# MATEMATIKAI

ÉS

# FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT ÉS POGÁNY BÉLA

HARMINCHETEDIK ÉVFOLYAM

1930

JÚLIUS—DECEMBERI FÜZET

BUDAPEST, 1930

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

# TARTALOMJEGYZÉK.

Oldal

RADOS GUSZTÁV alelnöknek az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat nevében mondott búcsúztatója Fröhlich Izidor ravatalánál 113

TANGL KÁROLY alelnök beszéde Fröhlich Izidor ravatalánál ... 114

P. ZEEMAN: Hendrik Antoon Lorentz élete és munkássága (Fordította Schmid R.) ... 118

GYULAI ZOLTÁN: Ólomchlorid elektromos vezetőképességének hőmérsékleti függése *KCl* hatására ... 131

BABITS VIKTOR: Teljesítményerősítők ... 139

---

**Az 1926. évi május hó 22-én tartott közgyűlés 1927 január 1.-i hatállyal a tagdíjakat felemelte, budapesti tagok számára 8 pengőre, vidéki tagok számára 6 pengőre.**

---

**Minthogy a Matematikai és Fizikai Lapok egyes régibb évfolyamai teljesen elfogytak, kérjük tisztelt tagtársainkat, akik azokat nélkülözhetik, bocsássák a Társulat rendelkezésére.**

---

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Fejér Lipót* (**V., Falk Miksa-utca 15.**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**I., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Nagy József* pénztáros címére (Vác, Kegyesrendi gimnázium.) intézendők.

---

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

---

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du sécretaire *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

# MATEMATIKAI

ÉS

# FIZIKAI LAPOK

HARMINCHETEDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST, 1930

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

# A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

harminchetedik kötetének tartalma.


| | Oldal |
|---|---|
| KÜRSCHÁK JÓZSEF: A parallelák axiomájától független szerkesztések | 1 |
| — Vom Parallelen-Axiom unabhängige Konstruktionen | 21 |
| BAUER MIHÁLY: A primitiv körosztási polynom elemi elméletéhez | 22 |
| — Zur elementaren Theorie der primitiven Kreisteilungspolynome | 23 |
| HUSZÁR GÉZA: Az $x^{n+1}-x^n+p=0$ egyenlet gyökeiről | 25 |
| — Über die Wurzeln einer trinomischen Gleichung | 34 |
| EGERVÁRY JENŐ: A trinom egyenletről | 37 |
| — Über die Wurzeln trinomischer Gleichungen | 56 |
| LIPKA ISTVÁN: Megjegyzés egy fixpont-tételhez | 58 |
| — Bemerkung zu einer Fixpunktsatz | 62 |
| FEJÉR LIPÓT: Jelentés az 1930. évi Kőnig Gyula-jutalomról | 63 |
| — Bericht zur Verteilung des Julius Kőnig-Preises vom Jahre 1930 | 90 |
| RADOS GUSZTÁV alelnöknek az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat nevében mondott búcsúztatója Fröhlich Izidor ravatalánál | 113 |
| TANGL KÁROLY alelnök beszéde Fröhlich Izidor ravatalánál | 114 |
| P. ZEEMAN: Hendrik Antoon Lorentz élete és munkássága (ford. SCHMID R.) | 118 |
| — Hendrik Antoon Lorentz's Leben und Lebenswerk | 130 |
| GYULAI ZOLTÁN: Ólomchlorid elektromos vezetőképességének hőmérsékleti függése *KCl* hatására | 131 |
| — Die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit des Bleichlorids mit *KCl* Zusatz | 138 |
| BABITS VIKTOR: Teljesitményerősítők | 139 |
| — Leistungsverstärker | 188 |
| **Irodalom** | 91 |
| **Tanulóversenyek** | 96 |
| **Társulati élet** | 107 |


*

# A PARALLELÁK AXIOMÁJÁTÓL FÜGGETLEN SZERKESZTÉSEK.

HILBERT[1] geometriai vizsgálataihoz mintegy kiegészítésül nemrég HJELMSLEV[2] figyelemreméltó, sőt elméleti szempontból valóban hézagpótló elemi planimetriai szerkesztéseket közölt, melyek minket magyarokat különösen érdekelnek, mert a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometriában is elvégezhetők. Szándékom azt a hézagot kijelölni, melyet e szerkesztések a geometriában kitöltenek, őket ismertetni és bebizonyitani. Kiindulópontul HILBERT axioma-rendszerét választom.

## *A)* Hilbert axioma-rendszere.

A geometria háromféle elem rendszereiből indul ki: a *pontok*, az *egyenesek* és a *síkok* rendszereiből. A pontok, egyenesek és síkok között különböző vonatkozások vannak, amelyeket így fejezünk ki: *rajta van, közte van, egybevágó, párhuzamos, folytonos*. A matematika sem az elemeket, sem ezeket a vonatkozásokat nem definiálja, hanem pusztán azokkal az axiomákkal jellemzi, amelyeket reájuk nézve érvényeseknek tekint (vagy követel).

---

[1] HILBERT, D., *Grundlagen der Geometrie.* Először 1899-ben jelent meg a göttingai GAUSS—WEBER-emlék leleplézése alkalmából készült ünnepi kiadványban. 4. kiadása 1913-ból való. Az 5. és 6. kiadás ennek anastatikus lenyomata. A függelékek közül, amelyeket HILBERT idővel munkájához csatolt, minket különösen a harmadik érdekel: *Neue Begründung der* BOLYAI—LOBATSCHEFSKY-*schen Geometrie.* (A munka bővített és javitott 7. kiadása e cikk szedése után jelent meg.)

[2] HJELMSLEV, J., *Die geometrischen Konstruktionen mittels Lineal und Eichmasses.* Opuscula mathematica ANDREAE WIMAN dedicata. Festskrift ANDERS WIMAN, Upsala, 1930; 175—177. lap.

Hilbert az ötféle vonatkozásnak megfelelően az axiomákat öt csoportba foglalta. Minket csak a sikgeometriai axiomák érdekelnek. (A térgeometriában ezekhez még további öt axioma járul, melyek rendre az első csoportba tartoznak.)

**I. Az illeszkedés axiomái.** (A «rajta» axiomái.)

**I 1 és 2.** *Két különböző A és B pont egy és csak egy egyenest határoz meg* (amelyen mindkettő *rajta* van). Ezt az egyenest így jelöljük $|AB|$.

**I 3.** *Minden egyenesen legalább két pont van. A síkban legalább három olyan pont van, amely nincsen egy egyenesen.*

**II. A rendezés axiomái.** (A «közte» axiomái.)

**II 1.** *Ha az A, B és C pontok egy egyenesen úgy vannak elhelyezve, hogy B az A és C között van, akkor B egyszersmind C és A között van.*

**II 2.** *Az* $|AB|$ *egyenesen mindig van olyan C pont, amely A és B közé esik, meg olyan D pont is, hogy B az A és D közé esik.*

**II 3.** *Egy egyenes három különböző pontja közül mindig egy és csak egy a másik kettő között van.*

*A köz fogalma.* $|AB|$-nek $A$ és $B$ közé eső pontjait az $AB$ *köz* (vagy, ami ugyanazt jelenti, a $BA$ *köz*) pontjainak mondjuk. Az $AB$ közt *határoló* $A$ és $B$ pontokat nem számítjuk a köz pontjaihoz.

**II 4.** *Legyen A, B, C a síknak három különböző olyan pontja, amely nincsen egy egyenesen, u pedig a síknak olyan egyenese, amely A, B, C egyikét sem tartalmazza. Ha az ABköznek legalább egy pontja u-ra esik, akkor vagy a BC vagy a CA köznek szintén van egy u-ra eső pontja.* (Pasch-féle axioma.)[1]

[1] A *II.* csoport axiomái nem függetlenek egymástól és az *I* alattiaktól. Más szóval, e csoportnak axiomái kevesebbet követelő axiomákkal pótol-

*Félsík és félegyenes.* Jelentse $u$ a síknak tetszőleges egyenesét. Az eddigi axiomák alapján bebizonyitható, hogy a síknak $u$-n kívül fekvő pontjai úgy oszthatók két osztályba, hogy két különböző pont, $P$ és $Q$, akkor és csak akkor tartozik ugyanabba az osztályba, ha a $PQ$ köznek egy pontja sem esik $u$-ra. Az egy osztályba tartozó pontokról azt mondjuk, hogy $u$ ugyanazon *oldalán* vannak; összeségüket az $u$ illető oldalán levő *félsíknak* nevezzük.

Hasonlóképpen különböztetjük meg az egyenesen egy rajta levő $O$ pont két oldalát. Az egyenesen $O$ ugyanazon oldalán levő pontok összeségét $O$-ból kiinduló *félegyenesnek* nevezzük. Ha rövidség kedvéért köznek vagy félegyenesnek oldalairól beszélünk, ezeken mindig annak az $u$ egyenesnek oldalait értjük, amelyen a köz, illetve félegyenes rajta van.

*A szög belseje.* Jelentsen $h$ és $k$ az $O$-ból kiinduló két olyan félegyenest, amelyek két különböző $\bar{h}$ és $\bar{k}$ egyenesen vannak. A sík azon pontjainak összeségét, amelyek $\bar{h}$-nak $k$ felé és egyszersmind $\bar{k}$-nak $h$ felé eső oldalán vannak, $\sphericalangle$ *(h, k) belsejének* mondjuk.[1]

## III. Az egybevágóság axiomái.

III 1*a*. *Legyen adva két pont, A és B, továbbá egy meghatározott A' pontból kiinduló h félegyenes. Akkor h-n egy és csak egy olyan B' pont található, hogy AB az A'B' közzel egybevágó (vagy szokásosabb módon* kifejezve, vele *egyenlő). Jelekben* $AB \equiv A'B'$.

hatók, amelyekből (az *1* alattiak felhasználásával) a *II* alatti többi követelés már logikailag következik. Különösen messzemenő redukciót végzett Tschetwerunin: *Über die Bedeutung des Axioms von* Pasch *für die linearen Anordnungsaxiome,* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 33. kötet. (1924.)

[1] Így értelmezi a szög belsejét Rosenthal, *Vereinfachung des Hilbertschen Systems der Kongruenzaxiome,* Mathematische Annalen, 71. kötet. (1912.) Hilbert definíciója lényegében ugyanaz, de más fogalmazásban.

E definíció értelmében szögön mindig *behajló* szög értendő (az egyenes szög és a kihajló szögek ki vannak zárva).

III 1*b*. *Közök egybevágósága* ***szimmetrikus*** *vonatkozás; azaz, ha* $AB \equiv A'B'$, *akkor egyszersmind* $A'B' \equiv AB$.

III 1*c*. *Közök egybevágósága* ***reflektív*** *vonatkozás, azaz minden köz önmagával egybevágó.* Jelekben: $AB \equiv AB$, vagy (ami ugyanazt jelenti) $AB \equiv BA$.

III 2. *Közök egybevágósága* ***tranzitív*** *vonatkozás; azaz, ha* $AB \equiv A'B'$ *és* $AB \equiv A''B''$, *akkor egyszersmind* $A'B' \equiv A''B''$.

III 3. *Essék az u egyenesen B az A és C pontok közé,* az *u' egyenesen pedig B' az A' és C' pontok közé. Ha még* $AB \equiv A'B'$ *és* $BC \equiv B'C'$, *akkor egyszersmind* $AC \equiv A'C'$.

III 4*a*. *Legyen adva egy (h, k) szög, továbbá egy u egyenes és ennek egy meghatározott oldala; h' jelentse az u egyenesnek egy meghatározott felét és O ennek kiindulópontját. Akkor O-ból az u meghatározott oldalán egy és csak egy olyan k' félegyenes indul ki, hogy* $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$.

III 4*b*, 4*c* **és** 5. *Szögek egybevágósága szintén szimmetrikus, reflektív és tranzitív vonatkozás.*

III 6. *Ha az ABC* és *A'B'C' háromszögekben*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \text{ és } \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

*akkor egyszersmind*

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \text{ és } \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

A közök egybevágóságának és a szögek egybevágóságának *szimmetrikus, reflektív* és *tranzitív* volta azt fejezi ki, hogy a közök, illetve szögek úgy osztályozhatók, hogy az egybevágókat és csak azokat egy osztályba sorozzuk. Minden osztályt egy-egy köze, illetve szöge képviselheti, pl. a közök valamely osztályát egy meghatározott $O$ pontból kiinduló, meghatározott $h$ félegyenesnek az illető osztályba tartozó $OA$ köze.[1]

---

[1] Az egybevágóság axiomái HILBERT művének harmadik kiadásában így találhatók.

ROSENTHAL idézett értekezésében a **III 1** és **III 4** alatti axiomákat kevesebbet követelőkkel helyettesítette, továbbá **III 5**-öt az **I—II** alatti axiomák felhasználásával a többi egybevágósági axiomákból levezette.

HILBERT ezt a negyedik kiadásban megemlíti és **III 5**-öt a tantételek közé helyezi, de egyébiránt az idomok egybevágóságára vonatkozó tárgyalásait nem módosította ROSENTHAL vizsgálatainak szellemében.

## Idomok egybevágósága.

A következőkben több olyan ismeretes és fontos tételt fogunk felsorolni, amely pusztán az I—III alatti axiomákból következik. Olyan sorrendet választottunk, amelyben a tételek bebizonyíthatók.[1]

**1.** Egyenlőszárú háromszögekben az alapnál levő szögek egymással egyenlők.

*Bebizonyítás.* Jelöljük az $ABC$ egyenlőszárú háromszögben a $BC$ alap $B$ végpontját $C'$-vel is, $C$-t pedig $B'$-vel is. Akkor az $ABC$ és $AB'C'$ háromszögekben

$$AB \equiv AB', \ AC \equiv AC' \text{ és } \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'AC'.$$

Tehát a III 6 axiománál fogva $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AB'C'$, azaz valóban $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

*Háromszögek egybevágóságának fogalma.* Az $ABC$ és $A'B'C'$ háromszögeket egymással *egybevágók*nak akkor mondjuk, ha megfelelő oldalaik és szögeik rendre egyenlők. Jelekben: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, ha

$$BC \equiv B'C' \qquad AC \equiv A'C' \qquad AB \equiv A'B'$$
$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A' \qquad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \qquad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'.$$

Ezen értelmezésnél fogva háromszögek egybevágósága *szimmetrikus, reflektív* és *tranzitív* vonatkozás.

**2.** *Háromszögek első egybevágósági tétele.*

Hogy $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ legyen, arra *elegendő,* ha

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \text{és} \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'.$$

**3.** *Háromszögek második egybevágósági tétele.*

Hogy $\triangle ABC \equiv \triangle A'B\,C'$ legyen, arra elegendő, ha

$$AB \equiv A'B', \quad \sphericalangle A \equiv A' \quad \text{és} \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'.$$

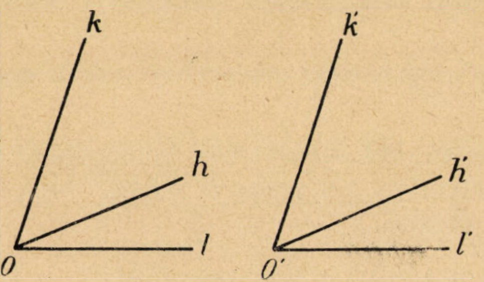
---

[1] Ezek az idomok egybevágóságára és a tükrözésre vonatkozó tételek csak részben foglaltatnak HILBERT munkájában. Az ott megtalálható bebizonyítások ismétlését lehetőleg kerültük.

**4.** Két egyenlő szög bármelyikének bármelyik mellékszöge egyenlő a másiknak bármelyik mellékszögével.

E tételnek legegyszerűbb esete:

**4'.** A szögnek két mellékszöge egymással egyenlő. Azaz:



1. ábra.

**5.** Csúcsszögek egymással egyenlők.

**6.** Legyen (1. ábra) $h$, $k$ és $l$ egy $O$ pontból kiinduló három olyan félegyenes, hogy $k$ és $l$ a $h$-nak ellenkező oldalán van; hasonlóképpen legyenek $h'$, $k'$ és $l'$ egy $O'$ pontból kiinduló olyan félegyenesek, hogy $k'$ és $l'$ a $h'$-nak ellenkező oldalán van. Ha e félegyenesekre a

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k'),\ \sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l'),\ \sphericalangle(k, l) \equiv \sphericalangle(k', l')$$

egybevágóságok közül kettő fennáll, akkor ez maga után vonja a harmadikat is.

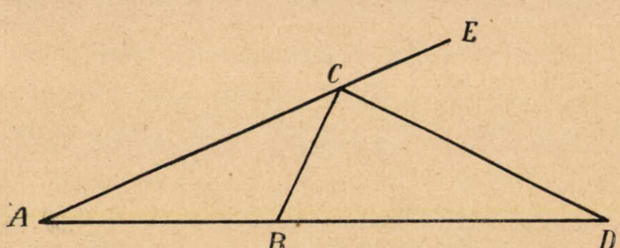
**7.** *A háromszögek harmadik egybevágósági tétele.*

Hogy $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ legyen, arra elegendő, ha

$$AB \equiv A'B',\ BC \equiv B'C',\ CA \equiv C'A'.$$

**8.** A háromszögben sohasem lehet egy külső szög egyenlő egy vele átellenes belső szöggel.

*Bebizonyítás.* (2. ábra.) Vegyünk fel az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának $B$-n túl való folytatásán egy $D$ pontot és $AC$-



2. ábra.

nek $C$-n túl való folytatásán egy $E$ pontot. $D$-t válasszuk úgy, hogy $AC \equiv BD$. Nyilván $D$ és $E$ a $|BC|$ egyenesnek $A$-tól elfordult oldalára esnek, mégpedig a $D$ pont $\sphericalangle BCE$ belsejében és az $E$ pont $\sphericalangle CBD$ belsejében van.

Ha most már feltesszük, hogy az $ABC$ háromszögben $\sphericalangle ACB$ egyenlő a $\sphericalangle DBC$ külső szöggel, akkor egyszersmind e szögek mellékszögei is egyenlők. Jelekben

$$\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle CBA. \qquad 1)$$

Továbbá az $ABC$ és $DCB$ háromszögekben

$$BC \equiv CB, \qquad AC \equiv DB, \qquad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DBC,$$

tehát a **III 6** axioma alapján

$$\sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle BCD. \qquad 2)$$

1) és 2)-nél fogva

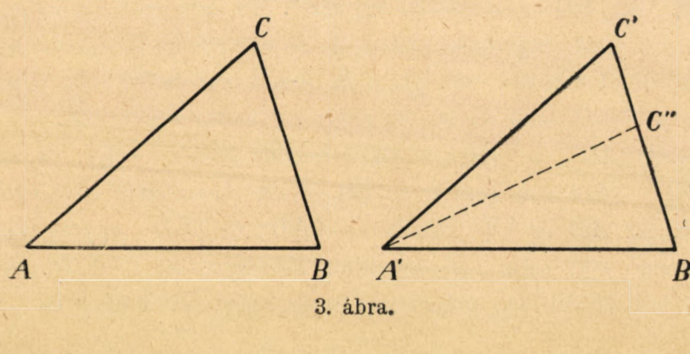
$$\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle BCD.$$

Minthogy $D$ és $E$ a $|BC|$-nek ugyanazon oldalán vannak, azért ez csak úgy következhetik be, hogy a $D$ pont $\sphericalangle BCE$-nek $E$-n keresztülvont szárán van. De ez lehetetlen, mert $D$ ennek a szögnek belsejében van.

**9.** *Háromszögek második egybevágósági tételének kiegészítése.* Ha az $ABC$ háromszögben két szög és az egyikkel *átellenes* oldal egyenlő $A'B'C'$ megfelelő két szögével és megfelelő oldalával, akkor is $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

*Bebizonyítás.* (3. ábra.) Legyen

$$AB \equiv A'B', \qquad \sphericalangle B \equiv B' \qquad \text{és} \qquad \sphericalangle C \equiv C'.$$




3. ábra.

Csak azt kell bebizonyítani, hogy $BC \equiv B'C'$, mert akkor a két háromszög egybevágó volta már a háromszögek *első* egybevágósági tételéből következik.

Tegyük fel, hogy $BC$ nem egyenlő $B'C'$-vel és határozzuk meg $B'C'$-n vagy ennek $C'$-n túl való meghosszabbításán $C''$-t úgy, hogy $BC \equiv B'C''$. Akkor $\triangle\, ABC \equiv \triangle\, A'B'C''$, mert

$$AB \equiv A'B',\ BC \equiv B'C'' \text{ és } \measuredangle B \equiv \measuredangle B'.$$

Ennélfogva

$$\measuredangle\, ACB \equiv \measuredangle\, A'C''B'.$$

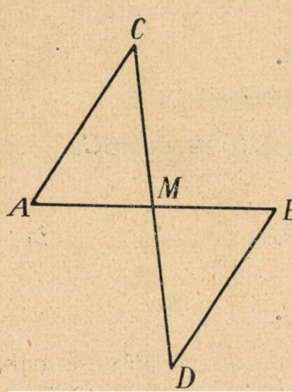
Másrészt feltettük, hogy $\measuredangle\, C \equiv \measuredangle\, C'$, azaz

$$\measuredangle\, ACB \equiv \measuredangle\, A'C'B'.$$

Tehát

$$\measuredangle\, A'C'B' \equiv \measuredangle\, A'C''B'.$$

E szerint az $A'C'C''$ háromszögben a $C'$-nél levő belső szög egyenlő a $C''$-nél levő külső szöggel és (ami egyre megy) a $C'$-nél levő belső szög egyenlő a $C'$-nél levő külső szöggel. Ámde ez lehetetlen.



4. ábra.

**10.** Bármely $AB$ köznek van felezőpontja, mégpedig csak egy.

*Bebizonyítás. a)* (4. ábra.) Válasszuk $|AB|$ két különböző oldalán $C$-t tetszés szerint és $D$-t úgy, hogy

$$\measuredangle\, BAC \equiv \measuredangle\, ABD \text{ és } AC \equiv BD. \qquad (a)$$

$|AC|$ és $|BD|$ nem metszi egymást. Ha ugyanis a két egyenesnek volna metszéspontja, akkor $A$, $B$ és ez a metszéspont olyan háromszöget alkotna, amelyben az $A$-nál levő belső szög egyenlő volna a $B$-nél levő külső szöggel; ez pedig lehetetlen.

Tehát $|AC|$ és $|BD|$ a síkot három részre osztja, az $|AC|$ és $|BD|$ közé eső részre és két általa egymástól elválasztott részre. Az $AB$ és $CD$ közök az $|AB|$ és $|CD|$ egyeneseknek a középső síkrészbe eső darabjai. Minthogy a $C$ és $D$ pontok $|AB|$ két különböző oldalán vannak, azért $CD$ metszi az $|AB|$

egyenest; az $M$ metszéspont, mint a középső síkrész pontja, $A$ és $B$ közé esik.

Az $MAC$ és $MBD$ háromszögekben az $M$-nél levő szögek és a velük átellenes oldalak egyenlők, továbbá $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. Tehát 9-nél fogva a két háromszög egymással egybevágó. De akkor csakugyan $MA \equiv MB$.

*b)* (4. ábra.) Egynél több felező pont nem lehet. Jelentse ugyanis $M'$ az $AB$-nek valamely felezőpontját. Kössük össze az *a)* alatti $C$ pontot $M'$-vel és határozuk meg a $CM'$ köznek $M'$-n úl való folytatásán $D'$-t úgy, hogy $M'C \equiv M'D'$.

Az $ABC$ két különböző oldalán kapott $M'AC$ és $M'BD'$ háromszögekben az $M'$-ből kiinduló két oldal és az általuk bezárt szög egyenlő. Tehát a két háromszög egybevágó. Ennélfogva

$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABD' \qquad \text{és} \qquad AC \equiv BD'.$$

($\alpha$) miatt ez csak úgy lehetséges, hogy $D'$ azonos $D$-vel; ennélfogva $CD'$ azonos $CD$-vel és $M'$ azonos $M$-mel.

**11.** Egyenlőszárú háromszögben az alap felezőpontját a szembenlevő szög csúcsával összekötő egyenes ezt a szöget felezi.

Fordítva:

**12.** Egyenlőszárú háromszögben az alappal szembenlevő szög csúcsán keresztül vont egyenes e szögnek belsejét csak úgy felezheti, ha keresztülmegy az alap felezőpontján.

Minthogy bármely szöget mint valamely egyenlőszárú háromszögnek az alappal szembenlevő szögét foghatjuk fel, azért bármely szög belsejét egy és csak egy egyenes felezi.

*A derékszög fogalma.* Az olyan szöget, amely egyenlő a mellékszögével, *derékszögnek* nevezzük. Derékszöget alkotó félegyenesekről azt mondjuk, hogy egymásra *merőlegesek.* A «merőleges» elnevezést a derékszög szárairól átvisszük azokra az egyenesekre is, amelyeken e szárak vannak, továbbá ezen egyenesen levő közökre is. A merőlegesség jele $\perp$.

**13.** Egyenlőszárú háromszög alapjának felezőpontját a szembenlevő csúccsal összekötő egyenes merőleges az alapra.

**14.** Valamennyi derékszög egymással egyenlő.

*Az egybevágóság általános fogalma.* Az $A, B, C, \ldots, M, N$ és $A', B', C', \ldots, M', N'$ pontok egymással *egybevágó* idomokat alkotnak, ha rendre úgy felelnek meg egymásnak, hogy

1. ha $P$ és $P'$, továbbá $Q$ és $Q'$ megfelelő pontok, akkor a $PQ$ és $P'Q'$ közök egybevágók,

2. ha $P$ és $P'$, továbbá $Q$ és $Q'$, végre $R$ és $R'$ megfelelő pontok, akkor $\measuredangle PQR$ és $\measuredangle P'Q'R'$ egymással egybevágó.

Jelekben ezt így fejezzük ki: $(A, B, C, \ldots, M, N) \equiv (A', B', C', \ldots, M', N')$.

**15.** Ha két egybevágó idom egyikében $P, Q, R$ egy egyenesre esnek, akkor a megfelelő $P', Q', R'$ pontok szintén egy egyenesbe esnek. E két egyenest egymás megfelelőjének mondjuk.

**16.** Ha az egyik idomban egy egyenes $P, Q, R$ pontjai közül $Q$ a $P$ *és* $R$ *között* van, akkor a megfelelő egyenesen is $Q'$ a $P'$ és $R'$ között van.

**17.** Ha az egyik idomban $P$ és $Q$ az $u$ egyenes ugyanazon oldalán van, akkor $P'$ és $Q'$ is az $u$-nak megfelelő $u'$ egyenes ugyanazon oldalán van.

**18.** Ha $(A, B, \ldots, M) \equiv (A', B', \ldots, M')$, akkor a sík bármely $P$ pontjához található olyan $P'$ pont, hogy

$$(A, B, \ldots, M, P) \equiv (A', B', \ldots, M', P').$$

Ha az $(A, B, \ldots M)$ idomban van legalább három olyan pont, mely nem esik egy egyenesbe, akkor $P$-hez csak egy ilyen $P'$ található.

## Tükrözés.

**19.** Adott $u$ egyenesre bármely kivüle adott $P$ pontból egy és csak egy merőleges bocsátható; ezen egy és csak egy olyan $P_1$ található, hogy $u$ a $PP_1$-et felezi.

*Bebizonyítás.* (5. ábra) *a)* $P$-ből az $u$-ra egynél több merőleges nem bocsátható. Ha ugyanis két merőlegest bocsáthatnánk s ezek talppontjai $M$ és $O$ volnának, akkor $OMP$ háromszögben az $M$-nél levő belső szög egyenlő volna az $O$-nál levő külső szöggel, ami lehetetlen.

A III 1$a$ axioma alapján egyszersmind nyilvánvaló, hogy egy $P$-ből $u$-ra bocsátott merőlegesnek az $M$ talpponton túl való folytatásán nem lehet két oly $P_1$ pont, amelyre $MP \equiv MP_1$.

*b)* (5. ábra.) $P$-ből $u$-ra mindig bocsáthatunk merőlegest és azon mindig van a követelésünknek megfelelő pont.

Vegyünk fel ugyanis $u$-n tetszés szerint egy $O$ pontot; $u$-nak $O$-ból kiinduló felei legyenek $h$ és $k$. Az $u$-nak $P$-től elfordult oldalán válasszuk $P_1$-et úgy, hogy

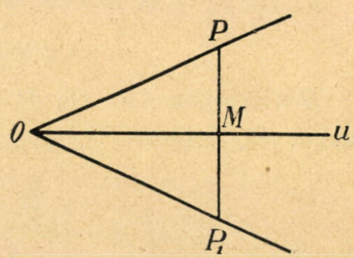
$$\sphericalangle (OP, h) \equiv \sphericalangle (OP_1, h),$$

tehát egyszersmind

$$\sphericalangle (OP, k) \equiv \sphericalangle (OP_1, k),$$

továbbá

$$OP = OP_1.$$



5. ábra.

A $PP_1$-nek $u$-val való metszéspontja legyen $M$.

Ha (úgy mint az ábrában) $OP$ és $OP_1$ nem esik egy egyenesbe, akkor $u$ a $POP_1$ egyenlőszárú háromszögben a $PP_1$ alappal szembenlevő szöget felezi, azért valóban

$$PP_1 \perp u \quad \text{és} \quad MP \equiv MP_1.$$

Ha pedig $OP$ és $OP_1$ egy egyenesben van és ennélfogva $M$ azonos $O$-val, akkor $\sphericalangle (MP, h)$ egyenlő a mellékszögével, tehát megint $PP_1 \perp u$. Továbbá a szerkesztésnél fogva

$$MP \equiv OP \equiv OP_1 \equiv MP_1.$$

*A tükrözés fogalma.* Ha $P$ és $P_1$ egy $u$ egyenes két különböző oldalán úgy van választva, hogy $PP_1 \perp u$, továbbá $PP_1$-nek és $u$-nak $M$ metszéspontja felezi $PP_1$-et, akkor azt mondjuk, hogy $P$ és $P_1$ az $u$ *tengelyre* vonatkozólag egymásnak *tükörképe.*

Az $u$ tengelyen levő pontnak tükörképén önmagát értjük.

A mondottak értelmében a sík minden $P$ pontjának $u$-ra vonatkozólag egy és csak egy tükörképe van.

**20.** Ha az $A, B, \ldots P$ pontoknak az $u$ tengelyre vonatkozó tükörképei rendre $A_1, B_1, \ldots, P_1$, akkor

$$(A, B, \ldots, P) \equiv (A_1, B_1, \ldots, P_1).$$

Vagyis :

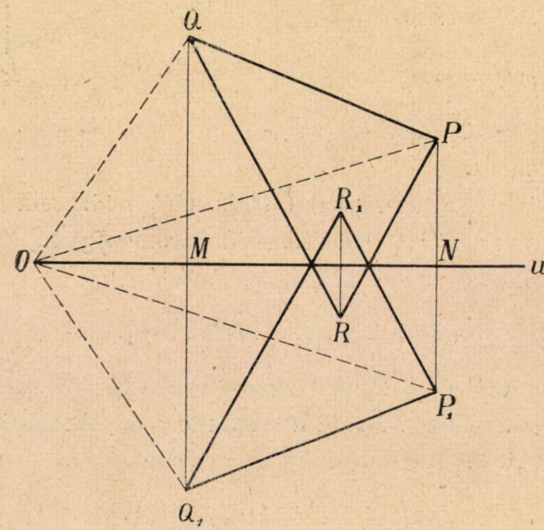
*a)* Ha $P$ és $Q$ egymástól különböző pontok, akkor

$$PQ \equiv P_1Q_1,$$

*b)* Ha $P, Q, R$ nincsenek egy egyenesen, akkor

$$\sphericalangle PQR \equiv \sphericalangle P_1Q_1R_1.$$

*Bebizonyítás. a)* Ha $P$ és $Q$ a tükrözés tengelyén vannak, akkor $PQ$ azonos $P_1Q_1$-gyel, tehát csakugyan $PQ \equiv P_1Q_1$.




6. ábra.

Ha a közt határoló pontok közül $P$ nincs a tükrözés tengelyén, $u$-n, a másik azonban $u$-nak valamely $O$ pontja, akkor a $P_1$ létezésének bebizonyításánál $P_1$-et épen úgy határoztuk meg, hogy $OP_1$ az $OP$-vel egyenlő legyen.

(6. ábra.) Ha végre $P$ és $Q$ közül egyik sincsen a tükrözés

tengelyén, $u$-n, akkor jelentse $O$ a tengelynek valamely tetszésszerinti pontját. A tükörképek létezésének bebizonyításánál mondottak értelmében

$$OP = OP_1,\ OQ = OQ_1,$$

továbbá

$$\sphericalangle MOP = \sphericalangle MOP_1 \text{ és } \sphericalangle NOQ \equiv \sphericalangle NOQ_1,$$

tehát a **6.** tételnél fogva egyszersmind

$$\sphericalangle POQ \equiv \sphericalangle P_1OQ_1.$$

Ennélfogva $\triangle POQ \equiv \triangle P_1OQ_1$, tehát valóban $PQ \equiv P_1Q_1$.

*b)* (6. ábra.) A $PQR$ és $P_1Q_1R_1$ háromszögek egybevágók, mert megfelelő oldalaik egyenlők. Tehát

$$\sphericalangle PQR \equiv \sphericalangle P_1Q_1R_1.$$

A bebizonyított tétel értelmében egy $s$ egyenes pontjainak tükörképei egy egyenesen vannak, melyet $s$ *tükörképének* mondunk.

**21.** Két különböző $P$ és $P_1$ ponthoz egy és csak egy olyan $u$ tengely található, amelyre vonatkozólag e két pont egymásnak tükörképe. Ez a tengely a $PP_1$ felező pontján keresztül $|PP_1|$-re merőlegesen vont egyenes.

Ez a tétel a tükrözés fogalmából nyilvánvaló.

**22.** Egy $O$ pontból kiinduló két $h$ és $h_1$ félegyenes egy és csak egy tükrözésnél lesz egymásnak tükörképe.

*a)* Ha $h$ és $h_1$ azonos egymással, akkor e tükrözés tengelye az a $\bar{h}$ egyenes, amelyen $h$ és $h_1$ vannak.

*b)* Ha $h$ és $h_1$ egy $\bar{h}$ egyenesnek két fele, akkor e tükrözés tengelye az $O$-ban $\bar{h}$-ra merőlegesen húzott egyenes.

*c)* Ha $h$ és $h_1$ két különböző egyenesen van, akkor e tükrözés tengelye $\sphericalangle (h, h_1)$ felezője.

*Bebizonyítás.* Legyen $h$-n és $h_1$-en $OA \equiv OA_1$. Követelésünknek az a tükrözés felel meg és csak az, amelynél $O$ önmagának, $A$ és $A_1$ pedig egymásnak tükörképe. Ennek pedig mind a három esetben a mondott egyenes a tengelye.

### IV. A párhuzamosság axiomája.

IV. *A sík bármely u egyeneséhez a síknak bármely olyan A pontján keresztül, amely nincsen u-n, legfeljebb egy olyan egyenes vonható, amely u-t nem metszi.*

Hogy ilyen egyenes van, az már az előbbi axiomákból következik. (L. a **10**. tétel bebizonyításának *a)* részét.) Ezt az egyenest az $A$-n keresztül $u$-hoz vont *párhuzamosnak* nevezzük.

### V. A folytonosság axiomái.

A folytonosság követelményét HILBERT két axiomába foglalja. A tárgyalandó szerkesztések tőlük függetlenek.

### IV'. Az elpattanás axiomája.

Ez az öt axioma-csoport jellemzi az EUKLIDES-féle sikot. Ha a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle sikot akarjuk megkapni, akkor **IV**-et más axiomával kell pótolni. HILBERT (idézett függelékében) erre a következő axiomát választotta:

**IV'**. *Jelentse u a síknak tetszésszerinti egyenesét, A pedig a síknak olyan pontját, amely nincsen u-n. Akkor A-ból mindig két (nem egy egyenesbe eső) az u-tól* ***elpattanó***[1] *félegyenes indul ki, vagyis két olyan h és k félegyenes, amely u-t nem metszi, míg az A-ból kiinduló és* $\measuredangle$ *(h, k) belsejébe eső félegyenesek rendre metszik u-t.*

## *B)* Az I—IV axioma-csoport alapján megoldható szerkesztési feladatok.

Az **I—IV** alatti axiomák közül minket különösen azok érdekelnek, amelyeknek tartalma abban áll, hogy *bizonyos feladatok* (megfelelő segédeszközök birtokában) *mindig megoldhatók.*

---

[1] E SZÁSZ KÁROLYtól, BOLYAI JÁNOS barátjától eredő, szemléletes kifejezést HILBERT nem használja.

Az *illeszkedés* axiomái a következő két feladat megoldhatóságát követelik:

$\alpha_1$ *feladat.* Két pontot egyenes vonallal összekötni.

$\alpha_2$ *feladat.* Két egymást metsző egyenes metszőpontját meghatározni.

A *rendezés* axiomái nem tartalmaznak új feladatot.

Az *egybevágóság* axiomái közül **III 1** *a* és **III 4** *a* értelmében mindig megoldható a következő

$\beta$ és $\gamma$ *feladat.* Adott köznek, illetve adott szögnek (az idézett axiomákban részletezett feltételeknek megfelelő) átrakása.

Végre az EUKLIDES-féle síkban a *párhuzamosság* axiomája értelmében még a következő feladat is mindig megoldható:

$\delta$ *feladat.* Adott ponton keresztül valamely adott egyeneshez párhuzamost vonni.

Más szerkesztési feladatok az **I—IV** alatti axiomákban nem szerepelnek. Tehát azok és csak azok a szerkesztési feladatok oldhatók meg az **I—IV** axiomák alapján, amelyek a felsoroltakra visszavezethetők.

Ami most már a felsorolt feladatokat illeti, $\alpha_1$ és $\alpha_2$ megoldására a *vonalzó* szolgál. A $\gamma$ és $\delta$ feladatokról HILBERT kimutatta, hogy visszavezethetők $\alpha_1$, $\alpha_2$ és $\beta$-ra. Tehát az olyan szerkesztések végrehajtására, amelyek az **I—IV** alapján megoldható feladatoknál felmerülnek, a vonalzón kívül még csak olyan eszköz kell, amellyel bármely köz bármely félegyenesre annak kiindulópontjából felrakható (*mérőkörző*, Streckenübertrager).

Sőt még további redukció is lehetséges. Ugyanis — KŐNIG GYULA buzdítására — e sorok írója $\beta$ megoldására, vagyis *bármely* köz felrakására olyan szerkesztést keresett és talált, amelyhez vonalzó mellett csak olyan eszköz kell, amely pusztán *egy*, mindenkorra megszabott *alapköznek* felrakására való (*alapmérték*, étalon, Eichmass).[1]

---

[1] Közölve a Mathematische Annalen 55. kötetében (1902) és HILBERT művének azóta megjelent kiadásaiban.

Azokra a szerkesztésekre, amelyeket HILBERT a $\gamma$ és $\delta$ feladatokra adott, sőt $\beta$ említett redukciójára is jellemző, hogy rendre feltételezik a *párhuzamosság* axiomáját, holott a *feladatok* közül csak $\delta$ tételezi fel ezt az axiomát. A $\beta$-ra és $\gamma$-ra adott megoldások tehát idegenszerű, oda nem illő elemet tartalmaznak; azért, hogy mást ne említsünk, e megoldások a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometriában nem használhatók, holott maguk a feladatok ott is felmerülnek. Hogy ott is használható szerkesztéseket kapjunk, a párhuzamosság axiomájától független megoldások szükségesek.

A szerkesztések elméletében érzett ezt a hézagot töltik be azok a szerkesztések, amelyeket HJELMSLEV a köz és a szög átrakására talált, mert

1. szintén csak vonalzó és alapmérték használatát kívánják,
2. pusztán az I—III alatti axiomákra (és ezekből levezethető tételekre) támaszkodnak.

Minthogy az I—III alatti axiomák csak az $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta$ és $\gamma$ feladatok megoldását követelik, azért HJELMSLEV vizsgálódásai alapján kimondhatjuk, hogy bármely olyan geometriában, amelyben az I—III alatti axiomák érvényesek, azok a szerkesztési feladatok, amelyek csak ezeken az axiomákon alapulnak, pusztán *vonalzóval* és *alapmértékkel* megoldhatók.

Minthogy HJELMSLEV csak két igen primitív eszközt használ és pusztán az I—III alatti axiomákra támaszkodik, természetesen szerkesztései körülményesek.[1]

[1] Az EUKLIDES-féle síkban az alapmérték még primitívebb eszközzel pótolható, amellyel az *alapköz* csak *egy*, mindenkorra megszabott pontból rakható fel az onnan kiinduló félegyenesekre. VAHLEN, *Konstruktionen und Aproximationen.* Leipzig, 1911 (59. lap).

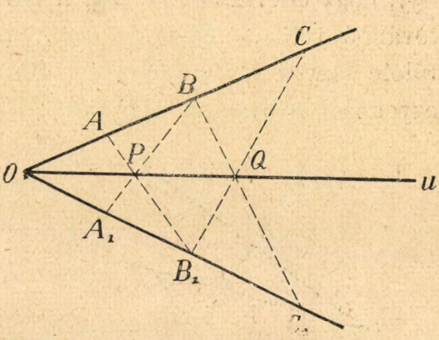
Nem pótolható-e az *alapmérték* a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle síkban is primitívebb eszközzel?

## C) Hjelmslev vonalzóval és alapmértékkel végzett szerkesztései.

A $\beta$ és $\gamma$ feladatok előtt más, magukban is figyelemreméltó szerkesztési feladatokat kell vonalzóval és alapmértékkel megoldanunk. Magát $\beta$ és $\gamma$ megoldását azután ezekre a feladatokra fogjuk visszavezetni.

1*a feladat. Adott szög felezése.*

*Szerkesztés.* (7. ábra.) Mindegyik szárra az $O$ csúcsból kiindulva kétszer egymásután felrakjuk az *alapmértéket.* Ha most már $OA \equiv AB \equiv OA_1 \equiv A_1B_1 \equiv$ alapköz, akkor $A$-t összekötjük $B_1$-gyel, $B$-t összekötjük $A_1$-gyel, továbbá meghatározzuk $|AB_1|$ és $|BA_1|$ metszéspontját, $P$-t. $|OP|$ a keresett szögfelező.



7. ábra.

*Bebizonyítás.* Lényegében azt az $u$ tengelyt keressük, amelyre a szárak egymás tükörképei. A szóbanforgó tükrözésnél $A$ és $A_1$, $B$ és $B_1$, $|AB_1|$ és $|A_1B|$ egymás tükörképei. $|AB_1|$ és $u$ metszéspontja önmagának tükörképe, tehát egyszersmind rajta van $|AB_1|$-nek $|A_1B|$ tükörképén. Ez a pont tehát nem lehet más mint az $|AB_1|$ és $|A_1B|$ egyenesek $P$ metszéspontja. Evvel megvan $u$ egy pontja.

Másrészt $O$ is a tengelyek pontja. Tehát $u$ valóban az $O$ és $P$ pontok által meghatározott egyenes.

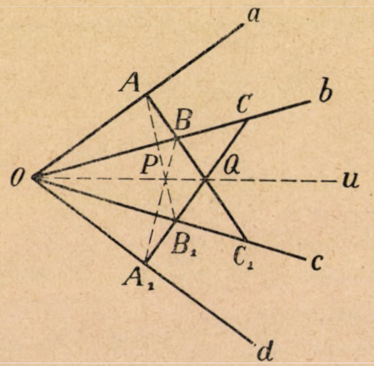
1*b feladat. Egy szög egyik szárán adott OC köz átrakása a másik szárra.*

*Szerkesztés.* (7. ábra.) A szöget az előbb leírt módon felezzük. Azután $C$-t $B_1$-ből $u$-ra, az így kapott $Q$ pontot pedig $B$-ből $h_1$-re vetítjük. Így adódik $h_1$-en az a $C_1$ pont, amelyre $OC \equiv OC_1$.

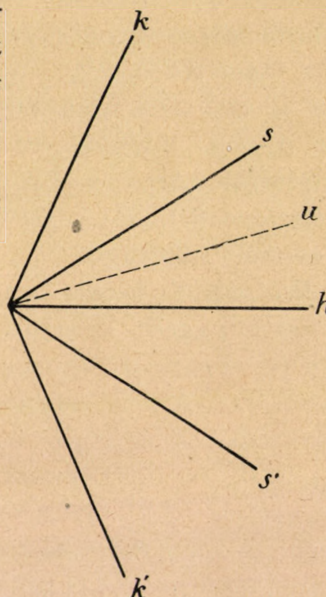
*Bebizonyítás.* Lényegében a $C$ pontnak $u$-ra vonatkozó tükörképét keressük. A $|B_1C|$ egyenes $B_1$ és $Q$ pontjainak tükörképei $B$ és $Q$. Tehát $|BQ|$ és $h_1$ metszéspontja adja meg $C_1$-nek keresett tükörképét.

**2.** *feladat. Legyen adva egy $O$ pontból kiinduló három félegyenes $a, b, c$, még pedig úgy, hogy $b$ az $\sphericalangle (a, c)$ belsejébe essék. Meghatározandó $a$-nak a $\sphericalangle (b, c)$-t felező $u$ egyenesre vonatkozó $d$ tükörképe.*

*Szerkesztés.* (8. ábra.) Válasszuk $a$-n $A$-t, $c$-n $C_1$-et tetszés szerint. Vetítsük $C_1$-t az $A$-ból $b$-re és $u$-ra, vetületei legyenek $B$ és $Q$. Azután ismeretes módon határozzuk meg $c$-n a $B_1$-et és $b$-n a $C$-t úgy, hogy $OB_1 \equiv OB$ és $OC_1 \equiv OC$; továbbá vetítsük $B_1$-et az $u$-ra, vetülete legyen $P$. A $|PB|$ és $|B_1C|$ egyenesek nyilván az $|AB_1|$ és $|AC_1|$




8. ábra.




9. ábra.

egyeneseknek $u$-ra vonatkozó tükörképei, tehát metszéspontjuk megadja $A$-nak $u$-ra vonatkozó tükörképét. Az $O$-ból $A_1$ felé vont félegyenes lesz $d$.

**3.** *feladat. Meghatározandó adott $(h, k)$ szög $k$ szárának $h$-ra mint tengelyre vonatkozó tükörképe.*

*Szerkesztés.* (9. ábra.) Határozzuk meg az adott $(h, k)$ szögnek $s$ felezőjét, továbbá $(h, s)$ szögnek $u$ felezőjét. Ha most meghatározzuk $k$-nak $u$-ra vonatkozó tükörképét (**2.** feladat), akkor ez lesz $s$-nek $h$-ra vonatkozó $s'$ tükörképe. Minthogy $h$ a $(s, s')$ szögnek felezője, azért már tudjuk $k$-nak a $h$-ra vonatkozó körképét meghatározni.

**4.** *feladat. Adott P pontnak adott egyenesre vonatkozó tükörképét meghatározni,*

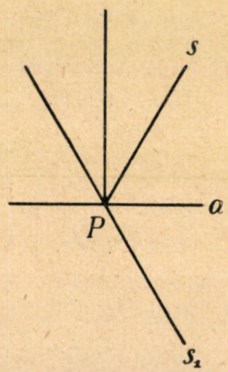
*Szerkesztés.* A **19**. tétel bebizonyításában leírt szerkesztésnek minden lépését már tudjuk vonalzóval és alapmértékkel elvégezni.

**5.** *feladat. Adott egyenesre kívüle adott pontból merőlegest bocsátani.*

Az előbbi feladattal szintén meg van oldva.

**6.** *feladat. Adott egyenesre ennek adott P pontjában merőlegest emelni.*

*Szerkesztés.* (10. ábra.) Vonjunk $P$-ből egy $s$ félegyenest és határozzuk meg az adott $a$ egyenesre vonatkozó $s_1$ tükörképét. Az $(s, s_1)$ szög mellék szögének felezője lesz a keresett merőleges.



10. ábra.

**7.** *feladat. Adott AB közt felezni.*

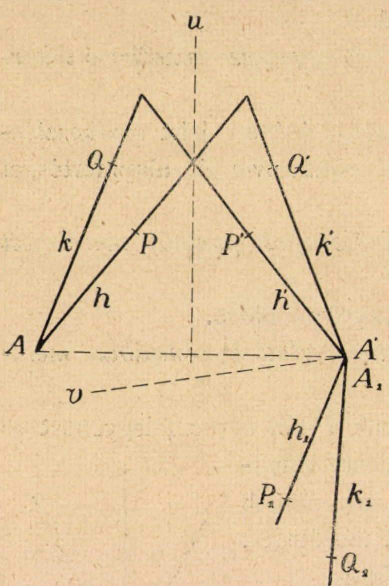
*Szerkesztés.* Emeljünk $A$-ban és $B$-ben merőlegest $AB$-re. Az $|AB|$ két különböző oldalán rakjuk fel az *alapegységgel* egyenlő $AC$ és $BD$ közöket. A $|CD|$ és $|AB|$ egyenesek $M$ metszéspontja lesz $AB$ keresett felezőpontja.

*Bebizonyítás.* A szerkesztés olyan speciális esete a **10**. tétel bebizonyításában *a)* alatt leírt szerkesztésnek, amelynek minden lépését már tudjuk vonalzóval és egységmértékkel elvégezni.

*β feladat. Adott közt adott pontból kiinduló adott félegyenesre felrakni.*

*Szerkesztés.* (11. ábra.) Azt az $A$-ból kiinduló félegyenest, amelyen az adott $AP$ köz van, jelöljük $h$-val. Azt az $A_1$-ből kiinduló félegyenest, amelyen $AP$-vel egyenlő $A_1P_1$ közt akarunk szerkeszteni, jelöljük $h_1$-gyel. Az $A_1$ pontot jelöljük másképpen $A'$-vel is.

Húzzuk meg $AA'$ felező pontján keresztül a reá merőleges $u$ egyenest. Az $u$ tengelyre vonatkozó tükrözésnél $A$-nak tükörképe $A'$; $P$ tükörképét jelöljük $P'$-vel, $h$ tükörképét jelöljük $h'$-vel.




11. ábra.

Határozzuk még meg annak a tükrözésnek $v$ tengelyét, amelynél $h'$-nek tükörképe $h_1$ (22. tétel); ez pusztán vonalzóval és alapmértékkel elvégezhető. A $P'$-nek $v$-re vonatkozó tükörképe legyen $P_1$. $P'$ a $h'$ félegyenesen és $P_1$ a $h_1$ félegyenesen úgy van elhelyezve, hogy

$$AP \equiv A'P' \equiv A_1P_1.$$

Tehát a kívánt felrakás valóban pusztán vonalzóval és alapmértékkel sikerült.

*γ feladat. Adott szöget adott pontból kiinduló adott félegyenesnek adott oldalán felrakni.*

*Szerkesztés.* (11. ábra.) Legyen adva $\sphericalangle (h, k)$, vagy más jelöléssel $\sphericalangle (PAQ)$. Ennek felrakását követeljük az $A_1$-ből kiinduló $h_1$ félegyenes egyik oldalán.

Határozzuk meg az imént leírt módon az $u$ és $v$ tengelyeket. $P$-nek és $Q$-nak az $u$-ra vonatkozó tükörképei legyenek $P'$ és $Q'$, ezeknek $v$-re vonatkozó tükörképei pedig $P_1$ és $Q_1$. A két tükrözésnél

$$\sphericalangle PAQ \equiv \sphericalangle P'A'Q' \equiv \sphericalangle P_1A_1Q_1.$$

Ha $\sphericalangle P_1A_1Q_1$ a $h_1$-nek kívánt oldalán van, akkor feladatunk meg van oldva. Ha a szöget $h_1$ másik oldalán akarjuk felrakni, akkor még $\sphericalangle P_1A_1Q_1$-nek a $h_1$-re vonatkozó tükörképét kell meghatározni.

*Kürschák József.*

# VOM PARALLELEN-AXIOM UNABHÄNGIGE KONSTRUKTIONEN.

In der Wiman-Festschrift (Upsala, 1930) hat Herr J. Hjelmslev die in den Hilbertschen Axiomgruppen I—III geforderten Konstruktionen ohne Benützung des Parallelen-Axioms mit Lineal und Eichmass ausgeführt. In Ungarn, das doch ein Wiegenland der von diesem Axiom unabhängigen Geometrie ist, müssen jene interessanten Konstruktionen besondere Würdigung finden. Das soll durch die vorangehende ungarische Arbeit geschehen, welche die Besprechung und die Beweise dieser Konstruktionen enthält.

*Josef Kürschák.*

# A PRIMITIV KÖROSZTÁSI POLYNOM ELEMI ELMÉLETÉHEZ.

Többízben[1] foglalkoztam az

$$F_n(x) = \frac{x^n - 1}{M(\ldots, x^d - 1, \ldots)} \tag{1}$$

formula által adott primitiv körosztási polynomnak (mod. $p^\alpha$), azaz $p^\alpha$ törzsszámhatványmodulus szerint irreducibilis tényezőkre való felbontásával. Ebben a formulában $n$ és $d$ pozitiv egész számok, $d$ átfutja $n$ összes valódi osztóit, $M$ a legkisebb közös többes jele, melyet úgy normálunk, hogy a legmagasabb hatvány együtthatója 1 legyen. A tárgyalás az idézett helyen nem tételezi fel a primitiv körosztási egyenlet irreducibilitásának ismeretét, hanem azt végtelen sok $n$ esetére (nem minden $n$ esetére) a fortiori megadja.

Sőt az is kiviláglik a tárgyalásból, hogy a primitiv körosztási egyenlet gyökének létezését sem kell feltenni, hanem oly testek körében maradhatunk, melyeknek végesszámú eleme[2] van, ha a következő általánosan ismeretes tételt:

$$F_m(x) = \frac{X_0 X_2 \ldots}{X_1 X_3 \ldots}, \tag{2}$$

hol $m$ törzstényezős felbontása

[1] Legutoljára e Lapok XXVI-ik kötetében. Az alapegyenlet elméletéhez 173—182. old. V. ö. Zur Theorie der Fundamentalgleichung. Journal für Mathematik Bd. 149, S. 89—96.

[2] A mai terminológiában: véges test.

$$m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_t^{\alpha_t}, \tag{2*}$$

továbbá

$$X_0 = x^m - 1,\ X_e = \prod_{i_1 \dots i_e} \left(x^{\frac{m}{q_{i_1} \dots q_{i_e}}} - 1\right), \tag{2**}$$

lehet az úgynevezett véges testek tartományában bebizonyítani. Ez azonban könnyen lehetséges. Legyen $r \equiv 1 \pmod{m}$ törzsszám; hogy végtelen sok ilyen van, azt elemi úton (éppen primitív körosztási polynomok felhasználásával) lehet kimutatni. Már most az

$$F_m(x) \equiv 0 \pmod{r},\ X_0 \equiv 0 \pmod{r},\ X_e \equiv 0 \pmod{r} \tag{3}$$

kongruenciák mindegyikének van racionális gyöke, még pedig a gyökök számossága a megfelelő fokszámmal egyenlő. Ha a (2)-nek egy jól ismert bebizonyítását mutatis mutandis alkalmazzuk, kapjuk a

$$F_m(x) \equiv \frac{X_0 X_2 \dots}{X_1 X_3 \dots} \pmod{r} \tag{4}$$

kongruenciát. Ámde $r$-et végtelen sok módon választhatjuk és így a (4) kongruenciából ered a (2) egyenlet, ami bebizonyítandó volt.

*Bauer Mihály.*

# ZUR ELEMENTAREN THEORIE DER PRIMITIVEN KREISTEILUNGSPOLYNOME.

Aus dem § 2 der Arbeit[1] «Zur Theorie der Fundamentalgleichung» geht hervor, dass der Beweis für die eindeutige Zerlegung der fraglichen Polynome $F_n(x) \pmod{p^\alpha}$ in irreduzible Faktoren ganz im Bereiche der endlichen Körper geführt werden kann, wenn der Beweis der bekannten Formel

$$F_m(x) = \frac{X_0 X_2 \dots}{X_1 X_3 \dots}, \tag{2}$$

wo $m$ die Primfaktorenzerlegung

$$m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_t^{\alpha_t} \tag{2*}$$

besitzt und

$$X_0 = x^m - 1,\ X_e = \prod_{i_1 \ldots i_e} \left( x^{\frac{m}{q_{i_1} \ldots q_{i_e}}} - 1 \right) \tag{2**}$$

sind, im Bereiche der endlichen Körper geleistet werden kann.

Das kann man aber leicht erreichen. Es sei $r \equiv 1 \pmod{m}$ eine Primzahl, ganz elementar lässt sich die Existenz von unendlich vielen solchen Primzahlen angeben. Jetzt kann man bekannterweise, weil die Kongruenzen (3) rat. Wurzeln in maximaler Anzahl besitzen,

$$F_m(x) \equiv \frac{X_0 X_2 \ldots}{X_1 X_3 \ldots} \pmod{r} \tag{4}$$

folgern. Da aber $r$ auf unendlich viele Weisen gewählt werden kann, folgt aus der Kongruenz (4) die Gleichung (2).

*Michael Bauer.*

# AZ $x^{n+1} - x^n + p = 0$ EGYENLET GYÖKEIRŐL.

Jelen tanulmány a valós együtthatójú

$$f(x) \equiv x^{n+1} - x^n + p = 0$$

háromtagú egyenlet gyökeinek a complex számsíkon való eloszlásával foglalkozik.

Eredményei — amelyeket a függelékben közölt ábra szemléltet — a fenti typusra hozható

$$F(x) \equiv x^{n+1} + ax^n + b = 0,$$
$$G(x) \equiv x^{n+1} + gx + h = 0$$

egyenletek gyökeloszlásáról is tájékoztatnak, hiszen a megfelelő $x(=) - ax$, ill. $x(=) - \frac{h}{g} \cdot \frac{1}{x}$ transformatiókkal indicalt gyökáthelyezés elemi feladat.

*

1. §. *Első tétel. Az $f(x) = 0$ egyenletnek a realis tengely felett fekvő $z_l = r_l . e^{i\varphi_l}$ gyökeinek argumentumára $(0 < \varphi_l < \pi)$* [1] *a következő egyenlőtlenségkettősök egyike áll fenn:*

$$\frac{2l}{n}\pi < \varphi_l < \frac{2l+1}{n+1}\pi, \qquad ha\ p > \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lambda,$$
$$\left(l = 0, 1, 2, \ldots;\ l < \frac{n}{2}\right)$$

$$\frac{2l}{n}\pi < \varphi_l < \frac{2l+1}{n+1}\pi, \qquad ha\ 0 < p \leqq \lambda,$$
$$\left(l = 1, 2, \ldots;\ l < \frac{n}{2}\right)$$

$$\frac{2l-1}{n}\pi < \varphi_l < \frac{2l}{n+1}\pi, \quad ha\ \ p < 0.$$
$$\left(l = 1, 2, \ldots;\ l < \frac{n+1}{2}\right)$$

---

[1] A complex gyökök szimmetrikus helyzete megengedi, az egyszerűség követelménye pedig indokolja vizsgálatunknak a fenti intervallumra való korlátozását.

*Bizonyítás.*

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $z = r.e^{i\varphi}$ complex szám az $f(x) = 0$ egyenlet gyöke legyen:

$$r^{n+1}.\, e^{(n+1)\,i\varphi} - r^n.\, e^{ni\varphi} + p = 0.$$

Ez a feltétel a realis s az imaginarius részek különválasztásával a következő két — külön-külön szükséges — feltételre esik szét:

$$r^{n+1} \cos{(n+1)}\,\varphi - r^n \cos n\varphi = -p$$

és

$$r^{n+1} \sin{(n+1)}\,\varphi - r^n \sin n\varphi = 0.$$

E két egyenlet négyzetre emelésével s összegezésével, továbbá az utóbbi egyenlet révén, ill. az $f(x).x^{-n-1} = 0$ egyenletre hasonló szellemben nyert (sinusos) összefüggés alapján feltételeink:[1]

$$\psi(r, \varphi) \equiv r^{2n+2} - 2.\cos\varphi.r^{2n+1} + r^{2n} - p^2 = 0, \tag{1}$$

$$r = \frac{\sin n\varphi}{\sin{(n+1)}\,\varphi}, \tag{2}$$

$$r^n = \frac{p.\sin{(n+1)}\,\varphi}{\sin\varphi}. \tag{3}$$

Ha most sg $p = +1$, az $r > 0$ trivialis feltétel (2) és (3) alapján megköveteli, hogy a $\sin\varphi$, $\sin n\varphi$ és $\sin{(n+1)}\,\varphi$ mennyiségek egyidejűleg egyenlő előjelűek legyenek; mivel pedig $0 < \varphi < \pi$, s így $\sin\varphi > 0$,

$$2l\pi < n\varphi < (2l+1)\,\pi \text{ és } 2l\pi < (n+1)\,\varphi < (2l+1)\,\pi,$$

azaz összevonva:

$$\frac{2l}{n}\pi < \varphi < \frac{2l+1}{n+1}\pi \tag{4}$$

$$\left(l = 0, 1, 2 \ldots; \; l < \frac{n}{2}\right).$$

---

[1] L. Gauss: Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen (1850), Werke III. 97. o.

De az $f(x)=0$ egyenletnek két positiv valós gyöke van, ha[1] $0<p\leqq\lambda$ és nincs positiv valós gyöke, ha $p>\lambda$.

Másrészt NEKRASSOFF-nak a trinomikus egyenletek gyökeloszlására vonatkozó eredményeit[2] az $f(x)=0$, sg $p=1$ typusra alkalmazva, ezen egyenlet gyökeinek amplitudójára sorban s egyenként:

$$0<\varphi_0<\frac{2}{n+1}\pi<\varphi_1<\frac{4}{n+1}\pi<\cdots<$$

$$<\frac{2l}{n+1}\pi<\varphi_l<\frac{2l+2}{n+1}\pi<\cdots,\ \text{ha}\ p>\lambda,$$

illetőleg

$$0=\varphi_0<\frac{2}{n+1}\pi<\varphi_1<\frac{4}{n+1}\pi<\cdots<$$

$$<\frac{2l}{n+1}\pi<\varphi_l<\frac{2l+2}{n+1}\pi<\cdots,\ \text{ha}\ 0<p\leqq\lambda.$$

NEKRASSOFF sectortartományai az egész síkot beborítják s azok mindegyikének belsejében egy s csak egy gyök *van*, ha $p>\lambda$ s az első sector gyöke a tartomány szélén (a valós tengelyen) *van*, ha $0<p\leqq\lambda$.

Mivel azonban

$$\frac{2l}{n+1}\pi<\frac{2l}{n}\pi<\frac{2l+1}{n+1}\pi<\frac{2l+2}{n+1}\pi,$$

a (4) alatti szükséges feltétel a NEKRASSOFF-sectorok mindegyikéből kimetsz egy-egy részt, mint amelyekben gyök *lehet*, a megmaradó részben pedig gyök *nincs*, igy tehát a (4) alatti sectorok mindegyikében *van* egy és csak egy gyök, ha $p>\lambda$, s az első sectorban *nincs* complex gyök, a többiben *van* egy és csak egy gyök, ha $0<p\leqq\lambda$.

Ezzel tételünk első s második része bizonyítást nyert.

---

[1] V. ö. GAUSS: loc. cit. 89. o.

[2] NEKRASSOFF: Ueber trinomische Gleichungen. (Mathematische Annalen XXIX. k. (1887), 413. o.)

Ha viszont sg $p = -1$, a (2) és a (3) alatti feltétel megköveteli, hogy

$$\sin\varphi > 0, \ \sin n\varphi < 0, \ \sin(n+1)\varphi < 0$$

legyen, tehát egyidejűleg:

$$(2l-1)\pi < n\varphi < 2l\pi \text{ és } (2l-1)\pi < (n+1)\varphi < 2l\pi,$$

azaz összevonva:

$$\frac{2l-1}{n}\pi < \varphi < \frac{2l}{n+1}\pi \qquad (5)$$

$$\left(l = 1, 2, \ldots; l < \frac{n+1}{2}\right).$$

De a Nekrassoff-féle eredményeknek az $f(x) = 0$, sg $p = -1$ typusra való alkalmazásából s azon elemi tényből, hogy sg $p = -1$ esetében egyenletünknek a Descartes–Harriot-féle jelszabályból folyólag egyetlen positiv valós gyöke van — következik, hogy jelen esetben az $f(x) = 0$ gyökeinek amplitudójára sorban s egyenként:

$$0 = \varphi_0 < \frac{1}{n+1}\pi < \varphi_1 < \frac{3}{n+1}\pi < \cdots <$$

$$< \frac{2l-1}{n+1}\pi < \varphi_l < \frac{2l+1}{n+1}\pi < \cdots$$

Mivel

$$\frac{2l-1}{n+1}\pi < \frac{2l-1}{n}\pi < \frac{2l}{n+1}\pi < \frac{2l+1}{n+1}\pi,$$

a Nekrassoff-féle sectorok mindegyikéből az (5) alatti sectorok egy-egy részt kimetszenek, amiből a sg $p = 1$ esetére alkalmazott módszerhez hasonló elgondolások alapján tételünk harmadik része bebizonyítást nyer.

2. §. Azon tartományösszeg, amelyben az $f(x) = 0$ egyenlet $0 < \varphi < \pi$ amplitudójú gyökei az első tétel szerint elhelyezkednek:

$$\delta < \frac{n+2}{4n+4}\pi, \qquad (n \text{ páros}),$$

illetőleg

$$\delta < \frac{n+1}{4n}\pi, \qquad (n \text{ páratlan}),$$

ha $p > \lambda$; továbbá

$$\delta < \frac{n-2}{4n+4}\pi, \quad (n \text{ páros}),$$

illetőleg

$$\delta < \frac{(n-1)^2}{4n(n+1)}\pi, \quad (n \text{ páratlan}),$$

ha $0 < p \leqq \lambda$; végül

$$\delta < \frac{n+2}{4n+4}\pi, \quad (n \text{ páros}),$$

illetőleg

$$\delta < \frac{(n+3)(n-1)}{4n(n+1)}, \quad (n \text{ páratlan}),$$

ha $p < 0$.

Ezen állításunk két arithmetikai sor összegezése révén könynyen igazolható. Így pl. ha $p > \lambda$ és $n$ páros:

$$\frac{\delta}{\pi} < \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} \left( \frac{2l+1}{n+1} - \frac{2l}{n} \right) = \frac{n+2}{4n+4}.$$

Az $f(x) = 0$ egyenlet *összes* complex gyökeire nyert megengedett amplitudóintervallumok tehát (dimensióban) a $\frac{\pi}{2}$ nyílású sectort töltik ki.

3. §. Az első tételben szereplő amplitudóintervallumok szélessége a $\varphi$, azaz egyben az $l$, növekedtével monoton csökken, mivel

$$\frac{2l+1}{n+1}\pi - \frac{2l}{n}\pi = \frac{n-2l}{n(n+1)}\pi,$$

illetőleg

$$\frac{2l}{n+1}\pi - \frac{2l-1}{n}\pi = \frac{n-2l+1}{n(n+1)}\pi.$$

4. §. A $\operatorname{sg} p = 1$ és a $\operatorname{sg} p = -1$ esetre nyert megengedett sectorok egymást váltva következnek egymás után, mivel

$$\frac{2l}{n+1}\pi < \frac{2l}{n}\pi \quad \text{és} \quad \frac{2l+1}{n+1}\pi < \frac{2l+1}{n}\pi.$$

5. §. *Második tétel. Ha* $z_1 = r_1 e^{i\varphi'}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi''}$ *az* $f(x) = 0$ *két különböző complex gyöke, amelyekre*

$$0 \leqq \varphi' < \varphi'' \leqq \pi,$$

*akkor*

$$r_1 > r_2.$$

*Bizonyítás.*

Legyen

$$f(x) \equiv f_1(x), \text{ ha } p > 0 \text{ és } f(x) \equiv f_2(x), \text{ ha } p < 0;$$

azaz:

$$f_1(x) \equiv x^{n+1} - x^n + |p| = 0 \quad \text{és} \quad f_2(x) \equiv x^{n+1} - x^n - |p| = 0.$$

Az $f_2(x) = 0$ egyenlet positiv valós gyökét jelöljük $x_4$-gyel, az $f_1(x) = 0$ egyenlet két feltételesen $(0 < p \leqq \lambda)$ létező positiv valós gyökeit pedig $x_2$, ill. $x_3$-mal $(x_2 \leqq x_3)$.

A

$$\Phi(x) \equiv f_1(x) . f_2(x) \equiv x^{2n+2} - 2x^{2n+1} + x^{2n} - p^2 = 0$$

egyenlet positiv valós gyökei tehát $x_2$, $x_3$ és $x_4$.

Az

$$\Omega(x) \equiv f_1(-x) . f_2(-x) \equiv x^{2n+2} + 2x^{2n+1} + x^{2n} - p^2 = 0$$

$$(\Omega(x) = (x^{n+1} + x^n + |p|).(x^{n+1} + x^n - |p|))$$

egyenlet positiv valós gyökét jelöljük $x_1$-gyel.

Elemi eszközökkel igazolható, hogy

$$x_1 < x_2 \leqq x_3 < x_4.$$

Az (1) alatti egyenletre közvetlenül belátható, hogy

$$\psi(r, 0) \equiv \Phi(r) \tag{6}$$

és

$$\psi(r, \pi) \equiv \Omega(r). \tag{7}$$

De ugyanazon $r$-re a $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$ feltétel mellett

$$\psi(r, 0) < \psi(r, \varphi_1) < \psi(r, \varphi_2) < \psi(r, \pi), \tag{8}$$

mert

$$\psi(r, 0) - \psi(r, \varphi_1) = 2r^{2n+1}(\cos\varphi_1 - 1) < 0,$$

$$\psi(r, \varphi_1) - \psi(r, \varphi_2) = 2r^{2n+1}(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1) < 0$$

és

$$\psi(r, \varphi_2) - \psi(r, \pi) = 2r^{2n+1}(-1 - \cos\varphi_2) < 0.$$

A $\psi(r, \varphi_1) = 0$ egyenlet gyökei a (8) alatti felismerés szelleméből csak azon intervallumokban lehetnek,[1] amelyekben $\psi(r, \varphi_2) > 0$ és $\psi(r, 0) < 0$, a $\psi(r, \varphi_2) = 0$ egyenlet gyökei pedig csak azokban az intervallumokban helyezkedhetnek el, amelyekben $\psi(r, \varphi_1) < 0$ és $\psi(r, \pi) > 0$.

Amennyiben tehát $\psi(r, \varphi)$ minden $\varphi$ mellett monoton növekvő függvény volna s így a $\psi(r, \varphi) = 0$ egyenletnek csak egy positiv valós gyöke lenne, tételünk máris könnyen igazolódnék.

Kimutatjuk azonban a $\varphi_h = \frac{1}{2(n+1)}\pi$ amplitudóról, hogy minden $(\pi \geqq) \varphi_k \geqq \varphi_h$ érték mellett a $\psi(r, \varphi_k)$ függvény monoton növekvő, miután az $r$ szerinti első differenciálhányadosa positiv, ha $r > 0$.

Ugyanis

$$\frac{d\psi(r, \varphi_k)}{dr} \equiv r^{2n-1}\left[(2n+2)r^2 - 2(2n+1)\cos\varphi_k r + 2n\right],$$

s a szögletes zárójelbeli másodfokú függvény definit positiv, ha csak a discriminansa negativ, azaz (kis átalakítás után)

$$\cos^2\varphi_k < \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2}, \quad \text{vagyis} \quad \operatorname{tg}^2\varphi_k > \frac{1}{4n(n+1)}.$$

De

$$\operatorname{tg}^2\varphi_k \geqq \operatorname{tg}^2\frac{1}{2(n+1)}\pi > \frac{\pi^2}{4(n+1)^2} > \frac{1}{4n(n+1)}$$

a fortiori, miután

$$\pi^2 > 2 \geqq \frac{n+1}{n}.$$

Már most első tételünk értelmében, ha $\operatorname{sg} p = -1$, az $f(x) = 0$ egyenlet minden complex $z = r.e^{i\varphi}$ gyökére $\varphi > \frac{\pi}{n}$, s így $\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{2(n+1)}$ lévén, a (8) alatti felismerésből folyólag

$$x_1 < r_2 < r_1 < (x_2 \leqq x_3) < x_4.$$

---

[1] A következő meggondolásokban alapvető jelentőségű az a tétel, amely szerint a racionális egész függvények gyökei az együtthatóknak folytonos függvényei. (V. ö. pl. WEBER: Lehrbuch der Algebra, I. kötet, 2. kiadás, (Braunschweig, 1898.) 44. §.

Ugyanígy, ha $0 < p \leqq \lambda$, $\frac{2\pi}{n} > \frac{\pi}{2(n+1)}$ lévén

$$x_1 < r_2 < r_1 < x_2 \leqq x_3 < x_4.$$

A $p > \lambda$ esetben pedig az első, azaz a

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{n+1}$$

intervallum kivételével a többi gyök amplitudója biztosan nagyobb, mint $\frac{\pi}{2(n+1)}$, hiszen $\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{2(n+1)}$, a fenti kivételes gyök absolut értéke pedig a $\psi(r, \varphi) = 0$ egyenlet egyetlen gyökével, vagy esetleg három positiv valós gyökének *bármelyikével* azonos is, a (8) szellemében mindenképpen:

$$x_1 < r_2 < r_1 < x_4.$$

Ezzel második tételünk a maga terjedelmében beigazolódott.

6. §. Második tételünkből s az $F(x) = 0$, ill. $G(x) = 0$ egyenletet $f(x) = 0$ typusúvá formáló transformatio jellegéből következik, hogy *az* $\begin{Bmatrix} F(x) = 0 \\ G(x) = 0 \end{Bmatrix}$ *egyenlet gyökeinek absolut értéke amplitudójuk növekedtével monoton csökken, illetőleg növekszik aszerint, amint* $\begin{Bmatrix} \text{sg}\, a = -1 \\ \text{sg}\, g = \text{sg}\, h \end{Bmatrix}$, *ill.* $\begin{Bmatrix} \text{sg}\, a = +1 \\ \text{sg}\, g = -\text{sg}\, h \end{Bmatrix}$.

7. §. Az első és a második tételből, — főleg (8)-ból — valamint a 4., 6. §-ok felismeréseiből könnyen igazolható, hogy a

$$\Phi(x) \equiv x^{2n+2} - 2x^{2n+1} + x^{2n} - p^2 = 0,$$

illetőleg az

$$\Omega(x) \equiv x^{2n+2} + 2x^{2n+1} + x^{2n} - p^2 = 0$$

*négytagú* egyenletek gyökeinek absolut értéke amplitudójuk növekedtével monoton csökken, ill. nő.

8. §. Az első tételből folyólag az $f(x) = 0$ egyenletnek többszörös complex gyöke nincs. Következik ez egyébként abból is, hogy az

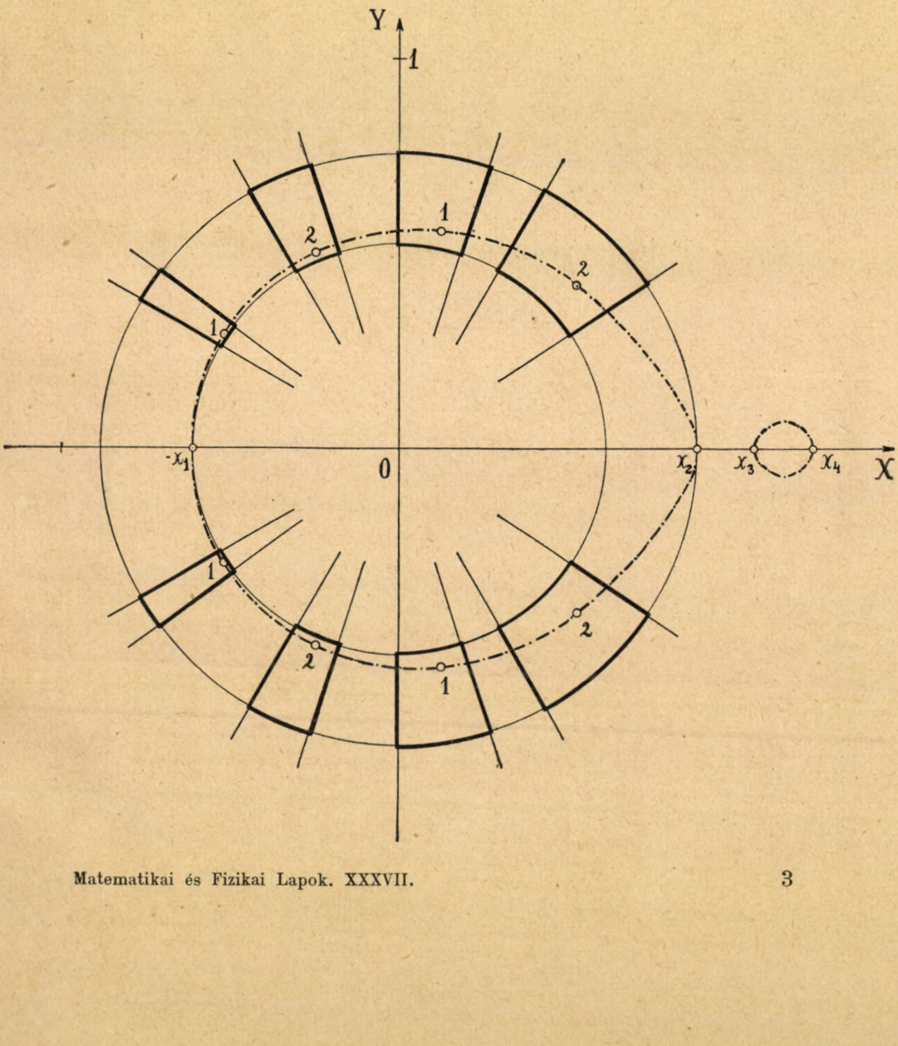
$$f'(x) \equiv (n+1)x^n - nx^{n-1} = 0$$

egyenletnek trivialis [$(n-1)$-szeres] gyöke, $x = 0$, valamint egyetlen nemtrivialis gyöke, $x = \frac{n}{n+1}$, is — valós.

9. §. Az $f(x) = 0$ egyenletnek tiszta képzetes gyöke nincs. Ha ugyanis $x = ci$ ($c \neq 0$ valós) gyöke $f(x)$-nek, akkor

$$c^{n+1} i^{n+1} - c^n i^n + p = 0.$$

Egyenlőségünk baloldalának első két tagja közül — $n$ a 0, 1, 2, 3 számok bármelyikével congruens is modulo 4 — az egyik képzetes. Ez szükségképpen 0, ami a $c \neq 0$ feltétellel incompatibilis.



## Függelék.

A túloldali ábra az

$$f_1(x) \equiv x^6 - x^5 + 0{,}06 = 0,$$
$$f_2(x) \equiv x^6 - x^5 - 0{,}06 = 0$$

egyenletek gyökeinek helyzetét szemlélteti.[1] Az $f_1(x) = 0$ complex gyökeit 1, az $f_2(x) = 0$ complex gyökeit pedig 2 jelzéssel láttuk el. A valós gyökökre nézve meghagytuk a szövegbeli jelzést, tehát $-x_2$ és $x_3$ az $f_1(x)$, $x_4$ és $-x_1$ pedig $f_2(x)$ gyöke.

Az eredményvonallal húzott görbe (polaris) egyenlete

$$\psi(r, \varphi) \equiv r^{12} - 2 \cos \varphi r^{11} + r^{10} - 0{,}0036 = 0.$$

*Huszár Géza.*

# ÜBER DIE WURZELN EINER TRINOMISCHEN GLEICHUNG.

In der vorstehenden Untersuchung wurde die Wurzelverteilung der trinomischen Gleichung

$$x^{n+1} - x^n + p = 0 \qquad (p \text{ reell})$$

erforscht.

Das Hauptresultat bilden folgende Sätze:

1. Für die Argumente $\varphi_l$ der oberhalb der reellen Achse liegenden Wurzeln $z_l = r_l . e^{i\varphi_l}$ $(0 < \varphi_l < \pi)$ gelten die Ungleichungen:

---

[1] A tárgyalt kérdések alkalmazott matematikai hátterére nézve v. ö. a Kereskedelmi Szakoktatás XXXIV. évfolyamának 213. és k. oldalain, ill. XXXVI. évfolyamának 119. és k. oldalain megjelent «A kamatlábfeladat és a Graeffe-, Bernoulli-féle gyökközelítő módszerek», ill. «A kamatlábfeladat s a Waring-formulák» című értekezéseimet.

*a)*

$$\frac{2l}{n}\pi<\varphi_l<\frac{2l+1}{n+1}\pi,\qquad \text{falls } p>\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lambda,$$
$$\left(l=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ l<\frac{n}{2}\right)$$

*b)*

$$\frac{2l}{n}\pi<\varphi_l<\frac{2l+1}{n+1}\pi,\qquad \text{falls } 0<p\leqq\lambda,$$
$$\left(l=1,\ 2,\ldots;\ l<\frac{n}{2}\right)$$

*c)*

$$\frac{2l-1}{n}\pi<\varphi_l<\frac{2l}{n+1}\pi,\quad \text{falls } p<0.$$
$$\left(l=1,\ 2,\ldots;\ l<\frac{n+1}{2}\right)$$

2. Sind

$$z_1=r_1.e^{i\varphi_1},\ z_2=r_2.e^{i\varphi_2}$$

irgend zwei verschiedene Wurzeln, für welche

$$0\leqq\varphi_1<\varphi_2\leqq\pi$$

ist, so besteht die Ungleichung

$$r_1>r_2.$$

*Géza Huszár.*

# A TRINOM EGYENLETRŐL.

A trinom egyenlet gyökeinek argumentum szerinti eloszlására vonatkozóan M. P. NEKRASOFF[1] kimutatta, hogy ha a komplex változó síkját $O$ közös ponttal bíró, $\frac{2\pi}{n}$ nyílású szektorokra osztjuk (hol $n$ az egyenlet fokszáma), melyeknek irányítása az együtthatóktól függ, úgy ezek mindegyike egy gyököt tartalmaz. P. BOHL[2] módszert adott valamely trinom egyenlet adott sugarú, $O$ középpontú körbe eső gyökei számának megállapítására, tehát közvetve a gyökök modulus szerinti szeparálására. A trinom egyenlet gyökei és együtthatói közti függvénytani kapcsolat megállapítását illetőleg alapvetők G. HERGLOTZ[3] vizsgálatai, melyeknél az egyenlethez tartozó RIEMANN-féle felület szerepel, mint lényeges segédeszköz.

További eredményeket tartalmaznak a gyökök eloszlására nézve M. BIERNACKY[4] és HUSZÁR G.[5] idevágó dolgozatai.

A trinom egyenletnek az alábbiakban ismertetendő tárgyalási módja azon az egyszerű észrevételen alapul, hogy egy trinom egyenlet gyökei mindig felfoghatók, mint egy alkalmasan választott, koncentrikus szabályos sokszög-pár csúcspontjaiba helyezett egységtömegek erőterének egyensúlyi helyzetei.

A nevezett erőtér legelemibb szimmetria- és folytonossági tulajdonságainak felhasználásával meghatározhatók olyan szektorok, melyek csupán az együtthatók argumentumaitól függnek,

---

1 M. P. NEKRASOFF: Math. Ann. B. 85 (1887).
2 P. BOHL: Math. Ann. (1914).
3 G. HERGLOTZ: Leipzig. Ber. B. 74 (1922).
4 M. BIERNACKI: Thèse, Cracovie (1928).
5 HUSZÁR G.: L. a megelőző cikket.

mindegyikük egy gyököt tartalmaz és nyílásaik összege $\frac{\pi}{2}$ nagyságrendű, tehát a gyökök argumentumainak az eddigieknél szűkebb elhatárolását adják.

A gyökök modulusaira nézve ismeretes, hogy azok pozitív diszkrimináns esetében két csoportra oszlanak, melyek két, csupán az együtthatók modulusaitól függő, körgyűrűbe esnek. Ezen eredmény továbbfejlesztéseképen sikerült minden esetben oly körgyűrűket meghatározni, melyek szintén csupán az együtthatók modulusaitól függnek s melyek mindegyike egy gyököt tartalmaz.

A gyökök modulusa és az azokat tartalmazó szektor nyílása közti összefüggés felhasználásával az argumentumok és a modulusok szerinti szeparáció összekapcsolható, azaz meghatározhatók körgyűrűszektorok, melyek mindegyike egy gyököt tartalmaz.

A vázolt módszerekkel végül a trinom egyenlet belső gyökei modulusainak felső határa[6] szintén levezethető.

## I.

1. Két trinom egyenletet:

$$f_1(z) = A_1 z^{n+m} + B_1 z^m + C_1 = 0 \qquad (1')$$
$$f_2(z) = A_2 z^{n+m} + B_2 z^m + C_2 = 0 \qquad (1'')$$
($n$ és $m$ rel. prímek)

a következőkben æquivalenseknek mondunk akkor, ha gyökrendszereik egymástól csupán forgatásban vagy tükrözésben különböznek, ha tehát

$$f_1(z) \equiv \text{const. } f_2(e^{i\delta}.z), \text{ vagy } f_1(z) \equiv \text{const. } \bar{f}_2(e^{i\delta}.z),$$

hol $\delta$ reális.

I. *A* (1′, 1″) *trinom egyenletek aequivalenciájának szükséges és elegendő feltételei, hogy*

$$\left|\frac{A_1}{A_2}\right| = \left|\frac{B_1}{B_2}\right| = \left|\frac{C_1}{C_2}\right| \qquad (2)$$

és

$$m(\alpha_1 \pm \alpha_2) - (n+m)(\beta_1 \pm \beta_2) + n(\gamma_1 \pm \gamma_2) \equiv 0 \pmod{2\pi}. \qquad (3)$$

[6] L. Herglotz: l. c.

Ugyanis, ha pl. $f_1(z) \equiv \text{const.}\, f_2(e^{i\vartheta}.z)$, úgy

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} e^{ni\delta} = \frac{C_1}{C_2} e^{(n+m)i\delta}, \tag{4}$$

tehát

$$\alpha_1 - \alpha_2 \equiv \beta_1 - \beta_2 + n\delta \equiv \gamma_1 - \gamma_2 + (n+m)\delta \pmod{2\pi}.$$

Ebből

$$m[(\alpha_1 - \alpha_2) - (\beta_1 - \beta_2)] \equiv n[(\beta_1 - \beta_2) - (\gamma_1 - \gamma_2)] \pmod{2\pi}$$

$$m(\alpha_1 - \alpha_2) - (n+m)(\beta_1 - \beta_2) + n(\gamma_1 - \gamma_2) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

tehát a (2, 3) feltételek szükségesek.

Viszont a (2, 3) feltételek fennállása esetén meghatározható $\delta$ úgy, hogy (4) ki legyen elégítve.

**2.** A

$$\begin{gathered} f(z) = Az^{n+m} + Bz^m + C = 0; \\ A = |A| e^{i\alpha},\ B = |B| e^{i\beta},\ C = |C| e^{i\gamma} \end{gathered} \tag{1}$$

trinom egyenlet a fenti értelemben akkor és csak akkor æquivalens egy valós együtthatós trinom egyenlettel, ha

$$m\alpha - (n+m)\beta + n\gamma \equiv 0 \pmod{\pi}, \tag{5}$$

azaz, ha

$$\frac{A^m C^n}{B^{n+m}} = \text{reális}. \tag{6}$$

Az olyan trinom egyenletet, melyre nézve $\frac{A^m C^n}{B^{n+m}}$ komplex szám, lényegesen komplex trinom egyenletnek fogjuk nevezni.

**3.** A (1′, 1″) trinom egyenletek rezultánsa[7]

$$R[f_1(z), f_2(z)] \div \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}^{n+m} - \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^{m} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^{n}. \tag{7}$$

Ha

$$\begin{aligned} f_1(z) &= |A| e^{i\alpha_1}.z^{n+m} + |B| e^{i\beta_1}.z^m + |C| e^{i\gamma_1} = 0 \\ f_2(z) &= |A| e^{i\alpha_2}.z^{n+m} + |B| e^{i\beta_2}.z^m + |C| e^{i\gamma_2} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

úgy (7)-ből egyszerű számítással nyerjük, hogy

---

[7] Egyszerű számítással adódik pl. a rezultnás BEZOUT-féle alakjából.

$$R[f_1(z),\ f_2(e^{i\delta}z)] \doteq$$
$$|A|^m|C|^n e^{(n+m)\frac{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1+\gamma_2}{2}i} \sin^{n+m}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)-(\alpha_1-\alpha_2)+(n+m)\delta}{2} -$$
$$-(-1)^{n+m}|B|^{n+m} e^{m\frac{\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2}{2}i} \cdot e^{n\frac{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}{2}i} \tag{9}$$
$$\sin^m\frac{(\beta_1-\beta_2)-(\gamma_1-\gamma_2)-m\delta}{2}\sin^n\frac{(\alpha_1-\alpha_2)-(\beta_1-\beta_2)-n\delta}{2}.$$

$R[f_1(z),\ f_2(e^{i\delta}z)]$ eltűnéséhez szükséges tehát, hogy vagy

$$\left.\begin{aligned}(\gamma_1-\gamma_2)-(\alpha_1-\alpha_2)+(n+m)\delta &\equiv 0\\ (\beta_1-\beta_2)-(\gamma_1-\gamma_2)-m\delta &\equiv 0\\ (\alpha_1-\alpha_2)-(\beta_1-\beta_2)-n\delta &\equiv 0\end{aligned}\right\} \pmod{2\pi} \tag{I}$$

tehát

$$m(\alpha_1-\alpha_2)-(n+m)(\beta_1-\beta_2)+n(\gamma_1-\gamma_2)\equiv 0 \pmod{2\pi}; \tag{10'}$$

vagy

$$\frac{\dfrac{|A|^m|C|^n}{(-1)^{n+m}|B|^{n+m}} e^{\frac{m(\alpha_1+\alpha_2)-(n+m)(\beta_1+\beta_2)+n(\gamma_1+\gamma_2)}{2}i} \sin^{n+m}\dfrac{(\gamma_1-\gamma_2)-(\alpha_1-\alpha_2)+(n+m)\delta}{2}}{\sin^m\dfrac{(\beta_1-\beta_2)-(\gamma_1-\gamma_2)-m\delta}{2}\sin^n\dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)-(\beta_1-\beta_2)-n\delta}{2}}=1, \tag{II}$$

tehát

$$m(\alpha_1+\alpha_2)-(n+m)(\beta_1+\beta_2)+n(\gamma_1+\gamma_2)\equiv 0 \pmod{2\pi}. \tag{10''}$$

E szerint:

II. *A* (8) *trinom egyenleteknek, melyeknek megfelelő együtthatói egyenlő modulussal bírnak, akkor és csak akkor vannak egyenlő modulusú gyökeik, ha a két trinom egyenlet egymással aequivalens.*

**4.** Ha

$$f_1(z)=f_2(z)=f(z)=Az^{n+m}+Bz^m+C=0,$$

úgy (9) szerint

$$R[f(z),\ f(e^{i\delta}z)] \doteq A^mC^n\sin^{n+m}\frac{(n+m)\delta}{2} -$$
$$-(-1)^{n+m}B^{n+m}\sin^m\frac{m\delta}{2}\sin^n\frac{n\delta}{2} \tag{11}$$

$R\,[f(z),\ f(e^{i\delta}z)]$ eltűnéséhez, $\delta \neq 0$ mellett, szükséges hogy

$$\frac{A^m C^n}{B^{n+m}} = \text{reális}, \tag{6}$$

azaz

$$m\alpha - (n+m)\,\beta + n\gamma \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi). \tag{5}$$

E szerint:

III. *Valamely trinom egyenletnek akkor és csak akkor vannak egyenlő modulusú gyökei, ha a trinom egyenlet valós együtthatós trinom egyenlettel aequivalens.*

**5.** Az

$$f(z) = Az^{n+m} + Bz^m + C = 0 \tag{1}$$

trinom egyenlet $D\,[f(z)]$ diszkriminánsát nyerjük, ha (11)-ben $\delta$-t 0-hoz konvergáltatjuk:

$$\frac{R\,[f(z),\ f(e^{i\delta}z)]}{\delta^{n+m}} \rightarrow D\,[f(z)] \doteqdot \tag{12}$$
$$\doteqdot (n+m)^{n+m} A^m C^n - (-1)^{n+m}\, n^n m^m B^{n+m}$$

$D\,[f(z)]$ eltűnéséhez szükséges tehát, hogy [8]

$$(-1)^{n+m}\frac{A^m C^n}{B^{n+m}} = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}. \tag{13}$$

E szerint:

IV. *Valamely trinom egyenletnek akkor és csak akkor van többszörös gyöke, ha a trinom egyenlet egy valós együtthatós trinom egyenlettel aequivalens, továbbá együtthatói a* (13) *relációt kielégítik.*

## II.

**6.** Ha a $z^n + v = 0$ egyenlet

$$v_\nu = |v|^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{\arg v + (2\nu+1)\pi}{n}}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

gyökpontjaiba egységtömegeket helyezünk, melyek a távolsággal

---

[8] L. C. F. Gauss: Werke, Bd. III.

fordítottan arányos erővel hatnak, úgy az $n$ tömegponttól származó erők eredője a $z$ pontban:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\bar{z}-\bar{v}_\nu} = \frac{n\bar{z}^{n-1}}{\bar{z}^n+\bar{v}}. \tag{14}$$

Hasonlóképen a $z^{n+m}+w=0$ egyenlet gyökpontjaiba helyezett egységtömegektől származó erők eredője

$$\frac{(n+m)\,\bar{z}^{n+m-1}}{\bar{z}^{n+m}+\bar{w}}.$$

Tehát a két koncentrikus, szabályos sokszög csúcspontjaiba helyezett egységtömegek erőterének egyensúlyi helyzetei a

$$\frac{nz^{n-1}}{z^n+v}+\frac{(n+m)\,z^{n+m-1}}{z^{n+m}+w}=0 \tag{15}$$

egyenlet, azaz — a $z=0$ triviális egyensúlyi helyzettől eltekintve — a

$$(2n+m)\,z^{n+m}+(n+m)\,vz^m+nw=0 \tag{16}$$

trinom egyenlet gyökpontjaiba esnek.

7. Viszont bármely

$$\begin{gathered} f(z)=Az^{n+m}+Bz^m+C=0; \\ A=|A|e^{i\alpha},\ B=|B|e^{i\beta},\ C=|C|e^{i\gamma} \end{gathered} \tag{1}$$

trinom egyenlet az

$$\frac{A}{2n+m}\left\{(2n+m)\,z^{n+m}+(n+m)\frac{(2n+m)B}{(n+m)A}z^m+n\frac{(2n+m)C}{nA}\right\}=0 \tag{17}$$

alakra hozható, tehát:

V. *A* (1) *trinom egyenlet meghatároz két koncentrikus szabályos sokszöget, $P_{n+m}$ és $P_n$-et*

$$\begin{aligned} &P_n \text{ csúcspontjai: } \left(\frac{2n+m}{n+m}\left|\frac{B}{A}\right|\right)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\beta-\alpha+(2\nu+1)\pi}{n}i}; \\ &\qquad (\nu=1,2,\ldots n) \\ &P_{n+m} \text{ csúcspontjai: } \left(\frac{2n+m}{n}\left|\frac{C}{A}\right|\right)^{\frac{1}{n+m}} e^{\frac{\gamma-\alpha+(2\lambda+1)\pi}{n+m}i}; \\ &\qquad (\lambda=1,2,\ldots n+m) \end{aligned} \tag{18}$$

*úgy, hogy az ezek csúcspontjaiba helyezett egységtömegek erőterének egyensúlyi helyzetei a* (1) *trinom egyenlet gyökeit adják.* A sokszögek méretei nyilván csupán az együtthatók modulusaitól, irányításaik csupán az együtthatók argumentumaitól függnek.

Továbbá (4)-ből közvetlenül látható, hogy æquivalens trinom egyenletekhez kongruens vagy tükrözve kongruens sokszögpárok tartoznak.

8. Az eredeti $f(z)=0$ trinom egyenlethez konjugált reciprok $z^{n+m}\bar{f}\left(\frac{1}{z}\right)=0$[9] trinom egyenlet előállítható analog módon:

$$
\begin{aligned}
z^{n+m}\bar{f}\left(\frac{1}{z}\right) &= \bar{C}z^{n+m}+\bar{B}z^{n}+\bar{A} = \frac{\bar{C}}{2m+n}\Big\{(2m+n)\,z^{n+m}+ \\
&\quad + (n+m)\frac{(2m+n)\,\bar{B}}{(n+m)\,\bar{C}}\,z^{n}+m\frac{(2m+n)\,\bar{A}}{m\bar{C}}\Big\}=0,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

tehát a

$$
\begin{gathered}
\bar{C}z^{n+m}+\bar{B}z^{n}+\bar{A}=0\,; \\
\bar{A}=|A|\,e^{-i\alpha},\quad \bar{B}=|B|\,e^{-i\beta},\quad \bar{C}=|C|\,e^{-i\gamma}
\end{gathered}
\tag{20}
$$

konjugált reciprok egyenlethez tartozó szabályos sokszögek:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{P}_{m}\,; \quad \text{csúcspontjai:}\ \left(\frac{2m+n}{m+n}\left|\frac{B}{C}\right|\right)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{\gamma-\beta+(2\mu+1)\pi}{m}i}\,; \\
&\qquad\qquad (\mu=1,2,\ldots m) \\
&\mathfrak{P}_{n+m}\,; \ \text{csúcspontjai:}\ \left(\frac{2m+n}{m}\left|\frac{A}{C}\right|\right)^{\frac{1}{n+m}} e^{\frac{\gamma-\alpha+(2\lambda+1)\pi}{n+m}i}. \\
&\qquad\qquad (\lambda=1,2,\ldots n+m)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

E szerint az eredeti egyenlethez tartozó $P_{n+m}$ és a konjugált reciprok egyenlethez tartozó $\mathfrak{P}_{n+m}$ sokszögek félsugarai ($O$-ból a csúcspontjaikhoz vonuló egyenesek) közösek.

9. Valamely szabályos sokszög csúcspontjaiba helyezett tömegek erőterének csupán a következő — alább bizonyitandó — tulajdonságát fogjuk a továbbiakban felhasználni:

---

[9] Tudvalevőleg a konjugált reciprok egyenlet gyökei az eredeti egyenlet gyökeinek az egységkörre vonatkozó tükörképei.

Az erőtér eredője a síknak azon és csak azon pontjaiban radiális, melyek a szabályos sokszög valamely szimmetriatengelyébe esnek.

Az erőtér ezen tulajdonsága nyilván független a szabályos sokszög méretétől és helyzetétől. Helyezzünk ennek megfelelően egységtömegeket az $\varepsilon_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $(k = 1, 2 \ldots n)$ $n$-edik egységgyökpontokba. Az ezektől kifejtett erők rezultánsa a $z$ pontban

$$R(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\bar{z} - \bar{\varepsilon}_k} = \frac{n\bar{z}^{n-1}}{\bar{z}^n - 1}.$$

Ezen eredő a $z$ pont rádius vektorába esik, tehát radiális, ha

$$\arg \frac{R(z)}{z} = \arg \frac{1}{z} \cdot \frac{n\bar{z}^{n-1}}{\bar{z}^n - 1} \equiv 0 \pmod{\pi},$$

azaz, ha

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{n\bar{z}^{n-1}}{\bar{z}^n - 1} = \frac{n}{|z|^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\bar{z}^n}} = \text{reális}.$$

Az $R(z)$ rezultáns tehát akkor és csak akkor radiális, ha $\bar{z}^n$ és vele együtt $z^n$ reális, azaz ha a $z$ pont a szabályos $n$-szög valamelyik szimmetriatengelyébe esik.

**10.** Az előbbiből önként következik, hogy:

VI. *Valamely koncentrikus, nem koaxiális szabályos sokszögpár erőterének a sokszögek szimmetriatengelyeinek egyikén sincs egyensúlyi helyzete.*

*Koaxiális sokszögpárnál a szimmetriatengelyek közül csupán a közös szimmetriatengelyen lehet egyensúlyi helyzet.*

**11.** Koncentrikus, szabályos sokszögek félsugarai, szimmetriatengelyei, valamint az azok által meghatározott szektorokra vonatkozóan — az alábbiakra való tekintettel — előrebocsátjuk a következő tételeket.

Ha valamely szabályos $n$-szög csúcspontjai

$$Re^{i\theta_h} = Re^{\left(\theta_0 + \frac{2\nu_h\pi}{n}\right)i}; \quad \begin{matrix}(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \\ (\nu_h \equiv h \pmod{n}, \; h = 1, 2, \ldots n)\end{matrix} \qquad (22)$$

úgy $O$-ból az egyes csúcspontjaihoz vonuló egyeneseket, a szabályos $n$-szög félsugarait, a

$$\theta = \theta_h = \theta_0 + \frac{2\nu_h \pi}{n} \tag{23}$$

félsugarak adják.

Hasonlóképen a szabályos $n$-szög szimmetriatengelyeit a

$$\theta = \theta_0 + \frac{\nu_h \pi}{n} \tag{24}$$

egyenesek adják.

A (1) trinom egyenlethez tartozó $P_{n+m}$ és $P_n$ szabályos sokszögek félsugarai (18) szerint

$$\left.\begin{aligned} \theta = \theta_\lambda^{(n+m)} &\equiv \frac{\gamma - \alpha + (2\lambda+1)\pi}{n+m} \quad (\text{mod } 2\pi) \\ \text{és} \qquad \theta = \theta_\nu^{(n)} &\equiv \frac{\beta - \alpha + (2\nu+1)\pi}{n} \quad (\text{mod } 2\pi) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Ezen félsugarak mindig [10] $n$ olyan $\theta_{\lambda h}^{(n+m)} \lesseqgtr \theta \lesseqgtr \theta_{\nu h}^{(n)}$, $(h=1, 2, \ldots n)$ [a $\varphi \lesseqgtr \psi \lesseqgtr \chi$ jelölést illetőleg l. [11] jegyzetet] szektort határoznak meg, melyek nyilása:

$$\Omega_h = \left| \theta_{\lambda h}^{(n+m)} - \theta_{\nu h}^{(n)} \right| < \frac{\pi}{n+m}. \tag{26}$$

Ugyanis a legkisebb szektornyílás

$$\Omega_1 = \frac{1}{n(n+m)} \left| \operatorname{Arg} \frac{B^{n+m}}{(-A)^m C^n} \right| {}^{12} \tag{27}$$

következésképpen az egyes szektornyílások

---

[10] A valós együtthatós $|A| z^{n+m} - |B| z|^m + |C| = 0$ egyenletnél előforduló egyetlen kivételt illetőleg, midőn egy szektornyílás egyenlő $\dfrac{\pi}{n+m}$-mel, lásd 15.

[11] Annak a jelölésére, hogy a $\psi$ valós szám az egymástól különböző $\varphi$ és $\chi$ valós számok közé esik, melyeknek nagysági sorrendje nem ismeretes, e dolgozat folyamán mindvégig a $\varphi \lesseqgtr \psi \lesseqgtr \chi$ jelölést fogjuk használni.

[12] *Arg w* a többértékű *arg w* függvénynek azon értéke, melyre

$$-\pi < Arg\, w \leqq \pi.$$

$$\Omega_h = \left\{ h - \frac{1}{2} + (-1)^h \frac{T}{2} \right\} \frac{\pi}{n(n+m)}, \tag{28}$$

hol

$$T = 1 - \frac{2}{\pi} \left| \operatorname{Arg} \frac{B^{n+m}}{(-A)^m C^n} \right|, \quad (-1 \leqq T \leqq 1), \tag{29}$$

tehát

$$\Omega_{h+1} \geqq \Omega_h ; \quad \Omega_n = \left\{ n - \frac{1}{2} \pm \frac{T}{2} \right\} \frac{\pi}{n(n+m)} \leqq \frac{\pi}{n+m}.$$

**12.** E szerint a $P_{n+m}$ és $P_n$ sokszögeknek közös félsugaruk van (tehát a fortiori koaxiálisak), ha a minimális szektornyilás

$$\Omega_1 = \frac{1}{n(n+m)} \left| \operatorname{Arg} \frac{B^{n+m}}{(-A)^m C^n} \right| = 0,$$

azaz, ha

$$\operatorname{sgn} \frac{B^{n+m}}{A^m C^n} = (-1)^m. \tag{30}$$

Továbbá a $P_{n+m}$ és $P_n$ sokszögek koaxiálisak, közös félsugár nélkül, ha a legkisebb szektornyilás

$$\Omega_1 = \frac{1}{n(n+m)} \left| \operatorname{Arg} \frac{B^{n+m}}{(-A)^m C^n} \right| = \frac{\pi}{n(n+m)}$$

azaz, ha

$$\operatorname{sgn} \frac{B^{n+m}}{A^m C^n} = (-1)^{m+1}. \tag{31}$$

Általában annak, hogy a $P_{n+m}$ és $P_n$ sokszögek koaxiálisak legyenek, szükséges és elegendő feltétele, hogy

$$\frac{B^{n+m}}{A^m C^n} = \text{reális}, \tag{6}$$

vagyis, hogy a szóbanforgó trinom egyenlet valós együtthatós vagy azzal æquivalens legyen.

**13.** Hasonlóképen a (20) konjugált reciprok trinom egyenlethez tartozó $\mathfrak{P}_{n+m}$ és $\mathfrak{P}_m$ szabályos sokszögek félsugarai (21) szerint:

$$\theta = \theta_\lambda^{(n+m)} \equiv \frac{\gamma - \alpha + (2\lambda + 1)\pi}{n+m} \pmod{2\pi}$$

és

$$\theta = \theta_\mu^{(m)} \equiv \frac{\gamma - \beta + (2\mu + 1)\pi}{m} \pmod{2\pi} \tag{32}$$

$m$ olyan $\theta_{\lambda k}^{(n+m)} \lesssim \theta \lesssim \theta_{\mu_k}^{(m)}$ szektort határoznak meg, melyeknek nyílása

$$\omega_k = \left| \theta_{\lambda k}^{(n+m)} - \theta_{\mu_k}^{(m)} \right| < \frac{\pi}{n+m}. \quad {\scriptstyle (k=1,2,\dots m)} \qquad (33)$$

Ezen szektornyílások:

$$\omega_k = \left\{ k - \frac{1}{2} + (-1)^k \frac{t}{2} \right\} \frac{\pi}{m(n+m)}, \qquad (34)$$

hol

$$t = 1 - \frac{2}{\pi} \left| \operatorname{Arg} \frac{B^{n+m}}{A^m(-C)^n} \right|; \quad (-1 \leqq t \leqq 1) \qquad (35)$$

tehát

$$\omega_{k+1} \geqq \omega_k; \quad \omega_m = \left\{ m - \frac{1}{2} \pm \frac{t}{2} \right\} \frac{\pi}{m(n+m)} \leqq \frac{\pi}{n+m}.$$

A (6) feltétel mellett a $\mathfrak{P}_{n+m}$ és $\mathfrak{P}_m$ sokszögek is koaxiálisak és közös szimmetriatengelyük egybeesik a $(P_{n+m}, P_n)$ sokszögpár közös szimmetriatengelyével.

**14.** VII. *A két szabályos sokszögpár: $(P_{n+m}, P_n)$ és $(\mathfrak{P}_{n+m}\ \mathfrak{P}_m)$ által meghatározott, összesen $n+m$ szektor közül bármely kettőnek nincs közös belső pontja* (nem koaxiális sokszögek esetén a 0-on kívül más közös határpontja sem).

Ezen lemma bebizonyítása céljából nyilván elegendő kimutatni, hogy egy $\theta = \theta_\lambda^{(n+m)}$ félsugár nem lehet egyidejűleg két szektor határán, azaz a

$$\left| \theta_\lambda^{(n+m)} - \theta_\nu^{(n)} \right| =$$
$$= \left| \frac{\gamma - \alpha + (2\lambda + 1)\pi}{n+m} - \frac{\beta - \alpha + (2\nu + 1)\pi}{n} \right| < \frac{\pi}{n+m} \qquad (26)$$

és

$$\left| \theta_\lambda^{(n+m)} - \theta_\mu^{(m)} \right| =$$
$$= \left| \frac{\gamma - \alpha + (2\lambda + 1)\pi}{n+m} - \frac{\gamma - \beta + (2\mu + 1)\pi}{m} \right| < \frac{\pi}{n+m} \qquad (33)$$

egyenlőtlenségek egyidejűleg $\lambda$, $\mu$, $\nu$ semmilyen egész értékeinél nem állhatnak fenn. A (26) és (33) egyenlőtlenségek még a következőképen írhatók

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{n\gamma+m\alpha-(n+m)\beta}{(n+m)\pi} + \frac{n}{n+m}(2\lambda+1)-(2\nu+1) \right| < \frac{n}{n+m} \\ \left| \frac{n\gamma+m\alpha-(n+m)\beta}{(n+m)\pi} + \frac{n}{n+m}(2\lambda+1)-2(\lambda-\mu) \right| < \frac{m}{n+m} \end{aligned} \right. \tag{36}$$

A baloldalakon levő abszolút értékek összege azonban nyilván legalább 1, ellentétben a feltételezett (26) és (33) egyenlőtlenségekkel.

**15.** Adott koefficiens modulusokkal két különböző (inaequivalens) trinom egyenlet képezhető:

$$\text{I.}\quad f^\star(z) = |A|\, z^{n+m} - |B|\, z^m + |C| = 0; \tag{37}$$

$$\operatorname{sgn} \frac{B^{n+m}}{A^m C^n} = (-1)^{n+m}. \tag{38}$$

Ez esetben a $(P_{n+m}, P_n)$ sokszögpárhoz tartozó legnagyobb szektornyílás $\left(\text{miután } T^\star = (-1)^n\right)$:

$$\Omega_n^\star = \left\{ n - \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{T^\star}{2} \right\} \frac{\pi}{n(n+m)} = \frac{\pi}{n+m},$$

azaz maximális.

A $f^\star(z) = 0$-hoz tartozó szektornyílások csökkenő sorrendben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{n+m} = \Omega_n^\star > \Omega_{n-1}^\star = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{\pi}{n+m} = \\ = \Omega_{n-2}^\star > \Omega_{n-3}^\star = \frac{n-4}{n}\,\frac{\pi}{n+m} = \Omega_{n-4}^\star > \cdots \end{aligned} \right. \tag{39}$$

A (38) feltétel mellett nyilván a

$$z^{n+m} \bar{f}^\star \left( \frac{1}{z} \right) = |C|\, z^{n+m} - |B|\, z^n + |A| = 0 \tag{40}$$

conjugált reciprok egyenlethez tartozó $(\mathfrak{P}_{n+m}, \mathfrak{P}_n)$ sokszögpár által meghatározott legnagyobb szektornyílás is maximális:

$$t^\star = (-1)^m;\ \omega_m^\star = \left\{ m - \frac{1}{2} + (-1)^m \frac{t^\star}{2} \right\} \frac{\pi}{m(n+m)} = \frac{\pi}{n+m}$$

és a maximális nyílású $\Omega_n^\star$, $\omega_m^\star$ szektorok a $P_{n+m}$, $P_n$, $\mathfrak{P}_{n+m}$, $\mathfrak{P}_m$ sokszögek közös szimmetriatengelye mentén érintkeznek.

$$\text{II.}\quad f^{**}(z) = |A|z^{n+m} + |B|z^m + (-1)^m|C| = 0 \tag{41}$$

$$\operatorname{sgn}\frac{B^{n+m}}{A^m C^n} = (-1)^{n.m}. \tag{42}$$

Ez esetben a $(P_{n+m}, P_n)$ sokszögpárhoz tartozó szektornyílások csökkenő sorrendben

$$\begin{aligned} \Omega_n^{**} &= \frac{n-1}{n}\,\frac{\pi}{n+m} = \Omega_{n-1}^{**} > \Omega_{n-2}^{**} = \frac{n-3}{n}\,\frac{\pi}{n+m} = \\ &= \Omega_{n-3}^{**} > \Omega_{n-4}^{**} = \frac{n-5}{n}\,\frac{\pi}{n+m} = \cdots \end{aligned} \tag{43}$$

16. Ezek szerint az $f^*(z) = 0$ és $f^{**}(z) = 0$ valós együtthatós trinom egyenletekhez, valamint egy lényegesen komplex trinom egyenlethez tartozó szektornyílások közt a következő nagysági rend áll fenn:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{n+m} = \right) \Omega_n^* &> \Omega_n > \Omega_n^{**} = \Omega_{n-1}^{**} > \Omega_{n-1} > \Omega_{n-1}^* = \\ &= \Omega_{n-2}^* > \Omega_{n-2} > \Omega_{n-2}^{**} = \Omega_{n-3}^{**} > \Omega_{n-3} > \cdots \end{aligned} \tag{44}$$

Hasonlóképen a

$$z^{n+m}\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \quad z^{n+m}\bar{f}^{**}\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \text{ és } z^{n+m}f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

egyenletekhez tartozó szektornyílások nagysági rendje:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{n+m} = \right) \omega_m^* &> \omega_m > \omega_m^{**} = \omega_{m-1}^{**} > \omega_{m-1} > \omega_{m-1}^* = \\ &= \omega_{m-2}^* > \omega_{m-2} > \omega_{m-2}^{**} = \omega_{m-3}^{**} > \omega_{m-3} > \cdots \end{aligned} \tag{45}$$

III.

17. Föltesszük, hogy az

$$f(z) = Az^{n+m} + Bz^m + C = 0 \quad (n \text{ és } m \text{ rel. prímek}) \tag{1}$$

trinom egyenlet lényegesen komplex, tehát

$$\frac{A^m C^n}{B^{n+m}} \neq \text{reális}.$$

Ekkor (1) összes gyökei végesek, 0-tól különbözők és (IV.) szerint egyszeres multiplicitásúak. Ugyanekkor továbbá (12.) szerint a trinomegyenlethez tartozó $(P_n, P_{n+m})$ sokszögpár nem koaxiális, következésképen (VI.) szerint a szimmetriatengelyek egyikén sincs egyensúlyi helyzet, azaz gyökpont. A gyökök mindegyike tehát a szimmetriatengelyek által meghatározott szektorok valamelyikének a belsejébe esik és nyilván a saját szektorában marad, ha az együtthatók argumentumait megtartva, modulusaikat tetszőlegesen változtatjuk.

Nevezzük külső gyököknek azokat, melyek $|C| \to 0$ esetén a $\theta = \theta_\nu^{(n)} \equiv \frac{\beta - \alpha + (2\nu+1)\pi}{n}$ (mod $2\pi$) félsugarakon levő $\left|\frac{B}{A}\right| e^{i\theta_\nu^{(n)}}$ pontokba konvergálnak. Ugyanezen gyökök $|B| \to 0$ esetén a $\theta = \theta_\lambda^{(n+m)} \equiv \frac{\gamma - \alpha + (2\lambda+1)\pi}{n+m}$ (mod $2\pi$) félsugarakon levő $\left|\frac{C}{A}\right| e^{i\theta_\lambda^{(n+m)}}$ pontok valamelyikébe konvergálnak. Mindegyik külső gyök tehát az együtthatók folytonos változtatása mellett egy $\theta_\nu^{(n)}$ félsugár egy pontjából egy $\theta_\lambda^{(n+m)}$ félsugár egy pontjába vezető folytonos utat fut be, a nélkül, hogy közben 0-sá vagy $\infty$-né válna, vagy egy szimmetriatengelyen áthaladna. E szerint a külső gyökök azon $[\theta_{\nu h}^{(n)} \lesseqgtr \theta \lesseqgtr \theta_{\lambda h}^{(n+m)}]$ szektorokban vannak, melyeknek nyílása $\Omega_h = |\theta_{\nu h}^{(n)} - \theta_{\lambda h}^{(n+m)}| < \frac{\pi}{n+m}$.

18. Ugyanezen meggondolással a $z^{n+m} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ reciprok konjugált egyenlet külső gyökei, vagyis az eredeti $f(z) = 0$ egyenlet «belső gyökei»-re nézve találjuk, hogy ezek azon $[\theta_{\mu k}^{(m)} \lesseqgtr \theta \lesseqgtr \theta_{\lambda k}^{(n+m)}]$ szektorokban vannak, melyeknek nyílása $\omega_k = |\theta_{\mu k}^{(m)} - \theta_{\lambda k}^{(n+m)}| < \frac{\pi}{n+m}$.

Mindegyik nevezett szektor legalább egy gyököt tartalmaz s minthogy számuk $n+m$ és kettőjüknek közös belső pontja nincs, tehát mindegyik pontosan egy gyököt tartalmaz.

VIII. *Az* (1) *trinom egyenlet n külső gyöke a* $\theta_{\nu h}^{(n)} \lesseqgtr \theta \lesseqgtr \theta_{\lambda h}^{(n+m)}$, $(h = 1, 2, \dots n)$ *szektorokba, m belső gyöke a* $\theta_{\mu k}^{(m)} \lesseqgtr \theta \lesseqgtr \theta_{\lambda k}^{(n+m)}$, $(k = 1, 2 \dots m)$ *szektorokba esik. Mindegyik szektor egy gyököt tartalmaz.*

Ily módon valamely trinom egyenlet gyökei két csoportra oszlanak és mindegyik gyökhöz egy meghatározott $\left(\frac{\pi}{n+m}\right.$-nél nem nagyobb) szektornyílás van rendelve.

Mindegyik szektor a benne foglalt gyök pontos variabilitási tartományát adja, amennyiben az együtthatók argumentumainak megtartása és modulusainak változtatása esetén a gyök az egész zárt szektort befutja.

Valós együtthatós (vagy azzal aequivalens) trinom egyenlet esetén a hozzátartozó sokszögpárok koaxiálisak. A sokszögpárok által meghatározott szektorok ez esetben is — az esetleg $O$ nyílásúvá elfajulót is beleértve — egy gyököt tartalmaznak. Csupán azon esetben, midőn a szektorok közt két $\frac{\pi}{n+m}$ nyílású van, az ezekben foglalt gyököknek a külső, illetőleg belső gyökök közé való beosztása határozatlanná válik (l. X.).

## IV.

**19.** Valamely trinom egyenlet gyökeinek modulusaira nézve a korábbiak szerint fennállanak a következő tételek:

Lényegesen komplex trinom egyenletnek nincsenek egyenlő mudulusú gyökei (III).

Valós együtthatós (v. ezzel aequivalens) trinom egyenlet gyökei a valós (v. szimmetria-) tengelyen levő gyökök kivételével nyilván egyenlő modulusú gyökpárokra oszlanak. Kettőnél több gyöknek nincs egyenlő modulusa és az egyenlő modulusú gyökök egyenlő nyílású szektorokba esnek.

Két trinom egyenletnek, melyeknél a megfelelő együtthatók egyenlő modulussal bírnak, akkor és csak akkor vannak egyenlő modulusú gyökeik, ha a trinom egyenletek aequivalensek (II.), következésképen az egyenlő modulusú gyökök ez esetben is egyenlő nyílású szektorokba esnek.

**20.** Ezek felhasználásával bebizonyitjuk a gyökök modulusainak elhatárolására alapvető lemmát:

IX. *Ha az*

$$Az^{n+m}+Bz^m+C=0;\quad A=|A|e^{i\alpha};\quad B=|B|e^{i\beta};\quad C=|C|e^{i\gamma} \tag{1}$$

*trinom egyenlet együtthatóinak modulusai* $|A|$, $|B|$, $|C|$ *és egy szektornyílás* $\omega$ $\left(0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{n+m}\right)$ *adottak, úgy az ezen szektorban foglalt külső (belső) gyök modulusa:* $P(\Omega)$ $\left(\text{ill. } \varrho(\omega)\right)$ *egyértelműen meg van határozva és pedig a külső (belső) gyök modulusa az őt tartalmazó szektor nyílásának monoton csökkenő (növekvő) függvénye:*

$$P(\Omega) < P(\Omega'), \quad \text{ha} \quad \Omega > \Omega' \tag{46}$$

$$\left(\varrho(\omega) > \varrho(\omega'), \quad \text{ha} \quad \omega > \omega'\right). \tag{47}$$

Közvetlenül belátható, hogy $P(\Omega)$ $\left(\text{ill. } \varrho(\omega)\right)$ egyértékű és folytonos. Minthogy pedig a fentiek szerint két különböző nyílású szektor nem tartalmazhat egyenlő modulusú gyököket, tehát $P(\Omega)$ $\left(\text{ill. } \varrho(\omega)\right)$ monoton.

Továbbá $P(0)$ a

$$|A|\,z^{n+m} - |B|\,z^{m} - |C| = 0, \quad \operatorname{sgn} \frac{B^{n+m}}{A^m C^n} = (-1)^m \tag{30'}$$

egyenletnek a közös félsugarak által alkotott 0 nyílású szektorba, azaz a valós, pozitív tengelyre eső gyöke és tudvalevőleg a (30') egyetlen pozitív gyöke a (1) egyenlet-halmaz összes gyökei modulusainak felsőhatára. Következésképen

$$P(0) > P(\Omega), \quad (\Omega > 0),$$

azaz $P(\Omega)$ monoton *csökkenő* $\left(\varrho(\omega)\text{ monoton növekvő}\right)$ függvény.

**21.** A fentiekből nyilvánvaló, hogy a legkisebb külső-gyök modulus $P_1$, valamint a legnagyobb belsőgyök modulus: $\varrho_m$ a maximális $\Omega_n^\star = \omega_m^\star = \frac{\pi}{n+m}$ szektornyíláshoz tartoznak. A $\frac{\pi}{n+m}$ szektornyílás (15.) szerint azon valós együtthatós (vagy ezzel aequivalens) trinom egyenleteknél fordul elő, melyekre $\operatorname{sgn} \frac{A^m C^n}{B^{n+m}} = (-1)^{n+m}$, tehát minden esetre a

$$f^\star(z) = |A|\,z^{n+m} - |B|\,z^m + |C| = 0 \tag{37}$$

egyenletnél.

Minthogy ezen egyenletnél (11) szerint a

$$\theta_0^{(n+m)} \equiv \frac{\pi}{n+m}; \ \theta_{n+m-1}^{(n+m)} \equiv -\frac{\pi}{n+m} \ \text{és} \ \theta_{n+1}^{(n)} = 0$$

félsugarak alkotnak $\frac{\pi}{n+m}$ nyílású szektorokat, tehát a

$$P\left(\frac{\pi}{n+m}\right) = P(\Omega_n^\star) = P_n^\star$$

legkisebb külső gyök modulust és a

$$\varrho\left(\frac{\pi}{n+m}\right) = \varrho(\omega_m^\star) = \varrho_m^\star$$

legnagyobb belső-gyök modulust a (37) egyenlet azon gyökei szolgáltatják, melyeknek argumentumai $-\frac{\pi}{n+m}$ és $+\frac{\pi}{n+m}$ közé esnek.

Ismeretes, hogy a (37) egyenletnek két különböző pozitív gyöke van, ha

$$D[f^\star(z)] = (n+m)^{n+m}A^mC^n - (-1)^{n+m}n^nm^mB^{n+m} < 0,$$

egy kétszeres pozitív gyöke van, ha

$$D[f^\star(z)] = (n+m)^{n+m}A^mC^n - (-1)^{n+m}n^nm^mB^{n+m} = 0,$$

nincs pozitív gyöke, ha

$$D[f^\star(z)] = (n+m)^{n+m}A^mC^n - (-1)^{n+m}n^nm^mB^{n+m} > 0,$$

tehát $D>0$ esetben a (37) egyenletnek a $0<\theta<\frac{\pi}{n+m}$ és $-\frac{\pi}{n+m}<\theta<0$ szektorban konjugált komplex gyökei vannak.

E szerint:

X. *A legkisebb* $P_n^\star$ *modulusú külső gyök és a legnagyobb* $\varrho_m^\star$ *modulusú belső gyök* $D>0$ *esetben egyenlő modulussal bírnak,* $D=0$ *esetben összeesnek, végül* $D<0$ *esetben a legkisebb modulusú külső gyök a* (37) *nagyobbik pozitív gyöke és a legnagyobb modulusú belső gyök a* (37) *kisebbik pozitív gyöke, vagyis minden esetben:*

$$P_n^\star \geqq \varrho_m^\star. \tag{48}$$

**22.** Legyenek az

$$f^\star(z) = |A|z^{n+m} - |B|z^m + |C| = 0 \qquad (37)$$

$$f^{\star\star}(z) = |A|z^{n+m} + |B|z^m + (-1)^m|C| = 0 \qquad (41)$$

ill.

$$f(z) = Az^{n+m} + Bz^m + C = 0 \qquad (1)$$

egyenletek külső gyökeinek modulusai rendre:

$$P_h^\star = P(\Omega_h^\star);\ P_h^{\star\star} = P(\Omega_h^{\star\star}),\ \text{ill. } P_h = P(\Omega_h), \quad {\scriptstyle (h=1,2,\dots n)}$$

a belső gyökök modulusai rendre:

$$\varrho_k^\star = \varrho(\omega_k^\star);\quad \varrho^{\star\star} = \varrho(\omega_k^{\star\star}),\quad \text{ill. } \varrho_k = \varrho(\omega_k), \quad {\scriptstyle (k=1,2,\dots m)}$$

úgy a szektorok (44, 45) alatti nagysági rendjére, továbbá a $P(\Omega)$, $\varrho(\omega)$ függvények monotonitására, végül a (48) egyenlőtlenségre való tekintettel:

$$\begin{aligned} \cdots &> P_{n-3} > P_{n-3}^{\star\star} = P_{n-2}^{\star\star} > P_{n-2} > P_{n-2}^\star = \\ &= P_{n-1}^\star > P_{n-1} > P_{n-1}^{\star\star} = P_n^{\star\star} > P_n > P_n^\star \geqq \\ &\geqq \varrho_m^\star > \varrho_m > \varrho_m^{\star\star} = \varrho_{m-1}^{\star\star} > \varrho_{m-1} > \varrho_{m-1}^\star = \\ &= \varrho_{m-2}^\star > \varrho_{m-2} > \varrho_{m-2}^{\star\star} = \varrho_{m-3}^{\star\star} > \varrho_{m-3} > \cdots \end{aligned} \qquad (49)$$

E szerint:

XI. *A* (37, 41) *egyenletek külső gyökein áthaladó* $|z| = P_h^\star$ *és* $|z| = P_h^{\star\star}$ *körök, valamint a belső gyökökön áthaladó* $|z| = \varrho_k^\star$ *és* $|z| = \varrho_k^{\star\star}$ *körök egymást elválasztják.*

*Ezen körök (a* $P_n^\star \geqq |z| \geqq \varrho_m^\star$ *körgyűrűtől eltekintve)* $n+m$ *körgyűrűt határoznak meg:* $P_h^\star \lesseqgtr |z| \lesseqgtr P_h^{\star\star}$, $(h=1, 2,\dots n)$ és $\varrho_k^\star \lesseqgtr |z| \lesseqgtr \varrho_k^{\star\star}$, $(k=1, 2,\dots m)$, *melyek mindegyike a* (1) *egyenletnek pontosan egy gyökét tartalmazza.*

Az így meghatározott körgyűrűk a bennük foglalt gyök pontos variabilitási tartományát adják, amennyiben az együtthatók modulusainak megtartása és az argumentumok változtatása esetén a gyök az egész zárt körgyűrűt befutja.

## V.

**23.** Az előbbi fejezetek alapján meghatározható $n+m$ körgyűrűszektor, melyek mindegyike a

$$Az^{n+m}+Bz^m+C=0$$

trinom egyenlet egy gyökét tartalmazza.

Egyrészt ugyanis az

$$Az^{n+m}+C=0\,;\; Az^n+B=0\,;\; Bz^m+C=0 \tag{50}$$

egyenletek gyökeinek argumentumai meghatározzák a (25, 32) alatti $\theta=\theta_\lambda^{(n+m)}$; $\theta=\theta_\nu^{(n)}$; $\theta=\theta_\mu^{(m)}$ félsugarakat és a

$$\Omega_h=\left|\,\theta_{\lambda_h}^{(n+m)}-\theta_{\nu_h}^{(n)}\right|\leqq\frac{\pi}{n+m}\,;\; \Omega_{h+1}\geqq\Omega_h\,;\; (h=1,2,\dots n) \tag{26}$$

$$\omega_k=\left|\,\theta_{\lambda_k}^{(n+m)}-\theta_{\mu_k}^{(m)}\right|\leqq\frac{\pi}{n+m}\,;\; \omega_{k+1}\geqq\omega_k\,;\; (k=1,2,\dots m) \tag{33}$$

egyenlőtlenségek által, növekvő nagyságrendben a

$$\theta_{\lambda_h}^{(n+m)}\lesseqgtr\theta\lesseqgtr\theta_{\nu_h}^{(n)} \text{ . és } \theta_{\lambda_k}^{(n+m)}\lesseqgtr\theta\lesseqgtr\theta_{\mu_k}^{(m)}$$

szektorokat.

**24.** Másrészt a

$$f^\star(z)=|A|\,z^{n+m}-|B|\,z^m+|C|=0 \tag{37}$$

$$f^{\star\star}(z)=|A|\,z^{n+m}+|B|\,z^m+(-1)^m|C|=0 \tag{41}$$

egyenletek csökkenő (növekvő) modulus szerint rendezett külső (belső) gyökeinek $P_h^\star$, $P_h^{\star\star}$, $(\varrho_k^\star.\ \varrho_k^{\star\star})$, $\binom{h=1,2,\dots n}{k=1,2,\dots m}$ modulusai meghatározzák a

$$P_h^\star\lesseqgtr|z|\lesseqgtr P_h^{\star\star}\,;\; \varrho_k^\star\lesseqgtr|z|\lesseqgtr\varrho_k^{\star\star} \tag{52}$$

körgyűrűket.

Ha tehát a (1) egyenlet gyökei növekvő modulusok szerint rendezve

$$z_1=r_1e^{i\vartheta_1}\,;\; z_2=r_2e^{i\vartheta_2}\,;\dots\; z_{n+m}=r_{n+m}e^{i\vartheta_{n+m}}$$

$$r_1\leqq r_2\leqq\dots\leqq r_{n+m},$$

akkor — tekintettel arra, hogy a külső (belső) gyökök modulusai a szektornyílással monoton csökkennek (növekednek) — az egyes gyökök számára a következő körgyűrű szektorok adódnak:

A belső gyökökre:

$$\begin{matrix}\varrho_1^\star\lesseqgtr\varrho_1\lesseqgtr\varrho_1^{\star\star}\,; & \varrho_2^\star\lesseqgtr\varrho_2\lesseqgtr\varrho_2^{\star\star}\,;\dots & \varrho_m^\star\lesseqgtr\varrho_m\lesseqgtr\varrho_m^{\star\star} \\ \theta_{\lambda_1}^{(n+m)}\lesseqgtr\theta_1\lesseqgtr\theta_{\mu_1}^{(m)}\,; & \theta_{\lambda_2}^{(n+m)}\lesseqgtr\vartheta_2\lesseqgtr\theta_{\mu_2}^{(m)}\,;\dots & \theta_{\lambda_m}^{(n+m)}\lesseqgtr\vartheta_m\lesseqgtr\theta_{\mu_m}^{(n+m)}\end{matrix} \tag{53}$$

A külső gyökökre:

$$\left.\begin{array}{l} P_n^\star \lesseqgtr r_{m+1} \lesseqgtr P_n^{\star\star};\ P_{n-1}^\star \lesseqgtr r_{m+2} \lesseqgtr P_{n-1}^{\star\star};\dots\ P_1^\star \lesseqgtr r_{n+m} \lesseqgtr P_1^\star \\ \theta_{\lambda'_n}^{(n+m)} \lesseqgtr \vartheta_{m+1} \lesseqgtr \theta_{\nu_n}^{(n)};\ \theta_{\lambda'_{n-1}}^{(n+m)} \lesseqgtr \vartheta_{m+2} \lesseqgtr \theta_{\nu_{n-1}}^{(n)};\dots \\ \theta_{\lambda'_1}^{(n+m)} \lesseqgtr \vartheta_{n+m} \lesseqgtr \theta_{\nu_1}^{(n)}. \end{array}\right\} \quad (54)$$

**25.** Abban a speciális esetben, ha $n=1$ és a trinom egyenlethez tartozó sokszögek koaxiálisak, tehát pl. a

$$f^\star(z) = |A|\, z^{m+1} - |B|\, z^m + |C| = 0$$

egyenletnél a sokszögek félsugarai a következők

$$\theta = \theta_0^{(1)} \equiv 0;\ \theta = \theta_\mu^{(m)} \equiv \frac{2\mu\pi}{m}, \quad (\mu=0, 1,\dots m-1)$$

$$\theta = \theta_\lambda^{(m+1)} \equiv \frac{(2\lambda+1)\pi}{m+1}, \quad (\lambda=0, 1,\dots m)$$

tehát a szektorok[14]

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{m+1} = \theta_m^{(m+1)} < \theta < \theta_0^{(1)},\quad \Omega_1 = |\theta_m^{(m+1)} - \theta_0^{(1)}| = \dfrac{\pi}{m+1} \\ \dfrac{2\mu\pi}{m} \equiv \theta_\mu^{(m)} \leqq \theta \leqq \theta_\mu^{(m+1)} \equiv \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m+1},\quad \omega_\mu = |\theta_\mu^{(m+1)} - \theta_\mu^{(m)}| = \dfrac{|m-2\mu|\pi}{m(m+1)}, \\ \qquad (\mu=0, 1,\dots m-1) \end{array}\right\} \quad (56)$$

Következésképen az (55) egyenlet $z_\mu^\star = \varrho_\mu^\star e^{i\vartheta_\mu^\star}$, $\left(\mu=1, 2,\dots \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ belső gyökeire nézve

$$\left.\begin{array}{l} \left(-\dfrac{\pi}{m+1} < \vartheta_{m+1}^\star \leqq\right) 0 \leqq \vartheta_0^\star < \dfrac{\pi}{m+1} < \dfrac{2\pi}{m} < \vartheta_1^\star < \dfrac{3\pi}{m+1} < \dfrac{4\pi}{m} < \vartheta_2^\star < \dots < \\ < \dfrac{2\left[\frac{m}{2}\right]}{m}\pi \leqq \vartheta_{\left[\frac{m}{2}\right]}^\star \leqq \dfrac{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}{m+1}\pi \\ (P_1^\star \geqq)\ \varrho_0^\star > \varrho_1^\star > \varrho_2^\star > \dots > \varrho_{\left[\frac{m}{2}\right]}^\star \end{array}\right\} \quad (57)$$

azaz a fölső félsíkban levő gyökök $|z_\mu| = \varrho_\mu^\star$ modulusa az Arg $z_\mu$ argumentum növekedtével monoton csökken (v. ö. Huszár G. l. c.).

*Egerváry J.*

---

[14] Könnyebb áttekinthetőség kedvéért jelen esetben a szektorok nem az $\omega_{\mu+1} > \omega_\mu$ egyenlőtlenség szerint vannak számozva.

# ÜBER DIE WURZELN TRINOMISCHER GLEICHUNGEN.

Die in dieser Arbeit mitgeteilte Behandlung der trinomischen Gleichung gründet sich auf die einfache Bemerkung, dass die Wurzeln als Gleichgewichtsstellen des Kraftfeldes eines höchst einfachen Massenpunktsystems darstellbar sind.

Durch ganz elementare Symmetrie- und Stetigkeitsbetrachtungen ergibt sich hiraus für die Gleichung

$$Az^{n+m}+Bz^m+C=0\,;\;\; A=|A|e^{i\alpha};\;\; B=|B|e^{i\beta};\;\; C=|C|e^{i\gamma} \quad \text{($n$ und $m$ rel. prim)} \tag{1}$$

folgende Separation der Wurzeln nach dem *Argument:*

*Man ziehe die 2 $(n+m)$ Halbstrahlen:*

$$\theta=\theta_\lambda^{(n+m)}\equiv\frac{\gamma-\alpha+(2\lambda+1)\pi}{n+m},\quad \theta=\theta_\mu^{(m)}\equiv\frac{\beta-\alpha+(2\mu+1)\pi}{m},$$
$$(\lambda=1,2,\dots n+m) \qquad\qquad (\mu=1,2,\dots m)$$

$$\theta=\theta_\nu^{(n)}\equiv\frac{\gamma-\beta+(2\nu+1)\pi}{n} \pmod{2\pi}\,;$$
$$(\nu=1,2,\dots n)$$

*diese bestimmen $n+m$ solche Sektoren, deren Öffnungswinkel*

$$|\,\theta_\lambda^{(n+m)}-\theta_\mu^{(m)}\,|\leqq\frac{\pi}{n+m} \text{ bezw. } |\,\theta_\lambda^{(n+m)}-\theta_\nu^{(n)}\,|\leqq\frac{\pi}{n+m}$$

ist. *Jeder von den so bestimmten Sektoren enthält genau eine Wurzel der Gleichung* (1). Jeder Sektor stellt den genauen Variabilitätsbereich der betreffenden Wurzel dar, indem bei festgehaltenen Argumenten und variablen Moduln der Koefficienten die Wurzel die ganze Sektorfläche beschreibt.

Durch nähere Betrachtung der so bestimmten Sektoren und der Abhängigkeit des Wurzelmoduls von der Sektoröffnung ergibt sich folgende Separation der Wurzeln nach dem *Modul:*

*Man ziehe die Kreise mit dem Mittelpunkt O durch die Wurzelpunkte der beiden Gleichungen*

$$|A|z^{n+m}-|B|z^m+|C|=0$$

$$|A|z^{n+m}+|B|z^m+(-1)^m|C|=0.$$

*Die so erhaltenen*

$$n+m+1\left(\text{im Falle }\left|\frac{B^{n+m}}{A^mC^n}\right|\leqq\frac{(n+m)^{n+m}}{n^nm^m}\right),$$

*beziehungsweise*

$$n+m+2\left(\text{im Falle }\left|\frac{B^{n+m}}{A^mC^n}\right|>\frac{(n+m)^{n+m}}{n^nm^m}\right)$$

*Kreise bestimmen* $n+m$ *Kreisringgebiete, deren jedes genau eine Wurzel der Gleichung* (1) *enthält.*

Jeder Ring stellt den genauen Variabilitätsbereich der in ihm enthaltenen Wurzel dar, indem bei festgehaltenen Moduln und variablen Argumenten der Koefficienten die Wurzel die ganze Ringfläche beschreibt.

Durch Verbindung der vorhergenannten Sätze lassen sich endlich $n+m$ Ringsektorgebiete bestimmen, deren jedes genau eine Wurzel der Gleichung (1) enthält.

Es ergeben sich auch einige bereits von Nekrasoff, Herglotz und Biernacki bewiesene Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln.

*E. Egerváry.*

# MEGJEGYZÉS EGY FIXPONT-TÉTELHEZ.

1. «Eine Verallgemeinerung des ROUCHÉschen Satzes» című dolgozatomban[1] bebizonyítottam a következő fixpont-tételt: Legyen:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$$

valós együtthatós hatványsor. $f(z)$ képezze le a zárt egységkört oly módon, hogy a körnek minden pontja a kör belsejében fekvő pontba menjen át, kivéve a $z = 1$ pontot, amelyre $f(1) = 1$ álljon. Állítom, hogy ennek a leképezésnek akkor és csak akkor van pontosan egy fixpontja az egységkör belsejében, ha $f'(1) > 1$.

Idézett tétel G. JULIA egy tételének általánosítása olyan függvények által adott leképezésekre, amelyeknek $z = 0$ pont körüli kifejtése *valós* együtthatós hatványsor. Alábbiakban megmutatom, hogy utóbbi feltevésünk, vagyis az, hogy a hatványsor valós együtthatós, *nem lényeges*. Egyszóval áll a következő tétel:

*Legyen az egységkör belsejében* $f(z)$ *függvény reguláris, továbbá* $|f(z)| < 1$. *Legyen még* $f(z)$ *az egységkör kerületén is reguláris és* $|f(z)| < 1$, *kivéve a* $z = 1$ *pontot, ahol legyen* $f(1) = 1$. *Állítom, hogy* $f(z)$*-nek akkor és csakis akkor van pontosan egy fixpontja az egységkör belsejében, ha*

$$f'(1) > 1.^{2} \qquad (1)$$

---

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 160 (1929), 143—150. o.

[2] Hogy $f'(1)$ valós, az JULIA egy tétele szerint, amelyet rögtön alkalmazni fogok (l. 3. lábjegyzet) következik a feltételekből.

2. Tételünk bizonyításánál használni fogjuk a SCHWARZ-lemmának G. JULIA-tól eredő, következő általánosítását:[3] Legyen az $f(z)$ függvény az egységkörben reguláris és ugyanott a $z=1$ hely kivételével $|f(z)|<1$, továbbá $f(1)=1$. Akkor $f'(1)$ valós pozitív szám és a kör minden pontjára áll a következő reláció

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leqq \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} f'(1). \tag{2}$$

Utóbbi reláció geometriai jelentése a következő: Tekintsünk egy $d<2$ átmérőjű körlapot, amely az egységsugarú kört belülről a $z=1$ pontban érinti; akkor minden olyan $z$ pontnak, amely e $d$ átmérőjű körlaphoz tartozik, megfelel egy $w=f(z)$ pont, amely az egységsugarú kört a $z=1$ pontban belülről érintő

$$\frac{2f'(1)d}{2+d(f'(1)-1)} \tag{3}$$

átmérőjű körlaphoz tartozik.

Ezen lemma felhasználásával először is bebizonyítjuk, hogy az (1) alatti $f'(1)>1$ feltétel szükséges. Ugyanis, ha valamely $z=z_0$ pont fixpontja $f(z)$-nek, vagyis $f(z_0)=z_0$, akkor a (2) alatti relációból rögtön következik, hogy $f'(1)\geqq 1$. Most még azt kell megmutatnunk, hogy ha $f(z)$-nek pontosan egy fixpontja van az egységkör belsejében, akkor

$$f'(1) \neq 1.$$

Legyen először $f(z)$ egyetlen fixpontja az egységkör belsejében $z=0$ pont, vagyis legyen $f(0)=0$, és tegyük fel, hogy $f'(1)=1$. Tekintsünk egy olyan $\xi$ pontot a pozitív valós tengelyen, amely az egységkör belsejébe esik. Ekkor, mivel $f'(1)=1$, a (3) alattiból következik, hogy $\xi$ képének a $\xi$ ponton áthaladó és az egységkört $z=1$ pontban érintő körvonal által határolt körlaphoz kell tartoznia. Azonban feltevésünk szerint $f(0)=0$, tehát

[3] L. pl. BIEBERBACH: Funktionentheorie II. 1927, 125. o. és C. CARATHÉODORY: Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen, Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse, 1929 IV.

a SCHWARZ-lemma értelmében $f(\xi)$ a $|z| \leqq \xi$ körlaphoz tartozik. A két körlapnak csak egy közös pontja van, a $\xi$ pont, tehát $f(\xi) = \xi$, ami csak úgy lehetséges, ha $f(z) \equiv z$. Ez az eredmény azonban nyilván ellenkezik feltevésünkkel, amely szerint $z = 0$ pont egyetlen fixpontja $f(z)$-nek az egységkör belsejében. Tehát nem lehet $f'(1) = 1$. Legyen most $f(z)$ egyetlen fixpontja az egységkör belsejében a $z = z_0$ pont és legyen $z_0 \neq 0$. Bevezetjük a következő függvényt

$$\varphi(\zeta) = \frac{1-\bar{z}_0}{1-z_0}\,\frac{f(z)-z_0}{1-\bar{z}_0 f(z)}, \quad \text{ahol} \quad \zeta = \frac{1-z_0}{1-\bar{z}_0}\,\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z},$$

$\varphi(\zeta)$ függvény a $|\zeta| < 1$ körben reguláris, továbbá $|\varphi(\zeta)| < 1$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$. Egyszerű számolással nyerjük, hogy $\varphi'(1)=f'(1)=1$. Tehát az előbbi meggondolás szerint $\varphi(\zeta) \equiv \zeta$, vagyis $f(z) \equiv z$. Az utóbbi eredmény azonban nyilván ellenkezik azon feltevésünkkel, hogy $f(z)$-nek az egységkör belsejében csak egy fixpontja van, így hát megint $f'(1) \neq 1$. (1) alatti feltételünk szükségességét ezzel bebizonyítottuk. Elegendősége a ROUCHÉ-tétel általánosításánál használt módszeremmel bizonyítható. Ugyanis megmutathatjuk, hogy a kritikus $z=1$ pont, ahol $f(1)=1$, mindig megkerülhető az egységkör belsejében haladó úttal oly módon, hogy a kérdéses út minden pontjára $|f(z)| < |z|$ álljon. Utóbbi állításomnak egy rövid bizonyítását FEJÉR professzor úrnak köszönhetem. Ez a bizonyítás a következő: Tekintsük a következő kétváltozós függvényt

$$\Phi(r, \theta) = \left|\frac{f(re^{i\theta})}{z}\right|^2 = \frac{u^2(r,\theta)+v^2(r,\theta)}{r^2},$$

ahol

$$z = re^{i\theta} \quad \text{és} \quad f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta).$$

Kiszámítjuk a $\dfrac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r}$ differenciálhányadost:

$$\frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r} = \frac{2}{r^3}\left\{\left(u(r,\theta)\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} + v(r,\theta)\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}\right) r - \right.$$

$$\left. -\left(u^2(r,\theta)+v^2(r,\theta)\right)\right\} = \frac{2}{|z|^3}\left\{\Re\left(z\overline{f(z)}f'(z)\right) - |f(z)|^2\right\}.$$

Ebből a formulából következik, mivel $f(1)=1$ és $f'(1)>1$, hogy a $z=1$ pontban

$$\left.\frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r}\right|_{\substack{r=1\\ \theta=0}} = 2\{f'(1)-1\} > 0.$$

De $\dfrac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r}$ függvény a $z=1$ pont bizonyos környezetében folytonos az $r$ és $\theta$ változókban, tehát még a $z=1$ pont bizonyos környezetére is állani fog a

$$\frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r} > 0 \tag{4}$$

egyenlőtlenség. Tekintsük most az

$$1-\delta \leqq r \leqq 1, \quad -\varepsilon \leqq \theta \leqq \varepsilon$$

relációk által, (ahol $\delta$ és $\varepsilon$ elegendő kis pozitív számok) meghatározott zárt $\tau$ tartományt. $\tau$ tartomány egy körgyűrűcikk. Állítom, hogy a $\tau$ tartomány minden pontjára, kivéve a $z=1$ pontot, áll az

$$|f(z)| < |z|$$

egyenlőtlenség. A $\tau$ tartománynak az egységkör kerületével közös pontjaira feltételünk szerint áll az előbbi egyenlőtlenség, kivéve a $z=1$ pontot, ahol $f(1)=1$. Ha most ezen pontok bármelyikéből (a $z=1$ pontból is) kiindulva, radiális irányban haladunk a nullpont felé, akkor a (4) alatti reláció értelmében $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right| = \Phi(r,\theta)$ monoton csökken. De bármely kiindulási pontban $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right| \leqq 1$, így hát a $\tau$ tartomány összes többi pontjában $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right| < 1$, vagyis $|f(z)| < |z|$. Most hagyjuk ki a zárt egységkörből a $\tau$ tartományt s az egységkörből így nyert tartományt jelöljük $(e')$-vel. Nyilvánvaló, hogy $(e')$ kerületén $|f(z)| < |z|$. Ugyanis a kritikus $z=1$ pontot kihagytuk s $(e')$ határának azon a részén is, amely $\tau$-val közös, áll az $|f(z)| < |z|$ egyenlőtlenség, amint azt az előbb bebizonyítottuk. Ha most $f(z)$ és $z$ függvényekre alkalmazzuk a Rouché-tételt, nyerjük, hogy az $f(z)$ függvénynek pontosan egy fixpontja van az $(e')$ tartomány belsejében. De a $\tau$ tartománynak az egységkör belsejével közös részében nem lehet fixpontja $f(z)$-nek, mivel itt minden pontra az $|f(z)| < |z|$ egyenlőtlenség áll. Tehát $f(z)$-nek pontosan egy fixpontja van az egységkör *belsejében.*

*Lipka István.*

## BEMERKUNG ZU EINEM FIXPUNKTSATZ.

In der vorliegenden Arbeit wird der folgende Fixpunktsatz bewiesen: Es sei die Funktion $f(z)$ im Inneren und am Rande des Einheitskreises regulär. Diese Funktion bilde den abgeschlossenen Einheitskreis auf die Weise ab, dass jeder Punkt in einen inneren Punkt übergeführt wird, abgesehen von dem Punkte $z=1$, der in sich selbst übergeht. Ich behaupte, dass *diese Abbildung dann und nur dann genau einen Fixpunkt im Inneren des Einheitskreises besitzt, wenn*

$$f'(1) > 1$$

*ist.*

Ich habe einen speziellen Fall dieses Satzes als eine Erweiterung des JULIA'schen Satzes schon in meiner Arbeit «Eine Verallgemeinerung des ROUCHÉ'schen Satzes»[1] bewiesen.

*Stephan Lipka.*

---

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik 160 (1929), p. 148.

# JELENTÉS
# AZ 1930. ÉVI KŐNIG GYULA JUTALOMRÓL.

(Az Eötvös Loránd Mat. és Fiz. Társulat 1930. április 24-én tartott üléséből.)

Mélyen Tisztelt Társulat!

Az ötödik Kőnig Gyula jutalom odaitélése ügyében javaslattételre kiküldött bizottság, melynek elnöke ezúttal Rados Gusztáv, tagjai pedig Kürschák József, Szücs Adolf és alulírott, egyhangúlag úgy határozott, hogy a választmánynak Szász Ottót ajánlja a jutalmazásra. A jelentés tételével alulírottat volt szíves megbízni.

Szász Ottó a budapesti egyetem doktora és magántanára, továbbá a frankfurti egyetem magántanára és címzetes professzora. 20 év óta fejt ki irodalmi működést. Ő ma általánosan ismert és elismert matematikus, úgyhogy e jelentés célja nem is az, hogy munkáit dicsérje, hanem inkább az, hogy legszebb és legfontosabb eredményeinek egyikét-másikát, lehetőleg érthetően, a Tisztelt Társulat elé tárja. Mintául nekem az előző Kőnig Gyula jelentések szolgáltak; talán csak egy kissé hoszszadalmasabbá váltam, sok magyarázgatással; ezért szíves elnézésüket is kérem.

Mi most egy magyar matematikusnak örömöt akarunk szerezni azzal, hogy irodalmi munkásságát a maga egészében a szükséges és megérdemelt odaadással szemügyre vesszük. Az ilyen szemle, különösen a matematikai produkció mai iramában, mindig tudományos haszonnal is jár.

Mielőtt már most jelentésembe kezdenék, csak arra szeretnék eszméltetni, hogy ezek a mi időközönkénti szemléink is a mi nagy matematikusunk és nagy professzorunk: KŐNIG GYULA nevéhez fűződnek.

*

SZÁSZ OTTÓ dolgozatainak teljes jegyzéke jelentésem végén található. Öt csoportban ismertetem őket.

Az első csoportba bizonyos maximum-minimum föladatokat tárgyaló dolgozatok tartoznak, melyek trigonometrikus vagy racionális polynomokra vonatkoznak. A második csoport értekezéseiben a FOURIER-féle sorról van szó, míg a harmadikéiban a hatványsorról. A negyedikbe osztom azokat a dolgozatokat, amelyek a WEIERSTRASS-féle közelités egy általánositását tárgyalják, míg az ötödikbe kerülnek a lánctört összetartását vizsgáló cikkek.

## Trigonometrikus és racionális polynomok.

**1.** A valós $\theta$ független változó trigonometrikus polynomja alatt az

$$f(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + \cdots + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad (1)$$

alakú függvényeket értjük, hol $a_0, a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n$ valós állandókat jelölnek.

Tekintsük a polynom egy tagját

$$a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta, \quad (2)$$

hol $k$ az 1, 2,... $n$ számok valamelyikét jelenti. E tag legnagyobb értéke

$$M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (3)$$

legkisebb értéke pedig

$$m_k = -\sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad (4)$$

A $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ értéket nevezzük a $k$-dik tag *amplitudó*jának és $\varrho_k$-val jelöljük, azaz

$$\varrho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots n. \quad (5)$$

**2.** Mielőtt tovább haladnék, meg kell említenem a trigonometrikus polynomok *alaptulajdonságát.* Ez így hangzik:

Legyenek $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{\nu-1}$ a $\nu$-dik egységgyökök arcusai, azaz legyen

$$\theta_r = r\frac{2\pi}{\nu}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots (\nu-1); \tag{6}$$

akkor

$$a_0 = \frac{f(\theta_0) + f(\theta_1) + \cdots + f(\theta_{\nu-1})}{\nu}, \tag{7}$$

ha a $\nu$ egész szám legalább is egy egységgel nagyobb, mint az $f(\theta)$ trigonometrikus polynom rendszáma, vagyis

$$\nu > n. \tag{8}$$

Az (1) alatti trigonometrikus polynomot pontosan $n$-edrendűnek mondjuk, ha a $\varrho_n$ amplitudó zérustól különböző.

A (7) alatti alaptulajdonságból tüstént következik annak általánosított alakja:

$$a_0 = \frac{f(\theta+\theta_0) + f(\theta+\theta_1) + \cdots + f(\theta+\theta_{\nu-1})}{\nu}, \tag{7'}$$

hol $\theta$ tetszőleges érték és újra $\nu > n$.

Ha különösképen $\nu = n+1$, akkor (7) és (7') szerint

$$a_0 = \frac{f(\theta_0) + f(\theta_1) + \cdots + f(\theta_n)}{n+1}, \tag{9}$$

vagy, általánosabban,

$$a_0 = \frac{f(\theta+\theta_0) + f(\theta+\theta_1) + \cdots + f(\theta+\theta_n)}{n+1}, \tag{10}$$

hol

$$\theta_r = r\frac{2\pi}{n+1}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots n. \tag{11}$$

**3.** Legyen most már $M$ az $f(\theta)$ trigonometrikus polynom maximuma és $m$ a minimuma. Akkor (9) alapján

$$a_0 \leqq \frac{M + M + \cdots + M}{n+1}, \tag{12}$$

azaz

$$a_0 \leqq M. \tag{13}$$

Azt kapjuk tehát, hogy az $a_0$ abszolút tag vagy kisebb az $M$ maximumnál, vagy pedig egyenlő vele. Azt állítom most már, hogy $a_0 = M$ csak akkor lehetséges, ha $f(\theta) \equiv a_0$. Ugyanis (13)-ban csak akkor lehet az egyenlőség jele érvényes, ha (12)-ben is az érvényes; ez pedig, tekintettel (9)-re, csak akkor lehetséges, amikor

$$f(\theta_0) = f(\theta_1) = \cdots = f(\theta_n) = M = a_0. \tag{14}$$

Minthogy azonban $M$ az $f(\theta)$ maximuma, azért ekkor (14)-en kívül még

$$f'(\theta_0) = f'(\theta_1) = \cdots = f'(\theta_n) = 0 \tag{15}$$

is érvényes.

(14) és (15) szerint azonban az

$$f(\theta) - a_0 \tag{16}$$

$n$-edrendű trigonometrikus polynom a $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n$ helyeken (ez összesen $(n+1)$ egymástól különböző hely a $0 \leq \theta < 2\pi$ periodicitási közben) legalább is *duplán* tűnik el. E szerint $f(\theta) - a_0 \equiv 0$, vagyis $f(\theta) \equiv a_0$, qu. e. d. (Ez különben egyszerűbben is bizonyítható.)

E szerint mindig

$$a_0 < M, \tag{17}$$

ha csak az $f(\theta) \equiv a_0$ triviális esettől eltekintünk, attól az esettől, amidőn minden amplitudó egyenlő zérussal.

Hasonlóképen nyerhető

$$m < a_0. \tag{18}$$

E szerint, az $f(\theta) \equiv a_0$ esettől eltekintve, mindig

$$m < a_0 < M. \tag{19}$$

**4.** Az imént láttuk, hogy a trigonometrikus polynom $a_0$ abszolút tagja mindig annak $m$ minimuma és $M$ maximuma közé esik. Ennél többet *tetszőleges* rendszámú trigonometrikus polynomra nem is lehet mondani. De megadott $n$ rendszámúra (vagy legföljebb $n$ rendszámúra) igenis lehet. Jelölje ugyanis $\theta^*$ azt a helyet (vagy azon helyek egyikét), amelyen $f(\theta^*) = M$. Akkor (10) szerint

$$a_0 = \frac{M + f(\theta^\star + \theta_1) + \cdots + f(\theta^\star + \theta_n)}{n+1} \tag{20}$$

és így

$$a_0 \geqq \frac{M + m + \cdots + m}{n+1} = \frac{M + nm}{n+1} = m + \frac{M - m}{n+1}, \tag{21}$$

vagyis

$$a_0 \geqq m + \frac{M - m}{n+1}. \tag{22}$$

Hasonlóképen levezethető, (vagy (22)-nek a $-f(\theta)$ polynomra való alkalmazásával nyerhető) az

$$a_0 \leqq M - \frac{M - m}{n+1} \tag{23}$$

egyenlőtlenség.

E szerint bármely legföljebb $n$-edrendű trigonometrikus polynom esetén

$$m + \frac{M - m}{n+1} \leqq a_0 \leqq M - \frac{M - m}{n+1}. \tag{24}$$

A (24) alatti egyenlőtlenségek szűkebb határokat adnak az $a_0$ abszolút tagra, mint $m \leqq a_0 \leqq M$. Ha a $M - m$ különbséget, mint szokás, ingadozásnak nevezem és $D$-vel jelölöm, akkor (24) még így is írható

$$m + \frac{D}{n+1} \leqq a_0 \leqq M - \frac{D}{n+1}. \tag{25}$$

5. Lehet-e (24)-ben az egyenlőség jele is érvényes és mikor? Hogy pl.

$$a_0 = m + \frac{M - m}{n+1} \tag{26}$$

lehessen, arra, (20) alapján, mindenesetre szükséges, hogy

$$f(\theta^\star) = M,\ f(\theta^\star + \theta_1) = m, \ldots\ f(\theta^\star + \theta_n) = m \tag{27}$$

legyen, továbbá, hogy

$$f'(\theta^\star) = f'(\theta^\star + \theta_1) = \cdots = f'(\theta^\star + \theta_n) = 0 \tag{28}$$

legyen, minthogy $M$ az $f(\theta)$ maximális, $m$ pedig annak minimális értéke.

(27) és (28)-ból azonban tüstént következik, hogy

$$f(\theta) = m + \frac{M-m}{n+1}[\varphi(t)]_{t=\theta-\theta^*}, \tag{29}$$

ahol

$$\varphi(t) = \frac{(n+1)+n.2\cos t+\cdots+1.2\cos nt}{n+1} = \\ = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2. \tag{30}$$

Hasonlóképen nyerhető $\varphi(t)$-vel a másik extrém eset is, amidőn $a_0 = M - \frac{M-m}{n+1}$.

Elemi kérdésünket tehát megoldottuk. A kérdés abban állott, hogy a legföljebb $n$-edrendű trigonometrikus polynom abszolút tagja mikor éri el tényleg azokat a határokat, amelyeket az alaptulajdonság számára úgyszólván közvetetlenül kijelöl. A megoldás fölszínre vetette a (30) alatti trigonometrikus polynomot, amely azonos az

$$1+2\cos t+2\cos 2t+\cdots+2\cos nt+\cdots$$

végtelen trigonometrikus sor részletösszegeinek arithmetikai közepével; közelebbről: az $n$ indexűvel. Ez a $\varphi_n(t)$ polynom a Fourier-féle sor elsőrendű számtani közepekkel való summabilitásának kérdésében játszik szerepet.

**6.** A (24) alatti egyenlőtlenség különben tejlesen æquivalens a következő síkbeli potenciálelméleti tétellel.

Legyen $u(x, y)$ a valós $x, y$ független változók tetszőleges, legföljebb $n$-edfokú racionális egész függvénye valós együtthatókkal, mely azonban *harmonikus*, vagyis a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{31}$$

Laplace-féle differenciálegyenletnek tesz eleget. Legyen továbbá a síkban akárhol egy $K$ kör, és középpontjának koordinátái legyenek $x_0$, $y_0$. Akkor, ha $M$ jelenti az $u(x, y)$ maximumát a $K$ körlapon, $m$ pedig a minimumát, úgy a középpontban fölvett $u(x_0, y_0)$ függvényértékre nemcsak

$$m \leqq u(x_0, y_0) \leqq M \tag{32}$$

(ami *minden* reguláris harmonikus függvényre fennáll), hanem

$$m + \frac{M-m}{n+1} \leqq u(x_0, y_0) \leqq M - \frac{M-m}{n+1} \tag{33}$$

is érvényes.

Azok az esetek, amelyekben itt az egyenlőség jele válik érvényessé, természetesen ismét a (30) alatti $\varphi(t)$ polynommal jellemezhetők.

**7.** Nem hallgathatom itt el SZEGŐ szép tételét, mely az imént jelzett síkbeli tételt a háromméretű tér potenciális többtagúira viszi át, LUKÁCS FERENC egy eredményének a felhasználásával. SZEGŐ tétele így hangzik:

Ha az $u(x, y, z)$ racionális egész függvény eleget tesz a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{34}$$

egyenletnek és $M$ jelöli a függvény maximumát, $m$ pedig a minimumát a tér valamely $G$ gömbjén, akkor $u(x, y, z)$ a gömb $(x_0, y_0, z_0)$ középpontjában olyan $u(x_0, y_0, z_0)$ értéket vesz fel, melyre a

$$m + \frac{M-m}{\lambda_n} \leqq u(x_0, y_0, z_0) \leqq M - \frac{M-m}{\lambda_n} \tag{35}$$

egyenlőtlenségek érvényesek, ahol

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 - \frac{1-(-1)^n}{8}. \tag{36}$$

A dolog lényege természetesen itt is főkép abban áll, hogy *bizonyos* harmonikus polynomok esetében az egyenlőség jele az, mely (35)-ben érvényes; egyszer az első helyen, másszor a második helyen.

Egyébként a háromméretű tér harmonikus polynomjaira többé nem térek ki, mert azok jelentésem keretéből kiesnek.

**8.** Láttuk, hogy tetszőleges trigonometrikus polynom esetében

$$m \leqq a_0 \leqq M. \tag{19'}$$

Már most nevezzük a $M - a_0$ különbséget a trigonometrikus polynom *magasság*ának és jelöljük $\mathfrak{M}$-mel; viszont az $a_0 - m$ különbséget nevezzük a polynom *mélységé*nek és jelöljük $\mathfrak{m}$-mel. (19') szerint úgy a magasság, mint a mélység nemnegativ értékek. Bevezetésük a $M$ maximum és $m$ minimum helyett célszerű. Így a (24) alatti egyenlőtlenség egyszerűen ezt mondja:

Egy $n$-edrendű trigonometrikus polynom magassága legföljebb $n$-szer akkora, mint a mélysége és fordítva; vagyis

$$\mathfrak{M} \leqq n\mathfrak{m},$$
$$\mathfrak{m} \leqq n\mathfrak{M}.$$

**9.** Már most áttérek a trigonometrikus polynomokra vonatkozó tételek egy egész sorozatának az ismertetésére. E tételeket két csoportba osztom. Az *első* csoportba tartoznak azok a tételek, amelyekben mint adat az $n$ rendszámon kívül csak a $\mathfrak{M}$ magasság (vagy csak a $\mathfrak{m}$ mélység) szerepel. A *második* csoportba pedig azok tartoznak, amelyekben az $n$ rendszámon kívül mint adat úgy a $\mathfrak{M}$ magasság, mint a $\mathfrak{m}$ mélység szerepel.

**10.** Legyen a legföljebb $n$-edrendű trigonometrikus polynom magassága $\mathfrak{M}$. Akkor $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ *amplitudói*ra a következő egyenlőtlenségek érvényesek:

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &\leqq 2\cos\frac{\pi}{n+2}\cdot\mathfrak{M}\\
\varrho_2 &\leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{2}\right]+2}\cdot\mathfrak{M}\\
\varrho_3 &\leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{3}\right]+2}\cdot\mathfrak{M}\\
&\dots\dots\dots\\
\varrho_k &\leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{k}\right]+2}\cdot\mathfrak{M}\\
&\dots\dots\dots\\
\varrho_n &\leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{n}\right]+2}\cdot\mathfrak{M}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Ez egyenlőtlenségek bármelyikében az egyenlőség jele érvényes, ha csak a $\mathfrak{M}$ magasságú és legföljebb $n$-edrendű trigonometrikus polynomot alkalmasan választjuk. Hozzáteszem ehhez, hogy a (37) alatti egyenlőtlenségek természetesen akkor is érvényesek, ha beléjük a $\mathfrak{M}$ magasság helyébe a $\mathfrak{m}$ mélységet írjuk.

Ha $k > \frac{n}{2}$, vagyis $\frac{n}{k} < 2$, akkor $\left[\frac{n}{k}\right] = 1$ és így

$$\varrho_k \leqq 2 \cos \frac{\pi}{3} \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{M}, \tag{38}$$

vagyis

$$\varrho_k \leqq \mathfrak{M}, \; \mathfrak{m}, \qquad k = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \ldots n. \tag{39}$$

Ezek a (39) alatti egyenlőtlenségek, valamint a $k=1$-re vonatkozó

$$\varrho_1 \leqq 2 \cos \frac{\pi}{n+2} \cdot \mathfrak{M} \tag{40}$$

egyenlőtlenség, már régebben ismeretesek voltak. Hogy ebből az első (37) alatti egyenlőtlenségből az összes többi (37) alatti könnyen következik, arra Lukács, Szász Ottó, Szegő és Egerváry mutattak rá.

**11.** A következő tétel két «symmetrikus» tag amplitudójának középértékére vonatkozik. A $k$-dik taghoz tartozó symmetrikus tagnak nevezem az $(n-k+1)$-edik tagot. Egerváry és Szász idevonatkozó tétele így hangzik (**39, 40**):

$$\frac{\varrho_k + \varrho_{n-k+1}}{2} \leqq \mathfrak{M}, \; \mathfrak{m}, \qquad k=1, 2, \ldots n \tag{41}$$

és ismét meghatározhatók minden egyes $k$-ra azok az $n$-edrendű trigonometrikus polynomok, amelyekre nézve (41)-ben az egyenlőség jele érvényes.

Megjegyzem, hogy ezek a (41) alatti Egerváry—Szász-féle egyenlőtlenségek a (37) alattiakból nem származtathatók le közvetetlenül.

**12.** Ha a (41) alatti egyenlőtlenségeket összeadjuk és mindkét oldalon $n$-nel osztunk, akkor kapjuk Szász egy régebbi

1917-ből való tételét (**18**). Ez a szép tétel, mely általánosítása a (24) alattinak, így hangzik:

$$\frac{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_n}{n} \leqq \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \tag{42}$$

és egyenlőség megint csak akkor lehetséges, ha a trigonometrikus polynom lényegében a (30) alatti arithmetikai közép:

$$\frac{n+1+n.2\cos\theta+\cdots+1.2\cos n\theta}{n+1}.$$

**13.** Legyen egy legföljebb $n$-edrendű trigonometrikus polynom magassága $\mathfrak{M}$. Mekkora a *differenciálhányadosa* abszolút értékének maximuma, vagyis Max $|f'(\theta)|$? Egerváry és Szász, közösen írt, **40.** számú dolgozatukban megoldják ezt a nem könnyű feladatot. Eredményük:

$$|f'(\theta)| \leqq \mathfrak{M}.n^2 \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}{12}} \tag{43}$$

és ismét létezik olyan $n$-edrendű és $\mathfrak{M}$ magasságú trigonometrikus polynom $f(\theta)$, melyre nézve $|f'(\theta)|$ a (43) alatti egyenlőtlenség jobboldalán álló értéket el is éri.

**14.** Az $f(\theta)$ trigonometrikus polynommal a deriváltján kívül még egy másik fontos polynom áll kapcsolatban: az úgynevezett *konjugált* trigonometrikus polynom:

$$g(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n}(-b_\nu\cos\nu\theta + a_\nu\sin\nu\theta). \tag{44}$$

Ennek amplitudói ugyanazok, mint az $f(\theta)$-éi.

**20.** számú dolgozatában Szász a következő eredményre jut: Ha az $n$-edrendű $f(\theta)$ magassága $\mathfrak{M}$, akkor

$$|g(\theta)| \leqq \mathfrak{M}.\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(n+1)} \tag{45}$$

és az egyenlőség esetét is megállapítja.

**15.** Most áttérek olyan szélsőérték-feladatokat megoldó egyenlőtlenségek fölsorolására, amelyekben $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{m}$ *együtt* szerepel.

Legyen tehát $\mathfrak{M}$ a legföljebb $n$-edrendű $f(\theta)$ trigonometrikus polynom magassága és $\mathfrak{m}$ a mélysége.

Sorrend szerint legelőbb a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ amplitudóknak $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{m}$-től függő határairól kellene szólanunk. Ámde e kérdéssel az irodalomban nem foglalkoztak.

Így hát mindjárt az $|f'(\theta)|$ határolásáról beszélek. Erre vonatkozik S. Bernstein tétele:

$$|f'(\theta)| \leqq \frac{\mathfrak{M}+\mathfrak{m}}{2} n. \tag{46}$$

Minthogy $\mathfrak{M}+\mathfrak{m}=D$-vel, az ingadozással, e szerint Bernstein tétele még így is írható

$$|f'(\theta)| \leqq \frac{D}{2} n.$$

$|g(\theta)|$ és $|g'(\theta)|$ megfelelő becslése nem ismeretes.

**16.** Végre még csak a $z$ komplex változó racionális egész függvényéről szeretnék szólani. Riesz Marcel egyik idevágó tétele így hangzik:

Ha a $z$ komplex változó legföljebb $n$-edfokú $h(z)$ racionális egész függvénye a $|z| \leqq 1$ körlemezen abszolút értékére nézve $\leqq 1$, akkor ugyancsak $|z| \leqq 1$-re $|h'(z)| \leqq n$.

Szász ezt a tételt **37.** számú dolgozatában oly röviden bizonyítja be, hogy bizonyítását ide iktatom:

A föltevés szerint a

$$h(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n \tag{47}$$

polynomra $|h(z)| \leqq 1$ érvényes, ha $|z| = 1$. De akkor ugyanez a

$$k(z) = c_n + c_{n-1} z + \cdots + c_1 z^{n-1} + c_0 z^n \tag{48}$$

úgynevezett reciprok polynomra is érvényes. Ugyanis

$$\begin{aligned} k(e^{i\varphi}) &= c_n + c_{n-1} e^{i\varphi} + \cdots + c_0 e^{ni\varphi} = \\ &= e^{ni\varphi}(c_0 + c_1 e^{-i\varphi} + \cdots + c_{n-1} e^{-(n-1)i\varphi} + c_n e^{-ni\varphi}) = \\ &= e^{ni\varphi} h(e^{-i\varphi}) \end{aligned} \tag{49}$$

és e szerint valóban

$$|k(z)| \leqq 1, \quad \text{ha} \quad |z| \leqq 1. \tag{50}$$

Minthogy azonban a $k(z)$ polynomra áll, hogy $|k(z)| \leq 1$, ha $|z| \leq 1$, tehát $(n-1)$ indexű arithmetikai közepére

$$\frac{nc_n + (n-1)c_{n-1}z + \cdots + 2c_2z^{n-2} + 1.c_1z^{n-1}}{n} \tag{51}$$

ugyanez az egyenlőtlenség érvényes és így, a mondottak szerint, ennek reciprok polynomjára is; vagyis

$$\left|\frac{c_1 + 2c_2z + \cdots + nc_nz^{n-1}}{n}\right| \leq 1, \tag{52}$$

azaz

$$|h'(z)| \leq n, \quad \text{ha } |z| \leq 1, \tag{53}$$

ami Riesz Marcel egyenlőtlensége.

$|h'(z)|$ az egységkörben csak akkor éri el az $n$ értéket, ha $h(z) = cz^n$, hol $|c| = 1$.

**17.** A fölsorolt tételek bizonyításáról csak ritkán emlékeztem meg. Kétféle bizonyítási módszer emelhető itt ki. Az *egyik* lényegben a (7) alatti alaptulajdonságon nyugszik. A *másik* a nemnegatív trigonometrikus polynomok egy parameteres előállításán alapszik. Ez előállítás révén minden egyes olyan szélsőérték-feladatnak, mint amilyeneket itt fölemlítettem, megfelel egy szélsőérték-feladat, mely négyzetes vagy Hermite-féle alakokra vonatkozik. Szász idevágó dolgozataiban ez utóbbi módszert alkalmazza.

## A Fourier-féle sorról.

### I.

**1.** Szász dolgozatainak egy másik csoportjában a Fourier-féle sorral foglalkozik.

Ezeknek egy része a Fourier-féle sor *abszolút* összetartására vonatkozik.

Egy $f(\theta)$ függvény

$$a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + \cdots + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta + \cdots \tag{1}$$

Fourier-féle sora (és általában bármely (1) alakú trigonometrikus sor) akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha a «FOURIER-féle amplitudók» végtelen sora

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n + \cdots \tag{2}$$

konvergens, hol ismét $\varrho_\nu = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2}$, $\nu = 1, 2, 3, \cdots \infty$.

Melyek azok a függvények, melyekre nézve a (2) alatti végtelen FOURIER-féle amplitudóösszeg konvergens? Minthogy a (2) alatti sor konvergenciája esetén az (1) alatti sor minden $\theta$ értékre egyenletesen konvergál, azért csak a mindenütt folytonos és $2\pi$ szerint periodikus $f(\theta)$ függvények jönnek tekintetbe. Szorítkozzunk tehát ilyen függvényekre. Ilyen $f(\theta)$-ra, mint ismeretes, az amplitudók négyzetösszege

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 + \cdots + \varrho_n^2 + \cdots \tag{3}$$

összetartó, de távolról sem mindig maga a (2) amplitudóösszeg. Sőt CARLEMAN szerint alkalmasan választott (mindenütt folytonos és $2\pi$ szerint periodikus) $f(\theta)$-ra az amplitudók hatványösszege

$$\varrho_1^k + \varrho_2^k + \varrho_3^k + \cdots + \varrho_n^k + \cdots \tag{4}$$

bármely 2-nél kisebb $k$ kitevőre divergens.

2. S. BERNSTEIN egy elég terjedelmes és mindenesetre fontos függvényosztályt jelölt meg, amelyre nézve a (2) amplitudóösszeg konvergens:

Ha a $2\pi$ szerint periodikus $f(\theta)$-ra

$$|f(\theta+h) - f(\theta)| < C|h|^\alpha, \tag{5}$$

$$\tfrac{1}{2} < \alpha \leqq 1, \tag{6}$$

minden $\theta$-ra érvényes, vagyis ha a periodikus $f(\theta)$ függvény egyenletesen tesz eleget olyan LIPSCHITZ-föltételnek, melynek $\alpha$ kitevője nagyobb, mint $\frac{1}{2}$, akkor az amplitudósor össztartó. Viszont ha $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, akkor létezik olyan periodikus $f(\theta)$ függvény, mely (5)-nek eleget tesz, míg (2) alatti amplitudósora divergens. Ilyen $f(\theta)$ különben a kritikus $\alpha = \frac{1}{2}$ esetben is létezik, mint azt később HARDY és LITTLEWOOD példán megmutatták.

Megjegyzem, hogy BERNSTEIN tétele már az $\alpha = 1$ esetre is új volt. Nem triviális ugyanis az a tétel, hogy a periodikus $f(\theta)$ FOURIER-sora minden $\theta$-ra abszolút konvergens, ha

$$\left| \frac{f(\theta+h)-f(\theta)}{h} \right| < C, \tag{7}$$

minden $\theta$-ra és zérustól különböző $h$-ra.

3. SZÁSZ **32.**, **33.** és **43.** számú dolgozataiban BERNSTEIN eredményeit lényegesen tovább fejleszti. A helyett, hogy a függvénynövekmény abszolút értékére $|f(u+h)-f(u)|$-re vezetne be LIPSCHITZ-féle præmissát, veszi általánosabban az $|f(u+h)-f(u)|$ négyzetes közepét az egész $(-\pi, \pi)$ közre:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(u+h)-f(u))^2\,du\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

majd, még általánosabban, annak $p$-edrendű közepét $(1<p\leqq 2)$,

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(u+h)-f(u)|^p\,du\right)^{\frac{1}{p}} \tag{9}$$

és ezeket a középértékeket veti alá $\alpha$ kitevőjű LIPSCHITZ-féle föltételnek.

SZÁSZ főeredménye: ha az abszolút függvénynövekmény (9) alatti $p$-edrendű $(1<p\leqq 2)$ közepe $\leqq$ konst. $|h|^\alpha$, $(0<\alpha<1)$, akkor az amplitudók hatványösszege

$$\varrho_1^k+\varrho_2^k+\cdots+\varrho_n^k+\cdots \tag{10}$$

összetartó, ha

$$k > \frac{p}{p\alpha+p-1} = k^\star, \tag{11}$$

míg $k<k^\star$-ra széttartó is lehet.

Lássuk csak egyetlenegy HARDY—LITTLEWOOD-féle példán, hogy SZÁSZ eredménye milyen hasznos. Tekintsük azt az $f(\theta)$ függvényt, mely a $-\pi\leqq\theta<\pi$ közben az

$$f(\theta)=|\theta|^\lambda \tag{12}$$

egyenlettel, egyéb $\theta$ értékekre pedig periodikus ismétléssel van definiálva. $\lambda$ jelentsen $\frac{1}{2}$-nél *kisebb* pozitiv számot. Minthogy ez az $f(\theta)$ függvény $\lambda$-nál magasabb kitevőjű LIPSCHITZ-föltételnek nyilvánvalóan nem tesz eleget és minthogy $\lambda < \frac{1}{2}$, azért BERNSTEIN tétele az $f(\theta)$ függvény FOURIER-sorának összetartására nem nyujt adatot. Azonban könnyű kimutatni, hogy

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(u+h)-f(u))^2\,du\right)^{\frac{1}{2}} < C\,|h|^{\frac{1}{2}+\lambda}, \tag{13}$$

úgy hogy tehát $f(\theta)$ függvényünk abszolút növekményének négyzetes közepe $\frac{1}{2}+\lambda$ kitevőjű LIPSCHITZ-föltételnek tesz eleget. E szerint SZÁSZ tétele alapján (ha (11)-be a $p=2$, $\alpha=\frac{1}{2}+\lambda$ értékeket helyettesítjük) $f(\theta)$ függvényünk esetében a

$$\varrho_1^k+\varrho_2^k+\cdots+\varrho_n^k+\cdots \tag{14}$$

sor összetartó, ha

$$k > \frac{2}{2(\frac{1}{2}+\lambda)+1} = \frac{1}{1+\lambda}, \tag{15}$$

tehát mindenesetre összetartó a

$$\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_n+\cdots \tag{16}$$

amplitudósor.

4. Néhány szót a BERNSTEIN—SZÁSZ-féle bizonyitási eljárásról. Ez egy nevezetes elemi elven alapszik, mely az utóbbi évtizedekben lassan kifejlődött és melynek különösen kiadós értékesítését éppen BERNSTEIN-nak köszönhetjük. Az elv, amelyre gondolok, abban áll, hogy a *függvény n-edrendű trigonometrikus polynommal való közelíthetőségének rendjéből* vonunk következtetést a függvény vagy — mint esetünkben — a függvénnyel kapcsolatos sorfejtés egyes tulajdonságaira (konvergenciájára, abszolút konvergenciájára stb.).

Lássuk, hogyan alkalmazható ez az elv a FOURIER-sor abszolút összetartásának kérdésére?

Ha $T_n(\theta)$ jelöl bármely legföljebb $n$-edrendű trigonometrikus polynomot, akkor ennek $f(\theta)$-ra vonatkozó BESSEL-féle hibanégyzete

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta)-T_n(\theta))^2\,d\theta. \tag{17}$$

Ámde ismeretes, hogy ez a legkisebb az $f(\theta)$ függvény Fourier-féle sorának $n$ indexű $s_n(\theta)$ részletösszegére, amikor is

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta)-s_n(\theta))^2\,d\theta=\tfrac{1}{2}(\varrho_{n+1}^2+\varrho_{n+2}^2+\cdots). \tag{18}$$

Kaptuk tehát a következő tételt:

Az $f(\theta)$ függvény négyzetes amplitudósorának, vagyis a

$$\varrho_1^2+\varrho_2^2+\cdots+\varrho_n^2+\varrho_{n+1}^2+\cdots \tag{19}$$

sornak $n$ indexű maradék-összege

$$\varrho_{n+1}^2+\varrho_{n+2}^2+\cdots \tag{20}$$

$\leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(\theta)-T_n(\theta))^2\,d\theta$, *bármely* $n$-edrendű trigonometrikus polynomot jelentsen is a $T_n(\theta)$. Válasszuk $T_n(\theta)$-nak az $f(\theta)$ Fourier-sorának $n$ indexű arithmetikai közepét, a $S_n(\theta)$ polynomot. Akkor azt kapjuk, hogy a (20) alatti maradék-összeg $\leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta)-S_n(\theta))^2\,d\theta$. Már most elégítse ki, egyszerűség kedvéért, a $2\pi$ szerint periodikus $f(\theta)$ a közönséges Lipschitz-féle feltételt,

$$|f(\theta+h)-f(\theta)|<C|h|^\alpha, \tag{21}$$
$$0<\alpha<1.$$

Akkor, Bernstein egy régebbi és néhány sorban levezethető eredménye szerint, minden $\theta$-ra

$$|f(\theta)-S_n(\theta)|<\frac{\text{konst.}}{n^\alpha}, \tag{22}$$

vagyis $f(\theta)$-nak $n$-edrendű trigonometrikus polynommal való közelíthetőségének a rendje legalább is $\frac{1}{n^\alpha}$. E szerint

$$\varrho_{n+1}^2+\varrho_{n+2}^2+\cdots\leqq\frac{\text{konst.}}{n^{2\alpha}}, \tag{23}$$

az $n$ minden értékére.

A négyzetes amplitudósor e tulajdonságából azonban már következik, hogy az amplitudó-hatványösszeg

$$\varrho_1^k + \varrho_2^k + \cdots + \varrho_n^k + \cdots \tag{24}$$

összetartó, ha

$$k > \frac{2}{2a+1},$$

úgy hogy tehát pl.

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n + \cdots \tag{25}$$

összetartó, ha $a > \frac{1}{2}$ (Bernstein, Szász **32**, **33**).

**5.** Végül csak fölemlítem, hogy újabban Hardy és Littlewood egész elméletet fejtettek ki, mely az eredeti vagy a középes Lipschitz-féle feltételnek eleget tevő függvényekhez kapcsolódó kérdésekre vonatkozik. Ez a fontos elmélet a törtrendű differenciálás és integrálás Riemann—Liouville-féle fogalmán kívül a Lebesgue-féle integrálra támaszkodik.

II.

**5.** A Bernstein-féle tétel és annak Szász-féle kiterjesztése bizonyításában szerepet játszott az $f(\theta) - S_n(\theta)$ különbség végtelen kicsinységének a *rendje*, ha $n$ minden határon túl nagyobbodik. Itt $S_n(\theta)$ jelenti az $f(\theta)$ függvény Fourier-féle sorának $n$ indexű arithmetikai közepét. Mi e különbség *asymptotikus* alakja egy szilárd $x$ helyen? Erre a szorosabb kérdésre felelnek Szász **34.**, **35.** és **38.** számú dolgozatai. A függvényre, az $x$ helyen, különböző Lipschitz-szerű kirovásokat tesz és minden egyes esetre fölállítja a jelzett asymptotikus formulát.

## A hatványsorról.

I.

**1.** Az első részben tárgyalt szélsőérték-feladatok trigonometrikus vagy racionális polynomra vonatkoztak. Most hasonló *szélsőérték-feladatokról* lesz szó, melyek azonban tetszőleges analitikai függvényekre vonatkoznak, amelyek a komplex számsík egy körén belül (mondjuk a $|z| < 1$ körben) regulárisak; vagy vonatkoznak tetszőleges $f(\theta)$ függvény végtelen Fourier-féle sorára.

Fölemlítek néhány régebbi eredményt. Ha $|f(\theta)| \leqq 1$, akkor

$$|s_n(\theta)| \leqq \varrho_n \tag{1}$$

$$\left|\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right| \leqq 1, \tag{2}$$

hol $s_n = s_n(\theta)$ az $f(\theta)$ FOURIER-sorának $n$ indexű részletösszege és $\varrho_n$ az úgynevezett $n$-edik LEBESGUE-féle állandó. Ha

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

$|z| < 1$-re összetartó és

$$|f(z)| \leqq 1, \quad \text{ha } |z| < 1$$

(röviden azt mondjuk, hogy: ha $f(z)$ *az $E$ osztályba tartozik*), akkor

$$|c_n| \leqq 1, \tag{3}$$

$$|s_n| \leqq 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2, \tag{4}$$

$$\left|\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right| \leqq 1, \tag{5}$$

$$\frac{|s_0|+|s_1|+\cdots+|s_n|}{n+1} \leqq 1, \tag{6}$$

hol $s_\nu = c_0 + c_1 + \cdots + c_\nu$.

Mindezekben az egyenlőtlenségekben, alkalmasan választott függvény esetében, az egyenlőség jele válik érvényessé.

**2.** SZÁSZ általánosabban

$$|\lambda_0 c_0 + \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n| = |L| \tag{7}$$

maximumát keresi az $E$ függvényosztályban. Itt $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ tetszőlegesen megadott valós vagy komplex számok, $\lambda_n \neq 0$.

SZÁSZ két esetben tudja meghatározni a Max $|L|$ értéket.

*a)* eset. A

$$(\mu_0 + \mu_1 z + \cdots + \mu_n z^n)^2 \equiv \lambda_n + \lambda_{n-1} z + \cdots + \lambda_0 z^n \quad (\text{mod. } z^{n+1}) \tag{8}$$

kongruencia által meghatározott (és közönséges négyzetgyökvonással nyerhető)

$$\mu_0 + \mu_1 z + \cdots + \mu_n z^n \tag{9}$$

$n$-edfokú polynom gyökei közül egyik sem esik a $|z| < 1$ körbe. (LANDAU-típusú eset; föllép (4) LANDAU-féle megoldásánál.)

SZÁSZ eredménye:

$$\mathrm{Max}\,|L| = |\mu_0|^2 + |\mu_1|^2 + \cdots + |\mu_n|^2. \tag{10}$$

*b)* eset. A $\lambda$ értékek valósak és

$$\frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \cos 2\theta + \cdots + \lambda_n \cos n\theta \geqq 0, \tag{11}$$

minden $\theta$ értékre.

SZÁSZ erdeménye:

$$\mathrm{Max}\,|L| = \lambda_0. \tag{12}$$

Mindkét esetben bizonyos racionális törtfüggvényeknél éretik el $L$ maximuma.

Általában (tehát akkor is, ha sem *a)* sem *b)* nincs kielégitve) az $L$ lineárkombinációra kitűzött *maximum*-feladatot egy *minimum*-föladattal hozza kapcsolatba, melyet RIESZ FRIGYES oldott meg. E minimum-feladat vonatkozik *adott kezdő-együtthatókkal bíró hatványsorokra* és igy hangzik:

Képezzük az összes

$$\varphi(z) = \lambda_n + \lambda_{n-1} z + \cdots + \lambda_0 z^n + \cdots \tag{13}$$

alakú hatványsorokat, melyek $|z| \leqq 1$-re reguláriśak és határozzuk meg erre a függvényosztályra

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|\, d\theta$$

minimumát.

Legyen most már $\lambda$ e minimum értéke. Akkor SZÁSZ szerint

$$\mathrm{Max}\,|L| = \lambda. \tag{14}$$

(L. **36, 37**.)

**3.** SZÁSZ *a)* és *b)* alatti eredményeinek számos érdekes alkalmazását adta. Ezeket, helyszűke miatt, sajnos, nem sorolhatom fel. Csak például emlitem meg, hogy HARALD BOHR tétele, mely szerint bármely $E$ osztályú $f(z)$ függvény

$$|c_0| + |c_1|\, r + \cdots + |c_n|\, r^n + \cdots \tag{15}$$

majorans-sora a $0 \leqq r \leqq \frac{1}{3}$ közben nem válik 1-nél nagyobbá, végeredményben szintén speciális esete SZÁSZ *a)* alatti tételének. Továbbá, ugyancsak e tétele alkalmazásával, SZÁSZ (**27**) a következő fontos tételt kapja: tetszőleges $E$ osztályú függvény $n$-edik deriváltjára az

$$|f^{(n)}(re^{i\theta})| \leqq \frac{n!}{(1-r^2)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{n-1}{2}}{\nu}^2 r^{2\nu}, \tag{16}$$

$$0 \leqq r < 1$$

egyenlőtlenség érvényes. Ha $n=1, 3, 5, 7, \ldots$, akkor, bármely tekintetbe jövő $r$ értékre, meghatározható egy $E$ osztályú $f(z)$ úgy, hogy (16)-ban az egyenlőség jele válik érvényessé. Ez igaz $n=2$-re is. Az $n=4, 6, 8, \ldots$ esetekre nem terjeszkedem ki.

$n=1, 2$-re fölírom külön is a (16) alatti egyenlőtlenséget:

$$|f'(re^{i\theta})| \leqq \frac{1}{1-r^2}, \tag{17}$$

$$|f''(re^{i\theta})| \leqq \frac{2+\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{32}r^4}{(1-r^2)^2}. \tag{18}$$

Végül még megemlítem, hogy ROGOSINSKI és SZEGŐ is, «Über die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben» (Math. Zeitschrift, 28. kötet, 1928) című dolgozatukban az *a)* alatti SZÁSZ-féle tételnek egy szép alkalmazását adják.

## II.

**4.** Ebbe a csoportba tartoznak SZÁSZ **44.** és **45.** számú dolgozatai is, de más témakörben mozognak. Ezekben az ABEL-féle hatványsortétel megfordításáról van szó. Ebben az irányban különösen HARDY és LITTLEWOOD találtak rendkívül eredeti tételeket és SZÁSZ ezekkel foglalkozik említett dolgozataiban. Ide csak azt az összefoglaló és általánosító tételt iktatom, melyet a **45.** számú dolgozat 332. lapján találok:

Legyen

$$B(s) = \int_0^{+\infty} A(u)\, e^{-us}\, du \tag{19}$$

összetartó, ha $s>0$. Legyen továbbá

$$1.\quad sB(s) \to A, \text{ ha } s \to +0 \tag{20}$$

$$2.\quad \liminf_{x=+\infty} \big(A(y) - A(x)\big) \geqq 0, \tag{21}$$

ha $y > x$ és $y$ olyan függvénye $x$-nek, hogy $\frac{y}{x} \to 1$, ha $x \to +\infty$. Akkor

$$A(x) \to A, \text{ ha } x \to +\infty. \tag{22}$$

5. Rokon tárgyú a **42**. számú dolgozat. Ismeretes, hogy az

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \tag{23}$$

végtelen sor összetartó, ha az

$$f(r) = a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n + \cdots \tag{24}$$

$0 \leqq r < 1$-re összetartó hatványsorra a $\lim_{r=1} f(r)$ határérték létezik, és ha ezenkívül

$$|na_n| \leqq C, \tag{25}$$

minden $n$-re.

(25) nyilván æquivalens a következő föltevéssel: az első $n$

$$|a_1|, \ |2a_2|, \ldots \ |na_n| \tag{26}$$

szám között a *legnagyobb* $\leqq C$, bármi legyen is az $n$ értéke. Már most SZÁSZ föltétele:

$$\left(\frac{|a_1|^p + |2a_2|^p + \cdots + |na_n|^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leqq C, \text{ minden } n\text{-re}, \tag{27}$$

$$p > 1.$$

(27) nyilván enyhébb megszorítású, mint (26); ez következik a (27) baloldalának középérték voltából.

## A Weierstrass-féle közelítésről.

**1.** WEIERSTRASS egy ismert tétele szerint bármely az $a \leqq x \leqq b$ közben folytonos $f(x)$ függvény egyenletesen és tetszőleges pontossággal megközelíthető e számközben az

$$1, x, x^2, \ldots x^n, \ldots \tag{1}$$

nemnegatív egész kitevős hatványok alkalmas «véges lineáris összetételével», vagyis

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k \tag{2}$$

alakú közönséges racionális polynommal.

Ezt röviden úgy szokás kifejezni, hogy az (1) alatti nem-negatív egész kitevőjű hatványok végtelen sorozata *bázisa* a folytonos függvények összességének, bármely számközre vonatkozólag.

S. BERNSTEIN vetette fel azt az érdekes kérdést, hogy mikor szolgáltat bázist a hatványoknak

$$1,\ x^{p_1},\ x^{p_2}, \ldots\ x^{p_n}, \ldots \tag{3}$$

sorozata, ahol $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ akármilyen valós pozitív számok. A számköz, amelyről most szó van, a $(0, a)$ köz $(a>0)$; szorítkozhatunk tehát a $0 \leqq x \leqq 1$ közre.

BERNSTEIN két elegendő föltételt talált.

1. Ha

$$\lim_{n=\infty} p_n = +\infty \tag{4}$$

és egyúttal

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_n}{n \log n} = 0, \tag{5}$$

akkor a (3) alatti sorozat bázissorozat.

Például:

$$1,\ x,\ x^{\sqrt{2}},\ x^{\sqrt{3}}, \ldots\ x^{\sqrt{n}}, \ldots \tag{6}$$

bázissorozat.

2. Ha minden $n$-re

$$H < p_n < K, \tag{7}$$

hol $H$ és $K$ pozitív számok, akkor is bázissorozat a (3).

Például:

$$1,\ x\sqrt{x},\ x\sqrt[3]{x}, \ldots\ x\sqrt[n]{x}, \ldots \tag{8}$$

bázissorozat.

2. BERNSTEIN még egy érdekes sejtést is közölt erre a kérdésre vonatkozólag:

Az

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} + \cdots \tag{9}$$

végtelen sor *divergenciája a szükséges és elegendő* föltétele annak, hogy az

$$1,\ x^{p_1},\ x^{p_2}, \dots\ x^{p_n}, \dots \tag{10}$$

sorozat bázissorozat legyen, föltéve, hogy a $p_n$ pozitív kitevők *monoton növekednek.*

Ezt a sejtést CH. H. MÜNTZ bizonyításával meg is erősítette.

Már most SZÁSZ **13.**, **17.** és **23.** számú dolgozataiban egy általános tételt közöl, melyet érdekesen is bizonyít és amely az előbb említett három tételt mint speciális esetet magában foglalja. Ez így hangzik:

Arra, hogy az

$$1,\ x^{p_1},\ x^{p_2}, \dots\ x^{p_n}, \dots \tag{1}$$

sorozat, hol $p_1, p_2, \dots p_n, \dots$ valós pozitív számok, bázissorozat legyen a $0 \leqq x \leqq 1$ számközben, *szükséges,* hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+p_n}{1+p_n^2} \tag{12}$$

végtelen sor, *elegendő,* hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{1+p_n^2} \tag{13}$$

végtelen sor *divergens* legyen.

Figyelemre méltó még SZÁSZ e tételének kiterjesztése komplex $p_n$ kitevőkre.

## Lánctörtek.

**1.** SZÁSZ tizenegy dolgozatában a végtelen lánctörtekkel foglalkozik. Itt arra kell szorítkoznom, hogy egyik legfőbb eredményét ismertessem.

Legyen az

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\cfrac{a_3}{1+\cdots}}} \tag{1}$$

végtelen lánctört konvergens, hol $a_1, a_2, \ldots$ komplex számok. Már most SZÁSZ **14.**, **15.** és **25.** számú dolgozataiban *elegendő* feltételt keres arra, hogy található legyen egy *környezet*

$$|x_\nu - a_\nu| < \varepsilon_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots \infty, \tag{2}$$

az $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ komplex változók végtelen sok méretű terében, melyben az

$$\left[\frac{x_\nu}{1}\right]_1^\infty = \cfrac{x_1}{1 + \cfrac{x_2}{1 + \cfrac{x_3}{1 + \cdots}}} \tag{3}$$

lánctört *konvergens;* itt $\varepsilon_\nu$ pozitív számok sorozata.

SZÁSZ erre általános föltételeket talál. Talán egy nagyon speciális, de azért mégis érdekes esetben mutatjuk be SZÁSZ eredményét, melyet PERRON is felhasznál «Die Lehre von den Kettenbrüchen» című munkájának második kiadásában. A kiindulásul választott lánctört legyen egyszerűen

$$\cfrac{a}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{a}{1 + \cdots}}}, \tag{4}$$

amely, mint ismeretes, a $-\frac{1}{4}$-től $-\infty$-ig egyenesvonalúan fölvágott komplex számsíkban ($-\frac{1}{4}$ beleértésével) konvergens. Már most, SZÁSZ szerint, az

$$\cfrac{x_1}{1 + \cfrac{x_2}{1 + \cfrac{x_3}{1 + \cdots}}} \tag{5}$$

lánctört összetartó, ha

$$|x_\nu - a| \leqq \left(\frac{|b| - |b'|}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{|b'|}{|b|}\right), \tag{6}$$

hol $b$ és $b'$ a

$$\xi^2 - \xi - a = 0 \tag{7}$$

egyenlet gyökei, ($|b'| < |b|$). Ezzel SZÁSZ kibővítette PERRON összetartási tartományát.

*

Végül megemlítem a fontos HILB—SZÁSZ-féle encyclopædia-cikket: «Allgemeine Reihenentwicklungen», Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, II C 11. Ennek a második részét, melynek címe: «Entwicklungen bei komplexen unabhängigen Veränderlichen», SZÁSZ egymaga írta. Szóba jönnek itt a DIRICHLET-féle sorok is, amelyekre vonatkozólag SZÁSZnak értékes eredményei vannak. Ezeknek ismertetéséről azonban, sajnos, épen úgy le kell mondanom, mint több más dolgozatáéról, melyeknek címe azonban a mellékelt jegyzékben megtalálható.

*Fejér Lipót.*

## Szász Ottó matematikai dolgozatainak jegyzéke.

1. Az Hadamard-féle determinánstétel egy elemi bebizonyítása, Mathematikai és Physikai Lapok 19 (1910.), 221—227.

2. A végtelen determinánsok elméletéhez. Doktori ért. 1911, Math. és Phys. Lapok 21, 1912, 224—295.

3. Über gewisse unendliche Kettenbruch-Determinanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-phys. Klasse 1912, 323—361.

4. Ein elementarer Beweis des Hadamardschen Determinantensatzes, Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 27 (1909.), Leipzig 1913, 172—180.

5. Egy determinánstételről, Math. és Phys. Lapok 23 (1914.)

6. Mathematischer Beitrag zur vorstehenden Abhandlung des Herrn Lenz (Berechnung der Eigenschwingungen einlagiger Spulen), Annalen der Physik (4) 43, 1914, 798—809.

7. Valós elemekből álló végtelen lánctörtek összetartásáról, Math. és Természettudományi Értesítő 33, 1915, 654—683.

8. Über eine besondere Klasse unendlicher Kettenbrüche mit komplexen Elementen, Sitzungsb. der Bayer. Akad. der Wiss. Math.-phys. Kl. 1915, 281—288.

9. Über Irrationalität unendlicher Kettenbrüche mit einer Anwendung auf die Reihen (mit F. Bernstein), Mathematische Annalen 76, 1915, 295—300.

10. Bemerkungen zu Herrn Perrons Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche, Math. Ann. 76, 1915, 301—314.

11. Über Irrationalität gewisser unendlicher Reihen, Math. Ann. 76, 1915. 485–489.

12. Eine Extremaleigenschaft der Kurven konstanter Breite (mit A. Rosenthal), Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 25 (1916.), 278—282.

13. Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Math. Ann. 77 (1916.), 482—496.

14. Komplex elemekből álló végtelen lánctörtek összetartásáról, Math. és Természettud. Értesítő 35 (1917.), 503—543.

15. Über die Erhaltung der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche bei independenter Veränderlichkeit aller ihrer Elemente, Journal für die reine und angewandte Mathematik 147 (1917.), 132—160.

16. Über eine Verallgemeinerung des Hadamardschen Determinantensatzes, Monatshefte für Mathematik u. Physik 28 (1917.), 253—257.

17. Folytonos függvények megközelítése adott függvénysorozatból képzett lineáris kifejezésekkel, Math. és Phys. Lapok 25 (1916.), 157—177.

18. Über nichtnegative trigonometrische Polynome, Sitzungsb. der Bayer. Akad. der Wiss. Math.-phys. Kl. 1917, 307—320.

19. Végtelen lánctörtek irrationalitásáról, Math. és Természettud. Értesítő 36 (1918.), 36—55.

20. Über harmonische Funktionen und L-Formen, Mathematische Zeitschrift 1, 1918, 149—162.

21. Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe, Math. Zeitschr. 1, 1918, 163—183.

22. Über arithmetische Eigenschaften gewisser unendlicher Zahlenfolgen und zugehöriger Potenzreihen, Archiv der Mathematik und Physik (III.) 26, 1918, 125—132.

23. Über die Approximation stetiger Funktionen durch Bernoullische Polynome, Journal für Math. 148 (1918.), 183—188.

24. Über Potenzreihen und Bilinearformen, Math. Zeitschr. 4, 1919, 163—176.

25. Über unendliche Kettenbrüche mit komplexen Elementen, Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wiss. Math.-phys. Kl. 1919, 395—406.

26. Über Potenzreihen, die im Einheitskreise beschränkte Funktionen darstellen, Math. Zeitschr. 8, 1920., 222—236.

27. Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitungen einer Potenzreihe, die eine im Einheitskreise beschränkte Funktion darstellt, Math. Zeitschr. 8, 1920, 303—309.

28. Über Konvergenz unendlicher Kettenbrüche mit durchweg reellen Elementen, Acta mathematica 43, 1921, 209—237.

29. Über Hermitesche Formen mit rekurrierender Determinante und über rationale Polynome, Math. Zeitschr. 11, 1921, 24—57.

30. Ein Grenzwertsatz über Potenzreihen, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 21, 1921, 25—29.

31. Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches, Math. Ann. 85, 1922, 99—110.

32. Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen, Sitzungsb. der Bayer. Akad. der Wiss. Math.-phys. Kl. 1922, 135—150.

33. Über Fouriersche Reihen, Jahresb. d. Deutschen Math.-Ver. 32, 1923, 194—198.

34. A Fourier-féle sorok számtani közepeiről, Math. és Phys. Lapok 32, 1925, 18—25.

35. Über die arithmetischen Mittel Fourierscher Reihen, Acta math. 48, 1926, 353—362.

36. Korlátos hatványsorok együtthatóiról, Math. és Természettud. Értesítő, 43 (1926.), 488—503.

37. Korlátos hatványsorokról, Math. és Természettud. Értesítő 43, (1926.), 504—520.

38. Über die Cesàroschen Mittel Fourierscher Reihen, Acta litterarum ac scientiarum regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, 3 (1927.), 38—48.

39. Elementare Extremalprobleme über nichtnegative trigonometrische Polynome, Sitzungsb. der Bayer. Akad. der Wiss. Math.-phys. Kl. 1927, 185—196.

40. Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome (mit E. von Egerváry), Math. Zeitschr. 27 (1928.), 641—652.

41. Über die Partialsummen der Binomialreihe, Math. Zeitschr. 28 (1928.), 147—149.

42. Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes über Potenzreihen, Journal of the London Mathematical Society, 3 (1928.), 254—262.

43. Über die Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen, Math. Ann. 100, 1928, 530—536.

44. Abel hatványsortételével kapcsolatos újabb vizsgálatokról, Math. és Fiz. Lapok, 36 (1929.), 10—22.

45. Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art, Sitzungsb. der Bayer. Akad. der Wiss. Math.-phys. Kl. 1929, 325—349.

46. Allgemeine Reihenentwicklungen (mit E. Hilb), Encyklopädie d. math. Wissenschaften, II C 11, (1922).

# BERICHT ZUR VERTEILUNG DES JULIUS KŐNIG-PREISES VOM JAHRE 1930.

Die Budapester Loránd Eötvös Mathematische und Physikalische Gesellschaft hat ihren diesjährigen Julius König-Preis Herrn Professor Dr. Otto Szász, Privatdozent a. d. Budapester und Frankfurter Universität, zuerkannt, für die Gesamtheit seiner mathematischen Arbeiten. Kommission: G. Rados, Präsident, Mitglieder: J. Kürschák, A. Szücs, Referent: L. Fejér.

Das vorangehende, von L. Fejér verfasste Referat, gibt eine Analyse der schönen und wichtigen Resultate, die der 20-jährigen Forschertätigkeit von Szász zu verdanken sind. Seine Arbeiten sind da in fünf Gruppen eingeteilt: Über trigonometrische und rationale Polynome, Über die Fourier'sche Reihe, Über die Potenzreihe, Über die Weierstrass'sche Approximation, Über Kettenbrüche.

*Leopold Fejér.*

## IRODALOM.

**Matematikai versenytételek.** — *Tanulóversenyein kitűzte az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat, 1894—1928.* — *Megoldásokkal és jegyzetekkel közli* **Kürschák József** *(a magy. kir. vallás- és közoktatásügyi minisztérium támogatásával), [Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok Könyvtára, 3—5. sz.], Szeged, 1929, VIII. + 133. lap.*

E munka az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat egyik legjobban bevált intézményéről, a matematikai tanulóversenyekről ad számot. A Társulat tudvalevőleg 1894 óta minden év őszén az illető évben érettségi vizsgálatot tett tanulók között a középiskolai tananyag köréből vett matematikai versenyt rendez, hogy a versenyzőknek a matematika művelésére való rátermettsége megállapíttassék. A két legjobb dolgozatot egy-egy Eötvös-dijjal jutalmazza és lapjában közzéteszi. A Társulat matematikai tanulóversenyeinek sikeressége kétségen felül áll. Ha végignézünk a versenygyőzteseknek a könyvben közölt névsorán, megállapíthatjuk, hogy a versenybizottság ítéletét a jutalmazottak későbbi tudományos működése mily nagy mértékben szankcionálta. A győztesek között találjuk a budapesti, szegedi, königsbergi, lundi, columbusi (Ohio, U. S. A.) egyetem és az aacheni műegyetem egy-egy mai rendes tanárát és másokat is, akik ma a matematika világszerte elismert művelői közt foglalnak helyet. Néhányan már nincsenek is az élők sorában; ezek közül Zemplén Győző, műegyetemünk nagy fizikusa, és Raj László műegyetemi adjunktus, a világháború hősi halottai; Lukács Ferenc pedig nagysikerű és sokat igérő tudományos pályájának elején a háborút követő nagy járvány áldozata lett. Viszont az is megállapítható, hogy alig voltak oly résztvevői a versenyeknek, akik, amennyiben később tudományos sikereket értek el, már a versenyek alkalmával is ne tűntek volna fel s akiket tehát Társulatunk ne tekinthetne saját felfedezettjeiként. A versenyeredmények ezen objektivitásukat nagy mértékben a matematika természetében rejlő azon körülménynek köszönhetik, hogy már csekély matematikai ismeretek segítségével megoldott feladatok kidolgozásai is alkalmasak a — csaknem mindig már ifjúkorban jelentkező — matematikai tehetség felismerésére. Ehhez persze hozzájárult a — sokszor egészen eredeti — feladatok célszerű megválasztása, ami lehetővé tette, hogy inkább a kidolgozásban mutatkozó matematikai ötletesség és ne csupán a felhasznált matematikai ismeretek mennyisége szolgáljon a versenydolgozatok érdemének fokmérőjéül. Ezek a körülmények már régóta kívánatossá tették a versenyek anyagának összefoglaló és könnyen hozzáférhető egybegyüjtését. A Matematikai és Fizikai Társulát nagy hálával tartozik Kürschák Józsefnek, hogy ezt a fáradságos és sok tekintetben hálátlan feladatot elvállalta, és e célt messze túlszárnyalva, a feladatok mintaszerű kidolgozásával és az ezekhez fűzött igen változatos tárgyú jegyzeteivel oly munkát alkotott, mely bármely ország tudományos irodalmának díszéül szolgálhat.

A könyv t. i. nem a jutalmazott megoldásokat közli, hanem a szerző által — sokszor ezek felhasználásával — készített megoldásokat és sok feladatnak többféle kidolgozását adja. Számos jegyzet azután fokozatosan a tudomány magasabb szféráiba vezeti az ifjú olvasót, a nélkül, hogy az eleminek nevezett matematika területét tárgy tekintetében elhagyná.

Számos nehézséget kellett a szerzőnek legyőznie. Csak néhányra közülük akarunk rámutatni. A kitűzött feladatok egy jelentékeny része természetesen az elemi síkgeometria körébe tartozik. Ezeknek tárgyalása többnyire egy-egy ábrához kapcsolódik. Itt majdnem mindig felmerül a kérdés, hogy a megoldó nem használta-e fel «túlságosan» a *speciális* ábrában feltüntetett viszonyokat, azaz nem kellene-e szerkesztését vagy bizonyítását módosítani, ha — a pontok és vonalak relatív elhelyezkedése tekintetében — az előbbitől különböző ábrára vonatkoznának meggondolásai. Kürschák tárgyalásából az olvasó meg fogja tanulni, hogy e nehézséget csupán az *összes* lehetőségek teljes figyelembevételével lehet legyőzni. Egy másik nagy tárgykör, melyből a versenyfeladatok meríttettek, az elemi számelmélet. Itt az a nehézség lép fel, hogy a tanuló könnyen hajlandó meggondolásaiban oly tételekre hivatkozni, melyeket magától értetődőknek vél, melyek pedig valójában épenséggel nem azok. Elsősorban a természetes számok törzstényezőkre való felbontásának egyértelműségére gondolunk. Kürschák e nehézséget azzal oszlatja el, hogy 14 jegyzetre elosztva, a számelmélet legelső elemeinek valóságos kis tankönyvét nyujtja; ezekben eljut a kis Fermat-féle tételhez is, melynek egy elegáns kombinatorikus bizonyítását adja, rámutatva ily módon számos kitűzött tétel közös forrására. A «maximum létezése» is oly hipotézis, melyet a kezdő (és nemcsak a kezdő) matematikus könnyen magától értetődőnek tart, megfeledkezve arról, hogy végtelen sok valós szám közt — még ha korlátosak is — nincs mindig legnagyobb. Egyik jegyzetében Kürschák — rámutatva a bizonyítás szükségességére — egy tanulságos példa kapcsán ismerteti, hogy mikép lehet maximum létezését bebizonyítani, ami gyakran nehezebb dolog, mint — létezését posztulálva — értékét kiszámítani.

A jegyzetek azonban nemcsak az adott megoldások közvetlen kiegészítésére szolgálnak, hanem sokszor nehéz problémákig is elvezetnek. Ily jegyzetekre különösen oly feladatok kapcsán nyílott alkalom, melyek egy (a kitűzés idejében néha épen új vagy aktuális) komoly matematikai tétel legegyszerűbb eseteképen kerültek kitűzésre. Két jegyzet is foglalkozik a Csebisev-féle polinomokkal és a velük kapcsolatos Markov-féle tétellel. Megtaláljuk egy-egy jegyzetben (bizonyítás nélkül) Laguerre tételét egy bizonyos algebrai egyenlet valós gyökeinek elhelyezkedéséről, Jensen tételét a konvex függvényekről kapcsolatban a számtani és geometriai közép közötti egyenlőtlenséggel, Eisenstein tételét bizonyos algebrai egyenletek irreducibilitásáról. Mindezek a tárgyalások tanulságosan mutatják, miképen lehet, a speciálisról fokozatosan térve át az általánosra, magasabb matematikai vizsgálatokat közel hozni a fiatal kezdő gondolkozásához még akkor is, ha a bizonyításokra nem terjeszkedünk ki.

Különösen két jegyzetre akarjuk még felhívni a figyelmet. Az egyik a két Bolyai oly érdekes életrajzához csatlakozóan Bolyai János abszolút geometriáját vázolja. A másik a nomográfiával ismerteti meg az ifjú olvasót, az általános másodfokú egyenlet egy eredeti nomogrammjával kapcsolatban. Mindkettő a tömör és mégis világos tárgyalás mintaszerű példája.

Kürschák könyve elsősorban a középiskolák ifjúságának van szánva és kétségtelen, hogy ezen ifjúságnak a matematika iránt érdeklődő, tehát tekintélyes része lelkesedéssel fogja fogadni (sőt már fogadta is). De haszonnal és élvezettel fogja forgatni a matematika minden művelője és kedvelője. Igen kívánatos volna, ha a középiskolai tanárság is felkarolná a könyvet és a belőle meríthető bő tanulságokat oktatásában felhasználná. Ez esetben a «Matematikai Versenytételek» — jobban, mint bármely pedagógiai szakmunka — nagymértékben hozzájárulna középiskolai matematikai oktatásunk megjavításához.

*Kőnig Dénes.*

**A magyar tudományos irodalom bibliografiája** *1901—1925., IV.:* **Mathematika,** *összeállította* **Gáspár Ilona dr.** *Budapest, 1930, XI+83 l.*

Az Országos Könyvforgalmi és Bibliográfiai Központ megkezdette a magyar tudományos irodalom szakonként csoportosított bibliográfiájának kiadását és e vállalatnak időrendben harmadik füzeteképen a matematika negyedszázados bibliográfiáját adja (a mechanika kizárásával) 27 szakcsoportba beosztva és felölelve — igen helyesen — a magyar szerzők külföldön és idegen nyelven megjelent műveit is, akár önállóan, akár folyóiratokban jelentek is meg és beleértve a matematikára vonatkozó pedagógiai és tankönyvirodalmat is. A bibliográfia magyarul nem értők számára is használhatóvá válik azáltal, hogy a csoportok és a «jelentősebb» magyar művek címét német fordításban is közli. A válogatás nehézségei miatt kívánatos lett volna e fordítást minden magyar címnél elvégezni.

Gáspár Ilona dr. munkájának megjelenését két szempontból is örömmel kell fogadnunk. Először is kézzelfogható bizonyítékát nyujtja annak, hogy a magyar matematikusok, akik bel- és külföldön szolgálják tudományukat, a magyarok számarányát messze felülmúló mértékben járultak hozzá a modern matematika hatalmas épületének megalkotásához. Bizonyára számos külföldi tudós, kit egy-egy szerző nemzetiségi vagy politikai hovatartozósága, hacsak nem honfitársa, nem szokott érdekelni, amidőn e füzet kezébe kerül, csodálkozással fogja megállapítani egy-egy probléma-csoport magyar nemzeti karakterét. Kívánatos is volna a füzet külföldi elterjedését is elősegíteni.

Egy ily címjegyzék főcélja természetesen az, hogy a kutatónak megkönnyítse az őt éppen érdeklő probléma teljes irodalmának összeállítását. Tekintve a matematika olyannyira nemzetközi jellegét, e cél elérését a magyar szerzőkre való szorítkozás természetesen nagymértékben korlátozza. Mégis azt hisszük, hogy Gáspar Ilona dr. ez irányban is hasznos munkát végzett, már csak azáltal is, hogy munkájában a legtermékenyebb magyar matematikusoknak is *teljes*, e negyedszázadba eső munkásságát megtaláljuk.

E bibliográfia összeállítójának igen nagy nehézségekkel kellett megküzdenie. Ami a teljességet illeti, elég, ha megjegyezzük, hogy a szóban lévő időszakban a magyar matematikusok négy világrész csaknem száz folyóiratában közölték értekezéseiket, és nem könnyű dolog e folyóiratok szerzői közül a magyarokat kiválasztani, lévén a név nem döntő e tekintetben. Az olyanszerű hibák, hogy az angol Ince (43. l.) mint magyar szerepel, hogy a francia Jordan egy cikke (2. l.) a magyar Jordan művei közé jutott stb., elkerülhetetlenek.

Ugyancsak nagy nehézséget okoz a csoportokba való osztályozás, ami tökéletesen egyáltalában nem vihető keresztül még akkor sem, ha — ami itt igen helyesen megtörtént — egy-egy munka több csoportban is szerepel. Gyakran bizony a dolgozat gondos áttanulmányozására van szükség annak megállapítása céljából, hogy pld. a «topológiá»-ba tartozik-e (e rovatnak az 50. lapon első öt címe nem ide tartozik), hogy a «test» szó a címben algebrai vagy geometriai értelemben szerepel-e

(18. l.) stb. Igen kevés hibát vettünk észre a magyar címek német fordításánál is, ami pedig nemcsak nyelv-, hanem alapos szakismeretet is kíván (pld. az 52. lapon Mittelpunkt einer Menge helyébe Schwerpunkt teendő).

GÁSPÁR ILONA dr. lelkiismeretesen és sikeresen küzdött meg ezekkel a nehézségekkel és munkája, akár teljesség, akár szabatosság tekintetében vizsgáljuk, épenséggel nem áll mögötte pld. a lipcsei Akadémia kiadásában megjelenő híres POGGENDORFF-féle Handwörterbuchnak (melynek utolsó, V. kötete az 1904—1922 időszakot öleli fel); igaz, hogy ez úgy országok, mint tudományok tekintetében jóval nagyobb területre terjeszkedik ki.

Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat annál nagyobb örömmel üdvözölheti e bibliográfia megjelenését, mert hasonló irányú munkák kiadása a Társulat programmjában is szerepel. Valóban a Kőnig Gyula-Alapítvány (1918) második rendeltetése (l. Math. és Phys. Lapok, 27. k., 1918, 103. l.), mely eddig nem valósult meg, az lett volna, hogy a magyar matematikusok tudományos becsű munkásságát négyéves ciklusonként ismertesse. Esetleg mellőzve is az ismertetést és pusztán a bibliográfiára szorítkozva most, GÁSPÁR ILONA dr. alapos munkájának időbeli folytatásaképpen és tanulságainak felhasználásával, e hasznos terv megvalósítása ismét aktuálissá válik.

*Kőnig Dénes.*

# TANULÓVERSENYEK.

## Jelentés az 1929. évi XXXIII-ik matematikai tanulóversenyről.

A Társulat XXXIII-ik matematikai tanulóversenyét 1929. okt. 26-án tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten ezúttal is — hála a Rend lekötelező szívességének — a Piarista Gimnázium helyiségeiben. Budapesten 21, Szegeden 7 versenyző jelentkezett; beadatott 14, illetőleg 3 dolgozat.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Hányféleképen lehet egy pengőt aprópénzre felváltani? (Aprópénz az 1, 2, 10, 20 és 50 filléres.)

2. Bebizonyítandó, hogy az

$$1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2-\binom{n}{3}x^3+\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

$k$-adfokú függvény pozitív értékű, ha

$$0\leqq x<\frac{1}{n}.$$

Itt $k$ az $n$-nél nem nagyobb pozitív egész számot jelent,

$$\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{k}$$

pedig a binomiális együtthatók ismert jelölései.

3. Adva van a síkban három, egy ponton átmenő és egymással páronként 60°-os szöget bezáró egyenes: $p$, $q$ és $r$, továbbá három hosszúság: $a\leqq b\leqq c$. Bebizonyítandó, hogy azok a pontok, amelyeknek

az adott egyenesektől való távolsága rendre kisebb $a$, $b$, illetve $c$-nél, akkor és csak akkor alkotják egy hatszög belsejét, ha $a+b>c$. Ha e feltétel ki van elégítve, mekkora a hatszög kerülete?

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, melynek tagjai voltak Rados Gusztav elnöklete alatt Éber József, Faragó Andor, Fejér Lipót, Kürschák József, Rátz László, Szücs Adolf és Kőnig Dénes előadó, 1929. nov. 10-i ülésén egyhangúlag a következő javaslatban állapodott meg:

«A Bizottság a dolgozatok gondos átvizsgálása után tisztelettel javasolja, hogy a br. Eötvös Loránd-jutalom első díja ezidén ne ítéltessék oda, hanem két második díj. Ezekre érdemesnek találta Párducz Nándor és Szolovics Dezső dolgozatait, akik közül az első a budapesti Kemény Zsigmond-reáliskolában Hegyi Ferenc, a második a debreceni izraelita reálgimnáziumban Sebők Emanuel tanítványa volt. Nevezettek az első két tételt teljesen megoldották, azonban a harmadikban a szóbanforgó föltétel elegendő voltát nem bizonyították be. Ez a hiány különben az öszszes dolgozatokban mutatkozik, és ez is indította a Bizottságot arra, hogy ezúttal az első díj odaítélésétől eltekintsen.

Dícséretet érdemel Papp László Szegeden beadott dolgozatáért, aki helyes úton járt, de néhány elnézés folytán az első és harmadik feladatnál hibás eredményre jutott.»

Az 1929. nov. 14-i választmányi ülés a Bizottság e javaslatát egyhangúlag elfogadta.

## Az 1929. évi XXXIII-ik matematikai tanulóversenyen díjat nyert dolgozatok.[1]

### Párducz Nándor dolgozata.

I. A felváltást az

$$1.x+2.y+10.z+20.u+50.v=100$$

egyenlet nem negatív gyökei határozzák meg. Az alábbi táblázatban látható törvényszerűség szerint helyezkednek el a megoldások.

[1] A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

| $v$ | $u$ | $z$ | $y$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0...50 | |
| | | 1 | 0...45 | |
| | | ⋮ | | |
| | | 9 | 0... 5 | |
| | | 10 | 0 | |
| | 1 | 0 | 0...40 | |
| | | 1 | 0...35 | |
| | | . | | |
| | | 7 | 0... 5 | |
| | | 8 | 0 | |
| | 2 | 0 | 0...30 | |
| | | 1 | 0...25 | |
| | | . | | |
| | | 5 | 0... 5 | |
| | | 6 | 0 | |
| | 3 | 0 | 0...20 | |
| | | 1 | 0...15 | |
| | | . | | |
| | | 3 | 0... 5 | |
| | | 4 | 0 | |
| | 4 | 0 | 0...10 | |
| | | 1 | 0... 5 | |
| | | 2 | 0 | |
| | 5 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0...25 | |
| | | 1 | 0...20 | |
| | | . | | |
| | | 4 | 0... 5 | |
| | | 5 | 0 | |
| | 1 | 0 | 0...15 | |
| | | 1 | 0...10 | |
| | | 2 | 0... 5 | |
| | | 3 | 0 | |
| | 2 | 0 | 0... 5 | |
| | | 1 | 0 | |
| 2 | 0 | 0 | 0 | |

Számuk:

$$
\begin{array}{rcl}
51+46+\dots+1 = 11\cdot\frac{51+1}{2} & = & 286 \\
9\cdot\frac{41+1}{2} & = & 189 \\
7\cdot\frac{31+1}{2} & = & 112 \\
5\cdot\frac{21+1}{2} & = & 55 \\
3\cdot\frac{11+1}{2} & = & 18 \\
1 & = & 1 \\
6\cdot\frac{26+1}{2} & = & 81 \\
4\cdot\frac{16+1}{2} & = & 34 \\
2\cdot\frac{6+1}{2} & = & 7 \\
1 & = & 1 \\
\hline
\text{összesen:} & & 784
\end{array}
$$

II. Ha kimutatjuk azt, hogy $f(x)$-ben bármely pozitív és a tőle jobbra álló negatív tag algebrai összege pozitív, kimutattuk azt is, hogy $f(x)>0$. Képezzük a sorozat tagjainak abszolút értékét:

$$1, \binom{n}{1}x, \binom{n}{2}x^2, \dots, \binom{n}{k}x^k.$$

Ki fogjuk mutatni, hogy ez a sorozat monoton fogyó, azaz, hogy

$$\binom{n}{i}x^i > \binom{n}{i+1}x^{i+1},$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2\dots i}x^i > \frac{n.(n-1)\dots(n-i+1)(n-i)}{1.2\dots i(i+1)}x^{i+1}.$$

Mivel csak pozitív mennyiségekről van szó, egyszerűsíthetünk:

$$1 > \frac{n-i}{i+1}\cdot x.$$

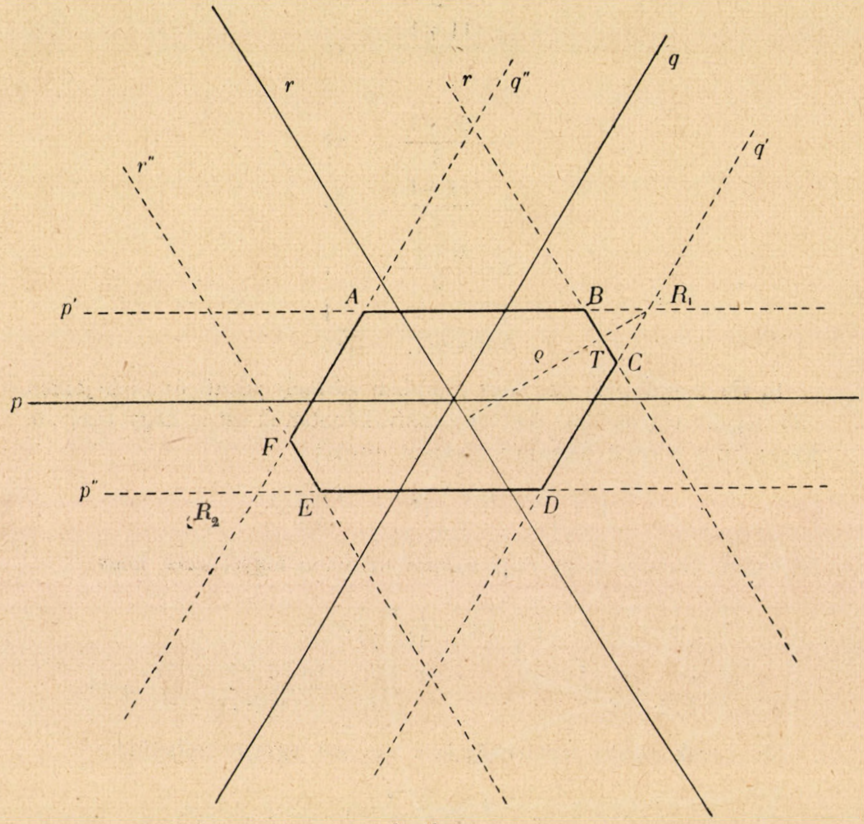
Legyen $x = \frac{1}{m}$, ahol $m > n$.

Ekkor az $\frac{n-i}{mi+m}$ törtről könnyen beláthatjuk azt, hogy valódi tört, ugyanis

$$n - i < mi + m, \quad \text{hol} \quad m > n \geqq i.$$

A függvény tagjainak abszolút értékeiből alkotott sorozat tehát monoton fogyó, ennélfogva két szomszédos, különböző előjelű tag algebrai összege, ha a negatív jobboldalon van, pozitív s így a függvény értéke nagyobb a zérusnál.

III. Határozzuk meg elsősorban azon síksávokat, melyeknek pontjai az adott egyenesektől $a$, $b$, illetőleg $c$ távolságra vannak. Azok a pontok, melyek rajta vannak mind a három síksávon, azaz a három síksáv közös pontjai, bizonyos idomot határoznak meg.




1. ábra.

Nyilvánvaló, hogy a $p', p'', q', q''$ egyenesek által bezárt idom parallelogramma. Az, hogy az $r'$ és $r''$ egyenesek mit változtatnak ezen, attól függ, hogy «$c$» hogyan viselkedik $R_1$-nek $r$-től való $\rho$ távolságához képest. Ki fogjuk mutatni, hogy $\rho = a + b$.

$R_1$ pont $p'$ és $q'$ metszéspontja.

$$p' \ldots y = a$$
$$q' \ldots y = \sqrt{3}\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}} b\right).$$

A fenti két egyenlet közös gyöke megadja $R_1$ derékszögű koordinátáit:

$$R_1 \begin{cases} x_1 = \dfrac{a+2b}{\sqrt{3}} \\ y_1 = a \end{cases}$$

$$r \ldots \sqrt{3}.x + y = 0$$

$$\rho = \frac{\sqrt{3}.x_1 + y_1}{\sqrt{3+1}} = a + b.$$

Ha tehát $c < a+b$, akkor $r'$, $r''$ egyenesek hatszöget fognak kivágni a parallelogrammából. Minden más esetben ($c \geq a+b$) a kérdéses idom a $p'$, $p''$, $q'$, $q''$ egyenesek által határolt parallelogramma lesz.

A hatszög kerülete a következő lesz:

$$k = 2(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}),$$

mivel

$$\overline{AB} = \overline{ED},\ \overline{BC} = \overline{EF},\ \overline{CD} = \overline{FA}.$$

Ez a $R_1BC$ és $R_2EF$ $\Delta$-ek egybevágóságából következik.

$R_1BC$ egyenlőoldalú $\triangle$-ben

$$BC : R_1T = 2 : \sqrt{3},\ R_1T = a + b - c,\ BC = \frac{2a+2b-2c}{\sqrt{3}}.$$

$$\overline{AB} = \overline{AR_1} - \overline{BR_1} = \frac{2b}{\cos 30^\circ} - \overline{BC} =$$

$$= \frac{4b}{\sqrt{3}} - \frac{2a+2b-2c}{\sqrt{3}} = \frac{-2a+2b+2c}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{CD} = \overline{DR_1} - \overline{CR_1} = \frac{4a}{\sqrt{3}} - \frac{2a+2b-2c}{\sqrt{3}} = \frac{2a-2b+2c}{\sqrt{3}}.$$

A hatszög kerülete tehát;

$$k = 2\left[\frac{-2a+2b+2c+2a+2b-2c+2a-2b+2c}{\sqrt{3}}\right] = \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{3}}.$$

## Szolovics Dezső dolgozata.

1. Hányféleképen lehet 1 pengőt aprópénzre felváltani? (Aprópénz az 1, 2, 10, 20 és 50 f.-es.)

2. Bebizonyítandó, hogy az

$$1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2-\binom{n}{3}x^3+\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

$k$-adfokú függvény pozitív értékű, ha

$$0 \leq n < \frac{1}{n}.$$

Itt $k$ az $n$-nél nem nagyobb pozitív egész számot jelent,

$$\binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{k}$$

pedig a binomiális együtthatók ismert jelölései.

3. Adva van a síkban három, egy ponton átmenő és egymással páronként 60°-os szöget bezáró egyenes: $p$, $q$ és $r$, továbbá három hosszúság $a \leq b \leq c$.

Bebizonyítandó, hogy azok a pontok, amelyeknek az adott egyenesektől való távolsága rendre kisebb $a$, $b$, illetve $c$-nél, akkor és csak akkor, alkotják egy hatszög belsejét, ha $a+b>c$.

Ha e feltétel ki van elégítve, mekkora e hatszög kerülete?

### *Kidolgozás.*

1. Vegyük először azokat a csoportokat, amelyekben 1 és 2 f.-es nem fordul elő. Ilyen van

| | | |
|---|---|---|
| $a_1$) | melyben 2 drb 50 f.-es fordul elő | 1 |
| $a_2$) | « 1 « 50 « « « | 3 |
| $a_3$) | « 50 f-es nem fordul elő | 6 |
| | Ezen csoportok száma összesen | 10. |

Vegyük most azokat a csoportokat, melyekben 1 és 2 f.-esek is előfordulnak. Ilyen van:

$b_1$) melyekben 10 fillér áll 1 és 2 f.-esekből $6.8=48$,

t. i. a 10 f.-t 1 és 2 f.-esekből hatféleképpen, és pedig, melyekben 5, 4,...0 2 f.-es van, a 90 fillért pedig 10, 20 és 50 f.-esekből nyolcféleképpen állíthatjuk elő.

$b_2$) melyekben 20 fillér áll 1 és 2 f.-esekből $11.7=77$,

t. i. a 20 f.-t 1 és 2 f.-esekből tizenegyféleképen, és pedig, melyekben 10, 9,. . .0 2 f.-es van, a 80 fillért pedig 10, 20 és 50 f.-esekből hétféleképen állíthatjuk elő.

Hasonló meggondolással kapjuk, hogy azon csoportok száma

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_3$) | melyekben | 30 f. áll | 1 és | 2 f.-esekből | | $16.6=96$ |
| $b_4$) | « | 40 « « | 1 « | 2 | « | $21.5=105$ |
| $b_5$) | « | 50 « « | 1 « | 2 | « | $26.4=104$ |
| $b_6$) | « | 60 « « | 1 « | 2 | « | $31.3=93$ |
| $b_7$) | « | 70 « « | 1 « | 2 | « | $36.2=72$ |
| $b_8$) | « | 80 « « | 1 « | 2 | « | $41.2=82$ |
| $b_9$) | « | 90 « « | 1 « | 2 | « | $46.1=46$ |
| $b_{10}$) | « | 100 « « | 1 « | 2 | « | $51=51$. |

Ezen csoportok száma összesen 774.

Az összes esetek száma tehát $10+774=784$.

2. A felírt függvényben pozitív és negatív tagok váltakoznak. Be fogom bizonyítani, hogy a megadott $x$ értékekre egy pozitív tag mindig nagyobb, mint az utána következő negatív tag abszolút értéke. Így természetesen a függvény pozitív értékű.

Legyen egy általános pozitív tagja a függvénynek $\binom{n}{2l}x^{2l}$, az utána következő negatív tag abszolút értéke $\binom{n}{2l+1}x^{2l+1}$. A függvény pozitív, ha $\binom{n}{2l}x^{2l}>\binom{n}{2l+1}x^{2l+1}$. $x^{2l}$-nel egyszeresíthetünk, mert $x>0$, továbbá fejtsük ki az együtthatókat:

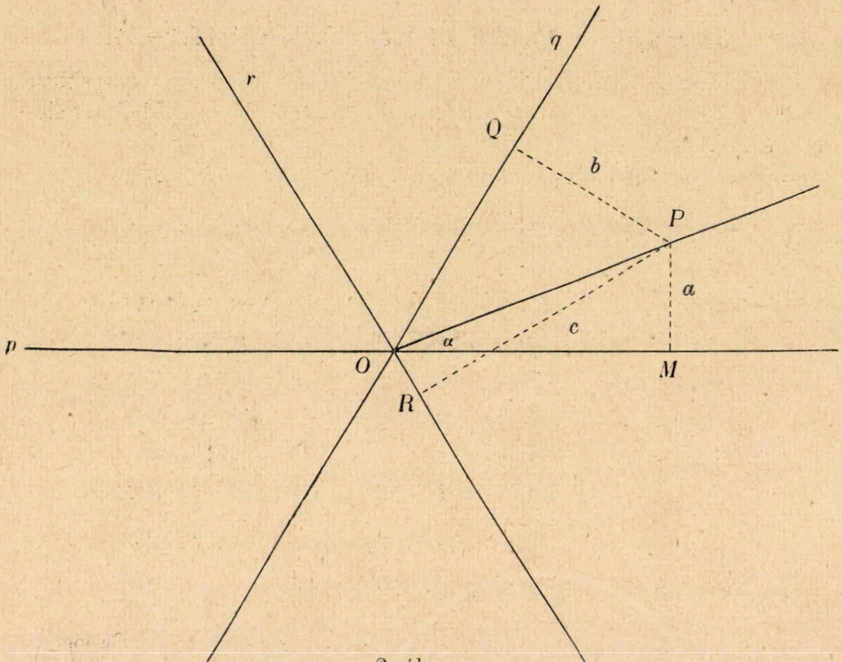
$$\frac{n(n-1)\ldots(n-2l+1)}{1.2\ldots 2l}>\frac{n(n-1)\ldots(n-2l+1)(n-2l)}{1.2\ldots 2l.(2l+1)}x.$$

A baloldallal osztva, nyerjük

$$\frac{(n-2l)x}{2l+1}<1, \text{ azaz } nx-2lx<2l+1.$$

Ez pedig igaz, mert a feltétel szerint $nx<1$ és $-2lx<2l$.

3. Először be fogom bizonyítani, hogy a sík bármely pontjának a három egyenestől való távolságai közül kettőnek az összege egyenlő a harmadikkal.




2. ábra.

Legyen a $P$ pont távolsága $p$-től $\overline{PM}=a$, $q$-tól $\overline{PQ}=b$ és $r$-től $\overline{PR}=c$. Bizonyítanunk kell, hogy

$$a+b=c. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} PMO\triangle\text{-ből} \quad & a = \overline{OP}\sin\alpha \\ PQO\triangle\text{-ből} \quad & b = OP\sin(60°-\alpha) \\ PRO\triangle\text{-ből} \quad & c = OP\sin(60°+\alpha). \end{aligned}$$

Helyettesítsünk (1)-be:

$$OP\sin\alpha + OP\sin(60°-\alpha) = OP\sin(60°+\alpha)\,;$$

$OP$-vel egyszerűsítve és a baloldalt két szögfüggvény összegének képlete szerint átalakítva, nyerjük:

$$2\sin 30°\cos(30°-\alpha) = \sin(60°+\alpha).$$

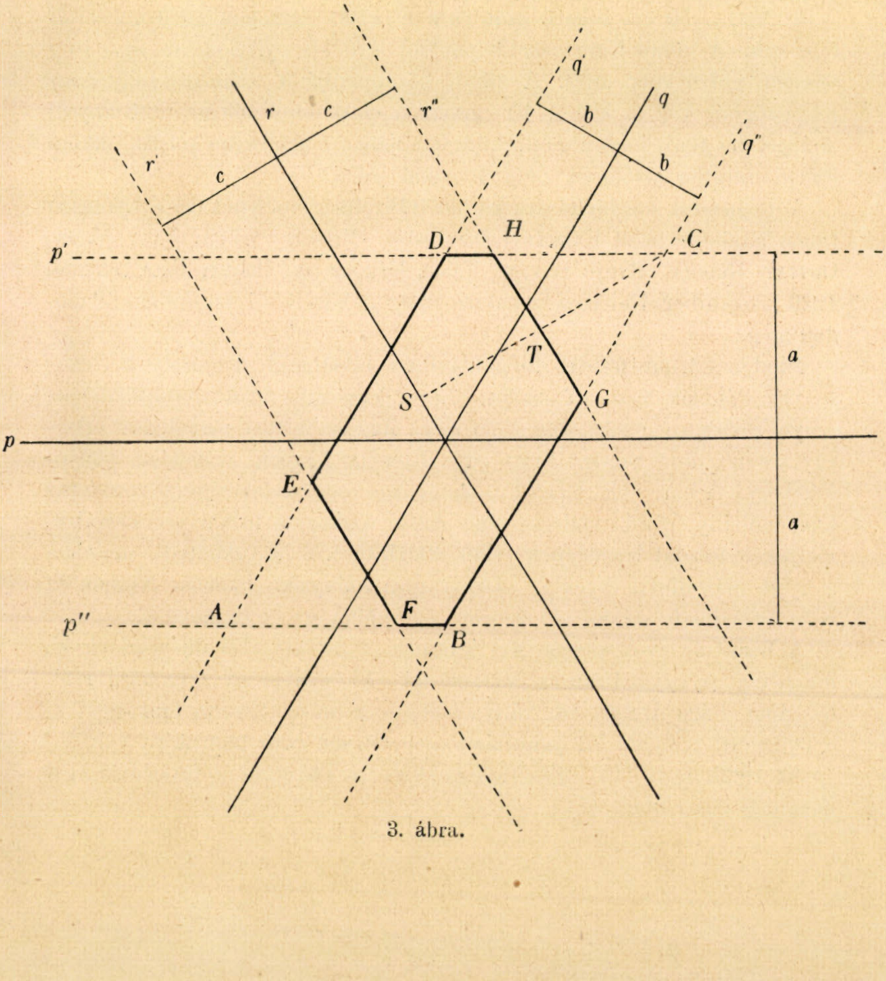
Ez pedig igaz, mert $2\sin 30°=1$ és $\cos(30°-\alpha)=\sin(60°+\alpha)$, mert $30°-\alpha$ és $60°+\alpha$ pótlószögek — $60°+\alpha=90°-(30°-\alpha)$ — $p$, $q$ és $r$ egyenesektől $a$, $b$ és $c$ távolságban lévő pontok a $p$, $q$ és $r$-rel párhuzamos, tőlük $a$, $b$, illetőleg $c$ távolságban lévő egyenesek között vannak. Azok a pontok, melyek a $p$ és $q$-ra vonatkozó feltételt kielégítik, az $ABCD$ parallelogramma belsejében vannak. Ezen parallelogramma oldalait az $r'$, $r''$ egyenesek csak akkor metszik a csúcspontok között, ha $c<a+b$, mert az előbb levezetett tétel szerint, ha $c=a+b$, akkor az $r'$ és $r''$ egyenesek az $A$, illetőleg $C$ ponton mennek keresztül.

Számítsuk ki először az $ABCD$ parallelogramma kerületét. $BC$ oldal vetülete $2a$ $p$-re merőlegesen, tehát

$$BC=\frac{2a}{\cos 30^\circ},\quad CD=\frac{2b}{\cos 30^\circ},\ \text{tehát}\ K_{ABCD}=\frac{4(a+b)}{\cos 30^\circ}.$$

Azonban $CH$, $CG$, $AE$, $AF$ oldalakat le kellene vonni, de csak $CH$ és $AE$-t kell levonnunk, mert $CG=GH$ és $AF=EF$. $C$ pont távolsága legyen $r$-től $\overline{CS}$. $\overline{CS}=a+b$, $CH=\dfrac{CT}{\cos 30^\circ}=\dfrac{a+b-c}{\cos 30^\circ}$. Minthogy $CH=AE$, azért ezt kétszer le kell vonni $K_{ABCD}$-ből.

$$K_{EFBGHD}=\frac{4(a+b)}{\cos 30^\circ}-\frac{2(a+b-c)}{\cos 30^\circ}=\frac{2(a+b+c)}{\cos 30^\circ}=\frac{4(a+b+c)}{\sqrt{3}}.$$




3. ábra.

## Jelentés az 1929. évi XI-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyről.

Társulatunk XI-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét 1929. nov. 9-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten ugyancsak a piarista gimnázium helyiségeiben. Budapesten 18, Szegeden 6 versenyző jelentkezett és beadtak Budapesten 17, Szegeden 5 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Mindkét végén zárt kapilláris csőben középütt $l$ hosszúságú higanyszál van. Vízszintes helyzetben a cső két végében levő gáz térfogata egyenlő, és nyomása akkora, mint az $l$ magasságú higanyoszlop nyomása. A cső függőleges helyzetében mekkora lesz a gázok térfogata és nyomása?

2. Valamely edényben a vizet 10° C-al a fagypont alá hűtöttük; hirtelen rázásnál a vízből mennyi fagy meg?

3. Az $r = 10$ cm sugarú gömbnek $E = 981$ egységnyi elektromos töltése van. A gömb legmagasabb pontján levő kis nyíláson az $m = 10$ g tömegű golyó épen átfér. A gömb középpontjától számítva mily nagy magasságból kell az $e = -10$ egységnyi elektromos töltésű fenti anyagi tömeget leejteni, hogy a gömb középpontjában a sebessége kétszer akkora legyen, mintha a töltések nem volnának jelen?

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, melynek tagjai Fröhlich Izidor elnöklete alatt Harkányi Béla báró, Mikola Sándor, Nagy József, Ortvay Rudolf, Rybár István, Tangl Károly és Pogány Béla előadó, 1920. november 10-i ülésén egyhangúlag a következő javaslatban állapodott meg:

Mind a három feladat megoldásában hibátlanul dolgozott két versenyző: Párducz Nándor és Székely Lidia. A második feladatot mindkét versenyző röviden és szabatosan oldja meg. Az első feladat megoldását a legegyenesebb úton Székely Lidia adja. Párducz Nándor számításai bonyolultabbak. A harmadik feladat matematikai megfogalmazásánál is Székely Lidia néhány rövid, szabatos mondatba foglalja a fizikai premisszákat, melyek a feladat lényegének teljes áttekintéséről tanuskodnak, azonban a nyert másodfokú egyenlet diszkussziója hiányzik. Párducz Nándor itt is hosszasabban számol, de viszont diszkutálja az eredményt is.

A Bizottság ezek alapján azt javasolja, hogy két első díj adassék ki, mégpedig az egyik Párducz Nándor-nak, ki a Kemény Zsigmond reáliskolában Péch Aladár tanítványa volt, és a másik Székely Lidiá-nak, ki a budapesti izraelita leánygimnáziumban Mende Jenő tanítványa volt.

Az 1929. nov. 14-i választmányi ülés a Bizottság e javaslatát egyhangúlag elfogadta.

# TÁRSULATI ÉLET.

## Az 1929. évi XXXIV. közgyűlés.

E közgyűlést a Társulat 1929. május 18-án tartotta meg. A titkár jelentésében három kiváló tagtársunk elhúnytáról emlékezik meg, akik tevékeny működésükkel Társulatunkban elévülhetetlen érdemeket szereztek. Az első ankergrundi KOPP LAJOS c. tankerületi főigazgató úr, aki évtizedeken át jegyzője, majd választmányi tagja volt Társulatunknak, a második LÉVAY EDE reáliskolai igazgató úr, ki hosszú ideig pénztárosa volt Társulatunknak, a harmadik KÁROLY IRÉN főtisztelendő úr, a premontrei rend tagja, akinek nevéhez fűződik a már 10 esztendő óta rendezett «Károly Irén» fizikai tanulóversenyek megalapítása és bőkezű támogatása s aki Társulatunk tiszteleti tagjai között szerepelt. Mindhármuk emlékét kegyelettel fogjuk megőrizni. A titkári jelentés szerint Társulatunk az elmúlt évben 8 előadó ülést és 3 választmányi ülést tartott. Az előadó üléseken 5 matematikai és 5 fizikai tárgyú előadás került napirendre. Az alapszabályok értelmében az év folyamán lelépő választmányi tagok: BARTONIEK GÉZA, FRÖHLICH KÁROLY, JORDAN KÁROLY, KOPP LAJOS, LÓKY BÉLA és SZŰCS ADOLF voltak, kik közül az elhúnyt KOPP LAJOS helyére a közgyűlés HAAR ALFRÉD egyetemi tanárt egyhangúlag megválasztotta, a többi urak pedig fölkérettek a választmányi tagság további viselésére.

## Az 1930. évi XXXV. közgyűlés.

Az 1930. május 17-én tartott közgyűlés titkári jelentése 10 előadó ülésről és 7 választmányi ülésről számolt be. Az előadó üléseken 7 matematikai és 9 fizikai tárgyú előadást tartottak. Az ügyvivő titkár megható szavakkal emlékezik meg Társulatunk érdemes választmányi tagjának, BARTONIEK GÉZA udvari tanácsos úrnak 1930. február 11-én bekövetkezett haláláról. Referál Társulatunk külföldi vendégeiről, kik közül KARL SCHEEL, E. RUPP, H. RADEMACHER és A. SOMMERFELD előadást is tartottak üléseinken. A KŐNIG GYULA-jutalom idei nyertese SZÁSZ OTTÓ, a budapesti egyetem magántanára, a frankfurti egyetem professzora. A jutalmat jelen esetben és ezentúl KŐNIG GYULA-érem alakjában fogják kiadni. A közgyűlés ezután törli az alapszabályok 5. §-ának második bekezdését, mely szerint «Tiszteleti tagul csak magyar állampolgár választható», mert a 9900/1923. sz. belügyminiszteri rendelet értelmében tudományos intézetek nem magyar állampolgárokat is megválaszthatnak tagjaiknak. Ezek alapján a közgyűlés a választmány előterjesztésére megválasztja PAUL PAINLEVÉ urat, a párisi egyetemen az analytikai és égi mechanika professzorát, és ARNOLD SOMMERFELD urat, a müncheni egyetem elméleti fizikusát a Társulat tiszteleti tagjaivá. A közgyűlés az alapszabályok értelmében automatikusan lelépő hat választmányi tagot: GRUBER NÁNDOR, MIKOLA SÁNDOR, ORTVAY RUDOLF, RÁTZ LÁSZLÓ, RIESZ FRIGYES és RYBÁR ISTVÁN-t újból megválasztja, BARTONIEK GÉZA helyére pedig TASS ANTAL-t, a svábhegyi csillagda igazgatóját választja meg.

Miután a közgyűlés külön köszönetet szavazott a Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium által nyujtott 500·— pengő rendkívüli államsegélyért, továbbá a Széchenyi Tudományos Társaságtól kapott 3000·— pengő egyszersmindenkori támogatásért, a tisztújítás következett. A régi tisztikar, melynek megbizatása az alapszabályok értelmében háromévenkint lejár, most visszalép, és a közgyűlés őket újra megválasztja azzal a módosítással, hogy KÜRSCHÁK JÓZSEF helyére, kinek évtizedeken át folytatott buzgó jegyzői működéséért hálás köszönetét fejezi ki, SZŰCS ADOLF-ot választja jegyzővé. SZŰCS ADOLF megüresedett választmányi tagsága helyére pedig KÜRSCHÁK JÓZSEF-et választja meg. Ezek után a jelenlegi tisztikar a következő: FRŐHLICH IZIDOR elnök, RADOS GUSZTÁV és TANGL KÁROLY alelnökök, FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA titkárok, CSÁSZÁR ELEMÉR és SZŰCS ADOLF jegyzők, NAGY JÓZSEF pénztáros.

## AZ «EÖTVÖS LORÁND» MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT 1929-IK ÉVI ZÁRSZÁMADÁSA ÉS VAGYONKIMUTATÁSA.

### *A)* **Bevételek:**

| | |
|---|---|
| 1. Mult évi zárszámadási maradvány: | Pengő |
| *a)* készpénzben | 2·75 |
| *b)* Postatakarékpénztárban | 20·71 |
| *c)* Leszámítoló bankban | 80·00 |
| 2. Tagdíjak | 1595·90 |
| 3. Segélyek és kamatok | 647·94 |
| 4, Franklin-Társulattól hitel | 1289·18 |
| 5. Vegyesek | 587·00 |
| Összesen: | 4223·48 |

### *B)* **Kiadások:**

| | |
|---|---|
| 1. Betétek: | Pengő |
| *a)* Postatakarékpénztárban | 86·50 |
| *b)* Leszámítoló és Pénzváltó Bankban | 402·00 |
| 2. Nyomda | 3367·37 |
| 3. Vegyesek | 287·90 |
| 4. Készpénz | 79·71 |
| Összesen: | 4223·48 |

## A) Vagyon:

### I. Alaptőke.

| | | Korona | Pengő |
|---|---|---|---|
| 1. A Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban: | | | |
| 2600 K. n. é. 4 %-os fővárosi kölcsönkötvény | | 2600·00 | |
| 1800 « « « 6 %-os hadikölcsönkötvény (4-ik kibocsátás) | | 1800·00 | |
| 300 « « « 4 %-os magyar korona-járadékkötvény | Károly Irén alapítvány | 300·00 | |
| 2200 « « « 6 %-os hadikölcsönkötv. (6-ik kibocsátás) | Károly Irén alapítvány | | |
| 36090. sz. a. 1020 P | Károly Irén alapítvány | | 1020·00 |
| 2000 K. n. é. $5\frac{1}{2}$ %-os hadikölcsönkötvény (4-ik kibocsátás) | | 2000·00 | |
| 10000 « « « 6 %-os hadikölcsönkötvény (3-ik kib.) König alap. | | 10000·00 | |
| 2. Pesti Hazai Takarékpénztárban $\frac{04557}{c_2}$ jelzésű könyvben | | 108·00 | |
| 3. Állami kezelésben: Majthényi Ottó hagyaték | | 10000·00 | |

### II. Forgó tőke.

| | Korona | Pengő |
|---|---|---|
| 1. Készpénzben | | 79·81 |
| 2. Betét | | 488·50 |
| 3. Tagdíjhátralék | | 200·00 |
| 4. Nyomtatványok | | 500·00 |
| Összesen: | 29008·00 | 2288·21 |

## B) Teher:

| | Korona | Pengő |
|---|---|---|
| 1. Vagyon | 29008·00 | 2288·21 |
| 2. Franklin-Társulat követelése | | 1289·18 |
| Tiszta vagyon mint egyenleg | 29008·00 | 999·03 |

Budapest, 1930. évi április 30.

*Nagy L. József,*
pénztáros.

Átvizsgáltuk és rendben találtuk:

*br. Harkányi Béla*, *Veress Pál*, *Rátz László*, *Renner János*,
számvizsgálók.

## Az 1929—30. társulati évben tartott előadások.

*1929. szeptember 24.* K. Scheel: Über die Entwicklung der Thermometrie. E. Rupp: Über Elektronenbeugung. K. Tangl: Das Torsionspendel im Wasser. P. Selényi: Über den Kerr-Effekt-Oscillograph.

*1929. október 4.* H. Rademacher: Über die Modelle der nicht Euklidischen Geometrie.

*1929. november 14.* (A tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése.) Schmid Rezső: Az NO-molekula energianivóinak abszolút értékeiről.

*1929. december 12.* Grynaeus István: Az állandó görbületű terek differenciálgeométriájáról.

*1930. január 27.* A. Sommerfeld: Die Elektronentheorie der Metalle und die Natur des Elektrons.

*1930. január 30.* Fröhlich Izidor: «Báró Eötvös Loránd Emlékkönyv». Keletkezése, célja. Emlékünnepélyén tartott beszédekkel való összekapcsolása és tudományos működése maradandó eredményeinek rövid ismertetése. Fekete Jenő: A Báró Eötvös Loránd-féle torziós ingának gyakorlati alkalmazásairól.

*1930. február 27.* Ferenczi Zoltán: Vizsgálatok a hatványsorok szummabilitásáról.

*1930. március 20.* Tihanyi Miklós: Cyklikus determináns három elemből.

*1930. április 3.* Egerváry Jenő: A háromtagú egyenletről. Forró Magdolna: Foszforok abszorpciója.

*1930. április 24.* Fejér Lipót: Jelentés a Kőnig Gyula-jutalomról.

*1930. május 17.* (Közgyűlés.) Rados Gusztáv: Magasabbrendű quadraturákról.

## Új tagok.

Ref. gimnázium (Budapest, Lónyai-utcai), Farkas Dénes kegyesr. tanár (Kecskemét), Fischl Klára tanárjelölt (Bpest), Goll György műegy. tanársegéd (Bpest), Heller Richárd ny. polg. isk. igazgató (Baja), Janicsek József műegy. m.-tanár (Bpest), Kolozsváry Béla gimn. tanár (Bpest), Kőnig Theodora okl. tanárnő (Bpest), Neugebauer Tibor egyet. tanársegéd (Bpest), Spitz Iván okl. tanár (Bpest), Zigány Ferenc egyet. tanársegéd (Bpest). Összesen 11 új tag.

*Meghalt:*

Bartoniek Géza udv. tanácsos (Bpest).

## Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzivebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Nagy József* pénztárnoknak (Vác, Kegyesrendi gimnázium) befizetni,
2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,
3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

# RADOS GUSZTÁV ALELNÖKNEK AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT NEVÉBEN MONDOTT BÚCSÚZTATÓJA FRÖHLICH IZIDOR RAVATALÁNÁL.

Tisztelt Gyászoló Közönség!

A br. Eötvös Loránd Mat. és Fiz. Társulat képviseletében jöttem ide, hogy megdicsőült elnökének, Fröhlich Izidor-nak ravatalára a hálás elismerés babérágát letegyem, hogy a Társulat nevében utolsó hálaszózatot intézzek Ő hozzá, akit hivatásának eszményi fölfogásáért oly mélyen tiszteltünk.

Kutatni és tanitani volt a magaválasztott hivatása, amelyre őt nagy tehetsége prædestinálta.

Hogy e hivatásának mily fényesen megfelelt, arról tanuságot tesznek tudományos munkásságának nagyjelentőségű és maradandó becsű eredményei, amelyek nevének a physika történetében örök helyet biztositanak. Tanúságot tesz továbbá légiószámra menő tanítványainak hálája és szeretete, akik még haló poraiban is áldani fogják kitünő tanáruknak emlékét.

Fröhlich Izidor társulatunk alapitásában és tudományos életében tevékenyen részt vett; választmányának 38 éven át buzgó tagja volt és halhatatlan első elnökünk, br. Eötvös Loránd elhunyta után, mint arra legméltóbb, annak utódja lett az elnöki székben. E tisztséget a legnagyobb odaadással és br. Eötvös szellemében töltötte be.

Önzetlen tudományszeretetével, fáradhatatlan munkásságával és a munka melletti szívós kitartásával, párját kereső lelkiismeretességével mindannyiunknak fényes példát adott arra, hogy miként lehet és kell a tudományt és vele együtt a hazát szolgálni.

Mélyen tisztelt Barátunk! Évtizedes együttműködés után fájdalmas szívvel bucsúzunk el Tőled, akit emelkedett életfelfogásodnál és törhetetlen igazságszeretetednél fogva annyira nagyrabecsültünk és oly melegen szerettünk.

Te, aki életed javarészén át pihenést nem ismerő fáradozással és oly nagy sikerrel kutattad a fénysugár varázslatos titkait, most bevonulsz az örök fényesség birodalmába. Legyen ott édes a pihenésed!

Fröhlich Izidor, szeretett és tisztelt barátunk, Isten veled!

## TANGL KÁROLY ALELNÖK BESZÉDE FRÖHLICH IZIDOR RAVATALÁNÁL.

Szomorú napja a magyar tudománynak az 1931. év január 24-ike. Gyászlobogót tűzött ki a Pázmány Péter Tudományegyetem, fekete zászló leng a Magyar Tudományos Akadémia palotáján, gyászolnak széles ez országban mindenütt, hol a tudományt művelik, mert elvesztettük Fröhlich Izidort. A Pázmány Péter Tudományegyetem, a Magyar Tudományos Akadémia, az Országos Tanárképző Intézet, a kir. magyar Természettudományi Társulat nevében búcsúzom Tőled Fröhlich Izidor, amikor elindulsz arra az útra, mely a nagy tudás örök országába vezet.

Visszapillantok a 78 évre, mellyel a Mindenható jósága megajándékozta; e hosszú életből csodás harmonia kiséretében egy motivum cseng felém, mely így szól: dolgozni. A boldog családi élet nyujtotta örömökön kívül a tudományos munkában és annak sikerén érzett megelégedettségben találta egyetlen igaz örömét. A nagyközönség szemében érdekes eseményeket alig találunk életében, a tudományos munka egész lelkét annyira betöltötte, hogy az ő számára érdekes esemény az volt, ha egy problémát megoldott, ha kutatásai új eredményre vezettek; ilyen eseményekben élete gazdag volt.

Fröhlich Izidor a budapesti tudományegyetem gyermeke, itt kezdte egyetemi tanulmányait báró Eötvös Loránd vezetése alatt, ki felismerte benne tehetségét és egyengette útját az egyetemi kathedrához. Állami ösztöndíjjal két évet töltött a berlini egyetemen Helmholtz és Kirchhoff hírneves német fizikusoknál; itt készítette első tudományos dolgozatát Helmholtz laboratoriumában 1875-ben. Ebben az évben avatta doktorrá a budapesti tudományegyetem bölcsészeti kara. A sors különös kegye megengedte, hogy eredményekben gazdag 50 év után a doktori aranydiplomát is átnyujthatta. Doktori szigorlatán a vizsgáló bizottság tagjai voltak: Petzval Ottó, Jedlik Ányos és báró Eötvös Loránd. Fröhlich Izidor tudós képességeinek eme első tűzpróbáját fényesen állotta meg a fizika nagymesterei előtt. A fizikai tudományok közkatonájává avatták, de csakhamar a magyar fizikusok egyik vezére lett és az is maradt, míg a munkában elfáradva, szemeit örök pihenőre lecsukta. Alig egy évvel a doktorátusa után a budapesti tudományegyetem magántanára lett s azóta 52 éven át 1928-ig tanította az elméleti fizikát, kezdetben mint magántanár, majd 1878 óta mint rendkívüli és 1885 óta mint rendes tanár; tanította odaadással, lelkesedéssel és pontossággal, mert szerette tudományát és az ifjúságot, kinek lelkébe akarta vésni az ő nagy lelkesedését és tudását. Annyira szerette tudományát, hogy még 73 éves korában résztvett a berlini egyetem egy kurzusán, melyen az elmélet legújabb fázisát beszélték meg; ott ült a tanterem padján s szorgalmasan jegyezte az előadásokat. Élénken emlékszem vissza arra az időre, amikor 43 évvel azelőtt először hallgattam Fröhlich Izidor elméleti fizikai előadásait; minden óra után két tábla is megtelt képletekkel, de nem maradtak üres, ijesztő formulák, az ő előadásában elvesztették félelmes voltukat, életre keltek, mert lelket lehelt beléjük és világosan, hangosan hirdették a fizika örök törvényeit és a fizikai világ nagy összefüggését. Tanított az Országos Tanárképző Intézetben is, igazgatótanácsának három évtizeden át lelkes tagja volt, élénken részt vett annak munkájában és intézte diákjainak ügyes-bajos dolgait. Talán itt érezték diákjai legjobban azt a mélységes atyai szeretetet, mellyel egyetemi éveikben őket kisérte, sőt azon túl is.

Egyetemi tanári működése természetesen nem merült ki a tanításban. Az egyetemi ügyek tárgyalásában és intézésében élénken részt vett; Fröhlich Izidor véleménye mindig súlyosan esett latba; bármely ügyet bízott rá a kar, mindig nagy odaadással, lelkiismeretességgel és tárgyilagossággal intézte. Tanártársai három izben választották dékánná és 1911-ben rektor magnifikussá.

Hosszasan szeretnék beszélni Fröhlich Izidor tudós kutató munkájának eredményeiről, hisz a kutató munka volt életének legnagyobb gyönyörűsége; beszélnék mindenek előtt optikai vizsgálatairól, melyek legjobban vonzották; beszélnék a rácsokról elhajlítva visszavert fény jelenségéről, melyet részletesen átkutatott több 10,000 mérést végezve és melyről szebbnél szebb törvényeket állapitott meg, beszélnék a teljes visszaverődésre vonatkozó kutatásairól, melyekkel kimutatta, hogy teljes visszaverődéskor az optikailag ritkább közegbe is hatol fény, beszélnék elektrodynamikai vizsgálatairól, melyek egy újfajta elektrodynamometer és önindukcionormálé szerkesztésére vezettek. Lemondok azonban erről, amit annál könnyebben tehetek, mert hisz kutatásainak eredményei megmaradnak továbbra is,köztünk élnek és hirdetik Fröhlich Izidor dicsőségét.

Kutató munkájának külső elismerésben is bőven volt része. A Magyar Tudományos Akadémia 1880-ban levelező, majd 1891-ben rendes tagjává választotta, 1913 óta osztálytitkár, 1920 óta az Igazgatótanács tagja. Az osztálytitkári teendők intézésében bőven volt alkalmunk csodálni Fröhlich Izidor hihetetlen pontosságát, ügybuzgalmát és azt a nagy szeretetet, mellyel az Akadémia iránt viseltetett; életének talán legkedvesebb órái azok voltak, melyeket az Akadémián tölthetett. 1887-ben az Akadémia a BÉSÁN-díjjal tüntette ki az elektrodynamométer elméletéről szóló pályamunkáját, 1910-ben a nagy jutalmat nyerte el. 1920-ban a Matematikai és Fizikai Társaság elnökévé választotta. A külföld elismerése sem maradt el: a glasgowi egyetem tiszteletbeli doktorává avatta a lord KELVIN ünnepélyén.

FRÖHLICH IZIDOR kedves kollegánk, amikor utolsó nagy útadra indulsz, utadat virágokkal díszítjük, virágokat helyezünk ravatalodra; e virágok elhervadnak, csak egy marad meg: a szeretet, a ragaszkodás és nagyrabecsülés virága, melyet szívünkben hordunk, mely élni fog továbbra is.

FRÖHLICH IZIDOR kedves kollegánk, Isten veled!

Budapest, 1931 január 27.

*Tangl Károly.*

# HENDRIK ANTOON LORENTZ ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA.

P. Zeeman-tól.[1]

Most, hogy összegyűltünk a Hollandi Tudományos Társaság hajlékában, abban az intézményben, amelyhez Lorentz-et hosszú évek folyamán annyi kötelék fűzte, tekintetünk elfátyolosodik. A tudomány templomából a főpillérek egyike ragadtatott ki hirtelen.

Nem csupán a fizika, hanem a nemzetközi tudományos világ is együtt sír azokkal, akiket vele hosszú évek során annyi különféle természetű kötelék fűzött össze. Én is elszorult szívvel állok itt, hogy megfeleljek feladatomnak, ami mégis vonz: megfesteni az Ő személyét és munkásságát Önök előtt.

Hendrik Antoon Lorentz 1853 július 18-án született *Arnhem*-ban. Először Swaters «mester» iskoláját látogatta, később Timmer «mester»-ét és 1866-ban letette az ugyanazon évben *Arnhem*-ban megnyílt középiskola harmadik osztályába a felvételi vizsgát.

A záróvizsgálatot 1869-ben állotta ki; az ötödik osztályba akkor három növendék járt: Lorentz, de Jongh és Haga. Hagá-tól a későbbi *groningen*-i tanártól, aki jelenleg *Zeist*-ben él, nyertem Lorentz ifjúságára vonatkozón adataimat, melyeket

[1] Felolvastatott a *Hollandi Tudományos Társaság*-nak *Harlem*-ben, 1928. évi május hó 19-én tartott ülésén.

most Önöknek elmondandó vagyok. DE JONGH később mint gyarmati tisztviselő halt el *Jáva* szigetén.

A három növendéket erős barátság fűzte össze. Iskolán kívül nagy sétákat tettek *Arnhem* környékén. Esténként tanulmányozták a csillagos eget.

LORENTZ magyarázó tehetsége már középiskolai tanulmányai folyamán is kitűnt: mivel a mathematika és mechanika tanára nem magyarázott elég világosan, a következő napok folyamán LORENTZ segítette ki osztálytársait a nehezebb részekről írt értekezéseivel.

Rendkívüli emlékezőtehetsége, melynek révén csupán két-háromszor olvasott részleteket is kívülről tudott, magyarázza meg, hogy idegen nyelvű írásaiban olvasmányainak sok szava és szófűzése volt feltalálható és az angol nyelv tanára egyszer meg is jegyezte, hogy «stílusa igen emlékeztet a DICKENS-ére».

A záróvizsgálatot követő vakáció folyamán LORENTZ és HAGA elhatározták, hogy fizikai tanulmányokat fognak folytatni és előkészülnek az egyetemi felvételi vizsgálatra. A gímnázium aligazgatója, T. T. KROON dr. külön leckéket adott nekik. A latint illetőleg sok időt szenteltek LIVIUS-nak, mivel a legutóbbi évek folyamán *Leyden*-ben mindig ezen szerző munkáiból kellett fordítani. A vizsgán mégsem LIVIUS-t adták fordításra, hanem OVIDIUS-t, nevezetesen az álomisten lakóhelyének leírását.

E szövegben előforduló, de LIVIUS-ban hiányzó szavak tömege nem okozott LORENTZ-nek nehézséget: «Lássuk csak, bizonyára ki lehet találni körülbelül a szavak értelmét.» Ilyformán LORENTZ 1870-ben beiratkozhatott hallgatónak az egyetemre *Leyden*-ben, ahol a *Harlem*-utcában ütötte fel szállását.

Rendkívül erős memoriája első éves korában újra mutatkozott. Egy napon egy hallgatókkal telt teremben szokás szerint mindenkinek bemutatkozván és nevüket kérdezvén, a cercle végén állók egyike csípősen megkérdezte, hogy nem érné-e meg a fáradságot, feljegyezni a neveket. LORENTZ azt válaszolta, hogy megjegyezte azokat és sorban el is ismételte őket, egyiket a másik után.

Lorentz memoriája később is igen erős volt. Emlékszem, hogy néhány év előtt a Királyi Tudományos Akadémia ülésére érkezvén, Lorentz már felolvasta jelentését és átadta az elnöknek. Midőn kifejeztem sajnálkozásomat, hogy nem hallhattam megjegyzéseit, így szólt: «Várj csak, még leírhatom neked.» Tényleg, egyvégtiben leírt csaknem egy teljes ívet.

1871 novemberében Lorentz megszerezte a licentiátust, miután az egyetemen egy évet töltött volt, ami, mint azt Haga megjegyezte, igen nagy kivételnek számított abban az időben. Lorentz csupán két tanéven át maradt *Leyden*-ben. 1872 őszén az *arnhemi* felnőttek iskolájának tanárává neveztetett ki. Itt családjával együtt a «Steenstraat»-on lakott, ahol nagy és nyugodt dolgozó szobájában senki sem zavarta.

1873 júniusában Lorentz elérte a doktorátust. Ezután is az *arnheim*-i esti tanfolyam tanára maradt és szabad idejét doktori értekezésének kidolgozásával és megírásával töltötte. Avatása 1875 december 11-én ment végbe. Mint a *leyden*-i egyetem professzora, 1878 januárjában tartotta meg inaugurációs előadását.

Lorentz doktori értekezése a fényvisszaverődés és törés elméletét tárgyalta.

Így kezdődött meg a fényről és az elektromosságról szóló nagyszerű kutatásainak sorozata, melyek a fizikára oly nagy hatást fejtettek ki.

1878-ban jelent meg nagy munkája a fénysebesség és a közeg sűrűsége és szerkezete közötti összefüggésről. 1887-ben az «Archives Néerlandaises»-ben, társulatunk folyóiratában, mely annyi érdekes hollandus munkát tartalmaz, jelent meg cikke a föld mozgásának befolyásáról a fényjelenségekre.

Lorentz mind világosabban kifejti egyrészről az éter, másrészről a ponderabilis anyag szerepe közötti különbséget.

Csatlakozik itt Huygens, Fresnel és Maxwell nagy koncepcióihoz és közeledik az elektronelmélethez, amellyel Lorentz neve örökre összeforrt.

Az elektronelméletben elfogadjuk, hogy a testek mozgása alkalmával az éter abszolút nyugalomban marad és hogy minden optikai és elektromos jelenség elektromossággal töltött részecskék helyzetén és mozgásain alapszik. 1892 és 1895-ben megjelent munkáiban Lorentz rendkívül ragyogó módon dolgozta ki ezt az ideát és 1906-ban a *New-York*-i *Columbia* egyetemen tartott előadásaiban már az elektronelméletet annak a fényre és sugárzó hőre való alkalmazásával együtt tárgyalta.

Eleinte nem sokat tudtunk az elektromos részecskék természetéről és töltéséről.

Miután 1896-ban felfedeztem volt, hogy a mágneses erők befolyást gyakorolnak a színképvonalakra, Lorentz elméletével és közreműködésével lehetségessé vált az elektromos részecskékről egészen új adatokat nyerni. Szerencsés véletlennek bizonyult, hogy azok tömege elektromos töltésükhöz képest elég kicsi volt. Lorentz később meg is jegyezte: «ime tehát Zeemann minden speciális elmélettől függetlenül, velem való egyetlen megbeszélés nélkül, felfedezhette, aminthogy fel is fedezte, a a színképvonalak mágneses felbomlását; ez nem sikerült volna neki,» tette hozzá tréfásan, «ha az elektron tömege tízszerte nagyobb lett volna azonos töltés mellett.» Manapság az elektronok azok az alapkövek, melyekből az atomok felépülnek. A mai fizikus számára az anyag nem más, mint negatív töltésű elektronok és pozitív töltésű részecskék aggregátuma.

1895 óta, de már megelőzőleg is, Lorentz megszakitatlanul kitüntetett barátságával. Azon nyolc év folyamán, 1912-től 1920-ig, mialatt Lorentz elnöke, én pedig titkára voltam a Királyi Tudományos Akadémia természettudományi osztályának, a tudományos relációk mellett sokkal általánosabb területen kifejlődött együttműködés folyamán megtanultam becsülni Lorentz-nek embereket és dolgokat biráló és értékelő tehetségét és megfigyelhettem, hogy mennyire szerette mindenki az ő befolyását, melyet mindig oly szerényen érvényesitett.

Lorentz-nek saját tanúságtétele szerint is nagy szerencséje volt az elekronelmélettel. Nem lehetett előre sejteni az elmélet felépitése közben, hogy lehetséges lesz majd látni gyors és szabad röptükben az elektronokat, hogy meg lehet majd őket számolni és meghatározni töltésüket és tömegüket.

Lorentz törekvéseit még egy további szempontból is siker koronázta. A nyugalomban lévő éter elméletének későbbi kifejlesztése által megközelítette Einstein relativitáselméletét. Lorentz meg tudta magyarázni elméletével Fizeau-nak már régebben végzett és a fénynek folyóvizben való tovaterjedésére vonatkozó kisérleteit, valamint a gyors mozgásban lévő üveg- és kvarc-rudakon később általam végzett kisérletek eredményeit is.

Továbbá Eichenwald orosz fizikus igen megfontolt és alapjában véve oly egyszerű kísérletei is magyarázatot találtak a Lorentz elmélet keretei között.

Lorentz elméletének szépsége abban áll, hogy teljes és abszolut egységet képez és hogy az egyes speciális kérdésekre határozott feleletet ad.

Főműve mellett Lorentz a fizikának csaknem minden fejezetét gazdagította értekezéseivel.

Lord Kelvin 1900-ban az alábbi szenzációs címmel tartott előadást: «A tizenkilencedik század folyamán a hő és fény dinamikus elmélete felett összegyülekezett fellegekről» és be kellett vallania, hogy a felhők némelyikét nem képes eloszlatni.

Nem maradtunk meg a fellegeknél: az úgynevezett kvantumelmélet 1900-ban született meg és valóban oly vihar kitörését hozta magával, amily még nem vonult el a fizika felett.

De legyen bármi is végül az eredmény, bizonyos, hogy a kvantumelmélet a Lorentz által megmutatott úton haladhatott és hogy mindig nagy élvezet lesz számunkra Lorentz munkáihoz visszatérni, amelyekből közvetlenül a békés klasszicizmus tiszta és világos levegője árad felénk.

Tudományának eredményeit Lorentz többször ismertette széles közönségnek szánt beszédekben. Ezek az előadások a magyarázatok ékkövei, bár nem mindenki tudja azokat olvasni vagy épp megérteni.

Idézni fogom egyikét azon részeknek, melyből megtudhatjuk, hogy mint vélekedett Lorentz a tudomány alapjairól.

«Azon alapok egyike, melyekről nincsenek eltérő vélemények, elsősorban az a szabály, hogy a fizikában deterministáknak kell lennünk. El kell fogadnunk, hogy az anyagi világ egy bizonyos pillanatbeli állapotából szükségszerűen folyik a következő pillanatban beálló állapot. Vagyis világosabban: a tapasztalat bizonyítja, hogy egyszerű esetekben képesek vagyunk egy megfigyelt állapotból értelmünk révén meghatározni egy későbbi állapotot és posztulálhatjuk, hogy ezt minden újabb esetben is megtehetnénk, ha megfigyeléseink elég messze terjednének és ha gondolkodási képességünk áthatóbb és fejlettebb, bár ugyanoly természetű volna, mint az, mely tényleg megadatott. Alapos okból hihetjük, hogy ezzel jó nyomon járunk. Mindenesetre a nem fizikus is ugyanezen posztulátummal vezetteti magát, ha fizikai jelenségekkel van dolga. Éppúgy, mint mi, ő is jóslást kockáztat meg, sőt talán még több merészséggel.»

Lorentz kétségkívül sokat és mélyen gondolkozott tudományának határairól. Azonban ezekről nem írt nyomtatásban és csupán a sorok között olvasva és itt-ott található megjegyzésekből ismerhetjük meg véleményét.

Ezért annál örvendetesebb, hogy Lorentz H. Y. Groenewegen dr. tanárnak a filozófus Fechner egyik könyvéről való véleményét levélben írta meg, ahol alkalma nyílt néhány metafizikus megjegyzést tenni. Groenewegen elküldte volt Lorentz-nek Fechner «Physikalische und philosophische Atomenlehre» c. könyvét és Lorentz 1915 április közepéről keltezett, igen részletes levelében vázolja a könyv olvasása közben szerzett benyomásait.

Lorentz megjegyzi, hogy nagy élvezettel és általában tökéletes egyetértéssel olvasta, amit Fechner a «physikalische Atomistik»-ről mond. «Szeretném, ha több fejezetet, pl. az «Über den Begriff der Kraft und sein Verhältniss zum Begriff der Materie» címűt minden fizikus elolvasná. Ha Fechner napjainkban írt volna, az atomok és molekulák létezése mellett sokkal meggyőzőbb érveket is felsorakoztathatott volna. Manapság már megtudjuk adni ezen részecskék nagyságát és számát és az érvek egész sokaságának alapján tökéletesen abban az értelemben beszélhetünk az atomok realitásáról, mint pl. a szivárványt alkotó vízcseppek realitásáról. E vízcsöppeket hasonlókép nem figyelhetjük meg külön-külön, mégis senki sem kételkedik létezésükben.»

Miután az éterhipotézist megvitatta, Lorentz érdekesen fejezi be levelét:

«Végül a 244. lapon következnek a kíváncsiságomat legnagyobb mértékben felkeltő metafizikai megfigyelések. Bizonyára nem várja tőlem, hogy ezekhez hozzászóljak, de talán szabad nagy szerényen néhány megjegyzést tennem, mert e terület számomra ismeretlen. Hogy Fechner azon két világnézet közül, melyekről itt szó van, elveti a monadologikus koncepciót, igen megokoltnak tartom: oly lélek, mely csupán egyetlen pontban volna koncentrálva, vagy egy vagy más módon egyetlen részecskéhez volna szorosan kapcsolva, igen rendkívüli valami lenne. Ellenben a szinekológikus felfogásban sok rokonszenveset találok; különben azt hiszem, hogy valami hasonló álláspontjához okvetetlenül el kell jutni.

Az az egyszerű megfigyelés, hogy különböző emberek egymást megérthetik, hogy az egyik ember érzelmei és nézetei nem közömbösek a másikra, azon nézet elfogadására kell hogy vezessen, amelyet sokan közülünk legszívesebben úgy képzelnek el, mintha az összes szellemek egy nagy egység, egy világszellem, egy isten részei lennének. Másoldalról a tények rávezetnek a minden ember teste és szelleme közötti benső összefüggés felismerésére; fizikai szempontból azt kell képzelni, hogy minden szellemi cselekményemnek megfelel egy bizonyos anyagi átalakulás. De ha már most a szellem éppúgy része egy nagyobb egységnek, mint ahogy a test része a materiális mindenségnek, akkor önkénytelenül ahhoz az általánosításhoz jutunk, hogy minden a pszichika területén lejátszódó jelenségnek megfelel egy, materiális területen bekövetkező változás. Ez az okoskodás kétségtelenül megfordítható és mondhatjuk, hogy minden materiális tüneménnyel valami pszichikai természetű dolognak is kapcsolatban kell lenni. Az a világnézet, amelyhez ily módon jutunk, hogy t. i. a szellemi és az anyagi világ elválaszthatatlanul össze vannak kötve, hogy azok csupán két oldalát jelentik ugyanannak a kérdésnek, hogy az anyagi világ a világszellemek materializációja, hogy az anyag legkisebb részecskéje is él, vagy akárhogyan is mondjuk másképp, ez a koncepció bizonyára szoros kapcsolatban van FECHNER szempontjával.

Voltaképp furcsa, hogy mindezek körülbelül függetlenek az atomisztikától, mint azt FECHNER maga is (a 245. és 258. lapon) megjegyzi. Azonban a következőket mondhatnók: Ha minden szellemi cselekménynek valamilyen változás felel meg az agyvelőben, akkor az agynak rendkívül finom és bonyolult szerkezettel kell bírnia, mivelhogy az agyban minden bennünket ért benyomásnak, minden általunk hallott szónak (megelégszem ennyivel) egy vagy más módon meg kell rögzítődnie. És talán kissé könnyebben képzelhetjük el, hogy mindez a megszámlálhatatlan sok atom elrendeződésében bekövetkezett kicsiny változások által rögzíttetik meg, (bárminő szokatlan ez) mint a folytonos kiterjedésű, egymást átható anyagok helyi összetételének és fizikai és kémiai állapotának különbségei révén. Egyelőre az atomisztika mellett szóló ezen érv végeredményben nem más, mint a *fizika* alapján felhozott érv. Egy bonyolult lelki cselekmény mintegy kompenzációképpen hasonló mértékben komplikált anyagi tüneményeket kíván meg és általában ez utóbbiak gazdag választéka számunkra legkönnyebben az atomisztika formájában gondolható el. FECHNER megállapításai különös érdekességgel bírnak és nem zárkózhatunk el előlük. Mindazonáltal, bármennyire is bensőségesek a «szellem» és «anyag» közötti kapcsolatok, szerintem nem tagadható el, hogy ami ezen két területen lejátszódik, az reánk a *különneműség* benyomását teszi. Nem vagyunk képesek sem az egységet, sem az összefüggést megérteni. Az egyik területen nem lehetünk, de nem is szabad lennünk másnak, mint deterministának; a másikon *mindenekelőtt* a szabad akarat érzetével bírunk, amellyel együtt jár a felelősség és a kötelesség érzete. És érzeteink és gondolataink éppoly kevéssé hasonlítanak a materiális állapotokra, amelyek kísérik őket, (amelyeknek azok pszichikai oldalát adják) mint ahogy egy könyv olvasásánál fellépő gondolatok nem hasonlítanak a könyv betűire. A talány annál nagyobb, mivel szellem és anyag és a között, ami velük történik, természetes vonatkozásnak kell fennállni és nem oly fajtájú vonatkozásnak, mely mint a könyv esetében, többé-kevésbbé konvencionális.

Ha már most ez a két terület annyira különböző, azt kérdezhetnők, nem volna-e célszerű (ha merhetek ezzel a kifejezéssel élni) azokat különállókként megtartani. Hogy t. i. a fizikus az ő területén végezze kötelességét és legyen annyira «materialista», amennyire csak akar. És másoldalról, hogy a pszichológia, a morál, a teológia mit sem törődve az anyaggal, tanulmányozzák a szellem tartományának tüneményeit és «magyarázzák» azokat, nyomozván kölcsönös összefüggésüket és visszavezetvén őket legegyszerűbb elemeikre. Ilykép fogván fel a dolgot, szerintem nehezen beszélhetünk az atomisztika nagy jelentőségéről a «szellemi» tudományok szempontjából.»

Óriási az a távolság, mely ezen kontemplatív ideákat a *Zuyderzee*-n végzett munkálatoktól elválasztja. Mint ezen munkálatok bizottságának elnöke (1918—1926), LORENTZ nagy szolgálatot tett hazájának. Itt is a legteljesebb odaadással fáradt a a kezére bízott dologban. Meg is volt az az elégtétele, hogy a felügyelet hajóján keresztülszelhette a számításai tárgyát képező «Waddenzee»-t. Örülhetett annak a változásnak, amit az árapály és szél által hajtott víz a gátak hatása alatt okozott, összhangban az ő számításaival.

LORENTZ 1921-ben hagyta el Leyden-t, hogy mint tanácsadó a TEYLER-féle intézménynél, majd később, LOTSY távozta után a Hollandi Tudományos Társaság titkáraként működjék. *Harlem*-ben alkalma nyílt több módon is elősegíteni a tudomány fejlődését. Ami ezen társaságot illeti, főkép az Archives Néerlandaises újjászervezése és Christian Huygens műveinek kiadásánál való közreműködése által. Bosscha elhunyta után Korteweg lett a főmunkatárs és őt illeti a kiadásból a legnagyobb rész. Lorentz a legnagyobb csodálattal viseltetett Korteweg fáradozásai és a kiadásnál megnyilvánuló éleselméje iránt. Lorentz nem egy találó megjegyzéssel támogatta a kiadást, de a maga részéről úgy tekintette azt, mint ami várhat. Huygens munkáinak tanulmányozásából eredt Lorentz közleménye az optika általános formulájáról.

Lorentz-nek a fizikára kifejtett rendkívüli befolyásáról vessünk most egy pillantást a nemzetközi együttműködésért való tevékenységére.

A fizikai tudományok terén szinte magától értődő, hogy mai tudományosságunk léte az összes művelt nemzetek együttes erőkifejtésén alapszik. Részletesen felsorolhatjuk a nagy invenciók és alapvető törvényszerűségek tekintetében azokat, akik az előkészítést végezték azokig, akik a szerencsés befejezéshez eljutottak. A drótnélküli telegráfiában a németeket, angolokat, franciákat, olaszokat, hollandokat és amerikaiakat illető rész könynyen meghatározható.

Lorentz mint az (E. Solvay kezdeményezésére alakult) 1911 és 1913-ban Bruxelles-ben, majd később még háromszor összegyűlt Conseil de Physique elnöke, a nemzetközi kapcsolatokért sokat tett.

A tanácskozások folyamán a modern elméletek a legkompetensebb tudósok szűk körében kerültek tárgyalás alá. Az első ülésen jelen voltak többek között: Einstein, Henri Poincaré, Planck, Sommerfeld, Perrin, M. Brillouin, Kammerlingh Onnes. Lorentz-ben megvolt egy ily gyülekezetben való elnökléshez szükséges képesség és intelligencia. Otthonos volt minden tárgyalt kérdésben, egyszerű módon meg tudta világitani a legnehezebb pontokat és rendkívüli tapintatával képes volt összhangba hozni a legellentétesebb nézeteket. Idegen nyelvekben való nagy jártassága is rendkívül hasznosnak bizonyult számára.

Kitűnően jellemzi Lorentz-et a Conseil megnyitásakor mondott beszéde. Bölcsen és szerényen a következőkép nyilatkozott:

«Mi lesz a tanácskozás eredménye? Nem merem megjósolni, mivel nem tudom, mily meglepetések várnak reánk. De mivel józanul nem lehet meglepetésekre számítani, valószínűnek fogadom el, hogy együttműködésünk csak kevéssel járul hozzá a közvetlen haladáshoz. A tudomány előhaladása inkább egyéni erőfeszités, mint kongresszusok, vagy éppen valamely tanács hozzászólásai következtében történik és nagyon lehetséges, hogy mialatt mi itt egy problémán vitatkozunk, a világ egy másik pontján egy magános tudós megtalálja a megoldást. Szerencsére ebben semmi elbátortalanító nincsen. Ha nem is jutunk el az akadályok leküzdéséig, innen fölöttébb hasznos ideákat és szompontokat vihetvén magunkkal, meg lesz a kedvünk és elő is leszünk készülve, hogy azokat — mindegyikünk a saját módján — újból és újból elővegye.»

Tényleg, egy magános tudós volt az, — amennyiben napjainkban elszigeteltségről beszélhetünk — nevezetesen a kopenhágai Niels Bohr, aki a Conseil-t foglalkoztató problémákat csakhamar megoldotta.

1921-ben abban a szerencsében részesültem, hogy láthattam Lorentz-et a Conseil elnöki székében a fáradtság legkisebb jele nélkül vezetni a tanácskozásokat.

1923-ban tagja lett a Nemzetek Szövetsége által alakitott Szellemi együttműködés Bizottságának és miután Bergson egészségi okokból lemondott, annak elnökévé választatott. Ez az elnökség még sokkal nagyobb feladatot rótt reá, mint a Conseil-beli.

Kötelességünkről való világos felfogása, hogy minden erőnkkel a nemzetek jó egyetértésén tartozunk munkálkodni és a szivós és készséges munkásnak ő általa adott példája végül is legyőzte a szkeptikusokat. Nemrég Einstein a «Grotius» évkönyvben festette néhány lapon, hogy milyen megfontolt és szilárd személyiség volt Lorentz a szellemi együttműködés bizottságában.

Ha madártávlatból végigtekintünk Lorentz életén, azon határozott eredményhez jutunk, hogy az igen boldog volt. Mindenki szerette őt és senki sem irigykedett reá. Sőt ha volt is irígye, azt a személyes érintkezés lefegyverezte. Egy napon így szólt hozzám: «Életem egyik szaka sem tartott tovább vagy volt rövidebb, mint ahogy szerettem volna. Mindig megvolt az az érzésem, hogy jól volt úgy, ahogyan történt.» Ez a csodálatos egyensúlyozottság minden tettében, különösen élemedett korában, feltalálható.

Intelligenciája rendkívüli volt. Beszédének vagy tollának minden szavát ragyogó világosság jellemezte. Jellemének kvalitásai éppoly magas fokúak voltak, mint intelligenciájáé, őszinteség és szélső igazságosság voltak ideálja, emlékezőtehetsége tüneményes volt.

Feleségével, hű élettársával több utazást tett keleten és nyugaton és meglepő, mily részletes benyomások maradtak meg emlékezetében a látott személyek és dolgok felől. Szellemének rugalmassága 40 év folyamán semmit sem változott. Konkrét fizikai képekben — amelyeket matematikai formába is tudott önteni — szokott gondolkodni. A szellemi adományok ezen kombinációja igen ritka és kettős zsenialitást igényel. Ő maga Fresnel-el érezte rokonnak magát, aki iránt bensőséges és mély csodálatot érzett. Mindnyájan tiszteljük Fresnel-t, mint a tudomány nagy mestereinek egyikét, akinek megadatott a természet rejtélyeit mélyebben és behatóbban, mint bárki másnak, átkutatni és akinek alkotóképessége a legcsillogóbb fénnyel sugárzott. Lorentz-et szintén ez a rendkívüli világosság jellemezte s egyszerű matematikai képletekkel, midőn az lehetséges volt és konkrét formában talált új igazságokat s kutatott a természet mélységeiben.

Ha Lorentz-re gondolunk, ugyanakkor Fresnel neve is eszünkbe jut. Huygens nevét is említhetjük (amint azt meg is tették) és nem érdemetlent ér ez a megtiszteltetés.

Lorentz személyiségének, kedvességének, szeretetteljes mosolyának, fekete szemei fényének emléke mindaddig élni fog, míg az utolsó is közülünk, kik őt személyesen ismertük, el nem múlik.

De munkássága mindenki számára tárva marad, a jövendő századok folyamán is.

Francia eredetiből fordította: *Schmid Rezső.*

# HENDRIK ANTOON LORENTZ'S LEBEN UND LEBENSWERK.

Von P. Zeeman.

Vorstehender Nekrolog ist eine Übersetzung des im «Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles» (série A, tome XI, p. 155. 1928.) unter dem Titel «Hendrik Antoon Lorentz, sa vie et son oeuvre» von P. Zeeman erschienenen Originals.

Übersetzt von: *R. Schmid.*

# ÓLOMCHLORID ELEKTROMOS VEZETŐKÉPESSÉGÉNEK HŐMÉRSÉKLETI FÜGGÉSE *KCl* HATÁSÁRA.

1. Szilárd ionvezetőknél az elektromos vezetés mechanizmusa szempontjából fontos kérdés az, hogy milyen természetűek azok az ionok, amelyek az elektromos áramot közvetítik. Ionkristályoknál különösen az a kérdés, hogy egy, a kristályrácsban szabályos elhelyezkedésű ion részt vehet-e az áramban, illetőleg az áramközvetítő ionok a rácsnak nem olyan helyeiről származnak-e, ahol a szabályos kristállitok között kevésbé szabályos átmenetek vannak.

A következő vizsgálatok ólomchlorid pastillákon történtek, melyekhez 0·005 súlyrész *KCl* kevertetett. Ismeretes ugyanis, hogy ha ionvezetőkhöz kis mennyiségben némely ionokat adunk, azok vezetőképességében lényeges változások lépnek fel.[1] Ezt a jelenséget feltűnő módon mutatja ólomchlorid *KCl*, illetőleg *NaCl* hozzáadására.[2] Egy ionvezetőben — natriumchloridban — a vezetőképesség lényeges változását észlelték egészen más módon, nevezetesen mechanikai deformáció hatására Gyulai és Hartly,[3] ha csak átmenetileg is. Hartly továbbá egy még be nem fejezett dolgozatában azt találta, hogy ha a deformáció ma-

[1] A. D. Goldhammer: Zeitschr. f. Phys. **57**. 1929. 183.

[2] C. Tubandt és H. Reinhold: Zeitschr. f. Elektrochemie **29**. 1923. 313. old. — R. Ketzer: Zeitschr. f. Elektrochemie **26**. 1920. 77. old.

[3] Z. Gyulai és D. Hartly: Zeitschr, f. Physik. **51**. 1928. 378. oldal. — Mat. és Fizikai Lapok 1928. 214. old.

gasabb hőmérsékleten történik, a kristály specifikus vezetőképességében állandó változások lépnek fel, melyeket az jellemez, hogy a deformált kristályban az ionok kiváltási munkái kisebbek.

Munkahypothesisként a két jelenség párhuzamba állítható oly módon, hogy míg utóbbi esetben a külső deformáció, előbbi esetben a pastillába bepréselt idegen ionok hozzák létre a környezetükben azokat a változásokat, amelyeket aztán mi a kristály, illetőleg a pastilla vezetőképességében észlelünk. A vezetőképességnek a hőmérsékleti függése sok esetben, egy úgynevezett VAN' T HOFF-féle formulával, $K = Ae^{-\frac{B}{T}}$ állítható elő, hol $K$ a specifikus vezetőképesség, $T$ az absolut hőmérséklet, $B$ az ionok kiváltási munkája és $A$ egy a vezetési ionok számával arányos állandó. Mindazon esetben tehát, midőn egy ionvezető vezetőképességének hőmérsékleti függése egy ilyen formulával állítható elő, módunkban van az illető anyagban a vezetési ionokra nézve részletesebb tájékozódást szerezni. A cél tehát a $KCl$-el kevert ólomchlorid esetében az, hogy a hőmérsékleti függés kimérésével megállapitsuk azt, hogy alkalmazható-e arra a fenti exponenciális összefüggés, és ha igen, akkor a $KCl$ adalék milyen változásokat hoz létre az ionok kiváltási munkáiban, illetőleg az ionszámokban, szemben a tiszta ólomchloridra vonatkozó értékekkel.

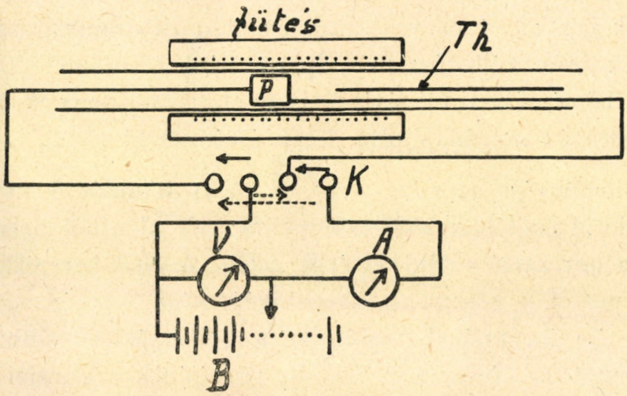
2. Az ólomchlorid chemiailag tiszta ólomoxydból (MERCK-től zur Analyse mit Garantieschein) készült.[1] A $KCl$ ugyancsak MERCK-től származik (zur Analyse mit Garantieschein). A pastillák előállítása végett a $KCl$ az ólomchloriddal nitrogén, illetőleg chlor atmosphærában összeolvasztatott. Az olvadékot achatcsészében porrá törve, egy kézisajtóban 10 mm átmérőjű, 6—10 mm hosszúságú pastillák készültek. Az alkalmazott nyomások csak közelítőleg voltak egyenlők, miután megfelelő manometer

---

[1] Az ólomchlorid előállításáért és még sok chemiai tanácsért dr. BRUCKNER ZOLTÁN kollegámnak e helyen is köszönetet mondok.

nem állott rendelkezésre. A pastillákon az áram bevezetésére először aranyfólia, később az aranyfólia és pastilla közé vékony $PbS_2$ réteg szolgált kontaktfelületül.[1] A pastilla hőmérővel együtt egy üvegcsőben egy kis elektromos fűtőtest belsejében foglalt helyet. Az üvegcső nitrogénnel volt töltve.

A vezetőképesség mérésére eltérőleg W. SEITH-től[2] — aki a tiszta ólomchlorid vezetőképességének hőmérsékleti függését




$P$ = pastilla, $Th$ = hőmérő, $K$ = kommutator, $V$ = voltmérő, $A$ = Ampère-mérő, $B$ = acc.-telep.

1. ábra.

mérte — az úgynevezett áramfeszültségi módszer jött alkalmazásba. Bár áramforrásul accumulatorok szolgáltak, a pasztillán váltakozó áram ment át a polarisatio megakadályozására. Ez

---

[1] A $KCl$ keverékkel és aranyfóliával készített pasztillák vezetőképességükben 0-tól egész 50 Voltig terjedő intervallumban erős feszültségi függést mutattak (bemutatva az Akadémián 1930. jan. 2-án). Újabb vizsgálatok arra mutatnak, hogy e feszültségi függés polarisatiós természetű. Ha ugyanis a kommutatort meg nem engedett nagy forgásszámmal forgatjuk, a feszültségi függés kissé csökken. Ha a pastilla és aranyfólia közé vékony ólomsulfid réteget iktatunk be, az észlelt feszültségi függés lényegében megszűnik. A közönséges polarisatiós feszültségektől (1—2 Voltig terjedő) eltérő nagy feszültségi függések, párhuzamban az egyidejűleg fellépő thermoelektromos jelenségekkel, részletes vizsgálatok tárgyát fogják képezni.

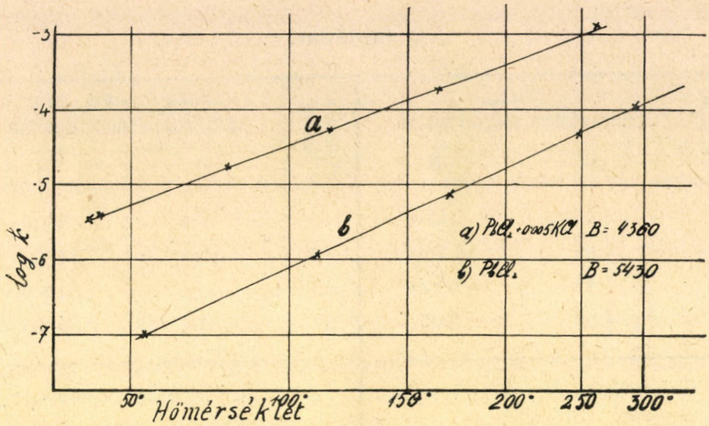
[2] W. SEITH: Zeitschr. f. Physik 56. 1929. 802. oldal.

egy forgó kommutator által történt, mely kifejezetten erre a célra szerkesztetett és amint az 1. ábrából látható, az áramot a pastillába való belépés előtt váltakozó irányúvá tette. Direkt erre a célra végzett mérések azt mutatták, hogy a pastillákban fellépő polarisatiós áramok elenyésző csekélyek voltak. Ugyancsak a kommutator keféin fellépő átmeneti ellenállások a pastillák ellenállása mellett elhanyagolható csekélyek. A kapcsolást mutatja az 1. ábra. *K* jelzi a kommutator segmentumokat és a nyilak jelzik egy negyed fordulás után az áramváltozás irányát. Az áram változása másodpercenként körülbelül 40 volt.[1]

3. A hőmérsékleti függését a tiszta ólomchloridnak W. Seith [2] már mérte és megállapította, hogy érvényes rá a van' t Hoff-féle összefüggés, azaz $K = Ae^{-\frac{B}{T}}$. A $B$ állandót ő sublimált ólomchlorid esetében 5535-nek találta, míg oldatból nyert kristályokra egy kissé eltérő értéket talált. A $KCl$ keverékkel készített pastillák elektromos vezetőképessége szintén egy van' t Hoff-féle formulával írható le a hőmérséklet változására, amit mutat az, hogy a 2. ábra *a* görbéjének a pontjai szigorúan egy egyenesen feküsznek, azaz az összefüggés a log $k$ és az $\frac{1}{T}$ között lineáris. Egy mérési sorozatot tiszta és keverékpastillára tüntet fel az 1. táblázat és a 2. ábra. A keverékpastilla vezetőképessége olyan mértékben nagyobb, mint a tiszta

[1] A kommutator valójában kettős kommutatornak van szerkesztve. Ez lehetővé teszi azt, hogy elektrolytek vezetőképességének mérésénél a szokásos kis induktor és telephon helyett egyenirányú feszültséget és egyenáramú mérőkészüléket alkalmazzunk. Az első kommutator az egyenáramból váltakozó áramot csinál és ezt vezetjük be a Wheatstone berendezésbe. A híd áramát pedig a második kommutatorral egyenirányítjuk, mikor is bármilyen egyirányú nullkészülék használható. Az előny az, hogy a telephonnál érzékenyebb készüléket is alkalmazhatunk, továbbá az, hogy az alkalmazott feszültség pontosan ismeretes és nem olyan nagy, mint induktoroknál. A kettős kommutator az iskolai oktatásban kényelmesen alkalmazható a váltakozó áram, a frekvencia és az egyenirányítás fogalmainak szemléltetésére. Elkészítette Klein Ottó egyetemi mechanikus, Szeged.

[2] W. Seith: fentebb idézve.




2. ábra.

anyagé, amint azt már KETZER[1] megállapította. A 2. ábrában összehasonlításképpen fel van tüntetve egy mérési sorozat (*b* görbe) a tiszta anyagon. Látható, hogy az *a* egyenes hajlása az $\frac{1}{T}$ tengelyhez kisebb, mint a *b* görbe hajlása. Ez azt mutatja, hogy a *B* állandó a *KCl* hozzáadására kisebb lesz és pedig számszerűen 5430-ról 4360-ra esik le. Ez másszóval azt jelenti, hogy az ólomchloridhoz 0·005 súlyrészben hozzáadott *KCl* a vezetési ionok

**1. táblázat.**

| $PbCl_2$ | | | | $PbCl_2+0{\cdot}005\ KCl$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $\frac{1}{T}$ | $k$ | $\log k$ | $t$ | $\frac{1}{T}$ | $k$ | $\log k$ |
| 53·5° | 0·003065 | $0{\cdot}99 . 10^{-7}$ | —7·004 | 42·8° | 0·00317 | $38{\cdot}6 . 10^{-7}$ | —5·413 |
| 110° | 2612 | 11·5 « | —5·939 | 79·5° | 284 | 173·0 « | —4·762 |
| 169·5° | 2261 | 71·0 « | —5·137 | 115·8° | 257 | 506·0 « | —4·296 |
| 248·5° | 1920 | 480·0 « | —4·318 | 164·0° | 229 | 1810·0 « | —3·742 |
| 291·1° | 1775 | 1115·0 « | —3·953 | 262·6° | 187 | 14200·0 « | —2·857 |
| | | | | 41·0° | 318 | 41·0 « | —5·387 |

[1] R. KETZER: Zeitschr. Elektrochemie **26.** 1920. 77. oldal.

2. táblázat.

| Pasztilla száma | $PbCl_2$ chlorgázban megolvasztva | | Pasztilla száma | $PbCl_2+0{\cdot}005\ KCl$ chlorgázban megolvasztva | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | | *A* | *B* |
| 9 | 1·41 | 5310 | 10 | 4·36 | 4340 |
| 11 | 1·65 | 5430 | 12 | 6·88 | 4500 |
| 15 | 1·29 | 5500 | 16 | 4·04 | 4360 |
| 18 | 1·08 | 5420 | 17 | 9·02 | 4680 |
| | nitrogéngázban megolvasztva | | | nitrogéngázban megolvasztva | |
| 6 | 5·12 | 5460 | 7 | 4·78 | 4400 |
| W. Seith[1] | 6·55 | 5535 | sublimálva | | |
| | 6·29 | 5430 | | | |
| | 1·43 | 5850 | oldatból kristályosítva | | |

kiváltási munkáit kereken 20%-al csökkenti le. Ez a megállapítás qualitative megfelel a Hartly által deformált kősó kristályokon végzett megfigyeléseknek.

4. Míg az ionok kiváltási munkáira nyert értékek egyöntetűen változnak, az *A* állandó értékei nem mutatnak olyan egyértelműséget. Ennek a szemléltetésére meg kell figyelni a 2. táblázatban W. Seith munkájából közölt értékeket. A tiszta ólomchloridra más és más *A* értéket talál a szerint, amint a kristályokat sublimálás vagy kikristályosítás szerint nyeri. Ugyanilyen intervallumban változnak az *A* értékek jelen vizsgálatoknál is, ha az ólomchloridot clor, illetőleg nitrogén atmoszférában olvasztjuk meg. A nitrogénben azonban a megolvasztásnál kevés ólom válik ki, ami az olvadékot szürkére festi. Éppen ezért a definitiv méréseknél chlorban olvasztott anyag jött csak alkalmazásba. A 2. táblázat szerint a chlorban készített pas-

[1] W. Seith: Zeitschr. f. Phys. **56.** 1930. 805. oldal.

tilláknál az $A$ értékek a $KCl$ hatására mind nagyobbak lesznek. Tekintettel azonban arra, hogy a nitrogénban megolvasztott pastilláknál, bár a $B$ értékek a rendes viselkedést mutatják, az $A$ értékek praktice változatlanok maradnak, viszont W. SEITH-nél az $A$-értékek a tiszta anyag esetében oly változásokat mutatnak, mint itt a chlorban való megolvasztás esetén a tiszta és keverék pastillák: a 2. táblázat négy első sorának adatai alapján mégsem állíthatjuk, hogy a $KCl$ hatására a vezetési ionok száma megnőtt. Ezen számok csupán annyiban bírnak jelentőséggel, hogy egy ilyen hatásnak a valószínűségét nem zárják ki. Miután elvi jelentőségű, hogy a $KCl$ és más keverékek a vezetési ionszámot az alapanyagban emelik-e vagy nem, további mérések vannak folyamatban jól meghatározott feltételek mellett. Erre kínálkozik az adalék ion koncentrációjának a változtatása, mikor is kilátás van arra, hogy elég kis koncentrációk esetén az $A$ és $B$ értékek hozzásímulnak az alapanyag megfelelő értékeihez. A koncentráció változtatása még azzal az érdekkel is bír, hogy így talán magyarázatot nyerhetünk GOLDHAMMER [1] által alkalihalogén kristályokon végzett azon megfigyelésére, mely szerint a keverék ionok által létrehozott növekedése a vezetőképességnek egy bizonyos koncentrációjánál maximumot ér el és azután újra esik. Ugyanez a jelenség kiolvasható KETZER [2] számadataiból ólomchlorid és $KCl$, $NaCl$ esetére is.

A méréseket a Természettudományi alap támogatásával beszerzett eszközökkel végeztem.

Szeged, 1930. dec. 22. Egyetemi kísérleti fizikai intézet.[3]

*Gyulai Zoltán.*

---

[1] A. GOLDHAMMER: fenntebb idézve.

[2] KETZER fentebb idézve.

[3] Az előkészitő vizsgálatoknál WEBER SAROLTA kisasszony köszönetreméltó módon segédkezett.

# DIE TEMPERATURABHÄNGIGKEIT DER ELEKTRISCHEN LEITFÄHIGKEIT DES BLEICHLORIDS MIT *KCl* ZUSATZ.

Es wird die Temperaturabhängigkeit des mit *KCl* Zusatz hergestellten Bleichloridpastillen untersucht und festgestellt, dass diese auch mit einer VAN' T HOFF'schen Formel — $K=Ae^{-\frac{B}{T}}$ darstellbar ist ($K$=spezifische Leitfähigkeit, $T$=absolute Temperatur, $A$ und $B$ Konstanten). Mit Hilfe der Formel wird festgestellt, dass die $B$ Konstanten, die Ablösungsarbeiten der Leitungsionen gegenüber denen des reinen Bleichlorids durch den *KCl* Zusatz um 15—20 % verkleinert werden. Die $A$ konstanten zeigen bei den in Chlorgas geschmolzenen Pastillen eine über 100 % gehende Vergrösserung, aber nachdem sie schon am reinen Material so weitgehende Änderungen aufweisen (W. SEITH), zur endgültigen Entscheidung des *KCl* Zusatzes auf die Ionenzahlen sind weitere Messungen im Gange.

*Z. Gyulai* (Szeged)

# TELJESÍTMÉNYERŐSÍTŐK.

## 1. Bevezetés.

A rádiótechnikában az utolsó évek legaktuálisabb kérdései özé méltán sorolhatók a teljesitményerősítők problémái.

Ezeknek a problémáknak a tisztázása azért válik szükségessé, mert a megoldott kérdések segélyével mint teoretikus bázissal jobban megalapozhatók mindazon rádiótechnikai követelmények, melyek az utóbbi időben szükségessé váltak.

Ha figyelemmel kisérjük a rádiótechnika utolsó éveinek történetét, akkor kétségtelenül észre kell vennünk, hogy a legutóbbi nagyvonalú törekvés a teljesítmények fokozása volt úgy az adó, mint a vétel technikában.

A rádióhirmondó-állomások épitésével az utóbbi időkben minden igyekezet odairányul, hogy a leadott, vagy helyesebben mondva, kisugárzott elektromos energia minél nagyobb legyen. Ez természetesen csak nagy frekvenciájú teljesitményerősítő segélyével vált lehetségessé.

A vételtechnikában ugyancsak megtaláljuk az igyekezetet a leadott teljesítmény fokozása felé, melyet a mindinkább nagyobb hangenergia szükséglet eredményezett. A fokozott hangerő iránt támasztott követelményeknek lettek azután a folyományai a hírszóró (public adress) berendezések és a hangosfilm leadókészülékek elektroakusztikai tartozékai.

Az előbb elmondottakból látjuk, hogy a teljesítményerősítő problémája úgy a rádió, mint az audió frekvenciájú tartományokat felöleli, benne megtalálhatók a modern rádiótechnikának csaknem az összes kérdései.

Az alábbi kis dolgozat nem öleli fel ezt a hatalmas kérdéskomplexumot, hanem csupán azokat az idevágó kérdéseket fogja tárgyalni, melyek e problémával való foglalkozásnál a legelőször felmerülnek.

Dynamikus viszonyokról lévén szó, az elektroncső dynamikus karakterisztikájú és munkadiagrammjai azok, amelyek elsősorban teendők vizsgálat tárgyává.

Meghatározandók továbbá, hogy mily feltételek mellett vehető ki a teljesítményerősítőkből a maximális elektromos energia.

Külön tárgyalandók a rádiófrekvenciájú teljesítményerősítők a maximális teljesítmény kívánalma szempontjából.

Az audiófrekvenciájú erősítők vizsgálatánál már más szempontokat kell figyelembevenni. Nevezetesen azt, hogy itt cca. 15,000 herzig menő frekvenciasáv egyenletes erősítésről van szó, ami lényegesen más feltételeket igényel, mint amikor csak egy bizonyos frekvenciát kell erősíteni, ami pedig, amint tudjuk, a nagyfrekvenciájú erősítők esete.

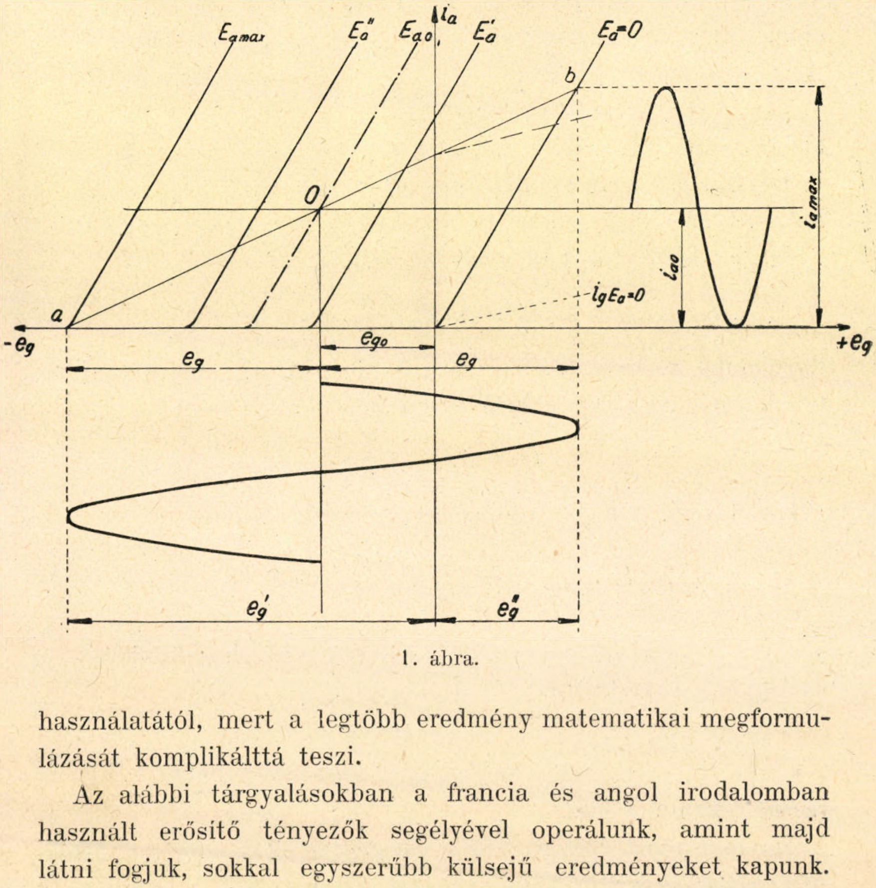
Ha mindezek a kérdések nagy vonásokban tisztázva vannak, akkor felmerül az a probléma, vajjon milyen módon lehet az említett erősítőkön leadott elektromos teljesítményeket megmérni.

Későbbiekben a teljesítmény mérés egy olyan módozatát fogjuk tárgyalni, amely főként audiófrekvenciájú teljesítményerősítőknél alkalmazható. Ennél az eljárásnál meghatározhatók az intenzítás s a terhelőkör hatásos ellenállásának számértékei az üzemi viszonyok mellett. Ezen adatok segélyével — amint azt majd később látni fogjuk — a leadott elektromos teljesítmény könnyen meghatározható.

A fentebb felsoroltak azok a kérdések, melyek a teljesítményerősítők vizsgálatánál legelőször feltűnnek. Ezért a vázolt munkaprogramm az alábbi dolgozat rövid összefoglalása.

## 2. Az elektroncsövek dynamikus karakterisztikája.

Az elektroncsövek dynamikus karakterisztikájáról az alábbi[1] irodalmi utalásokban bőségesen találunk felvilágosítást. A tárgyalások egyszerűsége kedvéért azonban majd eltekintünk a német rádiótechnikai irodalomban használt áthatolási tényező




1. ábra.

használatától, mert a legtöbb eredmény matematikai megformulázását komplikálttá teszi.

Az alábbi tárgyalásokban a francia és angol irodalomban használt erősítő tényezők segélyével operálunk, amint majd látni fogjuk, sokkal egyszerűbb külsejű eredményeket kapunk.

---

[1] H. G. Möller: Die Elektronenröhren III. Auflage. Se. 36. — A. Forstmann und E. Schramm: Die Elektronenröhre Se. 95. — A. Forstmann und E. Schramm: Über Arbeitskennlinien und die Bestimmung des günstigsten Durchgriffes von Verstärkerröhren zur Verstärkerung nieder frequenter Schwingungen. Jahrbuch d. d. T. u. T. Bd. 38. Se. 89.

A két említett tényező között — amint tudjuk — csupán az a különbség, hogy az egyik a másiknak a reciprok értéke.

Eme bevezetés után térjünk rá azoknak az ismereteknek a tárgyalására, amelyekre a későbbiek folyamán szükségünk lesz.

Az elektroncső statikus karakterisztikájának sorozatát ha felvesszük, akkor az 1. ábrán láthatót kapjuk.

A statikus karakterisztikák, vagyis amikor az anódkörben ellenállás nincs, különböző

$$E_a'; \; E_a''; \; E_{a_{\max}}$$

anódfeszültségek mellett vétettek fel.

Legyen a lámpa anódkörében $R_a$ külső ellenállás. Keressük meg ott az ennek megfelelő dynamikus karakterisztikát.

Ha az ismeretes LANGMUIR-formulát

$$i_a = A\,(E_a + \mu e_g)^x$$

figyelembe vesszük, és keressük a rácsfeszültségnek azt az értékét, melynél $i_a$ anódáram egyenlő nullával, vagyis

$$0 = A\,(E_a + \mu e_g)^x$$

akkor, ha $E_a = E_{a_{\max}}$ kapjuk

$$E_{a_{\max}} = -\mu e_g' \qquad e_g' = -\frac{E_{a_{\max}}}{\mu}.$$

Vagyis a rendelkezésre álló maximális anódfeszültségnél, a dynamikus karakterisztika kiinduló pontja

$$e_g' = -\frac{E_{a_{\max}}}{\mu}$$

rácsfeszültségnél lesz.

Ha már most csökkentjük a rácsfeszültséget abszolut értékben, akkor az anódáram növekedni fog.

Evvel egyidejűleg az anódbatteriából a lámpa anódjára jutó feszültség csökkenni fog.

Ha az anódáram zérus, akkor a lámpa anódjára jutó feszültség természetesen egyenlő a batteria $E_{a_{\max}}$ feszültségével.

Egy tetszőleges $i_a$ anódáram, az anódkörben lévő ellenállás mentén $i_a.R_a$ feszültségesést létesít. Az anódbatteria ez esetben fedezi ezt a feszültségesést s csupán a batteria feszültségéből megmaradó rész jut majd az elektroncsőre. Vagyis

$$E_{a_{\max}} = i_a R_a + E_a.$$

Ahol $E_a$-val jelöljük a lámpára jutó feszültséget. Ez pedig egyenlő

$$E_a = E_{a_{\max}} - i_a R_a.$$

Ha az $e_g'$-t lecsökkentjük nullára s majd egy pozitív $e_g''$ rácsfeszültséget addig növelünk, míg

$$E_{a_{\max}} = i_a.R_a$$

ebben az esetben

$$E_a = 0 \quad \text{és} \quad i_{a_{\max}} = \frac{E_{a_{\max}}}{R_a}.$$

Ennek megfelelő pont lesz a dynamikus karakterisztika végső pontja.

A dynamikus karakterisztika egyenes volna az $a$-ponttól a $b$-pontig, ha rácsáram nem volna. De mivel az van, a dynamikus karakterisztika az ábrán látható eredményvonalnak megfelelően alakul ki.

Ha a dynamikus karakterisztika felének megfelelő nyugalmi vagy dolgozó pontot választjuk ki, ennek megfelel az $e_{g_0}$ rácsfeszültség és $i_{a_0}$ nyugalmi áram.

Ennek megfelelően

$$E_{a_0} = E_{a_{\max}} - i_{a_0} R_a,$$

ahol $E_{a_0}$ a nyugalmi áramnak megfelelő és a lámpa anódján létrejövő nyugalmi anódfeszültség.

Ha tehát a nyugalmi pont körül a rácsfeszültség $e_g$ értékkel fog sinusoidálisan változni, a rácsáramtól eltekintve az anódáram szintén sinusoidálisan $i_a$ értékkel változik.

Most pedig nézzük, hogy mi lesz ennek a karakterisztikának a meredeksége.

Azt tudjuk, hogy $e_g$ változó rácsfeszültségnek megfelelő $i^a$ anódáram változás kifejezhető az alábbiakban:

$$i_a = \mu \frac{e_g}{R_a + R_i},$$

ahol $R_i$ a lámpa belső ellenállása. A terhelőkör ellenállása pedig $R_a$. Tehát, amint látjuk, ebből a formulából igen egyszerűen megkaphatjuk a dynamikus karakterisztika meredekségét.

$$M_D = \frac{i_a}{e_g} = \frac{\mu}{R_a + R_i}.$$

Ebből láthatjuk azt is, hogy a dynamikus karakterisztika meredeksége annál kisebb, minél nagyobb a külső $R_a$ ellenállás.

Most pedig nézzük, hogy miként változik a dynamikus karakterisztika meredeksége akkor, ha az $R_a$ ohmikus ellenálláson kívül még önindukció is van jelen.

Ha a rácsfeszültség $\omega$ körfrekvenciájú, ennek megfelelőleg az anódáram is ilyen váltakozású lesz. Az anódkörben a terhelés impedanciája tehát

$$Z = R_a + jL\omega.$$

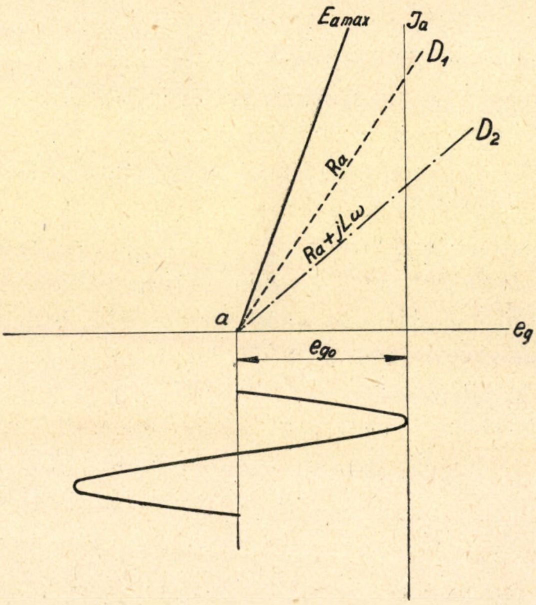
A rendelkezésre álló maximális anódfeszültségnek $E_{a_{\max}}$-nak, megfelelő statikus karakterisztika $S$ a 2. ábrán látható. Nyugalmi pontnak válasszuk meg a karakterisztika kiinduló $a$-pontját, aminek $e_{g_0}$ előfeszültség felel meg.

Ha már most a rácsfeszültség e nyugalmi pont körül váltakozik, illetve csökken, és ha az anódkörben csak $Ra$ ohmikus terhelés van, akkor az említett módon ennek megfelelő $D_1$ dynamikus karakterisztikát kapjuk.

Ennek a meredeksége

$$M_{D_1} = \frac{\mu}{R_a + R_i}.$$

Ha a $R_a$ ohmikus ellenállás növekedne, a karakterisztika meredeksége csökkenne. Az induktív ellenállás következtében előálló impedancia növekedést, a meredekség szempontjából ellenállásnövekedésnek foghatjuk fel. Az $R_a$ ohmos ellenálláshoz a $L\omega$ induktív ellenállás járul s így az eredő impedancia $R_a + jL\omega$ lesz. Az ilyen impedanciájú terhelő körnek a dynamikus karakterisztikája ugyanoly meredek lesz, mint amilyen az ohmszámban vele egyenértékű ohmikus terhelő köré volna.




2. ábra.

Az induktív terhelésnek megfelelő $D_2$ karakterisztika meredeksége tehát

$$M_{D_2} = \frac{\mu}{(R_a + jL\omega) + R_i}$$

vagy másképpen, amikor is a reális részeket külön összeadjuk

$$M_{D_2} = \frac{\mu}{(R_a + R_i) + jL\omega} \cdot$$

Tehát most láttuk, hogy egy bizonyos induktív ellenállásnak megfelelőleg miként alakul ki a dynamikus karakterisztika meredeksége. A következő feladat pedig most az lesz, hogy megvizsgáljuk azokat a szempontokat, melyek a dolgozó vagy munkapont helyének meghatározásához vezetnek.

A teljesitményerősitők munkapontjának meghatározásánál azt a szempontot kell figyelembe venni, hogy az erősítés alatt a lámpa túl ne legyen terhelve. A túlterhelésen azt értjük, hogy a munkapont bizonyos megválasztásánál az anódlemezen fellépő veszteségek, melyek az elektronoknak az anódlemezhez való ütődésből adódnak és felszabadult hőmennyiség formájában jelentkeznek, már oly nagyok, hogy az anódlemez a melegedés következtében gyengén izzani kezd.

Ez az a pont, amely a lámpa maximálisan megengedhető terhelését meghatározza.

Ha ugyanis az anódlemez erősen izzik, a lemezben okkludált gázok felszabadulnak, amik azután a lámpa vacuumát megrontják. Rosszabb esetekben az anódlemezen felszabadult hőmennyiség olyan nagymérvű is lehet, hogy ezt helyenként megolvasztja, sőt kilyukasztja.

Az anódlemezen keletkezett veszteséget az anódáram s a lámpaanód és izzószál közötti feszültségének szorzata adja

$$W = E_a . i_a .$$

Ez az a mennyiség, melyek a gyárak, mint megengedhető wattveszteséget szoktak megadni, és amelyen túlhaladni a lámpa jóságának veszélyeztetése nélkül nem ajánlatos.

A gyárak tehát a $W$-értéket egy fix-értéknek adják meg.

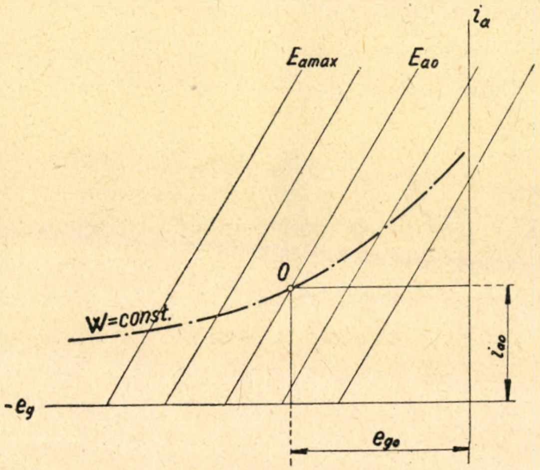
$$W = E_a . i_a = \text{const.}$$

Ez a fix-érték határozza meg a lámpa munka vagy nyugalmi pontját, azt a pontot, amely meghatározza az elektroncső anódfeszültségét és anódáramát a nyugalmi helyzetben. Vagyis, amikor a rácsnak csak a kívánt előfeszültsége van meg és erre még semmiféle változó feszültség nem helyezkedik felül.

Ha a 3. ábrán a különböző anódfeszültségeknek megfelelő statikus karakterisztikákat berajzoljuk és a

$$\frac{W}{E_{ai}} = i_{ai}$$

egyenletből minden $E_{ai}$ anódfeszültségnek megfelelő $i_{ai}$ anódáramot szintén berajzoljuk, akkor a $W=$ const.-nak megfelelő és eredményvonallal jelzett vonalat kapjuk. Ezen vonalon kell majd a munkapontnak feküdni. Itt fog átmenni a dynamikus




3. ábra.

karakterisztika, mely tehát a munkapontnál negatívabb rácsfeszültségnél általában a $W=$ const.-görbe felett s a munkapontnál pozitívabb rácsfeszültségnél az említett görbe alatt fog járni.

A rácsfeszültségváltozás a munkaponttól jobbra és balra természetesen egyenlő nagyságú, tehát a lámpa anódfeszültsége az egyik félperiódusban nagyobb, a másikban pedig kisebb, mint a megengedett. Egy teljes periódusra vonatkozólag pedig ugyanannyi.

A lámpa üzemi adatai között szerepel még a megengedhető legnagyobb anódfeszültség. Ez az anódfeszültség tehát $W=$ const.-

10*

görbén kijelöli azt az $O$-pontot, amelyet általában nyugalmi pontnak választhatunk.

Ezt az anódfeszültséget jelöljük $E_{a_0}$-nak, és a neki megfelelő anódáramot $i_{a_0}$-nak. A rácsfeszültséget pedig $e_{g_0}$-nak.

Ezek az adatok tehát a lámpa működése nyugalmi állapotának megfelelő adatok lesznek.

Most már csupán az marad hátra, hogy egy bizonyos terhelésnél mekkorára kell majd választani az anódbattéria feszültségét, $E_{a_{\max}}$-t, hogy a nyugalmi állapotnak megfelelőleg a lámpán $E_{a_0}$ anódfeszültség jöjjön létre.

Ha a terhelés ohmikus része $R_a$, a nyugalmi áram $i_{a_0}$, akkor a nyugalmi állapot esetén az ohmikus feszültségesés a terhelőkör mentén

$$e'_a = i_{a_0} . R_a$$

tehát, ha ezt a feszültséget hozzáadjuk a nyugalmi állapotnak megfelelő s előírt anódfeszültséghez, akkor megkapjuk azt a battériafeszültséget, melynél az adott terhelés és nyugalmi állapot esetén a lámpa anódján a kívánt feszültség keletkezik. Vagyis

$$E_{a_{\max}} = E_{a_0} + i_a . R_a .$$

Most pedig nézzük, hogy a valóságban miként alakul ki a dynamikus karakterisztika helyzete. (Lásd a 4. ábrát.)

A battéria feszültsége $E_{a_{\max}}$ már megvan határozva. A terhelőkör impedanciája

$$Z = R_a + jL\omega .$$

Ha már most nyugalmi pontnak az $E_{a_{\max}}$-jelű karakterisztikán fekvő $a$-pontot választanánk, a dynamikus karakterisztika $D'$-jelű vonalnak megfelelően adódna ki.

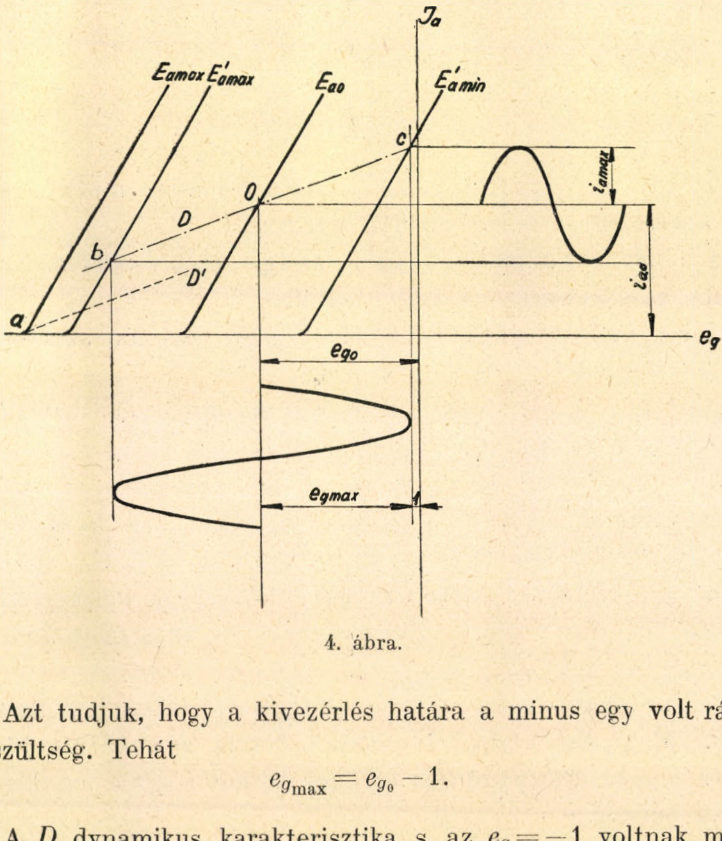
$$M_D = \frac{\mu}{(R_a + R_i) + jL\omega}$$

meredekséggel.

Ámde a nyugalmi pont esetünkben $O$, tehát a valóságban a dynamikus karakterisztika ezen a ponton halad majd át s a meredeksége az előbbivel egyenlő, mert amint látjuk, ez a munkapont helyzetétől független.

Tehát a valóságos dynamikus karakterisztika a $D'$-jelű vonallal párhuzamosan s az $O$-ponton keresztül fog haladni.

Most pedig határozzuk meg, hogy mekkora az a maximális $e_g$ rácsfeszültség, amellyel egy bizonyos frekvenciánál a lámpa kivezérelhető.




4. ábra.

Azt tudjuk, hogy a kivezérlés határa a minus egy volt rácsfeszültség. Tehát

$$e_{g_{\max}} = e_{g_0} - 1.$$

A $D$ dynamikus karakterisztika s az $e_g = -1$ voltnak megfelelő ordináta metszéspontja $C$ meghatározza az $i_{a_{\max}}$ értékét.

Az anódáram tehát a nyugalmi $i_{a_0}$ érték körül $i_{a_{\max}}$ értékkel változik. Tehát, ha a terhelőkör inpedanciája

$$Z = R_a + jL\omega$$

az anódáramváltozásnak megfelelő feszültségváltozás értéke

$$e' = i_{a_{max}} . Z.$$

Ez az $e'$ feszültség az $E_{a_0}$ feszültségre felülhelyezkedik. Tehát a váltakozó anódáram következtében a lámpa anódján létrejövő feszültség maximális értéke

$$E'_{a_{max}} = E_{a_0} + e'$$

s a minimális értéke pedig

$$E'_{a_{min}} = E_{a_0} - e'$$

az $E'_{a_{min}}$, a dynamikus karakterisztika $c$-pontján megy keresztül a kivezérlésnek alsó határát jelentve.

A dynamikus karakterisztika és az $i_{a_0} - i_{a_{max}}$ vonal $b$ metszéspontja meghatározza az $E'_{a_{max}}$ helyét.

A kivezérlés tehát a dynamikus karakterisztikán az $O$-pont körül a $b$-ponttól a $c$-pontig terjed.

Most nézzük azt, hogy az anódáramváltozás fázisban hogy viszonylik a rácsfeszültségváltozáshoz.

Az $e_g$ rácsfeszültségváltozás és a lámpa belsejében $\mu e_g$ értékű elektromotoros erőváltozás fázisban egyeznek. Az anódkörben, ha ohmikus terhelést tételezünk fel, akkor az anódáramváltozás és az őt előidéző elektromotoros erőfázisban megegyeznek. Vagyis, ilyenkor a rácsfeszültségváltozás és az anódáramváltozás fázisban szintén megegyezik.

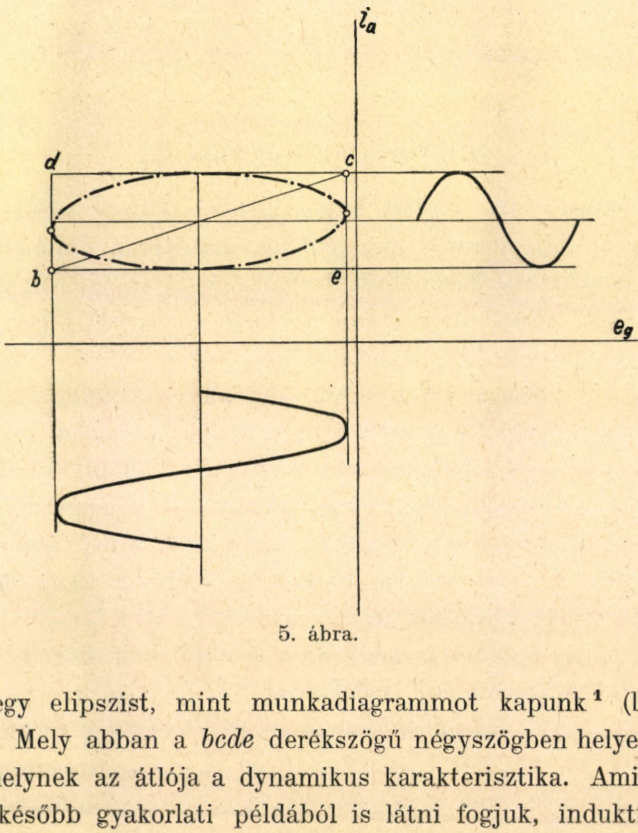
Ha azonban, amint az a gyakorlati esetekben legtöbbször előfordul, az anódkörben a terhelés induktív, az anódáram késni fog a lámpa elektromotoros erejéhez képest s így a feszültséghez képest is.

Ennek a fáziselmaradásnak az értékét könnyen kiszámíthatjuk.

Az anódkörben az öninduktió $L$, az ohmos ellenállások öszszege pedig $R_a + R_i$. Az a fázisszög pedig, amivel az anódáram az őt előidéző elektromos erőhöz, illetőleg az evvel fázisban egyező rácsfeszültséghez képest elmarad, legyen $\varphi$. Ennek a tangense tehát

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R_a + R_i} \cdot$$

Ha a rácsfeszültségváltozás sinus váltakozású és a terhelőkörben vas nincs, úgy az anódáram szintén sinus váltakozású. Ez esetben az $e_g - i_a$ koordinátákban a két sinusmozgás eredője-




5. ábra.

ként egy elipszist, mint munkadiagrammot kapunk[1] (lásd 5. ábrát). Mely abban a *bcde* derékszögű négyszögben helyezkedik el, amelynek az átlója a dynamikus karakterisztika. Amint azt majd később gyakorlati példából is látni fogjuk, induktív terhelés esetén a dynamikus karakterisztika nagyon lapos. Aminek eredménye azután az, hogy a lámpát ugyan kivezéreltük a lehető-

[1] H. G. MÖLLER: Die Elektronenröhren. III. Auflage, Se. 18. — MANFRED v. ARDENNE: On the theory of power amplification Proc. I. R. E. febr. 1928.

séghez képest, de az ennek megfelelő anódáramváltozás a nyugalmi áramhoz képest mégis kicsi. Tehát a lámpából nem tudjuk kivenni azt a teljesítményt, amit lehetne. Ez tehát a lámpa hasznosítási szempontjából veszteséget jelent. S ez a veszteség annál nagyobb, minél laposabb a dynamikus karakterisztika. Aminek az oka pedig a terhelés induktivitása. Tehát, ha az erősítőt jól hasznosítani akarjuk, igyekeznünk kell, hogy a terhelőkör induktív ellenállása a lehető legkisebb legyen az ohmos ellenálláshoz képest. Amely utóbbiba hangszóró esetén a hangenergiának megfelelő ohmos ellenállás is beleértendő.

### 3. Munkadiagrammok.

Az anódkörben leadott teljesítmények vizsgálatánál célszerűbb, ha tárgyalásunk mezejéül az anódáram, anódfeszültség karakterisztikákat használjuk. Ugyanis az ilyen koordináták között kapott munkadiagrammok területe a leadott teljesítménynyel lesz arányos.[1]

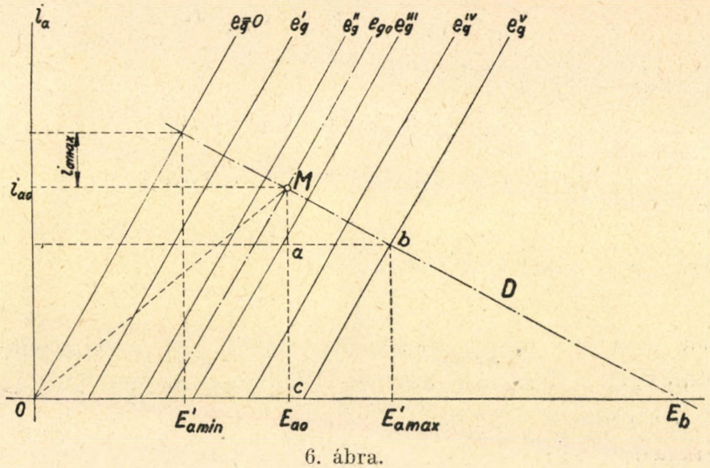
A karakterisztikák kezdő görbületétől eltekintve, megegyeznek a 6. ábrával. A diagrammok a telítési határon belül lévő viszonyokat tüntetik fel, s amint látjuk, az állandó rácsfeszültségek vonalai egymással párhuzamosak. A valóságban ezek a vonalak természetesen nem egyenesek, hanem tárgyalásunk egyszerűsítése kedvéért a karakterisztikáknak most csak az egyenes részét tüntetjük fel.

Vizsgáljuk most azt, hogy ezen koordináták között miként alakul ki a dynamikus karakterisztika. Az $e_{g_0}$ rácsfeszültség vonalán vegyük fel az $M$ munkapontot, amelynek megfelelőleg kiadódik $E_{a_0}$ nyugalmi anódfeszültség és az $i_{a_0}$ nyugalmi anódáram. Ha már most a rácsfeszültség $e_g=o$ és $e_g^v$ határok között váltakozik, $M$ nyugalmi pont körül az intenzitás $i_{a_{\max}}$ értékkel fog változni az $i_{a_0}$ érték körül. Ha a vezérlő rácsfeszültség

[1] E. Green: Use of Plate Current-Plate voltage characteristics in Studying the Action of Valve Circiuts. Exp. Wireless july 1926.

abszolut értékben csökken, az intenzitás az anódkörben nő, ha pedig növekedik, az anódáram csökkenni fog.

Mivel a karakterisztikák egyenes részein dolgozunk, a dynamikus karakterisztika $D$ itt is egyenes lesz. A lámpa anódján



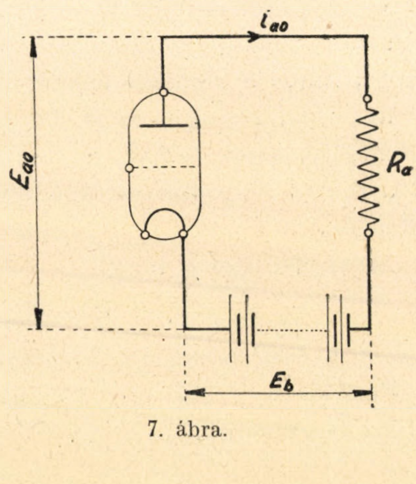
6. ábra.

keletkező feszültségek két szélső értéke $E'_{a_{\min}}$ és $E'_{a_{\max}}$ világosan láthatók.

Hogy a teljesítmények ebből az ábrából mily egyszerűen kiadódnak, azt mindjárt látni fogjuk. Legyen ez elektroncső anódkörében (l. 7. ábra) $R_a$ a terhelő ellenállás. A battéria feszültsége legyen $E_b$. Ha nyugalmi állapot van, akkor a lámpa anódján mért feszültség $E_{a_0}$ és az anódkörben mért intenzitás $i_{a_0}$. Ekkor, amint tudjuk, érvényes a következő összefüggés:

$$E_b = E_{a_0} + i_{a_0} . R_a. \quad (1)$$

Most kivezéreljük a lámpát, minek következtében az



7. ábra.

$i_{a_0}$ érték $i_{a_{max}}$-al az egyik félperiódusban megnövekszik, másikban csökken. Következésképpen az $R_a$ ellenállás mentén $i_{a_{max}}.R_a$ váltakozó feszültség fog az $i_{a_0}.R_a$ állandó feszültségesésre felülhelyezkedni. Tehát növekedő anódáram esetén érvényes.

$$E_b = E'_{a_{min}} + i_a.R_a + i_{a_{max}}.R_a. \quad (2)$$

És csökkenő anódáram esetén

$$E_b = E'_{a_{max}} + i_{a_0}.R_a - i_{a_{max}}.R_a \quad (3)$$

az 1. és 2., illetőleg 1. és 3. egyenletből következik,

$$E_{a_0} - E'_{a_{min}} = - i_{a_{max}}.R_a, \quad (4)$$

illetve

$$E'_{a_{max}} - E_{a_0} = - i_{a_{max}}.R_a. \quad (5)$$

Tehát a 4. és 5. egyenletek baloldalán lévő anódfeszültségkülönbségek a terhelést adó $R_a$ ellenállás mentén lévő váltakozó feszültséget jelentik.

Ha ezt a váltakozó feszültséget, mint maximális értéket megszorozzuk $i_{a_{max}}$-al, mint a váltakozó anódáram maximális értékével, az így kapott eredmény fele az ellenállás mentén leadott váltakozó áramú teljesítménnyel egyenlő.

Ez a teljesítmény, mint terület, a 6. ábrán is fellelhető. Az *Ma* egyenes darab a váltakozó anódáram maximális értékével egyenlő. Az *ab* egyenes darab pedig az ellenállás mentén lévő váltakozó feszültségmaximumot jelenti. Tehát az *Mab* háromszög területe a kérdéses teljesítménnyel egyenlő.

Közvetlenül világos az is, hogy a lámpa megengedett anódvesztesége, mint terület, a diagrammból szintén kiolvasható. A nyugalmi állapotban az anódfeszültség értéke $E_{a_0}$, az anódáram $i_{a_0}$.

Az anódveszteség tehát

$$W = E_{a_0}.i_{a_0},$$

amivel a *OcM* háromszög kétszeres területe egyenlő.

Eme kis bevezetés után térjünk rá a munkadiagramm analitikai tárgyalására.

Ha az $i_{a_{\max}}$ váltakozó anódáramnak megfelelő rácsfeszültség $e_{g_{\max}}$. A lámpa belső ellenállása $R_i$, a külső impedancia $Z$, akkor érvényes

$$i_{a_{\max}} = \frac{\mu e_{g_{\max}}}{R_i + Z},$$

ahol

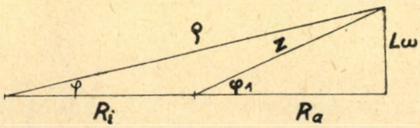
$$Z = R_a + jL\omega$$

az anódáramváltozás momentáni értéke pedig lesz

$$i_a = \frac{\mu e_g}{R_a + R_i + jL\omega} \cdot \sin(\omega t - \varphi),$$

ahol $\varphi$ az anódáramnak a rácsfeszültséghez képest való elmaradását jelenti. Ennek a tangense pedig (l. 8. ábrát)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R_a + R_i},$$




8. ábra.

a terhelés mentén $i_a$ anódáramváltozásnak megfelelő feszültséget jelöljük $e_a$-val. Akkor

$$e_a = i_a . Z = \frac{\mu e_{gm}(R_a + jL\omega)}{R_a + R_i + jL\omega} \sin \left\{ \omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{L\omega}{R_a + ..} \right. \cdots 1;$$

vezessük be a következő jelölést

$$\sin \omega t = \frac{i_a}{a} \qquad e_{a_m} = \frac{\mu e_{g_m}(R_a + jL\omega)}{(R_a + R_i) + jL\omega},$$

tehát

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{i_a^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - i_a^2}{a^2}}.$$

Az 1. egyenletet kifejtve s a megadott jelölést bevezetve lesz

$$e_a = e_{a_m} \cdot \frac{i_a}{a} \cdot \cos \varphi - e_{a_m} \sqrt{\frac{a^2 - i_a^2}{a^2}} \cdot \sin \varphi,$$

továbbá

$$e_a = \frac{e_{a_m}}{a} \cdot i_a \cos \varphi - \frac{e_{a_m}}{a} \cdot \sqrt{a^2 - i_a^2}) \cdot \sin \varphi.$$

Emeljük ezt az egyenletet négyzetre

$$\left(e_a - \frac{e_{am}}{a} \cdot i_a \cos\varphi\right)^2 = \frac{e_{am}^2}{a^2}(a^2 - i_a^2)\sin^2\varphi,$$

ezt kifejtve

$$e_a^2 - \frac{2e_a . e_{am}}{a} \cdot i_a \cos\varphi + \frac{e_{am}^2}{a^2} \cdot i_a^2 \cos^2\varphi =$$
$$= e_{am}^2 \sin^2\varphi - \frac{e_{am}^2}{a^2} i_a^2 \cdot \sin^2\varphi,$$

ez összevonva

$$e_a^2 - \left(\frac{2e_{am}}{a} \cdot \cos\varphi\right) e_a . i_a + i_a^2 \frac{e_{am}^2}{a^2} = e_{am}^2 \sin^2\varphi,$$

most osszuk ezt az egyenletet $e_{am}^2$-al, akkor lesz

$$\frac{e_a^2}{e_{am}^2} - \left(\frac{2}{a . e_{am}} \cdot \cos\varphi\right) e_a . i_a + \frac{i_a^2}{a^2} = \sin^2\varphi.$$

A munkadiagramm tehát, amint ebből az egyenletből látjuk, egy ellipszis egyenletét eredményezte, melynek $M$ a középpontja.

Ez az eredmény különben az előbb mondottakból is várható volt.

Az egyenletben szereplő $a$ állandó meghatározható, ha az egyenletbe behelyettesítjük $e_{a=0}$ értéket, ekkor kapjuk

$$\frac{i_a^2}{a^2} = \sin^2\varphi \qquad i_a = a . \sin\varphi,$$

tehát

$$a = i_{a_{\max}}.$$

Tehát a munkadiagramm egyenlete a végső formájában

$$\frac{e_a^2}{e_{am}^2} - \left(\frac{2}{i_{am} . e_{am}} \cos\varphi\right) e_a . i_a + \frac{i_a^2}{i_{am}^2} = \sin^2\varphi.$$

Ha $L\omega = 0$ és így $\varphi = 0$, vagyis ha ohmos terhelés van jelen, akkor a munkadiagramm egyenlete a következőképpen alakul:

$$\frac{e_a^2}{e_{am}^2} - \frac{2}{i_{am} . e_{am}} e_a i_a + \frac{i^2}{i_{am}^2} = 0,$$

vagy másképpen

$$\left(\frac{e_a}{e_{am}} - \frac{i_a}{i_{am}}\right)^2 = 0,$$

ami pedig $M$ ponton átmenő egyenes egyenlete. Tehát ohmikus terhelés esetén a munkadiagramm egy egyenessé alakul át.

## 4. Teljesítménymaximumok feltételei.

Nézzük most a teljesítményszámításnak a mathematikai részét. A $Z$ impedanciájú terhelés mentén a leadott váltakozó áramú teljesítmény

$$W = \frac{e_{am} \cdot i_{am}}{2} \cos \varphi,$$

ahol

$$i_{am} = \frac{\mu e_g}{(R_a + R_i) + jL\omega}$$

és

$$e_{am} = i_{am}(R_a + jL\omega) = \frac{\mu e_g (R_a + jL\omega)}{(R_a + R_i) + jL\omega},$$

ha a $Z = R_a + jL\omega$ egyszerűsítést használjuk, akkor felírható

$$\cos \varphi = \frac{R_a}{Z},$$

tehát

$$W = \frac{\mu^2 . e_g^2 . Z}{[R_a + R_i + jL\omega]^2} \frac{R_a}{Z}$$

a nevezőben lévő négyzetes tag a belső ellenállás s a terhelő impedancia vegtorialis összegének $\varrho$-nak a négyzete (l. a 8. ábrát), melyek könnyen kiszámíthatók.

$$\varrho^2 = R_i^2 + Z^2 + 2R_iZ \cos \varphi.$$

Ahol

$$\cos \varphi = \frac{R_a}{Z},$$

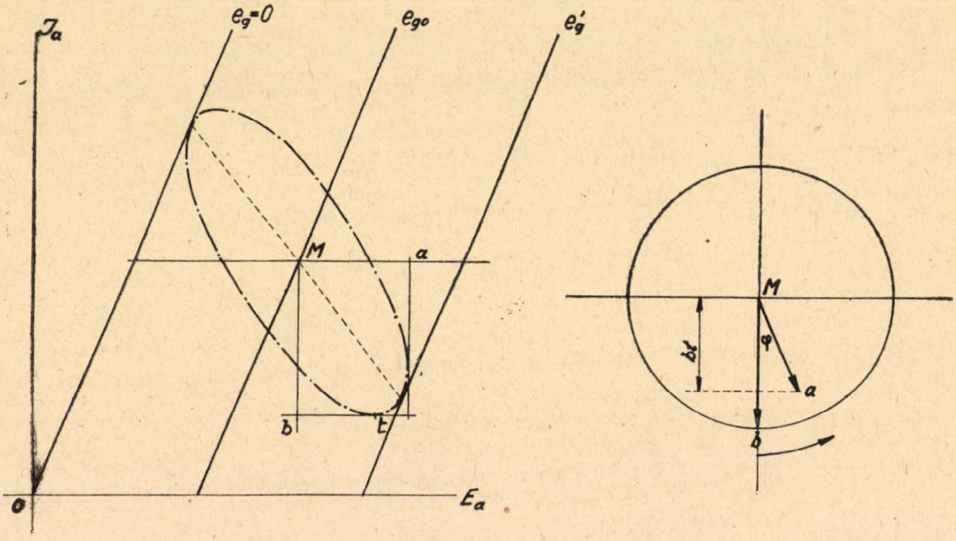
tehát

$$\varrho^2 = R_i^2 + Z^2 + 2R_iR_a,$$

Így tehát a teljesítmény

$$W = \frac{\mu^2 . e_g^2 . R_a}{R_i^2 + Z^2 + 2R_iR_a}. \qquad (1)$$

Ezt a teljesítményt a 9. ábrából könnyen leolvashatjuk. A munkapont $M$, melyet $e_{g_0}$ rácsfeszültség vonalán vettünk fel. A munkadiagramm, amint levezettük e pont körül, ellipsis formájában alakul ki. Húzunk egy vertikalist a munkapontból, ez lesz $Mb$. Ezután rajzoljuk meg az ellipsis alsó érintővonalát az abcissatengellyel párhuzamosan. Ez az ellipsist $t$ pontban fogja érin-




9. ábra.

teni. A keresett teljesítmény itt is mint egy háromszög, az $Mbt$ háromszög területe fog kiadódni.

Vagyis

$$W = \frac{Mb.bt}{2}.$$

Mert amint a felrajzolt vektordiagrammból is látható $Mb = i_{a_{\max}}$ és $Ma = e_{a_{\max}}$, amikor $i_a$ maximális értékét elérte, vagyis amikor $i_a = Mb = i_{a_{\max}}$, ugyanakkor a $e_a$ momentán értéke $bt$. Ez pedig egyenlő $bt = e_{a_{\max}}.\cos\varphi$, tehát

$$W = \frac{Mb.bt}{2} = \frac{i_{a_{\max}}.e_{a_{\max}}}{2}.\cos\varphi.$$

A munkadiagramm csak hiszterézis veszteség (vas és dielektromos) nélküli terhelőkör esetén ellipszis. Más esetben az ellipszis eltorzul s ekkor e teljesítményt grafikusan meghatározni nem tudjuk. Hanem ily esetben más módhoz kell folyamodnunk.

Térjünk vissza (1) számú egyenlethez és vizsgáljuk most ennek a függvénynek a maximumát azon esetekre, ahol tg $\varphi$=const illetőleg cos $\varphi$ = const. Ha cos $\varphi$=const, akkor $R_a = Z$ cos $\varphi = Z.C$, tehát a teljesítmény

$$W = \mu^2 e_g^2 . C \frac{Z}{R_i^2 + Z^2 + 2R_i C . Z}.$$

A $W$ függvénynek a $Z$ változótól függő maximumát fogjuk keresni. Ez pedig akkor lesz, ha

$$\frac{dW}{dZ} = 0.$$

Tehát

$$O = \mu^2 \cdot e_g^2 \cdot C \cdot \frac{(R_i^2 + Z^2 + 2R_i ZC) - Z(2Z + 2R_i C)}{(R_i^2 + Z^2 + 2R_i ZC)^2}.$$

A függvény zérus lesz akkor, ha a tört számlálója zérus.

$$O = R_i^2 + Z^2 + 2R_i ZC - 2Z^2 - 2R_i ZC$$
$$O = R_i^2 - Z^2.$$

Tehát a függvénynek maximuma van, ha

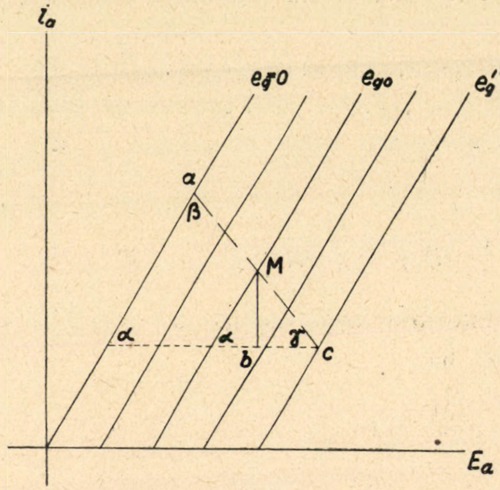
$$R_i = Z.$$

Vagyis egy bizonyos cos $\varphi$-nél, amit különben $Ra$-nak $Z$-hez való viszonya határoz meg, a teljesítménynek akkor van maximuma, ha a terhelőkör impedanciája a lámpa belső ellenállásával, illetőleg az impedanciájával egyenlő.

Egy bizonyos $Z$-nél a teljesítmény annál nagyobb lesz, minél nagyobb a cos $\varphi$. Tehát a legnagyobb teljesítményt akkor kapjuk, amikor

$$Z = R_a = R_i.$$

Az így kapott eredményt geometriai megfontolás alapján is megkaphatjuk (l. 10. ábra). A munkapontnak $M$-t választjuk az $e_{g_0}'$ rácsfeszültség vonalán. A kivezérlés történjék $e_g=0$ és $e_g^{=}$ rácsfeszültség határok között, az $a$ és $c$ pontok között. Nevezzük a $e_g'$ karakterisztika kiinduló pontjának megfelelő anódfeszültséget $E_a$-nak.



10. ábra.

Amint említettük, a leadott teljesítmény az $Mbc$ háromszög területével egyenlő. Hogy ezt fel tudjuk írni, ki kell fejezni a háromszög $Mb$ és $bc$ oldalait.

$$\frac{bc}{Mc} = \cos\gamma \qquad bc = Mc\cos\gamma$$

$$\frac{Mb}{Mc} = \sin\gamma \qquad Mb = Mc.\sin\gamma$$

$$\frac{E_a}{\sin\beta} = \frac{2Mc}{\sin\alpha} = \frac{E_a}{\sin\{180-(\alpha+\gamma)\}}$$

$$Mc = \frac{E_a.\sin\alpha}{2\sin\{180-(\alpha+\gamma)\}}.$$

Tehát a háromszög területe lesz

$$\frac{Mb.bc}{2} = \frac{Mc^2\cdot\sin\gamma.\cos\gamma}{2}$$

$$= \frac{E_a^2.\sin^2\alpha\sin\gamma.\cos\gamma}{8\sin^2\{180-(\alpha+\gamma)\}} = C\cdot\frac{\sin\gamma.\cos\gamma}{\sin^2(\alpha+\gamma)}$$

ahol az állandó

$$C = \frac{E_a^2.\sin^2\alpha}{8}.$$

Tehát a teljesitményt mint $\gamma$ függvényét irtuk fel. Mivel $bc$ az a külső ellenállás mentén létrejövő feszültségváltozás, melyet a nyugalmi anódáramnak $Mb$ értékkel való megváltozása hozott létre, azaz $Mb.Ra=bc$, tehát

$$\frac{Mb}{bc}=\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{R_a}.$$

Vagyis a teljesitménynek $\gamma$-tól való függése tulajdonképpen $R_a$ változásától való függést jelenti.

Jelöljük a teljesitménynek $\gamma$-vel való összefüggését

$$F=f(\gamma)=C\cdot\frac{\sin\gamma.\cos\gamma}{\sin^2(\alpha+\gamma)}.$$

Keressük tehát, hogy $F$-nek $\gamma$ mely értékénél van maximuma.

$$\frac{dF}{d\gamma}=O=$$

$$=C\cdot\frac{\sin^2(\alpha+\gamma)\cos 2\gamma-\sin\gamma\cos\gamma.2.\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha+\gamma)}{\sin^4(\alpha+\gamma)}$$

$\sin(\alpha+\gamma)$-val egyszerűsítve

$$O=C\,\frac{\sin(\alpha+\gamma).\cos 2\gamma-\sin\gamma\cos\gamma.2.\cos(\alpha+\gamma)}{\sin^3(\alpha+\gamma)},$$

a tört értéke akkor lesz zérus, ha a számlálója zérus. Tehát

$$O=\sin(\alpha+\gamma)\cos 2\gamma-\sin\gamma\cos\gamma.2.\cos(\alpha+\gamma)$$

$$\sin(\alpha+\gamma).\cos 2\gamma=\sin\gamma\cos\gamma.2\cos(\alpha+\gamma)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\gamma).\cos 2\gamma=2\sin\gamma.\cos\gamma=\sin 2\gamma$$

tehát

$$\operatorname{tg}(\alpha+\gamma)=\operatorname{tg}2\gamma\quad \alpha+\gamma=\gamma,2$$

vagyis mikor $\alpha=\gamma$ vagy $\frac{1}{R_i}=\frac{1}{R_a}$.

Tehát állandó rácsfeszültség határok között, de változó nyugalmi anódfeszültség $E_{a_0}$ mellett a teljesitménynek akkor van maximuma, ha $R_a=R_i$.

Ennek a kisérleti bizonyitásánál a következőket kell figyelembe venni. A feladat az, hogy egy elektroncső anódkörében ohmikus ellenállás mentén leadott váltakozóáramú teljesitményt kell mérni. Az anódkörben ugyanis folyik egy állandó értékű anódáram, melyet az előfeszültség és az egyenáramra felülhelyezkedett váltakozóáram, melyet a váltakozó rácsfeszültség szab meg. Tehát az ellenálláson leadott teljesítményt két részből összetettnek képzelhetjük el. Az egyik az állandó anódáram következtében létrejött egyenáramú teljesítmény, a másik pedig a felülhelyezkedett váltakozóáram következtében létrejött váltakozóáramú teljesítmény. A két leadott teljesítményről nekünk csak az utóbbira van szükségünk s ez az, amit mérni kell.

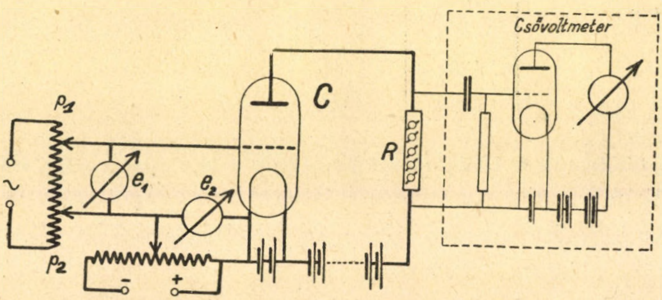
Ez pedig történhetik a következő megfontolások alapján. Ha az $R$ ellenálláson a felülhelyezkedett váltakozóáram következtében előálló váltakozó feszültséget jelöljük $e$-vel, akkor az ellenálláson a váltakozó áramú teljesitmény $\frac{e^2}{R}$-el lesz egyenlő. Most csupán az a kérdés, hogy miként lehet az ellenálláson keletkezett kétféle feszültségesés közül a váltakozóáramút mérni.

Ha egy rács egyenirányítású elven működő csővoltmétert az $R$ ellenállás két végeihez kapcsolunk, ez a voltméter csak a váltakozó feszültséget fogja mérni. Ha már most az indukciómentes ellenállás értékét, lévén ez egy ellenállás-szekrény, ismerjük, $W = \frac{e^2}{R}$ formulából a váltakozóáramú teljesitményt könnyen kiszámithatjuk.

A kisérleti elrendezés a 11. ábrából látható. Ahol $C$ az az elektroncső, melynek anódkörébe kapcsolt változtatható nagyságú indukciómentes ellenálláson mérendő majd a váltakozó teljesítmény. Az elektroncső működéséhez a szükséges előfeszültséget $P_2$ potentióméterről vesszük és az $e_2$ voltméterrel mérjük. A váltakozó rácsfeszültséget a $P_1$ potentióméterről vesszük és $e_1$ dinamometrikus voltméterrel mérjük.

Ohmikus terhelésről lévén szó, a teljesítmény független a frequentiától. Egy bizonyos frequentiánál végzett mérési eredmények tehát általános érvényűek lesznek. A kisérleteinknél a vizsgálatot 50 periodussal végeztük. Az ábrán $C_v$-vel jelzett elektroncső az a csővoltméter, mellyel az $R$ ellenálláson a váltakozó feszültséget mérjük.

A kisérlet a következőképpen történik. A $P_2$ potentióméteren szükséges előfeszültséget beállítjuk. A $P_1$ potentióméterről leveszünk bizonyos értékű váltakozó rácsfeszültséget, melyet a kisérlet végéig állandónak tartunk. Ez lesz az az adott rács-



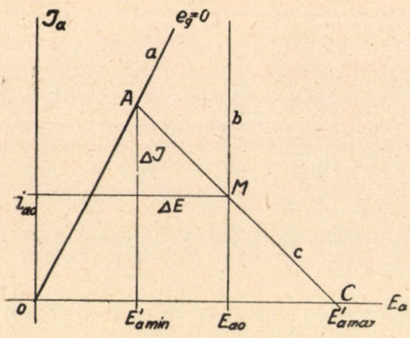

11. ábra.

feszültség, melynél a teljesítmény maximumának feltételét keressük. Ezek után az $R$ ellenállás különböző értékeinél leolvassuk ennek sarkain keletkező váltakozó feszültséget, amelyből s az ellenállás értékéből a teljesitményt kiszámithatjuk. A kisérletet és a számitást elvégezve azt fogjuk találni, hogy legnagyobb akkor a teljesitmény, amikor a külső és belső ellenállás egyenlő.

Egy ilyen kisérletsorozat eredményei az alanti táblázatban találhatók. A kisérletnél használt lámpa $RE$ 604 volt, melynek a belső ellenállása 1000 $\Omega$, az állandónak vett váltakozó rácsfeszültség értéke $e_g = 1$ volt.

| $R_\Omega$ | $e$ | $e^2/R$ |
|---|---|---|
| 200 | 0·48 | 0·00126 |
| 400 | 0·80 | 0·00160 |
| 600 | 1·07 | 0·00191 |
| 800 | 1·28 | 0·00204 |
| 950 | 1·42 | 0·00213 |
| 1000 | 1·47 | 0·00216 |
| 1050 | 1·49 | 0·00213 |
| 1200 | 1·59 | 0·00209 |
| 1400 | 1·70 | 0·00207 |
| 1600 | 1·81 | 0·00204 |
| 1800 | 1·90 | 0·00202 |
| 2000 | 2·02 | 0·00200 |

Ha azonban a nyugalmi anódfeszültséget $E_{a_0}$-t constansnak vesszük fel, amint az az erősítők esetének tényleg meg is felel, akkor a teljesítmény maximumának feltételei másként alakulnak. A tárgyalásunk egyszerűsége kedvéért ohmikus terhelést tételezünk fel az anódkörben, az elektroncső maximális kivezérlése mellett. Azaz, amikor a rácsfeszültség negatív maximumánál az anódáram zérusra csökken (l. 12. ábrát).



12. ábra.

A megválasztott munkapont legyen $M$, aminek $i_{a_0}$ nyugalmi anódáram és $E_{a_0}$ nyugalmi anódfeszültség felel meg. Az $AC$ dynamikus karakterisztika pedig az $A$ és $C$ pontok között lesz kihasználva. A kivezérlés következtében előálló anódáramváltozás $\Delta I$ és a terhelő ellenállás mentén bekövetkezett feszültségváltozás pedig $\Delta E$. A lámpa anódján keletkező legnagyobb s legkisebb feszültségek pedig $E'_{a_{\max}}$ és $E'_{a_{\min}}$ lesznek. Jelöljük továbbá az $e_g=0$ rácsfeszültség vonalát

$a$-val. Az $E_{a_0}$-ból kiinduló vertikális egyenest $b$-vel s a dynamikus karakterisztika vonalát $c$-vel.

A leadott teljesítmény tehát

$$W = \frac{\Delta I . \Delta E}{2}.$$

A feladatunk most az lesz, hogy megkeressük, mikor lesz $W$-nek maximuma $E_{a_0} = \text{const}$ mellett.

Hogy ezt meghatározhassuk, fel kell írni először az említett három egyenes egyenletét, hogy majd a háromszög területét kifejezhessük.

A $c$ egyenes egyenlete $\mathcal{E}_a = E'_{a_{\max}} - I_a R_k$

az $a$ egyenes egyenlete $I_a = \frac{1}{R_i} \mathcal{E}_a$

a $b$ egyenes egyenlete $\mathcal{E}_a = E_{a_0}$.

Az $a$ és $c$ egyenes metszéspontjának $A$-nak a koordinátái lesznek $E'_{a_{\min}}$ és $I_{aa}$. Ezek megkaphatók az $a$ és $c$ egyenes egyenleteiből.

$$I_{aa} . R_i = E'_{a_{\max}} - I_{aa} . R_k$$

$$I_{aa} (R_i + R_k) = E'_{a_{\max}}.$$

Tehát

$$I_{aa} = \frac{E'_{a_{\max}}}{R_i + R_k} \tag{1}$$

és

$$E'_{a_{\min}} = \frac{E'_{a_{\max}} . R_i}{R_i + R_k} \tag{2}$$

az $M$-pont koordinátáit $E_{a_0}$-t és $I_{a_0}$-t megkapjuk a $b$ és $c$ egyenesek egyenleteiből

$$E_{a_0} = E'_{a_{\max}} - I_{a_0} R_k \tag{3}$$

$$2 I_{a_0} = I_{aa} \tag{4}$$

3 egyenletből lesz

$$E_{a_0} + I_{a_0} R_k = E'_{a_{\max}}$$

a 4 és 1-ből $I_{a_0}$ értékét behelyettesítve

$$E_{a_0} + \frac{E'_{a_{max}} . R_k}{2\,(R_i + R_k)} = E_{a_{max}}, \tag{5}$$

ezt kifejtve

$$2E_{a_0}\,(R_i + R_k) = E'_{a_{max}}\,\{2\,(R_i + R_k) - R_k\} = E'_{a_{max}}\,(2\,R_i + R_k),$$

amiből

$$E'_{a_{max}} = \frac{2E_{a_0}\,(R_i + R_k)}{2R_i + R_k}. \tag{6}$$

$E'_{a_{min}}$ értékét 2 egyenletből

$$E'_{a_{min}} = \frac{2E_{a_0}\, R_i + R_k) . R_i}{(2R_i + R_k)\,(R_i + R_k)} = \frac{2E_{a_0} . R_i}{2R_i + R_k}. \tag{7}$$

Most fejezzük ki $\Delta E$-t

$$\Delta E = E_{a_0} - E'_{a_{min}}$$

a (7) egyenletből kapott értéket, $E_{a_0}$-el közös nevezőre hozva

$$\Delta E = \frac{E_{a_0}\,(2R_i + R_k) - 2E_{a_0} . R_i}{2R_i + R_k} = \frac{E_{a_0} . R_k}{2R_i + R_k}.$$

$\Delta I_a = \frac{I_{aa}}{2}$ az $I_{aa}$ értékét fejezzük ki az (1) és (6) egyenletekből.

$$\Delta I_a = \frac{2E_{a_0}\,(R_i + R_k)}{(2R_i + R_k)\,(R_i + R_k) . 2} = \frac{E_{a_0}}{2R_i + R_k},$$

a teljesitmény tehát

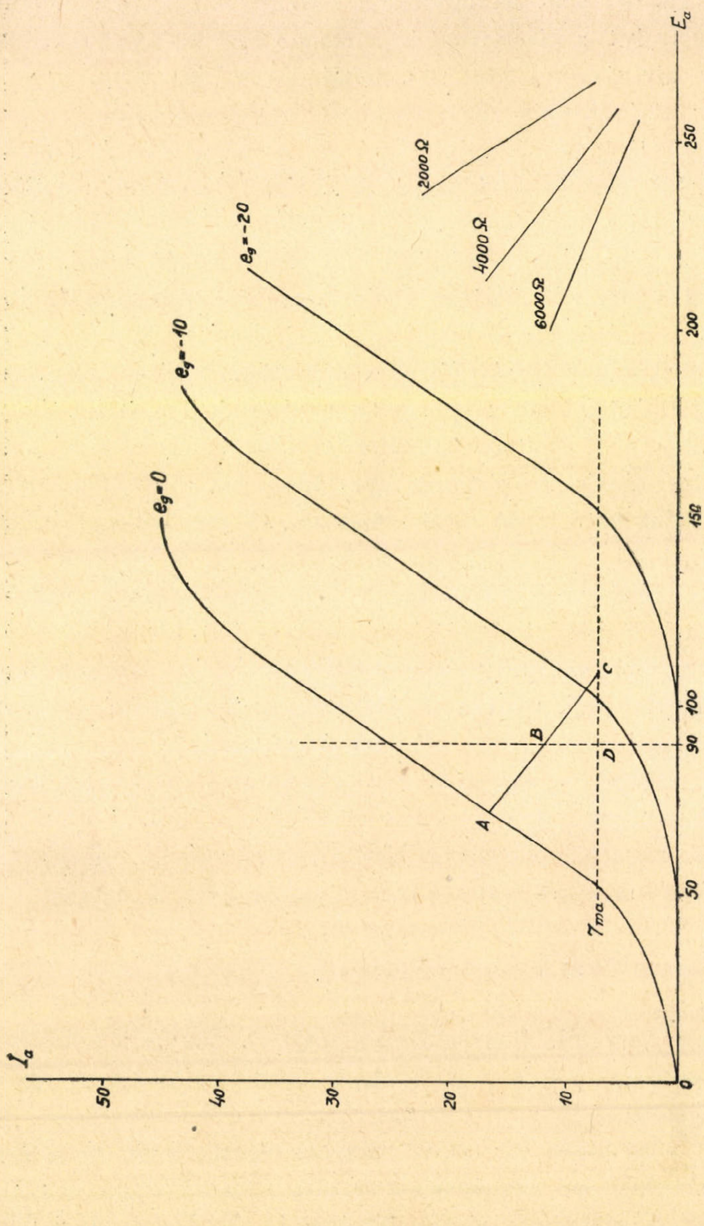
$$W = \frac{\Delta E . \Delta I_a}{2} = \frac{E_{a_0}^2 . R_k}{2\,(2R_i + R_k)^2}$$

defferenciáljuk ezt $R_k$ szerint s egyenlítsük nullával

$$\frac{dW}{dR_k} = O = \frac{E_{a_0}^2}{2} . \frac{(2R_i + R_k)^2 - 2R_k(.2\,R_i + R_k)}{(2R_i + R_k)^4}$$

$$O = \frac{E_{a_0}^2}{2} . \frac{2R_i + R_k - 2R_k}{(2R_i + R_k)^3}.$$

Az egyenlet jobboldala zérus lesz, ha $2R_i + R_k - 2R_k = 0$, ez pedig akkor van, ha $2R_i = R_k$.


$I_a$
$E_a$
50
40
30
20
10
0
50
90
100
150
200
250
$e_g = 0$
$e_g = -10$
$e_g = -20$
2000 Ω
4000 Ω
6000 Ω
A
B
C
D
7 ma

13. ábra.

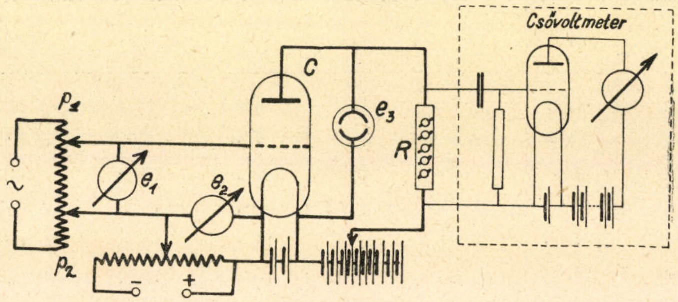
Ennek a kísérleti bizonyítása már körülményesebb, mint az előbbi kísérlet volt. Itt ugyanis a következők azok a szempontok, melyeket a kísérletnél figyelemmel kell tartani. Torzitásmentes kivezérlésről volt szó, tehát ügyelni kell arra, hogy a rácsfeszültségváltozás olyan határok között mozogjon, hogy a karakterisztikának az egyenes részében dolgozzék. A lámpára jutó anódfeszültségeknek pedig állandónak kell lenni a különböző terhelő ellenállások esetén. Tehát a különböző ellenállásoknál a lámpa előfeszültségét úgy kell megválasztani, hogy egyrészt a lámpa anódján a kívánt állandó anódfeszültség jöjjön létre, másrészt a dynamikus karakterisztika kivezérelt része szimmetrikusan helyezkedjék el a dolgozópont két oldalán. Az elmondottakat jobban megvilágitja a kísérletnél használt lámpa anódáram-anódfeszültség karakterisztikája, amelyre a későbbi kísérletnél úgyis szükségünk lesz (13. ábra). Az ábrán berajzolva látjuk az állandó rácsfeszültségeknek megfelelő görbéket. A kísérlet folyamán az állandó anódfeszültség, amelynél a teljesítmény maximumát keressük, legyen egyenlő pl. 90 Volttal. Tehát a különböző terhelő ellenállások esetén a munkapontok ennek az anódfeszültségnek megfelelő vertikális egyenesen fognak elhelyezkedni, mert az anódfeszültség nyugalmi állapotban állandó, csak a rácselőfeszültségek és a kivezérléshez szükséges rácsfeszültségek a változók. Egy bizonyos terhelő ellenállást feltételezve, ennek a dynamikus karakterisztikája csak $e_g=0$ és $7_m a$-nak megfelelő vízszintes között vezérelhető ki. Mivel a kivezérlésnél az egyik határ $e_g=0$, a másik határ a karakterisztika görbülete miatt $7_m a$-es egyenes.

Így pl. 4000 $\Omega$ terhelő ellenállásnak megfelelő és kivezérelhető dynamikus karakterisztika-rész $AC$, melynek helyét úgy kell megválasztani, hogy a felezőpontja $B$, vagyis a nyugalmi anódfeszültség pontja a 90 Voltnak megfelelő vertikális egyenesbe essék.

A $B$ pont helye $e_g = \text{const}$ egyenes sereg között meghatározza az ehhez az ellenálláshoz tartozó előfeszültséget és a kivezérléshez szükséges rácsfeszültséget is. Ezeket tehát a diagrammból le tudjuk olvasni. A kivezérlés következtében az ellenálláson keletkező váltakozó feszültség $DC$ a diagrammból szintén leolvasható.

A különböző terhelő ellenállásoknak megfelelőleg minden egyes esetben a diagrammból az előbbi megfontolások alapján meg kell határozni a hozzátartozó előfeszültséget s a kivezérléshez szükséges rácsfeszültséget.

A kísérleti elrendezés 14. ábrán látható, ahol $C$ az az elektroncső, melynek anódkörében elhelyezett $R$ ellenálláson leadott váltakozó áramú teljesítményt mérjük. Az $R$ ellenálláson a váltakozó feszültséget csővoltméterrel mérjük, a mért feszültségből




14. ábra.

és az $R$ ellenállás ismeretéből a teljesítmény az ismert módon kiszámítható. A szükséges előfeszültséget $P_2$ potentiómeterrel állítjuk be s az $e_2$ voltméterrel mérjük. A kivezérléshez szükséges váltakozó feszültséget pedig $P_1$ potentiómeterből vesszük s az $e_1$ voltméterrel mérjük. A lámpára jutó anódfeszültséget az $e_3$ statikus voltméterrel tartjuk állandó értéken, mert ennek először is nagy az ellenállása, másodszor az egyenáramú fogyasztása zérus, tehát $R$ ellenállás következtében beállt értékeket nem változtatja meg.

A kísérlet menete a következő: Választunk egy bizonyos terhelő ellenállást és a diagrammból leolvassuk az ennek megfelelő előfeszültség és rácsfeszültség értékeket, melyeket azután a hozzájuk tartozó potentiómeterek segítségével beállítunk. Ezután az anódbatteria feszültségét addig változtatjuk, amig a lámpa anódján a kivánt feszültség beáll. Ekkor csővoltméterrel lemérjük az $R$ ellenálláson keletkező váltakozó feszültséget.

Az alanti táblázat egy $B$ 405-ös 2100 $\Omega$ belső ellenállású lámpával felvett kisérleti eredményeket tartalmazza. A terhelő ellenállás értékét $R$-el, az állandó anódfeszültséget $e_a$-val, az előfeszültséget $e_{g_0}$-val, a rácsfeszültséget $e_g$-vel, az ellenálláson keletkezett váltakozó feszültség szerkesztett értékét $e_{sz}$-el, a mért értéket pedig $e_m$-el, a teljesitményt pedig $e_m^2/R$-el jelöltük. A kisérleti eredményekből láthatjuk, hogy legnagyobb akkor a teljesitmény, amikor $R_k = 2R_i$.

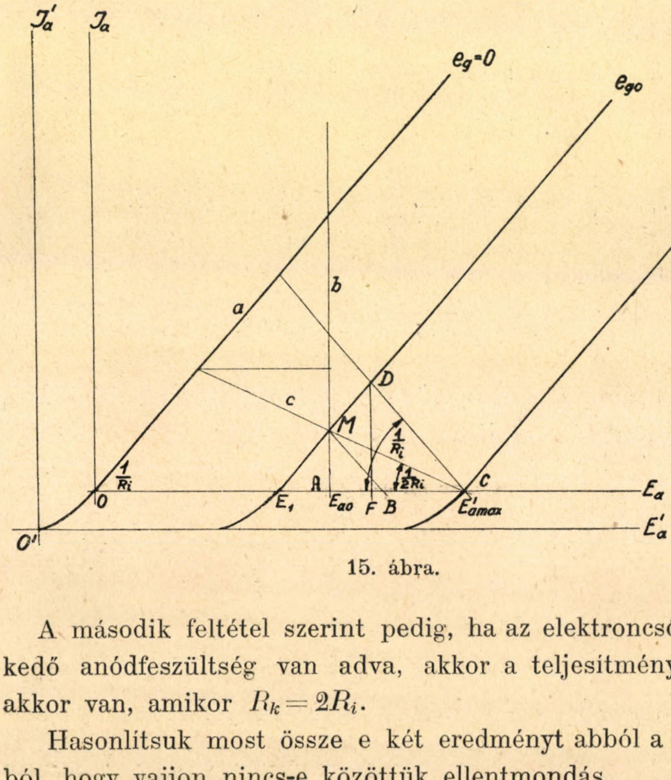
| $R_\Omega$ | $e_a$ | $e_{g_0}$ | $e_g$ | $e_{sz}$ | $e_m$ | $e_m^2/R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 500 | 90·0 | 4·1 | 4·1 | 4·0 | 3·9 | 0·0304 |
| 1000 | 90·0 | 4·4 | 4·4 | 7·0 | 7·04 | 0·0495 |
| 1500 | 90·0 | 4·72 | 4·72 | 10·0 | 9·9 | 0·0652 |
| 2000 | 90·0 | 4·95 | 4·95 | 12·0 | 12·0 | 0·0723 |
| 2500 | 90·0 | 5·0 | 5·0 | 14·2 | 13·6 | 0·0741 |
| 3000 | 90·0 | 5·25 | 5·25 | 15·5 | 15·2 | 0·0772 |
| 3500 | 90·0 | 5·45 | 5·45 | 17·0 | 16·95 | 0·0820 |
| 4000 | 90·0 | 5·5 | 5·5 | 18·5 | 18·2 | 0·0830 |
| 4200 | 90·0 | 5·6 | 5·6 | 19·0 | 19·2 | 0·0878 |
| 4500 | 90·0 | 5·7 | 5·7 | 19·5 | 19·6 | 0·0855 |
| 5000 | 90·0 | 5·8 | 5·8 | 20·0 | 20·2 | 0·0818 |
| 5500 | 90·0 | 5·9 | 5·9 | 21·0 | 20·6 | 0·0772 |
| 6000 | 90·0 | 5·95 | 5·95 | 22·0 | 21·5 | 0·0770 |
| 6500 | 90·0 | 5·98 | 5·98 | 23·0 | 22·2 | 0·0760 |
| 7000 | 90·0 | 6·0 | 6·0 | 23·5 | 23·0 | 0·0755 |

Tehát egy bizonyos nyugalmi anódfeszültségnél és tetszőleges határokon belül változó rácsfeszültség esetén a teljesitménynek maximuma akkor van, ha a külső ellenállás a belső kétszeresével egyenlő. Ezt az eredményt hozta ki más úton W. I. Brown is.[1]

[1] Discussion on Loud-Speacers for Wireless and other purposes. Proceedings of the Physical Society of London Volume 36. part 3. april. 15. 1924.

A teljesítménymaximumok feltételeiként tehát két eredményt kaptunk, mely eredményeket összevetve az irodalomban nem látunk tárgyalva. Nem lesz tehát érdektelen a most kapott két eredményt egymással összehasonlítani s belőlük a következtetéseket levonni.

Az első eredmény az volt, hogy ha a rácsfeszültséghatárok adva vannak és minden egyéb üzemi adatok változhatnak, a teljesítménynek maximuma akkor van, ha $R_k = R_i$.




15. ábra.

A második feltétel szerint pedig, ha az elektroncsőre helyezkedő anódfeszültség van adva, akkor a teljesítménymaximum akkor van, amikor $R_k = 2R_i$.

Hasonlítsuk most össze e két eredményt abból a szempontból, hogy vajjon nincs-e közöttük ellentmondás.

Amint az a 15. ábrán látható, az $E_{a_0} =$ const feltételnek megfelelő eredményként kaptuk az $MAC$ teljesítmény-háromszöget, mint maximális területűt. A $C$-pontnál lévő szögnek tangense eredményünk értelmében $^1/_2R_i$-vel egyenlő. A kapott eredmény meghatározza az $E_{a_0}$ feszültségi vonalon az $M$ munkapont helyét s így ennek megfelelőleg a nyugalmi rácsfeszültséget $e_{g_0}$-t is. Ugyancsak megkapjuk eredményül az $e'_g$ értékét is.

Nézzük most ezeket. Az $E'_{a_{max}}$ képletébe helyettesítsük be a kapott eredményt

$$E'_{a_{max}} = \frac{2E_{a_0}(R_i+2R_i)}{2R_i+2R_i} = \frac{6}{4} \cdot E_{a_0} = \frac{3}{2} E_{a_0}.$$

Hogy az $M$ koordinátáit megkaphassuk, felírjuk a

$c$ egyenes egyenletét $\mathcal{E}_a = \frac{3}{2} E_{a_0} - 2I_a R_i$

$b$ egyenes egyenlete $\mathcal{E}_a = E_{a_0}$,

tehát $M$-pont koordinátái

$$E_{a_0} = \frac{3}{2} E_{a_0} - 2I_{a_0}.R_i \quad 2E_{a_0} = 3E_{a_0} - 4I_{a_0}R_i,$$

az eredmény tehát

$$I_{a_0} = \frac{E_{a_0}}{4R_i}; \quad E_{a_0} = \text{const},$$

hogy a nyugalmi rácsfeszültséget $e_{g_0}$-t megkapjuk, felírjuk $ME_1$ egyenes egyenletét. Ez lesz

$$\mathcal{E}_a = E_1 + I_a R_i.$$

Ha ide behelyettesítjük $M$-pont értékeit, megkapjuk $E_1$-t

$$E_{a_0} = E_1 + \frac{E_{a_0}}{4R_i} \cdot R_i; \quad E_1 = \frac{3}{4} E_{a_0}.$$

A keresett érték pedig, egy régebbi megállapításunk alapján $\mu e_{g_0} = E_1$, tehát $e_{g_0} = \frac{3E_{a_0}}{4\mu}$, mely értéket egy volt elhanyagolásával a kivezérléshez szükséges $e_g$ rácsfeszültséggel vehetünk egyenlőnek $e_g \sim e_{g_0}$. A leadott teljesítmény tehát ha $R_k = 2R_i$ lesz

$$W_2 = i_a^2.R_i = \left(\frac{\mu e_g}{3R_i}\right)^2 R_i = \frac{1}{9}\frac{(\mu e_g)^2}{R_i} = \frac{1}{R_i}\mu^2 \cdot \frac{9E_{a_0}}{16\mu^2}$$

$$W_2 = \frac{E_{a_0}^2}{16R_i}.$$

Tehát az adott $E_{a_0}$-nak megfelelően ez a legnagyobb teljesítmény. A 15. ábrából $I_a$ és $\mathcal{E}_a$ koordináták között kapott eredmények általános érvényűvé válnak, ha ezeket $I'_a$ és $E'_a$ koordinátákba transponáljuk, az $O$ konstans koordinátái segélyével. Az így kapott eredményekben azután már a görbületek is bele vannak számítva.

Ha most a kapott $e_g$-nek megfelelő legnagyobb teljesítményt keressük, akkor a levezetésünk értelmében ennek $R_i = R_k$ eset felel meg. Tehát eredményül $DFC$ teljesítményháromszöget kapjuk.

A teljesítmény értéke az előbbi módon

$$W_1 = \frac{(\mu e_g)^2 . R_i}{(2R_i)^2} = \frac{(\mu e_g)^2}{4R_i},$$

mely nagyobb a

$$W_2 = \frac{(\mu e_g)^2}{9R_i}$$

értékénél, de amint azt az ábrából is látjuk, ennek nagyobb nyugalmi anódfeszültség is felel meg.

Tehát a teljesítménymaximumok keresett feltételei a szerint változnak, mit veszünk fel állandónak, az $E_{a_0}$, avagy az $e_g$ értékét.

Most már nézzük azt, hogy ezen esetek közül melyik az, amelyikkel a gyakorlatban találkozunk. A kérdés lényegét mindjárt egy gyakorlati példával illusztráljuk.

Legyen adva egy teljesitményerősitőcső $R_i = 1000$ ohm belső ellenállással, $\mu = 3{\cdot}5$ erősitési tényezővel és 12 watt megengedhető anódveszteséggel és 200 volt megengedhető anódfeszültséggel. Az elektroncső anódáram-anódfeszültség karakterisztikája $O$ kezdőponttal a 16. ábrán látható.

Az előbbi számitásaink eredményét hogy alkalmazni tudjuk: $O'$ kezdőponttal segédkoordinátákat veszünk fel. Az $O$ kezdőpont jellemző adatai 10 ma. és 45 volt.

A lámpánál, amint láttuk, a megengedhető legnagyobb anódfeszültségként 200 volt volt megengedve. Tehát, amint tudjuk, adott anódfeszültség esetén, a teljesitmény akkor a legnagyobb, ha

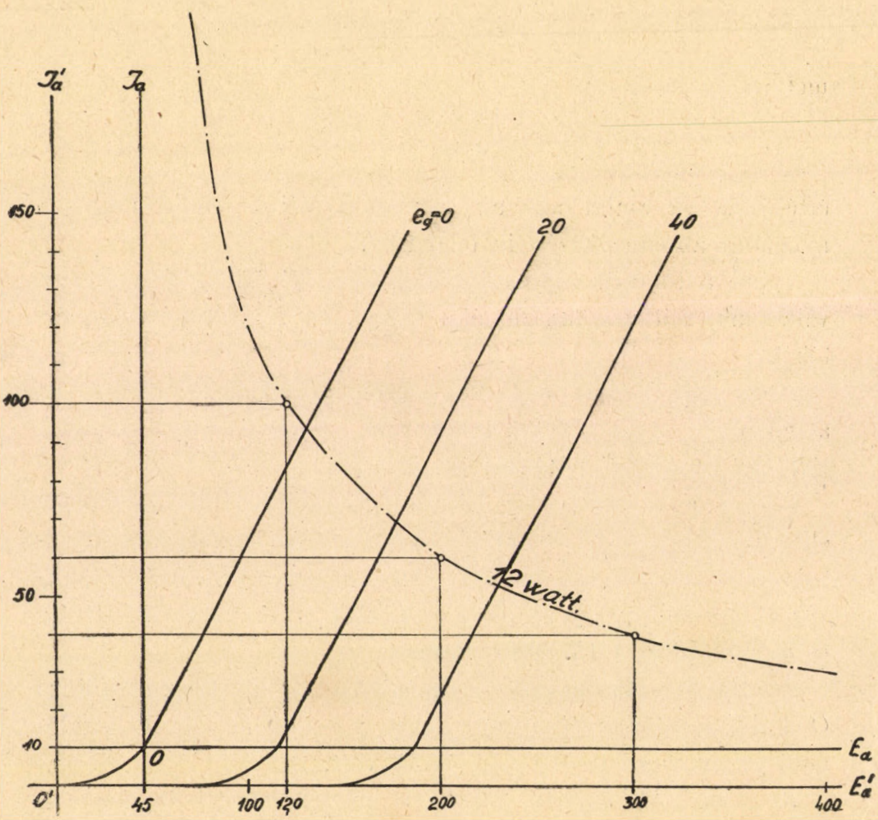
$$R_k = 2R_i.$$

Most azonban csak az a kérdés, hogy az így felvett külső ellenállás esetén az anódveszteség nem nagyobb-e a megengedhetőnél.

A fentebb kapott eredményünk szerint, ha a nyugalmi áram értéke

$$I_{a_0} = \frac{E_{a_0}}{4R_i} \quad \text{mivel} \quad E_{a_0} = 200 - 45 = 155$$

$$I_{a_0} = \frac{155}{4.1000} = \frac{39}{1000} \text{ amp} \quad I'_{a_0} = 39 + 10 = 49 \text{ ma.}$$




16. ábra.

Az anódveszteség

$$W = E'_{a_0} . I'_{a_0} = \frac{200.49}{1000} \cong 10 \text{ watt.}$$

Tehát a jelen esetben $R_k = 2R_i$ esetén az anódveszteség kisebb, mint a megengedett. Következésképpen tehát az így kapott pontot használjuk fel munkapontnak.

A rácsfeszültség értéke pedig, amelynél az erősítés még torzitásmentes

$$e_g = \frac{3E_{a_0}}{4\mu} - 1 = \frac{3.155}{4.3{\cdot}5} = 33 \qquad e_{g_{\text{eff}}} = 23{\cdot}6 \text{ volt.}$$

A maximálisan kivehető torzitásnélküli teljesítmény pedig

$$W_2 = \frac{E^2_{a0}}{16R_i} = \frac{155^2}{16.R_i} = 1{\cdot}75 \text{ watt.}$$

A számitásaink azonban mást is eredményezhettek volna. Ugyanis, ha $R_k = 2R_i$ feltételnek megfelelően kapott anódveszteség nagyobb lett volna a megengedettnél, akkor a munkapontnak az adott anódfeszültség s anódveszteségi hyperbola metszéspontját kellett volna felvenni.

Ezek az értékek legyenek az adott $E_{a_0}$ és $I_{a_0} = \frac{W}{E_{a_0}}$ evvel a munkaponttal, a kivezérléshez szükséges rácsfeszültség meg van határozva.

$$e_g = \frac{E_{a_0} - I_{a_0} R_i}{R_i}.$$

Ennek, amint tudjuk, $R_i = R_k$ eset felel meg és a legnagyobb torzitásmentes teljesitmény pedig

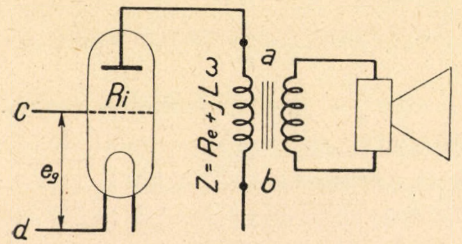
$$W_1 = \frac{(\mu e_g)^2}{4R_i}.$$

Ezek a megállapitások ohmikus terhelés esetének felelnek meg. Ide tartoznak tehát resonans frekvencia esetén a rezgőkörök is. Így tehát az előbbi megállapitásaink főként a nagy frekvenciájú torzitásmentes teljesitményerősítőkre vonatkoznak, amiket a modern nagyteljesitményű leadóállomásoknál mindig megtalálunk.

## 5. Audio frekvenciájú végerősítők.

Az audio frekvenciájú végerősítők teljesítménymaximumának feltételei egészen másként alakulnak, mint a nagy frekvenciájúaké. A feltételeket az módosítja lényegesen, hogy zenei átvitelről lévén szó, az egyes frekvenciák végerősítésének 100—10,000 frekvencia sávon egyenletesen kell lenni, mert különben a zenei átvitel torz lesz.

Evvel a problémával Rukop foglalkozott behatóan úgy, hogy itt csupán vizsgálatainak eredményét közöljük. Ezek szerint az audio frekvenciájú erősítőknél egyenletes erősítés mellett a kivehető teljesítmény akkor a legnagyobb, ha a külsőellenállás a belsőnek legalább négyszerese.



17. ábra.

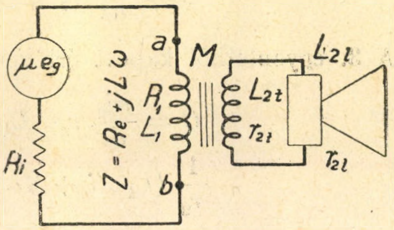
Alább most avval a kérdéssel fogunk foglalkozni, mely a rádiótechnika leggyakrabban előforduló problémájához tartozik. Ez pedig a kisfrekvenciájú erősítőkön való teljesítménymérés. Hangszóróknál, hangos filmeknél legtöbb esetben csak hozzávetőlegesen állapítják meg a hangszórók által felvett elektromos teljesítményt. Nem lesz tehát érdektelen, ha alább közlünk egy olyan eljárást, melynek segélyével a hangszórók által felvett elektromos teljesítményt egész pontosan meg tudjuk határozni.

Nézzük mindenekelőtt a probléma elméleti részét. Legyen a váltakozó rácsfeszültsége annak az elektroncsőnek (l. 17. ábra), melynek az anódkörében akarunk teljesítményt mérni. Az elekroncső belső ellenállása $R_i$ és az anód körében $Z = Re + jL\omega$ az impedancia, ahol $R_e$ a hangszóróhoz csatolt kimenő transzformátor primerjének, vagy ha transzformátort nem használunk, magának a hangszórónak a hatásos ellenállása. Az elektroncső erősitési tényezője legyen $\mu$, az $R_e$ ellenállást három részből gondolhatjuk összetéve.

$$Re = R_1 + R_{hf} + R'_2,$$

ahol $R_1$ a transzformátor primer tekercsének az ohmikus ellenállása, a hysteresis és foucolt veszteségeknek megfelelő ellenállás $R_{hf}$. Az $R'_2$ pedig a transzformátor szekunder oldaláról a primerre átszámitott összes ellenállásoknak megfelelő ellenállás. A transzformátor secunder tekercsének és a hangszórónak az ohmikus ellenállását kell a primerre átszámitani. Az $R'_2$ értéke a következőképpen fejezhető ki.

$$R'_2 = \frac{M^2 . \omega^2 . r_2}{r_2^2 + L_2^2 \omega^2},$$



18. ábra.

mely értéket a következő ekvivalens kapcsolásból kapjuk (l. 18. ábrát). Ahol a transzformátor primer tekercsének az önindukciója $L_1$, az ohmikus ellenállása $R_1$. A secunder tekercs önindukciója $L_{2t}$, az ellenállása $r_{2t}$, a kölcsönös indukció-tényező pedig $M$. A hangszóró önindukciója $L_{2l}$, ellenállása $r_{2l}$. Jelöljük továbbá

$$r_2 = r_{2t} + r_{2l} \quad \text{és} \quad L_2 = L_{2t} + L_{2l}.$$

A lámpa körére felírható egyenlet

$$\mu e_g = i_1 (R_1 + R_{hf} + R_i) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}. \qquad (1)$$

A secunder körre pedig

$$O = i_2 r_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}, \qquad (2)$$

ahol $i_1$ és $i_2$ alatt a váltakozó rácsfeszültség következtében keletkező váltakozó áramokat értjük az anód- és secunderkörben. Ha a vizsgálatunkat egy bizonyos frekvenciára végezzük s tudva azt, hogy torzitásnélküli teljesítményerősítésről van szó, akkor csekély elhanyagolással feltételezhetjük az intenzitások sinus törvényszerinti változását.

$$i_1 = i_{1\max} \sin(\omega t - \varphi_1)$$

$$i_2 = i_{2\max} \sin(\omega t - \varphi_2),$$

ezekből kétszeri differenciálás után kapjuk.

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} = -\omega^2 i_1 \qquad \frac{d^2 i_2}{dt^2} = \omega^2 i_2. \tag{3}$$

Differenciáljuk $t$ szerint a 2. egyenletet.

$$O = \frac{di_2}{dt} r_2 + L_2 \frac{di_2^2}{dt^2} + M \cdot \frac{di_1^2}{dt^2}.$$

A 3. egyenletből kapott értékeket behelyettesítve kapjuk:

$$O = \frac{di_2}{dt} r_2 - L_2 \omega i_2 - M\omega^2 i_1$$

$$\frac{1}{r_2} (L_2 \omega^2 i_2 + M\omega^2 i_1) = \frac{di_2}{dt}.$$

A 2. egyenletből

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{1}{L_2}\left(i_2 r_2 + M \frac{di_1}{dt}\right)$$

$$L_2^2 \omega^2 i_2 + M L_2 \omega^2 i_1 = -\left(i_2 r_2^2 + M \frac{di_1}{dt} r_2\right),$$

ez egyenletet rendezve

$$i_2 (r_2^2 + L_2^2 \omega^2) = -M\left(L_2 \omega^2 i_1 + \frac{di_1}{dt} r_2\right)$$

ebből az egyenletből szükségünk van $M\frac{di_2}{dt}$-re, hogy azt az első egyenletbe behelyettesíthessük. Tehát ezt az egyenletet differenciáljuk $t$ szerint és beszorozzuk $M$-el.

$$M \frac{di_2}{dt} (r_2^2 + L_2^2 \omega^2) = -M^2 \left(L_2 \omega^2 \frac{di_1}{dt} - \omega^2 i_1 r_2\right)$$

$$M \frac{di_2}{dt} (r_2^2 + L_2^2 \omega^2) = +M^2 \omega^2 \left(-L_2 \frac{di_1}{dt} + i_1 r_2\right)$$

$$M \frac{di_2}{dt} = \frac{M^2 \omega^2 \left(i_1 r_2 - L_2 \frac{di_1}{dt}\right)}{r_2^2 + L_2^2 \omega^2},$$

ezt behelyettesítve az 1. egyenletbe lesz

$$\mu e_g = i_1 (R_i + R_1 + R_{hf}) + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M^2\omega^2 \left(i_1 r_2 - L_2 \frac{di_1}{dt}\right)}{r_2^2 + L_2^2\omega^2},$$

az egyenletet rendezve

$$\mu e_g = i_1 \left(R_i + R_1 + R_{hf} + \frac{M^2\omega^2 r_2}{r_2^2 + L_2^2\omega^2}\right) + \frac{di_1}{dt}\left(L_1 - \frac{M^2\omega^2 . L_2}{r_2^2 + L_2^2\omega^2}\right)$$

$$\mu e_g = i_1 (R_i + R_e) + \frac{di_1}{dt} L$$

$$R_e = R_1 + R_{hf} + R_2' \quad R_2' = \frac{M^2\omega^2 r_2}{r_2^2 + L_2^2\omega^2} \tag{4}$$

és

$$L = L_1 - \frac{M^2\omega^2 L_2}{r_2^2 + L_2^2\omega^2},$$

tudjuk azt, hogy

$$M = K\sqrt{L_{1t} . L_{2t}} \quad \text{és hogy} \quad \sqrt{\frac{L_{1t}}{L_{2t}}} = \frac{n_1}{n_2},$$

ahol $K$ szóródástól függő érték, mely megközelítéssel 1-nek vehető és ahol a transzformátor primer menetszáma $n_1$, a secunderé pedig $n_2$. Ezekből kapjuk

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 L_{2t}^2 = L_{1t} . L_{2t},$$

ezt az egyenletet a 4. egyenletbe behelyettesítve, ahol

$$R_2' = \frac{K^2 . L_{1t} . L_{2t}\,\omega^2 . r_2}{r_2^2 + L_2^2\omega^2} = \frac{K^2 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 L_{2t}^2\,\omega^2 . r_2}{r_2^2 + L_2^2\,\omega^2},$$

a gyakorlatban $r_2$ elhanyagolható $L_2\omega$-val szemben. Így

$$R_2' = K^2 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 r_2 \left(\frac{L_{2t}}{L_2}\right)^2. \tag{5}$$

Az $e_g$ váltakozó rácsfeszültségnek megfelelő anódáram

$$i_a = \frac{\mu e_g}{R_i + R_e + jL\omega}.$$

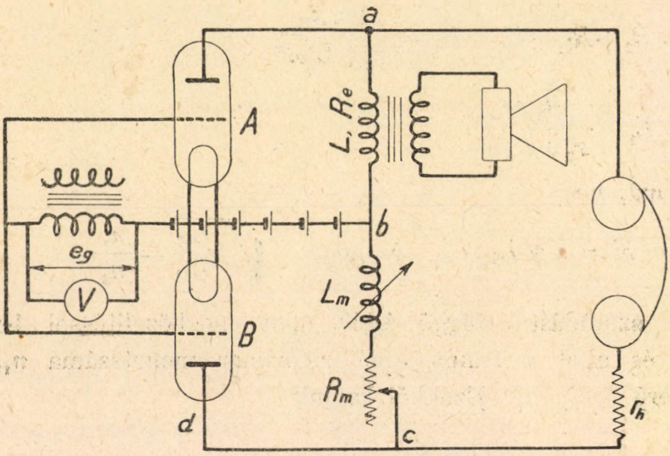
Az $a$ és $b$ pontok között a teljesítmény pedig

$$W = i_a^2 R_e = \left(\frac{\mu e_g}{R_i + R_e + jL\omega}\right)^2 R_e$$

vagy másképpen felírva

$$W = e_g^2 \,.\, R_e \,.\, \left(\frac{\mu}{R_i + R_e + jL\omega}\right)^2,$$

ha egy anódkörben tehát teljesítményt akarunk meghatározni, ez egyenlet jobb oldalának három tagját ismerni kell. Az $e_g$-t

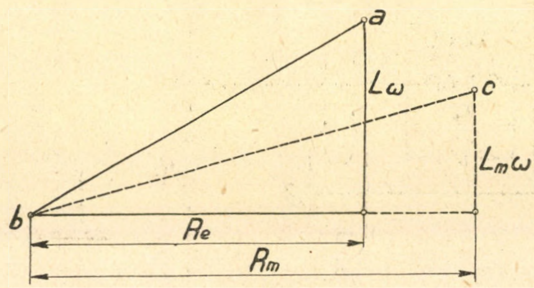



19. ábra.

csővoltméterrel mérjük. A másik két tagot pedig az alább ismertetett mérésekből fogjuk megkapni.

Nézzük tehát először a hatásos ellenállásnak a meghatározását. Ezt az ellenállást az üzemi (valóságos) viszonyoknak megfelelőleg kell meghatározni. Ez az ellenállás ugyanis függvénye az anódkörben folyó váltakozó és egyenáramú intenzitásnak s így a normális Wheatstone hid mérésből nem kapunk rá helyes adatot. Az intenzitást pedig viszont a terhelő kör impedanciája határozza meg, ez utóbbi pedig, tekintve azt, hogy egyenárammal előmágnesezett tekercsről van szó, az üzemi adatoknak megfelelően alakul ki.

Az üzemi viszonyoknak megfelelő hatásos ellenállást az alábbi elrendezésből (l. 19. ábra) határozzuk meg. Legyen *A* az a lámpa, melynek anódkörében akarjuk meghatározni a teljesítményt, illetőleg először az az *a* és *b* pontok közötti valóságos ellenállás, amely egy üzemi maximális $e_g$-nek megfelelőleg alakul ki. A méréshez a kapcsolás szerint alkalmazunk egy ú. n. mérőlámpát *B*, mely ugyanolyan típusú lámpa legyen, mint *A* s az erősítési tényezője inkább kissé nagyobb lehet, mint az *A* lámpáé.




20. ábra.

A tárgyalások egyszerűsítése kedvéért tételezzük fel, hogy a két lámpa teljesen egyforma. A *B* lámpa anódkörébe iktassunk egy változtatható $L_m$ vasmag nélküli önindukciót és $r_m$ változtatható ohmikus ellenállást. A *B* lámpa rácsfeszültségváltozása azonos, amint a kapcsolásból is láthatjuk, az *A* lámpáéval.

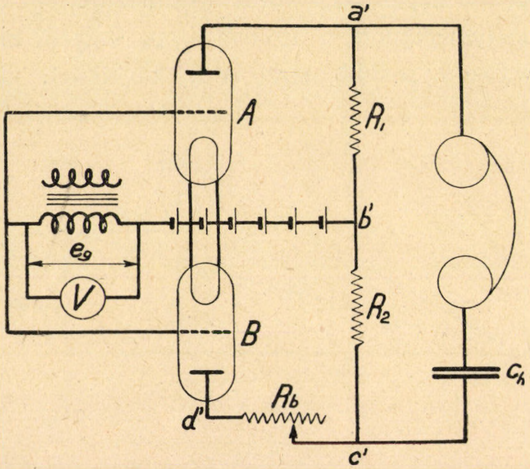
Most rajzoljuk meg az *ab* és *bc* pontok közötti ellenállások diagrammjait (l. 20. ábrát). Egy általános esetben. A két lámpa anódkörének kezdőpontjai *a* és *c*, és a közös pont *b* itt is fellelhető.

A vizsgálatunknál olyan frekvenciájú $e_g$-t állítunk elő e csőgenerátorral, amilyen frekvenciára a mérést elvégezni akarjuk. Ha az impedanciáknak megfelelő intenzitásokkal beszorzunk, ezen diagrammfeszültség diagrammá alakul át.

A *b* pont közös potenciálú és a 19. ábra *a* és *b* pontjai itt is *a* és *b*-vel vannak jelölve.

Tehát ebből látjuk, hogy az *a* és *c* pontok között feszültség-különbség van, aminek megfelelőleg a két pont közé kapcsolt s nagy előtét ellenállással vagy kis előtét kapacitással ellátott telefon hangot ad.

Ezt a hangot minimumra lehet hozni (theoretikusan zérusra) az $L_m$ önindukció és $r_m$ ellenállás változtatása által. A 20. áb-

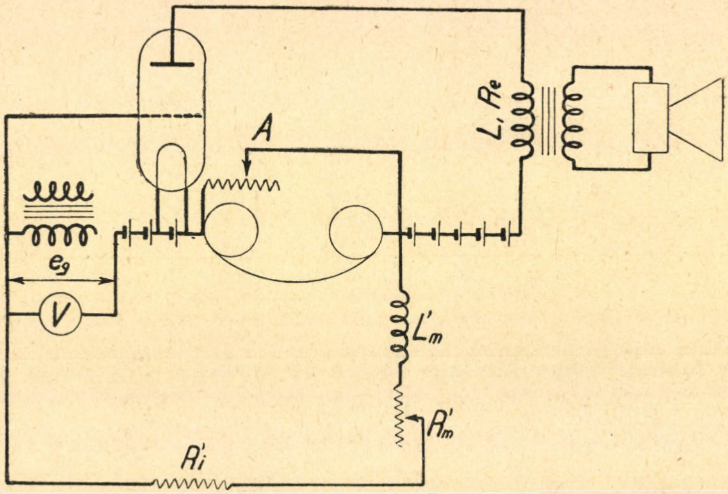



21. ábra.

rából látjuk, hogy hangminimum akkor van, ha $a$ és $c$ egyező potenciálú. Ez pedig akkor van, ha

$$r_m = R_e \quad \text{és} \quad L_m = L$$

az $r_m$-be bele van számitva az $L_m$ tekercs ohmikus ellenállása is. Tehát ily módon a terhelő kör hatásos ellenállását meg tudjuk határozni. Abban az esetben, ha $A$ lámpával azonos karakterisztikus adatokkal rendelkező $B$ lámpát nem tudunk találni, akkor, amint az előbb mondottuk, egy oly $B$ lámpát választunk, melynek az erősítési tényezője nagyobb az $A$ lámpáénál. Ugyanis az adatok között az erősítési tényező a legnagyobb fontosságú ennél a mérésnél. Nagyobb erősitésű tényezőjű $B$ lámpát pedig azért választunk, mert a nagyobb erősítést megfelelő ellenállással ki tudjuk balanszirozni. A balanszirozás sémáját a 21. ábrából látjuk. Az $R_1$ és $R_2$ ohmikus ellenellásoknak egymással s a terhelő kör várható impedanciájával egyenlő nagyságúnak vesszük fel. Az $R_b$ balanszellenállást pedig addig növeljük, míg a telefon hangminimumot nem ad. Ezt az $R_b$ ellenállást kapcsoljuk be azután a 19. ábra $d$ és $c$ pontjai közé.




22. ábra.

A hatásos ellenállás meghatározása után a

$$\frac{\mu}{R_i + R_e + jL\omega}$$

faktort kell meghatározni. Ez történhet kétféleképpen: számítással vagy méréssel. Az $R_e$ és $L\omega$ az előbbi mérés eredménye. Az erősítési tényező $\mu$ és a lámpa belső ellenállása $R_i$ adottak, vagy pedig az ismert eljárásokkal meghatározhatók. Így a faktor kiszámítható.

A faktor nagyságának mérésre való meghatározása, mely az előbbi mérés eredményének kontroll mérése lehet, következőképpen történik (l. 22. ábra).

A lámpára működtetjük a megengedhető $e_g$-t és alkotunk egy másik áramkört, amelyben az ohmikus ellenállások $R_i'$ és $R_m'$, és az önindukció $L_m'$.

A két áramkör közös ágában van egy kis ellenállású telefon beiktatva, amely általában hangot ad. Hangminimumot vagy theoretikusan teljes elhallgatást akkor kapunk, ha a két áramkörben folyó váltakozó áramok egyenlő nagyok és fázisban 180°-nyira vannak eltolva egymástól. Ekkor érvényes a következő összefüggés

$$\frac{\mu e_g}{R_i+R_e+jL\omega}=\frac{e_g}{R'_i+R'_m+jL_m\omega} \tag{6}$$

vagy továbbá

$$R'_i+R'_m+jL'_m\omega=\frac{R_i+R_e+jL\omega}{\mu}$$

$$R_i=\frac{R_i}{\mu}\quad R'_m=\frac{R_e}{\mu}\quad L'_m=\frac{L}{\mu}. \tag{7}$$

A telefon hangminimuma esetén az egyenlet jobboldalát a mérési eredményekből rögtön megkaphatjuk.

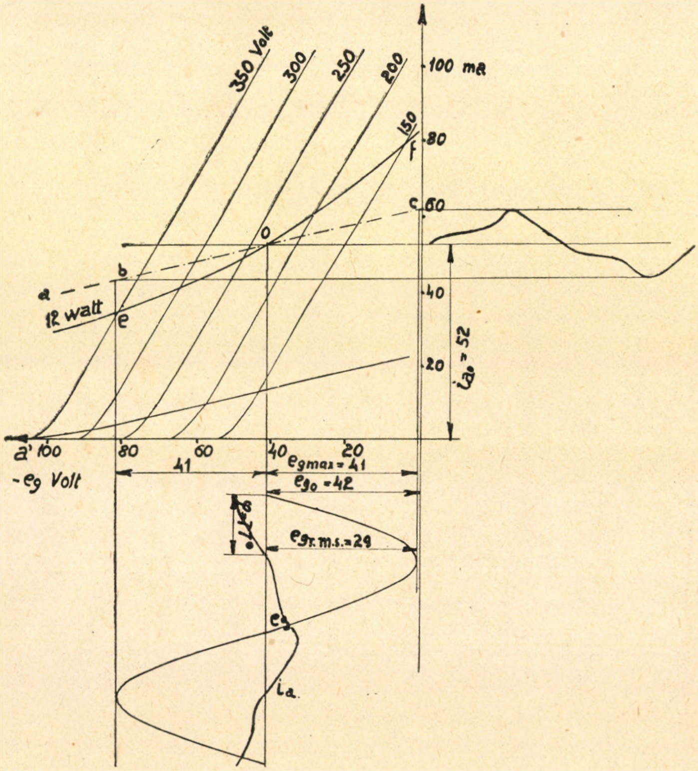
Amint említettük, a szükséges faktort számítással is megkaphatjuk. A hatásos ellenállásmérésnél megmértük $R_e$-t és $L$-t. A belső ellenállás $R_i$ és az erősítő tényező $\mu$ értékét mint a lámpa jellemző adatait ismerjük, vagy ismert mérésekből meghatározzuk s így a számítást el tudjuk végezni. Az előbbi mérés eredményeit evvel a méréssel kontrollálhatjuk oly módon, hogy $R_i$ és $\mu$ értékét ismerve vagy meghatározva a nagyságát, előre beállíthatjuk. A mérés eredményeként kapott $R'_m$ és $L'_m$ értékek a 7. egyenletekből az $R_e$ és $L$ új értékeit adják.

A teljesitmény meghatározásához szükséges $e_g$ értéket csővoltméterrel mérjük.

Most hátra van még csupán az, hogy egy adott teljesitményerősitő esetén mekkora a megengedhető maximális torzitás nélküli $e_g$.

A feladat elvégzésére mindjárt felhozunk egy gyakorlati példát. A lámpa karakterisztikája a 23. ábra szerint adva van. Az anódlemezen megengedhető maximális veszteség 12 watt. Ennek megfelelőleg berajzoljuk az $e_f$ vonalat. Az anódkörben a terhelés ohmikus ellenállása 2430 Ohm, az önindukciója 2·5 Henry.

Az impedanciája 1000 frekvenciánál 15,820 Ohm. A vizsgálatunkat ugyanis 1000 frekvenciára végezzük, mert az így kapott érték nagyobb frekvenciára is jó s kisebbnél pedig nem okoz észrevehető torzitást. A helyes eredményt többszöri próbálgatás után tudjuk természetesen csak megkapni.

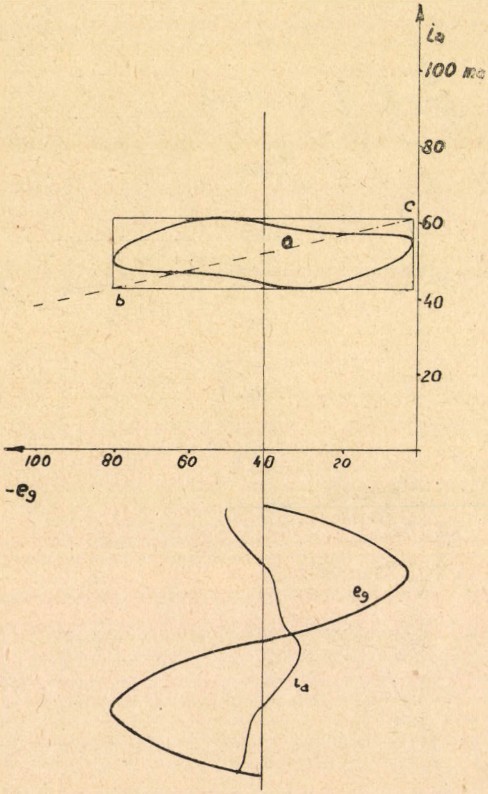



23. ábra.

Fel kell venni először a munkapontot meghatározó $e_{g_0}$ rácsfeszültséget $e_{g_0} = 42$ volt, ez meghatározza az $ef$ egyenesen egy $O$ dolgozópontot, aminek megfelelő anódáram $i_{a_0} = 52$ ma, tehát ha $e_g = O$ a feszültségveszteség a terhelés mentén

$$e_{ae} = \frac{52.2430}{1000} = 126 \text{ volt.}$$

Az $O$ munkapontnak megfelelő anódfeszültség 240 volt. Tehát az anód batteriafeszültsége $e_{ab} = 240 + 126 = 366$ volt. Ennek megfelelőleg kell megrajzolni a dynamikus karakterisztika kiindulópontját $a'$-t, mellyel párhuzamosan fog majd haladni a tényleges dynamikus karakterisztika. Az $a'$ pontból kiindulólag megszerkesztünk egy 15,820 Ohm ellenállásnak megfelelő dynamikus karakterisztikát. Ha most evvel párhuzamost húzunk az $O$ ponton át, megkapjuk a tényleges $abc$ dynamikus karakterisztikát.




24. ábra.

Ennek a karakterisztikának a —1 vertikálissal való metszéspontja $c$ meghatározza az anódáram maximális értékét, amely pedig jelen esetben $i_{a_{max}} = 8{\cdot}0$ ma lesz.

Ha tehát az impedancia értéke 15,820 Ohm, a 240 volt anódfeszültség váltakozni fog

$$e' = \frac{8.15820}{1000} = \pm 126{\cdot}5$$

volttal. Minimális $i_a$ esetén a lámpára jutó anódfeszültség $240 + 126{\cdot}5 = 366{\cdot}5$ volt, maximális $i_a$ esetén pedig $240 - 126{\cdot}5 = 113{\cdot}5$ volt.

A munkapont helye meghatározza a torzitásmentes és a kivezérlésre szükséges rácsfeszültség értékét is.

$$e_{g_{max}} = 41 \text{ volt} \quad e_{g_{eff}} = 29 \text{ volt.}$$

Az $i_a$ intenzitás görbe alakja oscillograffal meghatározható. A fáziseltolódás az $i_a$ és $e_g$ görbe között pedig legyen

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{r} = \frac{2{\cdot}5 . 2\pi . 1000}{2430+1000} = 4{\cdot}56$$

$$\varphi \cong 77{\cdot}0^\circ .$$

Az *aboc* görbe a lámpa terhelésének megfelelő dynamikus karakterisztika. Ha azonban a kapott adatok alapján megszerkesztjük az $i_a = f(e_g)$ zárt görbét, a 24. ábrán láthatót kapjuk. A görbét burkolja az a derékszögű négyszög, melynek átlója *bc* a lámpa dynamikus karakterisztikája. Ha a terhelő körben nem volna vasmag, az $i_a$ görbe sinusz lefolyású volna s ennek eredményeként itt egy ellipszist kapnánk. A kapott görbe alakját természetesen lényegesen befolyásolja az intenzitási görbe forma faktora (az effektív és a középértékek viszonya). Az alant közölt táblázat egy néhány lámpával végzett mérések eredményét mutatja.

| Lámpa | $R_i$ | $\mu$ | $R_e$ | $L$ henry | $e_g$ max. | $e_{ab}$ | $\omega$ | Teljesítmény watt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Philips *B* 405 | 2100 | 4·8 | 4800 | 2·1 | 8 | 150 | $2\pi.1000$ | 0·032 |
| Telefunken $R_e$ 604 | 1000 | 3·62 | 2970 | 2·35 | 29 | 366 | | 0·148 |
| Telefunken *RV.* 218 | 3500 | 7·0 | 9800 | 3·85 | 25 | 404 | | 0·4 |

*

Kísérleteimet a Kir. József Műegyetem Technikai Fizikai Intézetében végeztem.

Nem mulaszthatom el, hogy Dr. Wittmanm Ferenc műegyetemi ny. r. tanár úrnak a munkám folyamán tapasztalt szíves irányításáért és tanácsáért e helyen is hálás köszönetemet ne nyilvánítsam.

*Babits Viktor.*

# LEISTUNGSVERSTÄRKER.

Nach der Behandlung der dynamischen Karakteristiken der Elektronenröhre untersucht der Verfasser die Arbeitsdiagramme, deren Verwendung bei den Leistungsuntersuchungen sich als sehr zweckmässig erwiesen hat. Er behandelt zunächts die mathematische Ableitung der ellipsenförmigen Arbeitsdiagramme zwischen Anodenstrom und Anodenspannung. Dann folgen die Bedingungen des Leistungsmaximums auf mathematischer und versuchstechnischer Grundlage. Bei konstanter Gitterspannung tritt Leistungsmaximum ein, wenn äusserer und innerer Widerstand gleich gross sind. Wenn aber die Anodenspannung konstant und die Gitterspannung veränderlich ist, so herrscht dann Leistungsmaximum, wenn der äussere Widerstand der doppelte des inneren ist.

Verfasser behandelt dann die Theorie der Endverstärker. Zeigt uns wie die äquivalente Schaltung eines Endverstärkers durchgeführt wird. Nach einer mathematischen Ableitung rechnet er die richtige Umrechnungformel eines Ausgangstransformators aus.

Es wird gezeigt, dass die Energie-Gleichung einer Endverstärkerröhre aus drei Faktoren besteht. Der erste, die Gitterspannung kann durch Messinstrumente bestimmt werden. Der zweite, der wirksame Widerstand kann nach dem Verfahren des Verfassers den tatsächlichen Verhältnissen entsprechend gemessen werden. Der dritte Faktor der Energie-Gleichung kann auch mittels einer besonderen Schaltung gemessen werden.

*V. Babits.*

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA  GÉCZY KÁLMÁN.