting alternately of horizontal and vertical segments, each horizontal strip of width* 1 *containing at most one horizontal segment of* V, *monotonically increasing from* $-\infty$ *to* $+\infty$, *so that on* V *the inequality*

$$\left|\frac{L'}{L}(s, \chi)\right| \leqq c_4 \varphi(k) \log^3 k(2+|t|) \tag{2.1}$$

holds.

Since the proof is mutatis mutandis identical with that of Appendix III in the book of one of us (see TURÁN [1]), we shall omit it.

3. We can deduce from the above lemmata the

LEMMA III. *Suppose that for a certain* (l_1^*, l_2^*)*-pair the function*

$$\psi(x, k, l_1^*) - \psi(x, k, l_2^*) \tag{3.1}$$

does not change his sign with an

$$\omega \geqq e_1(k^{c_5}) \tag{3.2}$$

in the interval $\omega \leqq x \leqq 2\omega^5$. *Then — perhaps after changing* l_1^* *and* l_2^* *— we have the inequality*

$$\frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Re} \sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1^*) - \bar{\chi}(l_2^*)\right) \sum\nolimits'_{\varrho(\chi)} \frac{(2\omega^5)^\varrho}{\varrho^{1000}} > c_6 \omega^{5/4},$$

where the dash means that the summation is to be extended over the non-trivial zeros right to V.

For the proof we start from the integral

$$H(\omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{(2\omega^5)^s}{s^{1000}} \frac{1}{\varphi(k)} \left\{ \sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1^*) - \bar{\chi}(l_2^*)\right) \frac{L'}{L}(s, \chi) \right\} ds. \tag{3.3}$$

Inserting the Dirichlet-series representation we get

$$H(\omega) = \frac{1}{999!} \left(\sum_{\substack{n \leqq 2\omega^5 \\ n \equiv l_2^* \bmod k}} \Lambda(n) \cdot \log^{999} \frac{2\omega^5}{n} - \sum_{\substack{n \leqq 2\omega^5 \\ n \equiv l_1^* \bmod k}} \Lambda(n) \cdot \log^{999} \frac{2\omega^5}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{999!} \int_1^{2\omega^5} \log^{999} \frac{2\omega^5}{x} d_x \left(\psi(x, k, l_2^*) - \psi(x, k, l_1^*)\right) =$$

$$= \frac{1}{999!} \int_1^{2\omega^5} \left(\psi(x, k, l_1^*) - \psi(x, k, l_2^*)\right) d_x \left(\log^{999} \frac{2\omega^5}{x} \right).$$

Using (3. 1) this gives

$$|H(\omega)| \geqq \frac{1}{998!}\int_{\omega}^{2\omega^5} |\psi(x,k,l_1^*)-\psi(x,k,l_2^*)|\cdot\log^{998}\frac{2\omega^5}{x}\cdot\frac{dx}{x} -$$

$$-\frac{1}{998!}\int_{1}^{\omega} |\psi(x,k,l_1^*)-\psi(x,k,l_2^*)|\cdot\log^{998}\frac{2\omega^5}{x}\cdot\frac{dx}{x} >$$

$$> c_7\int_{\omega}^{\omega^5}\frac{|\psi(x,k,l_1^*)-\psi(x,k,l_2^*)|}{x}\,dx - c_8\omega\log^{999}\omega,$$

and using Lemma I (if c_5 is sufficiently large in dependence upon c_3)

$$|H(\omega)| > c_9\omega^{5/4}. \tag{3. 4}$$

On the other hand Cauchy's integral theorem gives at once

$$H(\omega) = \frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\left(\bar{\chi}(l_1^*)-\bar{\chi}(l_2^*)\right)\sum_{\varrho(\chi)\atop \varrho \text{ right to } V}\frac{(2\omega^5)^{\varrho}}{\varrho^{1000}} + \tag{3. 5}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{V}\frac{(2\omega^5)^s}{s^{1000}}\frac{1}{\varphi(k)}\left\{\sum_{\chi}\left(\bar{\chi}(l_1^*)-\bar{\chi}(l_2^*)\right)\frac{L'}{L}(s,\chi)\right\}ds.$$

The last integral is owing to Lemma II absolutely

$$< c_{10}\omega^{1/10}k\log^3 k$$

and owing to (3. 2)

$$< c_{11}\omega^{1/8}.$$

This, (3. 4) and (3. 5) give

$$\left|\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\left(\bar{\chi}(l_1^*)-\bar{\chi}(l_2^*)\right)\sum_{\varrho(\chi)\atop \varrho \text{ right to } V}\frac{(2\omega^5)^{\varrho}}{\varrho^{1000}}\right| > c_{12}\omega^{5/4}, \tag{3. 6}$$

choosing c_5 sufficiently large. Taking in account the symmetry of V to the real axis, the sum on the left of (3. 6) is *real* and hence the lemma follows.

4. We shall need two more lemmata.

LEMMA IV. *Supposing* (1. 5) *we have for*

$$\tau \geqq \max\left(c_{13}, e_2(k), e_2\left(\frac{1}{A(k)^3}\right)\right) \tag{4. 1}$$

the existence of a y_1 *with*

$$\frac{1}{20}\log_2\tau \leqq y_1 \leqq \frac{1}{10}\log_2\tau \tag{4. 2}$$

such that for all $\varrho \overset{\text{def}}{=} \sigma_\varrho + it_\varrho$ *non-trivial zeros of all L-functions* mod k *the inequality*

$$\pi \geqq \left| \arg \frac{e^{it_\varrho y_1}}{\varrho} \right| \geqq c_{14} \frac{A(k)^3}{k(1+|t_\varrho|)^6 \log^3 k(2+|t_\varrho|)} \tag{4.3}$$

holds.

For the proof see paper II of this series.

Further let m be a non-negative integer and

$$1 = |z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n| \tag{4.4}$$

so that with a $0 < \varkappa \leqq \frac{\pi}{2}$ the inequality

$$\varkappa \leqq |\arg z_j| \leqq \pi \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.5}$$

holds. Let the index h be such that

$$|z_h| \geqq \frac{4n}{m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{4.6}$$

and

$$B \overset{\text{def}}{=} \min_{h \leqq l \leqq n} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{l} b_j. \tag{4.7}$$

Then we have the

LEMMA V. *If* $B > 0$, *we have integer* v_1 *and* v_2 *numbers with*

$$m+1 \leqq v_1, \quad v_2 \leqq m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)$$

so that

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{v_1} \geqq \frac{B}{2n+1} \left(\frac{n}{24\left(m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)} \right)^{2n} \cdot \left(\frac{|z_h|}{2} \right)^{m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)}$$

and

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{v_2} \leqq -\frac{B}{2n+1} \left(\frac{n}{24\left(m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)} \right)^{2n} \cdot \left(\frac{|z_h|}{2} \right)^{m + n\left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)}$$

For the proof see our paper [5], Theorem 4. 1.

5. Next we turn to the proof of Theorem 1. 3. Suppose that for a certain (l_1^*, l_2^*)-pair $\psi(x, k, l_1^*) - \psi(x, k, l_2^*)$ does not change his sign in the interval

$$\omega \leqq x \leqq 2\omega^5 e^{\sqrt{\omega}}, \tag{5.1}$$

where

$$\omega \geqq \max\left(e_1(k^{c_2}), e_1\left(\frac{2}{A(k)^3}\right)\right). \tag{5.2}$$

Lemma IV is applicable with $\tau = e^{\sqrt{\omega}}$ (the condition (4. 1) being amply satisfied owing to (5. 2)) and hence there is a y_1 with

$$\frac{1}{40}\log\omega \leqq y_1 \leqq \frac{1}{20}\log\omega \tag{5.3}$$

such that (4. 3) holds. Fixing this y_1 let the integer ν be momentaneously restricted only by

$$\frac{\sqrt{\omega}}{y_1} - \omega^{0,4} \leqq \nu \leqq \frac{\sqrt{\omega}}{y_1}. \tag{5.4}$$

Applying Lemma III we obtain with a well-determined order of l_1^* and l_2^*

$$S \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Re} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1^*) - \bar{\chi}(l_2^*)) \cdot \sum\nolimits'_{\varrho(\chi)} \frac{(2\omega^5)^\varrho}{\varrho^{1000}} > c_6\omega^{5/4}, \tag{5.5}$$

where the dash means that the summation is to be extended over the ϱ's right to V. Then we start from the integral

$$J_\nu \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{(2\omega^5)^s}{s^{1000}} \left(\frac{e^{y_1 s}}{s}\right)^\nu \cdot \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \left\{(\bar{\chi}(l_1^*) - \bar{\chi}(l_2^*))\frac{L'}{L}(s,\chi)\right\} ds. \tag{5.6}$$

Inserting the Dirichlet-series we get

$$J_\nu = \left(\sum_{\substack{n \leqq e^{\nu y_1}\cdot 2\omega^5 \\ n \equiv l_2^* \bmod k}} \Lambda(n)\log^{\nu+999}\frac{e^{\nu y_1}\cdot 2\omega^5}{n} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{n \leqq e^{\nu y_1}\cdot 2\omega^5 \\ n \equiv l_1^* \bmod k}} \Lambda(n)\log^{\nu+999}\frac{e^{\nu y_1}\cdot 2\omega^5}{n} \right) \frac{1}{(\nu+999)!} =$$

$$= \frac{1}{(\nu+999)!}\int_1^{e^{\nu y_1}\cdot 2\omega^5} \log^{\nu+999}\frac{e^{\nu y_1}\cdot 2\omega^5}{x}\, d_x(\psi(x,k,l_2^*) - \psi(x,k,l_1^*)) = \tag{5.7}$$

$$= \frac{1}{(\nu+999)!}\int_\omega^{e^{\nu y_1}\cdot 2\omega^5} (\psi(x,k,l_1^*) - \psi(x,k,l_2^*))\, d_x\left(\log^{\nu+999}\frac{e^{\nu y_1}\cdot 2\omega^5}{x}\right) +$$

$$+ O\left(e_1\left(41\frac{\sqrt{\omega}}{\log\omega}\log_2\omega\right)\right) \overset{\text{def}}{=} J_\nu' + O\left(e_1\left(41\frac{\sqrt{\omega}}{\log\omega}\log_2\omega\right)\right).$$

Owing to (5. 4) and (5. 2) we have

$$e^{\nu y_1}\cdot 2\omega^5 \leqq 2\omega^5 \cdot e^{\sqrt{\omega}} < e^{2\sqrt{\omega}},$$

whence owing to (5. 1) the representation (5. 7) gives at once that the sign of J'_ν would be independent of the choice of ν (satisfying of course (5. 4)). Hence if we can show the existence of such ν_1 and ν_2 with

$$\text{(5.8)} \qquad \operatorname{sign} J'_{\nu_1} = -\operatorname{sign} J'_{\nu_2}, \quad |J'_{\nu_1}| > e^{\frac{1}{100}\sqrt{\omega}}, \quad |J_{\nu_2}| > e^{\frac{1}{100}\sqrt{\omega}}$$

then our theorem will be proved.

6. In order to do so we apply Cauchy's integral-theorem to J_ν. Then we get

$$\text{(6.1)} \qquad J_\nu = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi (\bar\chi(l_1^*) - \bar\chi(l_2^*)) \sum'_{\varrho(\chi)} \frac{(2\omega^5)^\varrho}{\varrho^{1000}} \cdot \left(\frac{e^{y_1\varrho}}{\varrho}\right)^\nu +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_V \frac{(e^{y_1 \nu} \cdot 2\omega^5)^s}{s^{\nu+1000}} \cdot \frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi \left\{ (\bar\chi(l_1^*) - \bar\chi(l_2^*)) \frac{L'}{L}(s, \chi) \right\} ds,$$

where the dash means again that only ϱ's right to V are counted. The last integral is owing to (2. 1), (5. 4) and (5. 2) absolutely

$$\text{(6.2)} \qquad \begin{aligned} &< c_{15} \omega^{1/10} (e^{\nu y_1})^{1/50} 100^\nu \cdot k \log^3 k \\ &< c_{16} e^{\frac{1}{40}\sqrt{\omega}}. \end{aligned}$$

Using the fact that for a real r the number of the non-trivial zeros of all L-functions mod k with imaginary parts between r and $(r+1)$ is

$$\text{(6.3)} \qquad < c_{17} \varphi(k) \log k (2 + |r|),$$

the contribution of the ϱ's with

$$|t_\varrho| > \omega^{1/20} + 1$$

to the sum in (6. 1) is absolutely

$$< c_{18} \sum_{n \leqq \omega^{1/20}} \frac{\log kn}{n^{\nu+1000}} \omega^5 e^{\sqrt{\omega}}.$$

Owing to (5. 2), (5. 3) and (5. 4) this is

$$\text{(6.4)} \qquad < c_{19} \omega^5 e^{\sqrt{\omega}} \frac{\log \omega}{\omega^{\nu/20}} < c_{20} e_1(\omega^{0,41}).$$

(6. 2), (6. 4), (5. 7) and (6. 1) give, using also the definition (5. 7) of J'_ν,

$$\text{(6.5)} \qquad \left| J'_\nu - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi (\bar\chi(l_1^*) - \bar\chi(l_2^*)) \sum''_{\varrho(\chi)} \frac{(2\omega^5)^\varrho}{\varrho^{1000}} \cdot \left(\frac{e^{y_1\varrho}}{\varrho}\right)^\nu \right| < c_{21} e_1\left(\frac{1}{40}\sqrt{\omega}\right)$$

if only c_2 is sufficiently large; here Σ'' means that the summation is to be extended over those ϱ's right to V for which

$$\text{(6.6)} \qquad |t_\varrho| \leqq \omega^{1/20} + 1.$$

Let

$$\varrho_1 = \sigma_1 + it_1$$

be one of the non-trivial zeros with (6. 6) for which

$$\left|\frac{e^{y_1\varrho}}{\varrho}\right| = \text{maximal.} \tag{6. 7}$$

Then putting

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1^*) - \bar{\chi}(l_2^*)) \sum''_{\varrho(\chi)} \frac{(2\omega^5)^\varrho}{\varrho^{1000}} \cdot \left(\frac{e^{y_1(\varrho-\sigma_1)}}{\varrho} \cdot |\varrho_1|\right)^{\nu} \overset{\text{def}}{=} Z(\nu). \tag{6. 8}$$

(6. 5) assumes the form

$$\left|J'_\nu - \frac{(e^{\nu y_1})^{\sigma_1}}{|\varrho_1|^\nu} Z(\nu)\right| < c_{22} e_1\left(\frac{1}{40}\sqrt{\omega}\right)$$

or owing to the reality of $Z(\nu)$

$$\left|J'_\nu - \frac{(e^{\nu y_1})^{\sigma_1}}{|\varrho_1|^\nu} \operatorname{Re} Z(\nu)\right| < c_{22} e_1\left(\frac{1}{40}\sqrt{\omega}\right). \tag{6. 9}$$

7. In order to prove (5. 8) we shall use Lemma V. The role of the z_j-vectors will be played by the numbers

$$\frac{e^{y_1(\varrho-\sigma_1)}}{\varrho} |\varrho_1|$$

with ϱ's satisfying (6. 6), that of b_j's by the numbers

$$\frac{1}{\varphi(k)} (\bar{\chi}(l_1^*) - \bar{\chi}(l_2^*)) \frac{(2\omega^5)^\varrho}{\varrho^{1000}}.$$

The condition $\max_j |z_j| = 1$ is owing to (6. 7) satisfied. Since (4. 3) is fulfilled, for the ϱ's with (6. 6) we have

$$\pi \geqq |\arg z_j| \geqq c_{23} \frac{A(k)^3}{k\omega^{0,3} \log^3 (k\omega)},$$

whence, taking in account (5. 2), we may choose

$$\varkappa = \omega^{-1/3} \tag{7. 1}$$

if only c_2 is sufficiently large. Let

$$m = \left[\frac{\sqrt{\omega}}{y_1} - \omega^{0,4}\right]. \tag{7. 2}$$

From (6. 3) we get for the number n of Lemma V the upper bound

$$2c_{17}k\log\{k(3+\omega^{1/20})\}\cdot(\omega^{1/20}+2)$$

and owing to (5. 2)

$$n<\omega^{1/20}(\log\omega)^3 \tag{7. 3}$$

if only c_2 is sufficiently large. Let z_h of Lemma V be defined by $\frac{e^{y_1(\varrho_2-\sigma_1)}}{\varrho_2}|\varrho_1|$ where $\varrho_2=\sigma_2+it_2$ minimizes

$$\left|\frac{e^{y_1\varrho}}{\varrho}\right| \tag{7. 4}$$

among the ϱ's in the domain

$$\sigma\geqq 1/5,\quad |t|\leqq\omega^{1/250}. \tag{7. 5}$$

Then using (7. 4), (7. 1) and (5. 3) we have

$$|z_h|\geqq\frac{e^{-\frac{4}{5}y_1}}{2\omega^{1/250}}\cdot\frac{1}{100}\geqq\frac{1}{200}\omega^{-\frac{1}{25}-\frac{1}{250}}>\frac{4n}{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{7. 6}$$

i. e. (4. 6) holds in our case. Hence from (4. 7), using the minimum property in the definition of z_h we have

$$B=\frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{Re}\sum_{\chi}\left(\bar\chi(l_1^*)-\bar\chi(l_2^*)\right)\sum\nolimits'''_{\varrho(\chi)}\frac{(2\omega^5)^\varrho}{\varrho^{1000}},$$

where Σ''' means the summation *certainly* extended over all ϱ's in the domain (7. 5). In order to obtain a positive lower bound for B we shall use (5. 5). This gives namely (since $\sigma_\varrho\geqq 1/100$)

$$B\geqq S-\frac{2}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\sum_{\frac{1}{100}\leqq\sigma_\varrho\leqq\frac{1}{5}}\frac{(2\omega^5)^{1/5}}{|\varrho|^{1000}}-\frac{2}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\sum_{|t_\varrho|\geqq\omega^{1/250}}\frac{2\omega^5}{|\varrho|^{1000}},$$

and hence

$$B>c_6\omega^{5/4}-c_{24}\left(\omega\log k+\frac{\omega^5\log k\omega}{\omega^{999/250}}\right)>c_{25}\omega^{5/4},$$

if only c_2 is sufficiently large. Before applying Lemma V we have to show that

$$\left(m+1,m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)\subset\left(\frac{\sqrt{\omega}}{y_1}-\omega^{0,4},\frac{\sqrt{\omega}}{y_1}\right);$$

but this follows readily from (7. 2), (7. 1) and (7. 3). Hence we get by applying Lemma V for sufficiently large c_2

$$\operatorname{Re}Z(v_1)>\frac{c_{25}\omega^{5/4}}{3\omega^{1/20}\log^3\omega}\left(\frac{y_1}{25\sqrt{\omega}}\right)^{2\omega^{1/20}\log^3\omega}\cdot|z_h|^{v_1}\cdot|z_h|^{n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)}\cdot 2^{-m-n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)},$$

i. e. from (7. 4), (7. 1), (7. 2) and (7. 3)

$$\operatorname{Re} Z(\nu_1) > e_1\left(-41\frac{\sqrt{\omega}}{\log\omega}\right)\cdot\left(\frac{e^{y_1(1/5-\sigma_1)}}{|\varrho_2|}\cdot|\varrho_1|\right)^{\nu_1}\cdot\left(\frac{e^{-\frac{4}{5}y_1}}{|\varrho_2|}\cdot|\varrho_1|\right)^{\omega^{0,4}}$$

for sufficiently large c_2. Owing to (7. 6) this implies

$$\operatorname{Re} Z(\nu_1) > \left(\frac{e^{y_1(1/5-\sigma_1)}\cdot|\varrho_1|}{|\varrho_2|}\right)^{\nu_1}\cdot e_1\left(-42\frac{\sqrt{\omega}}{\log\omega}\right).$$

Thus from (6. 9)

$$J'_{\nu_1} \geqq \frac{e^{\frac{\nu_1 y_1}{5}}}{|\varrho_2|^{\nu_1}} e_1\left(-42\frac{\sqrt{\omega}}{\log\omega}\right) - c_{22}e_1\left(\frac{1}{40}\sqrt{\omega}\right);$$

hence from (5. 4), (5. 3) and (7. 5)

$$J'_{\nu_1} \geqq \frac{e^{\frac{1}{5}\sqrt{\omega}-\omega^{0,41}}}{(2\omega^{1/250})^{40\sqrt{\omega}/\log\omega}}\cdot e_1\left(-42\frac{\sqrt{\omega}}{\log\omega}\right) - c_{22}e_1\left(\frac{1}{40}\sqrt{\omega}\right) >$$

$$> e_1\left(\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{25}\right)\sqrt{\omega} - 80\frac{\sqrt{\omega}}{\log\omega}\right) - c_{22}e_1\left(\frac{1}{40}\sqrt{\omega}\right) > 0$$

if c_2 is sufficiently large. Similarly we get

$$J'_{\nu_2} < 0.$$

Hence (5. 8) is proved if only (5. 2) is satisfied which finishes tne proof.

MATHEMATICAL INSTITUTE,
UNIVERSITY ADAM MICZKIEWICZ,
POZNAŃ

MATHEMATICAL INSTITUTE,
UNIVERSITY EÖTVÖS LORÁND,
BUDAPEST

(Received 7 February 1962)

References

S. KNAPOWSKI [1] Contributions to the theory of the distribution of prime numbers in arithmetica progressions. II, *Acta Arithmetica* (under press).

S. KNAPOWSKI and P. TURÁN [1] Comparative prime-number theory. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), pp. 299—314.

[2] Comparative prime-number theory. II, *ibid,* **13** (1962), pp. 315—342.

[3] Comparative prime-number theory. V, *ibid,* **14** (1963), pp. 43—63.

[4] Comparative prime-number theory. VI, *ibid,* **14** (1963), pp. 65—78.

[5] Comparative prime-number theory. III, *ibid,* **13** (1962), pp. 343—364.

P. TURÁN [1] *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Akad. Kiadó, Budapest, 1953). A completely rewritten English edition will appear among the Interscience Tracts.

COMPARATIVE PRIME-NUMBER THEORY. VIII

(CHEBYSHEV'S PROBLEM FOR $k=8$)

By

S. KNAPOWSKI (Poznan) and P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

1. As mentioned in Paper I of this series, HARDY—LITTLEWOOD and LANDAU proved that[1]

$$\lim_{x\to+0}\Big(\sum_{p\equiv 1 \bmod 4} e^{-px}-\sum_{p\equiv 3 \bmod 4} e^{-px}\Big)=-\infty \tag{1.1}$$

if and only if the function

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s},\quad s=\sigma+it \tag{1.2}$$

does not vanish for $\sigma>\frac{1}{2}$ (see HARDY—LITTLEWOOD [1], LANDAU [1], [2]). Shortly, (1.2) is a necessary and sufficient condition in order to announce that „there are more primes $\equiv 3 \bmod 4$ than $\equiv 1 \bmod 4$, in Abel-summability sense". They proved[2] also that the same holds replacing (1.1) by

$$\lim_{x\to+0}\Big(\sum_{p\equiv 1 \bmod 4}\log p\cdot e^{-px}-\sum_{p\equiv 3 \bmod 4}\log p\cdot e^{-px}\Big)=-\infty. \tag{1.3}$$

Since the primes, apart from 2, are all $\equiv \pm 1 \bmod 4$, these two assertions cover the „rough" comparative theory for $k=4$. The corresponding results for $k=3$ could have been proved mutatis mutandis. As mentioned in Paper I of this series, in the next-difficult case $k=8$ a new phenomenon occurs; e. g. the function

$$\sum_{p\equiv 3 \bmod 8}\log p\cdot e^{-px}-\sum_{p\equiv 5 \bmod 8}\log p\cdot e^{-px} \tag{1.4}$$

changes his sign infinitely often when $x\to+0$. In this paper we are going to get a deeper insight into the oscillatory character of the functions ($l_1\not\equiv l_2 \bmod 8$)

$$f_{l_1 l_2}(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{p\equiv l_1 \bmod 8}\log p\cdot e^{-px}-\sum_{p\equiv l_2 \bmod 8}\log p\cdot e^{-px} \tag{1.5}$$

for $x\to+0$. We assert the

[1] p is throughout reserved for primes, $c_1, c_2,\ldots$ denote always positive, explicitly calculable numerical constants. $e_1(x)$ means e^x and $e_\nu(x)=e_1(e_{\nu-1}(x))$, further $\log_1 x=\log x$ and $\log_\nu x=\log(\log_{\nu-1}x)$.

[2] The necessity part does not occur explicitly but Landau's proof for the necessity of (1.2) for (1.1) can be used mutatis mutandis.

THEOREM 1. 1. *If* $0<\delta<c_1$, *then for* $l_1 \not\equiv l_2 \not\equiv 1 \bmod 8$ *the inequality*

$$\max_{\delta \leqq x \leqq \delta^{1/3}} \left\{ \sum_{p \equiv l_1 \bmod 8} \log p \cdot e^{-px} - \sum_{p \equiv l_2 \bmod 8} \log p \cdot e^{-px} \right\} > \frac{1}{\sqrt{\delta}} e_1 \left(-22 \frac{\log \frac{1}{\delta} \cdot \log_3 \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}} \right)$$

holds without any conjectures.

Since l_1 and l_2 can be changed, this gives automatically that the inequality

$$\min_{\delta \leqq x \leqq \delta^{1/3}} \left\{ \sum_{p \equiv l_1 \bmod 8} \log p \cdot e^{-px} - \sum_{p \equiv l_2 \bmod 8} \log p \cdot e^{-px} \right\} < -\frac{1}{\sqrt{\delta}} e_1 \cdot \left(-22 \frac{\log \frac{1}{\delta} \cdot \log_3 \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}} \right) \tag{1.6}$$

holds too without conjectures.

For the case $l_1 = 1$ we assert the

THEOREM 1. 2. *If for an* $l \not\equiv 1 \bmod 8$

$$\lim_{x \to +0} \left\{ \sum_{p \equiv 1 \bmod 8} \log p \cdot e^{-px} - \sum_{p \equiv l \bmod 8} \log p \cdot e^{-px} \right\} = -\infty$$

then no $L(s, \chi)$*-function* mod 8 *with* $\chi(l) \neq 1$ *can vanish for* $\sigma > \frac{1}{2}$.

Further we assert the

THEOREM 1. 3. *If no* $L(s, \chi)$ *functions* mod 8 *with* $\chi \neq \chi_0$ *vanish for* $\sigma > \frac{1}{2}$ *then for all* $l \not\equiv 1 \bmod 8$ *we have*

$$\lim_{x \to +0} \left\{ \sum_{p \equiv 1 \bmod 8} \log p \cdot e^{-px} - \sum_{p \equiv l \bmod 8} \log p \cdot e^{-px} \right\} = -\infty.$$

Theorem 1. 2 will follow by a slight modification of an argument of Landau (see LANDAU [1]) and Theorem 1. 3 by slight modification of Hardy—Littlewood—Landau's argument (see HARDY—LITTLEWOOD [1], LANDAU [2]). Theorem 1. 1 is of course deeper. Since the congruences

$$x^2 \equiv l \bmod 8 \quad l = 3, 5, 7 \tag{1.7}$$

are not solvable and evidently

$$\max_{\delta \leqq x \leqq \delta^{1/3}} \sum_{\substack{p, \nu \\ \nu \geqq 3}} \log p \cdot e^{-p^\nu x} = O\left(\frac{1}{\delta^{1/3}} \log^2 \frac{1}{\delta} \right). \tag{1.8}$$

Theorem 1. 1 is equivalent to the inequality

$$\max_{\delta \leqq x \leqq \delta^{1/3}} \{ \sum_{n \equiv l_1 \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} - \sum_{n \equiv l_2 \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} \} > \tag{1.9}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{\delta}} e_1 \left(-22 \frac{\log \frac{1}{\delta} \cdot \log_3 \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}} \right).$$

We shall prove Theorem 1. 1 in this form.

What can be said on the Chebyshev functions

$$\sum_{p \equiv l_1 \bmod 8} e^{-px} - \sum_{p \equiv l_2 \bmod 8} e^{-px} \; ? \tag{1.10}$$

The analogon of Theorem 1. 2 follows by Landau's argument (LANDAU [1]) mutatis mutandis and can be omitted. The analogon of Theorem 1. 3 follows from Theorem 1. 3 at once, combining it with the following lemma of Hardy—Littlewood—Landau (see LANDAU [2]):

If

$$\lim_{x \to +0} x^{\frac{1}{2}} \{ \sum_{p \equiv l \bmod 8} \log p \cdot e^{-px} - \sum_{p \equiv 1 \bmod 8} \log p \cdot e^{-px} \} > 0,$$

then also

$$\lim_{x \to +0} x^{\frac{1}{2}} \log \frac{1}{x} \{ \sum_{p \equiv l \bmod 8} e^{-px} - \sum_{p \equiv 1 \bmod 8} e^{-px} \} > 0. \tag{1.11}$$

Hence we shall not go into details. However the analogon of Theorem 1. 1 encounters difficulties; we shall return to it at another occasion*.

The proof of Theorem 1. 2 gives at once that if an $L(s, \chi^*)$ has a zero $\varrho^* = \sigma^* + it^*$ with $\sigma^* > \frac{1}{2}$, then for each l with $\chi^*(l) \neq 1$ each of the functions $f_{1l}(x)$ changes his sign infinitely often as $x \to +0$, even

$$\overline{\lim_{x \to +0}} f_{1l}(x) x^{-\sigma^* + \varepsilon} = +\infty$$

$$\underline{\lim_{x \to +0}} f_{1l}(x) x^{-\sigma^* + \varepsilon} = -\infty.$$

However we cannot prove at present anything for this case concerning the localisation of sign-changes. But as to the function

$$\sum_{n \equiv 1 \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} - \sum_{n \equiv l \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} \tag{1.12}$$

we can assert, in full analogy with (1. 9) the

* *Added in proof* (Nov. 2. 1963). Since then we proved among others the following "two-sided" theorem. If l_1 and l_2 are any two different among 3, 5 and 7, we have for $0 < \delta < c$ the inequality

$$\max_{\delta \leqq x \leqq \delta^{1/3}} \left| \sum_{p \equiv l_1 \bmod 8} e^{-px} - \sum_{p \equiv l_2 \bmod 8} e^{-px} \right| > \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-41 \frac{\log \frac{1}{\delta} \log_3 \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}}}.$$

THEOREM 1. 4. *If* $0<\delta<c_1$, *then for* $l\not\equiv 1 \bmod 8$ *the inequalities*

$$\max_{\delta\leqq x\leqq\delta^{1/3}}\left\{\sum_{n\equiv 1 \bmod 8}\Lambda(n)e^{-nx}-\sum_{n\equiv l \bmod 8}\Lambda(n)e^{-nx}\right\}>\frac{1}{\sqrt{\delta}}e_1\left(-22\frac{\log\frac{1}{\delta}\log_3\frac{1}{\delta}}{\log_2\frac{1}{\delta}}\right)$$

and

$$\min_{\delta\leqq x\leqq\delta^{1/3}}\left\{\sum_{n\equiv 1 \bmod 8}\Lambda(n)e^{-nx}-\sum_{n\equiv l \bmod 8}\Lambda(n)e^{-nx}\right\}<-\frac{1}{\sqrt{\delta}}e_1\left(-22\frac{\log\frac{1}{\delta}\log_3\frac{1}{\delta}}{\log_2\frac{1}{\delta}}\right)$$

hold.

Since the proof of this theorem runs quite parallel to that of (1. 9) we shall not go into details.

2. In the proofs essential role is played by some numerical data, kindly furnished to us by Dr. P. C. HASELGROVE. Let

$$L(s,\chi_1)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(8n+1)^s}+\frac{1}{(8n+3)^s}-\frac{1}{(8n+5)^s}-\frac{1}{(8n+7)^s}\right\}, \tag{2. 1}$$

$$L(s,\chi_2)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(4n+1)^s}-\frac{1}{(4n+3)^s}\right\} \tag{2. 2}$$

$$L(s,\chi_3)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(8n+1)^s}-\frac{1}{(8n+3)^s}-\frac{1}{(8n+5)^s}+\frac{1}{(8n+7)^s}\right\}. \tag{2. 3}$$

Then in the domain

$$0<\sigma<1,\quad |t|\leqq 12$$

all zeros of $L(s,\chi_1)$ are

$$\tfrac{1}{2}\pm i\cdot 4{,}89997399\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\pm i\cdot 7{,}62842884\ldots \tag{2. 4}$$

$$\tfrac{1}{2}\pm i\cdot 10{,}80658813\ldots$$

those of $L(s,\chi_2)$

$$\tfrac{1}{2}\pm i\cdot 6{,}02094891\ldots \tag{2. 5}$$

$$\tfrac{1}{2}\pm i\cdot 10{,}24377030\ldots$$

and those of $L(s,\chi_3)$

$$\tfrac{1}{2}\pm i\cdot 3{,}57615484\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\pm i\cdot 7{,}4344296\ldots \tag{2. 6}$$

$$\tfrac{1}{2}\pm i\cdot 9{,}50320196\ldots.$$

In particular, they are simple and different from each other. We shall also use the

simple inequality

$$\sum_P \log p \cdot e^{-p^2 x} > 0{,}8\, x^{-\frac{1}{2}} \tag{2.7}$$

valid for $0 < x < c_2$. A number of numerical lemmata we postponed to an Appendix.

3. To sketch the proof of Theorem 1. 2 after the pattern of Landau we remark that Euler's integral representation for $\Gamma(s)$ gives for $\sigma > 1$, for $l = 3$ say, the formula

$$\int_0^\infty x^{s-1} f_{13}(x)\, dx = \Gamma(s) \left\{ \sum_{p \equiv 1 \bmod 8} \frac{\log p}{p^s} - \sum_{p \equiv 3 \bmod 8} \frac{\log p}{p^s} \right\} = \tag{3.1}$$

$$= -\frac{\Gamma(s)}{2} \left\{ \frac{L'}{L}(s, \chi_2) + \frac{L'}{L}(s, \chi_3) + \varphi(s) \right\}$$

where $\varphi(s)$ is regular for $\sigma > \frac{1}{2}$. From the hypothesis of the Theorem it follows the existence of a $q > 0$ such that for $0 < x \leqq q$ the function $f_{13}(x)$ is of constant sign and obviously

$$\int_0^q x^{s-1} f_{13}(x)\, dx = -\frac{\Gamma(s)}{2} \left\{ \frac{L'}{L}(s, \chi_2) + \frac{L'}{L}(s, \chi_3) + \varphi_1(s) \right\} \tag{3.2}$$

where $\varphi_1(s)$ is regular for $\sigma > \frac{1}{2}$. But from (2. 5) and (2. 6) (and even simpler) the function on the right of (3. 2) is regular on the segment $\frac{1}{2} < s \leqq 1$; hence the classical theorem of Landau (see e. g. LANDAU [1]) gives at once that

$$\frac{L'}{L}(s, \chi_2) + \frac{L'}{L}(s, \chi_3)$$

is regular for $\sigma > \frac{1}{2}$ and thus obviously both $L(s, \chi_2)$ and $L(s, \chi_3)$ do not vanish for $\sigma > \frac{1}{2}$. For $l = 5$ and $l = 7$ the proof is analogous.[3]

To sketch the proof of Theorem 1. 3 we start with Hardy—Littlewood from Mellin's integral which gives for $x > 0$ the formula (for $l = 3$ say)

$$\sum_{n \equiv 1 \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} - \sum_{n \equiv 3 \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} =$$

$$- = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{\Gamma(s)}{x^s} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L'}{L}(s, \chi_2) + \frac{L'}{L}(s, \chi_3) \right) ds.$$

Applying Cauchy's integral-theorem routine-estimations give

$$\sum_{n \equiv 1 \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} - \sum_{n \equiv 3 \bmod 8} \Lambda(n) e^{-nx} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\sum_{\varrho(\chi_2)} \Gamma(\varrho) x^{-\varrho} + \sum_{\varrho(\chi_3)} \Gamma(\varrho) x^{-\varrho} \right) + O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)$$

[3] Obviously the same theorem holds for a general modulus k, supposed that no L-functions mod k vanish on the segment $\frac{1}{2} < s \leqq 1$.

or owing to (1. 7) and (1. 8), if $0<x<c_3$,

$$\sum_{p\equiv 1 \bmod 8} \log p\cdot e^{-px} - \sum_{p\equiv 3 \bmod 8} \log p\cdot e^{-px} = -\sum_{p>2} \log p\cdot e^{-p^2x} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{\varrho(\chi_2)} \Gamma(\varrho)x^{-\varrho} + \sum_{\varrho(\chi_3)} \Gamma(\varrho)x^{-\varrho}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{3}}\log^2\frac{1}{x}\right).$$

Hence, using also (2. 7) this gives

$$f_{13}(x) \leqq x^{-\frac{1}{2}}\left\{-0{,}8+\frac{1}{2}\sum_{\varrho(\chi_2)}|\Gamma(\varrho)| + \right. \tag{3. 3}$$

$$\left. +\frac{1}{2}\sum_{\varrho(\chi_3)}|\Gamma(\varrho)|\right\} + O\left(x^{-\frac{1}{3}}\log^2\frac{1}{x}\right).$$

Since from Lemma VI (in Appendix) we have

$$\sum_{\varrho(\chi_2)}|\Gamma(\varrho)|<\frac{1}{10}, \quad \sum_{\varrho(\chi_3)}|\Gamma(\varrho)|<\frac{1}{10},$$

Theorem 1. 3 follows from (3. 3) for $l=3$ at once. So for the other l-values.

4. For the proof of Theorem 1. 1 we shall need some lemmata.

LEMMA I. *For* $0<\delta<c_4$ *there is a* y_1 *with*

$$\frac{1}{20}\log_2\frac{1}{\delta} \leqq y_1 \leqq \frac{1}{10}\log_2\frac{1}{\delta} \tag{4. 1}$$

so that for all non-trivial zeros $\varrho = \sigma_\varrho + it_\varrho$ *of all L-functions* mod 8 *we have*

$$\pi \geqq \left|\arg\frac{e^{it_\varrho y_1}}{\varrho}\right| \geqq \frac{c_5}{t_\varrho^6 \log^3|t_\varrho|}. \tag{4. 2}$$

For the proof see Paper II of this series.

As to Lemma II let m be a positive integer and

$$1 = |z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n| \tag{4. 3}$$

and with a $0<\varkappa\leqq\frac{\pi}{2}$

$$\varkappa \leqq |\arg z_j| \leqq \pi. \tag{4. 4}$$

Let the index h be such that

$$|z_h| > \frac{4n}{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} \tag{4. 5}$$

and fixed. Further let

$$B \overset{\text{def}}{=} \min_{h\leqq\xi\leqq n} \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\xi} b_j. \tag{4. 6}$$

Then we have the

LEMMA II. *If $B>0$, then there are integers v_1 and v_2 with*

$$m+1 \leqq v_1, \quad v_2 \leqq m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right) \tag{4.7}$$

such that

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{v_1} \geqq \frac{B}{2n+1}\left\{\frac{n}{24\left(m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)}\right\}^{2n} \cdot \left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)}$$

and

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{v_2} \leqq -\frac{B}{2n+1}\left\{\frac{n}{24\left(m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)}\right\}^{2n} \cdot \left(\frac{|z_h|}{2}\right)^{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)}.$$

This is a special case of Theorem 4. 1 from the Paper III of this series. We need further the

LEMMA III. *For $x>0$ (taking the real value of $\log x$) and a positive integer v we have*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{\Gamma(s)}{s^v} x^{-s}\,dx = \frac{1}{(v-1)!}\int_x^\infty \frac{\log^{v-1}\frac{r}{x}}{r} e^{-r}\,dr = \frac{1}{(v-1)!}\int_0^\infty e^{-xe^y} y^{v-1}\,dy.$$

Namely Cahen—Mellin's formula gives for $r>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \Gamma(s) r^{-s}\,ds = e^{-r}.$$

Multiplying on both sides by

$$\frac{1}{(v-1)!}\cdot\frac{1}{r}\log^{v-1}\frac{r}{x}$$

and integrating with respect to r over (x, ∞) we can obviously change on the left the order of integration and we get

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{\Gamma(s)}{(v-1)!}\left\{\int_x^\infty r^{-s-1}\log^{v-1}\frac{r}{x}\,dr\right\} ds.$$

Replacing in the inner integral r by xe^v, this is

$$x^{-s}\int_0^\infty e^{-sv} v^{v-1}\,dv = (v-1)!\,x^{-s}s^{-v}$$

as well-known.

Finally we need the

LEMMA IV. *There is in the vertical strip* $\frac{1}{10}\leqq\sigma\leqq\frac{1}{5}$ *a broken line* V, *symmetrical to the real axis, consisting alternately of horizontal and vertical segments, increasing from* $-\infty$ *to* $+\infty$, *each horizontal strip of width* 1 *containing at most one horizontal segment of* V *so that on* V *for all L-functions* mod 8 *the inequality*

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|<c_6\log^3(2+|t|)$$

holds.

For the (simple) proof see Appendix III of first named authors book (TURÁN [1]).

5. Now we turn to the proof of Theorem 1. 1. It will suffice to consider the case

(5. 1) $$l_1=5,\quad l_2=3\quad \text{say.}^4$$

Let be $0<\delta<c_4$ (as in Lemma I); further y_1 as in Lemma I and we stipulate the integer ν at present only by

(5. 2) $$\frac{1}{y_1}\log\frac{1}{\delta}-\log^{0,9}\frac{1}{\delta}\leqq\nu\leqq\frac{1}{y_1}\log\frac{1}{\delta}$$

and start from the integral

(5.3) $$J_\nu(\delta)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\left(\frac{e^{y_1 s}}{s}\right)^\nu\Gamma(s)\left\{\frac{L'}{L}(s,\chi_1)-\frac{L'}{L}(s,\chi_2)\right\}ds.$$

Inserting the Dirichlet-series we get owing to Lemma III with $x=ne^{-\nu y_1}$

$$J_\nu(\delta)=\frac{1}{(\nu-1)!}\sum_{n=2}^{\infty}\Lambda(n)\big(\chi_2(n)-\chi_1(n)\big)\int_0^\infty y^{\nu-1}e^{-(ne^{-\nu y_1})e^y}dy.$$

As easy to see the order of summation and integration can be changed and hence

$$J_\nu(\delta)=\frac{1}{(\nu-1)!}\int_0^\infty y^{\nu-1}\Big\{\sum_n\Lambda(n)\big(\chi_2(n)-\chi_1(n)\big)\cdot e^{-ne_1(y-\nu y_1)}\Big\}dy.$$

Owing to (2. 1) and (2. 2) this relation assumes the form

(5. 4) $$J_\nu(\delta)=\frac{2}{(\nu-1)!}\int_0^\infty y^{\nu-1}\Big\{\sum_{n\equiv 5 \bmod 8}\Lambda(n)e^{-ne_1(y-\nu y_1)}-$$

$$-\sum_{n\equiv 3 \bmod 8}\Lambda(n)e^{-ne_1(y-\nu y_1)}\Big\}dy=$$

$$=\frac{2}{(\nu-1)!}\int_{-\nu y_1}^\infty(r+\nu y_1)^{\nu-1}g_{5,3}(e^r)dr$$

[4] The slight changes, necessary in other cases will be indicated.

where

$$g_{5,3}(y)=\sum_{n\equiv 5 \bmod 8}\Lambda(n)e^{-ny}-\sum_{n\equiv 3 \bmod 8}\Lambda(n)e^{-ny}. \tag{5.5}$$

Since evidently for $y>0$

$$|g_{5,3}(y)|<\sum_{n}\Lambda(n)e^{-ny}<c_7(1+y^{-1})e^{-2y}$$

we have

$$\left|\frac{2}{(\nu-1)!}\int_{\nu y_1}^{\infty}(r+\nu y_1)^{\nu-1}g_{5,3}(e^r)dr\right|<$$

$$<\frac{c_8}{(\nu-1)!}\int_{\nu y_1}^{\infty}e^{-e_1(r)}(r+\nu y_1)^{\nu-1}dr<\frac{c_8}{(\nu-1)!}\int_{\nu y_1}^{\infty}e^{-e_1\left(\frac{r+\nu y_1}{2}\right)}(r+\nu y_1)^{\nu-1}dr=$$

$$=\frac{c_8}{(\nu-1)!}\int_{2\nu y_1}^{\infty}e^{-e_1\left(\frac{r}{2}\right)}r^{\nu-1}dr<\frac{c_8}{(\nu-1)!}\int_{2\nu y_1}^{\infty}e^{-\frac{r}{2}}r^{\nu}dr\leqq$$

$$\leqq\frac{c_8}{(\nu-1)!}\max_{r\geqq 2\nu y_1}\left(r^{\nu}e^{-\frac{r}{4}}\right)\leqq c_9\cdot 5^{\nu}.$$

Hence

$$\left|J_{\nu}(\delta)-\frac{2}{(\nu-1)!}\int_{-\nu\delta_1}^{\nu\delta_1}(r+\nu y_1)^{\nu-1}g_{5,3}(e^r)dr\right|<c_9\cdot 5^{\nu}<e_1\left(21\frac{\log\frac{1}{\delta}}{\log_2\frac{1}{\delta}}\right) \tag{5.6}$$

owing to (5. 2) and Lemma I if c_4 is sufficiently small.

6. Applying Cauchy's integral-theorem to $J_{\nu}(\delta)$ we get

$$J_{\nu}(\delta)=\sum\nolimits_{\varrho(\chi_1)}\Gamma(\varrho)\left(\frac{e^{y_1\varrho}}{\varrho}\right)^{\nu}-\sum\nolimits_{\varrho(\chi_2)}\Gamma(\varrho)\left(\frac{e^{y_1\varrho}}{\varrho}\right)^{\nu}+ \tag{6.1}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{V}\left(\frac{e^{y_1 s}}{s}\right)^{\nu}\Gamma(s)\left(\frac{L'}{L}(s,\chi_1)-\frac{L'}{L}(s,\chi_2)\right)ds,$$

where the dash means that the summation refers to the non-trivial zeros of $L(s,\chi_1)$ and $L(s,\chi_2)$, respectively, right from V. Owing to Lemma IV the last integral is absolutely

$$<c_{10}e^{\frac{\nu y_1}{5}}\cdot 10^{\nu}<\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{6.2}$$

using (5. 2) (c_4 again sufficiently small). Let us consider the contribution of the non-trivial zeros with

$$|t_\varrho| > \log^{\frac{1}{10}} \frac{1}{\delta}$$

to the sums in (6. 1). Since the number of zeros of $L(s, \chi_1)$ and $L(s, \chi_2)$ with $r \leqq t_\varrho < r+1$ (r real) is at most

$$c_{11} \log (2+|r|), \tag{6. 3}$$

this contribution is absolutely

$$\leqq c_{12} \sum_{d \geqq \left[\log^{\frac{1}{10}} \frac{1}{\delta}\right]} e^{-\frac{\pi}{2} d} d^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\nu y_1}}{d^\nu} \log d$$

and using (5. 2) and Lemma I

$$< c_{13} e_1 \left(\log^{0,91} \frac{1}{\delta} \right). \tag{6. 4}$$

If $\varrho_1 = \sigma_1 + it_1$ stands for one of the non-trivial zeros of $L(s, \chi_1)$ and $L(s, \chi_2)$ for which

$$\left| \frac{e^{\varrho y_1}}{\varrho} \right| \tag{6. 5}$$

is maximal among those right of V with

$$|t_\varrho| \leqq \log^{\frac{1}{10}} \frac{1}{\delta}, \tag{6. 6}$$

further collecting (5. 6), (6. 1), (6. 2) and (6. 4) we get

$$\left| \frac{2}{(\nu-1)!} \int_{-\nu y_1}^{\nu y_1} (r+\nu y_1)^{\nu-1} g_{3,5}(e^r)\, dr - \right. \tag{6. 7}$$

$$\left. - \left(\frac{e^{y_1 \sigma_1}}{|\varrho_1|} \right)^\nu \left\{ \sum''_{\varrho(\chi_2)} \Gamma(\varrho) \left(\frac{e^{y_1(\varrho-\sigma_1)}}{\varrho} |\varrho_1| \right)^\nu - \sum''_{\varrho(\chi_1)} \Gamma(\varrho) \left(\frac{e^{y_1(\varrho-\sigma_1)}}{\varrho} |\varrho_1| \right)^\nu \right\} \right| < \delta^{-0,3},$$

if only c_4 is sufficiently small. Here Σ'' means of course that the summation is to be extended to non-trivial zeros right to V, satisfying (6. 6); owing to the symmetry of V the sum in brackets is *real*.

7. So far ν was restricted only by (5. 2); now we shall determine a ν_1 and a ν_2 by Lemma II. The role of z_j's is played of course by the numbers

$$\frac{e^{y_1(\varrho-\sigma_1)}}{\varrho} |\varrho_1|,$$

that of the b_j's by the numbers

$$\pm\Gamma(\varrho);$$

the condition $\max_j |z_j| = 1$ is obviously satisfied. Let be

$$m = \left[\frac{1}{y_1}\log\frac{1}{\delta} - \log^{0,91}\frac{1}{\delta}\right]. \tag{7. 1}$$

As to n of the Lemma II we have owing to (6. 3)

$$n < 2c_{11}\log^{\frac{1}{10}}\frac{1}{\delta}\cdot\log\left(2+\log^{\frac{1}{10}}\frac{1}{\delta}\right) < \log^{\frac{1}{10}}\frac{1}{\delta}\cdot\left(\log_2\frac{1}{\delta}\right)^2, \tag{7. 2}$$

if c_4 is sufficiently small. Owing to Lemma I we have

$$\pi \geqq |\arg z_j| \geqq \varkappa$$

if only

$$\varkappa = \log^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{\delta}. \tag{7. 3}$$

As to the index h let be[5]

$$\varrho_2 = \tfrac{1}{2} + i\cdot 4{,}89997399\ldots \tag{7. 4}$$

and

$$z_{h-1} = \frac{e^{y_1(\varrho_2-\sigma_1)}}{\varrho_2}|\varrho_1|, \quad z_h = \frac{e^{y_1(\bar{\varrho}_2-\sigma_1)}}{\varrho_2}|\varrho_1|. \tag{7. 5}$$

Then we have to verify (4. 5). We have from (7. 3)

$$\frac{4n}{m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} < \frac{4}{\pi}\varkappa < 2\log^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{\delta}$$

and from (6. 6) and (4. 1)

$$|z_h| \geqq \frac{e^{-\frac{1}{2}y_1}}{2\log^{\frac{1}{10}}\frac{1}{\delta}}\cdot\frac{1}{10} > \frac{1}{20}\log^{-\frac{1}{5}}\frac{1}{\delta} > 2\log^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{\delta},$$

if only c_4 is sufficiently small; hence (4. 5) is fulfilled indeed. As to B we have owing to (7. 5), (2. 4), (2. 5) and (2. 6)

$$\begin{aligned} B \geqq & -2\,\mathrm{Re}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\cdot 4{,}89\ldots) - 2|\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\cdot 6{,}02\ldots)| - \\ & - 2|\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\cdot 7{,}62\ldots)| - 2|\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\cdot 10{,}243\ldots)| - \\ & - 2|\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\cdot 10{,}80\ldots)| - \sum_{|t_\varrho|\geqq 12}{}^{\varrho(\chi_1)}|\Gamma(\varrho)| - \sum_{|t_\varrho|\geqq 12}{}^{\varrho(\chi_2)}|\Gamma(\varrho)|. \end{aligned}$$

[5] I. e. ϱ_2 is one of the non-trivial zeros of $L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$ with absolutely minimal imaginary part. In the cases, different from that in (5.1) we have to put according to (2.6) $\varrho_2 = \frac{1}{2} + i\cdot 3{,}57615484\ldots$.

Using (10. 2), (10. 7) and Lemma IX in Appendix we get indeed

$$B \geqq c_{14}. \tag{7. 6}$$

Further we remark that the interval $\left[m+1, m+n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right]$ is owing to (7. 1) contained in the interval (5. 2), using also (7. 2) and (7. 3). Hence, denoting the sum in curly brackets in (6. 7) by $Z(v)$, Lemma II is applicable and we obtain the existence of integer v_1 and v_2 satisfying (5. 2) and — using (7. 2), (7. 1), (7. 3) and (7. 5) —

$$Z(v_1) = \operatorname{Re} Z(v_1) > \frac{c_{14}}{3 \log^{\frac{1}{10}} \frac{1}{\delta} \left(\log_2 \frac{1}{\delta}\right)^2} \cdot \left(\frac{y_1}{25 \log \frac{1}{\delta}}\right)^{2 \log^{\frac{1}{10}} \frac{1}{\delta} \cdot \left(\log_2 \frac{1}{\delta}\right)^2} 2^{-\frac{1}{y_1} \log \frac{1}{\delta}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{e^{y_1\left(\frac{1}{2}-\sigma_1\right)}}{|\varrho_2|} |\varrho_1|\right)^{v_1} \cdot \left(\frac{e^{y_1\left(\frac{1}{2}-\sigma_1\right)}}{|\varrho_2|} |\varrho_1|\right)^{n\left(3+\frac{\pi}{\varkappa}\right)} > e_1\left(-21 \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}}\right) \cdot \left(\frac{e^{y_1\left(\frac{1}{2}-\sigma_1\right)}}{|\varrho_2|} |\varrho_1|\right)^{v_1}$$

and hence from (6. 7)

$$\frac{2}{(v_1-1)!} \int_{-v y_1}^{v y_1} (r+v_1 y_1)^{v_1-1} g_{3,5}(e^r)\, dr > \frac{e^{\frac{v_1 y_1}{2}}}{(|\varrho_2|)^{v_1}} e_1\left(-21 \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}}\right) - \delta^{-0,3} \tag{7. 7}$$

and

$$\frac{2}{(v_2-1)!} \int_{-v_2 y_1}^{v_2 y_1} (r+v_2 y_1)^{v_2-1} g_{3,5}(e^r)\, dr < -\frac{e^{v_2 y_1 \frac{1}{2}}}{(|\varrho_2|)^{v_2}} \cdot e_1\left(-21 \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}}\right) + \delta^{-0,3}. \tag{7. 8}$$

The right member of (7. 7) is owing to (5. 2) and (4. 1)

$$> \delta^{-\frac{1}{2}} e_1\left(-22 \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}}\right) \cdot 10^{-v_1} - \delta^{-0,3} > \delta^{-\frac{1}{2}} e_1\left(-120 \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}}\right), \tag{7. 9}$$

if only c_4 is sufficiently small. Since the left member of (7. 7) is owing to (5. 2)

$$\leqq \frac{2}{v_1!} (2 v_1 y_1)^{v_1} \max_{y \geqq e_1(-v_1 y_1)} g_{3,5}(y) \leqq 2 (2 e y_1)^{v_1} \max_{y \geqq \delta} g_{3,5}(y) \leqq$$

$$\leqq e_1\left(21 \frac{\log \frac{1}{\delta} \log_3 \frac{1}{\delta}}{\log_2 \frac{1}{\delta}}\right) \max_{y \geqq \delta} g_{3,5}(y),$$

the first assertion of our Theorem follows from this, (7. 9) and (7. 7) at once. The second follows analogously from (7. 8) and (6. 7).

Appendix

Numerical lemmas

8. LEMMA V. *With the notation*

$$S(\chi)=\sum_{\varrho(\chi)}\frac{1}{\varrho(1-\varrho)}$$

the sum being extended to the non-trivial zeros of $L(s,\chi)$ mod 8, $\chi\neq\chi_0$, *we have*

$$(0<)\,S(\chi)<3.$$

For $\chi=\chi_2$ this has been proved by Landau (see LANDAU [2], p. 216). In order to prove it for $\chi=\chi_1$ we start from

$$\xi(1-s,\chi_1)=\xi(s,\chi_1) \tag{8. 1}$$

where

$$\xi(s,\chi_1)\overset{\text{def}}{=}\left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)L(s,\chi_1). \tag{8. 2}$$

(8. 1) gives

$$\frac{\xi'}{\xi}(s,\chi_1)=-\frac{\xi'}{\xi}(1-s,\chi_1). \tag{8. 3}$$

But (see e. g. PRACHAR [1], p. 217)

$$\xi(s,\chi_1)=e^{c_{15}s+c_{16}}\prod_{\varrho(\chi_1)}\left(1-\frac{s}{\varrho}\right)e^{\frac{s}{\varrho}}$$

and hence

$$\frac{\xi'}{\xi}(s,\chi_1)=c_{15}+\sum_{\varrho(\chi_1)}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right);$$

putting $s=1$ we get

$$s(\chi_1)=-c_{15}+\frac{\xi'}{\xi}(1,\chi_1)=\frac{\xi'}{\xi}(1,\chi_1)-\frac{\xi'}{\xi}(0,\chi_1).$$

and using (8. 3), resp. (8. 2)

$$=2\frac{\xi'}{\xi}(1,\chi_1)=\log\frac{8}{\pi}+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1)+2\frac{L'}{L}(1,\chi_1). \tag{8. 4}$$

Now

$$\frac{L'}{L}(1,\chi_1)=\frac{-\frac{\log 3}{3}+\frac{\log 5}{5}+\frac{\log 7}{7}-\dots}{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots}<$$

$$<\frac{-\frac{\log 3}{3}+\frac{\log 5}{5}+\frac{\log 7}{7}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}<\frac{\frac{2}{7}}{\frac{104}{105}}<\frac{1}{3}$$

and hence from (8. 4)

$$S(\chi_1)<\log\frac{8}{\pi}+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1)+\frac{2}{3}<1-0{,}57+\frac{2}{3}<2.$$

For $\chi=\chi_3$ we start from

(8. 5) $$\xi(1-s,\chi_3)=\xi(s,\chi_3)$$

where

$$\xi(s,\chi_3)\overset{\text{def}}{=}\left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)L(s,\chi_3).$$

(8. 5) gives again

$$\frac{\xi'}{\xi}(s,\chi_3)=-\frac{\xi'}{\xi}(1-s,\chi_3).$$

As before, we get

(8. 6) $$S(\chi_3)=2\frac{\xi'}{\xi}(1,\chi_3)=\log\frac{8}{\pi}+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)+2\frac{L'}{L}(1,\chi_3).$$

But

$$\frac{L'}{L}(1,\chi_3)=\frac{\frac{\log 3}{3}+\frac{\log 5}{5}-\frac{\log 7}{7}+\dots}{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\dots}<\frac{\frac{\log 3}{3}+\frac{\log 5}{5}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}<\frac{\frac{1{,}2}{3}+\frac{2}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{12}{7}$$

and from the partial-fraction representation of $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)=-2-0{,}57+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)<-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<-\frac{3}{2}$$

and thus from (8. 6)

$$S(\chi_3)<1-\frac{3}{2}+\frac{24}{7}<3.$$

9. We need further the

LEMMA VI. *If for an* $1 \leqq v \leqq 3$ *the non-trivial zeros* $\varrho(\chi_v)$ *of* $L(s, \chi_v)$ *are on the line* $\sigma = \frac{1}{2}$, *then*

$$\sum_{\varrho(\chi_v)} |\Gamma(\varrho)| < \frac{1}{10}.$$

Since in the rectangle

$$0 < \sigma < 1, \quad |t| \leqq 7$$

there are only two zeros of $L(s, \chi_v)$, owing to (2. 4), (2. 5), and (2. 6), the simple inequality[6]

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right| < 3e^{-\frac{\pi}{2}|\gamma|} \tag{9. 1}$$

gives at once

$$\sum_{|I\varrho(\chi_v)| \leqq 7} |\Gamma(\varrho)| < 6e^{-5}. \tag{9. 2}$$

Again (9. 1) gives for $|\gamma| > 7$ $\left(\text{since the function } \left(\frac{1}{4}+\mu^2\right)e^{-\frac{\pi}{2}\mu} \text{ decreases for } \mu \geqq \frac{4}{\pi}\right)$

$$\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|}{\left(\frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2}\right)} < \frac{3\left(\frac{1}{4}+\gamma^2\right)}{e^{\frac{\pi}{2}|\gamma|}} < 3e^{-6}.$$

Hence this and Lemma V give

$$\sum_{|I\varrho(\chi_2)|>7} |\Gamma(\varrho)| < 3e^{-6} \sum_{\varrho(\chi_v)} \frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2} = 3e^{-6} \left| \sum_{\varrho(\chi_v)} \frac{1}{\varrho(1-\varrho)} \right| < 9e^{-6}.$$

This and (9. 2) prove the Lemma VI.

LEMMA VII. *With the notation*

$$S_1(\chi) = \sum_{\varrho(\chi)} \frac{1}{|\varrho|^2}$$

the sum being extended to the non-trivial zeros of $L(s, \chi)$ mod 8, $\chi \neq \chi_0$ *we have*

$$(0 <) S_1(\chi) < 4.$$

[6] See e. g. E. LANDAU [1], p. 218.

Lemma V gives namely

$$3>\sum_{\varrho(\chi)}\frac{1}{\varrho(1-\varrho)}=\sum_{t_\varrho>0}^{\varrho(\chi)}\left\{\frac{1}{(\sigma_\varrho+it_\varrho)(1-\sigma_\varrho-it_\varrho)}+\frac{1}{(\sigma_\varrho-it_\varrho)(1-\sigma_\varrho+it_\varrho)}\right\}=$$

$$=2\sum_{t_\varrho>0}^{\varrho(\chi)}\frac{\sigma_\varrho(1-\sigma_\varrho)+t_\varrho^2}{(\sigma_\varrho^2+t_\varrho^2)\{(1-\sigma_\varrho)^2+t_\varrho^2\}}>2\sum_{t_\varrho>0}^{\varrho(\chi)}\frac{t_\varrho^2}{(\sigma_\varrho^2+t_\varrho^2)\{(1-\sigma_\varrho)^2+t_\varrho^2\}}.$$

Hence

$$\sum_{t_\varrho>0}^{\varrho(\chi)}\frac{t_\varrho^2}{(\sigma_\varrho^2+t_\varrho^2)\{(1-\sigma_\varrho)^2+t_\varrho^2\}}<\frac{3}{2}, \tag{9.3}$$

and thus from the functional-equation

$$S_1(\chi)=\sum_{t_\varrho>0}^{\varrho(\chi)}\left\{\frac{1}{\sigma_\varrho^2+t_\varrho^2}+\frac{1}{(1-\sigma_\varrho)^2+t_\varrho^2}\right\}= \tag{9.4}$$

$$=\sum_{t_\varrho>0}^{\varrho(\chi)}\frac{\{\sigma_\varrho^2+(1-\sigma_\varrho)^2\}+2t_\varrho^2}{(\sigma_\varrho^2+t_\varrho^2)\{(1-\sigma_\varrho)^2+t_\varrho^2\}}\leqq 2\sum_{t_\varrho>0}^{\varrho(\chi)}\frac{\frac{1}{2}+t_\varrho^2}{(\sigma_\varrho^2+t_\varrho^2)\{(1-\sigma_\varrho)^2+t_\varrho^2\}}.$$

Since from (2. 4), (2. 5) and (2. 6)

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{12}t_\varrho^2$$

(9. 3) and (9. 4) give

$$S_1(\chi)<\left(2+\frac{1}{12}\right)\sum_{t_\varrho>0}^{\varrho(\chi)}\frac{t_\varrho^2}{(\sigma_\varrho^2+t_\varrho^2)\{(1-\sigma_\varrho)^2+t_\varrho^2\}}<4.$$

10. LEMMA VIII. *We have*

$$2\,\mathrm{Re}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\cdot 3{,}57615\ldots\right)>\frac{\sqrt{2\pi}}{e^6}\cdot 0{,}3 \tag{10.1}$$

and

$$2\,\mathrm{Re}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\cdot 4{,}899973\ldots\right)<-\frac{\sqrt{2\pi}}{e^8}\cdot 0{,}3. \tag{10.2}$$

For the proof we shall use the slightly modified formula (see e. g. GELFOND [1], p. 138)

$$\log\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s+\frac{1}{2\pi}\log 2\pi+\frac{\vartheta}{|s|}, \tag{10.3}$$

valid for $|s|\geqq 3{,}5$ with $|\vartheta|\leqq 1$. This gives

$$\arg\Gamma(s)=\mathrm{Im}\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s\right\}+\frac{\vartheta}{|s|} \tag{10.4}$$

and hence

$$0 < \arc \Gamma\left(\frac{1}{2} + i \cdot 3{,}57615\ldots\right) < 79^\circ$$

and

$$\left(\frac{3}{4}\pi < \right) 2{,}594 < \arc \Gamma\left(\frac{1}{2} + i \cdot 4{,}899973\ldots\right) < 3{,}216 \left(< \frac{5}{4}\pi\right).$$

These give

$$2 \operatorname{Re} \Gamma\left(\frac{1}{2} + i \cdot 3{,}5761\ldots\right) > 2 \sin 11^\circ \cdot \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i \cdot 3{,}5761\ldots\right)\right| \tag{10. 5}$$

and

$$2 \operatorname{Re} \Gamma\left(\frac{1}{2} + i \cdot 4{,}899973\ldots\right) < -\sqrt{2}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i \cdot 4{,}89\ldots\right)\right|, \tag{10. 6}$$

respectively. Using the well-known formula

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\vartheta\right)\right| = \sqrt{\frac{2\pi}{e^{\pi\vartheta} + e^{-\pi\vartheta}}} \tag{10. 7}$$

(10. 1) and (10. 2) follow from (10. 5) and (10. 6) at once.

Finally we need the

LEMMA IX. *With the notation* ($\chi \bmod 8$, $\chi \neq \chi_0$)

$$S_2(\chi) \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\operatorname{Im} \varrho| \geqq 1/2} |\Gamma(\varrho)|$$

we have

$$|S_2(\chi)| < \sqrt{2\pi} \cdot 0{,}14 \cdot e^{-8}.$$

The well-known formula

$$|\Gamma(s)| < \frac{\sqrt{1+t^2}\,\Gamma(1+\sigma)}{\sqrt{\sigma^2+t^2}} \sqrt{\frac{2\pi t}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}} \qquad (0 < \sigma < 1)$$

(see e. g. N. NIELSEN [1], p. 25) gives for $|t| \geqq 12$ the inequality

$$|\Gamma(s)| < \sqrt{2\pi} \cdot 2\sqrt{|t|}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \qquad (0 < \sigma < 1). \tag{10. 8}$$

Since $\sqrt{t}\,(1+t^2) e^{-\frac{\pi}{2}t}$ decreases for $t > 3$, (10. 8) gives for $|t| \geqq 12$

$$\frac{|\Gamma(s)|}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)} < \sqrt{2\pi} \cdot 2\sqrt{12} \cdot 145 \cdot e^{-18{,}8} < \sqrt{2\pi} \cdot 1015 \cdot e^{-18{,}8}$$

i. e. using Lemma VII

$$S_2(\chi) < \sqrt{2\pi} \cdot 1015 \cdot e^{-18,8} \sum_{\varrho(\chi)} \frac{1}{1+t_\varrho^2} <$$

$$< \sqrt{2\pi} \cdot 1015 \cdot e^{-18,8} \sum_{\varrho(\chi)} \frac{1}{|\varrho|^2} <$$

$$< \sqrt{2\pi} \cdot 4060 \cdot e^{-18,8} < \sqrt{2\pi} \cdot 0{,}14 \cdot e^{-8}$$

indeed.

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE UNIVERSITY ADAM MICZKIEWICZ,
POZNAŃ

MATHEMATICAL INSTITUTE
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY,
BUDAPEST

(Received 7 February 1962)

References

A. O. GELFOND, [1], *Iszcsiszlennie konecsnich raznosztej* (Moskva, 1952), in part. p. 138.
G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, [1], Contributions to the theory of Riemann Zeta-function and the theory of distribution of primes, *Acta Math.*, **41** (1918), pp. 119—196.
E. LANDAU [1], Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie, *Math. Zeitschr.*, **1** (1) (1918), pp. 1—24.
[2] Über einige ältere Vermutungen ..., zweite Abh. *ibidem*, **1** (2—3) (1918), pp. 213—219.
N. NIELSEN [1] *Handbuch der Theorie der Γ-Function*, (Leipzig, 1906), in part. p. 25.
K. PRACHAR [1], *Primzahlverteilung*, (Springer Verl., 1957).
P. TURÁN [1] *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, Akad. Kiadó, 1953). A completely rewritten English edition will appear in the Interscience Tracts series.

TYPOLOGIE DES LANGUES ET MODÈLES LOGIQUES

Par

S. MARCUS (Bucarest)

(*Presented par* L. KALMÁR)

Introduction

Le but du présent travail est l'étude systématique — et par un procédé uniforme — des relations qui existent entre les divers types logiques de langues qui interviennent, explicitement ou implicitement, dans la théorie ensembliste de la grammaire, telle qu'elle a été fondée et développée dans [5], [2], [14], [12], [13], [7], [8], [9]. On va retrouver certains résultats donnés — sans démonstration — dans [14] et certains résultats de [5]. On va utiliser d'une façon essentielle le théorème 1 de [9].*

Définitions et notations de [5], [2], [12]

Considérons un ensemble Γ dont les éléments sont nommés *mots*. Désignons par Φ le demi-groupe libre engendré par Γ. Un élément de Φ sera, par définition, une *phrase*. Considérons une certaine partie $\Psi \subset \Phi$, telle que chaque mot entre au moins dans une phrase de Ψ. Les éléments de Ψ sont, par définition, des phrases *marquées* ou *répérées* (ce deuxième terme est pris de [1]). Soient $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$. On a, par définition, $x \to y$ et on dit que x *domine* y si, pour deux phrases f_1 et f_2 telles que la phrase $f_1 x f_2$ soit marquée, la phrase $f_1 y f_2$ est aussi marquée. L'ensemble $\{y : x \to y,\ y \to x\}$ est, par définition, la *famille* de x et est désigné par $S(x)$. La notion de famille se trouve, sous une forme ou autre, dans plusieurs endroits, par exemple dans [4] et [3]; c'est la *classe de distribution* considérée dans la linguistique descriptive.

Pour montrer que $x \to y$ et $y \to x$ on va écrire $x \leftrightarrow y$.

Il est aisé de voir que la relation $y \in S(x)$ est une relation d'équivalence dans Γ. Considérons une partition V de Γ en ensembles disjoints et désignons par $V(x)$ l'élément de V qui contient le mot x. Il s'ensuit que, si $V(x) \neq V(y)$, alors $V(x) \cap \cap V(y) = 0$. Une *langue* est, par définition, un systéme $\{\Gamma, V, \Psi\}$, où les objets Γ, V et Ψ ont la signification ci-dessus. V doit être conçue comme la *partition en paradigmes*. On fait donc abstraction de l'homonymie lexique partielle.

Soit P une partition de Γ et $P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_n}$ un système fini et ordonné d'éléments de P, certains éléments pouvant figurer plusieurs fois dans le même système. Un tel système s'appelle une *P-structure*. Étant donnée une phrase $f = x_1 x_2 \ldots x_n$, la P-structure $P(f) = P(x_1) P(x_2) \ldots P(x_n)$ est, par définition, la *P-structure de f*. Une P-structure π sera dite *marquée* ou *répérée* s'il existe une phrase répérée φ, telle que $\pi = P(\varphi)$. On dit que $P(x)$ *P-domine* $P(y)$ et on écrit $P(x) \overset{P}{\to} P(y)$ si pour deux P-structures quelconques P_1 et P_2 telles que $P_1 P(x) P_2$ soit une P-structure répérée, la P-structure $P_1 P(y) P_2$ est aussi répérée.

* J'exprime ma reconnaissance aux référants, pour des remarques utiles.

Il ne faut pas confondre cette relation de domination avec la relation $A \to B$ définie dans [2] et étudiée dans [2], [7] et [8]. Si, pourtant, on n'utilise pas cette dernière relation, la confusion n'est plus possible et on peut écrire $P(x) \to P(y)$ au lieu de $P(x) \overrightarrow{P} P(y)$ et dire *domine* au lieu de *P-domine*. Cette convention sera adoptée dans le présent travail.

On dira que $P(x)$ est *P-équivalente* à $P(y)$ et on écrira $P(x) \tilde{P} P(y)$ ou $P(x) \overset{\leftrightarrow}{P} P(y)$ si l'on a à la fois $P(x) \overrightarrow{P} P(y)$ et $P(y) \overrightarrow{P} P(x)$. S'il n'y a pas possiblité de confusion, on va désigner la P-équivalence de $P(x)$ et $P(y)$ par $P(x) \sim P(y)$ ou $P(x) \leftrightarrow P(y)$.

On dit que la partition P_1 est un *grossissement* (terme proposé par [1]) de la partition P_2 si pour chaque $x \in \Gamma$ on a $P_2(x) \subset P_1(x)$. Le grossissement est *régulier* si de $P_2(z) \subset P_1(x) \supset P_2(y)$ on déduit $P_2(z) \leftrightarrow P_2(y)$. La *partition dérivée* P' d'une partition P est définie par

$$P'(x) = \bigcup_{P(y) \leftrightarrow P(x)} P(y) \quad \text{pour chaque} \quad x \in \Gamma.$$

Il est aisé de voir que P' est un grossissement régulier de P.

Une *chaîne de x à y* est une suite finie de mots $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ tels que $x_1 = x$, $x_n = y$ et $x_i \in S(x_{i+1}) \cup V(x_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Désignons par $R(x)$ l'ensemble des mots y tels qu'il existe une chaîne de x à y. $R(x)$ est la *section* de x. Il est aisé de voir que les sections définissent une partition de Γ, partition notée par R.

Désignons par $K(x)$ l'ensemble des mots y tels qu'on a une au moins des deux relations suivantes: $V(x) \cap S(y) \neq 0$, $V(y) \cap S(x) \neq 0$. $K(x)$ est *la classe de x*.

Langues adéquates

La dérivée $T = V'$ de la partition V est, par définition, la partition en *types*. $T(x)$ est une approximation de la soit-disante *partie du discours* contenant le mot $x \in \Gamma$.

Une langue est *adéquate* si, pour chaque $x \in \Gamma$, on a $S(x) \subset T(x)$. L'existence des langues adéquates sera une conséquence de certains théorèmes ci-dessous.

THÉORÈME 1. *Il existe une langue qui n'est pas adéquate.*

DÉMONSTRATION. Posons $\Gamma = \{a, b, c, d, e\}$, $V(a) = \{a, b\}$, $V(c) = \{c, d\}$, $V(e) = \{e\}$, $\psi = (ad, bd, cd, ee)$. On a $S(a) = \{a, b, c\}$, $S(d) = \{d\}$, $S(e) = \{e\}$. Nous allons montrer que $T(a) = V(a)$; le théorème sera ainsi établi, car $S(a) - V(a) = \{a, b, c\} - \{a, b\} = \{c\} \neq 0$.

Il est évident, d'abord, que $V(e)$ n'est pas contenu dans $T(a)$. En effet, la V-structure $V(a)\ V(c)$ est répérée, tandis que la V-structure $V(e)\ V(c)$ n'est pas répérée. Il est visible ensuite que $V(c)$ n'est pas contenu dans $T(a)$, car le remplacement de $V(c)$ par $V(a)$ dans la V-structure répérée $V(a)\ V(c)$ conduit à la V-structure non répérée $V(a)\ V(a)$.

THÉORÈME 2. *Dans une langue adéquate, T est un grossissement de R.*

DÉMONSTRATION. On a, par hypothèse, $S(x) \subset T(x)$ et de ce que $V' = T$ on déduit $V(x) \subset T(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$. Posons $R_1(x) = S(x) \cup V(x)$. On a $R_1(x) \subset$

$\subset T(x)$. Posons encore, pour un ensemble quelconque $M \subset \Gamma$,

$$S(M) = \bigcup_{x \in M} S(x), \quad V(M) = \bigcup_{x \in M} V(x),$$

$$R(M) = S(M) \cup V(M)$$

et définissons, par induction, les ensembles

$$R_2(x) = R(R_1(x)), \ldots, R_{n+1}(x) = R(R_n(x)), \ldots .$$

Soit $M \subset T(x)$. De ce que $R_1(x) \subset T(x)$ on déduit $R(M) \subset T(x)$, donc $R_n(x) \subset \subset T(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$ et pour $n = 1, 2, \ldots$. Mais on a (voir aussi [6], p. 503)

$$R(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(x)$$

donc

$$R(x) \subset T(x) \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma$$

et le théorème est établi.

THÉORÈME 3. *Dans une langue adéquate, T est un grossissement régulier de R.*

DÉMONSTRATION. Soient $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$, $u \in \Gamma$ tels que

(1) $$R(x) \subset T(u)$$

(2) $$R(y) \subset T(u).$$

On doit montrer que

(3) $$R(x) \leftrightarrow R(y).$$

Soit

(4) $$R(z_1) \ldots R(z_{i-1}) R(x) R(z_{i+1}) \ldots R(z_n)$$

une R-structure répérée. Il existe donc une phrase répérée

(5) $$\varphi = w_1 \ldots w_{i-1} w_i w_{i+1} \ldots w_n$$

telle que $R(\varphi)$ soit (4). On déduit que

(6) $$R(w_j) = R(z_j) \qquad (1 \leqq j \leqq n, j \neq i),$$

(7) $$R(w_i) = R(x).$$

D'autre part, on a $V(w_j) \subset R(w_j)$ pour $1 \leqq j \leqq n$, donc la V-structure

(8) $$V(w_1) \ldots V(w_{i-1}) V(w_i) V(w_{i+1}) \ldots V(w_n)$$

est répérée, à la suite du fait que la phrase φ, donnée par (5), est répérée. De (6) et (7) on déduit

(9) $$V(w_j) \subset R(z_j) \qquad (1 \leqq j \leqq n, j \neq i)$$

(10) $$V(w_i) \subset R(x).$$

En utilisant le théorème 2 et les inclusions (1), (2), (9) et (10), on obtient

(11) $$V(w_j) \subset T(z_j) \supset V(z_j) \qquad (1 \leqq j \leqq n, j \neq i)$$

(12) $$V(w_i) \subset T(u) \supset V(y).$$

De (11) et (12) on déduit, en vertu du fait que $V' = T$, les équivalences

$$V(w_j) \leftrightarrow V(z_j) \qquad (1 \leqq j \leqq n, j \neq i) \tag{13}$$

$$V(w_i) \leftrightarrow V(y). \tag{14}$$

De (13), (14) et du fait que la V-structure (8) est répérée on déduit que la V-structure

$$V(z_1)\ldots V(z_{i-1})\,V(y)\,V(z_{i+1})\ldots V(z_n)$$

est répérée. En vertu du fait que $V(a) \subset R(a)$ pour chaque $a \in \Gamma$, il s'ensuit que la R-structure

$$R(z_1)\ldots R(z_{i-1})\,R(y)\,R(z_{i+1})\ldots R(z_n)$$

est répérée. Mais cette R-structure s'obtient de (4) en remplaçant $R(x)$ par $R(y)$, donc $R(x) \rightarrow R(y)$.

Les hypothèses (1) et (2) étant symétriques par rapport à x et y, on déduit qu'on a aussi $R(y) \rightarrow R(x)$ et la relation (3) est établie.

THÉORÈME 4. *Dans une langue adéquate on a* $R' = T$.

DÉMONSTRATION. Le théorème 1 de [9] affirme: „Si P est un grossissement de Q, alors on a $P' = Q'$ si et seulement si le grossissement est régulier". Posons $P = T$, $Q = R$. En vertu du théorème 3, T est un grossissement régulier de R, donc $T' = R'$. D'autre part, on a $T = V'$, donc $T' = (V')'$. Mais T est un grossissement régulier de V, donc en utilisant de nouveau le théorème 1 de [9], on obtient $T' = T$, donc $T = R'$.

Chacune des propriétés affirmées par les théorèmes 2, 3 et 4 est caractéristique pour les langues adéquates. En effet, on a

THÉORÈME 5. *Si, dans une langue, T est un grossissement de R, alors la langue est adéquate.*

DÉMONSTRATION. Par la définition même de R, on a $S(x) \subset R(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$. D'autre part, on a, par hypothèse, $R(x) \subset T(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$, donc $S(x) \subset T(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$.

COROLLAIRE 1. *Si, dans une langue, T est un grossissement régulier de R, alors la langue est adéquate.*

COROLLAIRE 2. *Si, dans une langue, $T = R'$, alors la langue est adéquate.*

Structure de classes

PROPOSITION 1. *Dans toute langue $\{\Gamma, V, \Psi\}$ on a, pour chaque $x \in \Gamma$, les inclusions* $S(x) \cup V(x) \subset K(x) \subset R(x)$. Conséquence des définitions.

PROPOSITION 2. *Dans toute langue $\{\Gamma, V, \Psi\}$, la relation $\varrho(x, y)$, définie par $y \in K(x)$, est une relation réflexive et symétrique dans Γ.*

DÉMONSTRATION. Conséquence de la définition des classes.

Posons, pour chaque $x \in \Gamma$,

$$M(x) = \bigcup_{y \in V(x)} S(y), \quad N(x) = \bigcup_{y \in S(x)} V(y).$$

THÉORÈME 6. *Dans toute langue* $\{\Gamma, V, \Psi\}$, *on a, pour chaque* $x \in \Gamma$, $K(x) = M(x) \cup N(x)$.

DÉMONSTRATION. Soit $u \in K(x)$, donc $V(x) \cap S(u) \neq 0$ ou bien $V(u) \cap S(x) \neq 0$. Si $V(x) \cap S(u) \neq 0$, alors il existe un $v \in V(x) \cap S(u)$, donc $u \in S(v)$ et $v \in V(x)$, donc $u \in M(x)$. Si $V(u) \cap S(x) \neq 0$, alors il existe un $w \in V(u) \cap S(x)$, donc $u \in V(w)$ et $w \in S(x)$, donc $u \in N(x)$. On a prouvé ainsi l'inclusion $K(x) \subset M(x) \cup N(x)$.

Soit maintenant $u \in M(x) \cup N(x)$. Si $u \in M(x)$, alors il existe un $y \in V(x)$, tel que $u \in S(y)$, donc $y \in V(x) \cap S(u)$, donc $V(x) \cap S(u) \neq 0$, donc $u \in K(x)$. Si $u \in N(x)$, alors il existe un $y \in S(x)$, tel que $u \in V(y)$, donc on a $y \in S(x) \cap V(u)$, donc $S(x) \cap V(u) \neq 0$, donc $u \in K(x)$. On a prouvé ainsi l'inclusion $M(x) \cup N(x) \subset K(x)$ et le théorème est démontré.

REMARQUE. En utilisant les notations introduites dans la démonstration du théorème 2, on a $M(x) = S(V(x))$, $N(x) = V(S(x))$.

Posons, pour chaque $x \in \Gamma$,

$$H(x) = \bigcup_{K(x) \cap K(y) \neq 0} K(y).$$

PROPOSITION 3. *Dans toute langue* $\{\Gamma, V, \Psi\}$ *on a, pour chaque* $x \in \Gamma$, $H(x) \subset R(x)$.

DÉMONSTRATION. Soit $z \in H(x)$. Il y a donc un $y \in \Gamma$, tel que $z \in K(y)$ et $K(y) \cap K(x) \neq 0$. Soit $t \in K(y) \cap K(x)$. On a d'après les Propositions 1 et 2 et comme R est une partition de Γ, $t \in K(x) \subset R(x)$, $y \in K(t) \subset R(t) = R(x)$, $z \in K(y) \subset R(y) = R(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

Langues homogènes

Une langue $\{\Gamma, V, \Psi\}$ sera dite *homogène* ou *conforme* si la relation $S(x) \cap V(y) \neq 0$ entraîne la relation $S(y) \cap V(x) \neq 0$, quels que soient $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$.

Soit $\{\Gamma, V, \Psi\}$ une langue quelconque. Si un mot $x \in \Gamma$ est tel que, pour $y \in V(x)$, $z \in S(x)$ on a $S(y) \cap V(z) \neq 0$, alors on dit que le mot x est *homogène* ou *conforme*. Si chaque mot de Γ est *homogène*, alors on dit que la langue est *localement homogène*.

THÉORÈME 7. *Une langue* $\mathfrak{L}$ *est homogène si et seulement si elle est localement homogène.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{L}$ homogène et soient $y \in V(x)$, $z \in S(x)$ $(x \in \Gamma)$. On déduit $x \in V(y)$, $x \in S(z)$, donc $V(y) \cap S(z) \neq 0$, donc, en vertu de l'homogénité, $S(y) \cap V(z) \neq 0$. Il s'ensuit que le mot x est homogène. Mais x est arbitraire dans Γ, donc $\mathfrak{L}$ est localement homogène.

Soit $\mathfrak{L}$ localement homogène et soient $u \in \Gamma$, $v \in \Gamma$ tels que $V(u) \cap S(v) \neq 0$. Il y a donc un mot $w \in \Gamma$ tel que $w \in V(u) \cap S(v)$ donc $u \in V(w)$, $v \in S(w)$. Mais,

par l'hypothèse de l'homogénité locale, w est un mot homogène, donc $S(u) \cap V(v) \neq 0$ et $\mathfrak{L}$ est homogène.

THÉORÈME 8. *Une langue homogène est adéquate.*

DÉMONSTRATION. 1° Établissons d'abord la propriété suivante: Si $y \in S(x)$ et $y' \in V(y)$, alors il existe un mot $x' \in V(x)$, tel que $y' \in S(x')$.

En effet, de $y \in S(x)$ on déduit $x \in S(y)$ et on a, d'autre part, $y' \in V(y)$. La langue, étant homogène, est, d'après le théorème 7, localement homogène, donc le mot y est homogène; il s'ensuit que $V(x) \cap S(y') \neq 0$. Soit alors $x' \in V(x) \cap S(y')$; le mot x' satisfait la condition exigée.

2° Soit $y \in S(x)$; montrons que $V(y) \leftrightarrow V(x)$.

Soit

$$\ldots V_1 V(y) V_2 \ldots$$

une V-structure répérée contenant $V(y)$; il existe donc une phrase répérée $\ldots v_1 y' v_2 \ldots$ telle que $\ldots, v_1 \in V_1, y' \in V(y), v_2 \in V_2, \ldots$. En utilisant 1°, on déduit l'existence d'un mot $x' \in V(x)$, tel que $y' \in S(x')$, donc la phrase

$$\ldots v_1 x' v_2 \ldots$$

est répérée, donc la V-structure

$$\ldots V_1 V(x) V_2 \ldots$$

est répérée, c'est-à-dire $V(y) \rightarrow V(x)$.

Pour établir la relation $V(x) \rightarrow V(y)$ il suffit à remarquer que la propriété établie à 1° peut être énoncée aussi de la façon suivante: Si $x \in S(y)$ et $x' \in V(x)$, alors il existe un mot $y' \in V(y)$ tel que $x' \in S(y')$.

THÉORÈME 9. *Il existe une langue adéquate qui n'est pas homogène.*

DÉMONSTRATION. Posons $\Gamma = \{a, b, c, d\}$, $V(a) = \{a, b\}$, $V(c) = \{c, d\}$, $\Psi = \{ad, ab, db, bc, bb, bd, dd, dc\}$. On a $S(a) = \{a\}$, $S(b) = \{b, d\} = S(d)$, $S(c) = \{c\}$. Il s'ensuit que $V(a) \cap S(d) = \{b\} \neq 0$, tandis que $V(d) \cap S(a) = \{c, d\} \cap \{a\} = 0$, donc la langue considérée n'est pas homogène.

Montrons maintenant qu'on a $S(x) \subset T(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$. Si $x = a$ ou $x = c$, alors l'inclusion est évidente, car on a toujours $x \in T(x)$. Considérons maintenant $x = b$. On a $b \leftrightarrow d$, il faut donc établir la relation $V(b) \leftrightarrow V(d)$. Pour qu'une V-structure soit répérée il faut qu'elle contienne seulement deux termes. On a quatre V-structures formées de deux termes: $V(b)\ V(b)$, $V(d)\,V(d)$, $V(b)\ V(d)$ et $V(d)\ V(b)$. Il est aisé de voir que toutes ces V-structures sont répérées. Donc $V(b) \leftrightarrow V(d)$ et le théorème 9 est démontré. On remarque, d'ailleurs, que tous les mots de Γ appartiennent au même type; autrement dit, en tenant compte que la notion de type est une approximation de la notion de „partie du discours", on peut dire que, dans la langue considérée, il n'y a qu'une seule partie du discours.

THÉORÈME 10. *Dans une langue homogène, on a $y \in R(x)$ si et seulement si $V(x) \cap \cap S(y) \neq 0$.*

DÉMONSTRATION. Soit d'abord $y \in R(x)$. Il y a donc une chaîne $x = x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n = y$, telle que $x_{i+1} \in S(x_i) \cup V(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Nous allons

montrer, en utilisant un raisonnement par induction, qu'on a $V(x) \cap S(x_j) \neq 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$; le cas particulier $j = n$ est justement la relation qu'on doit établir. Pour $j = 1$ la relation est vraie, car $x_1 = x$, donc $x \in V(x) \cap S(x_1)$. Supposons que la relation est vraie pour chaque $j \leqq i$, donc $V(x) \cap S(x_j) \neq 0$ pour $j \leqq i$. De ce que la langue est homogène on déduit que $V(x_j) \cap S(x) \neq 0$ pour $j \leqq i$. Mais on a $x_{i+1} \in V(x_i) \cup S(x_i)$. Si $x_{i+1} \in V(x_i)$, alors $V(x_i) = V(x_{i+1})$ donc de $V(x_i) \cap S(x) \neq 0$ on déduit $V(x_{i+1}) \cap S(x) \neq 0$ et, en vertu de l'homogénité de la langue, on a aussi $V(x) \cap S(x_{i+1}) \neq 0$. Si $x_{i+1} \in S(x_i)$, alors on a $S(x_i) = S(x_{i+1})$, donc de $V(x) \cap S(x_i) \neq 0$ on déduit $V(x) \cap S(x_{i+1}) \neq 0$. Il s'ensuit que la validité de la relation $V(x) \cap S(x_j) \neq 0$ pour $j \leqq i$ entraîne la validité de cette relation pour $j = i+1$, donc $V(x) \cap S(y) \neq 0$.

Soit maintenant $V(x) \cap S(y) \neq 0$. Il existe donc un z tel que $z \in V(x) \cap S(y)$; c'est-à-dire, on a la chaîne x, z, y, où $x \in V(z)$ et $z \in S(y)$, donc $y \in R(x)$.

THÉORÈME 11. *Si, dans une langue, la relation* $y \in R(x)$ *entraîne* $V(x) \cap S(y) \neq 0$, *alors la langue est homogène.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $V(x) \cap S(y) \neq 0$. Comme on a montré à la fin de la démonstration du théorème 10, on a, dans ces conditions, $y \in R(x)$, donc $x \in R(y)$, donc, en vertu de l'hypothèse, $V(y) \cap S(x) \neq 0$. Résumons: la relation $V(x) \cap S(y) \neq 0$ entraîne la relation $V(y) \cap S(x) \neq 0$, donc la langue est homogène.

THÉORÈME 12. *Dans une langue homogène on a, pour chaque* $x \in \Gamma$, $K(x) = R(x)$. *(C'est-à-dire les classes coïncident avec les sections).*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in K(y)$. Il s'ensuit que $V(x) \cap S(y) \neq 0$ ou bien $V(y) \cap \cap S(x) \neq 0$. Dans chacun de ces deux cas il y a un z tel que x, z et y forment une chaîne, donc $x \in R(y)$. Soit maintenant $x \in R(y)$. De ce que la langue est homogène on déduit, en vertu du théorème 10, que $V(y) \cap S(x) \neq 0$, donc $x \in K(y)$.

REMARQUE. L'hypothèse que la langue est homogène intervient seulement dans l'implication $x \in R(y) \Rightarrow x \in K(y)$. L'inclusion $K(x) \subset R(x)$ est vraie pour chaque $x \in \Gamma$, quelle que soit la langue considérée. (Voir la proposition 1).

COROLLAIRE 3. *Dans une langue homogène, les classes* $K(x)$ *définissent une partition de* Γ *et on a* $K' = T$.

DÉMONSTRATION. En vertu du théorème 8, la langue est adéquate; on peut appliquer le théorème 4 et on a $R' = T$. En vertu du théorème 12 et en tenant compte que les sections définissent une partition de Γ, on déduit que les classes $K(x)$ définissent une partition K de Γ, on a $K = R$ et $K' = T$.

THÉORÈME 13. *Une langue* $\{\Gamma, V, \Psi\}$ *est homogène si et seulement si* $M(x) = N(x)$ *pour chaque* $x \in \Gamma$.

DÉMONSTRATION. Soit $\{\Gamma, V, \Psi\}$ homogène. Pour $u \in M(x)$ on a un $y \in V(x)$ tel que $u \in S(y)$, donc $V(x) \cap S(u) \neq 0$ d'où, en vertu de l'homogénité, $V(u) \cap \cap S(x) \neq 0$. Soit $z \in V(u) \cap S(x)$. On a $u \in V(z)$ et $z \in S(x)$, donc $u \in N(x)$. Il s'ensuit que $M(x) \subset N(x)$.

Soit maintenant $u \in N(x)$. Il y a un $y \in S(x)$ tel que $u \in V(y)$, donc $S(x) \cap \cap V(u) \neq 0$, d'où, en vertu de l'homogénité, on déduit $S(u) \cap V(x) \neq 0$. Soit $z \in S(u) \cap V(x)$. On a $u \in S(z)$ et $z \in V(x)$, donc $u \in M(x)$. Il s'ensuit que $N(x) \subset M(x)$.

Résumons: l'homogénité de $\{\Gamma, V, \Psi\}$ entraîne $M(x) = N(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$.

Soit maintenant $M(x) = N(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$. Si $V(x) \cap S(y) \neq 0$, alors soit $z \in V(x) \cap S(y)$. On a $x \in V(z)$ et $z \in S(y)$, donc $x \in N(y)$. Mais $N(y) = M(y)$, donc $x \in M(y)$, c'est-à-dire on a un mot $u \in V(y)$, tel que $x \in S(u)$. On déduit que $u \in S(x) \cap V(y)$. Résumons: la relation $V(x) \cap S(y) \neq 0$ entraîne $V(y) \cap S(x) \neq 0$. La langue est donc homogène.

COROLLAIRE 4. *Dans une langue homogène on a, pour chaque* $x \in \Gamma$, $K(x) = M(x) = N(x)$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate des théorèmes 6 et 13.

THÉORÈME 14. *Si, pour chaque* $x \in \Gamma$, *on a* $N(x) \subset M(x)$, *alors la langue est homogène.*

DÉMONSTRATION. La justification de ce théorème est implicitement contenue dans la démonstration du théorème 13. Nous allons expliciter ici cette partie. Soit $V(x) \cap S(y) \neq 0$. Il y a donc un mot $z \in V(x) \cap S(y)$, d'où $x \in V(z)$ et $z \in S(y)$. On déduit que $x \in N(y)$. Mais $N(y) \subset M(y)$, donc $x \in M(y)$; il y a un mot $u \in V(y)$ tel que $x \in S(u)$, donc $V(y) \cap S(x) \neq 0$ et la langue est homogène.

Par une voie analogue on obtient le

THÉORÈME 14′. *Si, pour chaque* $x \in \Gamma$, *on a* $M(x) \subset N(x)$, *alors la langue est homogène.*

Des théorèmes 6, 14 et 14′ on déduit les corollaires suivants:

COROLLAIRE 5. *Si* $K(x) = M(x)$ *pour chaque* $x \in \Gamma$, *alors la langue est homogène.*

COROLLAIRE 6. *Si* $K(x) = N(x)$ *pour chaque* $x \in \Gamma$, *alors la langue est homogène.*

Une propriété générale des partitions. Amélioration du corollaire 3

THÉORÈME 15. *Soient, dans une langue quelconque, trois partitions* L, P *et* Q, *telles que* $L(x) \subset P(x) \subset Q(x)$ *pour chaque mot* x. *Si* $L' = Q'$, *alors* $P' = L'$.

DÉMONSTRATION. Le théorème 1 de [9] affirme: „Si P_1 est un grossissement de P_2, alors $P_1' = P_2'$ si et seulement si le grossissement est régulier".

Désignons par H la partition L' et prenons $P_1 = P$, $P_2 = L$. P est un grossissement de L; il suffit à établir que ce grossissement est régulier pour que le théorème 15 soit établi. Soient, pour cela, trois mots x, y et u tels que $L(x) \subset P(u) \supset L(y)$. On a $P(u) \subset H(u)$, car H, étant un grossissement de $Q(Q' = H)$, est à plus forte raison un grossissement de P. On déduit que $L(x) \subset H(u) \supset L(y)$. Mais de ce que $L' = H$ on déduit que H est un grossissement régulier de L, donc $L(x) \sim L(y)$. Il s'ensuit que P est un grossissement régulier de L et le théorème 15 est établi.

THÉORÈME 16. (Amélioration du corollaire 3). *Soit* $\{\Gamma, V, \Psi\}$ *une langue adéquate. Si les classes* $K(x)$ *définissent une partition* K *de* Γ, *alors* $K' = T$.

DÉMONSTRATION. Faisons usage du théorème 15, en posant $L = V$, $P = K$ et $Q = R$. En vertu de la proposition 1 et du théorème 4, toutes les hypothèses du théorème 15 sont remplies, donc $K' = V' = R' = T$.

Langues simples

Une langue $\{\Gamma, V, \Psi\}$ est *simple* si elle est homogène et si, en outre, on a $V(x) \cap \bigcap S(x) = \{x\}$ pour chaque $x \in \Gamma$. Donc, par définition, toute langue simple est homogène. La réciproque n'est pas vraie:

THÉORÈME 17. *Il existe une langue homogène qui n'est pas simple.*

DÉMONSTRATION. Soit Γ un ensemble quelconque; définissons Ψ telle que, pour au moins un mot $x \in \Gamma$, $S(x)$ contient au moins deux mots. Posons $V(x) = S(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$. En vertu du fait que $V(x) = S(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$, on a toujours $V(x) \cap S(y) = S(x) \cap V(y)$, donc si $V(x) \cap S(y) \neq 0$ alors on a aussi $S(x) \cap V(y) \neq 0$ et la langue est homogène. Mais cette langue n'est pas simple, car on a toujours $V(x) \cap S(x) = S(x)$, donc, si $S(x)$ contient au moins deux mots, alors on a $V(x) \cap S(x) \neq \{x\}$.

Soit $\{\Gamma, V, \Psi\}$ une langue quelconque. Un mot $x \in \Gamma$ sera un *mot simple* si pour $y \in V(x)$ et $z \in S(x)$ l'ensemble $S(y) \cap V(z)$ est non vide et formé d'un seul mot. La langue $\{\Gamma, V, \Psi\}$ sera *localement simple* si chaque mot de Γ est un mot simple.

THÉORÈME 18. *Une langue* $\{\Gamma, V, \Psi\}$ *est simple si et seulement si elle est localement simple.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{\Gamma, V, \Psi\}$ une langue simple et soit $x \in \Gamma$. En tenant compte qu'une langue simple est homogène et en vertu du théorème 7, on déduit que x est un mot homogène, donc pour $y \in V(x)$ et $z \in S(x)$ on a $S(y) \cap V(z) \neq 0$. Supposons, par réduction à l'absurde, qu'on a deux mots x' et x'', $x' \neq x''$, tels que $x' \in S(y) \cap V(z)$ et $x'' \in S(y) \cap V(z)$. On en déduit: $V(x') = V(x'') = V(z)$, $S(x') = S(x'') = S(y)$, donc $V(x') \cap S(x') = V(x'') \cap S(x'') = S(y) \cap V(z)$, donc $x' \in V(x') \cap S(x')$ et $x'' \in V(x') \cap S(x')$. Mais c'est une contradiction avec l'hypothèse de simplicité de la langue, hypothèse qui exige que l'ensemble $V(x') \cap S(x')$ contient seulement le mot x'. Donc $\{\Gamma, V, \Psi\}$ est localement simple.

Supposons maintenant que $\{\Gamma, V, \Psi\}$ est localement simple. Par la définition même d'un mot simple, un tel mot est homogène, donc $\{\Gamma, V, \Psi\}$ est localement homogène et, en vertu du théorème 7, elle est homogène. La condition $V(x) \cap S(x) = \{x\}$ est remplie pour chaque $x \in \Gamma$; en effet,il suffit de prendre, dans la définition du mot simple, $y = z = x$, et de tenir compte qu'on a, en tout cas, $x \in S(x) \cap V(x)$.

Langues isolantes

Une langue $\{\Gamma, V, \Psi\}$ est dite *isolante* ou *amorphe* si, pour chaque $x \in \Gamma$, on a $V(x) = \{x\}$.

THÉORÈME 19. *Toute langue isolante est simple.*

DÉMONSTRATION. Si $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$ et $S(x) \cap V(y) \neq 0$, alors, de ce que $V(y) = \{y\}$, on deduit $y \in S(x)$, donc $S(x) = S(y)$, donc $S(y) \cap V(x) = S(x) \cap V(x) \neq 0$ car $x \in S(x) \cap V(x)$. Résumons: la relation $S(x) \cap V(y) \neq 0$ entraîne la relation $S(y) \cap \cap V(x) \neq 0$, donc la langue est homogène. D'autre part, on a, pour chaque $x \in \Gamma$, $S(x) \cap V(x) = S(x) \cap \{x\} = \{x\}$, donc la langue est simple.

PROPOSITION 4. *Il existe une langue simple qui n'est pas isolante.*

DÉMONSTRATION. Posons $\Gamma = \{a, b, c, d\}$, $\Psi = \{ac, bc, ad, bd\}$; soit V définie par $\Gamma = \{a, c\} \cup \{b, d\}$. On a $S(a) = S(b) = \{a, b\}$, $S(c) = S(d) = \{c, d\}$, $V(a) = V(c) = \{a, c\}$, $V(b) = V(d) = \{b, d\}$, $V(a) \cap S(a) = \{a\}$, $V(a) \cap S(b) = \{a\}$, $V(b) \cap S(a) = \{b\}$, $V(a) \cap S(c) = \{c\}$, $V(c) \cap S(a) = \{a\}$, $V(a) \cap S(d) = \{c\}$, $V(d) \cap S(a) = \{b\}$, $V(b) \cap S(b) = \{b\}$, $V(b) \cap S(c) = \{d\}$, $V(c) \cap S(b) = \{a\}$, $V(b) \cap S(d) = \{d\}$, $V(d) \cap \cap S(b) = \{b\}$, $V(c) \cap S(d) = \{c\}$, $V(d) \cap S(c) = \{d\}$, $V(c) \cap S(c) = \{c\}$, $V(d) \cap S(d) = \{d\}$, donc la langue $\{\Gamma, V, \Psi\}$ est simple. Cette langue n'est pas isolante, car on a, pour chaque $x \in \Gamma$, $V(x) \neq \{x\}$.

Par analogie avec les langues isolantes, on peut étudier les langues telles que $S(x) = \{x\}$ pour chaque $x \in \Gamma$. Il est aisé de voir qu'une telle langue est simple, mais la réciproque n'est pas vraie. Il y a des langues isolantes, avec $S(x) \neq \{x\}$ et il y a des langues non isolantes, mais telles que $S(x) = \{x\}$ pour chaque $x \in \Gamma$. Pour une langue telle que $S(x) = \{x\}$ quel que soit $x \in \Gamma$, l'idée de distribution est triviale.

Problèmes et suggestions pour des recherches ultérieures

Il est intéressant à résoudre les problèmes suivants:

PROBLÈME 1. Si, dans une langue quelconque, les classes $K(x)$ définissent une partition de Γ, peut-on affirmer que la langue est homogène?

Si la réponse au problème 1 est négative, alors il faut envisager les problèmes suivants:

PROBLÈME 2. Si, dans une langue quelconque, les classes $K(x)$ définissent une partition K de Γ, telle que $K' = T$, peut-on affirmer que la langue est homogène?

PROBLÈME 3. Si, dans une langue quelconque, on a $K(x) = R(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$, peut-on affirmer que la langue est homogène? Sinon, peut-on affirmer qu'elle est adéquate?

Il est naturel de considérer les types suivants de langues qui généralisent ou sont liés, d'une certaine façon, des types étudiés dans le présent travail.

Langue *complètement adéquate*, définie par la propriété: $x \to y \Rightarrow V(x) \leftrightarrow V(y)$ quels que soient $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$.

Langue *régulière*, définie par la propriété suivante: pour chaque famille initiale F (voir [7] et [8]) il y a un type $T(x)$ tel que $\mathcal{G}_{\mathcal{J}}(F) \subset T(x)$, où $\mathcal{G}_{\mathcal{J}}(F)$ désigne la catégorie grammaticale élémentaire engendrée par F (voir [7] et [8]).

Langue *bien adéquate*, définie par la propriété: $x \to y \Rightarrow V(x) \to V(y)$ quels que soient $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$.

Langue *inversement adéquate*, définie par la propriété: $x \to y \Rightarrow V(y) \to V(x)$, quels que soient $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$.

Langue *semi-adéquate*, définie par la propriété: $x \leftrightarrow y \Rightarrow V(x) \to V(y)$, quels que soient $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$.

Langue aglutinante, definie par la propriété: $x \to y \Rightarrow x \leftrightarrow y$, quels que soient $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$.

Conséquences immédiates des définitions: une langue complètement adéquate est bien adéquate; une langue bien adéquate est adéquate, une langue adéquate est semi-adéquate; une langue inversement adéquate est adéquate. En outre, on a le théorème suivant, établi dans [8]: *Une langue finie et régulière est adéquate.*

Posons $\mathscr{P}(x) = \{y; x \to y\}$, $\mathscr{N}(x) = \{y; y \to x\}$.

Une langue sera dite *inférieurement conforme* ou *inférieurement homogène* si la condition $\mathscr{P}(x) \cap V(y) \neq 0$ entraîne $\mathscr{P}(y) \cap V(x) \neq 0$, quels que soient $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$.

Une langue sera dite *supérieurement conforme* ou *supérieurement homogène* si la condition $\mathscr{N}(x) \cap V(y) \neq 0$ entraîne $\mathscr{N}(y) \cap V(x) \neq 0$, quels que soient $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$.

Il est aisé de voir qu'on a $S(x) = \mathscr{P}(x) \cap \mathscr{N}(x)$ pour chaque $x \in \Gamma$.

Remarques finales

Sans démonstration, les théorèmes 1, 2, 4, 8 et 10 ont été énoncés dans [14]. Les notions de „langue adéquate" et „langue homogène" ont été introduites dans [14]. La notion de „langue simple" a été introduite dans [5]. La notion de „langue localement homogène", sans être dégagée explicitement, figure dans [5] comme une partie de la définition des langues simples. La notion de „section" est dûe à I. I. REVZINE ([12]). Dans [14], V. A. OUSPENSKI utilise aussi cette notion et l'attribue à I. I. REVZINE.

Si l'on prend pour Γ le lexique d'une langue naturelle, pour V l'ensemble des paradigmes et pour Ψ l'ensemble des phrases correctement construites du point de vue grammatical, alors les langues naturelles sont adéquates. Les substantifs du français, de l'espagnol et de l'italien sont homogènes, tandis que les substantifs du russe et du roumain ne sont pas homogènes (voir aussi [13], [1] et [10]). La notion de „langue homogène" est une approximation des langues aglutinantes (telles que le hongrois) de la classification typologique traditionelle des langues naturelles. Pour une confrontation des types logiques avec les langues naturelles voir [5], [14], [13], [1], [10] et [11].

Ajouté au 10 novembre 1962. Les théorèmes 1, 3, 4 et 8 du présent travail se trouvent démontrés aussi dans le livre de I. I. REVZINE: *Les modèles de la langue*, paru à Moscou en juin 1962 (spécialement, les pages 175, 176 et 177).

Dans le présent travail, nous avons utilisé plusieurs fois le Théorème 1 de [9], dont l'énoncé est le suivant:

Soient A et B deux partitions de l'ensemble Γ. Supposons que B soit un grossissement de A. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $A'=B'$ est que B soit un grossissement régulier de A.

En tenant compte que le travail [9] est écrit en langue roumaine, nous allons donner ici la démonstration du théorème énoncé ci-dessus. Nous allons prouver seulement la nécessité de la condition, car la suffisance a été démontrée, dans l'entretemps, aussi par I. I. REVZINE dans son livre cité ci-dessus (Lemme 3, page 174).

Posons

$$A\colon\ \Gamma=\bigcup_i A_i,$$

$$B\colon\ \Gamma=\bigcup_j B_j.$$

Par hypothèse, on a pour chaque $x\in\Gamma$,

$$A(x)\subset B(x).$$

Supposons qu'on ait $A'=B'$ et posons $P=A'$. Soit

$$P\colon\ \Gamma=\bigcup_k C_k,$$

$$A_i\subset B_j\supset A_l.$$

Puisque $P=B'$, il s'ensuit que P est un grossissement de B, donc il existe un ensemble C_k tel que

$$B_j\subset C_k;$$

à plus forte raison, on a

$$A_i\subset C_k\supset A_l.$$

En tenant compte que $P=A'$ et du fait que A' est, évidemment, un grossissement régulier de A, il s'ensuit que

$$A_i\underset{A}{\sim}A_l$$

donc deux termes de la partition A, contenus dans un même terme de la partition B, sont des ensembles A-équivalents. On déduit que B est un grossissement régulier de A et la nécessité de la condition est ainsi démontrée.

Ajouté sur les epreuves. Un développement ultérieur du présent travail et une confrontation avec certaines langues naturelles se trouvent dans notre livre „Modèles mathémetiques en linguistique" (en roumain), *Editura didacticá şi pedagogicá*, Bucureşti (sous presse). Voir aussi notre article „Langues complètement adéquates et langues régulières", à paraître dans *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **10** (1964), 1. Heft.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE,
UNIVERSITÉ, BUCAREST

(Reçu le 29 mai 1962)

Bibliographie

[1] P. Braffort, Éléments de linguistique mathématique, Euratom, Cetis, Enseignement préparatoire aux techniques de la documentation automatique, Bruxelles (1960), p. 15—22.

[2] Р. Л. Добрушин, Элементарная грамматическая категория, Бюллетень Объединения по проблемам машинного перевода, **5** (1957), p. 19—21.

[3] H. A. Gleason, Jr., *An introduction to descriptive linguistics* (New York, 1955).

[4] Z. S. Harris, From morpheme-to utterance, *Language*, vol. **22**, № 3, p. 163.

[5] О. С. Кулагина, Об одном способе определения грамматических понятий на базе теории множеств, Сб. Проблемы Кибернетики (вып.**1**). Москва 1958, p. 203—214.

[6] S. Marcus, Structures linguistiques et structures topologiques, *Revue de mathématiques pures et appliquées*, **6** (3) (1961), p. 501—506.

[7] S. Marcus, Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire I, *Revue de mathématiques pures et appliquées*, **7** (1) (1962), p. 91—107.

[8] S. Marcus, Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire II, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **8** (1962), p. 139—145.

[9] S. Marcus, Asupra unui model logic al părţii de vorbire, *Studii si cercetari matematice*, **13** (1) (1962), p. 37—62.

[10] S. Marcus, Le genre grammatical son et modèle logique, *Cahier de linguistique théorique et appliquée*, **1** (1962), p. 103—122.

[11] S. Marcus, Un criteriu contextual de clasificare a cuvintelor, *Studii şi cercetări lingvistice*, **13** (2) (1962), p. 177—189.

[12] И. И. Ревзин, О некоторых аспектах современных теоретических исследований в области машинного перевода. Бюллетенъ Объединения по проблемам машинного перевода, **7** (1958), p. 1—12.

[13] И. И. Ревзин, О некоторых понятиях так называемой теоретико-множественной концепций языка, Вопросы Языкознания, **6** (1960) p. 88—94.

[14] В. А. Успенский, К определению части речи в теоретико-множественной системеязыка, Бюллетенъ Объединения по проблемам машинного перевода, (1957), p. 22—26.

ON GROUPS OF RING MULTIPLICATIONS*

By

F. L. HARDY (Atlanta, Georgia, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

1. Introduction. Let $A(+)$ be an Abelian group and consider the set Mult (A) of all binary compositions on A which are right and left distributive with respect to $+$. That is,

$$\text{Mult}\,(A) = \{\alpha | A(+, \alpha) \text{ is a ring}\}.$$

The set Mult (A) was introduced in [2] by L. FUCHS and we refer the reader to that work for basic results and notation used here.

For elements $x, y \in A$, $\alpha \in \text{Mult}\,(A)$ we denote the image of (x, y) under α by $x\alpha y$.

A binary composition $\oplus$ may be defined on Mult (A) as follows:

$$x(\alpha \oplus \beta)y = x\alpha y + x\beta y, \quad x, y \in A, \quad \alpha, \beta \in \text{Mult}\,(A).$$

With this definition of $\oplus$ Mult (A) is easily seen to be a group in which the trivial multiplication on $A(+)$ is the identity element and $\Theta\alpha$ is the inverse of α where

$$x(\Theta\alpha)y = -(x\alpha y).$$

One easily proves that Mult (A) is isomorphic to both Hom $(A \otimes A, A)$ and Hom $(A, \text{End}\,(A))$, where $A \otimes A$ is the tensor product of A with itself and End (A) is the endomorphism ring of A. Hence each $\alpha \in \text{Mult}\,(A)$ is associated with a homomorphism η mapping A into End (A) and a subgroup K of A is determined which is the kernel of η. We may then ask for a determination of those subgroups K of A which can be kernels of such homomorphisms. Although this paper is mainly concerned with other aspects of Mult (A), the following result may be of some interest in this connection.

THEOREM 1. *Let K be a subgroup of a group A. Then K is the kernel of a homomorphism of A into* End (A), *i. e. K determines an element $\alpha \in \text{Mult}\,(A)$, if and only if there is a subgroup $\Lambda = \{\vartheta_a\}_{a \in A}$ of* Hom $(A/K, A)$ *such that*

1. *Λ is a homomorphic image of A;*
2. $\bigcap_x \text{Ker}\,(\vartheta_x) = K.$

One may prove Theorem 1 by making use of the mapping given in [2] which establishes the isomorphism between Mult (A) and Hom $(A, \text{End}\,(A))$.

* Results in this paper are included in the author's dissertation, presented in partial fulfillment of the requirements for the Ph. D. degree at The Ohio State University.

Let P be a ring property and define

$$P(A) = \{\alpha | \alpha \in \text{Mult}(A), A(+, \alpha) \text{ has property } P\}.$$

$P(A)$ is generally not a subgroup of Mult (A) and in [2] FUCHS asks for a characterization of those groups A such that $P(A)$ is a subgroup of Mult (A). In this paper we solve this problem for torsion groups when P is the associative property $\mathscr{A}$ or Lie property Λ. If $P(A)$ is a subgroup of Mult (A), we shall say that A is *P-closed.*

2. Some lemmas. LEMMA 1. *Let $A = B + C$ be a direct sum of the groups B and C and suppose that $\alpha \in \text{Mult}(B)$. Then α may be extended to an element $\alpha^* \in \text{Mult}(A)$.*

PROOF. If $\alpha \in \text{Mult}(B)$ and $a_1 = b_1 + c_1$, $a_2 = b_2 + c_2$ for $b_1, b_2 \in B$, $c_1, c_2 \in C$, we may define α^* by

$$a_1 \alpha^* a_2 = (b_1 + c_1)\, \alpha^* (b_2 + c_2) = b_1 \alpha b_2 .$$

α^* is obviously in Mult (A) and an extension of α. We call α^* the *trivial extension* of α to all of A.

LEMMA 2. *If $A = B + C$ is the direct sum of groups B and C and B is not assocciative-closed, then A is not associative-closed.*

PROOF. Suppose $\alpha \in \text{Mult}(B)$ is associative. Then it is a routine matter to show that $\Theta\alpha$ is associative. Thus the assumption that B is not associative-closed implies that there are associative elements $\alpha, \beta \in \text{Mult}(B)$ such that $\alpha \oplus \beta$ is not associative. The trivial extensions $\alpha^*, \beta^* \in \text{Mult}(A)$ are then associative and $\alpha^* \oplus \beta^*$ is not associative.

LEMMA 3. *If $A = B + C$ is the direct sum of groups B and C and B is not Lie-closed, then A is not Lie-closed.*

PROOF. This is similar to the proof of Lemma 2.

LEMMA 4. *If $\alpha, \beta \in \mathscr{A}(A)$, then $\alpha \oplus \beta \in \mathscr{A}(A)$ if and only if for all $x, y, z \in A$*

$$(x\alpha y)\beta z + (x\beta y)\alpha z = x\alpha(y\beta z) + x\beta(y\alpha z).$$

PROOF. Suppose $\alpha \oplus \beta \in \mathscr{A}(A)$ for $\alpha, \beta \in \mathscr{A}(A)$. Then for all $x, y, z \in A$

$$[x(\alpha \oplus \beta)y]\,(\alpha \oplus \beta)z = x(\alpha \oplus \beta)\,[y(\alpha \oplus \beta)z].$$

Using the definition of $\oplus$ we obtain

$$(x\alpha y + x\beta y)\alpha z + (x\alpha y + x\beta y)\beta z = x\alpha(y\alpha z + y\beta z) + x\beta(y\alpha z + y\beta z).$$

Since both α and β are distributive over $+$, the above equation becomes

$$(x\alpha y)\alpha z + (x\beta y)\alpha z + (x\alpha y)\beta z + (x\beta y)\beta z = x\alpha(y\alpha z) + x\alpha(y\beta z) + x\beta(y\alpha z) + x\beta(y\beta z).$$

Now since $\alpha, \beta \in \mathscr{A}(A)$, this last identity is equivalent to the identity of our lemma. This identity is also clearly sufficient to ensure that $\alpha \oplus \beta \in \mathscr{A}(A)$.

The *symmetric Jacobian* $J_{\alpha,\beta}$ is defined by

$$J_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (x\alpha y)\beta z + (x\beta y)\alpha z + (y\alpha z)\beta x + (y\beta z)\alpha x + (z\alpha x)\beta y + (z\beta x)\alpha y.$$

LEMMA 5. *If* $\alpha, \beta \in \Lambda(A)$, *then* $\alpha \oplus \beta \in \Lambda(A)$ *if and only if*

$$J_{\alpha\beta}(x, y, z) = 0$$

for all $x, y, z \in A$.

PROOF. For all $x, y, z \in A$ and $\alpha, \beta \in \Lambda(A)$ we have

$$\begin{aligned}
[x(\alpha \oplus \beta)y](\alpha \oplus \beta)z &= (x\alpha y)\alpha z + (x\alpha y)\beta z + (x\beta y)\alpha z + (x\beta y)\beta z, \\
[y(\alpha \oplus \beta)z](\alpha \oplus \beta)x &= (y\alpha z)\alpha x + (y\alpha z)\beta x + (y\beta z)\alpha x + (y\beta z)\beta x, \\
[z(\alpha \oplus \beta)x](\alpha \oplus \beta)y &= (z\alpha x)\alpha y + (z\alpha x)\beta y + (z\beta x)\alpha y + (z\beta x)\beta y.
\end{aligned}$$

Since $\alpha, \beta \in \Lambda(A)$

$$(x\alpha y)\alpha z + (y\alpha z)\alpha x + (z\alpha x)\alpha y = 0 \quad \text{and} \quad (x\beta y)\beta z + (y\beta z)\beta x + (z\beta x)\beta y = 0.$$

Clearly then, from the definition of the symmetric Jacobian, our condition is both necessary and sufficient.

3. Associative-closed groups. Assume the group A has a basis and is given as

$$A = \sum \{e_i\}$$

a direct sum of the cyclic groups $\{e_i\}$. A multiplication α is completely determined here if we know the products $e_i \alpha e_j$.

DEFINITION. If the group $A = \sum_{i \in \Lambda} \{e_i\}$, a binary composition ω is called an *orthogonal* multiplication on A if is defined as follows:

$$e_i \omega e_j = \delta_{ij} t_i e_i$$

for all $i, j \in \Lambda$ and δ_{ij} is the Kronecker delta, t_i is an integer.

LEMMA 6. *If* $\mathfrak{A}$ *is the set of all orthogonal multiplications on a group* A, *then* $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{A}(A)$ *and* $\mathfrak{A}$ *is a subgroup of* Mult (A).

PROOF. That $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{A}(A)$ is clear from the definition of elements in $\mathfrak{A}$. To prove that $\mathfrak{A}$ is a group, let $\omega, \beta \in \mathfrak{A}$. Then

$$e_i(\omega \oplus \beta)e_j = e_i \omega e_j + e_i \beta e_j = \delta_{ij} t_i e_i + \delta_{ij} t_i' e_i = \delta_{ij}(t_i + t_i')e_i$$

and $\omega \oplus \beta \in \mathfrak{A}$. Also

$$\delta_{ij}(-t_i)e_i = -(e_i \omega e_j) = e_j(\Theta\omega)e_j$$

so that $\Theta\omega \in \mathfrak{A}$.

R. A. BEAUMONT has proved in [1] that if A is given as a direct sum $\sum \{e_i\}$ of the cyclic groups $\{e_i\}$ and α is defined by

$$e_i \alpha e_j = \sum_k t_{ijk} e_k$$

where t_{ijk} are integers, then α defines a multiplication on A if and only if

1. almost all $t_{ijk} e_k$ are zero;
2. $t_{ijk} \equiv 0 \bmod \dfrac{n_k}{(n_i, n_j, n_k)}$.

We refer to conditions 1. and 2. as the BEAUMONT conditions.

THEOREM 2. *Let* $A=\sum\{e_i\}$ *be a torsion group of rank* $r>1$ *and let* n_i *be the order of* e_i. *Then* $\mathscr{A}(A)$ *is a subgroup of* Mult (A) *if and only if* $(n_i, n_j)=1$ *for every* i, j *for which* $i\neq j$.

PROOF. Suppose the condition $(n_i, n_j)=1$ holds and α in Mult (A) and is given by

$$e_i\alpha e_j=\sum_k t_{ijk}e_k.$$

There exist integers t, s such that $1 = tn_i+sn_j$ and

$$e_i\alpha e_j = 1\cdot(e_i\alpha e_j) = (tn_i+sn_j)\cdot(e_i\alpha e_j) = (tn_i)(e_i\alpha e_j)+(sn_j)\cdot(e_i\alpha e_j) =$$
$$= (tn_ie_i)\alpha e_j+e_i\alpha(sn_je_j) = 0\alpha e_j+e_i\alpha 0 = 0+0 = 0.$$

This shows immediately that any ring on A is the ring direct sum of rings on the cyclic summands of A. Since the integers t_{ijk} must satisfy the BEAUMONT condition

$$t_{iik}\equiv 0 \mod \frac{n_k}{(n_i, n_k)} \qquad \text{or} \qquad t_{iik}\equiv 0 \mod (n_k) \tag{2}$$

when $i\neq k$, α is an orthogonal multiplication. Hence Mult $(A)\subseteq\mathfrak{A}$. But since we always have $\mathfrak{A}\subseteq\mathscr{A}(A)\subseteq$ Mult (A), for any group A, we conclude

$$\mathfrak{A}=\mathscr{A}(A)=\text{Mult}(A).$$

Conversely, assume that for some $i\neq j$, we have $(n_i, n_j) = d>1$. Now define $t_{iij}=n_j/d$ and thus a multiplication by

$$e_i\alpha e_i=t_{iij}e_j, \quad e_k\alpha e_m=0 \quad \text{if} \quad k\neq i \quad \text{or} \quad m\neq i.$$

This multiplication α satisfies the BEAUMONT condition (2) since $t_{kmr}=0$ for $k\neq i$ or $m\neq i$ or $r\neq j$ and

$$t_{iij}=n_j/d\equiv 0 \mod \frac{n_j}{(n_i, n_j)}$$

by definition of t_{iij}. This is also clearly associative. Now we have $\alpha, \beta\in\mathscr{A}(A)$ where β is defined by

$$e_i\beta e_j=\delta_{ij}e_i.$$

If $\mathscr{A}(A)$ is a group, we may apply Lemma 4 for $e_i, e_j\in A$:

$$(e_i\alpha e_i)\beta e_j+(e_i\beta e_i)\alpha e_j = e_i\alpha(e_i\beta e_j)+e_i\beta(e_i\alpha e_j).$$

By definition of α and β this gives

$$e_i\alpha e_j+(t_{iij}e_j)\beta e_j = e_i\alpha 0+e_i\beta 0 = 0.$$

Hence

$$t_{iij}e_j=0.$$

But this contradicts the order of e_j since by definition of t_{iij} we have $0<t_{iij}<n_j$. This completes the proof.

COROLLARY. *If* A *is a torsion associative-closed group with a basis, then any ring* $A(+, \alpha)$ *is both commutative and associative.*

THEOREM 3. *If A is a group with a basis and is not a torsion group, then A is associative-closed if and only if A is the infinite cyclic group.*

PROOF. If A is the infinite cyclic group generated by e, then for any choice of integer t

$$e\alpha e = te$$

defines a multiplication in $\mathscr{A}(A)$ and these are only possibilities. Hence $\mathscr{A}(A)$ is a group.

Now suppose that A is a torsion-free group of rank $r>1$ and choose any two generators e_1, e_2 of A. Define multiplications α, β as follows

$$e_1\alpha e_1 = e_2,\ e_i\alpha e_j = 0 \text{ if } i\neq 1 \text{ or } j\neq 1,\quad e_2\beta e_2 = e_1,\quad e_i\beta e_j = 0 \text{ if } i\neq 2 \text{ or } j\neq 2.$$

It is clear that $\alpha, \beta \in \mathscr{A}(A)$. If $\mathscr{A}(A)$ is a group, then $\alpha\oplus\beta \in \mathscr{A}(A)$. By Lemma 4, if $\alpha\oplus\beta\in\mathscr{A}(A)$, then

$$(e_1\alpha e_1)\beta e_2 + (e_1\beta e_1)\alpha e_2 = e_1\alpha(e_1\beta e_2) + e_1\beta(e_1\alpha e_2).$$

That is

$$e_2\beta e_2 + 0\alpha e_2 = e_1\alpha 0 + e_1\beta 0 = 0.$$

This implies $e_2\beta e_2 = 0$ which is a contradiction.

If A is a mixed group with a basis, the torsion-free part of A, say T, cannot be of rank greater than 1 if A is to be an associative-closed group. Thus we assume that A has exactly one generator of infinite order and the torsion part of A must satisfy the conditions of Theorem 2. Let a be the generator of infinite order and define associative multiplications α, β as follows:

$$a\alpha e_i = e_i\alpha a = e_i\alpha e_j = 0 \text{ and } a\alpha a = a \text{ for all } i, j$$

$$a\beta e_i = e_i\beta a = e_i \text{ and } a\beta a = a,\quad e_i\beta e_j = \delta_{ij}e_i \text{ for all } i, j.$$

If A is to be associative-closed, the identity of Lemma 4 must be satisfied. In particular the following must hold:

$$(e_i\beta a)\alpha a + (e_i\alpha a)\beta a = e_i\beta(a\alpha a) + e_i\alpha(a\beta a).$$

But by the definition of these multiplications this implies that $e_i = 0$ and this is a contradiction.

In general the problem we are considering is more difficult for groups without a basis. Some specific cases, however, can be handled. The following theorems contain results for these specific cases.

THEOREM 4. *If A is a torsion-free group of rank* 1, *then A is an associative-closed group.*

PROOF. Any two elements of A are dependent since A has rank 1 and by a theorem of R. BAER A is isomorphic to a subgroup of the rationals. Hence we may choose a fixed non-zero element $a\in A$ and write every element $b\in A$ as $b=ra$ for some rational r. Then any multiplication is commutative since $xy = (ra)(sa) = (rs)(aa) = yx$. From this it follows that any multiplication on A is associative since $a(aa) = (aa)a$. Hence A is associative-closed.

THEOREM 5. *If A is a torsion-free divisible group, then A is associative-closed if and only if the rank of A is* 1.

PROOF. The condition is sufficient by Theorem 4. To prove that it is necessary, let r be the rank of A and assume that $r>1$. In this case, since A is torsion-free and divisible, A is a vector space over the rationals and any multiplication on A gives us a linear algebra over the rationals. A multiplication is then completely determined by products of the basis elements. Let $(e_i)_{i\in A}$ be a basis and since $r>1$ we may choose elements $e_1, e_2 \in (e_i)$ and define multiplications as follows:

$$e_1 \alpha e_1 = e_2, \quad e_i \alpha e_j = 0 \quad \text{if } i \neq 1 \text{ or } j \neq 1 \quad e_2 \beta e_2 = e_1, \quad e_i \beta e_j = 0 \text{ if } i \neq 2 \text{ or } j \neq 2.$$

As in the proof of Theorem 3, $\alpha, \beta \in \mathscr{A}(A)$ and $\mathscr{A}(A)$ cannot be a group since Lemma 4 is violated.

THEOREM 6. *Let A be a divisible group. Then A is associative-closed if and only if*

$$A = R + \sum_i \mathscr{C}(p_i^\infty)$$

where R is the rationals.

PROOF. By the structure theory of divisible groups

$$A = \sum_j R_j + \sum_i \mathscr{C}(p_i^\infty)$$

where each R_j is isomorphic to the rationals. By Lemma 2 and Theorem 5 the summand ΣR_j can have only one copy of the rationals so that the condition is necessary. To prove the converse we show that every multiplication on

$$A = R + \sum \mathscr{C}(p_i^\infty)$$

is associative. But this is immediate by Theorem 5 since every multiplication on A is the trivial extension of a multiplication of R.

COROLLARY. *Let A be a group such that $A = B + C$ where B is a divisible group and C is any group. Then $\mathscr{A}(A)$ is not a group if the torsion-free rank of B is greater than* 1.

PROOF. If the torsion-free rank of B is greater than 1, B is not associative-closed by the theorem and hence A is not by Lemma 2.

To determine the structure of an associative-closed torsion group we note that it is sufficient to consider only p-groups. This is the case since a torsion group A, when expressed as the direct sum of its p-components, has the property that any ring on A is the ring direct sum of rings on the p-components. Let A_p be a p-component of A and let $B = \Sigma\{e_i\}$ be a basic subgroup of A_p. Now suppose that the rank r of B is greater than 1 and write $B = B_1 + B_2$ where $B_1 = \{e_1\} + \{e_2\}$ is a direct summand of B and is pure in B. Therefore B_1 is pure in A_p and being finite is a direct summand of A_p:

$$A_p = B_1 + A_p'.$$

Any multiplication on B_1 can be extended in the trivial way to a multiplication on all of A_p. But by Theorem 2 $\mathscr{A}(B_1)$ is not a group since $(n_1, n_2) \neq 1$, both $\{e_1\}$ and

$\{e_2\}$ being p-groups. Hence $\mathscr{A}(A_p)$ is not a group. Therefore if $\mathscr{A}(A_p)$ is a group, $r=1$. This requires the basic subgroup B, pure in A_p, to be finite cyclic and since finite pure subgroups are direct summands

$$A_p = B+D$$

where D is divisible. D is divisible since $A_p/B \cong \Sigma\mathcal{C}(p^\infty)$. With A_p being the direct sum of a torsion group and a divisible group the proof of Theorem 5 shows that the only multiplications on A_p are trivial extensions of multiplications on B and all of these are associative. This proves the following result.

THEOREM 7. *Let A be a torsion group. Then $\mathscr{A}(A)$ is a group if and only if A has the following form:*

$$A = \sum \mathcal{C}(p_i^{k_i}) + \sum D_t$$

where the primes p_i are such that $p_i \neq p_j$ if $i \neq j$ and for each t

$$D_t \cong \sum \mathcal{C}(p^\infty).$$

For a group A assume that its endomorphism ring End (A) is commutative. Then for any $\alpha \in \text{Mult}\,(A)$, $a, b \in A$, the endomorphisms L_a^α, R_b^α are commutative. If $c \in A$

$$a\alpha(c\alpha b) = a\alpha(cR_b^\alpha) = (cR_b^\alpha)L_a^\alpha = c(R_b^\alpha L_a^\alpha) = c(L_a^\alpha R_b^\alpha) = (cL_a^\alpha)R_b^\alpha = (a\alpha c)\alpha b.$$

Hence if End (A) is commutative, every multiplication on A is associative. As a consequence we see that commutativity of End (A) implies associative-closure of A. The determination of those Abelian groups which have commutative endomorphism ring is not yet complete. This question has, however, been resolved by SZELE and SZENDREI in [4] for torsion groups. The result is that a torsion group A has commutative endomorphism ring if and only if

$$A = \mathcal{C}(p_1^{k_1}) + \mathcal{C}(p_2^{k_2}) + \ldots + \mathcal{C}(p_t^{k_t}) + \ldots$$

where the p_i are different primes and $0 < k_i \leqq \infty$. This, when compared with Theorem 7, shows at once that associative-closure does not imply commutative endomorphisms. For example,

$$\mathcal{C}(2) + \mathcal{C}(2^\infty)$$

is associative-closed by Theorem 7 but does not have commutative endomorphism ring by the SZELE—SZENDREI result.

4. Lie-closed groups. When the group A has a basis, we say that α is a *semi-Lie* multiplication if $e_i\alpha e_i = 0$ and $e_i\alpha e_i = -(e_j\alpha e_i)$ for all i, j.

LEMMA 8. *The set $\bar{A}(A)$ of semi-Lie multiplications is a group with respect to $\oplus$.*

PROOF. This follows from the definition.

LEMMA 9. *If A is a group with a basis having rank $r \leqq 2$, then $A(A) = \bar{A}(A)$.*

PROOF. If $r=1$, the result follows immediately since both $A(A)$ and $\bar{A}(A)$ contain only the trivial multiplication. Now suppose that $r=2$. Since it is obvious that every Lie multiplication is a semi-Lie multiplication we only have to show that

$\bar{A}(A) \subseteqq A(A)$. In order to prove that $\bar{A}(A) \subseteqq A(A)$ we only have to show that the Jacobi identity holds since a semi-Lie multiplication α is anti-commutative by definition. But if e_1, e_2 are the generators of A we have, for example,

$$(e_1 \alpha e_2)\alpha e_1 + (e_2 \alpha e_1)\alpha e_1 + (e_1 \alpha e_1)\alpha e_2 = (e_1 \alpha e_2)\alpha e_1 - (e_1 \alpha e_2)\alpha e_1 + 0 \alpha e_2 = 0$$

and in general

$$(e_i \alpha e_j)\alpha e_k + (e_j \alpha e_k)\alpha e_i + (e_k \alpha e_i)\alpha e_j = 0$$

follows in a similar manner for $i, j, k = 1$ or 2.

THEOREM 8. *If $A = \Sigma\{e_i\}$ is a torsion group such that the orders n_i satisfy the condition that for all pairwise distinct i, j, k, $(n_i, n_j, n_k) = 1$, then $\bar{A}(A) = A(A)$.*

PROOF. The case where the rank r of $A \leqq 2$ is proved by Lemma 9. As in the proof of Lemma 9 we only have to show that the Jacobi identity is satisfied for every semi-Lie multiplication and for this it is sufficient to show that $(e_i \alpha e_j)\alpha e_k + (e_j \alpha e_k)\alpha e_i + (e_k \alpha e_i)\alpha e_j = 0$ for pairwise distinct i, j, k. But for pairwise distinct i, j, k our hypothesis is that $(n_i, n_j, n_k) = 1$. Then there are integers r, s, t such that $rn_i + sn_j + tn_k = 1$ and hence

$$(e_i \alpha e_j)\alpha e_k = 1 \cdot (e_i \alpha e_j)\alpha e_k = (rn_i + sn_j + tn_k) \cdot (e_i \alpha e_j)\alpha e_k =$$
$$= (rn_i) \cdot (e_i \alpha e_j)\alpha e_k + (sn_j) \cdot (e_i \alpha e_j)\alpha e_k + (tn_k) \cdot (e_i \alpha e_j)\alpha e_k = 0.$$

Hence $\bar{A}(A) = A(A)$ and the theorem is proved.

THEOREM 9. *Let $A = \Sigma\{e_i\}$ be a torsion group and let $O(e_i) = n_i$. Then $A(A)$ is a group if and only if $(n_i, n_j, n_k) = 1$ for all pairwise distinct i, j, k.*

PROOF. That this condition is sufficient follows from Theorem 8 because $\bar{A}(A)$ is a group for all A. To show that the condition is necessary suppose that for some set of pairwise distinct i, j, k we have $(n_i, n_j, n_k) > 1$. We consider the subgroup

$$A' = \mathcal{C}(n_i) + \mathcal{C}(n_j) + \mathcal{C}(n_k)$$

of A. Since A' is a direct summand of A, it will follow, as we have seen before, that $A(A)$ is not a group if $A(A')$ is not. We now consider the representation of n_i, n_j, n_k as products of primes. Let

$$n_i = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_u^{s_u}, \quad n_j = q_1^{w_1} q_2^{w_2} \ldots q_v^{w_v}, \quad n_k = r_1^{z_1} r_2^{z_2} \ldots r_x^{z_x}.$$

Then $(n_i, n_j, n_k) > 1$ implies $p_\eta = q_\mu = r_\gamma$ for some integers η, μ, γ such that $1 \leqq \eta \leqq u$, $1 \leqq \mu \leqq v$, $1 \leqq \gamma \leqq x$. Now resolve A' into the direct sum of its cyclic p-groups. A' then has a subgroup $B = \mathcal{C}(p^{s_i}) + \mathcal{C}(p^{w_j}) + \mathcal{C}(p^{z_k})$, where $p = p_\eta = q_\mu = r_\gamma$, which is a direct summand. Again by reasoning as before $A(A')$ is not a group if $A(B)$ is not. Consequently, $A(A)$ is not a group if $A(B)$ is not. It is therefore sufficient to show that $A(B)$ is not a group when $(n_i, n_j, n_k) > 1$. Let the summands of B be generated by e_1, e_2, e_3 respectively and assume, without loss of generality, that $s_i \leqq w_j \leqq z_k$. Define

$$d_\delta = \frac{O(e_\delta)}{(O(e_1), O(e_2), O(e_3))} = \frac{O(e_\delta)}{p^{s_i}}, \qquad \delta = 1, 2, 3.$$

Two multiplications α, β are now defined as follows:

$$e_1\alpha e_2 = -e_2\alpha e_1 = d_3e_3,\ e_1\alpha e_3 = -e_3\alpha e_1 = d_2e_2,\ e_2\alpha e_3 = -e_3\alpha e_2 = d_1e_1,$$

$$e_f\alpha e_f = 0 \text{ for } f = 1, 2, 3,$$

$$e_1\beta e_2 = [O(e_1)/(O(e_1), O(e_2))]e_1 = e_1,\ e_f\beta e_f = 0 \text{ for } f = 1, 2, 3,$$

$$e_f\beta e_g = 0 \text{ for } f = 3 \text{ or } g = 3.$$

The α, β were defined in such a way that the BEAUMONT conditions for distributivity are satisfied. A simple calculation also shows that $\alpha, \beta \in \Lambda(B)$. By Lemma 5 $\alpha \oplus \beta \in \Lambda(B)$ if and only if $J_{\alpha,\beta}(a, b, c) = 0$ for all $a, b, c \in B$. In particular $\Lambda(B)$ is not a group unless $J_{\alpha,\beta}(e_1, e_2, e_3) = 0$. But

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\beta}(e_1, e_2, e_3) &= (e_1\alpha e_2)\beta e_3 + (e_1\beta e_2)\alpha e_3 + (e_2\alpha e_3)\beta e_1 + \\ &\quad + (e_2\beta e_3)\alpha e_1 + (e_3\alpha e_1)\beta e_2 + (e_3\beta e_1)\alpha e_2 = \\ &= d_3e_3\beta e_3 + e_1\alpha e_3 + d_1e_k\beta e_1 + 0\alpha e_1 + d_2e_2\beta e_2 + 0\alpha e_2 = \\ &= 0 + d_2e_2 + 0 + 0 + 0 + 0 = d_2e_2. \end{aligned}$$

$d_2e_2 = 0$ if and only if $p^{w_j} | d_2$ or if and only if $p^{w_j} | p^{w_j - s_i}$. From the fact that $s_i \geqq 1$ it follows that $J_{\alpha,\beta}(e_1, e_2, e_3)$ is not zero so that $\Lambda(B)$ is not a group. This completes the proof of Theorem 9.

THEOREM 10. *If $A = \Sigma\{e_i\}$ is a torsion-free group, then $\Lambda(A)$ is a group if and only if the rank of $A < 3$.*

PROOF. That the condition is sufficient follows from Lemma 9. To show that this condition is necessary, assume that the rank $r \leqq 3$. Then we may choose generators e_1, e_2, e_3 from the set (e_i) and define two Lie multiplications α, β as follows:

$$e_1\alpha e_2 = -e_2\alpha e_1 = e_3,\ e_1\alpha e_3 = -e_3\alpha e_1 = e_2,\ e_2\alpha e_3 = -e_3\alpha e_2 = e_1,$$

$$e_i\alpha e_i = 0 \text{ for all } i,\ e_i\alpha e_j = 0 \text{ for } i, j \neq 1, 2, 3,$$

$$e_1\beta e_2 = -e_2\beta e_1 = e_1,\ e_i\beta e_j = 0 \text{ for } i, j \neq 1, 2,\ e_i\beta e_i = 0 \text{ for all } i.$$

It is easily verified that $\alpha, \beta \in \Lambda(A)$. Then applying Lemma 5:

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\beta}(e_1, e_2, e_3) &= (e_1\alpha e_2)\beta e_3 + (e_1\beta e_2)\alpha e_3 + (e_2\alpha e_3)\beta e_1 + \\ &\quad + (e_2\beta e_3)\alpha e_1 + (e_3\alpha e_1)\beta e_2 + (e_3\beta e_1)\alpha e_2 = \\ &= e_3\beta e_3 + e_1\alpha e_3 + e_1\beta e_1 + 0\alpha e_1 + (-e_2)\beta e_2 + 0\alpha e_2 = \\ &= 0 + e_2 + 0 + 0 + 0 + 0 = e_2. \end{aligned}$$

But since $e_2 \neq 0$ the proof is complete.

THEOREM 11. *Let A be a torsion-free divisible group of rank r. Then A is a Lie-closed group if and only if $r \leqq 2$.*

PROOF. In this case A is a vector space over the rationals and any multiplication may be described in terms of a basis. If (e_i) is a basis for A and $r \leqq 2$, we may show

as in the proof of Lemma 9 that A is Lie-closed. If $r \geqq 3$, we may choose e_1, e_2, e_3 from the set (e_i) and show, as in the proof of Theorem 10, that A is not Lie-closed and consequently that the condition is necessary. Q. E. D.

COROLLARY. *If A is a divisible group of torsion-free rank r_0, then A is Lie-closed if and only if $r_0 \leqq 2$.*

PROOF. Since A is divisible

$$A = \sum R_i + \sum \mathcal{C}(p_j^{\infty})$$

where each R_i is isomorphic to the rationals and the p_j are primes. By the present theorem $r_0 \leqq 2$ if ΣR_i is to be a Lie-closed group. Hence the condition is necessary for $A(A)$ to be a group. Conversely, the condition is sufficient since every multiplication on A is a trivial extension of a multiplication of the torsion-free part of A.

THEOREM 12. *Let $A = T + F$ be a mixed group with a basis, where T is torsion and F is free. Then A is a Lie-closed group if and only if T and F are associative-closed.*

PROOF. A is not Lie-closed if either T or F is not Lie-closed. Hence assume that T satisfies the conditions of Theorem 9 and F satisfies the conditions of Theorem 10. Suppose F has rank 2: $F = \{a\} + \{b\}$. Then if $T = \Sigma\{e_i\}$, we define multiplications $\alpha, \beta \in \mathrm{Mult}\,(A)$ as follows:

$$e_i \alpha e_j = 0 = e_j \alpha e_i \text{ for all } i, j, \quad e_j \alpha a = a \alpha e_j = 0 \text{ for all } j,$$

$$a \alpha a = 0 = b \alpha b, \quad e_j \alpha b = b \alpha e_j = 0 \text{ for all } j, \quad a \alpha b = -b \alpha a = b,$$

$$a \beta e_1 = -e_1 \beta a = e_1, \; a \beta b = 0 = b \beta a, \quad a \beta a = 0 = b \beta b,$$

$$e_i \beta e_j = 0 = e_j \beta e_i \text{ for all } i, j, \quad a \beta e_i = e_i \beta a = b \beta a = e_i \beta b = 0 \text{ if } i \neq 1.$$

A few special calculations show that $\alpha, \beta \in A(A)$. Using the symmetric Jacobian we have

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\beta}(a, b, e_1) &= (a \alpha b) \beta e_1 + (a \beta b) \alpha e_1 + (b \alpha e_1) \beta a + (b \beta e_1) \alpha a + (e_1 \alpha a) \beta b + (e_1 \beta a) \alpha b = \\ &= b \beta e_1 + 0 \alpha e_1 + 0 \beta a + e_1 \alpha a + 0 \beta b + (-e_1) \alpha b = \\ &= e_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \neq 0. \end{aligned}$$

Thus F cannot have rank 2 and is therefore associative-closed. If T has rank 1, $\mathscr{A}(T)$ is a group and there is nothing to prove. Hence assume T has rank $\geqq 2$ and let e_1, e_2 be two generators of T such that $d = (n_1, n_2) > 1$. Define $\alpha, \beta \in \mathrm{Mult}\,(A)$:

$$a \alpha e_1 = -e_1 \alpha a = e_1, \; a \alpha e_i = e_i \alpha a = 0 \text{ for } i \neq 1, \; a \alpha a = e_i \alpha e_i = 0 \text{ for all } i,$$

$$e_1 \alpha e_2 = -e_2 \alpha e_1 = (n_1/d) \cdot e_1, \; e_i \alpha e_j = e_j \alpha e_i = 0 \text{ if } i \neq 1 \text{ or } 2 \text{ or } j \neq 1 \text{ or } 2,$$

$$a \beta a = 0, \; e_i \beta e_i = 0 \text{ for all } i, \; a \beta e_2 = -e_2 \beta a = e_2,$$

$$a \beta e_i = e_i \beta a = 0 \text{ if } i \neq 2, \; e_i \beta e_j = e_j \beta e_i = 0 \text{ for all } i, j.$$

Again, $\alpha, \beta \in \Lambda(A)$ and

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\beta}(e_1, e_2, a) &= (e_1\alpha e_2)\beta a + (e_1\beta e_2)\alpha a + (e_2\alpha a)\beta e_1 + \\ &\quad + (e_2\beta a)\alpha e_1 + (a\alpha e_1)\beta e_2 + (a\beta e_1)\alpha e_2 = \\ &= (n_1/d)\cdot e_1\beta a + 0\alpha a + 0\beta e_1 + (-e_2)\alpha e_1 + e_1\beta e_2 + 0\alpha e_2 = \\ &= 0+0+0+(n_1/d)\cdot e_1 + 0 + 0. \end{aligned}$$

Since $d > 1$, $J_{\alpha,\beta}(e_1, e_2, a) \neq 0$. It follows that $\Lambda(A)$ is not a group unless $(n_i, n_j) = 1$ for all i, j such that $i \neq j$, i. e., unless T is associative-closed. It is thus necessary that

$$A = T + \{a\}$$

where T is associative-closed. But this means that $\Lambda(T) = 0$, $\Lambda(\{a\}) = 0$ and the only possible non-trivial products for semi-Lie multiplications are

$$a\alpha e_i = -e_i\alpha a = \sum_k t_{aik} e_k$$

for integers t_{aik}. The Jacobi identity clearly holds for any such multiplication so that semi-Lie multiplications are also Lie. This shows that our conditions are necessary and sufficient.

THEOREM 13. *Let A be a torsion group. Then A is Lie-closed if and only if*

$$A = \sum_{i \in \Lambda} \mathcal{C}(p_i^{k_i}) + \sum_{j \in M} \mathcal{C}(q_j^{\infty})$$

where the p_i and q_j are primes and for any $i \in \Lambda$ there is at most one $i' \in \Lambda$ such that $p_i = p_{i'}$.

PROOF. We write A as the direct sum of its p-components A_p. As has been observed before, any ring on A is the ring direct sum of rings on the A_p. Hence we investigate the A_p. Let B be a basic subgroup of A_p of rank r and suppose that $r \geqq 3$. Then B has a subgroup of the form

$$C = \{e_1\} + \{e_2\} + \{e_3\}$$

which is a direct summand of A_p since finite pure subgroups are direct summands. Then $\Lambda(C)$ is not a group since the conditions of Theorem 9 do not hold. Consequently $\Lambda(A_p)$ is not a group. We conclude that any basic subgroup B of A_p must have rank $r < 3$. Then

$$A_p = B + D$$

where the rank of $B < 3$ and D is divisible. This leads to the condition on the primes p_i and thus to the form of A stated in the theorem. Conversely, any multiplications on a group of this form must be nil on the divisible part and a product of an element from the non-divisible component with an element from the divisible component must be zero. Thus products can be non-trivial only on the non-divisible component of A. But the non-divisible part of A is a Lie-closed group from which it follows that A is Lie-closed.

4. Conclusion. Except for the few special results in this paper the problem of when a torsion-free or mixed group A is associative-closed or Lie-closed remains

open. In [3] FUCHS has determined a large class of groups having commutative endomorphism rings and all these by the observation in Section 3 above are associative-closed. Specifically, the result is

THEOREM 14. (FUCHS) *To every infinite cardinal m less than the first inaccessible cardinal there exist* 2^m *non-isomorphic torsion-free groups of power m, which have commutative endomorphism ring.*

Applying this we obtain our final result.

THEOREM 15. *To every infinite cardinal m less than the first inaccessible cardinal there exist* 2^m *non-isomorphic associative-closed groups.*

EMORY UNIVERSITY,
DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ATLANTA, GEORGIA, USA

(Received 10 July 1962)

References

[1] R. A. BEAUMONT, Rings with additive group which is the direct sum of cyclic groups, *Duke Math. Journ.*, **15** (1948), pp. 367–369.
[2] L. FUCHS, *Abelian groups* (Budapest, 1958).
[3] L. FUCHS, The existence of indecomposable Abelian groups of arbitrary power, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), pp. 453–457.
[4] T. SZELE–J. SZENDREI, On Abelian groups with commutative endomorphism ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), pp. 309–324.

ASYMMETRIC GRAPHS

By

P. ERDŐS and A. RÉNYI (Budapest), members of the Academy

Dedicated to T. GALLAI, *at the occasion of his 50th birthday*

Introduction

We consider in this paper only non-directed graphs without multiple edges and without loops. The number of vertices of a graph G will be called its order, and will be denoted by $N(G)$. We shall call such a graph symmetric, if there exists a non-identical permutation of its vertices, which leaves the graph invariant. By other words a graph is called symmetric if the group of its automorphisms has degree greater than 1. A graph which is not symmetric will be called *asymmetric*. The degree of symmetry of a symmetric graph is evidently measured by the degree of its group of automorphisms. The question which led us to the results contained in the present paper is the following: how can we measure the degree of asymmetry of an asymmetric graph?

Evidently any asymmetric graph can be made symmetric by deleting certain of its edges and by adding certain new edges connecting its vertices. We shall call such a transformation of the graph its symmetrization. For each symmetrization of the graph let us take the sum of the number of deleted edges — say r — and the number of new edges — say s; it is reasonable to define the degree of asymmetry $A[G]$ of a graph G, as the minimum of $r+s$ where the minimum is taken over all possible symmetrizations of the graph G. (In what follows if in order to make a graph symmetric we delete r of its edges and add s new edges, we shall say that we *changed* $r+s$ edges.) Clearly the asymmetry of a symmetric graph is according to this definition equal to 0, while the asymmetry of any asymmetric graph is a positive integer.

The question arises: how large can be the degree of asymmetry of a graph of order n (i. e. a graph which has n vertices)? We shall denote by $A(n)$ the maximum of $A[G]$ for all graphs G of order n ($n=2, 3, \ldots$). We put further $A(1) = +\infty$. It is evident that $A(2)=A(3)=0$.

Now let $\overline{G}$ denote the complementary graph of G, that is the graph which consists of the same vertices as G and of those and only those edges which do not belong to G; then we have evidently

LEMMA 1.

$$A[G]=A[\overline{G}]. \tag{1}$$

As a matter of fact the complementary graph of a symmetric graph is evidently also symmetric (i. e. (1) holds if $A[G]=0$) and if a transformation T, consisting in deleting r edges and adding s new edges, makes G symmetric, then the transformation $\overline{T}$, consisting in adding those s edges which are deleted by T and deleting those r edges which are added by T, is clearly a symmetrization of $\overline{G}$, and thus Lemma 1 follows.

We shall need also the following evident fact:

LEMMA 2. *If a graph G is not connected and its components are $G_1, G_2, \ldots, G_c$ then we have*

$$A[G] \leqq \min_{1 \leqq i \leqq c} A[G_i]. \tag{2}$$

Let us mention further that a graph containing more than one isolated point is symmetric.

Now we can prove that $A(4)=0$ and $A(5)=0$. Let us first consider $A(4)$. Clearly any not connected graph of order 4 is symmetric by Lemma 2, further by Lemma 1 we may restrict ourselves to graphs fo order 4 having not more than $\frac{1}{2}\binom{4}{2}=3$ edges, because if the graph has more than 3 edges, the complementary graph has less than 3 edges. But the only connected graphs of order 4 with not more than 3 edges are the path and the star shown on Fig. 1 which are clearly symmetric. Thus $A(4)=0$. Now we show $A(5)=0$. Again we can restrict ourselves to graphs of order 5 which are connected and which contain not more than $\frac{1}{2}\binom{5}{2}=5$ edges. These belong however all to one of the 8 types shown on Fig. 2 which are evidently all symmetric.

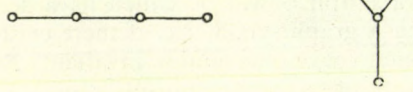


Fig. 1

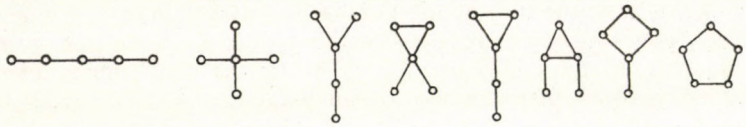


Fig. 2

(We have drawn the graphs so that each is symmetric with respect to its vertical axis.)

Now we shall show that $A(6)=1$. Here again we may restrict ourselves to consider connected graphs having not more than $\left[\frac{1}{2}\binom{6}{2}\right]=7$ edges.* Among these we find four asymmetric types, shown by Fig. 3.

All have their degree of asymmetry equal to 1. As a matter of fact, each can be made symmetric by deleting the edge which is indicated by a thick line. It is easy to see that any of these graphs can also be made symmetric

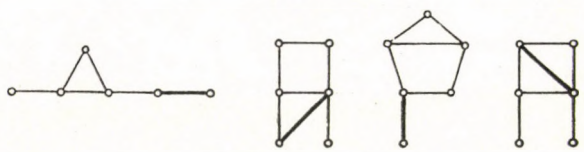


Fig. 3

* Here and in what follows $[x]$ denotes the integral part of the real number x.

by adding a suitably chosen edge, as shown on Fig. 4, where the edge to be added is indicated by a dotted line.

However it is not true in general that if a graph can be made symmetric by omitting one edge, it can also be made symmetric by adding one edge. For instance Fig. 5 shows a graph of order 10 which can be made symmetric by omitting one edge (that which is drawn by a thick line) but can not be made symmetric by adding one new edge. (Of course if by omitting an edge an involutory symmetry is produced, then the same symmetry can be produced by adding (instead of omitting) a suitably chosen edge.)

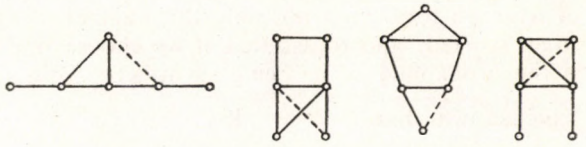


Fig. 4

In § 1 we shall show (Theorem 1) by a simple argument that the asymmetry of a graph of order n can not exceed $\frac{n-1}{2}$ if n is odd, while if n is even the asymmetry can not exceed $\frac{n}{2}-1$; in § 2 we prove (Theorem 2) that this estimate is asymptotically best possible, that is for any $\varepsilon>0$ there can be found an integer $n_0(\varepsilon)$ such that for any $n>n_0(\varepsilon)$ there exists a graph G_n of order n for which $A[G_n]>\frac{n}{2}(1-\varepsilon)$.

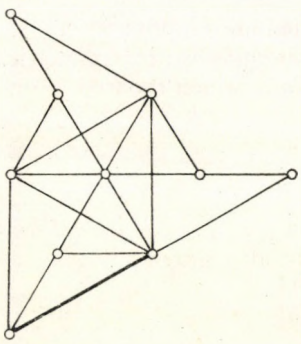


Fig. 5

In other words we have

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A(n)}{n}=\frac{1}{2}. \tag{3}$$

We can prove still more, namely that there exists a positive constant C such that

$$A(n)>\frac{n}{2}-C\sqrt{n\log n}.$$

However we do not know whether there exist graphs G_n of even resp. odd order n for which $A[G_n]=\frac{n}{2}-1$ resp. $A[G_n]=\frac{n-1}{2}$; we can prove that this is impossible if $n\equiv 3 \bmod 4$ and we guess that this is impossible for all n.

In view of (3) it is reasonable to introduce the quantity

$$a[G]=\frac{A[G]}{\left[\frac{N(G)-1}{2}\right]} \tag{4}$$

for any graph G with $N(G)\geqq 3$, and call it the relative asymmetry of G. It follows from our results that for any graph G with $N(G)\geqq 3$ one has

$$0\leqq a[G]\leqq 1. \tag{5}$$

The proof of Theorem 2 is not constructive, only a proof of existence. It uses probabilistic considerations. This method gives however more than stated above: it shows that for large values of n most graphs of order n are asymmetric, the degree of asymmetry of most of them being near to $\frac{n}{2}$.

An other interesting question is to investigate the asymmetry or symmetry of a graph for which not only the number of vertices but also the number N of edges is fixed, and to ask that if we choose one of these graphs at random, what is the probability of its being asymmetric. We have solved this question too, and have shown that if $N = \frac{n}{2}\log n + \omega(n)n$ where $\omega(n)$ tends arbitrarily slowly to $+\infty$ for $n \to +\infty$, then the probability that a graph with n vertices and N edges chosen at random (so that any such graph has the same probability $\left(\binom{n}{2}\right)^{-1}$ to be chosen) should be asymmetric, tends to 1 for $n \to +\infty$. This and some further related results will be published in an other forthcoming paper.

In § 3 we deal with (denumerably) infinite graphs, more exactly with random infinite graphs Γ defined as follows. Let $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ be an infinite sequence of vertices. Let us suppose that for each j and k $(j \neq k)$ if E_{jk} denotes the event that P_j and P_k are connected by an edge, then the events E_{jk} are independent and each has the probability $\frac{1}{2}$. We prove the simple but surprising fact that Γ is symmetric with probability 1 (Theorem 3).

Thus there is a striking contrast between finite and infinite graphs: while „almost all" finite graphs are asymmetric, „almost all" infinite graphs are symmetric.

In § 4 we deal with the asymmetry of graphs of order n in which the total number N of edges is fixed.

In § 5 we deal with some related unsolved problems.

Our thanks are due to T. GALLAI for his valuable remarks.

§ 1. Proof of the theorem that the asymmetry of a graph of order n can not exceed $\left[\frac{n-1}{2}\right]$

In this § we prove

THEOREM 1.

$$A(n) \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

REMARK. Of course Theorem 1 implies that if n is odd, then $A(n) \leqq \frac{n-1}{2}$ and if n is even, we have $A(n) \leqq \frac{n}{2} - 1$.

PROOF. Let G be an arbitrary graph of order n. We may suppose $n \geqq 6$. Let $P_1, P_2, \ldots, P_n$ be the vertices of G and let us denote by v_k the valency of P_k in G (i. e. v_k is the number of edges having P_k as one of their endpoints.)

Let further v_{jk} $(j \neq k)$ denote the number of vertices P_h of G $(h \neq j, h \neq k)$ which are connected in G both with P_j and with P_k. Let us put further $v_{jj}=0$. Clearly $v_{kj}=v_{jk}$ and

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} v_{jk} = \sum_{h=1}^{n} v_h(v_h-1). \tag{1. 1}$$

As a matter of fact, both the left hand side and the right hand side of (1. 1)are equal to the number of (ordered) pairs of edges of G which have one common endpoint. Let us choose now two distinct vertices P_j and P_k of G $(j \neq k)$ and let us put

$$\Delta_{jk} = v_j + v_k - 2v_{jk} - 2\delta_{jk} \tag{1. 2}$$

where $\delta_{jk}=1$ or 0 according to whether P_j and P_k are connected by an edge in G or not. Let us put further $\Delta_{jj}=0$. Evidently Δ_{jk} is the number of vertices of G which are in different relation with P_j and P_k (i. e. which are either connected with P_j and not connected with P_k or connected with P_k and not connected with P_j). Clearly by omitting all edges connecting P_j (resp. P_k) with some point of G which is not connected with P_k (resp. P_j) we obtain a graph G' in which P_j and P_k are connected with the same points. Thus G' has the symmetry consisting in the interchange of P_j and P_k and leaving all other points unchanged. But G' is obtained from G by deleting Δ_{jk} edges. Thus G can be made symmetric by deleting Δ_{jk} edges. It follows that

$$A[G] \leqq \min_{j \neq k} \Delta_{jk} \leqq \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{jk}}{n(n-1)}. \tag{1. 3}$$

On the other hand we have

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{jk} = 2 \sum_{l=1}^{n} v_l(n-1-v_l). \tag{1. 4}$$

As a matter of fact, the left hand side of (1. 4) is equal to the number of ordered triplets (P_j, P_k, P_l) of vertices such that G contains exactly one of the two possible edges $P_j\widehat{P_l}$ and $P_k\widehat{P_l}$; if we fix P_l then that among P_j and P_k which is connected with P_l can be chosen in v_l ways and the other in $n-1-v_l$ ways; this proves (1. 4). ((1. 4) could also be deduced from (1. 1) and (1. 2)).

As clearly

$$v_l(n-1-v_l) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \left(v_l - \frac{n-1}{2}\right)^2 \tag{1. 5}$$

we obtain

$$2 \sum_{l=1}^{n} v_l(n-1-v_l) \leqq \begin{cases} \dfrac{n(n-1)^2}{2} & \text{if } n \text{ is odd} \\ n\dfrac{[(n-1)^2-1]}{2} & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{1. 6}$$

It follows from (1. 3), (1. 4) and (1. 6)

$$A(G) \leqq \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \dfrac{n(n-2)}{2(n-1)} & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Now we have evidently

$$\frac{n(n-2)}{2(n-1)} < \frac{n}{2} \quad \text{if} \quad n > 1.$$

Thus it follows from (1. 7) that

$$A[G] \leqq \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \dfrac{n}{2} - 1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \tag{1.8}$$

and thus for every n

$$A[G] \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]. \tag{1.9}$$

As (1. 9) holds for every graph G of order n, Theorem 1 is proved.

The problem arises, for which odd values of n does there exist a graph G of order n such that

$$\min_{j \neq k} \Delta_{jk} = \frac{n-1}{2}. \tag{1.10}$$

As by (1. 3) and (1. 6) we have for odd n

$$\min_{j \neq k} \Delta_{jk} \leqq \frac{\sum\sum_{j \neq k} \Delta_{jk}}{n(n-1)} \leqq \frac{n-1}{2} \tag{1.11}$$

it follows that (1. 10) can hold only if $\Delta_{jk} = \dfrac{n-1}{2}$ for all $j \neq k$. It follows from (1. 5) that in this case we have also $v_l = \dfrac{n-1}{2}$ for $l = 1, 2, \ldots, n$. Now if $n \equiv 3 \bmod 4$ then $\dfrac{n-1}{2}$ is odd, and as in any graph the number of vertices having an odd valency is even we obtain a contradiction. Thus (1. 10) can hold for an odd n only if $n \equiv 1 \bmod 4$.

We shall call a graph G of order $n \equiv 1 \bmod 4$ for which (1. 10) holds a Δ-graph.

For $n = 5$ the cycle of order 5 is a Δ-graph. For $n = 9$ a Δ-graph is shown by Fig. 6.

A simple way to describe the Δ-graph shown by Fig. 6 is as follows: let the 9 vertices be labelled by ordered pairs of numbers (a, b) where a and b may take on independently the values 0, 1, 2. Let us connect the vertices labelled by (a, b) and (a', b') if and only if either $a = a'$ or $b = b'$.

We can construct a Δ-graph of order p, if p is an arbitrary prime for which $p \equiv 1 \bmod 4$, as follows: Let $P_1, P_2, \ldots, P_p$ be the vertices of G and let us connect the vertices P_j and P_k if and only if $k-j$ is a quadratic residue mod p. In this case clearly each vertex P_j has valency $\frac{p-1}{2}$. We show that for each $j \neq k$ we have $\Delta_{jk} = \frac{p-1}{2}$. This follows immediately from the following well-known property of quadratic residues observed first by Lagrange (see [1] and [2]): If $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{p-1}{2}}$ are all quadratic residues among the numbers $1, 2, \ldots, p-1$, then among the numbers $r_l + d \left(l = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ where d is any of the numbers $1, 2, \ldots, p-1$, there are exactly $\frac{p-1}{4}$ which are congruent to a quadratic non-residue mod p. As a matter of fact Δ_{jk} is equal to the number of those integers h $(h = 1, 2, \ldots, p)$ for which $h-j$ is a quadratic residue and $h-k$ a non-residue, or $h-j$ a quadratic nonresidue and $h-k$ a residue. Putting $d = k-j$ this means that Δ_{jk} is equal to te sum of the number of non-residues among the numbers $r_l + d \left(l = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ and the number of non-residues among the numbers $r_l - d \left(l = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ and thus $\Delta_{jk} = 2\left(\frac{p-1}{4}\right) = \frac{p-1}{2}$.

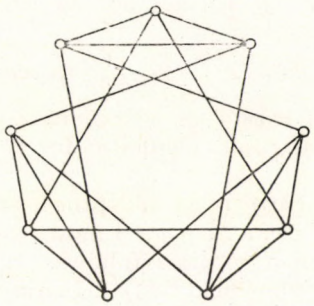


Fig. 6

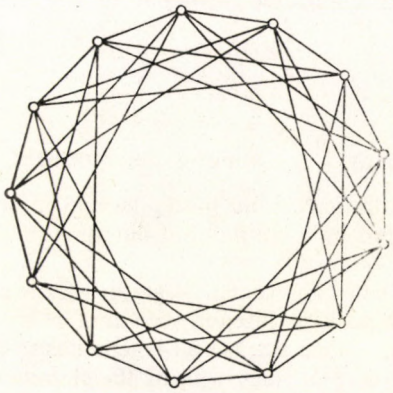


Fig. 7

Thus there exists a Δ-graph of every order n which is a prime of the form $4k+1$. Clearly the Δ-graph of order 5 mentioned above is the same as that obtained by the above general construction for $p = 5$. For $p = 13$ the Δ-graph obtained by our construction is shown by Fig. 7.

We can construct also a Δ-graph of order $n = p^2$ if p is a prime of the form $p = 4k+3$. The construction is as follows: let us label the vertices by the pairs of numbers (a, b) where $0 \leqq a \leqq p-1$, $0 \leqq b \leqq p-1$. Let us connect the vertices

labelled with (a, b) and (a', b') if either $a = a'$, or $(a-a')(b-b')$ is a quadratic residue mod p. In this case each vertex (a, b) has the valency $\frac{p^2-1}{2}$, because it is connected with the $p-1$ vertices (a, b') where $b' \neq b$ and with the $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ vertices (a', b') such that $a-a'$ and $b-b'$ are both quadratic residues mod p and the $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ vertices (a', b') such that $a-a'$ and $b-b'$ are both quadratic non-residues mod p and $2\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + p - 1 = \frac{p^2-1}{2}$. Further denoting by v the number of vertices which are connected with one of the vertices (a, b) and (a', b') but not with the other, we always have $v = \frac{p^2-1}{2}$. This follows from the theorem (due to Lagrange) according to which if $r_1, r_2 \ldots, r_{\frac{p-1}{2}}$ is a complete set of quadratic residues mod p then exactly $\frac{p-3}{2}$ among the numbers $r_j + d\left(j = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ are congruent to a quadratic residue mod p (see [3]). Mr. A. HEPPES (oral communication) has constructed by a similar but different method a Δ-graph of order p^2 for every odd prime p.

We can construct a Δ-graph of order p^r where p is an odd prime, and r an arbitrary positive integer such that $p^r \equiv 1 \bmod 4$ (that is, if $p \equiv 1 \bmod 4$ then r is arbitrary, while if $p \equiv 3 \bmod 4$ then r has to be an even number), as follows. Let us label the p^r vertices of the graph by the elements of a Galois-field $GF(p^r)$. Let us connect two vertices labelled by U and $V\left(U \in GF(p^r),\ V \in GF(p^r)\right)$ if and only if $U - V = C^2$ where C is some element of $GF(p^r)$. Now J. B. KELLY [2] has proved that for any $GF(p^r)$ with $p^r \equiv 1 \bmod 4$ by denoting by A the subset of those non-zero elements which are squares, and by B the subset of those elements which are not squares, it follows that any non-zero element d can be represented in exactly $\frac{p^r-1}{2}$ ways in the form $d = a - b$ where $a \in A$ and $b \in B$. Thus it follows (exactly as in the case $r = 1$) that our graph G is a Δ- graph. Thus there exists a Δ-graph of order n if $n = p^r \equiv 1 \bmod 4$ where p is a prime. We do not know whether there exists a Δ-graph of order n if $n \equiv 1 \bmod 4$ and n is not a prime-power.

Let us mention that all Δ-graphs which we have constructed are symmetric; for instance the Δ-graph of order 9 shown by Fig. 6. has the automorphism which carries over the vertex labelled with (a, b) into the vertex labelled with (a', b') where $a' \equiv a+1 \pmod 3$ and $b' \equiv b+1 \pmod 3$. The Δ-graph of order p where p is a prime of the form $4k+1$ constructed above has the symmetry which carries p_l into $p_{l'}$ where $l' = l+1 \bmod p$.

Thus while there exist at least for certain odd values of n graphs for which $\min \Delta_{jk} = \frac{n-1}{2}$, we do not know any graph of (odd) order n for which $A[G] = \frac{n-1}{2}$. We guess that this is impossible.

It is possible that the following stronger conjecture holds also: all Δ graphs are symmetric.

Finally we should add the following remark: Let $C_3(G)$ denote the number of triangles contained in a graph G. A. GOODMAN [4] (see also [5] and [6]) has determined the minimum of $C_3(G_n)+C_3(\bar{G}_n)$ for all graphs of order n. For $n \equiv 1 \bmod 4$ his result is as follows:

$$\min\left(C_3(G_n)+C_3(\bar{G}_n)\right) = \frac{n(n-1)(n-5)}{24}. \tag{1.12}$$

Let us call a graph of order n for which the minimum in (1. 12) is attained, a Goodman-graph. Now it is easy to see that any Δ-graph is at the same time a Goodman-graph (but not conversely). This can be proved as follows: If G_n is a Δ-graph of order n, then the number of triangles contained in G_n and containing the edge PQ is equal to the number of vertices connected with both P and Q, and thus is equal to $\frac{n-1}{2}-\frac{n-1}{4}-1=\frac{n-5}{4}$. As the total number of edges of G_n is $\frac{n(n-1)}{4}$ and each triangle is counted in this way three times, $C_3(G_n) = \frac{n(n-1)(n-5)}{48}$. Clearly if G_n is a Δ-graph then $\bar{G}_n$ is a Δ-graph too; thus it follows that $C_3(G_n)+C_3(\bar{G}_n)= \frac{n(n-1)(n-5)}{24}$, i. e. that (1. 12) holds for G_n.

§ 2. The asymmetry of a random graph of order n

In this § we prove the following

THEOREM 2. *Let us choose at random a graph Γ having n given vertices so that all possible $2^{\binom{n}{2}}$ graphs should have the same probability to be chosen. Let $\varepsilon>0$ be arbitrary. Let $\mathbf{P}_n(\varepsilon)$ denote the probability that by changing not more than $\frac{n(1-\varepsilon)}{2}$ edges of Γ it can be transformed into a symmetric graph. Then we have*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(\varepsilon) = 0. \tag{2.2}$$

COROLLARY. *For any ε with $0<\varepsilon<1$ there exists an integer $n_0(\varepsilon)$ depending only on ε, such that for $n>n_0(\varepsilon)$ there exist graphs G of order n with $A[G] > \frac{n(1-\varepsilon)}{2}$.*

REMARK. Clearly it follows from Theorem 1 and the corollary of Theorem 2 that

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A(n)}{n} = \frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

The same method yields also $\frac{n}{2} - A(n) = O(\sqrt{n \log n})$ but we shall not prove this in detail.

PROOF of Theorem 2. As the proof is not simple, we first give a sketch of the proof.

Let us denote by $\mathbf{P}_n(\varepsilon, q)$ $(q=2, 3, \ldots)$ the probability that a random graph of order n can be transformed by changing $m < \frac{n}{2}(1-\varepsilon)$ of its edges into a graph admitting a permutation Π as an automorphism, where Π is a permutation which leaves exactly $l = n-q$ of the n vertices of the graph unchanged, but which can not be transformed into a symmetric graph by changing less than m of its edges. Then we have

$$\mathbf{P}_n(\varepsilon) \leqq \sum_{q=2}^{n} \mathbf{P}_n(\varepsilon, q). \tag{2. 4}$$

We shall estimate $\mathbf{P}_n(\varepsilon, q)$ as follows

$$\mathbf{P}_n(\varepsilon, q) \leqq \frac{A_{n,q} \cdot B_{n,q} \cdot C_{n,q}}{2^{\binom{n}{2}}} \tag{2. 5}$$

where $A_{n,\,q}$ is the number of ways a permutation Π_q, leaving exactly $l = n-q$ of the n vertices of the graph invariant, can be chosen; $B_{n,\,q}$ is an upper bound for the number of graphs which are invariant under such a permutation Π_q and $C_{n,\,q}$ is an upper bound for the number of graphs which can be transformed into a graph admitting a given permutation Π_q by changing $m \leqq \frac{n}{2}(1-\varepsilon)$ of its edges, and can not be transformed into a symmetric graph by changing less than m of its edges.

We shall deal first with the terms for which q lies in the range

$$\sqrt[4]{n} \leqq q \leqq n \tag{2. 6}$$

then with the terms for which q lies in the range

$$5 \leqq q < \sqrt[4]{n} \tag{2. 7}$$

and finally with the terms corresponding to $q=2$, 3 and 4 separately. We shall show that the sum figuring on the right hand side of (2. 4) tends to 0 for $n \to +\infty$; this clearly implies the assertion of Theorem 2.

Let us go now into the details.

Let Π be an arbitrary permutation of order n having the cycle-representation

$$\Pi = (a_{1,1}, \ldots, a_{1,c_1})(a_{2,1}, \ldots, a_{2,c_2}) \ldots (a_{r,1}, \ldots, a_{r,c_r}) \tag{2. 7}$$

where $a_{i,\,j}$ $(1 \leqq j \leqq c_i;\ 1 \leqq i \leqq r)$ are the numbers $1, 2, \ldots, n$ in some order. Thus $c_1, c_2, \ldots, c_r$ are the cycle-lengths of Π. The permutation Π can also be interpreted as a one-to-one mapping of the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ onto itself. Let Π, interpreted this way, map k into Πk $(k=1, 2, \ldots, n)$. We shall denote by Π^s the mapping obtained by applying the mapping Π s times. Clearly $\Pi a_{i,\,j} = a_{i,\,j+1}$ for $j=1, 2, \ldots, c_i$ where $a_{i,\,c_i+1}$ stands for $a_{i,\,1}$. Let us calculate first the probability that a graph Γ of order n chosen at random should admit Π as its automorphism. By choosing a graph Γ at random we mean that n vertices $P_1, \ldots, P_n$ are prescribed and we choose

some set of edges connecting these vertices at random, so that each of the $2^{\binom{n}{2}}$ possible choices has the same probability $2^{-\binom{n}{2}}$.

Thus the random choice of Γ is equivalent with a sequence of $\binom{n}{2}$ independent random decisions concerning all possible $\binom{n}{2}$ edges, so that with respect to any possible edge the probability of including it into Γ is equal to $\frac{1}{2}$. An equivalent way of characterizing the random choice of Γ is as follows: let us put $\varepsilon_{j,k}=1$ if the edge $\widehat{P_jP_k}$ is contained in Γ and $\varepsilon_{j,k}=0$ if not $(1\leqq j<k\leqq n)$. Then the random choice of Γ means that the $\varepsilon_{j,k}$ with $j<k$ are independent random variables each taking on the values 1 and 0 with probability $\frac{1}{2}$. Let us put $\varepsilon_{k,j}=\varepsilon_{j,k}$ for $j<k$. Now Γ admits the automorphism Π if and only if for any pair j, k $(j\neq k)$ one has $\varepsilon_{\Pi j,\Pi k}=\varepsilon_{j,k}$. Let us calculate now how many of the values $\varepsilon_{j,k}$ can still be chosen arbitrarily. An easy argument shows that if j belongs to the a-th cycle of Π (of length c_a) and k to the b-th cycle of Π (of length c_b) (where $a\neq b$) then the sequence of equations

$$\varepsilon_{j,k}=\varepsilon_{\Pi j,\Pi k}=\varepsilon_{\Pi^2 j,\Pi^2 k}=\ldots=\varepsilon_{\Pi^s j,\Pi^s k}=\ldots$$

contains $[c_a, c_b]$ different terms where $[A, B]$ denotes the least common multiple of A and B. Thus among the $c_a\cdot c_b$ values $\varepsilon_{j,k}$ where j belongs to the a-th cycle and k to the b-th cycle of Π we can choose only $\frac{c_a\cdot c_b}{[c_a, c_b]}=(c_a, c_b)$ values independently, where (A, B) stands for the greatest common divisor of A and B; all other such $\varepsilon_{j,k}$ are then determined $(a\neq b;\ 1\leqq a\leqq r;\ 1\leqq b\leqq r)$.

By a similar argument we get that among the $\varepsilon_{j,k}$ with both j and k belonging to the a-th cycle of Π we can choose $\left[\frac{c_a}{2}\right]$ independently, where $[x]$ denotes the integral part of x. Thus there are exactly

$$2^{\sum_{1\leqq a<b\leqq r}(c_a, c_b)+\sum_{a=1}^{r}\left[\frac{c_a}{2}\right]} \tag{2.8}$$

different graphs of order n which admit the automorphism Π, having the cycle representation (2.7), and the probability of Γ admitting the automorphism Π, i. e. of $\Pi\Gamma=\Gamma$ is

$$\mathbf{P}(\Pi\Gamma=\Gamma)=2^{\sum_{1\leqq a<b\leqq r}(c_a, c_b)+\sum_{a=1}^{r}\left[\frac{c_a}{2}\right]-\binom{n}{2}}. \tag{2.9}$$

Now let us fix a graph G for which $\Pi G=G$ and count the number of such graphs which can be transformed into G by changing m of its edges.

Clearly the m edges to be changed can be chosen in $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ ways. Thus the number of graphs which can be transformed into one admitting the automorphism Π by changing m edges can not exceed

$$\binom{\binom{n}{2}}{m}2^{\sum_{1\leqq a<b\leqq r}(c_a, c_b)+\sum_{a=1}^{r}\left[\frac{c_a}{2}\right]}. \tag{2.10}$$

Now let us suppose that among the cycle-lengths c_a of Π there are exactly $l = n-q$ which are equal to 1; we may suppose $c_1 = c_2 = \ldots = c_l = 1$ and $c_{l+i} \geqq 2$ for $i = 1, 2, \ldots\ r-l$. Then we have

$$q = \sum_{i=1}^{r-l} c_{l+i} \geqq 2(r-l)$$

and thus

$$(r-l) \leqq \frac{q}{2} = \frac{n-l}{2} \quad \text{and} \quad r \leqq \frac{n+l}{2}. \tag{2.11}$$

As $(c_a, c_b) \leqq \min(c_a, c_b) \leqq \frac{c_a + c_b}{2}$, it follows

$$\sum_{1 \leqq a < b < r} (c_a, c_b) + \sum_{a=1}^{r} \left[\frac{c_a}{2}\right] \leqq \binom{l}{2} + (r-l)\left(\frac{n+l}{2}\right). \tag{2.12}$$

Thus

$$\sum_{1 \leqq a < b \leqq r} (c_a, c_b) + \sum_{a=1}^{r} \left[\frac{c_a}{2}\right] \leqq \binom{l}{2} + \frac{n^2 - l^2}{4}. \tag{2.13}$$

Thus the probability of choosing at random such a graph which can be transformed by less than $(1-\varepsilon)\frac{n}{2}$ changes into one admitting Π as an automorphism does not exceed

$$2^{\frac{l^2-n^2}{4} + O(n \log n)}. \tag{2.14}$$

As the number of permutations Π with a fixed l is less than $\binom{n}{l}(n-l)! = 2^{O(n \log n)}$ we have

$$\sum_{\sqrt[4]{n} \leqq q \leqq n} \mathbf{P}_n(\varepsilon, q) \leqq 2^{-\frac{n^{5/4}}{2} + O(n \log n)}. \tag{2.15}$$

Now we consider the permutations with $5 \leqq q \leqq \sqrt[4]{n}$. Concerning these we have to use much careful estimations.

Let us fix first the value of q $(5 \leqq q < \sqrt[4]{n})$. The number of permutations which leave $n-q = l$ elements unchanged is clearly less than $\binom{n}{q} q! \leqq n^{\sqrt[4]{n}}$. In estimating the number of ways in which the m edges to be changed can be chosen, we may restrict ourselves to those edges, which connect either the q points which do not remain unchanged by Π among themselves, or edges connecting such points with the invariant ones. Thus an upper bound for the number of choices of the

$m < \frac{n}{2}(1-\varepsilon)$ edges is given by

$$\sum_{m<\frac{n}{2}(1-\varepsilon)} \binom{\binom{q}{2}+q(n-q)}{m} \leqq n \binom{nq}{\frac{n}{2}(1-\varepsilon)} = 2^{H(\alpha)nq+O(\log n)} \tag{2.16}$$

where $\alpha = \frac{1-\varepsilon}{2q}$ and $H(\alpha) = \alpha \log_2 \frac{1}{\alpha} + (1-\alpha)\log_2 \frac{1}{1-\alpha}$.

Now if $q \geqq 5$ then $\alpha \leqq \frac{1-\varepsilon}{10} < \frac{1}{10}$ and thus (as $H(x)$ is increasing for $0 < x < \frac{1}{2}$)

$$H(\alpha) < H\left(\frac{1}{10}\right) < 0{,}47. \tag{2.17}$$

It follows that for $5 \leqq q < \sqrt[4]{n}$

$$\mathbf{P}_n(\varepsilon, q) = 2^{O(\sqrt[4]{n}\log n)+\frac{n^2-(n-q)^2}{4}+\binom{n-q}{2}-\binom{n}{2}+0{,}47qn}$$

and thus

$$\sum_{q=5}^{\sqrt[4]{n}} \mathbf{P}_n(\varepsilon, q) \leqq 2^{-0{,}03qn+O(\sqrt{n})}. \tag{2.18}$$

Thus it remains only to consider permutations Π for which $q = 2$, 3 or 4, i. e. which interchange not more than 4 points and leave all others untouched. Let us start with the case $q = 2$. The number of such permutations is clearly $\binom{n}{2}$. The number of graphs of order n admitting such a permutation as an automorphism is (as in this case $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-2} = 1$, $c_{n-1} = 2$) $2^{\binom{n-1}{2}+1}$, and thus the probability that a random graph admits an automorphism interchanging two points is $\leqq 2^{-n+O(\log n)}$. Now, if a graph G^* can be transformed by changing m of its edges into a graph G admitting the permutation Π interchanging P_j and P_k and leaving all other points invariant, we may suppose that all edges changed have either P_j or P_k (but not both) as one of their endpoints.

It is clear that we may restrict ourselves to count those graphs, which can be transformed into G by *deleting* edges, because any graph G^* which can be transformed in a graph, which is invariant with respect to the permutation interchanging P_j and P_k, by changing (i. e. deleting or adding) m edges, can also be transformed in such a graph by deleting m edges. Thus the number of such graphs G^* belonging to a fixed G does not exceed

$$\sum_{m<\frac{n}{2}(1-\varepsilon)} \binom{n-2}{m} = 2^{H\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)n+O(\log n)}.$$

As however $H(x) < 1$ for $x \neq \frac{1}{2}$ it follows that

$$P_n(\varepsilon, 2) \leqq 2^{-c(\varepsilon)n} \tag{2.19}$$

where $c(\varepsilon)$ is a positive constant depending only on ε. Let us consider now the case $q=3$. In this case clearly $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-3} = 1$ and $c_{n-2} = 3$ and therefore the number of graphs admitting such an automorphism is

$$2^{\binom{n-2}{2}+1}.$$

As further we can select the 3 points which are moved by the permutation in $\binom{n}{3}$ ways, and the permutation itself in two ways, the probability that a graph admits as an automorphism a permutation cyclically interchanging 3 points and leaving all others unmoved, does not exceed

$$2\binom{n}{3}2^{\binom{n-2}{2}+1-\binom{n}{2}} = 2^{-2n+O(\log n)}.$$

Now if such a graph G is fixed, all graphs which can be transformed into G by changing $m < \frac{n}{2}(1-\varepsilon)$ edges (and can not be transformed into any other graph admitting the same automorphism by changing a smaller number of edges) are obtained if we choose m among the $n-3$ points left unchanged by the permutation, and select one of the three edges connecting this point with the 3 points moved by the permutation and delete or add this edge according to whether it is or is not contained in G. Thus the number of graphs which can in this way be transformed into G is $\sum_{m<\frac{n}{2}(1-\varepsilon)} \binom{n-3}{m} 3^m = O\left(2^n 3^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon)}\right)$. Besides this, we may change some of the 3 edges between the 3 points moved by the permutation. As the number of ways doing this is 8 we obtain that

$$\mathbf{P}_n(\varepsilon, 3) = O\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right). \tag{2.20}$$

Let us consider finally the case $q=4$. Here two cases have to be distinguished: either $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-4} = 1$ and $c_{n-3} = 4$ or $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-4} = 1$ and $c_{n-3} = c_{n-2} = 2$. For the first case we obtain

$$\sum_{1 \leqq a < b \leqq r} (c_a, c_b) + \sum_{a=1}^{r} \left[\frac{c_a}{2}\right] = \binom{n-3}{2} + 2$$

for the second

$$\sum_{1 \leqq a < b \leqq r} (c_a, c_b) + \sum_{a=1}^{r} \left[\frac{c_a}{2}\right] = \binom{n-2}{2} + 3.$$

Thus the probabilities of a graph admitting such an automorphism are $\leqq 6\binom{n}{4}2^{\binom{n-3}{2}+2-\binom{n}{2}} = 2^{-3n+O(\log n)}$ and $\leqq 6\binom{n}{4}2^{\binom{n-2}{2}+3-\binom{n}{2}} = 2^{-2n+O(\log n)}$, respectively. As regards the number of graphs which can be transformed into a given graph G invariant with respect to a fixed permutation of the mentioned types by changing not more than $\frac{n}{2}(1-\varepsilon)$ edges, we obtain in the first case an upper bound

of order

$$\sum_{m \leqq \frac{n(1-\varepsilon)}{2}} \sum_{l \leqq \frac{m}{2}} \binom{n-4}{l} \binom{n-4-l}{m-2l} 6^l 4^{m-2l} \leqq 2^{1,82n+6(\log n)}$$

and in the second case an upper bound of order

$$\sum_{l \leqq m \leqq \frac{n(1-\varepsilon)}{2}} \sum \binom{n-4}{l} \binom{n-4}{m-l} 2^m \leqq 2^{1,32n+O(\log n)}.$$

It follows that

$$\mathbf{P}_n(\varepsilon, 4) \leqq 2^{-0,68n+O(\log n)}. \tag{2.21}$$

Collecting the estimates (2. 15), (2. 18), (2. 19), (2. 20) and (2. 21) in view of (2. 4) Theorem 2 follows.

§ 3. Symmetries of infinite graphs

Let Γ_∞ denote a random infinite graph which has the vertices P_n $(n=1, 2, \ldots)$ and which is such that denoting by $E_{j,k}$ the event that P_j and P_k are connected by an edge $(j \neq k)$ the events $E_{j,k}$ $(j, k=1, 2, \ldots;\ j<k)$ are independent and $P(E_{j,k})=\frac{1}{2}$. We shall prove that with probability one Γ_∞ admits non-trivial automorphisms. We can construct such an automorphism as follows.

Let us denote by $A(k)$ the index of the vertex into which the automorphism carries over the vertex P_k. We put $A(1)=2$ and $A(2)=1$.

Now let us consider P_3. This vertex can be in 4 possible relations with P_1 and P_2 (connected with both; connected with P_1 but not with P_2; connected with P_2 but not with P_1; connected neither with P_1 nor with P_2). Let $A(3)$ be the least integer (if there exists any) for which $P_{A(3)}$ is in the same relation with P_2 and P_1 as P_3 with P_1 and P_2 and put $A(A(3))=3$. If $A(n)$ is already defined for any finite number of values of n, for instance if $A(n_j)=n'_j$ and $A(n'_j)=A(n_j)$ $(j=1, 2, \ldots, s)$ where $n_1, n_2, \ldots, n_s, n'_1, n'_2, \ldots, n'_s$ are different integers, let m denote the least integer for which $A(m)$ is not yet defined. Let us define $A(m)$ as the least integer different from m and from all values n for which $A(n)$ is already defined, for which $P_{A(m)}$ is in the same relation with $P_{n'_j}$ as P_m with P_{n_j}, and in the same relation with P_{n_j} as P_m with $P_{n'_j}$ $(j=1, 2, \ldots, s)$, and put $A(A(m))=m$.

In this way a non-trivial automorphism of Γ_∞ is constructed step-by-step, provided that the construction can always be continued. But it is easy to see that with probability 1 the construction can always be continued. This follows from the following

LEMMA 3. *Let $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_l$ be arbitrary different natural numbers. Then with probability* 1 *the number of vertices P_n which are connected in Γ_∞ with each of $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$ and not connected with $P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots, P_{j_l}$ is infinite for every choice of the indices $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_l$ $(k, l=1, 2, \ldots)$.*

PROOF of Lemma 3. The probability of the event E_n that P_n is in the required relation with all vertices $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}, P_{j_1}, \ldots, P_{j_l}$ is clearly equal to $\frac{1}{2^{k+l}}$, further these events E_n are independent. Thus by the Borel-Cantelli lemma E_n takes place for an infinity of values of n with probability 1. As the union of a denumerable set of sets of probability 0 has probability 0 too, with probability 1 in Γ there are infinitely many vertices connected with the vertices $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ and not connected with the vertices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_l}$ simultaneously for all choices of the indices $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$. This proves Lemma 3.

Thus we have proved that with probability 1 Γ_∞ admits a non-trivial automorphism, which moreover is involutory (i. e. $A(A(n))=n$ for every n).

This is what we wanted to prove. It can be seen from the proof that Γ_∞ admits with probability 1 an infinity of nontrivial automorphisms. As a matter of fact, instead of putting $A(1)=2$, we could have prescribed $A(1)=k$ with an arbitrary k.

It is easy to see, that our result remains also valid if instead of supposing that the edge $\widehat{P_jP_k}$ is contained in Γ_∞ with probability $\frac{1}{2}$, we suppose only that this probability $p_{j,k}$ is contained between the limits δ and $1-\delta$ where $0<\delta<1$, admitting that this probability should depend on j and k. The result holds also if $p_{j,k}$ is not bounded away from 0 and 1 but is such that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{i_1,n}p_{i_2,n}\cdots p_{i_k,n}(1-p_{j_1,n})\ldots(1-p_{j_l,n})$$

is divergent for every choice of the integers $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$.

§ 4. Asymmetry of graphs of order n with a fixed number N of edges

In this § we consider only such graphs of order n which contain exactly N edges. If the valencies of the vertices $P_1, \ldots, P_n$ are denoted by $v_1, \ldots, v_n$ then we have by supposition

$$\sum_{l=1}^{n} v_l = 2N. \tag{4. 1}$$

For such a graph we have by Cauchy's inequality

$$\sum_{l=1}^{n} v_l^2 \geqq \frac{1}{n}\left(\sum_{l=1}^{n} v_l\right)^2 = \frac{4N^2}{n}. \tag{4. 2}$$

Thus it follows from (1. 3) and (1. 4) that for such a graph

$$A[G] \leqq \frac{4N}{n} - \frac{8N^2}{n^2(n-1)}. \tag{4. 3}$$

Thus we have proved the following

THEOREM 3. *If a graph G of order n has $N=\lambda n$ edges* $\left(0<\lambda<\frac{n-1}{2}\right)$ *then*

$$A[G]\leqq 4\lambda\left(1-\frac{2\lambda}{n-1}\right). \tag{4.4}$$

(The maximum of the right hand side of (4. 4) is clearly attained if $\lambda=\frac{n-1}{4}$, in which case it is equal to $\frac{n-1}{2}$).

We can prove with the same probabilistic method as applied in § 2 combined with methods of our paper [7] that the estimate (4. 4) is asymptotically best possible if together with $n\to+\infty$ we have $\lambda\to+\infty$ in such a way that $\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda}{\log n}=+\infty$; moreover $A[G]$ is near to $4\lambda\left(1-\frac{2\lambda}{n-1}\right)$ for most graphs of order n having $N=\lambda n$ edges.

The meaning of the condition $\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda}{\log n}=+\infty$ is that as we have shown in [7] in a random graph of order n and having $N=\lambda n$ edges the valencies of all vertices are asymptotically equal with probability tending to 1 for $n\to\infty$ if $\frac{\lambda}{\log n}\to+\infty$.

§ 5. Further remarks and unsolved problems

The following problems, closely connected with that considered in § 4 can be raised: for a fixed positive integer k, and $n>2k+1$ determine the least value $F(n, k)$ such that there exists a graph G of order n, having $N=F(n, k)$ edges and asymmetry $A[G]=k$; further the least value $C(n, k)$ such that there exists a *connected* graph G of order n, having $N=C(n, k)$ edges, and asymmetry $A[G]=k$. We can not give a full answer to these questions, only some partial results. We prove first

THEOREM 4. *We have* $C(6, 1)=6$ *and* $C(n, 1)=n-1$ *for* $n\geqq 7$.

REMARK. As shown in the introduction each graph of order $\leqq 5$ is symmetric, thus $C(n, 1)$ is defined only for $n\geqq 6$.

PROOF of Theorem 4. For $n=6$ there are, as we have seen, in the introduction, four types of asymmetric graphs, each having the asymmetry 1; as shown by Fig. 3 among these there is one having 6 edges, the others have 7 edges or more. Thus $C(6, 1)=6$. As any connected graph G of order n has at least $n-1$ edges, clearly $C(n, 1)\geqq n-1$ for $n\geqq 7$ with equality only if there exists an asymmetric tree of order n. Now it is easy to see that for any $n\geqq 7$ there exists an asymmetric tree of order n; such a tree for $n=7$ is shown by Fig. 8; for any $n\geqq 7$, such a tree T_n can be obtained as fol-

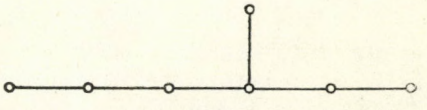


Fig. 8

lows: Let T_n consist of the vertices $P_1, \ldots, P_n$ and the edges $\widehat{P_iP_{i+1}}$ $(i=1, 2, \ldots, n-2)$ and of the edge $\widehat{P_{n-3}P_n}$.

Thus Theorem 4 is proved. Let us add that the asymmetry of a tree can not exceed 1. As a matter of fact, let T be an arbitrary tree; we may suppose that T has at least 3 vertices, as a tree of order 2 is evidently symmetric. Let us consider a longest path with any fixed starting point P_1 in T and let P_2 be the endpoint of this path. Let P_3 be the (unique) vertex which is connected with P_2 in T. Then two cases are possible. Either $P_3 = P_1$, in this case T is a star with center P_1, and thus is evidently symmetric; or $P_3 \neq P_1$, then again two cases are possible. Either P_3 has valency 2; in this case let P_4 be the unique vertex connected with P_3 besides P_2; by omitting from T the edge P_3P_4 we obtain a graph which has the symmetry interchanging P_2 and P_3. If P_3 has valency larger than 2, then any vertex P_l connected with P_3 which is not on the path P_1P_2 has valency 1 because otherwise the path P_1P_2 would not be the longest. In this case the tree itself is symmetric as it is invariant under the permutation interchanging P_2 and P_l. As P_1 has been chosen arbitrarily, we have incidentally proved the following

THEOREM 5. *Let T be a tree of order $n \geqq 3$; let us select one of the vertices of T, say P_1. Then either there exists a nontrivial permutation Π of the vertices of T which does not move P_1 and under which T is invariant, or one can transform T into a graph having such an automorphism by omitting one of its edges.*

We do not know the exact value of $F(n, 1)$. It is an interesting question also what is the total number of non-isomorphic asymmetric trees of order n? We can not answer this question; we can prove however that in a certain sense „almost all" trees of order n are symmetric, if n is large. This is a consequence of Theorem 6 below. Before formulating this theorem we introduce the following definition. If a graph G contains two vertices P_1, P_2 of valency 1 which are connected with the same vertex P_3, we shall say that G contains the *cherry* $\widehat{P_1P_3P_2}$.

A graph containing a cherry is evidently symmetric, as it is invariant under the permutation which interchanges the two vertices of order 1. Thus our assertion that almost all trees of order n are symmetric if n is large, is contained in the following

THEOREM 6. *Let us choose at random a tree from the set of all possible trees which can be formed from a given set of n labelled vertices, so that each of these trees should have the same probability to be chosen. Let γ_n denote the probability that the random tree contains at least one cherry. Then we have*

$$\lim_{n \to +\infty} \gamma_n = 1.$$

PROOF of Theorem 6. Let $P_1, \ldots, P_n$ denote the vertices of our random tree T_n. Let us put $\varepsilon(i_1, i_2, j) = 1$ (i_1, i_2, j are different natural numbers not exceeding n) if $\widehat{P_{i_1}P_jP_{i_2}}$ is a cherry in the random tree, i. e. if P_{i_1} and P_{i_2} have the valency 1 in T_n and if both are connected in T_n with P_j; let us put $\varepsilon(i_1, i_2, j) = 0$ otherwise. Taking into account that according to a well-known theorem of A. CAYLEY [8] the total number of trees which can be formed from n given labelled vertices is equal

to n^{n-2}, we obtain that

$$M(\varepsilon_{i_1,i_2,j}) = \frac{(n-2)^{n-4}}{n^{n-2}} \tag{5.1}$$

and

$$M(\varepsilon(i_1,i_2,j_1)\varepsilon(i_3,i_4,j_2)) = \begin{cases} \dfrac{(n-6)^{n-6}}{n^{n-2}} & \text{if } i_1,i_2,i_3,i_4,j_1,j_2 \text{ are all different,} \\ \dfrac{(n-5)^{n-6}}{n^{n-2}} & \text{if } j_1=j_2=j \text{ and } i_1,i_2,i_3,i_4 \text{ are different,} \end{cases} \tag{5.2}$$

$$M(\varepsilon(i_1,i_2,j_1)\varepsilon(i_3,i_4,j_2)) = \begin{cases} \dfrac{(n-3)^{n-4}}{n^{n-2}} & \text{if } i_1=i_3,\ i_2=i_4 \text{ and } j_1=j_2 \text{ or } i_1=i_4,\ i_2=i_3 \text{ and } j_1=j_2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.3}$$

Let Γ_n denote the number of cherries in T_n. Then by (5. 1), (5. 2) and (5. 3) we obtain

$$M(\Gamma_n) = \frac{n}{2e^3} + O(1)$$

and

$$M(\Gamma_n^2) = \frac{n^2}{4e^6} + O(n)$$

and thus

$$D^2(\Gamma_n) = O(n).$$

It follows by the inequality of Chebyshev that for $n \geqq n_0$

$$1 - \gamma_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Thus Theorem 6 is proved.

Now we prove the following

THEOREM 7. *Any connected graph of order n having n edges is either symmetric, or its asymmetry is equal to* 1.

REMARK. By other words we have $C(n, 2) > n$ for $n \geqq 7$ (As we have seen any graph of order $\leqq 6$ is either symmetric or has the asymmetry 1.)

PROOF of Theorem 7. Any connected graph of order n having n edges has as well known the following structure: it contains exactly one cycle, and any vertex of this cycle may be the root of one or more trees. Now suppose that contrary to the assertion of Theorem 7 there exists a graph G of order n having n edges, for which $A[G] \geqq 2$. In such a graph any tree attached to a vertex of the single cycle of the graph consists of a single edge only, because otherwise by Theorem 5 we would have $A[G] \leqq 1$. Let us call such an edge a „thorn". We can exclude the case when to a vertex two or more thorns are attached, because two thorns make a cherry which admits a symmetry. Now if to a vertex P of the cycle a thorn PQ is attached, then necessarily a thorn has to be attached to both neighbouring verti-

ces of the cycle too, because if P' would be a neighbour of P which is not the starting point of a thorn, then if P'' is the other neighbour of P' in the cycle by omitting the edge $P'P''$ we would obtain a graph containing a cherry $\widehat{QPP'}$. Thus either a thorn is attached to all vertices of the cycle or to none of them. As in both cases the graph has a cyclic symmetry, we obtained a contradiction, which proves Theorem 7.

It can be shown by a similar argument that $C(n, 2) > n+1$.

Our last result is a lower estimate for $F(n, 3)$. We prove

THEOREM 8. *We have* $F(n, 3) \geqq \frac{4n}{3} - \frac{3}{2}$.

PROOF. Let G be a graph of order n having N edges for which $A[G] = 3$. Clearly G can contain only a single vertex having the valency 1. Let n_2 be the number of vertices of G of valency 2 and n_3 the number of vertices of G of valency $\geqq 3$. Clearly two vertices P_1, P_2 of valency 2 can not be connected by an edge, because if P_1 and P_2 were connected by an edge, and P_1 would be connected besides P_2 with P_1' and P_2 besides P_1 with P_2', then omitting the edges $\widehat{P_1P_1'}$ and $\widehat{P_2P_2'}$ the resulting graph would admit the symmetry consisting in interchanging P_1 and P_2.

Further no vertex with valency $\geqq 3$ can be connected with more than one vertex with valency 2; as a matter of fact if P_1 and P_2 were vertices with valency 2 connected with a vertex P_3 with valency $\geqq 3$, then omitting the two edges connecting the vertices P_1 and P_2 with vertices different from P_3 the resulting graph would contain the cherry $\widehat{P_1P_3P_2}$.

It follows that $n_3 \geqq 2n_2 - 1$. As on the other hand $n_2 + n_3 \geqq n-1$, we obtain $3n_3 \geqq 2n-3$. Now we have

$$2N \geqq 2n_2 + 3n_3 \geqq 2n - 2 + n_3 \geqq \frac{8n-9}{3}$$

and therefore $N \geqq \frac{8n-9}{6} = \frac{4n}{3} - \frac{3}{2}$.

Finally we mention a further unsolved problem: is it true that $C(n, k) = F(n, k)$ for $k \geqq 2$?

Remarks, added on November 8. 1963. Prof. R. C. BOSE kindly informed us that in a forthcoming paper he introduced a class of graphs, called by him *strongly regular* graphs, which contains the class of Δ-graphs discussed in the present paper, as a subclass. A graph of order n is called strongly regular with parameters n_1, p_1, p_2 if each vertex of G_n is joined with n_1 other vertices, further any two joined vertices are both joined to exactly p_1 vertices and any two unjoined vertices are both joined to exactly p_2 other vertices. Clearly a Δ-graph of order $n \equiv 1 \bmod 4$ is a strongly regular graph with parameters $n_1 = p_1 = p_2 = \frac{n-1}{2}$.

The notion of strongly regular graphs is closely connected with the concept of an association scheme with two associate classes introduced by R. C. BOSE and T. SHIMAMOTO in their paper: Classification and analysis of partially balanced

incomplete block designs with two associate classes (*Journal of the American Statistical Association*, **47** (1952), pp. 151-184).

We should like to add further that the Δ-graph of order p constructed on p. 301 is identical with the graph constructed by H. SACHS on p. 282 of his paper: Über selbstkomplementäre Graphen (*Publicationes Mathematicae*, **9** (1962), pp. 270-288). This paper was not known to us at the time when our paper was written. As shovn by H. SACHS, this graph is isomorphic with its complementary graph.

MATHEMATICAL INSTITUTE,
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY,
BUDAPEST

(*Received 19 July 1962*)

References

[1] O. PERRON, Bemerkung über die Verteilung der quadratischen Reste, *Mathematische Zeitschrift*, **56** (1952), pp. 122—130.
[2] J. B. KELLY, A characteristic property of quadratic residues, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **5** (1954), pp. 38—46.
[3] A. RÉNYI, On the measure of equidistribution of point sets, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1949), pp. 77—92.
[4] A. W. GOODMAN, On sets of acquaintances and strangers at any party, *American Math. Monthly*, **66** (1959), pp. 778—783.
[5] I. L. SAUVÉ, On chromatic graphs, *American Math. Monthly*, **68** (1961), pp. 107—111.
[6] P. ERDŐS, On the number of triangles contained in certain graphs, *Bulletin of the Research Council of Israel*, Section F. (in print).
[7 P. ERDŐS and A. RÉNYI, On the evolution of random graphs, *Publications of the Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **5** (1960), pp. 17—61.
[8] A. CAYLEY, A theorem on trees, *Quarterly Journal of Pure and Applied Math.*, **23** (1889), pp. 376—378.
[9] A. RÉNYI, Some remarks on the theory of trees, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **4** (1959), pp. 73—85.
10] A. RÉNYI, On connected graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **4** (1959), pp. 385—388.

NOTE ON A PAPER OF A. HEPPES

By

W. J. BLUNDON (St. John's, Canada)

(*Presented by* G. HAJÓS)

Let d_k represent the density of closest k-fold lattice packing of equal circles in the plane. In a recent paper it is proved by HEPPES [2] that

$$d_k/kd_1 = 1 \text{ for } k < 5. \tag{1}$$

He then considers the lattice G with fundamental parallelogram $ABCD$ where $AB = BC = CD = DA = 2$ and $AC = 2k\sqrt{\frac{3}{k^2-1}}$. Let G^* be the lattice formed by the union $\{G_i\}$ of the lattices $G_i = G + \frac{i}{k}\vec{AC}\,(i = 1, 2, \ldots, k)$. He then proved that G^* provides a k-fold packing of circles of radius 1 and thus easily shows that

$$d_k/kd_1 > 1 \quad \text{for} \quad k \geqq 5. \tag{2}$$

To sharpen this result we note that $BD = 2\sqrt{\frac{k^2-4}{k^2-1}}$, so that the area of $ABCD$ is $\frac{2k\sqrt{3(k^2-4)}}{k^2-1} = k\Delta$, where Δ is the determinant of the lattice G^*. Since $d_k \geqq \pi/\Delta$ and $d_1 = \pi/2\sqrt{3}$, it follows that

$$d_k/kd_1 \geqq \frac{k^2-1}{k\sqrt{k^2-4}} \quad \text{for} \quad k \geqq 5. \tag{3}$$

Equality cannot hold in (3) for *all* $k \geqq 5$ since simple considerations of density imply that, as $k \to \infty$, $d_k/k \to 1$, so that $d_k/kd_1 \to 1/d_1 = 1{,}1026\ldots$, whereas $(k^2-1)/k\sqrt{k^2-4} \to 1$. I have recently proved [1] that (3) holds with equality when $k = 5$ and $k = 6$, and it appears that equality continues to hold for several succeeding values of k. An interesting problem would be to find the smallest k for which strict inequality holds in (3).

MEMORIAL UNIVERSITY OF NEWFOUNDLAND,
ST. JOHN'S, NEWFOUNDLAND, CANADA

(Received 28 July 1962)

References

[1] W. J. BLUNDON, Multiple packing of circles in the plane, *Journal London Math. Soc.*, **38** (1963), pp. 176–182.

[2] A. HEPPES, Mehrfache gitterformige Kreislagerungen in der Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), pp. 141–148.

HIGH EXTENSIONS OF ABELIAN GROUPS*

To professor L. FUCHS[1]

By

D. K. HARRISON, J. M. IRWIN, C. L. PEERCY
and E. A. WALKER (New Mexico, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

1. Introduction

High subgroups of Abelian groups were introduced by one of the authors [6], and have been investigated in several papers [6]; [7]; [8]; [9]; [10]. The importance of homological techniques in Abelian groups has prompted the authors to investigate the homological properties of high subgroups. This paper is concerned with such properties.

If G is an Abelian group,[2] and H is a subgroup of G maximal with respect to $H \cap G^1 = 0$, where $G^1 = \bigcap_n nG$, then H is called a *high subgroup* of G. Two fundamental properties of high subgroups that will be used here are: if H is a high subgroup of G, then (a) H is pure in G and (b) G/H is divisible. A proof of these facts is in [8].

DEFINITION 1. If $H^1 = 0$ and D is divisible, then the exact sequence $0 \to H \to X \to D \to 0$ is called a *high exact sequence* or a *high extension of H by D* if $f(H)$ is a high subgroup of X.

For any two groups A and B, Ext (A, B) can be defined as equivalence classes of short exact sequences $0 \to B \to X \to A \to 0$ with addition being Baer addition ([2], p. 290). For our purposes it is useful to consider Ext (A, B) in this way.

In Section 2, we will be concerned with two principal questions. If $H^1 = 0$ and D is divisible, which elements in Ext (D, H) are represented by high extensions $0 \to H \to X \to D \to 0$? What groups H with $H^1 = 0$ are the high injectives, i. e. what groups H with $H^1 = 0$ are summands of every group in which they are high? These questions are answered in Theorems 1, 2, and 3. In particular it turns out that the set Hext (D, H) of high extensions[3] forms a subgroup of Ext (D, H). This result suggests the following problem. Find a functor $\mathrm{Hext}_p(A, B)$ such that when A is divisible and $B^1 = 0$, $\mathrm{Hext}_p(A, B) = \mathrm{Hext}\,(A, B)$. Such a functor is exhibited in Section 3, and some of its properties are noted. The existence of this functor makes

* This research was supported by National Science Foundation Grants Nos. G-23454 and G-17978.

[1] This paper is dedicated to Professor L. FUCHS in appreciation of his participation in the conference on Abelian groups held at New Mexico State University in June 1962, and in acknowledgement of his many contributions to the theory of Abelian groups.

[2] All groups considered in this paper are Abelian.

[3] It is clear that any extension equivalent to a high extension is a high extension. We will abuse the language by referring to the elements of Ext (A, B) as extensions rather than equivalence classes of extensions.

possible a more general definition of high subgroups. These more general high subgroups are characterized in Theorem 4.

In Section 4, a still more general, and perhaps more natural, definition of high subgroups is given. The results in Section 4 are completely analogous to the results in Section 3 (although they do not imply the results of Section 3), and yet the concepts involved are of such a nature that they can be dualized. These dual concepts will be the subject of a subsequent paper.

In Sections 2, 3 and 4 a subgroup Shom (A, B) of Hom (A, B) plays a central role. This subgroup consists of all $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ such that $\ker f$ is an essential subgroup of A. Shom (A, B), considered as a functor of B, is left exact. Its right derived functor is related to Ext (A, B) and to high exact sequences, in the senses of both Sections 3 and 4. Section 5 is devoted to these functorial properties of Shom.

2. High extensions

A central concept in our discussion is that of an essential extension. An extension $0 \to A \to X \to B \to 0$ is *essential* if M a subgroup of X and $A \cap M = 0$ implies $M = 0$. The subgroup A is also called an *essential subgroup* of X. A homomorphism $f: X \to Y$ is an *essential homomorphism* if $\ker f$ is an essential subgroup of X.

LEMMA 1. *Let* Shom (X, Y) *be the set of essential homomorphisms in* Hom (X, Y). *Then* Shom (X, Y) *is a subgroup of* Hom (X, Y).

PROOF. Let $f, g \in \mathrm{Shom}(X, Y)$. Then $(\ker f) \cap (\ker g) \subset \ker (f-g)$. Let S be a subgroup of X. If $((\ker f) \cap (\ker g)) \cap S = 0$, then $(\ker f) \cap ((\ker g) \cap S) = 0$. Hence $S = 0$. Thus $(\ker f) \cap (\ker g)$, and hence $\ker (f-g)$, is essential in X. Thus Shom (X, Y) is a subgroup of Hom (X, Y).

It is well known [5] that if $0 \to A \to B \to C \to 0$ is pure exact, then

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B) \to \mathrm{Hom}(X, C) \to \mathrm{Pext}(X, A) \to \mathrm{Pext}(X, B) \to \mathrm{Pext}(X, C) \to 0$$

and

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, X) \to \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X) \to$$
$$\to \mathrm{Pext}(C, X) \to \mathrm{Pext}(B, X) \to \mathrm{Pext}(A, X) \to 0$$

are exact, where Pext (X, Y) is the set of pure exact sequences in Ext (X, Y). Also, any group A is a pure subgroup of an algebraically compact group C. That is, there exists a pure injective resolution $0 \to A \to C \to C/A \to 0$ for any group A ([3], p. 85). The following lemma is crucial.

LEMMA 2. *Let* $0 \to H \to B \to B/H \to 0$ *and* $0 \to H \to C \to C/H \to 0$ *be pure injective resolutions of* H. *Then* Shom $(A, B/H)$ *and* Shom $(A, C/H)$ *have the same image in* Pext (A, H).

PROOF. Since H is a pure subgroup of C and B is pure injective there is a homomorphism $g: C \to B$ which extends the map $H \to B$. This induces maps $g': C/H \to B/H$ and g'': Shom $(A, C/H) \to$ Shom $(A, B/H)$. Let $f \in \mathrm{Shom}(A, C/H)$. f maps onto the

element of $\mathrm{Pext}(A, H)$ represented by $0 \to H \to G \to A \to 0$ where $G = \{(c, a) | c \in C, a \in A, f(a) = c + H\}$. The homomorphism $g''(f) \in \mathrm{Shom}(A, B/H)$ maps onto the element represented by $0 \to H \to F \to A \to 0$ where $F = \{(b, a) | b \in B, a \in A, g''(f)(a) = b + H\}$. Since $g''(f)(a) = g'(f(a)) = g'(c + H) = g(c) + H$, we can define a homomorphism $\alpha: G \to F$ by $\alpha(c, a) = (g(c), a)$. Suppose $\alpha(c, a) = 0$. Then $a = 0$ implies $c \in H$. But $g|H$ is the identity map, so $g(c) = 0$ implies $c = 0$. Hence α is a monomorphism. Let $(b, a) \in F$. Then $f(a) = c + H \in C/H$, and $g''(f)(a) = b + H = g(c) + H$ implies $b = g(c) + h$ for some $h \in H$. Thus $g(c) + h = g(c) + g(h) = g(c + h)$ and since $f(a) = c + h + H$, then $(c + h, a) \in G$ and $\alpha(c + h, a) = (b, a)$. Therefore α is an isomorphism. It is easily checked that the sequences are equivalent, using the isomorphism α. This proves that the image of $\mathrm{Shom}(A, B/H)$ is contained in the image of $\mathrm{Shom}(A, C/H)$. By symmetry we have the desired equality.

The following theorem relates Shom to Hext.

THEOREM 1. *Let H be a group with no elements of infinite height (i. e. $H^1 = 0$), and D a divisible group. If $0 \to H \to C \to C/H \to 0$ is a pure injective resolution of H, then* $\mathrm{Shom}(D, C/H) \to \mathrm{Hext}(D, H) \to 0$ *is exact. In particular,* $\mathrm{Hext}(D, H)$ *is a subgroup of* $\mathrm{Pext}(D, H)$.

PROOF. Let $g \in \mathrm{Shom}(D, C/H)$. Then g maps onto the pure exact sequence $0 \to H \to G \to D \to 0$ where $G = \{(c, d) | c \in C, d \in D, g(d) = c + H\}$. Let $K = \{(0, d) | (0, d) \in G\}$. If $(0, d) \in K$ and n is any positive integer, there is an $x \in D$ such that $nx = d$. Now $g(x) = c + H$ with $n(c + H) = g(d) = 0$. Since H is pure in C, we can choose a representative c such that $nc = 0$. Then $(c, x) \in G$ and $n(c, x) = (0, d) \in nG$. Thus K is contained in G^1.

Clearly $H \cap K = 0$. The quotient $(H + K)/H$ is an essential subgroup of $G/H = D$ since $(H + K)/H = \ker g$. Suppose N is a subgroup of G and $N \cap (H + K) = 0$. Then $((N + H)/H) \cap ((K + H)/H) = H/H$ implies $N + H = H$, and so $N \subset H$. Therefore $N = 0$. Thus $K + H$ is essential in G and, since H is pure in G, this implies that H is maximal disjoint from K. If $H \subset L$ and $L \cap G^1 = 0$ then $L \cap K = 0$ and so $L = H$. Therefore H is maximal disjoint from G^1, and the sequence $0 \to H \to G \to D \to 0$ is high exact.

Now suppose $0 \to H \to G \to D \to 0$ is high exact. Let $0 \to G/G^1 \to B$ be a pure injective resolution of G/G^1. Then $0 \to H \xrightarrow{\alpha} B \to B/\alpha(H) \to 0$ is a pure injective resolution of H, where $\alpha: H \to G/G^1$ is the natural map. Define $f: D = G/H \to B/\alpha(H)$ by $f(g + H) = (g + G^1) + ((H + G^1)/G^1)$. Then $\ker f = (H + G^1)/H$ is an essential subgroup of D, so $f \in \mathrm{Shom}(D, B/\alpha(H))$. By what has already been proved, f maps onto a sequence $0 \to H \to X \to D \to 0$ in $\mathrm{Hext}(D, H)$, where $X = \{(b, d)/b \in B, d \in D, f(d) = b + \alpha(H)\}$. Define $\gamma: G \to X$ by $\gamma(g) = (g + G^1, g + H)$. The map γ is clearly a monomorphism. Let $(b, d) \in X$. Then $d = g + H$ and $b + \alpha(H) = f(g + H) = (g + G^1) + \alpha(H)$. Thus $b = (g + G^1) + (h + G^1) = (g + h) + G^1$ for some $h \in H$, and $\gamma(g + H) = (g + h + G^1, g + h + H) = (b, g + H)$. Thus γ is an isomorphism. It is easily checked that the diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H & \to & G & \to & D & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow & & \\ 0 & \to & H & \to & X & \to & D & \to & 0 \end{array}$$

is commutative. Thus f maps onto $0 \to H \to G \to D \to 0$, and Shom $(D, B/H)$ maps onto Hext (D, H). By Lemma 2, this is the same as the image of Shom $(D, C/H)$.

When D is torsion, Hext (D, H) has a surprisingly simple description as a subgroup of Pext (D, H). To achieve this description we need a few facts.

LEMMA 3. *If A is torsion and E is divisible then*

$$\text{Shom}\,(A, E) = \bigcap_p p\,\text{Hom}\,(A, E)$$

where p is prime.

PROOF. Let $f \in \text{Shom}\,(A, E)$, and p be a prime. If $a, b \in A$ and $pa = pb$, then $f(a-b) = 0$. Thus we can define a homomorphism $h: pA \to E$ by $h(pa) = f(a)$. Since E is divisible, h may be extended to a homomorphism $g: A \to E$. Clearly $pg = f$, so that $\text{Shom}\,(A, E) \subset \bigcap_p p\,\text{Hom}\,(A, E)$. The other inclusion is trivial since A is torsion.

Let Q denote the additive group of rational numbers and Z the additive group of integers. If $H^1 = 0$ there is a natural embedding of H as a pure subgroup of $C = \text{Ext}\,(Q/Z, H)/\text{Pext}\,(Q/Z, H)$ [5]. The group C is algebraically compact [4] and C/H is divisible [5]. Let D be a divisible group. Since $\text{Pext}\,(X, Y) = \text{Ext}\,(X, Y)^1$ ([3], p. 246), C is reduced, and the pure exact sequence $0 \to H \to C \to C/H \to 0$ yields the exact sequence.

$$0 \to \text{Hom}\,(D, C/H) \to \text{Pext}\,(D, H) \to 0.$$

Thus we have

THEOREM 2. *If $H^1 = 0$ and D is torsion divisible then*

$$\text{Hext}\,(D, H) = \bigcap_p p\,\text{Pext}\,(D, H).$$

We conclude this section with a characterization of the high injectives.

THEOREM 3. *Let $H^1 = 0$. Then H is high injective (i. e. H is a summand of every group in which it is high) if and only if* $\text{Pext}\,(Q/Z, H) = 0$.

PROOF. Suppose $H^1 = 0$ and $\text{Pext}\,(Q/Z, H) = 0$. If $0 \to H \to G \to G/H \to 0$ is high exact, then

$$0 \to \text{Hom}\,(Q/Z, G) \to \text{Hom}\,(Q/Z, G/H) \to \text{Pext}\,(Q/Z, H) = 0 \to \text{Pext}\,(Q/Z, G) \to 0$$

is exact. Write $G = R \oplus D$, with R reduced, $R \supset H$, and D divisible. Then $\text{Pext}\,(Q/Z, R) \approx \text{Pext}\,(Q/Z, G) = 0$. Since there is a natural embedding of R in $\text{Ext}\,(Q/Z, R)$ and $\text{Pext}\,(Q/Z, R) = \text{Ext}\,(Q/Z, R)^1$, it follows that $R^1 = 0$. But H was high in G. Hence $H = R$, which is a summand of G.

Suppose now that $H^1 = 0$ and $\text{Pext}\,(Q/Z, H) \neq 0$. Then $\text{Ext}\,(Q/Z, H) \neq 0 \neq \neq \text{Ext}\,(Q/Z, H)/H$. This last quotient group is torsion free divisible [5], and it has a subgroup $G/H \approx Q$ such that $G \cap \text{Pext}\,(Q/Z, H) \neq 0$. Since G is pure in $\text{Ext}\,(Q/Z, H)$, $G^1 \neq 0$, and it is easy to see that H is a high subgroup of G. However, G is reduced, and so H is not a summand of G. In other words, H is not high injective.

The above theorem gives an explicit answer to the question — which groups H with $H^1 = 0$ can be high subgroups of some reduced group G with $G^1 \neq 0$.

We remark that a group H such that $H^1=0$ is also high injective if and only if the torsion subgroup H_t of H is high injective. This follows from the exact sequence

$$0 \to \mathrm{Pext}\,(Q/Z, H_t) \to \mathrm{Pext}\,(Q/Z, H) \to \mathrm{Pext}\,(Q/Z, H/H_t) = 0.$$

A torsion group T is high injective if and only if each primary component T_p of T is closed ([3], page 114). Thus the high injectives may be described as those groups H such that $H^1=0$ and each primary component of H_t is closed. In particular, any reduced torsion free group is high injective.

3. Pure-high extensions

We will now extend the definition of high and, in particular, will exhibit a functor $\mathrm{Hext}_P(B, A)$ such that if B is divisible and $A^1=0$ then $\mathrm{Hext}_P(B, A) = \mathrm{Hext}\,(B, A)$.

If $0 \to A \to C \to C/A \to 0$ is any pure injective resolution of A, then we have from Lemma 2 that the image of $\mathrm{Shom}\,(B, C/A)$ is a well defined subgroup of $\mathrm{Pext}\,(B, A)$. This makes possible the following

DEFINITION 2. Let A and B be any groups, and let $0 \to A \to C \to C/A \to 0$ be a pure injective resolution of A. A sequence $0 \to A \to X \to B \to 0$ is a *pure-high exact sequence*, and A is a *pure-high* subgroup of X, if and only if it is in the image of the map $\mathrm{Shom}\,(B, C/A) \to \mathrm{Pext}\,(B, A)$. The image of this map is denoted by $\mathrm{Hext}_P(B, A)$.

It follows immediately that a high subgroup of a group is a pure-high subgroup of that group, and that if A is pure-high in X, $A^1=0$, and X/A is divisible, then A is a high subgroup of X. Furthermore, if B is divisible and $A^1=0$, then $\mathrm{Hext}_P(B, A) = \mathrm{Hext}\,(B, A)$.

The elements of $\mathrm{Hext}_P(B, A)$, that is, the pure-high sequences, can be described in a manner analogous to the definition of high sequences. This description gives considerably more insight into the concept of pure-high, and is contained in

THEOREM 4. *The exact sequence $0 \to A \to G \to B \to 0$ is a pure-high extension if and only if there exists a subgroup K of G such that A is maximal disjoint from K and $(A+K)/K$ is pure in G/K.*

PROOF. Suppose $0 \to A \to G \to B \to 0$ is a pure-high extension of A by B. Let $0 \to A \to C \to C/A \to 0$ be a pure injective resolution of A. Then there is a g in $\mathrm{Shom}\,(B, C/A)$ with $G \cong \{(c, b) | c \in C, b \in B, g(b) = c + A\}$. Let K be the subgroup of G corresponding to $K' = \{(0, k) | k \in B, g(k) = 0\}$. From the proof of Theorem 1, A is maximal disjoint from K. Let $a + K \in ((A+K)/K) \cap n(G/K)$. Then $a + K = nx + K$ and there is a corresponding equation $(a, 0) + K' = n(c, b) + K'$, so that $(a, 0) = n(c, b) + (0, k)$ for some $k \in B$ with $g(k) = 0$. Now $a = nc$ and, since A is pure in C, $a = na'$ for some $a' \in A$. Thus $a + K = n(a' + K) \in n((A+K)/K)$, and $(A+K)/K$ is pure in G/K.

Substituting „K" for „G^1" the proof of the converse is the same as in Theorem 1.

It is immediate from Theorem 4 that A is a pure-high subgroup of G if and only if there is a subgroup K of G such that $A \cap K = 0$, $A + K$ is essential in G and

$(A+K)/K$ is pure in G/K. We say that A is *pure-high with respect to* K if these conditions hold. Some additional properties of pure-high subgroups are recorded in

THEOREM 5. *Let A and K be subgroups of G. The following hold.*

(a) *If A is maximal disjoint from K then $(A+K)/K$ is pure in G/K (and hence A is pure-high with respect to K) if and only if $K\cap(A+nG) = K\cap nG$ for all n.*

(b) *If $K\subset G^1$, and A is maximal disjoint from K, then A is pure-high with respect to K, and in particular A is pure in G.*

(c) *If A is maximal disjoint from K and G/A is divisible, then A is pure-high with respect to K if and only if $K\subset G^1$.*

(d) *If A is pure-high with respect to K then, in G_t, A_t is pure-high with respect to K_t.*

(e) *If A_α is pure-high with respect to K_α in G_α, then ΣA_α is pure-high with respect to ΣK_α in ΣG_α.*

(f) *If A is pure-high in G and $A\subset K\subset G$, then A is pure-high in K.*

(g) *If A is pure-high in G and $K\subset A$, then A/K is pure-high in G/K.*

(h) *If A is pure-high in K and K is pure-high in G, then A is pure-high in G.*

(i) *If K is pure-high in G and A/K is pure-high in G/K, then A is pure-high in G.*

PROOF. (a) Let A be maximal disjoint from K and assume $K\cap(A+nG) = K\cap nG$ for all integers n. Suppose A is not pure in G, and let n be the smallest positive integer such that $A\cap nG\neq nA$. Let $nx\in A\setminus nA$, and write $n=pr$, p a prime. Since A is maximal disjoint from some subgroup of G, A is neat in G, and there is an $a\in A$ such that $nx=prx=pa$. By the choice of n, $rx\notin A$ and hence $rx-a\notin A$. Thus there is a $b\in A$ and an integer m such that $(m,p)=1$ and $0\neq m(rx-a)+b\in K$. Let s and t be integers such that $sm+tp=1$. Then $sm(rx-a) = rx-a$, and $s(m(rx-a)+b) = rx-a+sb\in K\cap(A+rG)=K\cap rG$. Now $rx-a+sb = ry$ for some $y\in G$, and $ny = nx+p(sb-a)\in K\cap A = 0$. Since $r<n$, $sb-a = r(y-x)\in \in A\cap rG = rA$, so $sb-a = rc$ for some $c\in A$ and $nx = -nc\in A$. This contradiction proves that A is pure in G.

Let $a+K\in((A+K)/K)\cap n(G/K)$. Then $a = ng+k$ with $g\in G$, $k\in K$, and $k\in K\cap(A+nG) = K\cap nG$, so that $a\in A\cap nG=nA$, and $a+K\in(nA+K)/K = = n((A+K)/K)$. Therefore A is pure-high with respect to K.

The converse is straightforward, and (b) and (c) are immediate corollaries of (a). We remark that (b) gives a generalization of the fact that high subgroups are pure.

(e) Let A_i be pure-high with respect to K_i in G_i, $i=1,2$, and let $A=A_1\oplus A_2$, $K=K_1\oplus K_2$, $G=G_1\oplus G_2$. Clearly $(A+K)/K$ is pure in G/K. Suppose A is not maximal disjoint from K in G. Let B be a subgroup of G, containing A, which is maximal disjoint from K, and let B_i be the projection of B into G_i, $i=1,2$. Now $A_i\subset B\cap G_i\subset B_i$, and since $(B\cap G_i)\cap K_i\subset B\cap K = 0$, then $B\cap G_i = A_i$. If $B_1=A_1$, then $B_2\subset B$ so that $B_2=B\cap G_2=A_2$ and $B=A_1\oplus A_2$. Thus $B_1\neq A_1$ and $B_1\cap K_1\neq 0$. Let $b_1\in B_1\cap K_1$, $b_1\neq 0$. There is a $b_2\in B_2$ such that $b_1+b_2\in B$, and clearly $b_2\notin A_2$. For some $a_2\notin A_2$ and some integer n, $nb_2+a_2 = k_2\in K_2$, $k_2\neq 0$. Now $n(b_1+b_2)+ +a_2 = nb_1+k_2\in(K_1\oplus K_2)\cap B$ and $nb_1+k_2\neq 0$. This contradiction proves that A is maximal disjoint from K in G, and therefore A is pure-high in G. The general case now follows easily.

(h) Suppose A is pure-high with respect to B in K and K is pure-high with respect to L in G. Let H be a subgroup of G containing A, and suppose $H \cap (B+L) = 0$. If $H \not\subset K$ then $(H+K) \cap L \neq 0$, and $h+k = x \neq 0$ with $h \in H$, $k \in K$ and $x \in L$. Since $H \cap L = 0$ and $A \subset H$, then $k \notin A$. Thus $nk+a = b \in B$ with $a \in A$, $b \neq 0$, and $b-nx = a-nh \in (B+L) \cap H = 0$ implies $b = nx \in B \cap L = 0$. Therefore $H \subset K$, and $A \subset H$, $H \cap B = 0$ implies $H = A$. Thus A is maximal disjoint from $B+L$.

Let $a+(B+L) \in \big((A+B+L)/(B+L)\big) \cap n\big(G/(B+L)\big)$. If $a+(B+L) = ng+(B+L)$ then for some $b \in B$, $a-b+L = ng+L \in (K/L) \cap n(G/L) = n(K/L)$. Thus $a-b+L = nk+L$, $k \in K$, and since $L \cap K = 0$, $a-b = nk$. Now $a+B = nk+B \in \big((A+B)/B\big) \cap n(K/B) = n\big((A+B)/B\big)$ so that $a \in nA$ and $a+(B+L) \in n\big((A+B+L)/(B+L)\big)$. Therefore A is pure-high (with respect to $B+L$) in G.

(i) Suppose K is pure-high with respect to N in G and A/K is pure-high with respect to M/K in G/K. Let $L = N \cap M$. Then $A \cap L = (A \cap M) \cap N = K \cap N = 0$. Suppose $A \subset B$ with $B \cap L = 0$. Then $K \subset B \cap M$ and $(B \cap M) \cap N = 0$ implies $B \cap M = K$, so that $A/K \subset B/K$ and $(B/K) \cap (M/K) = K/K$ implies $B = A$. Thus A is maximal disjoint from L.

Let $a+L \in \big((A+L)/L\big) \cap n(G/L)$, $a = ng+y$, $g \in G$, $y \in L$. Now, since A/K is pure-high in G/K, $a+M = ng+M$ implies $a = na_1+k$, with $k \in M \cap A = K$, and $k-y = n(g-a_1)$ so that $k+L = n(g-a_1)+L = n(k_1+L) \in n\big((K+L)/L\big)$ and $k = nk_1$. Thus $a = n(a_1+k_1) \in nA$, and $a+L \in n\big((A+L)/L\big)$. Therefore A is pure-high (with respect to L) in G.

Proofs of (d), (f) and (g) are similar and are omitted.

Properties (f), (g), (h), (i) are particularly important since, together with the results in [1], they yield most of

THEOREM 6. *Let* $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ *be pure-high exact. Then for any group* G,

$$0 \to \mathrm{Hom}(G, A) \to \mathrm{Hom}(G, B) \to \mathrm{Hom}(G, C) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}_P(G, A) \to \mathrm{Ext}_P(G, B) \to \mathrm{Ext}_P(G, C) \to 0$$

and

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}_P(C, G) \to \mathrm{Ext}_P(B, G) \to \mathrm{Ext}_P(C, G) \to 0$$

are exact.

PROOF. Exactness of the sequences above, with the zeros at the end deleted, is established in [1], using (f), (g), (h) and (i) of Theorem 5.

Let $0 \to A \xrightarrow{f} E_1 \to D_1 \to 0$ and $0 \to C \xrightarrow{g} E_2 \to D_2 \to 0$ be pure injective resolutions of A and C respectively, with D_1 divisible. Since A is pure in B there exists a map $B \xrightarrow{h} E_1$ with $hi = f$. Let $k: B \to E_1 \oplus E_2$ be defined by $k(b) = \big(h(b), gj(b)\big)$. The map k is clearly a monomorphism. Let $F = (E_1 \oplus E_2)/k(B)$. It is easil checked that there exist maps $D_1 \to F \to D_2$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow{f} & E_1 & \longrightarrow & D_1 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & B & \xrightarrow{k} & E_1 \oplus E_2 & \to & F & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C & \xrightarrow{g} & E_2 & \longrightarrow & D_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

is commutative with exact rows and columns. One may also check that $k(B)$ is a pure subgroup of $E_1 \oplus E_2$, so that diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Shom}(G, F) & \to & \mathrm{Shom}(G, D_2) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{Hext}_P(G, B) & \to & \mathrm{Hext}_P(G, C) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & \end{array}$$

is commutative with exact columns. Since D_1 is divisible the exact sequence $0 \to D_1 \to F \to D_2 \to 0$ is split exact, so that the top row of the diagram above is exact. Now a simple diagram chase yields the exactness of $\mathrm{Hext}_P(G, B) \to \to \mathrm{Hext}_P(G, C) \to 0$.

To prove exatcness of $\mathrm{Hext}_P(B, G) \to \mathrm{Hext}_P(A, G) \to 0$, let $0 \to G \to E \to E/G \to 0$ be a pure injective resolution of G, with E/G divisible. This yields a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Shom}(B, E/G) & \to & \mathrm{Shom}(A, E/G) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{Hext}_P(B, G) & \longrightarrow & \mathrm{Hext}_P(A, G) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & \end{array}$$

with exact columns. We will prove the top row is exact, then a simple diagram chase yields the desired result. Let $f \in \mathrm{Shom}\,(A, E/G)$. There is a subgroup K of B with A max disjoint from K in B. The natural map $A \xrightarrow{\alpha} B/K$ is a monomorphism, and the induced exact sequence $\mathrm{Hom}\,(B/K, E/G) \to \mathrm{Hom}\,(A, E/G) \to \to \mathrm{Ext}\,(B/(A \oplus K), E/G) = 0$ yields a map $g: B/K \to E/G$ with $g\alpha = f$. Let $\beta: B \to B/K$ be the natural map and $h = g\beta$. Then $hi = g\beta i = g\alpha = f$. Since $A \oplus K$ is essential in B and $\ker f$ is essential in A, it follows that $\ker f \oplus K$ is essential in B. Then the observation that $\ker h \supset \ker f \oplus K$ shows that $h \in \mathrm{Shom}\,(B, E/G)$, proving that $\mathrm{Shom}(B, E/G) \to \mathrm{Shom}(A, E/G) \to 0$ is exact.

Theorem 2 generalizes to

THEOREM 7. *If A is torsion, then* $\mathrm{Hext}_P(A, H) = \bigcap_p p\,\mathrm{Pext}\,(A, H)$.

PROOF. Let $0 \to H \xrightarrow{f} D$ be a divisible resolution of H, and $H \xrightarrow{g} \mathrm{Ext}\,(Q/Z, H)/ /\mathrm{Pext}\,(Q/Z, H)$ the composition of the maps $H \cong \mathrm{Hom}\,(Z, H) \to \mathrm{Ext}\,(Q/Z, H) \to \to \mathrm{Ext}\,(Q/Z, H)/\mathrm{Pext}\,(Q/Z, H)$. Then $0 \to H \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}\big((Q/Z, H)/\mathrm{Pext}\,(Q/Z, H)\big) \oplus D = = C$, where $\alpha(h) = \big(g(h), f(h)\big)$, is a pure injective resolution of H. It is easily checked that C/H is divisible. Now from Lemma 3, $\mathrm{Shom}\,(A, C/H) = \bigcap_p p\,\mathrm{Hom}\,(A, C/H)$. This fact, together with the exactness of $\mathrm{Shom}\,(A, C/H) \to \mathrm{Hext}_P(A, H) \to 0$, yields the desired result.

Finally, we give a direct proof of

THEOREM 8. $\mathrm{Hext}_P(X, Y)$ *is an additive bi-functor.*

PROOF. Let $f: A \to B$ be a homomorphism. Given a group G, f induces a homomorphism $\mathrm{Ext}\,(G, A) \to \mathrm{Ext}\,(G, B)$. Let g be the restriction of f to $\mathrm{Hext}_P(G, A)$.

Let $0\to A\to X\to G\to 0\in \mathrm{Hext}_P(G, A)$. This sequence maps onto the extension $0\to B\to Y\to G\to 0$ where $Y=(B\oplus X)/M$ with $M=\{(f(a), -a)|a\in A\}$. There exists a subgroup H of X such that A is maximal disjoint from A and $(A+H)/H$ is pure in X/H. Let $K=\{(0, h)+M|h\in H\}$. The image of B in Y is $B_1=(B\oplus A)/M$. Clearly $B_1\cap K=0$. Suppose $B_1\subset C\subset Y$ and $C\neq B_1$. Let $L=\{x\in X|(b, x)+M\in C$ for some $b\in B\}$. Then $A\subset L$, $A\neq L$ so $L\cap H\neq 0$. Let $h\in L\cap H$ with $h\neq 0$. For some $b\in B$, $(b, h)+M\in C$ and, since $(b, 0)+M\in C$, $(0, h)+M\in C$ and hence $0\neq(0, h)+$ $+M\in C\cap K$. Thus B_1 is maximal disjoint from K.

Let $((b, 0)+M)+K\in((B_1+K)/K)\cap n(Y/K)$, then $(b, 0)+M=$ $=n((b_1, x)+M)=((0, h)+M)$ with $b_1\in B$, $x\in X$, $h\in H$ and, for some $a\in A$, $(b, 0)=n(b_1, x)+(0, h)+(f(a), -a)$. Now since A is pure-high in X with respect to H, $a=nx+h$ implies $a\in nA$ so that $b=nb_1+f(a)\in nB$. Therefore $((b, 0)+M)+$ $+K\in n((B_1+K)/K)$, and B_1 is pure-high with respect to K in Y. This proves that $g:\mathrm{Hext}_P(G, A)\to\mathrm{Hext}_P(G, B)$.

The homomorphism $f:A\to B$ also induces a map $\mathrm{Ext}(B, G)\to\mathrm{Ext}(A, G)$. Let h be the restriction of this map to $\mathrm{Hext}_P(B, G)$. Let $0\to G\to X\xrightarrow{\alpha} B\to 0\in\mathrm{Hext}_P(B, G)$. This sequence maps onto the extension $0\to G\to Y\to A\to 0$ where $Y=\{(x, a)|x\in X$, $a\in A, f(a)=\alpha(x)\}$. Let H be a subgroup of X such that G is pure-high with respect to H and let $K=\{(x, a)|(x, a)\in Y, x\in H\}$. It is easily shown that G is pure-high with respect to K in Y. Thus $h:\mathrm{Hext}_P(B, G)\to\mathrm{Hext}_P(A, G)$.

It follows from this and properties inherited from $\mathrm{Ext}(X, Y)$ that $\mathrm{Hext}_P(X, Y)$ is an additive bi-functor.

4. Neat-high extensions

This section is devoted to extending further the concept of high extensions. It seems that the results of this section are more readily extendable to modules, although there are some difficulties involved. Most of the proofs here will be merely indicated, since they parallel the proofs of the previous section.

DEFINITION 3. An extension $0\to A\to G\to B\to 0$ is a *neat extension* if and only if $A\subset K$, K an essential subgroup of G, implies K/A is essential in G/A. Also, A is called a *neat subgroup* of G.

This definition is equivalent to the usual definition of neatness ([3], p. 91). In fact, if A is a subgroup of G, the following statements can readily be shown to be equivalent.

(a) A is a neat subgroup of G.

(b) A is maximal disjoint from some subgroup K of G.

(c) If K is a subgroup of G maximal disjoint from A, then A is maximal disjoint from K.

(d) $A\cap pG=pA$ for all primes p.

A group E is called *neat injective* if every neat exact sequence $0\to E\to G\to H\to 0$ splits, or equivalently $0\to\mathrm{Hom}(C, E)\to\mathrm{Hom}(B, E)\to\mathrm{Hom}(A, E)\to 0$ is exact whenever $0\to A\to B\to C\to 0$ is neat exact.

The following two lemmas are fairly well known, but no proofs seem to be in the literature.

LEMMA 4. *A group E is neat injective if and only if $E=D\oplus \prod_p T_p$, where D is divisible, $pT_p=0$, and p ranges over all primes.*

PROOF. Suppose E is neat injective. Let $E=D\oplus R$, where D is divisible and R is reduced. Let T_p be the p-component of R_t. If the reduced p-group T_p has an element of order p^2, then it has a cyclic summand $C(p^n)$ of order p^n, $n>1$ (e. g. a cyclic summand of a basic subgroup of T_p). Let A and B be cyclic groups generated by a and b with orders p^{n+1} and p, respectively. Then the subgroup of $A\oplus B$ generated by $pa+b$ is isomorphic to $C(p^n)$, and is neat but not pure in $A\oplus B$. Now $R=C(p^n)\oplus S$ since $C(p^n)$ is pure and of bounded order in R. We have the obvious neat exact sequence $0\to E\to D\oplus A\oplus B\oplus S$ which does not split. Hence every element in T_p has order p.

Suppose $R=X\oplus Y$, X torsion free. Let $0\to X\xrightarrow{f} D_1$ be exact with D_1 divisible. Then the sequence $0\to X\xrightarrow{g} D_1\oplus \prod_p (X/pX)$, where $g(x)=(f(x),\{x+pX\})$, is neat exact and must split. However, X is torsion free reduced, and $D_1\oplus \prod_p (X/pX)$ has no non-zero torsion free reduced summands. It follows that $X=0$.

Clearly R is cotorsion [5] since any extension by a torsion free group is neat. By what we have just shown, R is adjusted so that $R\cong \mathrm{Ext}(Q/Z, R_t)$. But $R_t=\sum_p T_p$ with $pT_p=0$, and $\mathrm{Ext}(Q/Z, \sum_p T_p)\cong \prod_p \mathrm{Ext}(Z(p^\infty), T_p)\cong \prod_p T_p$. Thus E has the desired form.

Now suppose $E=D\oplus \prod_p T_p$, $pT_p=0$. Each T_p is neat injective, since whenever T_p is a neat subgroup it is a pure subgroup. Being of bounded order, it is then a summand of every group in which it is neat. Products of neat injectives are easily seen to be neat injective. It follows that E is neat injective.

LEMMA 5. *There are enough neat injectives. That is, every group is a neat subgroup of a neat injective.*

PROOF. For a group X, let $0\to X\xrightarrow{f} D$ be exact with D divisible. Then $0\to X\xrightarrow{g} D\oplus \prod_p (X/pX)$ with $g(x)=(f(x),\{x+pX\}_p)$ is neat exact, and $D\oplus \prod_p (X/pX)$ is neat injective by the previous lemma.

Lemma 2 holds for neat injective resolutions, the proof being completely analogous. If $0\to A\to E\to E/A\to 0$ is a neat injective resolution of A, we then define a sequence $0\to A\to X\to B\to 0$ to be a *neat-high* extension, if and only if it is in the image of the map $\mathrm{Shom}(B, E/A)\to \mathrm{Ext}(B, A)$. This image is denoted $\mathrm{Hext}_N(B, A)$.

The proofs of the following theorems are completely analogous to the proofs of the corresponding theorems in Section 3, and hence are omitted.

THEOREM 9. *The exact sequence $0\to A\to G\to B\to 0$ is a neat-high extension if and only if there exists a subgroup K of G such that A is maximal disjoint from K and $(A+K)/K$ is neat in G/K.*

THEOREM 10. *Let A and K be subgroups of G. The following hold.*

(a) *If A is maximal disjoint from K then $(A+K)/K$ is neat in G/K (and hence A is neat-high with respect to K), if and only if $K\cap(A+pG)=K\cap pG$ for all primes p.*

(b) *If $K \subset pG$ for all primes p and A is maximal disjoint from K then A is neat-high with respect to K.*

(c) *If A is maximal disjoint from K and G/A is divisible, then A is neat-high with respect to K if and only if $K \subset pG$ for all primes p.*

(d) *If A is neat-high with respect to K then, in G_t, A_t is neat-high with respect to K_t.*

(e) *If A_α is neat-high with respect to K_α in G_α, then ΣA_α is neat-high with respect to ΣK_α in ΣG_α.*

(f) *If A is neat-high in G and $A \subset K \subset G$, then A is neat-high in K.*

(g) *If A is neat-high in G and $K \subset A$, then A/K is neat-high in G/K.*

(h) *If A is neat-high in K and K is neat-high in G, then A is neat-high in G.*

(i) *If K is neat-high in G, and A/K is neat-high in G/K, then A is neat-high in G.*

THEOREM 11. *Let $0 \to A \to B \to C \to 0$ be neat-high exact. Then for any group G,*

$$0 \to \mathrm{Hom}(G, A) \to \mathrm{Hom}(G, B) \to \mathrm{Hom}(G, C) \to$$
$$\to \mathrm{Hext}_N(G, A) \to \mathrm{Hext}_N(G, B) \to \mathrm{Hext}_N(G, C) \to 0$$

and

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G) \to$$
$$\to \mathrm{Hext}_N(C, G) \to \mathrm{Hext}_N(B, G) \to \mathrm{Hext}_N(A, G) \to 0$$

are exact.

THEOREM 12. *$\mathrm{Hext}_N(X, Y)$ is an additive bi-functor.*

5. Some properties of Shom

The subgroup Shom (A, B) of Hom (A, B) has played a fundamental role in our discussion of high extensions. In this final section, we note some additional functorial properties of Shom.

By routine arguments, it can be shown that Shom (A, B) is an additive functor, and considered as a functor of B is left exact. It is not left exact as a functor of A. For this reason, from now on Shom (A, B) will be considered as a functor of the single variable B. Let Sext (A, B) be the right derived functor of Shom (A, B), and let Next (A, B) be the set of neat extensions in Ext (A, B).

THEOREM 13. *Let $0 \to B \to D \to D/B \to 0$ be an injective resolution of B. Then there exists a natural homomorphism h such that the diagram*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Shom}(A, D/B) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Next}(A, B) & \to & 0 \\ \uparrow i & & \uparrow h & & \\ \mathrm{Shom}(A, D/B) & \xrightarrow{g} & \mathrm{Sext}(A, B) & \to & 0 \end{array}$$

is commutative with exact rows, where f is the restriction of the map from Hom $(A, D/B)$ *into* Ext (A, B), *and g is the usual connecting homomorphism.*

PROOF. First we show that the top row is exact. Let $\alpha \in \mathrm{Shom}(A, D/B)$. Then $f(\alpha)$ is the sequence $0 \to B \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\gamma} A \to 0$ where $X = \{(d, a) | d + B = \alpha(a)\}$, $\beta(b) = (b, o)$, and $\gamma(d, a) = a$. (We are considering, of course, that B is actually a subgroup of D.) It is easy to show that $\beta(B)$ is maximal disjoint from the subgroup

$\{(0, a)|a \in \ker \alpha\}$ of X, and hence that the sequence is a neat extension. Thus $\operatorname{im} f \subset \operatorname{Next}(A, B)$. By an argument entirely analogous to the one in the proof of Lemma 2, $\operatorname{im} f$ is independent of the particular injective resolution of B taken. Now suppose $0 \to B \to X \to A \to 0$ is neat exact. Then B is maximal disjoint from a subgroup K of X. Let $0 \to X \to E \to E/X \to 0$ be an injective resolution of X. Then we have injective resolutions $0 \to X/K \to E/K \to E/X \to 0$ and $0 \to (B+K)/K \to E/K \to E/(B+K) \to 0$. Also, $A \cong X/B$, and we have maps $A \to X/B^{\delta} \to X/(B+K) \to E/(B+K)$, the composition of which gives a map $\alpha: A \to E/(B+K)$. This map α is in $\operatorname{Shom}(A, E/(B+K))$ since B neat in X gives $(B+K)/B$ essential in X/B, $\ker \delta$ essential in X/B, and hence $\ker \alpha$ essential in A. By an argument entirely analogous to one used in the proof of Theorem 1, it follows that the image of α in $\operatorname{Ext}(A, B)$ is our neat sequence $0 \to B \to X \to A \to 0$. Thus $\operatorname{Shom}(A, D/B) \to \operatorname{Next}(A, B) \to 0$ is exact.

The observation that $\ker g \subset \ker f$ yields a map $h: \operatorname{Sext}(A, B) \to \operatorname{Next}(A, B)$ with the desired properties.

An immediate corollary is, of course, that $\operatorname{Next}(A, B)$ is a subgroup of $\operatorname{Ext}(A, B)$, and that h is an epimorphism.

Let $\operatorname{Sext}_N(A, B)$ be the neat right derived functor of $\operatorname{Shom}(A, B)$. That is, if $0 \to B \to E \to E/B \to 0$ is a neat injective resolution of B, then $\operatorname{Sext}_N(A, B) \cong \operatorname{coker} k$ in the sequence $\operatorname{Shom}(A, E) \xrightarrow{k} \operatorname{Shom}(A, E/B)$. Analogous to Theorem 13, we have the diagram

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Shom}(A, E/B) & \xrightarrow{f} & \operatorname{Hext}_N(A, B) & \to & 0 \\ \uparrow i & & \uparrow h & & \\ \operatorname{Shom}(A, E/B) & \xrightarrow{g} & \operatorname{Sext}_N(A, B) & \to & 0 \end{array}$$

which is commutative and has exact rows. From the definitions of Hext_N and Sext_N, the rows are exact. Again h is obtained by observing that $\ker g \subset f$. The analogous remarks hold for $\operatorname{Sext}_P(A, B)$, the pure right derived functor of $\operatorname{Shom}(A, B)$.

NEW MEXICO STATE UNIVERSITY
AND THE UNIVERSITY OF PENNSYLVANIA

(Received 31 July 1962)

References

[1] D. A. BUCHSBAUM, A note on homology in categories, *Ann. of Math.*, **69** (1959), pp. 66–74.
[2] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological Algebra* (Princeton, 1956).
[3] L. FUCHS, *Abelian Groups* (Budapest, 1958).
[4] L. FUCHS, Notes on Abelian groups. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), pp. 117–125.
[5] D. K. HARRISON, Infinite Abelian groups and homological methods, *Ann. of Math.*, **69** (1959), pp. 366–391.
[6] J. M. IRWIN, High subgroups of Abelian torsion groups, *Pac. J. of Math.*, **11** (1961), pp. 1375–1384.
[7] J. M. IRWIN and E. A. WALKER, On N-high subgroups of Abelian groups, *Pac. J. of Math.*, **11** (1961), pp. 1363–1374.
[8] J. M. IRWIN and E. A. WALKER, On isotype subgroups of Abelian groups, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), pp. 451–460.
[9] J. M. IRWIN, C. PEERCY, and E. A. WALKER, Splitting properties of high subgroups, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), pp. 1–10.
[10] S. KHABBAZ, On a theorem of Charles and Erdélyi, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), pp. 103–104.

ON GENERALISED LAPLACE TRANSFORM OF TWO VARIABLES

By

H. N. NIGAM (Lucknow, India)

(*Presented by* B. Sz.-Nagy)

1. Meijer (see [9]) introduced the transform

$$\Phi(p)=p\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px}W_{k+\frac{1}{2},m}(px)\cdot(px)^{-k-\frac{1}{2}}f(x)\,dx, \tag{1.1}$$

where $W_{k,m}(z)$ is the Whittaker function. (1. 1) is symbolically denoted by

$$\Phi(p) = M\,[f(x); k+\tfrac{1}{2}, m]\,.$$

Mainra [5] introduced the integral transformation.

$$\Phi(p)=p\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px}W_{k+\frac{1}{2},m}(px)\cdot(px)^{-\lambda-\frac{1}{2}}f(x)\,dx \qquad (R(p)>0), \tag{1.2}$$

provided the integral on the right hand side exists. Here we shall call $\Phi(p)$, the image of $f(x)$, and $f(x)$ the original of $\Phi(p)$. We shall denote this integral equation (1. 2) by

$$\Phi(p)=M\left[f(x); k, m; \lambda\right]. \tag{1.3}$$

(1. 2) reduces to the Meijer transform (1. 1) if we take

$$\lambda=k$$

and to the generalisation due to Varma (see [11] and [12]) if we assume

$$\lambda = -m.$$

Now a function of two variables x and y, $f(x, y)$, will be replaced by a function of two variables corresponding to p and q, $\Phi(p, q)$, by the double integral relation

$$\begin{aligned}\Phi(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px}e^{-\frac{1}{2}qy}W_{k+\frac{1}{2},m}(px)\,W_{k_1+\frac{1}{2},m_1}(qy)\cdot\\ \cdot(px)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(qy)^{-\lambda_1-\frac{1}{2}}f(x, y)\,dx\,dy,\end{aligned} \tag{1.4}$$

which we shall denote symbolically by

$$\Phi(p, q)=M\left[f(x, y);\ k, m;\ k_1, m_1;\ \lambda, \lambda_1\right]. \tag{1.5}$$

When $\lambda = k = \pm m$ and $\lambda_1 = k_1 = \pm m_1$, due to the identity

$$e^{-\frac{1}{2}px}\equiv(px)^{-m-\frac{1}{2}}W_{m+\frac{1}{2},m}(px),$$

(1. 4) reduces to

$$\Phi(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px} \cdot e^{-qy} f(x, y)\, dx\, dy$$

which is symbolically denoted as

$$\Phi(p, q) = L[f(x, y)]$$

and is the well known LAPLACE transform of two variables.

The object of this paper is to prove the uniqueness theorem and some other theorems for two variables on parallel lines to that for one variable.

2. We now prove the following lemma:

LEMMA. *If*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px - \frac{1}{2}qy} W_{k_1, m_1}(px) \cdot W_{k_2, m_2}(qy) \cdot x^\mu y^\nu F(x, y)\, dx\, dy = 0, \tag{2. 1}$$

where $R(p, q) > 0$, *then*

$$F(x, y) \equiv 0, \tag{2. 2}$$

provided that

(i) $F(x, y)$ *be a continuous function of both variables in* $x \geqq 0$, $y \geqq 0$,

(ii) $F(x, y) = O(x^\delta y^{\delta_1})$, *for small* x *and* y, *and*

$$R\left(\mu + \delta + \frac{3}{2} \pm m_1\right) > 0, \quad R\left(\nu + \delta_1 + \frac{3}{2} \pm m_2\right) > 0, \text{ and}$$

(iii) $R(k_1 - m_1) > \frac{1}{2}$, $R(k_2 - m_2) > \frac{1}{2}$.

PROOF. Multiplying (2. 1) by $p^{m_1 - \frac{1}{2}} q^{m_2 - \frac{1}{2}} (p - z_1)^{k_1 - m_1 - \frac{3}{2}} (q - z_2)^{k_2 - m_2 - \frac{3}{2}}$ and integrating with respect to p and q between the limits (z_1, ∞) and (z_2, ∞) respectively, $z_1, z_2 > 0$. Then we have,

$$\int_{z_1}^\infty \int_{z_2}^\infty p^{m_1 - \frac{1}{2}} q^{m_2 - \frac{1}{2}} (p - z_1)^{k_1 - m_1 - \frac{3}{2}} (q - z_2)^{k_2 - m_2 - \frac{3}{2}}\, dp\, dq \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px - \frac{1}{2}qy} W_{k_1, m_1}(px)\, W_{k_2, m_2}(qy)\, x^\mu y^\nu F(x, y)\, dx\, dy = 0$$

or,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^\mu y^\nu F(x, y)\, dx\, dy \int_{z_1}^\infty \int_{z_2}^\infty e^{-\frac{1}{2}px} W_{k_1, m_1}(px) \cdot p^{m_1 - \frac{1}{2}} (p - z_1)^{k_1 - m_1 - \frac{3}{2}} \cdot \tag{2. 3}$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2}qy} W_{k_2, m_2}(qy) \cdot q^{m_2 - \frac{1}{2}} (q - z_2)^{k_2 - m_2 - \frac{3}{2}}\, dp\, dq = 0,$$

the change in the order of integrations being justified by absolute convergence of the integrals under the conditions imposed above.

Now evaluating the q-integral with the help of Meijer's result (see[9]),

$$z^{\lambda}e^{-\frac{1}{2}z}W_{k,m}(z)=\frac{z^{2\lambda}}{\Gamma(2\lambda)}\int_{1}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}zu}W_{k+\lambda,m+\lambda}(zu)\cdot(u-1)^{2\lambda-1}u^{-\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)}du$$

$$\left(R(\lambda)>0,\ |\arg z|<\frac{\pi}{2};\ z\neq 0\right).$$

We have

$$\Gamma\left(k_2-m_2-\frac{1}{2}\right)z_2^{k_2+m_2-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}x^{\mu}y^{\nu+m_2+\frac{1}{2}}e^{-z_2y}F_2(x,y)\,dx\,dy\cdot$$

$$\cdot\int_{z_1}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}px}W_{k_1,m_1}(px)\cdot p^{m_1-\frac{1}{2}}(p-z_1)^{k_1-m_1-\frac{3}{2}}dp=0.$$

Again on evaluating the p-integral, we have

$$\Gamma\left(k_1-m_1-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k_2-m_2-\frac{1}{2}\right)z_1^{k_1+m_1-\frac{1}{2}}z_2^{k_2+m_2-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-z_1x}x^{\mu+m_1+\frac{1}{2}}e^{-z_2y}y^{\nu+m_2+\frac{1}{2}}F_1(x,y)\,dx\,dy=0$$

where,

$$F_1(x,y)=\left\{1+O\left(\frac{1}{z_1x}\right)\right\}F_2(x,y)=\left\{1+O\left(\frac{1}{z_1x}\right)\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{z_2y}\right)\right\}F(x,y),$$

and

$R(k_1-m_1-\frac{1}{2})$, $R(k_2-m_2-\frac{1}{2})$ and z_1, z_2, being positive,

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-z_1x}x^{\mu+m_1+\frac{1}{2}}e^{-z_2y}y^{\nu+m_2+\frac{1}{2}}F_1(x,y)\,dx\,dy=0. \tag{2.4}$$

Now, let

$$\int_0^{\infty}e^{-z_1x}x^{\mu+m_1+\frac{1}{2}}F_1(x,y)\,dx=\Phi(y), \tag{2.5}$$

since the integral converges uniformly in $y\geqq 0$, $\Phi(y)$ is a continuous function of y. Therefore, we have

$$\int_0^{\infty}e^{-z_2y}y^{\nu+m_2+\frac{1}{2}}\Phi(y)\,dy=0. \tag{2.6}$$

Hence by Lerch's theorem (see [7])

$$\Phi(y)\equiv 0.$$

Therefore,

$$\int_0^{\infty}e^{-z_1x}x^{\mu+m_1+\frac{1}{2}}F_1(x,y)\,dx=0. \tag{2.7}$$

Since $F_1(x, y)$ is a continuous function of x and y, therefore, again applying Lerch's theorem, we get

$$F_1(x, y) \equiv 0$$

or,

$$\left\{1+O\left(\frac{1}{z_1 x}\right)\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{z_2 y}\right)\right\}F(x, y) \equiv 0.$$

Hence

$$F(x, y) \equiv 0.$$

THEOREM 1. *Let $f_1(x, y)$ and $f_2(x, y)$ be continuous functions of both variables in $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, and*

$$\Phi(p, q) = M\left[f_1(x, y);\ k_1, m_1;\ k_2, m_2;\ \lambda_1, \lambda_2\right], \tag{2. 8}$$

and also

$$\Phi(p, q) = M\left[f_2(x, y);\ k_1, m_1;\ k_2, m_2;\ \lambda_1, \lambda_2\right], \tag{2. 9}$$

then

$$f_1(x, y) \equiv f_2(x, y).$$

PROOF. From (2. 8)

$$\Phi(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px-\frac{1}{2}qy} W_{k_1+\frac{1}{2}, m_1}(px)\, W_{k_2+\frac{1}{2}, m_2}(qy) \cdot$$

$$\cdot (px)^{-\lambda_1-\frac{1}{2}} (qy)^{-\lambda_2-\frac{1}{2}} f_1(x, y)\, dx\, dy.$$

From (2. 9)

$$\Phi(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px-\frac{1}{2}qy} W_{k_1+\frac{1}{2}, m_1}(px)\, W_{k_2+\frac{1}{2}, m_2}(qy) \cdot$$

$$\cdot (px)^{-\lambda_1-\frac{1}{2}} (qy)^{-\lambda_2-\frac{1}{2}} f_2(x, y)\, dx\, dy.$$

Subtracting the two, we get

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px-\frac{1}{2}qy} W_{k_1+\frac{1}{2}, m_1}(px)\, W_{k_2+\frac{1}{2}, m_2}(qy) \cdot$$

$$\cdot (px)^{-\lambda_1-\frac{1}{2}} (qy)^{-\lambda_2-\frac{1}{2}} \{f_1(x, y) - f_2(x, y)\}\, dx\, dy = 0.$$

Hence by the above lemma, we have

$$f_1(x, y) - f_2(x, y) \equiv 0$$

or

$$f_1(x, y) \equiv f_2(x, y).$$

3. THEOREM 2. *Let $f_1(x, y)$ and $f_2(x, y)$ be continuous functions of both variables in $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, and*

$$\Phi_1(p, q) = M\left[f_1(x, y);\ k_1, m_1;\ k_2, m_2;\ \lambda_1, \lambda_2\right], \tag{3. 1}$$

and

$$\Phi_2(p, q) = M\left[f_2(x, y);\ k_1, m_1;\ k_2, m_2;\ \lambda_3, \lambda_4\right], \tag{3. 2}$$

then

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi_1(u, v) f_2(u, v) u^{\lambda_1-\lambda_3-1} v^{\lambda_2-\lambda_4-1}\, du\, dv = \tag{3. 3}$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi_2(u, v) f_1(u, v) u^{\lambda_3-\lambda_1-1} v^{\lambda_4-\lambda_2-1}\, du\, dv,$$

provided the integrals are absolutely convergent and

(i) $f_1(x, y) = O(x^{\delta} y^{\delta_1})$, $R(\delta - \lambda_1 + 1 \pm m_1) > 0$, $R(\delta_1 - \lambda_2 + 1 \pm m_2) > 0$, *when* x *and* y *are small*;

(ii) $f_2(x, y) = O(x^{\delta_2} y^{\delta_3})$, $R(\delta_2 - \lambda_3 + 1 \pm m_1) > 0$, $R(\delta_3 - \lambda_4 + 1 \pm m_2) > 0$, *when* x *and* y *are small, and*

(iii) $x^{k_1-\lambda_1} y^{k_2-\lambda_2} e^{-px-qy} f_1(x, y)$ *and* $x^{k_1-\lambda_3} y^{k_2-\lambda_4} e^{-px-qy} f_2(x, y) \to 0$ *as* $x \to \infty$ *and* $y \to \infty$.

PROOF. From the definition, we have

$$\Phi_1(u, v) = uv \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}us-\frac{1}{2}vt} W_{k_1+\frac{1}{2}, m_1}(us)\, W_{k_2+\frac{1}{2}, m_2}(vt) \cdot \tag{3. 4}$$

$$\cdot (us)^{-\lambda_1-\frac{1}{2}} (vt)^{-\lambda_2-\frac{1}{2}} f_1(s, t)\, ds\, dt$$

$$\Phi_2(s, t) = st \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}su-\frac{1}{2}tv} W_{k_1+\frac{1}{2}, m_1}(su)\, W_{k_2+\frac{1}{2}, m_2}(tv) \cdot \tag{3. 5}$$

$$\cdot (su)^{-\lambda_3-\frac{1}{2}} (tv)^{-\lambda_4-\frac{1}{2}} f_2(u, v)\, du\, dv.$$

Therefore

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi_1(u, v) f_2(u, v) u^{\lambda_1-\lambda_3-1} v^{\lambda_2-\lambda_4-1}\, du\, dv = \int_0^\infty\int_0^\infty f_2(u, v) u^{\lambda_1-\lambda_3-1} v^{\lambda_2-\lambda_4-1}\, du\, dv \cdot$$

$$\cdot \left[uv \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}us-\frac{1}{2}vt} W_{k_1+\frac{1}{2}, m_1}(us)\, W_{k_2+\frac{1}{2}, m_2}(vt) \cdot (us)^{-\lambda_1-\frac{1}{2}} (vt)^{-\lambda_2-\frac{1}{2}} f_1(s, t)\, ds\, dt\right] =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty f_1(s, t) \cdot s^{\lambda_3-\lambda_1-1} t^{\lambda_4-\lambda_2-1}\, ds\, dt \cdot \left[st \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}su-\frac{1}{2}tv} W_{k_1+\frac{1}{2}, m_1}(su)\, W_{k_2+\frac{1}{2}, m_2}(tv) \cdot\right.$$

$$\left. \cdot (su)^{-\lambda_3-\frac{1}{2}} (tv)^{-\lambda_4-\frac{1}{2}} f_2(u, v)\, du\, dv\right] = \int_0^\infty\int_0^\infty f_1(s, t) \Phi_2(s, t) \cdot s^{\lambda_3-\lambda_1-1} t^{\lambda_4-\lambda_2-1}\, ds\, dt,$$

by virtue of (3. 5), the change in the order of integrations being justified by the absolute convergence of the integrals under the conditions imposed above.

Hence the theorem.

COROLLARY. If we take $\lambda_1=\lambda_3$, $\lambda_2=\lambda_4$, in the above theorem, then we have the following theorem:

Let $f_1(x, y)$ and $f_2(x, y)$ be continuous functions of both variables in $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, and

$$\Phi_1(p, q)=M\left[f_1(x, y);\ k_1, m_1;\ k_2, m_2;\ \lambda_1, \lambda_2\right]$$

and

$$\Phi_2(p, q)=M\left[f_2(x, y);\ k_1, m_1;\ k_2, m_2;\ \lambda_1, \lambda_2\right]$$

then

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi_1(u, v) f_2(u, v)\,\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v}=\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi_2(u, v) f_1(u, v)\,\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v}$$

provided the integrals are absolutely convergent and

(i) $f_1(x, y)=O(x^{\delta_1}y^{\delta_1})$, $R(\delta-\lambda_1+1\pm m_1)>0$, $R(\delta_1-\lambda_2+1\pm m_2)>0$, *when x and y are small;*

(ii) $f_2(x, y)=O(x^{\delta_2}y^{\delta_3})$, $R(\delta_2-\lambda_1+1\pm m_1)>0$, $R(\delta_3-\lambda_2+1\pm m_2)>0$, *when x and y are small; and*

(iii) $e^{-px-qy}x^{k_1-\lambda_1}y^{k_2-\lambda_2}f_r(x, y)\to 0$ *as* $x\to\infty$ *and* $y\to\infty$, $r=1, 2$.

EXAMPLE.

(i) Let

$$f_1(x, y)=x^{n_1}y^{n_2} \quad \text{and} \quad f_2(x, y)=x^{\lambda_3+k_1-1}e^{-\frac{a}{x}}\cdot y^{\lambda_4+k_2-1}e^{-\frac{a_1}{y}}.$$

Then, according to Theorem 2,

$$\Phi_1(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px-\frac{1}{2}qy}W_{k_1+\frac{1}{2}, m_1}(px)\,W_{k_2+\frac{1}{2}, m_2}(qy)\cdot$$

$$\cdot(px)^{-\lambda_1-\frac{1}{2}}(qy)^{-\lambda_2-\frac{1}{2}}x^{n_1}y^{n_2}\,dx\,dy.$$

Now evaluating the x and y integral with the help of Goldstein's integral (see [6])*

$$(3.6)\qquad \int_0^\infty x^{l-1}e^{-(\alpha^2+\frac{1}{2})x}W_{k, m}(x)\,dx=\frac{\Gamma_x\left(l+\frac{1}{2}\pm m\right)}{\Gamma(l+1-k)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}l+\frac{1}{2}\pm m\\ l+1-k\end{matrix};\ -\alpha^2\right]$$

$$\left(R\left(l+\frac{1}{2}\pm m\right)>0,\ R(\alpha^2+1)>0\right)$$

* The symbol $\Gamma_x(\alpha\pm\beta)$ denotes $\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-\beta)$ and ${}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha\pm\beta\\ \gamma\end{matrix};\ x\right]$ denotes ${}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha+\beta,\ \alpha-\beta\\ \gamma\end{matrix};\ x\right]$.

we have,

$$\Phi_1(p, q) = Ap^{-n_1} q^{-n_2} \tag{3.7}$$

where,

$$A = \frac{\Gamma_x(n_1 - \lambda_1 + 1 \pm m_1)\Gamma_x(n_2 - \lambda_2 + 1 \pm m_2)}{\Gamma(n_1 - \lambda_1 + 1 - k_1)\Gamma(n_2 - \lambda_2 + 1 - k_2)}$$

$$(R(n_1 - \lambda_1 + 1 \pm m_1) > 0, \quad R(n_2 - \lambda_2 + 1 \pm m_2) > 0)$$

and,

$$\Phi_2(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}px - \frac{1}{2}qy} W_{k_1 + \frac{1}{2}, m_1}(px)\, W_{k_2 + \frac{1}{2}, m_2}(qy) \cdot$$

$$\cdot (px)^{-\lambda_3 - \frac{1}{2}} (qy)^{-\lambda_4 - \frac{1}{2}} x^{\lambda_3 + k_1 - 1} e^{-\frac{a}{x}} \cdot y^{\lambda_4 + k_2 - 1} e^{-\frac{a_1}{y}}\, dx\, dy.$$

Replace x by $\frac{1}{x}$ and y by $\frac{1}{y}$, we get

$$\Phi_2(p, q) = p^{\frac{1}{2} - \lambda_3} q^{\frac{1}{2} - \lambda_4} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ax} e^{-\frac{1}{2}\frac{p}{x}} W_{k_1 + \frac{1}{2}, m_1}\left(\frac{p}{x}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2} - k_1} \cdot$$

$$\cdot e^{-a_1 y} e^{-\frac{1}{2}\frac{q}{y}} W_{k_2 + \frac{1}{2}, m_2}\left(\frac{q}{y}\right) \cdot y^{-\frac{1}{2} - k_2}\, dx\, dy$$

$$(R(a) > 0, \quad R(a_1) > 0, \quad R(p) > 0 \text{ and } R(q) > 0).$$

Now using the operational representations due to GOLDSTEIN (see [6])

$$2p^{\frac{1}{2}} a^{k + \frac{1}{2}} K_{2m}(2(pa)^{\frac{1}{2}}) = L\left[e^{-\frac{1}{2}\frac{p}{x}} W_{k, m}\left(\frac{p}{x}\right) \cdot x^{-k}\right]$$

$$(R(p) > 0, \quad R(a) > 0),$$

we have,

$$\Phi_2(p, q) = 4a^{k_1} a_1^{k_2} p^{1 - \lambda_3} q^{1 - \lambda_4} K_{2m_1}(2(ap)^{\frac{1}{2}}) K_{2m_2}(2(a_1 q)^{\frac{1}{2}}).$$

Therefore

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_1(u, v) f_2(u, v) u^{\lambda_1 - \lambda_3 - 1} v^{\lambda_2 - \lambda_4 - 1}\, du\, dv = \tag{3.8}$$

$$= A \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{a}{u}} u^{\lambda_1 + k_1 - n_1 - 2} \cdot e^{-\frac{a_1}{v}} v^{\lambda_2 + k_2 - n_2 - 2}\, du\, dv =$$

$$= A \cdot a^{\lambda_1 + k_1 - n_1 - 1} a_1^{\lambda_2 + k_2 - n_2 - 1} \Gamma(n_1 - \lambda_1 + 1 - k_1)\Gamma(n_2 - \lambda_2 + 1 - k_2) =$$

$$= \Gamma_x(n_1 - \lambda_1 + 1 \pm m_1)\Gamma_x(n_2 - \lambda_2 + 1 \pm m_2) a^{\lambda_1 + k_1 - n_1 - 1} a_1^{\lambda_2 + k_2 - n_2 - 1}$$

$$(R(n_1 - \lambda_1 - k_1 + 1) > 0 \text{ and } R(n_2 - \lambda_2 - k_2 + 1) > 0),$$

and,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi_2(u,v) f_1(u,v)\cdot u^{\lambda_3-\lambda_1-1} v^{\lambda_4-\lambda_2-1}\, du\, dv =$$

$$= 4a^{k_1} a_1^{k_2} \int_0^\infty\int_0^\infty u^{n_1-\lambda_1} v^{n_2-\lambda_2} K_{2m_1}(2(au)^{\frac{1}{2}}) K_{2m_2}(2(a_1 v)^{\frac{1}{2}})\, du\, dv$$

$$(R(n_1-\lambda_1+1\pm m_1)>0,\ R(n_2-\lambda_2+1\pm m_2)>0,\ R(a)>0,\ R(a_1)>0).$$

Now evaluating u and v integral with the help of (BHONSLE [13])

$$\int_0^\infty u^{m+n} K_{2m}(2(up)^{\frac{1}{2}})\, du = \frac{\Gamma(n+2m+1)\Gamma(n+1)}{2p^{n+m+1}} \tag{3.9}$$

$$(R(p)>0,\ R(n+2m+1)>0,\ R(n+1)>0),$$

we have,

$$= \Gamma_x(n_1-\lambda_1+1\pm m_1)\Gamma_x(n_2-\lambda_2+1\pm m_2) a^{\lambda_1+k_1-n_1-1} a_1^{\lambda_2+k_2-n_2-1}$$

which verifies Theorem 2.

(ii) Let,

$$f_1(x,y) = x^{n_1} y^{n_2},$$

and,

$$f_2(x,y) = x^{\nu_1} y^{\nu_2} e^{-ax-a_1 y}.$$

Then according to Theorem 2

$$\Phi_1(p,q) = Ap^{-n_1} q^{-n_2}$$

where,

$$A = \frac{\Gamma_x(n_1-\lambda_1+1\pm m_1)\Gamma_x(n_2-\lambda_2+1\pm m_2)}{\Gamma(n_1-\lambda_1+1-k_1)\Gamma(n_2-\lambda_2+1-k_2)} \tag{3.10}$$

$$(R(n_1-\lambda_1+1\pm m_1)>0,\ R(n_2-\lambda_2+1\pm m_2)>0)$$

and,

$$\Phi_2(p,q) = pq \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\frac{a}{p}+\frac{1}{2}\right)px} e^{-\left(\frac{a_1}{q}+\frac{1}{2}\right)qy} W_{k_1+\frac{1}{2},m_1}(px)\, W_{k_2+\frac{1}{2},m_2}(qy)\cdot$$

$$\cdot (px)^{-\lambda_3-\frac{1}{2}} (qy)^{-\lambda_4-\frac{1}{2}} x^{\nu_1} y^{\nu_2}\, dx\, dy.$$

Now evaluating x and y integral with the help of Goldstein's integral we have

$$(3.11)\quad \Phi_2(p,q) = \frac{A_1}{p^{\nu_1}q^{\nu_2}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu_1-\lambda_3+1\pm m_1\\ \nu_1-\lambda_3+1-k_1\end{matrix};\ -\frac{a}{p}\right]\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu_2-\lambda_4+1\pm m_2\\ \nu_2-\lambda_4+1-k_2\end{matrix};\ -\frac{a_1}{q}\right]$$

$$(R(\nu_1-\lambda_3+1\pm m_1)>0,\ R(\nu_2-\lambda_4+1\pm m_2)>0,\ R(p+a)>0,\ R(q+a_1)>0)$$

$$= A_1\cdot\frac{p^{m_1-\lambda_3+1}}{(a+p)^{\nu_1+m_1-\lambda_3+1}}\cdot\frac{q^{m_2-\lambda_4+1}}{(a_1+q)^{\nu_2+m_2-\lambda_4+1}}\cdot$$

$$\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu_1-\lambda_3+1+m_1, m_1-k_1\\ \nu_1-\lambda_3+1-k_1\end{matrix};\ \frac{a}{a+p}\right]\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu_2-\lambda_4+1+m_2, m_2-k_2\\ \nu_2-\lambda_4+1-k_2\end{matrix};\ \frac{a_1}{a_1+q}\right]$$

$$(R(p+a)>0,\ R(q+a_1)>0),$$

where,

$$(3.12)\qquad A_1 = \frac{\Gamma_x(\nu_1-\lambda_3+1\pm m_1)\Gamma_x(\nu_2-\lambda_4+1\pm m_2)}{\Gamma(\nu_1-\lambda_3+1-k_1)\Gamma(\nu_2-\lambda_4+1-k_2)}.$$

Teherefore

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi_2(u,v)f_1(u,v)\cdot u^{\lambda_3-\lambda_1-1}v^{\lambda_4-\lambda_2-1}\,du\,dv =$$

$$= A_1\int_0^\infty\int_0^\infty u^{n_1-\lambda_1+m_1}v^{n_2-\lambda_2+m_2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu_1-\lambda_3+1+m_1, m_1-k_1\\ \nu_1-\lambda_3+1-k_1\end{matrix};\ \frac{a}{a+u}\right]\cdot$$

$$\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu_2-\lambda_4+1+m_2, m_2-k_2\\ \nu_2-\lambda_4+1-k_2\end{matrix};\ \frac{a_1}{a_1+v}\right]\frac{du\,dv}{(a+u)^{\nu_1-\lambda_3+1+m_1}(a_1+v)^{\nu_2-\lambda_4+1+m_2}}$$

$$(R(\nu_1-n_1+\lambda_1-\lambda_3)>0 \text{ and } R(\nu_2-n_2+\lambda_2-\lambda_4)>0).$$

Replacing $\frac{a}{a+u}$ by u and $\frac{a_1}{a_1+v}$ by v, we have

$$= A_1 a^{n_1+\lambda_3-\lambda_1-\nu_1}a_1^{n_2+\lambda_4-\lambda_2-\nu_2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^1\int_0^1 (1-u)^{n_1+m_1-\lambda_1}u^{\nu_1+\lambda_1-n_1-\lambda_3-1}(1-v)^{n_2+m_2-\lambda_2}v^{\nu_2+\lambda_2-n_2-\lambda_4-1}\cdot$$

$$\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu_1-\lambda_3+1+m_1, m_1-k_1\\ \nu_1-\lambda_3+1-k_1\end{matrix};\ u\right]\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu_2-\lambda_4+1+m_2, m_2-k_2\\ \nu_2-\lambda_4+1-k_2\end{matrix};\ v\right]du\,dv =$$

$$= A_1 \cdot a^{n_1+\lambda_3-\lambda_1-\nu_1} a_1^{n_2+\lambda_4-\lambda_2-\nu_2} \frac{\Gamma(n_1-\lambda_1+1+m_1)\Gamma(\nu_1+\lambda_1-\lambda_3-n_1)}{\Gamma(\nu_1-\lambda_3+1+m_1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma(n_2-\lambda_2+1+m_2)\Gamma(\nu_2+\lambda_2-\lambda_4-n_2)}{\Gamma(\nu_2-\lambda_4+1+m_2)} {}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu_1+\lambda_1-\lambda_3-n_1,\ m_1-k_1\\ \nu_1-\lambda_3+1-k_1\end{matrix};1\right] \cdot$$

$$\cdot {}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu_2+\lambda_2-\lambda_4-n_2,\ m_2-k_2\\ \nu_2-\lambda_4+1-k_2\end{matrix};1\right] =$$

$$= \frac{\Gamma_x(n_1-\lambda_1+1\pm m_1)\Gamma_x(n_2-\lambda_2+1\pm m_2)\Gamma(\nu_1+\lambda_1-\lambda_3-n_1)\Gamma(\nu_2+\lambda_2-\lambda_4-n_2)}{\Gamma(n_1-\lambda_1+1-k_1)\Gamma(n_2-\lambda_2+1-k_2)\cdot a^{\nu_1+\lambda_1-\lambda_3-n_1} a_1^{\nu_2+\lambda_2-\lambda_4-n_2}}$$

by virtue of (3. 12) and,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_1(u, v) f_2(u, v) \cdot u^{\lambda_1-\lambda_3-1} v^{\lambda_2-\lambda_4-1}\, du\, dv =$$

$$= A \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-au} u^{\nu_1+\lambda_1-\lambda_3-n_1-1} \cdot e^{-a_1 v} v^{\nu_2+\lambda_2-\lambda_4-n_2-1}\, du\, dv =$$

$$= \frac{\Gamma_x(n_1-\lambda_1+1\pm m_1)\Gamma_x(n_2-\lambda_2+1\pm m_2)\Gamma(\nu_1+\lambda_1-\lambda_3-n_1)\Gamma(\nu_2+\lambda_2-\lambda_4-n_2)}{\Gamma(n_1-\lambda_1+1-k_1)\Gamma(n_2-\lambda_2+1-k_2)\cdot a^{\nu_1+\lambda_1-\lambda_3-n_1} a_1^{\nu_2+\lambda_2-\lambda_4-n_2}}$$

by virtue of (3. 10), which verifies Theorem 2, provided $R(\nu_1-\lambda_3+1) > > R(n_1-\lambda_1+1) > |R(m_1)|$, $R(\nu_2-\lambda_4+1) > R(n_2-\lambda_2+1) > |R(m_2)|$, $R(p+a) > 0$, $R(q+a_1) > 0$, $R(a) > 0$ and $R(a_1) > 0$.

4. THEOREM 3. *Let $f_1(x, y)$ and $f_2(x, y)$ be continuous functions of both variables in $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, and*

(4. 1) $$\Phi_1(p, q) = M\left[f_1(x, y);\ k_1, m_1;\ k_2, m_2;\ \lambda_1, \lambda_2\right],$$

and

(4. 2) $$\Phi_2(p, q) = M\left[f_2(x, y);\ k_3, m_3;\ k_4, m_4;\ \lambda_3, \lambda_4\right],$$

then,

(4. 3) $$\Phi(p, q) = M\left[F_1(z_1, z_2):\ k_1, m_1:\ k_2, m_2;\ \lambda_1, \lambda_2\right] = M\left[F_2(z_1, z_2);\ k_3, m_3;\ k_4, m_4;\ \lambda_3, \lambda_4\right],$$

where

$$F_1(z_1, z_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(z_1 u, z_2 v) \Phi_2(u, v) \frac{du}{u} \frac{dv}{v}$$

and

$$F_2(z_1, z_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_2(z_1 u, z_2 v) \Phi_1(u, v) \frac{du}{d} \frac{dv}{v},$$

provided that $\Phi(p, q)$ exists and

(i) $f_1(x, y) = O(x^{\delta} y^{\delta_1})$, $R(\delta - \lambda_1 + 1 \pm m_1) > 0$, $R(\delta_1 - \lambda_2 + 1 \pm m_2) > 0$, *when* x *and* y *are small*;

(ii) $f_2(x, y) = O(x^{\delta_2} y^{\delta_3})$, $R(\delta_2 - \lambda_3 + 1 \pm m_3) > 0$, $R(\delta_3 - \lambda_4 + 1 \pm m_4) > 0$, *when* x *and* y *are small*;

(iii) $x^{k_1 - \lambda_1} y^{k_2 - \lambda_2} e^{-px - qy} f_1(x, y)$ *and* $x^{k_3 - \lambda_3} y^{k_4 - \lambda_4} e^{-px - qy} f_2(x, y) \to 0$ *as* $x \to \infty$ *and* $y \to \infty$;

and

(iv) $\Phi_2(p, q) \cdot p^{\delta - 1} q^{\delta_1 - 1}$ *and* $\Phi_1(p, q) \cdot p^{\delta_2 - 1} q^{\delta_3 - 1}$

belong to $L(0, \infty)$.

PROOF. Consider the integral

$$\Phi'(p, q) = pq \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}pz_1 - \frac{1}{2}qz_2} W_{k_1 + \frac{1}{2}, m_1}(pz_1)\, W_{k_2 + \frac{1}{2}, m_2}(qz_2) \cdot$$

$$\cdot (pz_1)^{-\lambda_1 - \frac{1}{2}} (qz_2)^{-\lambda_2 - \frac{1}{2}}\, dz_1\, dz_2 \left[\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f_1(z_1 u, z_2 v)\, \Phi_2(u, v)\, \frac{du}{u}\, \frac{dv}{v} \right] =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \Phi_2(u, v)\, \frac{du}{u}\, \frac{dv}{v} \left[pq \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}pz_1 - \frac{1}{2}qz_2} W_{k_1 + \frac{1}{2}, m_1}(pz_1)\, W_{k_2 + \frac{1}{2}, m_2}(qz_2) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (pz_1)^{-\lambda_1 - \frac{1}{2}} (qz_2)^{-\lambda_2 - \frac{1}{2}} f_1(z_1 u, z_2 v)\, dz_1\, dz_2 \right]$$

the change in the order of integration being justifiable under the conditions imposed upon $f_1(x, y)$ and $\Phi_2(x, y)$. Hence in view of (4. 1), we have

$$\Phi'(p, q) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \Phi_2(u, v)\, \Phi_1\left(\frac{p}{u}, \frac{q}{v}\right) \frac{du}{u}\, \frac{dv}{v}. \tag{4. 4}$$

Again, on considering the integral

$$\Phi''(p, q) = pq \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}pz_1 - \frac{1}{2}qz_2} W_{k_3 + \frac{1}{2}, m_3}(pz_1)\, W_{k_4 + \frac{1}{2}, m_4}(qz_2) \cdot$$

$$\cdot (pz_1)^{-\lambda_3 - \frac{1}{2}} (qz_2)^{-\lambda_4 - \frac{1}{2}}\, dz_1\, dz_2 \left[\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f_2(z_1 u, z_2 v)\, \Phi_1(u, v)\, \frac{du}{u}\, \frac{dv}{v} \right] =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \Phi_1(u, v)\, \frac{du}{u}\, \frac{dv}{v} \left[pq \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}pz_1 - \frac{1}{2}qz_2} W_{k_3 + \frac{1}{2}, m_3}(pz_1)\, W_{k_4 + \frac{1}{2}, m_4}(qz_2) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (pz_1)^{-\lambda_3 - \frac{1}{2}} (qz_2)^{-\lambda_4 - \frac{1}{2}} f_2(z_1 u, z_2 v)\, dz_1\, dz_2 \right]$$

the change in the order of integration being justifiable under the conditions imposed upon $f_2(x, y)$ and $\Phi_1(x, y)$. Hence in view of (4. 2), we have

$$\Phi''(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_1(u, v)\, \Phi_2\left(\frac{p}{u}, \frac{q}{v}\right) \frac{du}{u} \frac{dv}{v}. \tag{4. 5}$$

On writing $\frac{p}{u}$ for u, and $\frac{q}{v}$ for v in (4. 4), we have (4. 5). Therefore,

$$\Phi'(p, q) = \Phi''(p, q) = \Phi(p, q), \quad \text{say.}$$

Hence the theorem.

It reduces to corollary of Theorem 2, by making use of the uniqueness theorem, after taking

$$k_1 = k_3, k_2 = k_4;\ \lambda_1 = \lambda_3, \lambda_2 = \lambda_4;\ m_1 = m_3, m_2 = m_4.$$

I am greatly indebted to DR. S. K. BOSE for his help and guidance in the preparation of this paper.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND ASTRONOMY,
LUCKNOW UNIVERSITY,
LUCKNOW, INDIA

(Received 31 July 1962)

References

[1] R. P. BOAS, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942).
[2] T. M. MACROBERT, *Functions of a complex Variable*, (1933).
[3] *Tables of Integral Transforms*, 1 (Bateman Project, 1954).
[4] *Tables of Integral Transforms*, 2 (Bateman Project, 1954).
[5] V. P. MAINRA, *Bull. Cal. Math. Soc.*, **53** (1961).
[6] S. GOLDSTEIN, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), **34** (1932).
[7] M. LERCH, *Acta Mathematica*, **27** (1903).
[8] C. S. MEIJER, *Proc. Nederl. Acad. Wet., Amsterdam*, **43** (1940).
[9] C. S. MEIJER, *Proc. Nederl. Acad Wet., Amsterdam*, **44** (1941).
[10] R. NARAIN, *Universita E Politecnico, Rendiconti del Seminario Matematico*, **15** (1955–56).
[11] R. S. VARMA, *Current Sci., India*, **16** (1947).
[12] R. S. VARMA, *Proc. Nat. Acad. Sci., India*, **20** (1951).
[13] B. R. BHONSLE, *Bull. Cal. Math. Soc.*, **48** (1956).

ISOPERIMETRIC PROBLEMS CONCERNING TESSELLATIONS

By

L. FEJES TÓTH (Budapest), corresponding member of the Academy

1. The regular shape of the bee-cells and their characteristic arrangement attracted attention already in antiquity. PAPPUS of Alexandria tried to explain the hexagonal shape of the bee-cells by the fact that among the regular plane-fillers of equal area (i. e. among the regular triangle, quadrangle and hexagon) the hexagon has the least perimeter. The hexagonal tessellation occurs also in many other natural structures (e. g. on the retina of the human eye) and it is possible that the formation of all these structures bear upon the observation of PAPPUS.[1] Therefore it would be desirable to prove the „isoperimetric property" of the hexagonal tessellation under much more general conditions. Thus the problem arises: to decompose a given domain by a shortest net into a great but given number of pieces of equal area. More precisely:

a) To decompose the plane into parts of unit area so that the average perimeter of the parts should be as small as possible.

In the present paper we deal with the following problem which is a dual counterpart of problem a):

b) To decompose the plane into parts of unit perimeter so that the average area of the parts should be as great as possible.

More vividly explained, we want to cover a plane region of possibly great area with a network consisting, say, of one thousand meshes of unit perimeter.

Beside the Euclidean plane we shall extend our investigations to the sphere and to the hyperbolic plane. But first we give a survey of some analogous results known in this direction.

2. I noticed [1] long ago that the special case of problem a) when the partial domains are supposed to be convex can be solved easily. I considered the analogous spherical problem and proved the following theorem.

Decompose the surface of the unit sphere into $n>2$ convex polygons of equal area. If L denotes the sum of the perimeters of the polygons then

$$L \geqq 12(n-2) \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cos\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\right).$$

Equality holds only for a regular decomposition with trihedral vertices.

[1] Interesting informations about the bee-cells, their literature and other hexagonal structures are contained in the book of D'ARCY W. THOMPSON, *On growth and form* (Vol. II., second edition, Cambridge, 1952).

For great values of n this inequality is asymptotically exact and expresses the corresponding extremum property of the hexagonal tessellation of the Euclidean plane. Thus we can say that the above inequality is exact for $n=3$, 4, 6, 12 and ∞.

The proof rests on the convexity of a rather intricate function [2], namely on the convexity of

$$P(v, a)=2v \arccos \frac{\cos \frac{\pi}{v}}{\cos \frac{2\pi-a}{2v}} \qquad (v>2,\ 0<a<2\pi),$$

as a function of v. For integral values of v $P(v, a)$ equals the perimeter of a regular spherical v-gon of area a.

The following theorem [2] concerns regular spherical, Euclidean and hyperbolic tessellations with trihedral vertices. On the sphere there are four such tessellations, in the Euclidean plane only one and in the hyperbolic plane infinitely many.

Let U be the union of n different faces of a regular tessellation with trihedral vertices. Then among all decompositions of U into n convex polygons of equal area the regular decomposition has the least possible sum of perimeters of the faces.

The generalisation of these results to decompositions into not necessarily convex pieces seems to be difficult. A strong light is thrown upon the difficulties by the following interesting remark of A. HEPPES [5]: if the integer $n>1$ is not a divisor of 12 then the shortest net dividing the sphere into n parts of equal area always contains a non-convex mesh. On the other hand, it may be guessed that for $n=2$, 3, 4, 6 and 12 the extremal tessellation consists of convex faces[2] only and thus it is, in view of the above theorem, necessarily regular.

In various tissues the cells do not completely fill out the space being at their disposal. The consideration of such tissues leads to new mathematical problems. We consider the tissue as consisting of non-overlapping plastic cells all contained in a given part of space. Supposing first that the cells have the same constant volume, we can ask what shape and arrangement the cells must assume in order to make their total surface area as small as possible. Supposing secondly that the cells have equal and unchanged surface area, we can ask in what shape and arrangement the total volume of the cells will be as great as possible.

Fig. 1 shows a section of the parenchymatous tissue of the stem of maize.[3] Here the cells may be considered as small columns considerably elongated in the axial direction so that their volume and surface area may be supposed to be proportional to the area and perimeter of their sections. This involves the following two-dimensional analogues of the above problems.

[2] The correctness of this conjecture for $n=2$ follows from a general theorem of H. POINCARÉ, Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **6** (1905), pp. 234—274 (or Oeuvres, tome VI, Paris, 1953, pp. 38—85). The following nice proof is due to J. CSIMA. Let c be a simple, closed curve dividing the sphere into two parts of equal area. Reflecting c in the centre of the sphere we obtain another curve which must intersect c in a point A. Since the point opposite to A belongs also to c, its length is $\geqq 2\pi$ with equality only if c is a greatest circle.

[3] See the book quoted in footnote 1.

A) Consider in the Euclidean plane a set of non-overlapping connected discs of equal area. Suppose that the shape and the position of the discs can change in such a way that their common area and their number-density remain constant. To find the shape and arrangement of the discs yielding the least possible average perimeter of the discs.

B) Consider in the Euclidean plane a set of non-overlapping connected discs of equal perimeter. Suppose that the shape and the position of the discs can change in such a way that their common perimeter and their number-density remain constant. To find the shape and arrangement of the discs yielding the greatest possible average area of the discs.

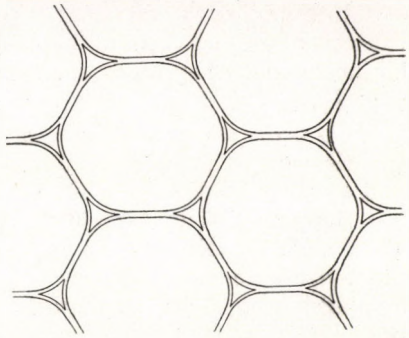


Fig. 1

These problems which may be considered as the fundamental isoperimetric problems for two-dimensional cell-aggregates contain as special cases the above mentioned fundamental isoperimetric problems for tessellations, i. e. the problems a) and b).

In the case of convex discs problem B) was solved by the author [3] and problem A) by HEPPES in collaboration with the author [4]. Fixing the number-density, let us increase the common perimeter or the common area of the discs, respectively, starting with small values of them. Then the extremal domains will be in both cases first circles arranged in an arbitrary way; at a certain value of the perimeter or the area the circles will assume hexagonal close-packing; then they will blow up to hexagons rounded off by arcs of circles; at last they will turn into regular hexagons filling the plane without interstices.

Later on HEPPES [5] remarked that the solution of problem B) given for convex discs may be extended to the general case. This involves the full solution of problem b):

Decomposing the Euclidean plane into connected pieces of at most unit perimeter, the average area of the pieces cannot be greater than the area of a regular hexagon of unit perimeter.

In what follows we shall consider problem b) in the following equivalent form: To decompose a given domain into n parts of possibly small perimeter.

3. The surface of the sphere can be decomposed into n parts all of them having an arbitrarily small perimeter. But supposing that none of the parts has an area greater than a hemi-sphere the situation changes. We shall say such a decomposition to be *normal*. We are going to prove the following theorem:

In a normal decomposition of the unit sphere into $n>1$ connected parts the perimeter of the part of greatest perimeter is always $a\lambda_n$, where

$$\lambda_n=\begin{cases}2\pi & \text{for} \quad n=2\\ 12\,\dfrac{n-2}{n}\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\dfrac{n}{n-2}\dfrac{\pi}{6}\right) & \text{for} \quad n>2.\end{cases}$$

Equality can be attained only for $n=2$, 3, 4, 6 *and* 12, *namely if the partial domains are either two hemi-spheres, or three digons (one of which can be a hemi-sphere), or four regular triangles, or six regular quadrangles, or else twelve regular pentagons.*

Interpreting the fact that our inequality is for great values of n asymptotically exact as above, we can say that equality holds also for $n=\infty$ in the case of the regular hexagonal decomposition. Let us still note that $\lambda_2=\lambda_3>\lambda_4>\ldots$ and $\lim_{n\to\infty} n\lambda^2=2\sqrt{3}\pi$.

To prove our theorem we make use of the following known fact[4]: if a closed spherical curve has a common point with each great-circle then its length is $\geqq 2\pi$ and equality holds only if the curve consists of two semi-great-circles.

Suppose first that each of the partial domains $d_1, \ldots, d_n$ is simply connected. Then each domain d_i may be supposed also to lie on a closed hemi-sphere. For otherwise each great-circle would have a point in common with d_i. But since by assumption[5] $d_i \leqq 2\pi$, each great-circle would have also a common point with the boundary of d_i and thus, by the fact mentioned above, the perimeter of d_i would be greater than 2π.

If there are only two connected domains they are necessarily simply connected. So the above considerations involve the correctness of our theorem in the case[6] $n=2$. In what follows we suppose that $n>2$.

Replace each domain d_i by its convex hull c_i. Hereby the perimeter of no domain has increased. We may suppose that none of the domains $c_1, \ldots, c_n$ is entirely covered by the other ones. For otherwise we can omitte this domain and the problem reduces to the case of $n-1$ domains instead of n domains.

We proceed to describe a process by which the domains $c_1, \ldots, c_n$ will contract to convex polygons $p_1, \ldots, p_n$ covering the sphere without overlapping and without interstices.[7] Let c_i and c_j be two domains having a common inner point. Since according to our supposition none of the domains is contained in another one, there is a point on the boundary of c_i lying in the exterior of c_j and another one lying in the interior of c_j. Let us go round the boundary of c_i in a certain direction starting from a point outside of c_j. There is a point A at which we enter into the interior of c_j and a point B at which we step into the exterior of c_j. We assert that no further such „crossing" points exist. Let namely A, B, A' and B' be four consecutive crossing points (Fig. 2). Both on the open arc $B'A$ and on the arc BA' of the boundary of c_i there is a boundary point of d_i. Since d_i is connected, these points can be connected by an arc passing through the interior of d_i. Similarly, we can find on the arc AB as well as on the arc $A'B'$ of the boundary of c_j a boundary point of d_j

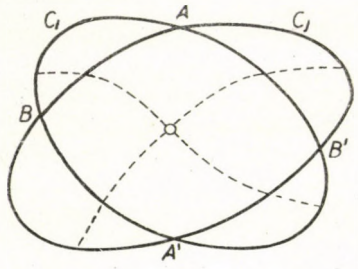


Fig. 2

[4] Cf. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie. II* (Leipzig—Berlin, 1937).

[5] We denote a domain and its area by the same symbol.

[6] This case is equivalent to the fact proved in footnote 2.

[7] This construction is due to R. P. BAMBAH and C. A. ROGERS, Covering the plane with convex sets, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), pp. 304—314.

which we connect by an arc passing through the interior of d_j. These two arcs being contained also in c_i and c_j, respectively, obviously intersect. But this is impossible because d_i and d_j have no common inner points.

Now we replace c_i and c_j by two domains $c_i' \subset c_i$ and $c_j' \subset c_j$ the union of which equals the union of c_i and c_j, but the intersection of which reduces to the segment AB. By doing so it may happen that the segment AB crosses the boundary of a further domain c_k in two points. Then the boundary of c_k would cross, say, the boundary of c_i' in four points (Fig. 3) so that the contraction described above could not be used for c_k and c_i'. But this situation can only occur if the intersection c_jc_k is contained in the intersection c_ic_j. Therefore applying the above contraction always to such pairs of domains the intersection of which does not contain the intersection of two other domains, the domains $c_1, \ldots, c_n$ will shrink in at most $\binom{n}{2}$ steps to polygons $p_1, \ldots, p_n$ of the desired property.

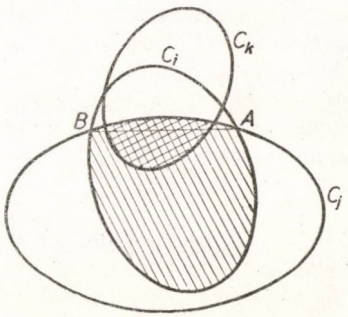


Fig. 3

If $n=3$ the above construction leads either to three digons (one of which can be a hemi-sphere) or (if one of the domains was omitted) to two hemi-spheres. The perimeter of these domains equals 2π. If therefore one of them was originally not convex its perimeter must have been greater than 2π. Thus we may suppose that $n>3$.

If p is the perimeter of the polygon of greatest perimeter then we have in view of the isoperimetric property of the regular polygons

$$p_i \leqq A(v_i, p),$$

where v_i is the number of sides of p_i and

$$A(v, p) = 2\pi - 2v \arccos \frac{\cos \frac{\pi}{v}}{\cos \frac{p}{2v}} = 2\pi - P(v, 2\pi - p).$$

But $P(v, a)$ being a convex function of v ($v>2$, $0 \leqq a \leqq 2\pi$), $A(v, p)$ is a concave, increasing[8] function of v ($v>2$, $0 \leqq p \leqq 2\pi$). Consequently

$$4\pi = \sum_{i=1}^{n} p_i \leqq \sum_{i=1}^{n} A(v_i, p) \leqq nA\left(6 - \frac{12}{n}, p\right),$$

whence $p \geqq \lambda_n$.

Equality holds only if the number $m = 6 - \frac{12}{n}$ is an integer and each polygon is a regular m-gon of perimeter p. This takes place only in the case mentioned in

[8] The concavity of $A(v, p)$ involves, in view of the existence of $\lim_{v \to \infty} A(v, p)$, its monotonicity.

the theorem. If the partial domains $d_1, \ldots, d_n$ were originally not all convex then one of them ought to have a perimeter $>\lambda_n$.

We have still to scrutinize the case when some of the partial domains are multiply connected. Suppose e. g. that d_i is bounded by two disjoint simple curves s_1 and s_2. Both of these curves decompose the sphere into two parts. Consider the part p' determined by s_1 containing d_i as well as the part p'' determined by s_2 not containing d_i. Desplace p'' in p' till p'' and p' have a common boundary point. In this way each multiply connected domain may be replaced by a domain bounded by one closed (but not simple) curve. The new domains may be supposed again to lie on a closed hemi-sphere so that the above proof can be used without any change.

4. We proceed to prove the following theorem.

Let U be the union of n different faces of a regular Euclidean or hyperbolic tessellation with trihedral vertices. Decomposing U in any way into n connected parts the perimeter of the part of greatest perimeter will always be $\geqq\lambda$, where λ is the perimeter of a face of the tessellation. Equality holds only for the regular decomposition.

Here the decomposition is said to be regular if the partial domains consist of the faces of the tessellation contained in U. For spherical tessellations the theorem does not continue to hold, because here U may consist of the whole sphere which can be decomposed into parts of arbitrarily small perimeter.

Let $d_1, \ldots, d_n$ be the partial domains and $c_1, \ldots, c_n$ their convex hulls. Consider the union of all faces of the tessellation which have an inner or boundary point in common with one of the domains $c_1, \ldots, c_n$ and, if necessary, complete the set of these faces by adding further faces of the tessellation so as to obtain a simly connected set $\overline{U}$. Denote the faces of the tessellation within $\overline{U}$ but without U by $c_{n+1}, \ldots, c_m$ and apply the contraction described in the spherical case to the domains $c_1, \ldots, c_m$. Hereby we obtain a set of convex polygons filling $\overline{U}$ without overlapping and without gaps. If the number of these polygons is smaller than m, we decompose some of them into convex polygons so as to obtain all in all just m polygons $p_1, \ldots, p_m$. In view of what follows we perform these decompositions so that no new vertex should lie on the boundary of $\overline{U}$. All we need to show is that $p\geqq\lambda$, where p is the greatest perimeter occuring among the polygons and that equality holds only if $p_1, \ldots, p_m$ coincide with the faces of the tessellation contained in $\overline{U}$. The main steps of the proof are as follows.

Owing to the isoperimetric property of the regular polygons

$$p_i\leqq A(v_i, p),$$

where v_i is the number of sides of p_i and

$$A(v,p)=\begin{cases}\dfrac{p^2}{4v}\cot\dfrac{\pi}{v} & \text{in the Euclidean case}\\[2ex] -2\pi+2v\arccos\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{v}}{\operatorname{ch}\dfrac{p}{2v}} & \text{in the hyperbolic case.}\end{cases}$$

We shall show that on the one hand $A(v, p)$ is a concave, increasing function of $v>2$ and that, on the other hand,

$$v_1 + \ldots + v_m \leqq mv,$$

where v is the number of sides of a faces of the tessellation. Therefore

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^{m} p_i \leqq \sum_{i=1}^{m} A(v_i, p) \leqq mA(v, p),$$

whence $p \geqq \lambda$ and equality holds only if each polygon is a regular v-gon with area $\bar{U}/m$.

It is easy to show that in the hyperbolic case

$$\lim_{p \to 0} p^{-2} A(v, p) = \frac{1}{4v} \cot \frac{\pi}{v}.$$

Therefore it suffices to prove the above mentioned properties of $A(v, p)$ in the hyperbolic case.

Introducing the notations

$$\frac{\pi}{v} = x, \quad \frac{p}{2\pi} = \varepsilon, \quad y(x) = \arccos \frac{\cos x}{\operatorname{ch} \varepsilon x}$$

we have

$$A_{vv} = 2 \frac{\pi^2}{v^3} y''\left(\frac{\pi}{v}\right).$$

We shall show that

$$y''(x) < 0 \qquad (0 < x < \pi/2, \ \varepsilon > 0).$$

Owing to

$$\log \cos y = \log \cos x - \log \operatorname{ch} \varepsilon x$$

we have

$$y' \tan y = \tan x + \varepsilon \operatorname{th} \varepsilon x$$

and

$$y'' \tan y + \frac{y'^2}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{ch}^2 \varepsilon x}.$$

Thus we have to show that

$$y'' \tan y = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{ch}^2 \varepsilon x} - \frac{(\tan x + \varepsilon \operatorname{th} \varepsilon x)^2}{1 - \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{ch}^2 \varepsilon x}} < 0.$$

This inequality is equivalent to the following ones:

$$(\operatorname{ch}^2 \varepsilon x - \cos^2 x)(\operatorname{ch}^2 \varepsilon x + \varepsilon^2 \cos^2 x) - \cos^2 x \operatorname{ch}^4 \varepsilon x (\tan x + \varepsilon \operatorname{th} \varepsilon x)^2 < 0,$$

$$(\operatorname{ch}^2 \varepsilon x - \cos^2 x)(\operatorname{ch}^2 \varepsilon x + \varepsilon^2 \cos^2 x) - \operatorname{ch}^2 \varepsilon x (\sin x \operatorname{ch} \varepsilon x + \varepsilon \cos x \operatorname{sh} \varepsilon x)^2 < 0,$$

$$(\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 \varepsilon x)(\operatorname{ch}^2 \varepsilon x + \varepsilon^2 \cos^2 x) - (1 + \operatorname{sh}^2 \varepsilon x)(\sin x \operatorname{ch} \varepsilon x + \varepsilon \cos x \operatorname{sh} \varepsilon x)^2 < 0,$$

$$\operatorname{sh}^2 \varepsilon x(\sin x \operatorname{ch} \varepsilon x + \varepsilon \cos x \operatorname{sh} \varepsilon x)^2 + (\sin x \operatorname{ch} \varepsilon x + \varepsilon \cos x \operatorname{sh} \varepsilon x)^2 -$$
$$-(\sin^2 x \operatorname{ch}^2 \varepsilon x + \varepsilon^2 \sin^2 x \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 \varepsilon x \operatorname{ch}^2 \varepsilon x + \varepsilon^2 \operatorname{sh}^2 \varepsilon x \cos^2 x) > 0,$$
$$4 \operatorname{sh}^2 \varepsilon x(\sin x \operatorname{ch} \varepsilon x + \varepsilon \cos x \operatorname{sh} \varepsilon x)^2 - (\operatorname{sh} 2\varepsilon x - \varepsilon \sin 2x)^2 > 0,$$
$$2 \operatorname{sh} \varepsilon x(\sin x \operatorname{ch} \varepsilon x + \varepsilon \cos x \operatorname{sh} \varepsilon x) - \operatorname{sh} 2\varepsilon x + \varepsilon \sin 2x > 0,$$
$$G(x, \varepsilon) = \varepsilon \sin 2x - (1 - \sin x) \operatorname{sh} 2\varepsilon x + 2\varepsilon \cos x \operatorname{sh}^2 \varepsilon x > 0.$$

Thus, in view of $G(x, 0) = 0$, we have only to show that

$$G_\varepsilon = \sin 2x - 2x(1 - \sin x) \operatorname{ch} 2\varepsilon x + 2 \cos x \operatorname{sh}^2 \varepsilon x + 4\varepsilon x \cos x \operatorname{sh} \varepsilon x \operatorname{ch} \varepsilon x =$$
$$= \sin 2x - 2x(1 - \sin x) + 2[\cos x - 2x(1 - \sin x)] \operatorname{sh}^2 \varepsilon x + 2\varepsilon x \cos x \operatorname{sh} 2\varepsilon x > 0.$$

Throwing a glance at the diagram of the function $2x(1 - \sin x)$ and taking into consideration that for small values of x

$$\sin 2x - 2x(1 - \sin x) \approx 2x^2,$$

it is apparent that for $0 < x < \pi/2$

$$\sin 2x - 2x(1 - \sin x) > 0$$

and

$$\cos x - 2x(1 - \sin x) > 0.$$

Thus we have indeed $G_\varepsilon > 0$. This completes the proof of the concavity of $A(v, p)$.

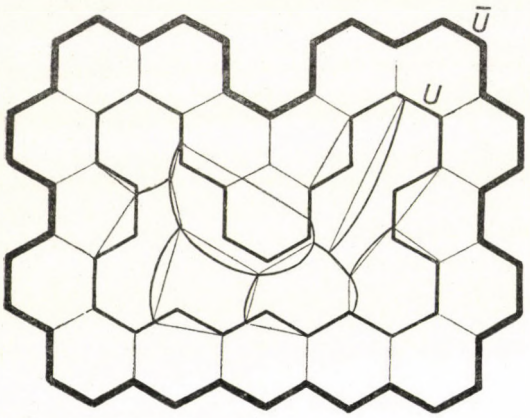


Fig. 4

To see the monotonicity of $A(v, p)$ we have now only to refer to the existence of $\lim_{v \to \infty} A(v, p)$.

In order to show the inequality $v_1 + \ldots + v_m \leqq mv$ we may suppose that in each vertex of the tessellation consisting of the polygons $p_1, \ldots, p_m$ at most three polygons meet. For a vertex with $3 + h$ edges ($h > 0$) can always be replaced by h trihedral vertices so that the number of the polygons remains unchanged whilst the total number of their sides increases. Let v_2 and v_3 be the number of the dihedral and trihedral vertices lying at the boundary of $\bar{U}$, v the total number of the vertices and e the number of edges. According to EULER's formula we have

$$m + v = e + 1$$

and thus, in view of $3v = 2e + v_2$,

$$v_1 + \ldots + v_m = 2e - v_2 - v_3 = 6m + v_2 - v_3 - 6.$$

The same computation yields for the regular decomposition of $\overline{U}$

$$mv = 6m + v_2 - v_3 - 6.$$

But the values v_2 and v_3 being the same as above, we have

$$v_1 + \ldots + v_m = mv,$$

in agreement with the statement.

CHEMICAL-INDUSTRIAL UNIVERSITY OF VESZPRÉM

(Received 1 September 1962)

References

[1] L. FEJES TÓTH, Über das kürzeste Kurvennetz, das eine Kugeloberfläche in flächengleiche konvexe Teile zerlegt, *Mat. Term.-tud. Értesítő,* **62** (1943), pp. 349—354.
[2] L. FEJES TÓTH, On shortest nets with meshes of equal area, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **11** (1960), pp. 363—370.
[3] L. FEJES TÓTH, Filling of a domain by isoperimetric discs, *Publ. Math.,* **5** (1957), pp. 119—127.
[4] L. FEJES TÓTH and A. HEPPES, Filling of a domain by equiareal discs, *Publ. Math.,* **7** (1960) pp. 198—203.
[5] A. HEPPES, Filling of a domain by discs, *Publ. Math.,* in print.

A THEOREM ON LINEAR TRANSFORMATIONS OF TORSION-FREE MODULES OF INFINITE RANK

By

P. RIBENBOIM (Urbana, Illinois, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

1. Introduction

In our paper „Fonctions Modulo un Antifiltre" [1], we have considered the following problem.

Let X, Y be sets, G a set of mappings from X into Y. In the Boolean algebra of subsets of X, it is given an equivalence relation by means of an ideal I of subsets of X: $M \equiv N(\text{Mod. } I)$ whenever the symmetric difference $M \ominus N = (M \cup N) - (M \cap N)$ belongs to I.

Similarly, we give in the set G, the following equivalence relation: $f \equiv g(\text{Mod. } I)$ whenever $\{x \in X | f(x) \neq g(x)\}$ belongs to I.

We prove easily: if $f \equiv g(\text{Mod. } I)$ then $f^{-1}Q \equiv g^{-1}Q(\text{Mod. } I)$ for every subset Q of Y.

Then, we investigate conditions on X, Y, G, I for which the converse is also true: if $f \not\equiv g(\text{Mod. } I)$ then there exists a subset Q of Y such that $f^{-1}Q^{-1} \not\equiv g^{-1}Q$ **(Mod. I).**

Excluding the trivial cases where X or Y is finite, we may prove the validity of the converse, for example:

first: when I is the ideal of finite subsets of the infinite set X,

second: more generally, when $\#(Y) = \aleph \geqq \aleph_0$ and I is contained in the ideal of all subsets of X with cardinal number strictly less than $\aleph$,

third: when $\#(Y) = \aleph \geqq \aleph_0$ and I is an $\aleph$-ideal of subsets of X (we may also take $\#(X) > \#(Y)$, otherwise it is trivial).

We notice that in all these cases, no structure was assumed on the sets X, Y, and also nothing is said about the nature of mappings belonging to G.

Another positive result in the same paper deals with the case of real-valued Lebesgue measurable functions, defined on the real line, and considered modulo the sets of measure zero.

Summarizing, our problem setting has been the following:

1. we give structures of the same kind X, Y, which we may consider of infinite type (to disregard the trivial case);

2. we give a set G of transformations of the allowable kind from X into Y;

3. we give an equivalence between the substructures of X, Y, in a sense that equivalent substructures might be considered as „almost equal";

4. we give, similarly, a „quasi-equality" between the mappings in G.

The problem is to find, for given structures X, Y and mappings, a natural way in which such equivalence may be defined, so that:

$f \equiv g$ if and only if for every substructure Q of Y we have $f^{-1}Q \equiv g^{-1}Q$.

The main purpose will be to compare mappings of infinite kind, describing their behavior with some finiteness properties.

In this paper we shall give a theorem in this direction, when X, Y are torsion-free modules of infinite rank while the mappings will be linear transformations with finite dimensional kernels.

2. The theorem

Let R be a commutative domain, let X, Y be *torsion-free* modules over R, having *infinite rank*; this means that the vector spaces obtained from X, Y, by extending the scalars from R to its field of quotients K, have infinite dimension.

For every submodule M of X (or Y), we denote by $M^* = \{x \in X |$ there exists $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, such that $\alpha x \in M\}$. Clearly M^* is the pure submodule of X generated by M (because R is a commutative domain), so $M \subseteq M^*$, and M^* has the same rank as M.

Let us recall that if M, N are submodules of X (or Y), $N \subseteq M$, then we say that M/N has rank n when $K \underset{R}{\otimes} (M/N) \cong (K \underset{R}{\otimes} M)/(K \underset{R}{\otimes} N)$ is a K-vector space of dimension n.

DEFINITION. If M, N are submodules of X (or Y), we define $M \equiv N$ whenever the quotient module $(M+N)/(M \cap N)$ has finite rank.

We need only to verify the transitivity property.

Let $L \equiv M$, $M \equiv N$ and let us show that $(L+N)/(L \cap N)$ has finite rank.

Since

$$\frac{L+N}{L \cap N} \cong \frac{(L+N)/(L \cap M \cap N)}{(L \cap N)/(L \cap M \cap N)}$$

and

$$(L+N)/(L \cap M \cap N) \subseteq (L+M+N)/(L \cap M \cap N),$$

it is sufficient to prove that this last module has finite rank.

Now,

$$\frac{(L+M+N)/(L \cap M \cap N)}{(L+M)/(L \cap M \cap N)} \cong \frac{L+M+N}{L+M} \cong \frac{M+N}{(L+M) \cap (M+N)} \cong$$

$$\cong \frac{(M+N)/(M \cap N)}{[(L+M) \cap (M+N)]/(M \cap N)}.$$

Since $(M+N)/(M \cap N)$ has finite rank, it follows that $(L+M+N)/(L+M)$ has finite rank.

Similarly

$$\frac{(L+M)/(L \cap M \cap N)}{(L \cap M)/(L \cap M \cap N)} \cong \frac{L+M}{L \cap M}$$

has finite rank. Hence $(L+M+N)/(L \cap M \cap N)$ has finite rank.

We shall now consider linear transformations from X into Y, having *kernel with finite rank*.

The following terminology will be used: if T is a submodule of Y, $y_1, y_2 \in Y$ are said to be *linearly independent over* T whenever — if $\alpha_1, \alpha_2 \in R$, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in T$, then $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

DEFINITION. If $f, g: X \to Y$ are linear transformations whose kernels $\ker(f)$, $\ker(g)$ have finite rank, we define $f \equiv g$ whenever the following conditions hold:

1. $fX \equiv gX$ (as submodules of Y)

2. there exists a submodule T of Y, of finite rank, such that $I_T = \{x \in X \mid fx, gx$ are linearly independent over $T\}$ has finite rank.

We need only to prove the transitivity of condition (2), in order to verify that we have an equivalence relation.

Let f, g, h have kernel with finite rank, and $f \equiv g$, $g \equiv h$. So, there exist submodules T, T' of Y, with finite rank, such that $I = I_T = \{x \in X \mid fx, gx$ are linearly independent over $T\}$ and $I' = I_{T'} = \{x \in X \mid gx, hx$ are linearly independent over $T'\}$ have finite rank.

Let $T'' = (T + T')^*$, which has therefore finite rank; let $I'' = I_{T''} = \{x \in X \mid fx, hx$ are linearly independent over $T''\}$. We shall show that I'' has finite rank.

For this purpose it will be sufficient to establish

$$(*) \qquad I'' \subseteq I \cup I' \cup g^{-1}T^* \cup g^{-1}T'^*.$$

In fact, if (*) has been proved, since T^*, T'^* have finite rank, and $\ker(g)$ has finite rank, the same is true for $g^{-1}T^*, g^{-1}T'^*$; so I'' will have finite rank.

Proof of (*): let $x \in X$, $x \notin I \cup I' \cup g^{-1}T^* \cup g^{-1}T'^*$. Thus, there exist $\alpha, \beta \in R$, not all zero, such that $\alpha fx + \beta gx \in T$, and there exist also $\gamma, \delta \in R$, not all zero, such that $\gamma gx + \delta hx \in T'$.

If $fx \in T^*$ then $1 \cdot fx + 0 \cdot hx \in T^* \subseteq T''$, hence $x \notin I''$. Similarly, if $hx \in T'^*$ then $x \notin I''$.

So, assume that $fx \notin T^*$, $hx \notin T'^*$; hence $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Similarly $\alpha \neq 0$, otherwise $\beta \cdot gx \in T$, $\beta \neq 0$, hence $x \in g^{-1}T^*$, impossible; in the same way, $\delta \neq 0$.

It follows that $(-\alpha\gamma) \cdot fx + (\beta\delta) \cdot hx \in T + T' \subseteq T''$ with $\alpha\gamma \neq 0$, $\beta\delta \neq 0$ (since R is a domain); this shows that $x \notin I''$.

THEOREM. *Let $f, g: X \to Y$ be linear transformations having kernels with finite rank. Then $f \equiv g$ if and only if $f^{-1}Q \equiv g^{-1}Q$ for every submodule Q of Y.*

PROOF. (I) Let $f \equiv g$ and let us assume already proved that if Q is a submodule of $fX \cap gX$ then $f^{-1}Q \equiv g^{-1}Q$.

We now take *any* submodule Q of Y; let $L = f^{-1}Q$, $N = g^{-1}Q$, $Q' = Q \cap fX \cap gX$, $L' = f^{-1}Q'$, $N' = g^{-1}Q'$; hence $L' = f^{-1}gX \cap L$, $N' = g^{-1}fX \cap N$.

By assumption, $(L' + N')/(L' \cap N')$ has finite rank. We need to show that $(L + N)/(L \cap N)$ has finite rank.

Since $fL = Q \cap fX$, $fL' = Q'$, then f induces an isomorphism

$$\bar{f}: L/L' \to (Q \cap fX)/Q'.$$

Now,

$$(Q \cap fX)/Q' = (Q \cap fX)/(Q \cap fX \cap gX) =$$

$$= [(Q \cap fX) + (fX \cap gX)]/(fX \cap gX) \subseteq (fX + gX)/(fX \cap gX).$$

By hypothesis, this last module has finite rank, so the same is true for L/L'.

In the same way, N/N' has finite rank.

Since $\frac{L+N}{L\cap N}\cong\frac{(L+N)/(L'\cap N')}{(L\cap N)/(L'\cap N')}$, it will be sufficient to prove that $(L+N)/(L'\cap N')$ has finite rank. From $\frac{(L+N)/(L'\cap N')}{(L'+N')/(L'\cap N')}\cong\frac{L+N}{L'+N'}$, it will be sufficient to notice that $\frac{L+N'}{L'+N'}\cong\frac{L}{L\cap(L'+N')}\cong\frac{L/L'}{[L\cap(L'+N')]/L'}$ has finite rank, and similarly, $\frac{L'+N}{L'+N'}$ has also finite rank.

This being so, let Q be a submodule of Y, $Q\subseteq fX\cap gX$, let $L=f^{-1}Q$, $N=g^{-1}Q$ and let us show that $L/(L\cap N)$, and similarly, $N/(L\cap N)$ have finite rank, hence $(L+N)/(L\cap N)$ will have finite rank too.

By hypothesis, there exists a submodule T of Y, having finite rank, and such that I_T has finite rank.

We claim that $L\subseteq I_T\cup f^{-1}T^*\cup(g^{-1}T+N)^*$.

Indeed, if $x\in L$, $x\notin I_T$, then there exist elements α, $\beta\in R$, not all zero, such that $\alpha\cdot fx+\beta\cdot gx\in T$.

If $\beta=0$ then $\alpha\neq 0$, so $x\in f^{-1}T^*$.

If $\beta\neq 0$ then $g(\beta x)\in T+Q$ (because $x\in L=f^{-1}Q$) hence $\beta x\in g^{-1}(T+Q)$.

Now $g^{-1}(T+Q)\supseteq g^{-1}T+g^{-1}Q$, and conversely, if $gx=t+q\in T+Q$, since $Q\subseteq gX$ then $q=gx'$, with $x'\in X$, hence $g(x-x')=t\in T$; so $x-x'\in g^{-1}T$ and $x\in g^{-1}T+g^{-1}Q$.

Thus, $\beta x\in g^{-1}T+g^{-1}Q$ and $x\in(g^{-1}T+N)^*$.

Consider now a collection of elements $l_i\in L$ having no nontrivial combination, with coefficients in K, belonging to $K\underset{R}{\otimes}[L\cap(g^{-1}T+N)]$; then, each $l_i\notin(g^{-1}T+N)^*$. Therefore either $l_i\in I_T$ or $l_i\in f^{-1}T^*$. Since the elements l_i must be a fortiori, linearly independent (with respect to K) and I_T, $f^{-1}T^*$ both have finite rank (because $\ker(f)$ has finite rank) we conclude that

$$(K\underset{R}{\otimes}L)/[K\otimes(L\cap(g^{-1}T+N))]$$

has finite dimension, that is $L/[L\cap(g^{-1}T+N)]$ has finite rank.

Finally, $\frac{L/(L\cap N)}{[L\cap(g^{-1}T+N)]/(L\cap N)}\cong\frac{L}{L\cap(g^{-1}T+N)}$ and $\frac{L\cap(g^{-1}T+N)}{L\cap N}\cong$
$\cong\frac{L\cap(g^{-1}T+N)}{N\cap[L\cap(g^{-1}T+N)]}\cong\frac{[L\cap(g^{-1}T+N)]+N}{N}\subseteq\frac{g^{-1}T+N}{N}\cong\frac{g^{-1}T}{g^{-1}T\cap N}$ have both finite rank; hence $\frac{L}{L\cap N}$ has finite rank.

(II) We assume now that $f\neq g$.

If $fX\neq gX$, that is $\frac{fX+gX}{fX\cap gX}$ has infinite rank, then either $fX/(fX\cap gX)$ or $gX/(fX\cap gX)$ has infinite rank. In the first case, for example, let $Q=gX$. Then

$$(f^{-1}Q+g^{-1}Q)/(f^{-1}Q\cap g^{-1}Q)=X/f^{-1}gX=\frac{f^{-1}(fX)}{f^{-1}(fX\cap gX)}=$$
$$=\frac{f^{-1}(fX)/\ker f}{f^{-1}(fX\cap gX)/\ker f}=\frac{fX}{fX\cap gX}$$

has infinite rank. So the theorem is true, with $Q=gX$.

Thus, we may assume that $fX \equiv gX$. In order to determine a submodule Q of Y for which $f^{-1}Q \not\equiv g^{-1}Q$, we shall make a construction, whose essential step we present now.

Let Q be any submodule of Y, having finite rank. Let $L = f^{-1}Q$, $N = g^{-1}Q$, $T = Q + fN + gL$, so T has also finite rank.

Since $f \not\equiv g$, I_{T^*} must have infinite rank; therefore $I_{T^*} \subsetneqq f^{-1}T^* + g^{-1}T^*$, because this last module has finite rank. Hence, there exists an element $x \in I_{T^*}$, $x \notin f^{-1}T^* + g^{-1}T^*$. Let $y = fx$, so $y \notin T^*$.

We define the submodule $Q' = Q + Ry$, let $L' = f^{-1}Q'$, $N' = g^{-1}Q'$, and we consider $(L' + N')/(L' \cap N')$.

We claim that $(L + N) \cap (L' \cap N') = L \cap N$.

In fact, if $z = l + n \in L' \cap N'$ then $fz = q + \alpha y$, $gz = q' + \alpha' y$ with $\alpha, \alpha' \in R$, $q, q' \in Q$. If $\alpha = \alpha' = 0$ then $z \in L \cap N$.

If $\alpha \neq 0$ then $\alpha \cdot fx = \alpha y = fz - q = fl + fn - q \in Q + fN \subseteq T$ hence $x \in f^{-1}T^*$, which is impossible. Similarly, it is impossible that $\alpha' \neq 0$.

This shows that $\dfrac{L+N}{L \cap N} \cong \dfrac{(L+N)+(L' \cap N')}{L' \cap N'} \subseteq \dfrac{L'+N'}{L' \cap N'}$.

By extending the scalars to K, we obtain

$$\frac{K \otimes (L+N)}{K \otimes (L \cap N)} \cong \frac{K \otimes [(L+N)+(L' \cap N')]}{K \otimes (L' \cap N')} \subseteq \frac{K \otimes (L'+N')}{K \otimes (L' \cap N')}.$$

Now, we show that $(L' + N')/(L' \cap N')$ has a rank strictly larger than that of $(L+N)/(L \cap N)$, that is, $\dfrac{K \otimes (L+N)}{K \otimes (L \cap N)}$ is strictly contained in $\dfrac{K \otimes (L'+N')}{K \otimes (L' \cap N')}$.

Let B be a basis of $K \otimes (L \cap N)$ contained in the system of generators $L \cap N \subseteq L + N$; thus, by the exchange lemma, there exists a basis B_1 of $K \otimes (L+N)$,such that $B \subseteq B_1 \subseteq L + N$.

Let us consider the elements $b_i \in B_1$, $b_i \notin B$.

We prove that it is impossible to find a non-trivial K-linear combination, belonging to $K \otimes (L' \cap N')$, of the elements x and b_i. For, if $\alpha x + \Sigma \beta_i b_i = \Sigma \gamma_j c_j$ with $\alpha, \beta_i, \gamma_j \in K$, and $c_j \in L' \cap N'$, by clearing denominators, we may assume $\alpha, \beta_i, \gamma_j \in R$. Hence $\alpha \cdot gx + \Sigma \beta_i \cdot gb_i = \Sigma \gamma_j (q_j + \delta_j y)$, with $gc_j = q_j + \delta_j y$, $q_j \in Q$, $\delta_j \in R$. So, $(-\Sigma \gamma_j \delta_j) \cdot fx + \alpha \cdot gx = \Sigma \gamma_j q_j - \Sigma \beta_i \cdot gb_i \in T^*$ and, from $x \in I_{T^*}$, we deduce that $\Sigma \gamma_j \delta_j = \alpha = 0$. Thus $\Sigma \beta_i b_i = \Sigma \gamma_j c_j \in (L' \cap N') \cap (L+N) = L \cap N$. By the choice of elements b_i, we deduce that each $\beta_i = 0$.

We have thus finished to construct from a finite rank submodule Q of Y a new submodule Q', in such a way that the rank of $(L+N)/(L \cap N)$ has increased.

In order to finish the proof of the theorem, we take any submodule Q_1 of Y, having finite rank, and let m_1 be the rank of $(L_1 + N_1)/(L_1 \cap N_1)$ (where, as usual $L_1 = f^{-1}Q_1$, $N_1 = g^{-1}Q_1$).

We construct $Q_2 = Q_1 + Ry_1$ as before, hence Q_2 has finite rank, and $(L_2 + N_2)/(L_2 \cap N_2)$ has rank $m_2 > m_1$.

After repeating the argument, by induction we let $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, hence,

$$L = f^{-1}Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i, \quad N = g^{-1}Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \quad \text{and} \quad L \cap N = \bigcup_{i=1}^{\infty} (L_i \cap N_i).$$

Now $(L \cap N) \cap (L_j + N_j) = \left[\bigcup_{i=j+1}^{\infty} (L_i \cap N_i)\right] \cap (L_j + N_j) = (L_{j+1} \cap N_{j+1}) \cap$ $\cap (L_j + N_j) = L_j \cap N_j$. Hence $(L_j + N_j)/(L_j \cap N_j) \subseteq (L+N)/(L \cap N)$, for every index j.

Thus the above inclusion must be always a strict inclusion and moreover $(L+N)/(L \cap N)$ must have rank larger than m_j, for every j; it follows that $(L+N)/(L \cap N)$ has infinite rank, and the theorem is true.

(Received 24 September 1962)

Bibliography

[1] P. RIBENBOIM, Fonctions modulo un antifiltre, *Math. Zeitschr.*, **77** (1961), pp. 195–206.

ON A METHOD FOR EXPANDING MULTIPLE INTEGRALS IN TERMS OF INTEGRALS IN LOWER DIMENSIONS

By

L. C. HSU (Changchun, China)

(*Presented by* P. TURÁN)

In this note the method used in a previous work [3] has been extended to the case of multiple integrals, and certain sharper estimates have been obtained for the remainders in expansions.

1. Let V_n be a bounded closed region in n-dimensional $(x_1, \ldots, x_n)$-space and let its boundary S_{n-1} be given by an equation

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{1}$$

such that $\Phi \geqq 0$ in V_n, where Φ is assumed to have continuous partial derivatives with respect to each of the variables. Suppose that the function $f(X) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ is continuously differentiable on V_n. It is known that we have the general GAUSS—GREEN—OSTROGRADSKY formula

$$\int_{V_n} \frac{\partial f(X)}{\partial x_n}\, dV = \int_{S_{n-1}} f(X) \frac{\partial x_n}{\partial v}\, dS, \tag{2}$$

where dS represents the surface-element of S_{n-1}, and $\partial x_n/\partial v$ is the derivative of the coordinate x_n with respect to the outward normal of the boundary surface.

In particular, assuming $f(X) = F(X)P(X)$, we may express (2) in the form

$$\int_{V_n} F \cdot \frac{\partial P}{\partial x_n}\, dV = \int_{S_{n-1}} F \cdot P \cdot \frac{\partial x_n}{\partial v}\, dS - \int_{V_n} P \cdot \frac{\partial F}{\partial x_n}\, dV. \tag{3}$$

This may be called the integration by parts for multiple integrals.

Let $F(X) \equiv F(x_1, \ldots, x_n)$ have continuous partial derivatives, with respect to x_n, of orders up to m $(m \geqq 1)$, and let $P(X)$ be a polynomial of the form

$$P(X) = x_n^m + Q(x_1, \ldots, x_n), \tag{4}$$

where the highest degree of x_n contained in Q is less than m. Then by successive application of (3) we easily obtain (cf. [3])

$$\int_{V_n} F(X)\, dV = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m!} \int_{S_{n-1}} \left(\frac{\partial^k F}{\partial x_n^k}\right)\left(\frac{\partial^{m-k-1} P}{\partial x_n^{m-k-1}}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial v}\right) dS + \varrho_m, \tag{5}$$

$$\varrho_m = \frac{(-1)^m}{m!} \int_{V_n} \left(\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}\right) \cdot P(X)\, dV. \tag{6}$$

In particular, if x_n can be solved from (1) and if V_n consists of all the points $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ subject to the following conditions

$$(7) \qquad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in V_{n-1}, \quad \Phi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq \Phi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

we may rewrite (5) in the form

$$(8) \qquad \int_{V_n} F(X)\, dV_n = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m!} \int_{V_{n-1}} \left[\frac{\partial^k F}{\partial x_n^k} \cdot \frac{\partial^{m-k-1} P}{\partial x_n^{m-k-1}} \right]_{x_n=\Phi_1}^{x_n=\Phi_2} dV_{n-1} + \varrho_m,$$

where $dV_k = dx_1 \ldots dx_k$ and $[g(X)]_{x_n=\Phi_1}^{x_n=\Phi_2} = g(x_1, \ldots, x_{n-1}, \Phi_2) - g(x_1, \ldots, x_{n-1}, \Phi_1)$.

2. Evidently the formula (8) has the meaning that it expresses an n-tiple integral in terms of certain $(n-1)$-tiple integrals with a remainder term given by (6). A problem to be worthy of consideration is that of finding suitable polynomials $P(X)$ of the form (4) such that $|\varrho_m|$ will have in a certain sense smallest possible estimates with respect to given regions of integration. Actually this is a variational problem concerning the minimization of a type of integral functionals. The general problem is not easily dealt with when V_n is an arbitrary region. In what follows we will be concerned only with the cases where the regions are either spherical or simplicial in n-dimensions; and use will be made of certain well-known special polynomials in several variables.

We shall make use of the following polynomials

$$(9) \qquad \Phi_m(X) = \frac{m!}{(2m)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m (x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1)^m,$$

$$(10) \qquad T_m(X) = \frac{m!}{(2m)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m [x_n^m (x_1 + \ldots + x_n - 1)^m].$$

These may be called, respectively, the polynomials of HERMITE—DIDON and of APPELL in n-dimensions (cf. [1], 12—4, 12—6; [2], § 5—§ 6). Clearly both $\Phi_m(X)$ and $T_m(X)$ are of the form (4).

For any function $f(X)$ continuous on V_n we define as norms of $f(X)$ by

$$\|f\| = \left(\int_{V_n} |f(X)|^2\, dV \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_C = \max_{X \in V_n} |f(X)|.$$

Moreover, we always denote $\alpha! = \Gamma(\alpha + 1)$ for any $\alpha \geqq 0$. We shall now prove the following two theorems.

THEOREM 1. *Let $F(X)$ have continuous partial derivatives, with respect to x_n, of orders up to m on the spherical region $\mathfrak{S}(x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1)$. Let V_n be defined by (7) and contained in $\mathfrak{S}$. Then we have*

$$(11) \qquad \int_{V_n} F\, dV_n = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m!} \int_{V_{n-1}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k F(X) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m-k-1} \cdot \Phi_m(X) \right]_{x_n=\Phi_1}^{x_n=\Phi_2} dV_{n-1} + \varrho_m,$$

where the remainder ϱ_m has the estimate

$$|\varrho_m| \leqq \left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}n} \cdot m!}{\left(m+\frac{n}{2}\right)!\,(2m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\|. \tag{12}$$

THEOREM 2. *Let $F(X)$ have continuous partial derivatives, with respect to x_n, of orders up to m on the simplicial region $\mathfrak{R}$ $(x_j \geqq 0,\ x_1 + \ldots + x_n \leqq 1)$. Let V_n be defined by* (7) *with $V_n \subset \mathfrak{R}$. Then we have*

$$\int_{V_n} F\,dV_n = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m!} \int_{V_{n-1}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k F(X) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m-k-1} T_m(X) \right]_{x_n=\Phi_1}^{x_n=\Phi_2} dV_{n-1} + \varrho_m, \tag{13}$$

where the remainder has the estimate

$$|\varrho_m| \leqq \left(\frac{m!\,m!}{(2m)!\,(2m+n)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\|. \tag{14}$$

It suffices to prove (12) and (14), since the formulas (11) and (13) are merely particular cases of (8). Making use of (6) and the BUNIAKOWSKY—SCHWARZ inequality we evidently have

$$|\varrho_m| \leqq \frac{1}{m!} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\| \left(\int_{V_n} |\Phi_m(X)|^2\,dV_n \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \tag{15}$$

$$\leqq \frac{1}{(2m)!} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\| \left(\int_{\mathfrak{S}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m (r^2-1)^m \right]^2 dV_n \right)^{\frac{1}{2}},$$

where $r^2 = x_1^2 + \ldots + x^2$. Let us now evaluate the integral

$$I_m = \int_{\mathfrak{S}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m (r^2-1)^m \right]^2 dV_n.$$

Clearly successive application of the integration formula (3) leads to

$$I_m = (-1)^m \int_{\mathfrak{S}} (r^2-1)^m \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{2m} (r^2-1)^m\,dV_n = (2m)! \int_{\mathfrak{S}} (1-r^2)^m\,dV_n. \tag{16}$$

Transforming $(x_1, \ldots, x_n)$ into the hyperspherical polar coordinates in the n dimensional space, we easily find

$$\int_{\mathfrak{S}} (1-r^2)^m\,dV_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^1 (1-r^2)^m \cdot r^{n-1}\,dr = \frac{\pi^{n/2} \cdot m!}{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Consequently, we have, in view of (15) and (16),

$$|\varrho_m| \leqq \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\| \left(\frac{\pi^{n/2} \cdot m!}{(2m)!\, \Gamma\left(m+\frac{n}{2}+1\right)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

which is the result given by (12).

The proof of (14) runs quite similarly as that of (12). Actually, making use of (6) and (3) successively and employing DIRICHLET's evaluation of multiple integrals, we easily obtain

$$|\varrho_m| \leqq \frac{1}{(2m)!} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\| \cdot \left\{ \int_{\mathfrak{R}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m \left(x_n^m \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1 \right)^m \right) \right]^2 dV_n \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{(2m)!} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\| \cdot \left\{ (-1)^m (2m)! \int_{\mathfrak{R}} x_n^m \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1 \right)^m dV_n \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{(2m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\| \cdot \left(\frac{m!\, m!}{\Gamma(2m+n+1)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

thus proving (14).

Notice that $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{R}$ have volumes $\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$ and $1/n!$ respectively; we may infer from (12) and (14) the following

$$(12)' \qquad |\varrho_m| \leqq \left(\frac{\pi^n \cdot m!}{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(m+\frac{n}{2}\right)! \, (2m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\|_C,$$

$$(14)' \qquad |\varrho_m| \leqq \left(\frac{m!\, m!}{n!\, (2m)!\, (2m+n)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\|_C.$$

3. Our choices of the polynomials $\Phi_m(X)$ and $T_m(X)$ in order to get estimates like (12) and (14) are actually suggested by the work of GRÖBNER [2]. It is known that GRÖBNER has formulated a minimization principle using calculus of variation for determining a type of orthogonal polynomials $p(x, y)$ of given degrees that make an integral minimum:

$$(17) \qquad \int_{V_2} [p(x, y)]^2 \, dx \, dy = \text{Minimum}.$$

Under certain normalization conditions (together with some boundary conditions) he showed that the following polynomials (cf. § 5—§ 6 of [2])

$$(18) \quad \Phi_{m,2} = \frac{m!}{(2m)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^m (x_1^2 + x_2^2 - 1)^m, \quad T_{m,2} = \frac{m!}{(2m)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^m [x_2^m (x_1 + x_2 - 1)^m]$$

give respectively the solutions to the minimization problem (17) with respect to the regions

$$\mathfrak{S}_2(x_1^2 + x_2^2 \leqq 1), \quad \mathfrak{R}_2(x_1 \geqq 0, \, x_2 \geqq 0, \, x_1 + x_2 \leqq 1).$$

Moreover, we see that the equality signs contained in (15) will hold whenever $V_n \equiv \mathfrak{S}$ and $(\partial/\partial x_n)^m F(X)/\Phi_m(X) = \text{Constant}$. Thus in a certain sense we may regard (12) as a smallest possible estimate of $|\varrho_m|$ for the case of two variables. Since GRÖBNER's process of minimization is capable of extension to the case of several variables (see § 2—§ 4 of [2]), we may of course make similar assertions about (12) and (14) with respect to the n-dimensional regions $V_n \equiv \mathfrak{S}$ and $V_n \equiv \mathfrak{R}$ respectively.

Both Theorems 1 and 2 can be applied to approximate calculation of multiple integrals. For instance, by repeated application of (11) or (13) we may treat a triple integral approximately as a sum of certain double integrals, and finally, as a sum of certain definite integrals, in which all the errors involved can be estimated by means of (12) or (14).

EXAMPLE. Denote by V_2 and V_3 the regions V_2 $(x, y \geqq 0, x+y \leqq 1)$ and $V_3(x, y, z \geqq 0, x+y+z \leqq 1)$ respectively. Let $f \equiv f(x, y, z)$ be continuous together with $\partial^k f/\partial z^k$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ on V_3. Let

$$g(x, y, z) = \frac{1}{30240}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^5 [(x+y+z-1)^5 \cdot z^5].$$

Then, applying Theorem 2 with $n = 3$ and $m = 5$, we have

$$\iiint_{V_3} f\,dV = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{120} \iint_{V_2} \left[\left(\frac{\partial^k f}{\partial z^k}\right)\left(\frac{\partial^{4-k} g}{\partial z^{4-k}}\right)\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dx\,dy + \varrho_5, \tag{19}$$

where the error term has the following estimate

$$|\varrho_5| \leqq \frac{1}{1252600} \left\| \frac{\partial^5 f}{\partial z^5} \right\|. \tag{20}$$

Furthermore, if $\partial^5 f/\partial z^5$ possesses higher partial derivatives with respect to x and y, we can even replace the right-hand side of (19) by a sum of definite integrals (taken over $[0, 1]$) plus a certain error term.

A remark to be worth mentioning here is that formulas (5) and (6) are actually valid for every $P(X)$ of the more general form

$$P(X) = x_n^m + \sum_{k=1}^{m} Q_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^{m-k}, \tag{4}*$$

where Q_k's are any continuous functions of $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. For, what we really need is the fact that $\partial^m P/\partial x_n^m = m!$. This remark will enable us to consider certain generalizations as given by the last two sections (see §§ 5—6).

4. It is clear that we cannot get infinite series expansions from (11) and (13) by letting $m \to \infty$. On the other hand, if we take $P(X)$ to be the form (cf. [4])

$$P(X) = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{21}$$

then an application of (5) yields

$$\int_{V_n} F(X)\,dV = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_{S_{n-1}} \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{\partial^{k-1} F}{\partial x_n^{k-1}}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial \nu}\right) dS + \varrho_m, \tag{22}$$

where

$$\frac{\partial x_n}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

and we see that the right-hand side of (22) can be extended to an infinite series provided that $F(X)$ is infinitely differentiable with respect to x_n and that $\varrho_m \to 0$ $(m \to \infty)$. By means of (6) we may establish the following

THEOREM 3. *Let V_n be contained in the unit hypercube $K(0 \leqq x_1 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq x_n \leqq 1)$, and let $F(X)$ have continuous partial derivatives, of orders up to m, with respect to x_n on V_n. Then the remainder term of* (22) *has the estimate*

$$|\varrho_m| \leqq \frac{1}{2^m \cdot (m+1)!} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\|_C. \tag{24}$$

Actually (24) may be verified immediately as follows

$$|\varrho_m| \leqq \frac{1}{m!} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\|_C \cdot \int_0^1 \left| x_n - \frac{1}{2} \right|^m dx_n = \frac{1}{2^m \cdot (m+1)!} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial x_n^m} \right\|_C.$$

EXAMPLE. Let D be a plane region contained in the square $K(0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1)$. Let Γ be the boundary of D given by the equations $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$, with $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \equiv (\varphi(\beta), \psi(\beta))$, $\psi'(t)$ being continuous. Let

$$f_\nu(x, y) = \left(\frac{\partial^{\nu-1} F}{\partial x^{\nu-1}}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, m).$$

Then the formula (22) implies with $n = 2$:

$$\iint_D F(x, y)\,dx\,dy = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} \int_\alpha^\beta f_\nu(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\,dt + \varrho_m,$$

where $|\varrho_m|$ has estimates, e. g.

$$|\varrho_6| \leqq \frac{1}{322560} \|F_x^{(6)}\|_C, \quad |\varrho_8| \leqq \frac{1}{92897280} \|F_x^{(8)}\|_C.$$

5. To be able to get more general results than Theorems 1 and 2, we assume now the boundary surface S_{n-1} of V_n to be given by the equation

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_n^2 + g(Z) \cdot x_n + h(Z) = 0, \tag{25}$$

where $g(Z)=g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ and $h(Z)=h(x_1, \ldots, x_{n-1})$ are differentiable, and $\Phi \leqq 0$ for all points of V_n. Sometimes (25) only defines a part of S_{n-1}, and the other parts of S_{n-1} may be given by some coordinate planes, e. g. $x_1=0, \ldots, x_{n-1}=0$. Let us introduce the function (cf. [9] and [10])

$$P(X) = \frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m (\Phi(x_1, \ldots, x_n))^m. \tag{26}$$

Clearly this is of the form (4)*. Then the remainder term of (5) as given by (6) has the following estimates (cf. the proof of Theorem 1):

$$|\varrho_m| \leqq \frac{1}{(2m)!}\left\|\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}\right\|\left(\int_{V_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m (\Phi(X))^m\right]^2 dV\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{(2m)!}\left\|\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}\right\|\cdot\left((2m)!\int_{V_n}(-\Phi(X))^m\, dV\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2m)!}}\left\|\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}\right\|\cdot\|(-\Phi)^{\frac{m}{2}}\| \leqq \frac{1}{\sqrt{(2m)!}}\left\|\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}\right\|_C\cdot\|(-\Phi)^{\frac{m}{2}}\|_C\cdot|V_n|,$$

where $|V_n|$ denotes the volume of V_n. Thus we are led to the

THEOREM 4. *Let $P(X)$ be defined by* (26) *in which $\Phi(X)$ is given by* (25). *Then we have the expansion formula* (5) *with the following remainder estimates*

$$|\varrho_m| \leqq \frac{1}{\sqrt{(2m)!}}\|F_{x_n}^{(m)}\|\cdot\|(-\Phi)^{\frac{m}{2}}\|, \tag{27}$$

$$|\varrho_m| \leqq \frac{1}{\sqrt{(2m)!}}\|F_{x_n}^{(m)}\|_C\cdot\|(-\Phi)^{\frac{m}{2}}\|_C\cdot|V_n|. \tag{28}$$

Moreover, if $V_n^* \subset V_n$ with boundary surface S_{n-1}^*, then (5), (27) *and* (28) *still hold with V_n, S_{n-1} being replaced by V_n^*, S_{n-1}^* respectively.*

It is not difficult to verify that Theorems 1 and 2 are just particular cases of Theorem 4 with $\Phi \equiv x_1^2+\ldots+x_n^2-1$, $\Phi \equiv x_n(x_1+\ldots+x_n)-1$ $(0 \leqq x_i \leqq 1)$, respectively.

6. Another type of general results may be formulated by assuming

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_n^\lambda + g_1(Z)x_n^{\lambda-1}+\ldots+g_\lambda(Z) = 0 \tag{29}$$

instead of (25), where $g_i(Z) \equiv g_i(x_1, \ldots, x_{n-1})$ are smooth functions defined on some domain V_{n-1}, and λ is a positive integer $\geqq 2$. Take

$$P(X) \equiv (\Phi(x_1, \ldots, x_n))^m. \tag{30}$$

This is a polynomial with degree λm in x_n. Evidently for all the points of S_{n-1} we

have $\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu}(\Phi(x_1, \ldots, x_n))^m = 0 \quad (0 \leqq \nu \leqq m-1)$. Denote

$$L_k(F, P) = \left(\frac{\partial^k F}{\partial x_n^k}\right)\left(\frac{\partial^{\lambda m-k-1} P}{\partial x_n^{\lambda m-k-1}}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial v}\right).$$

Thus by applying (5), (6) and the mean value theorem of integral calculus we may establish the

THEOREM 5. *Let $F(X)$ have λm-th continuous partial derivative $F_{x_n}^{(\lambda m)}(X)$ with respect to x_n on V_n. Then we have the expansion formula*

$$\int_{V_n} F(X)\, dV = \sum_{k=0}^{(\lambda-1)m-1} \frac{(-1)^k}{(\lambda m)!} \int_{S_{n-1}} L_k\big(F(X), (\Phi(X))^m\big)\, dS + \varrho_m, \tag{31}$$

where the remainder ϱ_m can be expressed in the form

$$\varrho_m = \frac{(-1)^{\lambda m}}{(\lambda m)!} F_{x_n}^{(\lambda m)}(\tilde{X}) \int_{V_n} (\Phi(X))^m\, dV, \tag{32}$$

$\tilde{X} \equiv (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ being a certain point of V_n, and consequently,

$$|\varrho_m| \leqq \frac{1}{(\lambda m)!} \|F_{x_n}^{(\lambda m)}\| \cdot \|(\Phi(X))^m\|. \tag{33}$$

It seems interesting to consider the particular case $\lambda = 2$:

$$\Phi(X) \equiv x_n^2 + g_1 x_n + g_2 = (x_n - \Phi_1(Z))(x_n - \Phi_2(Z)) = 0,$$

where $Z \equiv (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in V_{n-1}$, $\Phi_1(Z) \leqq \Phi_2(Z)$, and all the points of V_n satisfy the condition $\Phi_1(Z) \leqq x_n \leqq \Phi_2(Z)$. In fact, for such a particular case S_{n-1} is bounded by the surfaces defined over V_{n-1}:

$$x_n = \Phi_1(Z), \quad x_n = \Phi_2(Z).$$

Then as a consequence from Theorem 5 we have

$$\int_{V_n} F(X)\, dV = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu!} \frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{2m}{\nu}} \int_{V_{n-1}} G_\nu(Z)\, dZ + \varrho_m, \tag{34}$$

$$G_\nu(Z) = (\Phi_2(Z) - \Phi_1(Z))^\nu \left[F_{x_n}^{(\nu-1)}(Z, \Phi_1(Z)) + (-1)^{\nu-1} F_{x_n}^{(\nu-1)}(Z, \Phi_2(Z))\right], \tag{35}$$

$$\varrho_m = \frac{(-1)^m}{2m+1}\left[\frac{m!}{(2m)!}\right]^2 F_{x_n}^{(2m)}(\tilde{X}) \int_{V_{n-1}} [\Phi_2(Z) - \Phi_1(Z)]^{2m+1}\, dZ. \tag{36}$$

The most special case is given by $n=1$, $\Phi_1(Z)\equiv a$, $\Phi_2(Z)\equiv b$ with $\int_{V_0} G_\nu(Z)\,dZ \equiv$ $\equiv G_\nu(Z)$, viz.

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{2m}{\nu}} \frac{(b-a)^\nu}{\nu!}\left[F^{(\nu-1)}(a)+(-1)^{\nu-1}F^{(\nu-1)}(b)\right]+\varrho_m,$$

$$\varrho_m = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left[\frac{m!}{(2m)!}\right]^2 F^{(2m)}(\xi)\cdot(b-a)^{2m+1} \qquad (a\leqq\xi\leqq b).$$

This is the well-known formula of K. PETR which has nice applications to ordinary numerical quadrature.

The author is indebted to the reviewer for kindly drowing his attention to fill up a gap in the original manuscript.

MATHEMATICS DEPARTMENT
JILIN UNIVERSITY
CHANGCHUN, CHINA

(Received 30 September 1962)

References

[1] A. ERDELYI, *Higher transcendental functions* (1953), Vol. II. Chap. 12.
[2] W. GRÖBNER, Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen, *Monatshefte für Mathematik*, **52** (1948), pp. 38–54.
[3] L. C. HSU, A few expansion formulas for the approximate integration over plane regions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), pp. 387–392.

ON A NEW PROOF OF LITOFF'S THEOREM

By

C. FAITH (New Brunswick, N. J., USA) and Y. UTUMI (Rochester, N. Y., USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

N. JACOBSON and C. E. RICKART ([3], p. 490, Th. 9) have ascribed the following theorem to LITOFF (see also [2], p. 90, Th. 3).

LITOFF'S THEOREM. *Every simple ring*[1] *S having a minimal one-sided ideal is locally a simple matrix ring over a division ring D, that is, there exists a division ring D such that each finite subset B of S is contained in a subring of S which is isomorphic to D_n, for some natural number n.*[2]

The only published proof [2], [3] of this theorem rests on the theory of dual vector spaces. Because of its importance we offer another proof of Litoff's theorem which is essentially ring-theoretical and which ultimately rests on the WEDDERBURN—ARTIN theorem.

The main idea of our proof is that any finite subset B of S is contained in a subring of the form eSe, where $e=e^2 \in S$. Then the structure of the subrings eSe are determined (Lemma 4).

It is easi to see ([1], or [2], p. 64) that S is a direct sum of its minimal left ideals, and also a direct sum of its minimal right ideals. Consequently (e. g. [2], p. 61, Corollaries 1 and 3), each nonzero left (resp. right) ideal of S is a direct sum of minimal left (resp. right) ideals of S. Furthermore ([2], p. 57, Prop. 1), each minimal left (resp. right) ideal of S has the form Se (resp. eS) for an appropriate idempotent $e \in S$, and any two minimal left ideals are isomorphic left S-modules.

We recall that a ring is (von NEUMANN) regular in case to each element a there corresponds an element x in the ring such that $axa=a$.

LEMMA 1. *S is a regular ring.*

PROOF. S is regular if and only if each principal left ideal has an idempotent generator. We will show that any *finitely generated left ideal B* has an idempotent generator. If $B \neq 0$, then a direct sum of minimal left ideals. If B is finitely generated, then there exist finitely many minimal left ideals $I_1, \ldots, I_n$ of S such that $B = I_1 + \ldots + I_n$. If $n=1$, then $I=Se, e=e^2 \in S$, as noted above. Now suppose $n>1$, and assume that any direct sum of fewer than n minimal left ideals of S has an idempotent generator. Let $I_1 = Se$, where $e=e^2 \in S$. Then $I_1 = Be$, and

$$B = I_1 + B(1-e),$$

[1] By agreement $S^2 \neq 0$.

[2] D_n denotes the ring of all $n \times n$ matrices over D.

where $B(1-e) = \{y-ye | y \in B\}$. Now

$$B/I_1 = B(1-e),$$

and also

$$B/I_1 = I_2 + \ldots + I_n.$$

Hence, by the induction hypothesis, there exists $f=f^2 \in S$ such that $B(1-e) = Sf$, and then $B = Se + Sf$. Letting $g = f+e-ef$, and using the fact that $fe=0$, it follows that $g^2=g$, and that $B=Sg$ as required.

LEMMA 2. *For any finite subset B of S there exists an idempotent $e \in S$ such that $B \subseteqq eSe$.*

PROOF. By the proof of Lemma 1, the left ideal generated by B has an idempotent generator f. By symmetry, the right ideal generated by B and f has an idempotent generator g. Now set $e = f+g-fg$. Then $e^2=e$, $fe=f$, $eg=g$, so that

$$B=gBf=egBfe \subseteqq eSe.$$

LEMMA 3. *For any idempotent $0 \neq e \in S$, eSe is simple.*

PROOF. Let I denote any nonzero ideal of eSe. Then SIS is a nonzero ideal of S, so $SIS=S$. Then

$$I \supseteqq (eSe)\, I(eSe) = (eS)(eIe)(Se) = (eS)\, I(Se) = e(SIS)e = eSe,$$

that is, $I=eSe$. Thus, eSe contains no nontrivial ideals. Furthermore, since $0 \neq e = e^2 \in (eSe)^2$, then $(eSe)^2 = eSe$, and eSe is simple.

LEMMA 4. *There exists a division ring D such that for each idempotent $0 \neq e \in S$ there exists a natural number n (depending on e) such that $eSe \cong D_n$.*

PROOF. As noted before

$$Se = Se_1 \oplus \ldots \oplus Se_n,$$

where $e_i = e_i^2 \in S$, and where Se_i is a minimal left ideal of S, $i=1, \ldots, n$. We may assume that the e_i's are orthogonal idempotents, and then $e_ie = ee_i$, $i=1, \ldots, n$. Since, for any idempotent $f \in S$, Sf is a minimal left ideal if and only if fSf is a division ring ([2], p. 65, Prop. 1), it follows that

$$e_iSe_i = e_i(eSe)e_i$$

is a division ring, and that $eSe_i = eSee_i$ is a minimal left ideal of eSe. Thus,

$$eSe = eSe_1 \oplus \ldots \oplus eSe_n,$$

being a direct sum of finitely many minimal left ideals, is artinian. Since eSe is also simple, by the classical Wedderburn—Artin structure theorem, $eSe \cong D_n$, where D is a division ring isomorphic to, say $e_1(eSe)e_1 = e_1Se_1$.

Since any two minimal left ideals of S are isomorphic as left S-modules, and since the corresponding endomorphism rings are therefore isomorphic, it follows that

$$D \cong e_1 S e_1 \cong fSf$$

for any idempotent f such that Sf is a minimal left ideal of S, that is, D depends only on S.

(Received 10 October 1962)

References

[1] J. DIEUDONNÉ, Sur le socle d'un anneau simplex infinis, *Bull. Soc. Math. France,* **70** (1942), pp. 46–75.
[2] N. JACOBSON, Structure of rings, *Amer. Math. Soc. Colloquium Pub.*, **37**, Providence, R. I., 1956.
[3] N. JACOBSON and C. E. RICKART, Jordan Homomorphisms of rings, **69** (1950), pp. 479–502.

PROGRAMMIERUNG UND PARTIELL-REKURSIVE FUNKTIONEN

Von

RÓZSA PÉTER (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. KALMÁR)

Es ist ein allgemeines Gefühl, daß das Wirken und das Ergebnis eines für einen Rechenautomaten bestimmten Programms irgendwie rekursiv ist. Etwas genauer formuliere ich das so, daß das Wirken des Programms eine rekursive Funktion des Programms zu sein scheint; und da dieses Wirken, vom Programm abhängig, zu irgendeinem Ergebnis führt oder nicht, so scheint das Ergebnis des Programms eine partiell-rekursive Funktion des Programms zu sein. Enthält ein Programm auch Variablen (d. h. Parametern), so handelt es sich um ein Programmschema, und das Ergebnis eines Programmschemas scheint eine partiell-rekursive Funktion der betreffenden Variablen zu sein. Das Ziel dieser Arbeit ist, nach exakter Definition der nötigen Begriffe, für diese Vermutungen exakte Beweise zu geben; und so weit es möglich ist, auch das Umgekehrte zu zeigen.

Betreffs der Kenntnisse über rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch.[1]

I

1. Einfachheitshalber nehmen wir an, daß Speicherzellen mit Adressen in unbeschränkter Anzahl zur Verfügung stehen, und auch ihr Inhalt wird immer der Menge der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ... entnommen. („Leer zu sein" soll immer „mit 0 besetzt zu sein" bedeuten.) Keine dieser Annahmen ist wesentlich: Erstens kann man im Fall eines Rechenautomaten mit höchstens c Speicherzellen sagen, daß die Zellen mit Adressen größer als c ständig mit 0 besetzt sind; zweitens, wenn man z. B. Operationen mit reellen Zahlen programmieren will, so hat man dabei nur die entsprechenden Operationen zu modifizieren (z. B. um die Näherungswerte 0,47 und 1,9 zu multiplizieren, hat man 47 mit 19 zu multiplizieren und das Ergebnis mit 1000 zu dividieren). In der Praxis gibt es auch für die Inhalte der Zellen eine obere Schranke c'.

In den Folgenden wird unter „Zahl" immer eine natürliche Zahl verstanden.

Die Schleife, auf welche das Ergebnis gedruckt wird, soll auf Zellen unbeschränkter Anzahl geteilt sein (in der Praxis kann sie ja immer nach Bedarf verlängert werden). Ich werde die Adressen der Speicherzellen mit 0, 1, 3, 5, ... und die Zellen der Schleife mit 2, 4, 6, ... bezeichnen. Die Adresse 0 soll immer für den „Befehlszähler" vorbehalten sein: steht da i, dann soll zunächst der Befehl, der unter der Adresse i steht, durchgeführt werden. Es erweist sich als zweckmäßig auch manche andere Zellen für bestimmte Zwecke vorzubehalten: so soll immer

[1] R. PÉTER, *Rekursive Funktionen* (Budapest, 1957), 2-te Auflage.

die Zelle 1 der Platz der oft zu verwendenden Zahl 1 sein, und zunächst die Zelle 3 zum Abzählen der Druckakte dienen: am Anfang soll hier immer 1 stehen, und wenn hier i steht, dann soll die Maschine zunächst in die Zelle $2i$ der Schleife drucken.

Unter momentanem „Automateninhalt" werde ich eine Funktion $f(m)$ verstehen, wo m die Adressen 0, 1, 2, ... durchläuft, und der Funktionswert an der Stelle m gleich dem momentanen Inhalt der Zelle m ist. Der Inhalt einer Zelle mit einer ungeraden Adresse größer als 3 kann auch als die Code-Zahl eines Befehls interpretiert werden. Ich werde zunächst den Begriff eines Befehlstyps angeben.

Nehmen wir an, daß der Rechenautomat „t-adressig" ist. Dann ist ein Befehlstyp B immer eine t-stellige Funktion, deren Variablen die Adressen 0, 1, 3, 5, ... (unter $2c-1$, falls die Speicherkapazität c ist) durchlaufen, und deren Wert an einer beliebigen Stelle $a_1, \ldots, a_t$ eine Transformation

$$f(m) \Rightarrow f'(m)$$

des Automateninhaltes ist, die darin besteht, daß für endlich viele m statt $f(m)$ je eine bestimmte rekursive[2] Funktion von $a_1, \ldots, a_t$ und $f(a_1), \ldots, f(a_t)$ gesetzt wird.

Ein Befehlstyp, auf bestimmte Argumente bezogen, gibt einen Befehl.

Die in einem Programm teilnehmenden Befehle können gödelisiert, d. h. durch Code-Zahlen vertreten werden, und der Inhalt einer ungeraden Adresse größer als 3 kann als die Code-Zahl eines Befehls betrachtet werden.

Für jedes t gibt es bekanntlich beiderseits primitiv-rekursive Zuordnungen zwischen den natürlichen Zahlen und ihren $t+1$-gliedrigen Folgen; man benutzt eine solche zum Gödelisieren. Das bedeutet primitiv-rekursive Funktionen

$$c_t(m_0, m_1, \ldots, m_t),\ k_0(m),\ k_1(m),\ \ldots,\ k_t(m)$$

mit der Eigenschaft: für $i=0, 1, \ldots, t$ gilt

$$k_i(c_t(m_0, m_1, \ldots, m_t)) = m_i.$$

Wir unterscheiden zunächst arithmetische, Sprung- und Druckbefehle. Zur ersten und letzten Art gehört immer auch, daß der Befehlszähler um 1 vergrößert werden soll. Bei einem Sprungbefehl $B(a_1, \ldots, a_t)$ wird das nur dann verlangt, wenn eine gewisse Rekursive Relation zwischen $a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t)$ *nicht* besteht; besteht diese Relation, dann verlangt der Sprungbefehl eine ebenfalls von $a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t)$ rekursiv abhängige Abänderung des Inhaltes der Adresse 0.

Zu einem Rechenautomat gehören endlich viele Befehlstypen jeder Art; die Anzahl der arithmetischen, Sprung- und Druckbefehlstypen sei der Reihe nach z_1, z_2, z_3. Und diese Befehlstypen seien mit B_{3g_r+r} $(q_r=0, 1, \ldots, z_r-1)$ bezeichnet, wo r für die drei Arten der Reihe nach 1, 2, 3 ist. Der Index 0 soll zu einem speziellen Befehlstyp B_0 = „stop" gehören; dieser kann als die identische Transformation des Automateninhaltes aufgefasst werden, welche jeden Zelleninhalt, also auch den

[2] In der Praxis sind das ganz einfache primitiv-rekursive Funktionen, nur bei einem befehlsmodifizierenden Befehl etwas komplizierter, aber jedenfalls primitiv-rekursiv. Ich werde schlechthin nur über rekursive Funktionen reden; je nachdem darunter primitiv- oder allgemein-rekursiv verstanden wird, wird das in Nr. 4 definierte, universelles Programm-Wirken darstellende Funktion $f(n, m)$ primitiv- oder allgemein-rekursiv ausfallen.

Befehlszähler unverändert läßt, so daß nach der Anwendung von „stop" nichts mehr geschieht (sogenanntes „dynamisches stop").

Nun kann ein m (das als Inhalt einer Zelle vorkommt), als Code-Zahl jenes Befehls betrachtet werden, dessen Index $k_0(m)$ ist, und als Argumente dieses Befehls können $k_1(m), \ldots, k_t(m)$ betrachtet werden.

2. Die genauere Definition der geschilderten Befehlstypen unseres Rechenautomats lautet:

1) Zu jedem $i = 3q+1$, $q < z_1$ gibt es eine Zahl r_i, ferner $2t$-stellige rekursive Funktionen $g_i^{(1)}, \ldots, g_i^{(r_i)}$ und $h_i^{(1)}, \ldots, h_i^{(r_i)}$, wobei $h_i^{(1)}, \ldots, h_i^{(r_i)}$ nur ungerade Werte größer als 3 annehmen (und bei Speicherkapazität c keine größere als $2c-3$; dasselbe gilt auch für die später eingeführten Funktionen l_i und s_i), so daß falls der aktuelle Automateninhalt $f(m)$ ist, dann für zugelassene Argumente

$$\mathrm{B}_i(a_1, \ldots, a_t) = f(m) \Rightarrow f'(m)$$

ist, wo für $j = 1, 2, \ldots, r_i$

$$f'(h_i^{(j)}(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t))) = g_i^{(j)}(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t)),$$

$$f'(0) = f(0)+1,$$

und falls $m \neq 0$ und für $j = 1, 2, \ldots, r_i$

$$m \neq h_i^{(j)}(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t))$$

ist,

$$f'(m) = f(m)$$

gilt.

(Falls für die Zelleninhalte eine obere Schranke c' gegeben ist, so kann z. B. verlangt werden, daß bei der Überschreitung dieser Schranke geklingelt werden soll. Es könnte eine Adresse, z. B. die Adresse 5, zu diesem Zweck vorbehalten sein, so daß diese sonst immer leer sei, nur dann nicht, wenn geklingelt werden soll. Dann hätte man die Definition von B_i so zu modifizieren, daß die darin vorkommenden Funktionen $h_i^{(j)}$ nur Werte größer als 5 annehmen, und die durch $\mathrm{B}_i(a_1, \ldots, a_t)$ bewirkte Transformation $f(m) \Rightarrow f'(m)$ sich wie folgt gestaltet: für $j = 1, 2, \ldots, r_i$ ist

$$f'(h_i^{(j)}(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t))) = \begin{cases} g_i^{(j)}(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t)) \\ \quad \text{falls } g_i^{(j)}(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t)) \leqq c', \\ f(h_i^{(j)}(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t))) \text{ sonst,} \end{cases}$$

$$f'(5) = \begin{cases} 1, \text{ falls } (Ej)[j \leqq r_i \,\&\, g_i^{(j)}(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t)) > c'] \vee f(0)+1 > c', \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

$$f'(0) = \begin{cases} f(0)+1, \text{ falls } f(0)+1 \leqq c', \\ f(0) \text{ sonst;} \end{cases}$$

und falls $m \neq 0$ und $m \neq 5$ und für $j = 1, 2, \ldots, r_i$

$$m \neq h_i^{(j)}(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t))$$

gilt, so ist

$$f'(m) = f(m).$$

Ähnliches gilt auch in den folgenden Fällen; darauf gehe ich dort nicht mehr ein. All dies kann die Rekursivität des Programm-Wirkens nicht zerstören.)

2) Zu jedem $i = 3q+2$, $q<z_2$ gibt es eine $2t$-stellige rekursive Relation R_i und eine $2t$-stellige Funktion l_i, so daß, falls der aktuelle Automateninhalt $f(m)$ ist, dann für zugelassene Argumente

$$B_i(a_1, \ldots, a_t) = f(m) \Rightarrow f'(m)$$

ist, wo

$$f'(0) = \begin{cases} l_i(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t)), & \text{falls } R_i(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t)), \\ f(0)+1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und für $m>0$

$$f'(m) = f(m)$$

gilt.

3) Zu jedem $i = 3q+3$, $q<z_3$ gibt es eine $2t$-stellige rekursive Funktion s_i, welche nur ungerade Werte größer als 3 annimmt, so daß, falls der aktuelle Automateninhalt $f(m)$ ist, dann für zugelassene Argumente

$$B_i(a_1, \ldots, a_t) = f(m) \Rightarrow f'(m)$$

ist, wo

$$f'(2f(3)) = f(s_i(a_1, \ldots, a_t, f(a_1), \ldots, f(a_t))),$$

$$f'(3) = f(3)+1,$$

$$f'(0) = f(0)+1,$$

und für $m \neq 2f(3)$, $m \neq 3$, $m \neq 0$

$$f'(m) = f(m)$$

gilt.

4) Ist der aktuelle Automateninhalt $f(m)$, dann ist für zugelassene Argumente

$$B_0(a_1, \ldots, a_t) = f(m) \Rightarrow f(m).$$

5) Kommt bei der Durchführung eines Programms unter den Argumenten eines Befehls eine gerade Zahl größer als 0 (oder bei Speicherkapazität c eine Zahl größer als $2c-3$), oder als Index eines Befehls ein von allen aufgezählten abweichendes i (also ein $i = 3q+1$ mit $q \geqq z_1$, oder $i = 3q+2$ mit $q \geqq z_2$, oder $i = 3q+3$ mit $q \geqq z_3$) vor, dann wollen wir von diesem sinnlossen Befehl zum nächsten übergehen; für solche $a_1, \ldots, a_t$ oder i sei also

$$B_i(a_1, \ldots, a_t) = f(m) \Rightarrow f'(m),$$

wo

$$f'(0) = f(0)+1$$

und für $m \neq 0$

$$f'(m) = f(m)$$

ist. (Es könnte wiederum auch so eingerichtet werden, daß als Folge eines sinnlosen Befehls „geklingelt" — d. h. z. B. 1 unter eine zu diesem Zweck vorbehaltene „Klingel-Adresse" gesetzt wird.)

3. Ein Programm P ist eigentlich nichts anderes, als ein gegebener Automateninhalt $f(m)$, wo mit einem festen p — das ist die „Länge" des Programms — für

$m > p$ und für jede von 0 verschiedene gerade Zahl m

$$f(m) = 0,$$

ferner nach unserem Übereinkommen

$$f(1) = 1 \text{ und } f(3) = 1$$

gilt. Wird dieses Programm P in Bewegung gesetzt, so wirkt zuerst der Inhalt der Zelle mit der Adresse $f(0)$, also $f(f(0))$. Dieses bedeutet den Befehlstyp $B_{k_0(f(f(0)))}$ auf die Argumente $k_1(f(f(0)))$, ..., $k_t(f(f(0)))$ angewandt. Ist das Ergebnis davon der neue Automateninhalt $f'(m)$ (wobei nur endlich viele Zellen berührt wurden, also auch $f'(m)$ von einem m an überall 0 ist, und dasselbe nach jedem weiteren Schritt gilt), so wirkt im folgenden Schritt der Inhalt der Zelle mit der Adresse $f'(0)$, also $f'(f'(0))$. Usw., bis ein Befehl „stop", d. h. B_0 an die Reihe kommt. Dann ist das Ergebnis des Programms die Zahlenfolge, die auf der Schleife steht, also unter den Adressen $2(m+1)$ für $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Das Wirken des Programms wird durch eine Funktion $f(n, m)$ beschrieben, wobei n die Schritte der Durchführung des Programms abzählt, m die Adressen 0, 1, 2, ... durchläuft, und der Funktionswert gleich dem Inhalt der Zelle m nach dem n-ten Schritt ist. Das Programm selbst ist dann die Funktion $f(0, m)$ von m, und das Ergebnis des Programms

$$f(n^*, 2(m+1)),$$

wo

$$n^* = \mu_n[k_0(f(n, f(n, 0))) = 0]$$

ist, falls es ein solches n überhaupt gibt (d. h. falls „stop" überhaupt einmal an die Reihe kommt). Sonst (falls der Automat bis zur Ewigkeit weiterwirkt, z. B. im Fall eines unendlichen Zyklus) hat das Programm kein Ergebnis.

Ich werde zeigen, daß $f(n, m)$ eine rekursive Funktion ist.

4. Sei das betrachtete Programm eine gegebene Funktion $f_0(m)$. Diese ist sicher primitiv-rekursiv (darauf komme ich noch zurück), und es gilt

$$(*) \qquad f(0, m) = f_0(m).$$

Nehmen wir an, daß $f(n, m)$ für ein n schon bekannt ist. Wie gesagt, ist der nächste Schritt des Wirkens des Programms die Durchführung des Befehls $f(n, f(n, 0))$. Das ist der Befehlstyp $B_{k_0(f(n, f(n, 0)))}$, auf die Adressen $k_1(f(n, f(n, 0)))$, ..., $k_t(f(n, f(n, 0)))$ angewandt. Nr. 2 zeigt, wie daraus $f(n+1, m)$ entstehen wird.

Ich schicke voraus, daß da z. B. für $s_i(x_1, \ldots, x_{2t})$ nur endlich viele Werte von i in Betracht kommen, und für andere i diese Funktion beliebig, also auch gleich 0 definiert werden kann, so $s_i(x_1, \ldots, x_{2t})$ eine rekursive Funktion der Variablen $i, x_1, \ldots, x_{2t}$ ist; sie kann ja durch die Fallunterscheidung

$$s_i(x_1, \ldots, x_{2t}) = \begin{cases} s_3(x_1, \ldots, x_{2t}), & \text{falls } i = 3 \\ s_6(x_1, \ldots, x_{2t}), & \text{falls } i = 6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{3z_3}(x_1, \ldots, x_{2t}), & \text{falls } i = 3z_3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert werden. Ähnliches gilt für r_i, l_i und R_i, ferner können mit derselben Erweiterung (als gleich 0 definiert, wo sie bisher undefiniert waren) $h_i^{(j)}(x_1, \ldots, x_{2t})$ und $g_i^{(j)}(x_1, \ldots, x_{2t})$ als rekursive Funktionen der Variablen $i, j, x_1, \ldots, x_{2t}$ definiert werden. (Man erinnere sich daran, daß weder s_i noch $h_i^{(j)}$ an bisher zugelassenen Stellen den Wert 0 angenommen haben. So ist die Forderung $h_i^{(j)} \neq 0$ gleichbedeutend damit, daß i und j in der ursprünglichen Definition von $h_i^{(j)}$ zugelassene Zahlen sind.)

Gibt es nun unter

$$k_1(f(n, f(n, 0))), \ldots, k_t(f(n, f(n, 0)))$$

keine geraden Zahlen größer als 0 (und im Fall einer Speicherkapazität c keine Zahlen größer als $2c-3$), und gilt

$$k_0(f(n, f(n, 0))) \begin{cases} \equiv 1 \mod (3) \\ < 3z_1 + 1, \end{cases}$$

dann ist mit

$$r = \max(r_1, r_4, \ldots, r_{3z_1-2})$$

nach 1) der Nr. 2 für $j = 1, 2, \ldots, r$

$$f(n+1, m) = g^{(j)}_{\mathbf{k_0}(f(n, f(n, 0)))}(k_1(f(n, f(n, 0))), \ldots$$
$$\ldots, k_t(f(n, f(n, 0))), f(n, k_1(f(n, f(n, 0)))), \ldots, f(n, k_t(f(n, f(n, 0))))),$$

falls

$$m = h^{(j)}_{\mathbf{k_0}(f(n, f(n, 0)))}(k_1(f(n, f(n, 0))), \ldots, k_t(f(n, f(n, 0))),$$
$$f(n, k_1(f(n, f(n, 0)))), \ldots, f(n, k_t(f(n, f(n, 0))))) \neq 0,$$
$$f(n+1, 0) = f(n, 0) + 1,$$

und für sämtliche andere Argumente m

$$f(n+1, m) = f(n, m).$$

Ganz ähnlich sieht man durch Prüfung der Fälle 2), 3), 4) und 5) der Nr. 2, daß jedenfalls

$$(**) \qquad f(n+1, m) = g(m, f(n, m), f(n, 1), f(n, 3), f(n, f(n, 0)),$$
$$f(n, k_1(f(n, f(n, 0)))), \ldots, f(n, k_t(f(n, f(n, 0)))),$$
$$f(n, s_{k_0(f(n, f(n, 0)))}(k_1(f(n, f(n, 0))), \ldots, k_t(f(n, f(n, 0))),$$
$$f(n, k_1(f(n, f(n, 0)))), \ldots, f(n, k_t(f(n, f(n, 0)))))),$$

wo g eine rekursive Funktion ist.

(*) und (**) ergeben eine eingeschachtelte Rekursion für $f(n, m)$, woraus sich $f(n, m)$ bekanntlich als eine (in den Funktionen $g_i^{(j)}$, $k_i^{(j)}$, l_i, s_i) primitiv-rekursive Funktion ergibt.

5. Da sich $f(n, m)$ als rekursiv erwiesen hat, ist nach Nr. 3 das Ergebnis

$$f(n^*, 2(m+1))$$

mit $$n^* = \mu_n[k_0(f(n, f(n, 0))) = 0]$$

des Programms eine partiell-rekursive Funktion.

Eine partiell-rekursive Funktion wovon? Ist sie für irgendein m definiert, so ist sie für alle m definiert. Ob sie überall oder nirgends definiert ist, das hängt ganz vom Programm, d. h. nur von der Funktion f_0 ab. Unsere Funktion $f(n, m)$ *gibt eine universelle Beschreibung für Programm-Wirken;* für verschiedene $f_0(m)$ erhält man daraus die Beschreibung des Wirkens der einzelnen Programme. Ein $f_0(m)$ ist eigentlich eine endliche Zahlenfolge. Ist die „Länge" des Programms p, und werden die Werte

$$f_0(0)=y_0,\quad f_0(1)=y_1,\ \ldots,\quad f_0(p)=y_p$$

als Argumente betrachtet, so ist

$$f_0(m)=\begin{cases} y_0, & \text{falls } m=0,\\ y_1, & \text{falls } m=1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_p, & \text{falls } m=p,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

eine primitiv-rekursive Funktion von $y_0, y_1, \ldots, y_p$, *also ist auch* $f(n, m)$ nach (*) und (**) *eine rekursive Funktion von* m *und* $y_0, y_1, \ldots, y_p$. *Daher ist* n^* und somit auch *das Ergebnis* $f(n^*, 2(m+1))$ *des Programms eine partiell-rekursive Funktion von* m *und* $y_0, y_1, \ldots, y_p$.

Wenn bei einem bestimmten Programm für die Werte einiger dieser Zahlen y_i Variablen $x_1, \ldots, x_r$ stehen (diese bedeuten dann eigentlich Leerstellen, die besetzt werden, bevor ein zum Schema gehöriges Programm zu wirken beginnt), so hat man mit einem Programmschema zu tun, und das Ergebnis des Programmschemas (und so auch jedes Glied der Ergebnis-Folge) ist eine partiell-rekursive Funktion der Variablen $x_1, \ldots, x_r$. Wenn man durch einen Rechenautomat eine Funktion berechnen will, so hat man mit einem solchen Programmschema zu tun. *So erweisen sich die durch Programmschemata berechenbare Funktionen als partiell-rekursiv, und sogar als primitiv-rekursiv, falls für* n^* *eine primitiv-rekursive Schranke angegeben werden kann.*

Ich werde auch das Umgekehrte beweisen, so weit dies möglich ist: *wird für Zelleninhalte keine Schranke gestellt, so kann jede partiell-rekursive Funktion durch ein geeignetes Programmschema berechnet werden. Bei einer Schranke für Zelleninhalte* (die in der Praxis immer gestellt wird) *ergibt sich daraus nur eine Art „unvollständige" Berechnung.* Wenn man sich auf primitiv-rekursive Funktionen beschränkt, so gilt mehr: *wird ein endliches Argumentenbereich umgrenzt, so kann zu einer beliebigen primitiv-rekursiven Funktion* φ *eine Speicherkapazität* c *und eine untere Schranke* c' *für maximale Zelleninhalte so bestimmt werden, daß* φ *durch ein Programmschema berechnet werden kann, welches diese Beschränkungen nicht überschreitet.*

II

5. Zur Berechnung einer zahlentheoretischen Funktion wird es nicht notwendig sein eine Zelle für Druckabzählungen und jede zweite Adresse für die Schleife vorzubehalten. Das Ergebnis soll ja bei der Berechnung einer r-stelligen Funktion an jeder Stelle eine $r+1$-gliedrige Folge sein, die aus den betrachteten Argumenten und dem zu ihnen gehörigen Funktionswert besteht; diese $r+1$ Werte können

unter ein für allemal gewählten Adressen gesammelt werden; und der Befehl „stop" kann so modifiziert werden, daß davor die Inhalte dieser Zellen (in der gegebenen Reihenfolge) gedruckt (aber auch unter ihren ursprünglichen Adressen beibehalten) werden sollen. Die Folge der Befehle, die all das bewirken, soll „r-stop" genannt werden. (Natürlich geschieht eine solche Abänderung der Bisherigen nur der kürzeren Schreibweise halber, und ist gar nicht notwendig.)

Unter den Adressen 0 und 1 sollen auch weiterhin der Befehlszähler und die Zahl 1 stehen. Die Adresse 2 soll für die Anzahl der Argumente vorbehalten sein. So kommen die Argumente der zu berechnenden r-stelligen Funktion zu Beginn und zum Schluß des Wirkens eines Programms immer unter die Adressen 3, 4, ..., $r+2$, und der Funktionswert kommt zum Schluß immer unter die Adresse $r+3$. Es können danach noch eine Anzahl von Adressen für Argumente und Werte von Hilfsfunktionen vorbehalten werden. Bis zur letzten dieser Adressen erstreckt sich der „unbewegliche Teil" der Adressenfolge, deren nach $r+3$ folgenden Adressen zu Beginn und zum Schluß immer leer sind. Nachher folgt der „Arbeitsteil" der Adressenfolge: eine Folge von zu Beginn leeren Adressen für Zahlen, die nicht als Befehle wirken (sondern als aufzubewahrende Daten und Zwischenergebnisse, Zyklenzähler, usw.); und danach der „Befehlsteil": eine Folge von Adressen für Code-Zahlen von Befehlen. Die Folge der zum Befehlsteil gehörigen anfänglichen Inhalte soll der „wirkende Teil" des Programmschemas genannt werden.

Die wirkenden Teile der in den folgenden konstruierten Programmschemata werden so beschaffen sein, daß in je einem ein einziger „stop" Befehl vorkommt, und während der Durchführung eines zum Schema gehörigen Programms es nie vorkommen kann, daß ein zum wirkenden Teil gehöriges „nicht-stop" Befehl zu einem „stop" Befehl modifiziert wird; ferner wird kein Befehl auf eine Adresse über den Befehlsteil hinaus bezogen werden.

So muß bei einem Programmschema P, das eine r-stellige Funktion berechnet, der Arbeitsteil nicht unbedingt unmittelbar nach dem unbeweglichen Teil, und der Befehlsteil nicht unbedingt unmittelbar auf den Arbeitsteil folgen; beide können beliebig nach rechts geschoben werden — und die dadurch frei gewordenen Zwischenadressen können auch beliebig besetzt werden — ohne Einfluß auf das Ergebnis eines zu P gehörigen Programms. Wenn sich nämlich der unbewegliche Teil bis zur Adresse b erstreckt, und die Gliederanzahl des Arbeitsteils s ist, ferner der Anfang des Arbeitsteils unter die Adresse $b+1+u$ und des Befehlsteils unter die Adresse $b+1+u+s+v$ geschoben wird, dann soll diese Schiebung mit einer Modifikation des wirkenden Teils P* des Programmschemas P zu einem $\bar{\text{P}}^*$ verbunden sein, die darin besteht, daß jede der Berufungen der Befehle von P* auf eine Adresse b_0, oder auf den Inhalt einer Adresse b_0, nur für $b_0 \leqq b$ unverändert bleibt, sonst statt auf b_0, für $b_0 = b+1+i$ $(i=0, 1, \ldots, s-1)$ auf $b+1+u+i$, für $b_0 = b+1+s+i$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ auf $b+1+u+s+v+i$ bezogen wird. Natürlich kann ein nach rechts geschobener Arbeitsteil oder Befehlsteil ähnlich auch nach links geschoben werden; beide bewegen sich rechts von der Adresse b, ohne ineinanderzugreifen, ganz frei, ohne Einfluß auf das Ergebnis. Wenn ich in den Weiteren den wirkenden Teil

$$\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_e$$

eines Programmschemas irgendwie zu

$$\bar{\mathrm{V}}_1, \ldots, \bar{\mathrm{V}}_e$$

modifiziere, so soll darin immer sinngemäß auch eine solche Schiebung inbegriffen sein.

Die Gliederanzahl des Arbeitsteils eines Programmschemas P, die sich mit jedem in den Folgenden konstruierten Programmschema zugleich ergibt, werde ich mit $s(P)$ bezeichnen; und die Gliederanzahl des wirkenden Teiles von P mit $e(P)$. Auch ferner bezeichne ich die Anzahl der bis „stop" erfolgenden Schritte eines zu P gehörigen Programms mit $n^*(P)$. Diese letzte Anzahl kann auch von den Argumenten abhängen; s und e werden von diesen unabhängig sein.

Ich sage nun, daß ein Programmschema, dessen wirkender Teil unter einer Adresse $b_1 > r+3$ beginnt und unter einer Adresse $b_2 \geqq b_1$ endet, wobei unter der Adresse 0 eine Zahl d mit $b_1 \leqq d \leqq b_2$, unter der Adresse 1 die Zahl 1, und unter der Adresse 2 die Zahl r steht, ferner jede Adresse m mit $r+3 < m < b_1$ oder $m > b_2$ leer ist, eine r-stellige Funktion φ partiell berechnet, wenn nach Besetzung der Adressen 3, 4, ..., $r+2$ (die zu Beginn leer sind, aber übersichtlichkeitshalber symbolisch mit $x_1, \ldots, x_r$ besetzt werden) mit beliebigen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ das in Gang gesetzte Programm entweder kein Ergebnis hat (nie zu „stop" gelangt), oder sein Ergebnis eine $r+1$-gliedrige Zahlenfolge

$$a_1, \ldots, a_r, a$$

ist; d. h. nach „stop" — und natürlich auch mit einem Schritt davor — unter den Adressen 3, 4, ..., $r+3$ der Reihe nach diese Werte stehen. Dann ist[3]

$$a = \varphi(a_1, \ldots, a_r).$$

6. Bekanntlich ist eine zahlentheoretische Funktion φ dann und nur dann partiell-rekursiv, wenn es eine Funktionenfolge

(***) $$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$$

gibt, für welche

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = x_1 + 1, \quad \varphi_l = \varphi$$

ist, und φ_i für $1 < i \leqq l$ aus in der Folge (***) früher stehenden Funktionen durch Hinzunahme einer fiktiven Variablen, Substitution, primitive Rekursion der Form

$$\varphi_i(x_1, 0) = \varphi_{i_1}(x_1)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2 + 1) = \varphi_{i_2}(x_1, x_2, \varphi_i(x_1, x_2)),$$

oder μ-Operation der Form

$$\mu_j[\varphi_{i_0}(x_1, j) = 0]$$

[3] Man könnte verlangen, daß

$$r, a_1, \ldots, a_r, \varphi(a_1, \ldots, a_r)$$

auf der Schleife erscheine; dies würde nur sehr wenig Zusätzliches in den folgenden Programmschemata fordern. Oder, im Gegenteil, man könnte sich auch damit begnügen, daß der berechnete Funktionwert auf die Schleife kommt — und so die Einführung von „r-stop" unnötig wird —, ein Verkaufsautomat gibt ja auch nicht die „Argumente", die ihn zu Wirken nötigen, zurück; nur ihr „Gegenwert" fällt von ihm heraus.

entsteht. Man zeigt leicht, daß man sich dabei auf solche Substitutionen beschränken kann, wo nur in Funktionen von höchstens zwei Variablen substituiert wird.[4]

Wird die μ-Operation weggelassen, so wird diese Definition zur Definition der primitiv-rekursiven Funktionen.

Nach den Obigen, wenn ich Programmschemata zur Berechnung der Ausgangsfunktionen φ_0 und φ_1 angebe, ferner zeige, wie ein Programmschema zur Berechnung von φ_i für $1 < i \leqq l$, aus jenen der in der Folge (***) früher stehenden Funktionen berechnenden Programmschemata konstruiert werden kann, aus welchen φ_i durch eine der aufgezählten Operationen entsteht, dann ergibt sich damit die Kontsruktion eines die Funktion φ berechnenden Programmschemas. Das kann ohne Einschränkung nur unter der idealisierenden Annahme durchgeführt werden, daß in die Speicherzellen beliebig große Zahlen gesetzt werden können; die Werte einer partiell-rekursiven Funktion (sogar einer primitiv-rekursiven Funktion, und sogar bei Einschränkung der Argumente) können ja beliebig groß sein.

Unter den aufgezählten Operationen ist die einzige, die eine Funktion von mehr Variablen zustandebringt, als auf welche sie angewandt wird, die Hinzunahme einer fiktiven Variablen. Entstehen w Glieder der Folge (***) durch diese Operation, so sind alle Glieder der Folge höchstens w+1-stellig. Damit also immer genügend viele Adressen für die Argumente zur Verfügung stehen sollen, wird sich der unbewegliche Teil jedes der Programmschemata, die ich zur Berechnung der Glieder der Folge (***) angeben werde, bis zur Adresse w+4 erstrecken.

Zur Berechnung der Ausgangsfunktionen können also folgende Programmschemata dienen:

Für 0:

Adresse	Inhalt	
0 (Befehlszähler)	w+5	
1	1	
2 (Argumentenzähler)	0	
3 (Funktionswert)	0	
⋮	⋮	
w+4	0	
w+5	D	„0-stop"
w+6	stop	

D bedeutet hier den Druckbefehl für den Inhalt der Adresse 3; wie der Befehlszähler zeigt, beginnt das Wirken des Programms damit. Nachher folgt gleich „stop". (Für D und „stop" stehen natürlich ihre Code-Zahlen; dasselbe gilt auch für die Bezeichnungen in den folgenden Programmschemata.) Argumente gibt es hier nicht; so ist das gleich kein Schema, sondern ein Programm. Die Glieder-

[4] Mit Hinzunahme gewisser komplizierteren Ausgangsfunktionen könnte die Operation der primitiven Rekursion durch ihren Spezialfall Iteration ersetzt, sogar auch ganz eliminiert werden.

anzahl des Arbeitsteils bzw. des wirkenden Teils ist hier

$$s=0 \quad \text{und} \quad e=2,$$

ferner ist

$$n^*=1.$$

Für x_1+1:

Adresse	Inhalt		
0 (Befehlszähler)	w+5		
1	1		
2 (Argumentenzähler)	1		
3 (Argument)	x_1		
4 (Funktionswert)	0		
⋮	⋮		
w+4	0		
w+5	A_1		wirkender Teil
w+6	A_2		wirkender Teil
w+7	D_1	„1-stop"	wirkender Teil
w+8	D_2	„1-stop"	wirkender Teil
w+9	stop	„1-stop"	wirkender Teil

Hier bedeutet der Befehl A_1: „bringe den Inhalt der Adresse 3 unter die Adresse 4 — ohne ihn dort zu streichen"; und der Befehl A_2: „addiere den Inhalt der Adresse 1 zur unter der Adresse 4 stehenden Zahl". D_1 und D_2 sind natürlich die Druckbefehle für die Inhalte der Adressen 3 und 4.

Wird für x_1 eine beliebige Zahl a_1 gesetzt, dann bewirkt das Programm, daß diese auch in die Funktionswertzelle eingeführt, und dort dazu 1 addiert wird; darauf folgt dann „1-stop". So erscheint auf der Schleife

$$a_1, \quad a_1+1.$$

Die Gliederanzahl des Arbeitsteils bzw. des wirkenden Teils ist hier

$$s=0 \quad \text{und} \quad e=5,$$

ferner ist

$$n^*=4.$$

In den Weiteren werde ich die Rollen der Adressen nicht mehr aufschreiben, und den Inhalt einer Adresse m wieder mit $f(m)$ bezeichnen.

7. Für größere r lohnt es sich, r-stop im wirkenden Teil durch eine Befehlsmodifikation zu verkürzen.

Nehmen wir an, daß in einer Phase des Wirkens eines Programms, das eine r-stellige Funktion für Argumente $a_1, \ldots, a_r$ berechnet, für zwei Adressen q_1, q_2, die Zahl r unter der Adresse q_1 steht, und die leere Adresse q_2 für einen Zyklenzähler zur Verfügung steht. (Unter der Adresse 1 steht dabei, wie immer, die Zahl 1.) Dann erfüllen die folgenden, aufeinanderfolgenden sieben Befehle, nach einem Sprungbefehl S zur Adresse $y+1$, die Rolle vom „r-stop":

Adresse	Inhalt
y	A'_1 : „Stop".
$y+1$	A'_2 : „Addiere $f(1)$ unter der Adresse q_1 zu $f(q_1)$".
$y+2$	S'_1 : „Ist $f(q_1)=f(q_2)$, so springe zur Adresse y (d. h. setze unter 0 die Zahl y)".
$y+3$	D′ : „Drucke $f(3)$ auf die Schleife".
$y+4$	M′: „Modifiziere $f(y+3)$" (auf das „wie?" komme ich zurück).
$y+5$	A'_3 : „Addiere $f(1)$ unter q_2 zu $f(q_2)$".
$y+6$	S'_2 : „Unbedingt (im Einklang mit den Vorherigen könnte man sagen: falls $f(1)=f(1)$ ist) springe zur Adresse $y+2$".

Die in M′ geforderte Modifikation des Inhaltes der Adresse $y+3$ soll darin bestehn, daß dieser auf eine um 1 größere Adresse als eher bezogen werden soll. Erinnern wir uns daran, daß es primitiv-rekursive Funktionen k_0, k_1, c_1 gibt, so daß, falls unter der Adresse $y+3$ die Code-Zahl m steht, nach Nr. 1 der betreffende 1-adressige Druckbefehl der Befehl mit dem Index $k_0(m)$ ist, und auf die Adresse $k_1(m)$ bezogen werden soll, ferner falls für m

$$m' = c_1(k_0(m),\ k_1(m)+1)$$

gesetzt wird, sich

$$k_0(m')=k_0(m),\quad k_1(m') = k_1(m)+1$$

ergibt, also m' die Code-Zahl desselben Befehltyps ist, auf um 1 grösseres Argument bezogen. Die gewünschte Modifikation wird also erfüllt, wenn die unter der Adresse $y+3$ stehende Zahl m durch m' ersetzt wird. Die Rechenautomaten können das leisten (auch für 2-adressige Befehle; eventuell in zwei Schritten).

Wie gesagt, beginnt das Wirken dieser Befehlsfolge mit der Durchführung des unter der Adresse $y+1$ stehenden Befehls. Danach steht $r+1$ unter der Adresse q_1. Damit wird der Zyklenzähler — der von 0 ausgehend immer um 1 erhöht wird — verglichen; und falls sie gleich sind, also nach $r+1$ Zyklen, folgt „stop". Die einzelnen Schritte eines Zyklus sind: Drucken der Inhalte der aufeinanderfolgenden Adressen, mit dem Inhalt der Adresse 3 beginnend, da infolge der sich immer wiederholenden Modifikation, der Druckbefehl auf immer um 1 größere Adressen bezogen wird. So ergibt sich tatsächlich das Resultat vom „r-stop". Die dazu führende (von y, q_1, q_2 abhängige) Befehlsfolge werde ich „$\{y+1, q_1, q_2\}$-r-stop Schema" nennen.

Man rechnet leicht nach, daß in einem „r-stop Schema" bis zum „stop" $(r+1)5+2$ Schritte führen.

8. Ich schicke noch ein ähnliches Hilfsschema voraus, das in den Folgenden von Nutzen sein wird.

Nehmen wir an, daß in einer Phase des Wirkens eines Programms mit der Adresse g beginnend j sich aneinander schließende leere Adressen vorhanden sind, und wir wollen die Inhalte der Adressen $g_0, g_0+1, \ldots, g_0+(j-1)$ unter diese verschieben, wobei die beiden Adressenfolgen nicht ineinandergreifen (d. h. entweder $g_0+(j-1) < g$ oder $g_0 > g+(j-1)$ gilt). Zum Schluß soll ein Sprung zu einer Adresse z geschehen. Ich werde die Befehlsfolge, die zu einer solchen Verschiebung führt, wobei noch die Annahme gemacht wird, daß in der betrachteten Phase für zwei Adressen q_1, q_2, eine Zahl x unter der Adresse q_2 und $j+x$ unter der Adresse q_1 steht, ein „$\{g_0, g, q_1, q_2, z\}$-j-Verschiebungsschema" nennen.

Diese 5-gliedrige Befehlsfolge lautet:

Adresse	Inhalt
y	S_1'' : „Ist $f(q_1)=f(q_2)$, so springe zur Adresse z".
$y+1$	A_1'' : „Bringe $f(g_0)$ – die Adresse g_0 entleerend – unter die Adresse g".
$y+2$	M'': „Modifiziere $f(y+1)$".
$y+3$	A_2'' : „Addiere $f(1)$ unter q_2 zu $f(q_2)$".
$y+4$	S_2'' : „Unbedingt springe zur Adresse y".

Und dazu gehört noch der 6-te Befehl unter der Adresse z: „Entleere die Adresse q_2 (d. h. setze 0 darunter)".

Die von M'' geforderte Modifikation besteht darin, daß beide Adressen, auf die sich der Befehl A_1'' bezieht, um 1 vergrößert werden sollen.

Die Entleerung der Adresse q_2 zum Schluß ist darum notwendig, weil hier zum Schluß nicht „stop" an die Reihe kommt, sondern der Übergang auf die Durchführung anderer Befehle, welche eventuell über diese Adresse verfügen; sonst geschieht alles sehr ähnlich wie in Nr. 7; dort wurde ja eigentlich eine spezielle Folge von Inhalten sich aneinander schließender Adressen in aufeinanderfolgenden Zellen der Schleife verschoben.

Man rechnet leicht nach, daß eine j-Verschiebung aus $5j+1$ Schritten besteht.

Da ein j-Verschiebungsschema aus 6 Befehlen besteht, lohnt es sich nur für $j>6$ dieses anzuwenden; sonst verwendet man besser die 6 Befehle: „Bringe den Inhalt der Adresse g_0+i unter die Adresse $g+i$ $(i=0, 1, 2, 3, 4, 5)$." Ähnliches gilt für ein r-stop Schema, das zusammen mit dem dazu führenden Sprungbefehl aus 8 Befehlen besteht. Einheitlichkeitshalber werde ich aber auch für kleine j und r diese Schemata verwenden. Falls in den Folgenden der wirkende Teil P_i^* eines Programmschemas, das eine r-stellige Funktion berechnet, in der Konstruktion eines anderen funktionberechnenden Programmschemas teilnimmt, wird das in P_i^* auftretende „r-stop" sowieso meistens durch einen einzigen Sprungbefehl ersetzt.

So sollen auch die in Nr. 6 angegebenen Programmschemata, welche die Ausgangsfunktionen 0 und x_1+1 berechnen, in diesem Sinne abgeändert, und die

so entstehenden Programmschemata durch P_I bzw. P_{II} bezeichnet werden. Nach den Obigen gilt dann (da hier für q_1 die Adresse 2 selbst benutzt werden kann):

$$s(P_I)=1, \quad e(P_I)=8, \quad n^*(P_I)=8, \quad s(P_{II})=1, \quad e(P_{II})=10, \quad n^*(P_{II})=15.$$

9. Nun kehren wir zurück zu den Operationen, durch welche die Funktionen der Folge (***) zu Beginn der Nr. 6 erzeugt werden.

Nehmen wir zunächst an, daß eine Funktion $\varphi_{i_0}(x_1, \ldots, x_r)$ durch ein Programmschema P_0, mit einem bestimmten $s_0 = s(P_0)$, und mit dem wirkenden Teil P_0^*:

$$V_1, \ldots, V_{e_0}$$

berechnet wird. Ich gebe ein Programmschema P an, welches dieselbe als Funktion φ_i von

$$x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}$$

berechnet.

Der kürzeren Schreibweise halber soll die letzte Adresse des ursprünglichen Arbeitsteils mit w_1, und die letzte Adresse des neuen Arbeitsteils mit w_2 bezeichnet werden.

Zuerst soll P_0^* (nebst Schiebung) derart modifiziert werden, daß sein „r-stop" Teil durch die Code-Zahl jenes Sprungbefehls ersetzt wird, welcher folgendes fordert: „Unbedingt setze unter die Adresse 0 die Zahl w_2+1". Natürlich müssen dann die nachher kommenden Adressen, und alle Berufungen auf diese um 6 vermindert werden; bei späteren Ersetzungen von r-stop-Befehlfolgen durch wenigere Befehle soll eine solche Abänderung der nachher kommenden Adressen immer inbegriffen sein.

Ich schicke noch voraus, daß falls nichts anderes gesagt wird, bei Übertragung des Inhaltes einer Adresse unter eine andere, die ursprüngliche Adresse immer entleert werden soll (doch bei der Addition zu einem bzw. Subtraktion von einem anderen Zelleninhalt nicht).

Die modifizierte Form von P_0^* sei durch

$$\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_{\overline{e}_0}$$

bezeichnet, wobei $\overline{e}_0 = e_0 - 6$ ist.

Bevor dies zu wirken beginnt, werden folgende Befehle in Betracht gezogen:

A_4: „Bringe $f(r+3)$ unter w_1+1."

A_5: „Subtrahiere $f(1)$ unter 2 von $f(2)$."

Und unter der Adresse w_2+1 wird folgender Befehl stehen:

A_1: „Bringe $f(r+3)$ unter $r+4$."

Danach folgen:

A_2: „Bringe $f(w_1+1)$ unter $r+3$."

A_3: „Addiere $f(1)$ unter 2 zu $f(2)$."

Zum $r+1$-stop führt der Sprungbefehl:

S: „Unbedingt setze unter 0 die Zahl w_2+6."

Das ganze Programm lautet (wobei seitlich der ursprüngliche Teil des Arbeitsteils der Länge s_0 mit u_0, und der neu hinzugenommene Teil mit v bezeichnet wird — mit sinngemäßer Indexänderung auch in den später folgenden Programmschemata):

	Adresse	Inhalt	
	0	w_2+12	
	1	1	
	2	$r+1$	
	3	x_1	
	⋮	⋮	
	$r+2$	x_r	
	$r+3$	x_{r+1}	
	⋮	⋮	
	$w+4$	0	
u_0	⋮	⋮	
u_0	$w_1=w+4+s_0$	0	
v	$w_2=w_1+1$	0	
	w_2+1	A_1	
	w_2+2	A_2	
	w_2+3	A_3	
	w_2+4	S	
	⋮	⋮	$\{w_2+6, 2, w_1+1\}-(r+1)-\text{stop}$
	w_2+12	A_4	
	w_2+13	A_5	
	w_2+14	$\overline{V}_1$	
	⋮	⋮	
	$w_2+\bar{e}_0+13$	$\overline{V}_{\bar{e}_0}$	$\to w_2+1$

Man sieht, daß hier

$$s(P) = s(P_0)+1$$

und wegen $\bar{e}_0 = e_0-6$

$$e(P) = e(P_0)+7$$

ist, ferner ist

$$n^*(P) = n^*(P_0)+12.$$

Werden für $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}$ beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}$ gesetzt, so beginnt das Wirken des Programms damit, daß zur Entleerung der Adresse $r+3$ das Argument a_{r+1} zur Aufbewahrung verschoben wird. Unter der Adresse $r+3$ erscheint dann der durch die jetzt an die Reihe kommenden $\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_{\bar{e}_0}$ berechnete Wert $\varphi_{i_0}(a_1, \ldots, a_r)$ (falls φ_{i_0} für $a_1, \ldots, a_r$ definiert ist; sonst hat das Programm kein Ergebnis, aber dann ist φ_i auch für $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}$ nicht definiert; das Entsprechende werde ich in den späteren Programmschemata nicht immer wiederholen). Dieser wird auf seinen richtigen Platz, und a_{r+1} auf seinen ursprünglichen Platz gebracht. Jetzt folgt „$r+1$-stop", wonach auf der Schleife die Folge der Werte

$$a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \quad \varphi_i(a_1, \ldots, a_r)$$

erscheint.

Soll die zusätzliche Variable nicht nach den bisherigen gesetzt werden, das kann nachher durch eine Permutation der Variablen, und dies durch Vertauschungen benachbarter Variablen erreicht werden. Wie das letztere durch ein Programmschema bewirkt wird, das zeige ich für

$$\psi(x_1, \ldots, x_r) = \varphi_{i_0}(x_1, \ldots, x_{j+1}, x_j, \ldots, x_r)$$

mit dem ursprünglichen φ_{i_0}.

Die neuen Befehle dazu sind in der Reihenfolge ihres Wirkens:

A_1: „Bringe $f(j+2)$ unter w_1+1."

A_2: „Bringe $f(j+3)$ unter $j+2$."

A_3: „Bringe $f(w_1+1)$ unter $j+3$."

S : „Unbedingt setze unter 0 die Zahl w_2+6."

Das Programmschema lautet:

	Adresse	Inhalt	
	0	w_2+12	
	1	1	
	2	r	
	3	x_1	
	⋮	⋮	
	$j+2$	x_j	
	$j+3$	x_{j+1}	
	⋮	⋮	
	$r+2$	x_r	
	$r+3$	0	
	⋮	⋮	
	$w+4$	0	
u_0	⋮	⋮	
u_0	$w_1=w+4+s_0$	0	
v	$w_2=w_1+1$	0	
	w_2+1	A_1	
	w_2+2	A_2	
	w_2+3	A_3	
	w_2+4	S	
	⋮	⋮	$\{w_2+6, 2, w_1+1\}-r-$stop
	w_2+12	A_1	
	w_2+13	A_2	
	w_2+14	A_3	
	w_2+15	$\overline{V}_1$	
	⋮	⋮	
	$w_2+\overline{e}_0+14$	$\overline{V}_{\overline{e}_0}$	$\rightarrow w_2+1$

Das Funktionieren dieses Schemas erklärt sich von selbst nach den Vorangehenden. Hier ist

$$s = s(\mathrm{P}_0)+1 \quad \text{und} \quad e = e(\mathrm{P}_0)+8,$$

ferner

$$n^* = n^*(\mathrm{P}_0)+8.$$

10. Nun gebe ich ein Programmschema P zur Berechnung der Funktion

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_r) = \varphi_{i_0}(\varphi_{i_1}(x_1, \ldots, x_r), \varphi_{i_2}(x_1, \ldots, x_r))$$

an, wobei zunächst $r \geqq 2$ sein soll, und zur Berechnung der Funktionen φ_{i_0}, φ_{i_1}, φ_{i_2} bereits Programmschemata P_0, P_1, P_2 mit bestimmten $s_0 = s(\mathrm{P}_0)$, $s_1 = s(\mathrm{P}_1)$, $s_2 = s(\mathrm{P}_2)$ und mit den wirkenden Teilen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P}_0^* & \mathrm{P}_1^* & \mathrm{P}_2^* \\ \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{e_0}; & \mathrm{V}_1^{(1)}, \ldots, \mathrm{V}_{e_1}^{(1)}; & \mathrm{V}_1^{(2)}, \ldots, \mathrm{V}_{e_2}^{(2)} \end{array}$$

vorhanden sind.

Diese wirkenden Teile sollen (nebst Schiebungen) derart zu

$$\bar{\mathrm{V}}_1, \ldots, \bar{\mathrm{V}}_{\bar{e}_0}; \quad \bar{\mathrm{V}}_1^{(1)}, \ldots, \bar{\mathrm{V}}_{\bar{e}_1}^{(1)}; \quad \bar{\mathrm{V}}_1^{(2)}, \ldots, \bar{\mathrm{V}}_{\bar{e}_2}^{(2)}$$

modifiziert werden, daß ihre „2-stop" bzw. „r-stop" Teile durch die Code-Zahlen je eines Sprungbefehls ersetzt werden, die unbedingt fordern, daßunter die Adresse 0

im Fall P_0^* die Zahl w_2+3,
im Fall P_1^* die Zahl $\mathrm{w}_2+\bar{e}_0+30$
im Fall P_2^* die Zahl w_2+16

gesetzt werden soll.

Die neu hinzuzunehmenden Befehle werde ich in der Reihenfolge ihres Wirkens angeben.

A_{10}: „Bringe $f(r+3)$ unter w_1+2."
A_3 : „Bringe $f(3)$ unter w_1+1."
A_4 : „Bringe $f(\mathrm{w}_1+2)$ unter 3."
A_5 : „Bringe $f(4)$ unter w_1+2."
A_6 : „Bringe $f(r+3)$ unter 4."
A_7 : „Addiere $f(1)$ unter w_1+r+2 zu $f(\mathrm{w}_1+r+2)$."
A_8 : „Bringe $f(2)$ unter w_1+r+1."
A_9 : „Bringe $f(\mathrm{w}_1+r+2)$ unter 2, ohne ihn unter w_1+r+2 zu streichen."
A_1 : „Entleere die Adresse w_1+r+2 (d. z. z. B. bringe $f(r+3)$ unter w_1+r+2)."
A_2 : „Bringe $f(5)$ unter $r+3$."
A_{11}: „Bringe $f(\mathrm{w}_1+r+1)$ unter 2."
S_1 : „Unbedingt setze unter 0 die Zahl w_2+10."

So lautet das Schema P:

	Adresse	Inhalt	
	0	$w_2+\bar{e}_0+\bar{e}_2+31$	
	1	1	
	2	r	
	3	x_1	
	⋮	⋮	
	$r+2$	x_r	
	$r+3$	0	
	⋮	⋮	
	$w+4$	0	
u_0	⋮	⋮	
	$w+4+s_0$	0	
u_1	⋮	⋮	
	$w+4+s_0+s_1$	0	
u_2	⋮	⋮	
	$w_1=w+4+s_0+s_1+s_2$	0	
	w_1+1	0	
	⋮	⋮	
v	w_1+r	0	
	w_1+r+1	0	
	$w_2=w_1+r+2$	0	
	w_2+1	A_{11}	
	w_2+2	S_1	$\{w_1+1, 3, w_1+r+1, w_1+r+2, w_2+1\}-r-$ Verschiebung
	w_2+3	A_2	
	⋮	⋮	
	⋮	⋮	$\{w_2+10, 2, w_1+r+1\}-r-$ stop
	w_2+16	A_3	
	w_2+17	A_4	
	w_2+18	A_5	
	w_2+19	A_6	
	w_2+20	A_7	
	w_2+21	A_7	
	w_2+22	A_8	
	w_2+23	A_9	
	⋮	⋮	$\{5, w_1+3, w_1+r+1, w_1+r+2, w_2+29\}-(r-2)-$ − Verschiebung
	w_2+29	A_1	
	w_2+30	$\overline{V}_1$	
	⋮	⋮	

Adresse	Inhalt	
⋮	⋮	
$w_2+\bar{e}_0+29$	$\bar{V}_{\bar{e}_0}$	$\rightarrow w_2+3$
$w_2+\bar{e}_0+30$	A_{10}	
$w_2+\bar{e}_0+31$	$\bar{V}_1^{(2)}$	
⋮	⋮	
$w_2+\bar{e}_0+\bar{e}_2+30$	$\bar{V}_{\bar{e}_2}^{(2)}$	$\rightarrow w_2+16$
$w_2+\bar{e}_0+\bar{e}_2+31$	$\bar{V}_1^{(1)}$	
⋮	⋮	
$w_2+\bar{e}_0+\bar{e}_1+\bar{e}_2+30$	$\bar{V}_{\bar{e}_1}^{(1)}$	$\rightarrow w_2+\bar{e}_0+30$

Hier ist

$$s(P) = s(P_0)+s(P_1)+s(P_2)+r+2$$

und wegen $\bar{e}_{i_1}^{*} = e_i-6$ $(i=0, 1, 2)$

$$e(P) = e(P_0)+e(P_1)+e(P_2)+12,$$

ferner ist

$$n^*(P) = n^*(P_0)+n^*(P_1)+n^*(P_2)+5r-17.$$

Werden für $x_1, \ldots, x_r$ beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ gesetzt, so beginnt das Wirken des Programms mit der Berechnung von $\varphi_{i_1}(a_1, \ldots, a_r)$; statt „$r$-stop" wird aber dieser Wert auf eine Aufbewahrungsstelle gebracht; dann wird $\varphi_{i_2}(a_1, \ldots, a_r)$ berechnet, statt „r-stop" werden aber die berechneten Werte von φ_{i_1} und φ_{i_2} an die beiden ersten Argumentstellen, und die ursprünglichen Argumente alle auf Aufbewahrungsstellen gebracht; endli chwird φ_{i_0} für die beiden neuen Argumente berechnet, nur statt „2-stop" alles auf seinen Platz gebracht; so daß nach dem jetzt erfolgenden „r-stop" auf der Schleife die Folge der Werte

$$a_1, \ldots, a_r, \ \varphi_i(a_1, \ldots, a_r)$$

erscheint.

Ist $r<2$, oder φ_{i_0} einstellig, so kann $\varphi_i(a_1, \ldots, a_r)$ durch ein anderes Programmschema ähnlicher Struktur mit kürzerem wirkenden Teil berechnet werden; der neue Teil des Arbeitsteils enthält immer $\max(r+2, 3) \leqq w+3$ Adressen.

11. Nehmen wir jetzt an, daß es zu den Funktionen $\varphi_{i_1}(x_1)$ und $\varphi_{i_2}(x_1, x_2, x_3)$ bereits berechnende Programmschemata P_1, P_2 mit bestimmten $s_1=s(P_1)$ und $s_2=s(P_2)$ und mit wirkenden Teilen

$$\overset{P_1^*}{V_1^{(1)}, \ldots, V_{e_1}^{(1)}}; \quad \overset{P_2^*}{V_1^{(2)}, \ldots, V_{e_2}^{(2)}}$$

vorhanden sind.

In den Folgenden gebe ich ein Programmschema P zur Berechnung der durch die primitive Rekursion

$$\varphi_i(x_1, 0) = \varphi_{i_1}(x_1)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2+1) = \varphi_{i_2}(x_1, x_2, \varphi_i(x_1, x_2))$$

definierten Funktion $\varphi_i(x_1, x_2)$.

Die Modifikationen

$$\bar{V}_1^{(1)}, \ldots, \bar{V}_{\bar{e}_1}^{(1)} \quad \text{und} \quad \bar{V}_1^{(2)}, \ldots, \bar{V}_{\bar{e}_2}^{(2)}$$

von P_1^* und P_2^* bedeuten hier (nebst Schiebungen): In P_1^* soll „1-stop" durch folgende drei Befehle ersetzt werden:

$\bar{A}_1$: „Bringe $f(4)$ unter 6."

$\bar{A}_2$: „Addiere $f(w_1+1)$ unter 2 zu $f(2)$."

$\bar{S}_1$: „Unbedingt setze unter 0 die Zahl w_2+11."

In P_2^* soll „3-stop" durch

$\bar{S}_2$: „Unbedingt setze unter 0 die Zahl w_2+11"

ersetzt werden.

Außerdem wirken noch neue Befehle in folgender Reihenfolge:

A_4: „Bringe $f(2)$ unter w_1+1."

A_5: „Addiere $f(1)$ unter 2 zu $f(2)$."

A_6: „Bringe $f(4)$ unter w_1+2."

A_3: „Bringe $f(6)$ unter 5."

S_2: „Ist $f(4)=f(w_1+2)$, so setze unter 0 die Zahl w_2+1."

A_1: „Bringe $f(w_1+1)$ unter 2."

S_1: Unbedingt setze unter 0 die Zahl w_2+4."

A_2: „Addiere $f(1)$ unter 4 zu $f(4)$."

Das Programmschema lautet nun:

	Adresse	Inhalt
	0	$w_2+\bar{e}_2+13$
	1	1
	2	2
	3	x_1
	4	x_2
	5	0
	6	0
	⋮	⋮
	w+4	0
u_1	⋮	⋮
u_1	$w+4+s_1$	0
u_2	⋮	⋮
u_2	$w_1=w+4+s_1+s_2$	0
v	w_1+1	0
v	$w_2=w_1+2$	0

Adresse	Inhalt	
w_2+1	A_1	
w_2+2	S_1	
⋮	⋮	} $\{w_2+4, 2, w_1+1\}-2-\text{stop}$
w_2+10	A_2	
w_2+11	A_3	
w_2+12	S_2	
w_2+13	$\bar{V}_1^{(2)}$	
⋮	⋮	
$w_2+\bar{e}_2+12$	$\bar{V}_{\bar{e}_2}^{(2)}$	→ w_2+10
$w_2+\bar{e}_2+13$	A_4	
$w_2+\bar{e}_2+14$	A_5	
$w_2+\bar{e}_2+15$	A_6	
$w_2+\bar{e}_2+16$	$\bar{V}_1^{(1)}$	
⋮	⋮	
$w_2+\bar{e}_1+\bar{e}_2+15$	$\bar{V}_{\bar{e}_1}^{(1)}$	→ w_2+11

Man sieht, daß hier

$$s(\mathrm{P}) = s(\mathrm{P}_1)+s(\mathrm{P}_2)+2$$

und wegen $\bar{e}_1 = e_1-4$ und $\bar{e}_2 = e_2-6$

$$e(\mathrm{P}) = e(\mathrm{P}_1)+e(\mathrm{P}_2)+5$$

ist. Ferner ist, wie man leicht nachrechnet, für $x_2 = a_2$

$$n^*(\mathrm{P}) = n^*(\mathrm{P}_1)+15+a_2(n^*(\mathrm{P}_2)-18).$$

Werden für x_1, x_2 beliebige Zahlen a_1, a_2 gesetzt, so beginnt das Wirken des Programms, nach Übertragung von 2 und a_2 auf je eine Aufbewahrungsstelle, mit der Berechnung des Wertes $\varphi_{i_1}(a_1) = \varphi_i(a_1, 0)$, der dann statt „1-stop" an die dritte Argumentenstelle der Funktion φ_{i_2} gebracht wird. Diese Stelle ist zugleich die Stelle des gesuchten Funktionswertes; ist das Argument a_2 gleich dem — an seine Stelle gebrachten — Zyklenzähler (der am Anfang 0 ist), so sind wir daher fertig: nach „2-stop" kommt die Folge der Werte

$$a_1,\ 0,\ \varphi_i(a_1, 0)$$

auf die Schleife. Sonst wird — nachdem man den Zyklenzähler um 1 vermehrt — die Funktion φ_{i_2} gerade für diese Argumente berechnet, und das ergibt $\varphi_i(a_1, 1)$. Statt „3-stop" wird nun dieser Wert an die dritte Argumentstelle, und der neue Zyklenzähler 1 an die zweite Argumentstelle von φ_{i_2} gesetzt, und a_2 mit diesem neuen Zyklenzähler verglichen; usw. bis der Zyklenzähler gleich a_2 wird. Dann folgt, nach Räumung des Arbeitsfeldes, „2-stop", und auf der Schleife erscheint

$$a_1,\ a_2,\ \varphi_i(a_1, a_2).$$

12. Nehmen wir endlich an, daß es zur Funktion $\varphi_{i_0}(x_1, x_2)$ bereits ein berechnendes Programmschema P_0, mit einem bestimmten $s_0 = s(\mathrm{P}_0)$ und mit dem

wirkenden Teil P_0^* $\quad V_1, \ldots, V_{e_0}$

vorhanden ist. Dann gebe ich ein Programmschema zur Berechnung der Funktion

$$\varphi_i(x_1) = \mu_j[\varphi_{i_0}(x_1, j) = 0] \quad \text{an.}$$

Die Modifikation $\quad \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_{\bar{e}_0}$

von P_0^* bedeutet hier (nebst Schiebung), daß „2-stop" durch die Code-Zahl jenes Sprungbefehls ersetzt wird, welcher unbedingt fordert, daß unter die Adresse 0 die Zahl w_2+7 gesetzt werden soll.

Im Programmschema P werden noch Befehle in folgender Reihenfolge wirken:

A_3: „Addiere $f(1)$ unter 2 zu $f(2)$."
S_1: „Ist $f(5)=0$ (z. B. $f(5) = f(w_1+1)$), dann setze unter 0 die Zahl w_2+1."
A_1: „Addiere $f(1)$ unter 4 zu $f(4)$."
A_2: „Entleere die Adresse 5 (z. B. bringe $f(w_1+1)$ darunter)."
S_2: „Unbedingt setze unter 0 die Zahl w_2+15."
A_4: „Subtrahiere $f(1)$ unter 2 von $f(2)$."
S_3: „Unbedingt setze unter 0 die Zahl w_2+4."

So lautet das Programmschema P:

	Adresse	Inhalt	
	0	w_2+14	
	1	1	
	2	1	
	3	x_1	
	4	0	
	5	0	
	⋮	⋮	
	$w+4$	0	
u_0	⋮	⋮	
	$w_1=w+4+s_0$	0	
v	$w_2=w_1+1$	0	
	w_2+1	A_4	
	w_2+2	S_3	
	⋮	⋮	$\{w_2+4, 1, w_1+1\}-1-\text{stop}$
	w_2+10	S_1	
	w_2+11	A_1	
	w_2+12	A_2	
	w_2+13	S_2	
	w_2+14	A_3	
	w_2+15	$\bar{V}_1$	
	⋮	⋮	
	$w_2+\bar{e}_0+14$	$\bar{V}_{\bar{e}_0}$	$\to w_2+10$

Man sieht, daß hier

$$s(\mathrm{P}) = s(\mathrm{P}_0)+1$$

und wegen $\bar{e}_0 = e_0 - 6$

$$e(\mathrm{P}) = e(\mathrm{P}_0)+8$$

ist. Über $n^*(\mathrm{P})$ kann natürlich allgemein nichts gesagt werden.

Wird für x_1 eine beliebige Zahl a_1 gesetzt, dann beginnt das Wirken des Programms mit der Berechnung von $\varphi_{i_0}(a_1, 0)$; nur statt „2-stop" wird erst untersucht, ob der erhaltene Wert 0 ist. Ist das der Fall (so ist die Adresse 4 von selber leer), dann folgt „1-stop", und auf der Schleife erscheint

$$a_1,\ 0,$$

wo 0 tatsächlich das kleinste j mit $\varphi_{i_0}(a_1, j) = 0$ ist. Ist das nicht der Fall, dann wird das zweite Argument von φ_{i_0} um 1 vermehrt, und es beginnt die Berechnung von $\varphi_{i_0}(a_1, 1)$. Usw. Das Programm hat dann und nur dann ein Ergebnis, wenn es eine Zahl j mit $\varphi_{i_0}(a_1, j) = 0$ gibt, also wenn

$$\mu_j[\varphi_{i_0}(a_1, j) = 0]$$

definiert ist; und in diesem Fall ist das Ergebnis des Programms

$$a_1, j$$

mit dem kleinsten solchen j.

Damit wurde der Beweis dafür vollendet, daß *es, falls Zelleninhalte beliebig groß sein können, zu jeder partiell-rekursiven Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ ein Programmschema gibt, welches so funktioniert, daß nach Besetzung der Adressen 3, 4, ..., $r+2$ durch beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ das in Gang gesetzte Programm dann und nur dann ein Ergebnis hat, wenn $\varphi(a_1, \ldots, a_r)$ definiert ist, und in diesem Fall sein Ergebnis die Zahlenfolge*

$$a_1, \ldots, a_r,\ \varphi(a_1, \ldots, a_r)$$

ist.

13. Die in Nr. 6—10 verwendeten arithmetischen Befehle fordern teils die Übertragung der Inhalte gewisser Adressen unter andere Adressen — wobei die Inhalte der ursprünglichen Adressen manchmal auch dort beibehalten, sonst dort gestrichen werden —, teils das Addieren des Inhaltes einer Adresse zum Inhalt einer anderen Adresse, oder sein Subtrahieren davon.

Die verwendeten Sprungbefehle fordern alle, daß falls die Inhalte zweier Adressen gleich sind, unter die Adresse 0 (als Befehlszähler) eine bestimmte Zahl gesetzt werden soll.

Die Einfachheit eines Druckbefehls springt in die Augen.

Nur die befehlsmodifizierenden Befehle sind weniger einfach, aber auch diese — die Vergrößerung um 1 höchstens zweier Adressen, auf die sich der betreffende Befehl bezieht — sind in der Praxis einfach für einen Rechenautomaten.

Wenn man die Berechnung einer Funktion vor Augen hält, die mit Hilfe von höchstens $w+1$-stelligen Funktionen aufgebaut wird, so ist die Länge $w+5+s+e$ der Programmschemata $\mathrm{P_I}$ bzw. $\mathrm{P_{II}}$ für die Ausgangsfunktionen 0 und x_1+1 nach Nr. 8 gleich

$$w+5+1+8 = w+14 \quad \text{bzw.} \quad w+5+1+10 = w+16.$$

In Nr. 9—12 sieht man, wie aus der Länge der Programmschemata P_0, P_1, P_2, die gewiße Funktionen φ_{i_0}, φ_{i_1}, φ_{i_2} berechnen, die Länge des Programmschemas P bestimmt werden kann, welches jene Funktion φ_i berechnet, die aus φ_{i_0}, φ_{i_1}, φ_{i_2} durch eine Variablenvermehrung, Substitution, primitive Rekursion oder μ-Operation gebildet wird. Kennt man daher den Aufbau einer partiell-rekursiven Funktion φ durch die genannten Operationen, so liest man daraus die zur Durchführbarkeit eines die Funktion φ berechnenden Programmschemas notwendige Speicherkapazität heraus. Bei verwickeltem Aufbau von φ kann diese natürlich beliebig gross sein.

Die Länge des wirkenden Teils unserer Programmschemata und die Anzahl der Schritte des Programmwirkens vergrößert sich zwar einigermaßen davon, jedoch lohnt es sich, sämtliche Befehlstypen auf 1-adressige aufzulösen (und dabei die Addition und Subtraktion auf addieren bzw. subtrahieren von 1). Mit Hinzunahme zweier Register-Adressen zum unbeweglichen Teil (z. B. der Adressen 3 und 4, wobei die Variablenadressen nach rechts geschoben werden) geht das leicht: z. B. kann der 3-adressige Befehlstyp, welcher im Fall der Gleichheit der Inhalte der Adressen q_1 und q_2 einen Sprung zum Inhalt der Adresse q_3 fordert, auf folgende drei Befehlstypen aufgelöst werden: 1) „bringe den Inhalt der Adresse q_1 in Register 1, d. h. unter 3"; 2) „bringe den Inhalt der Adresse q_2 in Register 2, d. h. unter 4"; 3) „sind die Inhalte der beiden Register gleich, so setze unter die Adresse 0 die Zahl q_3".

So kommt man neben $B_0 = \text{stop}$ mit 8 einfachen „Grundbefehlstypen" aus, welchen jedes 1-adressige Rechenautomat genüge tun kann. Diese können in einer beliebig gewählten Reihenfolge mit Indizes 1—8 versehen werden (das ist eine unwesentliche Abänderung der in I verwendeten Bezeichnung). Die Code-Zahl eines Befehls $B_i(a)$ mit $i \leqq 8$ kann etwa $9a+i$ sein. So ist bei Speicherkapazität c die größte vorkommende Code-Zahl höchstens

$$9c+8.$$

Die Speicherkapazität

$$c = \mathrm{w}+5+s+e$$

läßt sich dabei nach Nr. 8—12 aus dem Aufbau der definierten Funktion φ bestimmen. Man erhält daraus leicht eine nur von der Gliederzahl l (eigentlich $l+1$) der Folge

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_l = \varphi$$

abhängige obere Schranke für c, wobei es sich um die Folge (***) der Nr. 6 handelt: sei (noch ohne Übergang auf 1-adressige Befehle) $c(i)$ eine solche obere Schranke von c für alle φ_j, wo $i \leqq l$ und $j \leqq i$ ist (und für $i > l$ etwa $c(i) = 0$), dann sieht man leicht, daß für $i \leqq 1$ (da stets $\mathrm{w} \leqq l$ gilt)

$$c(i) = l+16$$

gewählt werden kann, und für $1 \leqq i < l$ (da zum Aufbau von φ_i höchstens 3 vorherstehende Funktionen verwendet werden)

$$c(i+1) = 3c(i)+l+16.$$

Daraus ergibt sich die gesuchte obere Schranke für die Speicherkapazität, die zur Berechnung einer beliebigen partiell-rekursiven Funktion, deren Aufbaufolge (***)

aus $l+1$ Gliedern besteht, als die primitiv-rekursive Funktion

$$c(l) = \left[\frac{3^l \dot{-} 1}{2}\right](l+16).$$

Nach Übergang auf 1-adressige Befehle erhält man eine genau solche obere Schranke für die hinreichende Speicherkapazität, nur mit einer größeren Konstanten statt 16.

Beschränkt man sich auf primitiv-rekursive Funktionen (wird also in der Bildung der Glieder der Folge (***) die μ-Operation ausgeschloßen) und auf Argumente höchstens der Größe M, so erhält man ähnlich eine nur von der Gliederzahl von (***) und von M abhängige obere Schranke — mit geeigneten Konstanten k' und k'' — für die Schritte bis „stop" des Programmwirkens, durch welches φ an je einer Stelle berechnet wird, als

$$n^*(l, M) = \left[\frac{(M+3)^l \dot{-} 1}{M+2}\right](k'l+k'').$$

Nehmen wir nun an, daß man sich bei der Berechnung einer Funktion auf Argumente höchstens der Größe M beschränkt, und daß in die Zellen eines *wirklichen Rechenautomats* Zahlen höchstens der Größe $c' \geqq \max(M, 9c+8)$ (mit dem vorhin bestimmten $c=c(l)$), also die gewünschten Argumente und Befehle noch ohne Hindernis eingetragen werden können. (Wegen $9c+8 > 1$ und $c > \mathfrak{w}+1$ können dann auch 1 und alle im Aufbau von φ auftretenden Argumentenanzahlen eingetragen werden.) Bei der Berechnung beliebiger rekursiven Funktionen muß aber vorkommen, daß c' überstiegen wird; diese Funktionen können ja auch für Argumente $\leqq M$ beliebig große Werte annehmen. Man kann verlangen, daß in einem solchen Fall geklingelt werden soll.

Zu diesem Zweck sollten zwei Adressen ein für allemal vorbehalten werden: z. B. die Adresse 5 zur ständigen Aufbewahrung von c' und die Adresse 6 als Klingel-Adresse (natürlich stünde dann x_i unter 7, usw.).

Der einzige Grundbefehlstyp, wodurch der Inhalt einer Adresse vergrößert wird, ist jener, der das Addieren von 1 zum Inhalt einer Adresse a verlangt. Ein Befehl dieses Typs sollte immer mit zwei anderen verbunden werden: mit einem, der die Übertragung von $f(1)$ unter die Klingel-Adresse 6 verlangt, und mit einem anderen, der im Fall $f(a)=c'$, d. h. $f(a)=f(5)$, einen Sprung (inzwischen freilich auch einen Register benutzend) zu diesem Klingel-Befehl fordert.

Wird einmal „geklingelt" (wobei die Schleife noch sicher leer ist), dann kann man auch sagen, daß das Programm kein Ergebnis hat.

In diesem Sinne gibt es zu jeder r-stelligen partiell-rekursiven Funktion φ ein „unvollständig berechnendes" Programmschema, welches durch jeden 1-adressigen Rechenautomat mit genügend großem c und c' durchgeführt werden kann, so daß nach Besetzung der Adressen $7, \ldots, r+6$ durch beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_r \leqq M$ das in Gang gesetzte Programm entweder kein Ergebnis hat (wegen Überlaufen, wobei „geklingelt" wird, oder weil φ an der Stelle $a_1, \ldots, a_r$ nicht definiert ist), oder sein Ergebnis die Zahlenfolge

$$a_1, \ldots, a_r, \quad \varphi(a_1, \ldots, a_r)$$

ist.

Ist φ eine primitiv-rekursive Funktion, so kann bekanntlich eine nur von der Gliederzahl ihrer Aufbaufolge (***) primitiv-rekursiv abhängige Zahl m_0 angegeben werden, so daß alle Werte, die in der Berechnung von φ bei Argumenten $\leqq M$ teilnehmen, kleiner als $\psi(m_0, M)$ sind, wo $\psi(m, n)$ die durch

$$\psi(0, n) = n+1$$

$$\psi(m+1, 0) = \psi(m, 1)$$

$$\psi(m+1, n+1) = \psi(m, \psi(m+1, n))$$

definierte ACKERMANN—PÉTERsche Funktion ist. (Für festes m_0 ist dabei $\psi(m_0, n)$ eine primitiv-rekursive Funktion von n.) Bekanntlich gilt auch

$$\psi(m_0, M) > M.$$

Ist also c eine zur Berechnung von φ geeignet große Speicherkapazität (wie bereits gesagt, kann auch diese als primitiv-rekursive Funktion der Gliederzahl von (***) angegeben werden), *so genügt zur Berechenbarkeit von φ für Argumente $\leqq M$ durch ein Programmschema, daß je eine Zelle die Zahl*

$$\max(\psi(m_0, M), 9c+8)$$

zu enthalten fähig sei.

Sowohl die zur Berechnung von φ notwendige Speicherkapazität, als auch die notwendige Aufnahmefähigkeit der Zellen ist eine monoton zunehmende primitiv-rekursive Funktion der Gliederzahl von (***). *Betreffs der Berechenbarkeit durch ein Programmschema kann daher als Grad der Einfachheit einer primitiv-rekursiven Funktion φ die kleinstmögliche Gliederzahl einer auf φ endenden Aufbaufolge* (***) *betrachtet werden.*

Auf Einzelheiten der in dieser Nummer Geschilderten komme ich in einer späteren Arbeit zurück.

14. Kehren wir noch zurück zum Fall der Zulassung beliebig großer Zelleninhalte.

Ist dabei φ eine überall definierte, also allgemein-rekursive Funktion, dann kann die Berechnung von φ durch ein Programm (kein Schema) *auch so geschehen, daß die Funktionswerte der Reihe nach auf der Schleife erscheinen.* Natürlich hat man dabei wieder die positiven geraden Adressen für die Zellen der Schleife vorzubehalten.

Sei zunächst $\varphi(x)$ eine einstellige Funktion, dessen Aufbau Funktionen von höchstens $w+1$ Variablen bedarf, und die durch ein Programmschema P_0 mit einem bestimmten $s_0 = s(P_0)$ und mit dem wirkenden Teil

$$V_1, \ldots, V_{e_0}$$

berechnet werden kann. Dieser wirkende Teil soll (nebst Schiebung) derart zu

$$\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_{\bar{e}_0}$$

modifiziert werden, daß jede Berufung seiner Befehle auf eine Adresse $a > 0$, statt a auf $2a-1$ bezogen werden soll; ferner soll „stop" durch jenen Sprungbefehl ersetzt werden, welcher unbedingt fordert, daß unter die Adresse 0 die Zahl $2(w^*+1)-1$, mit $w^* = w+4+s_0$ gesetzt werden soll.

Im neuen Programm werden folgende neue Befehle vorkommen:

D: „Drucke $f(7)$ in die erste unberührte Zelle der Schleife". (Würden auch die Zellen der Schleife so behandelt, wie die Speicherzellen, so könnte für D ein Befehl: „Bringe $f(7)$ unter 2", und danach jene zweimalige Modifikation dieses Befehls stehen, die darin besteht, daß die zweite Adresse, auf welche er sich bezieht, um 1 erhört wird.)

A_1: „Addiere $f(1)$ unter 5 zu $f(5)$".

A_2: „Entleere 7".

Das neue Programm lautet:

	Adresse	Inhalt	
	0	$2(w^*+4)-1$	
	1	1	
	3	1	
	5	0	
	7	0	
	⋮	⋮	
	$2(w+4)-1$	0	
u_0	⋮	⋮	
u_0	$2w^*-1$	0	
	$2(w^*+1)-1$	D	
	$2(w^*+2)-1$	A_1	
	$2(w^*+3)-1$	A_2	
	$2(w^*+4)-1$	$\overline{V}_1$	
	⋮	⋮	
	$2(w^*+\bar{e}_0+3)-1$	$\overline{V}_{\bar{e}_0}$	$\rightarrow 2(w^*+1)-1$

Das Wirken des Programms beginnt mit der Berechnung des Wertes $\varphi(0)$, der unter der Adresse 7 erscheint; aber statt „1-stop" geht es — nachdem $\varphi(0)$ auf die Schleife gedruckt wird — zur Berechnung von $\varphi(1)$ über, usw. So erscheinen auf der Schleife tatsächlich der Reihe nach die Werte

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ \ldots$$

Im Fall einer mehrstelligen Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ können die Stellen in eine Folge geordnet werden, z. B. mit Hilfe der bereits in Nr. 1 verwendeten primitiv-rekursiven Zuordnung der natürlichen Zahlen zu den aus ihnen gebildeten endlichen Folgen gegebener Gliederzahl. So kann man von 0-ter, 1-ter, 2-ter, ... Stelle sprechen, und fordern, daß bei der Berechnung der Funktion φ durch ein Programm die der Reihe nach an diesen Stellen angenommenen Werte

$$\varphi(k_0(0), \ldots, k_{r-1}(0)),\ \varphi(k_0(1), \ldots, k_{r-1}(1)),\ \varphi(k_0(2), \ldots, k_{r-1}(2)), \ldots$$

d. h. die Werte der einstelligen Funktion

$$\varphi(k_0(n), \ldots, k_{r-1}(n)),$$

welche durch Substitution aus allgemein-rekursiven, also durch Programmschemata berechenbaren Funktionen entsteht, und daher nach Nr. 6 auch selber durch ein Programmschema berechenbar ist, auf der Schleife erscheinen soll. Damit ist aber der Fall einer mehrstelligen Funktion auf den bereits erledigten Fall einer einstelligen Funktion zurückgeführt worden.

15. Das in Nr. 14 gegebene Programm hat im bisher gebrauchten Sinn kein Ergebnis: zum „stop" kommt es nie. Es ist freilich von größerem Wert, daß es die Funktionswerte unbeschränkt liefert. Dies kann aber leicht zu einem Programmschema mit einem Variablen x verwandelt werden, so daß, falls für x eine beliebige Zahl a gesetzt wird, das Wirken des Programms nach Erreichung des Funktionswertes $\varphi(a)$ zum Abschluß kommt.

Diese Variable in neuer Rolle soll natürlich nicht an der „Variablenstelle" der Adresse 5 stehen; ich werde sie — mit $\overline{\mathrm{w}} = \mathrm{w}^* + 1$ — unter die Adresse $2\overline{\mathrm{w}} - 1$ setzen. „Stop" wird unter die Adresse $2(\overline{\mathrm{w}} + 1) - 1$ kommen, worauf der folgende, nach D kommende Sprungbefehl S verweisen wird:

S: „Ist $f(2\overline{\mathrm{w}} - 1) = f(5)$, dann soll unter 0 die Zahl $2(\overline{\mathrm{w}} + 1) - 1$ gesetzt werden".

Alles andere bleibt, nur mit sinngemäßer Schiebung, so daß in der neuen Modifikation des wirkenden Teils von P_0

$$\overline{\overline{\mathrm{V}}}_1, \ldots, \overline{\overline{\mathrm{V}}}_{\overline{\overline{e}}_0}$$

„1-stop" durch den neuen unbedingten Sprungbefehl: „setze unter 0 die Zahl $2(\overline{\mathrm{w}} + 2) - 1$" — ersetzt wird.

So lautet das Programmschema:

	Adresse	Inhalt	
	0	$2(\overline{\mathrm{w}}+6)-1$	
	1	1	
	3	1	
	5	0	
	7	0	
	⋮	⋮	
	$2(\mathrm{w}+4)-1$	0	
	⋮	⋮	
u_0	$2\mathrm{w}^* - 1$	0	
v	$2\overline{\mathrm{w}} - 1$	x	
	$2(\overline{\mathrm{w}}+1)-1$	stop	
	$2(\overline{\mathrm{w}}+2)-1$	D	
	$2(\overline{\mathrm{w}}+3)-1$	S	
	$2(\overline{\mathrm{w}}+4)-1$	A_1	
	$2(\overline{\mathrm{w}}+5)-1$	A_2	
	$2(\overline{\mathrm{w}}+6)-1$	$\overline{\overline{\mathrm{V}}}_1$	
	⋮	⋮	
	$2(\overline{\mathrm{w}}+\overline{\overline{e}}_0+5)-1$	$\overline{\overline{\mathrm{V}}}_{\overline{\overline{e}}_0}$	$\rightarrow 2(\overline{\mathrm{w}}+2)-1$

Wird für x eine Zahl a gesetzt, so beginnt das Wirken des Programms mit der Berechnung des Wertes $\varphi(0)$, der dann auf die Schleife gedruckt wird. Ist $a=0$, dann „stop". Sonst wird der Wert $\varphi(1)$ berechnet und auf die Schleife gedruckt; dann a mit 1 verglichen, usw., bis a durch das Argument erreicht wird. So kommt auf die Schleife tatsächlich die Folge

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ldots,\varphi(a).$$

Mit zwei weiteren Befehlen könnte man erreichen, daß auf die Schleife

$$a,\ \varphi(0),\ \varphi(1),\ \ldots,\ \varphi(a)$$

kommt.

MATHEMATISCHES INSTITUT,
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITÄT,
BUDAPEST

(Eingegangen am 11. Oktober 1962.)

DIE ZENTRALPROJEKTION EINER EBENE AUF EINE ANDERE IN DER HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE

Von

K. FLADT (Calw, Deutschland)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Herrn G. HAJÓS *zum 50. Geburtstage gewidmet*

1. Zwei Ebenen $\breve{E}$ und $\bar{E}$ können in der hyperbolischen Geometrie drei verschiedene Lagen zu einander haben. Entweder schneiden sie sich in einer (eigentlichen) Geraden g oder haben sie ein gemeinsames (eigentliches) Lot l oder besitzen sie als sog. „Zwischenebenen" einen einzigen absoluten Punkt Ω.

Wir behandeln zunächst den I. und II. Fall. Im I. Fall hat die Figur $(\breve{E}, \bar{E})$ ihre beiden winkelhalbierenden Ebenen W_1 und W_2 und alle Ebenen senkrecht g, im II. Fall ihre Mittelebene M und alle Ebenen durch l als Symmetrieebenen. Die Spiegelungen an W_1 und W_2 bzw. M vertauschen $\breve{E}$ und $\bar{E}$, die an den andern Ebenen führen $\breve{E}$ und $\bar{E}$ je in sich über. Im I. Fall kann man also durch eine Schiebung längs g, im II. Fall durch eine Drehung um l erreichen, daß das Zentrum der Zentralprojektion in einer der Symmetrieebenen liegt.

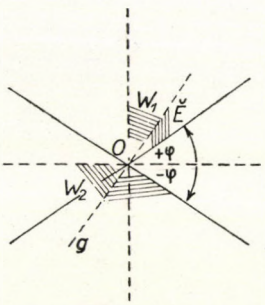


Fig. 1

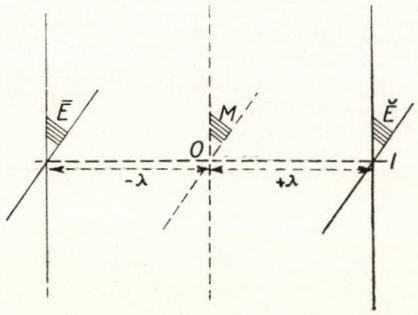


Fig. 2

Im I. Fall machen wir W_1 (oder W_2), im II. Fall M zur Ebene $x_1 = 0$, in beiden Fällen die Symmetrieebene durch Z zur Ebene $x_2 = 0$. Im I. Fall ist der Schnittpunkt von g mit $x_2 = 0$, im II. Fall der Schnittpunkt von l mit $x_1 = 0$ der Ursprung O. In beiden Fällen hat Z die homogenen Koordinaten $(p_0 = 1, p_1, 0, p_3)$. Im I. Fall wo φ ein *spitzer* Winkel sein soll, sind

$$(1_1) \qquad \sin\varphi\, x_1 - \cos\varphi\, x_3 = 0$$

und

$$(2_1) \qquad \sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_3 = 0,$$

im II. Fall

$$(1_2) \qquad S\lambda\, x_0 - C\lambda\, x_1 = 0^1$$

und

$$(2_2) \qquad S\lambda\, x_0 + C\lambda\, x_1 = 0$$

die Gleichungen von $\breve{E}$ und $\bar{E}$.

2. Wir führen in $\breve{E}$ und $\bar{E}$ je ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, das aus dem in $x_3 = 0$ liegenden (x_1, x_2)-System durch eine Drehung um $+\varphi$ bzw. $-\varphi$ entsteht.

Für die räumlichen Koordinaten $(1, y_1, y_2, y_3)$[2] eines Punktes $\breve{x}_1, \breve{x}_2$ in $\breve{E}$ gelten dann die Gleichungen

$$(3_1) \qquad y_1 = \breve{x}_1 \cos\varphi, \quad y_2 = \breve{x}_2, \quad y_3 = \breve{x}_1 \sin\varphi,$$

für die räumlichen Koordinaten z_1, z_2, z_3 eines Punktes $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ von $\bar{E}$ die Gleichungen

$$(4_1) \qquad z_1 = \bar{x}_1 \cos\varphi, \quad z_2 = \bar{x}_2, \quad z_3 = -\bar{x}_1 \sin\varphi.$$

Mit (3_1) ist (1_1), mit (4_1) aber (2_1) erfüllt.

Nun sei z_1, z_2, z_3 die Zentralprojektion von y_1, y_2, y_3 aus $Z(p_1, 0, p_3)$. Dann gelten die Gleichungen

$$(5_1) \qquad \frac{y_1 - p_1}{z_1 - p_1} = \frac{y_2}{z_2} = \frac{y_3 - p_3}{z_3 - p_3}$$

oder

$$(6_1) \qquad \frac{\breve{x}_1 \cos\varphi - p_1}{\bar{x}_1 \cos\varphi - p_1} = \frac{\breve{x}_2}{\bar{x}_2} = \frac{-\breve{x}_1 \sin\varphi + p_3}{\bar{x}_1 \sin\varphi + p_3}.$$

Diese Gleichungen werden von φ unabhängig, wenn man

$$(7_1) \qquad p_1 = a\cos\varphi, \quad p_3 = b\sin\varphi$$

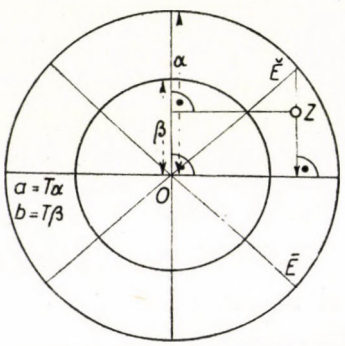


Fig. 3a

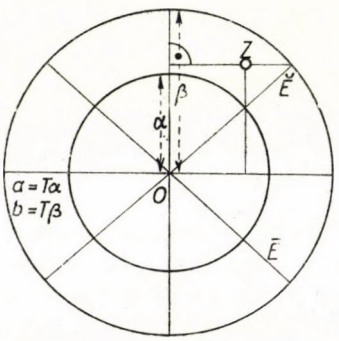


Fig. 3b

[1] Es ist $C\lambda = \mathrm{ch}(\sqrt{-k}\lambda)$, $S\lambda = \dfrac{\mathrm{sh}(\sqrt{-k}\lambda)}{\sqrt{-k}}$, $T\lambda = \dfrac{\mathrm{tgh}(\sqrt{-k}\lambda)}{\sqrt{-k}}$.

[2] Wir benützen vorläufig nichthomogene Koordinaten.

setzt. Da φ ein *spitzer* Winkel sein soll, müssen wir, damit Z in allen vier Quadranten liegen kann, zulassen, daß a und b beliebige Vorzeichen haben können.

Die Gleichungen (7_1) bedeuten nun, daß der Punkt (p_1, p_3) der Ebene $x_2=0$ auf dem *Mittelpunktskegelschnitt*

$$(8_1) \qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{b^2}=1$$

liegen muß (Fig. 3a und b). Dieser Kegelschnitt kann zum *absoluten Kegelschnitt* (AK)

$$(\bigcirc) \qquad \left\{\begin{array}{c}(x|x)\equiv x_0^2+k(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\\ x_2=0,\quad x_0=1\end{array}\right\}$$

in $x_2=0$ fünferlei Lagen haben. Er liegt

entweder ganz innerhalb und ist eine *Ellipse*

oder ganz außerhalb und ist ein *außerabsoluter umschließender Kegelschnitt*

oder er liegt teilweise außerhalb und teilweise innerhalb (2 Möglichkeiten) und ist eine *konkave Hyperbel*

oder er berührt den AK doppelt (2 Möglichkeiten) und ist eine *Abstandslinie*

oder, was sich als unmöglich herausstellen wird, er fällt mit dem AK zusammen.

Im 1. Fall ist Z *innerabsolut*, im 2. Fall *außerabsolut*, im 3. Fall *teilweise inner-, teilweise außerabsolut*, im 4. Fall in zwei Sonderfällen *absolut*, sonst *innerabsolut*.

Im übrigen ist natürlich zu sagen, daß Z und φ zunächst durchaus beliebig gewählt werden können und daß ein beliebiges Z und φ die Größen a und b gemäß (7_1) bestimmen. Bewegt man aber dann Z auf dem Mittelpunktskegelschnitt (8_1), so wird die Zentralprojektion aus Z von φ unabhängig.

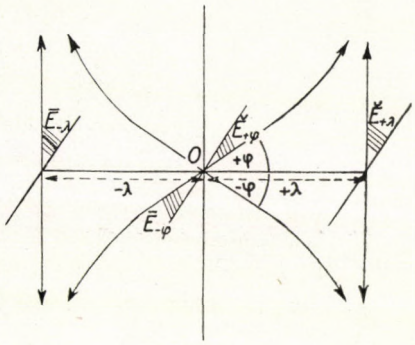


Fig. 4

3. Denn mit (7_1) wird (6_1) zu

$$(9_1) \qquad \frac{\breve{x}_1-a}{\bar{x}_1-a}=\frac{\breve{x}_2}{\bar{x}_2}=\frac{-\breve{x}_1+b}{\bar{x}_1+b}$$

woraus

$$(10_1) \qquad \bar{x}_1=\frac{\frac{a-b}{2}\breve{x}_1}{\breve{x}_1-\frac{a+b}{2}},\quad \bar{x}_2=\frac{-\frac{a+b}{2}\breve{x}_2}{\breve{x}_1-\frac{a+b}{2}}$$

mit der Umkehrung

$$(11_1) \qquad \breve{x}_1=\frac{\frac{a+b}{2}\bar{x}_1}{\bar{x}_1-\frac{a-b}{2}},\quad \breve{x}_2=\frac{-\frac{a-b}{2}\bar{x}_2}{\bar{x}_1-\frac{a-b}{2}}$$

als *Gleichungen der Zentralprojektion* aus Z sich ergeben. Diese sind *unabhängig von* φ stets dieselben, wenn Z sich auf dem Mittelspunktskegelschnitt (8_1) bewegt. Aus (10_1) und (11_1) folgt, daß die Bedingung

$$(12_1) \qquad a \neq \pm b$$

bestehen muß und daß es zweckmäßig ist, die Abkürzungen

$$(13_1) \qquad \frac{a+b}{2} = a', \quad \frac{a-b}{2} = b'$$

einzuführen. Dann lauten die Gleichungen (10_1) und (11_1) *in homogenenen Koordinaten*

$$(14_1) \qquad \varrho\bar{x}_0 = \breve{x}_1 - a'\breve{x}_0, \quad \varrho\bar{x}_1 = b'\breve{x}_1, \quad \varrho\bar{x}_2 = -a'\breve{x}_2$$

mit der Umkehrung

$$(15_1) \qquad \varrho\breve{x}_0 = \bar{x}_1 - b'\bar{x}_0, \quad \varrho\breve{x}_1 = a'\bar{x}_1, \quad \varrho\breve{x}_2 = -b'\bar{x}_2.$$

Wir können nun sogleich die Gleichung des *Verschwindungskegelschnitts* $\breve{V}$ in $\breve{E}$, der in dem AK $\bar{x}_0^2 + k(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) = 0$ von $\bar{E}$, und die des *Fluchtkegelschnitts* $\bar{F}$ in $\bar{E}$, der aus dem AK $\breve{x}_0^2 + k(\breve{x}_1^2 + \breve{x}_2^2) = 0$ von $\breve{E}$ hervorgehen muß, angeben.

Vermöge (14_1) und (15_1) wird

$$\breve{V} \qquad (\breve{x}_1 - a'\breve{x}_0)^2 + k(b'^2\breve{x}_1^2 + a'^2\breve{x}_2^2) = 0,$$

$$\bar{F} \qquad (\bar{x}_1 - b'\bar{x}_0)^2 + k(a'^2\bar{x}_1^2 + b'^2\bar{x}_2^2) = 0$$

oder

$$(16_1) \qquad \breve{V} \qquad \{1 - k(a'^2 - b'^2)\}x_1^2 - 2a'\bar{x}_0\bar{x}_1 + a'^2(\bar{x}|\bar{x}) = 0,$$

$$(17_1) \qquad \bar{F} \qquad \{1 + k(a'^2 - b'^2)\}\bar{x}_1^2 - 2b'\bar{x}_0\bar{x}_1 + b'^2(\bar{x}|\bar{x}) = 0.$$

Läßt man $\varphi \to 0$ streben, so fallen $\breve{E}$ und $\bar{E}$ mit $x_3 = 0$ zusammen und Z wird nach (7_1) das *Zentrum* $(1, a, 0, 0) \equiv (1, a' + b', 0, 0)$ der *perspektiven Kollineation* (10_1) oder (14_1) mit der *Achse* $x_1 = \bar{x}_1 = 0$ (dann wird $\breve{x}_2 \equiv x_2$!).

4. Wir diskutieren nun $\breve{V}$ und $\bar{F}$. Sie gehen durch Vertauschen von a' und b', d. h. von b und $-b$ ineinander über. Für die *absoluten Punkte* von $\breve{V}$ folgt aus (16_1)

$$(\breve{x}|\breve{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \breve{x}_1\{[1 - k(a'^2 - b'^2)]\breve{x}_1 - 2a'\breve{x}_0\} = 0$$

d. h.

$$(18_1) \qquad \begin{cases} \varrho\breve{x}_0 = \pm\sqrt{-k}, \ \varrho\breve{x}_1 = 0, \ \varrho\breve{x}_2 = 1, \\ \varrho\breve{x}_0 = 1 - k(a'^2 - b'^2) = 1 - kab, \ \varrho\breve{x}_1 = 2a' = a + b, \\ \varrho\breve{x}_2 = \pm\sqrt{-\frac{1}{k}(1 + ka^2)(1 + kb^2)}. \end{cases}$$

Die *Klassengleichungen* von $\breve{V}$ und $\bar{F}$ werden

$$(19_1) \qquad \breve{V} \qquad (\breve{X}_0 + a'\breve{X}_1)^2 + b'^2(k\breve{X}_1^2 + \breve{X}_2^2) = 0$$

$$(20_1) \qquad \bar{F} \qquad (\bar{X}_0 + b'\bar{X}_1)^2 + a'^2(k\bar{X}_0^2 + \bar{X}_2^2) = 0.$$

Für die *absoluten Tangenten* von $\breve{V}$ folgt aus (19_1)

$$\breve{X}_0 + a'\breve{X}_1 = \mp b'\breve{X}_1, \quad \breve{X}_0 = -a\breve{X}_1 \text{ oder } -b\breve{X}_1$$

und damit $\breve{X}_2^2 = -(1+ka^2)\breve{X}_1^2$ oder $-(1+kb^2)\breve{X}_1^2$, d. h.

$$(21_1) \qquad \begin{cases} \varrho\breve{X}_0 = -a, \ \varrho\breve{X}_1 = 1, \ \varrho\breve{X}_2 = \pm\sqrt{-(1+ka^2)}, \\ \varrho\breve{X}_0 = -b_1, \ \varrho\breve{X}_1 = 1, \ \varrho\breve{X}_2 = \pm\sqrt{-(1+kb^2)}. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, falls unter den Werten (18_1) und (21_1) keine gleichen sind:

alle 4 *absoluten Punkte* von $\breve{V}$ sind *reell und verschieden*,
wenn $(1+ka^2)(1+kb^2)>0$ ist,

nur 2 *absolute Punkte* von $\breve{V}$ sind *reell und verschieden*,
wenn $(1+ka^2)(1+kb^2)<0$ ist,

alle 4 *absoluten Tangenten* von $\breve{V}$ sind *reell und verschieden*,
wenn $1+ka^2<0$, $1+kb^2<0$ ist

nur 2 *absolute Tangenten* von $\breve{V}$ sind *reell und verschieden*,
wenn $1+ka^2<0$, $1+kb^2>0$ oder $1+ka^2>0$, $1+kb^2<0$ ist

alle 4 *absoluten Tangenten* von $\breve{V}$ sind *imaginär*,
wenn $1+ka^2>0$, $1+kb^2>0$ ist.

Da $\bar{F}$ aus $\breve{V}$ durch Vertauschung von b und $-b$ hervorgeht, so sind $\bar{F}$ und $\breve{V}$ Kegelschnitte derselben Art. Man hat nun folgende

Diskussion für $\breve{V}$ und $\bar{F}$ als Mittelpunktskegelschnitte:

(II) *Semihyperbel* für $1+ka^2<0$, $1+kb^2>0$ oder $1+ka^2>0$, $1+kb^2<0$,

(III_3) *Konvexe Hyperbel* für $1+ka^2>0$, $1+kb^2>0$,

(III_4) *Konkave Hyperbel* für $1+ka^2<0$, $1+kb^2<0$.

Andere Mittelpunktskegelschnitte sind nicht möglich.

5. Von den Schnittpunkten können nur 2 zusammenfallen und zwar fallen sie, wenn

$$a = \frac{\delta}{\sqrt{-k}}, \quad \delta = \pm 1 \quad \text{bzw.} \quad b = \frac{\delta}{\sqrt{-k}}, \quad \delta = \pm 1$$

ist, in den Punkt

$$1+\delta\sqrt{-kb}, \quad \frac{\delta}{\sqrt{-k}}, \quad 0 \quad \text{bzw.} \quad 1+\delta\sqrt{-k}\,a, \quad \frac{\delta}{\sqrt{-k}}+a, \quad 0.$$

Dann fallen auch zwei Tangenten zusammen, und zwar in die Tangente

$$1, \quad -\delta\sqrt{-k}, \quad 0, \quad 0 \quad \text{bzw.} \quad 1, \quad -\delta\sqrt{-k}, \quad 0, \quad 0.$$

Die zwei übrigen Schnittpunkte sind *reell*, die zwei übrigen Tangenten sind

reell für $1+kb^2<0$ oder $1+ka^2<0$,
imaginär für $1+kb^2>0$ oder $1+ka^2>0$.

Man hat nun folgende

Diskussion für $\breve{V}$ und $\bar{F}$ als Parabeln

(IV_4) *Konvexe hyperbolische Parabel* für $a = \frac{\delta}{\sqrt{-k}}$, $1+kb^2>0$

oder $b = \frac{\delta}{\sqrt{-k}}$, $1+ka^2>0$

(IV_5) *Konkave hyperbolische Parabel* } für $a = \frac{\delta}{\sqrt{-k}}$, $1+kb^2<0$

(IV_6) *Zweiteilige Parabel.* } oder $b = \frac{\delta}{\sqrt{-k}}$, $1+ka^2<0$,

IV_5 und IV_6 werden folgendermaßen getrennt: Ihr zweiter Schnittpunkt mit $x_2=0$ ist

$$\text{für } a = \frac{\delta}{\sqrt{-k}} \text{ der Punkt } 3-\delta\sqrt{-kb},\quad \frac{\delta}{\sqrt{-k}}+b,\ 0,$$

$$\text{für } b = \frac{\delta}{\sqrt{-k}} \text{ der Punkt } 3-\delta\sqrt{-ka},\quad \frac{\delta}{\sqrt{-k}}+a,\ 0,$$

somit *innerabsolut* oder *außerabsolut*, je nachdem

$$1-\delta\sqrt{-k}\,b \gtrless 0 \quad \text{bzw.} \quad 1-\delta\sqrt{-k}\,a \gtrless 0$$

ist. Damit ergibt sich

(IV_5) *Konkave hyperbolysche Parabel* für

$$a = \frac{1}{\sqrt{-k}},\ b<-\frac{1}{\sqrt{-k}} \quad \text{oder} \quad a = -\frac{1}{\sqrt{-k}},\ b>\frac{1}{\sqrt{-k}}$$

$$\text{oder} \quad b = \frac{1}{\sqrt{-k}},\ a<-\frac{1}{\sqrt{-k}} \quad \text{oder} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{-k}},\ a>\frac{1}{\sqrt{-k}},$$

(IV_6) *Zweiteilige Parabel* für

$$a = \frac{1}{\sqrt{-k}},\ b>\frac{1}{\sqrt{-k}} \quad \text{oder} \quad a = -\frac{1}{\sqrt{-k}},\ b<-\frac{1}{\sqrt{-k}}$$

$$\text{oder} \quad b = \frac{1}{\sqrt{-k}},\ a>\frac{1}{\sqrt{-k}} \quad \text{oder} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{-k}},\ a<-\frac{1}{\sqrt{-k}}.$$

6. Wir führen in $\breve{E}$ und $\bar{E}$ je ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, das aus dem in der Mittelebene M vorhandenen (x_2, x_3)-System durch eine Schiebung um $+\lambda$ oder $-\lambda$ entsteht.

Diese Schiebung hat in Bezug auf alle räumlichen Koordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 bzw. z_0, z_1, z_2, z_3 die Gleichungen

$$\begin{cases} \varrho y_0 = C\lambda \breve{x}_0 - kS\lambda \breve{x}_1 \\ \varrho y_1 = S\lambda \breve{x}_0 + C\lambda \breve{x}_1 \\ \varrho y_2 = \breve{x}_2 \\ \varrho y_3 = \breve{x}_3 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \varrho z_0 = C\lambda \bar{x}_0 + kS\lambda \bar{x}_1 \\ \varrho z_1 = -S\lambda \bar{x}_0 + C\lambda \bar{x}_1 \\ \varrho z_2 = \bar{x}_2 \\ \varrho z_3 = \bar{x}_3. \end{cases}$$

Ein Punkt in $\breve{E}$ bzw. $\bar{E}$ hat dann die Koordinaten $\breve{x}_1 = \bar{x}_1 = 0$ und

$$(3_2) \qquad \varrho y_0 = C\lambda \breve{x}_0, \quad \varrho y_1 = S\lambda \breve{x}_0, \quad \varrho y_2 = \breve{x}_2, \quad \varrho y_3 = \breve{x}_3$$

$$(4_2) \qquad \varrho z_0 = C\lambda \bar{x}_0, \quad \varrho z_1 = -S\lambda \bar{x}_0, \quad \varrho z_2 = \bar{x}_2, \quad \varrho z_3 = \bar{x}_3.$$

Damit sind die Gleichungen (1_2) bzw. (2_2) erfüllt.

Nun sei wieder z_0, z_1, z_2, z_3 die Zentralprojektion von y_0, y_1, y_2, y_3 aus $Z(1, p_1, 0, p_3)$. Dann gelten die Gleichungen

$$(5_2) \qquad \frac{y_1 - p_1 y_0}{z_1 - p_1 z_0} = \frac{y_2}{z_2} = \frac{y_3 - p_3 y_0}{z_3 - p_3 y_0}$$

oder mit $\breve{x}_0 = \bar{x}_0 = 1$

$$(6_1) \qquad \frac{-S\lambda + p_1 C\lambda}{S\lambda + p_1 C\lambda} = \frac{\breve{x}_2}{\bar{x}_2} = \frac{\breve{x}_3 - p_3 C\lambda}{\bar{x}_3 - p_3 C\lambda}.$$

Diese Gleichungen werden von λ unabhängig, wenn man

$$(7_2) \qquad p_1 = \frac{\sqrt{-k}\, S\lambda}{C\lambda} a, \quad p_3 = \frac{1}{C\lambda} b$$

setzt. a und b können dabei wieder beliebige Vorzeichen annehmen.

Die Gleichungen (7_2) bedeuten nun, daß der Punkt p_1, p_3 der Ebene $x_2 = 0$ wieder auf demselben *Mittelpunktskegelschnitt*

$$(8_2) \equiv (8_1) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1$$

liegen muß wie im I. Falle, ein sehr merkwürdiges Ergebnis, das aber noch merkwürdiger wird, wenn man nach (7_1)

$$(7^*) \qquad \cos\varphi = \operatorname{th}(\sqrt{-k}\,\lambda), \quad \sin\varphi = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{-k}\,\lambda)}$$

setzt. Denn dann ergibt sich, *daß φ einfach der Parallelwinkel zur Distanz λ ist!* Man kann also die Figuren 1 und 2 in eine Fig. 4 vereinigen. Der Ort für Z ist dann für beide Ebenenpaare derselbe. Im übrigen gilt auch wieder die Schlußbemerkung von Nr. 2.

7. Mit (7_2) wird (6_2) zu

$$(9_2) \qquad \frac{\sqrt{-k}\,a-1}{\sqrt{-k}\,a+1} = \frac{\breve{x}_2}{\bar{x}_2} = \frac{\breve{x}_3-b}{\bar{x}_3-b}$$

woraus

$$(10_2) \qquad \bar{x}_2 = \frac{\sqrt{-k}\,a+1}{\sqrt{-k}\,a-1}\breve{x}_2, \quad \bar{x}_3 = \frac{(\sqrt{-k}\,a+1)\breve{x}_3-2b}{\sqrt{-k}\,a-1}$$

mit der Umkehrung

$$(11_2) \qquad \breve{x}_2 = \frac{\sqrt{-k}\,a-1}{\sqrt{-k}\,a+1}\bar{x}_2, \quad \breve{x}_3 = \frac{(\sqrt{-k}\,a-1)\bar{x}_3+2b}{\sqrt{-k}\,a+1}$$

als *Gleichungen der Zentralprojektion* aus Z sich ergeben. Diese sind unabhängig von λ stets dieselben, wenn sich Z auf dem Mittelpunktskegelschnitt (8_2) bewegt. Aus (9_2) folgt, daß

$$(12_2) \qquad a \neq \pm\frac{1}{-k}$$

sein muß. Es ist zweckmäßig

$$(13_2) \qquad \frac{\sqrt{-k}\,a+1}{\sqrt{-k}\,a-1} = a', \quad \frac{2b}{\sqrt{-k}\,a-1} = \frac{b}{\sqrt{-k}}(a'-1) = b'$$

zu setzen. Dann lauten die Gleichungen (10_2) und (11_2)

$$(14_2) \qquad \bar{x}_2 = a'\breve{x}_2, \quad \bar{x}_3 = a'\breve{x}_3 - b'$$

mit der Umkehrung

$$(15_2) \qquad \breve{x}_2 = \frac{x_2}{a'}, \quad \breve{x}_3 = \frac{\bar{x}_3+b'}{a'}.$$

Weiter werden die Gleichungen von $\breve{V}$ in $\breve{E}$ und $\bar{F}$ in $\bar{E}$

$$\breve{V} \qquad x_0^2 + ka'^2\breve{x}_2^2 + k(a'\breve{x}_3 - b'\breve{x}_0)^2 = 0,$$

$$\bar{F} \qquad a'^2\bar{x}_0^2 + k\bar{x}_2^2 + k(\bar{x}_3 + b'\bar{x}_0)^2 = 0,$$

oder

$$(16_2) \qquad \breve{V} \qquad (1-a'^2+kb'^2)\breve{x}_0^2 - 2ka'b'\breve{x}_0\breve{x}_3 + a'^2(\breve{x}|\breve{x}) = 0$$

und

$$(17_2) \qquad \bar{F} \qquad (a'^2-1+kb'^2)\bar{x}_0^2 + 2kb'\bar{x}_0\bar{x}_3 + (\bar{x}|\bar{x}) = 0.$$

Läßt man $\lambda \to 0$ streben, so fallen $\breve{E}$ und $\bar{E}$ mit M zusammen und Z wird nach (7_2) das *Zentrum* $1, 0, 0, \frac{b}{\sqrt{-k}}$ der *perspektiven Kollineation* (10_2) oder (14_2) mit der Achse $\breve{x}_0 = x = 0$.

8. Wir diskutieren weiter $\breve{V}$ und $\bar{F}$. Sie gehen durch Vertauschen von a mit $-a$ in einander über.

Für die *absoluten Punkte* von $\breve{V}$ folgt aus (16_2)

$$(18_2)\quad \begin{cases} \varrho\breve{x}_0 = 0, \quad \varrho\breve{x}_2 = \pm i, \quad \varrho\breve{x}_3 = 1 \\ \varrho\breve{x}_0 = \sqrt{-k}(\sqrt{-k}\,a+1)b, \quad \varrho\breve{x}_2 = \pm\sqrt{(b^2-a^2)(1+kb^2)}, \\ \qquad\qquad \varrho\breve{x}_3 = a+\sqrt{-k}\,b^2. \end{cases}$$

Die *Klassengleichungen* von $\breve{V}$ und $\bar{F}$ werden

$$(19_2)\qquad \breve{V} \qquad k(a'\breve{X}_0+b'\breve{X}_3)^2+\breve{X}_2^2+\breve{X}_3^2 = 0$$

$$(20_2)\qquad \bar{F} \qquad k(\bar{X}_0-b'\bar{X}_3)^2+a'^2(\bar{X}_2^2+\bar{X}_3^2) = 0.$$

Für die *absoluten Tangenten* von $\breve{V}$ folgt aus (19_2)

$$(21_2)\quad \begin{cases} \varrho\breve{X}_0 = b, \quad \varrho\breve{X}_2 = \pm\sqrt{-(1+kb^2)}, \quad \varrho\breve{X}_3 = -1 \\ \varrho\breve{X}_0 = b, \quad \varrho\breve{X}_2 = \pm\sqrt{k(a^2-b^2)}, \quad \varrho\breve{X}_3 = -\sqrt{-k}\,a. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, falls unter den Werten (18_2) und (21_2) keine gleichen sind:

alle 4 *absoluten Punkte* von $\breve{V}$ sind *imaginär*,
wenn $(b^2-a^2)(1+kb^2)<0$ ist,

nur 2 *absolute Punkte* von $\breve{V}$ sind *imaginär*,
wenn $(b^2-a^2)(1+kb^2)>0$ ist

alle 4 *absoluten Tangenten* von $\breve{V}$ sind *reell und verschieden*,
wenn $1+kb^2<0$, $b^2-a^2>0$ ist

nur 2 *absolute Tangenten* von $\breve{V}$ sind *reell und verschieden*,
wenn $1+kb^2>0$, $b^2-a^2>0$ oder $1+kb^2<0$, $b^2-a^2<0$ ist,

alle 4 *absoluten Tangenten* von V sind *imaginär*,
wenn $1+kb^2>0$, $b^2-a^2<0$ ist.

Da $\bar{F}$ aus V durch Vertauschen von a und $-a$ hervorgeht, so sind $\bar{F}$ und $\breve{V}$ Kegelschnitte derselben Art. Man hat nun folgende

Diskussion für $\breve{V}$ und $\bar{F}$ als Mittelpunktskegelschnitte

(II) *Semihyperbel* für $1+kb^2>0$, $b^2-a^2>0$
oder $1+kb^2<0$, $b^2-a^2<0$,

(III_1) *Ellipse*

(III_2) *Außerabsoluter umschließender Kegelschnitt* } für $1+kb^2>0$, $b^2-a^2<0$,

(III_5) *Außerabsoluter ausschließender Kegelschnitt* für $1+kb^2<0$, $b^2-a^2>0$.

Andere Mittelpunktskegelschnitte sind nicht möglich.

(III_1) und (III_2) werden folgendermaßen getrennt: Die Schittpunkte von $\breve{V}$ mit $\breve{x}_2=0$ ergeben sich aus

$$(1+kb'^2)\breve{x}_0^2-2ka'\breve{x}_0\breve{x}_3+ka'^2\breve{x}_3^2=0$$

und werden

$$\varrho\breve{x}_0=\sqrt{-k}\,a', \quad \varrho\breve{x}_2=0, \quad \varrho\breve{x}_3=\sqrt{-k}\,b'\pm 1,$$

damit wird

$$a'^2(\breve{x}|\breve{x})=\breve{x}_0\{(-1+a'^2-kb'^2)\breve{x}_0+2ka'b'\breve{x}_3\}=$$

$$=\frac{-ka'^2}{(\sqrt{-k}\,a-1)^2}\{(\sqrt{-k}\,a+1)^2-(2\sqrt{-k}\,b\pm(\sqrt{-k}\,a-1))^2\}$$

für das Pluszeichen $=-\dfrac{4k\sqrt{-k}\,a'^2}{(\sqrt{-k}\,a-1)^2}(a+b)(1-\sqrt{-k}\,b)$

für das Minuszeichen $=-\dfrac{4k\sqrt{-k}\,a'^2}{(\sqrt{-k}\,a-1)^2}(a-b)(1+\sqrt{-k}\,b)$,

so daß

III_1 *Ellipse* für $-\dfrac{1}{\sqrt{-k}}<b<\dfrac{1}{\sqrt{-k}}, \quad |b|<a<\dfrac{1}{\sqrt{-k}}$

oder auch $a<-\dfrac{1}{\sqrt{-k}}, \quad a<b<-\dfrac{1}{\sqrt{-k}}$ oder $\dfrac{1}{\sqrt{-k}}<b<-a$

III_2 *Außerabsoluter umschließender Kegelschnitt*

für $a>0, \quad a>|b|, \quad b>\dfrac{1}{\sqrt{-k}}$ oder $b<-\dfrac{1}{\sqrt{-k}}$

oder auch $a<0, \quad a<b<-a, \quad -\dfrac{1}{\sqrt{-k}}<b<\dfrac{1}{\sqrt{-k}}$

9. Von den Schnittpunkten können nur 2 zusammenfallen und zwar, wenn entweder $b=\delta a$ oder $b=\dfrac{\delta}{\sqrt{-k}}$ ist. Sie fallen dann in den Punkt $\delta\sqrt{-k}, 0, 1$. Dann fallen auch 2 Tangenten zusammen und zwar in die Tangente $\delta, -\sqrt{-k}, 0$. Der zweite Schnittpunkt von $\breve{V}$ mit $\breve{x}_2=0$ ist für $b=\delta a$

$$\delta\sqrt{-k}\,(a\sqrt{-k}+1), \quad 0, \quad 3a\sqrt{-k}-1,$$

für $b=\dfrac{\delta}{\sqrt{-k}}$ **aber**

$$\delta\sqrt{-k}\,(a\sqrt{-k}+1), \quad 0, \quad 3-a\sqrt{-k}.$$

Es ist *innerabsolut* für (○) $a(\sqrt{-k}\,a-1)<0$ bzw. $\sqrt{-k}\,a-1>0$,

außerabsolut für (○○) $a(\sqrt{-k}\,a-1)>0$ bzw. $\sqrt{-k}\,a-1<0$.

Man hat also folgende

Diskussion für $\breve{V}$ und $\bar{F}$ als Parabeln			
IV_2	*Elliptische Parabel*	(○)	und $1+kb^2>0$ bzw. $a^2>b^2$
IV_3	*Außerabsolute umschließende Parabel*	(○○)	
IV_7	*Außerabsolute ausschließende Parabel*		$1+kb^2<0$ bzw. $a^2<b^2$.

10. Die beiden Zwischenebenen $\breve{E}$ und $\bar{E}$ seien symmetrisch zur Ebene $x_3=0$ und mögen durch das Ende $\Omega(-\sqrt{-k}, 1, 0, 0)$ der Achse $x_2=0$, $x_3=0$ gehen und die Achse $x_1=0, x_2=0$ in den Punkten $\breve{O}$ $(C\lambda, 0, 0, \delta\lambda)$ und $\bar{O}$ $(C\lambda, 0, 0, -S\lambda)$ treffen. Dann sind ihre Gleichungen

$$(1_3) \qquad S\lambda(x_0+\sqrt{-k}\,x_1)=\pm C\lambda x_3.$$

Die Strecke $\overline{O\breve{O}}=\lambda$ ist mit ihrem Parallelwinkel α durch die Gleichungen

$$(2_3) \qquad \sin\alpha=\frac{1}{C\lambda}, \quad \cos\alpha=\sqrt{-k}\,T\lambda, \quad \operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{-k}\,S\lambda$$

verbunden. Man kann nun stets den Ursprung O so wählen, daß

$$(3_3) \qquad \alpha=\frac{\pi}{4}, \quad C\lambda=\sqrt{2}, \quad S\lambda=\frac{1}{\sqrt{-k}}$$

wird.

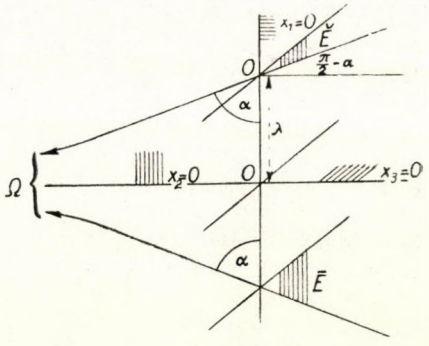


Fig. 5

Wir führen nun in $\breve{E}$ $(\bar{E})$ ein ebenes Koordinatensystem mit dem Ursprung $\breve{O}$ $(\bar{O})$ ein, das aus dem Koordinatensystem in der Ebene $x_3=0$ durch die Aufeinanderfolge einer Schiebung des Koordinatensystems um λ $(-\lambda)$ längs $x_1=0, x_2=0$ und einer Drehung des Koordinatensystems um $\frac{\pi}{2}-\alpha\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ entsteht (Fig. 5) Heißen die räumlicen Koordinaten im ursprünglichen System mit dem Ursprung O y_0, y_1, y_2, y_3, die räumlichen Koordinaten nach der Schiebung y_0', y_1', y_2', y_3', so sind

$$(4_3) \qquad \varrho y_0=y_0'C\lambda-ky_3'S\lambda, \quad \varrho y_1=y_1', \quad \varrho y_2=y_2', \quad \varrho y_3=y_0'S\lambda+y_3'C\lambda$$

die Schiebungsgleichungen.

Heißen die räumlichen Koordinaten nach der Drehung $\breve{x}_0, \breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{x}_3 = 0$, so lauten die Drehgleichungen

$$(5_3) \qquad \varrho y_0' = \breve{x}_0, \quad \varrho y_1' = \breve{x}_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \varrho y_2' = \breve{x}_2, \quad \varrho y_3' = \breve{x}_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Die Aufeinanderfolge von (4_3) und (5_3) lautet nach (2_3) und (3_3)

$$(6_3) \qquad \begin{cases} \varrho y_0 = \breve{x}_0 C\lambda - \sqrt{-k}\,\breve{x}_1 \dfrac{kS^2\lambda}{C\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2\breve{x}_0 + \sqrt{-k}\,\breve{x}_1) \\ \varrho y_1 = \dfrac{\breve{x}_1}{C\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\breve{x}_1 \\ \varrho x_2 = \breve{x}_2 = \breve{x}_2 \\ \varrho y_3 = (\breve{x}_0 + \sqrt{-k}\,\breve{x}_1)S\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{-k}}(\breve{x}_0 + \sqrt{-k}\,\breve{x}_1). \end{cases}$$

Bezeichnet man die Koordinaten in $\bar{E}$ mit $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 = 0$, so erhält man die (6_3) entsprechenden Gleichungen

$$(7_3) \qquad \begin{cases} \varrho z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2\bar{x} + \sqrt{-k}\,\bar{x}_1), \quad \varrho z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{x}_1, \quad \varrho z_2 = \bar{x}_2, \\ \varrho z_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{-k}}(\breve{x}_0 + \sqrt{-k}\,\breve{x}_1)S\lambda. \end{cases}$$

11. Wie ist nun das Zentrum Z der Zentralprojektion anzunehmen? Die beiden Zwischenebenen haben als Ebenen, an denen gespiegelt sie sich vertauschen, alle Ebenen durch Ω senkrecht zu $x_3 = 0$. Durch eine Drehung um die Achse in Ω senkrecht zu $x_3 = 0$ kann man Z in die Ebene $x_2 = 0$ bringen, so daß Z die räumlichen Koordinaten $p_0, p_1, 0, p_3$ besitzt. Z darf weder auf (1) noch in Ω liegen, d. h. es muß

$$(8_3) \qquad p_0 + \sqrt{-k}\,p_1 \neq \pm\sqrt{-2k}\,p_3, \quad Z \neq (-\sqrt{-k}, 1, 0, 0) \text{ sein.}$$

Nun lautet die Bedingung, daß die Punkte y_0, y_1, y_2, y_3, ferner z_0, z_1, z_2, z_3 und $p_0, p_1, 0, p_3$ kollinear sind,

$$\frac{\begin{vmatrix} y_1 & p_1 \\ y_0 & p_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & p_1 \\ z_0 & p_0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_2 & 0 \\ y_0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_2 & 0 \\ z_0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_3 & p_3 \\ y_0 & p_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_3 & p_3 \\ z_0 & p_0 \end{vmatrix}}$$

oder

$$(8_3) \qquad \frac{p_0 y_1 - p_1 y_0}{p_0 z_1 - p_1 z_0} = \frac{y_2}{z_2} = \frac{p_0 y_3 - p_3 y_0}{p_0 z_3 - p_3 z_0}$$

oder mit (6_3) und (7_3)

$$(9_3)\qquad \frac{-p_0\breve{x}_1+p_1(2\breve{x}_0+\sqrt{-k}\,\breve{x}_1)}{-p_0\bar{x}_1+p_1(2\bar{x}_0+\sqrt{-k}\,\bar{x}_1)}=\frac{\breve{x}_2}{\bar{x}_2}=$$

$$=\frac{-p_0\sqrt{2}(\breve{x}_0+\sqrt{-k}\,\breve{x}_1)+p_3(2\breve{x}_0+\sqrt{-k}\,\breve{x}_1)\sqrt{-k}}{p_0\sqrt{2}(\bar{x}_0+\sqrt{-k}\,\bar{x}_1)+p_3(2\bar{x}_0+\sqrt{-k}\,\bar{x}_0)\sqrt{-k}}.$$

Zur Vereinfachung der Rechnung führen wir nun die Dreieck-koordinaten

$$(10_3)\qquad \begin{cases}\breve{x}_0+\sqrt{-k}\,\breve{x}_1=\breve{u}, & \breve{x}_0-\sqrt{-k}\,\breve{x}_1=\breve{u}', & \breve{x}_2=\breve{v}\\ \bar{x}_0+\sqrt{-k}\,\bar{x}_1=\bar{u}, & \bar{x}_0=-\sqrt{-k}\,\bar{x}_1=\bar{u}' & \bar{x}_2=\bar{v}\end{cases}$$

und die Größen

$$(11_3)\qquad p_0+\sqrt{-k}\,p_1=q,\quad p_0-\sqrt{-k}\,p_1=q',\quad p_3=\frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{-k}}$$

ein und erhalten umgekehrt

$$(12_3)\qquad \begin{cases}\breve{x}_0=\dfrac{\breve{u}+\breve{u}'}{2}, & \breve{x}_1=\dfrac{\breve{u}-\breve{u}'}{2\sqrt{-k}}, & \breve{x}_2=\breve{v}\\ \bar{x}_0=\dfrac{\bar{u}+\bar{u}'}{2}, & \bar{x}_1=\dfrac{\bar{u}-\bar{u}'}{2\sqrt{-k}}, & \bar{x}_3=\bar{v}\end{cases},$$

$$(14_3)\qquad p_0=\frac{q+q'}{2},\quad p_1=\frac{q-q'}{2\sqrt{-k}},\quad p_3=\frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{-k}}.$$

Für Z erhalten wir gemäß (8_3) die Bedingungen

$$(15_3)\qquad 4r^2-q^2\neq 0,\ \text{und nicht gleichzeitig } q=0,\ q'=-2\sqrt{-k},\ r=0.$$

Wir vermerken noch

$$(16_3)\qquad \begin{cases}(\breve{x}|\breve{x})\equiv\breve{x}^2+k(\breve{x}_1^2+\breve{x}_2^2)=\breve{u}\breve{u}'+k\breve{v}^2\\ (\bar{x}|\bar{x})=\bar{x}_0^2+k(\bar{x}_1^2+\bar{x}_2^2)=\bar{u}\bar{u}'+k\bar{v}^2.\end{cases}$$

Nunmehr wird aus (9_3)

$$(17_3)\qquad \frac{(q-2q')\breve{u}+q\breve{u}'}{(q-2q')\bar{u}+q\bar{u}}=\frac{\breve{v}}{\bar{v}}=\frac{(3r-q-q')\breve{u}+r\breve{u}'}{(3r+q+q')\bar{u}+r\bar{u}'}=\varrho$$

und daraus durch eine kurze Rechnung

$$(18_3)\qquad \varrho\bar{u}=(2r-q)\breve{u},\quad \varrho\bar{u}'=2(q-2q')\breve{u}+(2r+q)\breve{u}',\quad \varrho\bar{v}=(2r+q)v$$

mit der Umkehrung (bei q und q' die Vorzeichen ändern!)

$$(19_3)\qquad \varrho\breve{u}=(2r+q)\bar{u},\quad \varrho\breve{u}'=-2(q-2q')\bar{u}+(2r-q)\bar{u}',\quad \varrho\breve{v}=(2r-q)\bar{v}.$$

Endlich folgt noch

$$(20_3)\quad \begin{cases} \varrho^2(\bar{u}\breve{u}'+k\bar{v}^2) = -2(2r+q)(q-2q')\bar{u}^2+(4r^2-q^2)\bar{u}\breve{u}'+k(2r-q)^2\bar{v}^2 \\ \varrho^2(\breve{u}\bar{u}'+k\breve{v}^2) = 2(2r-q)(q-2q')\breve{u}^2+(4r^2-q^2)\breve{u}\bar{u}+k(2r+q)^2\breve{v}^2. \end{cases}$$

Diese beiden Formen stellen gleich Null gesetzt den *Fluchtkegelschnitt* $\bar{F}$ und den *Verschwindungskegelschnitt* $\breve{V}$ dar. Ihre Diskussion ist etwas weitläufig, aber einfach und sei samt der Diskussion der entsprechenden Klassengleichungen dem Leser überlassen. $\bar{F}$ und $\breve{V}$ stellen in der Hauptsache *Parabeln* und in Grenzfällen *Grenzkreise* und *Abstandslinien* dar.

12. Wir machen zum Schluße noch folgende wichtige Bemerkung. Mit (6_3) wird aus (8_3), wenn man λ allgemein läßt,

$$(9_3)\qquad \frac{(p_0+p_1\sqrt{-k})\breve{x}_1-p_1C^2\lambda(\breve{x}_0+\sqrt{-k}\,x_1)}{(p_0+p_1\sqrt{-k})\bar{x}_1-p_1C^2\lambda(\bar{x}_0+\sqrt{-k}\,\bar{x}_1)} = \frac{\breve{x}_2}{\bar{x}_2} =$$

$$= \frac{C\lambda(p_0S\lambda+p_3C\lambda)(\breve{x}_0+\sqrt{-k}\,\breve{x}_1)-p_3\sqrt{-k}\,\breve{x}_1}{C\lambda(-p_0S\lambda+p_3C\lambda)(\bar{x}_0+\sqrt{-k}\,\bar{x}_1)-p_3\sqrt{-k}\,\bar{x}_1}.$$

Wegen des Minuszeichens bei p_0 im Nenner des letzten Bruches lassen sich im Gegensatz zum I. und II. Fall diesmal $\frac{p_1}{p_0}$ und $\frac{p_3}{p_0}$ nicht als Funktionen von λ so bestimmen, daß (9_3) von λ unabhängig wird, es sei denn $p_3=0$. Dies ist sehr merkwürdig und hat zur Folge, daß die Ergebnisse beim III. Fall an Eleganz denen des I. und II. Falles weit nachstehen.

(Eingegangen am 25. Oktober 1962.)

EXTENSIONS OF TURÁN'S THEOREM ON GRAPHS

By

G. DIRAC (Hamburg, Deutschland)

(*Presented by* P. TURÁN)

Dedicated to TIBOR GALLAI *on his 50-th birthday*

1. Introduction. In this paper *graph* is always to mean an undirected finite graph without loops and without multiple edges. The symbol $\langle k, \varkappa \rangle$ denotes a complete k-graph with $\varkappa$ edges missing, i. e. a graph with k ($\geqq 1$) vertices and $\max\left[\frac{1}{2}k(k-1)-\varkappa, 0\right]$ edges. P. TURÁN [1], [2] established a sufficient condition for a graph with a given number of vertices to contain a $\langle k, 0 \rangle$ as a sugbraph in terms of the total number of edges in the graph.

TURÁN'S THEOREM. *Let* $n \geqq k \geqq 3$ *and* $n = (k-1)t+r$, *where* k, n, r, t *are integers and* $1 \leqq r \leqq k-1$. *Let*

$$d_k(n) = \frac{k-2}{2(k-1)}(n^2 - r^2) + \frac{1}{2}r(r-1).$$

Further let $\Delta(n, k)$ *denote a graph with* n *vertices and the following structure: the vertices are partitioned into* r *classes of* $t+1$ *and* $k-r-1$ *classes of* t *elements each, the classes being mutually disjoint, and two vertices are joined by an edge if and only if they do not belong to the same class;* $\Delta(n, k)$ *contains* $d_k(n)$ *edges.*

Every graph with n *vertices and more than* $d_k(n)$ *edges contains at least one* $\langle k, 0 \rangle$ *as a subgraph, and so does every graph with* n *vertices and exactly* $d_k(n)$ *edges which is not isomorphic to* $\Delta(n, k)$.

Note that if $n = k$ then $r = t = 1$ and $d_k(n) = \frac{1}{2}k(k-1)-1$.

Theorems which state sufficient conditions for graps with a given number of vertices to contain subgraphs of some given kind in terms of the total number of edges in the graph have been called theorems of TURÁN type by P. ERDŐS and TIBOR GALLAI [3]. An old theorem of this type is that if a graph contains n vertices and at least n edges then it contains at least one circuit.

2. Extensions of Turán's Theorem

THEOREM 1. *Let* k *and* n *be integers,* $n \geqq k+1 \geqq 4$, *and let* r, t *and* $d_k(n)$ *be defined as in* TURÁN'*s Theorem. Any graph with* n *vertices and at least* $d_k(n)+\alpha$ *edges, where* α *is any integer* $\leqq 1$, *contains as a subgraph at least one graph with* n' *vertices and at least* $d_k(n')+\alpha$ *edges for* $n' = k, k+1, \ldots, n-1$.

PROOF. If the number of edges in the graph exceeds $d_k(n)+\alpha$ then let edges be deleted until exactly $d_k(n)+\alpha$ edges remain, and let Γ denote any graph with n vertices and $d_k(n)+\alpha$ edges.

By substituting $(k-1)t+r$ for n in $d_k(n)$ it is seen that

$$d_k(n) = \tfrac{1}{2}(k-1)(k-2)t^2+(k-2)rt+\tfrac{1}{2}r(r-1). \tag{1}$$

It follows from (1) that

$$d_k(n)-d_k(n-1) = n-t-1. \tag{2}$$

It will be deduced from (1) that

$$\Gamma \text{ contains at least one vertex of valency } \leqq n-t-1. \tag{3}$$

For suppose on the contrary that every vertex of Γ has valency $\geqq n-t$. Let e denote the number of edges in Γ. Then $e \geqq \frac{1}{2}n(n-t) = \frac{1}{2}\left[(k-1)t+r\right]\left[(k-2)t+r\right] = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)t^2+(k-1\frac{1}{2})rt+\frac{1}{2}r^2$. Consequently by (1) $e-d_k(n) \geqq \frac{1}{2}r(t+1)$. But $r \geqq 1$, $t \geqq 1$ and if $r=1$ then $t \geqq 2$, because $n \geqq k+1$. Hence $e \geqq d_k(n)+2$. But this is contrary to the fact that $e = d_k(n)+\alpha$ where $\alpha \leqq 1$. So (3) is proved.

Let Λ denote a graph obtained from Γ by deleting some vertex of valency $\leqq n-t-1$ (together with all edges incident with the deleted vertex). The number of edges in Λ is by (2) at least $d_k(n-1)+\alpha$. Hence Γ contains as a subgraph the graph Λ with $n-1$ vertices and at least $d_k(n-1)+\alpha$ edges.

If $n-1 \geqq k+1$ then the above reasoning with $n-1$ in place of n and Λ in place of Γ shows that Λ contains as a subgraph a graph with $n-2$ vertices and at least $d_k(n-2)+\alpha$ edges. By repetitions of the argument Theorem 1 follows.

THEOREM 2. *Let k, n and q be integers such that $k \geqq 3$, $1 \leqq q \leqq k-1$ and $n \geqq k+q-1$, and let $d_k(n)$ and α be defined as in Theorem 1. Any graph with n vertices and at least $d_k(n)+\alpha$ edges contains at least one $\langle k+q-1, q-\alpha\rangle$ as a subgraph.*

PROOF. If $n=k$ then $q=1$ and $d_k(n) = \frac{1}{2}k(k-1)-1$, so the graph contains k vertices and at least $\frac{1}{2}k(k-1)-(1-\alpha)$ edges. Hence the theorem is true if $n=k$.

If $n \geqq k+1$ then by Theorem 1 the graph contains as a subgraph a graph with $k+q-1$ vertices and $d_k(k+q-1)+\alpha$ edges, let Θ denote such a subgraph. By (1) with $r=q$ and $t=1$, $d_k(k+q-1) = \frac{1}{2}(k+q-1)(k+q-2)-q$. Hence Θ is a $\langle k+q-1, q-\alpha\rangle$. Theorem 2 is now proved.

The following simple result will shed light on Theorem 3 and help in the proof of Theorem 4.

(4) *Every $\langle x, y\rangle$ with $1 \leqq y \leqq \frac{1}{2}x(x-1)$ contains at least $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8y+1}$ different $\langle x-1, y-1\rangle - s$.*

PROOF. Let Θ denote any $\langle x, y\rangle$ with $1 \leqq y \leqq \frac{1}{2}x(x-1)$. If z denotes the number of vertices of valency $\leqq x-2$ then $y \leqq \frac{1}{2}z(z-1)$, therefore $z \geqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8y+1}$. Let a denote any vertex of Θ with valency $v(a) \leqq x-2$. $\Theta-a$ contains $x-1$ vertices and $\frac{1}{2}x(x-1)-y-v(a) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)-\left[y+v(a)-(x-1)\right]$ edges, consequently $\Theta-a \supseteq \langle x-1, y-1\rangle$ because $v(a) \leqq x-2$. Hence Θ contains at least $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8y+1}$ different $\langle x-1, y-1\rangle - s$.

(4) is not best possible.

By substituting $\alpha=1$ and $q = 1, 2, \ldots, p, \ldots, k-1$ in Theorem 2 one obtains the following theorem, which includes TURÁN's result:

THEOREM 3. *For $n \geqq k \geqq 3$ every graph with n vertices and more than $d_k(n)$ edges contains at least one $\langle k, 0\rangle$, for $n \geqq k+1 \geqq 4$ every such graph contains at least one $\langle k+1, 1\rangle$ (which contains at least two different $\langle k, 0\rangle - s$), for $n \geqq k+2 \geqq 6$ it contains at least one $\langle k+2,2\rangle$ (which contains at least three different $\langle k+1,1\rangle - s$), ..., for $n \geqq k+p \geqq 2p+2$ it contains at least one $\langle k+p, p\rangle$ (which contains at least $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8p+1}$ different $\langle k+p-1, p-1\rangle - s$), $p = 1, 2, \ldots, k-2$.**

By contrast for all $n \geqq k \geqq 3$ there exist graphs, namely the $\Delta(n, k)$, with n vertices and $d_k(n)$ edges which do not even contain any $\langle k, 0\rangle$ as a subgraph!

Theorem 3 is an extension of and includes that part of TURÁN's Theorem which states that for $n \geqq k \geqq 3$ every graph with n vertices and more than $d_k(n)$ edges contains at least one $\langle k, 0\rangle$ as a subgraph. Theorem 4, which follows, is an extension of and includes that part of TURÁN's Theorem which states that for $n \geqq k \geqq 3$ the $\Delta(n, k)$ are the only graphs with n vertices and exactly $d_k(n)$ edges which do not contain any $\langle k, 0\rangle$.

To explain the apparent discrepancy between Theorem 3 and Theorem 4 it should be noted first that for $n = k+p \geqq 2p+2$ $d_k(n) = \frac{1}{2}(k+p)(k+p-1) - p - 1$, so that for $p \leqq k-2$ a graph with $k+p$ vertices and exactly $d_k(k+p)$ edges is a $\langle k+p, p+1\rangle$ and therefore does not contain any $\langle k+p, p\rangle$, and for each $p \geqq 1$ there exists more than one type of $\langle k+p, p+1\rangle$ because the $p+1$ missing edges can be distributed in different ways and only one distribution, namely the one in which no two of the $p+1$ missing edges have an end-vertex in common, furnishes a $\Delta(k+p, k)$; consequently *for $p = 1, 2, \ldots, k-2$ $\Delta(k+p, k)$ is not the only type of graph with $n = k+p$ vertices and exactly $d_k(k+p)$ edges which does not contain any $\langle k+p, p\rangle$ as a subgraph.* Secondly it should be noted that if $n = k+p+1$ and $p = k-2$ then $d_k(n) = \frac{1}{2}(k+p+1)(k+p) - p - 3$, so that the graph is a $\langle k+p+1, p+3\rangle = \langle 2k-1, k+1\rangle$; let Γ be a $\langle 2k-1, k+1\rangle$ defined as follows: the vertices are $a_1, \ldots, a_{k-1}, b_1, \ldots, b_{k-1}, c$ and the missing edges are $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, \ldots, (a_{k-1}, b_{k-1}), (b_{k-2}, c), (b_{k-1}, c)$; clearly $\Gamma \neq \Delta(2k-1, k)$ because with $\Delta(2k-1, k)$ three of the missing edges form a triangle and with Γ no three of the missing edges do so, and Γ does not contain any $\langle 2k-2, k-2\rangle$ as a subgraph, consequently *for $n = k+p+1$ and $p = k-2$ $\Delta(k+p+1, k)$ is not the only type of graph with $n = k+p+1$ vertices and exactly $d_k(k+p+1)$ edges which does not contain any $\langle k+p, p\rangle$ as a subgraph.*

THEOREM 4. *For $n \geqq k+p+1$ and $p = 0,1, \ldots, k-3$ every graph with n vertices and exactly $d_k(n)$ edges which is not isomorphic to $\Delta(n, k)$ contains at least one $\langle k+p, p\rangle$ as a subgraph.*

PROOF.

(5) *Let $n \geqq k+1 \geqq 4$ and $n = (k-1)t+r$, where k, n, r, t are integers and $1 \leqq r \leqq k-1$. Then $\Delta(n-1, k)$ has the following structure: the vertices are partitioned into $r-1$ classes of $t+1$ and $k-r$ classes of t elements each, the classes being mutually disjoint, and two vertices are joined by an edge if and only if they do not belong to the same class.*

** The case $p=1$, i. e. that for $n \geqq k+1 \geqq 4$ every graph with n vertices and more than $d_k(n)$ edges contains a $\langle k+1,1\rangle$ has been established independently by P. ERDŐS.

For $n-1 \geqq k \geqq 3$, and if $r \geqq 2$ then $n-1 = (k-1)t+r-1$ where $1 \leqq r-1 \leqq k-2$, while if $r=1$ then $n-1 = (k-1)(t-1)+k-1$.

(6) *With the notation of* (5) *let* Θ *denote a graph other than a* $\Delta(n, k)$ *which consists of a* $\Delta(n-1, k)$ *together with a vertex not belonging to the* $\Delta(n-1, k)$ *and joined by edges to* $n-t-1$ *vertices of the* $\Delta(n-1, k)$. *Then if* $t=1$ $\Theta \supset \langle k+r-2, r-2\rangle$, *if* $t=2$ $\Theta \supset \langle 2k-3, k-3\rangle$, *and if* $t \geqq 3$ $\Theta \supset \langle 2k-2, k-2\rangle$.

For let $D_1, \ldots, D_{k-1}$ denote the $k-1$ classes into which the vertices of the $\Delta(n-1, k)$ are partioned according to (5), the notation being chosen so that $D_1, \ldots, D_{k-r}$ contain t vertices each, and the remaining classes $t+1$ each if $r>1$, let $d_{i1}, \ldots, d_{it}$ denote the vertices of D_i for $i=1, \ldots, k-r$ and $d_{i1}, \ldots, d_{i\,t+1}$ the vertices of D_i for $i = k-r+1, \ldots, k-1$ if $r>1$, finally let a denote the vertex of Θ which does not belong to the $\Delta(n-1, k)$.

It may be assumed that a is joined to each of $d_{11}, d_{21}, \ldots, d_{k-1\,1}$ because a is joined to all but t vertices of the $\Delta(n-1, k)$ and so if one of the classes $D_1, \ldots, D_{k-1}$, say D_j, had the property that none of its vertices were joined to a, then $|D_j| = t$ and $\Theta = \Delta(n, k)$ contrary to hypothesis.

Suppose that $t=1$. Then $r \geqq 2$ because $n \geqq k+1$. a is joined to every vertex of the $\Delta(n-1, k)$ but one, it may be supposed that $d_{k-1\,2}$ is the only vertex not joined to a. Then $\Theta - d_{k-1\,2}$ is a $\langle k+r-2, r-2\rangle$, the $r-2$ missing edges being $(d_{k-r+1\,1}, d_{k-r+1\,2}), \ldots, (d_{k-2\,1}, d_{k-2\,n})$.

Suppose that $t=2$. Then a is joined to every vertex of the $\Delta(n-1, k)$ but two. Therefore at least $k-3$ of the classes $D_1, \ldots, D_{k-1}$ have the property that two or more of their vertices are joined to a. Let $k-3$ of $D_1, \ldots, D_{k-1}$ with this property be chosen, and a vertex not belonging to the set $\{d_{11}, d_{21}, \ldots, d_{k-1\,1}\}$ and joined to a be selected from each of them. The $k-3$ vertices so selected, $d_{11}, d_{21}, \ldots, d_{k-1\,1}$ and a together span a $\langle 2k-3, k-3\rangle$ in Θ.

Suppose that $t \geqq 3$. At least $k-2$ of the classes $D_1, \ldots, D_{k-1}$ have the property that two or more of their vertices are joined to a, for otherwise at least two of the classes would have the property that only one of their vertices is joined to a, so that at least $2(t-1)$ vertices of the $\Delta(n-1, k)$ would not be joined to a, but $2(t-1) > t$ if $t \geqq 3$, so a would be joined to fewer than $n-t-1$ vertices of the $\Delta(n-1, k)$ contrary to hypothesis. Let $k-2$ of $D_1, \ldots, D_{k-1}$ with the abovementioned property be chosen, and a vertex not belonging to the set $\{d_{11}, d_{21}, \ldots, d_{k-1\,1}\}$ and joined to a be selected from each of them. The $k-2$ vertices so selected, $d_{11}, d_{21}, \ldots, d_{k-1\,1}$ and a together span a $\langle 2k-2, k-2\rangle$ in Θ. (6) is now proved.

(7) *For* $p=0, 1, \ldots, k-3$ *every graph with* $k+p+1$ *vertices and exactly* $d_k(k+p+1)$ *edges which is not isomorphic to* $\Delta(k+p+1, k)$ *contains at least one* $\langle k+p, p\rangle$ *as a subgraph.*

PROOF by induction over p. (7) is true for $p=0$. This follows from TURÁN's Theorem, it can also be verified shortly as follows: If $k \geqq 3$ then $d_k(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)-2$, so that a graph with $k+1$ vertices and $d_k(k+1)$ edges is a $\langle k+1, 2\rangle$. If the two missing edges do not have an end-vertex in common then the graph is a $\Delta(k+1, k)$, and if the two missing edges have an end-vertex in common then the graph contains a $\langle k, 0\rangle$.

Suppose that $1 \leqq p_0 \leqq k-3$ and that (7) is true for $p = p_0 - 1$. To deduce that (7) is true for $p = p_0$ let Γ denote a graph with $n = k + p_0 + 1$ vertices and exactly $d_k(k+p_0+1)$ edges. Let $n = k+p_0+1 = (k-1)t+r$, where r and t are integers and $1 \leqq r \leqq k-1$. Clearly $t=1$ and $r = p_0+2$. By (3) Γ contains a vertex a with valency $v(a) \leqq n-t-1$. If $v(a) < n-t-1$ then by (2) $\Gamma - a$ contains more than $d_k(k+p_0)$ edges, so by Theorem 3 $\Gamma - a \supseteq \langle k+p_0, p_0 \rangle$. In what follows suppose that $v(a) = n-t-1$. Then $\Gamma - a$ contains exactly $d_k(k+p_0)$ edges by (2), so by the induction hypothesis either $\Gamma - a = \Delta(k+p_0, k)$ or $\Gamma - a \supset \langle k+p_0-1, p_0-1 \rangle$. If $\Gamma - a = \Delta(k+p_0, k)$ then by (6) $\Gamma \supset \langle k+p_0, p_0 \rangle$ since $t=1$ and $r = p_0+2$. If $\Gamma - a \supset \langle k+p_0-1, p_0-1 \rangle$ then $\Gamma \supset \langle k+p_0, p_0 \rangle$ because a is joined to every vertex of $\Gamma - a$ but one. Thus $\Gamma \supset \langle k+p_0, p_0 \rangle$, and therefore (7) is true for $p = p_0$.

(7) is thereby proved.

Theorem 4 will now be proved by induction over n. By (7) the theorem is true for $n = k+p+1$. Suppose that n_0 is an integer $> k+p+1$ and that Theorem 4 is true for $n = n_0 - 1$. To deduce that the theorem is true for $n = n_0$ let Γ denote a graph with n_0 vertices and exactly $d_k(n_0)$ edges, which is not isomorphic to $\Delta(n_0, k)$. Let $n_0 = (k-1)t_0 + r_0$, where r_0 and t_0 are integers and $1 \leqq r_0 \leqq k-1$.

By (3) Γ contains a vertex a with valency $v(a) \leqq n_0 - t_0 - 1$. If $v(a) < n_0 - t_0 - 1$ then by (2) $\Gamma - a$ contains more than $d_k(n_0 - 1)$ edges, so by Theorem 3 $\Gamma - a \supset$ $\supset \langle k+p, p \rangle$. In what follows suppose that $v(a) = n_0 - t_0 - 1$. Then $\Gamma - a$ contains exactly $d_k(n_0 - 1)$ edges by (2).

By the induction hypothesis either $\Gamma - a \supset \langle k+p, p \rangle$ or $\Gamma - a = \Delta(n_0 - 1, k)$. If $\Gamma - a = \Delta(n_0 - 1, k)$ then if $t_0 \geqq 2$ $\Gamma \supset \langle k+p, p \rangle$ by (4) and (6) since $p \leqq k-3$. If $\Gamma - a = \Delta(n_0 - 1, k)$ and $t_0 = 1$ then by (6) $\Gamma \supset \langle k+r_0-2, r_0-2 \rangle$. Now if $t_0 = 1$ then $n_0 = k - 1 + r_0$, consequently $p \leqq r_0 - 3$ because $n_0 \geqq k+p+2$, hence $\langle k+r_0-2, r_0-2 \rangle \supset \langle k+p, p \rangle$ by (4). Thus $\Gamma \supset \langle k+p, p \rangle$.

Theorem (4) is thus true for $n = n_0$ if it is true for $n = n_0 - 1$. The theorem is true for $n = k+p+1$ by (7), therefore it is true generally.

Finally for $k=3$ we have in addition to Theorem 4

THEOREM 5. *I. There exist exactly three different types of graph with five vertices and six edges which do not contain any* $\langle 4, 1 \rangle$ *as a subgraph, namely* $\Delta(5, 3)$, *the graph A with vertices* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *and edges* $(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_4), (a_4, a_5), (a_5, a_2)$, *and the graph B with vertices* b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 *and edges* $(b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_3, b_1), (b_3, b_4), (b_4, b_5), (b_5, b_3)$.

II. There exist exactly two different types of graph with six vertices and nine edges which do not contain any $\langle 4, 1 \rangle$ *as a subgraph, namely* $\Delta(6, 3)$ *and the graph C with vertices* $c_1, c_2, c_3, c_1', c_2', c_3'$ *and the edges* $(c_1, c_2), (c_2, c_3), (c_3, c_1), (c_1', c_2'), (c_2', c_3'), (c_3', c_1'), (c_1, c_1'), (c_2, c_2'), (c_3, c_3')$.

III. For $n \geqq 7$ *every graph with n vertices and exactly* $d_3(n)$ *edges which is not isomorphic to* $\Delta(n, 3)$ *contains at least one* $\langle 4, 1 \rangle$ *as a subgraph.*

PROOF of I. If the graph does not contain a $\langle 3, 0 \rangle$ then by TURÁN's Theorem it is isomorphic to a $\Delta(5, 3)$. Suppose that the graph contains at least one $\langle 3, 0 \rangle$. Neither of the two vertices not belonging to the $\langle 3, 0 \rangle$ is joined to more than one vertex of the $\langle 3, 0 \rangle$ because the graph does not contain any $\langle 4, 1 \rangle$, hence the two vertices are joined by an edge and each of them is joined to exactly one vertex of the $\langle 3, 0 \rangle$. If they are joined to the same vertex of the $\langle 3, 0 \rangle$ then the graph is isomorphic to B, otherwise it is isomorphic to A. This proves I.

PROOF of II. If the graph does not contain a $\langle 3, 0\rangle$ then by TURÁN's Theorem it is isomorphic to $\Delta(6, 3)$. Suppose that the graph contains a $\langle 3, 0\rangle$ and let c_1, c_2, c_3 denote the vertices of a $\langle 3, 0\rangle$ contained in the graph and c_1', c_2', c_3' the remaining three vertices of the graph. None of c_1', c_2', c_3' is joined to more than one of c_1, c_2, c_3 because the graph does not contain any $\langle 4, 1\rangle$. Hence c_1', c_2', c_3' are the vertices of a $\langle 3, 0\rangle$. Therefore each of c_1, c_2, c_3 is joined to exactly one of c_1', c_2', c_3'. It follows that the graph is isomorphic to C. This proves II.

Proof of III by induction over n.

Proof for $n=7$ by *reductio ad absurdum*. Suppose that III is false for $n=7$, i. e. there exists a graph with seven vertices and twelve edges which is not isomorphic to $\Delta(7, 3)$ and does not contain any $\langle 4, 1\rangle$. By TURÁN's Theorem the graph contains a $\langle 3, 0\rangle$ as a subgraph. Each of the four vertices not belonging to the $\langle 3, 0\rangle$ is joined to at most one vertex of the $\langle 3, 0\rangle$, and the four vertices determine at most four edges, because the graph does not contain any $\langle 4, 1\rangle$. Hence the graph contains at most eleven edges, which is a contradiction because $d_3(7)=12$. So III is true for $n=7$.

Suppose that $n_0 \geqq 8$ and that III is true for $n = n_0 - 1$. To deduce that III is true for $n=n_0$ let Γ denote a graph with n_0 vertices and exactly $d_3(n_0)$ edges which is not isomorphic to $\Delta(n_0, 3)$. Let $n_0 = 2t_0 + r_0$, where r_0 and t_0 are integers and $1 \leqq r_0 \leqq 2$. By (3) Γ contains a vertex a valency $v(a) \leqq n_0 - t_0 - 1$. If $v(a) < n_0 - t_0 - 1$ then by (2) $\Gamma - a$ contains more than $d_3(n_0 - 1)$ edges, so by Theorem 3 with $k=3$ and $p=1$ $\Gamma - a \supset \langle 4, 1\rangle$. In what follows suppose that $v(a) = n_0 - t_0 - 1$. Then $\Gamma - a$ contains exactly $d_3(n_0 - 1)$ edges by (2).

By the induction hypothesis either $\Gamma - a \supset \langle 4, 1\rangle$ or $\Gamma - a = \Delta(n_0 - 1, 3)$. If $\Gamma - a = \Delta(n_0 - 1, 3)$ then, since $t_0 \geqq 3$ because $n_0 \geqq 8$, by (6) $\Gamma \supset \langle 4, 1\rangle$. Thus $\Gamma \supset \langle 4, 1\rangle$.

III is therefore true for $n=n_0$ if it is true for $n = n_0 - 1$. III is true for $n=7$, therefore it is true generally. Theorem 5 is now proved.

REMARK. Although this is not directly significant for the subject matter of the paper, it may be verified that TURÁN's Theorem is formally true for $k \geqq 2$ and $n \geqq 0$, Theorem 1 for $k \geqq 2$, $n \geqq 0$ and $0 \leqq n' \leqq n-1$, Theorem 2 for $k \geqq 2$, and Theorem 3 for $n \geqq k \geqq 2$.

MATHEMATICAL SEMINAR,
UNIVERSITY OF HAMBURG

(Received 5 November 1962)

References

[1] P. TURÁN, Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, *Matematikai és fizikai lapok*, **48** (1941), pp. 436–452.
[2] P. TURÁN, On the theory of graphs, *Colloq. Math.*, **3** (1954), pp. 19–30.
[3] P. ERDŐS and T. GALLAI, On maximal paths and circuits of graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), pp. 337–356.

ON THE MAXIMAL NUMBER OF INDEPENDENT CIRCUITS IN A GRAPH

By

K. CORRÁDI and A. HAJNAL (Budapest)

(*Presented by* G. HAJÓS)

§ 1. Introduction

In this paper we are going to prove the following theorem:

Let $n, k(\geqq 1)$ be integers such that $n \geqq 3k$ and suppose that the valency of every vertex of a graph $\mathcal{G}$ of n vertices is not less than $2k$. Then $\mathcal{G}$ contains k independent circuits.[1]

The special case $k=1$ of this theorem is a well-known and almost trivial assertion of graph theory. This generalization of it has been conjectured by P. ERDŐS. A few years ago G. DIRAC stated the following slightly weaker conjecture (written communication).

If a graph $\mathcal{G}$ of $n \geqq 3k$ vertices is $2k$-fold connected then it contains k independent circuits. The special case $k=2$ of our result was already known to them too. In their paper [1] G. DIRAC and P. ERDŐS prove the following theorem.

To every $k \geqq 1$ and to $c \geqq 0$ there is a smallest integer $n(k, c)$ such that if $n > n(k, c)$ then every graph $\mathcal{G}$ of n vertices every vertex of which has valency $\geqq 2k$ except possible c vertices contains k independent circuits. Though this theorem for large n is stronger than ours, it is of quite different character and the proof needs different arguments.

Using our theorem already mentioned in paper [1] G. DIRAC and P. ERDŐS prove a generalisation of this theorem too. As to the further possible generalizations and problems arising here we also refer to [1].

We would like to mention that in the first version of this paper dated November 9, 1961 the proof of our results was more complicated. L. PÓSA called our attention to the fact that the proof of the case $n=3k$ can be considerably simplified. We will point out in the text where his idea is used.

§ 2. Definitions. Notations

A graph $\mathcal{G}$ is considered to be an ordered pair $\langle G, \mathcal{G}^* \rangle$ where G is the set of vertices denoted by $P, Q, \ldots$ etc. and $\mathcal{G}^*$ is a set of non ordered pairs (P, Q), $P \neq Q$, $P, Q \in G$ called the edges of $\mathcal{G}$.

A graph $\mathcal{H}$ is said to be a subgraph of $\mathcal{G}$ if $H \subseteqq G$ and $\mathcal{H}^* \subseteqq \mathcal{G}^*$. If $\mathcal{H}$ is a subgraph of $\mathcal{G}$ we briefly say that $\mathcal{G}$ contains $\mathcal{H}$ and we write $\mathcal{H} \subseteqq \mathcal{G}$.

If $\mathcal{G}$ is a graph, and $H \subseteqq G$ then the subgraph of $\mathcal{G}$ spanned by the vertices belonging to H will be denoted by $\mathcal{G}(H) = \langle H, \mathcal{G}^*(H) \rangle$.

[1] We only consider finite graphs without loops and multiple edges. For the detailed explanation of the terminology used in this paper see § 2.

$|A|$ denotes the number of elements of A for an arbitrary set A.

If $\mathcal{G}=\langle G, \mathcal{G}^*\rangle$ is a graph $|G|$ will be denoted by $v(\mathcal{G})$.

If $P\in G$ then the number of edges of $\mathcal{G}$ incident to P will be called the valency of P in $\mathcal{G}$ and will be denoted by $v(P, \mathcal{G})$.

If $P\in G$ and $H\subseteqq G$, then the number of edges (P, Q), $Q\in H$ of $\mathcal{G}$ is said to be the valency of P in $\mathcal{G}$ with respect to H. This will be denoted by $v(P, \mathcal{G}, H)$.

Let $P_1, \ldots, P_j$ be different elements. The graph $\mathcal{C}[P_1, \ldots, P_j]$ the vertices of which are $P_1, \ldots, P_j$ and the edges of which are (P_1, P_2), (P_2, P_3), $\ldots$, (P_{j-1}, P_j), (P_j, P_1) will be said a circuit of length j, for $j\geqq 3$. The graph $\mathcal{P}[P_1, \ldots, P_j]$ the vertices of which are $P_1, \ldots, P_j$ $(j\geqq 1)$ and the edges of which are (P_1, P_2), (P_2, P_3), $\ldots$, (P_{j-1}, P_j) is said to be a path of length j.

If $\mathcal{C}[P_1, \ldots, P_j]$ is a circuit or $\mathcal{P}[P_1, \ldots, P_j]$ is a path the set of vertices $\{P_1, \ldots, P_j\}$ will be briefly denoted by $\overline{\mathcal{C}}$ or $\overline{\mathcal{P}}$ respectively.

Two vertices are said to be independent (in a graph $\mathcal{G}$) it they are not connected by an edge.

Two edges or two circuits are said to be independent if they have no common vertex. A collection of vertices (edges, circuits) is said to be independent if any two of them is independent respectively.

Let k be an integer $k\geqq 1$. We say that a graph is an $\bigcirc^k$ graph if it is the sum of k independent circuits more precisely if $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ is a collection of independent circuits, and the set of vertices and the set of edges of $\mathcal{G}$ are the union of the set of vertices and the set of edges of the circuits $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ respectively. We will use the notation $\bigcirc^k = \mathcal{C}_1 + \ldots + \mathcal{C}_k$.

§ 3. Proof of the theorems

THEOREM 1. *Let $\mathcal{G}=\langle G, \mathcal{G}^*\rangle$ be a graph such that $v(\mathcal{G})=n$. Suppose $n\geqq 3k$, $k\geqq 1$ and $v(P, \mathcal{G})\geqq 2k$ for every vertex $P\in G$.*

Then $\mathcal{G}$ contains an $\bigcirc^k$ graph.

REMARK. Theorem 1 is best possible of its kind as is shown by the following example:

Let $\mathcal{G}=\langle G, \mathcal{G}^*\rangle$ be the graph defined by the following stipulations.

Let G_1, G_2 be two disjoint sets, $|G_1| = 2k-1$, $|G_2| = n-2k+1\geqq k+1$. Put $G = G_1 \cup G_2$. The edge (P, Q), $P, Q\in G$ belongs to $\mathcal{G}^*$ if and only if either $P, Q\in G_1$ or $P\in G_1$ and $Q\in G_2$.

It is obvious that $v(\mathcal{G})=n\geqq 3k$ and the valency $v(P, \mathcal{G})$ of every vertex of $\mathcal{G}$ is not less than $2k-1$. On the other hand, $\mathcal{G}$ does not contain a graph $\bigcirc^k = \mathcal{C}_1 + \ldots + \mathcal{C}_k$ since for every circuit $\mathcal{C}\subseteqq\mathcal{G}$, $\overline{\mathcal{C}}$ contains at least two elements of G_1.[2]

Instead of Theorem 1 we prove the following stronger

THEOREM 2. *Let $\mathcal{G}=\langle G, \mathcal{G}^*\rangle$ be a graph such that $v(\mathcal{G})=n$. Suppose $n\geqq 3k$, $k\geqq 1$ and suppose that $v(P, \mathcal{G})\geqq 2k$ for every vertex $P\in G$. Put $n = lk+t$ where $0\leqq t<k$ $(l\geqq 3)$. Then $\mathcal{G}$ contains a graph $\bigcirc^k$ satisfying the following conditions;*

$$\bigcirc^k = \mathcal{C}_1 + \ldots + \mathcal{C}_k.$$

[2] This graph $\mathcal{G}$ was constructed by P. ERDŐS and T. GALLAI. See [2].

The length of $\mathcal{C}_i$ is not greater than l for $1 \leqq i \leqq k-t$. The length of $\mathcal{C}_i$ is not greater than $l+1$ for $k-t < i \leqq k$.

REMARK. In case $n=3k$ Theorems 1 and 2 give the same. For $n>3k$ Theorem 2 is stronger than Theorem 1. Thus it is sufficient to prove Theorem 2.

The estimation given by Theorem 2 for the length of $\mathcal{C}_i$ is certainly not best possible for large n. Although one can prove that it is best possible if $n \leqq 4k$. Perhaps one can carry out simpler proofs for the case $n>3k$ of Theorem 2 which gives no estimation for the length of $\mathcal{C}_i$ but we do not succeeded in obtaining this. Before proving Theorem 2 we formulate a well-known general argument of graph theory which will be used in the sequel.

Let $\Phi(\mathcal{H})$, $\Psi(\mathcal{H})$ denote properties of graphs. The property $\Phi(\mathcal{H})$ is said to be *monotonic* if $\Phi(\mathcal{H}_1)$ implies $\Phi(\mathcal{H}_2)$ provided $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$, $H_1 = H_2$.

The graph $\mathcal{H}_1$ is said to be *saturated* with respect to the property $\Phi(\mathcal{H})$, if every proper extension $\mathcal{H}_2$ of $\mathcal{H}_1$ with $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1^* \neq \mathcal{H}_2^*$ $H_1 = H_2$ fails to possess property Φ.

The property $\Phi(\mathcal{H})$ is said to be a *finite graph property* if for every graph $\mathcal{H}_1$ which has property Φ there exists a maximal graph $\mathcal{H}_2$ with $H_2 = H_1$ which contains $\mathcal{H}_1$ and which has property Φ i. e. $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$, $H_1 = H_2$, $\Phi(\mathcal{H}_2)$ and $\mathcal{H}_2$ is saturated with respect to the property Φ.

An almost trivial „reductio ad absurdum" proof shows that the following statement is true

LEMMA 1. *Suppose that $\Phi(\mathcal{H})$ is monotonic, and the negation of $\Psi(\mathcal{H})$ is a finite graph property. Suppose further that every graph $\mathcal{H}$ which possesses property Φ, and which is saturated with respect to the negation of property Ψ, possesses property Ψ.*

Then every graph wich has property Φ, possesses property Ψ too.

The application of this argument was proposed by L. PÓSA.

Now we turn to the proof of Theorem 2. We need here several lemmas, the proof of the lemmas is to be found in §4.

We distinguish the cases A) $n=3k$, B) $n>3k$.

Proof of Theorem 2 in case A).

Let $\mathcal{G}$ be a graph satisfying the conditions of Theorem 2.

Let $\Phi(\mathcal{H})$ denote the property of a graph $\mathcal{H}$ that $v(P, \mathcal{H}) \geqq 2k$ for every $P \in H$.

Let $\Psi(\mathcal{H})$ denote the property of a graph $\mathcal{H}$ that $\mathcal{H}$ contains an $\bigcirc^k$ graph.

It is obvious that $\Phi(\mathcal{H})$ is monotonic and that the negation of $\Psi(\mathcal{H})$ is a finite graph property. Thus by Lemma 1 we may suppose that

(1) $\mathcal{G}$ is saturated with respect to the negation of $\Psi(\mathcal{H})$.

Now we assume that

(2) $\mathcal{G}$ does not contain an $\bigcirc^k$ graph and we finish the proof by obtaining a contradiction.

By (2) there exist $P, Q \in G$, $P \neq Q$ such that

$$(P, Q) \notin \mathcal{G}^*. \tag{3}$$

Hence $\mathcal{G}_1 = \langle G, \mathcal{G}_1^* \rangle$ with $\mathcal{G}_1^* = \mathcal{G}^* \cup \{(P, Q)\}$ is a proper extension of $\mathcal{G}$ and considering (1) $\mathcal{G}_1$ contains an $\bigcirc^k$ graph. That means there exists a graph $\bigcirc^k =$

$= \mathcal{C}_1 + \ldots + \mathcal{C}_k$ satisfying the condition:

(4) $$O^k \subseteq \mathcal{G}_1 \qquad (O^k = \mathcal{C}_1 + \ldots + \mathcal{C}_k).$$

(5) Considering that the length of a circuit is at least 3 and that $n = 3k$ we have the length of the circuits $\mathcal{C}_i$ is 3 for $1 \leqq i \leqq k$; the sets $\overline{\mathcal{C}}_i$ are disjoint and

$$G = \bigcup_{1 \leqq i \leqq k} \overline{\mathcal{C}}_i.$$

It is obvious that at most one of the circuits $\mathcal{C}_i$ contains the edge (P, Q), and by (2) one of them, let us say $\mathcal{C}_1$, contains (P, Q). Thus we can choose the notations so that the following conditions hold.

(6) $$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1[P_1^1, P_2^1, P_3^1], \quad \mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i[P_1^i, P_2^i, P_3^i]$$

$$P = P_1^1, \quad Q = P_3^1; \quad \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{G} \quad \text{for} \quad 2 \leqq i \leqq k,$$

$$\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{G} \quad \text{and} \quad (P_1^1, P_3^1) \notin \mathcal{G}^*.$$

The idea of our proof is to show that in the subgraph spanned by the path $\overline{\mathcal{P}}_1$ and some, say four triangles $\overline{\mathcal{C}}_i$ one can find five independent triangles. However the technical excecution of the proof is not so simple

(7) Put $$H_1 = \overline{\mathcal{C}}_2 \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{C}}_k.$$

Put further $$r = \sum_{j=1}^{3} v(P_j^1, \mathcal{G}, H_1).$$

By the assumption and by (6) we have $r \geqq 6k - 4$. Considering that $6k - 4 > 6(k-1)$ it follows that there exists an i_0, $2 \leqq i_0 \leqq k$ such that $\sum_{j=1}^{3} v(P_j^1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}_{i_0}) \geqq 7$. We may assume that $i_0 = 2$. Hence we have

(8) $$\sum_{j=1}^{3} v(P_j^1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}_2) \geqq 7.$$

Now we need the following

LEMMA 2. *Let $\mathcal{H}$ be a graph such that $v(\mathcal{H}) = 6$. $H = \{P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$, $\mathcal{P}[P_1, P_2, P_3] \subseteq \mathcal{H}$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}[Q_1, Q_2, Q_3] \subseteq \mathcal{H}$ and*

$$\sum_{j=1}^{3} v(P_j, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \geqq 7.$$

Then either $\mathcal{H}$ contains two independent triangles or $v(P_2, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) = 3$, $v(P_1, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) = v(P_3, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) = 2$ and there is a j, $1 \leqq j \leqq 3$ for which $(P_1 Q_j) \notin \mathcal{H}^*$ and $(P_3 Q_j) \notin \mathcal{H}^*$.

If $\mathcal{G}(\overline{\mathcal{P}}_1 \cup \overline{\mathcal{C}}_2)$ contains two independent triangles then by (6) $\mathcal{G}$ contains an O^k which contradicts (2). Thus by (8) and by Lemma 2 we have

(9) $$(P_2^1, P_j^2) \in \mathcal{G}^* \quad \text{for} \quad j = 1, 2, 3.$$

We may assume that

$$(P_1^1, P_1^2) \notin \mathcal{G}^*, \quad (P_3^1, P_1^2) \notin \mathcal{G}^*$$

and

$$(P_1^1, P_j^2) \in \mathcal{G}^*, \quad (P_3^1, P_j^2) \in \mathcal{G}^* \quad \text{for} \quad j = 2, 3.$$

(10) Put $$H_2 = \overline{\mathcal{C}}_3 \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{C}}_k.$$

Considering that by (6) and (9)

$$v(P_1^1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{P}}_1 \cup \overline{\mathcal{C}}_2) = v(P_3^1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{P}}_1 \cup \overline{\mathcal{C}}_2) = 3$$

we have

$$v(P_1^1, \mathcal{G}, H_2) + v(P_3^1, \mathcal{G}, H_2) \geqq 4k - 6 > 4(k-2).$$

It results from (10) that there exists an i_0, $3 \leqq i_0 \leqq k$ such that

$$v(P_1^1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}_{i_0}) + v(P_3^1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}_{i_0}) \geqq 5.$$

We may assume $i_0 = 3$. Thus we have

(11) $$v(P_1^1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}_3) + v(P_3^1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}_3) \geqq 5.$$

By symmetry we may assume that

(12) $$v(P_1^1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}_3) = 3 \quad \text{and} \quad v(P_3^1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}_3) \geqq 2$$

and that

$$(P_3^1, P_2^3) \in \mathcal{G}^*, \quad (P_3^1, P_3^3) \in \mathcal{G}^*.$$

Put

$$C_3' = C_3'[P_1^1, P_1^3, P_2^3].$$

Then we have by (12)

(13) $$C_3' \subseteq \mathcal{G} \quad \text{and} \quad v(P_3^3, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}_3^1) = 3.$$

Put

(14) $$D_1 = \{P_2^1, P_3^1, P_1^2, P_3^3\}, \quad D_2 = \{P_2^2, P_3^2\},$$

$$H_3 = \overline{\mathcal{C}}_3' \cup \overline{\mathcal{C}}_4 \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{C}}_k.$$

We need a lower estimation for $\sum_{Q \in D_1} v(Q, \mathcal{G}, H_3)$.

(15) $$\sum_{Q \in D_1} v(Q, \mathcal{G}, H_3) > 8(k-2).$$

To see this, we recall first that by (9) $(P_3^1, P_1^2) \notin \mathcal{G}^*$. Taking into consideration (6) and (9) an easy discussion shows that $(P_2^1, P_3^3) \notin \mathcal{G}^*$ and that $v(P_3^3, \mathcal{G}, D_1 \cup D_2) \leqq 3$ for if not then $\mathcal{G}(D_1 \cup D_2)$ would contain two independent triangles, and these would form with $\mathcal{C}_3', \mathcal{C}_4, \ldots, \mathcal{C}_k$ k independent circuits in $\mathcal{G}$ in contradiction with (2).

Thus we obtain (15) as follows

$$\sum_{Q\in D_1} v(Q, \mathcal{G}_j, H_3) = v(P_2^1, \mathcal{G}_j, H_3) + v(P_3^1, \mathcal{G}_j, H_3) + v(P_1^2, \mathcal{G}_j, H_3) +$$

$$+ v(P_3^3, \mathcal{G}_j, H_3) \geqq (2k-4) + (2k-4) + (2k-4) + (2k-3) = 8k-15.$$

It follows from (15) that either (16) or (17) holds

$$\sum_{Q\in D_1} v(Q, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{C}}_3') \geqq 9. \tag{16}$$

$$\sum_{Q\in D_1} v(Q, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{C}}_{i_0}) \geqq 9 \quad \text{for an} \quad i_0,\ 4 \leqq i_0 \leqq k. \tag{17}$$

We may suppose that $i_0 = 4$.

Now we need the following

LEMMA 3. *Let $\mathcal{H}$ be a graph such that $v(\mathcal{H}) = 7$, $H = \{P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3\}$. Suppose that $(P_1, P_2) \in \mathcal{H}^*$; $(P_3, P_4) \in \mathcal{H}^*$; $\mathcal{C} = \mathcal{C}[Q_1, Q_2, Q_3] \subseteqq \mathcal{H}$ and*

$$\sum_{i=1}^{4} v(P_i, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \geqq 9.$$

Then there exist two independent triangles $\mathcal{C}', \mathcal{C}'' \subseteqq \mathcal{H}$. If $v(P_{j_0}, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) = 3$ for an arbitrary j_0, $1 \leqq j_0 \leqq 4$ then $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$ can be choosen so that $P_{j_0} \in \overline{\mathcal{C}}' \cup \overline{\mathcal{C}}''$, $\overline{\mathcal{C}} \subseteqq \overline{\mathcal{C}}' \cup \overline{\mathcal{C}}''$.

Now we show that any of the statements (16), (17) leads to a contradiction.

Suppose that (16) holds. Considering that by (9) and (12) $(P_2^1, P_1^2) \in \mathcal{G}_j^*$ and $(P_3^1, P_3^3) \in \mathcal{G}_j^*$, and that by (13) $\mathcal{C}_3' \subseteqq \mathcal{G}_j$ and $v(P_3^3, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{C}}_3') = 3$ we may apply Lemma 3 to the graph $\mathcal{H} = \mathcal{G}_j\,(D_1 \cup \overline{\mathcal{C}}_3')$ with

$$P_1 = P_2^1, \quad P_2 = P_1^2, \quad P_3 = P_3^1, \quad P_4 = P_3^3,$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_3', \quad Q_1 = P_1^1, \quad Q_2 = P_1^3, \quad Q_3 = P_2^3,$$

where $v(P_4, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) = 3$.

It follows that $\mathcal{G}_j(D_1 \cup \overline{\mathcal{C}}_3')$ contains two independent circuits $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ and $D_1 \cup \overline{\mathcal{C}}_3' = \{P\} \cup \overline{\mathcal{C}}' \cup \overline{\mathcal{C}}''$ where P is one of the vertices P_2^1, P_1^2, P_3^1. It follows from (6) and (9) that the circuit $\mathcal{C}''' = \mathcal{C}'''[P, P_2^2, P_3^2]$ belongs to $\mathcal{G}_j$. By (6), (9), (13) and (14) $\mathcal{C}', \mathcal{C}'', \mathcal{C}''', \mathcal{C}_4, \ldots, \mathcal{C}_k$ are k independent circuits in $\mathcal{G}_j$. This contradicts (2).

Suppose that (17) holds then again by (9) and (12)

$$(P_2^1, P_1^2) \in \mathcal{G}_j^* \quad \text{and} \quad (P_3^1, P_3^3) \in \mathcal{G}_j^*.$$

Hence we may apply Lemma 3 to the graph $\mathcal{H} = \mathcal{G}_j(D_1 \cup \overline{\mathcal{C}}_4)$ with

$$P_1 = P_2^1, \quad P_2 = P_1^2, \quad P_3 = P_3^1, \quad P_4 = P_3^3,$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_4, \quad Q_1 = P_1^4, \quad Q_2 = P_2^4, \quad Q_3 = P_3^4.$$

It follows that $\mathcal{G}_j(D_1 \cup \overline{\mathcal{C}}_4)$ contains two independent circuits $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ and $D_1 \cup \overline{\mathcal{C}}_4 = \{P\} \cup \overline{\mathcal{C}}' \cup \overline{\mathcal{C}}''$ where $P \in D_1$.

We distinguish two cases (i) $P \neq P_3^3$, (ii) $P = P_3^3$. If (i) holds then by (9) the circuit $\mathcal{C}''' = \mathcal{C}'''[P, P_2^2, P_3^2]$ belongs to $\mathcal{G}$, and by (6), (13) and (14) $\mathcal{C}', \mathcal{C}'', \mathcal{C}'''$, $\mathcal{C}_3', \mathcal{C}_5, \ldots, \mathcal{C}_k$ are k independent circuits in $\mathcal{G}$. This contradicts (2).

If (ii) holds then by (9) the circuit $\mathcal{C}''' = \mathcal{C}'''[P_1^1, P_2^2, P_3^2]$ belongs to $\mathcal{G}$ and considering that $P = P_3^3$ belongs to $\overline{\mathcal{C}}_3$, using again (6) and (14) we obtain that $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$, $\mathcal{C}'''$, $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5, \ldots, \mathcal{C}_k$ are k independent circuits in $\mathcal{G}$.

This again contradicts (2). Thus the proof of the case A) is complete.

REMARK. It seems that using our method the proof of the case $n = 3k$ can not be simplified essentially. Namely, in case $k = 4$ it is easy to construct a graph $\mathcal{G}$ satisfying the requirements of our theorem such that it contains the triangles $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ and the path $\mathcal{P}_1$ of length three, further $G = \overline{\mathcal{P}}_1 \cup \overline{\mathcal{C}}_2 \cup \overline{\mathcal{C}}_3 \cup \overline{\mathcal{C}}_4$, but $\mathcal{C}_i \not\subseteq O^4$ $(i = 2, 3, 4)$ for every O^4 contained in $\mathcal{G}$. Though this difficulty does not enter in the proof of the case $n > 3k$ this proof is also complicated.

Proof of Theorem 2 *in case* B).

The theorem is trivial for $k = 1$. We assume $k > 1$. First we state a Lemma.

LEMMA 4. *Let $\mathcal{H}$ be a graph, $v(\mathcal{H}) = r+1$. Suppose that $\mathcal{C} = \mathcal{C}[Q_1, \ldots, Q_r] \subseteq \mathcal{H}$, $H = \{Q_1, \ldots, Q_r, P\}$. Then $\mathcal{H}$ contains a circuit $\mathcal{C}'$ of length $< r$ provided one of the following conditions holds:*

a) $\quad r > 4 \quad$ *and* $\quad v(P, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \geq 2,$

b) $\quad r > 3 \quad$ *and* $\quad v(P, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \geq 3.$

We prove

(18) $\quad \mathcal{G}$ contains a circuit of length $\leq l$.

It is obvious that $\mathcal{G}$ contains a circuit. Let $\mathcal{C} = \mathcal{C}[Q_1, \ldots, Q_r]$ be a circuit contained in $\mathcal{G}$ of minimal length, i. e. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ and $v(\mathcal{C}') \geq r$ for every $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{G}$. We have to prove $r \leq l$. Suppose that this is false, i. e. $r > l$. Put $H_1 = G - \overline{\mathcal{C}}$. Then $|H_1| = lk + t - r$. Considering the minimality of r we have $v(Q_j, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}) = 2$ for $1 \leq j \leq r$.

It follows from the assumption that

$$V = \sum_{j=1}^{r} v(Q_j, \mathcal{G}, H_1) \geq 2kr - 2r = 2(k-1)r.$$

Considering that $H_1 \cap \overline{\mathcal{C}} = 0$ we have $V = \sum_{P \in H_1} v(P, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}})$. It results that there exists a $P_0 \in H_1$ for which $v(P_0, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}) \geq 3$ for if not, then

$$2(k-1)r \leq V \leq 2(lk + t - r),$$

$$kr \leq lk + t < (l+1)k \quad \text{hence} \quad r < l+1$$

in contradiction with the assumption $r > l$.

But then we can apply Lemma 4 to the graph $\mathcal{G}(\overline{\mathcal{C}} \cup \{P_0\})$ Considering that $r > l \geq 3$, we obtain that $\mathcal{G}$ contains a circuit $\mathcal{C}'$ of length $< r$. This contradicts the minimality of r. Thus (18) is proved.

It follows from (18) that

(19) there exists an integer $s(\geqq 1)$, for which there exists an $\bigcirc^s$ graph satisfying the following conditions:

a) $$\bigcirc^s = \mathcal{C}_1 + \ldots + \mathcal{C}_s \subseteq \mathcal{G},$$

b) $$v(\mathcal{C}_i) \leqq l \quad \text{for} \quad 1 \leqq i \leqq k-t, \quad i \leqq s,$$

c) $$v(\mathcal{C}_i) \leqq l+1 \quad \text{for} \quad k-t < i \leqq k, \quad i \leqq s.$$

(If $i > s$ then conditions b) and c) hold vacuously).

(20) Let s_0 be the greatest integer $\geqq 1$ satisfying the conditions of (19).

We have to prove $s_0 \geqq k$. We assume

(21) $$s_0 < k,$$

and we finish the proof of case B) by obtaining a contradiction.

(22) Let v_0 be the least integer for which there exists a graph $\bigcirc^{s_0}$ satisfying the conditions of (19) with $s = s_0$, such that $v(\bigcirc^{s_0}) = v_0$. Put briefly $H = \mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_{s_0}$ for such an $\bigcirc^{s_0} = \overline{\mathcal{C}}_1 + \ldots + \overline{\mathcal{C}}_{s_0}$.

(23) Let u be the maximal number $1 \leqq u \leqq l+1$ for which there exists a graph $\bigcirc^{s_0}$ satisfying the conditions of (19) such that $v(\bigcirc^{s_0}) = v_0$ and such that there exists a path $\mathcal{P} = \mathcal{P}[P_1, \ldots, P_u]$ with $\overline{\mathcal{P}} \subseteq G - H$.

We are going to prove that $u = l+1$. To prove this let

(24) $\bigcirc_0^{s_0} = \mathcal{C}_1^0 + \ldots + \mathcal{C}_{s_0}^0$ be a graph satisfying the conditions of (19), such that $v(\bigcirc_0^{s_0}) = v_0$, $H_0 = \overline{\mathcal{C}}_1^0 \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{C}}_{s_0}^0$ and let $\mathcal{P} = \mathcal{P}[P_1, \ldots, P_u]$ be a path $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{G}$ such that $\overline{\mathcal{P}} \subseteq G - H_0$.

Put

(25) $$D = G - H_0, \quad D_1 = D - \overline{\mathcal{P}}$$

and assume that

(26) $$u < l+1.$$

(The assertions (27)—(35) will all depend on the indirect assumption (26).) It follows from (26) that

(27) $\mathcal{G}(D)$ does not contain a circuit.

In fact if $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{G}(D)$ then if $v(\mathcal{C}') \leqq l$ then by (24) $\bigcirc^{s_0+1} = \mathcal{C}_0^1 + \ldots + \mathcal{C}_{s_0}^0 + \mathcal{C}'$ would be an $\bigcirc^{s_0+1}$ graph satisfying the conditions of (19) with $s = s_0 + 1$ in contradiction with (20). Hence $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{G}(D)$ implies $v(\mathcal{C}') \geqq l+1$. But then by (24) and (25) $\mathcal{G}(D)$ would contain a path of length $> u$ in contradiction with (23).

Considering (23), (24) and (25) we have $v(P_1, \mathcal{G}, D_1) = 0$ and $v(P_u, \mathcal{G}, D_1) = 0$ and it follows from (27) that $v(P_1, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{P}}) = v(P_u, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{P}}) \leqq 1$. Hence we have

(28) $$v(P_1, \mathcal{G}, D) \leqq 1, \quad v(P_u, \mathcal{G}, D) \leqq 1.$$

Now we show

(29) D_1 is non empty.

Considering (19) and (24) we have

$$|H_0| \leqq ls_0 \quad \text{if} \quad s_0 < k-t,$$

$$|H_0| \leqq l(k-t)+(s_0-(k-t))(l+1) \quad \text{if} \quad s_0 \geqq k-t.$$

It results from (19), (24) and (25) that

$$|D_1| = |G|-u-|H_0|.$$

Thus by the assumption and by (26) we have

$$|D_1| \geqq lk+t-l-ls_0 \quad \text{if} \quad s_0 < k-t,$$

$$|D_1| \geqq lk+t-l-l(k-t)-(s_0-(k-t))(l+1) \quad \text{if} \quad s_0 \geqq k-t.$$

Considering that $lk+t = l(k-t)+(l+1)t$ we get

$$|D_1| \geqq l(k-1-s_0)+t \quad \text{if} \quad s_0 < k-t.$$

$$|D_1| \geqq (l+1)(k-s_0)-l \quad \text{if} \quad s_0 \geqq k-t.$$

Considering (21) we obtain that $|D_1|>0$ except if $s_0 < k-t$, $k-1 = s_0$, $t=0$, $u=l$, $|H_0| = l(k-1)$ and as a consequence of these and of (19), (24)

$$v(\mathcal{C}_i^0)=l \quad \text{for} \quad 1 \leqq i \leqq k-1.$$

But in this case $|D_1|=0$ leads to a contradiction as follows. Considering that $t=0$ and that $n = lk+t > 3k$ (by B)) we have $l \geqq 4$. It follows from (28) that $v(P_1, \mathcal{G}, D) \leqq 1$ hence by the assumption $v(P_1, \mathcal{G}, H_0) \geqq 2k-1$. Considering again (19), (24) and (25) we obtain that there is an i_0, $1 \leqq i_0 \leqq j_0 = k-1$ such that $v(P_1, \mathcal{C}, \mathcal{C}_{i_0}^0) \geqq 3$. Using $v(\mathcal{C}_{i_0}^0)=l \geqq 4$ we can apply Lemma 4 for the graph $\mathcal{G}(\mathcal{C}_{i_0}^0 \cup \{P_1\})$. It results that it contains a circuit $\mathcal{C}'$ with $v(\mathcal{C}') < v(\mathcal{C}_i^0)$. But then $\mathcal{C}_1^0+\ldots+\mathcal{C}_{i_0-1}^0+\mathcal{C}'+\mathcal{C}_{i_0+1}^0+\ldots+\mathcal{C}_{s_0}^0$ is an $\bigcirc^{s_0}$ graph satisfying the conditions of (19) with $v(\bigcirc^{s_0}) < v(\bigcirc_0^{s_0}) = v_0$ in contradiction with (22). Thus (29) is proved.

If $v(P, \mathcal{G}, D_1) \geqq 2$ for every $P \in D_1$ then by (29) $\mathcal{G}(D_1)$ contains a circuit in contradiction with (27). Thus there exists a P_0 such that

(30) $$P_0 \in D_1 \quad \text{and} \quad v(P_0, \mathcal{G}, D_1) \leqq 1.$$

It follows again from (27) that $v(P_0, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{P}}) \leqq 1$ thus by (25) and (30) we have

(31) $$P_0 \in D \quad \text{and} \quad v(P_0, \mathcal{G}, D) \leqq 2.$$

Considering the assumption, (28) and (31) we obtain thet

(32) $$v(P_0, \mathcal{G}, H_0)+v(P_1, \mathcal{G}, H_0)+v(P_u, \mathcal{G}, H_0) \geqq 6k-2-1-1 > 6(k-1)$$

if $P_1 \neq P_u$ i. e. if $u>1$,
and

$$v(P_0, \mathcal{G}, H_0)+v(P_1, \mathcal{G}, H_0) \geqq 4k-2-1 > 4(k-1)$$

if $u=1$.

Put

(33) $D_2=\{P_0, P_1, P_u\}$. Then $D_2\subseteqq D$ and $|D_2|=3$ if $u>1$, $|D_2|=2$ if $u=1$.

Considering (21), (24) and (25) it results from (32) and (33) that there exists an i_0, $1\leqq i_0\leqq s_0\leqq k-1$ such that

$$\sum_{P\in D_2} v(P, \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}^0_{i_0}) \geqq \begin{cases} 7 & \text{if } u>1 \\ 5 & \text{if } u=1. \end{cases} \tag{34}$$

It follows from (34) that $v(P', \mathcal{G}, \overline{\mathcal{C}}^0_{i_0})\geqq 3$ for a $P'\in D_2$ and it follows that

$$v(\mathcal{C}^0_{i_0})=3. \tag{35}$$

Since if $v(\mathcal{C}^0_{i_0})>3$ then by Lemma 4 $\mathcal{G}(\overline{\mathcal{C}}^0_{i_0}\cup\{P'\})$ contains a circuit $\mathcal{C}'$ with $v(\mathcal{C}')<v(\mathcal{C}^0_{i_0})$ and then $\bigcirc^{s_0}=\mathcal{C}^0_1+\ldots\mathcal{C}^0_{i_0-1}+\mathcal{C}'+\mathcal{C}^0_{i_0+1}+\ldots+\mathcal{C}'_{s_0}$ would be an $\bigcirc^{s_0}$ graph satisfying (19) with $v(\bigcirc^{s_0})<v_0$ in contradiction with (22).

Now we need the following

LEMMA 5. *Let $\mathcal{H}$ be a graph with $v(\mathcal{H})=v+4$, $v\geqq 1$. $H=\{Q_1, Q_2, Q_3, P_0, P_1, \ldots, P_v\}$. Suppose that $\mathcal{C}=\mathcal{C}[Q_1, Q_2, Q_3]\subseteqq\mathcal{H}$, $\mathcal{P}=\mathcal{P}[P_1, \ldots, P_v]\subseteqq\mathcal{H}$. Put $B=\{P_0, P_1, P_v\}$ and suppose further that*

$$\sum_{P\in B} v(P, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \geqq \begin{cases} 7 & \text{if } v>1 \\ 5 & \text{if } v=1. \end{cases}$$

Then there exists a triangle $\mathcal{C}'$ and a path $\mathcal{P}'$ of length $v+1$ such that $\mathcal{C}'\subseteqq\mathcal{H}$, $\mathcal{P}'\subseteqq\mathcal{H}$ and $\overline{\mathcal{C}}'\cap\overline{\mathcal{P}}'=0$.

Now we may apply Lemma 5 for the graph $\mathcal{H}=\mathcal{G}(\overline{\mathcal{C}}^0_{i_0}\cup\mathcal{P}\cup\{P_0\})$ with $\mathcal{C}=\mathcal{C}^0_{i_0}$, $B=D_2$, by (33), (34) and (35). Thus there exists a triangle $\mathcal{C}$ and a path $\mathcal{P}'$ of length $u+1$ satisfying the conditions $\mathcal{C}'\subseteqq\mathcal{G}(\overline{\mathcal{C}}^0_{i_0}\cup\overline{\mathcal{P}}\cup\{P_0\})$, $\mathcal{C}'\subseteqq\mathcal{G}(\overline{\mathcal{C}}^0_{i_0}\cup\overline{\mathcal{P}}\cup\{P_0\})$ and $\overline{\mathcal{C}}'\cap\overline{\mathcal{P}}'=0$.

It follows that the graph $\bigcirc^{s_0}=\mathcal{C}^0_1+\ldots+\mathcal{C}^0_{i_0-1}+\mathcal{C}'+\mathcal{C}^0_{i_0+1}+\ldots+\mathcal{C}^0_{s_0}$ satisfies the conditions of (19) and $v(\bigcirc^{s_0})=v(\bigcirc^{s_0}_0)=v_0$ (by (35)). Hence the number $u+1$ satisfies the conditions of (23) with this graph $\bigcirc^{s_0}$ and with the path $\mathcal{P}'$. This contradicts (23) and it follows that the assumption (26) $u<l+1$ leads to a contradiction. Thus we have

$$u=l+1. \tag{36}$$

We may assume that $\bigcirc^{s_0}_0$ and $\mathcal{P}$ satisfy the conditions of (24) with $u=l+1$. Considering that in (24) $\mathcal{P}$ can be choosen for an arbitrary path of length $l+1$ contained in $\mathcal{G}(D)$ and that (19), (20) and (24) imply that $\mathcal{G}(D)$ does not contain a circuit of length $\leqq l$ we may assume that

(37) one of the following statements (i), (ii) holds

(i) $\mathcal{G}(D)$ does not contain a circuit of length $\leqq l+1$,

(ii) $\mathcal{C}=\mathcal{C}[P_1, \ldots, P_{l+1}]\subseteqq\mathcal{G}$,

where $\mathcal{P}=\mathcal{P}[P_1, \ldots, P_{l+1}]$ denotes the path satisfying the conditions of (24).

We need some further definitions and notations.

(38) Put $c_i = v(\mathcal{C}_i^0)$ for $1 \leqq i \leqq s_0$.

Then

$$v_0 = \sum_{i=1}^{s_0} c_i.$$

Put further

$$(39) \quad V = \sum_{j=1}^{l+1} v(P_j, \mathcal{G}_j, H_0), \quad V_1 = \sum_{j=1}^{l+1} v(P_j, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{P}}), \quad V_2 = \sum_{j=1}^{l+1} v(P_j, \mathcal{G}_j, D_1).$$

Considering the assumption and (25) we have

$$(40) \quad V + V_1 + V_2 = \sum_{j=1}^{l+1} v(P_j, \mathcal{G}_j) \geqq 2k(l+1).$$

We need a lower estimation for V. First we prove some preliminaries.

$$(41) \quad v(Q, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{P}}) \leqq 2 \quad \text{for every} \quad Q \in D_1.$$

For if not then $(P_{j_1}, Q), (P_{j_2}, Q), (P_{j_3}, Q) \in \mathcal{G}_j^*$ for some $1 \leqq j_1 < j_2 < j_3 \leqq l+1$ and the circuits $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'[Q, P_{j_1}, \ldots, P_{j_2}]$, $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}''[Q, P_{j_2}, \ldots, P_{j_3}]$ belong to $\mathcal{G}_j$ and at least one of them is of length $\leqq l$.

Thus by (24) either $\bigcirc_0^{s_0} + \mathcal{C}'$ or $\bigcirc_0^{s_0} + \mathcal{C}''$ is an $\bigcirc^{s_0+1}$ graph satisfying the conditions of (19) in contradiction with (20).

(42) Let D_2 be the set of those $Q \in D_1$ for which $v(Q, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{P}}) = 2$.

We prove:

(43) Suppose $l \geqq 4$ or $l = 3$, $k - t \leqq s_0$. Then

$$|D_2| \leqq 1 \text{ if (37) (i) holds;}$$

$$|D_2| = 0 \text{ if (37) (ii) holds.}$$

If (i) holds and $v(Q_1, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{P}}) = v(Q_2, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{P}}) = 2$ for $Q_1 \neq Q_2 \in D_1$ then (Q_1, P_1); (Q_1, P_{l+1}); (Q_2, P_1); $(Q_2, P_{l+1}) \in \mathcal{G}_j^*$ for if not then $\mathcal{G}_j(D)$ contains a circuit of length $\leqq l+1$. But then $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'[Q_1, P_1, Q_2, P_{l+1}]$ is a circuit of length $4 \leqq l+1$ contained in $\mathcal{G}_j$ and this is a contradiction.

Suppose now that (ii) holds. Then $s_0 < k - t$ for if not then by (24) $\bigcirc_0^{s_0} + \mathcal{C}[P_1, \ldots, P_{l+1}]$ is an $\bigcirc^{s_0+1}$ graph satisfying (19) in contradiction with (20). Hence we may assume $l \geqq 4$. That means $v(\mathcal{C}[P_1, \ldots, P_{l+1}]) > 4$, and then $|D_2| > 0$ leads to a contradiction for if $Q \in D_2$ then $v(Q, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{C}}) = 2$ and then by Lemma 4 $\mathcal{G}_j(\overline{\mathcal{C}} \cup \{Q\})$ would contain a circuit $\mathcal{C}'$ of length $\leqq l < l+1$. But then by (24) $\bigcirc_0^{s_0} + \mathcal{C}'$ would be an $\bigcirc^{s_0+1}$ graph satisfying (19) in contradiction with (20). Thus (43) is proved.

Considering again that, by the maximality (20) of s_0, $\mathcal{G}_j(D)$ does not contain a circuit $\mathcal{C}'$ with $v(\mathcal{C}') \leqq l$ if $s_0 < k - t$ and with $v(\mathcal{C}') \leqq l+1$ if $s_0 \geqq k - t$ we have

$$(44) \quad \begin{aligned} V_1 &= 2(l+1) - 2 \quad \text{if (37) (i) holds} \\ V_1 &= 2(l+1) \qquad \text{if (37) (ii) holds.} \end{aligned}$$

Considering that by (25) and (39) $V_2 = \sum_{Q \in D_1} v(Q, \mathcal{G}_f, \overline{\mathcal{P}})$ it follows from (41) that

$$V_2 \leqq |D_1| + |D_2|. \tag{45}$$

Now we are going to prove

$$\begin{aligned} &V > (l+2)s_0 + v_0 \quad \text{if} \quad s_0 < k-t \quad \text{and} \\ &V > (l+1)s_0 + v_0 \quad \text{if} \quad s_0 \geqq k-t. \end{aligned} \tag{46}$$

By (40) we have

$$V \geqq 2k(l+1) - V_1 - V_2.$$

Hence we have

$$\begin{aligned} V &> 2(k-1)(l+1) - V_2 \quad \text{if (37) (i) holds,} \\ V &\geqq 2(k-1)(l+1) - V_2 \quad \text{if (37) (ii) holds.} \end{aligned}$$

On the other hand by the assumption and by (25) we have

$$|D_1| = lk + t - (l+1) - v_0 = (l+1)(k-1) - (k-t) - v_0.$$

Using (45) we obtain

$$\begin{aligned} V &> (l+1)(k-1) + k - t + v_0 - |D_2| \quad \text{if (37) (i) holds,} \\ V &\geqq (l+1)(k-1) + k - t + v_0 - |D_2| \quad \text{if (37) (ii) holds.} \end{aligned} \tag{○}$$

Now we distinguish the cases

$$l \geqq 4 \quad \text{or} \quad l = 3 \quad \text{and} \quad s_0 \geqq k-t, \tag{α}$$

$$l = 3 \quad \text{and} \quad s_0 < k-t. \tag{αα}$$

Ad (α): It follows from (○) (37) and (43) that $V \geqq (l+1)(k-1) + k - t + v_0$ holds.

Suppose first $s_0 \geqq k-t$. Considering that by (21) $s_0 \leqq k-1$ and that $k-t > 0$ by the assumption we get

$$(l+1)(k-1-s_0) + k - t > 0$$

hence

$$V > (l+1)s_0 + v_0.$$

Suppose now $s_0 < k-t$. Then considering that $0 \leqq t \leqq k-1$

$$\begin{aligned} V \geqq (l+1)(k-1) + k - t + v_0 &= (l+2)(k-t-1) + (l+1)t + 1 + v_0 > \\ &> (l+2)(k-t-1) + v_0 \geqq (l+2)s_0 + v_0. \end{aligned}$$

Hence (46) is proved if (α) holds.

Ad (αα): $l = 3$, $s_0 < k-t$.

Considering that by (42) we have $|D_2| \leqq |D_1|$ we obtain from (○) that

$$V \geqq 2(k-t) + 2v_0.$$

Considering that $(\alpha\alpha)$ holds it follows from (19) and (24) that $v_0 = 3s_0$, hence

$$V \geqq 2(k-t)+3s_0+v_0 > 5s_0+v_0 = (l+2)s_0+v_0$$

holds in this case too and (46) is proved.

We prove:

(47) There exists an i_0, $1 \leqq i_0 \leqq s_0$ such that

$$\sum_{j=1}^{l+1} v(P_j, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{C}}_{i_0}^0) \geqq l+3+c_{i_0} \quad \text{if} \quad s_0 < k-t,$$

$$\sum_{j=1}^{l+1} v(P_j, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{C}}_{i_0}^0) \geqq l+2+c_{i_0} \quad \text{if} \quad s_0 \geqq k-t.$$

Suppose that (47) is false. Then by (25) and (38)

$$V = \sum_{i=1}^{s_0} \sum_{j=1}^{l+1} v(P_j, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{C}}_i^0) \leqq \sum_{i=1}^{s_0} (l+2+c_i) \left(\text{or } \sum_{i=1}^{s_0} (l+1+c_i) \right) \leqq$$

$$\leqq (l+2)s_0+v_0 \quad (\text{or } (l+1)s_0+v_0),$$

respectively, which contradicts (46). ▮

If follows from (47) that there exists a $P_{j_0} \in \overline{\mathcal{P}}$ such that $v(P_{j_0}, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{C}}_{i_0}^0) \geqq 2$ for if not then $\sum_{j=1}^{l+1} v(P_j, \mathcal{G}_j, \overline{\mathcal{C}}_{i_0}^0) \leqq l+1$.

If follows that

(48) $$v(\overline{\mathcal{C}}_{i_0}^0) \leqq 4.$$

For if not then by Lemma 4 $\mathcal{G}_j(\overline{\mathcal{C}}_{i_0}^0 \cup \{P_{j_0}\})$ contains a circuit $\mathcal{C}'$ with $v(\mathcal{C}') < v(\overline{\mathcal{C}}_{i_0}^0)$ and thus by (24) $\bigcirc^{s_0} = \mathcal{C}_1^0 + \ldots + \mathcal{C}_{i_0-1}^0 + \mathcal{C}' + \mathcal{C}_{i_0+1}^0 + \ldots + \mathcal{C}_{s_0}^0$ would be an $\bigcirc^{s_0}$ graph satisfying (19) with $v(\bigcirc^{s_0}) < v_0$ in contradiction with (20).

Now we need the following lemmas

LEMMA 6. *Let $\mathcal{H}$ be a graph, $\mathcal{C}$ a circuit and $\mathcal{P}$ a path, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}$, $\overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{P}} = 0$, $\overline{\mathcal{C}} \cup \overline{\mathcal{P}} = H$. Suppose that $l \geqq 3$, $v(\mathcal{C}) \leqq \min(l, 4)$ and $v(\mathcal{P}) = l+1$. Suppose further that*

$$\sum_{P \in \overline{\mathcal{P}}} v(P, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \geqq l+3+v(\mathcal{C}).$$

Then $\mathcal{H}$ contains two independent circuits $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ such that $v(\mathcal{C}') \leqq l$, $v(\mathcal{C}'') \leqq l$.

LEMMA 7. *Let $\mathcal{H}$ be a graph, $\mathcal{C}$ a circuit and $\mathcal{P}$ a path, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}$, $\overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{P}} = 0$, $\overline{\mathcal{C}} \cup \overline{\mathcal{P}} = H$. Suppose that $l \geqq 3$ $v(\mathcal{C}) \leqq \min(l+1, 4) = 4$ and $v(\mathcal{P}) = l+1$. Suppose further that*

$$\sum_{P \in \overline{\mathcal{P}}} v(P, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \geqq l+2+v(\mathcal{C}).$$

Then $\mathcal{H}$ contains two independent circuits $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$ such that $v(\mathcal{C}') \leqq l+1$, $v(\mathcal{C}'') \leqq l+1$. As a corollary of this if in addition $v(\mathcal{C}) \leqq l$ holds then $\min(v(\mathcal{C}'), v(\mathcal{C}'')) \leqq l$ *holds too.*

Consider now the graph $\mathcal{H} = \mathcal{G}(\overline{\mathcal{C}}_{i_0}^0 \cup \overline{\mathcal{P}})$ and distinguish the cases (β) $s_0 < k-t$, ($\beta\beta$) $s_0 \geqq k-t$.

Considering that if (β) holds then $v(\mathcal{C}_{i_0}^0) \leqq l$ the graph $\mathcal{H}$, the circuit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{i_0}^0$, and the path $\mathcal{P}$ satisfy all the conditions of Lemma 6 and Lemma 7 if (β) or ($\beta\beta$) holds respectively. Suppose now that (β) holds. Then by (24) (25) and Lemma 6, there exist circuits $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$ such that $\mathcal{C}_1^0 + \ldots + \mathcal{C}_{i_0-1}^0 + \mathcal{C}' + \mathcal{C}_{i_0+1}^0 + \ldots + \mathcal{C}_{s_0}^0 + \mathcal{C}''$ is an $\bigcirc^{s_0+1}$ graph satisfying the requirements of (19) in contradiction with (20).

Suppose that ($\beta\beta$) holds. Then by Lemma 7 there exist circuits $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$ satisfying the requirements of Lemma 7. By (24) and (25) $\mathcal{C}_1^0 + \ldots + \mathcal{C}_{i_0-1}^0 + \mathcal{C}' + \mathcal{C}_{i_0+1}^0 + \ldots + \mathcal{C}_{s_0}^0 + \mathcal{C}''$ is an $\bigcirc^{s_0+1}$ graph satisfying the requirements of (19) since if $i_0 \leqq k-t$ then $v(\mathcal{C}_{i_0}^0) \leqq l$, hence then we may assume $v(\mathcal{C}') \leqq l$. This contradicts (20).

We obtained a contradiction in both cases hence the indirect assumption (21) is false and Theorem 2 is proved in case B) too.

§ 4. Proof of the Lemmas

PROOF OF LEMMA 2. Assume that that $\mathcal{H}$ does not contain two independent triangles.

First we show that

$$v(P_1, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \leqq 2; \quad v(P_3, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \leqq 2. \tag{49}$$

By symmetry it is sufficient to prove the first statement. Suppose that $v(P_1, \mathcal{H}, \mathcal{C}) = 3$. Considering that by the assumptions we have

$$\sum_{j=1}^{3} v(P_j, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) = \sum_{i=1}^{3} v(Q_i, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{P}}) \geqq 7$$

we obtain

$$\sum_{i=1}^{3} v(Q_i, \mathcal{H}, \{P_2, P_3\}) \geqq 4$$

and as a consequence of this $v(Q_{i_0}, \mathcal{H}, \{P_2, P_3\}) = 2$ for an i_0, $1 \leqq i_0 \leqq 3$. By symmetry we may assume that $i_0 = 1$. But then $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'[P_1, Q_2, Q_3]$, $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}''[Q_1, P_2, P_3]$ are two independent triangles contained in $\mathcal{H}$. This contradicts our assuption, hence (49) is proved.

As a corollary of the assumption $\sum_{j=1}^{3} v(P_j, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \geqq 7$ using (49), we obtain

$$v(P_1, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) = v(P_3, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) = 2, \quad v(P_2, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) = 3. \tag{50}$$

By symmetry we may assume $(P_1, Q_1) \notin \mathcal{H}^*$ and we have to prove that then $(P_3, Q_1) \notin \mathcal{H}^*$. Suppose that $(P_3, Q_1) \in \mathcal{H}^*$. Then by (50) the triangles $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'[P_1, Q_2, Q_3]$, $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}''[Q_1, P_2, P_3]$ belong to $\mathcal{H}$ and we obtain a contradiction. This proves Lemma 2.

PROOF OF LEMMA 3. Put $V=\sum_{j=1}^{4} v(P_j, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}})$. The assumption $V \geqq 9$ implies that $v(P_{j_0}, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}})=3$ for a j_0, $1 \leqq j_0 \leqq 4$, for if not then $V \leqq 4 \cdot 2 = 8$, and by symmetry we may assume that

$$V(P_1, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}})=3. \tag{51}$$

We have to prove that there exist independent triangles $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$ satisfying the conditions

$$\mathcal{C}' \subseteqq \mathcal{H}, \quad \mathcal{C}'' \subseteqq \mathcal{H}, \quad H = \overline{\mathcal{C}'} \cup \overline{\mathcal{C}''} \cup \{P_j\} \quad \text{where} \quad 2 \leqq j \leqq 4. \tag{52}$$

Assume that (52) is false. Then $v(Q_i, \mathcal{H}, \{P_3, P_4\}) \leqq 1$ for $1 \leqq i \leqq 3$. For if not then by symmetry we may assume $v(Q_1, \mathcal{H}, \{P_3, P_4\})=2$ and considering that by the assumption $(P_3, P_4) \in \mathcal{H}^*$ the triangles $\mathcal{C}'=\mathcal{C}'[P_1, Q_2, Q_3]$, $\mathcal{C}''=$ $=\mathcal{C}''[Q_1, P_3, P_4]$ belong to $\mathcal{H}$ and satisfy (52) with $P_j=P_2$. If follows that

$$\sum_{i=1}^{3} v(Q_i, \mathcal{H}, \{P_3, P_4\}) \leqq 3. \tag{53}$$

Taking into consideration that

$$V = v(P_1, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) + v(P_2, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) + \sum_{i=1}^{3} v(Q_i, \mathcal{H}, \{P_3, P_4\})$$

it follows from (51) and (53) that

$$v(P_2, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}})=3. \tag{54}$$

On the other hand $v(P_j, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \geqq 2$ either for $j=3$ or for $j=4$, for if not then $v \leqq 3+3+1+1 = 8$. By symmetry we may assume

$$v(P_3, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}}) \geqq 2 \quad \text{and} \quad (P_3, Q_2) \in \mathcal{H}^*; \qquad (P_3, Q_3) \in \mathcal{H}^*. \tag{55}$$

Considering that by the assumption $(P_1, P_2) \in \mathcal{H}^*$ then the triangles

$$\mathcal{C}'=\mathcal{C}'[P_3, Q_2, Q_3], \quad \mathcal{C}''=\mathcal{C}''[P_1, P_2\, Q_1]$$

satisfy by (51), (54) and (55) the conditions of (52) with $P_j=P_4$. Thus we obtained a contradiction and Lemma 3 is proved.

PROOF OF LEMMA 4. Suppose first that a) holds. Then $r>4$, and $(Q_{j_1}, P) \in \mathcal{H}^*$, $(Q_{j_2}, P) \in \mathcal{H}^*$ for some $1 \leqq j_1 < j_2 \leqq r$. Then the circuits

$$\mathcal{C}'=\mathcal{C}'[P, Q_{j_1}, \ldots Q_{j_2}], \quad \mathcal{C}''=\mathcal{C}''[P, Q_{j_2}, \ldots Q_r, Q_1 \ldots Q_{j_1}]$$

belong to $\mathcal{H}$ by the assumption $\mathcal{C} \subseteqq \mathcal{H}$. We have to prove that one of them is of length $\leqq r$.

In fact $v(\mathcal{C}')+v(\mathcal{C}'') = r+4 < 2r$ if $r>4$ hence either $v(\mathcal{C}')<r$ or $v(\mathcal{C}'')<r$.

Suppose that b) holds. If $r>4$ then the satement is true by the case a) of Lemma 4 already proved. Thus we may assume that $v(\mathcal{C})=4$. But then by the assumption $(Q_j, P) \notin \mathcal{H}^*$ holds for at most one j, by symmetry we may assume that if any then $(Q_1, P) \notin \mathcal{H}^*$. But then e. g. $\mathcal{C}'=\mathcal{C}'[P, Q_2, Q_3] \subseteqq \mathcal{H}$ and $3=v(\mathcal{C}')<v(\mathcal{C})=4$.

PROOF OF LEMMA 5. Put $V=\sum_{P\in B} v(P, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}})$. It follows from the assumptions $V\geqq 7$ (or $V\geqq 5$ respectively) that there exists a $P\in B$ such that

$$v(P, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}})=3. \tag{56}$$

Suppose first that P_0 satisfies (56). Then by the assumption $V\geqq 7$ or $V\geqq 5$, respectively, there is a Q_{i_0} for which $(Q_{i_0}, P_1)\in\mathcal{H}^*$. We may assume that $i_0=1$. Then the triangle $\mathcal{C}'=\mathcal{C}'[P_0, Q_2, Q_3]$ and the path $\mathcal{P}'=\mathcal{P}'[Q_1, P_1, \ldots, P_v]$ obviously satisfy the requirements of Lemma 5. Thus we may assume that (56) holds either for $P=P_1$ or for $P=P_v$. By symmetry we may assume

$$v(P_1, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}})=3. \tag{57}$$

Suppose now that $v=1$. Then by the assumption $V\geqq 5$ $(Q_{i_0}, P_0)\in\mathcal{H}^*$ for an i_0 and we may assume $i_0=1$. Then the triangle $\mathcal{C}'=\mathcal{C}'[P_1, Q_2, Q_3]$ and the path $\mathcal{P}'=\mathcal{P}'[Q_1, P_0]$ of length $v+1=2$ satisfy the requirements of Lemma 5. Hence we may assume $v>1$.

Considering that by the assumption

$$7\leqq V=v(P_1, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}})+\sum_{i=1}^{3} v(Q_i, \mathcal{H}, \{P_0, P_v\})$$

it follows that $\sum_{i=1}^{3} v(Q_i, \mathcal{H}, \{P_0, P_v\})\geqq 4$. As a consequence of this $v(Q_{i_0}, \mathcal{H}, \{P_0, P_v\})=2$ for an i_0 and by symmetry we may assume $i_0=1$. Hence we have

$$V(Q_1, \mathcal{H}, \{P_0, P_v\})=2. \tag{58}$$

Put $\mathcal{C}'=\mathcal{C}'[P_1, Q_2, Q_3]$, $\mathcal{P}'=\mathcal{P}'[P_2, \ldots, P_v, Q_1, P_0]$. We have $\overline{\mathcal{C}'}\cap\overline{\mathcal{P}'}=0$. By the assumption $\mathcal{C}\subseteqq\mathcal{H}$ and by (57) we have $\mathcal{C}'\subseteqq\mathcal{H}$. By the assumption $\mathcal{P}\subseteqq\mathcal{H}$ and by (58) we obtain that $\mathcal{P}'\subseteqq\mathcal{H}$ and $v(\mathcal{P}')=v-1+2=v+1$. Hence $\mathcal{C}'$ and $\mathcal{P}'$ satisfy the requirements of Lemma 5.

PROOF OF THE LEMMAS 6 AND 7. Put $v(\mathcal{C})=r$, $V=\sum_{P\in\mathcal{P}} V(P, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}})$. Put further $\mathcal{C}=\mathcal{C}[Q_1, \ldots, Q_r]$, $\mathcal{P}=\mathcal{P}[P_1, \ldots, P_{l+1}]$. We use induction on l. One can verify by a discussion that Lemma 6 is true if $l=r$, $l=r+1$ for $r=3, 4$ and that Lemma 7 is true if $l=r-1$, $l=r$ for $r=4$ and if $l=r=3$. For example the special case $r=3$, $l=3$ of Lemma 6 is a corollary of Lemma 3. We omit the proof of the other special cases which can be carried out using the same ideas.

Thus we assume that $l>r+1$ and $l>r$ in case of Lemma 6 and Lemma 7, respectively, and that both lemmas are true for $l-1$. We may suppose that $V=l+3+r$ or $V=l+2+r$ respectively. First we prove that there exists an i_0, $1\leqq i_0\leqq l+1$ such that $v(P_{i_0}, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{C}})\leqq 1$.

For if not than $V\geqq 2l+2$ and $2l+2>l+3+r$ if $l>r+1$; $2l+2>l+2+r$ if $l>r$. Let $\mathcal{H}_1$ be the graph defined by the following stipulations. Put $H_1=H-\{P_{i_0}\}$.

$$\mathcal{H}_1=\langle H_1, \mathcal{H}^*(H_1)\cup\{(P_{i_0-1}, P_{i_0+1})\}\rangle \quad \text{if} \quad 1<i_0<l+1$$

and

$$\mathcal{H}_1=\mathcal{H}(H_1) \quad \text{if} \quad i_0=1 \text{ or } i_0=l+1.$$

$\mathfrak{H}_1$ contains the path $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_1[P_1, \ldots, P_{i_0-1}, P_{i_0+1}, \ldots, P_{l+1}]$ of length l, and the circuit $\mathfrak{C}$. Then

$$V_1 = \sum_{P \in \overline{\mathfrak{P}}_1} v(P, \mathfrak{H}_1, \overline{\mathfrak{C}}) \geqq l-1+3+r \text{ (or } l-1+2+r),$$

respectively. Considering that $l-1 \geqq 3$, $l-1 \geqq r$, $\mathfrak{H}_1$ satisfies the assumptions of Lemma 6 and Lemma 7 for $l-1$, respectively. Thus $\mathfrak{H}_1$ contains two independent circuits $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_1''$ of length $\leqq l-1$ or of length $\leqq l$, respectively. Considering that $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_1''$ are independent, at most one ot them contains the edge (P_{i_0-1}, P_{i_0+1}). Replacing this if necessary by the path $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'[P_{i_0-1}, P_{i_0}, P_{i_0+1}]$ we get two independent circuits of $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ of length $\leqq l$ or of length $\leqq l+1$ contained in $\mathfrak{H}$, respectively.

MATHEMATICAL INSTITUTE
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY,
BUDAPEST

(Received 4 December 1962)

Reference

[1] G. DIRAC and P. ERDŐS, On the maximal number of independent circuits in a graph, *Acta Mat. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), pp. 79–94.

ON SEMI-DISCRETE LATTICES WHOSE CONGRUENCE RELATIONS FORM A BOOLEAN ALGEBRA

By

G. GRÄTZER (Budapest)

(*Presented by* L. RÉDEI)

In his book [1] G. BIRKHOFF proposed the examination of those lattices whose congruence relations form a Boolean algebra under the natural partial ordering (see Problem 72 on p. 153). Partial solutions and solutions of this problem have been published in [6], [5], [3] and [2]. It turned out that if the lattice is semi-discrete (for the notions see the next section), then rather simple criterion can be given;[1] see [3] for this and [5] for the discrete case. This condition is the weak-modularity, or equivalently an even simpler condition, which formulates the requirement of weak modularity only for certain pairs of intervals.

In [4] it was proved that weakly modular lattices enjoy the property that the standard elements are all neutral and later on it was observed that the proof of this assertion remains valid if weak modularity is replaced by a slightly weaker condition.[2] In Lemma 15 of the quoted paper it was proved that the new condition and its dual together are equivalent to weak modularity if the lattice is semi-discrete and the following problem was raised: is that condition equivalent to weak modularity in finite lattices? (See Problem 6 on p. 48 of [4].) In this note we will prove that the answer is in the affirmative not only for finite lattices but also for semi-discrete lattices. Although the proof is not difficult the assertion seems to be rather surprising, namely, the properties we discuss: weak modularity, or that the congruences form a Boolean algebra, are all self dual; that is, they hold true in a lattice if and only if they hold in its dual; and the condition which is proved to be equivalent to these in semi-discrete lattices is in general not self-dual.

Preliminaries. For the notions and notations not defined in this note see [1]. L will always denote a lattice, $\cup$ and $\cap$ are the lattice operations, $>$ the partial ordering relation, $\succ$ the covering relation (i. e. $a \succ b$ if $a > b$ and $a > x > b$ for no x). If $a \geqq b$ then $a|b$ denotes the interval $[b, a]$, i. e. the set of all x with $a \geqq x \geqq b$. If $a \geqq b$, $c \geqq d$, $d \geqq b$ and $c = d \cup a$, then we write $a|b \overset{u}{\sim} c|d$; $a|b \overset{l}{\sim} c|d$ denotes the dual notion, i. e. $a \geqq b$, $c \geqq d$, $a \geqq c$ and $d = b \cap c$. The symbol $\sim$ may mean $\overset{u}{\sim}$ or $\overset{l}{\sim}$. Suppose $a|b \sim c|d$ and $e|f$ is a part of $c|d$ (i. e. $c \geqq e \geqq f \geqq d$), then we use the symbol $a|b \supseteq e|f$. If $a|b$ and $c|d$ are such that there exists a sequence of intervals $x_i|y_i$, $i = 0, 2, \ldots, n$ with $a|b = x_0|y_0 \supseteq x_1|y_1 \supseteq \ldots \supseteq x_n|y_n = c|d$ then we write $a|b \to c|d$. A lattice is called weakly modular if $a|b \to c|d$, $c \neq d$ implies the existence of $a_1|b_1 \subset \subset a|b$, $a_1 \neq b_1$ such that $c|d \to a_1|b_1$. It is easy to verify that a modular, or a relatively complemented, or a simple lattice is weakly modular always (see [3]). The interval

[1] See condition (iii) of the Theorem below.

[2] See condition (ii) of the Theorem below.

$a|b$ is called prime if $a \succ b$. $P(L)$ denotes the set of all prime intervals of L. The lattice L is semi-discrete if to any couple of elements, $a, b, a > b$ there exists a *finite* sequence of elements $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ such that $x_{i-1} \succ x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; in other words, every interval contains a finite maximal chain. $\Theta(L)$ will denote the lattice of all congruence relations of the lattice L, as usual, $\Theta \leqq \Phi$ $(\Theta, \Phi \in \Theta(L))$ means that $x \equiv y(\Theta)$ implies $x \equiv y(\Phi)$.

To simplify the notations, let us agree that small gothic letters stand always for prime intervals, further, if $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ are prime intervals $\mathfrak{p} > \mathfrak{q}$ means that p is over $\mathfrak{q}$; that is, if $\mathfrak{p} = a|b$ and $\mathfrak{q} = c|d$ then $b \geqq c$; of course, $\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}$ means $a|b \to c|d$. Now we are ready to state and prove the

THEOREM. *Let L be a semi-discrete lattice. The following conditions on the attice L are equivalent:*

(i) *L is weakly modular;*

(ii) *$a|b \to c|d$, $c \neq d$ and $b \geqq c$ implies the existence of $a_1|b_1 \subset a|b$, $a_1 \neq b_1$ such that $c|d \to a_1|b_1$;*

(iii) *$\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}$ implies $\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in P(L))$;*

(iv) *$\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{p} > \mathfrak{q}$ implies $\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}$;*

(v) *$\Theta(L)$ is a Boolean algebra.*

REMARK 1. The equivalence of (i) and (v) has first been stated in [3] (Lemma 11 and Theorem 11). In case of discrete lattices (every interval contains only finite chains) the equivalence of (iii) and (v) was proved in [5]; for the same statement in case of semi-discrete lattices see [3]. That condition (iv) implies (i) is the solution of Problem 6 of [4], and it is the only new assertion in the theorem. So we will prove only this, as for the rest we refer the reader to [3].

REMARK 2. The interrelationships of the conditions of the theorem are the following. In any lattice (i) implies (ii), and the dual ($\tilde{\text{ii}}$) of (ii); (ii) always implies (iii) and (iv) is a consequence of (iii). In general, (ii) and ($\tilde{\text{ii}}$) do not imply (i); see the example in [4] (fig. 5). Condition (v) implies all other conditions. That (i) is essentially weaker than (v) can be seen taking the example of an arbitrary infinite Boolean algebra which satisfies (i) but not (v).

Proof of the Theorem. According to Remark 1 it remained to prove only that (iv) implies (i).

Let L be a semi-discrete lattice and suppose that (iv) holds. Let $a, b, c, d \in L$, $a > b$, $c > d$ and $a|b \to c|d$. We have to find $a_1|b_1 \subset a|b$ $(a_1 \neq b_1)$ such that $c|d \to a_1|b_1$. By definition $a|b \to c|d$ means the existence of $x_i, y_i \in L$ such that

$$a|b = x_0|y_0 \supseteq x_1|y_1 \supseteq \ldots \supseteq x_n|y_n = c|d. \tag{1}$$

First we consider the case $n = 1$. The proof is based on the following

LEMMA. *Let L be a semi-discrete lattice in which* (iv) *holds, $o, a, b, c, i \in L$, $b \succ c$, $a \cup b = a \cup c = i$, $a \cap b = a \cap c = o$. Then there exist prime intervals $\mathfrak{q}_1 \subset i|a$, $\mathfrak{q}_2 \subset a|o$ such that $b|c \to \mathfrak{q}_j$, $j = 1, 2$.*

PROOF. Since L is semi-discrete we can find a chain $i = x_0 \succ x_1 \succ \ldots \succ x_n = b$. Then

(2) $$b = [(x_0 \cap a) \cup c] \cap b \geqq [(x_1 \cap a) \cup c] \cap b \geqq \ldots \geqq [(x_n \cap a) \cup c] \cap b = c.$$

Since $b \succ c$ there exists a j with

(3) $$b = [(x_j \cap a) \cup c] \cap b,\ c = [(bx_{j+1} \cap a) \cup c] \cap b.$$

Put $\mathfrak{p} = x_j | x_{j+1}$. There is a maximal chain

$$y_0 = x_j \cap a \succ y_1 \succ \ldots \succ y_m = x_{j+1} \cap a.$$

By the same reasoning as above we can find an l with

(4) $$b = (y_l \cup c) \cap b,\ c = (y_{l+1} \cup c) \cap b.$$

Put $\mathfrak{q}_2 = y_l | y_{l+1}$.

Then we have by construction

(5) $$\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}_2 \to b|c.$$

Since $\mathfrak{q} \to b|c$ and $\mathfrak{p} \succ b|c$ by (iv) we get

(6) $$b|c \to \mathfrak{p}.$$

Now (5) and (6) together with the transitivity of $\to$ give

(7) $$b|c \to \mathfrak{q}_2,$$

i. e. $\mathfrak{q}_2$ is effective in the Lemma.

To find $\mathfrak{q}_1$ we consider a chain

$$i = z_0 \succ z_1 \succ \ldots \succ z_k = a,$$

and observe

$$b = (b \cap z_0) \cup c \geqq (b \cap z_1) \cup c \geqq \ldots \geqq (b \cap z_k) \cup c = c.$$

Thus we can find an m' with

(8) $$b = (b \cap z_{m'}) \cup c,\ c = (b \cap z_{m'+1}) \cup c.$$

Put $\mathfrak{q}_1 = z_{m'} | z_{m'+1}$. Then by (8)

(9) $$\mathfrak{q}_1 \to b|c.$$

(9) and (7) yield

(10) $$\mathfrak{q}_1 \to \mathfrak{q}_2.$$

Condition (iv) can again be applied to (10) since $\mathfrak{q}_1 \succ \mathfrak{q}_2$ therefore

(11) $$\mathfrak{q}_2 \to \mathfrak{q}_1.$$

(7) and (11) give

(12) $$b|c \to \mathfrak{q}_1,$$

which completes the proof of the Lemma.

Now we proceed to give a proof of case $n=1$. In this case we are given elements a, b, c, d, c_1, d_1 such that

$$a|b \sim c|d \quad \text{and} \quad c|d \supset c_1|d_1. \tag{13}$$

We distinguish two subcases:

(a) In (12) $\sim$ means $\overset{u}{\sim}$.

Without any loss of generality we may assume $d_1 = d$ and $b = a \cap d$. If $b < a \cap c$, then $c|d \to a \cap c|b$ and $a \cap c \neq b$ thus we found a_1 and b_1. Therefore we may suppose $a \cap c = b$. Choose an arbitrary prime interval $\mathfrak{q} = c_2|d_2$ in $c|d$. From the assumptions we made it follows that b, a, d_2, c_2 and c_1 satisfy the hypothesis of the Lemma. Thus there exists a $\mathfrak{q}_2 \subset a|b$ such that

$$\mathfrak{q} \to \mathfrak{q}_2. \tag{14}$$

Since $\mathfrak{q} \subset c|d$, obviously

$$c|d \to \mathfrak{q}, \tag{15}$$

thus (14) and (15) give

$$c|d \to \mathfrak{q}_2 \subset a|b,$$

which was to be proved.

(b) In (13) $\sim$ means $\overset{l}{\sim}$.

This is dual of subcase (a). Since in the proof of subcase (a) we used only the Lemma which is selfdual, therefore the dual of the proof of subsace (a) is a proof of subcase (b).

The proof of case $n=1$ is completed.

We use an induction on n (in (1)) in the general case. Suppose the statement was proved for $n=1$ and $n-1$. Since $x_{n-1}|y_{n-1} \supseteq x_n|y_n$ (case $n=1$) we can find $x|y \subset x_{n-1}|y_{n-1}$ such that

$$x_n|y_n \to x|y, \qquad x \neq y. \tag{16}$$

Since $x_{n-2}|y_{n-2} \supseteq x_{n-1}|y_{n-1} \supset x|y$, we have

$$x_{n-2}|y_{n-2} \supseteq x|y,$$

thus

$$a|b = x_0|y_0 \supseteq x_1|y_1 \supseteq \ldots \supseteq x_{n-2}|y_{n-2} \supseteq x|y. \tag{17}$$

Therefore by induction hypotheses there exist $a_1|b_1 \subset a|b$, $a_1 \neq b_1$, such that

$$x|y \to a_1|b_1. \tag{18}$$

(16) and (18) yield $x_n|y_n \to a_1|b_1$ which completes the proof of our theorem.

A problem. In [4] we state (Lemma 15, p. 48) that in semi-discrete lattices (ii) and its dual, ($\tilde{\text{ii}}$) imply (i). The proof is only sketched, and it seems it isn't correct. So the proof given in this note seems to be the first correct one. At the same time in the incorrect proof of [4] we have used instead of semi-discreteness the following weaker property:

($*$) if $a \succ b$ there exist x and y such that $a \succ x \equiv y \succ b$.

So the problem is the following:

What are the inter-relationships of conditions (i)—(v) if the lattices considered satisfy ($*$)?

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,
BUDAPEST

(Received 18 January 1963)

References

]1] G. BIRKHOFF, *Lattice theory* (New York, 1948).
[2] P. CRAWLEY, Lattices whose congruences form a Boolean algebra, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), pp. 787—798.
[3] G. GRÄTZER and E. T. SCHMIDT, Ideals and congruence relations in lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1957), pp. 137—175.
[4] G. GRÄTZER and E. T. SCHMIDT, Standard ideals in lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), pp. 17—86.
[5] J. JAKUBIK, Relàcie kongruentnosti a slabà projektivnost vo sväzoch, *Casopis Pest. Math.*, **80** (1955), pp. 206—216.
[6] T. TANAKA, Canonical subdirect factorization of lattices, *J. Sci. Hirosima Univ.*, Ser. A, **16** (1952), pp. 239—246.

ÜBER RINGE MIT MINIMALBEDINGUNG FÜR HAUPTRECHTSIDEALE. III

Von

F. SZÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

Professor G. HAJÓS *zu seinem 50. Geburtstag gewidmet*

Einleitung

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Arbeit immer einen assoziativen Ring. Bezüglich der nötigen allgemeinen Begriffe wird es auf [2], [10], [13] und [18] verwiesen. Die im Titel dieser Arbeit erwähnten Ringe werden kurz *MHR*-Ringe genannt. Diese Ringe wurden in der Dissertation und in der Arbeit [21] des Verfassers ausführlich betrachtet, und es werde hinsichtlich der *MHR*-Ringe noch auf die in [21] angegebene Literatur verwiesen. Ein MH_1R-Ring bedeutet einen Ring mit Minimalbedingung für diejenigen Rechtsideale, die in Hauptrechtsidealen liegen. In der vorliegenden Arbeit werden weitere Ergebnisse bezüglich der *MHR*-Ringe betrachtet, und auch einige offene Fragen erwähnt.

Im § 1 untersuchen wir gewisse Mächtigkeitsbeziehungen zwischen dem Rechtsidealverband V_A und dem Linksidealverband ${}_AV$ eines Artinschen Ringes A (d. h. eines Ringes A mit Minimalbedingung für Rechtsideale). Bedeute $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \uparrow$ für beliebige Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die Existenz eines Artinschen Ringes A mit den Bedingungen $|V_A| = \mathfrak{m}$ und $|{}_AV| = \mathfrak{n}$, wobei $|X|$ die Mächtigkeit einer Menge X bezeichnet. In § 1 werden wir sowohl $A(n, \aleph_\nu) = \uparrow$, als auch $A(\aleph_\nu, \aleph_\mu) = \uparrow$ beweisen, wobei $n \geqq 3$ eine beliebige natürliche Zahl, $\aleph_\nu$, $\aleph_\mu$ beliebige unendliche Mächtigkeiten sind. (Vgl. Satz 1. 2, 1. 3, 1. 4.) Die dafür angegebenen Artinschen Ringe haben Einselement, und lassen sich mit Hilfe eines interessanten Stellenringes $A(F, \varphi)$ aufbauen (der kein Artinscher Ring ist). Es wird auch ein Ring A mit $|A| = \aleph_\nu$, $|V_A| = n$, $|{}_AV| = 2^{\aleph_\nu}$ konstruiert, und zwar derart, daß $\aleph_\nu$ solche Linksideale von A existieren, die eine absteigende (aufsteigende) Kette bilden (n beliebige natürliche Zahl $\geqq 3$, und $\aleph_\nu$ beliebige unendliche Mächtigkeit).

Im § 2 betrachten wir die Ringe mit endlich vielen Rechtsidealen. Jeder Radikalring A mit $|V_A| < \aleph_0$ ist endlich. Es werden auch die halbeinfachen Ringe A mit $|V_A| < \aleph_0$ beschrieben. Ferner bestimmen wir bis auf Faktorsysteme und Endomorphismensysteme sämtliche Ringe A mit $|V_A| = 3$. Es werden auch die Ringe A mit $|V_A| = 3$ und $|{}_AV| \geqq \aleph_0$ charakterisiert. Insbesondere hat jeder Ring A mit $|V_A| = 3$ und $|{}_AV| \geqq \aleph_0$ zweiseitiges Einselement. Aus $|V_A| = 3$ folgt die Minimalbedingung für Hauptlinksideale. Jeder Ring A mit $|V_A| = 3$ und ohne von Null verschiedene Linksannullatoren (Rechtsannullatoren) enthält Einselement (ein Linkseinselement). Ferner ist $A(3, 4) = \downarrow$, denn aus $A(3, \mathfrak{m}) = \uparrow$ erhält man $\mathfrak{m} = 3$, oder $\mathfrak{m} = 5$ bzw. $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Die Untersuchung von $A(m, n) = \uparrow$ für beliebige natürliche Zahlen m und n scheint mit additiven zahlentheoretischen Fragen in engem Zusammenhang zu sein. Als eine leichte Folgerung der Sätze von § 2 ergibt sich: Jeder Ring nur mit endlich vielen Unterringen ist selbst endlich.

Im § 3 wird bewiesen, daß eine transfinite Potenz des Jacobsonschen Radikales jedes *MHR*-Ringes das Nullidal ist. Ferner ist jeder Unterring eines MH_1R-Radikalringes ebenfalls ein MH_1R-Ring, und es gilt in jedem MH_1R-Radikalring A auch die Minimalbedingung für diejenigen additiven Untergruppen von A^+, die in Hauptrechtsidealen von A liegen. Bekanntlich wurden allgemeine Radikale für beliebige assoziative Ringe von AMITSUR [1] und KUROSCH [16] betrachtet. Nun werden wir im § 3 die allgemeinen Radikale im Sinne von KUROSCH [16] für die Klasse der *MHR*-Ringe untersuchen. Es wird ein Kriterium dafür bestätigt, daß ein allgemeines Radikal im Sinne von KUROSCH für *MHR*-Ringe mit dem Jacobsonschen Radikal übereinstimmt. Dabei erwähnen wir weitere Behauptungen und Probleme. Für diese Untersuchungen werden im § 3 außer dem Divinskyschen Radikal D noch weitere spezielle Radikale M und T betrachtet. Im halbgeordneten System aller allgemeinen Radikaleigenschaften blieben aber zwei Ordnungsfragen bezüglich des Radikales M offen.

Zum Schluß machen wir im § 4 einige Bemerkungen bezüglich der rechtsseitig vollständig reduziblen Ringe, die freilich auch *MHR*-Ringe sind. Dabei wird zuerst eine unbewiesene Bemerkung aus [21] berichtigt. Ferner wird im § 5 die Klasse der Artinschen halbeinfachen Ringe in der größeren Klasse der *MHR*-Ringe mit Einselement modultheoretisch, und zwar mit Hilfe des Kertészschen Radikales der beliebigen Operatormoduln charakterisiert: Ein *MHR*-Ring A mit Einselement ist genau dann ein halbeinfacher Artinscher Ring, wenn für das Kertészsche Radikal $R(M)$ von jedem A-Rechtsmodul M die Bedingung $R(M)A=0$ gilt.

Für die Hilfe in der Abfassung meiner Resultate danke ich Prof. L. FUCHS.

§ 1. Über Mächtigkeitsbeziehungen zwischen den Rechts- und Linksidealverbände eines Artinschen Ringes

Für einen Ring A bezeichne V_A und ${}_AV$ den Rechtsidealverband bzw. Linksidealverband von A. Bekanntlich sollen sowohl V_A als auch ${}_AV$ gewisse verbandstheoretische Bedingungen (z. B. Modularität, Vollständigkeit, kompakt Erzeugbarkeit usw.) erfüllen. Meines Wissens ist das folgende schwere Problem bisher noch ungelöst: Zu welchen Verbandspaaren (V_1, V_2) existiert ein Ring A mit $V_A \cong V_1$ und ${}_AV \cong V_2$? In diesem § werden wir ein anderes aber ähnliches Problem betrachten. Es wird nämlich untersucht, in welchem Masse die Mächtigkeiten $|V_A|$ und $|{}_AV|$ voneinander abhängen. Dieses Problem wird für die Paare $(\aleph_\nu, n)$ und $(\aleph_\mu, \aleph_\nu)$ vollständig gelöst ($n < \aleph_0$). Die als Lösungen vorkommenden Ringe lassen sich auch aus der Klasse von Artinschen Ringen wählen.

DEFINITION 1. 1. Für ein Paar $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ von Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ bezeichne $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \uparrow$ (bzw. $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \downarrow$) die Existenz (Nichtexistenz) eines Artinschen Ringes A mit $|V_A| = \mathfrak{m}$ und $|{}_AV| = \mathfrak{n}$.

Offensichtlich ist $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \uparrow$ mit $A(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) = \uparrow$ äquivalent. Wie wir sehen werden, gilt auch $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \uparrow$ für jede Mächtigkeit $\mathfrak{m}$.

Der Ring $A(F, \varphi)$. Es sei F ein Schiefkörper, φ ein Isomorphismus von F in sich, und z ein transzendentes Element über F. Die Menge aller formalen Rechts-

potenzreihen

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k \qquad (f_k \in F,\ z^0 = 1 \in F).$$

wird zu einer (F, F)-Doppelalgebra $A(F, \varphi)$, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k g_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (f_k + g_k)$$

bzw.

$$fz = zf^{\varphi}, \quad fz^k = z^k f^{\varphi^k}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} z^l g_l\right) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \left(\sum_{m=k+l} f_k^{\varphi^l} g_l\right)$$

erklärt wird. (Hierbei bedeutet „Rechtspotenzreihe", daß die Elemente f_k Rechtsoperatoren für z^k sind. Wegen der Definition $fz = zf^{\varphi}$ ist aber F zugleich ein Linksoperatorbereich für $A(F, \varphi)$.) Es sei nun R ein beliebiges Rechtsideal von $A(F, \varphi)$ und $r_k = \sum_{j \geqq k}^{\infty} z^j f_j$ ein solches Element von R, für das $f_k \neq 0$ und k minimal ist. Dann hat jedes Element von R die Gestalt $r = \sum_{j \geqq k}^{\infty} z^j g_j$ $(g_j \in F)$. Da sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_k h_0 &= g_k \\ f_k^{\varphi} h_1 + f_{k+1} h_0 &= g_{k+1} \\ f_k^{\varphi^2} h_2 + f_{k+1}^{\varphi} h_1 + f_{k+2} h_0 &= g_{k+2} \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

bezüglich der Unbekannten $h_0, h_1, h_2, \ldots$ lösen lassen, erhält man $r_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} z^l h_l = r$ und somit $(r_k)_r \supseteq R$. Da offenbar $R \supseteq (r_k)_r$ gilt, ergibt sich $R = (r_k)_r$. Also ist in $A(F, \varphi)$ jedes Rechtsideal ein Hauptrechtsideal $z^k \cdot A(F, \varphi)$, das ein zweiseitiges Ideal ist. Diese Ideale bilden eine abzählbare absteigende Kette. Der Linksidealverband von $A(F, \varphi)$ hängt stark vom Isomorphismus φ des Schiefkörpers F $(\cong A(F, \varphi)/z \cdot A(F, \varphi))$ ab. $A(F, \varphi)$ ist offensichtlich ein Stellenring (d. h. lokaler Ring).

BEMERKUNGEN 1. 1.

I. Es sei φ ein vom identischen verschiedener Automorphismus von F. Dann ist $A(F, \varphi)$ nichtkommutativ, obwohl jedes Rechtsideal und jedes Linksideal ein Ideal ist.

II. Nehmen wir $|F| \geqq \aleph_0$ und $F^{\varphi} \neq F$ an. Dann existieren in F zwei linear unabhängige Elemente f' und f'' über F^{φ}. Es sei $L_f = A(F, \varphi) \cdot z \cdot (f' + f^{\varphi} f'')$. Die Hauptlinksideale L_{f_1} und L_{f_2} sind für $f_1 \neq f_2$ gewiß verschieden, denn aus $L_{f_1} \subseteq L_{f_2}$ erhält man $f_1 = f_2$. Somit folgt aus $|F| \geqq \aleph_0$ auch $|{}_A V| \geqq \aleph_0$ für $A = A(F, \varphi)$.

III. Der Fall $|F| = \aleph_\nu$ und $2 \leqq [F: F^{\varphi}] < \aleph_0$ zeigt $A(\aleph_0, \aleph_\nu) = \dagger$, und $A = A(F, \varphi)$ besitzt dabei folgende Eigenschaften:

a) $|A| = \aleph_\nu^{\aleph_0}$ und A hat Einselement;

b) jedes Rechtsideal von A ist ein Hauptrechtsideal und ein Ideal; diese Ideale bilden eine abzählbare absteigende Kette;

c) $|{}_AV| = \aleph_\nu$ und die Länge von ${}_AV$ ist $\aleph_0$;
d) A hat $\aleph_\nu$ Linksideale, und jede Hauptlinksidealkette ist abzählbar.

Wir zeigen jetzt, daß $|F| = \aleph_\nu$ und $[F: F^\varphi] = n$ für jedes feste n mit $2 \leqq n < \aleph_0$ möglich sind. Es sei nämlich K ein Primkörper, F eine rein transzendente Körpererweiterung von K vom Transzendenzgrad $\aleph_\nu$. Ist nun $T = \{..., t_\gamma, ...\}$ $(\gamma \in \Gamma)$ eine Transzendenzbasis von F über K, so gilt $|T| = \aleph_\nu$ und jede Abbildung Φ von T in F, für die

$$\Phi t_\delta = \begin{cases} t_\delta^n, & \text{wenn} \quad \delta = \gamma \\ t_\delta, & \text{wenn} \quad \delta \neq \gamma \ (\gamma \text{ fest}) \end{cases}$$

läßt sich zu einem Körperisomorphismus φ_γ von F in sich fortsetzen, so daß $[F: F^{\varphi_\gamma}] = n$ und $|F| = \aleph_\nu$.

IV. Es sei jetzt $|F| = [F: F^\varphi] = \aleph_\nu$, dann erhält man für $A = A(F, \varphi)$:

a) $|A| = \aleph_\nu^{\aleph_0}$ und A hat Einselement;
b) jedes Rechtsideal von A ist sowohl ein Hauptrechtsideal, als auch ein Ideal, diese Ideale bilden eine abzählbare absteigende Kette;
c) $|{}_AV| = 2^{\aleph_\nu}$ und ${}_AV$ hat die Länge $\aleph_\nu$;
d) in A existieren $\aleph_\nu$ solche Linksideale, die eine absteigende (aufsteigende) Kette bilden;
e) in A gibt es $\aleph_\nu$ Hauptlinksideale, und in A existiert eine abzählbare absteigende Hauptlinksidealkette.

Es wird jetzt die Erfüllbarkeit von $|F| = [F: F^\varphi] = \aleph_\nu$ gezeigt. Eine Abbildung Φ der in III betrachteten Transzendenzbazis T von F in F sei durch

$$\Phi t_\gamma = t_\gamma^2 \quad \text{für jedes} \quad \gamma \in \Gamma$$

definiert. Φ kann offensichtlich zu einem Körperisomorphismus φ von F in sich mit $[F: F^\varphi] = |F| = \aleph_\nu$ fortgesetzt werden.

SATZ 1. 2. *Für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ und für jede unendliche Mächtigkeit $\aleph_\nu$ gilt $A(n, \aleph_\nu) = \uparrow$. Es gibt nämlich einen Artinschen Ring A mit den folgenden Eigenschaften:*

a) $|A| = \aleph_\nu$ *und A hat Einselement;*
b) $|V_A| = n$, V_A *ist eine Kette, und jedes Rechtsideal ist ein zweiseitiges Hauptideal;*
c) $|{}_AV| = \aleph_\nu$ *und ${}_AV$ ist von endlicher Länge;*
d) *A hat $\aleph_\nu$ Hauptlinksideale.*

Zum Beweis genügt es $A = A(F, \varphi)/z^{n-1} \cdot A(F, \varphi)$, $|F| = \aleph_\nu$ und $2 \leqq [F, F^\varphi] < \aleph_0$ zu wählen $(F \cong A(F, \varphi)/z \cdot A(F, \varphi))$.

Jetzt zeigen wir, daß für einen Ring A mit $|A| = \aleph_\nu$ und $|V_A| < \aleph_0$ die Mächtigkeit $|{}_AV|$ ihr mengentheoretisches Maximum $2^{\aleph_\nu}$ aufnehmen kann, und daß aus $|V_A| < \aleph_0$ nicht die Minimalbedingung für Linksideale folgt.

SATZ 1. 3. *Zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 3$ und jeder unendlichen Mächtigkeit $\aleph_\nu$ gibt es einen Ring A mit den folgenden Eigenschaften:*

a) $|A| = \aleph_\nu$, $|V_A| = n$, $|{}_AV| = 2^{\aleph_\nu}$, *und A hat Einselement;*
b) *die Länge von ${}_AV$ ist $\aleph_\nu$;*

c) *in A existiert eine absteigende (aufsteigende) Kette von $\aleph_\nu$ Linksidealen;*

d) *A hat $\aleph_\nu$ Hauptlinksideale, und die Längen aller Hauptlinksidealketten sind endlich, sogar beschränkt.*

Zum Beweis genügt es den Faktorring $A = A(F, \varphi)/z^{n-1} \cdot A(F, \varphi)$ mit $|F| = [F: F^\varphi] = \aleph_\nu$ zu betrachten.

SATZ 1. 4. *Für jedes Paar $\aleph_\mu, \aleph_\nu$ von unendlichen Mächtigkeiten gilt $A(\aleph_\mu, \aleph_\nu) = \uparrow$.*

BEWEIS. Es seien $A_{\mu,m} = A(F, \varphi)/z^{m-1}A(F, \varphi)$ für $|F| = \aleph_\mu$ und $2 \leqq [F: F^\varphi] < \aleph_0$, ferner $A_{\nu,n} = A(F_1, \varphi_1)/z^{n-1}A(F_1, \varphi_1)$ für $|F_1| = \aleph_\nu$ und $2 \leqq [F_1: F_1^{\varphi_1}] < \aleph_\nu$. Da $A_{\mu,m}$ und jedes antiisomorphe Bild $B_{\nu,n}$ von $A_{\nu,n}$ Einselement haben, besitzt die direkte Summe $A = A_{\mu,m} \oplus B_{\nu,n}$ die Eigenschaften $|A| = \aleph_\varrho$, $|V_A| = \aleph_\nu$ und $|{}_AV| = \aleph_\mu$, wobei $\aleph_\varrho = \max(\aleph_\mu, \aleph_\nu)$ ist. A ist offensichtlich ein links-rechtsseitiger Artinscher Ring, w. z. b. w.

Es wäre interessant die Ringe A zu untersuchen, für die sowohl V_A als auch ${}_AV$ Ketten sind.

PROBLEM 1. 5. Gibt es zu jeder überabzählbaren Mächtigkeit $\aleph_\nu$ einen nichtkommutativen Ring A mit Einselement darart, daß sowohl jedes Rechtsideal, als auch jedes Linksideal ein zweiseitiges Hauptideal ist, und daß diese Ideale eine absteigende Kette von der Länge $\aleph_\nu$ bilden?

PROBLEM 1. 6. Gibt es zu jedem Paar $\aleph_\mu, \aleph_\nu$ von überabzählbaren Mächtigkeiten einen direkt unzerlegbaren Ring A mit Einselement, für den $|V_A| = \aleph_\mu$ und $|{}_AV| = \aleph_\nu$ gilt?

§ 2. Über Ringe mit endlich vielen Rechtsidealen

Offensichtlich ist jeder Ring mit endlich vielen Rechtsidealen ein rechts Artinscher Ring, also auch ein *MHR*-Ring, aber wegen des Satzes 1. 3 i. a. kein linksseitiger Artinscher Ring. Ferner haben sowohl die endlichen Ringe, als auch die direkten Summen von endlich vielen Schiefkörpern nur endlich viele Rechtsideale, und dabei nur endlich viele Linksideale. Bekanntlich ist jeder Ring mit genau zwei Rechtsidealen (d. h. ohne nichttriviale Rechtsideale) entweder ein Schiefkörper, oder ein Zeroring von Primzahlordnung. Hat also ein Ring A wenigstens drei Rechtsideale, so hat A auch wenigstens drei Linksideale.[1] Insbesondere gilt hiernach, daß jeder Ring mit unendlich vielen Linksidealen wenigstens drei Rechtsideale besitzen soll. Für beliebige natürliche Zahl $n \geqq 3$ und für beliebige unendliche Mächtigkeit $\aleph_\nu$ wurde $A(n, \aleph_\nu) = \uparrow$ im Satz 1. 2 gezeigt.[2]

[1] Sowohl diese Behauptung, als auch die äquivalente vorige Behauptung folgt leicht aus dem Wedderburn-Artinschen Struktursatz. SZELE [25] hat für diese Behauptung einen elementaren Beweis gegeben. Bezüglich eines elementaren, wesentlich kürzeren Beweis wird noch auf Lemma 1 der Note [20] verwiesen. Ferner hat STEINFELD [19] gezeigt, wie in einem Ring mit wenigstens drei Rechtsidealen ein nichttriviales Linksideal explizit gefunden werden kann.

[2] T. SZELE hat gefragt (1949), ob ein Ring mit endlich vielen Rechtsidealen nur endlich viele Linksideale haben soll. (Vgl. auch RÉDEI [18], S. 211, bzw. „Problem 3" von [21].) In der Note [24] habe ich die Lösung, und zwar $A(3, \aleph_\nu) = \uparrow$ für jedes $\aleph_\nu$ veröffentlicht, und dann wußte ich noch nicht, ob aus $|V_A| < \aleph_0$ die Minimalbedingung für Linksideale nicht folgt, wie ich diese Frage in

SATZ 2. 1. *Jeder Radikalring A mit $|V_A| < \aleph_0$ ist endlich.*

FOLGERUNG 2. 2. Es gilt für jeden Radikalring A mit $|V_A| \geqq \aleph_0$ auch $|V_A| \geqq \aleph_0$.

BEWEIS des Satzes 2. 1. Wegen $|V_A| < \aleph_0$ ist der Radikalring A ein nilpotenter Artinscher Ring, und somit ist A nach einem Satz von SZELE [26] periodisch und von endlichem Rang.[3] Da jedes $Z(p^\infty)$ nach FUCHS und SZELE [12] im zweiseitigen Annullator von A liegt, folgt aus $|V_A| < \aleph_0$, wirklich $|A| < \aleph_0$.

Der Beweis der Folgerung 2. 2 ist nach dem Satz 2. 1 klar.

SATZ 2. 3. *Es sei A ein halbeinfacher Ring mit $|V_A| < \aleph_0$. Es gilt eine direkte Zerlegung $A = A_1 \oplus A_2$, wobei A_1 ein endlicher halbeinfacher Ring und A_2 die direkte Summe von endlich vielen unendlichen Schiefkörpern ist. Umgekehrt hat jede solche direkte Summe $A_1 \oplus A_2$ nur endlich viele einseitige Ideale.*

BEWEIS. Nach der Voraussetzung gilt $|V_A| < \aleph_0$ für A. Nach dem Wedderburn-Artinschen Struktursatz ist A die direkte Summe von endlich vielen vollen Matrizenringen $(F^{(i)})_{n_i}$ des Typs $n_i \times n_i$ über Schiefkörpern $F^{(i)}$. Bekanntlich hat $(F^{(i)})_{n_i}$ für $|F^{(i)}| \geqq \aleph_0$ und $n_i \geqq 2$ unendlich viele einseitige Ideale, und hiernach gilt $n_i = 1$ für $|F^{(i)}| \geqq \aleph_0$. Somit ist der Satz bewiesen, denn die weiteren Behauptungen sind klar.

LEMMA 2. 4. *Jeder Ring A mit $|V_A| = 3$ ist rechtsseitig direkt unzerlegbar. Jeder nichtnilpotente Ring A mit $|V_A| = 3$ hat ein Linkseinselement.*

BEWEIS. Gilt $A = R_1 + R_2$ mit $0 \neq R_i \in V_A$, so ergibt sich wegen $0, R_1, R_2, A \in V_A$ gewiß $|V_A| \geqq 4$. Also ist A im Falle $|V_A| = 3$ rechtsseitig direkt unzerlegbar. Gilt nun $N \neq A$ für das Radikal N von A, so ist A/N wegen $|V_A| = 3$ ein Schiefkörper. Es gibt also ein idempotentes Element $e \neq 0$ in A. Da $A = eA + (1-e)A$ gilt, ergibt sich $A = eA$, w. z. b. w.

Nun gilt der folgende

SATZ 2. 5. *Jeder Ring A mit drei Rechtsidealen ist einem der folgenden Ringe isomorph:*

I. *ein Ring $\{a\}$ mit den definierenden Relationen $p^2 a = a^2 - pda = 0$ für $d|p$, oder $pa = a^3 = 0$ wobei p eine Primzahl und $\{\ \}$ Ringerzeugung ist,*

II. *ein Ring A mit dem Radikal N, für den A/N ein Schiefkörper, $N^2 = 0$ und N ein $(A/N, A/N)$-Bimodul ist. Ferner soll der A/N-Rechtsmodul N in Falle $N \cdot (A/N) \neq 0$ einfach sein, d. h. es gilt $N = n \cdot (A/N)$ für jedes $n (\in N, \neq 0)$. Im Falle $N \cdot (A/N) = 0$*

---

der Fußnote (*) von [24], S. 47 erwähnt habe. Später habe ich ein interessantes Problem von A. HAJNAL gelöst: Für jede unendliche Mächtigkeit $\aleph_\nu$ gibt es einen Ring A mit $\aleph_\nu$ Elementen. $2^{\aleph_\nu}$ Linksidealen, der nur drei Rechtsideale besitzt. (In diesem Ring A gilt nicht die Minimalbedingung für Linksideale.) Ende November 1962 hat mich L. FUCHS darauf aufmerksam gemacht, daß BOURBAKI [4], S. 27 ein Beispiel A mit $|V_A| = 3$ und ohne Minimalbedingung für Linksideale angibt. (Nach diesem Bourbaki's Beispiel wird aber $A(3, \aleph_0) = \uparrow$, $A(3, \aleph_\omega) = \uparrow$ $A(3, \aleph_{\omega+\omega}) = \uparrow$ usw. und $A(n, \aleph_\nu) = \uparrow$ für $4 \leqq n < \aleph_0$ nicht bewiesen.) In dieser Arbeit wird eine gemeinsame Verallgemeinerung Bourbaki's Beispiels und meiner ursprünglichen Lösung [24] betrachtet. Übrigens lassen sich in [24] bei Bemerkung 6 statt $\varepsilon_0 \vartheta_\nu = \vartheta_\nu \varepsilon_\nu$ und $\delta_0 \eta_\nu = \eta_\nu \delta_\nu$ auch die mildere Bedingungen $\varepsilon_0 \delta_0 \vartheta_\nu \delta_\nu = \delta_0 \vartheta_\nu \delta_\nu \varepsilon_\nu$ und $\delta_0 \varepsilon_0 \eta_\nu \varepsilon_\nu = \varepsilon_0 \eta_\nu \varepsilon_\nu \delta_\nu$ fordern. — Ich danke Prof. G. HAJÓS für eine interessante Bemerkung bezüglich meiner Ringkonstruktion.

[3] Nach [26] gilt nämlich in A^+ die Minimalbedingung für Untergruppen.

ergibt sich aber $A=\{a, b\}$ *mit* $pa = pb = a^2 = b^2-b = ab = ba-a = 0$ *für eine Primzahl* p.

BEWEIS. Es sei A ein Ring mit $|V_A|=3$ und N sein Radikal. Nach dem Lemma 2. 4 gilt $N\neq 0$, denn im Falle $N=0$ gilt für den halbeinfachen Ring A entweder $|V_A|=2$ oder $|V_A|\geqq 4$, weil A dann rechtsseitig vollständig reduzibel ist. Also ist gewiß $N\neq 0$.

Es sei zuerst $N=A$. Dann ist A nach dem Satz 2. 1 und Lemma 2. 4 ein endlicher nilpotenter p-Ring mit $p^2A=0$. Ferner besteht der Rechtssockel von A aus einem einzigen nilpotenten minimalen Rechtsideal M mit $M^2=0$ und $|M|=p$ bzw. $|A/M|=p$. Also ist $|A|=p^2$. Im Falle $pA\neq 0$ erhält man $A=\{a\}$ mit $p^2a = a^2-dpa$, $d|p$ für ein passendes $a\in A$. Daher wird $a^2=0$ für $d=p$ und $a^2=pa$ für $d=1$ gewonnen, und in letzterem Fall ergibt sich $\{a\}\cong p(I/(p^3))$. Ist aber $pA=0$, dann erhält man wegen $|A|=p^2$, $|V_A|=3$ und nach dem Lemma 2. 4 gewiß $A^2\neq 0$, und $A^3=0$. Also ist $A=\{a\}$, $pa=a^3=0$ für jedes $a\in A$ mit $a\notin A^2$.

Es sei jetzt $N\neq A$. Dann ist $A/N=F$ ein Schiefkörper, und A hat nach dem Lemma 2. 4 ein Linkseinselement. Wegen $|V_A|=3$ erhält man $N^2=0$, und daher ist das Radikal N ein (F, F)-Bimodul, denn im Falle $a_1-a_2\in N$ ergibt sich $na_1 = na_2$ und $a_1n=a_2n$ für jedes $n\in N$. Ebenfalls wegen $|V_A|=3$ gilt $|N|=p$ für $NF=0$, und $N=nF$ für $NF\neq 0$ mit beliebigem $n(\neq 0, \in N)$. Es sei jetzt $NF=0$. Dann gilt auch $NA=0$, $|N|=p$. Ist nun $fn=0$ für ein festes $n(\neq 0, \in N)$ und für ein $f(\neq 0, \in F)$, so ist das annullierende Linksideal für n im Schiefkörper F selbst F, woraus wegen $N=\{n\}$ auch $AN=FN=0$ folgt. Diese Bedingung widerspricht der Existenz eines Linkseinselementes e in A (vgl. Lemma 2. 4). Also ergibt sich $fn\neq 0$ für jedes $n\neq 0$ und $f\neq 0$, und daher gilt auch $f_1n\neq f_2n$ für $f_1\neq f_2$, folglich $|F|=|N|=p$. Hiernach gilt $A=\{a, b\}$ und auch $pa = pb = a^2 = b^2-b = ba-a = ab = 0$ für jedes $0\neq a\in N$ mit $b=e$.

BEMERKUNGEN 2. 6.

I. Im Falle $NF\neq 0$ läßt sich jeder im Satz 2. 5 bei II vorkommende Ring A mit der Hilfe der Everettschen Ringerweiterungstheorie [9] etwas expliziter, aber i. a. nicht absolut explizit bestimmen. Der Ring A ist nämlich eine Erweiterung von N mit $F=A/N$. Man kennt aber das additive Faktorsystem, das multiplikative Faktorsystem und die Endomorphismensysteme dieses Erweiterungsverfahrens i. a. nicht explizit, denn man sollte dafür gewisse Funktionalgleichungen in Ringen lösen. Jedoch sei erwähnt: Jeder im Satz 2. 5 bei II vorkommende Ring A ist im Falle $NF=N\neq 0$ bis auf Ringisomorphie die Menge aller formal verschiedenen Paare

$$(f_0, f_1^{\eta}) \quad (f_i\in F=A/N),$$

wobei η ein additiver Isomorphismus von F^+ auf eine Gruppe N^+ ist, und die Verknüpfungen in dieser Menge folgendermaßen erklärt sind:

$$(*) \qquad (f_0, f_1^{\eta})+(g_0, g_1^{\eta}) = (f_0+g_0, [f_0, g_0]^{\eta}+f_1^{\eta}+g_1^{\eta})$$

$$(**) \qquad (f_0, f_1^{\eta})\cdot(g_0, g_1^{\eta}) = (f_0\cdot g_0, \langle f_0, g_0\rangle^{\eta}+(f_0^{\varphi}g_1)^{\eta}+(f_1g_0)^{\eta}).$$

Hierbei ist φ ein Isomorphismus des Schiefkörpers F in sich, ferner sind $[f_0, g_0]$ und $\langle f_0, g_0\rangle$ Abbildungen von $F\times F$ in F, für welche die Bedingungen

Ω_1: $$[0,f]=\langle 0,f\rangle=\langle f,0\rangle=0$$

Ω_2: $$[f_1,f_2]=[f_2,f_1]$$

Ω_3: $$[f_1+f_2,f_3]+[f_1,f_2]=[f_1,f_2+f_3]+[f_2,f_3]$$

Ω_4: $$\langle f_1+f_2,f_3\rangle+[f_1,f_2]f_3 = [f_1f_3,f_2f_3]+\langle f_1,f_3\rangle+\langle f_2,f_3\rangle$$

Ω_5: $$\langle f_1,f_2+f_3\rangle+f_1\varphi[f_2,f_3] = [f_1f_2,f_1f_3]+\langle f_1,f_2\rangle+\langle f_1,f_3\rangle$$

Ω_6: $$\langle f_1,f_2f_3\rangle+f_1^{\varphi}\langle f_2,f_3\rangle = \langle f_1f_2,f_3\rangle+\langle f_1,f_2\rangle f_3$$

erfüllt sind.

II. Ist A^+ eine elementare Abelsche p-Gruppe, oder eine torsionsfreie teilbare Gruppe, so läßt sich in I immer identisch $[f_0, g_0]=0$ wählen. Dafür ist aber $pF=0$ im allgemeinen nicht hinreichend, wie dies z. B. der Ring $\{a\}$ mit $a^2-a = p^2a = 0$ zeigt. Kann aber identisch $[f_0, g_0]=0$ gewählt werden, so ist z. B. $\langle f_0, g_0\rangle = -f_0^{\varphi}hg_0$ (h ein festes Element von F) eine spezielle Lösung der Gleichungen $\Omega_1, \ldots, \Omega_6$,und dann erhält man über der direkten Summe $F+F^{\eta}$ die Ringmultiplikation

$$(*\,*\,*) \qquad (f_0,f_1^{\eta})\cdot(g_0,g_1^{\eta}) = (f_0g_0, -(f_0^{\varphi}hg_0)^{\eta}+(f_0^{\varphi}g_1)^{\eta}+(f_1g_0)^{\eta})$$

für die genau $(1, h^{\eta})$ das Einselement des entsprechenden Ringes A mit $|V_A|=3$ ist. Im Falle $(0\neq) F^{\varphi}\neq F$ und $|F|=\aleph_{\nu}$ gilt mit $(*\,*\,*)$ auch ${}_AV|\cong\aleph_{\nu}$.(Vgl. Satz 1. 2, ferner [4], S. 27, und [27].)

SATZ 2. 7. *Jeder Ring A mit $|V_A|=3$ und ${}_AV|\cong\aleph_0$ ist einem im Satz* 2. 5 *bzw. Bemerkungen* 2. 6, I *erwähnten Ring mit $F=A/N$, $NF=N$, $|F|\cong\aleph_0$, $[F:F^{\varphi}]\cong 2$ isomorph. Jeder Ring A mit $|V_A|=3$ und ${}_AV|\cong\aleph_0$ hat Einselement. Jeder Ring A mit $|V_A|=3$ und ohne von Null verschiedene Linksannullatoren hat Einselement. Jeder Ring A mit $|V_A|=3$ und ohne von Null verschiedene Rechtsannullatoren hat ein Linkseinselement. Es gilt in jedem Ring A mit $|V_A|=3$ die Minimalbedingung für Hauptlinksideale.*

BEWEIS ist nach den Vorigen klar.

BEMERKUNGEN 2. 8.

I. Gilt $A(m, n)=\uparrow$ für die natürlichen Zahlen m und n, so gilt auch $A(km, kn)=\uparrow$ für jede natürliche Zahl k.

Das folgt daraus, daß der Faktorring $A_k=I/(p^k)$ des Ringes I der ganzen rationalen Zahlen nach dem Ideal (p^k) Einselement enthält, und die Eigenschaft $|V_{A_k}|={}_{A_k}V|=k$ hat. Es genügt nun im Falle $|V_B|=m$ und ${}_BV|=n$ den Ring $\boldsymbol{A}=B\oplus A_k$ zu betrachten.

II. Es seien p eine beliebige Primzahl, k, m, n beliebige natürliche Zahlen mit $m > n$. Ist nun

$$f_1 = 1 + \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{i} \frac{p^{(m-j+1)kn} - 1}{p^{jkn} - 1},$$

bzw.

$$f_2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} \frac{p^{(n-j+1)kn} - 1}{p^{jkn} - 1} + \sum_{i=1}^{(m-n)kn} \prod_{j=1}^{i} \frac{p^{((m-n)n-j+1)k} - 1}{p^{jk} - 1},$$

so läßt sich $A(f_1, f_2) = \uparrow$ oder $\downarrow$ fragen.

III. Gilt $A(3, \mathfrak{m}) = \uparrow$ für eine Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, so erhält man $\mathfrak{m} = 3$, oder $\mathfrak{m} = 5$ bzw. $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Insbesondere gilt also auch $A(3, 4) = \downarrow$.

Das ist eine Folgerung der Vorigen.

IV. Hat ein Ring A nur endlich viele Unterringe, so ist A selbst endlich.

Die in IV erwähnte Ringeigenschaft (d. h. die Existenz nur endlich vieler Unterringe) erbt jeder Unterring und jedes homomorphe Bild von A. Es sei zuerst A halbeinfach. Dann ergibt sich nach dem Satz 2. 3 $A = A_1 \oplus A_2$, wobei $|A_1| < \aleph_0$ und A_2 die direkte Summe von endlich vielen Schiefkörpern ist. Jeder Schiefkörper in A_2 hat eine Charakteristik p und ist absolut algebraisch. Wegen der Maximalbedingung für Unterringe erhält man $|A_2| < \aleph_0$ und somit $|A| < \aleph_0$, wenn A halbeinfach ist. Es sei jetzt A nilpotent. Dann erhält man nach dem Satz 2. 1 gewiß $|A| < \aleph_0$. Ist nun A weder halbeinfach, noch nilpotent, so gilt nach den Vorigen $|A/N| < \aleph_0$ und $|N| < \aleph_0$ folglich auch $|A| < \aleph_0$ (N ist das Radikal von A).

PROBLEM 2. 9. Für welche endliche Paare m, n gilt $A(m, n) = \uparrow$? (m und n sind natürliche Zahlen.)

PROBLEM 2. 10. Man bestimme sämtliche endliche Ringe mit distributiven Verbänden V_A und ${}_AV$.

PROBLEM 2. 11. Gilt die Minimalbedingung für Hauptlinksideale in jedem Ring A mit $|V_A| < \aleph_0$?

Problem 2. 12. Ist A ein direkt unzerlegbarer Ring mit $|V_A| < \aleph_0$ und $|{}_AV| \geqq \aleph_0$, so soll V_A ein distributiver Verband sein?

PROBLEM 2. 13. Ist ${}_AV$ für einen Ring A mit $|V_A| < \aleph_0$ distributiv, so soll auch $|{}_AV| < \aleph_0$ bestehen?

PROBLEM 2. 14. Hat jeder Ring A mit $|V_A| < \aleph_0$, $|{}_AV| \geqq \aleph_0$ und ohne von Null verschiedene Linksannullatoren (Rechtsannullatoren) Einselement (bzw. ein Linkseinselement)?

PROBLEM 2. 15. Ist A ein Ring mit dem Radikal N, und gelten $pA \subseteq N$ (für eine Primzahl p) und $|V_A| = 3$ bzw. $|{}_AV| \geqq \aleph_0$, so läßt sich das in Bemerkungen 2. 6 I betrachtete additive Faktorsystem $[f_0, g_0]$ immer identisch Null wählen?

§ 3. Über die Radikale der *MHR*-Ringe

Wir haben in [21] bewiesen, daß in jedem *MHR*-Ring das Baersche untere Nilradikal [3] mit dem Jacobsonschen Radikal [13] und somit auch mit dem Levitzkischen Radikal [17] bzw. mit dem oberen Nilradikal [13] von A übereinstimmt.[4] Dabei wurde in [21] sowohl das Brown—McCoysche Radikal [5] als auch das Fuchssche Zeroidradikal [11] der *MHR*-Ringe mit Rechtseinselement betrachtet. (Vgl. noch [22].) In diesem § werden allgemeine Radikale im Sinne von KUROSCH [16] für die Klasse der *MHR*-Ringe untersucht und dabei das Jacobsonsche Radikal eines *MHR*-Ringes betrachtet.

Eine Klasse K assoziativer Ringe wird nach KUROSCH [16] eine Klasse von Radikalringen genannt, wenn für K die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. jedes homomorphe Bild eines Ringes aus K liegt ebenfalls in K;

2. jeder assoziative Ring A enthält ein Ideal B derart, daß für jedes in K fallende Ideal C von A die Beziehung $C \subseteq B$ gilt;

3. ist B durch 2 bestimmt, so ist $\mathbf{0} = B/B$ das einzige zu K gehörende Ideal des Faktorringes A/B von A nach B.

Ist nun K eine beliebige Klasse von Radikalringen im Sinne von KUROSCH, so sind genau die Ringe aus K die **K**-Radikalringe, wobei **K** die durch die Klasse K definierte Radikaleigenschaft ist.

Sind nun K und L zwei Klassen von Radikalringen und gilt $K \subseteq L$, so definieren wir für die entsprechenden Radikaleigenschaften durch $\mathbf{K} \leqq \mathbf{L}$ eine Halbordnung. Also gilt $\mathbf{K} \leqq \mathbf{L}$ genau im Falle $K \subseteq L$. Die Klasse K_0, die nur aus dem Ring $A = 0$ besteht, ist das minimale Element, und die Klasse K_1 aller assoziativen Ringe ist das maximale Element im halbgeordneten System aller Klassen von Radikalringen. Es gilt also $\mathbf{K}_0 \leqq \mathbf{X} \leqq \mathbf{K}_1$ für jede Radikaleigenschaft **X**. Gilt nun $\mathbf{X} \leqq \mathbf{Y}$ für zwei Radikaleigenschaften, so erhält man für das **X**-Radikal $A_{\mathbf{X}} \in X$ von A und das **Y**-Radikal $A_{\mathbf{Y}} \in Y$ von A offensichtlich $A_{\mathbf{X}} \subseteq A_{\mathbf{Y}}$ für jeden Ring A.

Es seien jetzt P und Q zwei beliebige Ringklassen, die i. a. keine Klassen von Radikalringen im Sinne von KUROSCH sind. Nehmen wir an, daß jedes von Null verschiedene Ideal jedes Ringes aus Q sich auf einen von Null verschiedenen Ring aus Q homomorph abbilden läßt. Dann können nach KUROSCH [16] gewisse Radikaleigenschaften **P** und **Q** mit den folgenden Bedingungen definiert werden:

1. jeder Ring aus P ist ein **P**-Radikalring, und es gilt $\mathbf{P} \leqq \mathbf{X}$ für jede Radikaleigenschaft **X**, für die jeder Ring aus P ein **X**-Radikalring ist;

2. jeder Ring aus Q ist **Q**-halbeinfach (d. h. das **Q**-Radikal ist für jeden Ring aus Q das Nullideal), und es gilt $\mathbf{Q} \geqq \mathbf{Y}$ für jede Radikaleigenschaft **Y**, für die jeder Ring aus Q ein **Y**-halbeinfacher Ring ist.

P (bzw. **Q**) wird die durch die Klasse P (bzw. Q) erklärte untere (bzw. obere) Radikaleigenschaft genannt.

Nun betrachten wir einige Spezialfälle.

[4] Wie üblich, wird unter dem klassischen Radikal $N_1(A)$ eines Ringes A die Summe aller nilpotenten Rechtsideale von A verstanden, das für Artinsche Ringe bekanntlich mit dem Jacobsonschen Radikal $A_{\mathbf{J}}$ von A übereinstimmt. Ist nun $N_{\beta+1}/N_\beta = N_1(A/N_\beta)$ und $N_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta$ für eine Limeszahl α, so läßt sich fragen: Gibt es zu jeder Ordnungszahl δ einen *MHR*-Nilring A mit $N_\delta = A$ und $N_\gamma \neq A$ für $\gamma < \delta$?

Es sei **Z** die durch die Klasse aller Zeroringe von Primzahlordnung erzeugte untere Radikaleigenschaft.

Es sei **D** die durch die Klasse derjenigen nilpotenten Ringe erzeugte untere Radikaleigenschaft, die (Jacobsonsche) Radikale Artinscher Ringe sind; offensichtlich ist $A_{\mathbf{D}}$ in A das Divinskysche Radikal [8].

Es sei **B** die durch die Klasse aller nilpotenten Ringe erzeugte untere Radikaleigenschaft; $A_{\mathbf{B}}$ ist in A bekanntlich das Baersche untere Nilradikal [3].

Es sei **M** die durch die Klasse derjenigen Nilringe erzeugte untere Radikaleigenschaft, die (Jacobsonsche) Radikale von *MHR*-Ringen sind.

Es sei **N** die durch die Klasse aller Nilringe erzeugte untere Radikaleigenschaft; $A_{\mathbf{N}}$ ist offensichtlich das obere Nilradikal von A [13].

Es sei **U** die durch die Klasse aller Artinschen einfachen Ringe erzeugte obere Radikaleigenschaft.

Es sei **T** die durch die Klasse aller einfachen *MHR*-Ringe erzeugte obere Radikaleigenschaft.

Nun gilt der folgende

SATZ 3. 1. *Für jeden MHR-Ring A stimmt eine Radikaleigenschaft* **R** *dann und nur dann mit dem Jacobsonschen Radikaleigenschaft* **J** *überein, wenn* $\mathbf{M} \leqq \mathbf{R} \leqq \mathbf{T}$ *gilt.*

BEWEIS. Ist $A_{\mathbf{R}} = A_{\mathbf{J}}$ für jeden *MHR*-Ring A, so sind alle **J**-halbeinfachen einfachen *MHR*-Ringe auch **R**-halbeinfach, und somit gilt nach der Definition von **T** offensichtlich $\mathbf{T} \geqq \mathbf{R}$. Ferner ist jeder solche Nilring, der das Jacobsonsche Radikal eines *MHR*-Ringes ist, ebenfalls ein **R**-Radikalring, woraus nach der Definition von **M** auch $\mathbf{R} \leqq \mathbf{M}$ folgt.

Bestehe nun umgekehrt $\mathbf{M} \leqq \mathbf{R} \leqq \mathbf{T}$, und sei A ein beliebiger *MHR*-Ring. Es gilt nach der Voraussetzung $A_{\mathbf{M}} \subseteq A_{\mathbf{R}} \subseteq A_{\mathbf{T}}$, und nach der Definition von **T** ergibt sich auch $A_{\mathbf{J}} \subseteq A_{\mathbf{T}}$. Andererseits ist $A/A_{\mathbf{J}}$ nach [21] die direkte Summe von **J**-halbeinfachen einfachen *MHR*-Ringen, und $A_{\mathbf{T}}/A_{\mathbf{J}}$ ist ein Ideal dieser direkten Summe. Hiernach kann $A_{\mathbf{T}}$ im Falle $A_{\mathbf{T}} \neq A_{\mathbf{J}}$ homomorph auf einen **T**-halbeinfachen einfachen *MHR*-Ring abgebildet werden, was unmöglich ist. Also gilt $A_{\mathbf{T}} = A_{\mathbf{J}}$. Ferner ergibt sich wegen $\mathbf{M} \leqq \mathbf{J}$ auch $A_{\mathbf{M}} \subseteq A_{\mathbf{J}}$. Da $A_{\mathbf{J}}$ ein Nilring und das Jacobsonsche Radikal eines *MHR*-Ringes ist, erhält man nach der Definition von **M** offensichtlich $A_{\mathbf{M}} = A_{\mathbf{J}}$. Somit gelten $A_{\mathbf{T}} = A_{\mathbf{J}} = A_{\mathbf{M}}$ und wegen $\mathbf{M} \leqq \mathbf{R} \leqq \mathbf{T}$ auch $A_{\mathbf{R}} = A_{\mathbf{J}}$, w. z. b. w.

Bezeichnet $(B:A)_l$ (bzw. $(B:A)_r$) die Menge aller $x \in A$ mit $xA \subseteq B$ (bzw. $Ax \subseteq B$) für ein zweiseitiges Ideal B eines beliebigen Ringes A, so ergibt sich der folgende

SATZ 3. 2. *Ist A ein MHR-Nilring, in dem $B \neq (B:A)_l \cap (B:A)_r$ für jedes echte zweiseitige Ideal B von A gilt, so ist A ein* **Z***-Radikalring.*

BEWEIS. Nach der Voraussetzung existiert ein $x \notin B$ mit $xA \subseteq B$ und $Ax \subseteq B$ für jedes Ideal B von A. Dann läßt sich das Ideal $(x+B)$ des Faktorringes A/B von A nach B auf einen Zeroring von Primzahlordnung homomorph abbilden, woraus folgt, daß A „vom zweiten Grade über die Klasse Z" im Sinne von KUROSCH [16] ist. Also ist A nach [16] ein **Z**-Radikalring, w. z. b. w.

BEMERKUNGEN 3. 3. Nach einem Beispiel von DIVINSKY [8] existiert ein Artinscher Ring A derart, daß A kein **N**-Radikalring ist, und dass A_J ein **Z**-halbeinfacher Ring ist. Ferner gilt offensichtlich

$$\mathbf{Z} \leqq \mathbf{D} \leqq \mathbf{M} \leqq \mathbf{B} \leqq \mathbf{N} \leqq \mathbf{J} \leqq \mathbf{T} \leqq \mathbf{U}.$$

DIVINSKY [8] hat $\mathbf{Z} \neq \mathbf{D}$ gezeigt. Ob $\mathbf{D} = \mathbf{M}$ oder $\mathbf{D} \neq \mathbf{M}$ gilt, ist noch eine offene Frage. Ferner wissen wir ebenfalls nicht, ob $\mathbf{M} = \mathbf{B}$ oder $\mathbf{M} \neq \mathbf{B}$ besteht. Existiert aber ein Ring A mit $A_M \neq A_B$, so gibt es schon einen *MHR*-Ring A' mit $A'_M \neq A'_B$. Von BAER [3] wurde $\mathbf{B} \neq \mathbf{N}$ bewiesen. Ferner zeigt das Beispiel aller rationalen Zahlen mit ungeraden Nennern die Beziehung $\mathbf{N} \neq \mathbf{J}$. Es seien A der Ring aller linearen Transformationen eines Vektorraumes von der Dimension $\aleph_0$ über einem Schiefkörper, und A_0 das Ideal aller linearen Transformationen von endlichem Rang. Dann gilt in $F = A/A_0$ offensichtlich $F_J \neq F_T$, und somit ergibt sich $\mathbf{J} \neq \mathbf{T}$. Da im Ring A_0 aber $(A_0)_T \neq (A_0)_U$ gilt, erhält man $\mathbf{T} \neq \mathbf{U}$.

Es gilt der folgende

SATZ 3. 4. *Ist A_J das Jacobsonsche Radikal eines MHR-Ringes A, so existiert eine Ordnungszahl α mit $A_J^\alpha = 0$.*

BEWEIS. Es sei $A(\neq 0)$ ein beliebiger *MHR*-Ring. Da jedes von Null verschiedene Rechtsideal eines beliebigen von Null verschiedenen homomorphen Bildes von A ein von Null verschiedenes minimales Rechtsideal enthält, existiert nach BAER [3] eine Ordnungszahl β mit $A_\beta = A$, wobei $A_1 = A_1(A)$ der Rechtssockel von A und $A_{\gamma+1}/A_\gamma = A_1(A/A_\gamma)$ bzw. $A_\delta = \bigcup_{\beta<\delta} A_\beta$ für eine Limeszahl δ. Ebenfalls nach BAER [3] gilt $A_\gamma \cdot A_J^\gamma = 0$ für jedes γ, und insbesondere auch $A_\beta \cdot A_J^\beta = 0$. Daher gewinnen wir $A_J^{\beta+1} = A_J \cdot A_J^\beta \subseteqq A \cdot A_J^\beta = A_\beta \cdot A_J^\beta = 0$ und somit auch $A_J^\beta = 0$.

Ist nun α eine minimale Ordnungszahl mit $A_J^\alpha = 0$, so ergibt sich $A_J^\gamma \neq 0$ für $\gamma < \alpha$.

SATZ 3. 5. *Es sei A ein beliebiger MH_1R-Radikalring. Dann ist jeder Unterring B von A ebenfalls ein MH_1R-Ring. Ferner gilt in einem MH_1R-Radikalring A die Minimalbedingung für diejenigen additiven Untergruppen von A^+, die in einem Hauptrechtsideal von A liegen.*

BEWEIS. A ist nach [21] ein Nilring, und es gibt nach dem Satz 3. 4 eine Ordnungszahl α mit $A^\alpha = 0$ und $A^\beta \neq 0$ für $\beta < \alpha$. Es sei Z_γ der Linksannullator von A^γ. Dann gilt $Z_{\beta_1} \subseteqq Z_{\beta_2}$ für $\beta_1 \leqq \beta_2$ und $Z_\alpha = A$. Nehmen wir an, daß B kein MH_1R-Ring ist. Dann existiert ein minimaler Index β_0 derart, daß es ein Element $b_0 \in B$ und eine echt absteigende unendliche Rechtsidealkette

$$(*) \qquad R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset R_4 \supset \ldots$$

des Ringes B mit $R_1 \subseteqq Z_{\beta_0}$ und $R_1 \subseteqq \{b_1\} + b_0 B$ gibt. Die Existenz eines solchen Indexes β_0 folgt aus der Voraussetzung, und aus $b_0 \in Z_\alpha = A$. Wegen der Minimalität ist β_0 keine Limeszahl. Ferner kann auch $\beta_0 \geqq 2$ folgendermaßen bewiesen werden. Im Falle $\beta_0 = 1$ ist nämlich $R_1 \subseteqq Z_1$, und wegen $R_i A = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ ist jedes R_i ein Rechtsideal schon von A, und die Existenz solcher Kette $(*)$ in A ist für einen MH_1R-Ring A unmöglich. Also gilt wirklich $\beta_0 \geqq 2$ und dabei ist β_0 keine Limeszahl. Hiernach gibt es einen Index γ mit $\beta_0 = \gamma + 1$. Es sei jetzt

$C^\varphi = C + CA$ für jeden Unterring C von A; offensichtlich ist C^φ das durch C in A erzeugte Rechtsideal. Da A ein MH_1R-Ring ist, und $\{b_0\}^\varphi \supseteq R_i^\varphi \supseteq R_{i+1}^\varphi$ für jedes i, existiert ein Index k mit $R_l^\varphi = R_k^\varphi$ für jedes $l \geqq k$. Wegen $R_iA \subseteq Z_{\beta_0}A = Z_{\gamma+1}A \subseteq Z_\gamma$ ergibt sich

$$R_l + Z_\gamma = R_k + Z_\gamma \quad \text{für jedes} \quad l \geqq k.$$

Da der Untergruppenverband von A^+ modular ist, erhält man wegen $(*)$ offensichtlich die echt absteigende unendliche Kette

$$D_k \supset D_{k+1} \supset D_{k+2} \supset D_{k+3} \supset \cdots$$

der Rechtsideale $D_i = R_i \cap Z_\gamma$ von B in Z_γ, das wegen $\beta_0 < \gamma$ und $D_i \subseteq \{b_0\} + b_0B$ der Minimalität von β_0 widerspricht. Also muß B ebenfalls ein MH_1R-Ring sein. Die letzte Behauptung des Satzes 3. 5 läßt sich ganz ähnlich beweisen.

BEMERKUNG 3. 6. In [21] wurde ein Beispiel für einen *MHR*-Ring gegeben, der kein MH_1R-Ring ist. Es ist aber eine offene Frage, ob es einen *MHR*-Nilring gibt, der kein MH_1R-Ring ist.

PROBLEM 3. 7. Ist jeder *MHR*-Nilring ein **Z**-Radikalring?

PROBLEM 3. 8. Ist jeder **M**-Radikalring auch ein **D**-Radikalring?

PROBLEM 3. 9. Ist jeder **B**-Radikalring auch ein **M**-Radikalring?

(Hierbei können wegen $\mathbf{D} \neq \mathbf{B}$ nicht beide Probleme 3. 8 und 3. 9 mit „ja" beantwortet werden.)

§ 4. Über die rechtsseitig vollständig reduziblen Ringe

Ein Ring A heißt rechtsseitig vollständig reduzibel, wenn er als A-Rechtsmodul vollständig reduzibel ist, d. h. A ist eine diskrete direkte Summe seiner minimalen Rechtsideale. Ein solcher Ring braucht nicht halbeinfach im Sinne von JACOBSON zu sein. Jeder vollständig reduzible Ring ist ein *MHR*-Ring. Das Umgekehrte ist nach dem Beispeil des Faktorringes $I/(p^2)$ des Ringes I der ganzen rationalen Zahlen nach seinem Ideal (p^2) ungültig. Jedoch ist jeder halbeinfache *MHR*-Ring rechtsseitig vollständig reduzibel.

Zuerst möchte ich die erste Behauptung aus den „Bemerkungen" meiner Arbeit ([21], S. 421) berichtigen, wobei ich ein Glied D weggelassen habe. Die richtige Behauptung lautet folgendermaßen:

BEHAUPTUNG 4. 1. *Ist jedes Rechtsideal R eines Ringes A, als eines A-Rechtsmoduls ein rechtsseitiger direkter Summand, dann ist A rechtsseitig vollständig reduzibel, und zwar gilt: $A = B + C + D$, wobei B, C und D Rechtsideale von A, ferner B ein halbeinfacher MHR-Ring, C ein Zeroring auf einer elementaren Gruppe* [10] *und D eine Summe von nilpotenten minimalen Rechtsidealen R^* von A mit $R^*A = R^*$ ist.*

Der Beweis dieser Tatsache kann durch übliche Methoden erledigt werden (s. z. B. JACOBSON [13], CARTAN—EILENBERG [6] bzw. KERTÉSZ [14]).

Nun zeigt das folgende Beispiel, daß D im allgemeinen nicht weggelassen werden kann:

Im Matrizenring des Typs 3×3 über dem rationalen Zahlkörper K_0 nehmen wir den durch die Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraum $A = K_0M_1 + K_0M_2$, der ein Unterring ist. Dann sind sowohl K_0M_1, als auch K_0M_2 minimale Rechtsideale von A, also ist A rechtsseitig vollständig reduzibel. Dann gilt für $D = K_0M_2$ offensichtlich $D \neq 0$, $D^2 = 0$, $DA = D$ und D^+ ist dabei keine elementare Gruppe.

Wir möchten jetzt die Artinschen halbeinfachen Ringe in der Klasse der *MHR*-Ringe mit Einselement modultheretisch charakterisieren.

Für einen Ring A (der i. a. kein Einselement zu besitzen braucht) und für einen A-Rechtsmodul M sei $\Phi(M)$ der Frattinische Untermodul von M, und $K(M)$ die Menge aller $m \in M$ mit $mA \subseteq \Phi(M)$. Offensichtlich ist $K(M)$ ein A-Untermodul von M, den in seiner Arbeit [15] A. KERTÉSZ ausführlich betrachtet hat. $K(M)$ hat Radikaleigenschaften, und $K(M)$ heißt Kertészsches Radikal des A-Moduls M. In [23] habe ich gezeigt, daß $K(A)$ in einem Ring A (als in einem A-Rechtsmodul A) i. a. vom Jacobsonschen Radikal verschieden ist. Jedoch wurde früher für gewisse Ringe A von KERTÉSZ [15] $K(A) = A_J$ gezeigt.

DEFINITION 4. 2. Ein beliebiger Ring A wird ein K-Ring genannt, wenn für jeden A-Rechtsmodul M das Kertészsche Radikal $K(M)$ der Bedingung $K(M)\cdot A = 0$ genügt.

Es gilt der folgende

SATZ 4. 3. *Ein MHR-Ring A mit Einselement ist dann und nur dann ein K-Ring, wenn A ein halbeinfacher Artinscher Ring ist.*

BEWEIS. Es sei der *MHR*-Ring A mit Einselement ein K-Ring. Dann gilt insbesondere auch $K(A)\cdot A = 0$, und wegen $1 \in A$ auch $K(A) = 0$. Ebenfalls wegen $1 \in A$ ergibt sich $\Phi(A) = A_J$. Da wegen $K(A) = 0$ aus $a\cdot A \subseteq A_J$ immer $a = 0$ folgt, erhält man wegen $A_JA \subseteq A_J$ auch $A_J = 0$. Somit ist A ein halbeinfacher *MHR*-Ring, und wegen $1 \in A$ ist auch A ein halbeinfacher Artinscher Ring.

Umgekehrt sei A ein halbeinfacher Artinscher Ring. Dann gilt $1 \in A$, und für jeden A-Rechtsmodul M ergibt sich die Peircesche Zerlegung $M = M_0 + M_1$ mit $M_0A = 0$ und $m_1\cdot 1 = m_1$ für jedes $m_1 \in M_1$. Da nach [15] $K(M) = K(M_0) + K(M_1)$ gilt, und da offensichtlich $K(M_0) = M_0$ und $K(M_1) = 0$ bestehen, erhält man $K(M) = M_0$ und somit $K(M)\cdot A = 0$, w. z. b. w.

BEMERKUNG 4. 4. Es sei A ein halbeinfacher und einfacher *MHR*-Ring, eA $(e^2 = e \neq 0)$ ein idempotentes minimales Rechtsideal von A. Bekanntlich ist dann $S = eAe$ ein Schiefkörper. Jetzt möchte ich offene Fragen aufwerfen.

PROBLEM 4. 5. Haben der Linksvektorraum eA und der Rechtsvektorraum Ae über S immer dieselbe Dimension?

PROBLEM 4. 6. Gibt es einen K-Ring, der kein MHR-Ring mit Einselement ist? (Es sind alle K-Ringe explizit zu bestimmen!)

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST

(Eingegangen am 7. April 1962; — in veränderter Form am 20. März 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] S. A. AMITSUR, A general theory of radicals. I, *Amer. Jour. Math.*, **74** (1952), S. 774—786; II, *Amer. Jour. Math.*, **76** (1954), S. 100—125; III, *Amer. Jour. Math.*, **76** (1954), S. 126—136.
[2] E. Artin—C. J. NESBITT—R. M. THRALL, *Rings with minimum condition* (Michigan, 1944).
[3] R. BAER, Radical ideals, *Amer. Journ. Math.*, **65** (1943), S. 537—568.
[4] N. BOURBAKI, Élements de Mathématique, I. Les structures fondamentales de l'analyse, Livre II., Algèbre, Chapitre 8, Modules et anneaux semi-simples, Actualités scientifiques et industrielles (Paris, 1958).
[5] B. BROWN—N. H. MCCOY, Radicals and subdirect sums, *Amer. Jour. Math.*, **69** (1947), S. 46—58.
[6] H. CARTAN—S. EILENBERG, *Homological algebra* (Princeton, 1956).
[7] J. DIEUDONNÉ, Sur le socle d'un anneau et les anneaux simples infinis, *Bull. Soc. Math. France*, **70** (1942), S. 46—75.
[8] N. DIVINSKY, General radicals that coincide with the classical radical on rings with D. D. C., *Canadian Jour. Math.*, **13**: **4** (1961), S. 639—644.
[9] C. J. EVERETT, An extension theory for rings, *Amer. Journ. Math.*, **64** (1942), S. 363—370.
[10] L. FUCHS, *Abelian groups* (Budapest, 1958).
[11] L. FUCHS, On a new type of radical, *Acta Sci. Math. Szeged*, **16** (1955), S. 43—53.
[12] L. FUCHS—T. SZELE, On Artinian rings, *Acta Sci. Math. Szeged*, **17** (1956), S. 30—40.
[13] N. JACOBSON, *Structure of rings* (Providence, 1956).
[14] A. KERTÉSZ, Beträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), S. 235—257.
[15] A. KERTÉSZ, Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében. III (Untersuchungen in der Theorie der Operatormoduln, Ungarisch), *M. T. A. Mat. Fiz. Oszt. Közleményei*, **9** (1959), S. 105—120.
[16] A. G. KUROSCH, Radikale der Ringe und der Algebren, *Mat. Sbor.*, **33** (**75**) (1953), S. 13—26 (Russisch).
[17] J. LEVITZKI, On the radical of a general ring, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), S. 463—466.
[18] L. RÉDEI, *Algebra. I* (Leipzig, 1959).
[19] O. STEINFELD, Bemerkungen zu einer Arbeit von T. Szele, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), S. 479—484.
[20] F. SZÁSZ, Note on rings in which every proper left ideal is cyclic, *Fund. Math.*, **44** (1957), S. 330—332.
[21] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale. I, *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), S. 54—64; II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), S. 417—439.
[22] F. SZÁSZ, Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchsschen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe, *Archiv der Math.*, **12** (1961), S. 282—289.
[23] F. SZÁSZ, Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról (Über das Kertészsche Radikal der Operatormoduln, Ungarisch), *M. T. A. Mat. Fiz. Oszt. Közleményei*, **10** (1960), S. 35—38.
[24] F. SZÁSZ, Szele Tibor egy gyűrűelméleti problémájának megoldása (Die Lösung eines ringtheoretischen Problems von Tibor Szele, Ungarisch), *M. T. A. Mat. Fiz. Oszt. Közleményei*, **12** (1962), S. 47—50.
[25] T. SZELE, Die Ringe ohne Linksideale, *Bul. Stii. Acad. Popul. Repub. Romane*, **1** (1949), S. 783—789.
[26] T. SZELE, On nilpotent Artinian rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), S. 71—78.

Printed in Hungary

Technikai szerkesztő: Szabados József

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1963. V. 10. – Terjedelem: 20,50 (A/5) ív – 18 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 63-2180

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en franaçis, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Toute correspodance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, I., Fő utca 32.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

60,— forint

INDEX

Hilton, P. J. and *Yahya, S. M.*, Unique divisibility in Abelian groups 229
Knapowski, S. and *Turán, P.*, Comparative prime-number theory. VII 241
Knapowski, S. and *Turán, P.*, Comparative prime-number theory. VIII 251
Marcus, S., Typologie des langues et modèles logiques 269
Hardy, F. L., On groups of ring multiplications 283
Erdős, P. and *Rényi, A.*, Asymmetric graphs 295
Blundon, W. J., Note on a paper of A. Heppes 317
Harrison, D. K., Irwin, J. M., Peercy, C. L. and *Walker, E. A.*, High extensions of Abelian groups 319
Nigam, H. N., On generalised Laplace transform of two variables 331
Fejes Tóth, L., Isoperimetric problems concerning tessellations 343
Ribenboim, P., A theorem on linear transformations of torsion-free modules of infinite rank 353
Hsu, L. C., On a method for expanding multiple integrals in terms of integrals in lower dimensions 359
Faith, C. and *Utumi, Y.*, On a new proof of Litoff's theorem 369
Péter, Rózsa, Programmierung und partiell-rekursive Funktionen 373
Fladt, K., Die Zentralprojektion einer Ebene auf eine andere in der hyperbolischen Geometrie 403
Dirac, G. A., Extensions of Turán's theorem on graphs 417
Corrádi, K. and *Hajnal, A.*, On the maximal number of independent circuits in a graph 423
Grätzer, G., On semi-discrete lattices whose congruence relations form a Boolean algebra ... 441
Szász, F., Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale. III 447

Index: 26.014