50255 XII. 235

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT ÉS POGÁNY BÉLA

HARMINCNYOLCADIK ÉVFOLYAM

1931

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST, 1931

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

EGYETEMI KÖNYVTÁR
SZEGED.
FOLYÓIRATOK
1932/33 195

TARTALOMJEGYZÉK.

Az 1926. évi május hó 22-én tartott közgyűlés 1927 január 1.-i hatállyal a tagdíjakat felemelte, budapesti tagok számára 8 pengőre, vidéki tagok számára 6 pengőre.

Minthogy a Matematikai és Fizikai Lapok egyes régibb évfolyamai teljesen elfogytak, kérjük tisztelt tagtársainkat, akik azokat nélkülözhetik, bocsássák a Társulat rendelkezésére.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Fejér Lipót* (**I., Krisztina-körút 165.**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**I., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Nagy József* pénztáros címére (Vác, Kegyesrendi gimnázium) intézendők. Postatakarékpénztári csekkszámla száma: 5997.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány,* Budapest, I., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du sécretaire *B. Pogány,* Budapest, I., Budafoki-út 8.

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

HARMINCNYOLCADIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST, 1931

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

50255

A M. Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem
KÖNYVTÁRA
SZEGED

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

harmincnyolcadik kötetének tartalma.

*

A «FACTORISATIO NUMERORUM» PROBLÉMÁJÁRÓL.

Bevezetés.

Az *additív számelmélet* egyik nevezetes, «partitio numerorum» néven [1] ismert problémaköre valamely n természetes számnak tetszésszerinti számú pozitív egész szám *összegeként* való előállításainak számosságára vonatkozik. E számosság EULER óta számos vizsgálat tárgyát alkotta; HARDY és RAMANUJAN [2] aszimptotikus képletet is adtak rá. Ezzel szemben a megfelelő *multiplikatív számelméleti* problémát, amely valamely n természetes számnak tetszésszerinti számú, 1-nél nagyobb egész szám *szorzataként* való előállításainak számosságára vonatkozik, tudomásom szerint eddig még nem tárgyalták.[3]

---

[1] Szűkebb értelmében használva e kifejezést; tágabb értelemben a partitio numerorum problémaköre felölel minden additív számelméleti kérdést.

[2] G. H. HARDY és S. RAMANUJAN: Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis, *Proceedings of the London Math. Society*, (2) **XVII** (1918), 75—115. oldal, vagy Collected Papers of SRINIVASA RAMANUJAN (Cambridge, 1927), 36. cikk, 276—309. oldal. A szóbanforgó aszimptotikus képlet egyszerűbb bebizonyítására nézve l. KONRAD KNOPP: Asymptotische Formeln der additiven Zahlentheorie, *Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, naturwissenschaftliche Klasse*, **2** (1925), 45—74. oldal.

[3] Ezzel szemben annak az (egyszerűbb) additív számelméleti problémának, amely valamely n természetes számnak adott k számú egész szám összegeként való előállításainak számosságára vonatkozik, multiplikatív számelméleti analogonjával «PILTZ-féle osztóprobléma» néven számos munka foglalkozik; l. pl. G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD: The Approximate Functional Equation in the Theory of the Zeta-function, with Applications to the Divisor-Problems of DIRICHLET and PILTZ, *Proceedings of the London Math. Society*, (2) **XXI** (1923), 39—74. oldal.

A szóbanforgó számosságok pontos definíciójához azt is meg kell mondanunk, hogy két előállítás különbözőnek számít-e, ha csak a tagok, illetőleg a tényezők *sorrendjében* térnek el egymástól. Az additív előállítások esetén csak az a definíció vezet problémához, amelynél a tagok különböző sorrendjével felírt felbontások nem tekintendők különbözőknek, mert a másik definíció mellett, tehát ha a tagok sorrendjére tekintettel vagyunk, a felbontások száma[4] — mint teljes indukcióval minden nehézség nélkül adódik — 2^{n-1}. A multiplikatív előállítások esetében azonban az előállítások számának egyik definíciója sem vezet triviális számelméleti függvényhez. Jelen dolgozatban *tekintettel* vagyok a tényezők sorrendjére is, tehát a következőképpen definiált $f(n)$ számelméleti függvényt — n «factorisatióinak» számát — vizsgálom: $f(n)$ jelenti az n számnak

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k \tag{1}$$

alakú előállításainak számát, ahol $k = 0$,[5] 1,[6] $2, \ldots$; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 1-nél nagyobb egész számok; végül az (1) és az

$$n = n'_1 n'_2 \ldots n'_{k'}$$

előállítások akkor és csakis akkor tekintendők azonosnak, ha

$$k = k'; \; n_1 = n'_1, \; n_2 = n'_2, \ldots, \; n_k = n'_k.$$

Minthogy $f(n)$ változása szabálytalan (pl. valahányszor n törzsszám, $f(n) = 1$, míg különben $f(n)$ tetszés szerint nagy értékeket is felvesz), ezért nem $f(n)$-re magára, hanem az

$$\frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n}$$

---

[4] Beleértve az «egy tag összegére» való nem-tulajdonképpeni felbontást is.

[5] 0-tényezős szorzat jelentése 1; ez tehát csak $n = 1$ esetén lép fel: $f(1) = 1$.

[6] E szerint a nem-tulajdonképpeni, «egy tényező szorzatára» való felbontás is számítandó.

középértékre fogok aszimptotikus képletet adni: bebizonyítom, hogy

$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{n}\sim\frac{1}{\varrho R}n^{\varrho-1}, \tag{2}$$

ahol ϱ a $\zeta(s)=2$ egyenletnek[7] egyetlen 1-nél nagyobb valós gyöke,[8] R értéke pedig

$$R=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^{\varrho}}=-\zeta'(\varrho).$$

A (2) aszimptotikus képlet abból a tényből fog következni, hogy az $f(n)$ számelméleti függvény generátor DIRICHLET-sora $\frac{1}{2-\zeta(s)}$, azaz

$$f(1)+\frac{f(2)}{2^s}+\frac{f(3)}{3^s}+\cdots+\frac{f(n)}{n^s}+\cdots=\frac{1}{2-\zeta(s)} \tag{3}$$

(l. 1. szakasz); ez az egyenlet akkor érvényes, ha az $s=\sigma+it$ komplex változó valós komponense, $\sigma>\varrho$; máskülönben a baloldalon álló sor széttartó. E generátorfüggvény a $\sigma>\varrho$ félsíkon reguláris; a $\sigma=\varrho$ egyenesen egyedüli szinguláris helye az $s=\varrho$ pólus. BOHR-nak a RIEMANN-féle ζ-függvény értékkészletére vonatkozó vizsgálataiból[9] következik, hogy a $\sigma=\varrho$ egyenes bármilyen kis (baloldali) környezetében vannak a $\zeta(s)=2$ egyen-

---

[7] Itt $\zeta(s)$ az s komplex változó oly értékeinél, melyeknek valós összetevője 1-nél nagyobb, a

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$$

sorral értelmezett RIEMANN-féle ζ-függvény, ahol n^s az $e^{s\log n}$ transzcendens egész függvényt jelenti.

[8] Ilyen gyök valóban egy és csakis egy van; ugyanis $\zeta(s)$ 1-nél nagyobb valós s értékeknél csökkenő valós folytonos függvény, az $s=1$ helyhez (jobbról) közeledve minden határon túl nő, míg $s\to\infty$ esetén 1 a határértéke.

[9] H. BOHR: Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma>1$, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse,* 1911, 409—428. oldal.

letnek gyökei, tehát a szóbanforgó generátorfüggvénynek pólusai. Ebből közvetlenül következik, hogy a (2) aszimptotikus képlet

$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{n}-\frac{1}{R}n^{\varrho-1} \tag{4}$$

maradéktagjára nézve nem áll fenn $O(n^{\alpha})$ alakú megbecslés, ahol $\alpha<\varrho-1$; Bohr módszerét részleteiben követve e maradéktagra még élesebb alulról való megbecsléshez lehet jutni. Úgyszólván azt az esetet illusztrálja az $f(n)$ számelméleti függvény, ami a törzsszámok eloszlásának problémájánál előállna, ha a Riemann-féle ζ-függvénynek — a nevezetes Riemann-féle sejtéssel ellentétben — a $\sigma=1$ egyenes bármilyen kis baloldali környezetében volnának zérushelyei. Jelen dolgozatban nem foglalkozom ezekkel, a (3) függvény mélyebb függvénytani tulajdonságaiból folyó eredményekkel; mindössze az említett (2) aszimptotikus képletet fogom bebizonyítani. E közben a komplex változós függvénytannak csak a legelemibb fogalmait és tételeit fogom alkalmazni; ezeknek teljes elkerülése nem ütközném ugyan akadályba, azonban az előálló számításbeli többlet miatt nem volna érdemes. A (4) maradéktagnak említett alulról való megbecslésére, továbbá ugyane maradéktagnak a diophantikus approximációk elmélete segítségével történő felülről való megbecslésére más helyen szándékozom visszatérni.

1. Az $f(n)$ számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=f(1)+\frac{f(2)}{2^s}+\frac{f(3)}{3^s}+\cdots+\frac{f(n)}{n^s}+\cdots, \tag{5}$$

ahol $s=\sigma+it$ komplex változó. *Ha s valós összetevője, σ, nagyobb, mint a $\zeta(s)=2$ egyenlet egyetlen 1-nél nagyobb valós gyöke, ϱ, akkor e sor összetartó és összege*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\frac{1}{2-\zeta(s)}. \tag{6}$$

Ugyanis $\sigma > \varrho$ esetén

$$\frac{1}{2-\zeta(s)} = \frac{1}{1-(\zeta(s)-1)} =$$
$$= 1 + (\zeta(s)-1) + (\zeta(s)-1)^2 + \cdots + (\zeta(s)-1)^k + \cdots,$$

mert ekkor

$$|\zeta(s)-1| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right| \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\varrho} = \zeta(\varrho) - 1 = 1.$$

Itt, ha $\sigma > 1$,

$$(\zeta(s)-1)^k = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)^k = \sum_{n_1=2}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=2}^{\infty} \frac{1}{(n_1 n_2 \ldots n_k)^s},$$

s a jobboldalon álló k-szoros végtelen sor feltétlenül összetartó; egyszerű DIRICHLET-sorrá átrendezve

$$(\zeta(s)-1)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_k(n)}{n^s}, \qquad (7)$$

ahol $f_k(n)$ az n pozitív egész számnak k-tényezős

$$n = n_1 n_2 \ldots n_k$$

szorzat alakjában való előállításainak száma, hol $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 1-nél nagyobb egész számok és két előállítás akkor és csakis akkor számít azonosnak, ha a tényezők, sorrendre nézve is, megegyeznek.[10] (7) érvényes $k = 0$ esetén is, ha $f_0(1)$ jelentése 1, különben (vagyis, ha $n > 1$,) $f_0(n) = 0$. Eszerint, ha $\sigma > \varrho$,

$$\frac{1}{2-\zeta(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_k(n)}{n^s}.$$

---

[10] A 3. lábjegyzetben említett PILTZ-féle osztóprobléma az

$$f_k(n) + \binom{k}{1} f_{k-1}(n) + \binom{k}{2} f_{k-2}(n) + \cdots + \binom{k}{k} f_0(n)$$

számelméleti függvényre vonatkozik, amelynek közvetlen jelentése az n számnak $n = n_1 n_2 \ldots n_k$ alakú előállításainak száma, ahol k adott természetes szám, két egymástól a tényezők sorrendjében eltérő előállítás különbözőnek számít és $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pozitív egész számok, *megengedve* az 1-et is.

E kétszeres végtelen sor $\sigma>\varrho$ esetén ismét feltétlenül összetartó (mert bármely tagjának abszolút értéke nem egyéb, mint ugyane sornak megfelelő tagja az $s=\sigma$ helyen), s így egyszerű DIRICHLET-sorrá átrendezve is összetartó és összege $\frac{1}{2-\zeta(s)}$; szóval (minthogy $f(n)=f_0(n)+f_1(n)+\cdots+f_k(n)+\cdots$[11]) az (5) sor összetartó és összegét (6) adja.

2. Az $f(n)$ számelméleti függvény közepes nagyságrendjének megbecsléséhez használni fogok egy, az $\frac{1}{2-\zeta(s)}$ függvénynek a $\sigma=\varrho$ egyenes jobboldali környezetében való viselkedésére vonatkozó egyenlőtlenséget. Ennek bebizonyítása a következő segédtételen fog alapulni:

Legyen t tetszésszerinti pozitív szám. Az n pozitív egész számnak adható végtelen sok különböző

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots \tag{8}$$

érték, amelynél $\frac{t}{2\pi}\log n$-nek a legközelebbi egész számtól való távolsága legalább $\frac{1}{4}$; a (8) számok választhatók úgy, hogy

$$\nu_k < \frac{e^{\frac{2\pi k}{t}}}{1-e^{-\frac{\pi}{t}}} \tag{9}$$

legyen.

Bebizonyítás: Ha g valamely egész szám és az n egész szám teljesíti az

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{1}{4})} \leqq n \leqq e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{3}{4})}$$

egyenlőtlenséget, akkor

$$g+\tfrac{1}{4} \leqq \frac{t}{2\pi}\log n \leqq g+\tfrac{3}{4},$$

tehát n-nek megvan a kívánt tulajdonsága. Ha

---

[11] E végtelen sor csak látszólagos, mert, ha k nagyobb, mint n törzstényezőinek száma (többszörösségükkel számlálva őket), akkor $f_k(n)=0$.

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{3}{4})} - e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{1}{4})} \geqq 1,$$

akkor biztosan van ilyen n egész szám; ez pedig teljesül, amint

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{3}{4})} \geqq \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{t}}}, \tag{10}$$

tehát g-nek minden elég nagy értékénél. Legyen g_0 a legnagyobb egész szám, amely a (10) egyenlőséget nem teljesíti. Akkor

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+\frac{3}{4})} < \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{t}}}, \tag{11}$$

de

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+k+\frac{3}{4})} \geqq \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{t}}}$$

ha $k=1, 2, 3, \ldots$; a (8) pozitiv egész számokat úgy választva, hogy

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+k+\frac{1}{4})} \leqq \nu_k \leqq e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+k+\frac{3}{4})}$$

legyen, ezek a kivánt tulajdonsággal fognak birni és (11) miatt a (9) egyenlőtlenségnek is megfelelnek.

3. Ha $\sigma > 1$, akkor

$$\zeta(\sigma) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^{-ti}}{n^\sigma},$$

$$|\zeta(\sigma) - \zeta(s)| \geqq \Re\big(\zeta(\sigma) - \zeta(s)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(t\log n)}{n^\sigma}.$$

A jobboldalon egy tag sem negativ; ha n olyan, hogy $\frac{t}{2\pi}\log n$-nek a legközelebbi egész számtól való távolsága legalább $\frac{1}{4}$, akkor a $t \log n$ szög vagy a második, vagy a harmadik negyedben van, tehát $\cos(t\log n) \leqq 0$. Így a megelőző szakaszban bebizonyitott segédtétel szerint

$$|\zeta(\sigma)-\zeta(s)| \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k^{\sigma}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1-e^{-\frac{\pi}{t}}\right)^{\sigma}}{e^{\frac{2k\pi\sigma}{t}}} =$$

$$= \frac{\left(1-e^{-\frac{\pi}{t}}\right)^{\sigma}}{e^{\frac{2\pi\sigma}{t}}\left(1-e^{-\frac{2\pi\sigma}{t}}\right)} = e^{-\frac{3\pi\sigma}{t}} \frac{\left(e^{\frac{\pi}{t}}-1\right)^{\sigma}}{1-e^{-\frac{2\pi\sigma}{t}}},$$

tehát, a minden valós x helyen érvényes $e^x \geqq 1+x$ egyenlőtlenség miatt,

$$|\zeta(\sigma)-\zeta(s)| \geqq e^{-\frac{3\pi\sigma}{t}} \frac{\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\sigma}}{\frac{2\pi\sigma}{t}} = \frac{\pi^{\sigma-1}}{2\sigma} e^{-\frac{3\pi\sigma}{t}} t^{1-\sigma}. \qquad (12)$$

4. Minthogy

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2,$$

ezért $1<\varrho<2$.[12] Legyen $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 1$; akkor (12) folytán

$$|\zeta(\sigma)-\zeta(s)| \geqq \frac{\pi^{\varrho-1}}{4} e^{-6\pi} t^{1-\sigma} = c_1 t^{1-\sigma},$$

ahol c_1, (mint alább $c_2, c_3, \ldots, c_8$ is) pozitív állandót jelent. Továbbá, minthogy $\sigma > 1$ esetén $\zeta(\sigma)$ csökkenő konvex függvény,[13] ezért

$$0 \leqq 2-\zeta(\sigma) = \zeta(\varrho)-\zeta(\sigma) \leqq (\varrho-\sigma)\,\zeta'(\varrho) = R\,(\sigma-\varrho),$$

ahol R, mint a bevezetésben, $-\zeta'(\varrho)$-t jelöli. Ennélfogva

$$|2-\zeta(s)| \geqq |\zeta(\sigma)-\zeta(s)| - \big(2-\zeta(\sigma)\big) \geqq c_1 t^{1-\sigma} - R\,(\sigma-\varrho),$$

---

[12] J. P. GRAM: Tafeln für die RIEMANNsche Zetafunktion, *Det kongelige Danske Videnskabernes Selkabs Skrifter, naturvidenskabelig og matematisk Afdeling*, (VIII) **10** (1926), 313—325. oldal szerint

$$\zeta(1{\cdot}7) = 2{\cdot}05428\ 87568\ldots,$$
$$\zeta(1{\cdot}8) = 1{\cdot}88222\ 96181\ldots,$$

(320. oldal); tehát $1{\cdot}7 < \varrho < 1{\cdot}8$.

[13] Ugyanis

$$\zeta'(\sigma) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma}} < 0, \quad \zeta''(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n^{\sigma}} > 0.$$

tehát, ha

$$\sigma \geqq \varrho, \quad R(\sigma-\varrho) \leqq \tfrac{1}{2} c_1 t^{-\frac{\varrho}{2}} \quad \text{és} \quad 1-\sigma \geqq -\frac{\varrho}{2}, \tag{13}$$

akkor (minthogy ekkor $\sigma \leqq 1+\frac{\varrho}{2}<2$)

$$|2-\zeta(s)| \geqq \tfrac{1}{2} c_1 t^{-\frac{\varrho}{2}}.$$

(13) áll, ha $t \geqq 1$ és $\varrho \leqq \sigma \leqq \varrho + c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}}$, hacsak c_2 elég kicsi; ugyanis ekkor

$$R(\sigma-\varrho) \leqq R c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}} \leqq \tfrac{1}{2} c_1 t^{-\frac{\varrho}{2}}, \text{ ha } c_2 \leqq \frac{c_1}{2R},$$

$$1-\sigma \geqq 1-\varrho-c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}} \geqq 1-\varrho-c_2 \geqq -\frac{\varrho}{2}, \text{ ha } c_2 \leqq 1-\frac{\varrho}{2}.$$

Ennélfogva ekkor

$$\left|\frac{1}{2-\zeta(s)}\right| \leqq \frac{2}{c_1} t^{\frac{\varrho}{2}};$$

viszont, ha $t \geqq 1$ és $\varrho + c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}} < \sigma \leqq 2$, akkor, $\zeta(\sigma)$ konvexsége miatt,

$$\left|\frac{1}{2-\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} = \frac{1}{2-\zeta(\sigma)} <$$

$$< \frac{1}{(\varrho-\sigma)\,\zeta'(\sigma)} < \frac{1}{-c_2 \zeta'(2)\, t^{-\frac{\varrho}{2}}} = \frac{1}{-c_2 \zeta'(2)} t^{\frac{\varrho}{2}}.$$

Eszerint $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 1$ esetén

$$\left|\frac{1}{2-\zeta(s)}\right| \leqq c_3 t^{\frac{\varrho}{2}}. \tag{14}$$

5. Az $s=\varrho$ hely a $2-\zeta(s)$ függvénynek elsőrendű[14] zérushelye, tehát reciprok értékének elsőrendű pólusa

$$\lim_{s=\varrho} \frac{s-\varrho}{2-\zeta(s)} = -\lim_{s=\varrho} \frac{s-\varrho}{\zeta(s)-\zeta(\varrho)} = -\frac{1}{\zeta'(\varrho)} = \frac{1}{R}$$

reziduummal; ezért a

---

[14] $\zeta'(\varrho) < 0$.

M. Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED

$$\varphi(s) = \frac{1}{2-\zeta(s)} - \frac{1}{R}\frac{1}{s-\varrho}$$

függvény, és első differenciálhányadosa is, a $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $0 \leqq t \leqq 1$ téglalapon — reguláris lévén — korlátos:

$$|\varphi(s)| \leqq c_4, \tag{15}$$

$$|\varphi'(s)| \leqq c_5. \tag{16}$$

Másrészt, (14) miatt, $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $t > 1$ esetén,

$$|\varphi(s)| \leqq \left|\frac{1}{2-\zeta(s)}\right| + \frac{1}{R}\frac{1}{|s-\varrho|} \leqq c_3 t^{\frac{\varrho}{2}} + \frac{1}{R}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} |\varphi'(s)| &= \left|\frac{\zeta'(s)}{(2-\zeta(s))^2} + \frac{1}{R}\frac{1}{(s-\varrho)^2}\right| \leqq \\ &\leqq \left|\frac{1}{2-\zeta(s)}\right|^2 |\zeta'(s)| + \frac{1}{R}\frac{1}{|s-\varrho|^2} \leqq Rc_3^2 t^{\varrho} + \frac{1}{R}. \end{aligned} \tag{18}$$

(15), (16), (17) és (18) szerint, ha $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 0$, akkor, $t \leqq |s|$, $1 < \varrho \leqq |s|$ miatt,

$$|\varphi(s)| \leqq c_3 t^{\frac{\varrho}{2}} + \frac{1}{R} + c_4 \leqq c_6 |s|^{\frac{\varrho}{2}}, \tag{19}$$

$$|\varphi'(s)| \leqq Rc_3^2 t^{\varrho} + \frac{1}{R} + c_5 \leqq c_7 |s|^{\varrho}. \tag{20}$$

$\varphi(\bar{s}) = \overline{\varphi(s)}$ és $\varphi'(\bar{s}) = \overline{\varphi'(s)}$ miatt érvényesek a (19) és (20) egyenlőtlenségek $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $t < 0$ esetén is, szóval $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$ esetén mindig.

6. Mint ismeretes,[15] ha $\sigma > 0$, $x > 0$ és k pozitív egész szám, akkor ($s = \sigma + it$)

$$\frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^{k+1}}\,dt = \begin{cases} \log^k x, & \text{ha} \quad x \geqq 1, \\ 0, & \text{ha} \quad x \leqq 1, \end{cases} \tag{21}$$

[15] L. például E. LANDAU: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I. kötet, 266. oldal, ahol $\sigma=2$, ez azonban a bizonyításhoz nem lényeges; vagy E. LANDAU: Sobre los números primos en progresión aritmética, *Revista Matemática Hispano-Americana*, 5 (1923), teorema 62 (5. oldal), ahol a (21) képlet $k=1$ speciális esete van — elemi úton — bebizonyítva, amelyből az általános k — 1-szeres parciális integrálással adódik.

továbbá[16] $x > 1$ esetén

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s}\,dt = 1. \tag{22}$$

Ennélfogva, ha $\sigma > \varrho$, az

$$\frac{1}{2-\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

végtelen sornak feltétlen és t-ben egyenletes összetartása[17] miatt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s^3}\frac{dt}{2-\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{2!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^3}\,dt = \\ &= \sum_{n\leqq x} f(n)\log^2\frac{x}{n},\end{aligned} \tag{23}$$

ahol az összegezés jele alatt $n \leqq x$ azt jelzi, hogy n az x-nél nem nagyobb pozitív egész számokat futja át; megfelelő módon értelmezendők alább is a hasonló jelölések.

7. Itt

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s^3}\frac{dt}{2-\zeta(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s\frac{\varphi(s)}{s^3}.dt + \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s^3(s-\varrho)}\,dt.$$

A szokásos eljárással (részlettörtekre bontás) adódik, hogy

$$\frac{1}{s^3(s-\varrho)} = \frac{1}{\varrho^3(s-\varrho)} - \frac{1}{\varrho^3 s} - \frac{1}{\varrho^2 s^2} - \frac{1}{\varrho s^3},$$

---

[16] E képlet a (21) képlet $k=1$, $x>1$ esetéből parciális] integrációval adódik; egyébként megtalálható például a 15. lábjegyzetben idézett helyeen is, a 344., illetőleg 1. oldalon (teorema 60).

[17] U. i. $\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \frac{f(n)}{n^\sigma}$ és $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^\sigma}$ összetartó.

tehát, $x > 1$, $\sigma > \varrho$ esetén, (21) és (22) miatt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^3(s-\varrho)}\,dt = \frac{x^\varrho}{\varrho^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\sigma-\varrho+it}}{\sigma-\varrho+it}\,dt - \frac{1}{\varrho^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s}\,dt -$$

$$-\frac{1}{\varrho^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s^2}\,dt - \frac{1}{\varrho}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s^3}\,dt = 2\pi\left(\frac{x^\varrho}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho^3} - \frac{\log x}{\varrho^2} - \frac{\log^2 x}{2\varrho}\right).$$

Igy, (23) szerint,

$$\sum_{n \leqq x} f(n) \log^2 \frac{x}{n} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3}\,dt + \frac{2x^\varrho - 2 - 2\varrho \log x - \varrho^2 \log^2 x}{\varrho^3 R}. \qquad (2[illegible])$$

8. Itt, parciálisan integrálva,

$$\int_{-\omega}^{+\omega} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3}\,dt = \frac{1}{i \log x}\left(x^{\sigma+i\omega}\frac{\varphi(\sigma+i\omega)}{(\sigma+i\omega)^3} - x^{\sigma-i\omega}\frac{\varphi(\sigma-i\omega)}{(\sigma-i\omega)^3}\right) -$$

$$-\frac{1}{\log x}\int_{-\omega}^{+\omega} x^s \left(\frac{\varphi(s)}{s^3}\right)' dt,$$

tehát, minthogy $\omega \to \infty$ esetén, (19) miatt,

$$\left| x^{\sigma \pm i\omega} \frac{\varphi(\sigma \pm i\omega)}{(\sigma \pm i\omega)^3}\right| = x^\sigma \left|\frac{\varphi(\sigma+i\omega)}{(\sigma+i\omega)^3}\right| \leqq c_6 x^\sigma \left|\sigma + i\omega\right|^{\frac{\varrho}{2}-3} \to 0,$$

ezért

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3}\,dt = \frac{1}{\log x}\int_{-\infty}^{+\infty} x^s\left(3\,\frac{\varphi(s)}{s^4} - \frac{\varphi'(s)}{s^3}\right)dt.$$

Ennélfogva, a (19) és (20) egyenlőtlenségeket alkalmazva,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3}\, dt\right| \leqq \frac{x^\sigma}{\log x}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(3\,\frac{|\varphi(s)|}{|s|^4}+\frac{|\varphi'(s)|}{|s|^3}\right)dt \leqq$$

$$\leqq \frac{x^\sigma}{\log x}\int_{-\infty}^{+\infty}(3c_6\,|s|^{\frac{\varrho}{2}-4}+c_7\,|s|^{\varrho-3})\,dt \leqq$$

$$\leqq (3c_6+c_7)\frac{x^\sigma}{\log x}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varrho+it|^{\varrho-3}\,dt = c_8\frac{x^\sigma}{\log x}, \tag{25}$$

mert $\frac{\varrho}{2}-4<\varrho-3<0$; a legutolsó integrál (s így a többi is) konvergens, mert $\varrho-3<-1$. (25) mindig érvényes, ha $\sigma>\varrho$; ezért, σ-t ϱ-hoz közelítve,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3}\, dt\right| \leqq c_8\frac{x^\varrho}{\log x},$$

s így, ha $x\to\infty$,

$$x^{-\varrho}\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3}\, dt \to 0.$$

Tehát, figyelemmel (24)-re, adódik, hogy $x\to\infty$ esetén

$$x^{-\varrho}\sum_{n\leqq x} f(n)\log^2\frac{x}{n} \to \frac{2}{\varrho^3 R}. \tag{26}$$

9. Legyen $\lambda>1$; továbbá, rövidítésképpen,

$$\Phi_\lambda(x)=\sum_{n\leqq\lambda^2x} f(n)\log^2\frac{\lambda^2x}{n}-2\sum_{n\leqq\lambda x} f(n)\log^2\frac{\lambda x}{n}+\sum_{n\leqq x} f(n)\log^2\frac{x}{n};$$

(26) miatt $x\to\infty$ esetén

$$x^{-\varrho}\Phi_\lambda(x)\to\frac{2}{\varrho^3 R}(\lambda^{2\varrho}-2\lambda^\varrho+1). \tag{27}$$

Másrészt azonban

$$\Phi_\lambda(x)=\sum_{n\leqq x} f(n)\left(\log^2\frac{\lambda^2x}{n}-2\log^2\frac{\lambda x}{n}+\log^2\frac{x}{n}\right)+$$

$$+\sum_{x<n\leqq\lambda x} f(n)\left(\log^2\frac{\lambda^2x}{n}-2\log^2\frac{\lambda x}{n}\right)+\sum_{\lambda x<n\leqq\lambda^2x} f(n)\log^2\frac{\lambda x}{n}.$$

Itt

$$\log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2\log^2 \frac{\lambda x}{n} + \log^2 \frac{x}{n} =$$

$$= \left(\log \frac{x}{n} + 2\log\lambda\right)^2 - 2\left(\log\frac{x}{n} + \log\lambda\right)^2 + \log^2\frac{x}{n} =$$

$$= 2\log^2\lambda,$$

s innét

$$\log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2\log^2\frac{\lambda x}{n} \leqq 2\log^2\lambda,$$

továbbá $x < n \leqq \lambda x$ esetén

$$\log^2\frac{\lambda^2 x}{n} - 2\log^2\frac{\lambda x}{n} \geqq \log^2\frac{\lambda^2 x}{n} - \left(2\log\frac{\lambda x}{n}\right)^2 =$$

$$= \log^2\frac{\lambda^2 x}{n} - \log^2\frac{\lambda^2 x^2}{n^2} \geqq 0;$$

$\lambda x < n \leqq \lambda^2 x$ esetén pedig

$$0 \leqq \log^2\frac{\lambda^2 x}{n} \leqq \log^2\lambda \leqq 2\log^2\lambda.$$

Ezért

$$2\log^2\lambda \sum_{n\leqq x} f(n) \leqq \Phi_\lambda(x) \leqq 2\log^2\lambda \sum_{n\leqq\lambda^2 x} f(n),$$

azaz

$$\frac{\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)^{-\varrho}\Phi_\lambda\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)}{2\lambda^{2\varrho}\log^2\lambda} \leqq x^{-\varrho}\sum_{n\leqq x} f(n) \leqq \frac{x^{-\varrho}\Phi_\lambda(x)}{2\log^2\lambda}.$$

Ha $x\to\infty$, (27) folytán ezek az $x^{-\varrho}\sum_{n\leqq x} f(n)$-re talált korlátok rendre az

$$\frac{1}{\varrho^3 R}\,\frac{\lambda^{2\varrho}-2\lambda^\varrho+1}{\lambda^{2\varrho}\log^2\lambda} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\varrho^3 R}\,\frac{\lambda^{2\varrho}-2\lambda^\varrho+1}{\log^2\lambda}$$

határértékekhez közelednek; ennélfogva $x^{-\varrho}\sum_{n\leqq x} f(n)$ minden sűrűsödési helye ezek közé esik. Ez igaz minden 1-nél nagyobb λ-ra; minthogy $\lambda\to 1$, azaz $\log\lambda = h\to 0$ esetén

$$\frac{\lambda^{2\varrho}-2\lambda^{\varrho}+1}{\log^2\lambda}=\frac{e^{2h\varrho}-2e^{h\varrho}+1}{h^2}\rightarrow\frac{d^2\,(e^{y\varrho})}{dy^2}\bigg|_{y=0}=\varrho^2,$$

s így egyúttal

$$\frac{\lambda^{2\varrho}-2\lambda^{\varrho}+1}{\lambda^{2\varrho}\log^2\lambda}\rightarrow\varrho^2,$$

ezért $x\rightarrow\infty$ esetén

$$x^{-\varrho}\sum_{n\leqq x}f(n)\rightarrow\frac{1}{\varrho^3R}\,\varrho^2=\frac{1}{\varrho R},$$

aminek a bevezetésben kimondott (2) aszimptotikus képlet evidens következménye.

Szeged, 1930. május 25.

Kalmár László.

UBER DAS PROBLEM DER «FACTORISATIO NUMERORUM».

In der vorliegenden Arbeit wird der asymptotische Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $f(n)$ untersucht, welche als die Anzahl der Darstellungen von n in der Form

$$n=n_1n_2\ldots n_k \tag{1}$$

definiert wird, wobei $k=0, 1, 2,\ldots$, ferner $n_1, n_2,\ldots, n_k$ beliebige ganze Zahlen >1 sind. Dabei bedeutet das Produkt (1) im Falle $k=0$ Eins; ferner sind zwei Darstellungen (1) auch dann als verschieden zu betrachten, wenn sie sich bloss in der Reihenfolge der Faktoren unterscheiden. Die zahlentheoretische Funktion $f(n)$ ist ein multiplikativ-zahlentheoretisches Analogon der Anzahl der unbeschränkten Partitionen von n.

Es wird für $f(n)$ die asymptotische Formel

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\sim\frac{n^{\varrho}}{-\varrho\zeta'(\varrho)}$$

hergeleitet, wobei ϱ durch $\varrho>1$, $\zeta(\varrho)=2$ definiert ist.

László Kalmár.

MATRIXOK KOMBINATORIUS TULAJDONSÁGAIRÓL.

Jelen dolgozat kiindulópontja a következő KÖNIG DÉNES-től származó tétel:

Ha egy matrix elemei részben zérusok, részben zérustól különböző számok vagy független változók, úgy azon vonalak[1] *minimális száma, melyek a matrix összes zérustól különböző elemeit tartalmazzák, egyenlő azon zérustól különböző elemek maximális számával, melyek közül nincs kettő egy vonalban.* KÖNIG ezen tételt graphelméleti úton bizonyította be és a tétel graphelméleti fogalmazása nála egyéb graphelméleti kérdésekkel is kapcsolatba jut.[2]

A tételnek egy speciális esete aequivalens FROBENIUS-nak a következő determinánstételével.[3] Ha egy n-ed rendű determináns elemei részben zérusok, részben független változók, úgy a determináns identikus[4] eltűnésének szükséges és elegendő feltétele, hogy legalább $n+1$ vonal közös elemei zérusok legyenek. A feltétel elegendő, mert teljesülése esetén az n-edrendű determinánsnak $2n$ vonala közül a többi $n-1$ vonal tartalmazza az összes el nem tűnő elemeket, tehát a fenti tétel szerint legfeljebb $n-1$ olyan el nem tűnő elem választható ki, melyek közül nincs kettő egy vonalban, azaz a determináns

---

[1] Vonalnak nevezem közös néven a matrix sorait és oszlopait.

[2] A nevezett tételt KÖNIG előadta a Társulat 1931 márciusi előadó ülésén és graphelméletről szóló könyvében meg fog jelenni.

[3] G. FROBENIUS: Über zerlegbare Determinanten, Sitzungsber. d. Berl. Ak. 1917, I. pp. 274—77.

[4] Egy determináns, melyben az összes zérustól különböző elemek független változók, akkor és csak akkor tűnik el identikusan, ha összes kifejtési tagjai eltűnnek.

minden kifejtési tagja eltűnik. Ha viszont a feltétel nem teljesül, azaz csupán n vagy kevesebb vonal közös elemei zérusok, úgy az el nem tűnő elemek nyilván nem foglalhatók n-nél kevesebb vonalba, tehát a fenti tétel szerint kiválasztható n olyan el nem tűnő elem, melyek közül nincs kettő egy vonalban, azaz a determináns nem tűnhetik el identikusan. FROBENIUS a tétel ezen speciális esetét algebrai úton bizonyította.

Az alábbiakban a tételnek egy új bizonyítását ismertetem (1. §) és általánosítom a tételt (2. §) a következő alakban:

I. *Ha az* $\| a_{ij} \|$ *n-edrendű matrix elemei adott nem negatív egész számok, úgy a*

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots n), \qquad (1)$$
$$(\lambda_i, \mu_j \text{ nem negatív egész számok})$$

feltételek mellett

$$\min. \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \max. (a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \dots + a_{n\nu_n}). \qquad (2)$$

hol $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ *az* $1, 2, \dots n$ *számok összes permutációit befutják.*

Abban a speciális esetben, midőn az adott a_{ij} elemek csupán 0 vagy 1 számértékkel bírnak, a tétel nyilván KÖNIG fentidézett tételébe megy át.

Továbbá egy, az előbbivel duális vonatkozásban álló tételt állapitok meg (3. §). Ha ugyanis $\| \delta_{ij}^{\varrho} \|$, $(\varrho = 1, 2, \dots n!)$ jelentik az összes különböző n-edrendű matrixokat, melyek az egységmatrixból a sorok (v. az oszlopok) egymásközti felcserélése által keletkeznek, úgy érvényes a következő tétel:

II. *Ha az* $\| a_{ij} \|$ *n-edrendű matrix elemei adott nem negatív egész számok, úgy a*

$$\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho \delta_{ij}^{\varrho} \geqq a_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots n), \quad \left(\begin{matrix}\nu_\varrho \text{ nem negatív} \\ \text{egész szám}\end{matrix}\right) \qquad (3)$$

feltételek mellett

$$\min. \sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho = \max. (a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj};\ a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}), \qquad (4)$$
$$(i, j = 1, 2, \dots n)$$

KÖNIG-nek egy, ugyancsak graphelméleti úton bizonyított tétele,[5] mely szerint, ha egy matrix összes elemei 0-sal vagy 1-gyel egyenlők, továbbá minden sor és minden oszlop ugyanannyi, pl. k számú 1-est tartalmaz, akkor a matrix k számú $\| \delta_{ij}^{\varrho} \|$ típusú matrix összege, nyilván a (II.) tétel speciális esete.

Végül az (1) és (3) feltételnek azt a részét, miszerint λ_i, μ_j, ν_ϱ egész számok, elejtve, közvetlenül adódik, hogy az (I.) és (II.) tételek kiterjeszthetők és érvényben maradnak tetszőleges valós elemekből álló matrixokra is.

1. §.

Legyen $\| a_{ij} \|$ egy adott n-edrendű matrix, melynek elemei egy T tulajdonság szempontjából két osztályba sorozhatók. Reprezentáljuk a matrix schémát egy n^2 négyzetből álló ráccsal, továbbá mindazon elemeket, melyek T tulajdonsággal bírnak, a megfelelő négyzetbe írt ponttal, végül azon négyzeteket, melyeknek megfelelő elemek nem bírnak T tulajdonsággal, üresen hagyjuk.

Nevezzük továbbá a vonalak (sorok és oszlopok) minden olyan rendszerét, mely az $\| a_{ij} \|$ matrixhoz fenti módon rendelt H ponthalmaz összes pontjait tartalmazza, fedővonalrendszernek. Végül a H ponthalmaz minden oly részhalmazát, mely nem tartalmaz két egy vonalba eső pontot, független pontrendszernek.

Ekkor König tétele nyilván a következőképpen fogalmazható. Bármely (négyzetes schémába írt) H ponthalmazra nézve a fedéshez szükséges vonalak m minimális száma egyenlő a H ponthalmazból kiválasztható független pontok M maximális számával.

A tételt teljes indukcióval bizonyítom. Miután a tétel helyessége 1 pontból álló halmazra evidens, tehát általánosan bizonyítva lesz, ha helyességét minden legfeljebb N pontból

---

[5] König D. Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és halmazok elméletére, Mat. és Term.-tud. Ért. 34. köt. (1916) pp. 104—119 és Math. Ann. 77. köt. (1916) pp. 453—65.

álló H_N halmazra feltételezve, minden $N+1$ pontból álló H_{N+1} halmazra kimutatom.

E végből egy N pontból álló H_N halmazt 1 pont adjungálásával kiegészítek egy $N+1$ pontból álló H_{N+1} halmazzá és kimutatom, hogy a fenti m és M karakterisztikus számok (melyek feltevés szerint a H_N halmazra egyenlők és egy $N+1$-ik pont adjungálásánál nyilván nem csökkenhetnek) az adjunkciónál vagy egyidejűleg változatlanok maradnak, vagy egyidejűleg 1-gyel növekszenek.

A négyzetes schéma összes üres négyzetei (melyekbe tehát egy $N+1$-ik pont írható) az eredeti H_N halmaz minimális fedővonalrendszerei segélyével két osztályba sorozhatók: 1. olyanok, melyek H_N legalább egy minimális fedővonalrendszere által fedve vannak, 2. olyanok, melyek H_N egy minimális fedővonalrendszere által sincsenek fedve.

Kimutatom először, hogy ha valamely 1. osztálybeli négyzetbe írom az $N+1$-ik pontot, a m és M karakterisztikus számok nem növekszenek, tehát nem változnak.

Egyrészt ugyanis, mivel az 1. osztálybeli négyzet a H_N halmaznak legalább egy m vonalból álló minimális fedővonalrendszere által fedve van, tehát ugyanezen m vonal által a H_{N+1} ponthalmaz is fedve lesz, azaz m az adjunkciónál nem növekszik.

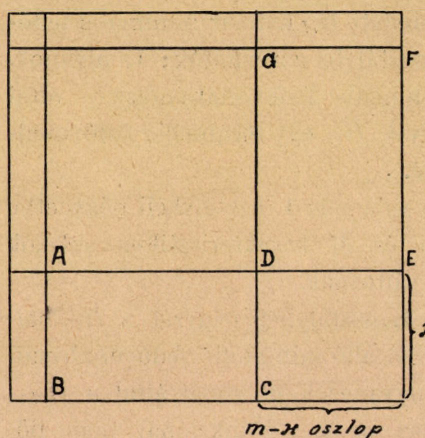
Másrészt, miután a H_{N+1} ponthalmaz m vonallal fedhető, tehát a pontok függetlenségének definíciójából következik (a skatulya-principium szerint), hogy belőle nem választható ki több, mint $m=M$ független pont. Az adjunkciónak ezen esetében tehát M sem növekszik.

Kimutatom továbbá, hogy ha valamely 2. osztálybeli négyzetbe írom a $N+1$-ik pontot, a m és M karakterisztikus számok mindegyike 1-gyel növekszik.

Egyrészt ugyanis H_{N+1} nyilván nem fedhető m vonallal, mert minden olyan m vonal, mely H_{N+1}-et fedi, a H_N halmaznak egy oly minimális fedővonalrendszere volna, mely az adjunkcióhoz kiválasztott négyzetet fedi, a négyzet tehát nem tartoznék a 2. osztályba. Viszont H_{N+1} nyilván fedhető $m+1$ vonallal, tehát az adjunkciónál m 1-gyel növekszik.

Másrészt kimutatom, hogy mindig van a H_N halmaznak egy olyan $m=M$ pontból álló független pontrendszere, mely a 2. osztálybeli négyzetbe írt $N+1$-ik ponttal együtt egy $M+1$ pontból álló független pontrendszert alkot, vagyis az adjunkciónál M szintén 1-gyel növekszik.

Válasszuk ki H_N egy tetszőleges minimális fedővonalrendszerét, mely tartalmaz $\varkappa$ sort és $m-\varkappa$ oszlopot és (könnyebb áttekintés kedvéért) rendezzük át a négyzetes schéma vonalait úgy, hogy az a 2. osztálybeli négyzet, melybe a $N+1$-ik pontot írjuk, az első sor és oszlopba, a kiválasztott minimális fedővonalrendszer $\varkappa$ sora és $m-\varkappa$ oszlopa az utolsó sorok és oszlopokba kerüljenek.



1. ábra.

Ekkor (1. ábra) a H_N-nek az $ABCD$ négyszögbe eső részhalmazához tartozó minimális fedővonalszám $\varkappa$. Ha ugyanis ezen részhalmaz fedhető $\varkappa-1$ vonallal, úgy ezen $\varkappa-1$ vonal $+$ első oszlop $+m-\varkappa$ utolsó oszlop H_N-nek egy olyan minimális fedővonalrendszere, mely az adjunkcióhoz kiválasztott négyzetet fedi, ez a négyzet tehát nem volna 2. osztálybeli, feltevéssel ellentétben. Tehát az $ABCD$ négyszögbe eső részhalmaz az indukciós feltevés értelmében tartalmaz $\varkappa$ független pontot.

Analóg módon következtethető, hogy H_N-nek a $DEFG$ négyszögbe eső részhalmaza tartalmaz $m-\varkappa$ független pontot. Ekkor azonban az előbbi $\varkappa$ pont, az utóbbi $m-\varkappa$ pont és az adjungált pont egy $m+1=M+1$ pontból álló független pontrendszert alkotnak, az adjunkciónak ezen esetében tehát M is 1-gyel növekszik.

Miután minden H_{N+1} egy H_N-ből 1 pont adjungálásával származtatható, a tétel általános érvényességét bebizonyítottuk.

Tekintettel a H_N halmaz pontjainak jelentésére, a nyert eredményt még a következő, ugyancsak KŐNIGtől származó fogalmazásban is kimondhatjuk:

Ha egy matrix elemei egy T tulajdonság szempontjából két osztályba sorozhatók, úgy azon vonalak minimális száma, melyek az összes T tulajdonságú elemeket tartalmazzák, egyenlő azon T tulajdonságú elemek maximális számával, melyek közül nincs kettő egy vonalban.

2. §.

Legyen $\| a_{ij} \|$ egy n-edrendű matrix, melynek elemei adott nem negatív egész számok. A vonalak egy olyan rendszerét, mely az i-ik sort λ_i, a j-ik oszlopot μ_j multiplicitással tartalmazza, fedővonalrendszernek nevezem, ha i, j minden értékére

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots n) \tag{1}$$

Egy olyan fedővonalrendszer, melynél a vonalak száma $\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k)$ minimum, minimális fedővonalrendszer. Diagonális összegeknek nevezem továbbá a következő összegeket:

$$a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \dots + a_{n\nu_n} \tag{5}$$

hol $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ az $1, 2, \dots n$ számok összes permutációit befutják. Az így definiált fogalmakra érvényes az

I. Tétel. *Ha az $\| a_{ij} \|$ n-edrendű matrix elemei nem negatív egész számok, úgy a fedéshez szükséges vonalak minimális száma egyenlő a diagonális összegek maximumával, azaz*

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \dots n) \tag{1}$$

feltételek mellett

$$\min. \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \max. (a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \dots + a_{n\nu_n}). \tag{2}$$

Legyen (λ_k^*, μ^* ; $k = 1, 2, \ldots n$) egy minimális fedővonalrendszer. Akkor (1) szerint:

$$\min. \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^* + \mu^*) \geqq a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \cdots + a_{n\nu_n} \qquad (6)$$

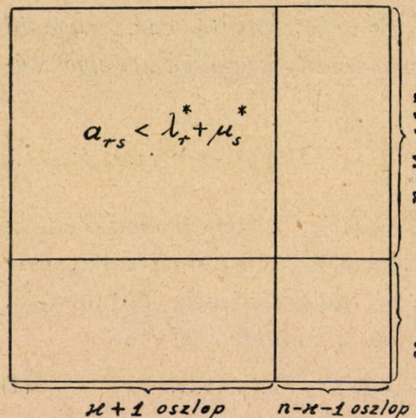
az összes diagonális összegekre.

A kiválasztott λ_k^*, μ_k^* minimális fedővonalrendszer alapján az $\| a_{ij} \|$ matrix elemei két osztályba sorozhatók: 1. az a_{pq}^* lényeges elemekre, melyekre nézve

$$\lambda_p^* + \mu_q^* = a_{pq}^*. \qquad (7)$$

2. az a_{rs} lényegtelen elemekre, melyekre nézve

$$\lambda_r^* + \mu_s^* > a_{rs} \qquad (7')$$



2. ábra.

Kimutatom, hogy azon vonalak minimális száma, melyek az összes a_{pq}^* lényeges elemeket tartalmazzák, n-nel egyenlő. Tegyük fel ugyanis, ezzel ellentétben, hogy $n-1$ vonal tartalmazza az összes a_{pq}^* lényeges elemeket és (könnyebb áttekinthetőség kedvéért) számozzuk át a vonalakat úgy, hogy a lényeges elemeket tartalmazó $\varkappa$ sor és $n-\varkappa-1$ oszlop az utolsók legyenek. Ekkor az első $n-\varkappa$ sor és első $\varkappa+1$ oszlop közös elemei mind lényegtelen elemek, azaz

$$\lambda_r^* + \mu_s^* > a_{rs}$$

tehát $\qquad \begin{pmatrix} r=1, 2, \ldots n-\varkappa \\ s=1, 2, \ldots \varkappa+1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_r^* + \mu_s^* \geqq 1$$

s így szükségképpen [7] a

[7] Ha ugyanis egyik egyenlőtlenségsorozat sem áll fenn, úgy van legalább egy r és egy s, melyekre $\lambda_r^* = 0$ és $\mu_s^* = 0$, azaz $\lambda_r^* + \mu_s^* = 0$, (7')-tel ellentétben.

$$\lambda_1^* \geqq 1,\ \lambda_2^* \geqq 1, \dots \lambda_{n-\varkappa}^* \geqq 1 \tag{8}$$

illetőleg

$$\mu_1^* \geqq 1,\ \mu_2^* \geqq 1, \dots \mu_{\varkappa+1}^* \geqq 1 \tag{8'}$$

egyenlőtlenségsorozatoknak legalább egyike fennáll.

Ha pl. a (8) egyenlőtlenségek állnak fenn, úgy a $(\lambda_k^{**}, \mu_k^{**})$

$$\begin{aligned} \lambda_r^{**} &= \lambda_r^* - 1, && (r=1, 2, \dots n-\varkappa) \\ \lambda_p^{**} &= \lambda_p^*, && (p=n-\varkappa+1, \dots n) \\ \mu_s^{**} &= \mu_s^*, && (s=1, 2, \dots \varkappa+1) \\ \mu_q^{**} &= \mu_q^*+1, && (q=\varkappa+2, \varkappa+3, \dots n) \end{aligned}$$

vonalrendszer nyilván fedővonalrendszer és

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{**} + \mu_k^{**}) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^* + \mu_k^*) - 1,$$

tehát a λ_k^*, μ_k^* vonalrendszer nem lehet minimális.

Ezzel ki van mutatva, hogy azon vonalak minimális száma, melyek az összes a_{pq}^* lényeges elemeket tartalmazzák, n-nel egyenlő. Ekkor azonban az 1. §-ban bizonyitott tétel szerint kiválasztható n olyan $a_{1q_1}^*, a_{2q_2}^*, \dots a_{nq_n}^*$ lényeges elem, melyek között nincs kettő egy vonalban. Az ezekkel alkotott diagonális összeg, a (7) relációk figyelembevételével:

$$a_{1q_1}^* + a_{2q_2}^* + \dots + a_{nq_n}^* = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^* + \mu_{q_k}^*) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^* + \mu_k^*). \tag{9}$$

Végül (6) és (9) alapján

$$\min. \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \max. (a_{1\nu_1} + a_{1\nu_2} + \dots + a_{n\nu_n}) \quad \text{q. e. d.} \tag{2}$$

Ha az $\| a_{ij} \|$ matrix elemei nem negatív racionális számok és az a_{ij} elemek közös nevezőre hozott alakja $\frac{a_{ij}}{A}$, hol a_{ij} nem negatív egész szám, úgy az I. tételnek az $\| a_{ij} \|$ matrixra való alkalmazásából következik,

$$\min. \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{A} + \frac{\mu_k}{A} \right) = \max. \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k\nu_k}}{A} = \max. \sum_{k=1}^{n} a_{k\nu_k}.$$

Tehát ha a (1) relációkban λ_k-t és μ_k-t (melyek egészszámú elemek esetén egész számokat, a vonalak multiplicitását jelentették), mint a fedővonalak súlyát értelmezzük, úgy az (2) reláció által kifejezett tétel változatlanul érvényes racionális és — mint egyszerű folytonossági meggondolásból adódik — tetszőleges valós, nem negatív elemekből álló matrixokra is.

3. §.

A II. tétel tárgyalásánál a következő elnevezéseket használom. Azt az $n!$ számú különböző n-edrendű $\|\delta^{\varrho}_{ij}\|$, $(\varrho=1, 2,\ldots n!)$ matrixot, melyek az egységmatrixból a sorok (v. oszlopok) egymásközti felcserélésével keletkeznek, diagonálvonalnak nevezem (ellentétben a «parallel» vonallal, mely közös néven a sorokat és oszlopokat jelenti). A diagonálvonalaknak egy rendszerét, mely a $\|\delta^{\varrho}_{ij}\|$ diagonálvonalat ν_ϱ multiplicitással tartalmazza, fedődiagonálvonalrendszernek nevezem, ha i, j minden értékére

$$\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho \delta^{\varrho}_{ij} \geqq a_{ij}, \qquad (i, j=1, 2,\ldots n) \tag{3}$$

Egy olyan fedődiagonálvonalrendszer, melyben a diagonálvonalak száma: $\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho$ minimum, minimális fedődiagonál vonalrendszer. Parallelösszegeknek nevezem (ellentétben a fenti diagonális összegekkel) az

$$\left.\begin{aligned} &a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}, \quad (i=1, 2,\ldots n)\\ \text{és}\quad &a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}, \quad (j=1, 2,\ldots n)\end{aligned}\right. \tag{10}$$

összegeket. Az így definiált fogalmakra érvényes a

II. Tétel. *Ha az $\|a_{ij}\|$ n-edrendű matrix elemei adott nem negatív egész számok, úgy a fedéshez szükséges diagonálvonalak minimális száma egyenlő a parallelösszegek maximumával, azaz*

$$\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho \delta^{\varrho}_{ij} \geqq a_{ij}, \quad (i, j=1, 2,\ldots n) \quad \left(\nu_\varrho \ \begin{matrix}\text{nem negatív}\\ \text{egész}\end{matrix}\right) \tag{3}$$

feltételek mellett

$$\min. \sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho = \max_{(i, j=1, 2,\ldots n)}. (a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in},\ a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}). \tag{4}$$

Egy olyan $\| a_{ij}^{\star} \|$ matrixra, melyben minden parallelösszeg 1 (azaz melyben minden sor és oszlop egy 1-est tartalmaz), a tétel evidens. Ha tehát — a tétel érvényességét minden olyan matrixra, melyben valamennyi parallelösszeg $M-1$, feltételezvén — bebizonyítom, hogy minden olyan matrixra, melyben valamennyi parallelösszeg M, érvényes, úgy a tétel általánosan bizonyitva lesz.

E végből először kimutatom, hogy azon (parallel) vonalak minimális száma, melyek az $\| a_{ij}^{\star} \|$ matrix összes zérustól különböző elemeit tartalmazzák, n-el egyenlő. Az $\| a_{ij}^{\star} \|$ matrix elemeinek összege ugyanis $n.M$, másrészt minden (parallel) vonalban az elemek összege M, következésképpen n-nél kevesebb parallelvonal nem tartalmazhatja az összes el nem tűnő elemeket. Ekkor azonban az 1. §-ban bizonyitott tétel szerint kiválasztható n olyan zérustól különböző $a_{1\nu_1}^{\star}, a_{2\nu_2}^{\star}, \ldots a_{n\nu_n}^{\star}$ elem, melyek közül nincs kettő egy (parallel) vonalban. Ha tehát $\| \delta_{ij}^{\varrho\star} \|$ az a diagonálvonal, melyben

$$\delta_{ij}^{\varrho\star} = \begin{cases} 1, \text{ ha } j = \nu_i \\ 0, \text{ ha } j \neq \nu_i \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n) \qquad (12)$$

úgy $\| a_{ij}^{\star} - \delta_{ij}^{\varrho\star} \|$ egy nem negativ egész elemekből álló matrix, melyben minden parallelösszeg $M-1$, mely tehát feltevés szerint $M-1$ diagonálvonallal fedhető. Következésképpen az $\| a_{ij}^{\star} \|$ matrix fedhető az előbbi $M-1$ diagonálvonal $+$ a $\| \delta_{ij}^{\varrho\star} \|$ diagonálvonal, azaz összesen M számú diagonálvonallal, a *fortiori* fedve van tehát ezek által az eredeti ($\| a_{ij}^{\star} \|$ által majorizált) $\| a_{ij} \|$ matrix.

Minthogy pedig M jelenti a parallelösszegek maximumát az $\| a_{ij} \|$ matrixban, tehát $\| a_{ij} \|$ nyilván nem fedhető M-nél kevesebb diagonálvonallal, mert ellenkező esetben egy diagonálvonalnak egy parallelvonalból egynél több elemet kellene tartalmaznia, azaz

$$\min. \sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_{\varrho} = M = \max. \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}, \ \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \right) \quad \text{q. e. d.} \qquad (4)$$

A tétel bizonyitásánál egy KÖNIG-től származó gondolatmenetet[8] használok fel, mely szerint elegendő a tételt olyan matrixra bizonyitani, melyben az összes parallelösszegek egyenlők. Meghatározható ugyanis minden $\| a_{ij} \|$ matrixhoz egy olyan $\| a^{*}_{ij} \|$ «majoráns» matrix, melyre nézve

$$a^{*}_{ij} \geqq a_{ij}, \qquad (i, j=1, 2, \dots n) \tag{11}$$

és

$$\begin{gathered} a^{*}_{p1} + a^{*}_{p2} + \cdots + a^{*}_{pn} = a^{*}_{1q} + a^{*}_{2q} + \cdots + a_{nq} = M = \\ = \max. (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in},\ a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}), \ {\scriptstyle (i, j=1, 2, \dots n) \atop (p, q=1, 2, \dots n)} \end{gathered} \tag{11'}$$

melynek tehát bármely eleme nem kisebb, mint az eredeti matrix megfelelő eleme és melyben az összes parallelösszegek egyenlők az eredeti $\| a_{ij} \|$ matrix parallelösszegeinek M maximumával.

Ha ugyanis egy $\| a_{ij} \|$ matrixban nem minden parallelösszeg egyenlő, úgy az mindig tartalmaz egy p-ik sort és egy q-ik oszlopot,[9] melyekhez tartozó parallelösszegek kisebbek, mint a parallelösszegek M maximuma:

$$a_{p1} + a_{p2} + \cdots + a_{pn} < M \quad \text{és} \quad a_{1q} + a_{2q} + \cdots + a_{nq} < M.$$

Ekkor a p-ik sor és q-ik oszlop közös a_{pq} elemét

$$a_{pq} + M - \max. (a_{p1} + \cdots + a_{pn},\ a_{1q} + \cdots + a_{nq})\text{-}$$

val helyettesítve, nyilván egy olyan matrixot nyerünk, mely az eredetinek majoránsa és amelyben a M-el egyenlő parallelösszegek száma (legalább) eggyel több, mint az eredeti matrixban. Ezen eljárásnak tehát legfeljebb $2n-1$-szeri ismétlésével az eredeti $\| a_{ij} \|$ matrixnak egy olyan $\| a^{*}_{ij} \|$ majoráns matrixához jutunk, melyben valamennyi parallelösszeg egyenlő M-el.

Minthogy pedig az $\| a^{*}_{ij} \|$ majoráns matrix minden fedővonalrendszere az eredeti $\| a_{ij} \|$ matrixnak a fortiori fedővonalrendszere, tehát a tételt elegendő az $\| a^{*}_{ij} \|$ majoránsmatrixra bizonyitani.

[8] l. c. [5]), III. §.

[9] Ha ugyanis minden sorhoz tartozó parallelösszeg M, úgy szükségképpen minden oszlophoz tartozó szintén M és vice versa.

A II. tétel ugyanúgy, mint az I. tétel, az ott alkalmazott meggondolással, kiterjeszthető nem negatív racionális, ill. tetszőleges valós elemekből álló matrixokra.

Egerváry Jenő.

ÜBER KOMBINATORISCHE EIGENSCHAFTEN VON MATRIZEN.

Der Ausgangspunkt der Arbeit ist der folgende, von D. König herrührende Satz:

Wenn die Elemente einer Matrix teils von Null verschiedene Zahlen (oder unabhängige Variabeln), teils gleich 0 sind, so ist die Minimalzahl derjenigen Reihen (Zeilen und Kolonnen), welche in ihrer Gesamtheit alle von 0 verschiedene Elemente der Matrix enthalten, gleich der Maximalzahl reihenfremder, nichtverschwindender Elemente.

Im § 1 wird für diesen von D. König auf graphentheoretischem Wege bewiesenen Satz ein neuer Beweis gegeben.

Im § 2 wird der Satz folgenderweise verallgemeinert. Ist eine Matrix n-ten Grades $\| a_{ij} \|$ mit nichtnegativen, ganzen Elementen gegeben und nennt man ein System von Reihen, welches die i-te Zeile, bzw. die j-te Kolonne mit der Multiplizität λ_i, bzw. μ_j enthält, ein bedeckendes Reihensystem, wenn

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij}, \qquad (i, j=1, 2, \ldots n)$$

ist, so ist das Maximum der «Diagonalsummen»

$$a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \cdots + a_{n\nu_n}$$

(wo $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ sämtliche Permutationen von $1, 2, \ldots n$ durchlaufen) gleich der Minimalzahl der bedeckenden Reihen, d. h. unter den Bedingungen

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij}, \qquad (i, j=1, 2, \ldots n)$$

ist

$$\text{Min.} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \text{Max.} \sum_{i=1}^{n} (a_{i\nu_i}).$$

Im § 3 wird der folgende duale Satz aufgestellt und bewiesen. Diejenigen $n!$ verschiedenen Matrizen n-ten Grades $\| \delta_{ij}^{\rho} \|$ $(\rho=1, 2, \ldots n!)$ die aus der Einheitsmatrix durch Permutation der Zeilen hervorgehen, sollen (im Gegensatz zu den Parallelreihen) «Diagonalreihen» genannt werden. Ein System von Diagonalreihen, welches die Diagonalreihe $\| \delta_{ij}^{\varrho} \|$ mit der Multiplizität ν_ϱ enthält, sei bedeckendes Diagonalreihensystem genannt, wenn

$$\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho \delta_{ij}^{\varrho} \geqq a_{ij}, \qquad (i, j=1, 2, \ldots n)$$

ist. Dann ist das Maximum der «Parallelsummen»

$$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}, \quad a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}, \qquad (i, j=1, 2, \ldots n)$$

gleich der Minimalzahl der bedeckenden Diagonalreihen, d. h. unter den Bedingungen

$$\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho \delta_{i}^{\varrho} \geqq a_{ij}, \qquad (i, j=1, 2, \ldots n)$$

ist

$$\text{Min.} \sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho = \text{Max.} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu j} \right).$$

Die genannten Sätze lassen sich, bei Einführung der Gewichte an Stelle der Multiplizität der Reihen, auf Matrizen mit beliebigen reellen Elementen ausdehnen.

E. Egerváry.

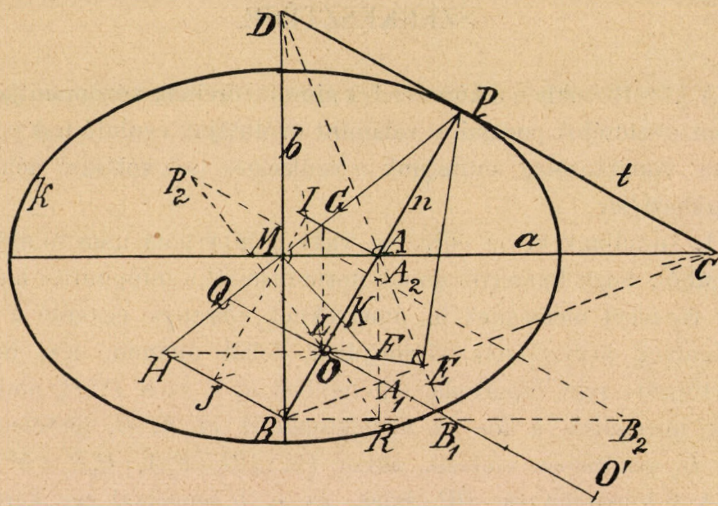
KÚPSZELETEK ÉS EVOLUTÁIK SIMULÓKÖREINEK SZERKESZTÉSE.

A következőkben a kúpszeletek simulóköreinek középpontjaira, tehát evolutájuk pontjaira, valamint evolutájuk evolutáinak pontjaira vonatkozólag mutatunk a szükséges indokolással néhány szerkesztést.

1. Induljunk ki az ellipszis, vagy a hiperbola ama tulajdonságából, hogy tengelyei annak normálisairól a talpponttól mérve oly részeket metszenek le, amelyeknek viszonya egyenlő a féltengelyek négyzetének viszonyával, tehát állandó. Így, ha a k ellipszis vagy hiperbola féltengelyei a, b és a P, P_1 pontjának normálisai a fő- és melléktengelyt az A, B, illetőleg az A_1, B_1 pontokban metszik, akkor $PA : PB = P_1A_1 : P_1B_1 = b^2 : a^2$. A k kúpszeletnek PP_1 húrja és a, b tengelyei egy háromszögnek oldalai, amelyek a PAB, $P_1A_1B_1$ normálisokat állandó viszony szerint osztják. Ebből látható, hogy a k kúpszelet tengelyei, PP_1 húrja és P, P_1 pontjainak normálisai egy parabolának érintői, mert a parabola bármely három érintője annak összes érintőit állandó viszony szerint osztja.

Ha a P_1 pont a P-vel egyesül, akkor a PP_1 húr a P pont érintőjébe megy át és a P, P_1 szomszéd pontok normálisainak metszőpontja O, a P ponthoz tartozó simulókörnek középpontja lesz. Ez az O pont tehát érintőpontja annak a p parabolának a P pont n normálisával, amely a k kúpszeletnek e normálisát, az a, b tengelyeit és a P ponthoz tartozó t érintőjét érinti. Ha e t érintőnek metszőpontja az a és b tengellyel C és D (1. ábra) és a k kúpszelet középpontja M, akkor PM egyenes a *p* parabola vezérvonala és az *AD*, *BC* egyenesek *E* metszőpontja annak gyujtópontja, és igy az *E* pontban a *PE* egyenesre merőlegesen álló egyenes a *PAB* parabolaérintőt az *O* érintőpontban, tehát a *k* kúpszelet *P* pontjához tartozó simulókör középpontjában metszi. Összefoglalva:

«Ha a *k* kúpszelet *P* pontjának *n* normálisa és *t* érintője a fő- és melléktengelyt az *A*, *B*, illetőleg a *C*, *D* pontban metszi,



1. ábra.

akkor a *BC*, *AD* egyenesek *E* metszőpontjában a *PE* egyenesre emelt merőleges a *P* pont simulókörének az *n* normálisán levő *O* pontján megy át.»

E szerkesztést arra alapítottuk, hogy a *p* parabola vezérvonala *P* pontjának polárisa merőleges az *E* gyujtópontban a *PE* fokálissugárra; de lehet a parabolaérintő érintőpontját különböző Brianchonhatoldal segélyével is meghatározni.

Így: ha sik végtelentávol fekvő egyenesét *v*-vel, a *t*, *n*, *a*, *b* egyenesek végtelentávol fekvő pontjait T_v, N_v, A_v, B_v-vel jelöljük, akkor a *p* parabola *nnvtba* érintői egy Brianchonhatoldalt alkotnak, amelynek $(nv)(ba) = N_vM$, $(vt)(an) = T_vA$ főátlói egymást egy *I* Brianchonpontban metszik; e pontnak összekötőegyenese a $(tb) = D$ ponttal, mint harmadik főátló az n parabolaérintő O érintőpontján, tehát a keresett simulókör középpontján megy át. Ezért:

«Ha a k kúpszelet P pontja normálisának az a (vagy a b) tengelyen levő A (B) pontjából a normálissal parallel átmérőre merőlegest bocsátunk, amelynek talppontja az I (J), akkor e pontnak összekötőegyenese a P pont érintőjének és a b (a) tengelynek metszőpontjával D-vel (C-vel), a P pont simulókörének O középpontján megy át.»

Ha a p parabola $nntvba$ érintőit tekintjük egy Brianchonhatoldal egymásra következő oldalainak, akkor az $(nt)(ba) = PM$, $(tv)(an) = T_vA$ főátlók egymást a $(PM, T_vA) = G$ Brianchonpontban metszik, amely pontot a $(bv) = B_v$ ponttal összekötő, tehát az a tengelyre merőleges egyenes, mint harmadik főátló, az n parabolaérintő O érintőpontján megy át. Ezért:

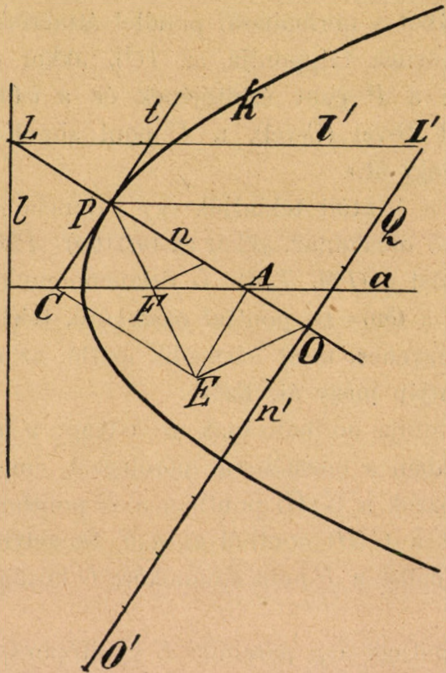
«Ha a k kúpszelet P pontja normálisának az a (vagy a b) tengelyen levő A (B) pontjában a normálisra merőlegest emelünk és ezt metszéshez hozzuk a G (H) pontban a P ponthoz tartozó átmérőjével, akkor a G (H) pontból az a (b) tengelyre bocsátott merőleges a normálist a P pont simulóköre O középpontjában metszi.»

Térjünk vissza az O pontnak a p parabola E gyujtópontja segélyével történt szerkesztéséhez és vegyük figyelembe a BCD háromszöget, amelynek az A a magasságpontja, EMP pedig talpponti háromszöge. Ennek az EP, MP oldalaira az E és M pontban emelt merőlegesek a BAP magasságot oly O, illetőleg K pontban metszik, amelyek az AB magasságrész L felezőpontja irányában szimmetrikusak.

Ugyanis az OE, KM egyenesek a BCD háromszög kilencpontos-körének PME-nek egy F pontjában találkoznak és OFK egyenszárú háromszög FL magassága az L talppontban felezi az OK alapot és az AB magasságrészt. Ebből folyólag az alábbi tétel alapján a simulókör O középpontját szintén megszerkeszthetjük. A tétel, amelyre a szerkesztést alapítjuk így szól:

«Ha a k kúpszelet P pontjához tartozó MP átmérőre az M

középpontban emelt merőleges a P pont normálisát egy K pontban metszi, akkor a P pont simulókörének O középpontja szimmetrikus a K-hoz arra az L pontra nézve, amely felezi a P normálisának a kúpszelet tengelyei között levő részét AB-t.»



2. ábra.

A k kúpszelet simulókörének első bemutatott szerkesztése átvihető a parabolára is.

Messe tehát a k parabola P (2. ábra) pontjának t érintője és n normálisa a parabola a tengelyét a C és A pontban, a végtelenben levő b_v tengelyét a D_v és B_v pontban. A t, n, a és b_v egyeneseket érintő p parabolának vezérvonala, ekkor a P ponton átmenő és az a-val parallel egyenes és gyujtópontja E, a negyedik csúcsa az $APCE$ derékszögű négyszögnek, amelynek átlói egymást a k parabola F gyujtópontjában metszik.

A k parabola P pontjához tartozó simulókör O középpontja ott van, ahol a PE egyenesre az E pontban merőlegesen álló egyenes a PA normálist metszi. Ha a P pont normálisának és a k parabola vezérvonalának a közös pontja L, akkor $PO=2LP$; szóval kifejezve:

«A k parabola P pontjához tartozó simulókörének sugara kétakkora, mint a P pont normálisának a parabola és vezérvonala között levő része.»

E tétel a k parabola csúcspontjához tartozó simulókör középpontjának meghatározására is alkalmas, míg az ellipszis és a hiperbola tengelyein levő pontjainak (csúcsoknak) simulókörét a p parabola segélyével nem határozhatjuk meg, mert e parabola ezekben az esetekben elkorcsosul.

De ha tekintetbe vesszük azt, hogyha S az ellipszis vagy hiperbola főtengelyén levő csúcs, U pedig az ellipszis melléktengelyének csúcsa, akkor mint minden P pontra nézve: $SA:SB=UA:UB=b^2:a^2$ viszonylatokból következik, hogy $SA=b^2:a$, $UB=a^2:b$. Ezért:

«Ha a hiperbola csúcsérintőinek és egy aszimptotájának metszőpontjaiban az aszimptotára merőlegeseket állitunk, akkor e merőlegesek átmennek a csúcsok simulóköreinek középpontjain. Ha pedig az ellipszis köré írt és tengelyeivel parallel oldalú négyszög egy szembenfekvő csúcspárjából a másik szembenfekvő csúcspárját összekötő egyenesre merőlegeseket bocsátunk, akkor ezek az ellipszistengelyeit csúcsai simulóköreinek középpontjaiban metszik.»

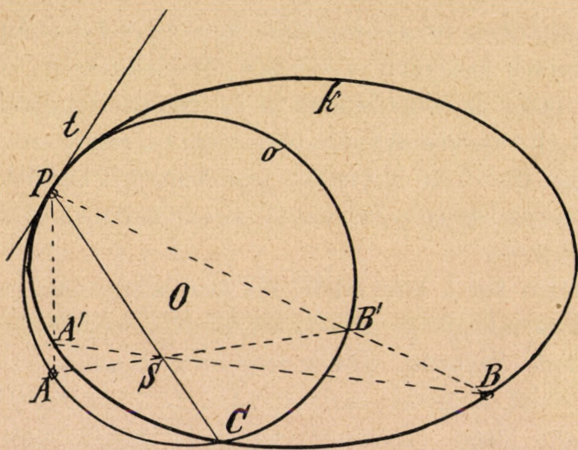
2. Minden kör a kúpszeletet oly négyszög csúcsaiban metszi, amelynek szembenfekvő oldalai a kúpszelet tengelyeihez egyenlő szögek alatt hajlanak. Ebből folyólag a k kúpszelet P pontja simulókörének negyedik metszőpontja, C, a kúpszelettel azon a P-n átmenő húron van, amely ugyanoly szögek alatt hajlik a tengelyekhez, mint a P pont érintője. Erre állapitva, ha a kúpszelet tengelyei vagy csak tengelyeinek irányai ismeretesek, a simulókör megszerkeszthető.

De fordítva is, ha egy k kúpszelet P pontjának o simulóköre O középponttal és még két pontja A és B ismeretes, a kúpszelet éppúgy szerkeszthető, mintha öt diszkrét pontja volna adva (3. ábra). E szerkesztésnél tekintetbe kell vennünk, hogy a k és o centrikusan kollinear egymással a P kollineacióközéppontra és arra a PC kollineaciótengelyre, amely a P pontot a negyedik metszőponttal (C-vel) összeköti.

Ezért ha a PA, PB egyenesek az o kört az A', B' pontokban metszik, és az AB, $A'B'$ egyenesek metszése az S pont, úgy a keresett kúpszelet k azon a C ponton megy át, amelyben a PS egyenes az o kört metszi, és tengelyei a PQ húrhoz és az o kör P pontjának érintőjéhez egyenlő szögek alatt hajlanak.

A k kúpszelet P pontjának simulóköre o és egyik tengelye f is meghatározza a kúpszeletet, mert a tengely két egyszerű adatnak tekinthető, minthogy pólusa ismeretes.

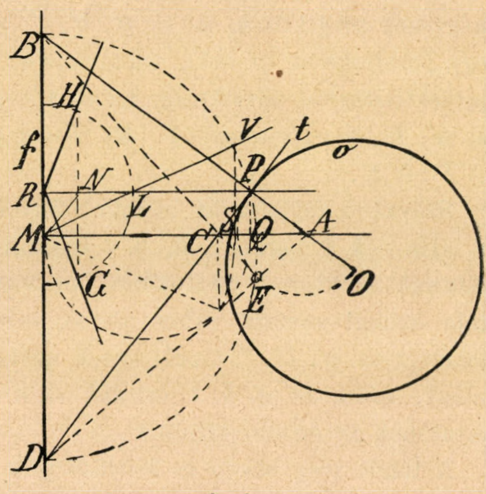
E feladatot megoldjuk és felhasználjuk arra, hogy egy t o r u s (gyűrűfelület) érintősíkja metszővonalához a kettőspontban az érintőket megszerkesszük (4. ábra).



3. ábra.

Ha az o kör PO sugara és a P pont érintője, az f tengelyt a B és D pontban metszi, és ha a BD és PO vonaldarabok, mint átmérők fölé írt körök közös pontjai P, E, végre ha a $PBDE$ négyszög PB, DE; PD, BE szembenfekvő oldalai az A és C pontban találkoznak, akkor a BD-re merőleges AC egyenes a k kúpszelet második tengelye és $M=(AC, BD)$ a középpontja, amelyből már az könnyen szerkeszthető, mert ha P pontból az f és a másik tengelyre bocsátott merőlegesnek talppontja R és Q, akkor $MR.MD$ és $MQ.MC$ a féltengelyek négyzete, $MA.MC=MB.MD$ pedig a félexentricitás négyzete.

Ha a talált k kúpszelet hiperbola és f annak melléktengelye, mint a 4. ábrában, akkor azt és P pontjának simulókörét, o-t, egy egyágú hiperboloid és egy torus meridiánjának tekinthetjük, amelyeknek közös forgástengelyük az f és amelyek egymást a P ponton átmenő p parallelkör mentén háromszorosan érintik. A PO egyenesre a P pontban merőlegesen álló ε sík a hiperboloidot és a torust érinti, és az előbbit két egyenesben, g és h-ban, az utóbbit egy c_4 negyedrendű görbében metszi, amely a P kettőspontjában a g, h egyeneseket érinti. Ezeknek az érintőknek akarjuk a derékszögű képét valamely síkon, például a p parallelkör π síkján meghatározni és e síkot a PR egyenes körül a rajzlapra leborítani.



4. ábra.

Ha az S pont a k hiperbolának MCA főtengelyén levő csúcsa, akkor e pontban a főtengelyre merőleges egyenes a BPD kört a két aszimptota egy-egy pontjában V és V'-ben, a π sík pedig az MV aszimptótát egy L pontban, a hiperboloid aszimptótikus kúpját pedig egy körben metszi, amelynek középpontja az R pont és sugara a RL vonaldarab; végre az M középponton átmenő és az ε érintősíkkal parallel sík az aszimptótikus kúpot a g, h hiperboloidalkotókkal parallel kúpalkotókban metszi.

Ha az M ponton átmenő és a PCD-vel parallel egyenes a PR egyenest az N pontban metszi és e pontban az RP egyenesre merőlegesnek metszőpontjai az R középpontból RL sugárral leírt körrel G, H, akkor az RG, RH egyenesek parallel a c_4 negyedrendű görbe g, h érintőinek a π síkon levő derékszögű képével a PR tengely körül történt leforgatás után a rajzlapba.

4. Határozzuk meg a k kúpszelet P pontja simulókörének

O középpontját kinematikai alapon! Legyen e végből a, b, t, n egy tetszésszerinti négyoldalnak négy oldala. Ezek és a végtelen távol fekvő v egyenes egy p parabolát érintenek, és mi az n érintőnek O érintőpontját akarjuk meghatározni későbbi célunknak megfelelő úton.

Ha az n érintő az a, b, t érintőket az A, B, P pontokban metszi és e pontokban az a, b, t érintőkre és az O pontban az n érintőre merőlegesen álló egyenes a', b', t', n', akkor, mert az $n(abtn')$, $v(abtn)$, $v(a'b't'n')$ egymásra következő pontnégyesek projektívek, az n, a', b', t', n', v egyenesek is érintői egy parabolának (p'-nek), tehát $n(a'b't'v)\barwedge n'(a'b't'v)$. Ez utóbbi projektivitásból következik, ha az n' egyenesnek metszőpontját az a', b', t' egyenessel A', B', T'-vel jelöljük, hogy $AP:BP= A'T':B'T'$.

Szavakba foglalva az utóbbi aránylat így hangzik:

«Ha egy p parabola a, b, t érintőire a', b', t' merőlegeseket állitunk azokban a pontokban, amelyekben a parabola n érintője azokat metszi, akkor az n-re merőleges n' egyenes, amelyet az a', b', t' merőlegesek ugyanoly viszony szerint osztanak, mint az a, b, t érintők az n érintőt, — átmegy az n érintőnek O érintőpontján.»

A tételt még ekkép is kifejezhetjük:

«Ha a parabola valamely pontjának érintője és normálisa n és n' és a parabola a, b, c,... érintőire állított merőlegesek az n érintővel való metszőpontjaiban a', b', c',..., akkor az a két pontsor, amelyben n az a, b, c,... érintőket, az n' pedig az azokra merőleges a', b', c',... egyeneseket metszi egymással projektív, azaz: $n(abc\ldots)\barwedge n'(a'b'c'\ldots)$.»

E tételt alkalmazva szerkesszük meg a k ellipszis vagy hiperbola a, b tengelyeit és P pontja t érintőjét és n normálisát érintő p parabolának az n normálissal való érintőpontját, O-t, tehát a k kúpszelet P pontjához tartozó simulókör középpontját.

Ha (1. ábra) az n normális az a és b tengelyt az A és B pontban és az n-re állított tetszésszerinti merőleges az A és B

pontban az a és b tengelyre állított AR és BR merőlegest az A_2 és B_2 pontban metszi, és az A_2B_2 egyenesen a P_2 pont akkép van meghatározva, hogy $P_2A_2 : P_2B_2 = PA : PB = \lambda$, akkor a P_2R egyenes az n-nek a keresett O pontján megy át, mert ha ebben az O pontban az n-re merőlegesen álló egyenesnek metszőpontja az AR és BR egyenessel A_1 és B_1, akkor $OA_1 : OB_1 = \lambda$. Különben is a BCD háromszög hasonló a B_1AB-vel, és annak az A, ennek pedig az A_1 a magasságpontja, tehát $PA : PB = OA_1 : OB_1$.

Az előbbi tételből következik:

«Ha az n egyenes akkép mozog, hogy három adott görbe α, β, τ azt adott λ viszony szerint osztja, és a mozgó n egyenesnek az α, β, τ görbékkel való metszőpontja egy pillanatban A, B, P és azoknak normálisai e pontokban a', b', t', akkor a mozgó n egyenestől beburkolt π görbének normálisa az n egyenessel való érintőpontjában, O-ban, az a', b', t' normálisoktól szintén λ viszony szerint lesz osztva.»

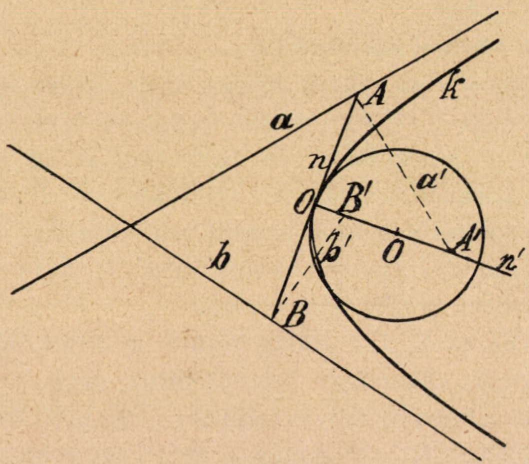
Ugyanis, ha az α, β, τ görbék érintői az n-nel való metszőpontjukban egy pillanatnyi helyzetükben: a, b, t, akkor az a, b, t és n egyenesek egy p parabola érintőinek tekinthetők, amely parabolának O érintőpontja az n-nel, egyszersmind érintőpontja az n által beburkolt π görbével. És mert a p parabolának az n egyenessel való érintőpontja talppontja a reá merőleges n' egyenesnek, amely az a', b', t' egyenesektől λ viszony szerint lesz osztva, azért a tétel állítása helyes.

E tétel alapján a mozgó n egyenes bármely C pontjától leirt γ görbének érintőjét megszerkeszthetjük e C pontban.

Ugyanis, ha az α, β, γ görbék normálisai az A, B, C pontokban a', b', c', és ezek az n-től beburkolt π görbe O érintőpontjához tartozó n' normálisát az A', B', C' pontokban metszik, akkor $A'C' : B'C' = AC : BC$, amely aránylatból a C pont n' normálisának egy pontja C' és így maga a c' normális és a c érintő szerkeszthető.

Ha a γ görbe egybeesik a mozgó n egyenestől beburkolt π görbével, akkor a γ görbe C pontja normálisának C' metszőpontja a π görbe n' normálisával, ez utóbbi görbe simulókörének középpontja lesz.

E szerint: «Ha egy π görbe n érintőit két görbe α, β akképp metszi, hogy az egyes érintők O érintőpontjától és az α, β görbékkel való A, B metszőpontjától határolt AO, BO vonaldarabok λ viszonya állandó, akkor az α, β görbék A, B pontjainak normálisai a π görbe O pontjához tartozó normálisáról olyan $A'B'$ vonaldarabot metszenek ki, amelyet e normálison



5. ábra.

az O pont simulókörének O' középpontja szintén λ viszony szerint oszt, tehát $AO : BO = A'O' : B'O'$.»

E tétel alkalmazását láthatjuk a következő két példában:

A hiperbola változó n érintőiről annak a, b aszimptótái oly vonaldarabokat metszenek le, amelyeket az n érintők O érintőpontja felez.

Ezért: Ha (5. ábra) a k hiperbola O pontjának érintője n, normálisa n', és a hiperbola a, b aszimptótái az n érintőt az A, B pontokban, és az a és b-re az A és B pontban merőleges egyenes a' és b' az n' normálist az A' és B' pontban metszi, akkor az $A'B'$ vonaldarab O' felezőpontja a hiperbola O pontja simulókörének középpontja lesz.

Lássuk a másik példát!

Tudjuk, hogy a k parabola P pontja simulókörének O középpontja kétakkora távolságra van a P ponttól, mint a PO normálisnak a k parabola és l vezérvonala között levő része, PL (2. ábra).

Ha tehát az L pontban a parabola l vezérvonalára és az O pontban a $PO=n$ normálisára emelt merőleges l', illetőleg n' egymást az L' pontban metszi, és az O' pont az n' egyenesen úgy van meghatározva, hogy $O'O=2OL'$, akkor az O' pont a parabola e evolutája simulókörének középpontja az evoluta O pontjában, mert az n' normálisról az L és P pontnak l és k-hez tartozó l' és n normálisa az $L'O$ vonaldarabot metszi le, amelyet az O' pont akkép oszt (külsőleg), mint az O pont az LP vonaldarabot.

Ha az evoluta $O'OL'$ normálisának metszőpontja a parabola P pontjához tartozó átmérővel Q, akkor $OQ=2\,QL'$, tehát $O'O=3OQ$. Ezért:

«Ha a p parabola P pontjának normálisa a parabola e evolutáját az O pontban érinti és az evoluta O pontjának normálisa n' a parabola P pontjához tartozó átmérőjét a Q pontban metszi, végre ha az n' normálison az O' pont akkép van meghatározva, hogy $O'O=3OQ$, akkor az O' pont az e evoluta O pontja simulókörének a középpontja.»

E tétel segélyével az ellipszis vagy hiperbola evolutájának bármely O pontjához tartozó simulókörnek O' középpontját megszerkeszthetjük.

Ugyanis, ha a p parabola és a k ellipszis vagy hiperbola egymást a P pontban háromszorosan érinti, akkor a p és k kúpszeletnek nemcsak a P pontban van ugyanegy simulókörük, hanem e kör O középpontjában a két kúpszelet evolutáinak simulókörei is egybeesnek, és e simulókörnek O' középpontját akarjuk a p parabola segélyével megszerkeszteni (1. ábra).

Ha a p parabola és a k ellipszis vagy hiperbola egymást a P pontban háromszorosan érinti, akkor azok centrikusan kollineárok a P pontra és annak t érintőjére, mint kollineacióközéppontra és kollineaciótengelyre, s így a P-vel ugyanegy egyenesen levő homológ pontok érintői egymást a t-n metszik, amiért is k kúpszelet MP átmérője egyszersmind átmérője a p parabolának.

Ha tehát a k kúpszelet P pontja simulókörének O középpontjában a PO normálisra emelt merőleges a k kúpszelet MP átmérőjét a Q pontban metszi, akkor a merőlegesen az az O' pont, amely akkép van meghatározva, hogy $3QO = OO'$: a k kúpszelet evolutája evolutájának egy pontja.

Klug Lipót.

KONSTRUKTION DER SCHMIEGUNGSKREISE DER KEGELSCHNITTE UND IHRER EVOLUTEN.

Es werden hier verschiedene Konstruktionen der Mittelpunkte der Schmiegungskreise von Kegelschnitten und ihren Evoluten gezeigt. Dann folgen Bestimmungen von Kegelschnitten aus dem Schmiegungskreis eines seiner Punkte und noch zwei anderen Bedingungen. Schließlich benützen wir diese Konstruktionen zur Bestimmung der Tangenten in dem Doppelpunkte derjenigen Kurve IV. O. in welcher die Berührungsebene der Ringfläche (Torus) diese trifft.

Leopold Klug.

EGY POLINOM DERIVÁLTJA ZÉRÓHELYEINEK HELYZETÉRŐL.

I. Ismeretes a GAUSS-tól származó következő tétel:

Azon a legkisebb konvex Π poligonon kívül (illetőleg azon a legkisebb intervallumon kívül), amely az $f(x)$ polinom összes zéróhelyeit magában foglalja, a polinom $f'(x)$ deriváltja nem tűnhetik el. Az $f'(x)$ polinomnak azok a zéróhelyei, amelyek az $f(x)$ polinomnak nem többszörös zéróhelyei, mind a Π poligonnak (illetőleg intervallumnak) belsejében fekszenek.

Ennek a dolgozatnak célja bizonyos tartományoknak (csillagtartományoknak) a Π konvex poligonból való kirekesztésével az $f'(x)=0$ egyenlet gyökeinek helyzetét a Π poligonban pontosabban meghatározni.[1] Vizsgálatainkban egy előző dolgozatunk módszerét fogjuk felhasználni anélkül azonban, hogy annak eredményeire szükségünk volna.[2] Az általános esetet fogjuk szem előtt tartani, amikor az $f(x)=0$ egyenlet gyökei nem fek-

---

[1] A derivált zéróhelyeinek helyzetével három dolgozatban foglalkoztunk:

A: Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, Jahresbericht des Deutschen Math. Verein. 27. kötet (1918), 37—43. oldal.

B: Über geometrische Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten, Jahresbericht d. Deutschen Math. Verein. 27. köt. (1918), 44—48. oldal.

C: Zur Theorie der algebraischen Gleichungen, Jahresbericht d. Deutschen Math. Verein. 31. köt. (1922), 238—251. oldal.

[2] Az előbb *B* alatt idézett dolgozat. Ez a dolgozat véletlenül az irodalomban meglehetősen ismeretlen maradt. Ennek a dolgozatnak egy speciális tételét PÓLYA és SZEGŐ bevették kitűnő munkájukba, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis Bd. II. 244. oldal. M. BIERNACKI csak azt a speciális tételt idézi, Bull. de l'Acad. Pol. d. Sc. et d. Lettr. Cl. d. Sc. Math. 1927, 629.

szenek mind egy egyenesen, megállapitásaink azonban arra az esetre is érvényesek, amikor a Π poligon egy intervallumra esik össze. Ekkor a Π poligonon belül fekvő pont az intervallum belsejében fekvő pontot, a poligonnak egy szögpontja pedig az intervallumnak egy végpontját jelenti.

Dolgozatunk utolsó részében csupa reális gyökökkel bíró algebrai egyenletekre vonatkozó nehány eredményünket általánositjuk komplex gyökökkel is biró reális együtthatójú algebrai egyenletekre, röviden kifejezve: reális algebrai egyenletekre.

Minthogy az $f(x)-A$ és az $f(x)$ polinom deriváltja ugyanaz, azért tételeink akkor is érvényben maradnak, ha azokban az $f(x)$ polinomot az $f(x)-A$ polinommal helyettesitjük, s igy az $f(x)$ polinom zéróhelyei helyett A helyeiről beszélünk, bármilyen szám legyen is az A állandó. Reális polinomokra vonatkozó tételekben azonban A is köteles reális lenni.

2. Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ az $f(x)=0$ n-edfokú algebrai egyenlet gyökei és β az $f'(x)=0$ derivált egyenletnek az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gyököktől különböző gyöke, akkor fennáll a következő egyenlet:

$$\frac{f'(\beta)}{f(\beta)}=\frac{1}{\beta-\alpha_1}+\frac{1}{\beta-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\beta-\alpha_n}=0. \qquad (1)$$

Ha ψ egy tetszőleges szöget jelent és ha

$$\alpha_k-\beta=r_k.e^{i\varphi_k}=r_k.e^{i(\psi_k+\psi)} \quad \text{és} \quad \frac{r_k}{\sin\psi_k}=a_k, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

akkor a

$$-e^{i\psi}\frac{f'(\beta)}{f(\beta)}=0$$

egyenletnek tiszta képzetes részére fennáll a következő összefüggés

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=0. \qquad (2)$$

Ebben az egyenletben a_k annak az α_k és β gyökpontokon átmenő körnek átmérője, amelynek érintője a β ponton átmenő és a valós tengellyel ψ szöget alkotó e egyenes. Az a_k átmérő az e egyenesnek az egyik oldalán levő gyökpontokra vonatkozólag pozitív, a másik oldalán fekvőkre negatív előjelű, az e egyenesen fekvő gyökpontokra nézve pedig az a_k átmérő végtelen.

Abból, hogy a (2) egyenletben az a értékek nem lehetnek mind pozitívok, vagy mind negatívok, következik a GAUSS-féle tétel.

Föltételezhetjük, hogy az a_i gyökpontok indexeit úgy választottuk meg, hogy a (2) egyenlet első h tagja pozitív, a következő k tag negatív és az utolsó $n-k-h(\geq 0)$ tag zéró és azonkívül

$$0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_h, \quad b_i = -a_{h+i}, \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$
$$0 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_k.$$

Ilyen jelölésekkel a (2) egyenletet a következő alakban írhatjuk:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_h} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_k}. \tag{3}$$

Ha az a_1, illetőleg a_{h+1} az $f(x)=0$ egyenletnek p-szeres, illetőleg q-szoros gyöke, akkor fennállanak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{p}{a_1} \leqq \frac{k}{b_1}, \quad \frac{q}{b_1} \leqq \frac{h}{a_1}; \tag{4}$$

$$\frac{h}{a_1} \geqq \frac{k}{b_k}, \quad \frac{k}{b_1} \geqq \frac{h}{a_h}. \tag{5}$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből lehozhatók B dolgozatunk eredményei.

Ha $a_i\,(i \leq h)$, illetőleg $a_j\,(h < j \leq h+k)$ az $f(x)=0$ egyenletnek egy különben tetszőleges legfeljebb p-szeres, illetőleg legfeljebb q-szoros gyöke, amelyhez az a, illetőleg b átmérő tartozik, akkor fennállanak nyilvánképen a

$$\frac{p}{a} \leqq \frac{k}{b_1}, \quad \frac{q}{b} \leqq \frac{h}{a_1} \tag{6}$$

egyenlőtlenségek is.

3. A (6) egyenlőtlenségek alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

I. *Ha* α *az* $f(x)=0$ *n-edfokú algebrai egyenletnek olyan p-szeres gyöke, amelyen átmenő egyeneseknek bármelyik oldalán legfeljebb s gyöke fekszik az egyenletnek, és ha K az* α *gyökponton átmenő olyan kör, amelynek belsejében az* $f(x)=0$ *egyenletnek egy gyöke sem fekszik, akkor az* $f'(x)=0$ *derivált egyenletnek egy gyöke sincs a K kört az* α *pontban belülről érintő és* $\frac{p}{p+s}$*-szer kisebb sugarú körnek belsejében.*

Tételezzük fel ugyanis, hogy ez a tétel nem igaz és így van az $f'(x)=0$ egyenletnek egy β gyöke a K kört α-ban belülről érintő $\frac{p}{p+s}$-szer kisebb sugarú k kör belsejében. Jelöljük a K körnek az α és β pontokon átmenő egyenessel való második metszéspontját γ-val, a K kört a γ pontban belülről érintő és a β ponton átmenő kört K_1-gyel, a K_1 kört a β pontban kívülről érintő és az α ponton átmenő kört pedig k_1-gyel.

Ha D, d, a és b jelölik a K, k, k_1, illetőleg K_1 körök átmérőit és f_1, illetőleg f_2 az $\alpha\beta$, illetőleg $\beta\gamma$ vonaldarabok hosszát, akkor fennáll az

$$\frac{b}{a}=\frac{f_2}{f_1}>\frac{D-d}{d}=\frac{D-\frac{Dp}{p+s}}{\frac{Dp}{p+s}}=\frac{s}{p}$$

egyenlőtlenség.

Ha tehát b_1 annak a legkisebb körnek az átmérője, amely a β pontban a k_1 kört kívülről érinti és az $f(x)=0$ egyenletnek egy gyökpontján keresztül megy, akkor

$$\frac{b_1}{a}\geqq\frac{b}{a}>\frac{s}{p}.$$

Ez az egyenlőtlenség azonban ellentmondáshoz vezet, mert a (6) egyenlőtlenség miatt

$$\frac{b_1}{a}\leqq\frac{k}{p}\leqq\frac{s}{p}.$$

Ebből az ellentmondásból következik az I. tétel igazsága.

4. Az I. tételből következik a következő:

II. *Legyen G_α az a legkisebb körívpoligon, melynek belsejében az $f(x)=0$ algebrai egyenletnek legalább p-szeres α gyökén kívül nincs más gyöke és amely az α-n keresztülmenő minden olyan kört, melyen belül az $f(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke, egészen magában foglal. Legyen továbbá $G_\alpha(\varrho)$ a G_α tartománynak α-ra, mint külső hasonlósági pontra vonatkozólag $1:\varrho\,(\varrho<1)$ arányban kisebbített képe. Ha az α-n keresztülmenő egyeneseknek akármelyik oldalán az $f(x)=0$ egyenletnek legfeljebb s gyöke fekszik, akkor az $f'(x)=0$ derivált egyenletnek α-tól különböző gyökei közül egy sem fekhetik a $G_\alpha\left(\frac{p}{p+s}\right)$ tartomány belsejében.*

Olyan α gyökre, amely az $f(x)=0$ algebrai egyenlet gyökeit magában foglaló legkisebb Π konvex poligon csúcspontjaitól különbözik, $p+s\leqq n-1$. A II. tételből tehát következik a következő:

III. *Ha α az $f(x)=0$ n-edfokú egyenlet gyökeit bezáró legkisebb konvex poligon szögpontjaitól különböző és legalább p-szeres gyöke, akkor az $f'(x)=0$ derivált egyenletnek egy α-tól különböző gyöke sem fekhetik a $G_\alpha\left(\frac{p}{n-1}\right)$ tartomány belsejében.*

A II. tételből következnek még a következő tételek:

IV. *Ha α az $f(x)=0$ n-edfokú polinomnak legalább p-szeres zéróhelye, akkor az $f'(x)$ derivált polinomnak nincs α-tól különböző zéróhelye a $G_\alpha\left(\frac{p}{n}\right)$ tartomány belsejében.*

V. *Ha a K_α kör belsejében az $f(x)=0$ n-edfokú egyenletnek legalább p-szeres α gyökén kívül más gyöke nincs és ha a $K_\alpha(\varrho)$ kör a K_α körnek α-ra, mint külső hasonlósági pontra vonatkozó $1:\varrho$ arányban $(\varrho<1)$ kisebbített képe, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincsen α-tól különböző gyöke a $K_\alpha\left(\frac{p}{n}\right)$ kör belsejében.*

Ha α nem szögpontja az $f(x)=0$ egyenlet gyökeit magában *foglaló legkisebb konvex poligonnak, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek a $K_\alpha\left(\frac{p}{n-1}\right)$ kör belsejében sincs gyöke, de nincsen a $K_\alpha\left(\frac{p}{p+s}\right)$ körön belül sem, ha az α-n átmenő egyenesek bármely oldalára az $f(x)=0$ egyenletnek legfeljebb s számú gyöke esik.*[1]

VI. *Ha d az $f(x)=0$ n-edfokú egyenlet egy α gyökpontjának a legközelebbi gyökpontjától való távolsága, akkor az α pont körül $\frac{d}{n}$ sugárral leírt körön belül nincs α-tól különböző gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek.*

---

[1] Az V. tétel első része J. L. WALSH következő fontos tételének («On the location of the roots of the Jacobian of two binary forms, and of the derivative of a rational function», Transactions of the Amer. Math. Soc. 22. kötet (1921), 115. oldal; lásd PÓLYA-SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsätze II. kötet 245—246. old.) következménye:

Ha az $f(x)=0$ $n=n_1+n_2$-edfokú algebrai egyenletnek n_1 gyöke a K_1, a többi n_2 gyöke pedig a K_2 körtartományban fekszik, akkor az $f'(x)=0$ egyenlet akármelyik gyöke beleesik a

$$K_1,\ K_2 \text{ és } K_3=\frac{n_1K_2+n_2K_1}{n_1+n_2}$$

körtartományok valamelyikébe.

Egy K körtartomány a síknak egy olyan véges vagy végtelen nagy tartományát jelenti, amelynek határa a K kör vagy határesetben a K egyenes.

Ha x_1 és x_2 a GAUSS-féle számsíkon a K_1, illetőleg K_2 körtartomány egy tetszőleges pontja, akkor a K_3 körtartomány mindazoknak a pontoknak összessége, amelyekhez tartozó komplex számok

$$x_3=\frac{n_1x_2+n_2x_1}{n_1+n_2}$$

alakban állíthatók elő.

J. L. WALSH kimondotta az előbbi tételből lehozható következő tételt is:

Ha az $f(x)=0$ n-edfokú egyenletnek a p-szeres gyöke és a többi $n-p$ gyöke a K körtartományban van, akkor az $f'(x)=0$ egyenlet gyökei α-ban, K-ban és abban a K' körtartományban fekszenek, amely a K körtartománynak az α pontra vonatkozólag $\frac{p}{n}$ arányban kisebbített képe.

Ha az α pont a K körön belül van és a K körtartomány a K körön kívül fekszik, akkor a K' körtartomány az V. tételben szereplő $K_\alpha\left(\frac{p}{n}\right)$ körön kívüleső körtartomány, s így az V. tétel első részét kapjuk.

Ha a az $f(x)=0$ egyenletnek legalább p-szeres gyöke, akkor az a gyökpont körül $p\frac{d}{n}$ sugárral leírt körön belül sincs az $f'(x)=0$ egyenletnek a-tól különböző gyöke.[1]

VII. *Ha a az $f(x)=0$ n-edfokú egyenlet összes gyökeit magában foglaló legkisebb konvex poligon szögpontjaitól különböző gyökpontja az egyenletnek, melynek multiplicitása legalább p és amelynek távolsága a legközelebbi gyökponttól d, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs a-tól különböző gyökpontja az a körül $p\frac{d}{n-1}$ sugárral leírt körön belül, de a koncentrikus $p\frac{d}{p+s}$ sugarú kör belsejében sincs, ha az a-n átmenő egyenesek bármely oldalára az $f(x)=0$ egyenletnek legfeljebb $s(<n-p)$ számú gyöke esik.*

5. Az előző tételek kiegészítéséül kimutatjuk a két utolsó tétel pontosságát, vagyis azt, hogy a bennük meghatározott kör általánosságban nem helyettesithető az $f'(x)=0$ egyenlet a-tól különböző gyökei közül belsejében egyet sem tartalmazó koncentrikus nagyobb körrel.

Ha ugyanis

$$f(x)=x(x-1)^{n-1}=0, \text{ illetőleg } f(x)=x^p(x-1)^{n-p}=0,$$

akkor $a=0$ mellett $d=1$. Ekkor az $f'(x)=0$ egyenletnek $\frac{d}{n}=\frac{1}{n}$, illetőleg $p\cdot\frac{d}{n}=\frac{p}{n}$ gyöke, ami a VI. tétel pontosságát igazolja.

Ha pedig

$$f(x)=x^p(x-1)^s(x+t)^{n-p-s}=0,\quad n-p-s\geqq s \text{ és } t\geqq 1$$

---

[1] A VI. tétel első részét először J. W. ALEXANDER bizonyította be, Annals of Math. II. 17. kötet (1915), 16. oldal. A tétel második része J. L. WALSH egy régebbi tételének is következménye (Transactions of the Amer. Math. Soc., 19. köt. (1918), 298. oldal), de egyszersmind könnyen belátható következménye *B* dolgozatunk (1918) tételeinek is.

tesszük, akkor $a=0$ mellett $d=1$ és az $f'(x)=0$ egyenletnek

$$\beta_t = \frac{2p}{p+s-\frac{n-s}{t}+\sqrt{\left(p+s-\frac{n-s}{t}\right)^2+\frac{4np}{t}}}$$

gyöke. Ebből következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \beta_t = \frac{p}{p+s},$$

amiből következik a VII. tétel pontossága.

Ezek alapján belátható a II—V. tételek pontossága is, amennyiben a bennük szereplő $G_a\left(\frac{p}{p+s}\right)$, $G_a\left(\frac{p}{n-1}\right)$, $G_a\left(\frac{p}{n}\right)$, $K_a\left(\frac{p}{n}\right)$, $K_a\left(\frac{p}{n-1}\right)$, illetőleg $K_a\left(\frac{p}{p+s}\right)$ tartomány nem mindig helyettesíthető az a külső hasonlósági pontra vonatkozólag hasonló olyan nagyobb tartománnyal, amely az $f'(x)=0$ egyenlet a-tól különböző gyökei közül egyet sem tartalmaz belsejében.

A II. tételben szereplő $G_a\left(\frac{p}{p+s}\right)$ tartomány csillagtartomány az a középpontra vonatkozólag. Ha ugyanis P ennek a tartománynak egy pontja, akkor az a és a P pont közé eső egész vonaldarab, intervallum hozzátartozik a $G_a\left(\frac{p}{p+s}\right)$ tartományhoz. Ennek a csillagtartománynak a középpontját a tartomány határpontjaival összekötő sugarakat legalább bizonyos irányokban meg lehet úgy nyujtani, hogy ezek megnyujtása által a $G_a\left(\frac{p}{p+s}\right)$ csillagtartományból kapott nagyobb csillagtartomány még mindig ne tartalmazza az $f'(x)=0$ egyenletnek egy a-tól különböző gyökét sem. Ez belátható a következő tétel alapján:

VIII. *Ha az $f(x)=0$ algebrai egyenlet legalább p-szeres a gyökpontján keresztülmenő K kör belsejében nincs az egyenletnek más gyöke, ha továbbá e jelöli a K kör érintőjét az a pontban, γ a körkerület egy tetszőleges pontját és r az $(a\gamma)$ intervallum hosszát és ha végül s számú gyök van az egyenesnek γ-t tartalmazó oldalán, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek* *nincs gyöke az* $(\alpha\gamma)$ *intervallum* $\frac{p}{p+s}r$ *hosszúságú* $(\alpha\beta)$ *részintervallumának belsejében. Ha a* β *ponton át e-vel párhuzamosan húzott* e' *egyenesnek* γ*-t tartalmazó oldalán az* $f(x)=0$ *egyenletnek csak* $s'\,(<s)$ *gyöke van, akkor az* $(\alpha\gamma)$ *intervallum* $\frac{p}{p+s'}r$ *hosszúságú* $(\alpha\beta')$ *részintervallumának belsejében sincs gyöke az* $f'(x)=0$ *egyenletnek. Ha pedig a* β' *ponton e-vel párhuzamosan húzott* e'' *egyenesnek* γ*-t tartalmazó oldalán az* $f(x)=0$ *egyenletnek csak* $s''\,(<s')$ *gyöke van, akkor az* $(\alpha\gamma)$ *intervallum* $\frac{p}{p+s''}r$ *hosszúságú* $(\alpha\beta'')$ *részintervallumának egy belső pontja sem lehet gyöke az* $f'(x)=0$ *egyenletnek.*

Az itt leirt eljárás továbbfolytatásával az $(\alpha\beta'')$ intervallumot esetleg még tovább lehet nyujtani, a nélkül, hogy a megnyujtott intervallum belsejében lenne gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek.

A VIII. tétel az I. tétel és bizonyítása alapján minden nehézség nélkül belátható.

6. Az előző tételek alapján az $f(x)=0$ egyenlet bármely gyöke körül kijelölhetünk egy-egy olyan kisebb vagy nagyobb csillagtartományt, amelynek belsejében nincs az $f'(x)=0$ egyenletnek az $f(x)=0$ egyenlet többszörös gyökeitől különböző gyöke. Ezeknek a csillagtartományoknak lehetnek egymással közös pontjaik és lehetnek pontjaik a Π konvex poligonon kívül is. Ezeknek a csillagtartományoknak a síkból való kiemelése után a Π poligon belsejének megmaradt részében vagy annak határán feküdhetnek csak a $f'(x)=0$ egyenletnek az $f(x)=0$ egyenlettel nem közös gyökei.

Bizonyos esetekben azonban csillagtartományok helyett egész szögtereket lehet a síkból eltávolítani, amelyek a Π poligon egy részét is magában foglalják, amelyekben szintén nincs az $f(x)=0$ algebrai egyenlet többszörös gyökeitől különböző gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek.

Ki fogjuk mutatni a következő tételt:

IX. *Jelöljön* $S_\alpha(2\varphi)$ *egy* $2\varphi\,(<\pi)$ *nyílású* α *szögponttal bíró szögteret és jelölje* $S_\alpha(2\varphi+\pi)$*, illetőleg* $S_\alpha(2\varphi-2\psi)$ *azt a* $(2\varphi+\pi,$

Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED

illetőleg $2\varphi-2\psi$ nyílású α szögponttal bíró) szögteret, melynek ugyanaz a szögfelező félegyenese, mint az $S_\alpha(2\varphi)$ szögtérnek. Ha α az $f(x)=0$ algebrai egyenletnek egy p-szeres gyöke, ha továbbá nincs gyöke az egyenletnek az $S_\alpha(2\varphi)$ szögtér belsejében, de legfeljebb s számú gyöke van az $S_\alpha(2\varphi+\pi)$ szögtérben foglalt bármely félsík belsejében és ha végül

$$\frac{s}{s+2p}=\sin\psi<\sin\varphi, \qquad \left(0<\psi<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke az $S_\alpha(2\varphi-2\psi)$ szögtér belsejében.

Legyen ugyanis e az $S_\alpha(2\varphi-2\psi)$ szögtérnek α szögpontjából kiinduló tetszőleges félegyenese. Tegyük fel, hogy a tétellel ellenkező módon ennek a félegyenesnek egy β pontja az $f'(x)=0$ egyenletnek gyöke. Jelölje K_1 azt a kört, amelynek az a hosszúságú $(\alpha\beta)$ intervallum átmérője. Legyen K_2 a K_1 kört a β pontban kívülről érintő legkisebb kör, amely az $f(x)=0$ egy gyökpontján keresztül megy és legyen b_1 ennek a körnek átmérője. Ha az $f(x)=0$ egyenletnek k számú gyöke van a K_1 és K_2 körök β pontjához tartozó közös t érintőnek azon az oldalán, amelyen a K_2 kör fekszik, akkor a (6) egyenlőtlenség miatt

$$\frac{p}{a}\leqq\frac{k}{b_1}\leqq\frac{s}{b_1},$$

amiből

$$\frac{b_1}{b_1+2a}\leqq\frac{s}{s+2p}.$$

Az α pontból a K_2 körhöz húzható érintők azonban az e egyenessel olyan ψ_1 hegyes szöget alkotnak, amelyre fennáll a

$$\sin\psi_1=\frac{b_1}{b_1+2a}\leqq\frac{s}{s+2p}=\sin\psi$$

egyenlőtlenség, amiből $\psi_1\leqq\psi$. Ebből következik, hogy az α pontból a K_2 körhöz húzható érintők és velük az egész K_2 kör az $S_\alpha(2\varphi)$ szögtérbe esik. Ez a K_2 kör tehát — feltételünkkel ellentétben — nem mehet az $f(x)=0$ egyenletnek egyetlen gyökpontján sem át.

Ebből az ellentmondásból következik a tétel igazsága.

Az előző tétel bizonyitása alapján könnyen belátható a következő tétel is.

X. *Ha a az $f(x)=0$ algebrai egyenletnek legfeljebb p-szeres gyöke, ha továbbá nincs gyöke az egyenletnek annak a területnek belsejében, amely egy $S_a(2\varphi)$ szögtéren belül és az a középpont körül leírt egy K_a körön kívül fekszik, és ha végül a K_a kört az $S_a(2\varphi)$ területen belül érintő egyeneseknek K_a-val ellenkező oldalán az $f(x)=0$ egyenletnek legfeljebb s számú gyöke van, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs az $S_a(2\varphi)$ szögtér közepén szimmetrikus fekvésű $S_a(2\varphi-2\psi)$ szögtér belsejében és egyúttal a K_a körön kívül fekvő gyöke, feltéve, hogy van az*

$$\frac{s}{s+2p}=\sin\psi<\sin\varphi \quad \textit{és} \quad 0<\psi<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

egyenlőtlenségeknek eleget tevő ψ szög.

A IX. tételből következik a következő két tétel is:

XI. *Ha a_1, a_2, a_3 az $f(x)=0$ harmadfokú egyenlet gyökei és ha az $a_1a_2a_3$ háromszög a_1 szögpontjánál fekvő szöge $2\varphi>\frac{\pi}{3}$, akkor e szöget alkotó két oldal $S_{a_1}(2\varphi)$ szögterének közepén szimmetrikusan fekvő $S_{a_1}\left(2\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$ szögtérnek belsejében nem fekszik gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek.*

XII. *Ha az $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a)^p=0$ algebrai egyenletnek a gyöke az $a_1a_2a_3$ háromszög belsejében fekszik és ha ψ a $\sin\psi=\frac{1}{1+p}$ egyenletnek eleget tevő hegyes szög, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke azon három $S_a(2\psi)$ szögtéren kívül, amelyeknek az aa_1, aa_2, illetőleg aa_3 félegyenes belső szögfelezője.*

Ha $p=1$, akkor $\psi=\frac{\pi}{6}$, ha $p>57$, akkor $\psi<1°$.

További speciális tételek lehozása nem okoz nehézséget.

7. Az $f(x)$ polinom zéróhelyeit magában foglaló legkisebb

konvex Π poligon határának egy pontja csak akkor lehet a derivált $f'(x)$ polinomnak zéróhelye, ha az egyszersmind az $f(x)$ polinomnak is zéróhelye. Ebből következik, hogy a Π poligon oldalaihoz elég közel fekvő pontjaiban szintén nem tűnhetik el az $f'(x)$ polinom, feltéve, hogy azokban a pontokban az $f(x)$ polinomnak nincs többszörös zéróhelye. Erre vonatkozólag a következő tétel nyujt további felvilágosítást:

XIII. *Legyen az $f(x)=0$ algebrai egyenlet α_1 és α_2 egyszeres gyöke az egyenlet gyökeit magában foglaló legkisebb Π konvex poligon egy oldalának két végpontja, amelyen az egyenletnek nincs más gyökpontja. Legyen $S_{\alpha_1}(2\varphi_1)$, illetőleg $S_{\alpha_2}(2\varphi_2)$ a Π poligon egy részét magában foglaló olyan szögtér, amelynek egyik szára tartalmazza az $\alpha_1\alpha_2$ poligonoldalt, másik szára az egyenlet egy gyökpontját köti össze az α_1, illetőleg α_2 szögponttal és amelynek belsejében nincs az egyenletnek gyöke. Ha α_3 az egyenlet olyan gyökpontja, hogy az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ háromszög belsejében nincs az egyenletnek gyöke, ha α_{12} az $\alpha_1\alpha_2$ oldal felezőpontja és α' a háromszög $\alpha_3\alpha_{12}$ súlyvonalának felezőpontja, ha továbbá φ_3, illetőleg φ_4 az a szög, amely alatt az $\alpha_3\alpha'$ távolság az α_1, illetőleg α_2 pontokból látható és ha végül φ a φ_1, φ_2, φ_3 és φ_4 szögek közül a legkisebb, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke abban a Π poligonba eső körszeletben, amelynek köríve az $\alpha_1\alpha_2$ poligonoldallal φ szöget zár be.*

Ennek a tételnek bebizonyítása végett feltételezzük, hogy az $f'(x)=0$ egyenletnek egy β gyöke ebben a körszeletben fekszik. Ha a_1 az α_1, α_2 és β pontokon átmenő K_{12} kör átmérője, b pedig a K_{12} kört β pontban kivülről érintő és az α_3 ponton átmenő K_3 körnek átmérője, akkor fennáll a $\frac{2}{a_1} \geqq \frac{1}{b}$ egyenlőtlenség. Ez az egyenlőtlenség az (5) egyenlőtlenségekből következik, mert a szerkesztés szerint a K_{12} és K_3 körök β pontjához tartozó e érintőnek az egyik oldalán csak α_1 és α_2 gyöke fekszik az $f(x)=0$ egyenletnek.

Azalatt, amíg egy β' pont az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ háromszögben a K_{12} körön mozog, az α_3 ponton átmenő és a K_{12} kört β' pontban érintő K_3' kör b' átmérője maximumát akkor éri el, ha az a_1 a_2 pontok egyikével összeesik. Ha b' az a_1 pontban veszi fel B maximumát és ha d_2 és d_3, illetőleg δ_1 és δ_2 jelöli az $a_1a_2a_3$ háromszög a_1a_2 és a_1a_3 oldalát, illetőleg a_1 és a_2 szögpontjánál levő szög nagyságát, s ha végül ψ jelöli azt a hegyes szöget, amelyet az a_1a_2 oldal alkot a K_{12} körnek a_1 pontján átmenő érintővel, akkor fennállanak a következő összefüggések:

$$a_1 = \frac{d_2}{\sin\psi}, \quad B = \frac{d_3}{\sin(\delta_1 - \psi)},$$

$$\frac{b}{a_1} < \frac{B}{a_1} = \frac{d_3 \sin\psi}{d_2 \sin(\delta_1 - \psi)} < \frac{d_3 \sin\varphi}{d_2 \sin(\delta_1 - \varphi)} \leq \frac{d_3 \sin\varphi_3}{d_2 \sin(\delta_1 - \varphi_3)}.$$

Az $y = \frac{\sin x}{\sin(\delta_1 - x)}$ függvény ugyanis x-nek növő függvénye, mert deriváltja pozitív. Azonkívül $0 < \psi < \varphi \leq \varphi_3 < \delta_1$, mert a β pont a φ szögű körszeletben fekszik.

Mivel az a_3a' vonaldarab az $a_1a_2a_3$ háromszög súlyvonala, azért

$$\frac{d_3 \sin\varphi_3}{d_2 \sin(\delta_1 - \varphi_3)} = \frac{1}{2} \quad \text{és így} \quad \frac{b}{a_1} < \frac{B}{a_1} < \frac{1}{2}.$$

Ez az egyenlőtlenség azonban ellentmond az (5) egyenlőtlenségből következett $\frac{2}{a_1} \geqq \frac{1}{b}$ egyenlőtlenségnek.

Ebből az ellentmondásból következik a XIII. tétel igazsága.

8. Dolgozatunk következő része reális koefficiensű, vagy röviden reális polinomokkal foglalkozik és a csupa reális zéróhelyekkel biró polinomokra vonatkozó néhány eredményünket általánosítja.[1]

Kimutatjuk Laguerre egy tételének következő általánosítását:

XIV. *Ha az $f(x)=0$ reális algebrai egyenletnek a és b ($a<b$) reális gyökei közé nem esik egy gyök reális része sem és ha az egyenletnek h_a számú olyan gyöke van, amelynek reális*

---

[1] *A* értekezés VII. tétel, 41. old.

része nem nagyobb a-nál, akkor az $f'(x)=0$ derivált egyenletnek nincs gyöke a

$$\left(b-\frac{b-a}{h_a+1},\ b\right)$$

intervallum belsejében.

Ha pedig az $f(x)=0$ egyenletnek h_b számú olyan gyöke van, melynek reális része nem kisebb, mint b, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke az

$$\left(a,\ a+\frac{b-a}{h_b+1}\right)$$

intervallum belsejében.

Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jelöli az $f(x)=0$ reális n-edfokú algebrai egyenlet gyökeit növekvő reális részük sorrendjében és ha az α_k és α_{k+1} gyökök reálisak, akkor az $f'(x)=0$ egyenlet egy olyan β reális gyökére, amely az (α_k, α_{k+1}) intervallumba esik, fennáll az

$$\frac{1}{\beta-\alpha_1}+\frac{1}{\beta-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\beta-\alpha_k}=$$
$$=\frac{1}{\alpha_{k+1}-\beta}+\frac{1}{\alpha_{k+2}-\beta}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n-\beta} \tag{7}$$

egyenlet. Ennek az egyenletnek mindkét oldalán a valós gyökökre vonatkozó tagok és a komplex gyökökre vonatkozó tagok reális részei pozitívok, s így a konjugált komplex gyökpárokra vonatkozó két-két tag összege pozitív. Ha ugyanis $\alpha_h=p+qi$, akkor a szerint, amint $h<k$, illetőleg $h<k+1$

$$\frac{1}{\beta-\alpha_h}=\frac{(\beta-p)+qi}{(\beta-p)^2+q^2},\ \text{illetőleg}\ \frac{1}{\alpha_h-\beta}=\frac{(p-\beta)-qi}{(p-\beta)^2+q^2}.$$

A (7) egyenlet mindkét oldalán az a tag, amely közvetlenül az egyenlőségi jel mellett áll nagyobb, vagy legalább nem kisebb, mint azon az oldalon szereplő akármelyik tagnak reális része. Ebből következnek a

$$\frac{k}{\beta-\alpha_k}\geqq\frac{1}{\alpha_{k+1}-\beta}\quad\text{és}\quad\frac{n-k}{\alpha_{k+1}-\beta}\geqq\frac{1}{\beta-\alpha_k} \tag{8}$$

egyenlőtlenségek, amikből pedig

$$a_{k+1}-\beta \geqq \frac{a_{k+1}-a_k}{k+1} \quad \text{és} \quad \beta - a_k \geqq \frac{a_{k+1}-a_k}{n-k+1}. \tag{9}$$

Ezzel ki van mutatva a XIV. tétel, mert ha $a_k=a$ és $a_{k+1}=b$, akkor $h_a=k$ és $h_b=n-k$.

Minthogy $h_a \leqq n-1$ és $h_b \leqq n-1$, azért a XIV. tétel magában foglalja a P. Montel-től kimutatott következő tételt:[1]

Ha az $f(x)$ n-edfokú reális polinomnak a és b reális zéróhelyei közé nem esik a polinom egy zéróhelyének reális része sem és ha az (a, b) intervallumot n egyenlő részre osztjuk, akkor a két szélső osztásrész belsejében sehol sem tűnhetik el az $f'(x)$ derivált polinom.

A (9) egyenlőtlenségekből lehozható egyszersmind a következő tétel:

XV. *Ha mindazokat az n-edfokú reális polinomokat tekintetbe vesszük, amelyeknek 1., a és b közös reális zéróhelyük $(a<b)$, 2., egy zéróhelyük reális része sem esik az (a, b) intervallum belsejébe, 3., h_a, illetőleg h_b számú a-nál nem nagyobb, illetőleg b-nél nem kisebb reális részű zéróhelye van, akkor ezen polinomok deriváltjainak az (a, b) intervallumba eső zéróhelyei az (a, b) intervallumnak egy*

$$L=\left(1-\frac{1}{h_a+1}-\frac{1}{h_b+1}\right)(b-a)$$

hosszúságú részintervallumában vannak. Erre az L hosszúságra nézve fennállanak az

$$\frac{n-2}{2n}(b-a) \leqq L \leqq \frac{n-2}{n+2}(b-a)$$

egyenlőtlenségek, ha n páros szám és az

$$\frac{n-2}{2n}(b-a) \leqq L \leqq \left(1-\frac{4(n+2)}{(n+1)(n+3)}\right)(b-a) < \frac{n-2}{n+2}(b-a)$$

egyenlőtlenségek, ha n páratlan.

[1] Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques, Bull. de la Société Math. de France, 58. köt. (1930), 119. oldal.

Ha ugyanis a (7) egyenletben az $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ gyököket az a_k-val összeejtjük és ($k+1<n$ esetben) az $a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots, a_n$ gyökök reális részét elég nagynak vesszük fel, akkor a (8) alatti első egyenlőtlenség bal és jobboldala olyan pontosan egyezik, amilyen pontossággal éppen akarjuk. Hasonlót elérhetünk a (8) második egyenlőtlenségére is. Másrészt pedig nyilvánvaló, hogy az

$$\frac{1}{h_a+1}+\frac{1}{h_b+1}=\frac{n+2}{(h_a+1)(h_b+1)},\quad h_a+h_b=n,$$
$$(1 \leq h_a \leq n-1,\ 1 \leq h_b \leq n-1)$$

összeg maximumát akkor éri el, ha a h_a és h_b tényező közül az egyik az egység, minimumát pedig akkor, ha e két tényező egyezik egymással (n páros értéke esetén), vagy csak egységben különböznek egymástól (n páratlan értéke mellett).

9. Csupa reális zéróhelyekkel biró n-edfokú polinomokra kimutattuk,[1] hogy a zéróhelyeket tartalmazó legkisebb intervallum n egyenlő részre való osztása után kapott két szélső osztásrész akármelyike tartalmazza a derivált polinomnak legalább egy zéróhelyét. Ez a tétel olyan reális polinomokra, amelyek két reális zéróhelyének intervalluma tartalmazza a többi reális zéróhelyet és a komplex gyököknek reális részeit, minden további nélkül nem általánositható, miként ez az x^n-1 polinomon n páros értéke mellett látható.

Kimondhatjuk azonban a következő tételt:

XVI. *Ha az $f(x)$ reális polinomnak legalább k reális zéróhelye van, melyek közül a legkisebb «a», a legnagyobb pedig b, ha továbbá a polinomnak nincs a-nál kisebb reális részű zéróhelye és végül ha az $f'(x)$ polinom legkisebb reális zéróhelyénél kisebb reális része az $f(x)$ polinom egy zéróhelyének sincs az «a» zéróhely kivételével, akkor az $f'(x)$ polinomnak van legalább egy zéróhelye az $\left(a,\ a+\frac{b-a}{k}\right)$ intervallumban.*

A megfelelő feltételek fennállása esetén hasonló tétel mond-

[1] A. I. tétel, 37. oldal.

ható ki az $f'(x)$ polinom legnagyobb reális gyökére is, miként ez a kimondott tételből következik, ha azt az $f(-x)$ polinomra alkalmazzuk.

A tétel kimutatása végett feltételezzük, hogy $a=\alpha_1, \alpha_2\ldots, \alpha_s=b, \alpha_{s+1},\ldots, \alpha_n$ az $f(x)$ n-edfokú polinom zéróhelyei a reális részek növekvő sorrendjében, továbbá, hogy a tétel értelmében az a és b reálisak és az $f'(x)$ polinomnak van olyan β reális zéróhelye, amely α_2 reális részénél nem nagyobb. Feltételezhetjük, hogy $\beta \neq \alpha_1$. Erre a β zéróhelyre fennáll az

$$\frac{1}{\beta-\alpha_1}=\frac{1}{\alpha_2-\beta}+\frac{1}{\alpha_3-\beta}+\cdots+\frac{1}{\alpha_s-\beta}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n-\beta}$$

egyenlet, melynek mindkét oldalán a tagok valós részei pozitívok. Ha jobboldalon a konjugált komplex gyökpárokra vonatkozó tagokat kihagyjuk és a valós tagokat a legkisebbel helyettesítjük, akkor kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\beta-a}\geqq\frac{k-1}{b-\beta}, \quad \text{amiből} \quad \beta-a\leqq\frac{b-a}{k}.$$

Ezzel a kimondott tétel be van bizonyítva.

Az $f'(x)$ polinomnak mindig van az előbbi tétel feltételeinek megfelelő reális gyöke, ha az $f(x)$ polinom zéróhelyeire a következő tétel feltételei teljesülnek:

XVII. *Ha az $f(x)$ reális polinom «a» reális zéróhelyén átmenő és a valós tengelyre merőleges egyenesnek ugyanarra az oldalára esik a polinom többi zéróhelye és ha azok közül az egyenlő reális résszel bíró zéróhelyek közül, melyeknek r reális része legközelebb van a-hoz, van legalább egy olyan, melynek a reális tengelytől való távolsága az «a» pontból legfeljebb $\frac{\pi}{6}$ szög alatt látszik, akkor az $f'(x)$ polinomnak van legalább egy zéróhelye az $\left(a,\ a+2\frac{r-a}{3}\right)$ intervallumban vagy annak határán.*

Ha ugyanis $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$ az $f(x)$ polinom zéróhelyei növekvő reális részük sorrendjében, akkor a tétel bizonyitása végett feltehetjük, hogy $a=\alpha_1$ negatív szám, $\alpha_2=qi$ tiszta képzetes, α_3 pedig konjugáltja.

Ha az $f'(x)=0$ egyenletnek van az $(a, 0)$ intervallumban egy β gyöke, akkor az

$$\frac{1}{\beta-a}=\frac{1}{qi-\beta}+\frac{1}{-qi-\beta}+\frac{1}{\alpha_4-\beta}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n-\beta} \tag{10}$$

egyenletben bármely tag reális részének pozitívnak kell lennie.

Ha van az $(a, 0)$ intervallumban olyan β_1 szám, amelyre az

$$\frac{1}{\beta_1-a}\leqq\frac{-2\beta_1}{\beta_1+q^2} \tag{11}$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor ezen β_1 mellett a (10) egyenlet baloldala kisebb, mint a jobboldala. Ebből következik, hogy akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek van gyöke az (a, β_1) intervallumban, mert a (10) egyenlet baloldala ennek az intervallumnak a-hoz elég közeli pontjaiban nagyobb, mint a jobboldala.

A (11) egyenlőtlenség

$$3\beta_1-2a\beta_1+q^2\leqq 0$$

alakban írható. Ez az egyenlőtlenség mindig kielégíthető valós β_1-val, ha

$$a^2-3q^2\geqq 0.$$

Ekkor azonban az α_2 pontot az a ponttal összekötő egyenes a valós tengellyel legfeljebb $\frac{\pi}{6}$ hegyesszöget alkot, mert ezt a hegyesszöget φ-vel jelölve

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{q}{a}\right|\leqq\sqrt{\frac{1}{3}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}.$$

Ha azonban

$$a^2-3q\geqq 0,$$

akkor a

$$3\beta_1-2a\beta_1+q^2=0$$

egyenletnek van két valós gyöke. Ha ezek közül az algebrailag kisebbet β_1 jelöli, a másik pedig β_2, akkor

$$\beta_1\leqq\frac{a}{3},\quad \text{mert}\quad \beta_1+\beta_2=\frac{2a}{3}.$$

Ezzel a tétel ki van mutatva, mivel az előbbiek szerint az $f'(x)=0$ egyenletnek van gyöke az (a, β_1) s így van az $\left(a, \frac{a}{3}\right)$ intervallumban.

A XVII. tétel helyett pontosabbat is kimondhatunk, ha az a_2 és a_3 gyökpontok mellett még továbbiakat is figyelembe veszünk. A XVI. tétel mintájára minden nehézség nélkül általánosithatók *A* alatt idézett dolgozatunk IV., V. és VII. tételei is megfelelő reális polinomokra.

Sz. Nagy Gyula.

ÜBER DIE LAGE DER NULLSTELLEN DES DERIVIERTEN EINES POLYNOMS.

Allgemein bekannt ist der folgende Gauss-sche Satz:

Ausserhalb des kleinsten konvexen Polygons Π (bzw. ausserhalb der kleinsten Strecke), das sämtliche Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ einschliesst, kann die derivierte Gleichung $f'(x) = 0$ keine Wurzel haben.

Diese Arbeit schliesst aus dem Polygone Π gewisse Gebiete aus, wo die derivierte Funktion $f'(x)$ ausserhalb der mehrfachen Wurzeln von $f(x) = 0$ nicht verschwindet. Diese Gebiete sind entweder Sterngebiete oder Winkelräume, deren Mittelpunkte bzw. Scheitelpunkte in den Wurzelpunkten von $f(x) = 0$ liegen, oder gewisse über die Seiten des Polygons Π geschriebene Kreissegmente.

Es bestehen z. B. die folgenden speziellen Sätze:

Liegt die wenigstens p-fache Wurzel a der algebraischen Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$ im Innern des Polygons Π und ist d der Abstand zwischen a und der nächstliegenden Wurzel von $f(x) = 0$, so kann die derivierte Funktion $f'(x)$ im Innern des Kreises, der den Mittelpunkt a und den Halbmesser $\frac{p}{n-1} \cdot d$ hat, ausserhalb von a nicht verschwinden.

Liegt die p-fache Wurzel a der Gleichung

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a)^p = 0$$

im Innern des Dreieckes $a_1 a_2 a_3$, so liegt keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ ausserhalb der drei Winkelräume mit dem gemeinsamen Scheitel a, deren Winkelhalbierenden die Halbgeraden aa_1, aa_2, aa_3

sind und deren Öffnung 2ψ ist, wo der Spitzwinkel ψ der Gleichung $\sin\psi = \frac{1}{1+p}$ genügt.

Am Ende der Arbeit werden einige Sätze des Verfassers über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln (Jahresbericht der Math. Vereinigung Bd. 27 (1918), S. 37—43) für reelle Gleichungen verallgemeinert.

Es gilt z. B. der folgende Satz:

Sind α und β ($>\alpha$) reelle Wurzeln der algebraischen Gleichung n-ten Grades $f(x)=0$ mit reellen Koeffizienten, hat die Gleichung keine Wurzel, deren Realteil im Innern des Intervalles (α, β) liegt und ist h bzw. k die Anzahl der Wurzeln von $f(x)=0$, deren Realteile kleiner als β bzw. grösser als α sind, so hat die derivierte Gleichung $f'(x)=0$ keine Wurzel im Innern der Intervalle

$$\left(\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{k+1}\right) \text{ und } \left(\beta-\frac{\beta-\alpha}{h+1},\ \beta\right).$$

Julius v. Sz. Nagy.

KILÉPÉSI MUNKA ÉS KONTAKTUSPOTENCIÁL.

Az elektromosságot kétféle alakjában ismerjük: ismerjük, mint szabad elektromosságot és ismerjük anyaghoz kötött alakjában. A szabad elektromosságot, az elektront megfigyelhetjük a katódsugárban, vezetőképességgel bíró gázok molekulái között; kötött alakjában, mint a fémek és dielektrikumok belsejében mozgó elektromosságot, amely az elektromos áramot idézi elő, létrehozza mozgásával a mágneses, elektromos és optikai jelenségeket. Bekövetkezhetik az anyaghoz kötött elektromosságnak az anyagtól való elválása, ha valamely külső hatás vagy belső kényszer leküzdi az anyagnak és az elektromosságnak kölcsönös *affinitását.* Az elválasztáshoz *energiára,* munkavégzésre van szükség, mégpedig határozott munkavégzésre, amely általában minden anyagnál más és más, s mely ugyanazon anyagnál is még az anyag állapotától is függhet.

A fontos jelenségcsoportok, amelyeknél ezt az energiamennyiséget, az affinitást meghatározhatjuk és mérhetjük, a következők:

a) gázok és gőzök ionizációja,

b) szilárd testek fényelektromos emissziója,

c) termikus elektron emisszió,

d) érintkezési elektromosság.

A gázok ionizációja történhetik elektron vagy ionbombázással, történhetik besugárzás által. Az elektron lökés által történő ionizációnál az ütköző elektron kinetikus energiáját adja át a neutrális gázmolekulának; ez az energia fordíttatik az elektron leválasztásához. Az *ionizációs* munka mértéke tehát az a *minimális kinetikus energia,* mely már éppen képes egy elektront leválasztani. Ha az ütköző elektron sebességét egy E Volt nagyságú feszültségkülönbségen keresztül való gyorsításból nyerte, akkor az ionizációs munka elektromos egységekben

$$I = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 = Ee,$$

ahol e az elektron töltése,
m az elektron tömege,
v az ütköző elektron sebessége.

E-t *ionizációs feszültségnek* nevezzük és *voltokban* mérhetjük. Az egyöntetűség kedvéért a következőkben mindig az affinitás és a kilépési munka voltokban mért értékeiről fogunk beszélni.

Egy másik jelenség, mely az anyag elektron affinitásának meghatározásához vezet; a *fényelektromos hatás*. Ha egy fémlemezt megvilágitunk, úgy a vele szemben elhelyezett felfogólap negativ töltést kap, annak jeléül, hogy a megvilágitott lemezből a fény hatására elektronok távoznak el. Érdekes jelenség, hogy minden fémre létezik egy meghatározott leghosszabb hullám, amelynél hosszabb hullámú fény fényelektromos hatást többé nem idéz elő. E jelenséget EINSTEIN nyomán úgy magyarázhatjuk, hogy a fényben levő energia, mely benne $h\nu$ quantumokban adagolva terjed, a felfogó lemezen kivált egy elektront, mely v sebességgel hagyja el a lemezt. A beeső $h\nu$ energia tehát egyrészt legyőzi a kilépési munkát, másrészt az eltávozó elektron kinetikai energiájává alakul.

$$h\nu = W + \tfrac{1}{2}\, m\, v^2.$$

Világos, hogy minél nagyobb az ν, annál nagyobb lesz v sebesség, miután W a hullámhossztól független.

Lesz azonban egy olyan ν_0 frekvencia, mely még éppen csak arra elegendő, hogy legyőzze az elektront visszatartó erőt, a kilépési munkát, erre nézve tehát:

$$h\nu_0 = W = e\Phi.$$

Φ a kilépési munka *volt-értéke*.

ν_0 a fényelektromos hatás vörös felé eső *határhullámhossza*; ha $\nu < \nu_0$ a fényből érkező energia nem elegendő az elektron leválasztására, elektron emisszió, fényelektromos hatás nem következik be.

Az EINSTEIN-féle egyenletet számos kísérlet, különösen MILLIKAN[1] pontos és gondos vizsgálatai kitűnően igazolták. MILLIKAN errevonatkozó mérései a h állandó preciziós mérésére is szolgáltak.

Amíg azonban a gőzök és gázok ionizációs potenciálját FRANCK és HERTZ klasszikus kísérletei óta meglehetősen nagy pontossággal tudjuk meghatározni, addig a fényelektromos kilépési munkára vonatkozólag igen eltérőek a különböző kísérletezők által megállapított értékek, még tökéletesen ugyanarra az anyagra vonatkozóan is. A legkisebb gáznyomok, vízréteg, idegen tisztátlanság, amelyek semmiféle kémiai úton ki nem mutathatók, megváltoztatják a Φ értékét.

Az izzó testek elektronemissziójával RICHARDSON[2] foglalkozott legbehatóbban és legmélyebben; tőle ered a termikus elektron emisszió (telítési áram) hőfokfüggvényének meghatározása:

$$J = A\sqrt{T}e^{-\frac{b}{T}}$$

ezt az egyenletet RICHARDSON elméleti úton nyerte, de kísérletileg is igazolta. A kísérleti elrendezés elve a következő: evakuált üvegburába beforrasztott izzószál van, melyet egy második elektród, az anód koncentrikusan vesz körül. Az izzószál hőfokának a mérése legegyszerűbben ellenállásmérés alapján történik. A kísérleti elrendezés nem túlságosan nagy pontosságú: az izzószál hőfoka a különböző pontokon különböző, miután a hozzávetések meleget vezetnek el. A hőfokot természetesen más módszerekkel is lehet mérni, pl. optikai módszerekkel,

---

1 R. A. MILLIKAN: Phys. Zschr. 17, 218, 1916.

2 O. W. RICHARDSON: Proc. Cambridge Phil. Soc. 11, 286, 1901 és Phyl. Mag. 15, 890, 1908.

azonban ezek sem sokkal pontosabbak, mint az ellenállásmérés.

Richardson elméleti levezetésénél az izzótestek elektron emisszióját analógiába hozta a folyadékok párolgásával, a folyadék párolgása közben lehűl; ez a lehűlés mértéke a párolgási hőnek, vagyis annak az energiának, mely felhasználtatik ahhoz, hogy a gőzmolekulák szabadon elhagyhassák a folyadékot. Ezt a párolgási hőt nevezhetjük a párolgásnál legyőzendő kilépési munkának.

Richardson elméleti meggondolása szerint a fémek belsejében szabad elektronok vannak jelen, melyekre érvényesnek vehetjük a Maxwell-*féle sebességeloszlási törvényt.* A határfelületen egy olyan erő működik, mely az elektronok kilépését megakadályozza. Csak azok az elektronok léphetnek ki, amelyeknek kinetikus energiája elegendő a határfelületen legyőzendő kilépési munka elvégzésére.

Ha N-el jelöljük a térfogategységben levő elektronok számát, egy gramm-molekula elektronra eső, tehát 96,500 Coulomb-töltésű elektronok összes tömegét M-el, a kilépési munkát pedig (ugyancsak $F=96{,}500$ coulombra vonatkoztatva) W-vel, akkor a felületegységen keresztül kilépő elektronok száma a kinetikus gázelmélet szerint másodpercenként

$$n = N\sqrt{\frac{2RT}{\Pi . M}}\, e^{-\frac{W}{RT}}$$

I arányos lévén n-el

$$I = \text{const}\ \sqrt{T}\, e^{-\frac{W}{RT}}$$

R az általános gázállandó.

A Richardson-féle egyenletben szereplő b konstáns tehát:

$$b = W/R$$

a kilépési munkát szolgáltatja. Ha tehát a Richardson-féle görbe felvétele után a konstánsokat meghatározzuk, úgy közvetlenül kiszámithatjuk a kilépési munkát. Ezt a kilépési munkát is szokás Voltokban kifejezni: ha meggondoljuk, hogy ez a munka F coulombtöltésre vonatkozik, akkor világos, hogy

$$W = F\Phi.$$

I. Táblázat.

Elem neve	E_1. Volt	Fényelektr Φ volt	Termikus Φ volt	Kontakt potenciál
Helium	25,4	—	—	—
Neon	21,5	—	—	—
Argon	15,4	—	—	—
Hydrogén	17,2 ?	—	—	—
Nitrogén	∾ 18	—	—	—
Higany	10,38	4,05—4,75	—	—
Lithium	5,36	2,34—2,38	—	—
Nátrium	5,18	1,80—2,12	1,8	$\boxed{2}$
Kálium	4,41	1,2—2,02	0,46—1,55	—
Rubidium	4,16	1,2	1,45	—
Cæsium	3,96	1,2	1,81	—
Platina	—	3,63—6,5	6,27	4,1
Wolfram	—	4,52—5,36	4,52	4,7
Molybdän	—	4,33	3,10—4,44	4
Nikkel	—	3,68—4,57	2,77	4,45 ?
Vas	—	3,92—4,30	4,04	3,4
Vörösréz	7,8	4,07—4,63	3,85—4,00	4,05
Thoriumos wolfr.	—	—	2,63	—

Az I. táblázat néhány anyagra vonatkozó különböző módszerekkel nyert elektron affinitás, illetőleg kilépési munka értékeit tartalmazza. Mint látjuk, az ionizációs potenciál értékei (E_1) a kilépési munkától eredő értékektől eltérők, ami azonban nem meglepő, tekintettel arra, hogy az erőviszonyok is mások szilárd testeken belül, mint gázállapotban. Richardson és más elméleti kutatók a klasszikus kinetikus elmélettől független meggondolásokkal is igyekeztek levezetni az emisszió-hőfok egyenletét. Thermodynamikai úton a következő egyenlethez jutottak:

$$I = A\,T^2 a^{-\frac{b}{T}}.$$ [1]

A kísérleti módszerek, mint már említettük, nem nyujtanak elegendő pontosságot és így a kétféle egyenlet helyessége között kísérletileg még nem sikerült dönteni.

A legújabb Sommerfeld-féle [2] quantummechanikai elmélet alapját az képezi, hogy a fémek belsejében mozgó elektronokra vonatkozólag a Maxwell—Boltzmann-féle statisztikus sebességelosztástól eltérő úgynevezett Fermi—Dirac-*féle statisztika* érvényes. Ezen statisztika alapján a következő emissziós formulához jutunk:

$$J = AT^2 e^{-\frac{Wa - Wi}{RT}}.$$

A kilépési munka itt két részből áll: W_a külső kilépési munkából, mely megfelel a kilépésnél legyőzendő ellenállásnak és egy W_i munkából, amely negatív előjelű lévén, az elektronok kilépését elősegíti. Ez a W_i azáltal jön létre, hogy az elektrongáz, mely a Fermi—Sommerfeld-féle felfogás alapján elfajult gáznak tekinthető, a hőfoktól független, belső nyomással bír. Ezen elmélet szerint azonban Wolfram esetében 3000° abs körül az elektrongáz fokozatosan megszűnik elfajultnak lenni, nyomása tehát a hőfokkal növekszik, ebből az következnék, hogy a teljes kilépési munka a hőfokkal erősen csökken. Az eddigi kisérletek szerint ilyen csökkenés nem igen tapasztalható.

Az izzótestek elektron emissziójára vonatkozó vizsgálatoknak, elsősorban a kilépési munka meghatározásának, nagy technikai jelentősége is van; az izzókatóddal működő készülékeknél olyan anyagokra van szükség, amelyeknek kilépési munkája lehetőleg csekély, ugyanis annál kevesebb energiát kell közölni a katód-

[1] O. W. Richardson: Phil. Mag. 28, 633, 1914; S. Dushman: Phys. Rev. 21, 623, 1923.

[2] A. Sommerfeld: Zschr. f. Phys. 47, 1, 1928.

dal (annál alacsonyabb hőmérsékletig kell izzitani), illetőleg ugyanazon viszonyok mellett annál nagyobb emissziós áramot kapunk, minél kisebb az az erő, mely az elektronokat visszatartja. A termikus elektron emissziós kilépési munka is nagy mértékben függ a felület sajátságaitól. A legcsekélyebb gázréteg vagy idegen tisztátlanság még egy atomnyi vastagságban is, ugyanúgy mint a fényelektromos jelenségnél, jelentékenyen megváltoztatja, rendszerint megnöveli a kilépési munkát, egyes anyagok pedig csökkentik. Langmuir pl. megállapitotta, hogy a Wolfram felületén képződő egyatomos oxygénréteg a Wolfram elektronemissziós kilépési munkáját jelentékenyen megnöveli. Ha egy ilyen oxygénréteggel födött Wolframfelületre egy ugyancsak atomáris vastagságú *Cs* réteget párologtatunk, akkor viszont az izzódrót elektronemissziója nagyságrendekkel növekszik, aminek nyilvánvaló oka a kilépési munka nagymértékű csökkenése.

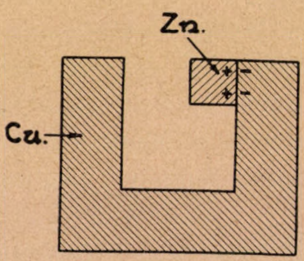
A Richardson-görbe felvétele útján a kilépési munkát meghatározhatjuk; ezzel a módszerrel azonban csak igen magas hőfokon dolgozhatunk és a kilépési munka a hőfokkal változhatik.

A fényelektromos és termikus emisszió jelenségekkel szoros és mélyenfekvő kapcsolatot mutat az érintkezési elektromosság jelensége; az elektromosság tanának több mint száz éven keresztül igen behatóan vizsgált, sokat vitatott jelenségcsoportja, amelynek törvényszerűségei, mint általában a fémes vezetés jelenségei, alapjában véve kevéssé tisztázott fejezeteit alkotják a fizikának.

Az alapjelenségek, melyek Galvani és Volta felfedezései óta úgyszólván ősi forrását képezik az elektromosságnak, az elemi fizikából ismeretesek: ha különböző testeket érintkezésbe hozunk egymással, akkor azok egymáshoz képest elektromos feszültségre tesznek szert, elektromos töltést nyernek. Ezt a jelenséget a következőképpen értelmezhetjük: Az elektromosság, és pedig a negativ elektromosság, tehát a szabad elektronok affinitása az egyik fémhez nagyobb, mint a másikhoz, ennek következtében két különböző fém érintkezésekor az egyik fémből mindaddig mennek át elektronok a másikba, amíg az előálló potenciálkülönbség, tehát a visszatartó erő a további elektronvándorlást meg nem akadályozza. Az előálló potenciálkülönbség mértéke a fémek elektron affinitásában mutatkozó különbségeknek. Miután a fémek elektron affinitásának mértéke a fényelektromos vagy a termikus elektron emissziónál mérhető kilépési munka, várható, hogy a két fém között a kontaktpotenciál egyenlő a kilépési munkák különbségével. Richardson mutatta ki, hogy ez a reláció igen jó közelítéssel valóban fennáll, a levezetést azonnal vázolni fogjuk.

A kontaktuspotenciál értékének pontos definícióját a következőképpen nyerjük: helyezzünk el az egyik érintkező test felületének közvetlen közelébe egy egységnyi pozitív töltést, mozgassuk ezt az egy egységnyi töltést bármilyen úton a másik test közvetlen közelébe; a két test közt fennálló elektromos tér által az egységnyi töltésen végzett munka szolgáltatja a kontaktuspotenciál különbséget.

Képzeljünk el most már két érintkező fémet, pl. *Zn*-t és *Cu*-t, legyen a két fém közti kontaktuspotenciál-különbség $V_{Zn} - V_{Cu}$. Képzeljünk el egy e töltésű elektront körülsétálni a *Cu*-ból a *Zn*-be, kilépni a *Zn*-felületén, végig futni a két fém közti teret és belépni a *Cu*-ba. Az energiamegmaradás törvényének értelmében a végzett munkák algebrai összege nulla.



1. ábra.

A *Zn*-ből való kilépésnél az elektronnak munkát kell végezni $e\Phi_{Zn}$, a két fém között a térben végzendő munka $(V_{Zn} - V_{Cu})\,e$, a *Cu*-ba való belépésnél voltaképpen munkát nyerünk, tehát a végzendő munka negatív, $-e\Phi_{Zn}$. A körfolyamatokra érvényes tétel szerint kellene, hogy, számba véve az elektron körülfutása alatt végzett összes munkákat, $E=0$ értelmében nulla eredőt kapjunk. A tapasztalás azonban azt mutatja, hogy ez a kiegyenlítés nem egészen tökéletes, minek oka a PELTIER-effektusban keresendő, ugyanis, ha két fém érintkezési felületén áram halad keresztül, akkor az érintkezési hely lehűl vagy felmelegszik, vagyis munkavégzés történik, ennek nagysága egy elektronra $e\Pi$, ahol tehát Π a PELTIER-effektusnak megfelelő feszültség, ami rendesen igen kicsiny a kontaktuspotenciálhoz képest. Ezt tehát még hozzá kell adnunk az eddig felírt munkához, hogy a körfolyamat alatt végzett összes munkát megkapjuk. Az összes munka tehát:

$$e(\Phi_{Zn} + V_{Zn} - V_{Cu} - \Phi_{Cu}) + e\Pi = 0.$$

A PELTIER-feszültség a legtöbb fémpárra azonban a kontaktuspotenciál mellett elhanyagolható és így:

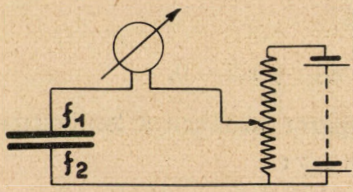
$$\Phi_{Zn} - \Phi_{Cu} = V_{Cu} - V_{Zn}.$$

Látjuk már most, hogy a kontaktuspotenciál mérése módot nyujt arra, hogy a kilépési munka értékét általa meghatározzuk, várható tehát, hogy az így nyert kilépési munka értékek jól egyezni fognak a más úton nyert értékekkel.

A kontaktuspotenciál mérése hosszú időn keresztül igen eltérő eredményekre vezetett. A kontaktuspotenciál is nagy mértékben függ a vizsgált fémek felületi sajátságaitól, éppen úgy, mint a fényelektromos és termikus emissziós jelenségek. A fémek felületén elhelyezkedő gázrétegek és tisztátlanságok itt is nagy változásokat képesek előidézni. Voltak fizikusok, akik ezeknek hatása alatt az adszorbeált gáz és vízrétegek tanulmányozása közben arra az eredményre jutottak, hogy tiszta felületű fémek között nincs is kontaktuspotenciálkülönbség.

Pontos értékeket tehát csak az olyan mérési elrendezésekkel nyerhetünk, amelyeknél a vizsgált fémek tökéletesen tisztán állíthatók elő és teljesen kigázosíthatók. A pontos és reprodukálható méréseket a modern vacuum-technika tette lehetővé és minden olyan mérést, mely nem történik a vacuum-technika legfinomabb eszközeivel, teljesen illuzórikusnak kell tekintenünk.

A kontaktuspotenciál meghatározására a legrégebben használt eljárási mód THOMSONtól származik. Az alapgondolata a következő (2. ábra): két különböző fémből lévő lapot (f_1 és f_2) egymással szemben helyezünk úgy, hogy köztük egy kis légrés maradjon; egy potenciómétereu át ezt a kondenzátort bizonyos feszültségre hozzuk; a két lap közti elektromos tér nem lesz azonos a potenciométer adta feszültségkülönbséggel, mert hozzájárul még a két lap kontaktuspotenciálja. Ha a lapok távolságát változtatjuk, megváltozik a kondenzátor kapacitása, illetve a töltéseloszlás és így az f_1 laphoz kapcsolt elektrométer áramot fog mutatni a lemezek távolítása közben. Ha a potenciómétert azonban úgy szabályozzuk, hogy éppen kiegyenlítse a lapok kontaktuspotenciálját, úgy a lemezek távolságának változtatása áramot nem fog létrehozni. A potenciométer adta ezen feszültség érték mértéke a két fém érintkezési feszültségének. A kontaktuspotenciál mérésére szolgáló régebbi módszerek közül megemlíthetjük még a LENÁRD-félét.[1] E módszernél egy izzókatód áll szemben egy más fémből készült elektróddal; mindkét elektród vacuumburában van forrasztva, tehát az elektródoknak magas hőfokon való kiizzítása által gondoskodhatunk tiszta és gázmentes felületekről. Ha az izzókatód és a másik fém között nem volna kontaktuspotenciálkülönbség, akkor nulla külső feszültségnél (természetesen olyan kis emissziós áramot feltételezve, melynél tértöltés nincs) minden kilépő elektron eljut a másik elektródhoz, vagyis telítési áramot kapunk. Ha az izzókatód és a második elektród között a kontaktuspotenciál nullától különböző, úgy késleltető vagy gyorsító feszültséget kell alkalmaznunk, hogy ezt a telítési pontot elérjük. Ez az alkalmazandó feszültség pontosan egyenlő a kontaktuspotenciállal. Ez a módszer voltaképpen sohasem került komoly kivitelre, ennek alapján pontos mérések nem történtek. A módszer alap-



2. ábra.

[1] P. LENARD, Ann. d. Phys. 8. 178, 1902.

vető hibái: az izzókatód fűtőárama a két elektród közötti feszültséget határozatlanná teszi, továbbá: a két elektród hőfoka szükségképpen különböző.

Patai Imre[1] 1929-ben megjelent dolgozatában egy olyan módszert[2] ismertetett, amellyel a Wolfram és thoriumos Wolfram felületek közötti kontaktuspotenciált nagy pontossággal tudta meghatározni.

Langmuir[3] 1930-ban publikált egy kísérleti elrendezést kontaktuspotenciálkülönbségek mérésére két elektródos elektroncsővel, amelyben az anódnak használt elektród felületét részben termikus kezeléssel (például thorium tartalmú Wolframdrót aktiválásával), részben pedig caesium rápárologtatásával változtatta meg. A kontaktuspotenciál értékét az áramfeszültséggörbe eltolódásából mérte. Ez a Langmuir-féle kísérleti elrendezés azonban számos hibaforrást tartalmaz: például segédelektródokat kell alkalmazni stb.

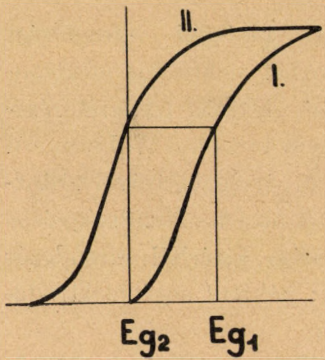
Vizsgálatainknál[4] három elektródot alkalmaztunk és egy újabb, általánosabb módszert követtünk, amely nem szorítkozik speciális anyagokra, hanem kiterjeszthető tetszőleges fémekre, sőt nemfémekre is; erről az új módszerről és az ezzel végzett vizsgálatainkról kissé részletesebben szeretnénk szólani.

Kísérleti készülékünk lényegében egy speciális konstrukciójú *háromelektródos elektroncső*, melynél a rács és anód az izzószál körül koncentrikusan van elrendezve. Amint tudjuk, a háromelektródos elektroncsőnél az anódhoz folyó elektronáram intenzitását a katód és rács között fellépő feszültségkülönbség szabályozza; ha felrajzoljuk az anódáramgörbét, mint a rácsfeszültség függvényét (3. ábra), akkor az elektroncsőnek úgynevezett karakterisztikáját kapjuk. A kilépő elektronra itt az alkalmazott külső feszültségen kívül csakúgy, mint Thomson

---

1 Patai J., Mat. és Fiz. Lapok XXXV. július-december, 1929.
2 E. Patai, Zeitshr. f. Physik. 59. 697. 1930.
3 J. Langmuir, Phys. Rev. 34, 129, 1929.
4 M. Forró und E. Patai, Zeitschr. f. Physik. 63. 444. 1930.

kísérleténél láttuk, hatással van a katód és rács közti elektromos tér, mely két különböző fém kontaktuspotenciáljától függ; a tényleges feszültségkülönbség, melyet az elektron tehát befut, nagyobb vagy kisebb lesz annál, melyet kívülről alkalmazunk (E_g-nél). Ennek a hozzájáruló feszültségnek az értéke mindenesetre még magából a karakterisztikából nem olvasható le. Ha azonban a rács anyagának minőségét megváltoztatjuk (a nélkül, hogy a geometriai elrendezésen és egyéb kísérleti körülményeken valami változás is történjék), úgy ezáltal más lesz az elektronra működő tényleges feszültség; a külső feszültség egy más állása mellett fogja most ugyanazon áramértékeket felvenni, a karakterisztika eltolódást fog mutatni. Az I anyagú rács esetében legyen az elektronra működő tényleges feszültség $E_{g_1}+\varphi_1$, ezek hatása alatt az áram J értéket mutatja; a II anyagból készült rácsnál ugyanaz az J áramértéket egy más külső feszültség E_{g2} mellett fogja felvenni; kell tehát, hogy



3. ábra.

$$E_{g_1}+\varphi_1-E_{g_2}+\varphi_2,$$

vagyis:

$$E_{g_1}-E_{g_2}=\varphi_2-\varphi_1$$

$E_{g_1}-E_{g_2}$ tehát mértéke a két különböző anyagból készült rácskontaktuspotenciálkülönbségének. A karakterisztika eltolódása balra, azaz negatívabb rácsfeszültségértékek felé fog történni, ha a kilépési munka II anyagra kisebb, mint az I anyagra.

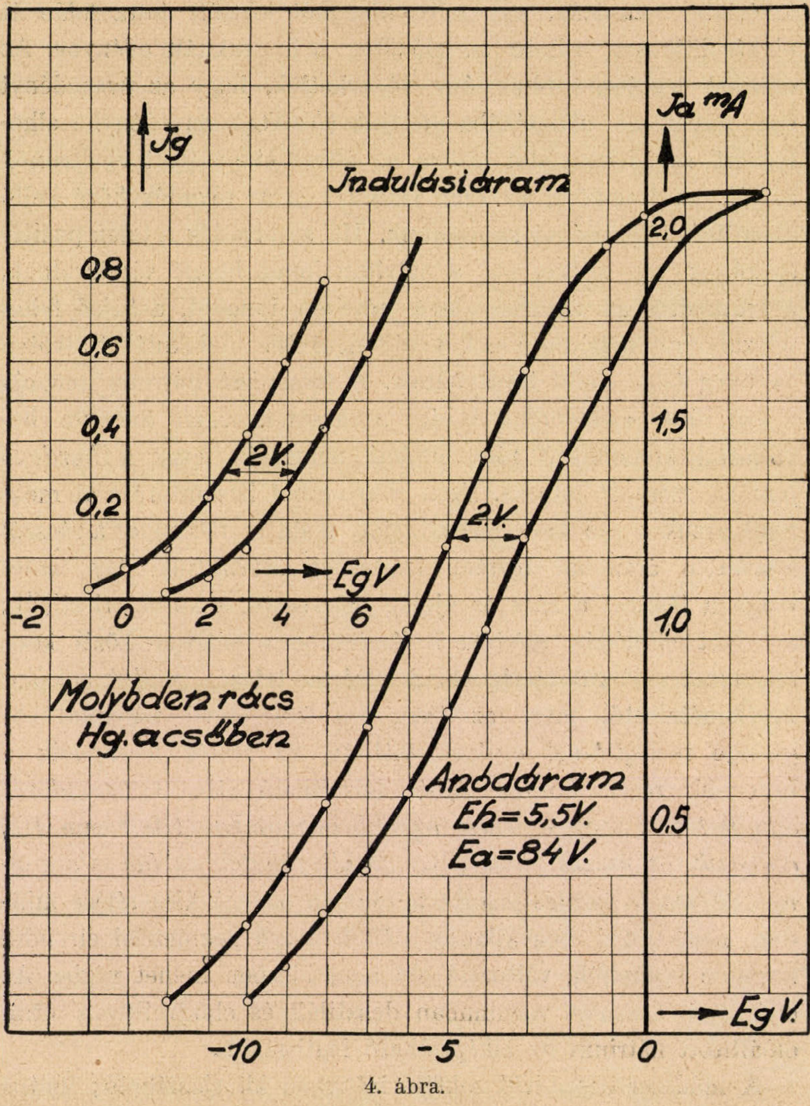
A megfelelő anyagot, mellyel a bura feltörése nélkül és tetszés szerint sokszor megismételhető módon kicserélhettük a rács anyagának minőségét, a *nátriumban* találtuk. Ismeretes, hogy a nátrium, mint azt először Warburg,[1] később Selényi[2]

---

[1] E. Warburg, Wied. Ann. 21, 622, 1884.
[2] Selényi P, Phys. Zeitschr. 30, 933, 1929.

kisérletei mutatták, egy nátronüvegből készült bura falán át elektrolítikusan vihető az előzőleg már evakuált edénybe. Az eljárást legcélszerűbben úgy végezhetjük, hogy az üvegedényt egy nátriumsó olvadékába mártjuk ($NaNO_3$), az edénybe elhelyezett segédelektródot izzítva az általa kibocsátott elektronok zárják az áramkört, ha ezen izzószál és az olvadék közé kellő feszültségkülönbséget kapcsolunk. Ha az olvadék a telep pozitív sarkához van kötve, úgy a nátrium ionok befelé vándorolnak, helyettesítik az üvegben levő nátrium ionokat, a belső falon felszabadult nátrium ionok pedig neutrális molekulákat alkotva az üveg falán belül lecsapódnak. A lecsapódó nátrium bevonja a cső hideg elektródjait is, így a rácsot is, ezen nátrium bevonattal szemben a rács eredeti fémmagja, csak a *hordozó fémtest* szerepét játssza. Ezen nátriumból készült ráccsal meghatározzuk a cső karakterisztikáját, majd a nátriumot a rácsról közvetlen árammal történő izzítással eltávolítjuk, így ismét maga a fémtest a rács és újólag felvesszük a karakterisztikát; a nyert eltolódás mértéke a fémtest és a nátrium közti kontaktuspotenciálkülönbségnek. A kísérlet tetszés szerint sokszor megismételhető, mert az üvegbura falán levő nátriumtükör gyenge melegítéssel elpárologtatható, ez ismét lecsapódik a hidegebb rácsra, onnan újból leizzítható stb. *A berendezés előnye tehát, hogy a lehető legjobb vacuumban* (10^{-9} mm *Hg*) *dolgozik, az összes fémalkatrészek kiizzíthatók és így a szennyeződésektől mentesíthetők*; a rács anyagának kicserélése minden mechanikai beavatkozás nélkül a cső geometriai elrendezésében semmiféle változást elő nem idézően mehet végbe. Az eljárásnál használt vacuumban desztilált és elektrolitikus úton előállított nátrium az elképzelhető legtisztább.

A módszer ezenkívül sokféle irányban kiterjeszthető; fontos kérdés pl. a fémek kontaktuspotenciál változásainak vizsgálata, adszorbeált gázrétegek hatása alatt; ezt a mérést kételektródos elrendezéssel nem is lehet eszközölni, miután az elektródhoz folyó elektronáram kettős rétegek képződése következtében a dielektrumok felületi sajátságait, így tehát a kontaktuspotenciált



4. ábra.

is megváltoztatja. Ezt a jelenséget különböző utakon egyértelműleg megállapitották. A háromelektródos elektroncsőnél ez a nehézség nem merül fel, miután a feszültségével vezérlő rácshoz elektronáram nem is folyik.

Különböző fémekre vizsgálatainkat úgy terjesztettük ki, hogy különböző anyagokból készítettük a rácsot és mindenkor mint összehasonlító anyagot, nátriumot használtunk. A megvizsgált anyagok: *W, Pt, Mo, Fe, Cu* és *Ni* közül a *Mo*-ra nyert görbéket mutatja a 4. ábra; a II. táblázat pedig a nátriumra vonatkoztatott kontaktuspotenciálkülönbségek értékeit tartalmazza. Felvéve nátriumra a kilépési munka értékét 2·0 Voltnak, nyerjük a megvizsgált anyagokra a kilépési munka értékeit voltokban és összevethetjük őket azokkal az eredményekkel, melyeket a termikus elektronmisszió és fényelektromos hatás hullámhosszából számították ki (a táblázatban számított értékkel jelölve).

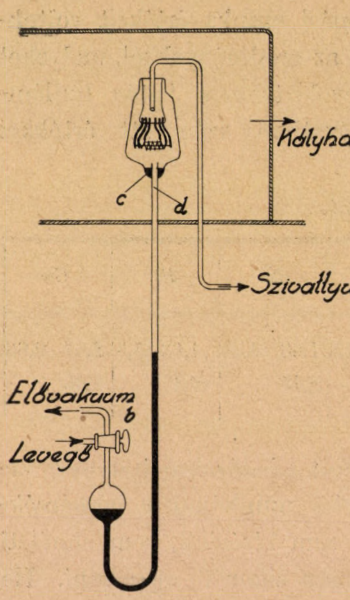
II. Táblázat.

	Mo	*W*	*Fe*	*Ni*	*Pt*	*Cu*
Számított érték :	2,33	2,52–3,36	1,92–2,3	1,68–2,57	1,63–4,5	2,07–2,63
Mért érték :	2,0	2,7	1,4	2,45	2,1	2,05

Módszerünk a következő felvetődött kérdésekre tud még kísérleti anyagot szolgáltatni. A kilépési munkának a hőmérséklettől való függése, mely kérdésre sem kísérleti, sem elméleti úton kielégítő választ mindezideig nem sikerült még adni. Ha egy ilyen temperatúra koefficiens létezik, úgy természetesen a kilépési munkák értékeinek összehasonlításához a RICHARDSON formulából adódó értékeket nem lehet felhasználni, tekintettel, hogy ezek a mérések sokkal magasabb hőmérsékleten történnek. Néhány eddig elvégzett előzetes mérésből azt az eredményt nyertük, hogy temperatúra függés nincs. Egy másik érdekes kérdésre IVES és OLPIN[1] amerikai fizikus megfigyelései fordították figyelmünket. IVES ugyanis azt találta, hogy a fényelektromos hatás hosszú hullámok felé eső határhullámhosszának értéke vékony rétegek esetében függ a réteg vastagságától; létezik

[1] E. IVES és A. R. OLPIN, Phys. Rev. 34, 117. 1929.

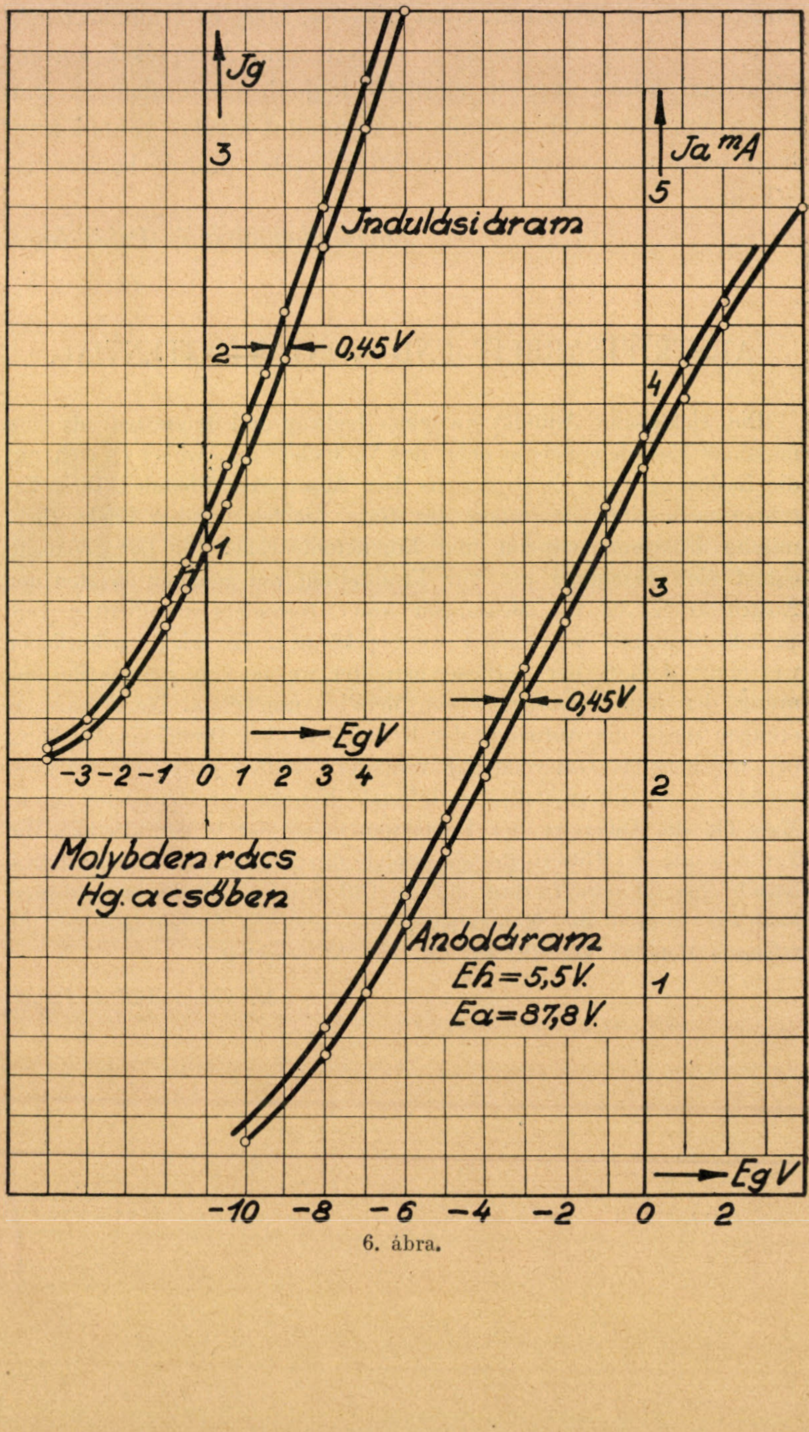
egy bizonyos vastagság, melynél ez a határhullámhossz a leghosszabb, leginkábban van a vörös felé eltólva. Érdemes volna tehát a kilépési munkának a rétegvastagságtól való függését a kontaktuspotenciál mérése révén is megfigyelni és összevetni IVES adataival. A mi mérőmódszerünk erre igen alkalmas, mert a bura és rács hőfokának szabályozásával tetszésszerinti vastagságú bevonatokat tudunk előállitani, sőt a nátriumnak a rácsról való lepárologtatása tudjuk követni a folytonosan közben rétegvastagság csökkenését, illetőleg a karakterisztika eltolódását.



5. ábra.

Vizsgálatainkat kiterjesztettük még a higany és molybdän közötti kontaktuspotenciálkülönbség meghatározására. E célra a kisérleti készülékbe nátrium helyett higanyt vezettünk be. A higany bevezetésére használt apparatúra a mellékelten bemutatott rajzon látható (5. ábra). Miután a higany olvadáspontja a nátriuménál sokkal alacsonyabb, ezeket a méréseket, amelynek technikája egyébként tökéletesen megegyezik a nátriumos mérésekével, alacsony hőmérsékleten végeztük; a kisérleti csövet bemártottuk egy DEWAR-féle edénybe, amely szilárd szénsavból és alkoholból álló hűtőkeveréket tartalmazott. A 6. ábra a tiszta molybdänfelület és a higany közötti kontaktuspotenciálra vonatkozó karakterisztikus görbéket mutatja.

Összefoglalva már most az itt elmondottakat; láttuk, hogy a kilépési munka meghatározása történhetik különböző természetű jelenségek alapján. Legpontosabbaknak és legmegbizhatóbbaknak a kontaktuspotenciálméréseket tekinthetjük. A mi módszerünk egy lépést jelent a mérések megbizhatóságának és


Jg
3
2
1
0,45V
Jndulási áram
EgV
-3 -2 -1 0 1 2 3 4
Molybden rács
Hg. a csőben
Ja mA
5
4
3
2
1
0,45V
Anódáram
Eh=5,5V.
Ea=87,8V.
EgV
-10 -8 -6 -4 -2 0 2

6. ábra.

pontosságának fokozására: azt hisszük, hogy ez a módszer még számos kérdésre fog kielégítő választ adni. A mérések a technika mai állása mellett elérhető legjobb vacuumban és igen tiszta fémfelületeken történhetnek, miáltal hivatva vannak arra, hogy ezen fontos anyagi állandónak értéke általuk határoztassék meg.

Forró Magdolna és Patai Imre.

AUSTRITTSARBEIT UND KONTAKTPOTENTIAL.

Die elektrische Affinität zwischen Ladung und Masse tritt als eine messbare Energiemenge in allen den Versuchen auf, wobei es sich um die Loslösung eines Elektrons aus dem Atomverband handelt. Diese Erscheinungen sind: Ionisation der Gase, Lichtelektrischer Effekt, thermische Elektronenemission und Kontaktpotenciale. Die Letztgenannte eignet sich besonders gut zur Ermittelung von genauen Werten der Austrittsarbeit, da die Messungen unter besonders vorteilhaften Versuchsbedingungen veranstaltet werden können. Es wird ausführlicher von einer Methode der Verfasser berichtet, welche eine genaue Bestimmung der Kontaktpotenciale von Metallen ermöglicht. Die Messungen erfolgen durch die Aufnahme der Kennlinien einer Dreielektrodenröhre, bei welcher das Gittermaterial verändert werden kann; die bei zwei verschiedenen Gittermetallen auftretende Kennlinienverschiebung ist ein Mass für die Differenz der Kontaktpotenciale der beiden Metalle. Die Veränderung des Gittermaterials erfolgte durch Aufdampfen von elektrolytisch eingeführtem Natrium auf die Gitterspirale. Mit der angegebenen Methode wurden die Kontaktpotenciale bzw. die Austrittsarbeiten für folgende Metalle: *Mo. W, Pt, Cu, Fe, Ni* ermittelt.

M. Forró und I. Patai.

KÖNYVISMERTETÉS.

Thomas Muir: *The theory of determinants in the historical order of development;* **vol. I**, up to 1841, pp. XI + 491 (1906); **vol. II**, the period 1841—1860, pp. XVI + 475 (1911); **vol. III**, the period 1861—1880 pp. XXVI + 503 (1920); **vol. IV**, the period 1880—1900, pp. XXXI + 508 (1923). London.

Thomas Muir: *Contributions to the history of determinants 1900—1920*; pp. XXIV—408 (1930). London.

Muir — aki már a mult század 70-es éveiben figyelemreméltó cikkekkel, 1881-ben pedig egy tankönyvvel gazdagította a determinánsok irodalmát — mindinkább a tárgy történetébe merülve, magának azt tűzte ki célul, hogy egy négykötetes könyvben részletes képet ad a determinánsok elméletének fejlődéséről, kezdve az első csírákon és végezve az 1900. év eredményeivel. Az I. kötet első fele 1890-ben jelent meg, de a teljes I. kötet csak 1906-ban. Közben a szerző esztendőkön át munkájával egyáltalában nem foglalkozhatott. Ugyanis mintegy két évvel az első félkötet megjelenése után Rhodes Cecil Dél-Afrika közoktatásának szervezésével és igazgatásával Muirt bízta meg, ez a hivatal pedig őt teljesen lekötötte. Régi tervének megvalósításához Muir csak akkor fogott újra, midőn 1899—1902 a búr háború izgalmai között csak a tudomány művelésétől remélt és csak benne talált lelki nyugalmat. A munka azonban ezentúl is sokáig igen lassan haladt és ismételten megakadt. A szerző csak 1915 óta — hivatalától megválva — fordíthatta minden erejét és idejét a determinánsok irodalmának vizsgálatára és feldolgozására. Miután így végre minden akadály el volt hárítva, további nyolc év alatt az eredeti programm egész teljességében megvalósulhatott.

Muir azután is folytatta kutatásait és 1930-ban egy pótkötetben kiadta az 1900—1920 évek irodalmának feldolgozását. E pótkötet megjelenésének alkalmából foglalkozom a munkával.

Muir könyve értekezésről értekezésre, munkáról munkára halad; mindegyiknek eredményeiről külön rövid, de világos és szabatos cikk-ben számol be. A cikkek a determinánsok elméletének egyes fejezetei szerint vannak rendezve; a fejezeteken belül időrendben következnek. Aki a determinánsok irodalmáról bármiféle felvilágosításra szorul, annak ez a könyv nélkülözhetetlen forrásmunka.

MUIR a magyar irodalommal is behatóan foglalkozik és róla sokszor igen elismerően nyilatkozik. Ismerteti és behatóan tárgyalja azokat az értekezéseket is, amelyek pusztán magyar nyelven jelentek meg. Különösen kiemeli, hogy nálunk egy ideig mennyire virágzott a komponált determinánsok irodalma (az analitikus geometriában szereplő determinánsok, indukált helyettesítések determinánsai stb.).

A magyar írókról megjelent cikkek száma:

	A III. kötetben	A IV. kötetben	A pót-kötetben
ARANY DÁNIEL	—	—	1
BEKE MANÓ	—	1	—
FARKAS GYULA	—	3	—
HUNYADY JENŐ	5	6	1
KÖNIG DÉNES	—	—	2
KÖNIG GYULA	1	—	2
KÜRSCHÁK JÓZSEF	—	—	6
PÓLYA GYÖRGY	—	—	2
RADOS GUSZTÁV	—	5	1
SCHOLTZ ÁGOSTON	2	—	—
SZABÓ PÉTER	—	—	1
SZÁSZ OTTÓ	—	—	3
SZÜTS MIKLÓS	1	—	—
ZEMPLÉN GYŐZŐ	—	—	1

Természetesen nem egy dolgozat kimaradt, mert címéből nem volt szembeszökő, hogy milyen közel áll a determinánsok elméletéhez. Így történt ez pl. BAUER MIHÁLY értekezésével «*A karakterisztikus egyenletek elméletéhez*»; *Mat. és Fiz. Lapok*, III. köt. (1894).

MUIR nagy súlyt helyez a prioritás megállapítására. A IV. kötet 298. lapján szinte megbotránkozva említi, hogy RADOS GUSZTÁV értékes dolgozata az ortogonális helyettesítésekről (*Berichte aus Ungarn* X. köt. 95—97. lap., *Mat. és Természettud. Ért.*, X. köt. 16—18. lap; 1891) 20 éven át jóformán ismeretlen maradt, s hogy 1897-ben JAHNKE az ott bebizonyított tételnek egy speciális esetét újból tárgyalta RADOSra való hivatkozás nélkül. Saját magának egy 1914-ben HUNYADYtól függetlenül talált tételéről ismételten kijelenti, hogy a prioritás HUNYADY JENŐt illeti, aki a tételt már 1882-ben kimondotta és bebizonyítását mint feladato kitűzte.

Aki elfogulatlanul foglalkozik a tudomány történetével, azt bizonyosan a következő kérdés is érdekli: A magyar matematikai vizsgálatokban bizonyos fajta determinánsok nagy szerepet játszanak; vajjon külföldön kik foglalkoztak már előbb ezekkel a determinánsokkal? Lássuk egypár esetben, hogy erJenézve milyen tanulságokat meríthetünk MUIR könyvéből.

HUNYADY és SCHOLTZ behatóan foglalkoztak azokkal a determinánsokkal, amelyek a kúpszeletek elméletében szerepelnek. Ki foglalkozott egyáltalában először ilyen determinánsokkal? Erről MUIR könyvében (II. kötet, 10—13. lap) azt olvassuk, hogy CAYLEY már 1843-ban determinánsokkal bizonyította be a PASCAL-tételt.

HUNYADYnak és SCHOLTZnak említett vizsgálódásaiban mint alapvető segédtétel szerepel a következő azonosság

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & 2x_1y_1 & 2x_1z_1 & 2x_1y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & 2x_2y_2 & 2x_2z_2 & 2x_2y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & 2y_3z_3 & 2x_3z_3 & 2x_3y_3 \\ x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3+z_2y_3 & x_2z_3+z_2x_3 & x_2y_3+y_2x_3 \\ x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & y_1z_3+z_1y_3 & x_1z_3+z_1x_3 & x_1y_3+y_1x_3 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+z_1y_2 & x_1z_2+z_1x_2 & x_1y_2+y_1x_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2$$

amelyet SCHOLTZ figyelemreméltó módon bizonyít be. Nem található-e már előbb másutt ez az azonosság és épen ez a bebizonyítás? MUIR könyvében (II. köt., 52—53. l.) azt olvassuk, hogy az azonosság nem csak maga, hanem egyszersmind messzemenő általánosítása SCHLÄFLItől való (az eleminició elméletéről írt cikke végén *Denkschriften d. k. Akad* [Wien]; *math.-naturw. Cl.* IV. 2; 1851), továbbá (III. köt., 31—32. l.), hogy a szóbanforgó speciális esetnek SCHOLTZ-féle bebizonyítása már BRILLnél is megvan (*Math. Annalen,* III. köt., csillag alatt a 462—463. lapon; 1871).

Németországban KRONECKER és hazánkhan RADOS GUSZTÁV egymástól függetlenül találtak egy nevezetes tételt arról a pq fokú determinánsról, amely úgy keletkezik, hogy egy p-edfokú determináns minden elemét megszorozzuk egy q-adfokú determináns minden elemével és a szorzatokat alkalmasan elrendezzük. Pl. a $p=3$, $q=2$ esetben a

$$P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}$$

determinánsokból előállított

$$\begin{vmatrix} a_1\mu_1 & a_1\nu_1 & b_1\mu_1 & b_1\nu_1 & c_1\mu_1 & c_1\nu_1 \\ a_1\mu_2 & a_1\nu_2 & b_1\mu_2 & b_1\nu_2 & c_1\mu_2 & c_1\nu_2 \\ a_2\mu_1 & a_2\nu_1 & b_2\mu_1 & b_2\nu_1 & c_2\mu_1 & c_2\nu_1 \\ a_2\mu_2 & a_2\nu_2 & b_2\mu_2 & b_2\nu_2 & c_2\mu_2 & c_2\nu_2 \\ a_3\mu_1 & a_3\nu_1 & b_3\mu_1 & b_3\nu_1 & c_3\mu_1 & c_3\nu_1 \\ a_3\mu_2 & a_3\nu_2 & b_3\mu_2 & b_3\nu_2 & c_3\mu_2 & c_3\nu_2 \end{vmatrix}$$

determináns értéke a szóbanforgó tétel szerint P^2Q^3. Erre a tételre ki jutott először és mikor? Már (lásd MUIR, II. köt., 102—104. l.) 1858-ban ZEHFUSS bebizonyította *(Zeitschrift f. Math. u. Phys.,* III. köt., 298—301. lap).

A példákat szaporíthatnám, de már ezek is mutatják, hogy MUIR munkájából mennyi érdekes tanulságot meríthetünk.

Kürschák József.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1930. évi XXXIV-ik matematikai tanulóversenyről.

A Társulat XXXIV-ik matematikai tanulóversenyét 1930. október 11-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 28, Szegeden 12 versenyző jelentkezett; beadatott 19, illetőleg 5 dolgozat.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Hány olyan ötjegyű szám van, amely 6-tal végződik és 3-mal osztható?

2. Ha a $8\times 8 = 64$ mezős sakktáblán tetszésünk szerint egy egyenes vonalat rajzolunk, ez legfeljebb hány mezőnek belsején fog keresztülmenni?

3. Legyen P az ABC hegyesszögű háromszög belsejének valamely a körülírt kör középpontjától különböző pontja. Bebizonyítandó, hogy az AP, BP, CP távolságok között van egy r-nél nagyobb és egy r-nél kisebb, hol r a háromszög köré írt kör sugara.

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság Kürschák József elnöklete alatt a következő tagokból állott: Éber József, Faragó Andor, Fejér Lipót, Szücs Adolf és Kőnig Dénes előadó. Kimentette magát: Rados Gusztáv.

A Bizottság mély fájdalommal érezte Rátz László hiányát, a ki különösen a Középiskolai Mathematikai Lapoknak két évtizeden át való szerkesztésével a középiskolai ifjúság érdeklődését a matematika iránt állandóan élesztette, ami versenyeink eredményén mindenkor észlelhető volt.

A Bizottság a dolgozatok gondos átvizsgálása után azt javasolta, hogy a br. Eötvös Loránd-jutalom *első díja* Grünwald Tibor-nak, a budapesti községi Eötvös József reáliskolában Németh Lajos tanítványának ítéltessék oda, aki mind a három föladatot helyesen megoldotta. Dolgozatában különösen figyelemreméltó a harmadik föladatnak ügyes megoldása, annál is inkább, mert e föladatot csak ő oldotta meg. *A második díjra* a Bizottság Déman Pál-t, a budapesti állami Bolyai reáliskolában

Fröhlich Károly tanítványát ajánlotta, aki a második föladatot legszebben oldotta meg, azonban a harmadik tételnél, mint sok más versenyző, bebizonyítás helyett megelégedett a tételnek puszta átfogalmazásával.

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1930. november 6-án tartott ülésén egyhangúlag elfogadta.

Az 1930. évi XXXIV-ik matematikai tanulóversenyen díjat nyert dolgozatok.[1]

Grünwald Tibor dolgozata.

I. A keresett számok mindenesetre a következő alakban írhatók

$$10x + 6.$$

A legkisebb ezen számok közül: 10,026, a legnagyobb 99,996, tehát

$$10{,}026 \leq 10x + 6 \leq 99{,}996$$

tehát

$$10{,}020 \leq 10x \leq 99{,}990$$

s így

$$1002 \leq x \leq 9999$$

$10x + 6$ osztható 3-mal. Ez csak úgy lehet, hogy $10x$, tehát x is osztható 3-mal.

Tehát a jelzett számok száma egyenlő az 1002-től 9999-ig létező 3-mal osztható számok számával (beleértve e határokat is).

1002-ig $\frac{1002}{3} - 1 = 333$ 3-mal osztható szám van. (1002 nincs beleszámítva) 9999-ig $\frac{9999}{3} = 3333$ olyan, szám van mely 3-mal osztható (9999-et is beleértve).

S így a keresett számok száma

$$3333 - 333 = \mathbf{3000}.$$

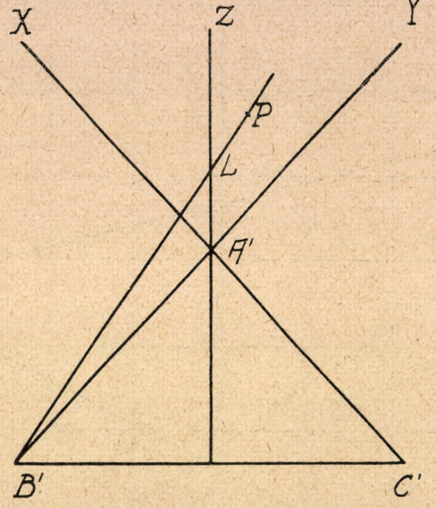
II. Ha az A vagy A' pontot (1. ábra) összekötjük az «a_1» köz valamelyik pontjával, úgy ez az egyenes 8 mezőnyön megy át.

Ha az A vagy A' pontot az a_2 köz pontjaival kötjük össze, ezen egyenesek legfeljebb 9 mezőnyön mennek át.

S könnyen belátható, hogy ha az «a_i» köz pontjait az A ill. A' ponttal összekötő egyenesek legfeljebb N_i mezőnyön mennek át, úgy ez a maximum, az a_{i+1} köz pontjaira: $N_i + 1$. Ez a többlet ugyanis akkor jön létre, midőn az egyenes az $i+1$ jelzésű vízszintes vonalat átmetszi.

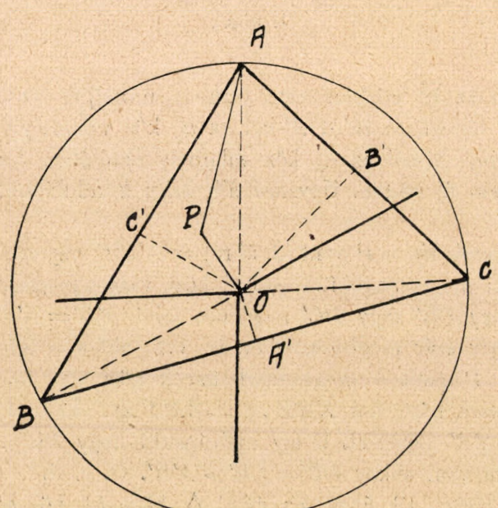
Minthogy a_1 maximuma $N_1 = 8$, azért $\mathbf{N_8 = 15}$ a keresett szám.

[1] A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

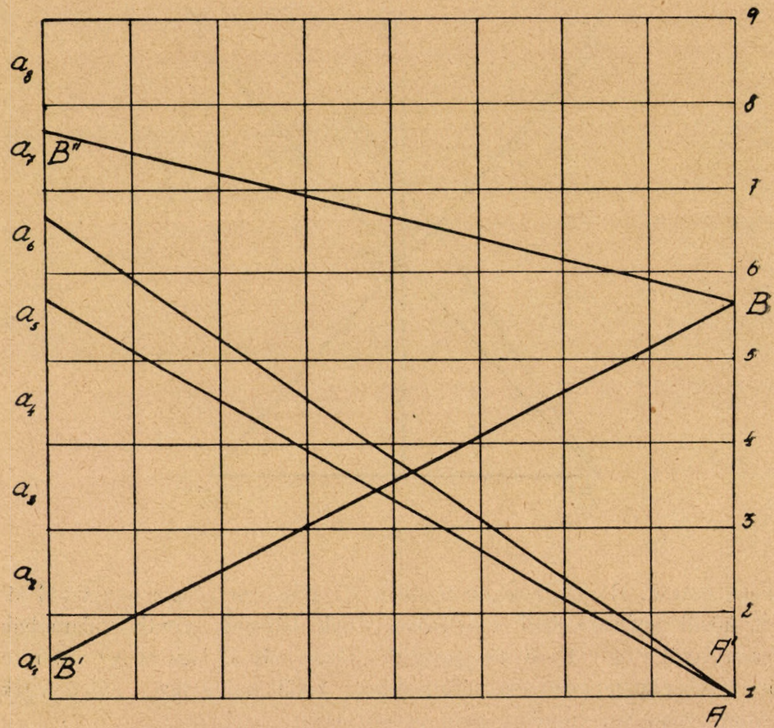


2. ábra.

szögek szárait. E meghosszabbítások a síkot három részre osztják. E részek közül egyik se fedi a másikat, a sík bármely pontja valamelyik részen belül van. (Ez a tompaszögű háromszögnél nincs így, mert a köré írt kör középpontja a háromszögön kívül van s így a fejtegetések a tompaszögű háromszögre nem érvényesek.)



3. ábra.



1. ábra.

Ha A nem az $\overline{12}$ közben van, hanem mondjuk az $\overline{56}$ közön (B), akkor a BB'' fölfogható, mint A'-ből az a_3 köz valamelyik pontjához, a BB' pedig mint A'-ből az a_5 köz valamely pontjához húzott egyenes. Ezek tehát nem új esetek. Ugyanez áll, ha a kiindulópont a tábla más oldalán van.

III. *Segédtétel.* Ha a P pont (2. ábra) az $A'B'C'$ egyenlő szárú háromszög A'-ön túl meghosszabbított szárai közt vagy a meghosszabbításokon van, akkor vagy PB' vagy PC' nagyobb, mint $A'B' = A'C'$. Ugyanis ha e pont az egyik szár meghosszabbításán van, akkor a tétel nyilvánvaló. Ha pedig a P pont a meghosszabbítások közt van, mondjuk ZA' és $YA'B'$ egyenesek közt, hol $XA'Z \measuredangle = ZA'Y \measuredangle$, akkor PB' metszi egy L pontban a ZA' egyenest. S így nyilvánvaló, hogy $PB' > LB' > A'B'$. Ha P a ZA'-n van, akkor $PB' = LB' > A'B'$. Q. e. d.

Már most legyen (3. ábra) az ABC Δ köré írt kör középpontja O. Hosszabbítsuk meg O-n túl az ABO, BCO, CAO egyenlőszárú három-

Már most a P pont vagy e síkrészeken vagy a meghosszabbításokon van. Mindkét esetben a segédtételünk szerint van egy csúcs, melytől való távolsága nagyobb r-nél.

A P pont minden esetben az AOC', $C'OB$, BOA', $OA'C$, OCB', $OB'A$ háromszögek valamelyikében vagy határvonalain van. Mondjuk az AOC' Δ-ben van. Ekkor

$$POA \measuredangle + PAO \measuredangle < 90^\circ$$

tehát OA a legnagyobb oldal (a legnagyobb szöggel fekszik szemben) s így

$$r = \overline{OA} > \overline{AP}. \qquad \text{Q. e. d.}$$

Déman Pál dolgozata.

1) Legyenek a keresett számokat alkotó jegyek a,b,c,d, 6; annak feltétele, hogy ezen számok 3-mal oszthatók legyenek:

$$a + b + c + d \equiv 0. \qquad (\text{mod. } 3)$$

Keressük először az összes oly ötjegyű számok számát, melyeknek utolsó tagja 6.

Ez nem egyéb, mint az összes négyjegyű számok mennyisége. Ezt, miután 10 számjegy áll rendelkezésünkre, a tíz elemből alkotható negyedosztályú ismétléses variációk száma adná meg, ebből azonban levonjuk a 10 elemből alkotható harmadosztályú ismétléses variációk számát, mert ennyi szám első jegye 0, s így ezek nem ötjegyűek:

$$S = 10^4 - 10^3.$$

Miután az összes számjegyekből kiválasztott k jegyből bármely számot ugyanannyi módon állíthatjuk elő, tehát a kapott összes négyjegyű számok jegyeinek összegében ugyanannyiszor szerepelnek az összes számok [1-től 36-ig (9+9+9+9)]. Ebből következik, hogy a kapott számok minden harmadikja 3-al osztható, tehát a keresett szám

$$T = \frac{S}{3} = \frac{10^4 - 10^3}{3} = 3000.$$

(Általában az l-jegyű számok közül $\dfrac{10^l - 10^{l-1}}{v}$ azoknak a száma, amelyek v-vel oszthatók.)

2) A sakktábla mezőit $9+9=18$ vonaldarab határolja. Tegyük fel, hogy egy tetszőleges egyenes ezekből n-et átmetsz.

Az egyenes minden ilyen határvonal átmetszésével új mezőbe lép (mert egy mezőn többször nem haladhat át), kivéve az utolsó metszéspontot, ahol a sakktáblát elhagyja. Az egyenes tehát ebben az esetben $(n-1)$ mező belsején megy keresztül.

Keressük tehát azt, hogy egy egyenes a sakktáblának hány határoló vonalát metszheti.

Mind a 18-at, sőt 17-et nem, mert a sakktábla négy oldala közül csak kettőt metszhet (ahol a táblára belép és ahol azt elhagyja). Olyan egyenes azonban van, amely 16 mezőhatároló vonalat metsz, ilyenek mindazon egyenesek, amelyek a sakktábla egyik átlójával párhuzamosak és attól való távolságuk $< \frac{d}{2}$, ahol d a sakktábla egy mezőjének átlóját jelenti. Ezen egyenesek a sakktábla mindkét irányú vonalai közül 8—8-at metszenek (nem metszik azon két egyenest, amelyek az átló másik oldalán fekszenek és a sakktáblát határolják). Egy egyenes tehát legfeljebb 16 vonalat metszhet, s így legfeljebb 15 mezőn mehet keresztül.

3) Rajzoljuk az A, B és C pontok, mint középpontok körül a k_a, k_b és k_c köröket r sugárral; e körök mindegyike átmegy a körülírt kör O középpontján.

Ezen körök közül 2—2-nek másik metszéspontja a két kör középpontját összekötő háromszögoldalra nézve az O-val szimmetrikus helyzetben, tehát a háromszögön kívül van; így a három kör valamelyikén belül lévő pontok mindazon pontokat tartalmazzák, amelyek a háromszög kerületén belül vannak, tehát a háromszögön belül felvett P pont legalább az egyik körön belül fekszik s így az egyik csúcsponttól való távolsága $< r$.

A feladat másik állításának igazolására bebizonyítjuk, hogy oly pontok, melyek mindhárom kör (k_a, k_b, k_c) kerületén belül fekszenek, csak akkor léteznek, ha az $ABC\triangle$ tompaszögű.

Legyenek ugyanis pl. a k_a és k_b körök metszéspontjai O és M; ekkor az OM kettős körszelet (a k_a és k_b körök által bezárt közös terület) csakis akkor fekhet részben a k_c körön belül, ha ezen kör C középpontja az AB egyenesnek nem ugyanazon oldalán van mint O. Ekkor O a háromszög kerületén kívül esik, tehát a háromszög tompaszögű.

A feladat ezen esetet kizárja, tehát nincs oly pontunk, mely mindhárom kör kerületén belül volna, a háromszög belsejében felvett P pont valamelyik körön (vagy két körön) kívül esik, s így az egyik csúcsponttól való távolsága $> r$.

Jelentés az 1930. évi XII-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyről.

A Társulat XII-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét 1930. október 18-án tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 25, Szegeden 4 versenyző jelentkezett. Beadtak Budapesten 17, Szegeden 2 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

1. 1 méter hosszú és 5 centiméter átmérőjű szolenoid mentén egyenletesen van elosztva 2000 menet. Hány Ampère erősségű áramot kell a szolenoidba vezetni és hogyan kell a szolenoidot irányítani, hogy a belsejében keletkező mágneses térrel kompenzálhassuk a földmágneses erőteret, ha a horizontális intenzitás 0·2 Gauss és az inklináció 60°?

2. Higanyos barométer üres terébe levegő jutott. Hogyan határozható meg a bejutott levegő nyomása más barométer igénybevétele nélkül?

3. 1 köbméter 0° C hőmérsékletű jégből 4° C hőmérsékletű víz lesz. Számítsuk ki:

a) Mennyi hőt kellett vele közölni, ha a víz fajhőjét itt is 1-nek vesszük?

b) Mekkora a légnyomással szemben végzett munka, ha a jég sűrűsége 0·9?

c) Mennyivel növekedett a víz belső energiája?

A verseny dolgozatainak megbírálására kiküldött Bizottság Tangl Károly társulati alelnök elnöklete alatt a következő tagokból állott: báró Harkányi Béla, Mikola Sándor, Nagy József, Rybár István és Pogány Béla előadó.

A Bizottság örömmel állapította meg, hogy a második példa megoldásánál a versenyzők sokoldalú invenciót és helyes fizikai gondolkozást tanúsítottak. A Bizottság javasolta, hogy a Választmány az *első díjat* Papp György-nek ítélje oda, ki a gyöngyösi áll. Koháry-reálgimnáziumban Kmoschek Elek tanítványa volt. Papp György mind a három feladatot hibátlanul és teljesen megoldotta. A *második díjat* a Bizottság Gillemot László-nak javasolta kiadni, ki a bpesti II. ker. érseki gimnáziumban Müller Kálmán tanítványa volt. Gillemot László, miután az első feladatot helyesen megoldotta, azt helytelen észrevételekkel toldotta meg; a második feladat megoldása rossz, a harmadiké jó.

A Bizottság ezen javaslatához a Választmány egyhangúlag hozzájárult.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1931. évi XXXVI. közgyűlés.

Az 1931. május 30-án tartott XXXVI. közgyűlést Rados Gusztáv alelnök nyitotta meg, aki kegyeletes szavakkal emlékezett meg Fröhlich Izidor-ról, Társulatunk f. év január 24-én elhúnyt nagyérdemű elnökéről, majd röviden visszapillantott Társulatunknak immár négy évtizedes eredményes multjára. Beszédének szövege a következő:

Tisztelt Mathematikai és Physikai Társulat!

Melegen üdvözölvén az itt megjelent tisztelt tagtársainkat, a Báró Eötvös Loránd Mathematikai és Physikai Társulat XXXVI. közgyűlését ezennel megnyitom.

Az első szó, amelyet Önökhöz intézek a kegyeletes megemlékezés szava legyen. Szeretettel, tisztelettel és hálával emlékezzünk Társulatunk megdicsőült kiváló elnökéről, Fröhlich Izidor-ról, akit az idei társulati év folyamán eredményekben oly gazdag pályafutása után a halál sorainkból kiragadott.

Pihenést nem ismerő kutató munkásságának jelentőséges eredményeivel nevének fényes helyet biztosított a physika történetében; félszázados tanári működésével a physikusoknak több nemzedékét nevelte és tanítványainak osztatlan szeretetét és hálás tiszteletét megnyerte; Társulatunknak pedig alapitása óta buzgó és tevékeny tagja, az utolsó tíz éven át nagyérdemű elnöke volt.

Fröhlich Izidor eszményi életfelfogásával, nagy munkaszeretetével és párját ritkító lelkiismeretességével mindannyiunknak fényes példát mutatott arra, hogyan kell és lehet a hazát a tudomány terén szolgálni és a hazai művelődésnek becsületes munkával itthon és a haza határain túl is becsületet szerezni.

Áldott legyen emléke, melyet soha el nem múló hálával és kegyelettel zárunk keblünkbe!

Tisztelt Közgyűlés! Az idén lesz negyven éve, hogy Társulatunk fennáll és működésének V. évtizedébe lép. Társulatunk a hangzatos szólamokat és ünnepléseket mindenkor kerülte; e nevezetes évforduló mégis egy pillanatnyi megállásra és annak a kérdésnek a fölvetésére ösztönöz, hogy Társulatunk negyvenéves működésével valóra váltotta-e azokat a reménységeket, amelyeket nagy alapitói, br. Eötvös Loránd és Kőnig Gyula a létesítéséhez fűztek?

Hogy e kérdésre megfeleljek, legyen szabad halhatatlan első elnökünknek, br. Eötvös Loránd-nak a Társulat alakuló közgyűlésén negyven év előtt elhangzott megnyitó beszédéből, amelyben a Társulat hivatását oly előrelátó bölcsességgel megállapította, a következő kijelentéseket szó szerint idéznem:

«A tudomány haladását rendes összejöveteleinken élő szóban előadni és mindazt, ami a szakember figyelmére méltó, szakfolyóiratunkban megirni: ez a mi feladatunk. E feladat nem látszik nagynak; alig többnek egy önképző kör feladatánál és mégis, ha hiven teljesitjük, érdemes munkát végzünk és nagy szolgálatot teszünk vele. Hiszen, ha elérjük azt, hogy mindenki, aki hazánkban physikát és mathematikát tanit, igazán physikus és mathematikus: akkor nagy szolgálatot tettünk nemcsak az iskolának, hanem hazánk tudományosságának is. Ha ezen önképző feladatot hiven és komolyan teljesitjük, akkor az is lesz eredménye, hogy a mi körünkből fognak majd kiválni a tudomány önálló művelői és fejlesztői.»

Br. Eötvös Lorándnak e várakozása, azt kérkedés nélkül mondhatjuk, fényesen teljesült. Mert Társulatunk, mely fennállása óta az ifjú tehetségek első szárnypróbálgatásainak szinhelye volt, a mathematikusoknak és physikusoknak egy oly népes gárdáját nevelte, amely tisztelelet parancsoló önálló kutató működésével hazánknak széles e világon dicsőséget szerzett.

A hazai egyetemek mathematika- és physika-tanárai mindannyian, számos előkelő külföldi egyetemi katedrán működő hirneves profeszor itt, a mi Társulatunkban kezdte működését, de középiskolai tanáraink sorában is számosan vannak, akik e Társulatból elindulva, önálló kutató működésükkel a haza határain túl is a szakkörök becsülésében részesülnek.

Nyugodt lelkiismerettel kezdhetjük tehát Társulatunk működésének V. évtizedét és abban a reményben, hogy Társulatunk magas kulturális hivatásának a jövőben is nagyérdemű elődeinkhez méltó módon fog megfelelni, megnyitom Társulatunk XXXVI. közgyűlését.

Miután Pogány Béla ügyvezető titkár a Társulat másik két nagy halottjáról, Farkas Gyuláról és Rátz Lászlóról emlékezik meg kegyelettel, röviden beszámol a lefolyt társulati év jelentősebb mozzanatairól. E beszámoló szerint Társulatunk a mult közgyűlés óta tíz előadó- és négy választmányi ülést tartott. Az előadó üléseken öt matematikai és nyolc fizikai tárgyú előadás hangzott el. Egyik előadást egy külföldi vendégünk: dr. Lietzmann Walther göttingeni főigazgató tartotta. A titkár beszámol a tanulóversenyekről, valamint jelenti a Kőnig Gyula-jutalomérem első példányának elkészültét, mely érmet Beck Ö. Fülöp kiváló művészünk alkotta és melyet Szász Ottó frankfurti tagtársunknak elküldtünk. A Matematikai és Fizikai Lapok 1930. évi folyama 192 oldal = 16 ív terjedelemben jelent meg.

A titkár bejelenti, hogy a M. Kir. Belügyminiszter Úr 1190,69/1930. VII. számú leirata értelmében Társulatunk alapszabályai akként módosulnak, hogy a Társulat nemmagyar állampolgárokat is tagjaivá választhat, azonban e megválasztáshoz minden esetben a M. Kir. Belügyminiszter Úr előzetes hozzájárulását meg kell szerezni.

Nagy József pénztárnoki jelentése után Tangl Károly elnöklete alatt a választásokra került a sor. A közgyűlés fölöslegesnek tartva a titkos szavazást, egyhangúlag hozzájárult a Választmány előterjesztéséhez, mely szerint Fröhlich Izidor helyére Rados Gusztávot választotta meg Társulatunk elnökéül, a megüresedett alelnöki székre pedig Kürschák Józsefet. A lelépő hat választmányi tagot, névszerint: Bauer Mihályt, Bláthy Ottó Tituszt, báró Harkányi Bélát, Kőnig Dénest, Rhorer Lászlót és Szabó Gábort a közgyűlés újra megválasztja; az alelnökké választott Kürschák József és az elhúnyt Rátz László helyére pedig Egerváry Jenőt és Faragó Andort választja meg.

Rados Gusztáv elfoglalva elnöki székét, úgy a maga, mint Kürschák József elnöktársa nevében megköszöni a közgyűlés irántuk megnyilvánult bizalmát és a közgyűlést bezárja.

Az «Eötvös Loránd» Matematikai és Fizikai Társulat 1930-ik évi zárszámadása és vagyonkimutatása.

A) Bevételek:

	Pengő
1. Mult évi zárszámadási maradvány:	
a) készpénzben	79·71
b) Postatakarékpénztárban	86·50
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltóbankban	402·00
2. Tagdíjak	1178·94
3. Segélyek és kamatok	4154·46
4. Vegyesek	62·08
Összesen:	6563·69

B) Kiadások:

	Pengő
1. Betétek:	
a) Postatakarékpénztárban	107·54
b) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	1308·00
2. Nyomda	4307·04
3. Vegyesek	701·56
4. Készpénz	59·25
Összesen:	6563·69

A) Vagyon:

I. Alaptőke.

	Korona	Pengő
1. A Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban:		
2600 K. n. é. 4 %-os fővárosi kölcsönkötvény	2600·00	
1800 « « « 6 %-os hadikölcsönkötvény (4-ik kibocsátás)	1800·00	
300 « « « 4 %-os magyar korona-járadékkötvény } Károly Irén alapítvány	300·00	
2200 « « « 6 %-os hadikölcsönkötv. (6-ik kibocsátás) } Károly Irén alapítvány		
36090. sz. a. 1020 P } Károly Irén alapítvány		1020·00
2000 K. n. é. $5\frac{1}{2}$ %-os hadikölcsönkötvény (4-ik kibocsátás)	2000·00	
10000 « « « 6 %-os hadikölcsönkötvény (3-ik kib.) König alap.	10000·00	
2. Pesti Hazai Takarékpénztárban $\frac{04557}{c_2}$ jelzésű könyvben	108·00	
3. Állami kezelésben: Majthényi Ottó hagyaték	10000·00	

II. Forgó tőke.

1. Készpénzben		59·25
2. Betétek		1415·54
3. Tagdíjhátralék		200·00
4. Nyomtatványok		500·00
Összesen:	29008·00	3194·79

B) **Teher.**

Tiszta vagyon mint egyenleg	29008·00	3194·79

Nagy L. József,
pénztáros.

A számadásokat átvizsgáltuk és rendben találtuk.
Budapest, 1931, május 7.

br. Harkányi Béla, *Veres Pál,* *Renner János*
számvizsgálók.

Az 1930—31. Társulati évben tartott előadások.

1930. október 9. Dr. Lietzmann Walter göttingeni főigazgató (Oberstudiendirektor): Mathematisches zur Beurteilung der Leistungen in der Schule.

1930. nov. 20. A tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése és a díjak kiosztása. König Dénes: Újabb eredmények a relatív graphelméletből.

1930. dec. 4. Gyulay Zoltán: Ólomchlorid elektromos vezetéséről. Lassowszky Károly: Megfigyelések a Graff-féle fotometerrel.

1931. jan. 29. Kürschák József: A véges Taylor-sor és a magasabbrendű quadraturák.

1931. febr. 12. Mikola Sándor: Szappanhártyákban létrejövő elektromos mozgásokról.

Treer Mór: A hydrodinamika törvényszerűségeinek mai állása.

1931. febr. 26. Schmid Rezső: Újabb vizsgálatok a nitrogénoxid sávos színképén.

1931. márc. 12. Bródy Imre: A nitrogénoxid elekronizomériájáról.

1931. márc. 26. König Dénes: Graphok és determinánsok.

1931. ápr. 23. Egerváry Jenő: Matrixok egy kombinatorikus tulajdonságáról.

1931. máj. 7. Bay Zoltán: Áramlökések ritkított gázokban.

1931. máj. 30. FORRÓ MAGDOLNA és PATAI IMRE: Kilépési munka és kontaktuspotenciál.

Választmányi ülések.

1930. szeptember 18-án és november 6-án, 1931. január 29-én és május 16-án.

Új tagok.

BÁN LAJOS, tanárjelölt, Szeged; BORDÁCS ELVIRA, egyet. gyakorn., Szeged; BUKOVSZKY FERENC, egyet. gyakorn., Szeged; GÖRBE IMRE, tanárjelölt, Makó; JAKAB GIZELLA, tanárjelölt, Szeged; MISCHUNG ILONA, egyet. gyakorn., Szeged; VARGA JÓZSEF LÁSZLÓ, középisk. tanár, Budapest. Összesen 7.

Kiléptek: NEUHOLD ÖZSÉB, Zirc; REINER MIHÁLY, Debrecen. Összesen 2.

Meghaltak: FARKAS GYULA, tiszteleti tag; FRÖHLICH IZIDOR, elnök; RÁTZ LÁSZLÓ, választmányi tag. Összesen 3.

A tagok létszáma tehát az 1930—31. társ. év folyamán, leszámítva veszteségeinket, 2-vel gyarapodott.

1930. május 1-től 1931. május 25-ig befizetett tagdíjak és adományok.

Albert A. (16), Anderkó A. (8), Ábrahám I. (8), Bacsó E. (6), Balyi K. (12), Bauer M. (8), Bláthy (8), Bodola L. (16), Bordás E. (6), Bresztovszky B. (10), Breuer J. (22, 80), Bródi I. (8), Bugarszky I. (8), Bujtás J. (12), Csada I. (6), Csaplár K. (8), Csegény M. (8), Cseh E. (40), Csízhegyi L. (12, 20), Csősz L. (6), Czakó A. (8), Darkó B. (18), Erdődy I. (8), Éber J. (10), Falábú D. (3), Faragó A. (8), Farkas D. (8), Fenyvesi A. (8), Frank J. (10), Fraunhofer L. (16), Fröhlich K. (16), Goldziher K. (8), Groh Gy. (16), Gruber N. (8), Gyulay Z. (8), Hajós G. (6), Hang D. (6), Harkányi B. (16), Hartly D. (12), Heuer E. (8), Holenda B. (6), Ilosvay L. (8), Jakucs J. (12), Janicsek J. (8), Jurányi H. (8), Karai S. (6), Kilcer Gy. (6), Klug L. (8), Koschovitz Gy. (8), Kovács J. (16), Kövesi F. (12), Kövesligethy R. (8), Kronstein B. (16), Kunfalvy R. (8), Kuzaila P. (12), Kürschák J. (8), Lajta R. (8), Luckhaub Gy. (24), Magdics G. (8), Mihalovits A. (6), Milakovszky L. (10), Mischung I. (6), Molnár T. (6), Neogrády S.-né (16), Neugebauer T. (16), Neumann E. (10), Nyáry B. (6), Oltay K. (10), Ortvay R. (8), Oszlavczky Sz. (8), Öveges J. (6), Pados R. (6), Patai I. (12), Patai L. (8), Pédery A. (8), Pécsy A. (8), Pogátsa J. (6), Polczer K. (20), Radó S. (8), Rados G. (8), Rados I. (8), Renner J. (16), Reuss E. (16), Rhorer L. (10), Romsauer L. (8), Rucsinszky L. (8), Rybár I. (20), Sárközy P (6), Schaller M. (6), Schay G. (8), Scholz P. (6), Schossberger Gy. (6), Somogyi A. (16), Sós E. (16), Spitz I. (14), Strausz H. (8), Suppán V. (16), Szabó G. (8), Szántó S. (8), Szász O. (18), Szász P. (8), Szekeres K. (16), Székely K. (6), Széky I. (12), Szőke B. (8), Szűcs A. (8), Tangl K. (8), Tass A. (10), Teller E. (8), Tihanyi M. (6), Tobisch J. (10), Tóth A. (6), Tóth L. (8), Török E. (6), Ujj Gy. (8), Vadászy B. (6). Vajnóczky I. (12), Varga V. (6), Vámos S. (12), Vörös C. (16), Walther B. (8), Winter J. (8), Wodetzky J. (22), Woyciechowsky J. (40), Zigány F. (8).

Békéscsaba: Ág. h. gimn. (6), Budapest: Műegyetemi matem. gyűjt. (8), Meteorol. Intézet (10), Csillagvizsgáló intézet (8), Kegyesrendi tanárképző (16), «Bolyai» főreáliskola (24), «Kemény Zsigmond» reáliskola (16), «Norbertinum» (32), «Bernardinum» (8), Technológiai int. (15, 94), Természettudományi Társulat (8). Csongrád: «Szent Imre» gimn. (6). Gyula: Róm. kat. reálgimn. (6), Hajdunánás: Ev. ref. reálgimn. (6), Hatvan, Állami reáliskola (6). Kecskemét: Ev. ref. reálgimn. (6). Kisújszállás: «Horthy» reálgimn. (6). Kisvárda: «Bessenyei György» reálgimn. (6). Makó «Csanád vezér» reálgimn. (6), Pannonhalma: Központi könyvtár (6). Sopron: «Széchenyi István» reáliskola (6), Bánya és erdőmérnöki főiskola (6). Szegszárd: «Garay János» reálgimn. (6). Szentes: «Horváth Mihály» reálgimn. (6).

Alapító tag: Pólya György 182 P. **Államsegély:** 500 P.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzivebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Nagy József* pénztárnoknak (Vác, Kegyesrendi gimnázium) befizetni,

2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,

3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

Franklin-Társulat nyomdája. — Géczy Kálmán.

RADOS GUSZTÁVNAK,

HETVENEDIK SZÜLETÉSNAPJÁRA

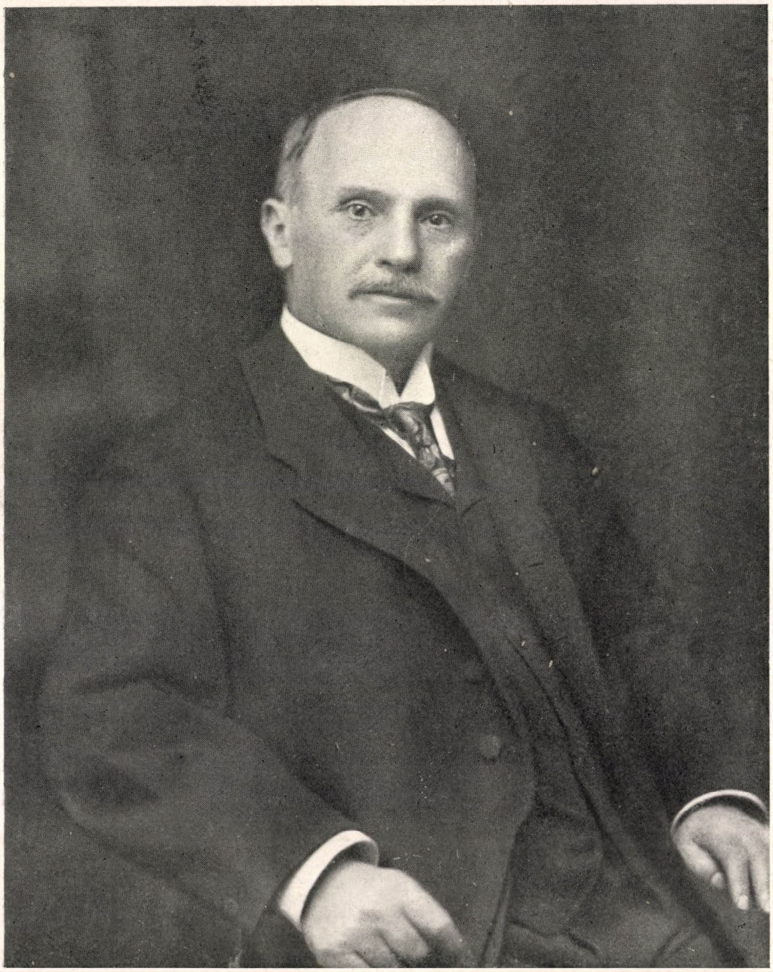
GUSTAV RADOS

ZUM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGE

★

À M. GUSTAVE RADOS

À L'OCCASION DE SON 70ième ANNIVERSAIRE



RADOS GUSZTÁV

EGY ANALITIKUS GEOMETRIAI DETERMINANS IRREDUCIBILITÁSA.

1. Bevezetés. Jelentsék

$$U_1, \ldots, U_s, \ldots, U_M$$

a sík tetszőleges (valós vagy képzetes) P pontjának x, y, z homogén koordinátáiból alakított *m-edrendű kombinációs hatványszorzatokat,* vagyis az olyan $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ szorzatokat, amelyekben az α, β, γ egész kitevők mindegyike ≥ 0 és a kitevők összege $= m$. E hatványszorzatok száma $M = \binom{m+2}{2}$.

Valamely P_r pont x_r, y_r, z_r koordinátáinak m-edrendű kombinációs hatványszorzatait így jelöljük:

$$U_{r1}, \ldots, U_{rs}, \ldots, U_{rM}.$$

Az m-edrendű algebrai síkgörbének egyenlete

$$F = A^{(1)}U_1 + \cdots + A^{(s)}U_s + \cdots + A^{(M)}U_M = 0$$

alakú, hol $A^{(1)}, \ldots, A^{(s)}, \ldots, A^{(M)}$ (valós vagy képzetes) numerikus együtthatók.

Az $F = 0$ görbe akkor és csak akkor megy keresztül bizonyos számú adott ponton, mondjuk $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$-n, ha

$$A^{(1)}U_{r1} + \cdots + A^{(s)}U_{rs} + \cdots + A^{(M)}U_{rM} = 0 \qquad (1)$$
$$(r = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Az (1) egyenletrendszerben szereplő U_{rs}-ekből alakított μ sorú matrix rövid jele legyen $[\mu]$.

$M-1$ adott ponton keresztül mindig vonható *legalább* egy m-edrendű görbe; *pusztán egy* akkor és csak akkor, ha az $[M-1]$ matrix rangja egyenlő sorainak számával és ennélfogva az

$$[1],\ [2],\ldots,\ [M-2]$$

matrixok rangja is rendre

$$1,\ 2,\ldots,\ M-2.$$

Ennek az egyetlen görbének egyenlete

$$\begin{vmatrix} U_{11} & \ldots U_{1s} & \ldots U_{1M} \\ U_{21} & \ldots U_{2s} & \ldots U_{2M} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{M-1,1} & \ldots U_{M-1,s} & \ldots U_{M-1,M} \\ U_1 & \ldots U_s & \ldots U_M \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

M adott ponton keresztül akkor és csak akkor vonható *legalább* egy m-edrendű görbe, ha a

$$D = | U_{rs} |$$
$$(r,\ s = 1,\ 2,\ldots,\ M)$$

determináns a zérussal egyenlő.

A D-hez hasonló determinánsok eltűnése fejezi ki annak feltételét, hogy az n-méretű térnek $\binom{m+n}{n}$ pontján keresztül m-edrendű felületet, illetve (ha $n > 3$) hiperfelületet lehessen fektetni.

Mindezekről a determinánsokról már REISS MÓRIC[1] kimondotta, hogy a bennük szereplő koordinátáknak irreducibilis függvényei, sőt az irreducibilitás bebizonyítását is megkísérlette. De egyébiránt figyelemreméltó dolgozatában ez a bebizonyítás hibás.

Szándékom REISS tételét bebizonyítani. A bebizonyítás bárhányméretű térben ugyanolyan. Azért elegendő lesz a legegyszerűbb esetre, a *síkgörbék* esetére szorítkozni.

2. Segédtétel. *Ha valamely m-edrendű síkgörbének $F = 0$ egyenletében F az x, y, z homogén koordinátáknak irreducibilis függvénye, akkor e görbén mindig meghatározható olyan*

[1] M. REISS: Analytisch-geometrische Studien, *Mathematische Annalen*, II. kötet (1870), 385–426. oldal. Lásd különösen az 1. §-t.

$M-1$ (különböző) pont, amelyeken keresztül más m-edrendű síkgörbe nem vonható.

A bevezetésben mondottaknál fogva ez így is fogalmazható:

Ha az m-edrendű $F=0$ görbe egyenletében az F irreducibilis és $\mu<M-1$, akkor e görbén mindig meghatározható μ olyan pont, hogy a $[\mu]$ matrix rangja egyenlő μ-vel.

A $\mu=1$ esetében ez nyilvánvaló, mert az

$$[1]=\|U_{11}\dots U_{1s}\dots U_{1M}\|$$

matrix rangja mindenesetre 1-gyel egyenlő. Tehát csak azt kell bebizonyitani, hogy ha az $F=0$ m-edrendű görbének egyenletében F irreducibilis, és e görbén valamely $(M-1)$-nél kisebb μ esetében sikerült μ olyan pontot meghatározni, hogy a $[\mu]$ matrix rangja egyenlő μ-vel: akkor e pontokhoz a görbén található olyan $(\mu+1)$-dik pont, hogy a $[\mu+1]$ matrix rangja $\mu+1$.

A jelölést alkalmasan választva, a $[\mu]$ matrix első μ oszlopából alkotott determináns a zérustól különböző értékű.

Ha most már az $F=0$ görbén nem lehetne olyan további $P_{\mu+1}$ pontot találni, hogy a $[\mu+1]$ matrix rangja $\mu+1$ legyen, akkor a görbe minden pontja kielégítené a

$$\Delta_\sigma=\begin{vmatrix} U_{11}\dots & U_{1s}\dots & U_{1\mu} & U_{1\sigma}\\ U_{21}\dots & U_{2s}\dots & U_{2\mu} & U_{2\sigma}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\\ U_{\mu1}\dots & U_{\mu s}\dots & U_{\mu\mu} & U_{\mu\sigma}\\ U_1\;\dots & U_s\;\dots & U_\mu & U_\sigma \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$
$$(\sigma=\mu+1,\ \mu+2,\dots,\ M)$$

egyenletrendszert. F-nek *irreducibilis* volta miatt ez azt jelentené, hogy a Δ_σ-k rendre oszthatók F-fel. Ámde akkor (minthogy a Δ_σ-k — csakúgy mint F — az x, y, z-nek m-edfokú függvényei) a Δ_σ-k az F-től pusztán állandó tényezőkben különböznek. Bekövetkezhetik-e ez vagy sem?

Minthogy $\mu < M-1$, azért a (3) alatti egyenletrendszer legalább két egyenletből áll és ezek egyike sem azonosság, mert Δ_σ-ban az U_σ együtthatója a zérustól különbözik. Ha most már a Δ_σ-k az F-től csak állandó tényezőkben különböznének, akkor minden Δ_σ-ban pontosan azoknak az

$$U_1, U_2, \ldots, U_M$$

hatványszorzatoknak kellene a zérustól különböző együtthatóval előfordulni, mint F-ben; tehát mindegyikben ugyanazoknak. Ámde valójában ez nincsen így; mert ha $\sigma \neq \sigma'$, akkor Δ_σ-ban az U_σ-nak együtthatója nem zérus és $U_{\sigma'}$-nek együtthatója zérus, a $\Delta_{\sigma'}$-ben fordítva U_σ-nak együtthatója zérus és $U_{\sigma'}$-nek együtthatója a zérustól különböző.

Tehát a Δ_σ-k sohasem oszthatók mindannyian F-fel és ennélfogva az $F=0$ görbén okvetlenül van olyan $P_{\mu+1}$ pont, hogy a $[\mu+1]$ matrix ranga $\mu+1$.

3. Reiss tételének bebizonyítása. a) *A*

$$D = |U_{rs}|$$
$$(r, s = 1, 2, \ldots, M)$$

determináns nem bontható fel úgy

$$x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_M, y_M, z_M$$

két alacsonyabb fokú racionális egész függvényének szorzatára, hogy legalább egy pontnak (mondjuk az x_M, y_M, z_M pontnak) *koordinatái* mindkét tényezőben *valóban előforduljanak.*

Tegyük ugyanis fel, hogy

$$D = AB \tag{4}$$

volna, hol A az x_M, y_M, z_M-ben m_1-edfokú, B pedig ezekben m_2-edfokú ($m_1 > 0$, $m_2 > 0$ és $m_1 + m_2 = m$). Ha x_M, y_M, z_M helyébe x, y, z-t írunk, a többi $M-1$ pont koordinátái helyébe pedig olyan számértékeket, hogy D ne váljék azonosan zérussá, akkor (4) átmegy egy $\overline{D} = \overline{A}\overline{B}$ azonosságba, ahol $\overline{D}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ az x, y, z-nek m, m_1, ill. m_2-edfokú függvényei.

Ez azonban valójában az első $M-1$ pontnak *nem minden* választásánál következik be. Vegyünk ugyanis fel olyan $F=0$ m-edrendű görbét, hogy F *irreducibilis*, vagyis nem bontható alacsonyabb fokú tényezőkre. (Ilyen pl.

$$f(x, y)z + g(x, y) = 0,$$

hol f és g az x, y-nak olyan $(m-1)$-edfokú, ill. m-edfokú homogén egész függvényei, amelyeknek nincsen x, y-t tartalmazó közös osztójuk.) A fenti segédtételnél fogva az $F=0$ görbén okvetlenül meghatározhatunk $M-1$ pontot úgy, hogy ezeken keresztül más m-edrendű görbét nem vonhatunk. Ez megtörténvén, helyettesítsük D-ben az első $M-1$ pont koordinatái helyébe éppen az így meghatározott pontok koordinátáit. Ha még x_M, y_M, z_M helyett x, y, z-t írunk, akkor az így keletkezett $\bar{D}$ csak egy (a zérustól különböző) tényezőben különbözik F-től, tehát nem lehet alacsonyabb fokú tényezőknek szorzata.

b) *D egyáltalában nem bontható fel alacsonyabb fokú tényezők szorzatára.*

Ha ugyanis volna egy $D = AB$ felbontás, akkor *a)*-nál fogva r-nek bármely értékénél x_r, y_r, z_r csak az egyik tényezőben fordulhat elő (némely r-nél A-ban, más r-eknél B-ben).

Legyenek azok a pontok, amelyeknek koordinátái A-ban szerepelnek: $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ $(\mu < M)$. A D determináns csak úgy lehet A-val osztható, ha D-nek az x_M, y_M, z_M hatványszorzatai szerint kifejtett alakjában minden együttható osztható A-val. Ezek az együtthatók (előjelüktől eltekintve) éppen az $[M-1]$ matrix $(M-1)$-edfokú determinánsai. Továbbá, ha $\mu < M-1$, ezek a determinánsok csak úgy lehetnek A-val oszthatók, ha az x_{M-1}, y_{M-1}, z_{M-1} hatványszorzatai szerint kifejtett alakjukban minden együttható osztható A-val, vagyis ha az $[M-2]$ matrix minden $(M-2)$-edfokú determinánsa osztható A-val. Ezt a gondolatmenetet folytatva végre $[\mu]$ minden μ-edfokú determinánsának A-val oszthatónak kell lennie.

A $[\mu]$ matrix μ-edfokú determinánsai — úgy mint A — a $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ pontok mindegyikének koordinátáiban m-edfokúak, tehát csak akkor volnának A-val oszthatók, ha A-tól és ennélfogva egymástól is csak numerikus tényezőkben különböznének. Ez a feltétel pedig nyilván nincs kielégítve.

Kürschák József.

DIE IRREDUZIBILITÄT EINER DETERMINANTE DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE.

Es bedeute D die bekannte Determinante, deren Verschwinden die Bedingung dafür ist, daß durch $M = \binom{m+n}{n}$ gegebene Punkte des Raumes R_n eine algebraische Hyperfläche m-ter Ordnung gelegt werden könne (also im Falle $n = 2$ eine ebene algebraische Kurve, im Falle $n = 3$ eine algebraische Fläche von der besagten Ordnung). Es wird bewiesen, daß D eine *irreduzible* Funktion der homogenen Koordinaten der M Punkte ist. Der vermeintliche Beweis von M. Reiss (Mathematische Annalen Bd. 2, 1870, Seite 385—388) ist nicht richtig.

Josef Kürschák.

ALGEBRAI MEGJEGYZÉSEK.

A modern algebra nagy súlyt helyez arra, hogy tételeit minél kevesebb segédeszközzel és minél egyszerűbben vezesse le. Ezt a célt követik az alábbi megjegyzések is, melyeknek egy része már más helyen megjelent.[1] Legyen szabad ezeket, mint mélyen tisztelt tanárom, RADOS GUSZTÁV, a kiváló matematikus, iránt érzett nagyrabecsülésem jelét, e Lapokban közreadni.

1. Legyen P oly test, hogy a hozzátartozó, egy határozatlant tartalmazó irreducibilis polinomok a test bővítéseiben ne bírjanak többszörös tényezőkkel. Bírjanak továbbá a P testben irreducibilis $f(x)$, $\varphi(x)$ polinomok a P test egy bizonyos bővítésében a következő alakkal:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_a)$$
$$\varphi(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_b).$$

Az $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ gyökei α_i, β_j, közülök két tetszésszerintit jelöljünk α, β-val. A $P(\beta)$ testben legyen $f(x)$ irreducibilis tényezőkre bontva[2]

$$f(x) = f_1(x, \beta)\dots f_k(x, \beta). \qquad (1)$$

2. Be fogjuk bizonyítani, hogy a $P(\alpha)$ testben $\varphi(x)$ ugyancsak k számú irreducibilis tényezőre bomlik, azaz

$$\varphi(x) = \varphi_1(\alpha, x)\dots\varphi_k(\alpha, x). \qquad (2)$$

---

[1] Bemerkung zur Algebra. Acta Litt. ac Scientiarum, 4. köt. 244—245. lap. Über einen TAKAGIschen Satz. Journal für die r. u. a. Mathematik, 163. köt. 249—250. lap. Az említett cikkek oly dolgot is tartalmaznak, mely e dolgozatban nem fordul elő és fordítva.

[2] Mint ismeretes, feltehető, hogy a tényezők β-nak polinomjai, továbbá, hogy x legmagasabb hatványának együtthatói 1-gyel egyenlők. Analog megjegyzés vonatkozik a (2) szorzatra.

Mindenekelőtt $f_l(x, \beta)=0$-nak nincs más gyöke, mint $f(x)=0$-nak és így valamely α_i-re $f_l(\alpha_i, \beta)=0$, vagyis $f_l(\alpha_i, x)$ és $\varphi(x)$ legnagyobb közös osztója legalább elsőfokú, de akkor az $f(x)=0$ egyenlet irreducibilitásánál fogva bármely α-ra a

$$\bigl(f_l(\alpha, x), \varphi(x)\bigr) = \psi_l(\alpha, x), \qquad (l=1, 2, \ldots, k)$$

legnagyobb közös osztók legalább elsőfokúak. Az l különböző értékeihez tartozó legnagyobb közös osztók egymáshoz relatív primek, ha ugyanis $l \neq h$, akkor nem lehetséges, hogy

$$f_l(\alpha, \beta_\mu) = f_h(\alpha, \beta_\mu) = 0$$

legyen, mert különben

$$f(x) = f_1(x, \beta_\mu) \ldots f_k(x, \beta_\mu)$$

többszörös gyökkel bírna. Így tehát $\varphi(x)$ irreducibilis tényezőinek számossága $\geqq k$. Minthogy a bebizonyitásban f és φ felcserélhető, a számosság egyenlő k-val. A jelölést úgy választhatjuk, hogy

$$\psi_l(\alpha, x) = \varphi_l(\alpha, x)$$

legyen.

3. Kimutatható, hogy

$$\bigl(\varphi_l(x, \beta), f(x)\bigr) = f_l(x, \beta).$$

Ha ugyanis például $\varphi_l(\alpha, \beta_j) = 0$, akkor ebből következik, hogy $f_l(\alpha, \beta_j) = 0$, tehát $f_l(x, \beta_j)$ osztható a legalább elsőfokú $\bigl(\varphi_l(x, \beta_j), f(x)\bigr)$ polinommal. Minthogy $f_l(x, \beta_j)$ irreducibilis $P(\beta_j)$-ben, lesz

$$\bigl(\varphi_l(x, \beta_j), f(x)\bigr) = f_l(x, \beta_j),$$
$$\bigl(\varphi_l(x, \beta), f(x)\bigr) = f_l(x, \beta).$$

Kaptuk tehát a jelölés alkalmas választásánál:

$$\bigl(f_l(\alpha, x), \varphi(x)\bigr) = \varphi_l(\alpha, x), \quad \bigl(\varphi_l(x, \beta), f(x)\bigr) = f_l(x, \beta). \qquad (3)$$

Ezek az egyenlőségek A. Loewy-nek egy reciprocitási tételét adják.[1] A régebbi irodalomra nézve ugyanezen helyre utalok.

[1] A. Loewy, Über die Reduktion algebraischer Gleichungen durch Adjunktion insbesondere reeller Radikale. Math. Zeitschrift, *15.* köt. 261—273. lap.

4. Ha (1) és (2)-ben az irreducibilis tényezők fokai rendre

$$a_1, a_2, \ldots, a_k; \; b_1, b_2, \ldots, b_k \tag{4}$$

akkor

$$\frac{a_l}{b_l} = \frac{a}{b}. \quad (l=1, 2, \ldots, k) \tag{4*}$$

Ez a fortiori be lesz bizonyítva, ha sikerül kimutatni az

$$f(x)^{b_l} = f_l(x, \beta_1) \ldots f_l(x, \beta_b) \tag{5}$$

egyenlőséget. Ámde ez tényleg helyes, mert az

$$f(x)^{b_l} = 0, \; f_l(x, \beta_1) \ldots f_l(x, \beta_b) = 0$$

egyenletek csakis az a_i gyökökkel bírhatnak, még pedig a_i-nek, mint az $f(x)^{b_l}=0$ egyenlet gyökének multiplicitása b_l, az a_i-nek, mint az

$$f_l(x, \beta_1) \ldots f_l(x, \beta_b) = 0$$

gyökének multiplicitása megegyezik az $\left(f_l(a_i, x), \varphi(x)\right) = \varphi_l(a_i, x)$ polinom fokával, vagyis b_l-vel.

5. Az (5) alatti egyenlőségnél kevesebbet mondó a következő. Létezik oly t pozitív egész szám, melyre

$$f(x)^t = f_l(x, \beta_1) \ldots f_l(x, \beta_b). \tag{5*}$$

Ennek igazságát egyszerűbben is beláthatjuk. Ugyanis a_i-nek, mint az

$$f_l(x, \beta_1) \ldots f_l(x, \beta_b) = 0$$

egyenlet gyökének multiplicitása megegyezik az $\left(f_l(a_i, x), \varphi(x)\right) = \varphi_l(a_i, x)$ polinom fokával, mely i-től független. Ha a t kitevőt e fokszámmal egyenlőnek választjuk, úgy (5*) be van bizonyítva.

Az (5*) többszöri alkalmazásával bizonyítja be A. Loewy[1] egy Gauss-féle algebrai állítás igazságát. Az itt használt terminológiát alkalmazva, a Gauss-féle tétel a következő. Legyenek $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ rendre az $r_1, r_2, \ldots, r_s$-edfokú

$$X_1(x) = 0, \; X_2(x) = 0, \ldots, X_s(x) = 0$$

---

[1] A. Loewy, Eine algebraische Behauptung von Gauss. II. Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinigung, 30. köt. 155–158. lap.

egyenletek gyökei, hol az $X_i(x)=0$ egyenlet a $P(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{i-1})$ testben irreducibilis. Ha a P testben irreducibilis n-edfokú $f(x)=0$ egyenlet valamely gyöke a $P(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s)$ testben van, akkor

$$r_1 r_2 \ldots r_s \equiv 0 \pmod{n}.$$

Az (5*) formulának következménye az alábbi tétel. Ha $f(x)$ a P-ben irreducibilis polinom, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b$ a $\varphi(x)=0$ irreducibilis egyenlet gyökei, akkor az

$$f(x) = \Phi(x, \beta_1)\,\Phi(x, \beta_2) \ldots \Phi(x, \beta_b) \tag{6}$$

formula csak abban az esetben következhetik be, ha $\Phi(x, \beta_j)$ irreducibilis a $P(\beta_j)$ testben.

6. Igen közelfekvő annak a kérdésnek vizsgálata, hogy mikor következhetik be (6) oly módon, hogy $1<b<a$ legyen. Ez az imprimitív egyenletek jólismert és sokszor tárgyalt kérdése.[1] Minthogy az irreducibilis tényezőkre való felbontások egyértelműek, van oly l index, hogy $\Phi(x, \beta)=f_l(x, \beta)$, és így előbbi jelöléseinket megtartva, a szükséges és elegendő feltétel az, hogy $b_l=1$, vagyis $\varphi_l(a, x)$ elsőfokú legyen. Ha tehát j-t alkalmasan választjuk,

$$\varphi_l(a, x) = x - \beta_j = x - R(a), \tag{7}$$

hol $\beta_j = R(a)$ az a polinomja. Szükséges és elegendő tehát, hogy a $\varphi(x)=0$ egyenlet valamely gyöke a $P(a)$ testben legyen és $1<b<a$ következzék be. Az előzők szerint

$$f_l(x, \beta_j) = \big(\varphi_l(x, \beta_j), f(x)\big) = \big(\beta_j - R(x), f(x)\big), \tag{7*}$$

vagyis amint ismeretes az $f_l(x, \beta_j) = 0$ egyenlet gyökei mindazok az a-k, melyekre $R(a) = \beta_j$. Ezeknek számossága j-től független és egyenlő a $t = \dfrac{a}{b}$ egész számmal. Továbbá

$$\varphi(x)^t = \big(x - R(a_1)\big)\big(x - R(a_2)\big) \ldots \big(x - R(a_a)\big). \tag{7**}$$

---

[1] A. Loewy, Neue elementare Begründung und Erweiterung der Galoisschen Theorie. (Fortsetzung.) Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. der Wiss. 1927. évf. 18. és következő l.

A jelen tárgyalás azonban *nem* adja meg azt az ismeretes tényt, hogy az egyenlet imprimitív voltára szükséges és elegendő oly R polinom létezése, hogy az

$$R(a_i) \qquad (i=1,2,\ldots,a)$$

értékek közül a különbözők számossága a-nál kisebb, de 1-nél nagyobb legyen. Ugyanis segédeszközeinkkel nem bizonyítottuk be, hogy $R(\alpha)$ mindig kielégít P-ben egy algebrai egyenletet. A reciprocitási tétel és következményeinek alkalmazásai közül kiemeljük a következőket. Legyen először a $f(x)$ és $\varphi(x)$ polinomok foka egyenlő n-nel. Ha $f(x)=0$ valamely gyöke α, $\varphi(x)=0$ valamely gyöke β és β racionális függvénye α-nak, akkor fordítva α is racionális függvénye β-nak. Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ azonosak, akkor látjuk a következőt. Ha $f(x)$ valamely gyökének adjunkciója után elsőfokú tényezőkre bomlik, akkor ugyanaz következik be bármely gyökének adjunkciója után. Ez különben már az irreducibilitásból következik.

7. Eddigi segédeszközeink az irreducibilitás és a legnagyobb közös osztó algoritmusa voltak. Csatoljuk még ezekhez a szimmetrikus formák alaptételének egy klasszikus (nem a Galois-féle elmélet egyes fogalmait felhasználó) bebizonyítását.

Ha még a P testről feltesszük azt a további megszorítást, hogy végtelen sok elemet tartalmaz, akkor az előbbi reciprocitási tételt mélyíthetjük és levezethetjük a Takagi[1]-féle reciprocitási tételt.

Legyenek ismét

$$f(x)=\prod_{\mu=1}^{a}(x-\alpha_\mu)=0,\quad \varphi(x)=\prod_{\nu=1}^{b}(x-\beta_\nu)=0$$

a P-ben irreducibilis egyenletek és válasszuk a két határozatlanú g polinomot úgy, hogy a $\gamma_{\mu\nu}=g(\alpha_\mu,\beta_\nu)$ értékek egymástól különbözők legyenek. Mint könnyen látható, léteznek ily polinomok, sőt a polinom elsőfokúnak is választható. A $\gamma_{\mu\nu}$ mennyiségek a

[1] T. Takagi, On the mutual reduction of algebraic equations, Proceedings of the Imperial Academy (of Japan), 2. köt. 41–42. lap.

szimmetrikus formák alaptétele szerint a P testben egy $H(z)=0$ egyenlet gyökei, mely irreducibilis tényezőkre bontva legyen

$$H(z)=h_1(z)\,h_2(z)\ldots\,h_k(z), \tag{8}$$

hol a $h_l(z)$ foka r_l. Vegyük szemügyre a következő legnagyobb közös osztókat:

$$\big(h_l(g(x,\beta)),\ f(x)\big)=f_l(x,\beta),\ \big(h_l(g(\alpha,x)),\ \varphi(x)\big)=\varphi_l(\alpha,x). \tag{9}$$

Minden $f_l(x,\beta_\nu)$, $\nu=1,2,\ldots,b$ ugyanazzal a fokkal bír, jelöljük ezt a fokszámot a_l-vel. Az $f_l(x,\beta_\nu)$, $\nu=1,2,\ldots,b$ fokszámainak összege egyrészről a_lb, másrészről egyenlő a $h_l(z)$ fokszámával, azaz r_l-vel. Minthogy $f(x)$ és $\varphi(x)$ felcserélhetők, lesz

$$r_l=a_lb=b_la,\quad \frac{a}{b}=\frac{a_l}{b_l},$$

hol b_l a $\varphi_l(\alpha,x)$ fokszámát jelöli. Hogy az indexeket ne halmozzuk, legyen például $h_l(g(\alpha,\beta))=0$, $\gamma=g(\alpha,\beta)$, akkor (9) szerint α a $P(\beta)$ testben egy v_l-edfokú irreducibilis egyenletet elégít ki, hol $v_l\leqq a_l$. A szimmetrikus formák alaptétele szerint $\gamma=g(\alpha,\beta)$ a $P(\beta)$ testben egy v_l-edfokú egyenletet, a P testben egy v_lb-edfokú egyenletet elégít ki. Tehát $v_lb\geqq a_lb$, $v_l\geqq a_l$, $v_l=a_l$, vagyis $f_l(x,\beta)$ irreducibilis a $P(\beta)$ testben. Ugyanezt, ha már tudjuk, hogy $\gamma=g(\alpha,\beta)$ a P testben a $h_l(z)=0$ egyenletet elégíti ki, a következő módon lehet a szimmetrikus formák elmélete nélkül bizonyítani.

Minthogy $\gamma=g(\alpha,\beta)$ a $P(\alpha,\beta)$ testben van, az 5. pontban említett Gauss-féle tétel szerint $v_lb\geqq a_lb$, $v_l\geqq a_l$, tehát $v_l=a_l$. Hasonlókép $\varphi_l(\alpha,x)$ irreducibilis a $P(\alpha)$ testben, és minthogy a $\gamma_{\mu\nu}$ mennyiségek különbözők, lesz

$$f(x)=f_1(x,\beta)\ldots f_k(x,\beta), \tag{1}$$

$$\varphi(x)=\varphi_1(\alpha,x)\ldots\varphi_k(\alpha,x). \tag{2}$$

Végre a $h_l(g(\alpha_\mu,\beta_\nu))=0$, $f_l(\alpha_\mu,\beta_\nu)=0$, $\varphi_l(\alpha_\mu,\beta_\nu)=0$ összefüggések mind helyesek, ha valamelyikök helyes, és így lesz

$$\big(f_l(\alpha,x),\ \varphi(x)\big)=\varphi_l(\alpha,x),\ \big(\varphi_l(x,\beta),\ f(x)\big)=f_l(x,\beta), \tag{3}$$

vagyis a Takagi-féle reciprocitási tétel az itt tárgyalt testekre az előbbit magában foglalja.

8. A TAKAGI-féle tételhez még két megjegyzést akarunk fűzni. Mint a levezetésből látszik, a tétel helyes marad oly végesszámú elemből álló testekre is, melyekben létezik oly g polinom, hogy a $\gamma_{\mu\nu} = g(\alpha_\mu, \beta_\nu)$ értékek egymástól különbözők. Térjünk át ezután a tétel ama speciális esetére, mikor $k=1$. Ekkor a következő irreducibilitási tételt kapjuk. A

$$H(z) = 0,\ f(x) = 0,\ \varphi(x) = 0 \tag{10}$$

egyenletek a P, illetőleg a $P(\beta)$, illetőleg a $P(\alpha)$ testekben egyidőben irreducibilisek. Mint ismeretes, az $f(x) = 0$, illetőleg $\varphi(x) = 0$ egyenleteknek a $P(\beta)$, illetőleg a $P(\alpha)$ testekben való irreducibilitására elegendő, hogy a $P(\beta)$ és a $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a)$, illetőleg a $P(\alpha)$ és a $P(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b)$ testek közös elemei a P testet alkossák.[1] Itt α, β az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a$, illetőleg a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b$ elemek bármelyikét jelenthetik. Ha tehát ez esetek valamelyike bekövetkezik, akkor a $H(z)=0$ egyenlet a P testben irreducibilis.[2]

Bauer Mihály.

BEMERKUNGEN ZUR ALGEBRA.

Ein Teil dieser Note wurde schon publiziert. Es wird hier gezeigt, dass zum Beweise einer algebraischen Behauptung von GAUSS die Begriffe der Irreduzibilität und des gemeinsamen Teilers ausreichen. Aus demselben Satze ergibt sich ein Beweis der Tatsache, welche in der Fussnote [3] der Arbeit «Über einen TAKAGIschen Satz» enthalten ist.

Michael Bauer.

---

[1] Lásd HILBERT, Die Theorie der alg. Zahlkörper 52. §, a 87. tétel bebizonyitását, vagy az ugyanebben a füzetben levő másik dolgozatomat.

[2] Vesd össze H. SCHMIDT, Über eine Klasse irreduzibler Gleichungen. Sitzungsberichte der Bayerischen Akad. der Wiss. *1928*. évf. 157—159. lap. A dolgozat nem elégé általános tételt ad és sok segédeszközt használ fel. Ha a TAKAGI-féle tételnek csak a szóban forgó következményét akarjuk levezetni, a bebizonyitást természetesen egyszerűsithetjük. Erre azonban már nem terjeszkedünk ki.

AZ ÖSSZETETT SZÁMTESTEKRE VONATKOZÓ NÉHÁNY ISMERETES TÉTELNEK BEBIZONYÍTÁSA AZ IDEÁLELMÉLET ALKALMAZÁSA NÉLKÜL.

1. Legyen $K_1 = K_1(\alpha)$, $K_2 = K_2(\beta)$ két algebrai számtest. Fokaikat jelöljék az n_1, illetőleg n_2, diszkriminánsaikat a d_1, illetőleg d_2 betűk. Ismeretes, hogy a K_1 és K_2 számtestből összetett K számtest foka $n = n_1 n_2$, ha $(d_1, d_2) = 1$.

E tételt a következőkép lehet bebizonyítani.[1] Ha a tétel nem volna helyes, akkor az α szám a K_2 testben egy

$$a_0 \alpha^r + a_1 \alpha^{r-1} + \cdots + a_r = 0, \quad r < n_1 \tag{1}$$

egyenletet elégitene ki, melynek a_i együtthatói nem mind racionális számok. Minthogy az a_i együtthatók α-nak és egynéhány konjugáltjának szimmetrikus formái, a $K_2 = K_2(\beta)$ testben léteznék oly nem racionális szám, mely a K_1-nek G_1 Galois-féle testében is tartalmaztatnék. Tekintetbe véve azt, hogy valamely test diszkriminánsa az alárendelt test diszkriminánsával osztható, továbbá hogy Minkowski egy tétele szerint valamely algebrai számtest diszkriminánsa $\neq \pm 1$, a d_2 bírna oly törzstényezővel, mely G_1 diszkriminánsát osztaná. Ámde G_1 diszkriminánsa csakis oly törzstényezővel bír, mely K_1 diszkriminánsában is előfordul, ennek következtében $(d_1, d_2) \neq 1$ lenne.

A következő sorokban meg akarjuk mutatni, hogy az itt alkalmazott összes tényeket az ideálelmélet nélkül be lehet bizonyitani.

2. Mindenekelőtt Kronecker általános vizsgálataiból az ideál-

[1] Hilbert, Die Theorie der alg. Zahlkörper, 52. §, 87. tétel.

elmélet alkalmazása nélkül következik, hogy az alárendelt test diszkriminánsa osztója a felérendelt test diszkriminánsának.[1]

3. Ha d a K_1 és K_2-ből összetett K számtest diszkriminánsa, akkor

$$d_1^{n_2} d_2^{n_1} \equiv 0 \text{ (mod. } d), \tag{2}$$

ebből és a 2. alatti tételből következik, hogy valamely p törzsszám akkor és csak akkor lehet d osztója, ha vagy d_1-nek, vagy d_2-nek osztója.[2] A (2) bebizonyítása kiadódik egy ismeretes determináns tételből, mely szerint, ha C-vel jelöljük a

$$|c_{ru}| = |a_{hk} b_{jl}|$$
$$r = h + (j-1) n_1, \quad u = k + (l-1) n_1, \quad (h, k = 1, 2, \ldots, n_1), \quad (j, l = 1, 2, \ldots, n_2)$$

determináns értékét, akkor $C = A^{n_2} B^{n_1}$, hol A, illetőleg B a $|a_{hk}|$, $(h, k = 1, 2, \ldots, n_1)$ illetőleg $|b_{jl}|$, $(j, l = 1, 2, \ldots, n_2)$ determináns értékét jelenti.[3]

---

[1] Grundzüge einer arithmetischen Theorie der alg. Grössen. 1882, 9. §. Az idézett tételt HILBERTnek a relatív testekre vonatkozó vizsgálatai nagyon kimélyítették.

[2] HILBERT, idézett helyen 51. §, 85. tétel. Lásd még BACHMANN, Zahlentheorie V, 457. lap. Részben más bebizonyítást ad H. WEBER, Lehrbuch der Algebra, 2. kiadás, 2. kötet, 652. lap. Megemlítjük, hogy a tétel levezethető DEDEKIND egy szabályából, mely megadja egy törzsmennyiség felbontását egy GALOIS-féle test alárendelt testeiben.

[3] RADOS, Zur Theorie der Determinanten. Math. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn, *8.* köt., 60. lap, 1890. A dolgozat 1886-ban készült. HENSEL, Zur Composition der Determinanten. Acta Math. *14.* köt., 317. lap. A tétel következik a következő későbbi általános vizsgálatokból: CYPARISSOS STÉPHANOS, Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. Journal de Math. 5. sor., *6.* köt., 73. lap, 1900. Itt említem meg, hogy én már 1894-ben meghatároztam a $|c_{ru} - \eta_{ru} z| = 0$, $\eta_{ru} = \begin{cases} 1, & r = u \\ 0, & r \neq u \end{cases}$ egyenlet gyökeit a lineár egyenletrendszer elméletéből. Lásd még BEKE, A homogen lineáris stb. Math. és Természettud. Értesítő, 1898; ebben a dolgozatban bizonyos diff. egyenletek körüljárási relációi vannak megvizsgálva. — Legyen szabad még a következőket megjegyeznem. E jegyzetben természetesen nincs kimerítve e nevezetes, RADOStól és KRONECKERtől függetlenül talált determináns tétel irodalma, még kevésbbé annak alkalmazhatósága. Csak arra utalok, hogy RADOS tanár úr a tételt nemrég igen figyelemreméltó módon általánosította és azt a relatív testek elméletére alkalmazta: Über die Verallgemeinerung eines KRONECKERschen Determinantensatzes. Journal für die r. u. a. Math. *162.* köt., 198—202. lap.

A C-ről szóló tételt HENSEL nagy sikerrel alkalmazta az összetett testek vizsgálatára.[1] Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a K test determináló száma a $\lambda = u\alpha + v\beta$ alakban írható, hol u, v alkalmas racionális számok. A λ kielégít egy f-edfokú irreducibilis egyenletet, hol $f \leq n_1 n_2$, és amelynek gyökei a $\lambda_{hj} = u\alpha_h + v\beta_j$ számok közül valók. Az $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1}$, illetőleg $\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_2}$ számok legyenek az α, illetőleg β konjugáltjai. Továbbá legyenek a K_1, illetőleg K_2 testek egész számaihoz tartozó alaprendszerek elemei és azoknak konjugáltjai

$$\alpha_h^{(1)}, \alpha_h^{(2)}, \ldots, \alpha_h^{(n_1)}, \qquad (h=1, 2, \ldots, n_1) \tag{3}$$

illetőleg

$$\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \ldots, \beta_j^{(n_2)}. \qquad (j=1, 2, \ldots, n_2) \tag{4}$$

Minthogy az

$$|\alpha_h^{(k)} \beta_j^{(l)}|^2 = d_1^{n_2} d_2^{n_1}$$
$$(h, k=1, 2, \ldots, n_1), \ (j, l=1, 2, \ldots, n_2)$$

egyenlőség következik be, a λ alakjából és a LAPLACE-féle kifejtési tételből következik, hogy a $|\alpha_h^{(k)} \beta_j^{(l)}|$ determináns a $\sqrt{d}$ mennyiség homogén lineáris függvényeinek összege algebrai egész együtthatókkal, ennek következtében valóban

$$d_1^{n_2} d_2^{n_1} \equiv 0 \ (\text{mod. } d).$$

Mint alkalmazást kapjuk, hogy a K test, valamint a hozzátartozó G GALOIS-féle test diszkriminánsa ugyanazokat a törzstényezőket tartalmazza.[2]

4. Ha tehát $(d_1, d_2) = 1$, akkor a K_1 test nem redukálódik a K_2 és a K_2 test nem redukálódik a K_1 adjunkciója által. Így tehát egy HENSEL-féle[3] tétel szerint az

$$\alpha^{(k)} \beta^{(l)} = \alpha_1^{(k)} \beta_1^{(l)} \tag{5}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n_1), \ (l=1, 2, \ldots, n_2)$$

számok a K egész számainak alaprendszerét képezik.

---

[1] A Journal für die r. u. a. Math. folyóiratban egy értekezés sorozata van az összetett testekről. Az első dolgozat címe: Über Gattungen, welche durch Composition etc. *105.* köt. 329—344. lap.

[2] HILBERT, idézett helyen 51. §, 86. tétel.

[3] HENSEL, Journal für die r. u. a. Math. *105.* köt., 337. lap. Ebben az esetben még $d = d_1^{n_2} d_2^{n_1}$.

Teljesség kedvéért végrehajtjuk a bebizonyitást. Minden p törzsszám vagy d_1-hez vagy d_2-hez relativ prím. Legyen például $(d_1, p)=1$. Ha az e_{kl} számok racionális egész számok, akkor a

$$\sum_{k,l} e_{kl}\alpha^{(k)}\beta^{(l)} \equiv 0 \pmod{p} \tag{6}$$

kongruenciából következik

$$\alpha_h^{(1)} \sum_{l=1}^{n_2} e_{1l}\beta^{(l)} + \cdots + \alpha_h^{(n_1)} \sum_{l=1}^{n_2} e_{n_1 l}\beta^{(l)} \equiv 0 \pmod{p}, \tag{7}$$
$$(h=1, 2, \ldots, n_1)$$

vagyis

$$\sqrt{d_1} \sum_{l=1}^{n_2} e_{kl}\beta^{(l)} \equiv 0 \pmod{p}, \quad d_1 \sum_{l=1}^{n_2} e_{kl}\beta^{(l)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Minthogy van oly x racionális egész szám, melyre $xd_1 \equiv 1 \pmod{p}$, lesz

$$\sum_{l=1}^{n_2} e_{kl}\beta^{(l)} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{8}$$

Ámde $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(n_2)}$ a K_2 egész számainak alaprendszerét képezik és így

$$e_{kl} \equiv 0 \pmod{p},$$

ami állításunkat igazolja.

5. Az idézett MINKOWSKI-féle tétel bebizonyitása körülményes, de az ideálelméletet nem alkalmazza.

Bauer Mihály.

BEWEIS VON EINIGEN BEKANNTEN SÄTZEN ÜBER ZUSAMMENGESETZTE KÖRPER OHNE ANWENDUNG DER IDEALTHEORIE.

Diese Arbeit, welche mit der erfolgreichen wissenschaftlichen Tätigkeit meines hochverehrten Lehrers, des H. Prof. G. RADOS in engem Zusammenhange steht, wurde schon publiziert.[1] Hier erscheint die Note in ungarischer Sprache.

Michael Bauer.

[1] Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung *30*, S. 186—188.

GRAPHOK ÉS MATRIXOK.[1]

Legyen a (véges) G graph *páros körüljárású*. Ez annyit jelent, hogy G minden zárt vonala páros számú élből áll, vagy — másképp kifejezve — hogy G szögpontjait úgy lehet két osztályba, Π_1-be és Π_2-be, sorozni, hogy G minden éle egy Π_1-pontot egy Π_2-ponttal kössön össze. Legyen M a maximális száma a G oly éleinek, melyeknek páronként nincs közös végpontjuk. Ha G-nek $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ szögpontjai oly tulajdonságúak, hogy G minden éle e pontok valamelyikébe fut, azt mondjuk, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ *kimerítik* a G éleit.

Bebizonyítjuk, hogy *G élei M szögponttal kimeríthetők.*

Legyen az M élből álló

$$K = (P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_MQ_M)$$

élhalmaz — az M definiciójának megfelelően — a G-nek M-számú oly éle, hogy a P_i, Q_i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ pontok különbözők. Itt a P_i-k a Π_1-hez, a Q_i-k a Π_2-höz tartozzanak és pedig legyen

$$\Pi_1' = (P_1, P_2, \ldots, P_M), \quad \Pi_2' = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_M),$$

úgy hogy Π_1' a Π_1-nek és Π_2' a Π_2-nek részhalmaza. Bizonyításunkat a «*K-út*» fogalmára alapítjuk.

A G-nek egy (többszörös pont nélküli, nyílt) útját, $A_1A_2 \ldots A_{2\nu}$-et, *K-út*nak nevezzük, ha második, negyedik, ..., 2ν-edik, ..., végül utolsóelőtti éle, azaz az $A_2A_3, A_4A_5, \ldots, A_{2\nu}A_{2\nu+1}, \ldots, A_{2r-2}A_{2r-1}$ élek valamennyien K-hoz tartoznak. Először is kimutatjuk a következő segédtételt:

G-nek semmiféle K-útja sem köti össze $\Pi_1 - \Pi_1'$ egy pontját $\Pi_2 - \Pi_2'$ valamely pontjával.

---

[1] Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat 1931. márc. 26.-i ülésén tartott előadás.

Ha ugyanis U egy ilyen út volna, akkor eltávolítva K-ból az U-nak K-beli éleit és hozzávéve U-nak K-ba nem tartozó éleit (az utóbbiak száma 1-gyel nagyobb), $M+1$ oly élt nyernénk, melyeknek páronként nincs közös végpontjuk. És ez ellentmond M maximális voltának.

Most már következőképen definiáljuk a $\Pi_1' + \Pi_2'$-nek egy $\Pi' = (R_1, R_2, \ldots, R_M)$ részhalmazát: α az 1, 2,..., M számok bármelyike lévén, legyen $R_\alpha = Q_\alpha$, ha valamely K-út $\Pi_1 - \Pi_1'$ valamely pontját Q_α-val köti össze; ha ilyen K-út nincs, legyen $R_\alpha = P_\alpha$. Ily módon Π' a K minden élének egy-egy végpontját tartalmazza. Kimutatjuk, hogy az M pontból álló Π' halmaz pontjai kimerítik a G éleit, vagyis, hogy — PQ egy tetszőleges éle lévén G-nek (hol P a Π_1-be, Q a Π_2-be tartozik) — vagy P, vagy Q pontja Π'-nek. A bizonyításnál négy esetet különböztetünk meg.

1. eset. P tartozzék $\Pi_1 - \Pi_1'$-be, Q pedig $\Pi_2 - \Pi_2'$-be. Hozzávéve K-hoz ezt a PQ élt, $M+1$ oly élt nyernénk, melyeknek páronként nincs közös végpontjuk. Ez ellentmond M maximális voltának, úgy, hogy ez az 1. eset lehetetlen.

2. eset. P tartozzék $\Pi_1 - \Pi_1'$-be, Q pedig Π_2'-be. Ekkor $Q = Q_\alpha$, hol $\alpha = 1, 2, \ldots,$ vagy M és a PQ él önmagában egy K-utat alkot, mely $\Pi_1 - \Pi_1'$-nek P pontját $Q = Q_\alpha$-val köti össze. Tehát $Q = Q_\alpha$ a Π'-be tartozik.

3. eset. P tartozzék Π_1'-be, Q pedig $\Pi_2 - \Pi_2'$-be. Ekkor $P = P_\alpha$, hol $\alpha = 1, 2, \ldots,$ vagy M. Ha volna oly K-út, mely $\Pi_1 - \Pi_1'$ valamely P_0 pontját Q_α-val, köti össze, akkor hozzáfűzve ezen úthoz a $Q_\alpha P_\alpha$ és $P_\alpha Q$ éleket, oly K-utat nyernénk, mely P_0-t Q-val köti össze; a segédtétel szerint azonban ez lehetetlen. Nincs tehát olyan K-út, mely $\Pi_1 - \Pi_1'$ valamely pontját Q_α-val köti össze. Tehát $P = P_\alpha$ a Π'-be tartozik.

4. eset. P tartozzék Π_1'-be, Q pedig Π_2'-be. Legyen például $P = P_\alpha$, $Q = Q_\beta$. Ha $\alpha = \beta$, akkor természetesen vagy $P = P_\alpha$ vagy $Q = Q_\alpha$ a Π'-be tartozik. Feltehetjük tehát, hogy $\alpha \neq \beta$. Vagy $P = P_\alpha$ tartozik Π'-be, vagy van egy K-út, mely $\Pi_1 - \Pi_1'$ valamely P_0 pontját Q_α-val köti össze; utóbbi esetben, hozzávéve e K-úthoz a $Q_\alpha P_\alpha$ és $P_\alpha Q_\beta$ éleket, oly K-utat nyerünk, mely P_0-t Q_β-val köti össze, úgy, hogy ez esetben $Q = Q_\beta$ tartozik Π'-be.

Ezzel valóban kimutattuk, hogy, ha egy páros körüljárású graphban maximálisan M számú oly él van, melyeknek páronként nincs közös végpontjuk, akkor G élei M szögponttal kimeríthetők. Ha tehát m a minimális száma az oly szögpontoknak, melyek G éleit kimerítik, akkor $m \leq M$.

Világos, hogy fordítva is: $m \geq M$. Ha t. i. $e_1, e_2, \ldots, e_M$ oly élek, melyeknek páronként nincs közös végpontjuk és az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ szögpontok a graph éleit kimerítik, akkor az $e_1, e_2, \ldots, e_M$ élek mindegyike az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ pontok valamelyikében végződik; közös végpontjuk ezen éleknek nem lévén, valóban $m \geq M$.

Ezzel kimutattuk, hogy $m = M$. Összefoglalva főeredményünk így fogalmazható:

Páros körüljárású graphban az éleket kimerítő szögpontok minimális száma megegyezik a páronként közös végpontot nem tartalmazó élek maximális számával.

Áttérve e tétel matrixokra való alkalmazására, legyen

$$\| a_{ik} \| \qquad (i=1, 2, \ldots, p;\ k=1, 2, \ldots, q)$$

egy tetszőleges matrix, hol egy-egy elemet illetően csak az fog tekintetbe jönni, hogy eltűnik-e vagy nem. E matrixnak a következő módon egy páros körüljárású graphot feleltetünk meg. A p-számú sor mindegyikének a $P_1, P_2, \ldots, P_p$ pontok egyikét, a q-számú oszlop mindegyikének a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$ pontok egyikét feleltetjük meg; továbbá akkor és csak akkor vezetünk be egy P_iQ_k élt, ha a *megfelelő* a_{ik} elem nem tűnik el. Más éleket nem vezetünk be. Így egy páros körüljárású G graph keletkezik.

Az, hogy bizonyos szögpontok a G éleit kimerítik, világosan azt jelenti, hogy az ezen szögpontoknak megfelelő sorok és oszlopok (közös néven: *vonalak*) összeségükben a matrix minden el nem tűnő elemét tartalmazzák. Az pedig, hogy bizonyos éleknek páronként nincs közös végpontjuk, azt jelenti, hogy az ezen éleknek megfelelő elemek páronként nem feküsznek ugyanazon vonalban.

Eredményünk matrixokra megfogalmazva tehát így mondható ki:

Bármely matrixra az oly vonalak minimális száma, melyek összességükben az összes el nem tűnő elemeket tartalmazzák, megegyezik az oly el nem tűnő elemek maximális számával, melyek páronként nem feküsznek egy vonalban.

Világos, hogy itt az «el nem tűnő» jelző az elemek bármily tulajdonságával helyettesíthető; ezért e tétel a matrixok (kétméretű táblák) egy tisztán kombinatorikus tulajdonságát fejezi ki, hol az elemek tetszőleges tárgyak (nem csak számok) lehetnek.

Megemlitjük végül, hogy eredményeink szorosan összefüggnek Frobeniusnak determinánsokra és Mengernek graphokra vonatkozó némely vizsgálatával. E kapcsolatokra másutt fogunk kiterjeszkedni.

Kőnig Dénes.

GRAPHEN UND MATRICES.

Es wird folgender Satz bewiesen:

Für jeden paaren Graphen ist die Minimalzahl derjenigen Knotenpunkte, welche die Kanten des Graphes erschöpfen, gleich der Maximalzahl von Kanten, welche paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen.

Wir sagen hier, dass die Knotenpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ die Kanten eines Graphes «erschöpfen», wenn jede Kante des Graphes in einem der Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ endet.

In die Sprache der Matrices übersetzt besagt der Satz:

Für jede Matrix ist die Minimalzahl derjenigen Reihen (Zeilen und Spalten), welche in ihrer Gesamtheit sämtliche nichtverschwindende Elemente der Matrix enthalten, gleich der Maximalzahl paarweise reihenfremder nichtverschwindender Elemente der Matrix.

Dénes Kőnig.

KIEGÉSZÍTÉS A VEKTORANALIZIS INTEGRÁLTÉTELEIHEZ.

Jól ismeretes a következő két integráltétel:

Ha X, Y, Z az x, y, z derékszögű koordinátáknak folytonos differenciálhányadosokkal biró függvényei, továbbá τ az xyz térnek tartománya és σ az a zárt felület, mely e tartományt határolja, akkor

$$\iiint_\tau \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\tau = \iint_\sigma (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\sigma \tag{1}$$

és

$$\iiint_\tau \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} d\tau = T, \tag{2}$$

ahol $d\tau$ jelenti τ-nak térfogatelemét, $d\sigma$ a σ-nak felületelemét, α, β, γ a $d\sigma$ külső normálisának iránycosinusait és T a XYZ-tér azon tartományának térfogatát, mely az xyz-tér τ tartományának megfelel.

A fenti hármas integrálok integrandusai a λ-ra vonatkozó

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}+\lambda & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y}+\lambda & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z}+\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^3 + \lambda^2\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \tag{3}$$
$$+\lambda\left[\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(Z,X)}{\partial(z,x)}+\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}\right]+$$
$$+\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(x,y,z)}=0$$

egyenletben mint együtthatók fordulnak elő. Az euklidesi térre korlátozott tenzoranalizisben a (3) egyenlet bizonyos szerepet játszik. Ha ugyanis az X, Y, Z függvényekkel vektorteret definiálunk, akkor a

$$\begin{matrix} \frac{\partial X}{\partial x}, & \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial y}, & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x}, & \frac{\partial Z}{\partial y}, & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{matrix}$$

mennyiségek egy (másodrendű) tenzort határoznak meg. A (3) egyenlet ennek a tenzornak karakterisztikus egyenlete és így minden orthogonális transzformációval szemben invariáns.

Az (1) és (2) képletekből nyilvánvaló, hogy az ott fellépő hármas integrálok pusztán a τ tartomány határfelületétől függnek. Érdekes megvizsgálni, hogy a (3) egyenlet még hiányzó

$$\Omega \equiv \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(Z, X)}{\partial(z, x)} + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}$$

együtthatójára milyen hasonló integráltétel érvényes. Ez a jelen dolgozat tárgya.

*

A szóbanforgó Ω kifejezés így alakítható át:

$$\Omega \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(X\frac{\partial Y}{\partial y} - Z\frac{\partial X}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Y\frac{\partial Z}{\partial z} - X\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(Z\frac{\partial X}{\partial x} - Y\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

és egyszersmind

$$\Omega \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(X\frac{\partial Z}{\partial z} - Y\frac{\partial X}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Y\frac{\partial X}{\partial x} - Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(Z\frac{\partial Y}{\partial y} - X\frac{\partial Z}{\partial x}\right),$$

tehát

$$2\Omega \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[Z\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}+Z\frac{\partial X}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(X\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}+Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}+Y\frac{\partial Z}{\partial y}+Z\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

amiből következik (az (1) képlet alapján), hogy

$$\begin{aligned}2\iiint_\tau \Omega d\tau = &\iint_\sigma \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)(X\alpha+Y\beta+Z\gamma)\,d\sigma- \\ &-\iint_\sigma\left[\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}+Z\frac{\partial X}{\partial z}\right)\alpha+\cdots\right]d\sigma.\end{aligned} \tag{4}$$

Jelöljük az X, Y, Z vektort röviden $\vec{a}$-val. A $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ kifejezés tudvalevőleg skalármennyiség; ezt $\vec{a}$ divergenciájának nevezik (div $\vec{a}$); továbbá

$$X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}+Z\frac{\partial X}{\partial z},\quad X\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}+Z\frac{\partial Y}{\partial z},$$
$$X\frac{\partial Z}{\partial x}+Y\frac{\partial Z}{\partial y}+Z\frac{\partial Z}{\partial z}$$

annak a vektornak három koordinátája, melyet $\vec{a}$-ból $\vec{a}$ szerinti differenciálással nyerünk és amelynek szokásos jele: $(\vec{a}\ \mathrm{grad})\ \vec{a}$.

Rendeljünk még a $d\sigma$ elemhez egy $\overrightarrow{d\sigma}$ vektort, mely $d\sigma$ hosszúsággal birjon és a felületelem külső normálisa szerint legyen irányitva és jelöljük két vektor belső szorzatát a két vektor jele közé tett ponttal.

Ezek után a kapott integráltételt igy irhatjuk:

$$2\iiint_\tau \Omega d\tau = \iint_\sigma [(\mathrm{div}\ \vec{a})\ \vec{a} - (\vec{a}\ \mathrm{grad})\ \vec{a}]\,.\overrightarrow{d\sigma} \tag{5}$$

vagy ismert, az $(\vec{a}$ grad) műveletre vonatkozó átalakitás után

$$2\iiint_\tau \Omega d\tau = \iint_\sigma [(\mathrm{div}\ \vec{a})\ \vec{a} + \vec{a}\times \mathrm{rot}\ \vec{a} - \tfrac{1}{2}\mathrm{grad}\,(\vec{a}.\vec{a})]\,.\overrightarrow{d\sigma}, \tag{6}$$

ahol rot $\vec{a}$ a $\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}$, $\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}$ vektort, grad φ

a $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ vektort jelenti és $\times$ a külső szorzat szimboluma.

Ha speciális esetképpen

$$\vec{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi,$$

akkor

$$2\iiint_\tau \Omega d\tau =$$

$$= \iint_\sigma \varphi^2 \left\{ \Delta\psi \operatorname{grad} \psi - \tfrac{1}{2} \operatorname{grad} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \right] \right\} \cdot \vec{d\sigma} \tag{7}$$

$\left(\text{ahol } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$.

*

Ha a $(\operatorname{div} \vec{a})\vec{a} - (\vec{a} \operatorname{grad})\vec{a}$ vektort a σ felületen meg akarjuk határozni, akkor ismernünk kell az $\vec{a}$ vektorteret ezen a felületen és e felületnek valamely (akármilyen kicsiny) térbeli környezetében. Azonban e vektornak csak arra a komponensére van szükségünk, mely a felületre merőleges. Ezt a komponenst *kiszámíthatjuk pusztán a felületre vonatkozó adatok alapján.*

Állításunk helyessége magából a (4) képletből azonnal folyik, midőn a σ felület sík lapokból áll. Ha ugyanis a koordinátarendszert úgy helyezzük el, hogy az xy sík e lapok valamelyikével összeessék, akkor a (4) képlet jobboldali integráljának e lapra vonatkozó része

$$\iint \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) Z - \left(X \frac{\partial Z}{\partial x} + Y \frac{\partial Z}{\partial y}\right) \right] d\sigma$$

z szerinti differenciálást nem tartalmaz, hanem csak olyan differenciálásokat, melyek e lap mentén végzendők. Következtetésünk minden lapra és így az egész poliéderfelületre érvényes.

Az általános esetben úgy igazolhatjuk legegyszerűbben állításunkat, hogy a (4) jobboldalán szereplő integrált felületi koordináták segítségével fejezzük ki. Legyenek szokásos jelöléssel u, v a felületi koordináták,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

a felületi ívelem négyzete és

$$H = \sqrt{EG - F^2}.$$

Vezessük be az (X, Y, Z) vektor U, V felületi kovarians komponenseit

$$U = X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$V = X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v},$$

és ugyane vektor U_1, V_1 felületi kontravarians komponenseit, melyek az

$$EU_1 + FV_1 = U$$

$$FU_1 + GV_1 = V$$

egyenletekből adódnak. Legyen végre N a vektornak az a komponense, mely a felületre merőleges. Ezek után a (4) képletet a következő alakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}\iiint_\tau \Omega d\tau = \iint_\sigma \Big[N\Big(\frac{\partial HU_1}{\partial u} + \frac{\partial HV_1}{\partial v}\Big) - \\ - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial HU_1N}{\partial u} + \frac{\partial HV_1N}{\partial v}\Big)\Big] du\,dv,\end{aligned} \tag{8}$$

ami állításunk helyességét közvetlenül igazolja.

Szücs Adolf.

COMPLÉMENT AUX THÉORÈMES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE.

Dans un champ de vecteurs (X, Y, Z), on forme les neuf dérivées: $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial z}$. On sait que la somme Ω des trois jacobiens $\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(y, z)}$, $\frac{\partial(Z, X)}{\partial(z, x)}$ et $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}$ est un invariant. L'objet de l'article est de montrer que toute intégrale de volume de cet invariant Ω s'exprime par une intégrale de surface dont le calcul n'exige que la connaissance du vecteur (X, Y, Z) sur la surface.

Adolphe Szücs.

A MONOTON FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLHATÓSÁGÁRÓL.

1. Lebesgue francia matematikusnak a ponthalmazok mérésére és a határozott integrálra vonatkozó alapvető vizsgálatainak egyik legjelentősebb eredménye az a tétel, hogy *minden monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható.* A tétel Lebesgue 1904-ben megjelent könyvében áll először, és pedig az utolsó fejezet utolsó bekezdésében,[1] úgyszólván mint az egész elmélet egy végső következménye. Ezzel szemben a tétel szövegében sem az integrál, sem a mérték fogalma nem szerepel; legfeljebb az utóbbi szerepel látszólag, amenyiben a «majdnem mindenütt» kifejezés azt jelenti, hogy mindenütt, vagy esetleg egy olyan halmaz kivételével, mely tetszésszerinti kicsiny összhosszúságú véges számú vagy végtelen sok intervallumba foglalható be. Az ilyen halmazt 0-halmaznak, vagy 0 mértékű halmaznak nevezik, de az elnevezés dacára a fogalom a mértékelmélettől független, vagy azt is mondhatjuk, hogy ennek az elméletnek egy előkészítő fogalomalkotása és tekintetbe jövő tulajdonságai néhány szóban megadhatók és bebizonyíthatók.[2]

---

[1] H. Lebesgue: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1904, p. 128. Az idézett helyen a tétel egy általánosabb függvényosztályra, a korlátos változású függvényekre szól; mivel azonban C. Jordan szerint minden korlátos változású függvény két monoton növekvő függvény különbsége gyanánt állítható elő, azért az általánosabb tétel lényegében azonos a szövegben idézett speciális esetével.

[2] A tekintetbe jövő tulajdonságok a következők: 1. a pont 0-halmaz; 2. 0-halmaz minden részhalmaza is 0-halmaz; 3. véges számú, vagy megszámlálhatóan végtelen sok 0-halmaz egyesítési halmaza ugyancsak 0-halmaz. Az első kettő evidens; a harmadik bebizonyítása a következő: fog-

A tételnek az integrálás elméletétől független módon való bebizonyításával legelőször FABER foglalkozott.[3] Csaknem ugyanabban az időben jelent meg a YOUNG-házaspár bebizonyítása.[4] Ennek, valamint a későbbi bebizonyítások közül csaknem mindnek, leglényegesebb eszköze egy-egy «fedési» tétel, melyek közül leginkább ismeretesek LEBESGUE lánctétele és a VITALI-féle tétel.[5] A következő sorokban egy olyan bebizonyítást ismertetek, melyben a fedési tételek szerepét egy csaknem evidens segédtétel veszi át. Egyszerű voltán kívül ennek a segédtételnek még az az előnye is megvan, hogy a kérdéses 0-halmazoknak kis összegű intervallumokba való befoglalását előre meghatározott módon, szinte gépiesen eszközli, míg az említett fedési tételek, legalább is használni szokott alakjukban, csak az ilyen befoglalás *lehetőségét* biztosítják.

Egyelőre még azt is fölteszem, hogy a függvény folytonos; az általános eset tárgyalásához szükséges módosításokat utóbb részletezem.

2. Segédtétel. *Ha $g(x)$ egy az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban folytonos függvény, akkor az intervallum belsejében fekvő azon helyek összesége, amelyekhez van az intervallumban olyan $x' > x$, hogy $g(x') > g(x)$, nyitott halmaz és ennélfogva véges számú vagy megszámlálhatóan végtelen sok egymásba nem nyúló (a_k, b_k) nyitott intervallumból áll; valamennyi ilyen intervallumra $g(a_k) \leqq g(b_k)$.*

---

laljuk be a kérdéses 0-halmazokat egy-egy olyan intervallumrendszerbe, melynek összhosszúsága rendre kisebb, mint $\varepsilon/2, \varepsilon/4, \ldots, \varepsilon/2^n, \ldots$; akkor ezáltal egyszersmind az egyesítési halmazt is befoglaltuk olyan rendszerbe, melynek összhosszúsága kisebb, mint ε.

[3] G. FABER: Über stetige Funktionen II, *Math. Annalen* **69** (1910), pp. 372—443.

[4] W. H. YOUNG and GRACE CHISHOLM YOUNG, On the Existence of a Differential Coefficient, *Proceedings London Math. Soc.* **2**, **9** (1910—11), pp. 325—335.

[5] A fedési tételeket és azok irodalmát illetőleg l. T. H. HILDEBRANDT, The Borel Theorem and its Generalizations, *Bulletin American Math. Soc.* **32** (1926), pp. 423—474.

A segédtétel bebizonyitása. A kérdéses halmaz nyitott, mert ha $g(x') > g(x_0)$, akkor a folytonosság következtében még az x_0 elég kis környezetében fekvő x-ekre is $g(x') > g(x)$. Legyen (a_k, b_k) a halmazt alkotó nyitott intervallumok bármelyike, úgy hogy tehát a b_k pont már ne tartozzék a halmazhoz. Megmutatom, hogy minden $a_k < x_0 < b_k$-ra $g(x_0) \leqq g(b_k)$; ebből a folytonosság alapján $(x_0 \to a_k)$ következik, hogy $g(a_k) \leqq g(b_k)$. Legyen x_1 a legnagyobb olyan az (x_0, b_k) intervallumban fekvő érték, amelyre $g(x_1) \geqq g(x_0)$. Ha $x_1 = b_k$, akkor állításunk evidens. Ellenkező esetben a föltevés szerint van olyan $x' > x_1$, hogy $g(x') > g(x_1)$. Mivel viszont x_1 értelmezése szerint minden $x_1 < x \leqq b_k$-ra $g(x) < g(x_0) \leqq g(x_1)$, azért a kérdéses $x' > b_k$. Továbbá, minthogy b_k nem tartozik halmazunkhoz, azért $g(b_k) \geqq g(x')$. Vagyis $g(x_0) \leqq g(x_1) < g(x') \leqq g(b_k)$. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

3. Tétel. *A folytonos monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható.*

A tétel bebizonyitása. Elegendő a növekvő függvényekre szorítkoznunk. Jelentsen $f(x)$ egy az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban folytonos növekvő függvényt, $D^+ f(x)$, $D_+ f(x)$, ill. $D^- f(x)$, $D_- f(x)$, vagy röviden D^+, D_+, D^-, D_- jelentsék a jobb-, ill. baloldali felső és alsó deriváltakat, azaz az

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{ill.} \quad \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

különbségi hányadosoknak legnagyobb és legkisebb torlódási értékeit. A tétel bebizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy

1. majdnem mindenütt $D^+ < \infty$;[6]

2. majdnem mindenütt $D^+ \leqq D_-$.

Mert először is 2.-ből, ha azt az ugyancsak növekvő $-f(-x)$ függvényre alkalmazzuk, következik, hogy

2'. majdnem mindenütt $D^- \leqq D_+$.

---

[6] 1. helyett már elegendő volna csak azt megmutatni, hogy majdnem mindenütt $D_+ < \infty$.

A 2. és 2'. egyenlőtlenségeket az evidens $D_+ \leqq D^+$ és $D_- \leqq D^-$ egyenlőtlenségekkel kombinálva: $D^+ \leqq D_- \leqq D^- \leqq D_+ \leqq D^+$, tehát a négy mennyiség egyenlő és közös értékük 1. folytán véges, már t. i. majdnem mindenütt, azaz $f(x)$-nek majdnem mindenütt meghatározott véges differenciálhányadosa van.

Az 1. állítás bebizonyítása. Elegendő az (a, b) intervallum belsejében fekvő x helyeket tekintenünk. Ezek közül azok, amelyekre $D^+ = \infty$, nyilvánvalóan foglaltatnak azon x helyek összességében, amelyekhez van olyan x' $(x < x' \leqq b)$, hogy

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} > C,$$

azaz

$$f(x') - Cx' > f(x) - Cx,$$

ahol C tetszésszerint megadott szám. Segédtételünk szerint, ha azt a $g(x) = f(x) - Cx$ függvényre alkalmazzuk, ez utóbbi x helyek halmaza olyan egymásba nem nyúló nyitott (a_k, b_k) intervallumokból áll, melyekre

$$f(b_k) - f(a_k) \geqq C(b_k - a_k).$$

Tehát, és mivel $f(x)$ növekvő, azért

$$f(b) - f(a) \geqq \sum_k \big(f(b_k) - f(a_k)\big) \geqq C \sum_k (b_k - a_k).$$

Ha tehát C-t elég nagynak választjuk, az (a_k, b_k) intervallumok összhosszúsága tetszésszerint kicsiny lesz. Ezzel az 1. állítást bebizonyítottuk.

A 2. állítás bebizonyítása. Legyen $0 < c < C$ és tekintsük az (a, b) intervallum belsejében fekvő azon x helyeket, amelyekre $D_- < c$. Az imént végzetthez analog meggondolással, a segédtételt az $f(-x) + cx$ függvényre alkalmazva, a kérdéses helyek összességét olyan egymásba nem nyúló nyitott (a_k, b_k) intervallumokba foglaljuk be, melyekre nézve

$$f(b_k) - f(a_k) \leqq c(b_k - a_k).$$

Mindegyik ilyen (a_k, b_k) intervallum belsejében külön-külön tekintsük azon x helyeket, melyekben $D^+ > C$, akkor a fenti eljárással ezeket olyan újabb, a már nyert intervallumokban fekvő, egymásba nem nyúló, nyitott (a_{kl}, b_{kl}) intervallumokba foglaljuk be, amelyekre nézve

$$f(b_{kl}) - f(a_{kl}) \geqq C(b_{kl} - a_{kl}).$$

Ha a két eljárást váltakozva folytatjuk, az egymásba skatulyázott nyitott halmazoknak sorozatát kapjuk; ha ezek összhosszát rendre $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$-vel jelöljük, úgy a két legutóbbi egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$C\Sigma_2 = C\sum_{k,l}(b_{kl} - a_{kl}) \leqq \sum_k\sum_l\{f(b_{kl}) - f(a_{kl})\} \leqq$$

$$\leqq \sum_k\{f(b_k) - f(a_k)\} \leqq c\sum_k(b_k - a_k) = c\Sigma_1,$$

vagyis $\Sigma_2 \leqq \vartheta\Sigma_1$, ahol $\vartheta = \frac{c}{C}$. Ugyanígy általánosan $\Sigma_{2n} \leqq \vartheta\Sigma_{2n-1}$; minthogy ezenkívül nyilván $\Sigma_{2n+1} \leqq \Sigma_{2n}$, azért $\Sigma_{2n+1} \leqq \Sigma_{2n} \leqq \vartheta^n\Sigma_1 \to 0$. Tehát azon x-ek halmazát, amelyekre $D_- < c$ és egyúttal $D^+ > C$, esetleg a fölhasznált intervallumok valamelyikének kezdő- vagy végpontjai, vagyis egy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen és ennélfogva 0-halmaz kivételével, tetszésszerint kicsiny összhosszúságú intervallumrendszerekbe foglaltuk be, azaz a $D_- < c$ és $D^+ > C$ relációkkal jellemzett halmaz 0 mértékű.

Ha már most valamely x helyen $D_- < D^+$, akkor van két olyan pozitív racionális $c < C$, hogy $D_- < c < C < D^+$. Vagyis, ha a c, C értékeket végigfuttatjuk a pozitív racionális számpárok megszámlálható összeségén, akkor a megfelelő végtelen sok kivételes 0-halmaz egyesítési halmaza, mely tehát szintén 0-halmaz, az összes olyan helyeket, amelyeken $D_- < D^+$, magában foglalja.

Ezzel a 2. állítást és ennélfogva a tételt is bebizonyítottuk.

4. Nem folytonos monoton függvény esetében mindenekelőtt valamivel általánosabb segédtételre támaszkodunk, t. i. a $g(x)$ függvényről az (a, b) intervallum belsejében a folytonosság helyett csak a $g(x-0)$ és $g(x+0)$ határértékek létezését és a felülről való folytonosságot, azaz azt tesszük fel, hogy $g(x)$ e két határérték egyikénél sem kisebb. A segédtétel állitása ebben az esetben is érvényes, bebizonyitása szószerint vihető át; csupán $g(a_k)$ helyébe teendő a $g(a_k+0)$ érték.[7]

A tétel bebizonyitása is úgyszólván szószerint megismételhető. Csupán azt a megjegyzést kell előre bocsátanunk, hogy növekvő $f(x)$-nél az általánosság veszélyeztetése nélkül föltehetjük, hogy a függvény jobbról folytonos, azaz hogy $f(x)=f(x+0)$. Ugyanis az ugrási helyek halmaza megszámlálható, tehát 0-halmaz és ezért az ott való differenciálhatatlanság a tétel szempontjából irreleváns. Másrészt, ha x folytonossági hely, úgy az $f(x+h)$, ill. $f(x-h)$ értékeknek a megfelelő különbségi hányadosokban az $f(x+h+0)$, ill. $f(x-h+0)$ határértékekkel való kicserélése csak ront a helyzeten, t. i. a jobboldali különbségi hányadost csak nagyobbithatja, a baloldalit csak kisebbitheti.[8] Tehát az $\bar{f}(x)=f(x+0)$ függvény jobboldali felső deriváltja a folytonossági helyeken nem kisebb, a baloldali alsó deriváltja pedig nem nagyobb, mint az eredeti $f(x)$ függvényé. Az 1. és 2. egyenlőtlenségek tehát, ha azokat az $\bar{f}(x)$-re bebizonyitjuk, a fortiori érvényesek az eredeti $f(x)$-re is, legalább is a folytonossági helyeken. Már pedig az $\bar{f}(x)$ függvényre az 1. és 2. bebizonyitása úgyszólván szószerint átvihető, természetesen a módositott segédtétel fölhasználásával. A 2'. reláció viszont ismét a $-f(-x)$ függvényre való átmenettel adódik.

Ezzel a tételt nem folytonos monoton függvény esetére is bebizonyitottuk.

Riesz Frigyes.

---

[7] A segédtétel egy további kinálkozó és ugyancsak hasonlóan bebizonyitható általánositása az, melyben $g(x)$-ről csak azt tesszük föl, hogy felülről félig folytonos és a $g(x+0)$ határérték szerepét a jobboldali legnagyobb torlódási érték veszi át.

[8] Ismeretes és könnyen bebizonyitható az is, hogy a folytonossági helyeken az $f(x)$ és $f(x+0)$ függvények két-két megfelelő derivált értéke (pl. a két jobboldali felső derivált) rendre egyenlők egymással. Erre a pontosabb tényre azonban nincsen szükségünk.

SUR L'EXISTENCE DE LA DÉRIVÉE DES FONCTIONS MONOTONES.

Démonstration directe et élémentaire du théorème classique de M. Lebesgue, d'après lequel toute fonction monotone admet, presque partout, une dérivée finie et déterminée. La démonstration est basée sur le lemme suivant. *Soit* $g(x)$ *une fonction continue dans l'intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *ou plus généralement, supposons qu'elle y admette les valeurs limites* $g(x-0)$ *et* $g(x+0)$ *et que la valeur* $g(x)$ *elle-même ne soit inférieure à aucune des deux limites. Alors l'ensemble des* x *intérieurs à* (a, b) *et tels qu'il existe un* $x' > x$ *de sorte que* $g(x') > g(x)$, *est ouvert c'est-à-dire qu'il se décompose en un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles ouverts et disjoints* (a_k, b_k). *De plus on aura, pour chacun de ces intervalles,* $g(a_k+0) \leqq g(b_k)$.

Frédéric Riesz.

A CSOPORTKARAKTERISZTIKÁK ELMÉLETÉRŐL.

Bevezetés.

Dolgozatom célja a FROBENIUS-féle csoportkarakterisztikák elméletének egyszerű és elemi megalapozása. A csoportkarakterisztikák elmélete tudvalevőleg szoros összefüggésben áll a lineáris transzformációcsoportok elméletével, melyet RADOS GUSZTÁV egy szép dolgozatában[1] fontos eredményekkel gazdagított az adjungált helyettesitési csoportok tulajdonságainak feltárásával.

Röviddel FROBENIUS — elég bonyolult — megalapozása után[2] felmerült a kívánság az elmélet egyszerűsitésére. Első helyen BURNSIDE[3] vizsgálatairól kell megemlékeznem, akinek nagy érdeme, hogy az ú. n. irreducibilis csoportelőállitások egy általa felfedezett fontos tételének felhasználásával lényeges egyszerűsitéseket ért el. Utána SCHURnak[4] sikerült — ugyancsak az említett BURNSIDE-féle tétel alkalmazásával — a karakterisztikák elméletét igen egyszerű és áttekinthető alakra hoznia.

Ezek a megalapozások azonban olyanok, hogy a véges csoportok irreducibilis előállításából indulnak ki, egy olyan elméletből, amely az absztrakt csoportelméletnek — véleményem szerint — inkább alkalmazása, mint segédeszköze. Különösen

---

[1] Az adjungált bilineár alakok elméletéhez, *Mathematikai és Természettudományi Értesitő*, **XIX**, (1896), 165. l.

[2] *Sitzungsberichte der preussischen Akademie*, **1896**, 985. és 1343. l.; **1897**, 994. l.; **1899**, 482. l.

[3] *Acta Mathematica*, **28**, 369. l. és *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, **1**, 117. l.

[4] *Sitzungsberichte der preussichen Akademie*, **1905**, 406. l.

szembeötlő ez a körülmény, ha a Frobenius-féle elméletet a megszámlálható sok elemből álló végtelen csoportokra akarjuk kiterjeszteni. Egy előző dolgozatom[5] — amelyben az ilyen végtelen kommutatív csoportokra viszem át a karakterisztikák elméletét — szinte előkészíti a talajt az itt jelzett vizsgálatokra, melyeknek célja tehát a *csoportkarakterisztikák elméletét az irreducibilis előállítások felhasználása nélkül* kifejteni, mert ez a fogalom végtelen csoportok esetére nem vihető át.

Az itt közölt megalapozás teljesen elemi jellegű. Hogy megmutassam, hogy még a csoportelméletből is milyen kevés tényt kell felhasználnom, az 1. §.-ban összeállítom mindazt (rövid bizonyítással együtt), amire szükségem van. A 2. §-ban kifejtem a csoportkarakterisztikák elméletét; a mátrixkalkulust mindenütt felhasználom, de ennek az elméletnek is csak a legegyszerűbb, közismert tényeit.[6] Fontos szerepe van annak a tételnek, hogy felcserélhető Hermite-féle mátrixok szimultán a diagonálisalakra transzformálhatók. A mátrixelmélet ma már nemcsak a mathematikának, hanem a fizikának is elengedhetetlen segédeszközévé vált; az a körülmény, hogy a csoportkarakterisztikák fogalma is fontos szerephez jutott az újabb quantumelméleti vizsgálatokban, talán nem teszi feleslegessé az itt nyujtandó új megalapozást, amely véleményem szerint talán még egyszerűbb is, mint a Schur-féle.

[5] *Mathematische Zeitschrift*, 33, 129. l.

[6] A mátrixelméletben szereplő fogalmakra a következő jelöléseket fogom használni. Egy M mátrixban a sorok és oszlopok szerepét felcserélve, az így nyert mátrixot M *transzponáltjának* mondom, jele M'; az M *inverz* mátrixának (ha létezik) jele M^{-1}. Egy mátrix minden elemét a konjugált komplex számmal helyettesítve M *konjugált* mátrixa ered; jele $\overline{M}$. Egy valós elemű mátrix *szimmetrikus*, ha $M=M'$; egy komplex elemű mátrix Hermite-féle, ha $M=\overline{M}'$. Az M mátrix diagonáliselemeinek összege az M *nyoma*; jele $Ny\,(M)$. Az M mátrix *diagonálismátrix*, ha minden eleme, mely nem a diagonálisában áll, egyenlő nullával. Egy valós, vagy komplex elemű mátrix *orthogonális*, ha $\overline{M}'=M^{-1}$, (a német irodalomban komplex elemű mátrix esetében gyakran az «unitär-orthogonal» kifejezés használatos). Az M és N mátrixok aequivalensek, ha $M=P^{-1}NP$, ahol P egy tetszőleges mátrixot jelöl.

A jelen vizsgálatok folytatásaként egy későbbi közleményben tárgyalni fogom a csoportkarakterisztikák elméletének összefüggését az irreducibilis előállításokkal. Bár ezek a vizsgálatok nem tartoznak szorosan a csoportkarakterisztikák elméletéhez, mégis, tekintettel arra a tagadhatatlan tényre, hogy az irreducibilis előállítások elmélete a legfontosabb alkalmazása a csoportkarakterisztikáknak, szükségesnek tartom rámutatni arra, hogy az általam követett eljárás a csoportelőállítások elméletét is egyszerűen kiadja. Vizsgálataim tehát éppen fordított sorrendben haladnak, mint az említett Burnside- és Schur-féle megalapozások; míg náluk az irreducibilis előállítások szolgálnak kiindulási pontul, nálam ez csak mintegy függeléke az elméletnek.

1. §. Csoportelméleti előkészítés.

1. Vizsgálataimban a véges csoportok elméletének csak néhány igen egyszerű, jól ismert tényét kell felhasználnom; talán megengedhető, ha — teljesség kedvéért — ezeket a jelen §-ban kifejtem.

Az adott n-edrendű csoport elemeit nagy betűkkel jelölöm; E az egységelem. Két elem, A és B, konjugált ha létezik olyan X elem, hogy

$$A = X^{-1}BX.$$

Közvetlenül látható, hogy 1° az így definiált konjugáltság szimmetrikus és tranzitív fogalom, 2° A és B konjugáltságából következik, hogy A^{-1} és B^{-1} is konjugált elemek, 3° E csak önmagával konjugált. Ezek a megjegyzések elvezetnek a csoportnak *osztályokra* való bontására, a következő definició értelmében: egymással konjugált elemek összeségét osztálynak mondjuk; valamely osztály *osztályszámán* az illető osztályba tartozó elemek számát értjük. (Az osztályszámok összege $= n$.) Az egységelem önmaga nyilván (v. ö. 3°) osztályt alkot; ez az *egységosztály*. Valamely osztályba tartozó elemek inverz elemei ismét (v. ö. 2°) osztályt alkotnak; ez az eredeti osztály *inverz osztálya.*

Az *osztálykompozíció* fogalmára a következő megfontolások vezetnek. Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két osztály; az elsőt a csoport A_1, $A_2, \ldots, A_\alpha$ elemei, a másodikat a csoport $B_1, B_2, \ldots, B_\beta$ elemei alkotják. A

$$B_q A_1 B_q^{-1},\ B_q A_2 B_q^{-1}, \ldots,\ B_q A_\alpha B_q^{-1}$$

elemek sorrendtől eltekintve megegyeznek az

$$A_1,\ A_2, \ldots,\ A_\alpha$$

elemekkel, ennélfogva a következő két sorban álló elemek

$$B_q A_1,\ B_q A_2, \ldots,\ B_q A_\alpha,$$
$$A_1 B_q,\ A_2 B_q, \ldots,\ A_\alpha B_q$$

is csak sorrendben térnek el egymástól. Ebből következik, hogy ha felirjuk az $A_p B_q$ elemek összeségét ($p=1, 2, \ldots, \alpha$, $q=1, 2, \ldots, \beta$), — ahol minden igy keletkezett elemet annyiszor írunk fel, ahányféleképpen ebben az alakban előállitható — és hasonlóképpen a $B_q A_p$ elemek összeségét, a két összeség megegyezik. Az igy nyert $\alpha\beta$ számú (nem okvetlenül különböző) elem összeségét $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$-val vagy $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$-val jelöljük s a két *osztály szorzatának* mondjuk. Az osztályok szorzása kommutativ és asszociativ operáció. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ általában nem osztály; ellenben könnyen átlátható, hogy ha valamely C elem k-szor fordul elő ebben az összeségben, akkor minden C-vel konjugált elem ugyancsak k-szor fordul elő $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$-ben. Legyen u. i. $C = A_p B_q$, ha a (p, q) számpár a különböző (p_1, q_1), $(p_2, q_2), \ldots, (p_k, q_k)$ számpárok egyikével egyenlő; akkor az

$$X^{-1}CX = (X^{-1}A_pX)\ (X^{-1}B_qX)$$

reláció mutatja, hogy a C-vel konjugált $X^{-1}CX$ elem legalább annyiszor állitható elő az $A_p B_q$ alakban, mint C, amiből — a konjugáltság szimmetriatulajdonsága miatt — állitásunk következik.

Vezessük be a következő jelöléseket: legyenek $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_h$

az adott n-edrendű csoport különböző osztályai, $\mathfrak{C}_1$ az egység-osztály s a megfelelő osztályszámok $n_1=1, n_2, \ldots, n_h$; a $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ osztályok kompozíciójából keletkezett $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta=\mathfrak{C}_\beta\mathfrak{C}_\alpha$ összeségben a $\mathfrak{C}_\gamma$ osztály minden eleme $c_{\alpha\beta\gamma}$-szor szerepel, ahol tehát $c_{\alpha\beta\gamma}$ egy pozitív egész szám, vagy nulla. Ekkor a

$$\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{C}_\beta\mathfrak{C}_\alpha = c_{\alpha\beta 1}\mathfrak{C}_1 + c_{\alpha\beta 2}\mathfrak{C}_2 + \cdots + c_{\alpha\beta h}\mathfrak{C}_h \qquad (1)$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h)$$

szimbolikus relációnak az a jelentése, hogy ha a $\mathfrak{C}_\gamma$ osztály elemeit $c_{\alpha\beta\gamma}$-szor írom fel ($\gamma=1, 2, \ldots, h$), megkapom a $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ osztályok szorzásából keletkezett összeséget.[7]

Szükségünk lesz még a következőkben $c_{\alpha\beta 1}$ értékére. A konjugáltság 2° tulajdonsága miatt inverz osztályok osztályszáma megegyezik; ha tehát $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ inverz osztályok, akkor szorzásuk nyilván annyiszor eredményezi az egységelemet (azaz az egységosztályt, $\mathfrak{C}_1$-et), amekkora az osztályszámuk; tehát ebben az esetben $c_{\alpha\beta 1} = n_\alpha = n_\beta$; ha pedig $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ nem inverz osztályok, akkor a $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$ összeség nem tartalmazhatja E-t, tehát $c_{\alpha\beta 1} = 0$.

2. A csoportok mátrixokkal való ú. n. *reguláris előállítása* kapcsolatos azzal a jól ismert ténnyel, hogy minden véges csoport izomorf a permutációk ama csoportjával, amelyet az

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & \ldots \\ AX, & BX, & CX, & \ldots \end{pmatrix}$$

permutációk alkotnak, ha X az adott csoport valamennyi elemén végighalad. Ha minden egyes csoportelemhez egy határozatlant rendelünk (A-hoz x_A-t stb.), akkor a fenti permutációcsoport a lineáris transzformációk következő csoportjába megy át:

$$x_A (=) x_{AX},\ x_B (=) x_{BX},\ x_C (=) x_{CX}, \ldots \quad (X = \text{bármely csoportelem}).$$

---

[7] Az (1) reláció két oldalán felírt összeségekben az elemek számának megolvasása az

$$n_\alpha n_\beta = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma$$

egyenleteket szolgáltatja.

Ezen (nyilván orthogonális) transzformációk mátrixai — melyek természetesen szintén izomorfak az adott csoporttal — szolgáltatják a kérdéses reguláris előállítást. Jelöljük az X elemhez tartozó így nyert mátrixot (a fenti lineáris transzformáció mátrixát) (X)-szel. (E) az n-edrendű egységmátrix; ha $X \neq E$, akkor (X) minden diagonáliseleme $= 0$ (mert ellenkező esetben volna olyan P elem, hogy $P = PX$). Csoportunk inverz elemeihez inverz mátrixok tartoznak: $(X^{-1}) = (X)^{-1}$; s mivel az (X) mátrix valós és orthogonális, azért inverze ugyanaz, mint transzponáltja, tehát $(X^{-1}) = X'$, ha — mint szokásos — a transzpoziciót vesszővel jelezzük.

Ha a $\mathfrak{C}_\alpha$ osztály az $A_1, A_2, \ldots, A_{n_\alpha}$ elemekből áll, akkor rendeljük hozzá a

$$(\mathfrak{C}_\alpha) = (A_1) + (A_2) + \cdots + (A_{n_\alpha}) \quad {\scriptstyle (\alpha = 1, 2, \ldots, h)}$$

mátrixot; az egységosztályhoz az egységmátrix tartozik, minden más esetben ismét olyan valós mátrixhoz jutunk, melynek diagonálisában csupa 0 áll. A $\mathfrak{C}_\alpha$ inverz osztályához az

$$(A_1^{-1}) + (A_2^{-1}) + \cdots + (A_{n_\alpha}^{-1}) = (A_1)' + (A_2)' + \cdots + (A_{n_\alpha})' = (\mathfrak{C}_\alpha)'$$

mátrix tartozik, azaz inverz osztályokhoz tartozó mátrixok egymás transzponáltjai.

Végül az (1) alatti szimbolikus relációk nyilván átmennek a

$$(\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta) = (\mathfrak{C}_\beta)(\mathfrak{C}_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{C}_\gamma) \quad {\scriptstyle (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h)} \tag{1'}$$

mátrixegyenletekbe, amelyek egyrészt azt mutatják, hogy

$$(\mathfrak{C}_1) = (E), (\mathfrak{C}_2), \ldots, (\mathfrak{C}_h)$$

felcserélhető (kommutativ) mátrixok, másrészt — az inverz osztályok mátrixaira tett megjegyzés folytán — hogy e valós mátrixok mindegyike a *transzponáltjával is felcserélhető*. (Az utóbbi tulajdonsággal biró mátrixokat újabban normális mátrixoknak nevezik.)

2. §. A csoportkarakterisztikák fogalma és a közöttük fennálló fundamentális összefüggések.

3. A véges csoportok reguláris mátrixelőállítása könnyűszerrel elvezet a FROBENIUS-féle csoportkarakterisztikákhoz és legfontosabb tulajdonságaikhoz. Láttuk u. i., hogy az egyes osztályokhoz rendelt $(\mathfrak{C}_p)$ mátrixok $(p=1, 2,\ldots, h)$, vagy az ezektől csak a sorrendben különböző $(\mathfrak{C}_p)'$ mátrixok $(p=1, 2,\ldots, h)$ felcserélhetők. Ennélfogva felcserélhetők a $(\mathfrak{C}_p)+(\mathfrak{C}_p)'$ és $i(\mathfrak{C}_p)-i(\mathfrak{C}_p)'$ mátrixok is; a $(\mathfrak{C}_p)+(\mathfrak{C}_p)'$ mátrixok mindegyike valós szimmetrikus mátrix, az $i(\mathfrak{C}_p)-i(\mathfrak{C}_p)'$ mátrixok mindegyike pedig HERMITE-féle mátrix. Az ilyen felcserélhető mátrixok, ill. a hozzájuk tartozó bilineáris formák, alapvető tulajdonsága, hogy található a határozatlanoknak egy oly — általában nem valós — orthogonális transzformációja, mely szimultán valamennyi formát az ú. n. diagonális alakba viszi át, azaz olyan alakba, amelyben csak a tiszta tagok szerepelnek. A mátrixok nyelvén ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan (U) orthogonális mátrix — melyre nézve tehát $(U)^{-1}=(U)'$ — amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy az

$$(U)^{-1}\big((\mathfrak{C}_p)+(\mathfrak{C}_p)'\big)(U) \text{ és } i(U)^{-1}\big((\mathfrak{C}_p)-(\mathfrak{C}_p)'\big)(U) \quad (p=1, 2,\ldots, h)$$

mátrixok mindegyike diagonálismátrix. Ennélfogva az $(U)^{-1}(\mathfrak{C}_p)(U)$ mátrixok is diagonálismátrixok; legyen

$$(U)^{-1}(\mathfrak{C}_p)(U)=(\varDelta_p)=\begin{pmatrix} r_p^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_p^{(2)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & r_p^{(n)} \end{pmatrix} \quad (p=1, 2,\ldots, h)$$

Az (1′) alatti egyenlet, ill. az azzal aequivalens

$$\big((U)^{-1}(\mathfrak{C}_\alpha)(U)\big)\big((U)^{-1}(\mathfrak{C}_\beta)(U)\big)=\sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(U)^{-1}(\mathfrak{C}_\gamma)(U)$$

összefüggés, átmegy a fenti diagonálismátrixok között fennálló

$$(\varDelta_\alpha)(\varDelta_\beta)=\sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(\varDelta_\gamma)$$

egyenletbe; ha ezt a mátrixegyenletet az elemekre átírjuk, nyerjük a következő (FROBENIUS-féle) egyenletrendszert:

$$r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} r_\gamma^{(k)} \qquad \text{(I)}$$

$$(k=1,2,\ldots,n;\ \alpha,\beta=1,2,\ldots,h).$$

Ezek a formulák (minden k-nál) azt mutatják, hogy *lehet az adott csoport minden egyes osztályához $\mathfrak{C}_\alpha$-hoz, olyan $r_\alpha^{(k)}$ számot rendelni, hogy az így nyert $r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_h^{(k)}$ számrendszer «kövesse» az osztálykompozíció* (1) *alatti szabályát.*[8] Minthogy $(\mathfrak{C}_1) = (E)$, azért $(\Delta_1) = (E)$, tehát

$$r_1^{(1)} = r_1^{(2)} = \cdots = r_1^{(n)} = 1.$$

4. Mielőtt az (I) egyenletrendszerből további következtetéseket vonnánk le, mutassuk ki, hogy a fenti mellérendelés (minden k-ra) *inverz osztályokhoz konjugált komplex számokat rendel*, azaz ha $(\mathfrak{C}_\alpha)$ és $(\mathfrak{C}_\beta)$ inverz osztályok, akkor[9] $\overline{r_\alpha^{(k)}} = r_\beta^{(k)}$, vagyis $(\overline{\Delta}_\alpha) = (\Delta_\beta)$. U. i. a $(\Delta_\alpha) = (U)^{-1}(\mathfrak{C}_\alpha)(U) = (\overline{U})'(\mathfrak{C}_\alpha)(U)$ egyenletből nyomban következik, hogy $(\overline{\Delta}_\alpha)' = (\overline{U})'(\overline{\mathfrak{C}}_\alpha)'(U)$, s minthogy $(\mathfrak{C}_\alpha)$ valós, azért $(\overline{\mathfrak{C}}_\alpha)' = (\mathfrak{C}_\alpha)' = (\mathfrak{C}_\beta)$; ennélfogva (tekintetbe véve, hogy (Δ_α) diagonálismátrix lévén, $(\Delta_\alpha)' = (\Delta_\alpha)$), tényleg

$$(\overline{\Delta}_\alpha) = (U)^{-1}(\mathfrak{C}_\beta)(U) = (\Delta_\beta).$$

5. Térjünk vissza az (I) alatti egyenletekhez. Összegezés útján nyerjük belőlük a

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} \sum_{k=1}^{n} r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha,\beta=1,2,\ldots,h)$$

összefüggéseket; az ezekben fellépő

$$\sum_{k=1}^{n} r_\gamma^{(k)} \qquad (\gamma=1,2,\ldots,h)$$

összegek könnyen kiszámíthatók. U. i. ez az összeg nem egyéb, mint a (Δ_γ) mátrix nyoma. A nyom tudvalevőleg — a mátrix-

---

[8] A [7] alatti jegyzet mutatja, hogy az $n_1, n_2, \ldots, n_h$ osztályszámok kielégítik az (I) egyenletrendszert; ez a «triviális» megoldás tehát a (3) ill. (3′) alatti értékrendszerek egyike.

[9] Valamely a komplex szám konjugáltját $\bar{a}$-sal jelöljük.

hoz tartozó szekuláris egyenlet gyökeinek összege — orthogonális invariáns, azért ez az összeg egyenlő a $(\mathfrak{C}_\gamma)$ mátrix nyomával, azaz diagonáliselemeinek összegével. Ha $\mathfrak{C}_\gamma$ nem az egységosztály, akkor — mint láttuk — $(\mathfrak{C}_\gamma)$ minden diagonáliseleme, tehát a fenti összeg is, nulla; az egységosztály esetén pedig — minthogy $r_1^{(k)} = 1$ — a kérdéses összeg $= n$. Ennélfogva

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = c_{\alpha\beta 1}\, n,$$

s mivel (v. ö. **1.**) $c_{\alpha\beta 1} = n_\alpha = n_\beta$, ha $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ inverz osztályok, máskor pedig $c_{\alpha\beta 1} = 0$, azért

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \begin{cases} n n_\alpha, & \text{ha } \mathfrak{C}_\alpha \text{ és } \mathfrak{C}_\beta \text{ inverz osztályok,} \\ 0, & \text{ha } \mathfrak{C}_\alpha \text{ és } \mathfrak{C}_\beta \text{ nem inverz osztályok.} \end{cases}$$

Ezek az egyenletek, ha tekintetbe vesszük az inverz osztályokhoz rendelt számokról tett megjegyzést (v. ö. **4.**), a következőképen is írhatók:

$$\sum_{k=1}^{k} r_\alpha^{(k)} \overline{r_\beta^{(k)}} = \begin{cases} n n_\alpha, & \text{ha } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{ha } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{2}$$

6. A $(\varDelta_p)$ diagonálismátrixokból merített n értékrendszer:

$$(r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_h^{(k)}) \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

azonban nem mind különböző. (A k_1-edik és k_2-edik értékrendszert természetesen akkor mondjuk megegyezőnek, ha

$$r_1^{(k_1)} = r_1^{(k_2)},\ r_2^{(k_1)} = r_2^{(k_2)}, \ldots,\ r_h^{(k_1)} = r_h^{(k_2)}).$$

A csoportkarakterisztikák elméletében döntő jelentősége van annak a tételnek, hogy *a fenti értékrendszerek között pontosan h számú különböző értékrendszer foglal helyet.* Ezt az állítást *két lépésben* bizonyítjuk be; kimutatjuk először, hogy a kérdéses különböző értékrendszerek száma nem lehet nagyobb h-nál s azután, hogy nem lehet kisebb h-nál.

Az első állítás így mutatható ki: Ha az egymástól különböző értékrendszerek száma h', akkor találhatunk olyan $u_1, u_2, \ldots, u_h$ számokat, hogy az

$$r_1^{(k)} u_1 + r_2^{(k)} u_2 + \cdots + r_h^{(k)} u_h = r^{(k)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

kifejezések h' különböző értéket szolgáltassanak. Az (I) egyenletrendszerből nyomban következik, hogy

$$r_\alpha^{(k)} \sum_{\beta=1}^{h} u_\beta r_\beta^{(k)} = \sum_{\beta,\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} u_\beta r_\gamma^{(k)},$$

azaz — ha rövidség kedvéért a

$$\sum_{\beta=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} u_\beta = d_{\alpha\gamma} \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, h)$$

jelölést vezetjük be — hogy

$$r^{(k)} r_\alpha^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} d_{\alpha\gamma} r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, h).$$

Fix k-nál ezt a rendszert az $r_1^{(k)} = 1$, $r_2^{(k)}, \ldots, r_h^{(k)}$ mennyiségek számára homogén lineáris egyenletrendszernek tekintve, nyomban adódik, hogy $r^{(k)}$ kielégíti a következő h-adfokú egyenletet:

$$\begin{vmatrix} d_{11}-r^{(k)} & d_{12} & \ldots & d_{1h} \\ d_{21} & d_{22}-r^{(k)} & \ldots & d_{2h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{h1} & d_{h2} & \ldots & d_{hh}-r^{(k)} \end{vmatrix} = 0.$$

Minthogy a $d_{\alpha\gamma}$ mennyiségek minden k-ra nézve ugyanazok, következik, hogy h-nál több különböző értéke $r^{(k)}$-nak nem lehet, azaz hogy $h' \leq h$.

7. Hogy a $h' \geq h$ állítást bebizonyíthassuk, bevezetjük a következő jelöléseket: A (3) alatti értékrendszerek közül a h' számú különbözőt jelöljük

$$\varrho_1^{(k)}, \varrho_2^{(k)}, \ldots, \varrho_h^{(k)}\text{-val} \qquad (k=1, 2, \ldots, h') \tag{3'}$$

és tegyük fel, hogy ez az értékrendszer a (3) alatti értékrendszerek sorában f_k-szor lép fel; f_k tehát pozitív egész szám és $f_1 + f_2 + \cdots + f_{h'} = n$. A (2) alatti egyenletek akkor a következő alakban írhatók:

$$\sum_{k=1}^{h'} f_k \varrho_\alpha^{(k)} \overline{\varrho_\beta^{(k)}} = \begin{cases} n n_\alpha, & \text{ha } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{ha } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

vagy, ha a szokásos

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \alpha = \beta \\ 0, & \text{ha } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

jelölést használjuk,

$$\sum_{k=1}^{h'} \sqrt{\frac{f_k}{nn_\alpha}}\, \varrho_\alpha^{(k)} \sqrt{\frac{f_k}{nn_\beta}}\, \overline{\varrho_\beta^{(k)}} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{4}$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, h).$$

Ezek az egyenletek úgy is interpretálhatók, hogy a következő h' sorból és h oszlopból álló mátrix:

$$(M) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{f_1}{nn_1}}\,\varrho_1^{(1)} & \sqrt{\frac{f_1}{nn_2}}\,\varrho_2^{(1)} & \dots & \sqrt{\frac{f_1}{nn_h}}\,\varrho_h^{(1)} \\ \sqrt{\frac{f_2}{nn_1}}\,\varrho_1^{(2)} & \sqrt{\frac{f_2}{nn_2}}\,\varrho_2^{(2)} & \dots & \sqrt{\frac{f_2}{nn_h}}\,\varrho_h^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\frac{f_{h'}}{nn_1}}\,\varrho_1^{(h')} & \sqrt{\frac{f_{h'}}{nn_2}}\,\varrho_2^{(h')} & \dots & \sqrt{\frac{f_{h'}}{nn_h}}\,\varrho_h^{(h')} \end{pmatrix}$$

«oszloponkint» orthogonális. Ebből nyomban következik, hogy az egyes oszlopokban álló (h' számú komponenssel biró) értékrendszerek lineárisan függetlenek egymástól. U. i. ha fennállnának közöttük a

$$\sum_{\alpha=1}^{h} \sqrt{\frac{f_k}{nn_\alpha}}\, \varrho_\alpha^{(k)} x_\alpha = 0 \qquad (k=1, 2, \dots, h')$$

összefüggések, akkor ezeket az egyenleteket a $\sqrt{\frac{f_k}{nn_\beta}}\, \overline{\varrho_\beta^{(k)}}$ mennyiségekkel komponálva nyernők, hogy $x_\beta = 0$. Minthogy pedig a h' számú komponenssel biró értékrendszerek tartományában h'-nél több lineárisan független nem lehet, ezért szükségképpen $h \leq h'$, s ezt az előző pontban nyert eredménnyel egybevetve kapjuk, hogy tényleg $h' = h$.

8. A fenti (M) mátrix ennélfogva *quadratikus orthogonális mátrix,* s az «oszloponkinti» orthogonalitást kifejező (4) alatti egyenlőségeken kivül fennállanak a «soronkinti» orthogonalitás relációi is, azaz

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{f_a}{nn_k}}\, \varrho_k^{(a)} \sqrt{\frac{f_b}{nn_k}}\, \overline{\varrho_k^{(b)}} = \delta_{ab} \tag{5}$$
$$(a, b = 1, 2, \dots, h).$$

Ezekből a megfontolásokból az is következik, hogy a FROBENIUS-*féle* (I) *egyenleteknek h számú különböző megoldásrendszere van* s ezek nem egyebek, mint a (3') alatti h számú rendszer.

Eddig elért eredményeink — jelesen az (M) mátrix orthogonális volta — már tartalmazzák a FROBENIUS-féle csoportkarakterisztikák elméletének alaptételeit. Az átmenetet a következő megállapitás szolgáltatja:

Minden egyes csoportkarakterisztika (összesen h számú csoportkarakterisztikát fogunk definiálni) az adott csoport minden eleméhez egy számot rendel, azaz — amint mondani szokás — *a csoportkarakterisztika az illető csoporton definiált függvény.* Ezek a mellérendelések mind olyanok, hogy konjugált elemekhez ugyanaz a szám tartozik, azaz tulajdonképpen minden osztályhoz van egy szám rendelve (azaz a csoportkarakterisztika osztályfüggvény). A h számú csoportkarakterisztika jelölésére a $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots, \chi^{(h)}$ jeleket használjuk; a mondottak értelmében, ha a $\mathfrak{C}_p$ osztályt a csoport $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$ elemei alkotják akkor

$$\chi^{(k)}(A_1) = \chi^{(k)}(A_2) = \cdots = \chi^{(k)}(A_{n_p}) \quad (k=1, 2, \ldots, h)$$

s ezt a közös értéket $\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_p)$-vel is jelöljük. Ezek előrebocsátásával a k-adik csoportkarakterisztikát a következőképpen értelmezzük: legyen

$$\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_p) = \frac{\sqrt{f_k}}{n_p} \varrho_p^{(k)} \quad (k=1, 2, \ldots, h;\ p=1, 2, \ldots, h). \tag{6}$$

(Hogy mi késztette FROBENIUSt arra, hogy a karakterisztikákat e formula szerint definiálja és ne tegye egyszerűen egyenlővé a $\varrho_p^{(k)}$ számokkal, annak oka a lineáris transzformációk elméletében rejlik, melyre a következő közleményben térünk ki.)

9. A fenti definició felhasználásával az (M) quadratikus mátrix k-adik sora a következő alakot ölti:

$$\left(\sqrt{\frac{n_1}{n}}\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_1),\quad \sqrt{\frac{n_2}{n}}\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_2), \ldots,\quad \sqrt{\frac{n_h}{n}}\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_h)\right)$$

s e mátrix orthogonalitását kifejező (4) és (5) relációk a következő összefüggéseket szolgáltatják:

$$\frac{\sqrt{n_\alpha n_\beta}}{n}\sum_{k=1}^{h}\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\alpha)\overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\beta)}=\delta_{\alpha\beta} \tag{4'}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{h}n_k\chi^{(a)}(\mathfrak{C}_k)\overline{\chi^{(b)}(\mathfrak{C}_k)}=\delta_{ab} \tag{5'}$$

Az (5') egyenletek a következő alakba is írhatók:

$$\frac{1}{n}\sum_{(A)}\chi^{(a)}(A)\overline{\chi^{(b)}(A)}=\delta_{ab},$$

ahol $\sum\limits_{(A)}$ azt jelöli, hogy az összegezést a csoport összes elemeire kell kiterjeszteni.

Végül az (I) alatti egyenletrendszer tekintetbevételével nyerjük az

$$\frac{n_\alpha n_\beta}{\sqrt{f_k}}\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\alpha)\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\beta)=\sum_{\gamma=1}^{h}c_{\alpha\beta\gamma}\,n_\gamma\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\gamma) \tag{I'}$$

egyenleteket.

Megjegyezhetjük (v. ö. **4.**) még a

$$\chi^{(k)}(A^{-1})=\overline{\chi^{(k)}(A)}$$

összefüggést, továbbá, hogy a (I') egyenletrendszernek — a koefficiensek valós volta miatt — a $\overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_p)}$ számok is megoldásai. Ennélfogva

$$\overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_1)},\ \overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_2)},\ldots,\ \overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_h)}\quad (k=1,2,\ldots,h)$$

is a h csoportkarakterisztika egyike; ezt a karakterisztikát a $\chi^{(k)}$ inverz, vagy konjugált karakterisztikájának mondják.

A (4') és (5') alatti összefüggések a csoportkarakterisztikák fundamentális tulajdonságai; ezek a relációk azok, amelyek bizonyos végtelen csoportokra is átvihetők.[10] FROBENIUS még

---

[10] T. i. (mint egy később megjelenendő dolgozatomban be fogom bizonyítani) az olyan végtelen csoportokra, amelyeknél minden osztály véges számú elemből áll.

kimutatta, hogy a $\sqrt{f_k}$ számok egész számok. Nem akarom e helyen ezt a tételt bizonyítani, mert későbbi közleményem eredményeiből ez önként következik. Fontosnak tartom azt a tényt, hogy a csoportkarakterisztikák alapvető tulajdonságai az irreducibilis lineáris transzformációk elmélete nélkül, teljesen elemi úton indokolhatók.

Haar Alfréd.

ZUR THEORIE DER GRUPPENCHARAKTERE.

Die Arbeit enthält eine elementare Begründung der FROBENIUS'schen Gruppencharaktere. Als Ausgangspunkt dient die bekannte reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe; die einfachsten Sätze über die Klassen von konjugierten Elementen einer Gruppe liefern alsdann die Tatsache, dass die Summe derjenigen Matrizen, welche bei der regulären Darstellung der Elementen einer Klasse zugeordnet sind (sog. Klassenmatrizen) untereinander vertauschbare Normalmatrizen sind. Die simultane Transformation dieser Matrizen auf die Diagonalform liefert dann unmittelbar die Gruppencharaktere und man erhält ohne Mühe die Hauptergebnisse der FROBENIUS'shen Theorie über Anzahl, Orthogonalität und Vollständigkeit der verschiedenen Charaktere.

Alfred ***Haar.***

A NYILT FELÜLETEK TOPOLÓGIÁJÁRÓL.

1. A nyilt felületeknek a homöomorphismus szempontjából való osztályozását azáltal sikerült megadni, hogy bizonyos ideális elemeket, úgynevezett határpontokat (Randstücke) vezettem be, melyek összesége nagyjában meghatározza a felület topológiai typusát.[1] A jelen dolgozatban ezeknek a határpontoknak egy új tárgyalási módját adom.

*Felület*en olyan F összefüggő ponthalmazt értünk, melyben bármely pont környezete körlemezzel homöomorph, s amely separábilis, vagyis melynek van az F-en mindenütt sűrű megszámlálható részhalmaza. A felületet zártnak, vagy *kompakt*nak nevezzük, ha minden az F-en felvett végtelen pontsorozatnak van F-en sűrűsödő pontja; ellenkező esetben a felületet nyiltnak, vagy *nem-kompakt*nak nevezzük.

Nem-kompakt felületből, valamint bármely nem-kompakt halmazból is kompakt halmazt képezhetünk ideális elemek bevezetésével. Ennek legegyszerűbb módja az, hogy az adott nem-kompakt halmazhoz egyetlen új U pontot adunk hozzá, mely definiciója szerint minden az adott halmazon sűrűsödési pont nélküli végtelen pontsorozatnak limespontja; de ez az eljárás egészen teorétikus és nem ad közelebbi felvilágositást az adott halmaz szerkezetéről vagy typusáról.

2. Egy másik sokkal eredményesebb eljárás ideális elemek bevezetésére a következő. Legyenek G_1, G_2,... a megadott halmazon fekvő tartományok (azaz csak belső pontokból álló összefüggő ponthalmazok), melyek mindegyikének kompakt a határa. (Nevezetesen felületek esetében tegyük fel, hogy G_k határa egy a felületen fekvő egyszerű zárt görbe). Tegyük fel, hogy minden

---

[1] B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, I., (Berlin, 1923) 164. és köv. o.

G_{k+1} része G_k-nak, s végül, hogy a $G_1, G_2, \ldots$ tartománysorozatnak nincsen közös pontja: ha P az adott halmaz tetszőleges pontja, akkor van a sorozatban olyan G_k tartomány, mely nem tartalmazza a P pontot. Egy ilyen tartománysorozat definiál egy *határpontot*. Két $G_1, G_2, \ldots$ és $G'_1, G'_2, \ldots$ sorozat akkor és csak akkor definiálja ugyanazt a határpontot, ha ezek aequivalensek abban az értelemben, hogy minden k-hoz van olyan l, melynél G'_l a G_k-nak, és G_l a G'_k-nek része.

A határpontoknak ilyen definicióját felületek esetére fentidézett könyvemben adtam; általános halmazok esetére a fenti alakban H. FREUDENTHAL fogalmazta meg.[1]

A határpontok hozzáfűzésével az adott halmazból kompakt halmaz származik. Egy nem-kompakt felületből a határpontok hozzácsatolásával származó kompakt halmaz nem szükségképpen felület; ezen egy határpontnak a környezete nem szükségképpen aequivalens egy körlemezzel.

A felület határpontját első-, másod- vagy harmadfajúnak nevezzük, a szerint, hogy a definiáló $G_1, G_2, \ldots$ sorozatból vett elegendő nagy indexű G_k tartomány síkszerű, illetve orientálható, de nem síkszerű, illetve nem orientálható. Olyan felületekből, melyeknek csak elsőfajú határpontjaik vannak, határpontjaik hozzáfűzésével kompakt felületet kapunk; más szóval: a csak elsőfajú határpontokkal biró felületek, és csakis ezek, a kompakt felületekből discontinuus zárt ponthalmaz kihagyásával származtathatók. Ilyen felületeket S. SAKS tárgyalt és «surface compactifiable»-nak nevezte őket.[2] Ezeknek speciális osztályára, melyek a gömbfelületből megszámlálható zárt ponthalmaz kihagyásával keletkeznek, J. W. ALEXANDER adta meg a homöomorphismus feltételét.[3] (A nevezett dolgozatok erre vo-

---

[1] H. FREUDENTHAL, Über die Enden topologischer Räume und Gruppen, Math. Zeitschr. **33.** (1931) 692. o.

[2] S. SAKS, Sur l'homéomorphie des variétés à deux dimensions (première partie), Fundamenta Mathematicae, 5. (1923), 288—320. o.

[3] J. W. ALEXANDER, On infinitely connected plane regions; bemutatva az American Math. Society 1923. okt. 27-i ülésén; l. Bulletin Amer. Math. Soc. **30.** (1924) 10. o.

natkozó közleményeim után jelentek meg, de azoktól függetlenek.)

3. Felületek (és általánosabban: kicsinyben összefüggő halmazok) esetében a határpontokat a következő eljárással is definiálhatjuk. *Egyszerű nyílt vonalon* értjük egy egyenes pontjainak a megadott felületen fekvő olyan kölcsönösen egyértelmű és folytonos képét, melynél az egyenes egy tetszőleges, sűrűsödő pont nélküli pontsorozatának a vonalnak egy a felületen sűrűsödő ponttal nem biró pontsorozata felel meg. Az egyszerű nyilt vonalnak egy tetszőleges pontja által meghatározott két része közül mindegyiket *félsugár*nak nevezzük.

Egy *félsugárnak a határpontján* értünk egy a félsugárhoz rendelt ideális elemet, amelyhez definició szerint konvergál a félsugár bármely olyan pontsorozata, amelynek megfelelő pontsorozat az egyenesen végtelenhez tart. Minden a felületen fekvő félsugár határpontja definició szerint a *felületnek határpontja.*

Két félsugár a felületnek ugyanazt a határpontját definiálja, ha megadhatók a félsugarakon olyan $P_1, P_2, \ldots$ és $P'_1, P'_2, \ldots$ pontsorozatok és ezeket a felületen összekötő $P_iP'_i$ ívek, melyek sorozata a felületen nem bír sűrűsödő ponttal: vagyis nincs olyan pontja a felületnek, melynek tetszőleges kis környezetén végtelen sok $P_iP'_i$ ív áthalad. Másként fogalmazva ugyanezt: két félsugár a felületnek ugyanazt a határpontját definiálja, vagy 1., ha a két félsugárnak közös pontjai a felületen nemkompakt végtelen ponthalmazt alkotnak, vagy 2., ha van a felületen olyan félsugár, melynek a két megadott félsugár közül bármelyikkel való közös része a felületen nem kompakt, végtelen ponthalmaz.

Két félsugár, melyek a fenti 2., (vagy 1.) feltételnek nem tesznek eleget, a felület két különböző határpontját definiálja.

4. További tárgyalásunk egyszerűsítése céljából felveszünk az adott F felületen egy *triangulációt*, mely a szokásos feltételeknek eleget tesz; tehát egy háromszög belső pontja csak ehhez a háromszöghöz, egy háromszög bármely éle pontosan két háromszöghöz tartozik, melyeknek ennek az élnek minden

pontja és csakis ezek közös pontjaik; egy háromszög bármely csúcsa véges sok háromszöghöz tartozik, melyek olyan ciklust alkotnak, hogy bármely két egymásra következő háromszögnek közös éle van; az F felület minden pontja hozzátartozik a trianguláció valamely háromszögéhez. A felületek triangulálhatóságának bizonyítása implicite benne foglaltatik a Vorl. über Topologie c. könyvem 89—90. és 134—135. oldalain adott tárgyalásokban; explicit bizonyitását a tételnek Radó adta.[1]

Vegyük az F felület egy tetszőleges háromszögét s az összes vele közös éllel vagy csúccsal biró háromszögeket. Ha ezek között a háromszögek között kettőnek közös csúcsa van, a nélkül, hogy a kiválasztott háromszögek között volna egy őket összekapcsoló lineárisan rendezett halmaza az ugyanahhoz a csúcshoz tartozó egymással szomszédos háromszögeknek, akkor a csúcspont egy környezetét hozzávesszük a már felvett háromszöghalmazhoz. Így egy $F^\circ_\star$ tartományt kapunk, melyet véges sok egymással nem találkozó egyszerű zárt görbe határol. Ha van az $F^\circ_\star$ maradéktartományai között kompakt, azaz véges sok háromszögből álló, ezeket hozzáfűzzük $F^\circ_\star$-hoz, s az igy keletkező tartományt tovább is $F^\circ_\star$-nak nevezzük. Ha van $F^\circ_\star$-nak két olyan határgörbéje, melyek $F^\circ_\star$-nak ugyanahhoz a maradéktartományához tartoznak, összekötjük őket egy az $F-F^\circ_\star$-on haladó w úttal s egy ehhez igen közel haladó s azt nem metsző w' úttal, s a két út által az $F-F^\circ_\star$-on meghatározott egyszeresen összefüggő tartományt hozzáfűzzük $F^\circ_\star$-hoz. Az igy keletkező tartományt ugyanigy módositjuk tovább, mig véges sok lépés után olyan F° tartományhoz jutunk, melynek bármely két határgörbéje F°-nak az F-en két egymástól különböző maradéktartományát határozza meg: tehát F° bármely két határgörbéjét nem lehet az $F-F^\circ$-on egymással összekötni. Jelöljük F° határgörbéit $\pi^1_1, \pi^1_2, \ldots, \pi^1_n$-nel. Vegyük most F-nek azokat a további háromszögeit, melyeknek van π^1_i-en pontjuk (ezekből kihagyjuk a már

---

[1] T. Radó, Über den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Litt. ac Scient. 2. 101—121. o.; l. különösen § 3.

F°-hoz tartozó pontokat) és módosítsuk az általuk alkotott tartományokat éppen úgy, mint előbb F°_*-ot; ilyen módon kapjuk az $F^1_1, F^1_2, \ldots, F^1_n$ tartományokat, melyek mindegyikét véges sok egyszerű zárt görbe határolja. F^1_i és F°-nak π^1_i közös határgörbéje; ezeken kívül nincsen az $F^\circ, F^1_1, \ldots, F^1_n$ tartományok közül bármely kettőnek közös pontja. A $\Phi^1 = F^\circ + \Sigma F^1_i$ tartománynak bármely két határgörbéjét nem lehet $F - \Phi^1$-en egymással összekötni. Hasonlóképpen konstruáljuk az F^2_{ik} tartományokat az F^1_i k-adik határgörbéjéhez csatlakozó háromszögekből; az ezeknek Φ^1-hez való hozzáadásával keletkező tartományt Φ^2-nek nevezzük. Az eljárás folytatásával olyan $\Phi^\circ = F^\circ, \Phi^1, \Phi^2, \ldots$ tartománysorozathoz jutunk, melynek a szerkesztésből adódó következő tulajdonságai vannak: Φ^k az F felület véges sok háromszögéből (illetve ezek részeiből) összetett, véges sok egyszerű zárt görbe által határolt tartomány. Φ^k része Φ^{k+1}-nek. Φ^k bármely két határgörbéje nem köthető össze $F - \Phi^k$-n. $F - \Phi^k$ bármely komponense nem-kompakt, azaz végtelen sok háromszögből áll. A Φ^k tartományok sorozata kimeríti az F felületet, vagyis, ha P az F-nek tetszőleges pontja, van olyan Φ^k, mely P-t tartalmazza.

Egy ilyen tartománysorozat létezését könyvem idézett helyén (166. o.) bebizonyítottam az éppen most leírt eljárással.[1] Ennek reprodukálását a következő pont tárgyalása teszi szükségessé, hol a fenti konstrukció részleteire kell hivatkoznom.

5. Egy nem-kompakt F felület *keresztmetszetén* értünk egy a felületen fekvő egyszerű nyilt vonalat (l. 3.). Egy keresztmetszet a felület két határpontját köti össze, melyek lehetnek különbözők, vagy azonosak.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

Adott nem-kompakt felület véges vagy megszámlálható sok, páronkint közös pont nélküli keresztmetszet alkalmazásával egyszeresen összefüggővé változtatható át.

---

[1] P. KOEBE az utóbbi években «Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen» címen közölt dolgozataiban alkalmazza a fenti tulajdonságokkal bíró tartományokat, melyeket «Hauptnäherungsbereich»-nek nevez; l. Sitz.-ber. d. preuss. Akad. d. Wiss. 1927., 164. o.

Ez a tétel természetesen közvetlen következménye a nemkompakt felületekre vonatkozó főtételnek, melyet könyvemben bebizonyitottam (170. o.). Itten ezt a tételt arra való hivatkozás nélkül, a 4. pont eredményéből fogjuk levezetni. Ismertnek tesszük fel a véges sok háromszögből álló, úgynevezett határolt felületekre vonatkozó, a bebizonyitandó tétellel analóg tételt (l. például Vorl. ü. Topologie, 150. o.).

Alkalmazva a 4. pontban bevezetett jelöléseket, felveszünk az F° tartományban véges sok közös pont vagy végpont nélküli keresztmetszetet, melyek együtt F°-t egyszeresen összefüggővé változtatják át; feltesszük, hogy ezeknek összes végpontjai F° határán vannak (tehát az ú. n. σ-alakú keresztmetszeteket is kizárjuk). Feltehetjük továbbá azt is, hogy az alkalmazott q° keresztmetszetek az F triangulációjának éleit csak véges sok pontban metszik. Felveszünk most az F_i^1 tartományban véges sok, páronkint közös pont vagy végpont nélküli keresztmetszetet, melyek F_i^1-t egyszeresen összefüggővé teszik; feltesszük ismét, hogy ezek végpontjai valamennyien F_i^1 határgörbéin feküsznek, s hogy közülök egy és csakis egy végpont fekszik a π_i^1 határgörbén s ott a q° keresztmetszetek egyikének végpontjával egybeesik. A q° keresztmetszeteknek többi a π_i^1-en fekvő végpontjait az F_i^1-en ennek egy másik határgörbéjével kötjük össze, olyan keresztmetszetekkel, melyeknek a már alkalmazott q° keresztmetszetekkel nincsen közös pontjuk. Mindezek a keresztmetszetek F_i^1-et véges sok egyszeresen összefüggő tartományra osztják fel, melyek mindegyike a π_i^1 határgörbe valamelyik íve mentén az F° tartománnyal összefügg. Mindezeket a tartományokat hozzáfűzve az egyszeresen összefüggő tartományhoz, melyet F°-ból a q° keresztmetszetek mentén való felmetszéssel kaptunk, ismét egyszeresen összefüggő tartományt kapunk. A fenti eljárást valamennyi $F_1^1, F_2^1, \ldots, F_n^1$ tartományra alkalmazva kapunk egy egyszeresen összefüggő $\Phi_\star^1$ tartományt, mely Φ^1-ből keresztmetszetek alkalmazásával állott elő; ezeknek a keresztmetszeteknek összes végpontjai Φ^1 határán feküsznek. Ugyanezt az eljárást tovább alkalmazva kapjuk a $\Phi^1_\star, \Phi^2_\star, \ldots$ egyszeresen összefüggő tartományok sorozatát, melyek közül minden $\Phi^k_\star$ része $\Phi^{k+1}_\star$-nak. A sorozat limese egy ugyancsak egyszeresen összefüggő $F_\star$ tartomány, mely az F felületből egymást nem metsző keresztmetszetek alkalmazásával állott elő. Az adott szerkesztésből következik ugyanis, hogy a q^i keresztmetszetekből alkotott vonalak az F felületen egyszerű nyilt vonalak; egy ilyen vonalnak a Φ^k-ban fekvő része egy egyszerű görbeív; ha a vonal pontjait egy egyenes pontjaival kölcsönösen egyértelmű folytonos vonatkozásba hozzuk, az egyenesen végtelenhez konvergáló pontsorozatnak a vonalon megfelelő pontsorozat nem konvergálhat az F felület valamely pontjához.

Ezzel a fent kimondott tételt bebizonyítottuk. Megjegyezzük még, hogy mivel feltevésünk szerint a q^i keresztmetszetek mindegyike az F triangulációjának éleit csak véges sok pontban metszi, s igy F triangulációjában is bármely élnek a q^i keresztmetszetek összeségével csak véges sok közös pontja van, megadható F adott triangulációjából további felosztással F-nek egy új triangulációja, melyben az F-en alkalmazott keresztmetszetek a trianguláció éleiből tevődnek össze.

6. Leképezzük az F-ből keresztmetszetek alkalmazásával keletkezett $F_\star$ felületet a körlemezre kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezéssel, úgyhogy az F keresztmetszeteinek pontjai és a körkerületnek egy mindenütt sűrű intervallum-halmazának pontjai között kölcsönös (2, 1)-értelmű folytonos vonatkozás álljon fenn.

E végből leképezzük az előbbi pontban konstruált $\Phi^1_\star$ egyszeresen összefüggő, s az F új triangulációjának véges sok háromszögéből összetett tartományt egy az egységkörben fekvő tartományra, úgyhogy $\Phi^1_\star$ határának a q^i keresztmetszetekhez tartozó pontjai a körkerület pontjaiba, $\Phi^1_\star$ határának többi pontjai az egységkör belsejében fekvő pontokba menjenek át. Ezután leképezzük $\Phi^2_\star$-nak a $\Phi^1_\star$-hoz nem tartozó részeit az egységkörben s a $\Phi^1_\star$ tartomány képén kívül felvett tartományokra ugyanilyen módon, de úgy, hogy a leképezés a $\Phi^1_\star$ és

$\Phi^2_\star - \Phi^1_\star$ közös határgörbéin a $\Phi^1_\star$-re előbb megadott leképezéssel azonos legyen. Így folytatjuk az eljárást, előírva még azt, hogy $\Phi^n_\star$ képének a kör belsejében fekvő határíveinek mindegyike $1/n$-nél kisebb átmérőjű legyen. Ilyen módon nyerjük az $F_\star$ egyszeresen összefüggő tartománynak az egységkör belsejére való kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezését, melynél F határának a q^i keresztmetszetekhez tartozó élei (2, 1)-értelműen és folytonosan leképeződnek az egységkör kerületének bizonyos íveire.

Az $F_\star$ tartományból az F felület azáltal állítható elő, hogy az $F_\star$ tartománynak bármely két különböző határpontját, melyek az F felület valamelyik keresztmetszetén ugyanazon pontnak felelnek meg, egymással azonosítjuk. Ennek megfelelően minden F felület ábrázolható egy körlemez pontjai által a következő módon: Felveszünk a kör kerületén egy seholsem sűrű zárt ponthalmazt, mely az F határpontjainak felel meg; a körvonalnak a halmazhoz nem tartozó íveit egyértelműen párokba foglaljuk össze; bármely két egy párba foglalt ív belső pontjait egymásnak kölcsönösen egyértelmű és folytonos vonatkozással megfeleltetve, azonosítjuk az ezáltal egymásnak megfelelő pontokat; ezeknek környezeteit úgy definiáljuk, mint a körkerület két megfelelő pontjának a körlemezhez tartozó félkörnyezeteinek egyesítéséből keletkező halmazokat. A körlemez belső pontjai s a kerületi pontpárok azonosításából származó pontok alkotják együtt az F felületet.

7. Az előbb leírt körmodell által ábrázolt felület topológiai tulajdonságait a következőképpen állapithatjuk meg.

Ha van a körvonal azonosított ívei között két olyan, melyeknek az azonositás által megfelelő pontjai a körvonalnak ugyanazt a befutási irányát határozzák meg, a felület nem orientálható; egy ilyen ívpárt *harmadfajúnak* nevezünk. Ellenkező esetben, vagyis ha bármely két megfelelő ív a körvonalnak két különböző befutási irányát határozza meg, a felület orientálható.

Ha orientálható felület körmodelljén van két olyan megfelelő ívpár a, a és b, b, melyek egymást a körvonalon elválasztják, vagyis, amelyeknek a körvonalon való sorrendje $(abab)$, akkor, és csakis akkor létezik a felületen el nem daraboló körmetszet. Az ilyen a, a (és b, b) ívpárokat *másodfajúnak* nevezzük.

A körmodellen a felület egy határpontjának egy a kör kerületén fekvő megszámlálható zárt ponthalmaz felel meg, mely speciálisan állhat egy, vagy véges sok pontból is. Ennek a körvonalon való környezetén értünk egy a körvonal véges sok ívéből álló halmazt, melynek belsejében fekszik a határpontnak megfelelő halmaz összes pontja.

A felület egy határpontja *harmadfajú,* ha a kör kerületén megfelelő ponthalmaz tetszőleges kis környezete tartalmaz végtelen sok harmadfajú ívpárt. A felület egy határpontja *másodfajú,* ha van a neki megfelelő ponthalmaznak a kör kerületén egy harmadfajú ívektől mentes környezete, viszont minden környezete tartalmaz másodfajú ívpárokat. Ha a felület egy határpontjának megfelelő ponthalmaz környezete mentes másod- és harmadfajú ívpároktól, a határpont *elsőfajú.*

A körmodell átalakítására a következő eljárás szolgál. Legyenek P és Q a kör kerületének olyan pontjai, melyek a felület két határpontjának felelnek meg, s amelyek két egymásnak megfelelő a, a ívet a kör kerületén egymástól elválasztanak. Összekötjük a P és Q pontokat q egyenes szakasszal s leképezzük az általa az egységkörben meghatározott két tartományt egy másik körlemeznek egy átmérője által meghatározott két részére, úgyhogy az a, a ívek az átmérő pontjaiba és pedig egymással azonositott pontok az átmérőnek ugyanazon pontjába menjenek át. A q keresztmetszetnek az új modellen két a kerületen fekvő ív felel meg, melyeknek pontjai egymással kölcsönösen egyértelmű folytonos vonatkozásban vannak. A fenti eljárás arra alkalmas, hogy egy körmodellből az általa ábrázolt felületnek más körmodelljeit vezessük le. Ezzel az átalakítással síkszerű felületek esetében eljuthatunk mindig a következő modellhez: Vegyünk fel a kör kerületén egy sehol sem sűrű zárt μ ponthalmazt, mely a kör valamely d átmérőjére nézve szimmetrikus;

d végpontjai szintén tartozzanak hozzá a μ halmazhoz; azonosítsuk most a körkerületnek bármely két a d-re nézve szimmetrikus pontját, melyek nem tartoznak a μ halmazhoz; ezek az azonosított pontpárok s a kör belső pontjai alkotják az ábrázolandó síkszerű felületet. Ebből a síkszerű felületekre vonatkozó speciális körmodellből a fenti átalakításokkal áttérhetünk bármely olyan más modellre, melynek határpontjai az eredeti modell határpontjaival kölcsönösen egyértelmű és folytonos vonatkozásba hozhatók, úgyhogy azonosított határpontok az egyik modellen a másiknak azonosított határpontjainak feleljenek meg. Ebből következik a síkszerű felületekre vonatkozó főtétel, mely szerint *két síkszerű felület akkor és csak akkor homöomorph, ha határpontjaik halmazai egymással homöomorphak.*

Szeged, 1931. november 10.

Kerékjártó Béla.

ZUR TOPOLOGIE DER OFFENEN FLÄCHEN.

Auf Grund einer neuen Definition des vom Verfasser herrührenden Begriffes von Randstücken wird das Problem der Klassifizierung von offenen Flächen behandelt.

B. von Kerékjártó.

A SIMULÓ PARABOLÁRÓL.

Legyen adva az $y=f(x)$ egyenletű síkgörbe. Tegyük fel, hogy $f''(x)$ az a helyen folytonos és $f''(a)\neq 0$. Ismeretes, hogy akkor a görbe a abszcisszájú pontjához tartozó simuló kör (görbületi kör) a görbének $x_1<x_2<x_3$ abszcisszájú pontjain átmenő kör határhelyzete, midőn x_1, x_2 és $x_3 \to a$. Hasonló tétel áll fenn a simuló egyenlőoldalú hiperbolára, simuló kúpszeletre, vagy egy térgörbének simuló síkjára, simuló gömbjére, s í. t.[1] A simuló parabolát illetőleg AMPÈRE[2] bebizonyitás nélkül emlit egy megfelelő tételt, melyet szabatosan igy formulázhatunk:

Legyen $f(x)$ az a helyen háromszor differenciálható, $f'''(x)$ ugyanitt folytonos, továbbá $f''(a)\neq 0$. Akkor az $y=f(x)$ görbének $x_1<x_2<x_3<x_4$ abszcisszájú pontjain átmenő két parabola egyike a görbe a abszcisszájú P pontjához tartozó simuló parabolához, másika pedig a P-beli érintőhöz konvergál, midőn x_1, x_2, x_3 és $x_4 \to a$.[3]

Célom megmutatni, hogy az ú. n. *interpolációs függvények* fogalma s a rájuk vonatkozó SCHWARZ[4]—STIELTJES[5]-féle tétel

---

[1] V. ö. H. A. SCHWARZ: Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes, Gesammelte mathematische Abhandlungen 2, p. 296—302, továbbá STIELTJES: Sur une généralisation de la formule des accroissements finis, Œuvres 2, p. 105—123.

[2] AMPÈRE: Sur les avantages qu'on peut retirer, dans la théorie des Courbes, de la considération des Paraboles osculatrices, etc., Journal de l'École Polytechnique 7 (1808), p. 164.

[3] A tétel bizonyos megszoritással akkor is érvényes, ha $f'''(x)$ az a helyen nem folytonos.

[4] H. A. SCHWARZ: Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires, Gesammelte mathematische Abhandlungen 2, p. 307—308.

[5] STIELTJES: A propos de la formule d'interpolation de Lagrange, Œuvres 1, p. 47—60.

hogyan használható fel mind e tételek bebizonyítására. Példakép alább AMPÈRE tételét bizonyítom be.

Adva lévén a $\varphi(x)$ függvény, jelentse

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; \varphi(x)]$$

az x^n együtthatóját abban a legfeljebb n-edfokú racionális egész függvényben, mely az $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ helyeken $\varphi(x)$-szel megegyezik; ez együttható — mint $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ függvénye — nem más, mint amit n-edrendű *interpolációs függvény*nek *(fonction interpolaire)* szokás nevezni.

A jelzett tétel azt mondja, hogy

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; \varphi(x)] = \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad (x_1 < \xi < x_{n+1})$$

ha csak $\varphi(x)$ az (x_1, x_{n+1}) zárt közben n-szer differenciálható. Ebből következik — és közvetlenül erre lesz szükségünk — miszerint

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; \varphi(x)] \to \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} \tag{1}$$

midőn $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \to a$, valahányszor $\varphi^{(n)}(x)$ az a helyen folytonos.

*

AMPÈRE tételét bebizonyítandó, előre bocsátom a következő észrevételt:

A $\varphi(x)$ függvény az $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ helyeken akkor és csak akkor tűnik el, ha

$$[x_1; \varphi(x)] = 0, \; [x_1, x_2; \varphi(x)] = 0, \ldots, [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; \varphi(x)] = 0.$$

Ez az interpolációs függvények fenti definíciója alapján nyilvánvaló.

A bebizonyításban feltehetjük, miszerint $a=0$, $f(0)=f'(0)=0$, vagyis, hogy a görbe szóbanforgó pontja az origó s ebben az érintő az abszcissza-tengely. Legyen

$$x_{n1} < x_{n2} < x_{n3} < x_{n4} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots$$

az abszcissza-csoportoknak oly sorozata, melyben $n \to +\infty$ esetén

$$x_{ni} \to 0. \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

Az $y=f(x)$ görbének x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, x_{n4} abszcisszájú pontjain átmenő valamely parabola egyenlete

$$a_n^2 x^2 + 2a_n b_n xy + b_n^2 y^2 + 2c_n x + 2d_n y + e_n = 0 \qquad (2)$$

alakú. Az együtthatókat a következő egyenletrendszer határozza meg:

$$a_n^2 x_{ni}^2 + 2a_n b_n x_{ni} f(x_{ni}) + b_n^2 f(x_{ni})^2 + 2c_n x_{ni} + 2d_n f(x_{ni}) + e_n = 0. \qquad (3)$$
$$(i=1, 2, 3, 4)$$

Ez más szóval azt mondja, hogy a

$$\varphi(x) = a_n^2 x^2 + 2a_n b_n x f(x) + b_n^2 f(x)^2 + 2c_n x + 2d_n f(x) + e_n$$

függvény eltűnik az x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, x_{n4} helyeken. Előbbi észrevételünk szerint ez akkor és csak akkor következik be, ha

$$[x_{n1};\ \varphi(x)] = 0,\ [x_{n1}, x_{n2};\ \varphi(x)] = 0,\ [x_{n1}, x_{n2}, x_{n3};\ \varphi(x)] = 0,$$
$$[x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, x_{n4};\ \varphi(x)] = 0. \qquad (3^*)$$

Az együtthatók meghatározására szolgáló (3) egyenletrendszer tehát *aequivalens* (3*)-gal. Ez utóbbi részletesen nyilván így írható:

$$2a_n b_n [x_{n1};\ x f(x)] + 2c_n [x_{n1};\ x] + 2d_n [x_{n1};\ f(x)] + e_n =$$
$$= -a_n^2 [x_{n1};\ x^2] - b_n^2 [x_{n1};\ f(x)^2]$$

$$2a_n b_n [x_{n1}, x_{n2};\ x f(x)] + 2c_n [x_{n1}, x_{n2};\ x] + 2d_n [x_{n1}, x_{n2};\ f(x)] =$$
$$= -a_n^2 [x_{n1}, x_{n2};\ x^2] - b_n^2 [x_{n1}, x_{n2};\ f(x)^2]$$

$$2a_n b_n [x_{n1}, x_{n2}, x_{n3};\ x f(x)] + 2c_n . 0 + 2d_n [x_{n1}, x_{n2}, x_{n3};\ f(x)] =$$
$$= -a_n^2 [x_{n1}, x_{n2}, x_{n3};\ x^2] - b_n^2 [x_{n1}, x_{n2}, x_{n3};\ f(x)^2]$$

$$2a_n b_n [x_{n1}, \ldots, x_{n4};\ x f(x)] + 2c_n . 0 + 2d_n [x_{n1}, \ldots, x_{n4};\ f(x)] =$$
$$= -a_n^2 [x_{n1}, \ldots, x_{n4};\ x^2] - b_n^2 [x_{n1}, \ldots, x_{n4};\ f(x)^2].$$

Ezt tekintsük úgy, mint lineáris egyenletrendszert az $a_n b_n$, c_n, d_n, e_n ismeretlenekre. Jelöljük a rendszer determinánsát D_n-nel;

mindjárt látni fogjuk, hogy elég nagy n-re $D_n \neq 0$. Akkor CRAMER szabályát alkalmazva, könnyen érthető jelöléssel

$$a_n b_n = \frac{a_n^2 D_{n1} + b_n^2 \Delta_{n1}}{D_n} \tag{4}$$

és

$$c_n = \frac{a_n^2 D_{n2} + b_n^2 \Delta_{n2}}{D_n}, \quad d_n = \frac{a_n^2 D_{n3} + b_n^2 \Delta_{n3}}{D_n}, \quad e_n = \frac{a_n^2 D_{n4} + b_n^2 \Delta_{n4}}{D_n}. \tag{5}$$

Minthogy az $a = 0$ helyen még $f'''(x)$ is folytonos, a fenti egyenletrendszerben szereplő interpolációs függvényekre alkalmazható az (1) tétel s így adódik, miszerint

$$D_n \to -2f''(0)^2 \neq 0,$$

tehát bizonyos n-től kezdve valóban $D_n \neq 0$, továbbá

$$\frac{D_{n1}}{D_n} \to \frac{f'''(0)}{3f''(0)^2}, \quad \frac{\Delta_{n1}}{D_n} \to 0, \tag{6}$$

és

$$\frac{D_{n2}}{D_n} \to 0, \quad \frac{\Delta_{n2}}{D_n} \to 0, \quad \frac{D_{n3}}{D_n} \to -\frac{1}{f''(0)},$$
$$\frac{\Delta_{n3}}{D_n} \to 0, \quad \frac{D_{n4}}{D_n} \to 0, \quad \frac{\Delta_{n4}}{D_n} \to 0. \tag{7}$$

(4)-nek az $a_n : b_n$ viszonyra két megoldása van; jelöljük ezeket röviden I. és II.-vel. (6) alapján könnyen belátható, hogy *elég nagy n-re*

$$\textit{I.-ben } a_n \neq 0 \textit{ és } \frac{b_n}{a_n} \to \frac{f'''(0)}{3f''(0)^2},$$

$$\textit{II.-ben } b_n \neq 0 \textit{ és } \frac{a_n}{b_n} \to 0.$$

Ennélfogva (7)-re tekintettel (5)-ből

$$\textit{I.-nek megfelelőleg } \frac{c_n}{a_n^2} \to 0, \quad \frac{d_n}{a_n^2} \to -\frac{1}{f''(0)}, \quad \frac{e_n}{a_n^2} \to 0,$$

$$\textit{II.-nek megfelelőleg } \frac{c_n}{b_n^2} \to 0, \quad \frac{d_n}{b_n^2} \to 0, \quad \frac{e_n}{b_n^2} \to 0.$$

Ezekből látjuk, miszerint elég nagy n-nél a görbének $x_{n1}, \ldots, x_{n4}$ abszcisszájú pontjain két parabola halad keresztül s $n \to +\infty$ esetén ezeknek (2) alatti egyenlete (ha azt a_n^2-tel resp. b_n^2-tel végig osztjuk) átmegy az

$$\left(x + \frac{f'''(0)}{3f''(0)^2} y\right)^2 - \frac{2}{f''(0)} y = 0, \tag{8}$$

illetve

$$y^2 = 0 \tag{9}$$

egyenletbe. De (8) éppen az origóhoz tartozó símuló parabolának, (9) pedig az abszcissza-tengelynek, vagyis az origóbeli érintőnek egyenlete. Qu. e. d.

Szász Pál.

ÜBER DIE SCHMIEGUNGSPARABEL.

Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 vier veränderliche Punkte einer ebenen Kurve, die einem festen Punkte P der Kurve zustreben. Durch P_1, P_2, P_3, P_4 gehen — im allgemeinen — *zwei Parabeln*. Es wird nun — unter gewissen Voraussetzungen — die folgende AMPÈREsche[6] Behauptung bewiesen: die Grenzlage der einen Parabel ist die *Schmiegungsparabel*, die der anderen die *Tangente* in P. Der Beweis ist auf den Begriff der *Steigungen (fonctions interpolaires)* gegründet.

Paul v. Szász.

---

[6] Siehe Fussnote [2]

ULTRASPHÄRIKUS POLYNOMOK ÖSSZEGÉRŐL.

A LAPLACE-féle sor másodrendű számtani közepekkel való szummálására vonatkozó régebbi vizsgálataim főként azon az észrevételen alapulnak, hogy az

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = P_0(x) + P_1(x)z + \cdots + P_n(x)z^n + \cdots \tag{1}$$

sorfejtéssel értelmezett $P_k(x)$ LEGENDRE-féle polynomoknak bármely véges összege:

$$P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_n(x) \tag{2}$$

pozitív a $-1 < x < 1$ számközben, bármi legyen is az n nemnegativ egész szám értéke.

KOGBETLIANTZ és SZEGŐ kapcsolatos vizsgálataira való tekintettel talán nem érdektelen a fenti észrevétel következő általánosítása:

Az

$$\frac{1}{(1-2xz+z^2)^\alpha} = P_0(x) + P_1(x)z + \cdots + P_n(x)z^n + \cdots \tag{3}$$

sorfejtéssel értelmezett $P_k(x)$ ultrasphärikus polynomoknak bármely véges összege

$$P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_n(x) > 0 \tag{4}$$

a $-1 < x < 1$ közben, bármi legyen is az n nemnegatív egész szám értéke, ha $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

E tétel bizonyítása azon a tényen alapszik, hogy a z komplex változó

$$f(z)=\frac{1-z}{(1-2xz+z^2)^\alpha} \tag{5}$$

függvényének valós része *pozitív* a $|z|<1$ egységkör belsejében, ha $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$. Itt x tetszésszerinti (rögzített) értéket jelent a $-1<x<1$ közben, az α-dik hatványnak pedig mindig az az ága veendő, mely 1-gyel egyenlő, ha $z=0$. Különben az (5) alatti generátorfüggvényből kiindulva egyszerű számolás a következő formulát szolgáltatja, mely α tetszésszerinti valós, és 1-nél kisebb értékére érvényes:

$$\begin{aligned} &P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\cdots+P_n(\cos\theta)= \\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta F(\varphi)\sin\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\varphi\,d\varphi+ \\ &+\frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi F(\varphi)\sin\left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\varphi+\alpha\pi\right]d\varphi, \end{aligned} \tag{6}$$

ahol

$$x=\cos\theta,\quad 0<\theta<\pi$$

$$F(\varphi)=\frac{\left(\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}\right)^2}{(2|\cos\varphi-\cos\theta|)^\alpha\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{7}$$

(Ha $\alpha=\frac{1}{2}$, vagyis a Legendre-féle polynomok esetében, a (6)-beli első integrál 0, és előáll régi formulám:

$$\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{\left(\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}\sin\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi.) \tag{8}$$

Ármost a (6), (7) alatti képletek alapján a tétel helyessége nyilvánvaló. Ha ugyanis $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$, akkor a (6) alatt szereplő sinusok argumentumai: $\left(\frac{1}{2}-a\right)\varphi$ és $\left(\frac{1}{2}-a\right)\varphi+a\pi$ állandóan a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ közbe esnek, és így a sinusok nem lehetnek negatívok. De (7)-ből látszik, hogy $F(\varphi)$ is állandóan nemnegatív. Tehát akkor a (6) alatti előállításra hivatkozva, (4) valóban bizonyítva van.

Ha $a>\frac{1}{2}$ vagy $a<-\frac{1}{2}$, a tétel nem érvényes. De igenis érvényes a sok tekintetben kitüntetett $a=-\frac{1}{2}$ esetben, a mikor is a $\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}$ háromszögoldal r nemnegatív egész hatványai szerint haladó sorában föllépő $\Pi_n(\cos\theta)$ együtthatók jönnek szóba:

$$\begin{aligned}&\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}=\\&=\Pi_0(\cos\theta)+\Pi_1(\cos\theta)r+\cdots+\Pi_n(\cos\theta)r^n+\cdots.\end{aligned}\tag{9}$$

(Ezúttal tehát z helyett r-et, $P_n(\cos\theta)$ helyett $\Pi_n(\cos\theta)$-t írtam.) Most, ha $\cos\theta=x$,

$$\begin{gathered}\Pi_0(x)=1,\ \Pi_1(x)=\int_x^1 P_0(x)\,dx-1,\ \Pi_n(x)=\int_x^1 P_{n-1}(x)\,dx,\\ n=2, 3, 4,\ldots,\end{gathered}\tag{10}$$

hol $P_k(x)$, $k=0, 1, 2,\ldots$, a LEGENDRE-féle polynomokat jelzik. E szerint

$$\Pi_0(x)=1,\ \Pi_0(x)+\Pi_1(x)+\cdots+\Pi_n(x)=\int_x^1\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}P_\nu(x)\right)dx,\tag{11}$$

és igy, tekintettel a (2) alatti összeg pozitivitására, valóban pozitívok az összes

$$\Pi_0(x)+\Pi_1(x)+\cdots+\Pi_n(x)\tag{12}$$

összegek a $-1<x<1$ közben.

A $-\frac{1}{2}<a<0$ esetre máskor térek vissza.

Fejér Lipót.

ÜBER DIE SUMME ULTRASPHÄRISCHER POLYNOME.

Die ultrasphärischen Polynome $P_n(x)$ sind durch die Entwickelung

$$\frac{1}{(1-2xz+z^2)^{\alpha}} = P_0(x) + P_1(x)z + \cdots + P_n(x)z^n + \cdots$$

definiert. Es gilt der Satz:

$$P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_n(x) > 0$$

für $-1 < x < 1$, *wenn* $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Der Beweis stützt sich auf die Formeln (6) und (7) des ungarischen Textes. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ (LEGENDREscher Fall) habe ich den Satz im Jahre 1908 veröffentlicht. Er spielt in der Summabilitätstheorie der LAPLACEschen Reihe eine Rolle. Für $\alpha > \frac{1}{2}$, oder $\alpha < -\frac{1}{2}$ ist der Satz nicht richtig. In dem vielfach ausgezeichneten Falle $\alpha = -\frac{1}{2}$ ist er aber richtig. Auf die Fälle $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ gedenke ich noch zurückzukommen. Es wird auf die einschlägigen Untersuchungen von KOGBETLIANTZ und SZEGŐ hingewiesen.

Leopold Fejér.

M. Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED

EGYETEMI KÖNYVTÁR SZEGED. FOLYÓIRATOK 1932/33 135

MARX ÉS MÉREI

tudományos műszerek gyára

BUDAPEST, VI., BULCSU-UTCA 7.

Telefon: Aut. 933—86, Aut. 933—88.

Gyártanak saját nagyszabású telepükön mindennemű **fizikai, matematikai, csillagászati, mérnöki** és **elektromos mérőműszereket.**

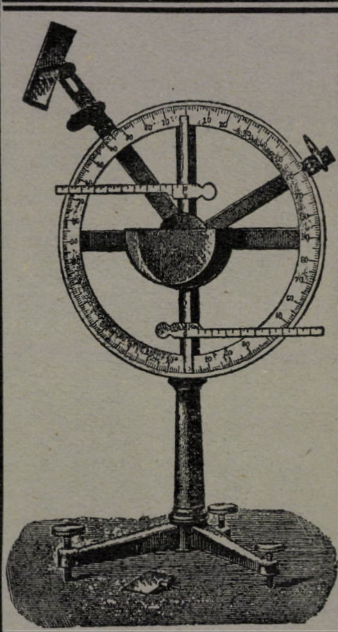
Külön osztály előkészítő és előadótermi felszerelésre; úgymint **előadóasztalok, vegyifülkék, kapcsolótáblák, ablaksötétítők, előkészítő asztalok, üvegszekrények, vetítőgépek, epidiaskopok, mozgógépek** gyártására. Saját három különálló precíziós műszerészeti, asztalos, lakatos, lakkozó és üvegfúvó műhely.

Hőmérőgyártás.

A gyár fennáll 30 éve, 100 alkalmazott.

Kitüntetve:

Turin Világkiállítás: Aranyéremmel és díszoklevéllel.
Milano: Aranyérem. Saloniki: Díszoklevél.
1928. Kereskedelemügyi M. Kir. Miniszter Úr:
I. díj: Elismerő oklevél.
Országos Iparegyesület:
Ezüstérem, új ipar meghonosításáért.



VATEA elektroncsövek

Egyrácsos
Kétrácsos
Háromrácsos
Árnyékolt rácsú
Hálózati
Egyenirányító
Adócsövek

Magyar gyártmány • Világmárka

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA: GÉCZY KÁLMÁN.