Duplum

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

HARMADIK ÉVFOLYAM

I. FÜZET. 1894 JANUÁR

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894

TARTALOM

Lap

VÁLYI GYULA: A másodrendű forgási felületekről 1
RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez 5
RADOS G.: Az adjungált alakok elméletéről (I. közl.) 12
BEKE MANÓ: A biquadratikus egyenletek megoldásához 21
HORVÁTH JÓZSEF: Egy minimum-probléma elemi tárgyalása 25
Megoldott feladatok. (CSILLAG V., GRÜNWALD J., CSEHÉLY A., MAKSAY ZS., FUCHS K. és LÓKY B. uraktól.) 30
Irodalom. (S. CARNOT: Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers, ism. CZÓGLER A. Középiskolai Mathematikai Lapok.) 34
Physikai Laboratorium. (A chrómsavas elem és a Gülcher-féle hőoszlop. — Ólomforrasztás. — Az aluminium bevonása más fémekkel.) 39
Kérdés 40
Értesitő a Math. és Phys. Társulat előadásairól. (FRÖHLICH J. A forgó testek egy nevezetes tulajdonságáról) 41

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. Jelen füzetünk a Math. és Phys. Lapok III. kötetét kezdi meg. A harmadik társulati év 1894. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czimére — legczélszerűbben a I. füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *A múlt évről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért,* hogy a folyóirat költségeit fedezhessük.

Rendes ülések. A társulat rendes üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére **(VI. Bulyovszky-u. 16.)** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár **(VII., Csengery-u. 1)**, a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesitjük.

T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesitésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó tetemes kiadástól mentik fel.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

HARMADIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1894

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJÁ.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HARMADIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

VÁLYI GYULA: A másodrendű forgási felületekről 1; RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez (I. közl.) 5; RADOS G.: Az adjungált alakok elméletéről (I. közl.) 12; BEKE MANÓ: A biquadratikus egyenletek megoldásához 21; HORVÁTH JÓZSEF: Egy minimum-probléma elemi tárgyalása 25; Megoldott feladatok (Csillag V., Grünwald J., Csehély A., Maksay Zs., Fuchs K. és Lóky B. uraktól) 30; *Irodalom* (S. CARNOT: Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers, ism. CZÓGLER A. — (Középiskolai Mathematikai Lapok) 34; *Physikai laboratorium* (A chrómsavas elem és a Gülcher-féle hőoszlop. Ólomforrasztás. Az aluminium bevonása más fémekkel) 39; Kérdés 40; *Értesitő a Math. és Phys. Társulat* előadásairól (FRÖHLICH J.: A forgó testek egy nevezetes tulajdonságáról) 41.

Második füzet.

RADOS GUSZTÁV: Új soralakok ez e számára 49; VÁLYI GYULA: A tetraéder magasságairól 56; BALOG MÓR: Minimum-problémák elemi tárgyalása 60; SKOPÁL ISTVÁN: A perspektiv háromszögekre vonatkozó tétel 64; *Physikai Szemle* (Görbe fénysugarakról. Az ellenállás absolut egységének valószinű értékéről. Köralakú nyilás fényelhajlási jelenségének intensitási viszonyairól) 66; *Irodalom.* (Ostwald's Klassiker: SASSURE, Chem. Untersuchungen über die Vegetation. Laplace, Ivory, Gauss, Chasles und Dirichlet, Über die Anziehung homogener Ellipsoide. HUYGENS, Abhandlung über das Licht. CANIZZARO: Abriss eines Lehrganges d. theor. Chemie. LAMBERT's Photemetrie. BUNSEN und ROSCOE: Photochemische Untersuchungen, ism. KÖVESLIGETHY R.) 72; *Megoldott feladatok* (Tőtössy B. és Szabó P. uraktól) 77; *Feladatok* (Kürschák és Vályi uraktól) 84; *Physikai laboratorium* (ANTOLIK KÁROLY: Az elektr. szikrarajzok előállításáról) 85; *Értesitő a Math. és Phys. Társulat* előadásairól (TANGL K.: Néhány forgási test niveau- és erőgörbéiről) 90; Helyreigazítás 96.

*

Harmadik füzet.

KLIMKÓ MIHÁLY: Adalék a primitiv gyökök elméletéhez 97; KÜRSCHÁK JÓZSEF: A körmérés elmélete és története 102; RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez (II. közl.) 111; *Irodalom.* Tesla-féle kisérletek: Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz. Zusammengestellt von E. de FODOR. Ism. Ebert után RATKOVSZKY 118; *Megoldott feladatok* (Szontagh G. és Maksay Zs. uraktól) 131; *Értesítő a Math. és Phys. Társulat* előadásairól (HARKÁNY BÉLA: Az É.-Amerikai observatoriumokról) 139.

Negyedik füzet.

KÖVESLIGETHY RADÓ: A fogyatkozások graphikus meghatározása (I. közlem.) 149; SUTÁK JÓZSEF: Algebrai vizsgálatok a függvénytanban (I. közl.) 157; KLUG LIPÓT: Tételek a paraboláról s a hiperbolikus paraboloidról 166; KÜRSCHÁK JÓZSEF: A körmérés története és elmélete (VIII. közl.) 170; *Megoldott feladatok* (Csillag V. és Maksay Zs. uraktól) 181; *Feladatok* (Fuchs Károly urtól) 182; *Értesítő a Math. és Phys. Társulat* előadásairól (GRUBER N.: A Gramme-féle gyűrű elmélete) 183.

Ötödik füzet.

Értesítő a választmány jun. 22. üléséről. Érettségi vizsgálatot tett tanulók mathematikai és physikai versenye 197; NESNERA ALADÁR: Az involutorikus pontsorok 202; KOPP LAJOS: Egy tétel a sokaságok elméletéről 207; KÖVESLIGETHY RADÓ: A fogyatkozások graphikus meghatározása (II. közl.) 215; RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez (III. közl.) 224; KÜRSCHÁK JÓZSEF: A körmérés története és elmélete (IX. közl.) 230; *Physikai laboratorium* (KISS KÁROLY: Kis légnyomások megméréséről) 240; A *Mathematikai és Physikai Társulat második rendes közgyűlése* 244; A *Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai* 255; Bólyai János síremlékére befolyt adományok kimutatása 256.

Hatodik és hetedik füzet.

SKOPÁL ISTVÁN: Egy helyzetgeometriai tétel 257; VÁLYI GYULA: Desargues tantételének térbeli analogonjáról 264; RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez (IV. és befejező közlemény) 274; BEKE MANÓ: Az adjungált helyettesítések alkalmazása az adj. diff. egyenleteknél 286; BAUER MIHÁLY: A karakterisztikus egyenletek elméletéhez 293; *Physikai Szemle* (A hőmérséklet mérése elektromos úton) 299; A *Math. és Phys. Társulat ünnepélyes ülése.* (Az elnök üdvözlése. A tanulók versenyén megitélt díjak kiosztása. Dr. KLUPÁTHY előadása) 321; A *Math. és Phys. Társulat I. versenyén jutalmazott dolgozatok* (SEIDNER MIHÁLY és PAP PÁL dolgozatai) 316; *Megoldott feladatok* (Vladár

Lajos, Privorszky Alajos, Bauer Mihály és Suták József uraktól) 324; *Értesítő a Math. és Phys. Társulat* előadásairól (Dr. Hoór: A villámhárítókról) 333; A *Mathematikai és Physikai Társulat* új tagjai 352.

Nyolczadik füzet.

Szily Kálmán: A körvonal üldöző görbéje 353; Kürschák József: Az invariánsok elméletének alaptételéről 359; Bauer Mihály: Megjegyzés Dirichlet egyik tételéhez 369; *Physikai Szemle* (A kritikus pont meghatározásáról. Folyadékok és telitett gőzök sürűségéről.) *Irodalom.* Heaviside: Electrical Papers (ism. Haller) 382; *Megoldott feladatok* (Rados J. urtól). *Physikai laboratorium* (Kisérletek a folyadékok feszültségére. A fémek különböző kiterjedése. Kaucsuk összehúzódása). *Értesítő a Math. Phys. Társ.* előadásairól (Dr. Klupathy J.: Kisérletek elektromos oscillatiókkal).

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Lap

BALOG MÓR: Minimum-problemák elemi tárgyalása 60
BAUER MIHÁLY: A karakterisztikus egyenletek elméletéhez 293
— Megjegyzések Dirichlet egyik tételéhez 369
BEKE MANÓ: A biquadratikus egyenletek megoldásához 21
— Az adjungált helyettesítések alkalmazása az adjungált differential-egyenleteknél 286
HORVÁTH JÓZSEF: Egy minimum-probléma elemi tárgyalása 25
KLIMKÓ MIHÁLY: Adalék a primitiv gyökök elméletéhez 97
KLÚG LIPÓT: Tételek a paraboláról s a hiperbolikus paraboloidról ... 166
KOPP LAJOS: Egy tétel a sokaságok elméletéről 209
KÖVESLIGETHY RADÓ: A fogyatkozások graphikus meghatározása (Első közl.) 149
— A fogyatkozások graphikus meghatározása (Második közl.) 215
KÜRSCHÁK JÓZSEF: A körmérés elmélete és története (Hetedik közl.) ... 102
— A körmérés elmélete és története (Nyolczadik közl.) 170
— A körmérés elmélete és története (Kilenczedik és befejező közl.) ... 230
— Az invariánsok elméletének alaptételéről 359
NESNERA ALADÁR: Az involutorikus pontsorok 202
RADOS GUSZTÁV: Az adjungált alakok elméletéről (Első közl.) 12
— Uj soralakok az e számára 49
RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez (Első közl.) 5
— A surlódás elméletéhez (Második közl.) 111
— A surlódás elméletéhez (Harmadik közl.) 224
— A surlódás elméletéhez (Negyedik és befejező közl.) 274
SKOPÁL ISTVÁN: A perspektiv háromszögekre vonatkozó tétel 64
SUTÁK JÓZSEF: Algebrai vizsgálatok a függvénytanban (Első közl.) 157
SZILY KÁLMÁN: A körvonal üldöző görbéje állandó távolság mellett ... 353
VÁLYI GYULA: A másodrendü forgási felületekről 1
— A tetraéder magasságairól 56
— Desargues tantételének térbeli analogonjáról 264

Physikai Szemle.

Lap
BARTONIEK GÉZA: Görbe fénysugarakról (WIENER után) ... 66
CSEMEZ JÓZSEF: A kritikus pont meghatározásáról (PELLAT után) ... 373
STEINER LAJOS: Köralaku nyilás fényelhajlási jelenségének intensitási viszonyairól ... 71
TANGL KÁROLY: A hőmérséklet mérése elektromos uton ... 299
— Folyadékok és telitett gőzök sürűségéről (AMAGAT és MATHIAS után) ... 378
WITTMANN FERENCZ: Az ellenállás absolut egységének valószinű értékéről (DORN után) ... 69

Irodalom.

CZÓGLER ALAJOS: S. CARNOT, Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers ... 34
HELLER ÁGOST: HEAVISIDE, Electrical Papers ... 382
KÖVESLIGETHY RADÓ: Ostwald's Klassiker ... 72
RADOS GUSZTÁV: Középiskolai Mathematikai Lapok ... 38
RATKOVSZKY PÁL: FODOR, Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz (EBERT után) ... 118

Ismertetett művek.

ARANY DÁNIEL: Középiskolai Mathematikai Lapok (ism. RADOS) ... 38
BUNSEN u. ROSCOE: Photochemische Untersuchungen (ism. KÖVESLIGETHY) 76
CARNOT: Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers (ismertette CZÓGLER) ... 34
CANIZZARO: Abriss eines Lehrganges d. theor. Chemie (ism. KÖVESLIGETHY) 74
CHASLES l. LAPLACE stb.
DIRICHLET l. LAPLACE stb.
FODOR: Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz (ism. RATKOVSZKY) ... 118
GAUSS l. LAPLACE stb.
HEAVISIDE: Electrical Papers (ism. HELLER) ... 382
HUYGENS: Abhandlung über das Licht (ism. KÖVESLIGETHY) ... 73
IVORY l. LAPLACE stb.
LAPLACE, IVORY, GAUSS, CHASLES und DIRICHLET: Über die Anziehung homogener Ellipsoide (ism. KÖVESLIGETHY) ... 71
SAUSSURE: Chemische Untersuchungen über die Vegetation (ism. KÖVESLIGETHY) ... 71

Kitüzött feladatok.

Lap

Fuchs Károly: kitüzi a 27. és 28. feladatot ... 182
Kürschák József: « « 23. « ... 84
Vályi Gyula: « « 24., 25. és 26. « ... 84

Megoldott feladatok.

Bauer Mihály megoldja a 20. feladatot ... 326
Csehély Adolf « « 14. « ... 31
Csillag Vilmos « « 14. « ... 30
— — « « 18. « ... 181
Fuchs Károly « « 14. « ... 32
Grünwald István « « 14. « ... 31
Maksay Zsigmond « « 14. « ... 32
— — « « 17. « ... 136
— — « « 18. « ... 182
Pap Pál megoldja a tanuló-verseny tételeit ... 319
Privorszky Alajos megoldja a 20. feladatot ... 324
Seidner Mihály megoldja a tanuló-verseny tételeit ... 316
Suták József megoldja a 20. feladatot ... 331
Szabó Péter « « 15. « ... 79
Szontagh Gusztáv « « 16. « ... 131
— — « « 17. « ... 133
Tötössy Béla « « 15. « ... 77
Vladár Lajos « « 19. « ... 323

Physikai laboratorium.

Antolik Károly: Az elektromos szikrarajzok előállításáról ... 85
Bartoniek Géza: Aluminium bevonása más fémekkel ... 40
Edelmann Sebő: A chrómsavas elem s a Gülcher-féle hőoszlop ... 39
— Ólomforrasztás ... 39
— Szigetelő és sav-álló ragasztószer ... 46
Kiss Károly: Kis légnyomások méréséről ... 240
Klupathy Jenő: Kisérletek a folyadékok felületi feszültségére ... 396
— A fémek külömböző kiterjedése ... 398
— A kifeszített kaucsuk összehuzódása ... 398.

Előadások.

Bartoniek Géza: Az absolut nedvesség mérésére alkalmas készülékekről 41
Fröhlich Izidor: A forgó testek egy nevezetes tulajdonságáról ... 41
Fuchs Károly: A capillaritás elméletének alapjairól ... 399
Grúber Nándor: A Gramme-féle gyürű elmélete (közölve a 183. l.) ... 139

Lap

HARKÁNYI BÉLA: Észak-Amerika néhány tudományos intézetéről (közölve a 139. l.) --- 90
HOÓR MÓR: A villámhárítók elméletéről (közölve a 333. l.) --- 139
— Az elektromótorokról --- 399
KLÚG LIPÓT: A lineáris complexusról --- 399
KLUPATHY JENŐ: Az állandó elektromos áram méréséről (közgyűlési előadás) --- 244
— Kisérletek az elektromos oscillatiókkal (közölve) --- 399
— Előadási kisérletek (l. 396. l.) --- 399
KŐNIG GYULA: Az egy- és többméretü sokaságok kölcsönösen egyértelmű vonatkoztatása --- 399
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről (közölve 359. l.) 90
RADOS GUSZTÁV: Nehány soralak az *e* számára (közölve a 49. l.) --- 90
RÉTHY MÓR: A folyadéksugarakról --- 41
SUTÁK JÓZSEF: A végtelen determináns elméletéről --- 41
SZILY KALMÁN: A körvonal üldöző görbéje, állandó távolság mellett (közölve a 353. l.) --- 399
TANGL KÁROLY: Néhány egyszerü forgási test niveau- és erőgörbéi (közölve a 90. l.) --- 399

Társulati ügyek.

A Math. Phys. Társulat második rendes közgyülése --- 144
Értesitő a választmány juniusi üléséről (Határozat az elnök üdvözlése és a mathematikai és physikai tanuló-versenyek tárgyában) --- 197
Érettségi vizsgálatot tett tanulókhoz --- 200
A Math. Phys. Társulat ünnepélyes ülése (Elnök üdvözlése. A tanulóverseny eredményének kihirdetése, s a díjak kiosztása) --- 305
Inditvány Bolyai János sírjának megjelölése tárgyában --- 252
Bolyai János síremlékére befolyt adományok első kimutatása --- 256
A Math. Phys. Társulat új tagjai --- 255 és 352

A MÁSODRENDŰ FORGÁSI FELÜLETEKRŐL.*

A másodrendű forgási felületek kritériumainak az a levezetése, melyet itt közlök, véleményem szerint egyszerűbb és egyenesebb azoknál, a melyek az ismert elemző geometriai tankönyvekben láthatók.

A levezetés alapját a következő két determináns-tétel alkotja:

1. ha a reális elemekből álló szimmetrikus determináns elenyészik, akkor az átlói aldeterminánsok között nem lehetnek különböző előjelűek;

2. ha a szimmetrikus determináns összes átlói aldeterminánsaival elenyészik, akkor velök együtt az összes aldeterminánsok elenyésznek.

Ez a két tétel egyszerű következése az elenyésző szimmetrikus determinánsok azon ismert tulajdonságának, mely szerint

$$A_{ii}A_{kk}-A_{ik}^2=0,$$

a hol A_{ii}, A_{kk}, A_{ik} az $|a_{ik}|$ szimmetrikus determináns a_{ii}, a_{kk}, a_{ik} elemeinek aldeterminánsai.

I.

Ismeretes, hogy annak eldöntése vajon a derékszögű pontkoordinátás egyenletével adott másodrendű felület forgási felület-e, egyértelmű annak eldöntésével, hogy a felülethez tartozó Laplace-egyenletnek van-e többszörös gyöke?

A Laplace-egyenlet

* Előadva a Math. és Phys. Társulat 1893 november hó 30-án tartott szakülésén.

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

melynek, mint ismeretes, minden gyöke reális.

Ha az aldeterminánsokat szokásos módon Δ_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ jelekkel jelöljük, akkor deriváltjai:

$$-\Delta'(\lambda) = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}$$

$$\frac{1}{2}\Delta''(\lambda) = (a_{11}-\lambda) + (a_{22}-\lambda) + (a_{33}-\lambda)$$

Ha λ kétszeres gyök, akkor

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = 0$$

egyenletek együtt teljesülnek. Minthogy azonban Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} különböző előjelűek nem lehetnek, egyenként kell elenyészniök. De akkor az elébb említett 2. tétel szerint az összes aldeterminánsok elenyésznek.

Ha λ háromszoros gyök, akkor az előbbi feltételekhez járul még

$$\Delta''(\lambda) = 0.$$

Ez az elenyésző Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} determinánsok átlói aldeterminánsai összegének elenyészését kivánja, a mi megint csak úgy lehet, ha ezek egyenkint s velök együtt Δ összes elemei elenyésznek. Tehát λ csak akkor lehet háromszoros gyök, ha

$$\left.\begin{aligned} a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0 \\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda, \end{aligned}\right\}$$

azaz ha a felület gömb. Ezt az esetet a következőkben kizárjuk.

Azt már láttuk, hogy ha λ kétszeres gyök, akkor Δ összes aldeterminánsai elenyésznek. A tétel azonban meg is fordítható következőképen:

ha van olyan szám λ, mely mellett Δ összes aldeterminánsai elenyésznek, akkor λ kétszeres gyök, mert a

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta'(\lambda) = 0$$

feltételeket kielégiti.

Az aldeterminánsok között Δ_{23}, Δ_{31}, Δ_{12} λ-ban lineárisok. Ezek elenyészése a következő egyenleteket adja:

1) $$a_{23}(a_{11}-\lambda) = a_{12}\,a_{13}$$

2) $$a_{31}(a_{22}-\lambda) = a_{23}\,a_{21}$$

3) $$a_{12}(a_{33}-\lambda) = a_{31}\,a_{32}.$$

a) Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közűl egyik sem enyészik el, akkor a három egyenletből:

$$\lambda = a_{11} - \frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{23}\,a_{21}}{a_{31}} = a_{22} - \frac{a_{31}\,a_{33}}{a_{12}}.$$

Továbbá az 1), 2), 3) egyenletek közűl kettő-kettő összeszorzásával meggyőződünk, hogy

$$\Delta_{11} = 0, \ \Delta_{22} = 0, \ \Delta_{33} = 0.$$

Tehát λ kétszeres gyök, ha

$$a_{11} - \frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{23}\,a_{21}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{31}\,a_{32}}{a_{12}}.$$

b) Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közűl egyik elenyészik, akkor, hogy 1), 2), 3) egyenletek teljesüljenek, legalább még egy másiknak is el kell enyésznie. Hogy a három analog esetet egybe foglalhassuk, legyen *h, i, k* valamely permutácziója az 1, 2, 3 számoknak és tegyük fel, hogy

$$a_{hi} = a_{hk} = 0, \quad a_{ik} \gtrless 0.$$

Az összes aldeterminánsok elenyészésének feltételei:

$$\lambda = a_{hh}, \ (a_{ii}-a_{hh})\,(a_{kk}-a_{hh}) - a_{ik}^2 = 0.$$

c) Ha $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$, akkor az összes aldeterminánsok elenyészésének feltétele:

$$\lambda = a_{ii} = a_{kk} \gtrless a_{hh}.$$

Az utolsó megszorítást a háromszoros gyök kizárásáért tettük oda.

Ezzel a forgási felületek összes kriteriumát kimerítettük.

II.

Ismeretes, hogy a Laplace-egyenlet λ gyökéhez tartozó főirány iránykoszinusainak $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ arányát

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\,\alpha_1 + a_{12}\,\alpha_2 + a_{13}\,\alpha_3 &= 0\\ a_{21}\,\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\,\alpha_2 + a_{23}\,\alpha_3 &= 0\\ a_{31}\,\alpha_1 + a_{32}\,\alpha_2 + (a_{33}-\lambda)\,\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

egyenletek határozzák meg.

Legyen most λ kétszeres gyök.

a) Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közül egy sem enyészik el, akkor

$$\lambda = a_{11} - \frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{23}\,a_{21}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{31}\,a_{32}}{a_{12}}.$$

Tehát a fennebbi három egyenlet helyére lesz

$$a_{12}a_{13}\alpha_1 + a_{23}a_{21}\alpha_2 + a_{31}a_{32}\alpha_3 = 0.$$

E szerint az

$$a_{12}a_{13}x_1 + a_{23}a_{21}x_2 + a_{31}a_{32}x_3 = 0$$

síkban képviselt minden irány főirány. Tehát ez a sík a forgási felület parallel-köreinek iránysíkja.

b) Ha

$$a_{hi} = a_{hk} = 0, \quad a_{ik} \gtrless 0,$$

akkor

$$\lambda = a_{hh}, \quad (a_{ii} - a_{hh})\,(a_{kk} - a_{hh}) - a_{ik}^2 = 0.$$

Tehát a parallel-körök iránysíkjának egyenlete:

$$(a_{ii} - a_{hh})\,x_i + a_{ik}x_k = 0$$

vagy

$$a_{ki}x_i + (a_{kk} - a_{hh})\,x_k = 0.$$

c) Ha

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0, \quad \lambda = a_{ii} = a_{kk} \gtrless a_{hh}$$

akkor a parallel-körök iránysíkjainak egyenlete:

$$x_h = 0.$$

Vályi Gyula.

A SÚRLÓDÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Első közlemény.)

I. A súrlódás törvényéről.

1. E lapok második évfolyamában három, a súrlódás elméletébe vágó közlemény jelent meg. Maksay Zsigmong tagtárs úr a II. kötet füzetében [1] egy vertikális tengelyű nyugvó hengeren mozgó súlyos anyagi pontot tárgyal azon hallgatva tett hipotézissel, hogy a súrlódási koefficziens a mozgó pont sebességével arányos. *E sorok írója* a következő füzetben [2] ugyanezen, maga kitűzte problémával foglalkozik Coulomb ama törvénye alapján, hogy a súrlódási koefficziens állandó. Ugyanabban a füzetben Fröhlich Izidor tagtárs úr a Kirchhoff súrlódási egyenleteiben előforduló mennyiségek mechanikai jelentésével foglalkozik. Megjelent továbbá a lipcsei tudós társaság 1893. évi juliusi füzetében Mayer A. tanárnak egy nagyobb dolgozata, a ki a pont mozgását adott nyugvó vonalon vagy felületen ugyancsak Coulomb súrlódási törvénye alapján tárgyalván, figyelemre méltó eredményekre jő.

Valljuk be azonban, hogy a midőn régi megszokásból azt mondjuk, hogy a Coulomb törvénye, mely szerint a súrlódási együttható *független,* többek között, a súrlódó testek *relatív sebességétől,* a tapasztalatokkal igen közel megegyez, a tényeknek csak bizonyos csoportjára gondolunk. Mert tényleg a törvény fennállása nincsen biztositva még szilárd testek *közvetetlen* súrlódása esetén sem.

---

[1] L. *Math. Phys. Lapok.* II. köt. 201. l.

[2] L. *Math. Phys. Lapok.* II. köt. 269. l.

2. Coulomb és Morin kisérleteiben a testek sebessége csak közepes (másodperczenként 0—4 méter) volt; ugyanaz áll Warburg és Babo[1] újabb kisérleteiről is, melyek nagyon gondosak ugyan, de melyekről a sebességek kicsinységén kívül megjegyzendő az is, hogy *csakis* csiszolt üvegekkel hajtatván végre, belőlük más szilárd testekre nem lehet következtetéseket vonni.

Ellenben Douglas Galton,[2] angol kapitánynak, a következő táblázatban foglalt, a *sok* egyenlő értelmű közűl kiragadott, egyik kisérletsorának adatai minden kétséget kizáró módon arról tesznek tanuságot, hogy elegendő nagy relativ sebességek esetén nagyon is változó a fémeknek a súrlódási koefficziense, — hogy jelesül statikai értékének csekély törtrészére is lesülyedhet:

	Átlagos sebesség a kerék kerületi pontjain		Súrlódási együttható a kisérletezés			
	Angol mérföldek óránként	Angol lábak másod-perczenként	3-ik másod-perczében	5—7-ik másod-perczében	12—16-ik másod-perczében	24—25-ik másod-perczében
1	60	88	0·062	0·054	0·048	0·043
2	50	73	0·100	0·070	0·056	—
3	45	65	0·125	—	—	—
4	40	58	0·134	0·100	0·080	—
5	30	43	0·184	0·111	0·098	—
6	20	29	0·205	0·175	0·128	0·070
7	10	14	0·320	0·209	—	—
8	5	7	0·360	—	—	—

E kisérletsornál lóvasuti kocsi gyorsan forgó kerekének *aczél* abroncsához, *öntött vasból* készűlt fékező surlódott. A súrlódási együtthatót k-val, a kerék kerülete pontjainak sebességét v-vel jelölvén, az egy-egy oszlopban levő adatokat a

[1] Wiedemann Annalen I. kötet 406. lap.

[2] Engineering 1878, 25. kötet, 469 lap és 1878, 26. kötet, 153, 386, 295. lapok. Railway Brakes; on the coefficient of friction from experiments no Railway Brakes, By Captain Douglas Galton.

$$k=\frac{a}{b+v}$$

képlet foglalja össze, hol a és b egy-egy oszlopra nézve állandók, míg a különböző oszlopokban különböző értékeket vévén fel direkte az időnek, t-nek a függvényei.

Sajnos, hogy GALTON hőmérsék-méréseket nem eszközölvén egyidejűleg, nem állapitható meg kisérletsoraiból, hogy a súrlódási együttható *két* független változó, a v sebesség és a ϑ temperatura függvénye-e, vagy *csak* a temperaturáé, és hogy milyen függvénye.[1]

Hogy pedig a súrlódási együttható a hőmérséklet változásával nem marad állandó, minélfogva *nagy hőmérsékletváltozásokkal összekölött súrlódások esetén a* COULOMB *törvénye nem alkalmazható*, az régen ismeretes. Épen azért nem merném ezen kisérletekből PETROFF,[2] orosz tanárral azt a következtetést vonni, hogy ezek a kisérletek halomra döntik COULOMB törvényének fennállását még szilárd testeknél is; de mindenesetre *nagyon kétségessé* teszik, hogy vajon *minden* sebességnél alkalmazható-e *még csak állandó hőmérséklet* esetére is?

GALTON-nal egyező eredményekre jött már előbb BOCHET[3] is; az ő kisérleteiben szintén nagyok voltak a sebességek (4—25 méter másodperczenként).

3. Ha már nincs biztositva COULOMB *súrlódási törvénye* még

---

[1] Ha ugyanis a hőmérséklet is méretett volna, akkor a kisérletsorozatok összefoglalhatók volnának a következő két egyenletbe:

$$1)\quad k=f_1(v,\, t) \qquad 2)\quad \vartheta=f_2(v,\, t);$$

és ezekből az egyenletekből eliminálván a t-ét, kiadódnék

$$k=f(v,\, \vartheta).$$

[2] Neue Theorie der Reibung von N. PETROFF. A Szt.-Pétervári tud. Akadémiától jutalomdíjjal megkoszorúzott munka. Aus dem Russischen übersetzt von L. WURZEL. 1887.

[3] BOCHET «Sur le frottement de glissement». Kivonatban Compt. Rend. 1858, 46. köt., pag. 802.

szilárd testek közvetetlen érintkezése esetén sem, *teljesen érvénytelen* abban az esetben, *ha a két szilárd test folyadékkal, kenőszerrel van elválasztva.* Az idevonatkozó fontosabb kisérletek kritikai ismertetésére nézve PETROFF fentidézett munkájára utalván, itt csak HIRN* csapsúrlódásra vonatkozó kisérleti eredményeit szavakban összegező e következő pontozatokat idézem:

a) «Ha a súrlódó felületek bőségesen meg vannak kenve jó és eléggé nyúlós olajjal, ha továbbá a felületekre ható nyomás nem olyan nagy, hogy az olajat kiszorítsa, és ha végül a különböző forgás sebességekkel végzett kisérletekben a hőmérséklet minden részben egy és ugyanaz, — akkor *a súrlódással egyensúlyban levő erők csaknem arányosak a sebességekkel.*» (A MAKSAY-tól használt hipotézissel egyező törvény.)

b) «Ha pedig a súrlódó felületek szűkesen vannak megkenve, vagy ha a mozgás sokáig megy végbe ugyanavval az olajmennyiséggel, vagy ha az olaj nagyon híg, elannyira, hogy a kenő réteg kis sebességeknél sokkal vékonyabb, mint nagyoknál, vagy ha a nyomás a súrlódó felületek méreteihez képest túlságosan nagy, a hőmérséklet pedig állandó marad, akkor a súrlódással egyensúlyban levő erők a sebességnek oly pozitiv hatványával arányosak, melynek kitevője < 1 és az $\frac{1}{2}$-hez annál közelebb áll, minél kedvezőtlenebbek a viszonyok.»

c) «Ha a súrlódó felületek nincsenek megkenve, és nagy nyomás folytán levegő nem jöhetvén a súrlódó felületek közé, azok egymástól éppenséggel nincsenek elválasztva; egy szóval, ha a súrlódás közvetetlenné válik, akkor a sebesség befolyása teljesen megszünik.» (Ebben az esetben tehát COULOMB törvénye áll.)

d) «Ha a hőmérsékletre legkevésbbé sem ügyelünk, és a súrlódó felületeket épen úgy olajozzuk, a mint géprészeket szokás, akkor ebben az általános esetben nagy hiba nélkül elfogadható, hogy a súrlódás a sebesség négyzetgyökével arányos, úgy hogy tehát, ha a

---

* Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse; XXVI. 1854, pag. 188. Études sur les principaux phénomènes, que présentent les frottements médiats, etc.

sebességek viszonyát 1 : 4 : 9 : 16 stb. számok viszonya fejezi ki, akkor az előidézett súrlódási erők viszonya 1 : 2 : 3 : 4 stb. számok viszonyával egyenlő.»

PETROFF fentidézett munkájában a csapsúrlódás törvényét elméleti úton a következő hidrodinamikai probléma megoldásával kisérté megtalálni: Két végtelen hosszú, közös tengelyű, különböző sugarú szilárd körhenger közötti űr folyadékkal lévén megtöltve, a belső körhenger állandó sebességgel forog tengelye körűl, noha a folyadékrészek úgy egymással, mint a szilárd falakkal súrlódnak. Mekkora a forgató nyomaték, mely ezeket a súrlódásokat egyensúlyban tartja? A megoldást kellő általánositással *véges* hosszúságú körhengerekre is alkalmazván, az eredmény a következő képletben nyer kifejezést:

$$F = \frac{\mu Q U}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}},$$

hol F az összes belső henger felületén alkalmazva gondolt úgynevezett, összes súrlódási ellenállás, Q a belső henger felülete, U a kerület sebessége, e a két henger sugarainak különbsége, azaz a folyadékréteg vastagsága, μ a folyadék belső, λ_1 és λ_2 külső súrlódás-koefficiense a két henger anyagára vonatkozólag.

E képlet teljesen elütő attól, melyre a COULOMB törvényének csapsúrlódás számitásokra való alkalmazása vezet; és miként PETROFF kimutatja, nem áll ellenmondásban HIRN észleleteivel. Különösen HIRN fentidézett 1) alatti tétele, mely egyedül alapszik ezen elméletben tett föltevéseket kielégitő kisérletsorokon, *teljesen* megegyez PETROFF képletével; ugyanis

$$\frac{Q}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}} = c$$

a csapágy megteltségénél fogva közel állandó volt HIRN azon kisérleteiben, melyek az 1) tételre vezették, úgy hogy PETROFF képlete ebben az esetben igy irandó:

$$F = c\mu U;$$

a súrlódási ellenállás arányos a csap kerületi sebességével. Az ezen eredményre vezető különböző kenőolajokkal eszközölt kisérlet-soroknál a nyomás közel változatlan volt; ennélfogva ezen kisérleteknél *a súrlódási koefficziens is arányos volt az érintkezési pontok relatív sebességével.* PETROFF még azt is megvizsgálta, hogy a kisérletsorok igazolják-e az F súrlódási ellenállásnak a μ mennyiséggel, tehát a kenőolajok belső súrlódási együtthatójára való arányosságát; a megegyezés foka meglepő.

A tényálladék pontos megállapitása czéljából PETROFF maga is tett nagyszámú észleletet, melyek — miként a forditó előszavában írja — HIRN eredményeivel egyezők és PETROFF elméletét fényesen igazolják.

4. Foglaljuk össze az eredményeket:

a) A súrlódási együttható állandóságának törvénye még szilárd testek közvetetlen érintkezésénél se alkalmazható, mihelyt az érintkezési pontok relatív sebessége elegendő nagy arra nézve, hogy jelentékeny hőmérsékletváltozást okozzon, a mi gyakran fordul elő.

b) GALTON kisérletei után még az is kétes, hogy a törvény a szóban levő közvetetlen érintkezésnél még állandó hőmérséklet esetén is alkalmazható-e akkor, a midőn az érintkezési pontok sebessége bizonyos határt túlhalad; a milyen sebesség előfordulása a gyakorlatban épen nem ritka dolog. (L. a 2. pont végén.)

c) Végül szilárd testeknek *nem közvetetlen* érintkezése esetén *a súrlódási koefficziens* határozottan függ az érintkező pontok relatív sebességétől, és vannak olyan könnyen teljesíthető föltételek, melyek mellett *ezen sebességnek épen első hatványával arányos* (L. a 3. pontot.)

Ilyen körülmények között ajánlatos azon álláspont elfoglalása, mely a KIRCHHOFF súrlódási egyenleteiben kifejezésre jut, és épen gyakorlati szempontból kivánatos az elméletnek kiépitése nemcsak a COULOMB törvénye alapján. Ilyen általánositással kapcsolatosan kivánom itt megismertetni és tovább fejteni a MAYER A. föntidézett dolgozatában foglalt eredményeket; általánositván egyúttal Kirchhoff egyenleteit is olyképen, hogy a pont mozgása tárgyalható legyen nemcsak nyugvó, hanem mozgó felületen és vonalon is.* *Réthy Mór.*

* Kapcsolatban a megelőző czikkel, s a t. szerkesztőség beleegyezésével legyen szabad e Lapok II. kötete 254—256. lapjain megjelent közleményemhez egy utólagos észrevételt tennem.

Ugyanis több tagtárs e czikkem oly értelmezéséről értesitett, mintha a benne idézett feladatnak Maksay Zsigmond úrtól származó megfejtését nem helyeselném, azt a tapasztalással ellenkezőnek s Coulomb súrlódási törvényét kizárólagosan érvényesnek tartanám.

Minden félreértés kikerülése czéljából kijelentem, hogy czikkem czélja csak az volt, Maksay úr idézett dolgozatában minden közelebbi magyarázat és indokolás nélkül használt h=const. feltevésének az *értelmét, jelentését* kifejteni és megjegyezni, hogy ez a hypothesis eltér attól, melyet surlódási problémák rendes tárgyalásánál hallgatagon a számitás alapjául szoktunk venni, t. i. a Coulomb-féle törvénytől.

Kétségkívül tudta Maksay úr e hypothesis jelentését de nem tartotta szükségesnek ezt külön, szóval is kifejezni, míg a physikus olvasó, ki a h=const. suppositió mechanikai értelme iránt érdeklődött, ezt csak némi számitás útján tudta megállapitani.

Maksay úrnak e hypothesise azonban nemcsak mathematikai szempontból érdekes és megengedhető, hanem mechanikai szempontból is látszik lehetségesnek, ha a megelőző czikk 3. pontjának a csapsurlódásra vonatkozó kisérletsorozata *a)* alatti mechanikai viszonyait e feladat pontmozgására nézve lényegükben fennállóknak veszszük fel. *Fröhlich I.*

AZ ADJUNGÁLT HELYETTESÍTÉSEK ELMÉLETÉRŐL.*

(Első közlemény.)

Az

$$y_\alpha = c_{\alpha 1}x_1 + c_{\alpha 2}x_2 + \ldots + c_{\alpha n}x_n \qquad S_1)$$
$$(\alpha = 1, \ldots, n)$$

lineár helyettesítés elmélete velejében nem más mint a

$$c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}, \ldots, c_{\alpha n}$$

értékrendszerek összességének, azaz a

$$\| c_{\alpha\beta} \|$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

matrix elmélete, mely csak konkrétebb alakot ölt, midőn az x_α határozatlanok felhasználásával a matrix elemeit egyesítjük n lineár alak együtthatóiban és az azokból alkotott lineár alakrendszert tárgyaljuk. A $\|c_{\alpha\beta}\|$ matrix tartalmát azonban elemei magukban véve még nem merítik ki; belőle még különböző fokú aldeterminánsok kiválthatók és csak ezeknek összessége teszi ki a matrix teljes tartalmát.

Legyenek a belőle képezhető m-edfokú aldeterminánsok:

$$C_{i1}^{(m)}, C_{i2}^{(m)}, \ldots, C_{i\mu}^{(m)},$$
$$\left(i = 1, 2, \ldots, \mu;\ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

a hol

$$C_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} c_{i_1k_1} & c_{i_1k_2} & \cdots & c_{i_1k_m} \\ c_{i_2k_1} & c_{i_2k_2} & \cdots & c_{i_2k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{i_mk_1} & c_{i_mk_2} & \cdots & c_{i_mk_m} \end{vmatrix}$$

* Ez az első közlemény megjelent egyszersmind a *Math. és Természettudományi Értesítő* XI. kötetében.

és

$$i=(i_1, i_2, \ldots, i_m)$$
$$k=(k_1, k_2, \ldots, k_m)$$

az 1, 2, 3, ... n elemek m-ed osztályú kombináczióinak rövidített jelzései.

Az adott matrixból levezettük tehát a

$$\left\| C_{ik}^{(m)} \right\|$$
$$(i, k, = 1, 2, 3, \ldots, \mu; \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

adjungált matrixokat, melyek ennek teljes tartalmát kimerítik, és melynek tanulmányozása a

$$X_i = C_{i1}^{(m)} X_1 + C_{i2}^{(m)} X_2 + \ldots + C_{i\mu}^{(m)} X_\mu$$
$$(i=1, 2, 3, \ldots, \mu; \quad m=1, 2, 3, \ldots, n)$$

lineár helyettesítések elemzését teszi szükségessé. Az S_1 helyettesítésből ily értelemben n új helyettesítés keletkezik. Ezeket akarjuk az S_1 *adjungált helyettesítéseinek* nevezni.

Az adjungált helyettesítések tárgyalására elmélet és gyakorlat egyformán utal; a geometriai alkalmazások ezt egyenesen követelik, de együttes felfogásuk a tiszta elméletben is gyakran termékeny szempontokhoz vezet.

Az adjungált helyettesítések elméletére vonatkozó alaptételeknek felállítása és bebizonyítása, továbbá több irányban való alkalmazása teszi jelen czikksorozat tárgyát.

E tétel a következő

Ha az

$$y_\alpha = c_{\alpha 1} x_1 + c_{\alpha 2} x_2 + \ldots + c_{\alpha n} x_n \qquad S_1)$$
$$(\alpha=1, 2, \ldots, n)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének,

$$\Phi_1(\rho) \equiv \begin{vmatrix} c_{11}-\rho & c_{12} & \ldots & c_{n1} \\ c_{21} & c_{22}-\rho & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

gyökei

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n{}^*,$$

akkor az m-edik adjungált helyettesítés karakterisztikus egyenletének, a

$$\Phi_m(\rho) \equiv \begin{vmatrix} C_{11}^{(m)} - \rho & C_{12}^{(m)} & \ldots & C_{1\mu}^{(m)} \\ C_{21}^{(m)} & C_{21}^{(m)} - \rho & \ldots & C_{2\mu}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ C_{\mu 1}^{(m)} & C_{\mu 2}^{(m)} & \ldots & C_{\mu\mu}^{(m)} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet gyökei a

$$\rho_{i_1} \rho_{i_2} \cdots \rho_{i_m}$$

*szorzatból oly módon nyerhetők, hogy $i_1, i_2, \ldots, i_m$ helyébe rendre az 1, 2, 3, . . ., n elemek összes m-edosztályú kombináczióit helyettesítjük.***

A $C_m(\rho) = 0$ egyenlet tehát e $C_1(\rho) = 0$ egyenletnek rezolvense, még pedig ama rezolvense, a melynek segítségével a $C_1(\rho) = 0$ k-adfokú tényezői meghatározhatók.***

A jelen alkalommal e tételnek bebizonyításán kívül még csak két alkalmazását akarom bemutatni, remélvén, hogy egyéb alkalmazásokra még visszatérhetek. Az egyik az egész függvények tényezőkre való felbontásának elméletére vonatkozik és az ott szereplő rezolvens egyenletek előállítására új és az eddigieknél egyszerűbb módszert szolgáltat; a második alkalmazás a determinán-

---

* Az 1) helyettesítésről felteszszük, hogy együtthatói teljesen határozatlanok, ekkor a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ értékek mindig egymástól különbözők lesznek.

** E tétel részben megadja a feleletet arra a kérdésre is, melyet «Az orthogonális helyettesítések elméletéről» czímű dolgozatomban felvetettem és a mely valamely orthogonális helyettesítés és ennek adjungált helyettesítései közt létező összefüggésre vonatkozik. L. *Math. és Természettudom. Értesítő* XI. kötet.

*** Lásd König Gyula értekezését: «Die Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhängende Eliminationsprobleme» Mathematische Annalen Bd. 15. pag. 161.

sok elméletéből ismeretes FRANKE-tételnek* új bebizonyítása, mely a fönt kimondott tételünk alapján minden számítás mellőzésével történhet.

1. Adjungált helyettesítések karakterisztikus egyenlete.

1. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy ha

$$\rho\xi_\alpha = c_{\alpha 1}\xi_1 + c_{\alpha 2}\xi_2 + \dots + c_{\alpha n}\xi_n \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

a hol $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ oly értékrendszert jelent, melynek nem minden eleme zérus, akkor ρ gyöke a

$$\Phi_1(\rho) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek és a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ értékrendszer az S_1 helyettesítés kettős elemének nevezhető.

Viszont a $\Phi_1(\rho) = 0$ egyenlet minden gyökének megfelel egy-egy kettős elem, úgy hogy ezeknek száma az S_1 együtthatóinak határozatlan volta mellett pontosan n.

Legyenek a $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ gyököknek megfelelő kettős elemek rendre

$$\xi_\beta = (\xi_{\beta 1}, \xi_{\beta 2}, \dots, \xi_{\beta n}) \quad (\beta = 1, 2, \dots, n)$$

úgy hogy

$$\rho_\beta \xi_{\beta\alpha} = c_{\alpha 1}\xi_{\beta 1} + c_{\alpha 2}\xi_{\beta 2} + \dots + c_{\alpha n}\xi_{\beta n} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

akkor ismét a $c_{\alpha\beta}$ együtthatók határozatlansága folytán a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

---

* Franke «Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten.» Crelle Journal Bd. 61. pag. 350.

determináns a zérustól különböző. Ennek bebizonyítására elégséges kimutatnunk, hogy Δ nem azonosan zérus, azaz nem tűnhetik el a $c_{\alpha\beta}$ együtthatók bármely értékrendszerénél. Ez pedig a következőkből derül ki. Az S_1 lineár helyettesítést teljesen meghatározza a megfelelő értékrendszerek $(n+1)$ számmal lévő párjának megadása. Ha ezeket úgy választjuk, hogy az első n párban,

$$(\xi_1, \xi_1), \quad (\xi_2, \xi_2) \ldots (\xi_n, \xi_n),$$

foglalt értékrendszerek megegyezők legyenek, és hogy továbbá az ezeknek segítségével képezett $|\xi_{\beta\alpha}|$ determináns a zérustól különböző értéket vegyen föl (a mi végtelen sokféleképen teljesíthető) az $(n+1)$-dik párt, (ξ_{n+1}, η_{n+1})-et, pedig egészen tetszőlegesen, akkor biztosak lehetünk az iránt, hogy az ekként meghatározott S_1 helyettesítés kettős elemeiből, a ξ_α-kból képezett Δ determináns, a zérustól különböző lesz.

2. Legyenek most már a

$$\left\|\begin{matrix} \xi_{i_1 1} & \xi_{i_1 2} & \cdots & \xi_{i_1 n} \\ \xi_{i_2 1} & \xi_{i_2 2} & \cdots & \xi_{i_2 n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{i_m 1} & \xi_{i_m 2} & \cdots & \xi_{i_m n} \end{matrix}\right\|$$

matrix m-edfokú aldeterminánsai rendre

$$\Xi_{i1}^{(m)}, \Xi_{i2}^{(m)}, \ldots, \Xi_{ik}^{(m)}, \ldots, \Xi_{i\mu}^{(m)},$$
$$\left(i=1,2,\ldots,\mu;\ \mu=\binom{n}{m}\right)$$

a hol

$$\Xi_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} \xi_{i_1 k_1} & \xi_{i_1 k_2} & \cdots & \xi_{i_1 k_m} \\ \xi_{i_2 k_1} & \xi_{i_2 k_2} & \cdots & \xi_{i_2 k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{i_m k_1} & \xi_{i_m k_2} & \cdots & \xi_{i_m k_m} \end{vmatrix},$$

akkor a megelőzők alapjára világos, hogy i minden értékénél a

$$\Xi_{ik}^{(m)}$$
$$(k=1,2,\ldots,\mu)$$

sorozat tartalmaz a zérustól különböző elemet, mert az ellenkező esetben, kellene, hogy Δ is zérussal legyen egyenlő, a mit a $c_{\alpha\beta}$ együtthatók határozatlansága kizár.

Ezt megjegyezvén képezzük most már a

$$C_{k1}^{(m)}\, \Xi_{i1} + C_{k2}^{(m)}\, \Xi_{i2} + \ldots + C_{k\mu}^{(m)}\, \Xi_{i\mu}$$

összeget. Ez mint közvetetlenűl látható, nem egyéb mint a

$$\begin{Vmatrix} c_{k_1 1} & c_{k_1 2} & \ldots & c_{k_1 n} \\ c_{k_2 1} & c_{k_2 2} & \ldots & c_{k_2 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k_m 1} & c_{k_m 2} & \ldots & c_{k_m n} \end{Vmatrix}$$

és

$$\begin{Vmatrix} \xi_{i_1 1} & \xi_{i_1 2} & \ldots & \xi_{i_1 n} \\ \xi_{i_2 1} & \xi_{i_2 2} & \ldots & \xi_{i_2 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{i_m 1} & \xi_{i_m 2} & \ldots & \xi_{i_m n} \end{Vmatrix}$$

matrixok megfelelő m-edfokú determinánsainak szorzata és mint ilyen a Binet-Cauchy-féle tétel alapján m-edfokú determináns alakjában állítható elő, melynek elemei a két matrix sorainak kompozicziójából adódnak ki. Ennek következtében

$$\sum_{l=1}^{\mu} C_{kl}^{(m)}\, \Xi_{il} = \begin{vmatrix} \Sigma c_{k_1\alpha}\xi_{i_1\alpha}, & \Sigma c_{k_1\alpha}\xi_{i_2\alpha}, & \ldots & \Sigma c_{k_1\alpha}\xi_{i_m\alpha} \\ \Sigma c_{k_2\alpha}\xi_{i_1\alpha}, & \Sigma c_{k_2\alpha}\xi_{i_2\alpha}, & \ldots & \Sigma c_{k_2\alpha}\xi_{i_m\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma c_{k_m\alpha}\xi_{i_m\alpha}, & \Sigma c_{k_m\alpha}\xi_{i_m\alpha}, & \ldots & \Sigma c_{k_m\alpha}\xi_{i_m\alpha} \end{vmatrix},$$

a hol a determináns elemeiben szereplő összegek mindegyike az $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ értékekre kiterjesztendő.

Ha most az 1) alatti relácziókat tekintetbe veszszük, továbbá írhatjuk, hogy:

$$\sum_{l=1}^{\mu} C_{kl}^{(n)}\, \Xi_{il}^{(m)} = \begin{vmatrix} \rho_{i_1}\xi_{i_1k_1} & \rho_{i_2}\xi_{i_2k_2} & \ldots & \rho_{i_m}\xi_{i_mk_1} \\ \rho_{i_1}\xi_{i_1k_2} & \rho_{i_2}\xi_{i_2k_2} & \ldots & \rho_{i_m}\xi_{i_mk_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{i_1}\xi_{i_1k_m} & \rho_{i_2}\xi_{i_mk_2} & \ldots & \rho_{i_m}\xi_{i_mk_m} \end{vmatrix}$$

$$= \rho_{i_1}\rho_{i_2}\ldots\rho_{i_m}\, \Xi_{ik}^{(m)},$$

úgy hogy

$$\rho_{i_1}\rho_{i_2}\ldots\rho_{i_m}\Xi_{ik}^{(m)} = C_{k1}^{(m)}\Xi_{i1}^{(m)} + C_{k2}^{(m)}\Xi_{i2}^{(m)} + \ldots + C_{k\mu}^{(m)}\Xi_{i\mu}^{(m)},$$

a minek következtében a

$$\Xi_{i1}, \Xi_{i2}, \ldots, \Xi_{i\mu}$$
$$(i=1, 2, \ldots, \mu)$$

értékrendszerek, melyek mindegyikében zérustól különböző elem is fordul elő, az S_m helyettesítés kettős elemeit határozzák meg, minek folytán a μ számmal lévő $\rho_{i_1}\rho_{i_2}\ldots\rho_{i_m}$ szorzatok a

$$\Phi_m(\rho) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek gyökei, még pedig összes gyökei, mert mint könnyen kimutatható a $c_{\alpha\beta}$ együtthatók határozatlanságánál fogva a $\rho_{i_1}\rho_{i_2}\ldots\rho_{i_m}$ szorzatok mindannyian különbözők.

Evvel a bevezetésben jelzett tételt teljesen bebizonyítottuk.

2. Egész függvények tényezőkre bontása.

Az 1. számban bebizonyított tétel segítségével új módszert fejthetünk ki tetszőleges n-edfokú egyenlet tényezőkre bontásánál szereplő rezolvensek felállítására.

Sikerül ugyanis kimutatni azt, hogy ha adva van a tetszőleges

$$g(\rho) \equiv \rho^n + a_1\rho^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\rho + a_n = 0$$

egyenlet (többszörös gyökök már el vannak távolítva), akkor mindig raczionális úton találhatunk oly lineár helyettesítést, melynek karakterisztikus egyenlete az adott egyenlettel megegyezik. E helyettesítés adjungált helyettesítéseit képezvén, ezeknek karakterisztikus egyenletei szolgáltatják az adott egyenlet összes tényezőkre bontó rezolvenseit.

Ezzel új utat jelöltünk ki e rezolvensek képezésére, a melyen ezeknek előállítása egyszerűbben eszközölhető, mint az eddig ismert módszerek alapján, a mennyiben itt irraczionalitásoknak még átmeneti használata sem szükséges. E módszer alapján még azonfelül e rezolvenseket *explicit alakban* nyerjük.

A módszer lényegét az adjungált helyettesítések karakterisztikus egyenletére vonatkozó tételen kívül az a megjegyzésen teszi, hogy minden egyenlet előállítható mint raczionális úton előállítható helyettesítés karakterisztikus egyenlete.

Ez utóbbi megjegyzést pedig a következő módon okolhatjuk meg. Legyen

$$g_k(\rho) \equiv \rho^{n-k} + a_1 \rho^{n-k-2} + \dots + a_{n-k}$$

akkor

$$g_{k-1}(\rho) = \rho g_k(\rho) + a_{n-k+1}.$$

Most már az adott $g(\rho)$ a következő alakokban állítható elő:

$$g(\rho) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \rho g_1(\rho) + a_n & \rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_1(\rho) & -1 \\ a_n & \rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \rho g_2(\rho) + a_{n-1} & \rho & -1 \\ a_n & 0 & \rho \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} g_2(\rho) & -1 & 0 \\ a_{n-1} & \rho & -1 \\ a_n & 0 & \rho \end{vmatrix} = \dots$$

$$= \begin{vmatrix} g_{n-1}(\rho) & -a & 0 \dots\dots 0 \\ a_2 & \rho & -1 \dots 0 \\ a_3 & 0 & \rho \dots\dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 \quad \rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho + a_1 & -1 & 0 \dots\dots 0 \\ a_2 & \rho & -1 \dots 0 \\ a_3 & 0 & \rho \dots\dots \rho \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 \dots\dots \rho \end{vmatrix}$$

De ebből közvetlenűl látható, hogy a

$$g(\rho) = 0$$

egyenlet az

$$\begin{aligned} y_1 &= -a_1 x_1 + 1.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + \dots + 0.x_n \\ y_2 &= -a_2 x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 + \dots + 0.x_n \\ y_3 &= -a_3 x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 + \dots + 0.x_n \qquad 2) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= -a_n x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + \dots + 0.x_n \end{aligned}$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenlete.

Minthogy a karakterisztikus függvény a helyettesítésben foglalt lineár alakok invariánsa 2)-ből tetszőleges számú lineár helyettesítés vezethető le, melynek karakterisztikus egyenlete szintén $g(\rho)=0$.

3. Franke tétele.

E tétel valamely determináns m-edfokú aldeterminánsaiból képezett determinánsokra vonatkozik és az előbb bevezetett jelzéseink segitségével a következő egyenlőség segitségével fejezhető ki:

$$\left| C_{ik}^{(m)} \right| = \left| c_{\alpha\beta} \right|^{\binom{n-1}{m-1}}$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, \mu; \quad \alpha, \beta=1, \beta=1, 2, \ldots, n).$$

Ez az egyenlőség az 1. számban levezetett tételből tüstént következik. Ugyanis

$$\left| C_{ik}^{(m)} \right| = \Phi_m(0) = \Pi \rho_{i_1} \rho_{i_2} \ldots \rho_{i_m},$$

a hol a szorzás az 1, 2, 3, . . . , n elemek összes m-edosztályú kombináczióira kiterjesztendő. Minthogy a $\Pi \rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_m}$ szorzatban minden egyes ρ annyiszor fordúl elő, mint a hány $(m-1)$-ső osztályú kombináczió képezhető $n-1$ elemből, lesz

$$\left| C_{ik}^{(m)} \right| = (\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n)^{\binom{n-1}{m-1}};$$

minthogy továbbá

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n = \Phi_1(0) = \left| c_{\alpha\beta} \right|$$
$$(\alpha, \beta=1, 2, \ldots, n)$$

végül lesz, amint be volt bizonyitandó:

$$\left| C_{ik}^{(m)} \right| = \left| c_{\alpha\beta} \right|^{\binom{n-1}{m-1}}$$

Rados Gusztáv.

A BIQUADRATIKUS EGYENLETEK MEGOLDÁSÁHOZ.

Kézikönyveinkben a negyedfokú egyenletek algebrai megoldásának közönségesen háromféle módját szokták tárgyalni:* a LUIGI FERRARI, a DESCARTES és EULER-félét. A megoldásokat elemezvén, azt találjuk, hogy — a mint a dolog természetében rejlik — mindegyik a negyedfokú egyenlet 4 gyökéből alkotható valamely racziońalis függvényre állít fel egyenletet. Igy a FERRARI-féle az x_1, x_2, x_3, x_4, gyököknek a következő három értékű függvényére:

$$x_1x_2 + x_3x_4$$

állítja fel a harmadfokú egyenletet, a DESCARTES-féle az (x_1+x_2)-re állítja fel a hatodfokú egyenletet, mely az esetben, midőn a negyedfokú egyenletben x^3 együtthatója 0, kubikus és quadratikus egyenletekre vezet és végre az EULER-féle módszerben ugyanez esetben az $(x_1+x_2)^2$-re felállított egyenlet harmadfokú.

A következőkben x_1x_2-re állítjuk fel a rezolvens-egyenletet, még pedig nem a szubsztituczió elmélet nyújtotta módszerrel, mely hosszadalmas számítást kiván, hanem RADOS G. úrnak az adjungált helyettesitések elméletéről irt értekezése** nyomán, ezzel az ott kifejtett eljárásnak gyakorlati alkalmazását mutatván be.

Megjegyezzük előzőleg, hogy az

$$f(x) \equiv x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \qquad A)$$

egyenletben mindig tehető $a_4 = 1$, mert ha $a_4 \gtrless 1$, akkor

$$x = y\sqrt[4]{a_4}$$

---

* L. KÖNIG GYULA Bevezetés a felsőbb algebrába 1877. 167. l.

** Math. és Physikai Lapok jelen füzetében.

helyettesítéssel oly alakra hozzuk az egyenletet, hogy utolsó együtthatója 1 legyen.

Rados úr az említett értekezésében a következő tételt mutatja ki: *Ha az*

$$y_\alpha = c_{\alpha_1} x_1 + c_{\alpha_2} x_2 + \ldots + c_{\alpha_n} x_n$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének

$$\Phi_1(\rho) \equiv \begin{vmatrix} c_{11}-\rho & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\rho & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{n_1} & c_{n_2} & \ldots & c_{n_n}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

gyökei:

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n,$$

akkor az m-ik adjungált helyettesítés karakterisztikus egyenletének, a

$$\Phi_m(\rho) \equiv \begin{vmatrix} C_{11}^{(m)}-\rho & C_{12}^{(m)} & \ldots & C_{1\mu}^{(m)} \\ C_{21}^{(m)} & C_{22}^{(m)}-\rho & \ldots & C_{2\mu}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ C_{\mu 1}^{(m)} & C_{\mu 2}^{(m)} & \ldots & C_{\mu\mu}^{(m)}-\rho \end{vmatrix} = 0$$
$$\left(\mu = \binom{n}{m}\right)$$

egyenlet, gyökei a

$$\rho_{i_1}\, \rho_{i_2} \ldots \rho_{i_m}$$

szorzatból oly módon nyerhetők, hogy $i_1, i_2, \ldots, i_m$ helyébe rendre az 1, 2, ..., n számok összes m-ed osztályú kombináczióit helyettesítjük.

Hogy mit kelljen adjungált helyettesítés alatt érteni, arra vonatkozólag az említett értekezésre utalok.

Ugyanez értekezésében Rados úr megmutatja, hogy minden raczionális egész függvény valamely lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének tekinthető. Igy pl. az *A*) alatti negyedfokú egyenlet azon helyettesítés karakt. egyenlete, melynek együtthatói:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & -a_1,\ 1,\ 0,\ 0 \\ \mathrm{II} & -a_2,\ 0,\ 1,\ 0 \\ \mathrm{III} & -a_3,\ 0,\ 0,\ 1 \\ \mathrm{IV} & -1,\ 0,\ 0,\ 0\,; \end{array} \qquad B)$$

mert ennek a karakt. egyenlete:

$$\begin{vmatrix} a_1+\rho & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & \rho & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & \rho & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} \equiv \rho^4+a_1\rho^3+a_2\rho^2+a_3\rho+1=0.$$

Ha a $B)$ ulatti rendszerből az összes másodosztályú aldeterminánsokat képezzük, még pedig úgy, hogy az III, IIII, IIV, IIIII, IIIV, IIIIV sor kombinácziókból készitett matrixokból alkotjuk a 36 aldeterminánst, akkor az így nyert aldeterminánsok egy lineár helyettesités együtthatóit, melynek karakterisztikus egyenlete a következő:

$$\Phi_2(\rho) \equiv \begin{vmatrix} \rho-a_2 & -a_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_3 & \rho & a_1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & \rho & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Ha e determinánst megszorozzuk a következővel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

akkor szorzatul a következő negyedfokú determinánst kapjuk:

$$\begin{vmatrix} -\rho^2+a_2\rho & a_1\rho-a_3 & a_2 & 1 \\ 1 & 0 & \rho & 0 \\ -a_3\rho & -\rho^2+1 & a_1\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho \end{vmatrix},$$

melyet kiszámítván, a következőre jutunk:

$$\Phi_2(\rho) \equiv \rho^6 - a_2\rho^5 - \rho^4(a_1a_3+1) + \rho^3(a_3^2+2a_2-a_1a_3) - \rho^2(a_1a_3+1) - \\ - a_2\rho + 1 = 0.$$

Ez pedig a ρ-ra vonatkozólag recziprok egyenlet; tehát megoldása harmadfokú egyenletre vezethető vissza.

Ha az egyenlet gyökei:

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_3}$$

és $\rho_1 = x_1x_2$, tesszük, akkor a negyedfokú egyenlet gyökeit könnyen meghatározhatjuk.

Ugyanis:

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = -a_1$$

és

$$[(x_1+x_2)-(x_3+x_4)]^2 = s_2 + 2\rho_1 + \frac{2}{\rho_1} - 2\left(\rho_2 + \frac{1}{\rho_2} + \rho_3 + \frac{1}{\rho_3}\right).$$

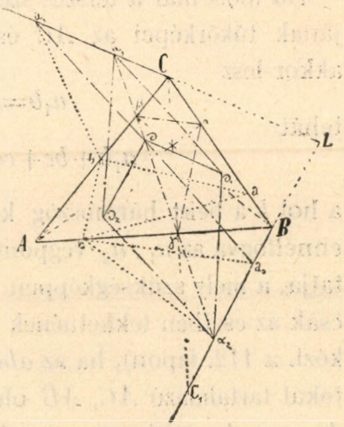
E két egyenletből x_1+x_2 és x_3+x_4 meghatározható (s_2 mint hatványösszeg raczionális uton adódik ki); de meg levén x_1+x_2 és x_1x_2, az x_1 és x_2 is meghatározhatók. Épen így x_3 és x_4 is.

Beke Manó.

EGY MINIMUM-PROBLÉMA ELEMI TÁRGYALÁSA.

A Math. és Phys. Lapok. II. évfolyama márcziusi füzetének élén a fenti czím alatt Rados Gusztáv-nak rövid közleménye áll, melynek kapcsán legyen szabad az ott tárgyalt problémát más, a dolog lényegében vele megegyező, de — nézetem szerint — egyszerűbb és iskolai czélokra talán alkalmasabb megfejtését közölnöm.* A kérdéses probléma szó szerint idézve a következő:

«*Adva lévén az ABC síkháromszög, határoztassék meg a beírt háromszögek közűl az, melynek kerülete a többiek kerületéhez képest minimum; továbbá, ha ily minimális kerületű beírt háromszög nincsen, határoztassék meg az összes beírt háromszögek kerületeinek alsó határa.*»



1. ábra.

Legyen a talpponti háromszög (1. ábra) $\alpha\beta\gamma$; a tetszés szerint beirt háromszög abc. Akkor mindenekelőtt állanak a következő egyenlőségek (L. Math. és Phys. Lapok II. évf. 112. l.):

$$\beta\gamma A_{\sphericalangle}=\alpha\gamma B_{\sphericalangle}; \quad \gamma\alpha B_{\sphericalangle}=\beta\alpha C; \quad \gamma\beta A_{\sphericalangle}=\alpha\beta C_{\sphericalangle}, \qquad 1.$$

melyek az összes beirt háromszögek közűl egyedül a talpponti háromszöghöz tartoznak.

---

* Mennyiben helyes Horváth ur e nézete, azt döntse el a két közleményben tartalmazott megoldások tárgyilagos összehasonlítása. *Szerk.*

Hosszabbítsuk meg a talpponti háromszög egyik oldalát, pl. $\beta\gamma$-át, mindkét felől és mérjük reá e meghosszabbításokra β- és γ-ából a szomszédos $\beta\gamma$ és $\gamma\alpha$ oldalakat oly módon, hogy

$$\beta\alpha_1=\beta\alpha, \quad \gamma\alpha_2=\gamma\alpha\,;$$

ekkor

$$\alpha_1\alpha_2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k,$$

az-az $\alpha_1\alpha_2$ egyenlő a talpponti háromszög kerületével.

A szerkesztésből, továbbá a talpponti háromszöghöz tartozó 1. alatti szögegyenlőségekből tüstént látható, hogy α_1 és α_2 nem egyebek, mint α-nak tükörképei AC- illetve AB-re nézve, s hogy a BC oldal bármely pontjának tükörképei az AC illetve AB tükröző egyenesekre nézve a $C\alpha_1$ illetve $B\alpha_2$ egyenesekre esnek.

Ha most már a tetszés szerint beírt abc háromszög a szögpontjának tükörképei az AC és AB tükrökre nézve a_1 illetve a_2, akkor lesz

$$a_1b=ab, \quad a_2c=ac,$$

tehát

$$a_1b+bc+ca_2=ab+bc+ca=k,$$

a hol k a beírt háromszög kerülete. Az abc háromszög kerületét ennélfogva az a_1, a_2 végpontokkal határolt a_1bca_2 vonal szolgáltatja, a mely szükségképpen tört vonal, mert az a_1, b, c, a_2 pontok csak az esetben fekhetnének egy ugyanazon egyenesen (L. Rados közl. a 112. lapon), ha az abc háromszög oldalai a b, c szögpontokat tartalmazó AC, AB oldalokkal egyenlő szögeket alkotnának, de ez az 1. alatti szög-egyenlőségeket és igy az abc háromszögnek az $\alpha\beta\gamma$ háromszöggel való összeesését vonná maga után, a mi feltételünkkel ellenkezik.

Most már könnyen sikerül az

$$\alpha_1\alpha_2=k\leqq a_1a_2<a_1b+bc+ca=k$$

vagyis a

$$\varkappa<k$$

reláczió kimutatása. A mi az

$$\alpha_1\alpha_2\leqq a_1a_2$$

relácziót illeti, annak bebizonyitása a következő segédtételből foly:

Mindazon háromszögek között, a melyekben egy szög s a bezáró oldalak összege egyenlő, legrövidebb alappal az ez adatokból szerkeszthető egyenlő szárú háromszög bír.

Legyen a_1C és a_2B metszéspontja L. Az La_1a_2 háromszög egyenlőszárú, mert az a_1a_2 alapja melletti szögei egyenlők, minthogy

$$\beta a_1C\sphericalangle = \beta aC\sphericalangle = \gamma aB\sphericalangle = \gamma a_2B\sphericalangle.$$

Az a_1a_2 és a_1a_2 egyenesek metszéspontja legyen ∂. Huzzuk most az a_2a_2 illetve a_1a_1 vonaldarabokkal egyenlő nagyságú és irányú $\partial\partial_2$ és $\partial\partial_1$ vonaldarabokat s kössük össze ∂_2-t s illetve ∂_1-t az a_1, a_2 pontokkal. Mivel

$$a_1\partial_1 = a_1\partial, \quad \partial_1a_1 = \partial a_2,$$

s illetve

$$a_1\partial_2 = a_1\partial, \quad \partial_2a_2 = \partial a_2,$$

továbbá ∂_1, ∂_2 a_1a_2-ön mindig kivül esik, ez egyenlőségek bármelyikéből nyerjük

$$a_1a_2 = a_1\partial_1 + \partial_1a_2 = a_1\partial_2 + \partial_2a_2 > a_1a_2.$$

Hogy pedig

$$a_1L + La_2 = a_1L + La_2 = 2a_1L = 2La_2$$

az az

$$a_1a_1 = aa = a_2a_2$$

egyenlőségekből egyszerre belátható.

A derék és tompaszögű háromszögekre nézve felállitott tétel levezetése még egyszerűbbé lesz az által, hogy itt csupán a háromszögbe eső magasságvonalat kell meghosszabbitanunk a talpponton túl saját hosszával (2. ábra), úgy hogy

$$CC_1 = 2CM$$

legyen, a mikor is $AC_1B \triangle \cong ACB \triangle$ s ha a_1, b_1 a beirt abc háromszög a, b szögpontjainak tükörképei:

$$b_1a_1 = ba, \quad cb_1 = cb.$$

Ha most már a C_1B egyenesen a_2-t

$$C_1a_1 = C_1a_2$$

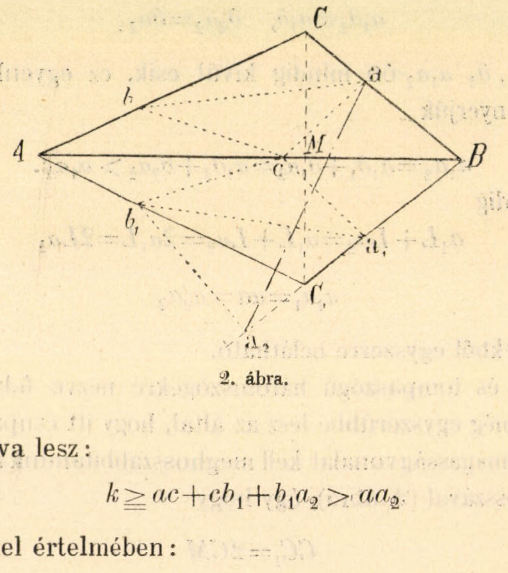
egyenlőség értelmében határozzuk meg, akkor $BC_1A\sphericalangle > 90°$ esetében

$$b_1a_1 > b_1a_2,$$

mert az $a_1C_1a_1$ háromszögben a_1b_1 tompaszögnek, a $b_1C_1a_2$ háromszögben ellenben b_1a_2 hegyes szögnek (t. i. a tompa szög mellékszögének) fekszik szemközt, holott a két háromszögben a másik két oldal egyenlő; meg ha $BC_1A\sphericalangle$ derékszög:

$$b_1a_1 = b_1a_2,$$

mivel két oldal egyenlőségén kívül a bezárt szögek is egyenlők, t. i. derékszögek.



2. ábra.

Ennélfogva lesz:

$$k \geq ac + cb_1 + b_1a_2 > aa_2$$

s a segédtétel értelmében:

$$aa_2 > CC_1$$

tehát

$$k > 2CM.$$

Mivel pedig az M talppont s a C-vel közvetetlen szomszédos pontjai oly beirt háromszögeket határoznak meg, melyeknek kerülete a magasságvonal kétszeresétől tetszőleges kis hosszban különbözik: e magasság kétszerese ugy a derék-, mint a tompaszögű háromszögeknél valóban a beírt háromszögek kerületének alsó határát képezi.

Végül talán nem lesz érdektelen megjegyezni, hogy hegyesszögű háromszögbe végtelen sok oly háromszög írható be, a melyek kerülete bármelyik magasságvonal kétszeresénél kisebb, mert *a talpponti háromszög kerülete mindig kisebb akármelyik magasságvonal kétszeresénél,* a mint ezt az 1. ábra egyszerű megtekintése mutatja, a hol a segédtétel értelmében p. o.

$$2C\gamma = CC_1 > a_1 a_2 = \varkappa.$$

Horváth József.

MEGOLDOTT FELADATOK.

14. *Bizonyíttassék be a következő tétel:*

Ha valamely ABC háromszög AB oldalának tetszés szerinti C_1 pontjából az AC és BC oldalakra merőlegeseket bocsátunk, melyeknek talppontjai B_1, illetve A_1, akkor ama két derékszögű parallelepipedon, melynek egy csúcsban találkozó élei AC, BC_1 és C_1B_1, illetve BC, AC_1 és C_1A_1, egyenlő köbtartalmú. (Tőtössy.)

*

Első megoldás Csillag Vilmos műegyetemi tanársegéd úrtól Budapesten.

Az ACC_1 és BCC_1 háromszögek területeinek mérőszámait T_1- és T_2-vel jelölvén, akkor először is

$$T_1 : T_2 = \overline{AC} \,.\, \overline{C_1B_1} : \overline{BC} \,.\, \overline{C_1A_1}\,.$$

Minthogy továbbá az említett háromszögeknek a C-szögpontból vont magasságuk közös, még

$$T_1 : T_2 = \overline{AC_1} : \overline{BC_1}\,.$$

Tehát valóban:

$$\overline{AC} \,.\, \overline{BC_1} \,.\, \overline{C_1B_1} = \overline{BC} \,.\, \overline{AC_1} \,.\, \overline{C_1A_1}\,,$$

a minek geometriai értelmét már a feladat szövege magában foglalja.

*

Második megoldás Grünwald István áll. középiparisk. tanár úrtól Budapesten.

A tétel szerint:

$$AC \,.\, BC_1 \,.\, C_1B_1 = BC \,.\, AC_1 \,.\, C_1A_1\,.$$

Legyen

$$BC = a, \qquad CA = b, \qquad AC_1 = p, \qquad BC_1 = q$$

és az A és B saroknál levő szög α, illetőleg β; tehát

$$C_1B_1 = p \,.\, \sin\alpha,$$
$$C_1A_1 = q \,.\, \sin\beta;$$

mindezeket helyettesítvén, a tételt kifejező egyenlőség ilyen alakú lesz:

$$b \,.\, q \,.\, p \,.\, \sin\alpha = a \,.\, p \,.\, q \,.\, \sin\beta$$

vagyis:

$$b \sin\alpha = a \sin\beta,$$

tehát az ismeretes sinus-tétel:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Ezzel a tétel be van bizonyítva.

*

Harmadik megoldás Csehély Adolf gimnáziumi tanár úrtól Trsztenán.

Vonjunk a háromszögnek C csúcsából merőlegest AB-re. E merőleges talppontját jelöljük D-vel.

ACD és AC_1B_1 hasonló derékszögű háromszögek megfelelő oldalai arányosak:

$$AC : AC_1 = CD : C_1B_1$$

tehát

$$CD = \frac{AC \,.\, C_1B_1}{AC_1}. \qquad (1)$$

CDB és C_1A_1B derékszögű háromszögek hasonlóságából hasonlóan következik, hogy

$$BC : BC_1 = CD : C_1A_1,$$

tehát

$$CD = \frac{BC \,.\, C_1A_1}{BC_1} \qquad (2)$$

Az (1) és (2) alatti értékek összehasonlítása a következő egyenletet adja:

$$\frac{AC \,.\, C_1B_1}{AC_1} = \frac{BC \,.\, C_1A_1}{BC_1}$$

s ebből folyólag

$$AC \,.\, BC_1 \,.\, C_1B_1 = BC \,.\, AC_1 \,.\, C_1A_1,$$

mely egyenlet nem egyéb, mint a bebizonyítandó tétel algebrai kifejezése.

Ugyanezt a megoldást beküldték még Fuchs Károly és Strohbach Géza tanár urak. *Szerk.*

Negyedik megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

A feladatban megállapított jelzéseket megtartván, segédvonalakúl válaszszuk AD és BE magasságokat. Ekkor,

$$AB_1C_1\Delta \sim AEB\Delta, \qquad BA_1C_1\Delta \sim BDA\Delta,$$

tehát:

$$AC_1 : AB = B_1C_1 : EB.$$
$$BC_1 : BA = A_1C_1 : DA,$$

melyekből

$$AC_1 : BC_1 = B_1C_1 \,.\, DA : A_1C_1 \,.\, BE.$$

Az első és harmadik tagot BC-vel, a második és negyediket AC-vel szorozván:

$$AC_1 \,.\, BC : BC_1 \,.\, AC = B_1C_1 \,.\, BC \,.\, DA : A_1C_1 \,.\, AC \,.\, BE.$$

Ámde $BC \,.\, DA = AC \,.\, BE$, mint ugyanazon háromszög kétszeres területei s így, ha az aránylat két utolsó tagját egyenlőkkel osztjuk,

$$AC_1 \,.\, BC : BC_1 \,.\, AC = B_1C_1 : A_1C_1,$$

honnan:

$$AC_1 \,.\, BC \,.\, A_1C_1 = BC_1 \,.\, AC \,.\, B_1C_1,$$

a mi a tétel megbizonyítása.

Ha C_1 az AB felező pontja:

$$AC_1 = BC_1$$

s így:

$$BC \,.\, A_1C_1 = AC \,.\, B_1C_1.$$

Ha C_1 a C szöget felező transzverzalis pontja:

$$B_1C_1 = A_1C_1$$

s így:

$$AC_1 \,.\, BC = BC_1 \,.\, AC,$$

a mint ismeretes.

*

Ötödik megoldás Fuchs Károly főgimnáziumi tanár úrtól Pancsován.

A sinustételt alkalmazva, lesz

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \qquad \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Azonkívül áll

$$C_1B_1 = AC_1 \sin\alpha \qquad C_1A_1 = BC_1 \sin\beta.$$

Ezek alapján lesz behelyettesítés által

$$AC \,.\, BC_1 \,.\, C_1B_1 = AB\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \,.\, BC_1 \,.\, AC_1 \sin\alpha$$

$$BC \;\; AC_1 \,.\, C_1A_1 = AB\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \,.\, AC_1 \,.\, BC_1 \sin\beta.$$

A jobb oldalok egyenlők; tehát a bal oldalok is egyenlők.

*

Végül beküldött még nagyobb terjedelmű analitikai megoldást Lóky Béla úr Kolozsvárról. *Szerk.*

IRODALOM.

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften.

37. Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers und die zur Entwickelung dieser Kraft geeigneten Maschinen, von S. CARNOT, 1824.* Übers. u. herausgegeb. von W. OSTWALD, Leipzig, 1892, 8°, 72 l. 1·20 M.

Eme művecskének tartalma két részre osztható: egy aktuális érdekűre, mely a szerzőtől levezetett azon igazságokat foglalja magában, melyek a hőelméleti tudományszakban maradandó érvényűek, és egy történelmi érdekűre, melynek eredményei a hő-anyag állandósága feltevésének megdőltével immár el nem fogadhatók. Azonban ezeket az eredményeket is a történelmi érdeken kívül nagyon becsessé teszi szerző módszere, mely mindenütt szemlélhetőségre törekszik. De lássuk rövid vonásokban az értekezés tartalmát.

A tárgy gyakorlati fontosságának és elméleti érdekességének feltüntetése után szerző legott megállapítja sorban a következő, részint a közvetetlen tapasztalatból merített, részint a tapasztalat által közvetetve beigazolt igazságokat: *a hő mozgató ereje* (így nevezi CARNOT a hőgépeknek munkával mérhető hasznosítható hatását) *a hőanyagnak meleg testről hideg testre való átmenetelének köszönhető* (8. l.); *mindenütt, hol mérsékletkülönbség áll fenn, mozgató erő létesítésének lehet helye* (11. l.); *a mozgató erőnek az a maximuma, mely a gőz alkalmazásával érhető el, egyúttal maximuma azon mozgató erőnek, melyet tetszés szerinti más eszköz alkalmazása nyújt* (14. l.); *eme maximum szükségképeni feltétele, hogy a mozgató erőnek hőből való előállítására használt anyag ne szenvedjen olyatén mérséklet-változásokat, melyeket nem valamelyes térfogat-változás tételez fel* (15. l.). A legfontosabb kérdés azonban, melyre CARNOT egész figyelmét fordítja, *a hasznos munkának a munkálkodó*

---

* E művecske eredetije a következő czím alatt jelent meg: *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur lis machines propres à développer cette puissance,* par S. CARNOT, Ancien élève de l'école polytechnique. A Paris, chez Bachelier, libraire. Quai des Augustius, 1824.

anyag minőségétől való függetlensége; hogy ezt teljes általánosságban megállapíthassa, felállítja és a legnagyobb következetességgel alkalmazza a *körfolyamok elvét* (20. l.), mely őt annak a törvénynek felállítására vezeti, hogy *a hő mozgató erejét egyes-egyedül azok a mérsékletek határozzák meg, melyek között a hőanyag átvitele utolsó sorban végbemegy* (23. l.).

És ez egyike a legszebb igazságoknak, melyeket a fizikai tudomány felismert! Ez a CARNOT *tétele*, a mechanikai hőelmélet igazi második főtétele, melyet a későbbiek csak a mérséklet-függvény alakjának szempontjából szabatosíthattak, de a melynek alapgondolatát világosabb színben senki sem tüntethette fel. Nem is kell, hogy SADI CARNOT korába képzeljük magunkat vissza, hogy eme, a szerzőjétől oly szép logikával levezetett tétel merész voltát belássuk. Vannak folyadékok (alkohol, éter), melyek egyazon nyomáson jóval alacsonyabb mérsékleten forrnak, mint a víz, melyeknek egyazon mérsékletű telített gőzei tehát sokkal, igen sokkal nagyobb feszültségüek mint a vizgőzők, minélfogva eme folyadékok gőzeinek a vízgőzzel szemben való jó oldala szinte kézzelfogható dolognak látszik. És lám, CARNOT ki meri mondani, hogy az alkoholgőznek nagy feszültsége nem csak hogy nem előny, hanem hátrány (65. l.); ki meri mondani, hogy a vízgőznek is a főhibája épen abban rejlik, hogy magasabb mérsékleteken nagyon is nagy a feszítő ereje; ki meri ezt mondani oly időkben, midőn FARADAY és DAVY a gázak folyósítására vonatkozó kisérleteikkel kapcsolatban e folyadékok gőzeinek nyomását alacsony mérsékleteknél azért határozzák meg, hogy új folyadékoknak mozgató erő létesítésére való alkalmazhatóságát kipuhatolják; oly időkben, midőn az olyan híres gépszerkesztők mint PERKINS, 35 légköri nyomással működő gőzgépekkel tesznek — eredménytelen — kisérleteket!

CARNOT fellépését még nevezetesebbé teszi az a körülmény, hogy az ő művecskéje előtt senki sem ismert, senki sem gyanított valamelyes összefüggést a gőzgép munkája és a gőzgépben szereplő hő között. Ez szinte hihetetlennek látszik, mert a történelem tanusága szerint nincsen nagyszabású vívmány, melynek megfelelő előzményei nem volnának. Ha CARNOT tételének származását történelmi szempontból kutatjuk, úgy magából a szóban forgó művecskéből mindössze is csak azt a felvilágosítást nyerjük, hogy CARNOT egyrészt a gőzgépek technikája terén akkoriban már megszerzett tapasztalatokra, másrészt egy elvre támaszkodik, melyet CLÉMENT állított fel, s a melyet CLÉMENT nem tett ugyan közzé, de CARNOT-val személyesen közölt. CLÉMENT elve a következő: a jó gőzgépet nem csupán a nagy nyomású gőz alkalmazása jellemzi, hanem főleg *a gőznek egymásra következő, egymástól nagyon különböző nyomásai jellemzik, melyek folyton kisebbekké válnak* (57. l.) CARNOT szerint CLÉMENT ezt az elvet, mely

Carnot-nak a maximális hatás feltételét kifejező, fentebb már idézett tételével egy speczialis esetre vonatkozólag azonos, a gőzgépek hasznos munkájának meghatározására tényleg alkalmazta, s mivel Carnot még azt is mondja, hogy ez az elv a gőzgépek elméletének valódi alapja, bizvást feltehetjük, hogy ez az elv volt indítéka azoknak a megfontolásoknak, melyek Carnot-t a thermodinamika igazi elvének felállítására vezették.

De mindezek csak indítékok; a munka és a hő mint mozgató ágens közötti összefüggésnek egy első megállapítása egészen Carnot-nak volt fentartva. Nevezetes, hogy mindamellett, hogy Carnot az ő tételét csak a mérséklet-függvény alakjának szabatos meghatározása nélkül állíthatta fel, a hő-anyag állandóságának helytelen feltevése mellett is mégis arra a később helyesnek felismert tételre jut, hogy *a hőanyag esése alacsonyabb mérsékleten több mozgató erőt létesít, mint magasabb mérsékleteken* (42. l.).

Az értekezés további maradandó értékű tartalmát a különböző szilárd, folyós és légnemű anyagoknak a hasznos mozgató erő szempontjából valló összehasonlítása teszi, és szerzőnk, a tőle kifejtett tételekre támaszkodva, a legnagyobb határozottsággal fejezi ki, hogy a hasznos mozgató erő szempontjából a legelső helyen állanának azok a levegőgépek, melyekben a tüzelő anyag elégetése nem külön tűzhelyen, hanem magában a gépet hajtó levegőben menne végbe (62. l.). A gázmotorok fényesen beigazolták Carnot eme következtetését. Végre meghatározza a legjobb gőzgépektől tényleg létesített mozgató erőnek viszonyát ahhoz a mozgató erőhöz, melyet valamely elméletileg tökéletes hőgép a tűzelő anyag fejlesztette összes hő értékesítésével létrehozhatna.

A tárgyalás módja, miként már említettük, különösen a fizikailag szemlélhető típusoknak fejtegetése révén válik ki; eredményeinek analitikai mezbe való öltöztetését szerző csak lábjegyzetekben végzi. A tárgyalás eme módjára nézve mint igen szép példát jegyezhetjük fel azt az esetet, melyben Carnot kimutatja, hogy ha a gázoknak mérséklet-változás nélkül való térfogat-változásában a felvett vagy kiadott hőmennyiségek számtani sorban vannak, úgy a térfogat-változások geometriai sort alkotnak (31. l.). E tételnek feledésbe ment eme levezetéséről méltán jegyzi meg a kiadó, hogy megérdemelné, hogy a tankönyvekbe felvétessék. A szemlélhetőség teszi kiválóan érdekessé az immár csak történelmi érdekű részleteket is, melyek közül különösen kiemeljük azokat a fejtegetéseket, melyekben szerző kimutatni igyekszik, hogy egyazon mérsékleti határok között a hőanyag mozgató ereje levegő, vízgőz és alkoholgőz alkalmazása esetében egyenlő.

Mindezeket azért hangsúlyozzuk különösen, mert az analitikai módszer talán a fizika egy ágában sem takarta el a vele kezelt tárgyak fizikai természetét oly nagy mértékben, mint épen a mechanikai hőelméletben, különösen pedig ennek ama részében, mely CARNOT elveire támaszkodik. Ez oknál fogva úgy a kezdő, mint a szakember egyaránt haszonnal fogja olvasni eme könyvecskét, melynek módszertani értéke oly szép összhangban van tudományos értékével.

Végre nem hagyhatjuk említetlenül, hogy szerző két helyen is (23. és 52. l.) kifejezést ad abbeli nézetének, hogy a hő anyagiságának elmélete nem kielégítő, sőt az egyik helyen hozzá teszi, hogy «több tapasztalati tény az elmélet mostani állása szerint csaknem érthetetlennek látszik». Kéziratban hátrahagyott jegyzeteiben pedig már egészen határozottan abba az irányba tért, hogy a hő és munka egymássá való átalakíthatósága elvét ne csak elfogadja, hanem tényleg alkalmazza is, és JOULE és HIRN későbbi kisérleteinek világos programmját adja. E jegyzetek, értekezésének az öcscse által rendezett 1878-iki (harmadik) franczia kiadásában (Gauthier-Villars-nál)[1] közzététettek, és valóban sajnálnunk kell, hogy az OSTWALD-féle kiadásba fel nem vétettek. A tárgy rendkivüli érdeke arra késztet, hogy CARNOT kézirati hagyatékából azt a lapot, mely a harmadik franczia kiadáshoz *fac-simile* másolatban van mellékelve, (az utolsó, befejezetlen sor elhagyásával) szó szerint közöljük:

«La chaleur n'est autre chose que la puissance motrice, ou plutôt que le mouvement qui a changé de forme. C'est un mouvement dans les particules des corps. Partout où il y a destruction de la puissance motrice, il y a, en même temps, production de chaleur en quantité précisement proportionelle à la quantité de puissance motrice détruite. Réciproquement, partout où il y a destruction de la chaleur, il y a production de puissance motrice.»

«On peut donc poser en thèse générale que la puissance motrice est en quantité invariable dans la nature, qu'elle n'est jamais, à proprement parler, ni produite, ni détruite. A la vérité, elle change de forme, c'est-à-dire qu'elle produit tantôt un genre de mouvement, tantôt un autre; mais elle n'est jamais anéantie.»

«D'après quelques idées que je me suis formées sur la théorie de la chaleur, la production d'une unité de puissance motrice[2] nécessite la destruction de 2·70 unités de chaleur.»

---

[1] Az értekezés másod ízben csaknem félszázaddal első megjelenése után adatott ki az *Annáles scientifiques de l'Ecole Normale superieure*-ben (II. sér. t. I. 1872).

[2] Az *unité de puissance motrice*, melynek neve akkoriban *dynamie* volt, azon munka, melyet 1 m^3 viznek 1 m. magasságra való felemelése megkiván. Ezt figyelembe véve, CARNOT szerint a hő mechanikai egyenértéke:

$$1 \text{ kgcaloria} = 370 \text{ kgm.},$$

«Une machine, qui produirait 20 unités de puissance motrice par kilogramme de charbon, devrait anéantir $\frac{20+2\cdot70}{7000}$ de la chaleur développée par la combustion . . . .» *Czógler Alajos.**

*

Középiskolai Mathematikai Lapok czímű havi folyóirat indult meg Arany Dániel győri állami főreáliskolai tanár szerkesztésében.

E folyóirat a mathematika *tanításának* szolgálatába szegődött és programmja gazdag példatár gyűjtésén kívül felöleli mindama kérdéses tüzetes megbeszélését, a melyek a középiskolai mathematikai tananyag methodikus feldolgozására vonatkoznak. Örömmel üdvözöljük az új vállalatot, mely hivatva van hazai tanügyi irodalmunkban régen érzett hiányt pótolni és hisszük, hogy a Középiskolai Mathematikai Lapok csakhamar a tanuló ifjuságnak és a tanároknak is hasznos és kedvelt olvasmánya lesz.

---

mely érték valamivel még pontosabb, mint Mayer 1842-iki meghatározása (1 kg-cal. = 365 kgm.). Mivel e jegyzetek mindenesetre 1824 után és 1832 (Carnot halálának éve) előtt irattak, Carnot meghatározása legalább is 12 évvel előzi meg a Mayer-ét.

Eme meglepő adatokat felsorolva, nem hagyhatom említés nélkül a franicziáknak Mayer iránt való, ennek német honfitársaival szemben tanusított elfogulatlanságát és pártatlanságát. Hogy csak a legújabb példákat hozzam fel, J. Bertrand az ő hőelméleti művében (*Thermodinamique*, Paris, 1887) egy teljes fejezetet szentel Mayer érdemeinek, míg Ostwald, épen az imént ismertetett műhöz való jegyzeteiben azt mondja (69. l.), hogy Mayer az elvet *kimondotta*, Joule *kisérletileg beigazolta*, Helmholtz pedig *a fizika legkülönbözőbb ágaira alkalmazta.* Hát Mayer nem alkalmazta a fizika legkülönbözőbb ágaira? Nem alkalmazta-e még a csillagászatra, sőt még az élettan és a pathologiának egyes jelenségeire is?

* Munkatársunk utolsó közleménye . . . *Szerk.*

PHYSIKAI LABORATORIUM.

A chrómsavas elem s a Gülcher-féle hőoszlop. Az iskolai kisérletezésnél leggyakrabban a chrómsavas elemek szolgálnak az elektr. energia forrásául. Újabban ott, hol a viszonyok megengedik, a Gülcher-féle thermooszlopot használják e czélra. Nem lesz tehát érdektelen, ha e két energia forrást összehasonlítjuk a szolgáltatott elektr. munka ára révén. A chrómsavas elemeknél (l. Math. és Phys. Lapok I. k. 439. l.) 10 órawatt átlag 4·8 kr.-ba kerül, ha ezek az összeállítás után, megszakítás nélkül legalább 10 óráig 3 amper átlagos intenzitással süttetnek ki. Azok a viszonyok, a melyek az iskolai kisérletezésnél dominálnak, a mint a Math. és Phys. Lapok II. k. 234. l. található, az eredményt nagyon kedvezőtlenné teszik és 10 órawatt árát 7—9 kr.-ra emelik. A II. sz. Gülcher-féle thermooszlop középszerű gáznyomás mellett 130 liter gázt fogyaszt óránként s ezért 3 volt feszültség mellett 3 amper intenzitási áramot, tehát 9 órawattot ad. Ha a gáz árát 15 kr.-ba számítjuk, akkor a Gülcher thermooszlop 10 órawattot 2·17 kr.-ért szolgáltat. A chrómsavas elem energiája tehát, a legjobb esetben is több mint kétszer olyan drága; az előadási kisérletezésnél pedig 3—4-szer drágábbá lesz.

*

Ólomforrasztás. Laboratoriumi munkálkodások között nem egyszer fordul elő ólomforrasztás. A ki kisérletet tett ólmot ólommal és nem czinkkel forrasztani, tapasztalhatta az ilyenkor fölmerülő nehézségeket. Rendesen úgy járunk el, hogy a forrasztás helyét (útját) késsel jól megtisztítván, gyantaoldattal megnedvesítjük s vékony (hegyes) hidrogén lánggal melegítjük: a megolvadás pillanatában kész a forrasztás. Ha hosszabb vonal mentén kell forrasztanunk, pl. ólomlemezt ólomlemezzel, akkor az összeforrasztandó lemezek széleit 5—10 mm. szélességben rézsut vágjuk, hogy egymásra fektetve a szélek ne álljanak nagyon elő, azután a hidrogen lángot lassan és óvatosan visszük a metszés mentén. Egyszerűbb az eljárás, a mennyiben a hidrogén lángot nélkülözhetjük és forrasztó vassal hajthatjuk végre a műveletet, ha a forrasztási helyeket, valamint a forasztót *olvasztott ólomchloriddal* vonjuk be.

Szigetelő és sav-álló ragasztó szer. Dr. Schenek István tagtársunktól egy oly ragasztó szer készítését tanultam el, mely a savakkal daczol s jól is szigetel. Minthogy kitünő eredménynyel használtam, készítése módját itt közlöm t. szaktársaim hasznára. 1. s. r. fekete szurok; 1. s. r. gyanta; 1 s. r. sürü terpentin és 1 s. r. sárga viasz vas fazékban összeolvasztatnak s a keverékbe, a mikor még folyékony, 1,5 s. r. finomra őrölt horzsa kő (Bimsstein) és 0,5 s. r. kőszénkátrány kevertetik. Kihülés után a ragasz kőkeménységű. Ha a részek keverés arányát úgy módosítjuk, hogy a terpentinből s a kátrányból 10—20%-kal többet, ellenben a horzsakőből 20—30%-kal kevesebbet veszünk, a keverék sav-álló és szigetelő festék gyanánt használható az oly edények vagy tárgyak bevonására, melyeket a savak hatása ellen védeni, vagy elektromos sáp ellen szigetelni akarunk. A horzsakő helyett gipsz is vehető. Az összeragasztandó részeket s a bevonandó tárgyakat, különösen ha fémek, előzetesen meg kell melegíteni.

Edelmann.

*

Az aluminium bevonása más fémekkel. Az aluminium Neesen utasítása szerint más fémmel a következő módon vonható be: Az aluminiumból készült tárgy mindenekelőtt maró káli oldatába, vagy sósavba mártandó be, addig míg gázbuborékok nem jelennek meg rajta. Ebben a pillanatban kiveszszük a fürdőből s higanychlorid oldatába mártjuk; ez a művelet az aluminium felületét megamalgamálja. Az amalgamozás megtörténte után újra az első fürdőbe teszszük s bent hagyjuk mindaddig, míg a gázfejlődés újra meg nem indul, mire az aluminiumot a bevonatul kivánt fém valamely sójának oldatába mártjuk. A felület csakhamar bevonódik az illető fém rétegével, mely oly erősen fog rajta, hogy a csiszolást s a hengerelést megbírja.

KÉRDÉS.

1. A Természettudományi Társulat helyiségeiben járván, megcsodáltam Antalik szikrarajzainak bámulatos finomságát. Magam is évek óta teljes sikerrel ismétlem kisérletét; de rajzaim vonásai nem oly finomak s részleeik nem oly szépek. Porkeverékemnek rovom fel ezt a fogyatkozást. Kérem nevezett t. Tagtársamat, legyen szives e lapokban leírni, hogyan készíti a Villarsi-féle kén-minium oly szépen rajzoló keveréket? Talán más tagtársaim is köszönettel veszik leirását. *K. S.*

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Január 4. Dr. Suták József: A végtelen determinánsok elméletéről.

Bartoniek Géza: Az abszolut nedvesség mérésére alkalmas készülékekről.

Január 18. Dr. Réthy Mór: A folyadéksugarakról.

Tangl Károly: Néhány egyszerű forgási test niveau- és erőgörbéi.

*

A forgó testek egy nevezetes tulajdonságáról.*

1. Közismeretű a gyorsan forgó symmetrikus testek vagy az ú. n. szabad tengely körül gyors forgásban levő testek azon sajátsága, hogy forgásuk síkját, illetve forgásuk tengelyének irányát a térben megtartani törekszenek, (ha e tengely *stabilis* forgás tengelye) s e sík helyzetének változását czélzó minden behatásnak igen érezhető módon ellenszegülnek.

Ezen a tulajdonságon alapszik pl. a gyorsan forgó pörgetyű tengelyének a függélyes irányhoz való hajlásszögének állandósága; vagy az a jelenség, mikor a gyorsan forgó korong szabad vízszintes tengelyének egyik végét függélyes peczken megtámasztjuk avagy lelógó fonál alsó végén hurokba teszszük: a forgás tengelye vízszintes törekszik maradni.

Mindkét esetben a föld nehézségi vonzása lefelé iparkodik mozgatni a forgó test tömegközéppontját, de ezt csak igen lassan teheti s e mellett a test tengelyének a vertikális körüli-, azaz a ható erőre merőleges síkban való forgást tulajdonít, melynek iránya a vízszintes síkban egyenlő a test forgásaéval, ha ezt a test tengelye mentén, a nyugvó vége felé tekintve állapítjuk meg.

2. Néhány hónappal ezelőtt Ligeti Árpád mérnök úr azon kérdéssel fordúlt hozzám: mekkora munka szükséges valamely gyorsan forgó test

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat 1893. évi november 30-án tartott ülésén.

tengelyének e forgássíkra merőleges elforgatására s mire fordíttatik e munka? (V. ö. a 6. pont *c* szakaszát).

Miután a nevezett forgatás a gyakorlatban szabatosan csak úgy végezhető, ha a test forgástengelye merev, de mozogható keretben van: előzetes megfontolásaim és kisérleteim alapjául az általánosan ismert BOHNENBERGER-féle gyroscop (rotátió-készülék) szolgált. Ebben tudvalevőleg egy gömb- vagy korongszerű nehéz fémtest aczélból való symmetria- (s forgási-) tengelyének kúpos csapjait egy (belső) fémgyűrű viszi, mely e korong tengetyre merőlegesen foroghatólag van egy második külső gyűrűben beillesztve, ez utóbbi pedig szilárd gyűrűalakú keretben van megerősítve úgy, hogy a belső gyűrű forgástengelyére merőlegesen foroghasson.

E szerint a középső test — a korong — úgy van foglalva, hogy a tömeg középpontján átmenő három tengely körül foroghasson. Ámbár a test ekként a tengelyekre vonatkozólag egyensúlyozva van, mozgása még sem mondható a középpontja körűl szabadon mozgó nehéz test mozgásával általában véve egyezőnek, mert itt tulajdonképpen a korongból s a két gyűrűből álló kapcsolt anyagi szerkezettel van dolgunk, melynek mozgása három szabadsági fokkal bír. A szabad forgással való teljes megegyeztetés a gyűrűk tömegeinek elhanyagolását követelné.

3. Tegyük a külső gyűrűt mozdulatlanná, pl. az által, hogy szorító csavarok segélyével a külső álló kerethez szorítjuk, úgy azonban, hogy a belső gyűrű mozgása akadályozva ne legyen. A korongot zsinór erélyes lehuzásával gyors forgásba hozván, tapasztaljuk, hogy a belső gyűrű (vízszintes) tengelye körül a legkönnyebben forgatható, azaz a test forgástengelye ez esetben semmiféle állandóságot nem mutat s majdnem oly könnyen mozgatható, mintha a korong nem forogna. [A külső gyűrűt igen jól kell megerősíteni, mert mikor a belső gyűrűt forgatjuk (azaz a vertikális síkban gyakorlunk reá forgató nyomatékot), ez által közvetve keletkezik a külső gyűrűre a vízszintes síkban ható erőnyomaték, mely a külső gyűrüt, ha jól van megerősítve, nem forgathatja, hanem csak statikai nyomaték alakjában jelentkezik, és ez az általa szült reactió-nyomatékkal ellentetten egyenlő. De ha a külső gyűrű nincsen jól megerősítve, a szerkezet nagy rázkódtatásnak van kitéve.

4. Teljesen elütő jelenséget tapasztalunk, ha a külső gyűrű akár a kerettel együtt, akár magában mozoghatóvá van téve.

a. Így, ha az eszközt a korong gyors forgása közben vertikális tartójánál fogva felemeljük — a külső gyűrű a jelzett módon meg lévén erősítve — s a belső gyűrűt gyorsan forgatni akarjuk: e gyűrű a forgatásnak észrevehetőleg ellenszegül, de a kéz is, mely a készüléket tartja, igen erős erőnyomatékot érez, mely az egész készüléket a tartó vertikális tengelye körül forgatja, ha kezünk nem szorítja elég erősen.

b. Jellemzőbben domborodik ki a jelenség, ha a külső gyűrű szabaddá tevése után a korong gyors forgásba hozatván, az eszköz magára hagyatik. Némi ingadozás után a rendszer igen hamar stationárius mozgásállapotot vesz fel, melyben a korong s mindkét gyűrű tengelyei a térben változatlan irányt tartanak s az egész rendszer mozdulatlannak látszik, feltéve, hogy az eszköz jól van egyensúlyozva. [Az azeset, mikor a korong tengelye a külső gyűrű (vertikális) forgási tengelyébe beleesik, a mozgó egyensúly singuláris esete, melyre nézve a következőkben s az **5.**-ben részletezendő sajátságok nem érvényesek.]

Ha most a belső gyűrű azon részei egyikére, melyek a korong csapágyait viszik, ujjunkkal rövid erős nyomást fejtünk ki, vagy puha kalapácscsal erélyes ütést mérünk, észreveszszük, hogy e gyűrű a szándékolt forgatásnak hatalmasan ellenszegül, s hogy a korong tengelyének s vele a belső gyűrűnek a vizszinteshez való hajlása észrevehetőleg nem változik, de ez alatt a külső gyűrűvel együtt az egész testrendszer a vertikális tengely körül véges szöggel, ugrásszerüleg forgott el. Ezen forgás a belső gyűrűre kifejtett erőnyomaték hatásával veszi kezdetét s ennek megszünésével szintén megszünik s majdnem észrevehetetlen ingadozások után az egész rendszer gyorsan az előbb jelzett állandó mozgásállapotát veszi ismét fel. A forgássík megmaradása itt erélyesen nyilvánult, a menynyiben ugyanis a szándékozott forgás látszólag nem következett be*, hanem egy a ható erőnyomatékra merőleges síkú forgás. Ennek előjelére nézve a szabály a következő: Az észlelő, szemét a korong tengelye folytatásába helyezvén, a korong felé néz; ha ez az óramutató járásával egyező irányban forogni látszik s a belső gyűrűnek a szemhez közelebb fekvő részét lefelé nyomni vagy forgatni törekszünk: akkor a külső gyűrűnek felülről tekintett forgása szintén az óramutató járását követi. A korong ellentett forgása, vagy a belső gyűrűre ható erőnyomaték ellentett volta a külső gyűrű forgásirányát megváltoztatja.

[E szerint a forgó korong positiv tengelye, az erőnyomaték positiv tengelye és a külső gyűrű elfordulásának positiv tengelye egy jobb sodrású irányrendszert (Maxwell elnevezése szerint venyige-coordináta-rendszert) alkotnak.]

Jegyzet. A belső gyűrű azon részei egyikére, melyek a korong csapágyait viszik, kis túlsúlyt helyezvén, a präcessió bemutatására szolgáló jelenség áll elő, melynél ugyanis a gyorsan forgó korongot vivő belső gyűrűnek s a korong tengelyének a vízszinteshez való hajlása látszólag nem változik, hanem az egész rendszer, mintha merev volna, a külső gyűrű vertikális tengelye körül lassú forgásnak indúl.

* V. ö. a 6. pont *b.* szakaszát.

Ez a 4. pont *b*. alatti jelenségnek kicsiny erőnyomaték melletti állandósítása, melyet a surlódás s a légellenállás az idő folytával lassít és végül megszüntet.

5. A jelenség legérdekesebb módosulása a 4. alattinak megfordítása; ezt észlelhetjük, ha a 4. pont *b*. szakasza elején említett állandó mozgásállapotában lévő rendszer nem belső, hanem *külső* gyűrűjére rövid tartamú erélyes, lökésszerű erőnyomatékot fejtünk ki. Tapasztaljuk, hogy a külső gyűrű észrevehetőleg nem mozdúl el, mereven megerősítettnek látszik; ellenben, hogy a belső gyűrű a forgó koronggal együtt ugrásszerű véges forgást mutat vízszintes tengelye körül, mely szintén csak addig tart, a meddig az erőnyomaték a külső gyűrűre hat.

Ez esetben a forgás-sík állandósága a külső gyűrű állandóságában nyíl, mely gyűrű a reá kifejtett hatásnak hatalmasan ellenszegül míg e rendszer többi részei a ható erőnyomaték síkjára merőleges forgást szenvedtek. E szerint ez a jelenség a **4.** alatt részletezettnek a megfordítottja.

A forgás előjelét (irányát) illetőleg a **4.** pont *b*. szakaszában említetthez analog szabály érvényes; ugyanis, ha a korong tengelye folytatásában lévő észlelő szem a korong felé néz s ez az óramutatóval egyező irányban forogni látszik s most a külső gyűrűt úgy nyomjuk vagy akarjuk forgatni, hogy az erőnyomaték fölülről tekintve az óramutató járásával megegyező: akkor a belső gyűrű a forgó koronggal együtt úgy fordúl el, hogy a szemhez közelebb levő fele felfelé emelkedik. A korong tengelye körüli forgásának vagy az erőnyomatéknak irányváltozása az elfordulását is változtatja.

E szerint itt a forgó korong positiv tengelye, az erőnyomaték positiv tengelye, valamint a belső gyűrű elfordulásának positiv tengelye szintén jobbsodrású irányrendszert alkotnak.

Jegyzet. A belső gyűrű ugrásszerű forgását folytonossá, sőt egyirányúvá is tehetjük, ha a külső gyűrűre ható erőnyomatékot rythmusszerűen (pl. kezünkkel) oscilláló módon változtatjuk. E szakaszos nyomaték nagysága és periodusa szerint a belső gyűrű s vele a korong tengelye is vagy nagy amplitudójú oscillálást, vagy pedig folytonos irányú forgást végez; ez utóbbi a külső gyűrűnek érzék szerinti mozgatásával érhető el s e forgás sebessége igen tetemes is lehet.*

6. Mind a 4. mind az 5. alatti esetben a ható erőnyomaték a közvetetlen hatásának alávetett testet (gyűrűt) az állandó mozgásállapotbeli helyzetéből a nyomaték síkjában látszólag ki nem mozdítja s ez a kimozdításnak

---

* Utólag találtam, hogy a szövegben leírt jelenséget a külső gyűrűnek egy fogazott kerék közvetitésével való gyors, de kicsiny amplitodójú oscillatióban tartósával is előállithatni; v. ö. DUCRETET: Catalogue des instruments de précision. Paris 1879, Stréphoscope continu de M. GRUEY (fig. 12) 15. és 16. l.

erélyesen ellenszegül, míg a másik test (gyűrű), melyre közvetetlenűl erő nem hat: az erőnyomaték síkjára merőlegesen tetemes mértékben fordul el.

a. A 4. és 5. alatti jelenségek ezen reciprocitása rendkívül érdekes, mert belőle kitetszik, hogy a forgássík állandósága az ily szerkezetű rendszerek úgy értendő, hogy a korong forgássíkja mindenkor a közvetetlenűl ható forgató nyomatékra merőleges síkban mozdúl el, de a nyomaték síkjában majdnem változatlan marad.

b. Meg kell jegyeznünk, hogy a 4-, 5-, 6-ban említett stabilitása a rendszer azon részének, mely az erőnyomaték hatásának közvetetlenűl alá van vetve, a valóságban csak látszólagos.

Ugyanis a nevezett résznek az erőnyomaték síkjában való elmozdulása különben egyenlő körülmények között annál kisebb, minél nagyobb a korong saját tengelye körüli forgásának szögsebessége; ez az elmozdulás ugyan mindig véges, de a korong igen gyors forgásánál rendesen észrevehetetlen és csak sokszor ismételt vagy folytonos behatás teszi észrevehetővé. Ellenben a rendszer másik, az erőnek közvetetlenűl ki nem tett részének elmozdulása az előbbi rész elmozdulásához képest igen nagy s ezen elmozdulások viszonya a korong szögsebességével növekszik.

c. A mi végre a 2. pontban említett munkát illeti: nem tekintve a surlódást, itt az eleven erő tétele érvényes, úgy, hogy az erőnyomaték végezte munka a rendszer eleven erejének növekedésével egyenlő (v. ö. a 7. pont 5. kifejezését). A 3. pont esetében a mozgó két rész ezen energia-növekedése külön-külön könnyen adódik, mert a két résznek a belső gyűrű forgási tengelye körüli szögsebességei egymással egyenlők és energiájuknak ebből származó része egyenlő a két testrész e tengelyre vonatkozó tehesetlenségi nyomatékának s a szögsebesség fél négyzetének szorzatával. A 4. és 5. esetei bonyolódottabbak.

7. A jelenség elméletét illetőleg e helyen csak a tájékozódásra legszükségesebb kifejezések közlésére szorítkozunk. Bárhány mozgó részből álló s bármily feltételeknek alávetett anyagi rendszer mozgásegyenleteit általános coordinátákban LAGRANGE második alakja szolgáltatja, melynek typusa:

$$\Theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

hol T a rendszer eleven ereje, ϑ az általános coordináták bármelyike, $\vartheta' = d\vartheta : dt$, t a folyó idő és Θ a ϑ-hoz tartozó általános erőcomponens. Az 1) egyenletek száma egyenlő a független coordinátákéval.

Jelen rendszerünk három szabadságfokkal bír; a korong, a belső s a külső gyűrű vonatkoztatna tömegközéppontján átmenő derékszögű tengelyekre, forgásszögeit rendre ϑ_1-, ϑ_1-, ϑ_3-vel jeleljük s ezeket attól a helyzettől számítjuk, melyben a korong tengelye a külső gyűrű forgástengelyébe és egyenlitőjének meghatározott sugara e gyűrű síkjába beleesik. [E szerint e három szög rendre egyenlő az EULER-féle φ, ϑ, ψ szögekkel (Fröhlich, Kinematika 213. §. 382. lap)].

Az eleven erő számítása a közismeretű

$$2T = \left\{A_0 \cos^2\alpha + B_0 \cos^2\beta + C_0 \cos^2\gamma\right\} \omega^2 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

egyenlet alapján történik, melyben A_0, B_0, C_0 a forgó test három tehetetlenségi főnyomatéka vonatkoztatva tömegközéppontján átmenő derékszögű tengelyekre, ω eredő forgásának szögsebessége és α, β, γ e forgás tengelyének e főnyomatékok irányaihoz viszonyított irányszögei.

Jeleljék A_1, B_1, C_1 a korong-, A_2, B_2, C_2 a belső-, A_3, B_3, C_3 a külső gyűrű tehetetlenségi főnyomatékait, és pedig geometriai tengelyeikre merőleges két irányra s a geometriai tengelyre vonatkozólag; ekkor $A_1 = B_1$; $A_2 = B_2$; $A_3 = B_3$.

Alkalmazván az egy ponton átmenő tengelyek körüli forgások összetevésének szabályát (a szögsebességek parallelogrammáját), e három test kétszeres eleven ereje soruk szerint:

$$\begin{aligned}
2T_1 &= A_1 (\vartheta_2'^2 + \vartheta_3'^2 \sin^2\vartheta_2) + C_1 (\vartheta_1' + \vartheta_3' \cos\vartheta_2)^2; \\
2T_2 &= A_2 (\vartheta_2'^2 + \vartheta_3'^2 \cos\vartheta_2) + C_2\, \vartheta_3'^2 \sin^2\vartheta_2; \\
2T_3 &= A_3 \vartheta_3'^2.
\end{aligned}$$

Az egész rendszer kétszeres eleven ereje

$$\left.\begin{aligned}
2T &= A\vartheta_2'^2 + C_1 (\vartheta_1' + 2\vartheta_3' \cos\vartheta_2)\, \vartheta_1' + (C + B\cos^2\vartheta_2)\, \vartheta_3'^2; \\
A &= A_1 + A_2; \quad B = A_2 - A_1 - (C_2 - C_1); \quad C = A_1 + C_2 + A_3.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad 3)$$

A 3) segélyével az 1) alapján:

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_1 &= C_1 \frac{d}{dt} (\vartheta_1' + \vartheta_3' \cos\vartheta_2); \\
\Theta_2 &= A\vartheta_2'' + B\vartheta_3'^2 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2 + C_1 \vartheta_1' \vartheta_3' \sin\vartheta_2; \\
\Theta_3 &= \frac{d}{dt} \left[(C + B\cos^2\vartheta_2)\, \vartheta_3' + C_1 \vartheta_1' \cos\vartheta_2\right].
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

A surlódást nem véve tekintetbe, az eleven erő tétele:

$$dL = \Theta_1 d\vartheta_1 + \Theta_2 d\vartheta_2 + \Theta_1 d\vartheta_3 = dT, \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

miből kitetszik, hogy a Θ_1, Θ_2, Θ_3 általános erőcomponensek a ϑ_1-, ϑ_2-, ϑ_3 szögek változtatására törekvő erőnyomatékokkal egyenlők.

a. A 3. pont esetét nyerjük, ha a ϑ_3-at állandónak tekintjük, miáltal $\vartheta_3' = 0$ és így a 4)-ből:

$$\Theta_1 = C_1 \vartheta_1''; \quad \Theta_2 = A\vartheta_2''; \quad \Theta_3 = C_1 (\vartheta_1' \cos\vartheta_2)' \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Itt Θ_1 és Θ_2 az adott erőnyomatékok lévén, ϑ_1 s ϑ_2 számára a szilárd tengely körüli forgás közönséges egyenletéhez teljesen analog két egyenlet érvényes t. i. a (6) első két egyenlete; ezekből ϑ_1 s ϑ_2 meghatározható s velök Θ_3 is kifejezhető. Ez utóbbi csak $\vartheta_1' = \text{const.}$ és $\vartheta_2 = \text{const.}$ esetben zérus; különben azt az erőnyomatékot jelenti, melyet a külső gyűrűt megfogó szorító csavarok stb. szilárdsági ellenhatása e gyűrűre gyakorol, s mely s korongnak $\vartheta_1'' \gtreqless 0$ és a belső gyűrűnek $\vartheta_2' \gtreqless 0$ mozgása folytán keletkező s a külső gyűrűre ható erőnyomatékkal ellentetten egyenlő.

Ha sem a korongra sem a belső gyűrűre külső erő nem hat: ϑ_1' és ϑ_2' állandó, de $\Theta_3 = -C_1\vartheta_1'\vartheta_2' \sin \vartheta_2$.

b. A magára hagyatott rendszer esetében (4. pont *b.* szakaszának eleje) $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 0$, miáltal 4)-ből

$$\left.\begin{aligned} C_1(\vartheta_1' + \vartheta_3' \cos \vartheta_2) &= h_1; \\ (B\vartheta_3' \cos \vartheta_2 + C_1\vartheta_1')\vartheta_3' \sin \vartheta_2 &= -A\vartheta_2''; \\ (C + B\cos^2\vartheta_2)\vartheta_3' + C_1\vartheta_1' \cos \vartheta_2 &= h_3; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

hol h_1 és h_3 az integrátió állandói. Ez egyenletrendszer általános megfejtése bonyodalmas; czéljainkra elegendő az a megjegyzés, hogy a 7)-et a

$$\vartheta_1' = \text{const.}; \quad \vartheta_2 = \text{const.}; \quad \vartheta_3' = \text{const.}$$

singuláris értékrendszer kielégíti; ekkor 7) középső egyenlete

$$B\vartheta_3' \cos \vartheta_2 + C_1\vartheta_1' = 0,$$

mely a többi két egyenlettel együtt elegendő a ϑ_1', ϑ_2, ϑ_3' állandók meghatározására.

Ezen értékek különös, de a gyakorlatban rendesen felmerülő esete az, mikor $\vartheta_3' = 0$; jelelve ekkor ϑ_{1_0}', ϑ_{2_0}, ϑ_{3_0}'-al ezen állandókat, 7) első és utolsó egyenletéből:

$$C_1\vartheta_{1_0}' = h_1; \quad C_1\vartheta_{1_0}' \cos \vartheta_{2_0} = h_2; \quad \vartheta_{3_0}' = 0, \quad \ldots \quad 8)$$

míg középső egyenlete identikusan zérus; ezen értékrendszer megfelel a stabilis mozgásállapotnak, miről következőleg győződhetünk meg: Az anyagi rendszert ez állapotból kissé kimozdítottnak képzelvén, írhatjuk:

$$\vartheta_1' = \vartheta_{1_0}' + \eta_1'; \quad \vartheta_2 = \vartheta_{2_0} + \eta_2; \quad \vartheta_3' = \vartheta_{3_0}' + \eta_3', \quad \ldots \quad 9)$$

hol η_1', η_2, η_3' igen kicsiny értékek; helyettesítvén 9)-et 7)-be, tekintetbe vévén 8)-at, s az η-ák csak első hatványait tartván meg: az η_1', η_2, η_3' számára oly differentiálegyenletrendszer származik, mely e mennyiségek mindegyikére nézve az egyszerű harmonikus mozgás typusszerű differentiálegyenletét szolgáltatja (v. ö. a 10α) és 10β), de különösen a 12α) és 12β) rendszereket, ezekben Θ_2- s Θ_3-at zérussal egyenlítvén). E szerint az anyagi rendszer részei harmonikus módon oscillálnak a ϑ_{1_0}', ϑ_{2_0}, ϑ_{3_0}' jellemzőjű állapot körül (az oscillálást a súrlódás s a légellenállás idővel megszünteti); s így ez értékrendszer tényleg megfelel az állandó mozgásállapotnak.

c. A mi végre a 4) pont *b.* szakasza s az 5. pont reciprok jelenségei elméletét illeti: ez 4)-ből adódik, ha benne az egyenes jelenségre nézve $\Theta_1 = \Theta_3 = 0$-t, a reciprokra nézve $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$-t írunk. A kifejtések igen egyszerűsödnek, ha a stationárius mozgásállapottól való η_1, η_2, η_3 elmozdításokat kicsinyeknek tekintjük, a mi Θ_2, illetve Θ_3 mérsékelt értékére s nem hosszú tartamára vall.

Ekkor a 9) alakok alkalmazhatók s a 4)-be való helyettesítés és rövidítés után ezen egyenletek, tekintettel 8)-ra és a 7)-re, melynek egyenletei most ϑ'_{1_0}-, ϑ'_{2_0}-, ϑ'_{3_0}-ra érvényesek: első közelítésben:

α) az egyenes jelenségre nézve:

$$\left.\begin{array}{l} \eta'_1 + \eta'_3 \cos\vartheta_{2_0} = 0; \qquad A\eta''_2 + C_1\vartheta'_{1_0}\eta'_3 \sin\vartheta_{2_0} = \Theta_2; \\ (C + B\cos^2\vartheta_2)\,\eta'_3 + C_1(\eta'_1 \cos\vartheta_{2_0} - \vartheta'_{1_0}\eta_2 \sin\vartheta_{2_0}) = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 10\alpha)$$

β) e fordított jelenségre nézve:

$$\left.\begin{array}{l} \eta'_1 + \eta'_3 \cos\vartheta_{2_0} = 0; \qquad A\eta''_2 + C_1\vartheta'_{1_0}\eta'_3 \sin\vartheta_{2_0} = 0; \\ (C + B\cos^2\vartheta_{2_0})\,\eta''_3 + C_1(\eta''_1 \cos\vartheta_{2_0} - \vartheta'_{1_0}\eta'_2 \sin\vartheta_{2_0} = \Theta_3; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 10\beta)$$

melyek η'_2-, η'_2-, η'_3-ra nézve állandó együtthatójú lineáris differentiálegyenletek.

A változókat közönséges módon eliminálással választván el egymástól és rövidség kedveért

$$C + (B - C_1)\cos^2\vartheta_{2_0} = D; \qquad C_1\vartheta'_{1_0} \sin\vartheta_{2_0} = E, \qquad E^2A^{-1}D^{-1} = \Omega^2 \qquad 11)$$

jelöléseket hozván be, a 10α)- s a 10β)-ból könnyen nyerjük:

$$\alpha)\quad \eta''_2 + \Omega^2\eta_2 = A^{-1}\Theta_2; \qquad \eta'''_3 + \Omega^2\eta'_3 = \Omega^2E^{-1}\Theta_2; \qquad \eta'_1 + \eta'_3\cos\vartheta_{2_0} = 0 \qquad 12\alpha)$$

$$\beta)\quad \eta'''_2 + \Omega^2\eta'_2 = -\Omega^2E^{-1}\Theta_3; \qquad \eta''_3 + \Omega^2\eta_3 = D^{-1}\Theta_3; \qquad \eta'_1 + \eta'_3\cos\vartheta_{2_0} = 0 \qquad 12\beta)$$

Itt 3) szerint $A_1 + A_2$, $C = A_1 + C_2 + A_3$; $B - C_1 = -A_1 - C_2 + A_2$ lévén, a 11)-ben írt D s így Ω^2 is csak *positiv* lehet.

Mindezekben Θ_2 vagy Θ_3 az idő explicit s adott függvényének tekintendő s így ezen egyenletek a parameterek variatiója módszere szerint közvetetlenül megfejthetők [v. ö. FRÖHLICH, Kinematika 125. §. 232. l.].

Ezek értelmében ez η_1, η_2, η_3 egy-egy szakaszos (periodikus) és egy-egy a Θ_2- illetve Θ_3-tól függő részből állanak; a periódus T tartama: $T = 2\pi : \Omega$; ez közös s 11) szerint a korong ϑ'_{1_0} szögsebességével fordítva arányos; az amplitudók különbözők, de a szövegben leirt jelenségeknél, ha ϑ'_{1_0} elég nagy, a tapasztalat értelmében észrevehetetlenűl kicsinyek, úgy hogy ezekben a Θ_2- illetve Θ_3-tól függő részek dominálnak s a jelenségek jellegét megadják.

A 10α) első s harmadik, illetve a 10β) második egyenletéből

$$\alpha)\qquad \eta'_3 = ED^{-1}\eta_2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13\alpha)$$

$$\beta)\qquad \eta'_2 = -EA^{-1}\eta_3; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13\beta)$$

bennük 11) szerint az E a korongnak ϑ'_{1_0} szögsebességével egyenesen arányos, a mi megmagyarázza azt a szövegben felemlített látszólagos paradoxont, hogy gyors forgásnál igen kicsiny η_2- illetve η_3 elmozdításoknál az η'_3- illetve η'_2 szögsebességek (s így η_3 illetve η_2-szögelmozdulások is) tetemesek.

A számítás további példaszerű részletezését itt mellőzzük.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

HARMADIK ÉVFOLYAM

II. FÜZET. 1894 FEBRUÁRIUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894

TARTALOM

Lap

RADOS GUSZTÁV: Uj soralakok az *e* számára ... 49
VÁLYI GYULA: A tetraéder magasságairól ... 56
BALOG MÓR: Minimum-problémák elemi tárgyalása ... 60
SKOPÁL ISTVÁN: A perspektiv háromszögekre vonatkozó tétel ... 64
Physikai Szemle. (Görbe fénysugarakról. — Az ellenállás absolut egységének valószinü értékéről. — Köralakú nyilás fényelhajlási jelenségének intensitási viszonyairól) ... 66
Irodalom. Ostwald's Klassiker: SAUSSURE, Chem. Untersuchungen über die Vegetation. — LAPLACE, IVORY, GAUSS, CHASLES und DIRICHLET, Über die Anziehung homogener Ellipsoide. — HUYGENS, Abhandlung über das Licht. — CANIZZARO, Abriss eines Lehrganges d. theor. Chemie. — LAMBERT's Photemetrie. — BUNSEN und ROSCOE: Photochemische Untersuchungen. Ism. Kövesligethy R. ... 72
Megoldott feladatok. (TŐTÖSSY B. és SZABÓ P. uraktól) ... 77
Feladatok (KÜRSCHÁK és VÁLYI uraktól) ... 84
Physikai laboratorium. (ANTOLIK KÁROLY, Az elektr. szikrarajzok előállításáról 85
Értesitő a Math. és Phys. Társulat előadásairól. (TANGL K., Néhány forgási test niveau- és erőgörbéiről) ... 90
Helyreigazitás ... 96

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A harmadik társulati év 1894. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czímére — legczélszerűbben a I. füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *A múlt évről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért,* hogy a folyóirat költségeit fedezhessük.

Rendes ülések. A társulat rendes üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

Közgyülés. A közgyülést ez évben *pünkösdkor* tartjuk meg. A *meghivót* április első napjaiban szétküldendő III. füzet hozza.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czimére **(VI. Bulyovszky-u. 16.)** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár **(VII., Csengery-u. 1)**, a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czime alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félivének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesitésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó telemes kiadástól mentik fel.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

UJ SORALAKOK AZ «e» SZÁMÁRA.*

Ha valamely függvénynek több egymástól különböző analitikai kifejezését ismerjük, akkor ezeknek hatványsorba való kifejtése és a hasonló hatványok együtthatóinak összehasonlítása révén gyakran oly relácziók birtokába juthatunk, a melyeknek önálló levezetése vagy felfedezése — más úton — tetemes előkészületet igényelne. Ezen az úton fedezték fel DIRICHLET és KRONECKER a számelmélet legrejtettebb reláczióit, de sőt már EULER is egészen tudatosan, módszerként alkalmazta a fönt vázolt elvet, a melynek segítségével sikerült neki összegezni a soroknak azt a nagy tömegét, a melyet az ő «*Introductio in Analysin infinitorum*» czímű művében találhatunk.

A megadott analitikai kifejezések egyike rendszerint végtelen szorzat- vagy végtelen részlettört-előállítás, míg a másik a szóban forgó függvénynek már a közvetetlenül ismeretes hatványsor-előállítása. Igy pl. cotg x számára ismeretes a

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\pi+x} - \frac{1}{n\pi-x}\right)$$

részlettört-előállítás és a

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1}$$

hatványsor-előállítás, melyben B_n az n-edik BERNOULLI-számot jelenti. Ha a részlettörtes kifejezést szintén hatványsorba fejtjük

* Előadva a Math. és Physikai Társulat 1894 február hó 15-én tartott rendes ülésén.

és ezután ennek együtthatóit a közvetetlenűl megadott hatványsor hasonló együtthatóival egyenlítjük, a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{B_n 2^{n-1} \pi^{2n}}{(2n)!}$$

ismeretes EULER-féle relácziókhoz jutunk.

A jelen dolgozatban ez elvnek uj alkalmazását óhajtom bemutatni, a melynél az egyik analitikai kifejezés egy — tudtommal ily czélra eddig még fel nem használt kifejezés — t. i. *hatványsor hatványsora*, a függvény pedig, mely ehez az analitikai kifejezéshez vezet e^{e^x}. A tétel, a melyhez ily módon jutok, önállóan is, még pedig egészen elemi úton levezethető, de a feltalálására a fönt kimondott elv kinálkozik legtermészetszerűbben.

A tétel maga, a melynek felállitása és bebizonyitása jelen közleményem tárgya, a következő:

Az

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = \frac{1^k}{1!} + \frac{2^k}{2!} + \cdots + \frac{n^k}{n!} + \cdots$$

$$(k=1, 2, 3, \ldots)$$

végtelen sorok összege mindig az e-nek, a természetes logarithmusok alapszámának, egész számú többszörösei.

E tétel kimutatása az egyes S_k sorok közvetetlen összeadása révén bizonyos nehézségekkel jár; de e nehézségek tüstént megszünnek, mihelyt az összes S_k sorokat együttesen és közös szempontból tárgyaljuk. Erre pedig utat mutat a fönt felállitott elv, melynek egyik alakulása ama LAPLACE-tól eredő módszer, a mely az *alkotó függvény* (fonction génératrice) használatában áll.

Állitsuk tehát elő $\frac{S_k}{k!}$ kifejezésnek alkotó függvényét. Ezt a függvényt a

$$\varphi(x) = \frac{S_0}{0!} + \frac{S_1}{1!} x + \frac{S_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{S_k}{k!} x^k + \cdots \qquad (1.)$$

hatványsor szolgáltatja.

E hatványsor összege — miként ki fogjuk mutatni — kifejezhető az exponencziális függvény segitségével.

A $\varphi(x)$ részletesen kiírt alakja a következő kétszeresen végtelen sort szolgáltatja:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = & \frac{1}{0!}\left(\frac{1^0}{1!}+\frac{2^0}{2!}+\frac{3^0}{3!}+\cdots+\frac{n^0}{n!}+\cdots\right) + \\ + & \frac{1}{1!}\left(\frac{1^1}{1!}+\frac{2^1}{2!}+\frac{3^1}{3!}+\cdots+\frac{n^1}{n!}+\cdots\right)x + \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + & \frac{1}{k!}\left(\frac{1^k}{1!}+\frac{2^k}{2!}+\frac{3^k}{3!}+\cdots+\frac{n^k}{n!}+\cdots\right)x^k + \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\end{aligned}$$

e sor oszloponkénti összegezést is enged, minthogy az

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{(nx)^0}{0!}+\frac{(nx)^1}{1!}+\frac{(nx)^2}{2!}+\cdots+\frac{(nx)^k}{k!}+\cdots\right)=\frac{e^{nx}}{n!}$$
$$(n=1, 2, 3, \ldots)$$

sorok mindenütt feltétlenül összetartók. Az oszloponkénti összegezés végrehajtása után találjuk, hogy

$$\varphi(x)=\frac{e^x}{1!}+\frac{e^{2x}}{2!}+\cdots+\frac{e^{nx}}{n!}+\cdots;$$

ha ezt újból összegezzük a

$$\varphi(x)=e^{e^x}-1$$

kifejezésben az S_k alkotó függvényét találtuk az exponencziális függvény jelének segítségével.

Az imént talált alak alapján $\varphi(x)$ közvetetlenül is kifejthető hatványsorba. Mac Laurin sora alapján ugyanis

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k+\cdots \qquad (2.)$$

Az (1) és (2) alatti hatványsorok összehasonlítása az

$$S_k=\varphi^{(k)}(0)=\left[\frac{d^k}{dx^k}(e^{e^x}-1)\right]_{x=0}$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots)$$

egyenlőségekhez vezet, a melyeknek segítségével a fönt kiírt tétel közvetetlenül kimutatható.

Ugyanis

$$\varphi'(x) = e^x(1+\varphi(x))$$

és LEIBNIZ formulája szerint

$$\varphi^{(k)}(x) = e^x\left(1+\varphi(x)+\binom{k-1}{1}\varphi'(x)+\cdots+\binom{k-1}{k-1}\varphi^{(k-1)}(x)\right),$$

a honnan a

$$\varphi^{(k)}(0) = 1+\varphi(0)+\binom{k-1}{1}\varphi'(0)+\cdots+\binom{k-1}{k-2}\varphi^{(k-2)}(0)+$$
$$+\binom{k-1}{k-1}\varphi^{(k-1)}(0) \qquad (3.)$$
$$(k=1,2,3,\ldots)$$

rekurrens képletsorozat adódik ki, és minthogy

$$S_0 = \varphi(0) = e-1$$

(3)-ból tüstént világos, hogy

$$S_k = \varphi^{(k)}(0) = E_k \,.\, e,$$

a hol E_k pozitív egész számot jelent. Ezzel a fönt kimondott tétel teljesen be van bizonyítva.

Még mellékesen meg akarom jegyezni, hogy E_k nem csak a 3. alatti rekurzív képletsorozatból, hanem independens módon is előállítható. Ugyanis HOPPE idevonatkozó egyik képlete könnyű számítás után az E_k számára az

$$E_k = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}\left(i^k-\binom{i}{1}(i-1)^k+\binom{i}{2}(i-2)^k+\cdots+(-1)^{i-1}\binom{i}{i-1}1^k\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^{i-j}}{(i-j)!}\,\frac{j^k}{j!} \qquad (a)$$

kifejezést adja, mely a föntebbiek szerint mindig egész számot szolgáltat.

A fönt bebizonyított tétel a

$$k = 1,2,3,4,5,\ldots$$

értékek mellett az

$$1.\ e=\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\cdots+\frac{n}{n!}+\cdots,$$

$$2.\ e=\frac{1^2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\cdots+\frac{n^2}{n!}+\cdots,$$

$$5.\ e=\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots+\frac{n^3}{n!}+\cdots,$$

$$15.\ e=\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots,$$

$$52.\ e=\frac{1^5}{1!}+\frac{2^5}{2!}+\frac{3^5}{3!}+\cdots+\frac{n^5}{n!}+\cdots,$$

$$203.\ e=\frac{1^6}{1!}+\frac{2^6}{2!}+\frac{3^6}{3!}+\cdots+\frac{n^6}{n!}+\cdots,\ \text{etc.}$$

sorokat szolgáltatja, melyek mindannyian e-nek új előállításai.

*

Az előzőben felállított és bebizonyított tétel a differencziálszámítás segédeszközeinek mellőzésével, egészen elemi úton is bebizonyítható. Ily elemi bebizonyítást König Gyula tanár úr közölt velem, a kinek szíves engedelmével szerencsém van ezt az alantiakban közölni.

A

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

sor, a mely az e számot definiálja, a következő alakokban is írható:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}=\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\cdots+\frac{n}{n!}+\cdots \tag{I}$$

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}=\frac{2.1}{2!}+\frac{3.2}{3!}+\cdots+\frac{n(n-1)}{n!}+\cdots, \tag{II}$$

. . . .

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{n!}=\frac{(k+1)k\ldots 2.1}{(k+1)!}+$$

$$+\frac{(k+2)(k+1)\ldots 3.2}{(k+2)!}+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{n!}+\cdots \tag{K+1}$$

Az (I) alatti előállításból tüstént következik, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = E_1 e, \qquad E_1 = 1\,;$$

tehát E_1 egész szám.

A (II) előállítás révén írhatjuk

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} - \sum \frac{n}{n!} = E_2 e - E_1 e,$$

a honnan

$$E_2 = E_1 + 1 = 2\,;$$

tehát E_2 ismét egész szám.

Annak a kimutatása, hogy E_k minden pozitív egész k mellett egész szám, teljes indukczió útján sikerül. Feltéve ugyanis azt, hogy

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_k$$

egész számok, be fogjuk bizonyíthatni, hogy E_{k+1} *is egész szám.*

Legyen

$$(x-1)\,(x-2)\ldots(x-k) \equiv x^k - C_{k1}x^{k-1} + \ldots (-1)^k\, C_{kk},$$

úgy hogy

$$C_{k1},\ C_{k2},\ \ldots,\ C_{kk}$$

az

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ k$$

számok első-, második-, . . . , illetőleg k-dik kombinácziós összegeit jelentik, akkor a $(K+1)$-edik előállítás részletes kiírásából következik, hogy

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{n!} - C_{k1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} + C_{k2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n!} - \ldots + (-1)^k C_{kk} \sum \frac{n}{n!}$$

a honnan

$$1 = E_{k+1} - C_{k1}\, E_k + C_{k2} E_{k-1} - \ldots + (-1)^k\, C_{kk} E_1 \qquad (\beta)$$

és innen E_{k+1}-nek egész számu volta közvetetlenűl lép evidencziába; hogy E_{k+1} egyszersmind pozitív is, az onnan következik, hogy az S_{k+1} és e positív számoknak hányadosa.

A (β) alatti reláczió alapján az E_k együtthatóknak independens előállításához is juthatunk. Ha ugyanis a (β) alatti relácziót a

$$k=1,\ 2,\ \dots,\ (k-1),\ k$$

értékekre képezzük, akkor az

$$\begin{array}{r}
E_{k+1}-C_{k1}E_k+C_{k2}\ E_{k-1}-\dots+[(-1)^k\ C_{kk}\qquad -1]E_1=0\\
1\,.\,E_k-C_{k-11}E_{k-1}+\dots+[(-1)^{k-1}C_{k-1k-1}-1]E_1=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
1\,.\,E_3-C_{21}E_2+[C_{22}\qquad -1]E_1=0\\
1\,.\,E_2+[-C_{11}\qquad -1]E_1=0\\
1\,.\,E_1=0
\end{array}$$

lineár egyenletrendszerhez jutunk, melynek determinánsa *egy*-gyel egyenlő és a melyből

$$E_{k+1}=$$

$$(-1)^k\begin{vmatrix}
-C_{k1} & C_{k2} & -C_{k3} & \dots & (-1)^{k-1}C_{kk-1} & (-1)^k\ C_{kk} & -1\\
1 & -C_{k-11} & C_{k-12} & \dots & (-1)^{k-2}C_{k-1k-2} & (-1)^{k-1}C_{k-1k-1} & -1\\
0 & 1 & C_{k-21} & \dots & (-1)^{k-3}C_{k-2k-3} & (-1)^{k-2}C_{k-2k-2} & -1\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & \dots\ - & C_{21} & C_{22} & -1\\
0 & 0 & 0 & \dots\ 1 & & -C_{11} & -1
\end{vmatrix}.$$

E tárgyalás érdekes mellékeredményeképen még felemlítjük, hogy az imént talált, nem épen egyszerű determináns az (α) alatti képlet alapján a

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^{i-j}}{i-\ !}\,\frac{j^{k+1}}{j\,!}$$

kifejezéssel egyenlő.

Rados Gusztáv.

A TETRAÉDER MAGASSÁGAIRÓL.

Legyenek a tetraéder szögpontjai A_1, A_2, A_3, A_4 és a rajtok átmenő magasságvonalak a_1, a_2, a_3, a_4. Legyenek továbbá az $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ háromszögek magasságpontjaiban ezek síkjaira merőleges egyenesek b_1, b_2, b_3, b_4.

Feltesszük, hogy mind a négy szögpont végesben, de nem egy síkban van. Ezzel azt is kizártuk, hogy két magasság párhuzamos, három magasság egy síkkal párhuzamos legyen.

I.

*1. tantétel. a_i és b_k egyenesek metszik egymást.**

Mert mind a két egyenes benne van az A_i ponton átmenő és A_lA_m egyenesre merőleges síkban.

a_i b_k egyenesek közös pontját $(a_i\, b_k)$-val, közös síkját $[a_i\, b_k]$-val fogjuk jelölni.

2. tantétel. Ha a_i egyenest a_k és a_l egyenesek metszik, akkor egy pontban metszik és ezen a ponton a_m egyenes is átmegy, a b-egyenesek pedig a magasságokkal összeesnek.

Minthogy b_m egyenes a_i és a_k egyeneseket metszi, de velök egy síkban nem lehet, (a_ia_k)-ponton kell átmennie. Épen így át kell mennie (a_ia_l)-ponton is. De a_i egyenessel nem eshetik össze, mert iránya más, azért (a_ia_k), (a_ia_l)-pontoknak kell egybe esniök. Legyen ez a pont M.

Ezen a ponton átmennek b_i, b_k, b_l egyenesek is, mert pl. b_i

---

* Itt is a következőkben i, k, l, m egyik tetszés szerint vett permutáczióját jelentik az 1, 2, 3, 4 számoknak.

metszi a_k, a_l egyeneseket, de velök egy síkban nem lehet. Igy a_i egyenessel össze kell esnie, mert azzal egy pontja és iránya közös. Épen így esnek össze b_k és a_k, b_i és a_i.

Végül a_m egyenes is átmegy M ponton, mert b_i, b_k egyeneseket metszi s velök egy síkban nem lehet. Igy össze kell esnie b_m egyenessel.

3. tantétel. Ha a_i és b_i egyenesek összeesnek, akkor a magasságok egy pontban metszik egymást és összeesnek a b-egyenesekkel.

Minthogy b_i egyenes a_k, a_l egyeneseket metszi és a_i egyenessel összeesik, az előbbi tantétel értelmében a magasságok egy pontban metszik egymást és a b-egyenesekkel összeesnek.

4. tantétel. Ha a_i egyenest a magasságok közül csak a_k metszi, akkor a_l és a_m egyenesek is metszik egymást, még pedig úgy, hogy $(a_l a_m)$-pont $[a_i a_k]$-síkban, $(a_i a_k)$-pont $[a_l a_m]$-síkban van.

Minthogy b_i egyenes a_k egyenest metszi és a_i egyenessel párhuzamos, azért $[a_i a_k]$-síkban kell lennie. Ugyanebben a síkban van b_k egyenes is hasonló okból. De akkor b_i, b_k egyenesek metszik egymást. $(b_i b_k)$-pont nem esik össze $(a_i a_k)$-ponttal, mert különben a magasságok, a feltétel ellenére, egy pontban metszenék egymást.

Minthogy továbbá a_l, a_m egyenesek metszik b_i, b_k egyeneseket s három közülök egy síkban nem lehet, egymást is metszik a $(b_i b_k)$-pontban, a mely pedig az $[a_i a_k]$-síkban van.

Az előbbi gondolatmenetet i és l, k és m felcserelésével végigjárva rájövünk, hogy viszont $(a_i a_k)$-pontnak $[a_l a_m]$-síkban kell lennie.

5. tantétel. Ha a magasságok kettenként nem metszik egymást, akkor egy egyköpenyű hyperboloidon vannak.

Fektessünk át $a_i a_k a_l$ egyeneseken egy másodrendü felületet. Ez szükségképen egyköpenyű hyperboloid lesz, mert a három egyenes nem párhuzamos egy síkkal.

Minthogy a b-egyenesek az a-egyeneseket metszik, azok is rajta lesznek ezen a hyperboloidon valamint a_m egyenes is, a mely viszont a b-egyeneseket metszi.

6. tantétel. Ha a magasságok kettenként nem metszik egymást, akkor az $[a_i b_i]$-síkok egy pontban metszik egymást.

$[a_i b_i]$-sik ugyanis átmegy az előbb szerkesztett hyperboloid czentrumán, mert annak két párhuzamos egyenesét tartalmazza.

Az eddig bebizonyitott tantételekből az következik, hogy a tetraéder magasságaira nézve három eset lehetséges.

1. A magasságok egy pontban metszik egymást.

Ekkor A_i szögpont b_i egyenesre esik. De elég ezt egyik szögpontról tudni arra nézve, hogy mindenikre álljon.

2. A magasságok két szöget alkotnak külön szögponttal és síkkal, de olyan helyzetben, hogy az egyik szögpontja a másik síkjában van és viszont.

Ekkor A_i szögpont az $A_k b_i$, $A_l b_i$, $A_m b_i$* sikok egyikébe esik.

2. A magasságok egy egyköpenyű hyperboloid egyik egyenesrajához tartoznak.

II.

7. tantétel. Ha a tetraéder magasságai egy pontban metszik egymást, akkor $A_i A_k$ és $A_l A_m$ egyenesek merőlegesek egymásra.

Mert $A_i A_k$ egyenes merőleges $[a_l a_m]$-síkra, a melyben pedig $A_l A_m$ egyenes benne van.

Ennek egyszerű következése a

8. tantétel. Ha a tetraéder magasságai M pontban metszik egymást, akkor $A_i A_k A_l M$ tetraéder magasságai A_m pontban metszik egymást.

Ha a tetraéder A_1, A_2, A_3 szögpontjainak megtartásaval A_4 szögpontot b_4 egyenesen változtatjuk, folytonosan olyan tetraédert kapunk, melynek magasságai egy pontban (M) metszik egymást.

Az $A_1 A_2 A_4$ siktól leirt siksor és az $A_3 A_4$ egyenestől leirt sugársor projektívek, mert a megfelelő tagok egymásra merőlegesek. A két sort b_4 egyenessel átvágva meggyőződünk, hogy az A_4 és M

---

* Ha b_i az A_k ponton menne át, akkor $A_k b_i$ sík alatt az A_k ponton átmenő és $A_l A_m$ egyenesre merőleges sík értendő.

pontoktól leírt pontsorok projektivek. De a két pontsor az előbbi tantétel alapján fel is cserélhető. Tehát áll a következö

9. tantétel. b_4 *egyenesen az* A_4M *pontpárok involucziót alkotnak, melynek czentruma az* $A_1A_2A_3$ *síkban van.*

A tantétel utolsó része abból következik, hogy ha A_4 pont b_4 egyenesen a végtelenbe távozik, $a_1a_2a_3$ magasságok s velök M pont is $A_1A_2A_3$ síkba esik.

Az involuczió hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus a szerint, a mint $A_1A_2A_3$ háromszög hegyes-, derék- vagy tompaszögű, mert

ha $A_1A_2A_3$ hegyesszögű háromszög, A_4M pontok $A_1A_2A_3$ sík ugyanazon oldalára esnek;

ha $A_1A_2A_3$ derékszögű, M pont a derékszögnél levő szögpontba esik, akárhol is vegyük fel A_4 pontot b_4 egyenesen ;

ha $A_1A_2A_3$ tompaszögű, A_4M pontok $A_1A_2A_3$ sík különböző oldalára esnek.

Ha K az involuczió egyik kettőspontja, akkor $A_1A_2A_3K$ tetraédernek K-ban találkozó élei egymásra kölcsönösen merőlegesek.

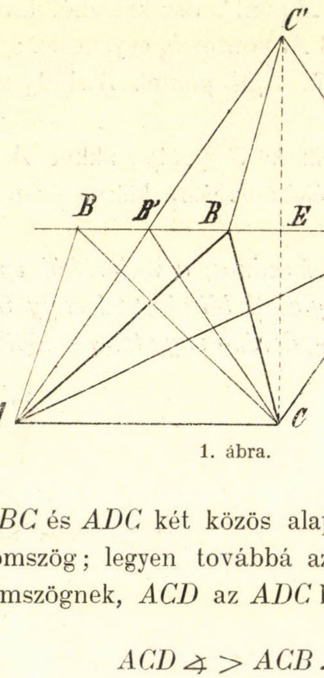
Tehát

10. tantétel. Azon pontok száma, a melyekből egy háromszög mindenik oldala derékszög alatt látszik, 2, 1 vagy 0 a szerint, a mint a háromszög hegyes-, derék- vagy tompaszögű.

Vályi Gyula.

MINIMUM-PROBLEMÁK ELEMI TÁRGYALÁSA.

I. *A közös alapon álló, egyenlő területű háromszögek közt, annak van nagyobb kerülete, a mely a közös alapon fekvő szögek legnagyobbikát foglalja magában.*



1. ábra.

Legyen, ABC és ADC két közös alapon álló (1. ábra) egyenlő területű háromszög; legyen továbbá az AC oldal mentén ACB az ABC háromszögnek, ACD az ADC háromszögnek legnagyobb szöge és

$$ACD \sphericalangle > ACB \sphericalangle .$$

A két háromszög B és D szögpontjai az AC alappal párhuzamos $B'D$ egyenesen feküsznek. Forgassuk a BCD háromszöget $B'D$ egyenes körűl $BC'D$ helyzetbe és kössük össze C' pontot A-val. Ez által az AC' közös alapon álló két háromszöget nyerünk: ADC' és

ABC'-et, mely utóbbinak B szögpontja okvetlenül az ADC' háromszögön belül fekszik, a $B'D$ egyenesnek B' és D pontok határolta részén. Ugyanis könnyen kimutatható, hogy B a $B'D$ egyenesen sem D-től jobbra, sem pedig B'-től balra nem feküdhet.

Præmissáink értelmében

$$ACD\sphericalangle > ACB\sphericalangle$$

tehát B a D-től jobbra nem eshetik (l. 1. ábra); hogy pedig B a B'-től balra sem eshetik indirekt úton következőképen adódik ki. Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy az $AB'C$ háromszög egyenlőszárú: ugyanis az $AC'C$ és $B'C'E$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$AB' = B'C' = B'C.$$

Feltéve már most azt, hogy B a B' ponttól balra esnék, akkor állana, hogy

$$BAC\sphericalangle > B'AC\sphericalangle = B'CA\sphericalangle > BCA\sphericalangle$$

tehát feltevésünkkel ellentétben azt nyernők, hogy

$$BAC\sphericalangle > BCA\sphericalangle$$

és így lehetetlen, hogy B a B' ponttól balra feküdjék.

De ha a B pont az ADC' háromszögnek belső pontja, akkor ismeretes elemi tételből következik, hogy

$$AD + DC' > AB + BC',$$

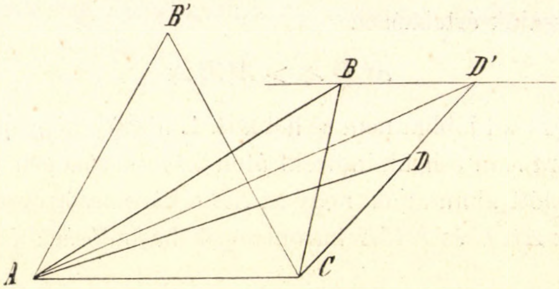
vagyis

$$AC + AD + DC > AC + AB + BC,$$

a mivel a fent kimondott tétel be van bizonyítva.

Ha az $ACB\sphericalangle$ folytanosan kisebbedik, akkor a B pont a BD egyenesen mozogva folytonosan közeledik B'-hez, az $AB+BC'$ oldalok összege pedig mindig kisebb lesz és eléri a minimumot $AB'+B'C'$-t, ha B összeesik B' ponttal. De minthogy már előbb kimutattuk, hogy $AB'=B'C'=B'C$ vagyis az $AB'C$ háromszög egyenlőszárú, egyszersmind be van bizonyítva az is, hogy: *valamennyi közös alapon álló egyenlő területű háromszögek kerületei között az egyenlőszárú háromszögé a legkisebb.*

II. *A közös alapon álló egyenlő kerületű háromszögek között annak van kisebb területe, a mely az alapon fekvő szögek legnagyobbikát foglalja magában.*



2. ábra.

Legyen (2. ábra) ABC és ADC két közös alapon álló egyenlő kerületű háromszög, legyen továbbá AC mellett

$$ACB \measuredangle \text{ az } ABC \text{ háromszögnek,}$$
$$ACD \measuredangle \text{ az } ADC \text{ háromszögnek}$$

legnagyobb szöge és

$$ACD \measuredangle > ACB \measuredangle.$$

Akkor $CD < CD'$, hol D' a CD és a közös AC alappal párhuzamos, az ABC háromszög B szögpontján átmenő BD' egyenesnek metszéspontja, mert ha $CD = CD'$ volna akkor ABC területe $=$ ADC területével és I. tétel szerint

$$AB + BC < AD + DC$$

volna a mi a feltétellel, hogy t. i. a két háromszög izoperimetrikus ellenkezik. Ép oly kevéssé lehet $CD > CD'$, mert ez esetben

$$AD + DC > AD' + D'C > AB + BC,$$

a mi a feltétel alapján szintén lehetetlen.

De ha $CD < CD'$ akkor ADC háromszög területe $< AD'C$ háromszög területénél azaz ADC háromszög területe $< ABC$ háromszög területénél, a mivel a kimondott tétel be van bizonyítva.

Az imént bebizonyított tételből következik, hogy az ABC háromszög területe folytonosan nagyobbodik, ha az $ACB\measuredangle$ folytonosan kisebbedik. De az adott feltételek mellett az $ACB\measuredangle$ csak addig kisebbedhetik, míg

$$ACB\measuredangle = ACB'\measuredangle = CAB'\measuredangle,$$

vagyis míg a megfelelő háromszög egyenlőszárú lesz, mert különben $ACB\measuredangle$ nem volna már az ABC háromszög legnagyobb szöge, miből megint következik, hogy az ABC háromszög területe csak addig nagyobbodhatik, míg a háromszög egyenlőszárú lesz; és így a következő maximum tételt nyerjük:

Valamennyi közös alapon álló egyenlő kerületű háromszög területei között, az egyenlőszárú háromszög területe a legnagyobb.

Balog Mór.

A PERSPEKTIV HÁROMSZÖGEKRE VONATKOZÓ HESSE-FÉLE TÉTEL EGY SPECZIÁLIS ESETE.

Adva van három háromszög:

$$A_1B_1C_1; \quad A_2B_2C_2, \quad A_3B_3C_3$$

oly megszorítással, hogy az

A_1, A_2, A_3	csúcsok az	a	egyenesen
B_1, B_2, B_3	«	a b	«
C_1, C_2, C_3	«	« c	«

feküsznek és e három egyenes a, b és c egy S pontban találkozik; továbbá az

A_1B_1	oldal	A_2B_2	oldalt	γ_{12}	pontban
B_1C_1	«	B_2C_2	«	α_{12}	«
C_1A_1	«	C_2A_2	«	β_{12}	«
A_2B_2	«	A_3B_3	«	γ_{23}	«
B_2C_2	«	B_3C_3	«	α_{23}	«
C_2A_2	«	C_3A_3	«	β_{23}	«
A_3B_3	«	A_1B_1	«	γ_{31}	«
B_3C_3	«	B_1C_1	«	α_{31}	«
C_3A_3	«	C_1A_1	«	β_{31}	«

metszi; úgy első sorban Desargues tétele szerint

γ_{12}, α_{12}, és β_{12}	egy	ugyanazon	egyenesen	s_{12}-ben,
γ_{23}, α_{23}, és β_{23}	«	«	«	s_{23}-ban,
γ_{31}, α_{31}, és β_{31}	«	«	«	s_{31}-ben,

vannak; másrészt Hesse tétele szerint e három egyenes: s_{12}, s_{23}, s_{31} egy pontban, σ-ban találkozik.

Kérdjük, vajjon e három perspektiv-tengely: s_{12}, s_{23}, s_{31}, mikor esik össze; azaz hogyan kell a három perspektiv háromszöget választanunk, hogy

$$s_{12} \equiv s_{23} \equiv s_{31}$$

legyen?

Feltéve, hogy e hármas identitás fennáll, még a következő identitások következnek:

$$\alpha_{12} \equiv \alpha_{23} \equiv \alpha_{31},$$
$$\beta_{12} \equiv \beta_{23} \equiv \beta_{31},$$
$$\gamma_{12} \equiv \gamma_{23} \equiv \gamma_{31}.$$

Ugyanis az α_{12}, α_{23} és α_{31} nem egyéb, mint a B_1C_1, B_2C_2 és B_3C_3 három egyenes három metszés pontja, de hogy e három metszéspont egy és ugyanazon negyedik, a háromtól különböző, egyenesen feküdjék, ez csak úgy lehet, ha a három metszéspont összeesik. Legyen tehát

$$\alpha_{12} \equiv \alpha_{23} \equiv \alpha_{31} \equiv \alpha$$
$$\beta_{12} \equiv \beta_{23} \equiv \beta_{31} \equiv \beta$$
$$\gamma_{12} \equiv \gamma_{23} \equiv \gamma_{31} \equiv \gamma;$$

akkor még azt is mondhatjuk, hogy az a egyenesen levő négyes pontsor:

$$SA_1A_2A_3$$

perspektiv a b egyenesen levő

$$SB_1B_2B_3$$

négyes pontsorral a γ-ra, mint perspektiv czentrumra nézve. Hasonlóképen $SB_3B_2B_3$ perspektiv $SC_1C_2C_3$-hoz az α-ra mint perspektiv czentrumra nézve és végül $SC_1C_2C_3$ perspektiv $SA_1A_2A_3$-hoz a β-ra mint perspektiv czentrumra nézve.

Ha pedig e négyes pontsorok *kettős viszonyát* képezem, a talált eredmény, mint háromszögekre vonatkozó megszorítások, még a következő hármas egyenletben fejezhető ki:

$$(SA_1A_2A_3) = (SB_1B_2B_3) = (SC_1C_2C_3).$$

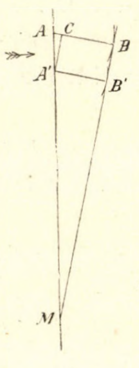
Skopál István.

PHYSIKAI SZEMLE.

Görbe fénysugarakról. O. Wiener: Darstellung gekrümmter Lichtstrahlen und Verwerthung derselben zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung. *Ann. d. Ph.* IL. k. 105—149 l.

A fény az oly közegben, melyben a törésmutató párhuzamos rétegek szerint folytonosan változik, egyenes iránytól eltérő utat követ. A légkörnek ilyen állapota hozza létre a légköri sugártörés s a légtükrözés igen változatos jelenségeit.

Gondoljunk egyszerűen törő közeget, melyben a törésmutató a függélyes irányban folytonosan változik, oly módon, hogy az egymásra következő vízszintes rétegekben állandó. Ha a fény a rétegeket ferdén metszi, nyilván eltér eredeti irányától s a nagyobb törésű rétegek felé görbül. A Snell-Descartes-féle törvényből arra lehetne következtetni, hogy a vízszintes irányban meginduló (vonalnak gondolt) fénysugár állandóan megtartja irányát, egyenes marad, mert hiszen ebben az irányban a törésmutató változatlan. A valóságban nem így áll a dolog: a fénysugár ez esetben is elgörbül, és pedig abban az irányban, a melyben a törésmutató növekedik. Ennek a látszólagos ellentmondásnak oka abban van, hogy a Snell-Descartes-féle törvény a Huygens-féle hullámelméletből csupán csak homogén közegek esetére van leszármaztatva. A hullámelmélet a jelen esetben is helyes eredményre jut.



Legyen A és A' a fénysugár vízszintes részén a hullámfelület két végtelen közel eső pontja s a rajtuk átmenő vízszintes síkokban a fényterjedés sebessége c, ill. c'. Ezen pontok oly elemi hullámok kiinduló pontjai, melyek végtelen kis idő alatt a c és c' sebességekkel arányos AB, ill. $A'B'$ sugarú körökre elterjednek s így a hullámfelület ebben a pillanatban a körök közös érintője, BB' lesz. Ennek metszése az AA'-n átmenő függélyessel megadja a fénysugár görbületének középpontját, s AM a görbület sugarát. Legyen $AA'=dx$, $c-c'=dc$, $AM=r$; akkor

$$dx : r = dc : c$$

Minthogy a terj. sebesség változása a törésmutató változásával arányos, vagyis — az előjelet nem tekintvén —

$$dc : c = dn : n,$$

az előbbi arányegyenlet így is irható:

$$dx : r = dn : n.$$

A $dn : dx$ hányadost a *törésmutató esése* névvel nevezvén s $\mathbf{n}$-nel jelölvén, a fénysugár görbületi sugara

$$r = \frac{n}{\mathbf{n}}$$

E szerint a *vizszintes rétegzésű, a függélyes irányban változó törésű közegben haladó fénysugár görb. sugara egyenlő a törésmutatónak a törésmutató függélyes eséséhez való viszonyával.*

Ezekből következik, hogy még a teljesen nyugvó légkörben sem egészen egyenes a fény útja. Feltéve, hogy a hőmérséklete állandó s 0°C-kal egyenlő, a vízszintesen meginduló fénysugár görbületi sugara 4,26 földsugárral egyenlő.

Igen érdekesek a következtetések, melyeket eme fejtegetéseknek más világtestekre való alkalmazásából vonni lehet. KUMMER* szerint lehetnek olyan égi testek, melyek *felülete a felszín bármely pontjából teljesen áttekinthető.* Igy pl. ha feltételezhető a bolygókról, hogy légköreik oly arányban vannak, mint tömegeik, úgy a Jupiter lakója bolygójának egész felületét látja, még pedig oly csészének, melynek kerülete látszólagos horizonképen 3°48′-re a valódi horizon fölé emelkedik.

A Nap éles szegélyünek látszik; olyannak, mintha gázalakú légkörtől körülvett folyós vagy szilárd gömb volna. Ámde a rajta uralkodó magas hőmérséklet, mely a legtöbb anyag kritikus hőmérsékletén valószínüleg túl van, arra a feltevésre késztet, hogy ott ilyen halmazállapotbeli külömbség nem igen lehetséges, hanem hogy a sűrűség kivülről befelé folytonosan, tehát ugrások nélkül változik. Ennek megfelelőleg a törésmutató is, concentrikus gömbfelületek szerint kivülről befelé folytonosan növekednék. SCHMIDT ** az előbbi fejtegetések fonalán arra az eredményre jut, hogy az olyan izzó gázgömbnek, melynek méretei a Napéval megegyez-

---

* KUMMER: Über atmosphärische Strahlenbrechung. Monatsberichte d. Kgl. Preuss. Ak. d. Wiss. zu Berlin 1860 évf. 405. l.

** SCHMIDT: Die Strahlenbrechung auf der Sonne, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik. *Jahreshefte d. Vereins für vaterl. Naturkunde in Württemberg.* Stuttgart, 1891.

nek, ugyanolyannak kell feltűnnie, mint a minőnek látszik a Nap. A látszólagos határ — az éles szegély — a tömegközéppont körül írt azon gömb felülete, melynek sugara a tangentiális irányban meginduló fénysugár görbületi sugarával megegyezik. Az az érintővel párhuzamos fénysugár, mely ezt az optikailag kritikusnak nevezhető gömbfelületet kis szög alatt éri, folytonosan befelé törik s oly helyekre vezet, hol nagy nyomás alatt izzó, tehát folytonos színképet adó gőzök vannak. Ellenben az a fény, mely a kritikus felületen kívül esik a gázgömbre, a gömbtől, — *tehát az erősen világitó pontoktól is* — eltereltetik. Ugyanez áll a kilépő fénysugarakra is s így jöhet létre az éles határ látszata. Schmidt ezt így fejezi ki: *A Nap éles szegélye optikai csalódás.*

Wiener a görbült fénysugarakat a következő módon állítja elö. 10 cm. magas, 1 cm. széles téglaalakú üvegedénybe alkoholt önt s ez alá igen vékonyra kihúzott tölcséren keresztül — a tölcsér nyilása egészen az edény fenekére ér — szénkéneget. A két folyadékot eleinte éles határfelület választja el, de diffusió útján csakhamar mindinkább vastagodó réteg keletkezik közöttük, melyben a törésmutató folytonosan változik. Ha már most keskeny résből jövő párhuzamos nap- vagy elektromos fény-nyalábot bocsátunk akár a tiszta alkoholon, akár a szénkénegen keresztül, a fény útja egyenes marad; de ha a közbeeső diffusió-rétegbe vezetjük, meggörbül, és pedig a nagyobb törésmutatóju szénkéneg felé. A fény útját a szénkéneg fluorescentiája igen szembetűnővé teszi; czélszerű az alkoholt is nehány csepp fluorescinnel fluorescálóvá tenni. A kisérlet más folyadékokkal is végezhető; ilyenek pl. chloroform és szénkéneg, alkohol és víz, víz és sósav stb. Ha pedig három folyadék — pl. alkohol, szénkéneg és chloroform — öntetik egymás fölé, a fénysugár két görbületet is mutat.

Igen szép formát adtak a kísérletnek Macé de Lépinay és Perot.* 1 méter hosszúságú és 15 cm. magasságú üvegdézsában vizet és alkoholt diffundáltatnak egymásba. A belépő fény a nagyobb törésmutatójú alkohol felé törvén, ennek szabad felületén teljesen visszaverődik; útja többszörösen megtörő hullámvonal alakját veszi fel.

Wiener a görbült fénysugarakat a diffusió állandójának igen pontos meghatározására értékesítette. *B.*

*

* Macé de Lépinay et Perot; Contribution à l'étude du mirage. *Ann. de Chim. et. Phys.* 6. sér. XXVII. p. 94.

Az ellenállás absolut egységének valószínű értékéről. E. Dorn, Ueber den wahrscheinlichen Werth des Ohm nach den bisherigen Messungen * *Zeitschr. f. Instrumentenkunde.* Beiheft zum Jahrg. 1893.

Dorn munkálata két tárgyra vonatkozik; 1. a higany normál ellentállások vagy ezek másolatainak előállítására, melyeknek értéke m/mm² Hg 0° szerint ismeretes; 2. ezek ellentállásának az absolut elektromagnetikus egységekben való meghatározására. A 0°-ú higanynyal megtöltött cső ellentállásának kiszámítására való formula

$$W_0 = \frac{\sigma_0\, C\,[L_0 + a\,(r_1 + r_2)]}{\left(\frac{M_0}{L_0 D_0}\right)}$$

a hol σ_0 a Hg fajlagos ellentállása, C a cső keresztmetszeti viszonyaitól függő, az egységtől kevéssé különböző állandó, L_0 a cső hossza 0°-nál, r_1 r_2 a csővégek keresztmetszete, a cső végződésétől függő állandó, M_0 a csőben foglalt Hg tömeg 0_0-nál, D_0 a Hg sűrűsége 0°-nál.

Dorn az itt előforduló tényezők mérésére vonatkozó és megbízható kisérletezőktől eredő adatokat ismerteti és kritikának veti alá. A kisérleti adatok összehasonlításánál Dorn a következő adatokat használja: a=0,80, D_0=13,5956, a Hg-nak közepes hőtágulási együtthatója 0°—20° C. között 0,000180, végre

$$\sigma_T = \sigma_0\,(1 + 885{,}4.10^{-6}T + 1{,}135.10^{-6}T^2)$$

Az ismertetett módszerek a következők:

1. Weber 3-dik, *u.n. csillapitási módszere.* Ebben a multiplicator mágnesének lengései észleltetnek, midőn ez nyitott s azután önmagába van zárva.

2. Weber *első módszere,* melynél a földinduktor forgatása által gerjesztett áramok nagy méretű galvanometerrel méretnek.

3. Lorenz *módszere.* Fémkorong egyenletesen forog a forgástengelylyel párhuzamos mágneses térben s a korongban áramok indukáltatnak.

---

* Az elektromos mennyiségek mérő egységeit tudvalevőleg az 1881. és 1884. párisi nemzetközi congressusok állapították meg. Az ellenállás gyakorlati egysége, az *ohm legal* 1,06 Siemens-féle egységgel, vagyis 106 cm. hosszaságú 1 mm² keresztmetszetű higanyoszlop ellenállásával tétetett egyenlővé. Ez a szám az addig tett mérések szerint legjobban közelítette meg a theoretikus ohm s a Siemens-féle ellentállási egység viszonyát. Ezen viszony legvalószínűbb értékét megállapítandó, a berlini Physikalische Reichsanstalt az ily vizsgálatokkal foglalkozott német physikusokat, névszerint Dorn, Himstedt, Kohlrausch és Wiedemann tanárokat véleményadásra szólította fel. Dorn kimerítő kritikai munkálatban ismerteti az eddigi ohm-meghatározásokat, melynek eredményeit e sorok közlik.

4. KIRCHHOFF *módszere* két közös tengelyű dróttekercs, az egyikben létesített áramintensitás változása következtében a másik tekercsben áramok indukáltatnak.

5. *A forgó tekercsnek* WEBER-féle módszere, melylyel a British Association bizottsága tette vizsgálatait, 1863/4-ben. Ez a módszer abban áll, hogy függélyes tengely körül egyenletesen forgó dróttekercsben a földmágnességtől indított áram a mágnestűt kitéríti.

6. LIPPMANN *módszere*, melyben a hosszú solenoid okozta homogén mágneses térben dróttekercs egyenletes forgásban tartatik.

DORN az előterjesztett módszerek szerint különböző észlelőktől végrehajtott kisérleti vizsgálatokon a véleménye szerint megejtendő correctiókat megtevén, a teljes súlyú adatokat összeállítja; kétes esetekben előbb a kisebb értékeket veszi.

Kohlrausch	1,06264	1,06310
Dorn	1,06235	1,06235
Rayleigh és Sidgwick	1,06255	1,06288
Rowland, Kimball, Duncan	1,06290	1,06290
Rowland 1887	1,06320	1,06320
Jones	1,06281	1,06307
Glazebrook, Dodds, Sargant	1,06265	1,06299
Himstedt	1,06257	1,06257
Rowland és Kimball	1,06310	1,06310
Rayleigh	1,06280	1,06312
Wuilleumier	1,06267	1,06285

Az első oszlopból a főközépérték a súlyok figyelembe vételével $1{,}06274 \pm 0{,}00023$; a második oszlopból való középérték 1,06292 a felényi súlyú megfigyelések felhasználásával a főközépérték:

$$1{,}06289 \pm 0{,}00024.$$

Bajos eldönteni, hogy mely értéknek tulajdonítandó nagyobb valószinűség.

Egyelőre 1,0628 úgy tekintendő, mint mely a *valódi értéket nagyon megközelíti* s ha 1,062 és 1,063 között kellene választani, mindenesetre **1,063**-nak kell elsőbbséget adni.

Az itt közölt ohm-mérések dynamikai úton állapítják meg az elektromos ellenállás egységét. Kiegészítésképen az áramerősségnek chemiai mértékére vonatkozó legmegbízhatóbb adatokat is ide iktatjuk.

Az *áram erőssége* az elektrolysis útján kiválasztott ezüst tömegével igen pontosan mérhető. Ez a tömeg 1 amperre, másodperczenkint:

Kohlrausch szerint	1,11826 mgr.
Lord Rayleigh szerint	1,11794 «

Ez adatok középértékét, 1,118 milligrammot választván az amper mértékéül, az egység 0,001 mgrig pontosan meghatározottnak tekinthető.

Az ohm- és amperre vonatkozó megállapodások elegendők volnának arra, hogy az Ohm-féle törvény szerint ugyanolyan rendű pontossággal a volt is meghatároztassék. *W.*

*

Köralakú nyílás fényelhajlási jelenségének intensitási viszonyairól. L. Steiner Lajos ily czímű dolgozatát a *Math. és Természettud. Értesítő* XII. köt. 44. l.

Szerző a köralakú nyílás diffractio-spectrumának egymásra következő minimum-gyűrűi közé eső fényintensitások összegeit számította ki. Pontos számításainak eredményei az irodalomban ismeretes adatoktól feltünő eltéréseket mutatnak. Ipy pl. a Mascart *Traité d'Optique* czímű munkája most megjelent I. kötete 310—314. lapjain hasonló számítás eredményeit közli. M. *graphikus úton* jut közelítő számértékekhez; de hogy ezek igen pontatlan közelítések, az azonnal kiderül, ha az említett munka 314. lapján adott tabelláris átnézet mellé a dolgozat eredményeit állítjuk.

	Mascart sz.	Pontosabb értékek	Viszony Mascart sz.	Viszony Pontosabb értékek
Középső folt (1. minimumig)	0·9238·	0·837786	1·0000	1·00000
1. gyűrű	0·07348	0·072146	0·0795	0·08612
2. «	0·02768	27716	300	3308
3. «	1516	14670	164	1751
4. «	911	9084	98	1084
5. «	607	6176	66	737
6. «	448	4472	48	534
7. «	342	3388	37	404
8. «	0·00258	0·002656	0·0028	0·00317
Összeg	1·06578	0·978094; a 8 gy. össz.	0·1536	0·16747

E számadatokból látható, hogy a diffractió után a középső folt intensitása a nyilásra eső fényintensitásnak közel 83·8 (Mascart szerint 92·4) százaléka, továbbá az első 8 gyűrű intensitása a középső folt intensitásának 16·75, (Mascart szerint csak 15·4) százaléka.

De legfeltünőbb hiánya a Mascart közölte adatoknak, hogy már a középső folt s az első nyolcz gyűrű intensitásainak összege ott a beeső fény egész intensitásánál *nagyobb* és pedig 6·5 százalékkal, a mi a dolog természete szerint képtelenség. *F.*

IRODALOM.

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften.

15., 16. Chemische Untersuchungen über die Vegetation von Th. de Saussure 1804. Erste Hälfte 96 oldal, zweite Hälfte 114 oldal. Fordította Wieler A. — Ára 3,60 márka.

A növények táplálkozásának tanát Saussure óta egy munka sem tárgyalta ily úttörő módon, úgy hogy tanulmányozása nem eléggé ajánlható, bár módszere éppen nem didaktikai. A szerző, saját szavai szerint, a legnagyobb súlyt fektette a víz és a gázok szerepére a növények táplálkozásánál és azon változásokra, melyek ezzel a légkörben karöltve járnak. A vizsgálódás eredménye, hogy termékeny talajon termő növény szilárd alkatrészeinek képzéséhez nagyobb mértékben járul a víz s a levegő, mint a humus anyaga, melynek vízoldatát gyökereivel felszíja. A vizsgálódás nagy része a növények hamvát illeti. A mű egyes, röviden jelzett fejezetei különben a következők: I. Az oxygen hatása a csirázásra; II. a szénsav hatása a vegetáczióra; III. az oxygen hatása a kifejlett növényekre; IV. az oxygen hatása a növények némely szerves anyagára; V. a humusról; VI. a növények viselkedése oxygen nélküli közegekben; VII. a víz lekötése és bontása a növényekben; VIII. oldatok felszívása a növények gyökereiben; IX. a növények hamvára vonatkozó vizsgálódások. *K.*

*

19. Ueber die Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von Laplace 1782, Ivory 1809, Gauss 1813, Chasles 1838 und Dirichlet 1839. Kiadta Wangerin A. 118 oldal. — Ára 2 márka.

Laplace volt az első, ki az addig csak forgási ellipsoidokra történt kutatásokat a háromtengelyű ellipsoidra is kiterjesztette, míg Ivory-nak sikerült először a külső pont vonzását a belsőéra visszavezetni, úgy hogy valamely tetszőleges pont vonzásának meghatározásában a Laplace értekezésében hiányzott egyöntetűség helyreállt. Bár mindkét értekezésben hiányzott a mathematikai szigorúság, alapvető voltuknál fogvaés történeti szempontból fontosak. Gauss dolgozatát egyszerűség és elegánczia jellemzi s főleg azért is fontos, mert hat, igen fontos, általános tantétel megelőzi. A Chasles-féle értekezés módszerének tisztán geometriai voltával, Dirichlet-é pedig a fellépő integratiónak egy e czélra először használt discontinuitási tényező bevezetésével elért egyszerűsítése által tünik ki. Különösen az égi testek alakjának elméletével foglalkozók fogják e különböző módszerű értekezések összeállítását haszonnal olvashatni. *K.*

*

20. Abhandlung über das Licht von Christian Huyghens 1678. Németül kiadta Lommel E.; 115 oldal, 57 ábra. — Ára 2 márka.

A híres szerző egyik legnevezetesebb munkája, melyben a fény hullámzási elméletét tárgyalja és csak bámulatot kelthet, hogy egyszerű és áttekinthető volta ellenére egy évszázadnál tovább az emanatió elmélet kedveért figyelmen kívül maradhatott. Huygens a mű bevezetésében (I. fej.) kiindul a fény és hang között fennálló analogiából és hivatkozva Römer Jupiterhold fogyatkozási megfigyeléseire, megállapítja a fény tovaterjedési sebességét és felállítja a nevét ma is viselő fontos elvet, az elemi hullámok superpositiójának elvét, mely a legbonyolultabb fényjelenségek magyarázatát is képes megadni. A fényjelenségek mediuma gyanánt az éthert jelöli meg, ama «rendkivül ritka, rugalmas részecskékből álló anyagot, melyben a testek részecskéi mintegy úsznak, s mely azok aránylag nagy közein át szabadon szitálódik». Miután elvének segítségével levezeti a tükrözés törvényeit (II. fej.), kimutatja, hogy átlátszó testekben a szabad éthernél lassúbb terjedést tételezvén fel, a törés törvénye az ismert sinustörvény (III. fejezet). E mellett könnyen magyarázza a testek átlátszóságát, s csak az átlátszatlan testek elmélete homályosabb. Lényegileg azonos feltevése a mai nézettel, mely szerint a molekulát alkotó atomok mozgása az éthermozgás energiájának egy részét átveszik, azaz elnyelik. Igen elmés az V. fejezet végén a kettős pát alkatáról előadott feltevés is. Megjegyzendő, hogy ezen hypothesisek kihagyása a különben kényszerítő bizonyítások összefüggő lánczolatát éppen nem szakítaná meg. A fénytöréssel együtt tárgyalja (IV. fejezet) a légköri sugártörést, ugyancsak elvének felhasználásával. Az egész mű fénypontja az V. fejezet, mely az izlandi pát kettőstöréséről szól, s mely a kisérleti kutatás és elmés analysis felülmúlhatlan példája, olyannyira, hogy áttanulmányozása még a kezdőnek is sokkal nagyobb hasznára leend, mint a modern tankönyvek legtöbbjének tárgyalási modora. A kettős törés vizsgálatánál fedezte fel Huygens a kettősen tört fény polárosságát is és felismerte, hogy a fénysugár a kettőspátból kilépve «alakiságot vagy elrendezést» mutat. Csak 130 évvel későbben fedezte fel Malus, hogy e tulajdonság az üvegről bizonyos szög alatt visszavert fényben is megvan. A polárosság elnevezés még az emanatio elméletben indokolt; YOUNG és FRESNEL következtették csak belőle, hogy a fény keresztrezgésekkel magyarázandó. Hogy ez egyszerű magyarázat HUYGENS figyelmét kikerülte, vagy azért van, mert az ő hullámai csak pillanatnyi impulzusok tovaterjedése, melyeknek, a feltevés általánosságát megóvandó, nem valami különös periodikus alakot, sem pedig a tovaterjedés irányához különös irányulást nem tulajdonít; vagy azért, hogy a hang analogiája szerint a fényt is hosszrezgésekkel véli magyarázhatni. A VI. és utolsó fejezet tárgyalja a felületeket, melyek a fénysugarakat homocentrikusan törik vagy visszaverik. E kifejtéseknek, az eredő feltételek tényleges előállításának leküzdhetlen nehézségei miatt HUYGENS maga sem tulajdonít még gyakorlati értéket, de mindenesetre osztozkodunk megelégedésében, hogy ez alakokat vezérelvéből oly egyszerűen és elegánsan sikerül levezetni.

K.

*

30. Abriss eines Lehrganges der theoretischen Chemie. Vorgetragen an der K. Universität Genua von Prof. S. CANIZZARO, 1858. (Kiadja MEYER LOTHAR, 61 old.) Függelékben a Nuovo Cimento VI. és VII. kötetében közzétett két észrevétel SAINTE-CLAIRE, DEVILLE és KOPP egy-egy értekezésére. Ára 1 márka.

E kis értekezés megjelenésének idejében a chémiai képlet-nyelv körül elkeseredett harczok dúltak, melyek a mai álláspontról nézve tulajdonképen az elektrochemiai dualismus, az AVOGADRO-féle hypothezis és az elemek relativ atomsúlya körül fordúltak. A szétágazó véleményekben WELTZIEN, WÜRTZ és KEKULÉ igyekeztek egységet létesíteni azáltal, hogy 1860. szeptemberében Karlsruhéba általános chemikus kongresszust hívtak egybe. A valóban fényes gyülekezet, legalább alakilag, nem jutott megegyezésre; ekkor osztatta ki CANIZZARO addig figyelmet alig keltett értekezését és rövid idő mulva a régi BERZELIUS-féle atomsúlyok ismét jogaikba léphettek. A szerző megoldotta az AVOGADRO és DULONG-PETIT-féle szabályok között látszó ellentmondást, mire az elemek vegyértékének biztos meghatározása és ezzel az atomlánczolat elmélete lehetségessé vált. *K.*

*

31, 32. és 33. Lambert's Photometrie. (Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Augustae Vindelicorum 1760; 135 + 112 + 172 oldal.)

Ha ROBERT SMITH: A complet system of optics, Cambridge 1738 és BOUGUER: Essai d'optique sur la gradation de la lumière, Paris 1729 czimű munkáit, melyek elseje a photometriát csak távolról érinti, másika csupán a fénymérés gyakorlati alapját, és főleg a testek átlátszóságával és fényelnyelésével foglalkozik, kiveszszük, LAMBERT az első, ki a szóban forgó tudományág fogalmait és rendszerét megteremté; alaptörvényt állított fel s ezt legalább a posteriori, kezdetleges ugyan, de fölötte szellemes s éppen ezért bámulásunkat megérdemlő kisérletekkel igazolá. Művének hét fejezete a fénymérés összes keretét öleli fel s alig van ebbe vágó kérdés ma is, melyet LAMBERT-nél legalább megemlítve nem találnánk. Tárgyalási modora széles medrű és nehézkes menetű, mi tán arra vezetendő vissza, hogy szerzője autodidakta volt; ez teljesen megokolja, hogy művét jelen német kiadásban legalább a legfölöslegesebb dolgok kihagyásával rövidíteni iparkodtak. A levezetett tételek és megoldott feladatok száma oly nagy, hogy a mű tartalma tán legjobban egyes részeinek rövid jellemzésevel ismertethető.

Az I. rész tárgyalja az alapfogalmakat, a photometria elveit, a direkt fényt és a szem itélóképességét. Itt találkozunk legelőször a modern alakban

$$dL = df \cos \varepsilon \frac{1}{r^2} \cos i' \, df' \, I$$

egyenletben kifejezett alaptörvénynyel, melyben L az I intenzitású fényforrás okozta világosságot jelenti, ha ennek fénye egy df nagyságú felületelemből ε emanatiószög alatt kiáramolva a tőle r távolban lévő df' megvilágított felületelemet i' beesési szög alatt találja. (LAMBERT a beesési és emanatiószöglet alatt a mai nyelvhasználattal ellenkezően a fénysugár és felületi normális képezte szögnek komplementumát érti.) E törvény felállításához támaszkodnak az ezt igazoló egyszerű kisérletek és egynehány elméleti feladat megoldása. — A II. rész a visszaverődés- és töréssel járó fénygyengüléssel foglalkozik. A teljesen és részben átlátszó planparallel lemezek igen beható elmélete elavult volta miatt teljesen kimaradt. Erre következik az egyszerű lencse és lencserendszerek dioptrás photometriája, természetesen a színszórási és elhajlási jelenségek mellőzésével. (ANDING E. kiadó a szöveget kisérő jegyzeteiben itt még egynehány megoldását váró problemára utal.) — A III. rész a visszavert fény photometriája, tükrök és nem fénylő testek elmélete. Az utóbbiaknál az emanatió törvénye a kiadót ismét fölötte érdekes megjegyzésekre készteti, és itt találkozunk először különösen az astronomiai photometriában fontossá vált albedo fogalmával. A szem dioptrás és physiologiai photometriája képezi a IV. rész anyagát. Az V. rész tárgya a fénysugár gyöngülése a földi légkör áthatolása közben; apró, megvilágított testecskékből álló rendszer photometriája (mely ma is, a légkör megvilágítási és szinezési kérdésére, a Saturnusgyűrű és az állatövi fény mibenlétére nézve fontos kérdés) és a szürkületi jelenségek érdekes elmélete. A VI. rész czíme: a bolygórendszer megvilágításának elmélete, és különösen a hold és a bolygók, majd az állócsillagok photometriájával foglalkozik. Noha eredményei a meglehetős önkényes feltevések folytán a mai megfigyelések előállítására már nem képesek, mégis az astrophotometriának ma is kiindulási pontjául szolgálnak. Az állócsillagokkal foglalkozó rész LAMBERT-nek a csillagrendszerről alkotott nézeteit adja és igen hozzávetőleges módot szolgáltat az állócsillagok távolságának becsülésére. Az utolsó VII. rész a színes fény és az árnyék mérését tűzi ki feladatúl. Különböző színű fény photometriai összehasonlítása ma is a legnagyobb nehézséggel jár s nem mondhatjuk, hogy LAMBERT erre vonatkozó formulái vagy kisérletei a megoldáshoz közelebb vezettek volna. Az árnyékkal foglalkozó tan érdekesebb példája a holdfogyatkozások alkalmával fellépő megvilágítási viszonyoknak.

Noha LAMBERT-nek éppen nem volt czélja astrophotometriát teremteni, söt ő a csillagászati alkalmazásokban csak kedvező példákat látott, mégis legtöbbet a tudomány ezen ága köszön a röviden ismertetett műnek, melynek elolvasása a leendő astrophysikusra nézve ép oly fontos, mint LAPLACE-é a csillagászra nézve. *K.*

*

34., 38. **Photochemische Untersuchungen** von R. BUNSEN und H. E. ROSCOE. 1855—1859. Erste Hälfte (96 old.); Zweite Hälfte (107 old.) (Kiadja OSTWALD W.) Ára 1.50 márka.

Két tekintetben nevezi klasszikusnak a kiadó e munkát: egyrészt, mert a fény chemiai hatásának egyes részleteiben már előbb is talált, de addig még egységes alapon nem vizsgált általános törvényeit rendkívül terjedelmes és beható tanulmánynak veti alá, úgy, hogy e téren minden további kutatás alapját és kiindulási pontját képezhette; másrészt, mert a physikai chemia terén nemcsak klasszikus minta példája, hanem a klasszikus minta maga. Összehasonlíthatlan szellemi élvezetet nyújt a szerzők kisérleti és analytikai ügyessége, a kisérletek kigondolásában mutatkozó elméssége, keresztülvitelökben tanúsított kitartása, beható gondossága, melylyel a legkisebb jelenséget is figyelemmel kisérik és kiemelkedő álláspontja széleskörű meteorolgiai és kozmikus viszonyok megitélésében.

A füzet öt értekezést foglal magában, melyek tárgyai a következők: I. és II. a fény chemiai hatásának mértékmegállapítása; III. a photochemiai inductio; IV. a fény optikai és chemiai elnyeletése; V. a Nap (a chemiai sugarak általánosan összehasonlítható és absolut mértéke); a légköri világosság chemiai hatásai; a direkt napfény chemiai hatásai; a Nap photochemiai hatásai összehasonlítva földi fényforráséval és a Napfény egyes alkotó részeinek chemiai hatásai. *K.*

MEGOLDOTT FELADATOK.

15. *Milyen alakú a síkbeli harmadrendű görbe egyenlete, ha koordináta-háromszögnek triászt, és milyen alakú, ha* Steiner-*háromszöget választunk?* (Vályi.)

*

Első megoldás Tőtössy Béla műegyetemi tanár úrtól.

Triász-nak nevezi Vályi úr * egy harmadrendű síkgörbének három pontját, ha mindegyiknek tangencziális pontja a másik kettő összekötő vonalán fekszik. Egy harmadrendű síkgörbének három pontja Steiner-*háromszöget* képez, ha egy bizonyos sorrend megállapítása után, mindegyik szögpont a megelőzőnek tangencziális pontja.

Legyen a harmadrendű görbe C_3; C_3-nak három tetszőleges pontja A_1, A_2, A_3; az A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 pontpárok összekötő vonala rendre a_1, a_2, a_3; az A_1, A_2, A_3 pontokban a C_3-nak érintője rendre t_1, t_2, t_3; végre az a_1t_1, a_2t_2, a_3t_3 egyenes párok metszéspontja rendre B_1, B_1, B_3: akkor a fenti értelmezések alapján A_1, A_2, A_3 *triászt* alkot, ha B_1, B_2 és B_3 a C_3-nak pontja, Steiner-*háromszöget*, ha B_1 az A_3-mal, B_2 az A_1-gyel és B_3 az A_2-vel azonos.

Ha most A_1, A_2 és A_3 a koordináta-háromszög három csúcspontja, akkor az a_1, a_2, a_3 egyenesek egyenletei rendre:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0;$$

a t_1, t_2, t_3 érintők egyenletei rendre:

$$x_2 - \lambda x_3 = 0, \quad x_3 - \mu x_1 = 0, \quad x_1 - \nu x_2 = 0;$$

a C_3 egyenlete:

$$(1) \qquad x_1^2(x_2 - \lambda x_3) + x_2^2(x_3 - \mu x_1) + x_3^2(x_1 - \nu x_2) - m x_1 x_2 x_3 = 0$$

---

* Vályi Gyula: «*A harmadrendű görbék elméletéhez.*» Mathematikai és természettudományi értesítő. VIII. köt. 26. l.

és a B_1, B_2, B_3 pontok koordináta viszonyai rendre:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= 0 : \lambda : 1, \\ x_1 : x_2 : x_3 &= 1 : 0 : \mu, \\ x_1 : x_2 : x_3 &= \nu : 1 : 0. \end{aligned}$$

Mint említve volt, A_1, A_2, A_3 *triászt* alkot, ha B_1, B_2 és B_3 a C_3-nak pontja. A B_1, B_2 és B_3, (2) alatti koordináta-viszonyait egymásután a C_3-nak (1) alatti egyenletébe behelyettesítvén, a λ, μ és ν meghatározására a következő egyenleteket nyerjük:

$$\begin{aligned} (\lambda - \nu)\,\lambda &= 0, \\ (\mu - \lambda)\,\mu &= 0, \\ (\nu - \mu)\,\nu &= 0. \end{aligned}$$

Mindegyike ezen egyenleteknek szétesik, úgy hogy a

$$\begin{aligned} \lambda - \nu &= 0, & \lambda &= 0, \\ \mu - \lambda &= 0, & \mu &= 0, \\ \nu - \mu &= 0, & \nu &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszereknek megfelelőleg két megoldást nyerünk. Az első:

$$(3)\qquad \lambda = \mu = \nu = -a,$$

a második, mely az elsőnek speciális esete:

$$(4)\qquad \lambda = \mu = \nu = 0.$$

A (3) alatti értékeket behelyettesítvén az (1) alatti egyenletbe, a C_3nak, az $A_1A_2A_3$ *triászra* vonatkoztatott egyenlete lesz:

$$(5)\qquad x_1^2(x_2+ax_3)+x_2^2(x_3+ax_1)+x_3^2(x_1+ax_2) - mx_1x_2x_3 = 0.$$

A (4) alatti értékeket az (1) alatti egyenletbe behelyettesítvén, mint speciális megoldást nyerjük a C_3-nak egy speciális triászra vonatkoztatott egyenletét:

$$(6)\qquad x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1 - mx_1x_2x_3 = 0.$$

A triász tangencziális pontjainak, B_1, B_2, B_3-nak koordináta-viszonyait nyerjük, ha λ, μ és ν közös értékét, $-a$-t, (2)-be helyettesítjük. Ezek a koordináta-viszonyok rendre:

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= 0 : -a : 1, \\ x_1 : x_2 : x_3 &= 1 : 0 : -a, \\ x_1 : x_2 : x_3 &= -a : 1 : 0, \end{aligned}$$

A (4) alatti speciális megoldást behelyettesítvén, azt látjuk, hogy a B_1, B_2, B_3 koordináta-viszonyai rendre:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 0 : 1,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 0 : 0,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 : 0,$$

vagyis, hogy

$$B_1 \equiv A_3, \quad B_2 \equiv A_1 \quad \text{és} \quad B_3 \equiv A_2;$$

tehát $A_1A_2A_3$ a C_3-nak STEINER-*háromszöge* és így a (6) alatti egyenlet máris a C_3-nak egyenlete, vonatkoztatva egy STEINER-*háromszögre* mint koordináta-háromszögre.

Hogy a STEINER-*háromszögre* vonatkoztatott egyenletet, a *triászra* vonatkoztatott egyenlettel egyszerre találtuk meg, az nagyon természetes, mert, mint VÁLYI úr azt más helyen kimutatta, *minden* STEINER-*háromszög egyszersmind triász.*

Megemlítem még, hogy ha a C_3-nak egy triászra vonatkoztatott (5) alatti egyenletében az

$$a = 1$$

értéket behelyettesítjük, az egyenlet csekély átalakítással az

$$(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2) - (m+2)\,x_1x_2x_3 = 0$$

alakra hozható. Ebben az esetben a B_1, B_2, B_3 pontok egy egyenesen, az *egységegyenesen* feküsznek és mindegyik a C_3-nak *inflexiós pontja.*

Ugyanily alakú volt ama harmadrendű görbe egyenlete is, mely lapunk I. kötetében az 5. szám alatt közölt feladatnak megoldását képezi; tehát ott is az A_1, A_2, A_3 háromszög, mely a keresett geometriai hely definicziójának alapját képezte, és a melyet koordináta-háromszögnek választottunk, a keletkező harmadrendű görbék mindegyikében *triászt* alkot.

*

Második megoldás dr. Szabó Péter tanár úrtól Kolozsvártt.

1. A feladat tárgyalására czélszerű lesz a síkbeli harmadrendű görbe általános egyenletét olyan trimetrikus koordináta-rendszerre vonatkoztatni, melynek alappontjai már a görbén vannak. Az egységpontot egyelőre határozatlanul hagyjuk.

Ebben a rendszerben a görbe egyenletének alakja:

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, x_3) \equiv a_2x_1^2x_2 + a_3x_1^2x_3 + b_1x_1x_2^2 + b_3x_2^2x_3 + \\ + c_1x_1x_3^2 + c_2x_2x_3^2 + 2mx_1x_2x_3 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Legyen A_i a koordináta-háromszögnek

$$x_i = 0$$

oldallal szemben fekvő szögpontja, B_i az A_j, A_k pontpár kisérő pontja. Itt és a következőkben $i, j, k=1, 2, 3$ és i, j, k egymástól különbözők.*

Ha $A_1A_2A_3$ háromszög triász, akkor B_i tangencziális pontja az A_i pontbeli érintőnek. Tehát azt a feltételt kell analitikailag kifejeznünk, hogy az A_i pontbeli érintő B_i-n átmegy. A B_i pontok koordinátái (1) egyenletből $x_i=0$ irtával adódnak ki, ha x_jx_k szorzóját zérussal egyenlítjük, ily módon

$$B_1 \equiv (\ 0 : -c_2 : b_3),$$
$$B_2 \equiv (-c_1 : \ 0 : a_3),$$
$$B_3 \equiv (-b_1 : \ a_2 : 0\ ).$$

Az érintők egyenletei pedig:

A_1 pontban:

$$x_2 + \frac{a_3}{a_2} x_3 = 0,$$

A_2 pontban:

$$x_3 + \frac{b_1}{b_3} x_1 = 0,$$

A_3 pontban:

$$x_1 + \frac{c_2}{c_1} x_2 = 0.$$

Rövidség kedvéért írjuk:

$$\lambda = \frac{a_3}{a_2}, \quad \mu = \frac{b_1}{b_3}, \quad \nu = \frac{c_2}{c_1}. \tag{2}$$

Ezek felhasználásával B_i pontok koordináta-viszonyaira nézve következő egyenlőségeknek kell fennállaniok:

$$\frac{c_2}{b_3} = \lambda, \quad \frac{a_3}{c_1} = \mu, \quad \frac{b_1}{a_2} = \nu. \tag{3}$$

Megjegyzendő, hogy 1. egyenletet bármelyik zérustól különböző számmal átszorozhatjuk, és egy együtthatónak tetszés szerinti véges értéket adhatunk; úgy hogy írhatjuk:

$$a_2 = \mu.$$
$$(i=1, 2, 3)$$

Ezután (2) és (3) egyenlőségekből az egyenlet együtthatói számára

---

* A terminologiára nézve valamint a kevésbbé ismeretes fogalmak definicziójára nézve l. VÁLYI GY. közleményeit, Math. és term. Értesítő. (VIII—XI. k.)

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \lambda\mu, \\
b_1 &= \mu\nu, \quad b_3 = \nu, \\
c_1 &= \lambda, \quad c_2 = \lambda\nu
\end{aligned}
\tag{4}
$$

alakok következnek.

Az (1) egyenletbe együtthatóinak (4) alatti kifejezéseit beírván, ez a következő alakot ölti:

$$
\begin{aligned}
U(x_1, x_2, x_3) \equiv \mu x_1^2 x_2 + \lambda\mu x_1^2 x_3 + \mu\nu x_1 x_2^2 + \nu x_2^2 x_3 + \\
+ \lambda x_1 x_3^2 + \lambda\nu x_2 x_3^2 + 2m x_1 x_2 x_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Ha egy új állandót vezetünk be:

$$
\varkappa = 2m - \lambda\mu\nu - 1, \tag{6}
$$

(5) egyenletet következő áttekinthetőbb alakra transzformálhatjuk:

$$
U(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_2 + \lambda x_3)(x_3 + \mu x_1)(x_1 + \nu x_2) + \varkappa x_1 x_2 x_3 = 0 \tag{7}
$$

Az első tag három lineár szorzója zérussá téve az A_i pontbeli érintők egyenleteit, a második tag lineár szorzói zérussal egyenlítve a triász oldalainak egyenleteit szolgáltatják.

Ha λ, μ, ν, $\varkappa$ parameterek függetlenek, az egyenlet négyszeresen határozatlan görbesort képvisel, a mi összhangzásban van avval, hogy általában minden harmadrendű görbén a triászoknak négy különböző hálózata létezik. A harmadrendű és negyedosztályú görbéknél a négy hálózat nem különböző.

Ha a triász és szögpontjaihoz tartozó érintők adva vannak, a (7) egyenlet $\varkappa$ határozatlan parametert lineárisan tartalmazván, görbesort ábrázol, melynek 9 alappontját a hozzá tartozó

$$
v \equiv x_1 x_2 x_3 = 0
$$

és

$$
u \equiv (x_2 + \lambda x_3)(x_3 + \mu x_1)(x_1 + \nu x_2) = 0
$$

széteső görbék teljes metszés pontrendszere szolgáltatja, t. i. a kétszeresen számított A_i és a B_k pontok $(i, k = 1, 2, 3)$.

Ha λ, μ, ν mennyiségek közűl egy, vagy kettő zérus, széteső görbéket nyerünk, még pedig egy egyenest és kúpszeletet, ill. 3 egyenest. Azt az esetet, mikor mindhárom zérus alább külön tárgyalom.

2. Mostani koordináta-rendszerünk alkalmas arra, hogy triászokra vonatkozó tételeket bebizonyítsunk.

Példaképen közlöm a következő tételt: «*Minden triász oldalainak kisérő pontjai újra triászt alkotnak.*»

E tételt VÁLYI úr tiszta geometriai után bizonyította be.* A tétel igazolására ki kell mutatnunk, hogy a B_i pontbeli érintők és a $\overline{B_jB_k}$ egyenesek metszéspontja a görbén van.

Az érintő egyenlete

B_1 pontban:
$$\varkappa x_1 + \nu(x_2 + \lambda x_3) = 0,$$
B_2 pontban:
$$\varkappa x_2 + \lambda(x_3 + \mu x_1) = 0,$$
B_3 pontban:
$$\varkappa x_3 + \mu(x_1 + \nu x_2) = 0,$$
továbbá:
$$\overline{B_2B_3} \equiv \mu(x_1 + \nu x_2) + x_3 = 0,$$
$$\overline{B_3B_1} \equiv \nu(x_2 + \lambda x_3) + x_1 = 0,$$
$$\overline{B_1B_2} \equiv \lambda(x_3 + \mu x_1) + x_2 = 0.$$

Hogy a B_1 pontbeli érintő és $\overline{B_2B_3}$ egyenes metszéspontja U görbén van, kiolvasható (7)-nek következő identikus alakjából:

$$\left.\begin{array}{l} x_2x_3(\varkappa x_1 + \nu x_2 + \lambda\nu x_3) + x_1(x_2 + \lambda x_3)(\mu x_1 + \mu\nu x_2 + x_3) = 0, \\ \text{a másik két egyenespárra vonatkozólag pedig.} \\ x_1x_3(\mu\lambda x_1 + \varkappa x_2 + \lambda x_3) + x_2(\mu x_1 + x_3)(x_1 + \nu x_2 + \nu\lambda x_2) = 0, \\ x_1x_2(\mu x_1 + \mu\nu x_2 + \varkappa x_3) + x_3(x_1 + \nu x_2)(\lambda\mu x_1 + x_1 + \lambda x_3) = 0, \end{array}\right\} \quad (8)$$

szintén identikus alakokból következik az állítás helyes volta. Ezzel kimondott tételünk igazolva van.

A $B_1B_2B_3$ triászt röviden $A_1A_2A_3$ *kisérő triászának* nevezhetjük.

3. Közel esik az a kérdés: mikor lesz a kisérő triász inflexiós triász A harmadrendű görbék ismert tulajdonsága, hogy három inflexiós pontja egy egyenesbe esik; ekkor a B_i-k koordináta-determinánsa zérus. Ez a
$$\lambda\mu\nu = 1 \qquad (9)$$
feltételt adja.

Ugyanezt a feltételt kapjuk, ha azt vizsgáljuk, hogy a B_i pontok polár-kúpszeletei mikor fajulnak egyenes-párrá. A három kúpszelet egyenlete csak egy feltételt ad:
$$\varkappa - \lambda\mu\nu + 1 = \pm(\varkappa + \lambda\mu\nu - 1)$$
honnan vagy (9), vagy
$$\varkappa = 0$$
következik, de utóbbi esetben széteső görbével van dolgunk, a mikor az inflexiós pontok határozatlanok lesznek. Azon egyenes egyenlete, mely

* Math. és termt. Értesítő VIII. 2. f.

nem széteső harmadrendű görbe három inflexiós pontját tartalmazza koordináta-rendszerünkben

$$\mu x_1 + \mu\nu x_2 + x_3 = 0 \tag{10}$$

alakban írható. Ha ezt egység egyenesnek választjuk és

helyére

$$\mu x_1, \quad \mu\nu x_2, \quad x_3$$

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3$$

írunk, (7) egyenlet még így is írható:

$$(y_2 + y_3)(y_3 + y_1)(y_1 + y_2) + \varkappa' y_1 y_2 y_3 = 0, \tag{11}$$

hol az inflexiós pontokat összekötő egyenes egyenlete:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0. \tag{12}$$

Az egyenlet változó $\varkappa'$ mellett olyan görbesort képvisel, melynek kilencz alappontja közül három inflexiós pont.

Megjegyzem még, hogy egy megadott harmadrendű görbe egyenlete ily alakra mindig hozható. Ugyanis minden y_i implicite három állandót tartalmaz, tehát a (11) egyenlet tizet, a mi általában elégséges arra, hogy az általános egyenlet tíz állandója velük kifejezhető legyen.

Ha (12) végtelen távoli egyenes egyenlete, avval a görbével van dolgunk, melylyel e lapokban Tötössy úr foglalkozott. (I. évf. 292. l. és köv.) E görbe i. h. 295. l. álló egyenletének alakja azonnal mutatja, hogy koordinátaháromszögül ott is triász van választva, egyszersmind azonnal következik a most tárgyalt általánosabb esetből, hogy a kisérő triász inflexiós triász, és a három inflexiós pont a végtelenbe esik stb.

4. Hátra van még a görbe egyenletének alakját Seiner-háromszögre vonatkozólag megállapítani. Ebben az esetben minden szögpont a következőnek tangencziális pontja; tehát felfogható mint amaz eset, mikor

$$B_2 \equiv A_1, \quad B_3 \equiv A_2, \quad B_1 \equiv A_3.$$

(2)-ből következik, hogy ekkor, ha az egyenlet együtthatóinak csak véges értékeket akarunk tulajdonítni,

$$a_3 = b_1 = c_2 = 0. \tag{11}$$

Az 1) egyentet tehát, α, β, γ, ρ parameterek bevezetésével így alakul:

$$U(x_1, x_2, x_3) \equiv \alpha x_1^2 x_2 + \beta x_2^2 x_3 + \gamma x_3^2 x_1 + \rho x_1 x_2 x_3 = 0 \quad . \tag{13}$$

Ez az egyenlet, mivel egyik parameterrel átoszthatunk háromszorosan határozatlan görbesort képvisel. Ez megegyezik avval a ténynyel, hogy a

STEINER-háromszög megadása hat feltétellel æquivalens. (13) egyenletből könnyen kiolvasható, hogy

$$x_i = 0$$

egyenes érint,

$$x_{i+1} = 0, \quad x_i = 0,$$

metsz az

$$x_{i+2} = 0, \quad x_i = 0$$

pontban. (Az indexek mod. 3 legkisebb pozitiv maradékra redukálandók). Az egység pont czélszerű megválasztásával egy meghatározott görbénél három konstánst az egységgel tehetünk egyenlővé, úgy 13) alakja lesz:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + \rho x_1 x_2 x_3 = 0$$

Széteső görbét kapunk, ha a parameterek közül egy vagy kettő zérus.

FELADATOK.

23. *Az ABCD egyszerű négyszög AC és BD átlói álljanak egymásra merőlegesen. Jelentsék továbbá P_1, P_2, P_3, P_4 rendre az AB, BC, CD, DA oldalok metszéspontjait az O-ból a CD, DA, AB, BC oldalakra bocsátott merőlegesekkel. Bebizonyitandó, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög derékszögű.* (KÜRSCHÁK.)

24. *Ha a tetraéder szemben fekvő élei egymásra merőlegesek, bebizonyitandó, hogy akkor az élek középpontjai és a szemben fekvő élek legkisebb távolságú pontjai oly gömbön feküsznek, melynek középpontja a tetraéder súlypontjában van.*

Megjegyzés. E tétel analogonja FEUERBACH tételének. Ez különösen szembe tűnik, ha FEUERBACH tételét így fogalmazzuk:

Ha a síkbeli teljes négyszög szemben fekvő oldalai egymásra merőlegesek, akkor az oldalok középpontjai és a szemben fekvő oldalok metszéspontjai együtt egy körön vannak, melynek középpontja a négy pont súlypontjában van. (VÁLYI.)

25. *Ha az ABC háromszög magasságpontja M és a BCM, CAM, ABM háromszögek körül írt körök középpontjai A_1, B_1, C_1, bizonyitassék be, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek kongruensek.* (VÁLYI.)

26. *Bizonyittassék be, hogy a tetraéder magasságainak hiperboloidja ahoz a fajhoz tartozik, a melynél a* LAPLACE-*egyenlet gyökeinek összege elenyészik.* (VÁLYI.)

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Az elektromos szikrarajzok előállításáról. A «Math. és Phys. Lapok» f. é. 1-ső füzetének 40-ik lapján K. L. tagtárs úr kérdést intéz hozzám, hogy hogyan készítem a szikrarajzokhoz szükséges kén-minium porkeveréket? A kérdésre szívesen felelek; de miután K. L. tagtárs úr maga is ezen érdekes tárgygyal foglalkozik, némi szolgálatot vélek neki s tán más tagtársaknak is tenni, ha ezen alkalommal még más fogásokat is felsorolok és cizkkemet nehány egyszerűbb kisérlettel megtoldom.

1. Mindenek előtt meg kell jegyeznem, hogy az elektromos szikrarajzokkal s egyáltalában a statikai elektromosság keretébe vágó kisérletekkel *csak télen* kellene foglalkozni és pedig azért, mivel akkor a levegőnek pára tartalma a legcsekélyebb s igy a szárazabb levegő, — különösen fűtött szobában, — kutatásainkat hathatósan elősegiti.

2. A szikrarajzok tanúlmányozását legkönnyebb s egyúttal legczélszerűbb módon oly üveglombikokon kezdjük meg, melyek elszigetelő lábon (magas üvegpoharakon) nyugszanak s a melyekben 50—60 C. fokú viz foglaltatik. Csak ha a lombikokon jól begyakoroltuk magunkat, akkor térjünk át üveg-, vagy szurok-gyanta keverékkel bevont fémlemezekre.

3. Itt is legjobban járunk, ha 15—20 centiméter átmérőjű és köralakú bádoglemezeken kezdjük a kisérleteket és csak azután kisérletezünk üveglemezekkel, mert ehhez már meglehetős gyakorlottság kivántatik. A szurok-gyanta keverékének összetételéről és használatáról bővebben a czikk végén szólok.

4. A *szép* szikrarajzoknak főtitka a *nagy tisztaságban* rejlik. Ezen czélból a lombikot, valamint az üveglemezeket is a kisérlet előtt szappannal megmossuk, sok vízzel leöblítjük és lehetőleg tiszta és *puha* kendővel megtöröljük. Az üveglombik akkor már elő van készítve és még csak meleg vizet kell beleönteni és szigetelőre állítani. Nem úgy az üveglemez. Azt a megtörlés után fűtött kályha mellé kell állítani s ott hagyni addig, mig észrevehetőleg át nem melegedett és akkor is sietnünk kell a kisérlettel, mig az üveglemez egészen ki nem hül. (Lángok fölött nem lehet üveglemezeket szárítani, mert felületükre vízgőzök rakódnak le!) Ha azonban az

üveglemez 50—60 centiméternyi oldalhoszszal bir, akkor a kisérlettel nem szükséges sietni. A nagyobb szolin-üveglemezek nehány óra mulva is használhatók, ha felületük valami módon be nem piszkolódik és ha *alul-ról ónlemezzel be vannak vonva.* Az üveglemezeknél különösen arra kell ügyelnünk, hogy felületüket puszta kézzel meg ne érintsük, mert akkor csunya és foltos rajzok keletkeznek s igy a kellemetlen mosás ujra kezdhető. Ha nyáron üveglemezekkel akarunk dolgozni, akkor igen czélszerüen járunk el, ha felületüket lehetőleg *tiszta petroleummal* leöntjük s azt aztán megint tiszta kendővel jól letöröljük.

5. Vigyáznunk kell továbbá, hogy a kén-minium pornak úgy a lombikról, valamint az üveglemezekről való letörlése tiszta és *puha kendővel* történjék. Ha a letörlés után az új szikrarajzoknál sávok mutatkoznak, az annak a jele, hogy az illető felület dörzsölés által elektromos lett. Ezen a bajon könnyen segithetünk, ha a lombikot a megtörlés után 5—6 az üveglemezeket pedig 10 perczig is állani hagyuk, mig t. i. a felületükön keletkezett elektromosságot a levegő ki nem egyenlíti.

6. *A kén-minium keverék.* Mindkét por a gyógyszertárban vásárolandó, mert ott legtisztább állapotban kapható és nem is drága. A *legfinomabb* porokat kell kivánni és pedig *súlyra nézve egyenlő mértékben.* Ezen két port tiszta papirosra kiszórjuk és tiszta késsel, vagy vastag üvegcsővel addig keverjük, mig a keverék szine teljesen homogén lesz.

7. *A beporolás* legczélszerűbben vastag falú *kaucsuklabdával* eszközölhető. Az ilyen kaucsuklabda vagy üveg kereskedésekben, vagy pedig játékboltokban megszerezhető s ha vörös kaucsukból van, 15 évig is használható, holott a fehér kaucsuk 3—4 esztendő mulva törékenynyé és használhatatlanná válik. — A kaucsuklabdába 3—4 centiméter hosszú és újjnyi vastagságú üvegcsövet illesztünk, mely környöskörül *régi vászonba* van be burkolva. A vászonrongyot, hogy jól összetartson, az üvegcső oldalához ragasztjuk. — Ha most a labdába 2—3 köbcentiméter porkeveréket teszünk s *tiszta lószőrrel lefojtjuk,* akkor a porló készülék készen van. (Szükség esetében a Zacherlin-féle labdácska is használható, csakhogy fémcsövét alkalmas üvegcsővel kell helyettesíteni.

8. *A kisérletezés.* A kaucsukgömböt a kellő pillanatban kezünkbe fogjuk és a megelektromozott felülettől egy kis araszny távolságban addig nyomogatjuk, mig a belőle kirohanó felhőcske a keletkező alakot tisztán nem tünteti elő.

9. S most lássunk a begyakorlás kedveért, egy-két egyszerűbb kisérletet. *a)* A legegyszerűbb kisérlet az, midőn az üveglombikot a meg nem töltött leydeni palaczkkal egy pillanatra megérintjük és a megelektromozott felületet beporoljuk. — Ugyanazt a kisérletet ugyis megtehetjük, hogy a leydeni palaczk gombját a lombik felületén ide-oda mozgatjuk. A +

elektromosság szép fehér, igen szabályos és dentrit alakú rajzokat tűntet fel, mig a — elektromosság piros felületű és igen éles körterületeket mutat. Ily módon, egy és ugyanazon lombikon, 15—20 alakot is hozhatunk létre.

b) Ha a lombik egész területe az előbbi rajzokkal már be van fedve, akkor tiszta és puha kendővel letöröljük és 5 perczig érintetlenül hagyjuk. Azután a lombikot két, elszigetelő lábon álló fém csúcs közé helyezvén, azokba a megtöltött leydeni palaczkot kisütjük. Ekkor a beporozás után két (+ és —) oly gyönyörű szikrarajzot nyerünk, melynek szépségét és természetét órákig is bámulhatjuk. (Megjegyzendő, hogy a lombikokon keletkező szikrarajzok jobb kitüntetése kedveért, a lombikban levő vízhez vagy néhány csepp tintát, anilin-kéket, vagy pedig rézammoniakot kevernünk kell.)

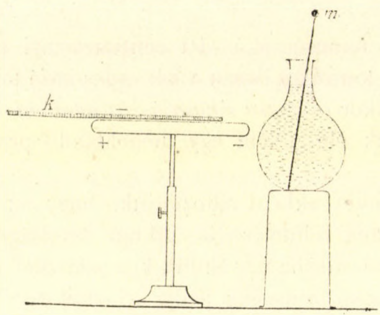
c) Ha most a két fémcsúcsot 5—10 centimeternyi távolságra hozzuk egymáshoz, azután a lombikot lassan a két csúcs közé toljuk és a leydeni palaczkot kisütjük, akkor *a szikra sikamlási tüneményei* teljes szépségükben tárulnak szemeink elé. (Nem egy megoldandó probléma rejlik még bennök!)

d) Erre kisérleteinket akként változtatjuk, hogy az elszigetelő lábon álló fémcsúcsot a lombik felületére (5—20 cm. távolságban) merőlegesen irányítjuk s abba a fémcsúcsba úgy sütjük ki a palaczkot, hogy a palaczknak egyik felületét a csúcscsal, a másikat pedig a lombikba elhelyezett fémsodronynyal kötjük össze. (A lombikból kiálló fémdrót esetleg a földdel köthető össze.) Ezen eljárással a *sugárzó elektromosság* érdekes és még eddig kevéssé tanulmányozott tüneményeit idézzük elő. (Bővebb utasítások és képek feltalálhatók a «Zeitschrift für den phys. u. chem. Unterricht» czimű folyóiratnak 5-ik évfoly. 1-ső füz. 5—8 lapján.)

e) Az elektromos megosztás tüneményei. Ha az elektromos megosztás által néhány centimeter hosszú szikrát akarunk előállitani, akkor elszigetelő lábon álló nagyobb fémgömbre van szükségünk. (Szükség esetében az elektromos gép leszerelt gömbje is szolgálhat ilyenül.) De rendkivül szép eredményeket érünk el gömbölyű, 30 cm. átmérőjű és elszigetelő lábon álló sárgaréz asztalkával *(1. ábra.)* (Szakembereknek egy ilyen asztalka megszerzését a legmelegebben ajánlhatom.) Erre az asztalkára legelőször is róka farkkal erősen megdörzsölt *k* kaucsuklemezt teszünk s rögtön leveszszük. Akkor még semmi nemű elektromosság nem mutatkozik rajta, de a mint a kaucsuklemezt ujra feltesszük és az asztalkát ujjunkkal megérintjük, már 3—4 cm. hosszú szikrát nyerünk, midőn pedig a kaucsuklemezt levesszük, még egy hosszú szikrát csalhatunk ki az asztalkából. Mint látjuk, ez nem más, mint igen kényelmes elektrophor.

De ha most az asztalka mellé megfelelő magasságú pohárra meleg vízzel telt lombikot teszünk, akkor az *m* gombnak ujjunkkal való érintése után, a kén-minium por segítségével, a legszebb + és — el. természetű rajzokat idézhetjük elő rajta. — Azután két, három, sőt több lombikot is állíthatunk egymás mellé és a kisütéseket tetszésünk szerint módosíthatjuk, mi által több el. tünemény meglepő egyszerűséggel kimutatható. Kevés gyakorlattal 2—10 igen szabályos felváltott jellegű és egymásban concentrikusan elhelyezett gyűrűrajzot állíthatunk elő.

Végre, ha az asztalka szélére deákflastrommal egy gombostűt vízszintesen felragasztunk és a lombikot 5—20 centimeterrel hátra toljuk, akkor a sugárzó elektromosság tüneményeit újra észlelhetjük.



f) Gyantába nyomott elektromos alakok. A «Természettudományi Közlöny» 1882. XIV köt. 180-ik lapján oly elektromos alakok vannak leirva, melyek forró puha gyantába mintegy bevésődnek. Mivel ezen még alig tanulmányozott alakok létrehozásához, a gyanta kihülése alatt, a kellő pillanatot eltalálni igen nehéz dolog, oly keveréket állítottam elő, mely órákig is puha állapotban marad és úgy a szóban levő, valamint mindenféle más és ide vágó kisérletekre alkalmas. Készítése a következő : 1 s. r. forró táblaolajban 2 s. r. fekete szurok és 6 s. r. kolophonium (gyanta) olvasztandó föl. Az igy nyert keveréket 15—20 centimeter átmérőjű és köralakú bádoglemezekre öntjük és néhány percz mulva már használhatjuk Ha az ilyen szurok-gyanta lemez esetleg megromlik, akkor egyszerűen lámpa fölött addig melegítjük, míg a megsérült felületi részek ujra össze nem olvadnak és szép sima felületet nem nyernek.

Eltekintve attól, hogy a meleg keverékbe benyomódott alakok sok elektromos tüneménynek jobb megértését teszik lehetővé, melyet másképen észrevenni sem lehetne, még azért is igen fontosak, mivel Riess által (Lehre v. d. Reibungselektricität II. Bd. §. 749.) felállított elméletet, mely szerint a Lichtenberg-féle alakok a testek felületein condensált vízgőzöknek (páráknak) surlódásából erednek, határozottan megczáfolják, a mennyiben t. i. a meleg (sőt forró) gyantán condensált vízgőzökről szó sem lehet. Ezen kisérletek inkább a mellett tanuskodnak, hogy a *Lichtenberg- és másféle elektromos alakok keletkezése tisztán csak az elektrodoktól elszakított és dissociált állapotban levő fémgőzöknek tulajdonitandók.*

9. Ha az igy nyert alakokat mindjárt keletkezésük után kén-minium porkeverékkel behintjük, akkor azok *állandóan fixálva* s mintegy megörökítve vannak, mert a gyantáról semmi módon le nem törölhetők.

Antolik Károly.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Február ius 1. RADOS GUSZTÁV : Néhány soralak az *e* számára.

HARKÁNYI BÉLA : Észak-Amerika néhány tudományos intézetéről.

Február ius 15. RADOS GUSZTÁV : Nehány soralak az *e* számára.

KÜRSCHÁK JÓZSEF : Az invariánsok elméletének alaptételéről.

*

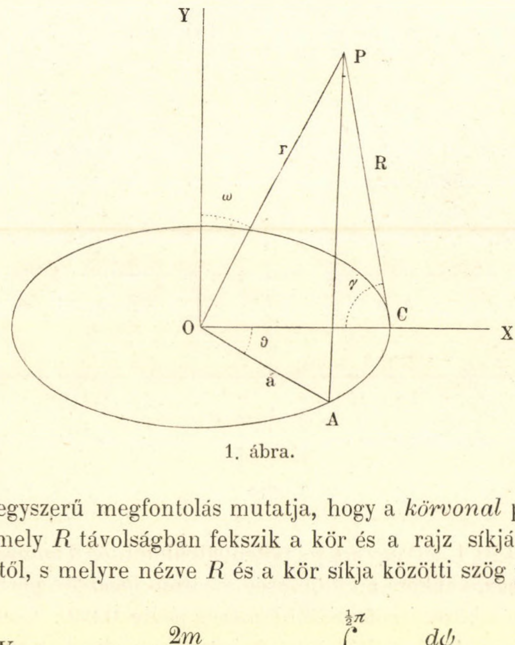
Nehány forgási test niveau- és erőgörbéi.

1. Midőn valamely test tömegvonzó erejének nagyságát és irányát ismerni akarjuk, akkor a legközvetlenebb eljárás abban áll, hogy kiszámítjuk az erőösszetevők értékét. Ez három integratiot követel, pedig sokszor már egy is elég munkát ád. Az erőösszetevők azonban ama nevezetes tulajdonsággal bírnak, hogy egy bizonyos függvénynek, a potentiálnak a coordináták szerint vett differential-hányadosai. Ismerve tehát a potentiált, kiszámíthatók az erőösszetevők. Ily módon csak egy integratio végezendő, a differentiálás pedig mindig könnyen elvégezhető.

Más előnye is van a potentiálnak: ha t. i. arról van szó, hogy mintegy egy szempillantással az erő viselkedésének átnézetes képét nyerjük, hol nagy az erő, hol kicsiny, hol változik leggyorsabban a nagysága vagy iránya, akkor a potentiál igen jó szolgálatot tesz: graphikai módszert szolgáltat az erőviszonyok feltüntetésére.

Azon pontok ugyanis, melyekben a potentiál egy és ugyanazon állandó érték, egy felületet, niveau-felületet alkotnak. A potentiál elmélete pedig azt tanítja, hogy az erő valamely pontban az azon ponton áthaladó niveau-felületre merőleges. Ismervén tehát a niveau-felületek alakját, ismerjük egyszersmind az erő irányát. De az erő nagyságára is vonhatunk következtetést a niveau-felületekből. Két szomszédos niveau-felület közelebb fekszik egymáshoz ott, a hol az erő nagyobb, mint a hol az kisebb. Ha ugyanis a két felület közötti potentiálkülömbség ΔV, a két felület normális távolsága egymástól az A bontban Δn, a A' pontban pedig $\Delta n'$, akkor az erő az A

pontban közelítőleg $\frac{\Delta V}{\Delta n}$, A'-ben pedig $\frac{\Delta V}{\Delta n'}$; nyilvánvaló, hogy az erő annál nagyobb, minél kisebb ugyanazon potentiál külömbségre a két felület normális távolsága. Ha a vonzó test forgási test, akkor a niveau-felület is forgásfelület, az utóbbi tehát a meridiangörbével teljesen meg van határozva; ez a görbe a niveaugörbe. Azon görbék pedig, melyek a niveaufelületeket mindenütt derékszög alatt metszik, az erőgörbék. Nyilvánvaló, hogy az erőgörbe érintője megadja az érintési pontban az erő irányát. Ha a potentiál alakja ismeretes, eme görbék megszerkesztése nehézséggel nem jár, hanem annál több számítással. A következőkben nehány forgási testnek (körvonal, körlap és körkúp) niveau- és erőgörbéi vannak bemutatva; az előadandókból egyszersmind a görbék megszerkesztésének módja is kitünik.



1. ábra.

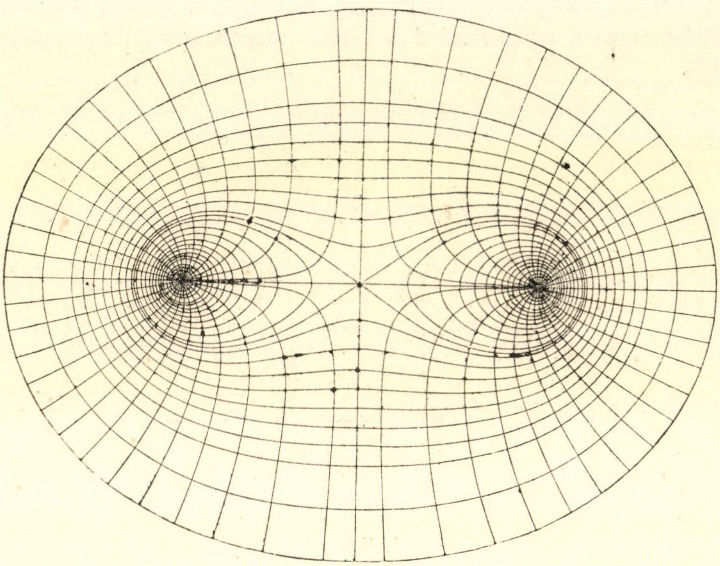
2. Igen egyszerű megfontolás mutatja, hogy a *körvonal* potentiálja oly P pontban, mely R távolságban fekszik a kör és a rajz síkjának metszéspontjától, C-től, s melyre nézve R és a kör síkja közötti szög γ

$$V = \frac{2m}{\pi \sqrt{4a^2 - 4aR\cos\gamma + R^2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

$$k^2 = \frac{4a\,(a - R\cos\gamma)}{4a^2 - 4aR\cos\gamma + R^2}$$

hol a a kör sugara, m pedig a tömege.

Ezen képlet segítségével az $m=1$ és $a=1$ esetre C-ből kiinduló és 10°-ról 10°-ra húzott sugarak mentén kiszámítottam a potentiál értékét oly æquidistans pontokban, melyek egymástól a kör sugarának huszadára feküsznek. Ezután minden egyes sugáron egyszerű arányos interpolatióval felkerestem ama pontokat, melyekben a potentiál egy és ugyanazon állandó érték. Eme pontokat folytonos görbével összekapcsolván, megkaptam a niveaugörbéket; az erőgörbéket azután úgy rajzoltam, hogy a niveaugörbéket mindenütt derékszög alatt messék. Ily módon készült a 2. ábra. A kör a rajz síkjára merőleges és áthalad azon két ponton, melyből az erőgörbék kiindulnak. A zárt görbék a niveaugörbék, a többiek az erőgörbék. A rajz úgy készült, hogy a négy legbelső niveaugörbén a potentiál értéke



2. ábra.

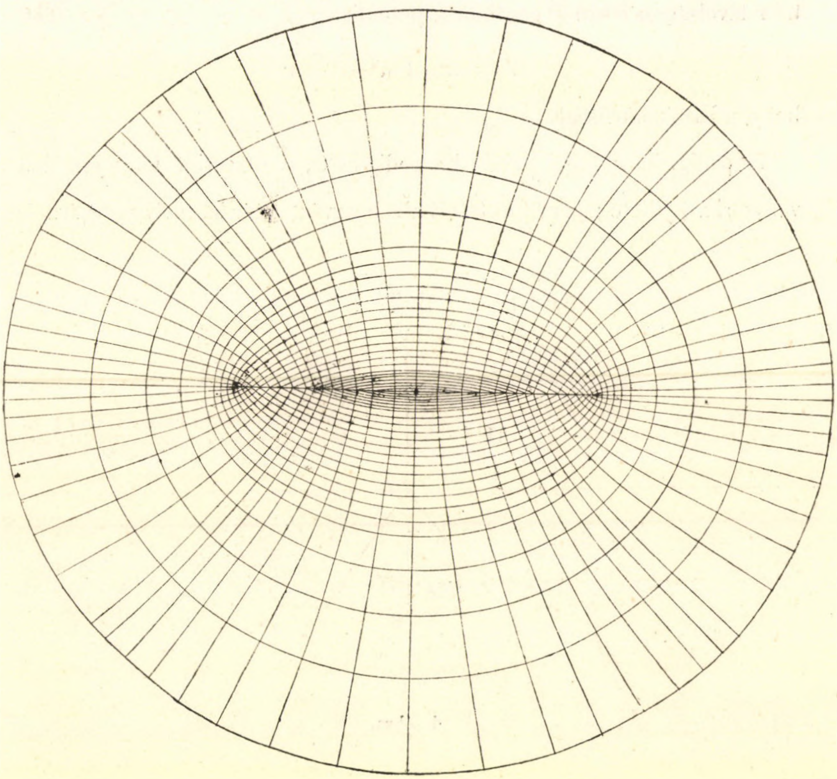
1,580, 1,500, 1,420, 1,340 úgy hogy a potentiálkülömbség 2 szomszédos görbe között 0,080; ugyanakkora a külömbség a három legszélső görbén. A közben fekvő görbék közötti potentiálkülömbség pedig 0,040. Csak a középponton átmenő nyolczas alakú görbe és két szomszédja közötti külömbség 0,020; azért van ez a három görbe oly közel egymáshoz.

Az erő nagyságának változását a niveaugörbék mentén a rajz világosan mutatja; a körhöz közeledvén, a niveaugörbék közelednek egymáshoz s az erő arra nagyobbodik. Magában a körben az erő végtelen nagy, azért oly sűrűek a görbék a kör közelében. A kör közepén az erő nulla: ott a két szomszédos görbe messze fekszik egymástól.

3. A *körlemez* potentiálját sikerült ugyan zárt alakban is előállítani, de

ez a numerusos számításra nem alkalmas. Azonban igen egyszerű módon alkalmas sorfejtésre lehet jutni. Ha ugyanis valamely testnek symmetriatengelye van, P pedig eme tengelyben r távolságra fekszik eme tengely valamely O pontjától, akkor a potentiál V_0 a P pontban általánosságban előállítható ily alakú sorral

$$V_0 = a_0 + \frac{b_0}{r} + a_1 r + \frac{b_1}{r^2} + a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^3} + \ldots$$



3. ábra.

A gömb függvények elmélete pedig arra tanít, hogy akkor a potentiál értékét egy tetszőleges a tengelyen kívül fekvő P' pontban, melynek O-tól számított távolsága r a tengelylyel ϑ szögletet képez, a következő sor adja

$$V = \left(a_0 + \frac{b_0}{r}\right) Q_0 + \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2}\right) Q_1 + \left(a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^3}\right) Q_2 + \ldots$$

hol Q_k $\cos\vartheta$-nek k-ed rendű egész függvénye s pedig

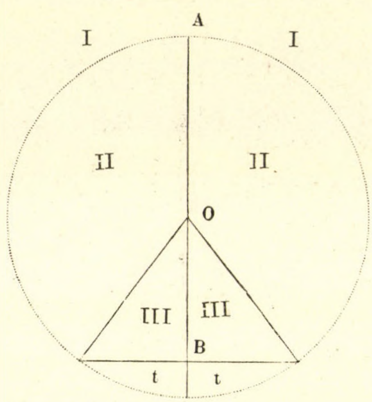
$$Q_k = \frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2k-1)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots k}\left[\cos^k\vartheta + \frac{k\,.\,k-1}{2\,.\,(2k-1)}\cos^{k-2}\vartheta + \right.$$
$$\left. + \frac{k\,.\,(k-1)\,(k-2)\,(k-3)}{2\,.\,4\,.\,(2k-1)\,(2k-3)}\cos^{k-4}\vartheta + \ldots\right]$$

A körlemeznek is van symmetriatengelye, t. i. a lemez tengelye. Igen egyszerű számítás mutatja, hogy az a sugarú lemez tengelyében a középponttól r távolságon fekvő P pontban a potentiál

$$V = 2\pi\rho\,\sqrt{a^2+r^2} - r$$

hol ρ a lemez sűrűsége.

Ez pedig, ha $r > a$, $\frac{a}{r}$ —, ha pedig $r < a$, $\frac{r}{a}$ szerint könnyen hatványsorba fejthető ; az előbbi tételt alkalmazván, a tér bármely pontjára ér-

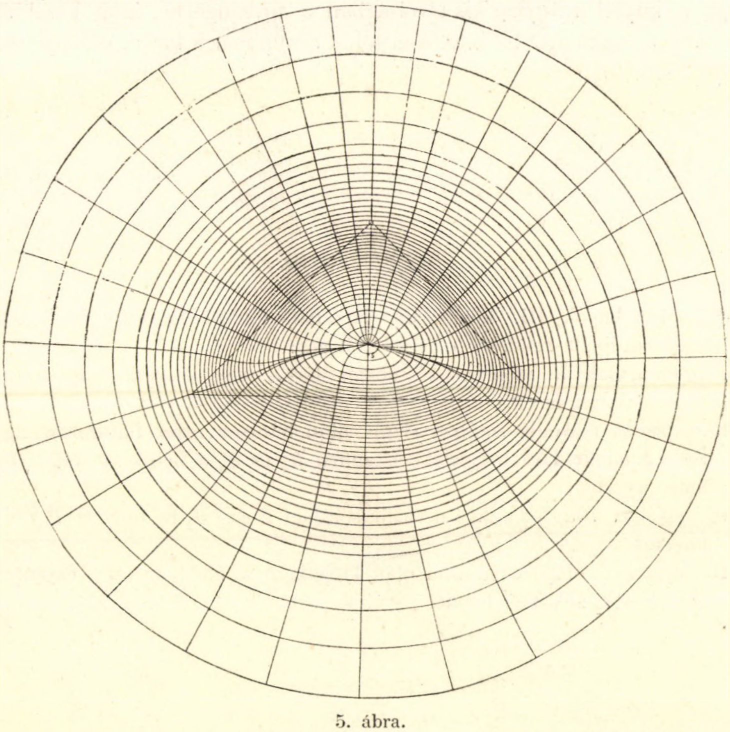


4. ábra.

vényes sorfejtéshez jutunk. A niveaugörbék (3. ábra) jól mutatják a felületen eloszlott ható jellemző sajátságát, hogy a felületen az erő iránya nem változik folytonosan, a niveaugörbének ott szögpontja van ; alulról vagy felülről közeledve a felülethez, az erő iránya külömböző. Az is látszik, hogy a körlemez széléhez közeledés közben az erő nagyobbodik : a niveaugörbék ott sűrűbben rendezkednek.

4. A *kúp* potentiálját véges alakban nem sikerült előállítani ; hanem az előbb említett tétel alkalmas sorfejtésekhez vezetett. És pedig 4 sorhoz

jutunk, melyek egyike szolgáltatja a potentiál értékét azon pontokban, melyek oly gömbön kívül fekszenek, melynek középpontja a kúp csúcsa és átmegy az alap szélén (I. tartomány) ; a második sor convergens és a potentiált adja a II. térben, convergens a kúp belsejében és a $t - t$ térben is, de nem adja a potentiál értékét; egy harmadik sor a $t - t$ térben érvényes, róla ugyanaz áll, mint az előbbiről; egy negyedik sor végre



5. ábra.

a kúp belső pontjaira érvényes. Említettem, hogy a II. sor összetartó a kúp belsejében is, de nem adja a potentiál értékét, hanem attól eltér. $2\pi\sigma r^2$ (cos α + cos $\vartheta)^2$-nel, ha σ a sűrűség, r a kérdéses pont távolsága a kúp csúcsától ; α a kúp fél nyilásszöge és ϑ az r és a kúp tengelye képezte szög; a kúp palástján, hol cos $\alpha = -$cos ϑ a külömbség nulla, a két sor ugyanazon értéket adja úgy a potentiálra, mint annak differentiál-hányadosára, mert hisz cos $\alpha +$ cos ϑ a négyzeten fordul elő. A második differentiálhányadosra azonban a 2. sor külömböző értéket ad, megegyezőleg a potentiál azon nevezetes tulajdonságával, hogy a második differentiálhányados a határfelületen nem folytonos.

A potentiál értéke a legbelső görbén 2,300; a következőkön: 2,280, 2,240, 2,200 stb., úgy hogy a potentiálkülömbség 0,040; az öt legszélső görbénél azonban 0.080. A rajz megtekintéséből rögtön kitünik, hogy a niveaugörbék a kúp határán sűrűsödnek, az erő arra nagyobbodik. A honnan az erőgörbék kiindulnak, ott a potentiálnak szélső értéke van, ott az erő zérus, a niveaugörbék egymástól távol vannak. Egyszersmind látható, hogy a kúptól aránylag kis távolságban a niveaugörbe igen közel áll a körhöz; a vonzó erő tekintetében tehát a kúp már a tömegközéppontjával helyettesíthető.

Tangl Károly.

Helyreigazitás.

M. és Ph. Lapok III. kötete 38. lapjának alulról számított 8. sorában «venyige-coordináta-rendszert» helyett olvasd:

a szőlőindának a szőlőveszsző körüli természetes fonódása után «inda-coordináta-rendszert»

41. lapjának második sorában «lap)» után tétessék: ezek határozzák meg a korong mindenkori helyzetét; ellenben ϑ_2 és ϑ_3 a belső- s végre ϑ_3 a külső gyűrűét.

43. lapjának 10α) formulája második sorában $B\cos^2\vartheta_2$-be helyébe $B\cos^2\vartheta_{2_0}$ tetessék.

43. lapjának a 12β) egyenletei után következő sorában az első egyenletnek $A=A_1+A_2$-nek kell lennie.

MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

HARMADIK ÉVFOLYAM

III. FÜZET. 1894 MÁRCZIUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894

TARTALOM

Lap

KLIMKÓ MIHÁLY: Adalék a primitiv gyökök elméletéhez ... 97

KÜRSCHÁK JÓZSEF: A körmérés elmélete és története ... 102

RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez ... 111

Irodalom. TESLA-féle kisérletek: Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz. Zusammengestellt von E. de Fodor. — Ism. Ebert után Ratkovszky ... 118

Megoldott feladatok. (SZONTAGH G. és MAKSAY Zs. uraktól) ... 131

Értesitő a Math. és Phys. Társulat előadásairól. (HARKÁNY BÉLA: Az É.-Amerikai observatoriumokról.) ... 139

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági dijuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A harmadik társulati év 1894. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czímére — legczélszerűbben a I. füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *A múlt évről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért,* hogy a folyóirat költségeit fedezhessük. Az eddig teljesített befizetéseket a következő füzetben nyugtáztatjuk.

Rendes ülések. A társulat rendes üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

Közgyülés. A közgyülést ez évben *pünkösdkor* tartjuk meg. A *meghivót* április közepén szétküldendő IV. füzet hozza.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére (**VI. Bulyovszky-u. 16.**) intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár (**VII., Csengery-u. 1**), a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesítésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó tetemes kiadástól mentik fel.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ADALÉK A PRIMITIV GYÖKÖK ELMÉLETÉHEZ.

I. Tétel. *Ha $p = 4n + 3$ törzsszám és $p - 1$ a 2 törzstényezőn kivül még csak a q törzstényezőt tartalmazza, akkor vagy 2 vagy q p-nek primitiv gyökei.*

Bebizonyítás. 1) $2q = p - 1$ a p-nek quadratikus nem-maradéka minthogy

$$2q \equiv -1 \pmod{p}$$

és -1 minden $4n+3$ alakú törzsszámnak nem-maradéka; ennek következtében

$$\left(\frac{2q}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = -1$$

és így a 2 és q számok közül az egyik p-nek maradéka a másik pedig nem-maradéka.

2) A p modulusra nézve valamely szám csakis a

$$2, \quad q, \quad 2q$$

kitevőkhöz tartozhat, mert ezek a $p-1=2q$ számnak összes pozitiv osztói.

3) A 2 kitevőhöz csak egyetlen egy szám tartozhat, mert

$$\varphi(2) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1\,;$$

ez a szám : -1.

A q kitevőhöz csakis p-nek quadratikus maradékai tartozhatnak. Ha ugyanis D p-nek maradéka, akkor

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv D^q \equiv 1 \pmod{p}$$

és viszont minden szám, mely a $q=\frac{p-1}{2}$ kitevőhöz tartozik p-nek maradéka.

A $p-1=2q$ kitevőhöz tehát csakis a p-nek -1-től különböző nem-maradékai tartoznak, tehát ezek és csakis ezek lesznek p-nek primitiv gyökei.

4) Minthogy 2 és q maradékjellege ellenkező, 1) és 3) alapján következik, *hogy e számok egyike p-nek primitiv gyöke,* a mivel a fönt felállitott tétel be van bizonyitva.

Jegyzet. Ha $q=4n_1+3$ alakú törzsszám, akkor

$$p=8n_1+7$$

lévén

$$\left(\frac{2}{p}\right)=+1$$

lesz és így

$$\left(\frac{q}{p}\right)=-1,$$

a miből következik, hogy ebben az esetben a q a *p-nek primitiv gyöke.*

Ha $q=4n_1+1$ alakú törzsszám, akkor

$$p=8n_1+3$$

lévén,

$$\left(\frac{2}{p}\right)=-1;$$

tehát *a* 2 *a p-nek primitiv gyöke.*

II. Tétel. *Ha* $p=4n+1$ *és* $n>1$ *törzsszámok, akkor*

$$2, \quad \frac{p-1}{2}, \quad \frac{p+1}{2}$$

a p-nek primitiv gyökei.

Bebizonyítás. 1) A p modulusra nézve valamely szám csakis a

$$2, \quad 4, \quad 2n, \quad 4n$$

kitevőkhöz tartozhat, mert ezek a

$$p-1=4n$$

összes osztói.

2) Ha D a p-nek quadratikus maradéka, akkor

$$D^{2n}=D^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p}$$

lévén, D p-nek nem primitiv gyöke, hanem a

$$2, \quad n, \quad 2n$$

kitevők valamelyikéhez tartozik. Viszont minden szám, a mely a

$$2, \quad n, \quad 2n$$

kitevők valamelyikéhez tartozik, p-nek quadratikus maradéka, mert a

$$D^2\equiv 1, \qquad D^n\equiv 1, \qquad D^{n2}\equiv 1 \qquad \pmod{p}$$

kongruencziák maguk után vonják a

$$D^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p}$$

kongruenczia fennállását.

Ebből következik, hogy p-nek minden quadratikus nem-maradéka a

$$4, \quad 4n$$

kitevők valamelyikéhez tartozik.

3) a. 2 a p-nek quadratikus nem-maradéka, mert a p-re vonatkozó feltevések folytán p $(8n_1+5)$-alakú törzsszám; ennek következtében 2 vagy a 4 vagy pedig a $4n$ kitevőhöz tartozik. 2 a 4 kitevőhöz nem tartozhat, mert a

$$2^4\equiv 1 \pmod{p}$$

kongruencziából következik, hogy

$$(2^2+1)(2^2-1)\equiv 0 \pmod{p}$$

és minthogy $2^2-1=3$ p-vel nem osztható, kellene hogy

$$2^2+1=5\equiv 0 \pmod{p}$$

legyen, a mi csak úgy volna lehetséges, hogy

$$p = n + 1 = 5,$$

de ekkor feltevésünk ellenére

$$n = 1$$

lenne.

Minthogy 2 a 4 kitevőhöz nem tartozik, kell tehát, hogy a

$$4n = p - 1$$

kitevőhöz tartozzék, *tehát 2 p-nek primitiv gyöke.*

β. Határozzuk meg most $\frac{p-1}{2} = 2n$-nek indexét a 2 primitiv gyökre nézve; a szerint a mint ez a $p-1=4n$-hez képest relativ törzsszám vagy nem, $\frac{p-1}{2}$ a p-nek primitiv vagy nem-primitiv gyöke.

Minthogy 2 p-nek primitiv gyöke

$$2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv (2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) \equiv 0 \pmod{p};$$

ugyanezen oknál fogva nem állhat fenn a

$$2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruenczia, de akkor kell, hogy

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \equiv p - 1 \pmod{p}$$

legyen; de innen következik, hogy

$$\frac{p-1}{2} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \pmod{p}$$

úgy, hogy a 2 primitiv gyökre nézve

$$\text{Ind. } \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2} - 1 = 2n - 1$$

és minthogy $2n - 1$ és $p - 1 = 4n$ relativ törzsszámok, kell hogy $\frac{p-1}{2}$ *p-nek primitiv gyöke legyen.*

γ. Határozzuk meg végül $\frac{p+1}{2}$ indexét a 2 primitiv gyökre nézve. Minthogy 2 p-nek primitiv gyöke

$$2 \cdot 2^{p-2} \equiv 2^{p-1} \equiv 1 \equiv p+1 \pmod{p},$$

de innen következik, hogy

$$\frac{p+1}{2} \equiv 2^{p-2} \pmod{p},$$

úgy hogy

$$\text{Ind.}\ \frac{p+1}{2} = p-2$$

és minthogy $p-2$ és $p-1$ relativ törzsszámok, $\frac{p+1}{2}$ *p-nek primitiv gyöke.*

Klimkó Mihály.

A KÖRMÉRÉS ELMÉLETE ÉS TÖRTÉNETE.

(Hetedik közlemény.)

VII. A ludolfi számnak transzczendens voltáról.

A ludolfi számnak ismeretes analitikai kifejezései nem alkalmasak arra, hogy LIOUVILLE tételeinek segítségével belőlük a π-nek természetére vonatkozó következtetéseket vonhatnánk. Még MACHIN képlete is sokkal lassabban konvergáló sorokat tartalmaz, hogy belőlük ily módon akár csak π irráczionális voltát felismerhetnők. LIOUVILLE vizsgálatai tehát ez ideig a körmérés történetében csak úgy szerepelnek, mint egy fontos alapfogalom jogosultságának első bebizonyításai, de nem mint módszerek annak felismerésére, hogy a π szám is eme fogalomnak — a *transzczendens szám* fogalmának — körébe tartozik.*

A π szám transzczendens volta tényleg egészen más módszerekkel ismertetett fel, t. i. azokkal, melyeknek HERMITE a GORDAN-hoz és BORCHARDT-hoz intézett leveleiben vetette meg alapját s melyekkel utóbb «*Sur la fonction exponentielle*» czímű** nevezetes értekezésében az e transzczendens voltát kimutatta. A kitevős függvényre vonatkozó eme vizsgálatokat ugyanis LINDEMANN-nak sikerült annyira folytatnia, hogy az

$$e^z + 1 = 0$$

egyenlet gyökeinek, melyek π-től csak egy $(2k+1)\,i$-alakú tényezőben különböznek, transzczendens volta is kitűnt.

---

* A transzczendens számok létezésének egy másik, CANTOR-tól eredő, bebizonyítását l. KŐNIG *Analizis* I. 167—9. lap.

** Comptes rendus, t. LXXVII., 1873.

Midőn ily módon LINDEMANN-nak értekezése «*Über die Zahl* π» a Mathematische Annalen 20. kötetében 1882-ben a körquadratura lehető vagy lehetetlen voltának évezredek óta vitás kérdését végleg eldöntötte, melyik szakember ne érdeklődött volna fejtegetései iránt? Fájdalom, ezek igen nehezen voltak érthetők, még pedig főleg azért, mert HERMITE-nek a kitevős függvényre vonatkozó vizsgálatait egész terjedelmökben ismereteseknek tételezték fel. Ennélfogva századunk egyik legkiválóbb tudósa, WEIERSTRASS, igen háladatra méltó munkát végzett, mikor a berlini Sitzungsberichte 1885-iki kötetében — a vezérgondolatokat megtartva — LINDEMANN bebizonyítását oly módosított és egyszerűsített alakban reprodukálta, melyben szélesebb szakkörök is megérthették.

A nagy német mathematikusnak tárgyunk körűl szerzett érdemét mivel sem csorbítja az a körülmény, hogy legújabban az e és π számok transzczendens voltát rövidebb és elemibb úton is sikerült igazolni, mint a melyet HERMITE, LINDEMANN és WEIERSTRASS követtek. 1893 elején HILBERT DÁVID mindkét szám arithmetikai természetét igen kevés számítással igazolta újra, ámde segédeszközei távolról sem elemiek. Ugyanis a kitevős függvényre vonatkozó e fajta vizsgálatokban kezdettől fogva nagy szerepet játszott az az $F(x)$ függvény, mely valamely $f(x)$ ráczionális egész függvénynek és valamennyi (nem azonosan eltünő) differencziálhányadosának összege, s HILBERT e függvénynek következő komplikált analitikai kifejezésével operál:

$$F(x) = e^x \int_x^\infty f(z)\, e^{-z}\, dz,$$

hol az integrálás útja az (általában complex) alsó határtól kiindúlva a valós számok tengelyének pozitiv irányával párhuzamosan veendő.

HURWITZ azután csakhamar HILBERT-nek legalább az e-re vonatkozó vizsgálatait oly alakba öntötte, melyben integrálás többé nem fordul elő. Végre GORDAN-nak sikerült HILBERT-nek bebizonyításából mindazt eltávolítani, a mi nem tartozik az analizisnek és algebrának elemeihez. Kár, hogy közleménye, mely a többi két tudóséval együtt a Mathematische Annalen 43. kötetében jelent meg, rendkívül szűkszavú, s hogy megértését nehány szokatlan, idegenszerű jelölés is nehezíti.

GORDAN bebizonyítására lehetőleg közérthető kidolgozásban a következő fejezetben fogunk áttérni.

A jelen fejezetben π transzczendens voltának bebizonyítását WEIERSTRASS nyomán közöljük, kitől apróbb külsőségeken kívül csak annyiban térünk el, hogy az egyik helyen a complex úton vett integrálok használatát elkerüljük s hazai irodalmunkra való tekintetből inkább a következő tételre * hivatkozunk:

Ha az ab úton (az a és b beleértésével) azaz minden z-re, mely

$$z = a + \vartheta (a - b) \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

alakban írható,

$$| f'(z) | < \delta,$$

akkor

$$| f(z) - f(a) | < \delta' \, | z - a |,$$

ha csak δ' a δ-nál nagyobb pozitiv szám.

A bebizonyítás néhány különös ráczionális egész függvény értelmezésével és létezésének kimutatásával kezdődik. Majd ama segédtételek igazolása következik, melyek a bevezetett függvények legfontosabb tulajdonságairól adnak számot. Csak ezután térhetünk át az

$$e^z + 1 = 0$$

egyenlet vizsgálatára.

1. *Bármely $g(z)$ k-ad fokú ráczionális egész függvényhez egy és csak egy oly $G(z)$ ráczionális egész függvény található, mely vele a*

$$\frac{d}{dz} [G(z) e^{-z}] + g(z) e^{-z} = 0 \tag{1}$$

kapcsolatban van s e függvény $g(z)$-nek meg összes differencziálhányadosainak összege.

Ennek bebizonyításánál a $G(z)$ és $g(z)$ közti kapcsolatot a (1) egyenlet helyett inkább a vele egyenértékű

$$G'(z) - G(z) + g(z) = 0 \tag{2}$$

* V. ö. KŐNIG. Analizis I, 524—6. l.

egyenlettel fejezzük ki, mely még így is írható

$$G(z) = G'(z) + g(z).$$

Ezt az egyenletet csak oly $G(z)$ függvény elégítheti ki, mely $g(z)$-vel egyenlő fokú, mert különben az egyenlet két különböző oldalán nem egyeznének meg a z legmagasabb hatványát tartalmazó tagok.

Ha tehát a (2) alatti egyenletet ismételten differencziáljuk, akkor az így nyert

$$\begin{array}{l} G''(z) - G'(z) + g'(z) = 0 \\ G'''(z) - G''(z) + g''(z) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ G^{(k)}(z) - G^{(k-1)}(z) + g^{(k-1)}(z) = 0 \\ G^{(k+1)}(z) - G^{(k)}(z) + g^{(k)}(z) = 0 \end{array}$$

egyenletrendszerben

$$G^{(k+1)}(z) = 0.$$

Ennélfogva ezeknek az egyenleteknek a (2)-höz való hozzáadása után oly egyenlet keletkezik, melynek értelmében

$$G(z) = g(z) + g'(z) + g''(z) + \dots + g^{(k)}(z)$$

tartozik lenni.

Hogy e függvény valóban eleget tesz követelésünknek, azt a (2)-be való helyettesités igazolja.

2. Legyen most már oly meghatározott egész számú együtthatókkal biró

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \dots + a_n z + a_{n+1}$$

többtagú adva, hogy az

$$f(z) = 0$$

egyenletnek csupa egymástól külömböző gyöke van.

Az adott $f(z)$-ből és bármely

$$h(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_\nu z^\nu + \dots + c_n z^n$$

alakú többtagúból egy és csak is egy módon képezhető oly $(m+1)$-ső-fokú ráczionális egész függvény, melyek rendre a következő egyenleteknek tesznek eleget:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}[H_0(z)e^{-z}] + \ h(z)\ e^{-z} = 0\\
&\frac{d}{dz}[H_1(z)e^{-z}] + f'(z)\,H_0(z)e^{-z} = 0\\
&\frac{d}{dz}[H_2(z)e^{-z}] + f'(z)\,H_1(z)e^{-z} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d}{dz}[H_m(z)e^{-z}] + f'(z)\,H_m(z)e^{-z} = 0.
\end{aligned}
$$

A fennebbiek szerint $H_0(z)$ a

$$h_0 = h(z)$$

-nek és valamennyi differencziálhányadosainak összege. $H_0(z)$-ből $H_1(z)$ mint a

$$h_1 = f'(z)\ H_0(z)$$

szorzatnak és differencziálhányadosainak összege adódik ki. Ezután $H_2(z)$-t a

$$h_2 = f'(z)\ H_1(z)$$

szorzatból egészen hasonló módon képezzük s ezt az eljárást addig ismételjük, míg végre

$$h_m = f'(z)\ H_{m-1}(z)$$

és differencziálhányadosainak összege megadja $H_m(z)$-t.

Az így talált H_0 foka megegyezik h_0 fokával tehát általában n. A h_1 függvény foka $2n$ lévén, ugyanaz áll H_1-ről. Továbbá h_2 és vele H_2 foka $3n$. stb. Végre H_m foka $(m+1)n$. Ha $c_n = 0$, a $H_0, H_1, \ldots, H_m$ foka a mondottnál alacsonyabb, ellenben magasabbá sohasem lesz.

A meghatározott függvényekben z egyes hatványai a c_ν-k bizonyos egész többszöröseinek oly aggregátumaival vannak megszorozva, melyeknek egy részéből a_0, vagy annak valamely magasabb hatványa kiemelhető. Igy H_1 legmagasabb tagjainak együtthatója,

$$(n+1)\, c_n\, a_0,$$

a_0-t mint tényezőt tartalmazza. Ennélfogva h_2 és H_2-ben a két legmagasabb tag rendre a_0^2 illetve a_0-sal osztható. H_3-ban már három tagról áll, hogy a_0^3, a_0^2 illetve a a_0-sal oszthatók. A gondolatmenetet folytatva, végre

$$H_m(z) = C_0 a_0^m z^{(m+1)n} + C_1 a_0^{m-1} z^{(m+1)n-1} + \ldots + C_{m-1} a_0 z^{(m+1)n-m+1} + \\ + C_m z^{(m+1)n-m} + C_{m+1} z^{(m+1)n-m-1} + \ldots + C_{(m+1)n},$$

hol a C-k a c_ν-knek egész együtthatókkal biró homogén lineár függvényei.

3. A H_0, H_1, $H_2, \ldots, H_m$ függvénysorozat egyszerű kapcsolatban van a

$$(4) \qquad \frac{d}{dz}[K_m(z)\, e^{-z}] + \frac{h(z)}{m!} f^m(z)\, e^{-z} = 0$$

egyenlet értelmezte $K_m(z)$ ráczionális egész függvénynyel.

Ugyanis a

$$\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!} f^{m-\mu}(z)\, e^{-z}$$

szorzatnak differencziálhányadosa

$$\frac{f^{m-\mu-1}(z)}{(m-\mu-1)!} f'(z)\, H_\mu(z)\, e^{-z} + \frac{f^{m-\mu}(z)}{(m-\mu)!} \frac{d}{dz}[H_\mu(z)\, e^{-z}],$$

tehát — az alkalmilag már használt

$$h_0 = h(z),\; h_1 = f'(z)\, H_0(z), \ldots, h_m = f'(z)\, H_{m-1}(z)$$

jelzést tovább is megtartva — a (3) alatti egyenletek értelmében

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!} f^{m-\mu}(z)\, e^{-z}\right] = \frac{h_{\mu+1} f^{m-\mu-1}(z)\, e^{-z}}{(m-\mu-1)!} - \frac{h_\mu f^{m-\mu}(z)\, e^{-z}}{(m-\mu)!}.$$

E számítást 0-tól m-ig minden egész számra elvégezvén, a következő egyenleteket nyerjük:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{H_0(z)}{m!} f^m(z) e^{-z}\right] = \frac{h_1 f^{m-1}(z) e^{-z}}{(m-1)!} - \frac{h_0 f^m(z) e^{-z}}{m!}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{H_1(z)}{(m-1)!} f^{m-1}(z) e^{-z}\right] = \frac{h_2 f^{m-2}(z) e^{-z}}{(m-2)!} - \frac{h_1 f^{m-1}(z) e^{-z}}{(m-1)!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{H_{m-1}(z)}{1!} f(z) e^{-z}\right] = h_m e^{-z} - \frac{h_{m-1} f(z) e^{-z}}{1!}$$

$$\frac{d}{dz}\left[H_m(z) \, . \, e^{-z}\right] = - h_m e^{-z}.$$

Ezeknek az egyenleteknek összegében a jobb oldalon

$$-\frac{h(z)}{m!} f^m(z) e^{-z}$$

áll, ennélfogva

$$K_m(z) = H_m(z) + \frac{H_{m-1}}{1!} f(z) + \ldots + \frac{H_m(z)}{m!} f^m(z). \tag{5}$$

4. Különösen fontos függvényekre vezet

$$a_0^{m(n-1)} H_m(z)$$

-nek $f(z)$-vel való osztása, melynél az $a_0^{m(n-1)}$ szorzót csak azért csatoltuk $H_m(z)$-hez, hogy a hányadosban és a maradékban ne lépjenek fel tört együtthatók. Hogy erre a czélra a választott szorzó valóban alkalmas, az $H_m(z)$-nek 2. alatt kifejtett alakjából következik. Ha azt megszorozzuk a_0-nak $m(n-1)$-ső hatványával, akkor

$$a_0^{m(n-1)} H_m(z) = \gamma_0 a_0^{mn} z^{(m+1)n} + \gamma_1 a_0^{mn-1} z^{(m+1)n-1} + \cdots + \gamma_{mn-1} a_0 z^{n+1} +$$
$$+ \gamma_{mn} z^n + \gamma_{mn+1} z^{n-1} + \cdots + \gamma_{(m+1)n},$$

hol a γ-k egy része az előbb C-kel jelölt együtthatókkal teljesen megegyezik, míg a többi γ a megfelelő C-nek a_0 valamely hatványával való szorzásából keletkezett. A γ-k tehát a c_ν-knek egész együtthatókkal biró homogén, lineár függvényei.

Osztásunk most már oly

$$G(z, m)$$

$(mn-1)$-ső fokú hányadosnak és

$$g(z, m)$$

legfeljebb n-ed fokú maradéknak meghatározását kivánja, melyek a

(6) $$a_0^{m(n-1)} H_m(z) = f(z)\, G(z, m) + g(z, m)$$

egyenletet kielégítik. Hogy itt mindkét oldal legmagasabb tagja ugyanaz legyen, arra $G(z, m)$ legmagasabb tagjának együtthatója

$$\gamma_0\, a_0^{mn-1}$$

tartozik lenni. $G(z, m)$ többi tagjának és $g(z, m)$-nek meghatározására a (6)-ból

$$G(z, m) = \gamma_0\, a_0^{mn-1} z^{mn-1} + \bar{G}(z, m)$$

helyettesitéssel kiadódó

$$a_0^{m(n-1)} H_m(z) - \gamma_0\, a_0^{mn-1} z^{mn-1} f(z) = f(z)\, \bar{G}(z, m) + g(z, m)$$

egyenlet szolgál. Ennek baloldala ily alakú:

$$\bar{\gamma}_0\, a_0^{mn-1} z^{mn+n-1} + \bar{\gamma}_1\, a_0^{mn-2} z^{mn+n-2} + \ldots + \bar{\gamma}_{mn-2}\, a_0\, z^{n+1} +$$
$$+ \bar{\gamma}_{mn-1} z^n + \bar{\gamma}_{mn} z^{n-1} + \ldots + \bar{\gamma}_{(m+1)n-1}\,.$$

Ebből az egyenletből $\bar{G}(z, m)$ első tagjának vagyis $G(z, m)$ második tagjának együtthatója

$$\bar{\gamma}_0\, a_0^{mn-2}$$

lesz s ennek meghatározása után a feladat megint az előbbi módon egyszerűsbödik. A számitást folytatva $G(z, m)$ együtthatóit rendre mint

$$a_0^{mn-1},\quad a_0^{mn-2}, \ldots, a_0,\ 1$$

-nek s a c_ν-k bizonyos egész számú együtthatókkal biró homogén lineár függvényeinek szorzatai adódnak ki.

Ennélfogva azután a

$$g(z, m) = a_0^{m(n-1)} H_m(z) - f(z)\, G(z, m)$$

maradéknak együtthatói is a c_ν-knek egész számú együtthatókkal biró homogén lineár függvényei.

Ha $h(z)$-nek rendre z-nek zérusadik, első, stb. végre n-dik hatványát választjuk s a megfelelő $G(z, m)$ és $g(z, m)$ függvényeket rendre

$$G_0(z, m),\ G_1(z, m), \ldots, G_n(z, m),$$
$$g_0(z, m),\ g_1(z, m), \ldots, g_n(z, m)$$

-mel jelöljük, akkor $h(z)$ bármely más választásánál

$$G(z, m) = c_0\, G_0(z, m) + c_1\, G_1(z, m) + \ldots + c_n\, G_n(z, m)$$
$$g(z, m) = c_0\, g_0(z, m) + c_1\, g_1(z, m) + \ldots + c_n\, g_n(z, m),$$

a (6) alatti egyenlet pedig a következőbe megy át:

$$(7) \qquad a_0^{m(n-1)} H_m(z) = f(z) \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\, G_\nu(z, m) + \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\, g_\nu(z, m).$$

A bevezetett függvények közűl a $g_\nu(z. m)$-mel jelölt, egészszámú együtthatókkal biró, legfeljebb n-ed fokú egész függvények a legfontosabbak. Ámde tulajdonságaik kifejtésénél $K_m(z)$ és $H_m(z)$ vizsgálatából kell kiindulnunk.

Kürschák József.

A SÚRLÓDÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Második közlemény.)

II. Adott szilárd vonalon mozgó anyagi pont differencziálegyenleteiről.

5. Legyen a mozgó pont tömege az egység; legyenek t időpontban koordinátái x, y, z; az adott szilárd görbe érintője, első görbületi sugara, és a második legyenek sorban f, r, b; abban az esetben, ha ezen szilárd görbe maga is mozog, a tömegpont leírta pálya különbözni fog tőle; jelöljük a pályagörbe érintőjét, első görbületi sugarát és a másodikat sorban v, ρ, β-val.

Az f értelme essék össze a tömegpont relatív sebességének értelmével a szilárd görbéhez képest.

Az anyagi pontra ható P szabad erőn kívül tekintetbe veendő a szilárd vonal N *reakczió ereje*, mely az (r, b) normálsíkban működik, és F *súrlódási ereje*, mely az f relatív sebességgel egyenlő irányú és ellenkező értelmű.

Hogy a tömegpont differencziálegyenleteit fölirhassuk, csak azt kell meggondolnunk, hogy egyrészről a gyorsulás komponensei a v, ρ, β koordináta-rendszerben sorban

$$\frac{dv}{dt}, \quad \frac{v^2}{\rho}, \quad 0,$$

és hogy más részről ezt a gyorsulást létrehozzák a P, F, N gyorsító erők; minélfogva a gyorsulás komponense bármely egyenes irányában egyenlő e gyorsító erőkével együttvéve. Ezen egyenes gyanánt sorban az f, r, b vonalakat választván, e következő egyenletekre jutunk:

$$\frac{dv}{dt}\cos(v, f) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, f) = P\cos(P, f) - F,$$
$$\frac{dv}{dt}\cos(v, r) + \frac{v^2}{r}\cos(\rho, r) = P\cos(P, r) + N\cos(N, r), \qquad (1)$$
$$\frac{dv}{dt}\cos(v, b) + \frac{v^2}{r}\cos(\rho, b) = P\cos(P, b) + N\sin(N, r),$$

Ez egyenletek épen a tömegpont összes mozgási differencziálegyenletei. Belőlük négyzetre emelés és összegezés után, — ha mindjárt tekintetbe veszszük, hogy az f, r, b irányok egymásra merőlegesen állnak, — a görbe vonal *összes* ellenállását meghatározó ezen egyenlet következik:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2} + P^2 - 2P\left(\frac{dv}{dt}\cos(v, P) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, P)\right) = F^2 + N^2. \qquad (2)$$

6. A mozgási egyenletek kevésbbé szimmetrikusok, de sokkal egyszerűbbekké lesznek, ha *a szilárd görbe mozdulatlan; a problema ekkor mindig quadraturára vihető vissza.* Ekkor ugyanis f, r, b azonosak v, ρ, β irányokkal, minélfogva

$$(v, f) = (r, \rho) = (b, \beta) = 0$$
$$(v, b) = (v, r) = (\rho, f) = (\rho, b) = \frac{\pi}{2}.$$

Ezeknek tekintetbe vételével a mozgási egyenleteket a következő alakban irhatjuk:

$$\frac{dv}{dt} - P\cos(P, v) = -F,$$
$$\frac{v^2}{\rho} - P\cos(P, \rho) = N\cos(N, \rho), \qquad (3)$$
$$-P\cos(P, b) = N\sin(N, \rho),$$

mely egyenletekből fontos következtetések vonhatók. A másodikból és harmadikból ugyanis négyzetre emelés, összegezés és

$$\cos^2(P, \rho) + \cos^2(P, b) = 1 - \cos^2(P, v) = \sin^2(P, v)$$

ismert egyenlet folytán lészen:

$$\frac{v^4}{\rho^2} - 2\frac{v^2}{\rho}P\cos(P, \rho) + P^2\sin^2(P, v) = N^2. \qquad (4)$$

Ámde a surlódási erő alaptörvénye értelmében

$$F = k \,.\, N, \tag{4a}$$

hol k a súrlódási együttható, mely vagy állandó, vagy a v függvénye. A (4) és (4a) egyenletek tekintetbe vételével tehát igy irhatom a (3) alatti egyenletek elsejét:

$$\frac{dv}{dt} = P\cos(P, v) - k\left(\frac{v^4}{\rho^2} - 2\frac{v^2}{\rho}P\cos(P, \rho) + P^2\sin^2(P, v)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Ezen egyenlet integrálása mindig quadraturára vezethető vissza. Jelöljük ugyanis a görbe vonal ívhosszát s-sel; akkor minden, az egyenletben előforduló mennyiség úgy fogható fel, mint az s függvénye; legyen

$$P\cos(P, v) = f_0(s),$$

$$1 : \rho^2 = f_1(s),$$

$$-2\frac{P}{\rho}\cos(P, \rho) = f_2(s),$$

$$P^2\sin^2(P, v) = f_3(s),$$

Más részről

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}. \tag{6}$$

Az (5) egyenlet ezeknél fogva így irható:

$$\frac{dv^2}{ds} = f_0(s) - k(f_1(s)v^4 + f_2(s)v^2 + f_3(s))^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

ez pedig, tekintettel arra, hogy k vagy állandó vagy csak a v függvénye, egy *elsőrendű közönséges* differencziál-egyenlet v és s változók között.

7. Különösen egyszerűvé válik ezen differencziál-egyenlet, ha a *szabad erő P az adott kényszerpálya simuló síkjában működik.*

Ekkor $(P, b) = \frac{\pi}{2}$ lévén, a (9) egyenletek harmadika folytán $\sin(N, \rho) = 0$, vagyis a N erő az első görbületi sugár irányában működik. Minélfogva így irhatók a (3) egyenletek:

$$\frac{dv}{dt} - P\cos(P, v) = -F,$$

$$\frac{v^2}{\rho} - P\cos(P, \rho) = N,$$

úgy hogy $F = kN$ tekintetbe vételével a probléma megoldása

$$\frac{dv}{dt} = P\cos(P, v) - k\left(\frac{v^2}{\rho} - P\cos(P, \rho)\right)$$

azaz ezen differencziál-egyenletre van visszavezetve:

$$\frac{dv}{dt} + k\frac{v^2}{\rho} = P(\cos(P, v) + k\cos(P, \rho)).$$

Ez a (7) fölhasználásával még így írható:

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} + \frac{kv^2}{\rho^2} = P(\cos(P, v) + k\cos(P, \rho)). \tag{8}$$

Mayer *ezen egyenlet érvényességét ahhoz a specziális föltevéshez kötötte volt, hogy a pálya síkgörbe és a P erő a pálya síkjában működik.* Miként látjuk, a tétel érvényességi köre lényegesen nagyobb.

Ha k állandó, akkor a (8) differencziál-egyenlet v^2-ban lineáris, minélfogva integrálása tényleg élvégezhető. Ugyanis legyen

$$\int \frac{ds}{\rho^2} = F(s),$$

$$P(\cos P, v) + k\cos(P, \rho)) = f(s), \tag{9}$$

$$v^2 = ue^{-2kF(s)}.$$

Akkor ebből az egyenletből deriválással

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} = \frac{1}{2}\frac{du}{ds}e^{-2kFs} - k\frac{dF(s)}{ds}ue^{-2kF(s)}$$

azaz a (9) egyenletek elseje folytán

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} + \frac{kv^2}{\rho^2} = \tfrac{1}{2}e^{-2kF(s)}\frac{du}{ds},$$

minélfogva a (8) egyenlet megoldását

$$\frac{du}{ds} = 2e^{2kF(s)} f(s)$$

szolgáltatja. Ha tehát jelölésül

$$2\int e^{2kF(s)} f(s)\, ds = \varphi(s), \tag{10a}$$

akkor a (8) egyenlet megoldása:

$$v^2 = (c + \varphi(s))\, e^{-2kF(s)}. \tag{10}$$

8. *Egy második eset,* a midőn az (5) egyenlet egyszerűvé válik, akkor áll elő, ha *a P erő mindenütt merőleges a pálya simuló síkjára.*

Ekkor

$$(P, v) = (P, \rho) = \frac{\pi}{2};$$

minélfogva az (5) így hangzik:

$$\frac{dv}{dt} = -k\left(\frac{v^4}{\rho^2} + P^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

mely egyenlet a (6) tekintetbe vételével ezen alakot ölti:

$$\frac{dv^2}{ds} = -\frac{2k}{\rho}(v^4 + \rho^2 P^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Az erőre nézve az imént kimondott föltétel ki van elégítve, ha a pálya horizontális síkon fekvő bármilyen görbe, és a mozgó pontra ható szabad erő a nehézségi erő.

Legyen még közelebb a *pálya ρ sugarú körvonal* és *k állandó.* Akkor a (17) integrálja, ha a gyorsulást g-vel jelöljük és $v = v_0$, ha $s = 0$,

$$-\frac{2k}{o} s = \int_{v_0^2}^{v^2} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2 g^2}},$$

azaz

$$-\frac{2k}{\rho}s = l\,.\frac{v^2+(v^4+\rho^2 g^2)^{\frac{1}{2}}}{v_0^2+(v_0^4+\rho^2 g^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ebből

$$v^2+(v^4+\rho^2 g^2)^{\frac{1}{2}} = c^2 e^{-\frac{2k}{\varrho}s},$$

tehát

$$v^2 = \tfrac{1}{2}\left(c^2 e^{-\frac{2ks}{\varrho}} - \rho^2 g^2 c^{-2} e^{\frac{2ks}{g}}\right), \tag{12}$$

hol

$$c^2 = v_0^2 + (v_0^4+\rho^2 g^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{12a}$$

A mozgás mgszünik, ha $v=0$ lesz, a mi bekövetkezik, ha

$$\frac{c^4}{\rho^2 g^2} = e^{\frac{4ks}{\varrho}},$$

azaz

$$\frac{2ks}{\rho} = l\,.\frac{c^2}{\rho g}.$$

Ha a pálya körvonal, de *k a v^2 raczionális függvénye*, akkor is elvégezhető a (11) egyenlet integrálása legföljebb körméreti (logarithmikus) függvényekkel; ha k a v-nek magának raczionális függvénye, akkor legföljebb elliptikus függvényekkel. Ugyanaz mondható akkor is, ha a *levegő ellenállását* is tekintetbe veszszük és a szokott hipotézissel élünk, hogy ez a pont tényleges mozgásával ellenkező irányú és nagyságra a v^2 illetőleg a v raczionális függvénye, mondjuk, l. Ekkor a P erőhöz számítandó ez is, és pedig

$$P\cos(P, v) = -l,$$
$$P\cos(P, \rho) = o,$$
$$P\sin(P, v) = g,$$

minélfogva az (5) egyenletből lesz:

$$\frac{dv}{dt} = -l - k\left(\frac{v^4}{\rho^2}+g^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

honnan

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

folytán:

$$s = -\int_{v_0}^{v} \frac{v dv}{l + \frac{k}{\rho}(v^4 + g^2\rho^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ha tehát ρ állandó, a k és l pedig a v^2 raczionális függvényei, akkor $v^2 = z$ helyettesitésből folyólag az integrál legföljebb körméreti függvényre; míg ha k és l magának a v-nek rationális függvényei, akkor az integrál legföljebb elliptikus transzczendensre vezet.

Réthy Mór.

IRODALOM.

A Tesla-féle kisérletek.

Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz. Zusammengestellt von Etienne de Fodor. Revidirt und mit Anmerkungen versehen von Nikolas Tesla. Wien, Pest, Leipzig. A. Hartlebens Verlag 1894. Ára 1 frt 65 kr.*

A nagyszámu vállalkozások közt, melyek újabb időben az elektromos tüneményeknek technikai téren való felhasználása czéljából létesültek, Tesla Miklós,, Amerikában működő elektrotechnikus kisérletei széles körben kiváló érdeklődést keltettek. Lehet, hogy eme érdeklődésnek oka részben abban a sajátságos eljárásban keresendő, melylyel Tesla találmányait ismerteté, t. i. a tudományos népszerű előadásokban, melyeket ő a művelt világ csaknem minden részében tartott s azokban a fényes segédeszközökkel végrehajtott szemkápráztató, kitünő kisérletekben, melyek a napilapoknak is kedvesen fogadott szórakoztató anyagot szolgáltattak. Ehhez járultak a nagy arányu perspektivák, melyeket az előadó megrajzolt: «A jövő századok világítása», «motorok hajtása nagy távolságból vezető drótok nélkül», és még több ilyenféle dolog. Habár eme vérmes reményeket illetőleg a kedélyek lassankint ismét napirendre tértek s habár Tesla elsőrendű gyakorlati czélja, az egysarku izzólámpa, melyet gyorsan váltakozó nagy feszültségü áram táplálna, csak a késő jövőben látszik elérhetőnek: a Tesla-féle kisérletek mégis nagyon figyelemre méltók, mivel az elektromosságnak úgy elméleti, mint gyakorlati oldalára vonatkozólag sok említésre méltót tárnak fel. Sajnos, hogy még most is igen nehéz a Tesla eredményeit áttekinteni s itéletet mondani felettük, mivel az ő törekvései, elvei és elért eredményei csupán csak egyes czikkekben, felolvasásokban, továbbá ezekről és szabadalmai bejelentéséről szóló értesítésekben találhatók, melyek nagyobbára nehezen megközelíthető szaklapokban vannak szétszórva. Éppen ezért örvendetes eseményül kell fogadnunk az atheni elektromos középponti állomás igazgatójának,

---

* L. *Naturwissenschaftliche Rundschau* IX. évf. 1—3. füzet.

Fodor István-nak az idézett czímen megjelent művét, melyben a Tesla-féle nyilatkozatokat, előadásokat, jelentéseket összegyüjté és kiadta.

A szerző szigoruan követi Teslát; mindig Teslát beszélteti, s ezáltal nagyon is szolgálatába szegődik az elbeszélőnek s maga is sajnálja, hogy még mindeddig nem létesült egy jól rendezett teljes ismertetés, mely a részleteket minden oldalról átdolgozva s megvilágítva nyujtaná, miért is az, a ki a kérdéses tárgyban fennforó nehézségeket ismeri, nem fog neki szemrehányást tehetni. Tesla eredményeinek rövid összefoglalása és szakszerű kritikai áttekintése tehát az ajánlásra méltó könyv megjelenése után sem látszik egészen fölöslegesnek.

A Tesla-féle kisérleteknek fő és pedig nagy értéke úgy látszik abban áll, hogy ő az első, ki ama jelenségeket, melyeknek egy részét az elmélet kilátásba helyezte, más részük pedig a laboratoriumokban már meg is figyeltetett, nagyszerű eszközökkel létesítette és oly alakban igyekezett azokat előállítani, melyben a technika is hasznosíthatja. Eközben a sok gátoló nehézséget nagy ügyességgel legyőzte és az ő fáradságot nem ismerő munkásságának köszönhető némely mellékkörülménynek felfedezése s az eljárási mód tökéletesítése, melyek most viszont a laboratoriumi munkánál hasznosíthatók.

A feladat, melynek megoldására ő — ha nem is elsőnek — de legkitartóbban törekedik az, hogy az irányukat periodikusan szaporán változtató s nagy feszültségü áramokat gyakorlatilag értékesítse.

A gyorsan váltakozó, nagy feszültségü áramok jelentősége, törvényeik sajátszerűségei, melyek a közönséges áramokéitól gyakran oly eltérők, hogy látszólagos képtelenségek támadnak — milyenek pl. az, hogy elektromos jó vezetők, mint a fémek, az elektromos kiegyenlítődések utját akadályozzák és a kiegyenlítődés az úgynevezett rossz vezetökön át történik — a physikai laboratoriumok kis mérvű kisérleteiben már régebben észleltettek. Hertz az, ki úttörő s széles körben ismeretessé lett kisérleteivel* alapját veté meg a gyorsan váltakozó elektromos mozgásokat kisérő különös jelenségek tanulmányozásának s ezzel az újabb kutatásokra oly nagy kedvet keltett, hogy ma a physika terén működő munkaerők többsége eme jelenségek tanulmányozásával foglalkozik.

Már Hertz előtt kimutatta Sir William Thomson (jelenleg Kelvin lord) és Kirchhoff elméleti okoskodások utján, Feddersen pedig gyönyörű kisérleteivel, hogy ha valamely sürítő, például egy közönséges leydeni palaczk nem nagy ellenállásu, de szikraadásra képes záró körben süttetik ki, akkor a feszültség nem a szokott módon a positiv fegyverzettől a negativ felé tartó elektromos áramban egyenlítődik ki, hanem a töltés igen gyors ide-oda

* L. Természettudományi Közlöny XXI. köt. 353. l.

oscillálása áll be és csak az ily egyes *elektromos rezgések* kisebb vagy nagyobb száma után sül ki tényleg a palaczk. Bezold kimutatta továbbá, hogy ez oscillatiók drótokba vezetve, bennök hullámzási és interferentia tüneményeket s álló hullámokat idézhetnek elő. Ezekhez hasonló, de Bezold-tól függetlenül rendezett megfigyelésekből Hertz, ki a Maxwell-Helmholtz-féle theoriából indult ki, a tovaterjedési sebesség létezését állapította meg és az önmagát kisütő condensator rezgési számából s a tőle függő, közvetlenül mérhető hullámhosszból következett az első fontos eredmény, az t. i., hogy az elektromos háborgás kiegyenlítődésének a térfoglalásra idő kell, azaz, hogy az elektromos hatások véges sebességgel és pedig éppen azzzal a sebességgel terjednek el a térben, mint a fényhatások. Kimutatta továbbá Hertz, hogy az elektromos erőknek ilyen periodikus változásai: *elektromos hullámai* valamely *vezetőn* való keresztül haladástól függetlenül is, önállóan sugározhatnak ki a térbe és közelebbről megvizsgálta ezen *elektromos erő sugárzásának* sajátságát. Ekkor aztán a theoriától kilátásba helyezett, de azért nem kevésbbé meglepő eredmény mutatkozott, az, hogy ezen sugárzás törvényei teljesen azonosak a fény- és hősugárzás törvényeivel. Ezzel a theoriának egy másik része: *az elektromágneses theoria*, melyet Maxwell állított fel, nyert kisérleti igazolást. Ez a theoria a fénytűnemények hullámzási theoriájához hasonlóan periodikusan váltakozó, hullamszerűleg terjedő állapotváltozást tételez fel, de nem rugalmas kiterjedésből és összehuzódásból származtatja, mint a közönséges hullámzási elmélet, hanem épen olyan periodikusan váltakozó elektromos- s ezzel összeköttetésben magnetikus erőkből, milyeneket Hertz kisérleteinél használt. Ezzel ismertebbé lett a fény és elektromosság sokat vitatott szoros összefüggése.

Más kutatók azt találták aztán, hogy az ilyen szapora elektromos rezgések feltünő mértékben képesek ritkított gázokat, melyek kellően megritkított levegőjű üvegedényekbe vannak bezárva, világítókká tenni még akkor is, ha az edény nincsen is fémvezetőkkel felszerelve olyan módon, mint az általánosan ismert Geissler-féle csövek.

Tesla az elektromos rezgések keltésére szolgáló szaporán váltakozó elektromos áramokat kezdetben oly gépekkel létesítette, melyek elvben a váltakozó áramot fejlesztő közönséges gépekhez hasonlítottak. avval a külömbséggel, hogy jóval több dróttekercscsel voltak ellátva. Igy pl. az ő szapora váltakozásu áram-fejlesztőinek egyik mintája kovácsolt vasgyűrűből áll, melynek belső felén 348 fog van; ezek köré elszigetelt drótvezeték van feltekerve, keresztül-kasul, többféle helyzetben; ha e vezetéken áram megy át, akkor a fogak mind mágnesekké lesznek és pedig csucsaik felváltva déli és északi mágnességüek. E gyűrű belsejében egy aczél korong, melyre kovácsolt vasabroncs van erősítve, gyors forgásba hozható. Ezen az abroncson 384 dróttekercs van egyenlő közökben elhelyezve, melyek együtt a fegyverzetet alkotják. A fegyverzetben keletkező áramok a külső gyűrű fogaira vezettetnek s a tekercseknek a mágneses fogak előtt való elfordulása alkalmával irányát folyton változtató áram keletkezik, melyet a tengelyt dörzsölő fém rugó vesz át. TESLA az által, hogy ily módon gépében sok kicsiny elektromágnest és tekercset alkalmaz és azáltal, hogy az igen gondosan készített belső szerkezetet rendkívül gyors forgásba hozza, olyan áramokat fejlesztett, melyek másodperczenkint 30,000-szer változtatták irányukat. Ezek a váltakozó áramok aztán egy *transformatorban* nagy feszültségű áramokká változnak át; ez úgy történik, hogy az áramok csekély számu kanyarulatokkal biró elsőrendű tekercsbe vezettetnek, melyet a másodrendű, sok kanyarulattal biró, jól elszigetelt vékony drótból álló tekercs veszi körül épen úgy, mint a közönséges inductiós gépeknél. Az elsőrendű tekercs áramának minden erősségváltozása a másodrendű vezető tekercsben elektromótoros erőt kelt, mely egyéb körülmények egyenlősége mellett annál erősebb, minél gyorsabb egymásutánban követik egymást a főtekercs áramának erősségbeli változásai. Ha tehát TESLA az ő gyorsan váltakozó áramát ilyen transformatorba vezeti, akkor igen nagy feszültségű áramra tesz szert. Ezek ugyan még nem oly nagy feszültségüek, milyeneket közönséges elektrostatikai gépekkel, pl. a Holtz- vagy a Töpler-féle megosztó gépekkel előállíthatunk; a TESLA-féle eljárásnak azonban az az igen nagy előnye van, hogy igen nagy mennyiségű elektromosságot képes mozgásba hozni és ez lehetővé teszi, hogy a kisérletek egész sora nagy arányokban hajtható végre, holott e kisérletek a közönséges elektrostatikai gépekkel, melyek csekély mennyiségű elektromosságot szolgáltatnak, csak igen korlátolt mértékben vihetők keresztül.

De még a másodperczenkinti 30,000 irányváltozás — Ewing 56,000 irányváltozást ért el gőzturbinával közvetlenül hajtott *alternatorával!* — nem elég ahhoz, hogy az elektrostatikai kisüléssel járó jellemző tünemények nagyban állíttassanak elő, s így jött TESLA arra, hogy azt a berendezést használja kisérleteihez, mely sokkal gyorsabb elektromos rezgéseket eredményez, mint bármely váltakozó áramu gép. Ez a berendezés, mint már említve volt, a condensatorok kisütése.

Mindazon berendezéseknek, melyeket TESLA feltalált s melyekkel tulajdonképeni kisérleteit végrehajtotta, alapelve a következő: váltakozo áramot termelő, többnyire kis váltakozási számú géppel váltakozó irányu áramot létesít s ezt aztán elsőrendű transformator segélyével nagy feszültségűvé változtatja át. A feszültségnek oly nagynak kell lennie, hogy a másodrendű áramkörbe iktatott s egymáshoz közelálló két fémgolyó között a levegőn keresztül erős szikra létesüljön. A szikraközzel teljesen zárt másodrendű áramkörben aztán a különböző berendezések szerint majd egyik, majd másik ponthoz vezető sodronyok vannak erősítve, melyek két egyenlő sűrítőnek egyik fegyverzetéhez — pl. a belső fegyverzetéhez — vezetnek, a mennyiben a sűrítőt leydeni palaczknak képzelhetjük. A másik — tehát a külső fegyverzetpárt — egy másik transformator elsőrendű vezetősodronyai révén, tehát *a nagy feszültségüvé alakító transformator* közvetítésével vannak egymással vezető összeköttetésben. A váltakozó áramot termelő gép működése közben az egyik sűrítőnek belső fegyerzete negativ-, a másiké pedig positiv töltést kap mindaddig, míg a két gömb közt szikra üt át; ebben a pillanatban kezdődik a kisülés. Ez azonban, mint azt már Feddersen kimutatta, oscilláló természetű s azért a nagy feszültséget létesítő transformator elsőrendű vezető drótjain, melyek a sűrítők külső fegyverzetét kötik össze, Feddersen-féle váltakozó áramok czikáznak át. Néhány pillanat mulva a belső fegyverzetek újra töltve vannak és pedig ellenkező értelemben és az oscillálás játéka minden egyes szikra keletkezésével ismétlődik és így tovább. A nagy feszültségű áramot létesítő transformatorban müködő erőt tehát már nem a váltakozó áramu gép váltakozó lüktetései szolgáltatják, hanem a váltakozó áramtól megtöltött és önmagukat kisütő elektromos rezgései.

A sűrítők révén létrejövő eme rezgések azonban oly sürűen követik egymást, hogy még a legkitünőbben szerkesztett, nagy feszültségü áramot fejlesztő gép sem közelíti meg. Már Feddersen is tanulmányozott oly rezgéseket, melyek a másodpercznek nehány százezred része alatt váltakoznak; mindig kisebb és kisebb sűrítőket használván, olyan váltakozó áramok létesíthetők, melyek másodperczenkint milliószor, sőt százmilliószor változtatják irányukat. Hertz azt, hogy kisérleteit egy közönséges laboratorium szűk körében létesíthette, igen kicsiny sűrítők alkalmazásával érte el, melyekben a kisülés alkalmával az elektromosság oly gyorsan oscillált ide-oda, hogy daczára a másodperczenkint 300,000 kilométernyi rendkívüli nagy terjedési sebességnek, csak nehány deciméter hosszuságu elektromos hullámok keletkeztek, s ezeket már könnyen lehetett tanulmányozni.

A váltakozó áramnak ily átalakítása még más eredményre is vezet. Ugyanis minél gyorsabban váltakozik az elsőrendü indító áram, annál nagyobb feszültségü áram indíttatik a transformator másodrendü vezető drótjában.

Ha tehát Tesla gépének 30,000-szer váltakozó árama helyett a sűrítők 100-szor, sőt 1000-szer gyorsabban váltakozó kisülési áramait müködteti az elsőrendü (primär) vezető tekercsekben, akkor azon eredmény mellett, melyet a váltakozó áram nagyszámu változása létesít, még rendkívül nagy feszültség is jön létre, oly feszültség, mely a legnagyobb hatásu elektrostatikai gépekével is teljesen fölér.

A sűrítők oscilláló kisülésének a váltakozó áramokra való alkalmazása és a váltakozó áramok átalakítása abból a czélból, hogy feszültség és szapora váltakozás létesüljön, miket eddig ez úton előállítani nem törekedtek, TESLÁ-nak legnagyobb érdeme.

Habár a gyorsan váltakozó áram előállításának a HERTZ-féle kisérletek nyomán teljesen meghonosult módszere óta igen egyszerünek s könnyen megoldhatónak látszik is ezen áramoknak a laboratoriumokban való alkalmazása, mégis a nagyban való előállításának különféle, részben előrelátható, részben váratlanul meglepö akadályok gördülnek eléje, melyek csak részben tekinthetők legyőzötteknek, melyeknek legyőzésére azonban TESLA a különleges berendezések egész sorát gondolta ki. Csak nehány említtessék fel: Ha bő áramu váltakozó áramot termelő géppel dolgozik az ember, akkor a szikrák, melyeknek gyors megszünése igen fontos, nemcsak el nem mulnak, hanem a két gömb között vezető fényív képződik, mely a gömb anyagát is gyorsan megolvasztja. TESLA, mint előtte sokan, erős légárammal fújja el az ívet s hűti egyidőben a gömböket, vagy pedig, mint szintén már más kutatók is tették, a szikranyalábra merőlegesen hegyes végü sarkfegyverzettel ellátott erős elektromágnest állít fel, a fegyverzetet pedig a szikraátcsapás ellen csillámborítékkal védi. A mágnessark áramtaszító ereje a szikrákban ellentétes irányban haladó elektromos áramlásokat kettéválasztja s így a sürítők kisülése szabad tért nyer.

Különös gondosságot igényelt a nagy feszültséget létesítő transformator megszerkesztése is, mivel közönséges berendezés mellett a rendkivüli feszültség, melynek létesülnie kellett, mindent szétrombolt volna. Első sorban tehát a vezetők megfelelő elszigeteléséről kellett gondoskodni. TESLA elsőrendü vezetőül igen vastag elszigetelő-réteggel bevont vastag drótnak nehány rövid kanyarulatból álló egy vagy két tekercsét használta. Az erre alkalmazott másodrendü vezetők szintén két, de ellentétes irányban hajlított drótból állanak. Minden drót különállólag vastag falú gummiszekrényekben van elhelyezve s az elsőrendü vezető tekercseket fedő szekrények egymás mellett állanak. A drótok középen összeköttetésben vannak egymással; mivel ellentétes irányu kanyarulatokkal birnak, azért a transformator belsejében az indukáló hatások növekednek és az átütés veszélye úgy az elsőrendü vezető kanyarulatai közt, mint a másodrendü vezető felé csökken.

Ezen kívül még az egész transformator nagy faszekrényben áll, mely olajjal (parafin olajjal) van megtöltve. Az olaj igen jó elszigetelőnek bizonyult s emellett a szilárd szigetelők fölött még más nagy előnyei is vannak. Bebizonyult ugyanis, hogy a nagy feszültséget létesítő transformatornál az elszigetelő anyagban rejtőző igen csekély légbuborék is, rombolólag hat; ott, a hol a vezető drótok elszigetelő anyaga közt, vagy az egyes kanyarulatok közt levegő van, csaknem szabályszerüséggel bekövetkezik az átütés.

Nyugvó (statikai) elektromossággal tett kisérleteknél a levegő, legalább a száraz levegő, a legjobb szigetelők egyike. Nem így áll a dolog a szaporán váltakozó elektromos mozgásoknál; az elektromos oscillatiók sajátságos módon támadják meg a gázokat s az oscillatiók vezetőjévé teszik. Ha azonban minden közöcskét folyékony szigetelő tölt ki, teljesebben el lehet háritani a levegőt, mintha a közök szilárd szigetelőkkel töltettek volna ki. Hogy a czél lehetőleg teljesen és biztosan el legyen érve, az egész transformatort, miután már össze van állítva, kifőzik saját olajában. Ez előnyökön kivül a folyékony szigetelők, névszerint az olajok, u. n. *elektromos szilárdsággal* birnak, azaz nagy ellenálló képességgel a szikra átütése ellenében, mely a rezgési számmal gyorsan nő. Például terpentin olaj 79-szer nagyobb biztosságot ad, mint a száraz levegő, mely a váltakozó áramkörben eszközölt palaczk kisütéseknél szerepel. Végül a folyékony szigetelőnek még az az előnye is van, hogy ha valamely helyen netalán szikra ütne át, a vezetéken így támadt sérülést azonnal megjavítja,

Tesla, hogy a legnagyobb feszültségek létrejöttekor a vezető sodronyok elszigetelőjének külső részén mindezen elővigyázat ellenére fellépő nagy energia veszteséget okozó lángocskák és fénypamatok képződését megakadályozhassa, a szigetelő réteget vékony aluminium lemezzel veszi körül, s ezzel a drótrendszer a szigetelővel együtt a környezettől teljesen elzárt elektromos teret határol. Végűl az olajos szekrényt a földdel összeköttetésben levő czinkszekrénybe helyezi el.

Ez a transformator a hasonló czélra szolgáló eszközöktől még abban is különbözik, hogy nincsen benne vas, holott a közönséges transformatoroknak éppen ez az egyik lényeges alkotó részük. A vasnak mágnesessé válására idő kell, de az áramnak oly gyors váltakozása mellett, a milyenről itt szó van, a mágnesség nem állana be idején, hanem elkésve létesülne, a miből zavarok származnának. Épen ezért a Tesla-transformatorok elsőrendü vezető tekercsei nem vasmagra, vagy lágy vasdrót nyalábra, hanem kemény fából készített s olajban való kifőzés útján teljesen légmentessé tett hengerre vannak szerelve.

Ennyi a Tesla-féle kisérletek berendezéséről. A kisérletek közül említsük mindenekelőtt azokat, melyeket egészen úgy, vagy legalább is hasonló módon más kisérletezők is előállítottak s azután az ő eredetibb kisérleti eredményeit, melyekre támaszkodva az ő kitűzött czélja: a «jövő világossága» felé tart.

Mint már említve volt, a Tesla-féle berendezések lehetővé teszik, hogy az elektromágneses gépek az elektrostatikai gépek müködését megközelítik. És azért előre látható volt, hogy ő nemsokára mindazon tüneményeket létesíteni fogja, melyeket jókora nagy, több koronggal biró nagy mennyiségü elektromosságot szolgáltató Töpler-féle megosztó géppel is elő lehet állítani. Figyelmét különösebben a légüres csövekre fordította, melyek elektrodok s egyéb segítők nélkül felvillannak, ha a transformatorral össze sem kötve, ennek, vagy az ezzel összeköttetésben levő vezető sodronyoknak közelébe állíttatnak.

Ez a megfigyelés igen régi; már HITTORF látott felvillanni egyszerü légüres csöveket, ha ezek önmagukat kisütő leydeni palaczkok közelébe, tehát elektromos oscillatiók körébe állíttattak. E tüneménynyel mindannyiszor találkozunk, valahányszor a cső közelében az elektromos állapot szaporán váltakozik. Ugyanezt sokan igen külömböző módokon megmutatták.*

Persze TESLA ezt a kisérletet nagyszerüen mutatja be. Egyik felolvasása alkalmával a kisérletező asztal fölé, melyen az ő légüres üveggolyói, csövei és gyürüi szanaszét feküsznek, több négyzetméternyi területü fémtáblát vizszintesen függeszt fel, transformatorának egyik sarkával összeköti, a másik sarkot pedig a földdel közlekedteti. Így tehát az oscillatiók játéka alkalmával ő maga is a váltakozó elektromos térben áll; a csővek, melyeket kezébe vesz, világítani kezdenek s bűvös fényt terjesztenek. Más alkalommal két nagy, a transformatorral összekötött fémtáblát a szobának szemközt álló két falára függeszt. Az egész térben elektromos oscillatiók czikáznak, a légüres csövek, akárhova állítják őket, mindenütt világítanak. Fémernyővel ellátott csövek elektromos lámpákká lesznek, melyek a nélkül, hogy vezetők elektromos árammal táplálnák, világítanak, bárhol függesztik is fel a szobában.

Kérdezhetné valaki, hogy a szoba lakóit nem érintik-e kellemetlenül ezek a rajtuk keresztül-kasul járó elektromos rezgések? A tapasztalat azt mutatta, hogy a váltakozó áramok, legalább az ilyen nagy feszültségüek, azon arányban lesznek ártalmatlanabbakká, a mily arányban a váltakozás száma nő. A magyarázatot a HERTZ-től kisérletileg bebizonyított ama tény szolgálgáltatja, hogy a szapora elektromos rezgések a vezető anyagba csak igen csekély mélységig hatolnak. Ha az efféle elektromos rezgéseket testünkbe vezetjük, úgy ezek éppen csak a test felületén terjednek el anélkül, hogy az epidermisbe egy századrészmilliméternyire behatolnának. Ezért foghatta meg TESLA transformatorának hatalmas szikrákat szóró sarkát anélkül, hogy baj érte volna s ezért volt képes egy csövet úgy világíttatni, hogy egyszerűen az egyik kezébe fogta, másik kezével pedig a nagy feszültséget létesítő transformátor egyik sarkát érinté. A nézőkre, kik előbb a sarkokon támadó hatalmas elektromos lángokat látták, ez a kisérlet természetesen igen nagy hatást tett, bár a TESLA-féle áram nagy szaporasága igen egyszerüen magyarázza. A változó áramok ezen tulajdonságából magyarázható az, hogy az Észak-Amerikában megkisérlett elektromos kivégzések

---

* L. Természettud. Közlöny XXI. köt. 358. l.

egyes esetekben nem sikerültek: nagy feszültségüvé átalakított váltakozó áramokkal kisérlették meg.

Egy másik kérdés, nem hat-e a térnek az elektromos rezgésektől gerjesztett mágnessége mindazon élő lények állapotára, melyek ebben a térben vannak? D'Arsonval a tengeri nyulakon változásokat észlelt az anyagcsere lefolyásában; embereknél, kiket nagy sodronytekercsbe állított, melyen szapora elektromos rezgések czikáztak át s így gyorsan váltakozó mágneses mező képződött bennök, állítólag lélekzési nehézség jelentkezett. Az elektromos világításnak előbb említett módja, a mely bizonyos értelemben az elektromos világítás ideálja volna, ha nem is tekintjük az oscillatióknak még közelebbről megvizsgálni való élettani hatását, minden esetre igen költséges volna. Bizonyos, hogy sok energia megy itt kárba, mert daczára a nagy segédeszköznek, a fény homályos, bár a phosphorescentia segítségével fokozható és igen szépekké és hatásosakká tehetők a fényjelenségek; rubin, kéncalcium vegyületek, uránüveg stb. gyönyörüen világítanak légüres czövekben.

Még sajátságosabbak és érdekesebbek, mivel oly segédeszközökkel, milyeneket Tesla állított elő, még nem kisérleteztek, ama tünemények, melyek meg nem ritkított, szabad levegőben állanak elő, ha a nagy feszültségü áramot létesítő transformator végeit csupaszon, vagy csak kurta sodronyokkal felszerelve a levegőben végeztetjük. A mint a generator működésbe lép, a végeken hatalmas fénynyalábok, valóságos lángok keletkeznek, melyek sajátságos zörgés- és süvöltéstől kisérve, fölséges látványt nyujtanak sötétben. Tesla az ilyen «elektromos láng»-nak ötféle változatát különbözteti meg, melyek a potential növekedésének megfelelő, más szóval az áramváltozások szaporaságának emelkedésétől függő rendben követik egymást. A lángok oly tulajdonságuak, mint a nagy elektromozó gépeknél észlelhető pamatszerü kisülések, csakhogy a mozgásba hozott elektromosság jóval nagyobb mennyisége miatt sokkal intensivebbek, s legtöbbször egész kiterjedésökben fehér fényüek.

Még gyönyörüebben mutatkoznak ezek a fénytünemények, ha a sarkok közé, melyekre esetleg golyók is vannak erősítve, nem világító testek, például vastag kaucsuklemezek helyeztetnek el; ekkor a fényoszlopok átcsapnak ezekre s ennek következtében a lapok annyira fölmelegednek, hogy egymásután megolvadnak. Megesik gyakran az is, hogy a szigetelő réteg, főként ha üveg vagy csillám, teljesen szétzuzódik. Tesla igen szép tüneményeket létesített azáltal is, hogy a vastag kaucsuklemez egyik oldalát staniol fegyverzettel látta el, mely aztán transformatorának egyik sarkával volt összekötve, a kaucsuklemez másik oldalára pedig vagy sodronyhálóval bevont gyűrűt, vagy pedig valamely nevet kifejező alakká hajlított elszigetelt sodronyt erősített s ezt összeköté a másik sarkkal. Ekkor aztán úgy tetszik, mintha a szigetelő lemez a fémvezetőktől fénypamatokat huzna ki s ezek egészen elborítják apró lángokkal a lapot; így világítá ki például londoni egyik felolvasása alkalmával Sir William Thomson nevét ragyogó fényirásban; oly hódolat volt ez, mely nem maradhatott hatás nélkül. Ha a sarkokra sodronygyűrűk, vagy egy sodronygyűrű és egy fénygömb, vagy párhuzamos fémrudak állíttatnak, akkor a lángok átcsapnak ezek közt s az első esetben «fénylő nap», a másodikban világító gömb s az utolsóban ragyogó fénykéve támad.

A transformator sarkához egy darab hajlékony drótot erősítvén, a drót a készülék müködésének megindításakor ragyogó fénypamatba burkolózik, nyomban forgásnak is indúl, úgy, hogy ezáltal az egész tünemény a transformator sarkán álló világító gömbként tünik fel. Ugy ezen tünemény, mint általában valamennyi itt leirt jelenség, rendkívül feltünően mutatkozik, ha a másik sark nem végződik egyszerüen, hanem nagyságához mért, gondosan csiszolt elszigetelt fémlemezzel van összekötve. Megjegyzendő még, hogy ha az egyik sarkra oly pálczát helyez az ember, melynek egyik vége csúcs, a másik vége gömb, ezen szapora rezgésű és nagy feszültségű elektromos rezgése alkalmával a csúcson és a gömbön egyaránt létrejött a kiáramlás; ismeretes dolog, hogy ha a csúcs és a gömb az egyszerű elektromos gép sarkával közlekedik, az összes elektromosság csaknem kizárólag a csúcson áramlik ki.

Ezen tünemények gyakorlati jelentőség tekintetében még igen távol állanak attól, hogy tényleg felhasználhatók legyenek és így egyelőre csak «szép» látványosságot nyújtanak. Tesla ugyan azt véli, hogy a váltakozások számának fokozása által végtére kizárólag elektromos úton valóságos láng létesíthető, világítani és melegíteni is lehet vele, de hozzáteszi ő maga is, hogy ma még ettől igen távol vagyunk.

Teslá-nak legfontosabb s egyszersmind gyakorlati felhasználhatósághoz legközelebb álló vívmányai az ő világító anyagot tartalmazó izzó lámpái, melyek a nagy feszültséget létesítő transformatorhoz csak egy dróttal vannak kapcsolva és a már használatban levő izzó lámpákétól jelentékenyen eltérő módon válnak világítókká.

Az úgynevezett Tesla-lámpa először is, mint minden izzó lámpa, gömb, vagy körte alakú légüres üvegből áll. Ebbe azonban csak egy platina drót van beolvasztva, mely egyenes vonalban a gömbnek körülbelül közepéig nyúlik s egész terjedelmében üvegbe van beolvasztva. A drót végére többnyire egy kis vastag szénpeczek van erősítve, melyen aztán széngömböcske áll. A szén vezeti az elektromosságot. Tesla azonban szerkesztett és sikerrel hozott működésbe oly lámpákat is, melyekben a vezető fémdrótra nem vezető testek voltak erősítve; ha rubin golyócska tétetett rá, akkor felséges fénytünemények keletkeztek. Alkalmilag használt ezen czélra

Carborundum-ot is, a silicium és szén egy új vegyületét, mely a csiszoló munkáknál a gyémántport helyettesítheti. Az elektromos rezgéseket platina drót vezeti be a lámpába; közönséges értelemben vett áram tehát itt nem jöhet létre, hiszen a vezető szén vagy a rubin golyócskában végződik. A Tesla-lámpát *nem zárt áram* teszi világítóvá; itt tehát azokat az áramokat, melyek az elektromosság régebbi elméleteiben oly sok nehézséget okoztak s melyeknek hatalmunkba kerítését Hertz-től tanultuk meg, technikailag tényleg felhasználva látjuk. Felhasználásuk azzal a nagy előnynyel jár, hogy csak egy vezető drót szükséges.

Ha a lámpákat a csak imént leírt alakban akarná valaki használni, akkor azt tapasztalná, hogy a platina-drótot körülvevő üvegréteg gyorsan fölmelegszik és szétpattan. A lámpa ezen része tehát még külön megvédést követel. Tesla először csillámréteggel veszi körül, melyet aztán ismét fémvédővel, aluminium lemezből készített boritékkal oltalmaz. A csillám és aluminiumréteg leért egészen az izzó anyagig. Tesla a tulajdonképeni légüres lámpagolyót gyakran még egy második, szintén légüres üvegburokkal is körülveszi, mert különben a lámpa nagyon fölmelegszik. Némely lámpák, melyek a rezgések vezetését eszközlő fémhorog segítségével a szoba felső padozatához vannak erősítve, fémből készített ernyővel szereltetnek fel; ennek az ernyőnek azonban itt a fénynek lefelé vetítésén kívül még az is a rendeltetése, hogy közvetlenül a lámpa közelében nagy mennyiségű elektromosságot gyűjtsön össze, tehát egyidejűleg *sűrítőül* is működik.

Tesla olyan lámpákat is szerkesztett, melyeknek egyáltalában nem kell fémi összeköttetésben lenniök az áram elvezető vezetékkel. A transformátorral közlekedő drót vége csavarszerűen van összehajlítva. A lámpa belsejében, az alsó részen hasonló alakú drót van, mely két széngömböcskében végződik. Ha a lámpa az elsőbb említett tekercsbe tétetik, akkor itt bizonyos tekintetben megint transformatorral van dolgunk. A váltakozó áram megindításakor elektromos rezgések létesülnek a belső drótban is és mivel a rezgések száma nagy, ezek hatása alatt a széngömböcske fehér izzóvá válik. Sőt Tesla alkalmilag még a dróttekercset is és egyáltalán minden vezetőt mellőzött egyik lámpájánál s így a gondolható legegyszerűbb alakot találta meg. Alul bezárt, felfelé vékonyodó üvegcső tetején üveggömb van; az egész szerkezet légüres. A gömböt egy másik üveggömb burkolja körül, concentricusan; a két gömb közötti tér szintén légüres. Az így szerkesztett lámpának üvegcsövét a vezetéknek csavarszerűen összehajlított végébe kell helyezni. Előbb már említve volt, hogy a ritkított gáz elektromos rezgések hatása alatt fém közvetítése nélkül is világítóvá válik; ezáltal vezetővé lesz s az energiát a belső gömbhöz vezeti, mely most világító testként tünik fel s minden irányban sugárzik.

A lámpák belsejében a vezetők végén levő világító testek gyakran mérsékelt számu váltakozás mellett is fehér izzókká válnak; az így elért erős fényhatások mellé azonban a szapora elektromos rezgések sajátságának látszó zavaró körülmény is szegődik, az t. i., hogy a molecularis szerkezet lassankint meglazul s a világító testek szétporlanak. Következőleg az ilyen lámpák kevés ideig tartanak.

Tesla lámpáin alkalmilag észrevette, hogy *kisülések érzékeny a mágneses hatásokkal szemben*. A legjobb lámpákban — azokban, a melyekben vezető anyag nincsen — fénynyaláb képződik, mely irányát azonnal megváltoztatja, mihelyt a lámpához mágnest közelítünk; ha a mágnes kellő helyzetben megerősíttetik, akkor a fénynyaláb állandó körforgásba hozható; ha a mágnest megfordítjuk úgy, hogy a ható sarkot kicseréljük, akkor a nyaláb forgása ellenkező irányúvá lesz. Teslá-nak voltak olyan érzékeny lámpái is, melyeknek fénynyalábjai a földmágnesség csekély hatása alatt is forgásba jöttek s így az a páratlan szépségü látvány létesült, hogy az egy lámpából kiinduló s különböző erősségü sugarak, éppen mintha világító toronyból indultak volna ki, egy síkban körülforogtak s a megvilágítás egész terét fénynyel árasztották el. Elektromos gépek és induktorok létesítette fénykévéknek a mágnesek körül való ilynemü forgását előbb is észlelték már; ez esetben azonban az a feltünő, hogy itt váltakozó áram működik, mely a világító testeket egyik pillanatban éppen olyan mértékben tölti meg positiv elektromossággal, mint a rákövetkező pillanatban negativval. Az, hogy a mágnes az egymásra következő ellentétes irányu kisülésekre mégis egy és ugyanazon értelemben irányítólag hat, azt mutatja, hogy a kétféle kisülés nem lehet teljesen æquivalens.

Nem érdektelenek amaz elméleti nézetek sem, melyeket Tesla kisérleteire támaszkodva kifejtett.

Theoriájának alapját Crookes-nek *moleculák bombaszerü mozgásáról* táplált véleménye képezi. Ez a vélemény igen kényelmes, de nem kielégítő. Bizonyára nem tagadható, hogy nevezetesen az elektromos oscilláló kisülések hatása alatt — és úgy látszik, hogy más kisülés, mint oscilláló kisülés nincs is — az anyag jelentékeny mértékben porlik s aztán az elvált részecskék egyenes vonalban egészen az edény faláig röpíttetnek, úgy, hogy ez esetben az anyagrészecskék valósággal bombákhoz hasonlóan mozognak. Ama sugárzári tünemények azonban, melyek a légüres térben a kathodok közelében mutatkoznak, nem magyarázhatók meg az elektródul használt szilárd anyag, vagy a gáz részecskéinek tovaröpüléséből. Pedig éppen ezen tünemények azok, melyeket Crookes az ő *sugárzó anyaga* alatt ért. Hogy ezek a fényjelenségeket, melyeket Hittorf jóval Crookes előtt tanulmányozott már s melyek éppen ezért helyesebben Hittorf-féle sugártüneményeknek nevezendők, tisztán æthermozgások és nem sugárszerüen mozgatott anyagmoleculák hozzák létre, azt kimutatták előbbi időben

WIEDEMANN E. és GOLDSTEIN, újabb időben WIEDEMANN, EBERT és HERTZ kisérletei, egészen kézzelfogható módon pedig LÉNÁRD kisérletei. Mindezen kisérletek alkalmával a HITTORF-féle sugarak akadály nélkül keresztül hatoltak fémlemezeken, melyek a könnyen mozgatható hydrogén moleculákat sem bocsátották át, a mennyiben a rájuk nagy nyomást kifejtő hydrogénnel szemben gáztól mentesen tartották a tért.

TESLA az ő CROOKES-féle nézetét még sajátságos módon ki is szinezi. Felfogásának jellemzésére hadd szóljon ő maga: «Bátran elfogadhatjuk, hogy a moleculák odaütődésének nagy része van a felmelegedés előidézésében még akkor is, ha ez ritkított levegőjü térben történik is. Ha ez utóbbi esetben a moleculák száma aránylag jelentéktelen, kevés az ütközések száma is, de a moleculák sokkal nagyobb sebességre tehetnek szert, úgy, hogy az ezen okból származó hőhatás jelentékenynyé lehet. Mi szakítja le a moleculákat? Erre nézve TESLA így nyilatkozik: «A világító test olyam áramtermelővel köttetik össze, melynek árama nagy és gyorsan változó potentiállal bir s ezáltal a gáz-moleculák arra indíttatnak, hogy másodperczenként igen sokszor rendkívüli sebességgel a testhez ütközzenek és ezt ezáltal izzóvá tegyék.» Hogy tulajdonképpen mi «indítja» itt a moleculákat, az nincs megmondva. A transformátor egyik sarkával összekötött drót-pörgettyüre vonatkozólag ezt mondja: «Ha a transformátor dróttekercsét nagy számu váltakozással biró áramok járják át, akkor ez a lég-moleculákat ütemszerüleg magához vonja és eltaszítja. Minthogy az erő, mely eltaszítja őket, nagyobb mint az, mely vonzotta őket, azért az eredmény a szárnykerék felületére ható taszítás lesz.»

Az æthernek és az anyagnak kölcsönhatásáról, melynek itt bizonyára szerepe van, ezt a képet alkotja magának TESLA: «Mindazon képek közül, melyeket az ember a természetről alkot, tudományos alapon az a legbiztosabb, mely egy anyagot, egy erőt és teljes egyformaságot tételez föl mindenütt. Legvalószinübbnek látszik előttem egy olyan mérhetetlen világegyetem, melyben a moleculák s ezek atomjai pályákon mozognak, mint az égitestek s magukkal viszik az æthert s azt valószinűleg mozgásra indítják. A moleculák s ætherburkolatuk mozgása ætherfeszültségeket vagy elektrostatikai áramlásokat létesít, az ætherfeszültségek kiegyenlítődése pedig æthermozgásokat vagyis elektromos áramokat, ellenben a pályákon való mozgás mágneses hatásokat létesít.»

Az itt röviden ismertetett kisérletek a legfényesebbek közé tartoznak, a melyeket az elektromosság segítségével egyáltalában tenni lehet. Ezek kigondolása nagy érdeme TESLÁ-nak, s ennek elismerése nem szenved csorbát, ha elméleti nézeteit a tudomány óvatossággal fogadja.

Dr. *H. Ebert* u. közli: *Ratkovszky Pál.*

MEGOLDOTT FELADATOK.

16. *Valamely p torzió-együtthatóju szál alsó végére T tehetetlenségi nyomatéku tömeg van függesztve. Mekkora szöggel fordul el ez a tömeg a szál mint függélyes tengely körül, ha a szál felső végét t idő tartamában a szöggel egyenletesen megsodorjuk? A szál tömege a felfüggesztett testéhez képest elenyésző.* (CZÓGLER.)

*

Megoldás Szontagh Gusztáv főreáliskolai tanár úrtól Brassón.

Ha szilárd test fix tengely körül forog, minden pontja t időben ϑ szöget ír le s

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$$

szögsebességnek neveztetik,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

az ú. n. szögsurlódás.

D'ALEMBERT elvéből következik:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{F}{T}$$

ha F a forgási nyomatékot, T pedig a test tehetetlenségi nyomatékát jelöli. A forgási nyomaték itt a szál sodrása folytán jön létre s arányos a sodrási szöggel, a mely tetszőleges t idő utan $(a-\vartheta)$-val egyenlő.

$$F = p\,(a-\vartheta)$$

lévén

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{p}{T}\,(a-\vartheta).$$

Ezen differentiál egyenletet integrálva nyerjük ϑ-t kifejezve t-nek függvényében. Az integrálás útja ez:

$$2\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 2\frac{p}{T}(a-\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\frac{p}{T}(a-\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \int 2\frac{p}{T}(a-\vartheta)\,d\vartheta + C$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{2pa}{T}\vartheta - \frac{p}{T}\vartheta^2 + C}$$

$t=0$ időben $\vartheta=0$ s a szögsebesség is $\frac{d\vartheta}{dt} = s$ lévén, $C = 0$, s ennélfogva

$$dt = \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2pa}{T}\vartheta - \frac{p}{T}\vartheta^2}}$$

Ezen egyenlet integrálásából *:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\frac{p}{T}}}\text{arc cos}\left(1-\frac{\vartheta}{a}\right) + C$$

$$t\sqrt{\frac{p}{T}} = \text{arc cos}\left(1-\frac{\vartheta}{a}\right) + C$$

A C állandó meghatározására azon körülmény szolgál, hogy $t = 0$ időben $\vartheta=0$ s így

$$C = -\text{arc cos } 1$$

azaz $C=0$, s így

$$t\sqrt{\frac{p}{T}} = \text{arc cos}\left(1-\frac{\vartheta}{a}\right)$$

miből végre:

$$\vartheta = a\left(1-\cos t\sqrt{\frac{p}{T}}\right)$$

A mozgás tehát periodikus, $t = 0$-tól $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}$-ig $\vartheta < a$; ha $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}$, akkor $\vartheta=a$; ezen túl $\vartheta > a$, míg $t = \pi\sqrt{\frac{T}{p}}$ idő mulva $\vartheta = 2a$ maximális értékét érte el. Ezen időponttól fogva ϑ fogy, míg $t = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}$ időben megint $\vartheta=a$ etc.

* FRÖHLICH: Math. repertorium 130. lap 31. képlet.

A feladatnak ez a kitétele: «. . . ha a szál felső végét t idő tartalmában a szöggel *egyenletesen* megsodorjuk» azt mondja, hogy $2t$ idő tartamában $2a$ szöggel, $3t$ idő tartamában $3a$ szöggel, és í. t. sodorjuk meg.

E szerint a

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{p}{T}(a-\vartheta)$$

egyenlet integrálása közben *a nem tekinthető állandónak,* hanem a egyelőre például $= at$, hol a az időegységenkénti sodrás.

Uj változó bevezetésével a fentebbi egyenlet a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - k^2x$$

alakra hozható, melynek integrálja ismeretes, s melynek állandói szintén azon feltételből határozhatók meg, hogy $t = 0$ időben úgy ϑ mint $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$.

Az eredmény a levezetetthez hasonló, periodikus mozgást előtüntető képlet lesz: melynek taglalása szintén nem érdektelen. CZÓGLER.

A feladatnak ugyanily megoldását beküldte Fuchs Károly főgymn. tanár úr Pancsován.

---

17. *Egy 20 m. hosszaságú tekepálya 2 m. magasságú hengerdobban végződik; a 10 m.-nyi sebességgel elindított golyó 0·10 surlódási együtthatókkal mozog. Mekkora sebességgel érkezik a golyó a dob tetejére?*

(FRÖHLICH.)

*

Első megoldás Szontagh Gusztáv főreálisk. tanár úrtól Brassón.

Az s=20 m. hosszaságú síkpályán c=10 m. sebességgel elindított golyó az állandó surlódási erő behatása alatt egyenletesen lassudó mozgással halad. A mozgást lassító erő gyorsulása γ ez esetben negativ, értéke pedig :

$$\gamma=\beta g=0{\cdot}10\ g=0{\cdot}981 \text{ m/mp}^2$$

ha β a surlódás együtthatóját jelenti.

Legyen a sebesség a síkpálya végén v_1 s legyen t az idő, mely alatt a golyó ezen a pályán végig halad.

A lassudó mozgás képleteiből

$$v_1 = c - \gamma t$$
$$s = ct - \tfrac{1}{2}\gamma t^2$$

az idő kiküszöbölése után

$$v_1 = \sqrt{c^2 - 2\gamma s}$$

Az értékeket behelyettesítvén,

$$v_1 = 7{\cdot}79 \text{ m.}$$

Ezzel a sebességgel indul a golyó a dobban felfelé, még pedig egyenlőtlenül lassudó mozgással, miután most az akadályozó erők többé nem állandók. A golyó a dobban körpályán mozog. Mozgását két erő lassítja; az egyik az mg nehézségi erő tangentiális componense, a másik a surlódás, a mely szintén az érintő irányában hat s a normális nyomás β-szorosával egyenlő, ha β a már említett surlódási tényező.

Ha a golyót körpályájának egy tetszőleges A pontjában vesszük figyelembe, a mely ponthoz tartozó érintő ϑ szöggel hajlik a vízszinteshez, úgy ott az akadályozó t. i. lassító erők

$$P_t = mg \sin \vartheta$$
$$R = \beta N$$

hol P_t a nehézségi erő tangentiális compenensét, R a súrlódási erőt, N pedig a normális nyomást jelenti. Ez utóbbinak értéke nyilván

$$mg \cos \vartheta + \frac{mv^2}{r},$$

ha r a dob sugara s v a szemügyre vett pontban a mozgás sebessége. A surlódási erő e szerint

$$R = \beta \left(mg \cos \vartheta + \frac{mv^2}{r} \right).$$

$$P_t + R = mg \sin \vartheta + \beta mg \cos \vartheta + \beta \frac{mv^2}{r}$$

Az ismeretes

$$v dv = p ds$$

képletből kiindulván *, mindenek előtt a p gyorsulást kell kifejezni, a mely ezen esetben negativ. Értéke

* Ugyanis az eleven erő tétele itt, ha mp a pályamenti összes erő (a ds-re merőleges componens itt nem végezhet munkát):

$$d\left(\tfrac{1}{2} mv^2\right) = (mp)\, ds = -(P_t + R)\, ds.$$

F.

$$p - = \frac{P_t + R}{m}$$

$$-p = g \sin\vartheta + \beta g \cos\vartheta + \beta\frac{v^2}{r}.$$

Ennek következtében:

$$v dv = -\left(g \sin\vartheta + \beta g \cos\vartheta + \beta\frac{v^2}{r}\right) ds$$

De $ds = r d\vartheta$ lévén

$$v dv = -gr \sin\vartheta d\vartheta - \beta gr \cos\vartheta d\vartheta - \beta v^2 d\vartheta.$$

Ez tehát a mozgás differentiálegyenlete, melyet integrálni kell, hogy bármely ϑ-nak megfelelő v-jét megnyerhessük.

Hogy az egyenlet integrálható legyen, előbb ily alakban írjuk:

$$v dv + \beta v^2 d\vartheta = -gr \sin\vartheta d\vartheta - \beta gr \cos\vartheta d\vartheta$$

s azután az egyenlet mindegyik tagját $2\beta e^{2\beta\vartheta}$-val megszorozzuk *

$$2\beta e^{2\beta\vartheta} v dv + 2\beta^2 v^2 e^{2\beta\vartheta} d\vartheta = -2\beta gr e^{2\beta\vartheta} \sin\vartheta d\vartheta - 2\beta^2 gr e^{2\beta\vartheta} \cos\vartheta d\vartheta.$$

A baloldal most teljes differentiál, u. i.

$$d\,(\beta v^2 e^{2\beta\vartheta}) = -2\beta gr e^{2\beta\vartheta} \sin\vartheta d\vartheta - 2\beta^2 gr e^{2\beta\vartheta} \cos\vartheta d\vartheta.$$

Integrálván s β-val rövidítvén,

1) $$v^2 e^{2\beta\vartheta} = -2gr \frac{2\beta \sin\vartheta - \cos\vartheta}{1+4\beta^2} e^{2\beta\vartheta} - 2\beta gr \frac{2\beta \cos\vartheta + \sin\vartheta}{1+4\beta^2} e^{2\beta\vartheta} + C.$$

A constans meghatározására azon körülmény szolgál, hogy $\vartheta=0$ értékére $v=v_1$, hol v_1 a már kiszámított kezdeti sebesség. Ha $\vartheta=0$, az 1)-ből:

2) $$v_1^2 = \frac{2gr - 4\beta^2 gr}{1+4\beta^2} + C.$$

Az 1) egyenletből a 2) egyenletet kivonván, C kimarad.

---

* Ha rövidség kedveért

$$-2gr\left\{\sin\vartheta + \beta\cos\vartheta\right\} = F(\vartheta),$$

a differentiálegyenlet:

$$\frac{d\,(v^2)}{d\vartheta} + 2\beta\,(v^2) = F(\vartheta),$$

mely (v^2)-re nézve első rendű s első fokú. Ennek a közönséges úton való megfejtése szintén szolgáltatja a szöveg eredményét. *F.*

$$v^2 e^{2\beta\vartheta} - v_1^2 = \frac{4\beta^2 gr - 2gr}{1+4\beta^2} - \sin\vartheta \frac{4\beta gr + 2\beta gr}{1+4\beta^2} e^{2\beta\vartheta} -$$

$$- \cos\vartheta \frac{4\beta^2 gr - 2gr}{1+4\beta^2} e^{2\beta\vartheta},$$

miből végre

$$v^2 = \left[v_1^2 + \frac{2gr(2\beta^2-1)}{1+4\beta^2}\right] e^{-2\beta\vartheta} - \frac{6\beta gr}{1+4\beta^2} \sin\vartheta -$$

$$- \frac{2gr(2\beta^2-1)}{1+4\beta^2} \cos\vartheta.^*$$

A dob tetején $\vartheta = \pi$ lévén :

$$v^2 = \left[v_1^2 - \frac{2gr(1-2\beta^2)}{1+4\beta^2}\right] e^{-2\beta\pi} - \frac{2gr(1-2\beta^2)}{1+4\beta^2}.$$

Az értékeket helyettesítvén :

$$v = 2{\cdot}03 \; m/mp.$$

*

Második megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

1) A mozgást a hengerdob tengelyére merőleges síkban képzelvén: először is meghatározzuk a sebességet, melylyel a golyó a henger alkotójához ér.

A surlódás, mint a mozgással ellenkező irányú erő fogható fel s ez esetben mérsékelt sebességű mozgásról lévén szó, a nyomással, a mi itt a golyó súlya, egyenesen arányosnak vehető.

E szerint a síkpályában nyilvánuló lassító erő

$$m\frac{d^2s}{dt} = -\gamma mg$$

hol γ a surlódás coefficiense, m a golyó tömege és g a nehézség okozta gyorsulás.

Az egyenletet

---

* vagy még:

$$v^2 = v_1^2 e^{-2\beta\vartheta} + \frac{2gr}{1+4\beta^2}\left\{(1-2\beta^2)(\cos\vartheta - e^{-2\beta\vartheta}) - 3\beta\sin\vartheta\right\}.$$

Ha súrlódás nincs: $\beta = 0$ és marad a közönséges kifejezés $v^2 = v_1^2 - 2gr(1-\cos\vartheta)$, hol $r(1-\cos\vartheta)$ a golyó magassága a pálya vízszintes része fölött. *F.*

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -2\gamma g ds,$$

alakba hozván, integrálás útján lesz

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - 2\gamma g s$$

hol c^2 az integrálás állandója az $s=0$-nak megfelelő: a kezdő sebesség négyzete, mely adva van.

E szerint a síkpálya bármely pontjában a sebesség:

$$\frac{ds}{dt} = V = \sqrt{c^2 - 2\gamma g s}.$$

A pálya végén ($s=h$) pedig

$$V_h = \sqrt{c^2 - 2\gamma g h}.$$

2) A golyó további mozgása feltétel szerint egy vertikális kör belső kerületén történik s így a mozgást akadályozó (lassító) erő:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\varphi - \gamma\left\{mg\cos\varphi + \frac{m}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\},$$

azaz: a golyó súlyának tangentiális componense és normális componensének meg a centrifugalis erőnek föltételezett arányos része.

Ha minden tagot m-mel osztunk és a pálya ívéből képezett differentialhányadosokat φ középponti szöggel fejezzük ki, φ-t a verticális és a mindenkori vezérsugár zárván be úgy, hogy az idővel nő, lesz $s=r\varphi$, miből

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = r\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Ezekből pedig

$$d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{2g}{r}\sin\varphi d\varphi - \frac{2g\gamma}{r}\cos\varphi d\varphi - 2\gamma\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 d\varphi.$$

Tétessék $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = y$, akkor

$$dy + \left[2\gamma y + \frac{2g\gamma}{r}\cos\varphi + \frac{2g}{r}\sin\varphi\right]d\varphi = 0,$$

mely egyenlet integrálja:

$$y = e^{-2\gamma\varphi}\left[C - \frac{2g}{r}\int e^{2\gamma\varphi}(\sin\varphi + \gamma\cos\varphi)\,d\varphi\right]^*$$

* Vész: F. M. I. k. 170. l. 3.

és:

$$\int e^{2\gamma\varphi}\sin\varphi d\varphi = \frac{e^{2\gamma\varphi}}{4\gamma^2+1}(2\gamma\sin\varphi - \cos\varphi)\,; \quad \text{s í. t.*}$$

tehát:

$$y = Ce^{-2\gamma\varphi} - \frac{2g}{r(4\gamma^2+1)}[(2\gamma\sin\varphi - \cos\varphi) + \gamma(2\gamma\cos\varphi + \sin\varphi)],$$

hol C az integrátio állandója.

y helyett értékét visszahelyezvén és r^2-tel szorozván:

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = r^2 Ce^{-2\gamma\varphi} - \frac{2gr}{4\gamma^2+1}[(2\gamma\sin\varphi - \cos\varphi) + \gamma(2\gamma\cos\varphi + \sin\varphi)].$$

Ha $\varphi=0$

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2 - 2\gamma gh = r^2 C + \frac{2gr}{4\gamma^2+1}(1-2\gamma^2)$$

és:

$$r^2 C = \frac{(c^2-2\gamma gh)(4\gamma^2+1) - 2gr(1-2\gamma^2)}{4\gamma^2+1},$$

azaz:

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 =$$

$$\frac{[(c^2-2\gamma gh)(4\gamma^2+1) - 2gr(1-2\gamma^2)]\,e^{-2\gamma\varphi} - 2gr\,[3\gamma\sin\varphi - (1-2\gamma^2)\cos\varphi]}{4\gamma^2+1}$$

vagy röviden:

$$V = [(Ae^{-2\gamma\varphi} - B_1\sin\varphi + B_2\cos\varphi)]^{\frac{1}{2}},$$

a sebesség a körpálya bármely pontjában, hol az új állandók értékét egyszerű összehasonlítás mutatja.

$\varphi=\pi$ esetében:

$$V' = \sqrt{(Ae^{-2\gamma\pi} - B_2)}$$

a sebesség a vertikalis átmérő felső végén.

A numerikus értékek helyettezése után:

$$A=42{\cdot}27,\quad B_2=18{\cdot}49,\quad e^{-2\gamma\pi}=0{\cdot}5336,$$

$$V' = 2{\cdot}03\,\frac{m}{mp}.$$

---

* Fröhlich: M. R. 150. l. 5 és 6.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Márczius 1. GRUBER NÁNDOR: A Gramme-féle gyűrű elmélete.
Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről.
Márczius 15. Dr. HOÓR MÓR: A villámhárító elméletéről.
Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről.

*

Az észak-amerikai observatóriumokról.*

A mult évben, a nyár folyamán tett amerikai tanulmányutam egyik főczélja volt az ottani fontosabb csillagászati intézetek megtekintése. Az ez alkalommal tett főbb tapasztalataimról leszek bátor e helyen beszámolni.

Az első utamba eső jelentékenyebb observatórium a washingtoni U S. Naval Observatory volt. Ezen intézet még pár évvel ezelőtt a Potomac folyó partján állott, de nem régiben Washington észak-nyugati külvárosába, Georgetownba helyezték át, egy domb tetejére, hol a Potomac gőzei kevésbbé zavarják az észlelést, mint az intézet előbbi helyén. A mintaszerűen berendezett és igen szépen felszerelt observatorium monumentális fehér márvány palotában van elhelyezve. Főműszere a 26″-es refractor. Mechanikai felszerelése igen kényelmes; a beállítás megkönnyítésére egy Prof. HARKNESS-től származó berendezést alkalmaztak a tengelyekre, mely lényegében véve két durván fokokra osztott számlapból áll, egy-egy mutatóval; egyik a declinatiót, másik a rectascensiót mutatja, úgy hogy a műszer alulról a legnagyobb könnyűséggel beállítható közelítőleg az ég kivánt pontjára a nélkül, hogy a pontosabb osztású körökhöz tartozó mikroskópokat használni kellene. Ez a műszer már sok szolgálatot tett a tudománynak: vele végezte A. HALL igen pontos kettős csillag-méréseit és fedezte fel

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat f. é. február 1-én tartott rendes ülésén.

1877-ben Mars két kísérőjét is. Az intézet egyéb műszerei egy 10″-es refractor, 2 meridiánműszer és kisebb eszközök.

Minthogy az observatórium főképen a tengerészet czéljainak szolgál, egyik fontos feladata a chronometerek vizsgálata, különféle hőmérsékleteknél; ezért mindig körülbelül 50 drb chronometert tartanak készletben a tengerészek számára. Végül említést érdemel még az intézet igen szépen berendezett könyvtára is, melyben mintegy 15,000 kötet van és pedig főleg csillagászati, physikai és mathematikai munkákból.

A Naval Observatory közvetlen szomszédságában áll a jezsuiták kis csillagvizsgálója, mely főkép egy igen eredeti vizsgálati módszer miatt érdemel emlitést. Itt ugyanis sokat foglalkoznak az égitestek photographiai úton való helymeghatározásával egy különös, photochronographnak nevezett műszer segítségével. Ez nem egyéb, mint egy kisebb fajta — $4\frac{1}{2}''$-es — photographáló távcső, melyben az objectiv és a lemez között egy elektromágnessel mozgatott diaphragma van elhelyezve. Az elektromágneses készüléket egy chronometerrel másodperczenként megszakított áram hozza mozgásba s ennek következménye, hogy a mozdulatlan távcső mezején, tehát a phot. lemezen áthaladó csillag másodperczenként elfödetvén, a lemezen szakgatott vonalat húz. Ha ugyanazon lemezen egy másik csillag képét is végig járatják, ennek nyoma az előbbihez párhuzamos, s most ismerve mindkét esetben az első árammegszakításnak megfelelő időt, a photographia kimérése révén a két csillag *AR*-különbsége igen pontosan meghatározható. A két nyom távolságából a *D*-különbség adódik ki. A módszer s berendezése Fargis tanártól ered. A műszerrel tett vizsgálatok még nincsenek befejezve, s azért bajos a módszer megbízhatóságáról itéletet alkotni.

Ugyancsak Washingtonban van Langley magánobsorvatóriuma is, a Smithsonian Institution parkjában; ezen intézet csakis bolometeres megfigyelésekre szolgál. Mivel az Allegheny-Cityben levő observatórium is lényegében véve ezen vizsgálatokat tűzte ki fő feladatául, a kettőt összefoglalhatjuk. A Langley-féle bolometer* hősugárzás mérésére szolgál; a fémek ama tulajdonságán alapszik, hogy elektromos ellenállásuk a hőmérséklettel igen erősen változik. Szerkezete lényegeben véve a következő: egy jó izolátorból, rendesen ebonitból készült gyűrűre igen finom platinavagy vasdrótok egész hálózata van kifeszítve: ezekre hat az illető hőforrás sugárzása. Ezen vezetők egy Wheatstone-híd egyik ágát alkotják, s így ellenállásuk legcsekélyebb változását egy a hídba kapcsolt igen érzékeny galvanometer pontosan megmutatja. Természetesen az itt használt ösz-

* A módszert s a vele elért eredményeket legközelebb bővebben ismertetjük. *Szerk.*

szes ellenállásokat igen gondosan meg kell védeni minden más hőhatás ellen, mert ez utóbbiak különben a galvanometer állására szintén erősen hatnának. Ezt a rendkívül érzékeny műszert Langley első sorban a a nap sugárzásának mérésére használta, főleg a légkör absorptiójának tanulmányozása czéljából. Ezért az Allegheny-ben végzett méréseket a Mount Whitney dél-californiai 4000 m. magas hegycsúcson tett méréseivel hasonlította össze. Igen érdekes, hogy ilyen méréseknél a bolometer gyakran a nap sugárzásában nagy ingadozásokat mutat, mikor pedig a légkör állapotában semmiféle szemmel látható változás észre vehető nem volt. Az ilyen változásokat szemmel nem látható, de azért jelentékeny absorptióval biró felhők okozhatják. A bolometer a spektrum hőeloszlásának tanulmányozására is igen alkalmas. Az ezen czélra szolgáló, jelenleg W.-ban felállított u. n. spektrál-bolometer törőközege egy tekintélyes nagyságú kősóprizma, s az ezáltal létrejött spektrum a mozgathatólag elhelyezett, egyetlen fémdrótból álló bolometerre esik. Hogy a sugárzás lefolyását áttekinthető alakban előállíthassák, a galvanometer mozgását photographiai úton registrálják, u. i. a tükörgalvanometer tükréről visszavert fénysugár egy függélyes vezetésben mozgó photographiai lemezre esik, s a lemezt a bolometerrel egyidejűleg mozgatják. A lemezen ily módon létrejövő görbe a spektrum hőeloszlását tünteti elő. A bolometer kiváló érzékenységét mutatják az igen csekély intenzitású földi hőforrásokra és a holdra vonatkozó mérések; így pl. egy 0° hőmérsékletű jégtömeg hősugárzása és a sugárzás eloszlása az utóbbinak spektrumában nehézség nélkül meg volt határozható. A hold sugárzását Alleghenyben igen behatóan tanulmányozták, holott ezen hatásnak csak puszta kimutatása is a Melloni-féle thermomultiplicatorral a legnagyobb nehézségekkel jár. A hold korong különböző részeinek sugárzását megmérvén, sikerült az egyenlő sugárzás görbéit a hold felületén meghúzni. Sőt még azt is sikerült kimutatni, hogy holdphasis esetében a sugárzás az árnyék határára merőleges irányban másképen változik növekedő, mint fogyó holdnál. Ennek így is kell lenni, mert míg fogyó holdnál a hold felületnek a napsugaraktól átmelegített részei jutnak bele az árnyékba és ott hűlni kezdenek, addig növekedő holdnál a 14 napig tartó éjjelen át kihűlt részek kerűlnek a napsugarak melegítő behatása alá, tehát a hőmérsékletnek az első esetben az árnyék határa környékén a sötét résztől a világos rész felé menve másképen kell változnia mint az utóbbi esetben.

Az Allegheny-observatóriumban különben még ezeken kívül csillagspektrumok photographálásával is foglalkoznak, mely czélra egy középnagyságú aequatoreal szolgál.

Utamat tovább nyugat felé folytatván, elértem utazasom egyik főczélját, a californiai hegyekben fekvő Lick-Observatoriumot. Ez az intézet a legutóbbi évtizedben keletkezett, de már rövid fennállása alatt is oly nevezetes eredményeket tud felmutatni, hogy nem csak az amerikai csillagvizsgálók között foglalja el az első helyet, hanem világhírre is tett szert. — Az intézet a nemrégiben elhúnyt James Lick dúsgazdag californiai gyáros bőkezű adakozásának köszöni lételét. Nem tudni, hogy tulajdonképen mi vezette Lick-et, ki semmi különös tudományos képzettséggel nem birt s azt mondják, hogy életében még nagyobb teleszkopot nem látott soha, arra a gondolatra, hogy óriási vagyonának tekintélyes részét, 700,000$-t egy csillagászati observatórium építtetésére fordítsa. Élete vége felé ugyanis sokat gondolkozott azon, hogy mi módon tudna magának olyan maradandó emléket emelni, melylyel nevét halhatatlaná tenné, de tervei egészen más körben mozogtak : valami óriási márvány-pyramist akart magának siremlékül építtetni a san-franciscoi öbölben, vagy többszörös életnagyságú szobrait állítatni fel az Egyesült-Államok partvidékein s több efféle. Nehány józan barátjának, közöttük első sorban Prof. Davidson-nak, szerencsésen sikerült őt ezen kalandos és az utókorra nézve semmi haszonnal sem járó terveiről lebeszélni s úgy látszik ez időben jött azon gondolatra, hogy egy óriási teleszkopot építtessen. Ezért több szakértővel értekezve, végre 700,000$-nyi összeget vett fel végrendeletébe egy olyan teleszkop számára, mely nagyobb és tökéletesebb legyen, mint minden ilynemű ez időben létező műszer s evvel kapcsolatban mindenféle mechanikai berendezésre, a mi egy ilyen műszerhez szükséges, egy ezzel összeköttetésben levő tökéletes felszerelésű csillagdára és végül azon telek kisajátítására, melyet egy általa kinevezett bizottság ezen czélra ki fog jelölni. Az összeg pedig a californiai egyetem tulajdonát képezze és a csillagvizsgáló is ezen intézethez tartozzék. Helyéül olyan pontot akart választani, mely könnyen hozzáférhető és általában turisztikai szempontból is előnyös legyen, úgy hogy az ott felépítendő observatórium egyetlen-egy, a környéken megforduló utas figyelmét sem kerülhesse ki. Erre a 70-es évek közepe felé a csillagvizsgáló kérdésével megbízott bizottság Newcomb-ot kérte fel, hogy tanulmányozza a beszerzendő objektiv kérdését és lépjen összeköttetésbe a nevezetesebb európai és amerikai optikai czégekkel. Newcomb gondosan tanulmányozva az optikai üvegek készítésére vonatkozó eljárásokat, tanulmányait közölte a bizottsággal, s ennek alapján megállapodtak hogy a nagy távcső objektivja semmi esetre se legyen nagyobb 36″-nál, hogy a nyers anyag szállításával a párizsi Feil-czéget, csiszolásával pedig Clark cambridgeporti optikus és mechanikust bízzák meg. Az anyag előállítása nagy nehézségekkel járt ugyan, és hosszú időt vett igénybe, úgy hogy csak a 80-as évek közepén jutottak Clark-ék a szükséges nyers anyag birtokába, melynek csiszolását 50,000$-ért vállalták el. — Ezenközben a bizottság behatóan megvizsgálta az observatórium helyének a kérdését, s Burnham chicagói csillagászt bízta meg összehasonlító megfigyelésekkel különféle, ezen czélra alkalmasnak látszó magas fekvésű ponton. — Az összehasonlító észlelésekből, különösen kettős csillagok megfigyeléséből kiderült, hogy a Mount Hamilton, — 1400 m. magasságú hegycsúcs a Sierrák egyik nyugati lánczolatában, — a csillagda számára kiváltképen alkalmas. Az itt végzett megfigyelések tartama alatt 60 este közül 42 egészen derült volt, úgy hogy ezeken Burnham a legerősebb nagyításokat használhatta a legnehezebben felbontható kettős csillagok mérésére. A hely mellett azután meg is állapodtak, miután a Santa-Clara grófság a San-José legközelebbi vasúti állomástól a hegyre felvezető kocsiútnak saját költségén való kiépítését elvállalta. Ezen út építési költségei 78,000$-ra rúgtak. Az observatórium czéljaira az állam körülbelül 2600 acre-nyi területet tartott fenn, mely nagy terület kirekesztése ezen a helyen azért szükséges, mert ezen környéken gyakori erdőégésekből eredő tűzveszélytől kellett az intézetet megóvni. Erre hozzáfogtak az építkezéshez, mely ezen félreeső, nehezen hozzáférhető helyen sok nehézséggel és nagy költségekkel járt. Különösen az építkezéshez szükséges terület kiegyengetése a hegy csúcsán, mely nagy sziklatömegek lerepesztését tette szükségessé, tartott igen sokáig, úgy hogy az intézet műszereivel együtt csak 1888-ban készült el teljesen.

A tulajdonképeni observatórium két épületben van elhelyezve; ezek mögött állanak a lakóházak a csillagászok számára, raktárak, a műhely és egyéb melléképületek. Az observatórium főépülete a 36″-es teleszkop nagy kupolájából és a 12″-es teleszkop kisebb kupolájából áll, melyeket egy 57 méter hosszú csarnok köt össze. Itt vannak elhelyezve az intézet chronometerei és kisebb műszerei, a könyvtár és a gyűjtemények és két iroda. A nagy kupola 23 méter átmérőjű és egészen vasból van készítve, kinyitható része 10 láb széles. A forgatásra, mely kifogástalanúl és aránylag igen gyorsan megy, egy vízmótor szolgál körülbelül 90,000 kg. súly mozgatására 90·5 kg súly elegendő. — Ebben a kupolában áll az intézet főműszere, a 36″ (91 cm.) nyílású óriási teleszkop, ez idő szerint a legnagyobb nyílású távcső a világon. Gyútávola 17·2 méter, úgy az általa létesített nap-kép a gyújtósíkban 15 cm. átmérőjű. Hogy ezen, csakis ocularmegfigyelésekre készült és ezért a látható sugarakra achromatizált távcsövet photographiai czélra is használhassák, egy 34″-es correctiólencsét is készítettek hozzá, mely convergens levén, a rendszer gyújtótávolát körülbelűl 2·5 m-rel rövidíti meg. Ezen objektiv rész, daczára nagy méreteinek, megfelelő gépezetek segélyével igen gyorsan feltehető és levehető. — Hogy a phot. objektiv használata közben a gyújtósíkhoz hozzá lehessen férni, a távcső ennek megfelelő helyén hosszúkás nyílás van oldalt kivágva, melyen benyúlva, a kaseták és a pillanatzár kényelmesen kezelhetők. A legfontosabb, refractorra alkalmazható mellék-készülék az intézet óriási spektroszkopja, több különböző prizmával és egy Rowland-féle diffractio-rácscsal nagy dispersiókra; dispersiója oly nagy, hogy állítólag 50 egymásután felállított üvegprizmáéval volna egyenlő, ha ugyanis lehetne ennyi prizmán át egyáltalában észlelni. — A nagy teleszkop még 3 állandóan ráerősített 6″, 4″ illetőleg 3″-es keresővel van ellátva, és szükség esetében, fotografálás alkalmával az intézet 12″-es távcsöve is könnyen rá alkalmazható keresőnek. — A műszer mechanikai berendezése Warner & Swasey clevelandi mechanikusok műhelyében készült, és minden tekintetben kifogástalan. A tengelyek oly jól vannak ágyazva és az összes mozgó-részek oly gondosan ellensúlyozva, hogy az egész óriási távcső kézzel mozgatható. A durva beállítás alulról kötelekkel történik, a finom mozgások úgy az oculártól mint alulról is egyaránt kezelhetők. Az elektromos control-készülékkel ellátott óragép járása szintén kifogástalan. Az észlelő kényelmére a kupola padlója Grubb tervei szerint mozgathatólag van berendezve, úgy hogy az észlelőnek nincs szüksége magas észlelő létrára, hanem az oculárt mindig a padlón állva elérheti, mely függélyes irányban bármely tetszőleges helyzetbe hozható; a padló mozgatását hydraulikus sajtók eszközlik. A nagy refractor kitünő optikai tulajdonságairól ottani látogatásom alatt bő alkalmam volt meggyőződni. Láttam benne a Saturnust, egy csillaghalmazt és a gyűrűködöt a Lyrában; a képek élessége és egyúttal rendkívüli fényessége meghaladt mindent, mit eddig kisebb műszereken láttam. Leginkább a gyűrűköd lepett meg, mely különben elég fénytelen és csekély kiterjedésű objektum, bámulatos fényesnek mutatkozott, és még gyakorlatlan szem is felismerhetett rajta olyan részleteket, melyeket kisebb műszeren még egyáltalában alig volt lehetséges meglátni. A kis csillag a köd közepén igen tisztán látható volt, és a képek még erős, 1000 nagyítás mellett sem szenvedtek semmit élesség dolgában. Megjegyzendő, hogy az achromatizálás daczára a különböző hullámhosszú sugarak gyújtótávola eléggé különböző úgy, hogy a legszélső látható viola sugarakról a vörösekre átmenve, a műszer oculárjának beállításán több cm.-t kell változtatni, és ezért pl. bizonyos monochromatikus fényű ködök és esetleg szomszédságukban levő csillagok sohasem láthatók ugyanazon beállítás mellett egyenlő élesen.

Az observatórium egyéb műszerei a már említett 12″-es refractor, egy 6½″ nyílású kisebb transportabilis æquatoreal, melynek lencséje a Repsold-féle ugyanily nyílású meridiankörhöz is használható mint a déli collimator objektivja; ezen meridiankör a főépület mögött álló meridiánszobában van elhelyezve. E mellett áll egy 4″-es passage-műszer, mely egyúttal a Horrebow-Talcott-féle módszerre is használható, továbbá egy vízszintes photoheliograph a passage-szoba mellett, s más kisebb csillagászati, meteorologiai és földrengést-jelző műszerek.

A csillagda állandó személyzete ez idő szerint hat csillagászból áll, beleértve Holden igazgatót is. A munka felosztása, különösen a mennyiben a nagy refractorra vonatkozik, nagyon eltér attól, mit az európai csillagvizsgálókon találunk, és *sok észlelőnek* teszi lehetővé a kitünő műszer mentűl többoldalú használatát. Hetenként két estén HOLDEN igazgató és segédje használják photographiai munkálatokra, másik két estén CAMPBELL és segédje spektroskopi vizsgálatokra, két estén BARNARD és SCHAEBERLE csillagászok kettős csillagok, vagy bolygók és üstökösök megfigyelésére és más vegyes észleletekre, és végül minden héten egy estén: szombaton LICK végrendelete értelmében nyitva van az intézet a közönség számára 10 óráig. LICK ugyanis a csillagda alapítása által nem csak a tudomány előmozdítását, hanem annak népszerűsítését és széles körben való terjesztését is tűzte ki feladatául. Ilyen estéken szép számú közönség szokott összegyülni, és nagy érdeklődést mutat a csillagászat iránt. A nagy műszeren mindenki megnézhet egy-két objectumot a látogatók számához képest, s e mellett a $6\frac{1}{2}''$-es és $12''$-es távcsövek is rendelkezésre állanak. Minden műszer mellett van egy csillagász, ki a közönségnek mindennemű felvilágosítással szolgál. — A többi műszerek is meghatározott észlelőkre vannak bízva, de nem annyira megkötött programmal.

A LICK-observatórium eddigi nevezetesebb munkálatai a következőkben foglalhatók össze: 1. Napfogyatkozások megfigyelése és a napcorona photographiai felvételei, melyek SCHAEBERLE-t a corona új elméletére vezették; 2. bolygók és üstökösök észlelése, Jupiter és Saturnus photogr. felvételei CAMPBELL által, s legutóbb az observatórium egyik legnevezetesebb felfedezése az 5-dik Jupiter-hold, BURNHAM-tól; 3. kettős csillagok mérése és új kettős csillagok felfedezése, ugyancsak BURNHAM-tól, számszerint 198 új kettős csillag; 4. meridián-észlelések főleg a fundamentális csillagok helymeghatározása és a refractió vizsgálata czéljából; 5. SCHAEBERLE vizsgálatai a photogr. hatású sugarak absorbtiójára vonatkozólag, mely vizsgálatok főleg a photographált csillagok nagyságrendjének megállapítására nézve fontosak. 8. BARNARD-nak a csillaghalmazok, ködfoltok és a tejút szerkezetére vonatkozó tanulmányai, melyek egy új üstökös felfedezéséhez vezettek; 9. a hold photographiái, melyeknek felvételére a nagy gyútávolú és kitünő definitiójú műszer kiválóan alkalmas. Ezeknek készítését addig fogják folytatni, míg a hold korának minden órájára nem lesz egy-egy felvétel. Ilyen úton a hold felületén végbemenő esetleges változások a legbiztosabban lesznek felismerhetők. Ezen többnyire utólag megnagyított holdképeket WEINEK L. hazánk fia, a prágai csillagda igazgatója a legnagyobb gonddal lerajzolja, s a rajzokat azután HOLDEN-nel együtt tüzetes vizsgálatnak veti alá, melynek eredménye sok új, az eddigi legtökéletesebb MAEDLER és SCHMIDT-féle holdtérképeken sem található részletek felfedezéséhez vezetett; 10. végül CAMPBELL spektroszkopi vizsgálatai, melyek legnevezetesbike a Nova Aurigae új csillag spektrumának meghatározása volt. Ez az új csillag gyönge fénye miatt más kisebb műszereken alig volt megfigyelhető, s C. vizsgálatai őt arra a következtetésre vezették, hogy a Nova újabban köddé vált, mely utóbbi vélemény újabban tüzetes díscussió tárgya volt, de még eddig nincs általánosan elfogadva.

Eme rövid összeállításból láthatjuk, hogy a Lick-observatórium különös súlyt fektet a photographiai módszerekre, és erre a czélra igen jól van felszerelve. Ily módon lehet kitünő távcsövüket legjobban kihasználni mulékony, rövid tartamú jelenségeknek mintegy regisztrálására; a photographia gyorsan elkészül és teljesen hiteles, és eredményei bárhol és bármikor tanulmányozhatók és biztosan összehasonlíthatók más vizsgálók eredményeivel. Eredményeinek közlésében a Lick-csillagda igen liberalisan jár el; negatívjait vagy más észleleteit minden más csillagda vagy competens kutató rendelkezésére bocsátja, mintegy a nyers anyagot szolgáltatván nekik, s ezzel lehetővé teszi, hogy ilyen több más intézettel való összeműködés révén bizonyos kérdések esetleg nehány hónap alatt elintéztessenek, mire egy külön álló csillagvizsgálónak több évre volna szüksége, ha csupán saját segédeszközeire volna utalva.

Utam végén meglátogattam a Harvard egyetemet Bostonban, az Egyesült-Államok egyik legrégibb és legnevezetesebb tanintézetét. Ennek, valamint a többi amerikai egyetemeknek, szervezete igen lényegesen különbözik az európai ilynemű intézetekétől és pedig főleg az intézetek igen nagy sokoldalúsága lepett meg. A Harvard egyetem, és a szervezetében hozzá hasonló princetoni egyetem New-Jersey államban, melyet szintén meglátogattam, körülbelül felöleli mindazon tantárgyakat, melyek Europában egy egyetemen, műegyetemen és gazdasági főiskolán együtt véve előadatnak. A Harvard-egyetem pl. következő osztályokból áll; a művészeti és tudományos facultás, mely alá tartoznak a Harvard College és a Tudományos Iskola (Scientific School), végül a «Graduate School»; az első és második kiterjeszkedik a régi és modern philologiára, philosophiára, történelemre, zenére és képzőművészetekre, exact és természettudományokra, a technika minden fontosabb ágára és a régiségtanra. Az első két intézetben a hallgató egészen szabadon választja tárgyait, a második különösen a baccalaureusi fokozatra készít elő és hét kötelező cursusra oszlik; a Graduate School körülbelül ugyanezeket a tudományokat öleli fel, de főleg a doctori rangra képezi ki hallgatóit, és magasabb, speciális tanfolyamokból áll haladottabbak számára. Ezen kivül van az egyetemnek még hét szakiskolája (Professional Schools) a megfelelő facultásokkal névszerint a hittudományi, jogi, orvosi, fogorvosi, állatorvosi iskola, továbbá a Bussey-Intézet a mezőgazdaság számára és a hasonnevű facultások. — Eme különböző intézetek épületei 3 terjedelmes telepet képeznek, a város különböző részein. Az intézetek felszerelése, ha nem is állhatja ki a versenyt az europai egyetemekével, mindenesetre kielégítőnek mondható, ha tekintetbe vesszük, hogy tulajdonképen a tanítás alacsonyabb színvonalon áll, mint Európában, mert az első két évnek legnagyobb részt azon tantárgyak adják a tananyagát, melyek nálunk a középiskolák felsőbb osztályaiban adatnak elő; a hallgatók túlnyomó része (a prof. school-okét leszámítva) nem is szakképzettség megszerzése végett jön az egyetemre, hanem csak általános műveltség megszerzése végett, s későbbi életében visszatér egyéb polgári foglalkozásához; csak igen kevés hallgató készül tanári pályára. — Az épületek általában jól megfelelnek czéljuknak, a labaratoriumok és gyűjtemények tágasak és kényelmesek, de felszerelésük nem mindig kielégítő, így pl. a princetoni physikai intézetet gondosan megszemléltem ugyan, de egyebet, mint az előadási készülékeknek meglehetősen teljes gyűjteményét és néhány érdekes Franklin-től származó reliquiát alig találtam benne; finomabb mérésekhez szükséges præcisio műszerek csaknem teljesen hiányoztak itt.

A Harvard-egyetem csillagdája az amerikai csillagdák közt előkelő helyet foglal el. Épületei külön telepen vannak csekély távolságban az egyetem többi épületeitől. Felszerelése igen gazdag és egy 15″ és 6″-es refractorból, 8″-es meridián-műszerből és öt photographiai távcsőből áll melyek nyílásai 12″, 11″ és 8″, továbbá 28″ és 15″, melyek reflectorok. Ezenkívül az observatórium Peruban, Arequipában is tart fenn négy jól felszerelt állomást a Boyden-alapból — jelenleg 214,000$ — különböző magasságokban a tenger színe felett; ezen állomás számára készül jelenleg egy óriási photogr. készülék 24″-es objektivval Miss Bruce 50,000 $-nyi adományából. — Az intézet személyzete ehhez mérten igen számos: — Arequipa állomást is beleértve —, mintegy 40 alkalmazottból áll, kik közt 17 hölgy van, mindannyian a photogr. munkálatoknál alkalmazva. A Harvard-csillagda megtekintésénél a műszerek nagy száma mellett különösen azok rendkívül kezdetleges kivitele lepett meg. Ezen számos különféle műszer között talán egy sincs, mely a modern mechanikai követelményeknek teljesen megfelelne, mindegyiknél csak a legszükségesebb alkatrészekre szorítkoztak, s azok is csak durván látszanak összetákolva lenni, úgy hogy egyik-másik ilyen műszer inkább csak kezdetleges provizóriumnak látszik.

A csillagda munkaköre igen sokoldalú: terjedelmes meridián észleléseken kívül újabban, különösen mióta E. C. Pickering az intézet igazgatója, igen behatóan foglalkoznak az állócsillagok photometriájával úgy a visualis, mint a photographiai fényesség meghatározása végett. Az első czélra Pickering sokféle műszert alkalmazott; a legutolsó, melylyel igen sokat dolgoznak, a jelenleg is használt meridián-photometer volt. Ez egy kelet-nyugati irányban felállitott vízszíntes helyzetű távcső két objektivvel, melyek mindegyike egy totalreflexiós prizmával van ellátva. A prizmák egyikét minden észlelésnél a sarkcsillagra (α Ursae min.) állítják, és ezzel hasonlítják össze a többi, a látmezőn átvonuló csillagokat, melyek képét a második objektiv szolgáltatja. A fényesség mérése polarisatióra alapított extinctió-photometerrel történik.

Ujabb időben az observatórium igen behatóan foglalkozik csillagászati photographiával. HENRY DRAPER dúsgazdag magántudós özvegyének bőkezű adakozásából tartják fenn az intézet erre a czélra rendelt «Henry Draper Memorial» név alatt ismert osztályát. — Az itt készülő csillagászati photographiák igen sokfélék; a legfontosabbak a térképfelvételek (10 m-től 60-ig terjedő is hosszabb expositióval), a spektrál felvételek (10 m-től 60 m-ig terjedő expositióval) és a nyom-felvételek (trail-plates) többszöri, megszakitott expositióval nyugvó távcsővel felvéve. — Ezen felvételeket a legnagyobb gonddal elteszik és rendszeres lajstromot vezetnek rólok. A térképfelvételek főczélja változó vagy esetleg új csillagok felkeresése, miért is azokat a meglevő csillagtérképekkel és csillagjegyzékekkel gondosan összehasonlítják, továbbá a gyönge fényű csillagok photographiai nagyságrendjének megállapítására is használják őket s ez utóbbi czélra a cambridgei és az arequipai 8″-es távcsövekkel készült felvételeket használják. Ezen photometriai meghatározások mintegy 40,000 csillagra fognak kiterjeszkedni. A spektrumlemezeket főleg ritkább spektrumu csillagok felkeresésére használják, továbbá bolygószerű ködöket is keresnek rajtuk. Az ilyen objektumokat gyakorlott szem igen könnyen felismeri és megkülönbözteti a többi csillagoktól, s ily módon könnyen akadnak változó csillagokra, melyek spektrumuk bizonyos sajátságaiból biztosan megállapíthatók. — Ily módon rövid idő alatt a változó csillagokra vonatkozó igen gazdag és teljesen megbízható adathalmaz birtokába jutnak, a mi ocularmegfigyelések utján sokkal tovább tartana, és főleg az egyes észlelők subjektiv különbségei folytán nehezebben volna felhasználható. — Ezen vizsgálatok fontosabb eredményei a ξ Ursae min. kettős voltának E. C. PICKERING-től eredő kimutatása spektrumából, mely 2 componens mintegy 52 nap alatt tesz egy teljes körülforgást. Ez eredményt a spektrum ama tulajdonságából vonták le, hogy vonalai szabályos időközökben megkettőződnek. — Ugyanilyen módon jutott Miss MAURY a β Aurigae kettős rendszer felismerésére, mely sokkal érdekesebb az előbbinél, mivel periodusa csak 3^d 23^h, 5. Mindkét pár componensei olyan közel állanak egymáshoz, hogy feloldásuk optikai úton még eddig nem sikerült. A harmadik objektum, mely szintén ebbe az osztályba látszik tartozni, β Lyrae, melynek spektrumában a sötét és világos vonalak egymáshoz való helyzetüket megváltoztatják. — Az eddigi ilyen irányú vizsgálatok összesen 23 új változó csillag felfedezéséhez vezettek.

Harkányi Béla.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA és RADOS GUSZTÁV

HARMADIK ÉVFOLYAM

IV. FÜZET. 1894 ÁPRILIS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

TARTALOM

Lap

KÖVESLIGETHY RADÓ: A fogyatkozások graphikus meghatározása (Első közl.) 149
SUTÁK JÓZSEF: Algebrai vizsgálatok a függvénytanban (Első közlemény) ... 157
KLUG LIPÓT: Tételek a paraboláról s a hiperbolikus paraboloidról 166
KÜRSCHÁK JÓZSEF: A körmérés története és elmélete (Nyolczadik közlemény) 170
Megoldott feladatok. (CSILLAG V. és MAKSAY ZS. uraktól) 181
Feladatok. (FUCHS KÁROLY urtól) 182
Értesítő a Math. és Phys. Társulat előadásairól. (GRUBER N.: A Gramme-féle gyürű elmélete) 183

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A harmadik társulati év 1894. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czímére — legczélszerűbben a I. füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *A múlt évről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért,* hogy a folyóirat költségeit fedezhessük. Az eddig teljesített befizetéseket a következő füzetben nyugtáztatjuk.

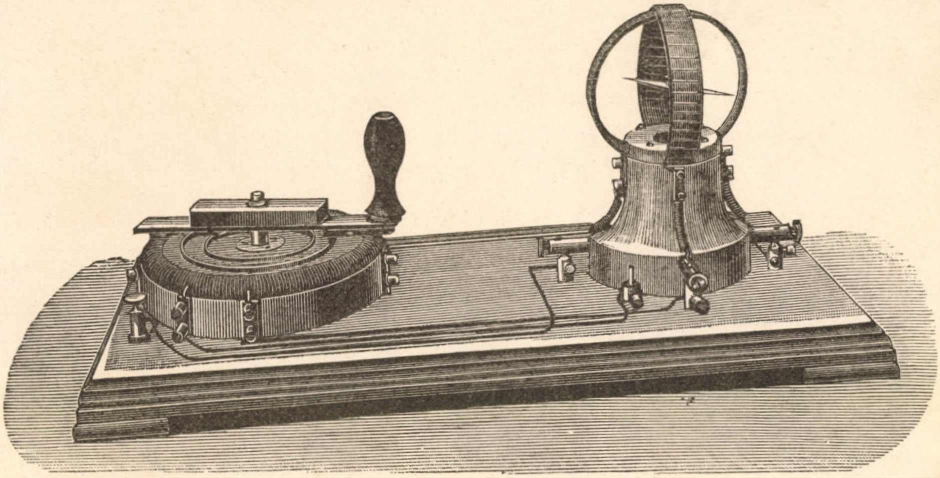
Rendes ülések. A társulat rendes üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

Közgyülés. A közgyülést ez évben *pünkösdkor* tartjuk meg. A *meghivót* jelen füzetünk hozza.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére (**VI. Bulyovszky-u. 16.**) intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár (**VII., Csengery-u. 1**), a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

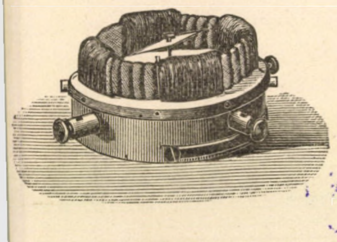
T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesítésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó tetemes kiadástól mentik fel.

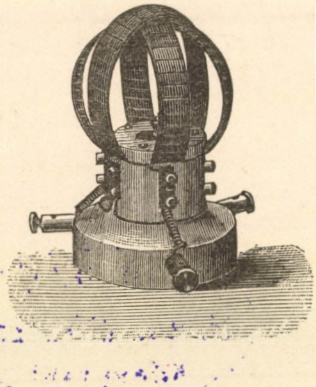


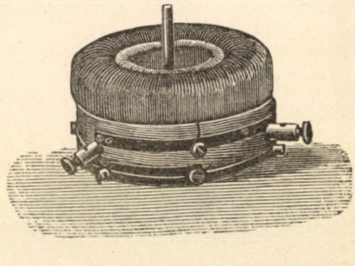
WEINHOLD-féle készülék

FORGÓ MÁGNESES TÉR ELŐÁLLITÁSÁRA.

A II. kötet 275. stb. oldalain ismertetett készülékeket (3.,8., 9. és 11. ábra) minden hozzávaló mellékkészülékkel teljesen felszerelve igen ajánlhatjuk a t. cz. tanár urak becses figyelmébe.







A teljes készülék ára legfinomabb kivitelben ***60 forint*** *loco Budapest. A készülék egyes részei külön is kaphatók méltányos árakon.*

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

A FOGYATKOZÁSOK GRAPHIKUS MEGHATÁROZÁSA.

(Első közlemény.)

A Nap- és Holdfogyatkozások ez idő szerint divatos analytikai tárgyalása — nagy általánosságánál fogva — kétségkivül igen tökéletes, de megértése nagyobb mathematikai készültséget követel meg. LALANDE a fogyatkozások előre való kiszámításának egy elemi, tisztán graphikus módszerét adta meg, mely teljesen kielégítő pontosságu. Tanulságos, sőt mulatságos volta arra késztet, hogy — csekély módositásokkal — e helyen tárgyaljam.

A hold- és a napfogyatkozások tárgyalásának alapgondolata velejében egy és ugyanaz; a külömbségek, melyek a holdfogyatkozások esetében a physikai fogyatkozással, azaz egyidőben az egész fél Földön látható sötétedéssel, a napfogyatkozások esetében pedig az optikai fogyatkozással, azaz a megfigyelőnek a Hold- és Naphoz való pillanatnyi helyzetével számolnak, legvilágosabbban a szerkesztésnél fognak majd feltünni.

I. Holdfogyatkozások.

Ha a Hold a földpálya (ekliptika) sikjában oppositióba kerül a Nappal (telehold), tehát közel áll a hold- és földpálya egyik metszési pontjához (csomójához), holdfogyatkozás bekövetkezhetik. A földárnyék keresztmetszetét a Hold H távolságában az 1. ábra adja. Ha N és F a Nap és Föld középpontja, π és p e két test horizontalis æquatorealis parallaxisa, R a Nap, ρ a földárnyéknak a holdtávolságában való látszöge,

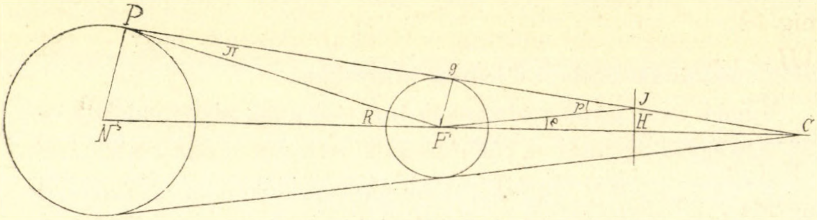
$$PFI\sphericalangle = 180^\circ - R - \rho = 180^\circ - p - \pi$$

a miből

$$\rho = p + \pi - R.$$

Mivel p, π és R változó mennyiségek, melyek illetve 53′ 53,0″ — 61′ 27,0″, 8,7″—9,0″ és 15′ 45,5″— 16′ 17,5″ értékek között váltakoznak, világos, hogy ρ minimum és maximum értéke 37′ 44,5″ és 45′ 50,2″ lehet.* A holdfogyatkozásoknál észlelt sugártörés miatt az árnyékkorong átmérőjét $\frac{1}{60}$-részszel nagyobbnak szokás venni.

Mivel ρ mindig nagyobb, mint a Hold látszöge, gyürűs holdfogyatkozás nem lehetséges; és világos, hogy a részleges fogyatkozás határa beáll, ha a Hold széle a földárnyék korongját éppen kivülről érinti, s hogy még éppen teljes a fogyatkozás, ha a két korong belső érintésben van. Az első esetben a Hold középpontja az árnyékkorong középpontjától $\rho + r$, a másodikban $\rho - r$ távol-



1. ábra.

ságban van, ha r-vel jelöljük a Hold látszögét. A Hold középpontjánál derékszögü $AH☊$ sphærikus háromszög, melyet az $AH—\rho+r$ vagy $\rho - r$ távolság, az árnyék középpontja (A) és a csomó (☊) közötti ekliptika-ív és a Hold (H) meg a csomó közötti holdpályaív alkot, a holdpálya i hajlásával megadja a földárnyék csomótávolát fogyatkozás esetén:

$$\sin A☊ = \frac{\sin AH}{\sin i}.$$

Mivel r értéke 14′ 43,0″ és 16′ 46,5″ között változhatik, $\rho + r$ 52′ 27,5″ és 62′ 36,7″ és hasonlóképen $\rho - r$ értéke 23′ 1,5″ és 29′

* Úgy ezen, mint az alábbi maximumok és minimumok képzésénél tekintetbe veendő, hogy $\frac{\pi}{R}$ = const. és $\frac{p}{r}$ = const. vonatkozásoknál fogva a parallaxis maximumához vagy minimumához mindig a látszög maximuma vagy minimuma tartozik.

3,7″ határok között ingadozik. Ha az AH minimumával a hajlás maximumát (5° 18′), AH maximumával i minimumát (5° 0′) összevetjük, a következő táblázathoz jutunk:

	szükséges határa:	lehetséges határa:
Teljes holdfogyatkozás	4° 9,5′	5° 34,0′
Részleges holdfogyatkozás	9 30,5	12 3,7

Azaz: ha telehold alkalmával a földárnyék (vagy, mivel ezzel szemben mindig a Nap áll, a Nap) a legközelebbi csomóponttól 4° 9,5′-nél kisebb távolságra van: *okvetlenül teljes*, ha 4° 9,5′ és 5° 34,0′ között áll, *okvetlenül teljes vagy részleges*, ha 5° 34,0′ és 9° 30,5′ között áll, *okvetlenül részleges* holdfogyatkozást észlelünk; ha 9° 30,5′ és 12° 3,7′ között áll, részleges fogyatkozás még *lehetséges*, míg 12° 3,7′-on túl fogyatkozásnak többé *helye nincs*. Mivel az $AH = r \pm \rho$ ív a hajlás négyzetével egyenlő rendű tagokig a Hold szélességével azonos, az előbbi határok helyébe előzetes számítás kikerülésével egyszerűen a Holdnak: 23′ 1,5″, 29′ 3,7″, 52′ 27,5″ és 62′ 36,7″ előbb talált szélességi határai léphetnek, melyek az ephemerida-gyűjteményben adott holdhelyekkel szintén közvetlenül összehasonlíthatók.

A teljes holdfogyatkozás átlagos tartama könnyen megállapitható; a Nap perczenkénti mozgása 2,46″ s ennyi természetesen a földárnyéké is; a Hold közepes siderikus mozgása ugyanez irányban 32,94″, tehát a Holdnak relativ mozgása az árnyékkoronghoz képest 30,48″. Centrális átvonulásnál a Hold útja

$$(1 + \tfrac{1}{60}) \text{ közepes árnyékátmérő} + \text{a Hold átlagos átmérője}$$

s ezért a centrális fogyatkozás tartama

$$\frac{(1 + \frac{1}{60})\, 83'\, 34{,}7'' + 31'\, 29{,}5''}{30{,}48''} = 229^{m} = 3^{h}\, 49^{m}$$

a miből

$$\frac{(1 + \frac{1}{60})\, 83'\, 34{,}7'' - 31'\, 29{,}5''}{30{,}48''} = 105^{m} = 1^{h}\, 45^{m}$$

a teljes sötétülésre esik.

A teljes holdfogyatkozás egyes fázisainak meghatározására egy konkrét példát használok fel, és pedig az 1895. márczius 10-iki holdfogyatkozást. A szerkesztés alapját a fogyatkozásnak úgynevezett elemei alkotják, melyeket a csillagászati ephemeridák jó előre közölnek; ezek a Hold és Nap szembenállása pillanatában e két égi test declinatiója, óránkénti mozgása declinatióban és rectascensióban, horizontális-æquatoreális parallaxisa és sugaraik. Példánk számára az 1895-diki Berliner Jahrbuch a következő adatokat közli:

Oppositio rectascensioban: 1895 márczius 10. $16^h\,25^m\,0^s.9$, berlini közép idő.

☾ declinatiója $= +3°\,59'\,35{,}0''$
☉ « $-3°\,50'\,3{,}5''$
☾ mozgása rectascensióban 1^h alatt $= +33'\;7{,}8''$
☉ « « « « $= +\;2'\,17{,}9''$
☾ mozgása declinatióban 1^h alatt $= -17'\,54{,}3''$
☉ « « « « $+\;58{,}8''$
☾ horiz. æquat. parallaxisa $p = 60'\,53{,}3''$
☉ « « « $\pi = 8{,}9''$
☾ sugarának látszöge $r = 16'\,37{,}2''$
☉ « « $R = 16'\;5{,}6''$

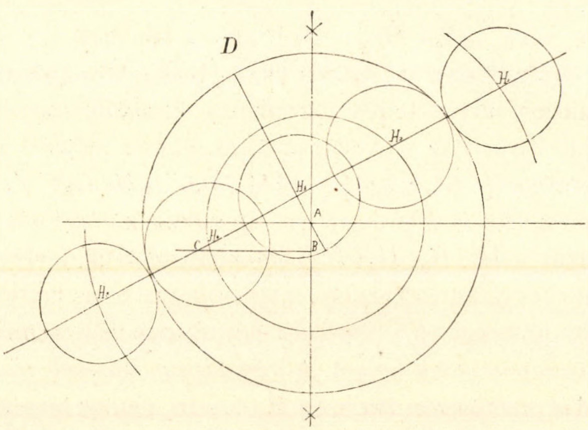
Ha ez elemek nem volnának meg, akkor az ephemeridákból nagyon könnyen levezethetők. Egyszerű interpolatió segítségével keressük az időt, melyben a Nap és Hold rectascensiókülömbsége éppen 180° (oppositió). A fogyatkozási határok előbb levezetett értékei csakhamar megmutatják, várható-e fogyatkozás vagy sem. Ha igen, akkor az oppositió pillanatára interpoláljuk az ephemerida azon értékeit, melyek a fenti táblázatban szerepelnek, s ha az ephemeridák alapját tevő meridián helyett más délkör — pl. a budapesti — volna kivánatos, a két délkör hosszúságkülömbsége mindjárt az interpolátiónál tekintetbe vehető.

Ezen interpolált értékekből, vagy a kész táblázatból:

$$\rho = p + \pi - R = 44'\,56{,}6'' \qquad \rho + \tfrac{1}{60}\,\rho = 45'\,41{,}5''$$

Ha most (2. ábra)* pl. $1' = 1$ mm. mértékkel 45,7 mm. sugarú kört húzunk, ez az árnyékkorongnak a Hold távolságában való átmetszetét adja. Mivel a fogyatkozás elemei mind az æquatorra vonatkoznak, A-n, az árnyékkorong középpontján átmenő vizszintes vonal a parallel vagy declinatiókör, a rá merőleges egyenes az árnyék órakörének képéül tekinthető.

Az oppositió pillanatában a Nap declinátiója $-3° 50' 3{,}5''$, a vele az átmérőn szemben fekvő árnyék declinatiója tehát $+3° 50' 3{,}5''$, és ennél a Hold $3° 59' 35{,}0'' - 3° 50' 3{,}5'' = 9{,}5$ mm.-rel



2. ábra.

északabbra esik; ha tehát $AO = 9{,}5$ mm., akkor O az oppositió pillanatában a Hold középpontjának relativ helye az árnyék közepéhez képest.

A Holdpálya relativ fekvését az 1 órai mozgás adja: a Nap declinatiója óránként $58{,}8''$-czel nő, az árnyéké tehát ugyanannyival fogy; a Hold saját mozgása ez irányban ugyancsak $-17' 54{,}3''$, és ennélfogva relativ óránkénti declinatiómozgása $-16' 55{,}5''$, vagyis

* A szövegbeli rajz az eredetinek $\frac{1}{2}$-re van redukálva. Minden szám az 1 ívpercz = 1 mm. alapmérték szerint készitett eredetire vonatkozik. Természetes, hogy a graphikai megoldás annál pontosabb eredményre vezet, minél nagyobbnak vétetik az alapméret.

$OB = 16,9$ mm. délfelé, a fogyó declinatió irányában kitűzve. A Nap óránkénti rectascensió változása $+2'17,9''$ (kelet felé) és ugyanez az árnyék közepének mozgása is; a Holdé $+33'\,7,8''$, tehát a nyugvó árnyékhoz képest a Hold rectascensiója óránként $30'\,49,9''$ nő (kelet felé). E növekedésnek az æquatoron a mi rajzunkban 30,83 mm. felel meg; de a Hold nem ott, hanem $\delta = +\,3^\circ\,59'\,35,0''$ magasságu declinatiókörben halad, melynek kerülete az æquatoréhoz képest $\cos\delta : 1$ arányában rövidebb, miért is a Hold útja még $\cos\delta$-val szorzandó. Ha tehát

$$BC = 30,83 \cos(3^\circ\,59,6') = 30,8\,\text{mm}.$$

kelet felé véve, akkor $OC = 35,1$ mm. a Holdnak egy órai útja nagyság és irány szerint; vagyis OC a Hold relativ pályája.

A részleges, illetve teljes fogyatkozás kezdődik vagy végződik, ha a Hold tányérja az árnyékot kivülről, illetve belülről érinti. Ha tehát A körül $\rho \pm r$-rel, azaz $(1+\frac{1}{60})\,44'\,56,6'' \pm 16'37,2''$ értékeknek megfelelőleg 62,3 és 29,1 mm.-nyi sugarakkal köröket húzunk, ezek a holdpályát a H_1, H_2, H_4, H_5 pontokban metszik, melyek sorban a részleges fogyatkozás kezdete, a teljes fogyatkozás kezdete, a teljes fogyatkozás vége és a részleges fogyatkozás vége számára adják a Hold középpontjának helyét. A fogyatkozás közepét végül megadja az AH_3 merőleges. Ha ezen $H_1, \ldots H_5$ pontok távolát mérjük O-tól, a következő számokhoz jutunk: 57,2; 23,3; 4,6; 32,4; 66,3 mm., melyek a Holdnak az oppositióig, illetve az oppositió óta megtett útjait jelentik. Mivel a Hold az előbbi szerkesztés értelmében óránként az $OC = 35,1$ mm.-nyi útat futja be, az OH_1, $OH_2, \ldots$ útak sorban 1,63; 0,66; 0,13; 0,92; 1,89 órának felelnek meg, és mivel O a hold helye az oppositió alkalmával ($16^h\,25,0^m$) világos, hogy az első két szám ez időből levonandó, a többi három hozzáadandó, hogy a fogyatkozás egyes fázisait találjuk. E szerint:

		berlini k. idő	
A fogyatkozás kezdete általában:	márcz. 10.	$14^h\,47,2^m$	$(47,1^m)$
A teljes sötétülés kezdete		15 45,4	(45,0)
A fogyatkozás közepe		16 32,8	(32,9)
A teljes sötétülés vége		17 20,2	(20,7)
A fogyatkozás vége általában		18 18,4	(18,6)

hol a zárjeles perczek a Berliner Jahrbuch közölte időket jelentik. Látnivaló, hogy az eltérés teljesen a szerkesztéshiba határain belül van, sőt még csökkenthető volna, ha a Berliner Jahrbuch újítása szerint az árnyéknövekedést nem $\frac{1}{60}$-nak, hanem $\frac{1}{50}$-nek vettük volna. — Az *AD* vonal viszonya a holdátmérőhez 54,0 : 33,2 = 1,626 (a Berliner Jahrbuch szerint 1,628) a fogyatkozás nagyságát adja a holdátmérő részeiben.

Éppen oly könnyen állapítható meg szögmérő segítségével a szög, mely alatt az árnyék a holdtányér északi részétől kelet felé számítva be- vagy kilép (positiószög).

Berlintől nem túlságosan messze fekvő helyek számára elegendő az időben kifejezett hosszúságkülömbség tekintetbevétele; nagyobb távolságok esetében a Holdnak parallaxis- és sugárkülönbözősége is játszhatik szerepet, mi az ephemeridák segítségével úgy a hold-, mint a napfogyatkozásoknál az interpolatióban könnyen tekintetbe vehető.

Annak eldöntésére, vajjon a fogyatkozás egyes fázisai hol és mikép láthatók, legegyszerübben a Földglóbus szolgál. A glóbus északi vagy déli pólusát annyival emeljük a horizont fölé, a hány fokot a Hold északi vagy déli declinatiója kitesz; ez által a Hold parallelköre a teke legmagasabb pontján halad át. Hozzuk Berlint (általában a fogyatkozásban adott időnek megfelelő helyet) a rézmeridián alá, állítsuk a glóbus számlapját a fogyatkozás kezdetét jelző időre és forgassuk a tekét nyugot felé, míg a mutató az éjféli órát nem adja; akkor nyilván (mivel a Nap és a telehold egymással szemközt állanak) a glóbus egész alsó fele a Napot látja, míg felső, a horizont felett lévő félgömbje a fogyatkozás kezdetét pillantja meg, és eldönthetjük, a fahorizont *nyugoti* oldala mentén mily helyek latják a fogyatkozó Holdat a *kelés,* vagy a horizont *keleti* oldalán mily pontok a *nyugvás* pillanatában, s melyek számára jut a Hold a zenithbe. Ugyanez a művelet ismételhető a fogyatkozás többi fázisaira nézve is, mivel a jelenségnek a földön való teljes lefolyásának hű és elegendő pontos képét nyerjük. Végül pedig világos, hogy a részleges fogyatkozás szerkesztése éppen úgy eszközölhető; ennél persze a 2. és 4. momentum elesik.

Kövesligethy Radó.

ALGEBRAI VIZSGÁLATOK A FÜGGVÉNYTANBAN.

(Első közlemény.)

CAUCHY, PUISEUX és WEIERSTRASS kutatásaiból tudjuk, hogy az

$$f(x,y)=0$$

algebrai egyenlet y-t mint az x *analitikai* függvényét definiálja és ez oly hely környezetében, mely *sem elágazási hely, sem pedig y legmagasabb hatványa együtthatójának zérus-helye, hatványsorba* kifejthető. Az ilyen függvényeket *algebrai* függvényeknek nevezzük.

De kérdés, hogy ha adva van egy hatványsor, hogyan lehet annak természetéből algebrai vagy transzczendens voltára ráismerni? azaz: *együtthatói között lévő összefüggésből eldönteni,* hogy *eleget tesz-e valamely algebrai egyenletnek vagy sem?*

E feladathoz hasonlónak megoldását már EULER is ismerte, a mi kitünik GOLDBACH-hoz irt leveléből (1771. decz. 4.), melyben kimondja, hogy $\sqrt[n]{1-an^2}$ kifejtésében a együtthatói egész számok.

1852-ben a berlini akadémia Monats-Bericht-jeinek juliusi számában bebizonyitás nélkül jelent meg EISENSTEIN következő tétele:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \mathfrak{P}(x)$$

raczionális együtthatókkal biró sor csakis akkor tehet eleget egy

$$f(x,y)=0$$

egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek, ha van oly a egész szám, melyre nézve $ax\mathfrak{P}(ax)$ hatványsor együtthatói egész számok.

E nevezetes tételt, mely még csak *szükséges* de *nem elegendő feltételt* foglal magában arra nézve, hogy valamely raczionális együtthatókkal biró sor eleget tehessen egy egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek, először HEINE *, azután HERMITE ** bizonyította be.

A bebizonyítás, melyet én mutatok be, alapul szolgál egyszersmind e tétel általánosításának is, melyről a további közleményekben kivánok szólani.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \mathfrak{P}(x) \tag{1.}$$

raczionális együtthatókkal biró hatványsorban c_0-t *egész számnak* tételezem fel, mert ha nem az, mindig alkalmas számmal megszorozhatom annak az egyenletnek a gyökeit, melynek $\mathfrak{P}(x)$ hatványsor eleget tesz, úgy hogy oly egyenlethez jutok, a melyre nézve c_0 egész szám.

Ha $\mathfrak{P}(x)$ *raczionális együtthatókkal* biró sor eleget tesz az

$$f(x, y) = 0 \tag{2.}$$

egész *számú együtthatókkal* biró algebrai egyenletnek, akkor

$$f(x, \mathfrak{P}(x)) \equiv 0\,;$$

tehát minden differencziálhányadosa szintén azonosan egyenlő zérussal; megvizsgálom a 2) alatti egyenlet többtagújának n-ik differencziálhányadosát az $x=0$ helyen.

Jelöljük $f(x, y)$-ban azokat a tagokat, a melyek y-*nal nincsenek* megszorozva $\psi(x)$-el; a többit pedig rendezem x hatványai szerint; ha továbbá az y-nal szorzott tagokban x legalacsonyabb hatványának kitevője m, a legnagyobbénak pedig s, akkor

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) \equiv x^m\varphi_0(y) + x^{m+1}\varphi_1(y) + \cdots + x^r\varphi_{r-m}(y) + \cdots + \\ + x^s\varphi_{s-m}(y) + \psi(x) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.}$$

---

* CRELLE J. 48. Bd. 1854.

** Proceedings of the London Mathematical Society 1876. ápr. 13.

hol a φ-k y függvényei s a fentebb mondottak alapján

$$\varphi(0) \equiv 0.$$

A (3) n-edrendű differencziálhányadosát a Leibnitz-féle formula szerint képezem; könnyű belátni, hogy $x^r \varphi_{r-m}(y)$-nak n-edrendű differencziálhányadosa az $x=0$ helyen

$$\left[\frac{d^n x^r \varphi_{r-m}(y)}{dx^n}\right]_{x=0} = r!\binom{n}{r}\left[\frac{d^{n-r}\varphi_{r-m}(y)}{dx^{n-r}}\right]_{x=0}.$$

$\psi(x)$-é pedig $n!\,c$, hol c $\psi(x)$-ben x^n együtthatója, tehát egész szám, sőt zérus is lehet.

A mondottak megfontolása után már könnyű lesz felírni a (3) alatti egyenlet többtagújának n-edrendű differencziál-hányadosát az $x=0$ helyen, mely:

$$m!\binom{n}{m}\left[\frac{d^{n-m}\varphi_0(y)}{dx^{n-m}}\right]_{x=0} + (m+1)!\binom{n}{m+1}\left[\frac{d^{n-m-1}\varphi_1(y)}{dx^{n-m-1}}\right]_{x=0} + \cdots + \\ + n!\binom{n}{n}[\varphi_{n-m}(y)]_{x=0} + n!\,c = 0,$$

Ha itt még tekintetbe veszszük, hogy

$$\binom{n}{m+j} = \frac{n!}{(m+j)!\,(n-m-j)!}$$

s azután az egész egyenletet elosztjuk $n!$-sal, akkor a következő kifejezéshez jutunk:

$$\frac{1}{(n-m)!}\left[\frac{d^{n-m}\varphi_0(y)}{dx^{n-m}}\right]_{x=0} + \frac{1}{(n-m-1)!}\left[\frac{d^{n-m-1}\varphi_1(y)}{dx^{n-m-1}}\right]_{x=0} + \cdots + \\ + [\varphi_{n-m}(y)]_{x=0} + c = 0,$$

melynek összevont alakja:

$$\sum_{j=0}^{n-m}\frac{1}{(n-m-j!)}\left[\frac{d^{n-m-j}\varphi_j(y)}{dx^{n-m-j}}\right]_{x=0} + c = 0. \qquad (4.)$$

E kifejezés *nevezőiben* előforduló *fakultások* a végeredményben *törtet nem hoznak* létre; mert

$$\left[\frac{d^r\varphi(y)}{dx^r}\right]_{x=0} \tag{5.}$$

kifejezés minden egyes tagja osztható $r!$-sal; ugyanis $\varphi(y)$ egész számú együtthatókkal szorzott y^s alakú tagokból áll, ha tehát y^s-nek r-ik differencziálhányadosa az $x=0$ helyen osztható $r!$-al, akkor az (5.) egyenletnek minden egyes tagja szintén osztható $r!$-al, már pedig

$$\frac{d^r y^s}{dx^r} = \frac{d^r y^{s-1} y}{dx^r} = y^{s-1}\frac{d^r y}{dx^r} + \cdots + \binom{r}{r_1}\frac{d^{r_1} y^{s-1}}{dx^{r_1}}\frac{d^{r-r_1} y}{dx^{r-r_1}} + \cdots,$$

de mivel

$$\left[\frac{d^r y}{dx^r}\right]_{x=0} = r!\,c_r,$$

tehát az első tag az $x=0$ helyen osztható $r!$-sal; az általános tag

$$\binom{r}{r_1}\left[\frac{d^{r_1} y^{s-1}}{dx^{r_1}}\frac{d^{r-r_1} y}{dx^{r-r_1}}\right]_{x=0} = \frac{r!\,(r-r_1)!}{r_1!\,(r-r_1)!}\,c_{r-r_1}\left[\frac{d^{r_1} y^{s-1}}{dx^{r_1}}\right]_{x=0}$$

szintén osztható $r!$-sal, ha

$$\left[\frac{d^{r_1} y^{s-1}}{dx^{r_1}}\right]_{x=0} \qquad (r_1 \leqq r)$$

osztható $r_1!$-sal, ez pedig a mondottak után osztható $r_1!$-sal, ha

$$\left[\frac{d^{r_2} y^{s-2}}{dx^{r_2}}\right]_{x=0} \qquad (r_2 \leqq r_1)$$

osztható $r_2!$-sal s ú. t. Mivel pedig y első hatványának r-ik differencziálhányadosa az $x=0$ helyen $r!$-sal osztható, azért y^s-nek, valamint $\varphi(y)$-nak is az r-ik differencziálhányadosa az $x=0$ helyen osztható $r!$-sal, tehát a (4.) egyenlet *nevezőiben előforduló törtek a végeredményben eltünnek.*

Irjuk most szummánknak azt a tagját, melyben $j=0$ külön; ez által a 4. alatti egyenlet a következő új alakban jelenik meg:

$$\frac{1}{(n-m)!}\left[\frac{d^{n-m}\varphi_0(y)}{dx^{n-m}}\right]_{x=0} + \sum_{j=1}^{n-m}\frac{1}{(n-m-j)!}\left[\frac{d^{n-m-j}\varphi_j(y)}{dx^{n-m-j}}\right]_{x=0} + c = 0.$$

Ismeretes, hogy

$$\frac{d\varphi(y)}{dx}=\varphi'(y)\,y'$$

$$\frac{d^2\varphi(y)}{dx^2}=\varphi'(y)\,y''+\varphi''(y)(y')^2$$

$$\frac{d^3\varphi(y)}{dx^3}=\varphi'(y)\,y'''+3\varphi''(y)\,y'y''+\varphi'''(y)(y')^3$$

. . . .

. . . .

Általában

$$\frac{d^n\varphi(y)}{dx^n}=\varphi'(y)\,y^{(n)}+\sum g_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}(y)\,y^{(\alpha_1)}y^{(\alpha_2)}\ldots y^{(\alpha_r)}, \qquad (7.)$$

$$(2\leqq r\leqq n,\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=n)$$

hol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ az $1, 2, \ldots, n-1$ sorban található pozitiv számok és $g_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}$ y-nak $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$-től is függő függvénye. A (6.) képlet első tagja tehát a következő alakban írható:

$$\frac{1}{(n-m)!}\left[\frac{d^{n-m}\varphi_0(y)}{dx^{n-m}}\right]_{x=0}=\frac{1}{(n-m)!}\left[\varphi_0'(y)\,y^{(n-m)}\right]_{x=0}+$$

$$+\sum_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\left[g(y)\,y^{(\alpha_1)}y^{(\alpha_2)}\ldots y^{(\alpha_k)}\right]_{x=0}=\varphi'(c_0)\,c_{n-m}+\sum_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}G(c_0)\,c_{\alpha_1}c_{\alpha_2}\ldots c_{\alpha_k},$$

melyben

$$\left.\begin{aligned} k\geqq 2,\ k\leqq n-m \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n-m\end{aligned}\right\} \qquad (8.)$$

G pedig c_0-nak az α-któl is függő függvénye.

A (7.) alatti egyenlet figyelembe vételével, könnyű látni, hogy a (6.) alatti egyenlet második tagja, még a következőképen is írható:

$$\sum_{j=1}^{n-m}\frac{1}{(n-m-j)!}\left[\frac{d^{n-m-j}\varphi_j(y)}{dx^{n-m-j}}\right]_{x=0}=\varphi_{n-m}(y)+$$

$$+\sum_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_l}h(y)\,y^{(\beta_1)}y^{(\beta_2)}\ldots y^{(\beta_l)}=\varphi_{n-m}(c_0)+\sum_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_l}H(c_0)\,c_{\beta_1}c_{\beta_2}\ldots c_{\beta_l},$$

hol

$$\begin{aligned} &l \geqq 1,\ l \leqq n-m-1 \\ &\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_l \leqq n-m-1 \end{aligned} \tag{9.}$$

H pedig c_0-nak a β-któl is függő függvénye.

A legutóbbi elért eredmények a következő képlethez vezetnek:

$$\begin{aligned} &\varphi_0'(c_0)\,c_{n-m}+\sum_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} G(c_0)\,c_{\alpha_1}c_{\alpha_2}\ldots c_{\alpha_k}+ \\ +&\sum_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_l} H(c_0)\,c_{\beta_1}c_{\beta_2}\ldots c_{\beta_l}+\varphi_{n-m}(c_0)+c=0 \end{aligned} \tag{10.}$$

minthogy az α-k, valamint a β-knak is mindegyike kisebb $n-m$-nél, azért kifejezésünk azt mondja ki, *hogy $\varphi_0'(c_0)\,c_{n-m}$ nevezőjében nem fordulhatnak elő oly más primszámok, mint a milyenek az $n-m$-nél alacsonyabb indexű c-k nevezőiben is előfordulnak.*

A $\varphi'(c_0)$ egész számot jelöljük röviden γ-val és $n-m$ legyen egyenlő az egységgel, akkor, mivel γc_1 nevezőjében csak c_0 nevezője fordulhat elő, de ez utóbbi egész szám, azért

$$\gamma c_1$$

egész szám.

γc_2 nevezőjében csak c_1 nevezője fordulhat elő, tehát γ, még pedig annyiadik hatványon, a mennyi a (10.) egyenleten c_1 legmagasabb hatványkitevője, midőn $n-m=2$, könnyű látni, hogy az első szummában c_1 előfordul a négyzeten, de a másodikban csak az első hatványon, ennélfogva γc_2 nevezőjében előfordulhat γ^2, tehát

$$\gamma^3 c_2$$

egész szám.

Hasonlóképen találjuk, hogy $\gamma^5 c_3$ szintén egész szám.

Általában kimutatom: *hogy ha*

$$\gamma^{2s-1} c_s$$

egész szám, akkor

$$\gamma^{2s+1} c_{s+1}$$

szintén az.

Ugyanis γc_{s+1} nevezőjében csak $c_1, c_2, \ldots, c_s$ nevezői fordulhatnak elő, vagyis γ-nak bizonyos hatványa, melyet a következőképen határozunk meg.

A (10.) egyenlet első szummájában előforduló tagok általános alakja eltekintve az egész számú együtthatótól

$$c_{\alpha_1} c_{\alpha_2} \ldots c_{\alpha_k};$$

a jelen esetben $n-m=s+1$, tehát

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=s+1;$$

minthogy az α-k mindegyike kisebb $(s+1)$-nél, tehát általában c_α nevezőjében előfordulhat $\gamma^{2\alpha-1}$; az általános tag nevezőjében γ hatványa tehát

$$2\alpha_1-1+2\alpha_2-1+\cdots+2\alpha_k-1=2s+2-k$$

mely legnagyobb, *ha r a legkisebb értékét (az $k=2$ értéket) veszi fel, ennélfogva az első szummában előforduló tagok nevezőiben γ-nak legmagasabb hatványa $2s$.*

A (10.) egyenlet második szummájában az általános tag

$$c_{\beta_1} c_{\beta_2} \ldots c_{\beta_l}, \quad (l \geq 1,\ l \leq s),$$

hol

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_l \leq s$$

tehát az általános tag nevezőjében γ hatványkitevője

$$2\beta_1-1+2\beta_2-1+\cdots+2\beta_l-1 \leqq 2s-l$$

a mi kimondja, hogy a második szummában γ-nak $2s-1$-nél magasabb hatványa nem fordulhat elő a nevezőben; ezzel kimutattuk, hogy a (10.) *egyenletben $n-m=s+1$ alkalomkor γ-nak $2s$-ediknél magasabb hatványai már nem fordulhatnak elő a nevezőben; tehát*

$$\gamma^{2s+1} c_{s+1}$$

egész szám, ha $\gamma^2=a$, akkor az $ax\mathfrak{P}(ax)$ *hatványsor együtthatói egész számok,* a mi bebizonyitandó volt.

Bebizonyitásunk és γ-nak közölt meghatározása csak egy esetben nem használható közvetlenűl, ha t. i.

$$\varphi_0'(c_0)=0.$$

Ha $\gamma=0$, akkor a (10) alatt levő egyenletet következőképen rendezem:

$$\gamma c_s+\gamma_1 c_{s-1}+\ldots+\gamma_r c_{s-r}+\ldots+\gamma_{s_1}c_{s_1}+\varphi_{s_1-1}=0, \quad (11)$$
$$(s=n-m)$$

hol

$$s_1=\frac{s+1}{2}, \text{ (ha } s\equiv 1 \text{ (mod 2))}$$

$$s_1=\frac{s+2}{2}, \text{ (há } s\equiv 0 \text{ (mod 2))}$$

és γ_r a $c_0, c_1, \ldots, c_r$ együtthatóknak-; φ_{s_1-1} pedig c_0, c_1, c_{s_1-1} egészszámú együtthatókkal biró függvénye.

Ha s elég nagy, akkor a γ-k mindegyike nem lehet zérus; mert különben egyenletünk azonosan zérus lenne. Legyen γ_r az első zérustól különböző γ, mit egész számnak tételezhetünk fel, minthogy $c_1, c_2, \ldots, c_r$ legkisebb közös többszörösével megszorozhathatjuk a (11) egyenlet gyökeit.

A (11) egyenlet kimondja: *hogy $\gamma_r c_{s-r}$ nevezőjében nem fordulhatnak elő olyan prímszámok, melyek $s-r$-nél alacsonyabb indexű c-k nevezőjében nem fordulnak elő.*

Az előző fejezetben megállapított módszerrel találjuk, hogy

$$\gamma_r c_{r+1}, \gamma_r c^3_{r+2}, \ldots, \gamma_r c^{2s-1}_{r+1}$$

egész számok, tehát $ax\mathfrak{P}(ax)$ együtthatói is azok, ha

$$a=\gamma_r^2.$$

Számelméleti alkalmazások. Levezetésünk nem csak Eisenstein tételének általánositására vezető útat mutat, hanem számelméleti tételek kimondására is igen alkalmas segédeszköz; mert ha ismerem azt az egyenletet, melynek az adott raczionális együtthatókkal biró sor eleget tesz, könnyen meghatározhatom azt a számot, melylyel az általános tag együtthatóját szorozva egész számot kapok, a mivel egyszersmind oszthatósági tétel fog kiadódni.

1. Példa

$$y^n-(1+x)^r=0$$

illetve

$$(1+x)^r y^n-1=0$$

egyenletnek eleget tesz

$$y=\sum_{s=0}^{\infty}\binom{\frac{\pm r}{n}}{s}x^s.$$

A jelen esetben

$$\gamma=\varphi_0'(c_1)=n$$

tehát

$$\binom{\frac{\pm r}{n}}{s}n^{2s-1}$$

egész szám, vagyis

$$\frac{r(r\mp n)(r\mp 2n)\ldots(r\mp(s-1)\,n)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots s}n^{s-1}$$

egész szám.

2. Példa.

Jelentse $P^n(x)$ szokás szerint a következő gömbfüggvényt:

$$P^{(n)}(x)=$$

$$\frac{1.3.5...(2n-1)}{1.2.3...n}\left(x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}+\cdots\right)$$

Az

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a^nP^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right)$$

hatványsor, melyben a a változó és x csak parameter, eleget tesz ennek az egyenletnek:

$$f\equiv(1-xa+a^2)\,y^2-1=0,$$

melyben az együtthatók az x parameternek egész számú együtthatókkal biró egész függvényei.

A sor állandó tagja:

$$P^{(0)}=1,$$

továbbá

$$\gamma=\varphi_0'(c_0)=2.$$

Ennélfogva

$$2^{2n-1}P^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right)$$

az x-nek egész együtthatókkal biró egész függvénye.

Ha még tekintetbe vesszük, hogy $P^{(n)}(x)$ együtthatói a

$$2^n P^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right)$$

együtthatóiból rendre

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$$

-nel való szorzás utján keletkeznek, kimondhatjuk, hogy

$$2^{n-1} P^n(x)$$

együtthatói egész számok.

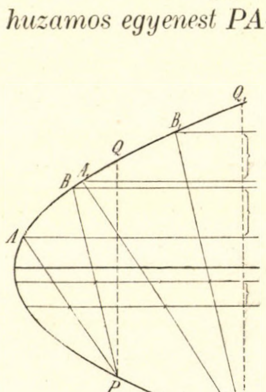
Suták József.

TÉTELEK A PARABOLÁRÓL ÉS A HIPERBOLIKUS PARABOLOIDRÓL.

1. *Ha valamely parabola két tetszés szerinti pontján P és P_1-en át a PA és P_1A_1-et egymással párhuzamosan, továbbá PQ-t és P_1Q_1-et a parabola tengelyére merőlegesen húzzuk, és ezek a parabolát másodízben az A és A_1, illetve Q és Q_1 pontokban metszik, akkor A és Q-n, valamint A_1 és Q_1-en át a parabola tengelyével párhuzamosan haladó egyenesek ugyanabban az értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők.*

Az AP és A_1P_1 húrok felező pontjai a parabola tengelyével párhuzamos egyenesben feküsznek és fél akkora távolságra vannak a tengelytől, mint az A és Q-n, valamint A_1 és Q_1-en át a tengelylyel párhuzamos egyenesek, — miből már is következik a tétel helyessége.

2. *Ha valamely parabola P, P_1 pontjain át két-két pár párhuzamos egyenest PA-, P_1A_1-et; PB-, P_1B_1-et húzunk, melyek a parabolát másodízben az A, A_1; B, B_1 pontokban metszik, akkor az A, és B-n valamint A_1 és B_1-en át a parabola tengelyével párhuzamos egyenesek ugyanabban az értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők.*



Ha P illetve P_1-ből a tengelyre merőleges húrok másik végpontja Q illetve Q_1, akkor A, B, Q, valamint A_1, B_1, Q_1 pontokon át a tengelylyel párhuzamos egyenesek közűl az A és Q-n illetve

A_1 és Q_1-en átmenő párhuzamosak, úgyszintén B és Q-n és B_1 és Q_1-en átmenő párhuzamosak ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők. Ebből következik, hogy A, B-n és A_1, B_1-en átmenő párhuzamosak szintén ugyanégy értelemben következnek egymásra és távolságaik egymás között egyenlők.

3. *Ha valamely parabola A, B, valamint A_1, B_1 pontján át annak tengelyével párhuzamos egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők; ha továbbá AP, BP sugarak egymást a parabola P pontjában metszik: akkor A_1, B_1 ponton át AP, illetve BP-vel párhuzamos A_1P_1, B_1P_1 sugarak P_1 metszéspontja szintén a parabolán fekszik.*

A B_1P_1 sugár metszéspontját a parabolával P_1'-nek nevezvén, ha ezen át AP-vel párhuzamos egyenes a parabolát A_1'-ben metszi, akkor A_1' és B_1-en és A és B-n át a parabola tengelyével párhuzamosan haladó egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők.

De a föltétel szerint A_1 és B_1-en illetve A és B-n át a tengelylyel párhuzamos egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők; ezért A_1 és A_1'-en át a tengelylyel párhuzamos egyenesek és így A_1 és A_1'; P_1 és P_1' pontok is összeesnek.

A tétel még így is fogalmazható:

3a. «*Ha valamely parabola A, B, valamint A_1, B_1 pontján át annak tengelyével párhuzamos egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők, ha továbbá valamely APB szög csúcsa P a parabolán mozog, szárai pedig az A, B pontokon mennek át, akkor egy másik változó szög $A_1P_1B_1$ csúcsa P_1, ha A_1P_1, B_1P_1 szárai APB szög AP, BP száraival párhuzamosak, ugyanazt a parabolát írja le*».

Jegyzet. Ha az A, B, A_1, B_1 pontok ugyanazon körön feküsznek és az AB hur $= A_1B_1$ hurral, és a változó APB szög csúcsa a körön mozog, akkor a változó $A_1P_1B_1$ szög P csúcsa ugyanazt a kört írja le.

4. «*Ha A, B a p parabola két pontja; A_1, B_1 két a parabola*

síkjában, vagy egy evvel párhuzamos egyenesben a parabolán kívül fekvő pont, de A, B-n, valamint A_1B_1-en át a parabola tengelyével párhuzamos egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők; ha továbbá egy változó APB szög P csúcsa a parabolán mozog: akkor egy másik változó szög $A_1P_1B_1$, P_1 csúcsa, melynek A_1P_1, B_1P_1 szárai APB szög AP, BP száraival párhuzamosak, p parabolával kongruens parabolát ír le.»

Legyen p parabolának A_1B_1-hez párhuzamos húrja CD; ennek felezőpontja E. Rakjunk CD-re E-től mérve mindkét oldalt A_1B_1 felével egyenlő egyenesdarabot F illetve G-ig ($FE = EG = =\frac{1}{2}A_1B_1$), és nevezzük az F és G-n át p parabola tengelyével párhuzamos egyenesek metszéspontját a parabolával A'_1, B'_1-nek; p-nek $A'_1B'_1$ húrja párhuzamos és egyenlő A_1B_1-gyel. Ha már most a tételben kifejezett APB szög AP, BP száraival A'_1, B'_1-en és A_1, B_1-en át $A'_1P'_1$, $B'_1P'_1$, illetve A_1P_1, B_1P_1 párhuzamosakat húzzuk, akkor $A_1P_1B_1$, $A'_1P'_1B'_1$ háromszögek kongruensek és így, mert a P'_1 pont a p parobolát írja le (3a), P_1 pont egy véle kongruens paralolát fog leírni.

5 «*A hiperbolikus paraboloid metszései, a felület tengelyével és egymás között párhuzamos síkokkal, kongruens parabolák*».

Nevezzünk két, a hiperbolikus paraboloid tengelyével és egymással párhuzamos síkot ε, ε_1-nek; a felület két ugyanegy rendszerbeli alkotójának a, b-nek metszéspontját ε-nal A, B-nek; ε_1-gyel A_1, B_1-nek. Az a, b-n át az a, b, . . . alkotók vezérlő síkjával párhuzamos α, β síkok ε, ε_1-et: $|\alpha\varepsilon|$, $|\beta\varepsilon|$, illetve $|\alpha\varepsilon_1|$, $|\beta\varepsilon_1|$ egyenesekben metszik, melyek a hyperbolikus paraboloid tengelyével párhuzamosak, továbbá ugyanegy értelemben következnek egymásra és $|\alpha\varepsilon|$, $|\beta\varepsilon|$ valamint $|\alpha\varepsilon_1|$, $|\beta\varepsilon_1|$ párhuzamosak távolságai egyenlők.

a-n és a felület másik, mondjuk g rendszerbeli alkotóján átmenő síkok sora ε, ε_1-t két projektív sugársor $\{A\}$, $\{A_1\}$ szerint metszi, melynek megfelelő A, A_1-ből kiinduló sugarai párhuzamosak; úgyszintén b-n és a g rendszerbeli alkotókon átmenő síksor metszése ε, ε_1-gyel, két B, B_1-ből kiinduló $\{B\}$, $\{B_1\}$ projektív sugársor lesz, megfelelő párhuzamos sugarakkal.

$\{A\}$, $\{B\}$, valamint $\{A_1\}$, $\{B_1\}$ sugársorok projektivek, ha oly sugarak tekintetnek megfelelőknek, melyek egymást a változó g rendszerbeli alkotókon metszik. A két első, valamint a két utóbbi projektív sugársor képződménye ama két parabola p, p_1, mely szerint ε, ε_1 síkok a felületet metszik, s melyeknek tengelyei a felületek tengelyével párhuzamosak. De minthogy az $\{A\}$, $\{A_1\}$ és $\{B\}$, $\{B_1\}$ sugársorok megfelelő sugarai párhuzamosak, továbbá A, B-n és A_1, B_1-en át a felület tengelyével párhuzamos $|\alpha\varepsilon|$, $|\beta\varepsilon|$ és $|\alpha\varepsilon_1|$, $|\beta\varepsilon_1|$ egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők: a p, p_1 parabolák kongruensek.

Klug Lipót.

A KÖRMÉRÉS TÖRTÉNETE ÉS ELMÉLETE.

(Nyolczadik közlemény.)

5. Ha

$$c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

akkor $K_m(z)$ azonosan zérus és ennélfogva $f(z)$-vel akárhányszor osztható. Ha ellenben $h(z)$ együtthatóinak más valamely értékrendszert tulajdonítunk, akkor $K_m(z)$ a z-nek legalább $(mn+m)$-ed s legfeljebb $(mn+m+n)$-edfokú függvénye, tehát az

$$f^0(z) = 1, \quad f(z), \quad f^2(z), \ldots, f^{m+1}(z)$$

sorozat elemei közt okvetetlenűl létezik egy oly $f^\varrho(z)$, melylyel $K_m(z)$ még osztható, de a reá következő $f^{\varrho+1}(z)$ a $K_m(z)$-ben már nem foglaltatik maradék nélkül. Határozzuk meg, hogy sorozatunkban melyik ez az elem, vagyis hogy miként választandó ρ, ha $K_m(z)$ mint $f^\varrho(z)$-nek s egy $f(z)$-vel többé nem osztható, $L_m(z)$ egész függvénynek szorzatát akarjuk előállítani.

A $K_m(z)$-t értelmező (4) alatti egyenlet ily alakban is írható:

$$K'_m(z) - K_m(z) + \frac{h(z)}{m!} f^m(z) = 0.$$

Ha itt elvégezzük a

$$K_m(z) = f^\varrho(z)\, L_m(z)$$

helyettesitést és $f^{\varrho-1}(z)$-vel osztunk, akkor

$$\left[L'_m(z) - L_m(z) + \frac{h(z)}{m!} f^{m-\varrho}(z)\right] f(z) + \rho L_m(z) f'(z) = 0$$

adódik ki. E szerint a

$$\rho L_m(z)\, f'(z)$$

szorzat $f(z)$-vel osztható lesz, minthogy pedig $f'(z)$ az $f(z)$-hez képest relativ prim függvény, egymagában $\rho L_m(z)$-nek is oszthatónak kell lennie $f(z)$-vel. Ez csak úgy lehetséges, hogy $\rho = 0$; mert ha ρ nem zérus, akkor $L_m(z)$-vel együtt $\rho L_m(z)$ sem osztható $f(z)$-vel.

Ha még tekintetbe veszszük, hogy az (5) alatti egyenlet értelmében — az $f(z)$-vel való osztásnál $K_m(z)$-nek és $H_m(z)$-nek ugyanaz a maradéka van, akkor kimondható mint

I. **Segédtétel**: *Ha a*

$$c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots, c_n$$

együtthatók nem mindannyian egyenlők zérussal, akkor a $K_m(z)$ *és* $H_m(z)$ *függvények egyike sem osztható* $f(z)$*-vel.*

6. Ennek csak más alakban való fogalmazása a következő

II. **Segédtétel**: *A*

$$g_0(z, m),\ g_1(z, m), \ldots, g_n(z, m)$$

függvények egymástól lineárisan függetlenek.

Ez annyit jelent, hogy nem lehet oly

$$c_0,\ c_1, \ldots, c_n$$

értékrendszert találni, hogy a

$$c_0 g_0(z, m) + c_1 g_1(z, m) + \ldots + c_n g_n(z, m)$$

összeg azonosan eltünnék anélkül, hogy a választott

$$c_0,\ c_1, \ldots, c_n$$

értékek mindannyian zérusok volnának.

7. III. **Segédtétel**: *Jelentse*

az

$$z_0,\ z_1, \ldots, z_\lambda, \ldots, z_n$$

$$f(z) = 0$$

egyenletnek $n+1$ *gyökét,* δ *pedig legyen egy tetszőlegesen választott kis pozitiv szám. Akkor számtalan módon képezhető oly* $n+1$, *egész együtthatókkal biró, legfeljebb n-ed fokú ráczionális egész függvény:*

$$g_0(z),\ g_1(z),\ \ldots,\ g_\nu(z),\ \ldots,\ g_n(z)$$

úgy, hogy

$$(8)\qquad |\, g_\nu(z_0)\, e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda)\, e^{z_0} \,| < \delta \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

és a

$$D = \begin{vmatrix} g_0(z_0) & g_1(z_0) & \ldots & g_n(z_0) \\ g_0(z_1) & g_1(z_1) & \ldots & g_n(z_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_0(z_n) & g_1(z_n) & \ldots & g_n(z_n) \end{vmatrix}$$

determináns nem zérus.

Ennek bebizonyításánál induljunk ki a $K_m(z)$-t értelmező egyenletből, melyet — a $g_\nu(z, m)$-ekre való áttérést megkönnyítendő — $a_0^{m(n-1)}$-gyel szorozván, a

$$\frac{d}{dz}[a_0^{m(n-1)} K_m(z)\, e^{-z}] = -\frac{h(z)}{m!}[a_0^{n-1} f(z)]^m e^{-z}$$

alakban írhatunk. Bárhogyan válaszszuk is $h(z)$ együtthatóit, mindig található oly ϑ pozitiv szám, hogy a $z_0 z_\lambda$ úton

$$|\, h(z)\, e^{-z} \,| < \vartheta,$$

továbbá φ alkalmas választása után ugyanazon az úton

$$|\, a_0^{n-1} f(z) \,| < \varphi,$$

tehát ugyanott

$$\frac{d}{dz}[a_0^{m(n-1)} K_m(z)\, e^{-z}]$$

abszolut értéke folyvást kisebb mint

$$\frac{\vartheta \varphi^m}{m!}.$$

Ha most már ε egy tetszőlegesen választott kis pozitiv számot jelent, m mindig úgy választható, hogy

$$\frac{\vartheta \varphi^m}{m!} < \varepsilon,$$

s ennélfogva — a jelen fejezet bevezetésében említett tétel értelmében —

$$a_0^{m(n-1)}[K_m(z_0)e^{-z_0}-K_m(z_\lambda)e^{-z_\lambda}]$$

abszolut értéke kisebb mint $\varepsilon\,|z_0-z_\lambda|$.

Más szóval

$$\lim_{m=\infty}.\, a_0^{m(n-1)}\left[K_m(z_0)e^{-z_0}-K_m(z_\lambda)e^{-z_\lambda}\right]=0,$$

s ha még $e^{z_0+z_\lambda}$-val szorzunk, akkor

$$\lim_{m=\infty}.\, a_0^{m(n-1)}\left[K_m(z_0)e^{z_\lambda}-K_m(z_\lambda)e^{z_0}\right]=0.$$

Itt

$$a_0^{m(n-1)}K_m(z_0)=a_0^{m(n-1)}H_m(z_0)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu g_\nu(z_0,m),$$

$$a_0^{m(n-1)}K_m(z_\lambda)=a_0^{m(n-1)}H_m(z_\lambda)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu g_\nu(z_\lambda,m),$$

ennélfogva egyszersmind

$$\lim_{m=\infty}.\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu\left[g_\nu(z_0,m)e^{z_\lambda}-g_\nu(z_\lambda,m)e^{z_0}\right]=0.$$

Minthogy ez a c_ν-k bármely választásánál így van, azért különkülön

$$\lim_{m=\infty}.\left[g_\nu(z_0,m)e^{z_\lambda}-g_\nu(z_\lambda,m)e^{z_0}\right]=0.$$
$$(\nu=0,1,\ldots,n)$$

Ha tehát m-t egy bizonyos M-nél nagyobbra választjuk, a

$$g_0(z)=g_0(z,m),\ g_1(z)=g_1(z,m),\ \ldots,\ g_n(z)=g_n(z,m)$$

függvények mindenkor kielégítik a (8) alatti egyenlőtlenséget.

Továbbá e függvényekre nézve a D determináns nem lehet zérus. Ha ugyanis D zérus volna, akkor a

$$\begin{array}{l}
c_0g_0(z_0,m)+c_1g_1(z_0,m)+\ldots+c_ng_n(z_0,m)=0\\
c_0g_0(z_1,m)+c_1g_1(z_1,m)+\ldots+c_ng_n(z_1,m)=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_0g_0(z_n,m)+c_1g_1(z_n,m)+\ldots+c_ng_n(z_n,m)=0
\end{array}$$

egyenletrendszeiből

$$c_0, c_1, \ldots, c_n$$

számára oly értékek adódnának ki, hogy a

$$c_0 g_0(z, m) + c_1 g_1(z, m) + \ldots + c_n g_n(z, m)$$

legfeljebb n-ed fokú egész függvény a

$$z_0, z_1, \ldots, z_n$$

helyek mindegyikén eltünnék s ily módon azonosan zérus volna anélkül, hogy a

$$c_0, c_1, \ldots, c_n$$

mennyiségek mindannyian zérusok volnának.

Ámde ez ellenkezik a II. segédtétellel.

8. Az imént bebizonyitott kiválóan fontos tételhez képest már csak egyszerű megjegyzés szerepével bír a következő

IV. Segédtétel: *Az*

$$a_0^n g_\nu(z_\lambda) \quad {\scriptstyle (\lambda,\ \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n)}$$

mennyiségek mindannyian algebrai egész számok.

Legyen ugyanis

$$g_\nu(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k$$

hol $k \leqq n$, akkor

$$a_0^k g_\nu(z_\lambda) = a_0(a_0 z_\lambda)^k + a_1 a_0 (a_0 z_\lambda)^{k-1} + \ldots + a_0 a_0^k.$$

Itt

$$a_0 z_\lambda$$

mint az

$$a_0^n f(z) = (a_0 z)^{n+1} + a_1(a_0 z)^n + a_2 a_0 (a_0 z)^{n-1} + \ldots + a_{n+1} a_0^n$$

egyenlet gyöke *algebrai egész* szám, tehát $a_0^k g_\nu(z_\lambda)$, mint ennek egész számú együtthatókkal biró egész függvénye szintén *algebrai egész* szám és a belőle a_0^{n-k}-val való szorzás útján keletkező $a_0^n g_\nu(z_\lambda)$ nem kevésbbé az.

9. Tantétel. *Az*

$$e^x + 1$$

függvény algebrai szám behelyettesítése után nem válhatik zérussá.

Ha x ráczionális szám, akkor $e^x + 1$ pozitiv; e tétel tehát csak irráczionális algebrai számokra bizonyitandó be.

Ha az x_1 irráczionális szám az

$$x^r + b_1 x^{r-1} + \ldots + b_r = 0$$

ráczionális együtthatókkal biró egyenletnek egyik gyöke, továbbá

$$x_2, x_3, \ldots, x_r$$

ugyanennek az egyenletnek többi gyökei, akkor tételünk értelmében az

$$(e^{x_1} + 1)\,(e^{x_2} + 1)\ \ldots\ (e^{x_r} + 1)$$

szorzat nem lehet zérus. Forditva ha e szorzatról sikerül kimutatni, hogy — bármely ráczionális együtthatókkal biró másod vagy magasabb fokú egyenlet gyökeire vonatkozólag képezzük is — mindenkor a zérustól külömböző értéke van, akkor ezzel együtt a szóban forgó tétel is be van bizonyitva.

A vizsgálandó szorzat egyenlő az

$$1 + e^{x_1} + \ldots e^{x_r} + e^{x_1 + x_2} + \ldots + e^{x_{r-1} + x_r} + \ldots + e^{x_1 + x_2 + \ldots + x_r}$$

összeggel, vagy röviden

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=r} (e^{x_\lambda} + 1) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} e^{z_\lambda},$$

hol a jobb oldalon álló összeg mindama kitevőkre vonatkozik, melyek a

$$z_\lambda = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_r x_r$$

képletből akként keletkeznek, hogy

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$$

helyébe a 0 és 1 minden lehető r-edosztályú variáczióját helyettesitjük.

Ezeknek száma $p = 2^r$.

A $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$ számok közűl az egymástól külömbözők legyenek

$$z_0=0, z_1, \ldots, z_n.$$

Itt n nem lehet zérus, mert 0-on kivül legalább a tőle külömböző x_1 szintén e sorozatba tartozik.

E számokhoz mindig található oly egész számú együtthatókkal biró $(n+1)$-sőfokú ráczionális egész függvény

$$f(z)=a_0z^{n+1}+a_1z^n+\ldots+a_{n+1},$$

melynek ezek épen zérus-helyei.

Ugyanis a

$$\prod_{\lambda=0}^{p-1}(z-z_\lambda)=\prod_{\lambda=0}^{p-1}(z-\varepsilon_1x_1-\varepsilon_2x_2-\ldots-\varepsilon_rx_r)$$

szorzat mint z-nek oly $\psi(z)$ egész többtagúja fejezhető ki, melyben az együtthatók $x_1, x_2, \ldots, x_r$ szimmetrikus függvényei, tehát raczionális számok. Ha e $\psi(z)$-t elosztjuk $\psi'(z)$-vel való legnagyobb közös osztójával, akkor a nyert hányados z-nek oly $(n+1)$-sőfokú egész függvénye, melynek épen

$$z_0=0, z_1, \ldots, z_n$$

a zérus-helyei. A keresett $f(z)$ ebből úgy adódik ki, hogy alkalmas egész számmal való szorzás segítségével az együtthatókban esetleg fellépett nevezőket eltávolítjuk.

Erre az $f(z)$ függvényre fogjuk most már a III. segédtételt alkalmazni. A benne szereplő δ-t úgy választjuk, hogy

$$(p-1)a_0^n\delta<1.$$

Az ott előírt módon képezett

$$g_0(z), g_1(z), \ldots, g_n(z)$$

függvényekre vonatkozó (8) alatti egyenlőtlenségek a következő egyenletekkel pótolhatók

$$a_0^n g_\nu(0)e^{z_\lambda}-a_0^n g_\nu(z_\lambda)=\delta_{\nu\lambda}$$
$$(\lambda, \nu=0, 1, \ldots, n),$$

hol

$$|(p-1)\delta_{\nu\lambda}| < 1$$

és különösen

$$d_{\nu,0} = 0.$$

Ha $p < n$, akkor a

$$z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{p-1}$$

számok mindegyike a

$$z_0 = 0, z_1, \ldots, z_n$$

valamelyikével egyenlő, ennélfogva az előbbi egyenletrendszer így is kibővíthető:

$$a_0^n g_\nu(0) e^{z_\lambda} - a_0^n g_\nu(z_\lambda) = \delta_{\nu\lambda}$$
$$\left(\begin{matrix}\lambda=0, 1, \ldots, p-1 \\ \nu=0, 1, \ldots, n\end{matrix}\right).$$

Ezek közűl az egyenletek közűl az ugyanazon ν-re vonatkozókat összeadjuk. Az így nyert

$$a_0^n g_\nu(0) \sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{z_\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \delta_{\nu\lambda}$$

egyenletben

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{p-1} \delta_{\nu\lambda}\right| \leqq \sum_{\lambda=0}^{p-1} |\delta_{\nu\lambda}| < 1,$$

tehát

$$\left| a_0^n g_\nu(0) \prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda}+1) - \sum_{\lambda=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda) \right| < 1.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek értelmében annak kimutatására, hogy

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda}+1)$$

nem lehet zérus, elég lesz arról meggyőződni, hogy az

$$(9) \qquad \left|\sum_{\lambda=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda)\right| < 1$$

egyenlőtlenség nem állhat fenn ν minden értékénél. Erre a IV. segédtétel és a III.-nak még fel nem használt része fog szolgálni.

A IV. segédtétel értelmében az

$$a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

mennyiségek algebrai egész számok s ennélfogva a

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

értéke is algebrai egész szám. Másrészt ez az összeg, mint a z_λ-k szimmetrikus függvénye, ráczionális szám. Mindkét megjegyzést összefoglalva, a vizsgált összeg *ráczionális egész* szám, minélfogva a (9) alatti egyenlőtlenség a

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda) = 0$$

egyenletet vonná maga után. Ha itt még az egyenlő értékű z_λ-kat tartalmazó tagokat összevonjuk, akkor

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \beta_\nu g_\nu(z_\lambda) = 0$$

alakú egyenletet nyerünk, hol a β_ν-k pozitiv egész számok (t. i. az a_0 pozitiv egész szám bizonyos hatványainak összegei). De ily egyenlet nem állhat fenn ν minden értékénél, mert külömben a $g_\nu(z_\lambda)$-k determinánsa zérus lenne, a mi a III. segédtétellel ellenkeznék.

8. A bebizonyitott tantétel közvetlen *folyománya*, hogy:

A ludolfi szám nem lehet algebrai szám.

Ha ugyanis π algebrai szám volna, a belőle s az i algebrai számból képezett πi szorzat szintén algebrai szám volna, tehát a bebizonyitott tantétel értelmében

$$e^{\pi i} + 1$$

nem lehetne 0, pedig valójában az.

9. *Általánosítások.* Lindemann értekezése a kitevős függvényre vonatkozólag még jóval általtalánosabb tételeket is tartalmaz, melyeket Weierstrass szintén bebizonyitott.

A legáltalánosabb tétel e téren a következő:

Legyen

$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$

r egymástól külömböző algebrai szám és

$$X_1, X_2, \ldots X_r$$

oly r tetszőleges algebrai szám, melyek közűl legalább egy nem zérus. Ekkor az

$$X_1 e^{x_1} + X_2 e^{x_2} + \ldots + X_r e^{x_r} = 0$$

egyenlet nem állhat fenn.

E tétel messze túl vezet a körmérés elméletén, s azért bebizonyítását itt nem nyújthatjuk. Legyen elég a következő folyományait említenünk:

a) Ha $r = 2$,

$$x_1 = x, \qquad x_2 = 0$$
$$X_1 = -1, \qquad X_2 = X$$

akkor az

$$e^x = X$$

egyenletben x és X nem lehetnek egyszerre algebrai számok.

Ha x algebrai szám, az e^x kitevős függvény értéke csak az esetben lehet algebrai szám, mikor

$$x = 0.$$

Ha X algebrai szám, akkor természetes logarithmusa csak az esetben lehet algebrai szám, ha $X = 1$.

b) Legyen $r = 3$

$$x_1 = \frac{xi}{2}, \quad x_2 = -\frac{xi}{2}, \quad x_3 = 0,$$

$$X_1 = i, \quad X_2 = -i, \quad X_3 = X,$$

akkor

$$X_1 e^{x_1} + X_2 e^{x_2} = -2 \sin \frac{x}{2},$$

ennélfogva a

$$2 \sin \frac{x}{2} = X$$

egyenletben x és X nem lehetnek egyidőben algebrai számok, kivéve persze az

$$x = X = 0$$

esetet.

Ez annyit jelent, hogy az egység sugarú körben *valamely ív és annak húrja nem lehetnek egyszerre algebrai számok.*

Kürschák József.

MEGOLDOTT FELADATOK.

18. *Minő görbét ad a*

$$\sin^2 \pi x . \sin^2 \pi y = 1$$

egyenlet? (KŐNIG.)

Első megoldás Csillag Vilmos főreáliskolai h. tanár úrtól Budapesten.

Az adott egyenlet a következőképen írható:

$$(\sin \pi x \sin \pi y - 1)(\sin \pi x \sin \pi y + 1) = 0.$$

Tehát vagy

$$\sin \pi x \sin \pi y = 1,$$

vagy

$$\sin \pi x . \sin \pi y = -1.$$

Valós szám sinusa absolut értéke nem lehet nagyobb egynél; ennélfogva könnyű látni, hogy transzczendens egyenleteink valós megoldásaira vonatkozólag, külön-külön

$$\begin{matrix} \sin \pi x = \pm 1 \\ \sin \pi y = \pm 1 \end{matrix} \quad \text{illetőleg} \quad \begin{matrix} \sin \pi x = \pm 1 \\ \sin \pi y = \mp 1, \end{matrix}$$

a miből

$$\begin{matrix} \pi x = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \pi y = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{matrix} \quad \text{illetőleg} \quad \begin{matrix} \pi x = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \pi y = \mp \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \end{matrix}$$

hol n e kifejezések mindegyikében egészen tetszőleges egész számot jelent és így a görbe valós része csupán az

$$\begin{matrix} x = \pm \frac{1}{2} + 2n \\ y = \pm \frac{1}{2} + 2n \end{matrix} \quad \text{illetőleg} \quad \begin{matrix} x = \pm \frac{1}{2} + 2n \\ y = \mp \frac{1}{2} + 2n \end{matrix}$$

számpárok meghatározta pontok rendszeréből áll.

*

Második megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

A feladatban foglalt egyenletet az

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{2} + 2k_1 \\ y &= \pm\frac{1}{2} + 2k_1' \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{2} + 2k_2 \\ y &= \mp\frac{1}{2} + 2k_2' \end{aligned}\right\}$$

$(k_1, k_1', k_2, k_2'$ egész számok)

értékrendszerek meghatározta pontok rendszere elégíti ki.

E pontrendszer bármely pontjában az y függvény akármelyik ágára nézve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

míg a harmadrendű differencziálhányadosok a zérustól különbözők; úgy hogy a talált valós pontrendszer pontjai függvénytani szempontból oly viselkedésüek mint valós görbének forduló pontjai.

*

Ugyan e feladat megoldását beküldték még: Fuchs Károly *főgimn. tanár úr Pancsováról,* Csehély Adolf *főgimn. tanár úr Trsztenáról,* Grünwald István *áll. középipariskolai tanár úr Budapesten és* Csorba György *tanárjelölt úr Budapesten.* Szerk.

FELADATOK.

27. Képzeljük a forgó földet geometriai gömbnek. Az æquatoron egy tömegpont bizonyos irányban, bizonyos sebességgel elindíttatik. Határoztassék meg e pont mozgása a föld felületén, ha surlódás nincsen. Fuchs.

28. Egy homogén növényi gömb (burgonya, tök, narancs) úgy nő, hogy valamely A anyag (pl. oxygen) kívülről a felületen át egészen a középpontig bediffundál. Az A anyagból egy bizonyos pontban időegységenként fogyasztott mennyiség arányos az A anyagnak ezen pontbeli sűrűségével (ρ). Határoztassék meg ezen sűrűség, mint a középponttól mért r távolság functiója. Fuchs.

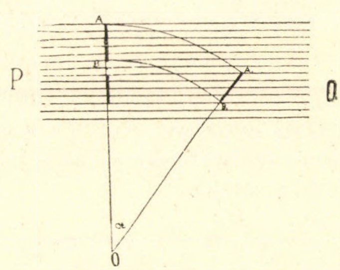
ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

A Gramme-féle gyűrű elmélete.*

A GRAMME-féle gyűrű — s általában az inductiós gépek elmélete — úgy érthető meg legjobban, ha fejlődését első feltűnésétől kezdve követjük. Midőn FARADAY az inductiót felfedezte, arra törekedtek, hogy folytonos áramok előállítására értékesítsék. A törekvésnek csakhamar sikere is volt, a mennyiben nemsokára az inductió felfedezése után PIXII és STÖHRER megszerkesztették ismeretes mágnes-elektromos gépeiket. Az utóbbinak gépében aczél-mágnes sarkai előtt két orsó forog s a bennök indukált váltakozó áramot a kommutátor egyirányú árammá változtatja át. A gép szolgáltatta áram természetéről jó fogalmat nyerünk, ha mindenek előtt azt az egyszerű esetet veszszük szemügyre, melyben egy menetből álló zárt vezető mozog homogén mágneses térben.



1. ábra.

Jelezze PQ vonalrendszer (1. ábra) a homogén mágneses tér erővonalait, melyben O pont körül AB zárt vezető forog. A legtöbb erővonal akkor fog a vezetőn áthaladni, midőn síkja merőleges az erővonalak irányára; ha ezen maximális értéket N_0 fejezi ki, úgy a vezető bármely helyzetében a rajta átmenő erővonalak száma ebből az értékből könnyen meghatározható. Ha ugyanis a vezető A_1B_1-be jutott és síkja AB-vel, illetőleg a tér normalis síkjával α szöget zár be, akkor A_1B_1-en ugyanazon erővona-

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat f. é. márczius 1-én tartott rendes ülésén.

lak mennek át, mint a normalis síkra való vetületén; ha ez utóbbiak számát N jelöli, lesz

$$N = N_0 \cos \alpha = FH \cos \alpha$$

hol F a vezető által bezárt felület, H pedig a mágneses tér intenzitása. Ebből az egyenletből az indukált elektromotoros erő nagyon egyszerűen kiadódik, mert hiszen arányos az erővonalak számának változásával, vagyis

$$E = -\frac{dN}{dt} = N_0 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

s ha a vezető másodperczenként n fordulatot tesz, a szögsebesség

$$\frac{d\alpha}{dt} = 2\pi n$$

tehát

$$E = E_0 \sin \alpha,$$

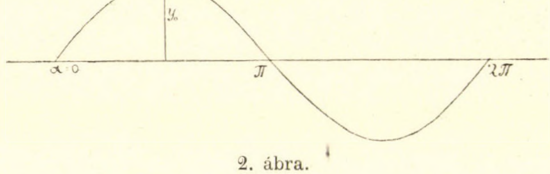
hol

$$E_0 = 2\pi n FH,$$

vagyis az elektromótoros erő maximális értéke. Ha továbbá a vezető ellenállása R, úgy az áram intenzitása

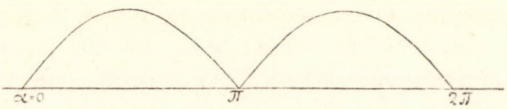
$$I = \frac{E_0}{R} \sin \alpha = I_0 \sin \alpha.$$

A homogén mágneses térben forgatott zárt vezetőben tehát változó és váltakozó irányú áram keletkezik, mely legnagyobb értékű akkor, midőn a vezető síkja párhuzamos az erővonalakkal. A derékszögű coordináta rendszer egyik tengelyére α, másikára pedig I értéket rávezetvén, az ismeretes hullám vonalat kapjuk az áram intenzitásának változását feltüntető görbe gyanánt (2 ábra).



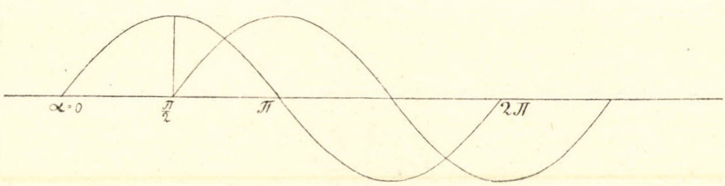
2. ábra.

A STÖHRER-féle gépen két orsó van, melyek 180°-nyira állanak egymástól; ezek egyszerű pachytrop révén vagy egymás mellé, mint a GRAMME-féle gyűrűn, vagy pedig egymásután kapcsolhatók. Noha a mágneses tér, melyben az orsók mozognak, nem homogén, mégis bármely kapcsolási mód esetében az indukált elektromótoros erő változását a 2-ik ábrában rajzolthoz hasonló görbe fogja feltüntetni. Az orsókban haladó áramot a kommutátor egyirányúvá változtatja, mely azonban korántsem állandó, hanem erősen lüktető, mint azt a 3. ábrában rajzolt áramgörbe mutatja. Ugyanily áramot ad a



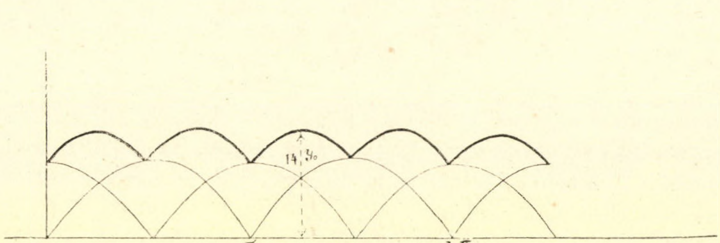
3. ábra.

SIEMENS-féle kettős **T** alakú dobbal biró gép. Ily lüktető áramnak sok rosz oldala van s ezért a lüktetések nagyságának csökkentésére törekedtek, oly módon, hogy az orsók számát szaporították. Ezzel azonban nemcsak az áramok



4. ábra.

száma, hanem a lüktetések száma is növekszik, de legalább el van érve az, hogy a lüktetések ereje csökken. Igy például ha négy orsó van a tengely körül szabályosan elosztva és az ezekben indukált két váltakozó áramot

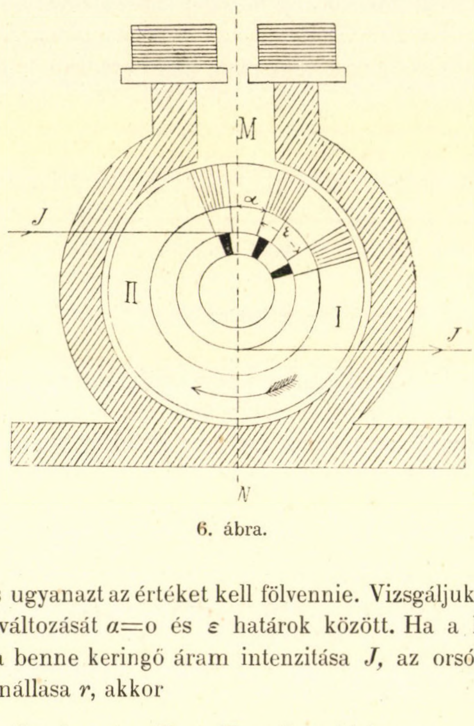


5. ábra.

(4 ábra) külön-külön kommutátor egyirányú árammá változtatja át s azután közös áramkörben egyesíti, az intenzitás görbéjéül az 5-ik ábrában rajzolt vonalat kapjuk. Előbbi esetben az intenzitás O és J_0 határok között változott, most pedig J_0 és $\sqrt{2}\,.\,J_0$ között, a lüktetések ereje tehát csökkent, de

számuk megkétszereződött. Az orsók számának szaporítása a GRAMME-féle gyűrűre és a SIEMENS-féle dobra vezetett; az első a STÖHRER-féle szerkezet, a második a kettős T dob általánosítása.

A GRAMME-féle gyűrűn $2k$ számú orsó van a tengely körül szabályosan elhelyezve. Ha ezek egymással ε szöget zárnak be (6. ábra) s a gyűrű I-el jelölt, a normális síktól jobbra eső részében az első orsó ezen síkkal α szöget zár be, természetes, hogy valahányszor ezen orsó helyébe bármely másik lép, az orsók elhelyezkedése MN sík körül ugyanaz, mint a milyen előbb volt. Annyit tehát már előre is látható, hogy ha az áram intenzitása változnék is, valahányszor más orsó jut az előbb elsőnek nevezett helyére, az



6. ábra.

intenzitásnak is ugyanazt az értéket kell fölvennie. Vizsgáljuk tehát az áram intenzitásának változását $\alpha=o$ és ε határok között. Ha a külső áramkör ellenállása R, a benne keringő áram intenzitása J, az orsók száma $2k$ s egy-egynek ellenállása r, akkor

$$J + i_2 = i_1, \quad E_1 + E_2 = (i_1 + i_2)\, kr = o$$
$$JR + i_1\, kr = E_1,$$

hol $i_1\, i_2$ és $E_1\, E_2$ a GRAMME-féle gyűrűnek a normális síktól jobbra és balra fekvő részeiben keringő áramok intenzitásait, illetőleg az indukált elektromótoros erőket jelentik. Mivel

$$J = 2\, i_1$$

következik, hogy

$$J = \frac{E_1}{R + \frac{1}{2} k r},$$

hol E_1 még meghatározandó. A H intenzitású térben az m menetből álló orsóban indukált elektromótoros erő abban a pillanatban, melyben az orsó α szöget zár az MN síkkal

$$E_\alpha = F_0 \sin \alpha,$$

hol

$$E_0 = 2 \pi mn. FH;$$

összeadván már most az MN síktól balra eső orsókban indukált elektromótoros erőket, megkapjuk az eredő elektromótoros erőt, melynek értéke

$$E_1 = E_0 \left\{\sin \alpha + \sin (\alpha + \varepsilon) + \ldots + \sin (\alpha + [k-1] \varepsilon)\right\}$$

s mivel $k \varepsilon = \pi$

$$E_1 = E_0 \frac{\cos (\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2} \varepsilon}$$

Ez a kifejezés mutatja, hogy az elektromótoros erő α-val változtatja értékét és pedig

$\alpha = o$-ra $\quad E_1 = E_0 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varepsilon$

$\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon$-ra $\quad E_1 = E_0 \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \varepsilon}$

$\alpha = \varepsilon$-ra $\quad E_1 = E_0 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varepsilon$

tehát akkor éri el legnagyobb értékét, ha az orsó középpontja MN síkon halad át ($\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon$). Az önindunctió hatását is számba vevén arra az eredményre jutunk, hogy az áram intenzitásának maximuma MN síktól $\frac{1}{2}$ ε-nál messzebb esik; ezért az egyenes áramú dinamokon a söprűk nem is állanak merőlegesen az MN síkra. Mivel továbbá minden fordulatnál $2k$ orsó halad át az MN síkon, E_1-nek is ugyanannyi maximuma van. A Gramme-féle gyűrűben indított áram tehát szintén lüktető s a lüktetések annál szaporábbak — de egyúttal gyengébbek is — mennél nagyobb az orsók száma. Ha a gyűrű menetei egyetlen önmagába zárt drótból vannak készítve, melynek egyenlő távolságban fekvő pontjaiból elágazások indulnak a kollektorhoz, akkor az eredmény akként is kifejezhető, hogy a lüktetések szaporasága a kollektor lemezeinek számától függ. Ha az elágazások száma nagy, akkor

$$\cos \tfrac{1}{2} \varepsilon = 1, \quad \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon = \tfrac{1}{2} \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\pi}{k}$$

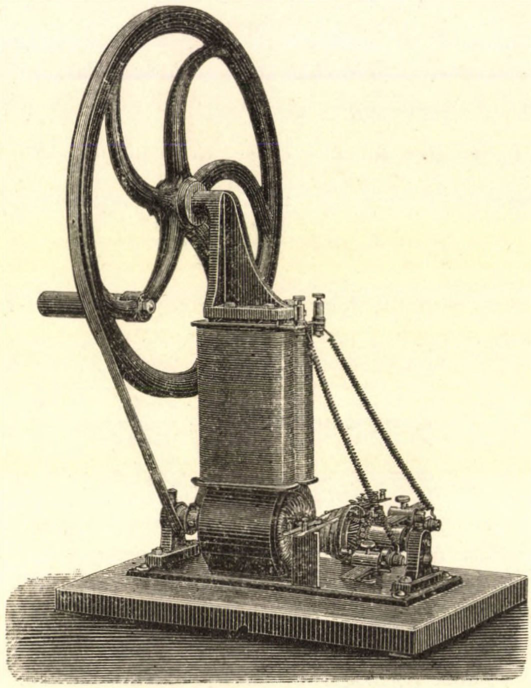
és

$$E_1 = 4 mnk . FH,$$

az áram intenzitása pedig

$$J = \frac{4m\,n\,k\,.\,FH}{R + \frac{1}{2}\,k\,r}$$

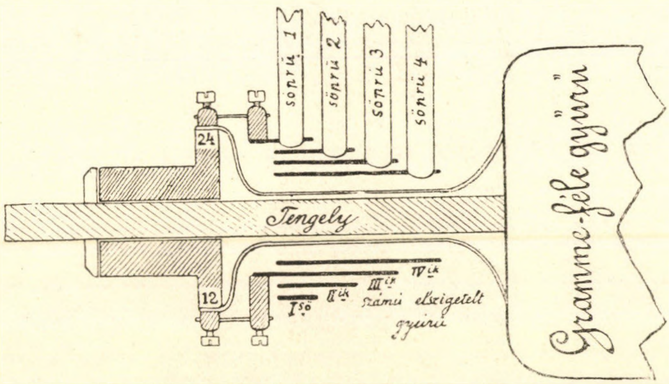
A Siemens-féle dob a Gramme-féle gyűrütől csak abban különbözik, hogy egyes menetei sokkal nagyobb felületűek, tehát a mágneses teret jobban használják ki, mint a gyűrű menetei.



7. ábra.

Midőn Ferraris a forgó mágneses teret felfedezte, ennek előállítására szükséges, fázisában 90°-al eltólt két váltakozó áramot úgy állította elő, hogy az egyszerű váltakozó áramot elágaztatta s egyik ágban nagy önindINDUCTIÓ segítségével az áramot fázisában eltólta. Hasonló módon járt el Tesla a forgó mágneses téren alapuló kétfázisú mótorának hajtásánál, melyben azonban egyrészt az önindINDUCTIÓ, másrészt pedig nagy ellenállás bekapcsolása miatt az energia nagy része kárba veszett. A több fázisú mótorok ez okból nem is hódítottak tért mindaddig, míg csak Bradley fel nem fedezte, hogy lehet fázisban eltólt váltakozó áramokat közvetlenűl, gépekkel előállítani. Bradley ugyanis kimutatta, hogy a Gramme-féle gyűrűből nemcsak egyirányú áram, hanem egyszerű vagy több fázisú váltakozó áram is elvezethető, következő módon. A gyűrű egymástól 180°-nyira elálló pontjaiból elágazást létesítvén s ezeket a tengelyre erősített két gyűrűvel kapcsolván össze, a honnét söprűk vezetik el az áramot, akkor utóbbiakba kapcsolt áramkörben váltakozó áram halad; ha pedig egymástól 120°-nyira eső három pontból létesítünk elágazást az imént emlitett módon, úgy a vezetésben három fázisú áram jön létre.

Bradley ezen megjegyzése alapján iskolai czélokra egy kézi dinamót szerkesztettem, melynél főelv gyanánt azt tűztem ki, hogy lehetőleg sokféleképen legyen használható. Az Edison-féle dinamók alakjára épült gép (7. ábra) elektromágnesei között forog a Gramme féle gyűrű, melynek ten-

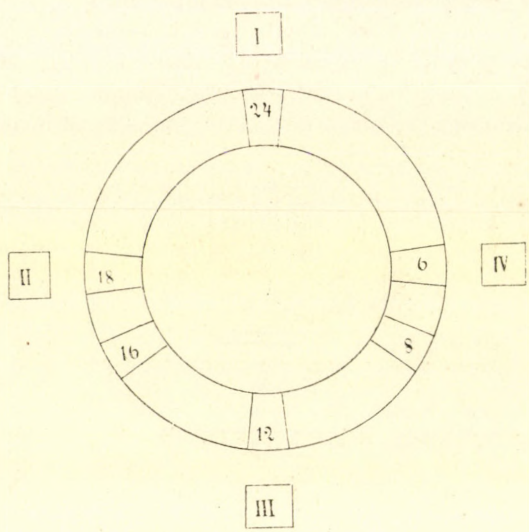


8. ábra.

gelyére a kommutátoron kivül négy egymástól elszigetelt sárgaréz gyűrű van erősítve; mindegyikéből egy-egy söprű vezeti el az áramot (8. ábra). A kommutátor 24 lemezből áll, melyek közül a *6, 8, 12, 16, 18* és a *24*-ik szorító csavarokkal van ellátva, a *6, 12, 18* és *24*-ik lemez mögött van a négy gyűrű szorító csavarja (9. ábra) és pedig a 24-es számú mögött az első, a 6-os mögött a negyedik, a 12-es mögött a harmadik s végre a 18 mögött a második gyűrűé. A gép működése már most a következő. A gép tengelyét forgatván, a kollektor söprűiből elvezethetünk egyirányú áramot, mely részben a gép mágnesezésére fordíttatik, miért is a söprűk állandóan közlekednek az elektromágnessel, részben pedig a külső áramkörben vízbontásra, mágnesezésre, izzó lámpák táplálására, vagy más motor, pl. kis elektromos vasút hajtására fordítható. Ha ezenfelül a 24-es lemezt I-el, a 12-est a III-as gyűrűvel kapcsoljuk össze, ezen áram körében

$$J = J_0 \cos \alpha$$

alakú váltakozó áram halad. Ennek kimutatására tegyük föl, hogy a 24-ik lemezzel összekapcsolt menet, melyet 10-ik ábrán A-val jelöltünk, MN síkkal α szöget, két egymásra következő menet pedig ε szöget zár be. Az ábrán könnyebb áttekinthetés czéljából a külső áramkörbe vezető elágazások a Gramme-féle gyűrű meneteiből, nem pedig a kollektorból kiindulólag vannak rajzolva. Ha a külső áramkör ellenállása R, a benne keringő



9. ábra.

áram intenzítása J, a gyűrű ACB felében az elektromótoros erő E_1 az áram intenzítása i_1; BDA részben pedig E_2 és i_2, akkor

$$J + i_2 = i_1, \quad E_1 + E_2 = (i_1 + i_2)\, mr = o,$$

$$JR + i_1\, mr = E_1,$$

mely egyenletekből

$$J = \frac{E_1}{R + \frac{1}{2} mr},$$

hol m a gyűrű felén levő menetek számát, r pedig egy menet ellenállását jelenti. Mivel a menetek egymástól ε szöggel állanak el, a bennök indukált elektromótoros erők egy és ugyanazon pillanatban szintén ε szöggel fognak fázisban különbözni s így ACB részben az összes elektromótoros erő

$$E_1 = E_0 \left\{\sin \alpha + \sin(\alpha + \varepsilon) + \ldots + \sin(\alpha + [m-1]\,\varepsilon)\right\}$$

vagyis

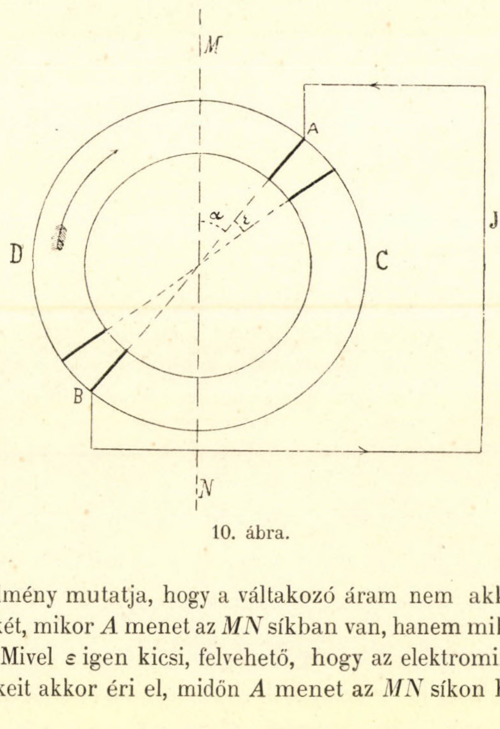
$$E_1 = E_0 \frac{\cos(\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon},$$

hol α most 0-tól 2π-ig növekszik. Ha a menetek száma nagy, akkor

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\pi}{2m}$$

és

$$E_1 = \frac{2m}{\pi} E_0 \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$



10. ábra.

Ez az eredmény mutatja, hogy a váltakozó áram nem akkor éri el legnagyobb értékét, mikor A menet az MN síkban van, hanem mikor $\frac{1}{2}\varepsilon$ szöggel túl van rajta. Mivel ε igen kicsi, felvehető, hogy az elektromindító erő legnagyobb értekeit akkor éri el, midőn A menet az MN síkon halad át, hogy tehát

$$E_1 = 4mn \,.\, FH \cos\alpha$$

és az ezen erő által tovavezetett áram

$$J = \frac{4mn \,.\, FH}{R + \frac{1}{2}mr} \cos\alpha.$$

Az eddigi tárgyalásban föltételeztük, hogy a gyűrűn csak egy sora van a meneteknek; ezt a föltevést a következőkben is megtartjuk. Ha több sor menet van, F az egymás fölött levő vagyis azon menetek által bezárt felületek összességét jelenti, melyek MN síkkal ugyanazt a szöget zárják be, r pedig ezek ellenállása.

Ha a gép által adott váltakozó áramot HOFFMAN-féle vízbontón vezetjük át, mindkét csőben egyenlő mennyiségű durranó gáz keletkezik; vagy egy kisebb fajta inductió készülék primär tekercsébe vezetve, a nagy feszültségű transzformált áram fiziologiai hatása révén jelentkezik

Használható izzólámpák táplálására is.

Az előbbi kapcsolást meghagyván s azonfelül a 6-os számú lemezt a negyedik, a 18-as számút a második gyűrűvel kötvén össze, akkor a I—III és II—IV-be kapcsolt áramkörök mindegyikében váltakozó áram kering, melyek azonban egymás iránt fázisukban 90°-al vannak eltólva, vagyis ha I—III áramkörében

$$J_1 = S_0 \cos \alpha$$

áram halad, akkor II—IV-ben az áram

$$J_2 = S_0 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ily áramokat kétfázisú vagy forgató áramnak, ujabban pedig bizonyos kapcsolási mód esetében négyfázisú áramnak is nevezik.

Jelöljük az A-val jelölt menet és az MN sík által bezárt szöget α-val, az egymásra következő körnegyedekben, melyek mindegyikében m menet van (11-ik ábra), az intenzitások értékeit i-vel — a körnegyed számát megfelelő index jelzi —, akkor

$$J_1 + i_1 = i_2, \quad J_2 + i_2 = i_3$$
$$i_3 = J_1 + i_4, \quad i_4 = J_2 + i_1$$

$$E_1 + E_2 = (i_1 + i_2 + i_3 + i_4)\, mr = 0$$

$$(i_2 + i_3)\, mr + J_1 R = E_1$$
$$(i_3 + i_4)\, mr + J_2 R = E_2,$$

hol E_1 és E_3 a II és III, illetőleg a III és IV részekben működő elektromótoros erők összegét jelentik, ezen egyenletek a külső áramkörökben haladó áramok erősségeül következő értékeket adják:

$$J_1 = \frac{E_1}{R + mr}$$

$$J_2 = \frac{E_2}{R + mr};$$

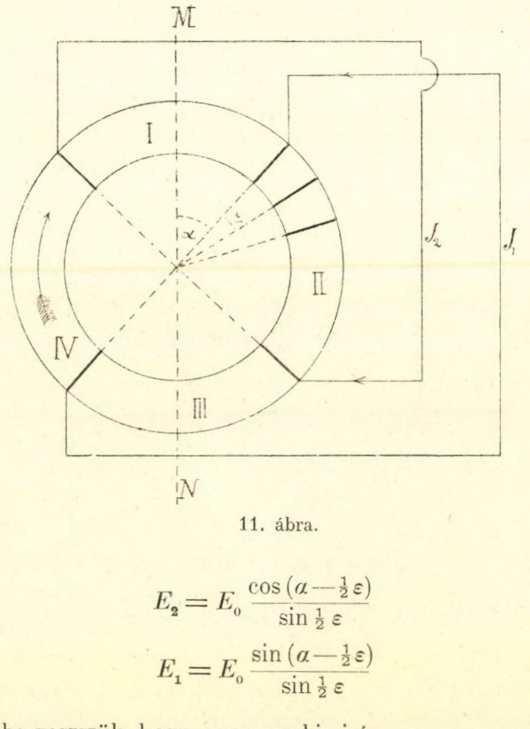
az ezekben előforduló

$$E_1 = E_0 \{\sin a + \sin (a + \varepsilon) + \ldots + \sin (a + [m-1]\,\varepsilon)\}$$

$$E_2 = E_0 \left[\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\,\varepsilon\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \sin\left(a + \frac{\pi}{2} + [m-1]\varepsilon\right)\right]$$

elektromótoros erők közül az első ugyanakkora értékű, mint a mely előbb az egyszerű váltakozó áram számára adódott ki; a második pedig az első-ből úgy keletkezik, hogy ebben a helyébe $a + \frac{\pi}{2}$-et írunk, úgy hogy



11. ábra.

$$E_2 = E_0 \frac{\cos (a - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}$$

$$E_1 = E_0 \frac{\sin (a - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}$$

s ha tekintetbe veszszük, hogy ε nagyon kicsi és

$$\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\pi}{4m},$$

akkor

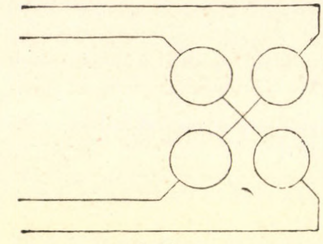
$$E_1 = 8mn\,.\,FH \cos a$$
$$E_2 = 8mn\,.\,FH \sin a$$

s így

$$J_1 = J_0 \cos\alpha, \quad J_2 = J_0 \sin\alpha,$$

hol

$$J_0 = \frac{8mnFH}{R + mr}$$



12. ábra.

Ezekkel az áramokkal *forgó mágneses tér* állítható elő, hajtható a Tesla-féle mótor (lásd a II. kötet 292. oldalán a 8-ik ábrát) s megvilágítható egy rendszer izzólámpa, melyek kapcsolási módját a 12-ik ábra mutatja. Ha pedig rendelkezésünkre áll kétfázisú áram s ezt a gépbe vezetjük, a gép forgásba jön és kétfázisú mótorként működik.

Ha a Gramme-féle gyűrűből háromfázisú áramot akarunk kapni, egymástól 120°-nyira eső pontjaiból létesítünk elágazást, tehát összekötjük a 24-es lemezt az első, a 16-ost a második, a 8-ast pedig negyedik gyűrűvel s akkor az első gyűrűből kiindul

$$J_1 = S_0 \cos\alpha,$$

a másodikból

$$S_2 = J_0 \cos(\alpha + 120°),$$

a harmadikból pedig

$$J_2 = J_0 \cos(\alpha + 240°)$$

alakú áram. Ha a külső áramkör az elágazási ponttól a közös C pontig (13. ábra) számított darabjának ellenállása R, akkor

$$i_1 + J_1 = i_2, \quad i_2 + J_2 = i_3, \quad i_3 + J_3 = i_1$$

$$E_1 + E_2 + E_3 = (i_1 + i_2 + i_3)\, mr = 0$$

$$J_1 R + i_2 mr - J_2 R = E_2$$
$$J_2 R + i_3 mr - J_3 R = E_3$$
$$J_3 R + i_1 mr - J_1 R = E_1$$

hol m a gyűrű meneteinek harmadrészét, J_1, J_2, J_3 a külső vezetékekben tovahaladó áramnak intenzitásait, a többi mennyiségek az egyes körharmadokra vonatkozó adatokat jelentik, már előbb megállapított értelmezéssel.

Az első három egyenlet összeadásából s a negyedik tekintetbe vételével nyerjük, hogy

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0;$$

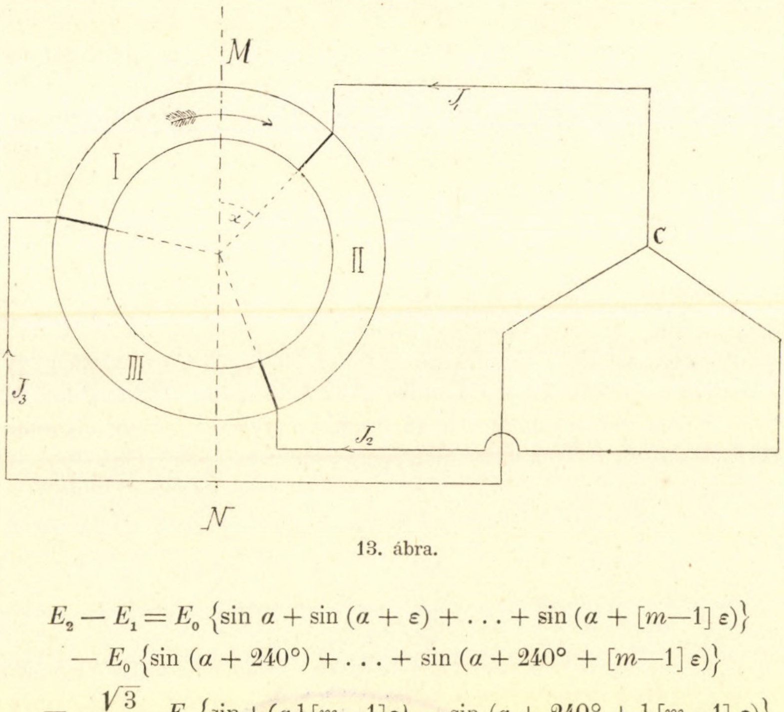
s ennek segítségével a többiekből nyert

$$J_1 = \frac{E_2 - E_1}{3R + mr}$$

$$J_2 = \frac{E_3 - E_2}{3R + mr}$$

$$J_3 = \frac{E_1 + E_3}{3R + mr}$$

megoldások számlálói egyszersmind elárulják az előbbi egyenletek egyszerű megoldási módját. Annak kimutatására, hogy ez áramok fázisban el vannak tólva, számítsuk ki az elektromótoros erőket; ugyanis



13. ábra.

$$E_2 - E_1 = E_0 \left\{\sin \alpha + \sin(\alpha + \varepsilon) + \ldots + \sin(\alpha + [m-1]\,\varepsilon)\right\}$$

$$- E_0 \left\{\sin(\alpha + 240^\circ) + \ldots + \sin(\alpha + 240^\circ + [m-1]\,\varepsilon)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \frac{1}{2}\varepsilon} E_0 \left\{\sin + (\alpha \tfrac{1}{2}[m-1]\varepsilon) - \sin(\alpha + 240^\circ + \tfrac{1}{2}[m-1]\,\varepsilon)\right\}$$

s ha tekintetbe veszszük, hogy $m\varepsilon = 120^\circ$ és

$$\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\pi}{3m}$$

akkor

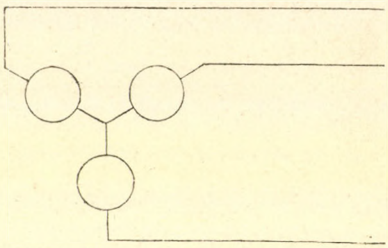
$$E_2 - E_1 = \frac{9mE_0}{\pi} \cos \alpha.$$

Fölírván $E_3 - E_2$ és $E_1 - E_3$ értékeit, közvetlenül láthatjuk, hogy azok az előbb levezetettből keletkeznek, ha egyenletében α helyébe $\alpha + 120°$, illetőleg $\alpha + 240°$ iratik. A három áramot tehát az előbb fölírt egyenletek határozzák meg, ha bennük

$$J_0 = \frac{9mn.FH}{3R + mr}$$

helyettesítést eszközöljük.

Ez áramok hajtják a FERRARIS- és a DOBROVOLSKY-féle mótorokat (lásd 2 kötet 294-ik oldalán a 11-ik és 292. oldalán a 9-ik ábrát), vagy meg-



14. ábra.

világítanak egy izzólámpa rendszert, melyek kapcsolás módját a 14-ik ábra tünteti fel. Ha a kétfázisú áram esetében a gépből kiinduló négy sodronyt úgy kapcsoljuk össze egy közös C pontba, mint azt a három fázisúnál tettük, akkor az ezen sodronyokban haladó áramok négyfázisú áramot alkotnak vagyis olyanokat, melyek fázis különbsége 90°.

Grúber Nándor.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

HARMADIK ÉVFOLYAM

V. FÜZET. 1894 MÁJUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

TARTALOM

Lap

Értesítő a választmány jun. 22. üléséről. — Érettségi vizsgálatot tett tanulók mathematikai és physikai versenye 197

NESNERA ALADÁR: Az involutorikus pontsorok 202

KOPP LAJOS: Egy tétel a sokaságok elméletéről 207

KÖVESLIGETHY RADÓ: A fogyatkozások graphikus meghatározása (II. közl.) . 215

RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez 224

KÜRSCHÁK JÓZSEF: A körmérés története és elmélete (Kilenczedik közlemény) 230

Physikai laboratorium (KISS KÁROLY: Kis légnyomások megméréséről) ... 240

A Mathematikai és Physikai Társulat második rendes közgyűlése 244

A Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai 255

Bólyai János síremlékére befolyt adományok kimutatása 256

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

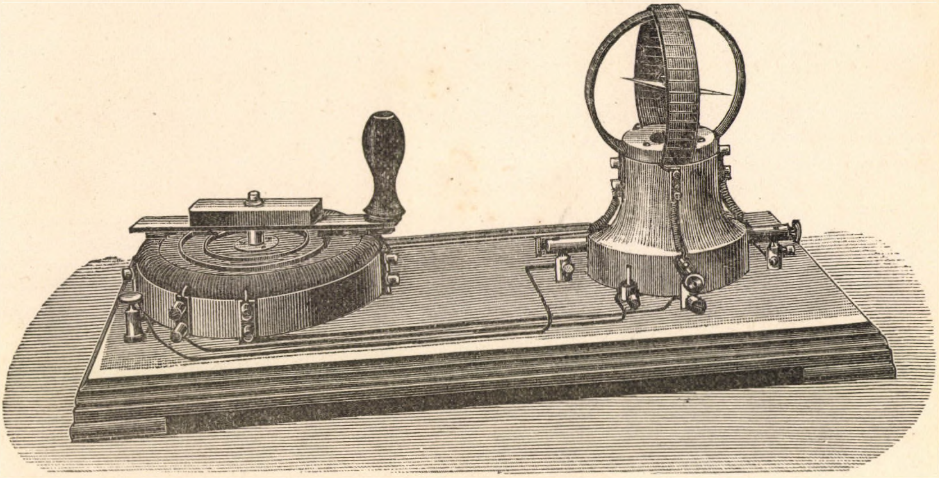
Társulati mondanivalók. A harmadik társulati év 1894. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czímére — legczélszerűbben a 1. füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *A múlt évről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért,* hogy a folyóirat költségeit fedezhessük. Az eddig teljesített befizetéseket a következő füzetben nyugtáztatjuk.

Rendes ülések. A társulat rendes üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére (**VI. Bulyovszky-u. 16.**) intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár (**VII., Csengery-u. 1**), a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkímélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

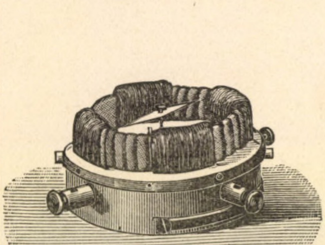
T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesítésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó tetemes kiadástól mentik fel.

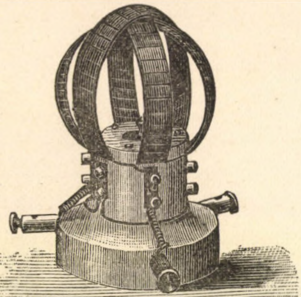


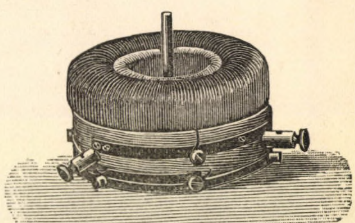
WEINHOLD-féle készülék

FORGÓ MÁGNESES TÉR ELŐÁLLITÁSÁRA.

A II. kötet 275. stb. oldalain ismertetett készülékeket (3., 8., 9. és 11. ábra) minden hozzávaló mellékkészülékkel teljesen felszerelve igen ajánlhatjuk a t. cz. tanár urak becses figyelmébe.







A teljes készülék ára legfinomabb kivitelben ***60 forint*** *loco Budapest. A készülék egyes részei külön is kaphatók méltányos árakon.*

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

VÁLASZTMÁNYÁNAK F. É. JUNIUS HÓ 22-IKÉN TARTOTT ÜLESÉRŐL.

Jelen vannak: Beke Manó, Fröhlich Izidor, Grúber Nándor, Heller Ágost, Klupáthy Jenő, Mauritz Rezső, Réthy Mór, Szily Kálmán, Than Károly, Tőtössy Béla és Wagner Alajos vál. tagok; Mandák Dezső pénztárnok, Kövesligethy Radó jegyző, Rados Gusztáv és Bartoniek Géza titkárok.

A társulat elnökei akadályozva lévén a megjelenésben, a választmány Szily Kálmán v. tagot kéri fel az elnöklésre.

Elnök az ülést megnyitván, az ügyvivő titkárnak adja át a szót, ki is a következő indítványokat terjeszti elő:

1. A Mathematikai és Physikai Társulat választmánya a társulat elnökének, nagyméltóságú báró Eötvös Loránd úrnak m. kir. vallás- és közoktatásügyi miniszterré történt legkegyelmesebb kinevezése fölött érzett örömét jegyzőkönyvében fejezi ki.

2. A társulat Ő Excellentiáját az őszszel tartandó első rendes ülésen a társulat összes tagjainak aláírásával ellátott feliratban üdvözli.

3. Hogy a legkegyelmesebb kinevezés emlékét maradandóvá tegye, a választmány a következő határozatot hozza:

A mathematika s a physika tanításának és tanulásának sikerességét emelendő, a Mathematikai és Physikai Társulat minden év őszén az illető évben hazai nyilvános középiskolán érettségi vizsgálatot tett tanulók között Budapesten és Kolozsvárott mathematikai és physikai versenyt rendez, oly czélzattal, hogy a versenyzőknek a nevezett szaktárgyak művelésére való rátermettsége megállapíttassék.

A verseny módozatai a következők: A társulat rendes tagjaiból alakított bizottság a versenyre jelentkezettek előtt az elnök pecsétjével lezárt borítékot felbontván, kihirdeti a benne foglalt tételt s a zárt helyen, záros határidőn belül elkészített dolgozatokat átveszi. A dolgozatokat budapesti és kolozsvári rendes tagokból alakított bizottság megbirálja; a birálat alapján a választmány a két legjobbnak itélt dolgozatot 100, illetőleg 50 arany korona pályadíjjal jutalmazza. A díjakat a társulat elnöke fogja a verseny után következő első rendes ülésen a nyerteseknek kézbesíteni.

A társulat a verseny eredményéről, nyomban az itélet meghozatala után, a nmélt. m. k. vallás- és közoktatásügyi Miniszteriumnak jelentést tesz; a középiskolát, melyen a jutalmazottak középiskolai tanulmányaikat befejezték, úgyszintén a pályadíj nyerteseinek VIII. osztálybeli szaktanárát sikerökről hivatalosan értesíti s a kitüntetett dolgozatokat a Mathematikai és Physikai Lapokban közzéteszi.

A két első díj alakítására a társulat az 1000 frtnyi alaptőkének eddig fel nem használt kamataiból 150 koronát fog fordítani s a díjakat elnökének tiszteletére *Első*, illetőleg *Második b. Eötvös-díj* czimen fogja a két legjobb dolgozat készítőjének kiszolgáltatni.

Inditványát a felszólaló a következő megjegyzésekkel egészíti ki: Gondoskodni fog róla, hogy inditványának elfogadása esetében a társulat minden egyes tagjának mód nyujtassék a felirat iveinek saját lakóhelyén eszközölhető aláirására. E czélból az egyes iveket, a felirat szövegének másolatával együtt, kemény borítékban posta útján köröztetné, 8 különböző útirányban; a közlekedés mai gyorsasága lehetővé teszi, hogy a legnagyobb körutat tevő ív is legkésőbb 10 nappal az elküldés után Budapestre visszakerüljön.

Az inditvány 3. pontja az alapszabályokkal nem ellenkezik, a mennyiben a 2. §-ban kitűzött czélnak megfelelő intézmény életbeléptetését késziti elő.

Rövid eszmecsere s a pénztárnok meghallgatása után a választmány az inditványt egész terjedelmében változatlanul, egyhangulag elfogadja s a végrehajtás előkészítésével az ügyvivő titkárt megbízza.

A titkár felhatalmazást kér az alább közlött felhivás szétküldésére, mely megadatván, a választmány folyó ügyek elintézésére tért át.

ÉRETTSÉGI VIZSGÁLATOT TETT TANULÓKHOZ.

1. A *Mathematikai és Physikai Társulat* az 1894/5. tanév elején Budapesten és Kolozsvárott az ez évben magyarországi nyilvános középiskolán érettségi vizsgálatot tett tanulók között a mathematikából s physikából versenyt rendez.

2. A verseny következő módon fog megtartatni:

A jelentkezők a kitűzött helyen és időben összejövén, a Math. és Phys. Társulat bizottsága az elnök pecsétjével lezárt boritékból a tételt a versenyzők előtt kiveszi és felolvassa. A tétel a középiskolai tananyag köréből vétetik s kidolgozása külön tanulmányokat nem követel. A bizottság felügyelete alatt végzendő kidolgozásra 4 órai idő van engedve s a pályázó bármilyen vele hozott könyvet, jegyzetet használhat.

3. A kellő időben elkészitett dolgozatokat a Math. és Phys. Társulat bizottsága átveszi, megbirálja s a választmány a birálat alapján a két legjobb dolgozat készitőjének pályadijakat itél meg. Az első dij 100, a második 50 arany korona.

4. A pályadijakat a társulat elnöke fogja a verseny után következő első rendes ülésen a nyerteseknek átadni.

5. A társulat a verseny eredményéről a nmélt. m. kir. vallás- és közokt.-ügyi Miniszteriumnak jelentést tesz, a pályadij nyerteseinek volt középiskolai igazgatóját s VIII. osztálybeli mathematikai és physikai tanárát hivatalosan értesiti s a jutalmazott dolgozatokat a *Mathematikai és Physikai Lapokban* közzéteszi.

A Mathematikai és Physikai Társulat választmánya ezennel felszólitja a folyó évben nyilvános középiskolán érettségi vizsgálatot tett fiatalságot a versenyben való részvételre.

A versenyre f. é. szeptember hó 8-dik napjáig lehet a társulat ügyvivő titkáránál jelentkezni. A jelentkezés egyszerű levélben történik, oly módon, hogy az illető megnevezi a tanintézetet, melyen az érettségi vizsgálatot letette s kijelenti, hogy Budapesten, vagy Kolozsvárott kíván-e versenyezni. Egy levélben többen is jelentkezhetnek közösen, de szükséges, hogy mindenki pontosan megírja a czímet, mely alatt szeptember 10-ke táján a versenyre szóló meghívó neki megküldessék. A versenyző igazolásul érettségi bizonyítványát, vagy annak hiteles másolatát tartozik a versenyre magával hozni.

A Math. és Physikai Társulat válaszmányának megbizásából

Budapest, 1894 junius 22. *Bartoniek Géza.*

ügyvivő titkár,

(Budapest, VI. Bulyovszky-utcza 16.)

AZ INVOLUTÓRIUS PONTSOROK KONJUNGÁLT PONTJAINAK, KÖZÉPPONTJÁNAK ÉS KETTŐS PONTJAINAK SZERKESZTÉSE.

Ismeretes, hogy két ugyanazon sorozón fekvő projektív pontsor involutórius helyzetű, ha két pontjuk egymásnak kétféle értelemben felel meg; éppen úgy közös középponttal biró két projektív sugársor is involutórius, ha két sugaruk egymásnak kétféle értelemben felel meg.

Ez értelmezésből mindjárt egy kettős tétel foly, a mely az alant közlendő szerkesztésünknek alapját teszi. E kettős tétel a következő:

A két tetszőleges helyzetű

$$x(ABC\ldots)$$

és

$$x_1(A_1B_1C_1\ldots)$$

projektív pontsort az m perspektív tengelyének minden pontjából involutórius sugársor vetíti.

Ha ugyanis az x és x_1 sorozók metszéspontját E és F_1-gyel jelöljük, akkor m a E_1 és F pontokat köti össze, a vetités folytán tehát

$$S(ABCEF)$$

és

$$S(A_1B_1C_1E_1F_1)\text{-ben}$$

A két tetszőleges helyzetű

$$S(abc\ldots)$$

és

$$S_1(a_1b_1c_1\ldots)$$

projektív sugársort az M perspektiv középpontján keresztül menő minden Z tranzverzális involutórius pontsorban metszi át.

Ha ugyanis az S és S_1 középpontokat összekötő egyenes a m és n_1 sugarakból áll, akkor a M pont a m_1 és n sugarak metszése; a z tranzverzálison keletkező

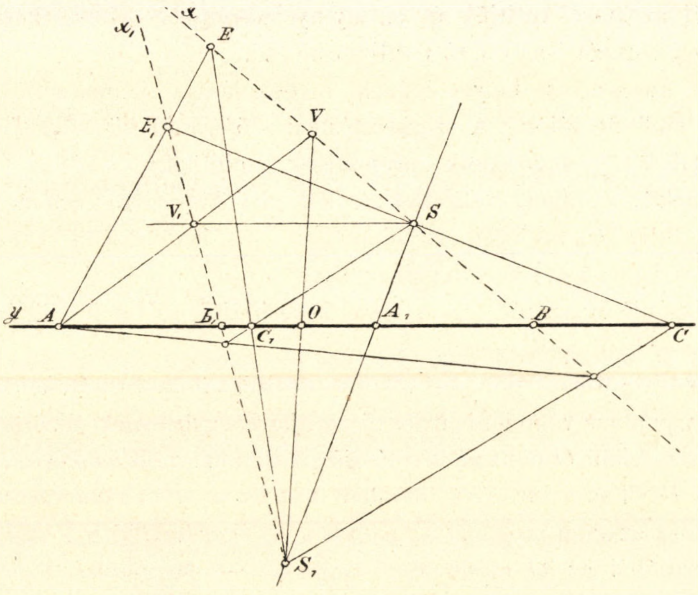
$$z(ABCMN)$$

és

$$z(A_1B_1C_1M_1N_1)$$

olyan projektív sugársorokat kapunk, melyeknek két-két sugaruk SE, SF_1 úgyszintén SE_1, SF összeesnek és egymásnak duplán felelnek meg, azaz a vetités révén nyert sugársor involutórius.

projektív pontsoroknak tehát két-két pontja M, N_1 és M_1, N összeesik és egymásnak duplán felel meg, azaz a metszés révén nyert z pontsor involutorikus.



1. ábra.

Ezen az alapon a két konjugált pontpárjából megadott involutórius pontsor többi konjugált pontjait tekintet nélkül arra, hogy az adott involutórius pontsor egyirányu avagy ellenkező irányu-e, a következő módon szerkeszthetjük meg. (1. ábra.)

Legyen az involutórius pontsor A, A_1 és B, B_1 konjugált pontpárjaiból a y sorozón megadva. Húzzunk A_1 ponton keresztűl egy tetszőleges egyenest és vegyünk föl ezen két tetszőleges pontot: S-et és S_1-gyet. SB (x) és S_1B_1 (x_1) egyenesek két perspektív pontsorhoz tartoznak, melynek A a perspektív középpontjuk. Ha most már az eredeti involutórius pontsor C pontjával konjugált pontot keressük, akkor kössük össze a C pontot S-sel míg x_1-et E_1-ben metszi; E_1-nek a x pontsoron megfelel E, melyet S_1-gyel összekötvén és az involutórius pontsor y sorozójával metszésbe hozván, a C-vel konjugált pontot C_1-ben nyerjük. Minthogy a C és C_1 konjugált pontok egymásnak duplán felelnek meg, az eredményre nézve teljesen mindegy, ha a C pontot először S_1-gyel kötjük is össze és ezt az egyenes az x-szel metszük át, mert ha ezt a metszéspontot A-ból az x_1-re vetitjük és az így nyert pontot S-sel összekötjük, ez az y sorozót ismét a C_1 pontban metszi.

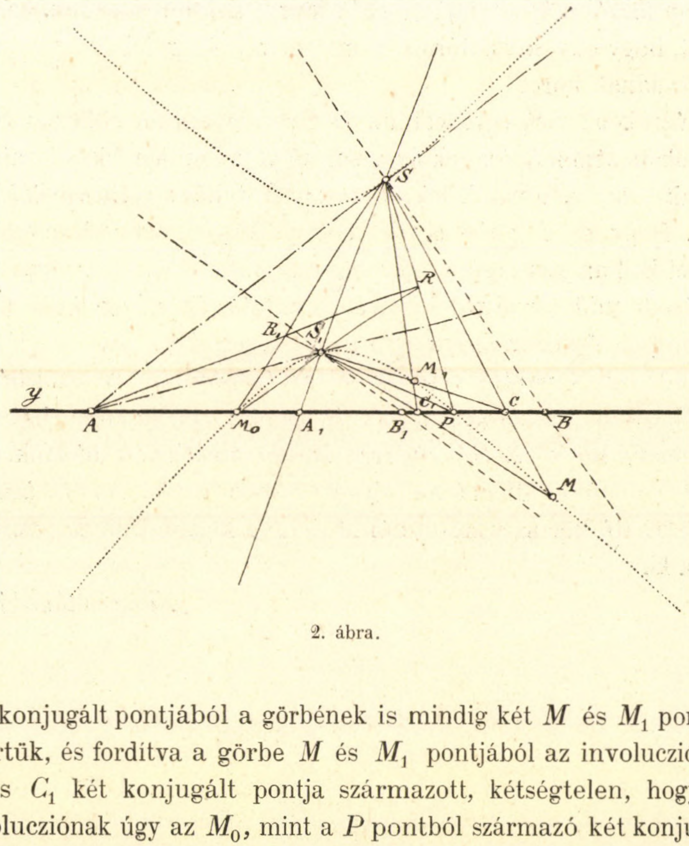
A szerkesztés helyességének megokolására felhasználjuk a fent említett tételt. A szerkesztésben előforduló $S(AA_1BC)$ és $S_1(AA_1B_1C_1)$ sugársorok projektívek, minthogy x és x_1 két perspektív pontsort vetítenek; e két projektív sugársornak A a perspektiv középpontja, így tehát C és C_1 az involutórius pontsornak csakugyan két konjungált pontja.

Hasonló egyszerű szerkesztéssel kereshetjük föl az involutórius sugársor konjugált sugarait is.

Az involutórius pontsort alkotó, sorozóikkal összeesett, két projektív pontsor végtelenben fekvő pontjai is egybeesnek, az e pontnak megfelelő O pont az involúczió czentruma. Fölkeresésére húzzunk P-ből az y sorozóval parallelt míg az x_1-et V_1-ben metszi, e pontnak az x-en megfelel V, melyet a S_1-el összekötő S_1V sugár az y sorozóból az O czentrumot vágja ki. — Megokolása az előző szerkesztésen alapszik; a C pont itt az y sorozó végtelenben fekvő pontja.

Az 1. ábrában, midőn az involutórius pontsornak két konjugált pontját határoztuk meg, $S(AA_1BC)$ és $S_1(AA_1B_1C_1)$-ben két projektiv sugársort nyertünk, melyeknek megfelelő sugarai SB és S_1B_1, SC és S_1C_1 az involutórius pontsort a konjugált pontjaiban metszik; azaz, az involutórius pontsort, bármelyik pontján keresztülmenő tetszőleges egyenes két pontjából, két projektív sugársor vetíti. Az így származott két projektív sugársor egy másodrendű görbét állapít meg, melynek pontjaiban M . . . metszik egymást az involutórius pontsor konjugált pontjain átmenő SC, S_1C_1, . . . sugarak, (2. ábra) s minthogy az SS_1 összeesett sugár-nak az egyik sugársorban SA, a másikban S_1A felel meg, az SA és S_1A a származott másodrendű görbének az S és S_1 pontban húzható érintői. Ugyane görbének egy második pontja a S_1C és SC_1 összetartozó sugarak M_1 metszése is.

A származott másodrendű görbe az involutórius pontsor y sorozóját M_0 és P pontokban metszi, s minthogy az involuczió C és C_1



2. ábra.

két konjugált pontjából a görbének is mindig két M és M_1 pontját nyertük, és fordítva a görbe M és M_1 pontjából az involucziónak C és C_1 két konjugált pontja származott, kétségtelen, hogy az involucziónak úgy az M_0, mint a P pontból származó két konjugált pontja a görbe M_0 és P pontjaival összeesik, azaz M_0 és P az involúczió kettőspontjai. Ugyanezt bebizonyíthatjuk még akként is, hogy az M_0 és P pontokat az S és S_1 pontokkal összekötjük. Az itt származott SRS_1R_1 teljes négyszög átellenes oldalai az M_0 és P pontokon, átlói pedig az A és A_1 pontokon mennek át, azaz AA_1 konjugált pontokat az M_0 és P pontok harmonikusan választják el; s minthogy minden többi konjugált pontpárra nézve ugyanaz áll, kétségtelen, hogy M_0 és P az involutórius pontsor kettőspontja.

A kettős pontok fölkeresésére tehát mindössze is egy a fönti elvek szerinti kúpszeletet kell szerkesztenünk, mely az y sorozóból a keresett dupla-pontokat vágja ki.

A szerkesztés egyszerűsítése kedveért legczélszerübb lenne a szóban forgó másodrendű görbét körrel helyettesitenünk. Kérdés tehát, hogy egy involutórius pontsort vetitő projektiv sugársorok mikor adnak kört?

Húzzuk az SS_1 egyenest az O czentrumon át, akkor az S, S_1 pontokon átmenő érintők az y sorozó végtelenben fekvő pontjába futnak, s igy vele parallelek lesznek; SS_1 tehát a görbe egyik átmérője. Hogy ez a görbe egyik tengelye legyen, arra nézve csak az SS_1-et kell az y sorozóra merőlegesen állitanunk. Hogy most már a másodrendű görbe körré legyen, arra szükséges, hogy a két sugársor megfelelő sugarai egymásra merőlegesen álljanak. Ezt elérjük, ha csakis az S pontot vesszük föl az O ponton keresztül húzott merőlegesen tetszőlegesen, az S_1 pontot pedig úgy határozzuk meg, hogy az SA sugárra A_1-ből merőlegest húzunk, míg az O centrumon átmenő merőlegest S_1-ben vágja. Az SS_1 átmérő fölött irható kör az y sorozóból M és P a keresett dupla-pontokat vágja ki.

Nesnera Aladár.

EGY TÉTEL A SOKASÁGOK ELMÉLETÉRŐL.

A sokaságok elmélete a mathematikai disczipliának között egyike a legfiatalabbaknak. A fogalmat először Riemann használta, rendszeresen pedig Cantor kezdett vele foglalkozni 1873-ban egy czikksorozatban, amely a Crelle-Journalban és a Math. Annalenben, összegyűjtve pedig franczia fordításban az Acta Mathematica 2. kötetében jelent meg. Ennek az elméletnek elvi jelentősége abban áll, hogy egységes szempontból tárgyalja a diszkrét és folytonos mennyiségeket és így alkalmazása van úgy az algebrában és számelméletben egyrészt, mint másrészt a függvénytanban és geometriában, tehát úgyszólván áthidalja az összes mathematikai disczciplinákat. A sokaságok elméletének köszöni pl. a függvénytan a számtartománynak alapvető fontosságú fogalmát, a számelmélet pedig annak bebizonyítását, hogy az algebrai számok sokasága megszámlálható, miáltal a transzczendens számok létezése is ki van mutatva. A geometriában kiváló fontossága van ez elméletnek a tér alkatára vonatkozó vizsgálatokban. A tér folytonossága nem más, mint azon hipotézis, hogy a három dimenziós folytonos aritmetikai sokaság egyértelműen vonatkoztatható a térre. Ha kihagyjuk az algebrai számok által képviselt megszámlálható pont-sokaságot, a többi még mindig folytonos mozgást enged meg, tehát látjuk, hogy folytonos mozgás a nem folytonos (gödrös) térben is lehetséges.

Látván az eddigiekben a sokaság elméletének kiváló fontosságát, alkossuk meg fogalmát.

A sokaság Cantor G. szerint *bizonyos fogalmi körből vett elemeknek meghatározott kollekcziója.*

Valamely sokaság meg van határozva, ha a principium exclusi tertii alapján logikailag eldönthetjük:

1. *hogy valamely elem a sokasághoz tartozik-e vagy sem,*
2. *hogy két a sokasághoz tartozó elem egyenlő-e vagy sem, tekintet nélkül arra, hogy mily módon vannak adva.*

E logikai vagy *intern* meghatározást jól meg kell külömböztetnünk az *aktuális* meghatározástól. Igy pl. logikailag igen jól meg tudjuk határozni, hogy algebrai szám az olyan szám, mely egész számú együtthatókkal képezett n-edfokú algebrai egyenletnek gyöke és azért még sincs általánosan alkalmazható módszerünk, melynek segitségével egy adott számról eldönthetnők, hogy ez a szám algebrai-e vagy transzczendens.

A sokaságok elméletében főprobléma a sokaságok közötti vonatkozás megállapitása és ez vezet a *hatvány* (puissance, Mächtigkeit) fogalmára.

Két sokaság A és B akkor egyenlő hatványú, vagy egyenlő értékű $A \sim B$, ha elemenként kölcsönösen egyértelműen egymásra vonatkoztatható.

Valamely adott sokaság részei alatt értjük mindazon sokaságokat, melyeknek elemei egyidejüleg amaz adott sokaság elemei.

Ha két sokaság nem egyenlő hatványú, akkor vagy M oly hatványú mint N egy része, vagy N oly hatványú, mint M egy része; első esetben M hatványa kisebb, a másikban nagyobb mint N hatványa.

Véges számú elemekből álló sokaságoknál az elemek számának (számosságának) felel meg a hatvány fogalma és ilyen sokaságok részei kisebb hatványuak mint az egész. Így a számosság fogalma különös esete a hatvány fogalmának. Végtelen számú elemekből álló sokaságok már részeikkel egyenlő hatványuak lehetnek, így a természetes számsor elemei és a páros számok által alkotott sokaságok egyenlő hatványuak, mert elemenként egyértelműen vonatkoztathatók egymásra. Ezen sokaságok adják a legkisebb hatványú osztályt, az u. n. megszámlálható sokaságok osztályát. Ide tartoznak az összes raczionális számok által, az algebrai számok által, és az egyszerű és n-szeres sorok elemei által alkotott sokaságok. A folytonos sokaságok már magasabb hatványúak.

A következőkben ismertetni akarjuk CANTOR-nak azon nevezetes tételét, *hogy egy n-méretű folytonos lineár sokaság egyértelműen vvnatkoztatható egy egyméretű vagy akár egy m-méretű ilyen sokaságra.*

RIEMANN-nak, HELMHOLTZ-nak és másoknak hasonló vizsgálatai azokról a hipotézisekről, melyek a geometriának alapját képezik, feltételezik, hogy a tér pontjai alkotta sokaság valamint az n-szeres sokaság elemei közötti *megfelelés* is folytonos legyen, azaz hogy a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ értékrendszer minden végtelen kis változásának a sokaságnak is végtelen kis változása feleljen meg. Látni fogjuk, hogy e feltevés mellőzésével a dimenziók száma mint *karakterisztika* teljesen elveszti jelentőségét.

Megjegyezzük még, hogy itt mindig lineár pontsokaságokról van szó, azaz olyanokról, melyekben minden elem csak egyszer fordúl elő. Két változóról a-ról és b-ről akkor fogjuk mondani, hogy nincsen érintkezésük (liaison), ha a-nak egyik értékét sem veheti fel b és vice versa. Ilyenek pl. a raczionalis és irraczionális számok sokaságai. Továbbá $v \equiv \{r, i\}$ jel azt fogja jelenteni, hogy 1) r és i minden egyes értékét felveszi v is egyszer és 2) v minden értékét felveszi egyszer vagy r, vagy i. Ilyen összefüggésben van pl. a valós számok sokasága (v) a raczionalis (r) és irraczionalis (i) számok sokaságával.

Könnyen belátható a következő tétel is:

Ha

$$a \equiv \{a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots\}$$
$$b \equiv \{b', b'', \ldots, b^{(\nu)}, \ldots\} \text{ és}$$

ha

$$a' \sim b'$$
$$a'' \sim b''$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a^{(\nu)} \sim b^{(\nu)}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

akkor

$$a \sim b.$$

Ugyanis legyen x az a egy eleme, akkor okvetlenül valamelyik a_i-nek is eleme, de $a_i \sim b_i$, tehát x a b_i-nek és így a b-nek is eleme.

CANTOR tételének bebizonyítása két részből áll; az egyik azon tétel alapján, hogy minden irraczionális szám csak egyféleképen fejezhető ki mint végtelen láncztört (ld. KÖNIG, Analizis I. 163. §.) és bebizonyítja, *hogy az n irraczionális számból képezhető értékrendszerek összesége*, tehát egy n-szeres vagy n-méretű sokaság *egyenlő hatványú egy oly sokasággal, mely egyetlenegy ily elem összes értékeiből van képezve*, tehát egyméretű. A másik rész kiegészítésül kimutatja, hogy egy *oly sokaság, melynek elemei valamely számköz összes irraczionális értékei, egyenlő hatványú egy olyannal, melynek elemei ugyane számköznek összes valós elemei.*

A bizonyításnak részletes menete a következő:

Először bebizonyítjuk a következő tételt:

I. *Legyen* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *n egymástól független, változó, melyek fölvehetik a* (0 . . . 1) *számköz minden irraczionális értékét és legyen d egy ilyen változó, akkor az* e_i *változók értékrendszereiből alkotott sokaság egyenlő hatványú a d értékeiből alkotott sokasággal.*

E tétel bebizonyítására kiindulunk abból az ismeretes tételből, hogy bármely irraczionális szám e csak egyféleképpen fejezhető ki egy folytonos végtelen láncztörttel:

$$e = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_r + \cdots}}}}$$

$$= (a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$$

ahol az a_i nevezők pozitiv egész számok. Minden irraczionális számhoz tartozik egy a_i sorozat és viszont minden ilyen a_i sorozat meghatároz egy bizonyos irraczionális e számot. Legyen most $e_1, e_2, \ldots, e_n$ n egymástól független változó, mely a (0 . . . 1) számköz minden irraczionális értékét felveheti, akkor tehető

$$e_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\nu}, \ldots)$$

és ez az n változó meghatároz egy $(n+1)$-diket így

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, \ldots)$$

a hol

$$\beta_{(\nu-1)n+\mu} = a_{\mu,\nu}$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, n)$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

De viszont, ha kiindulunk egy $0 < d < 1$ irraczionális számból, akkor ez meghatározza a β sort és így az $a_{\mu\nu}$ számokat és ezek alapján az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ értékrendszereket is egyértelműen, a mivel a kijelölt tétel be van bizonyitva.

Áttérünk a következő tétel levezetésére:

II. *Legyen y egy változó, mely a $(0 \ldots 1)$ számközben a 0 kivételével minden értéket felvehet és x egy oly változó, mely ugyanezen számközben kivétel nélkül minden értéket felvehet, akkor az y értékeiből alkotott sokaság egyenlő hatványú az x értékei alkotta sokasággal.*

E tételt legkönnyebben a mellé rajzolt görbe segítségével igazolhatjuk. Ez a görbe végtelen sok egyenes darabból ab, $a'b'$, $a''b''$, és egy izolált pontból van összetéve. Az egyenes vonaldarabok párhuzamosak és kezdőpont felé fogynak az izolált pont, melyhez az egyenes vonalú darabok aszimptotice közelednek. E mellett az a pontok a görbe pontjainak tekintendők, a b pontok nem. Az ábrán

$$Op = pc = 1$$

$$Ob = bp = Oa = \frac{1}{2}$$

$$a'd' = d'b' = bb_1 = \frac{1}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a^{(\nu)}d^{(\nu)} = d^{(\nu)}b^{(\nu)} = b_{\nu-1}b_\nu = \frac{1}{2^{\nu-1}}.$$

Könnyen belátható, hogy ha az ekként megállapitott görbén x felvesz minden értéket 0-tól 1-ig, y ugyanazokat az értékeket veszfel 0 kivételével és hogy y minden értékének x-nek csak egy értéke felel meg és fordítva.

Alkalmazván erre a tételre

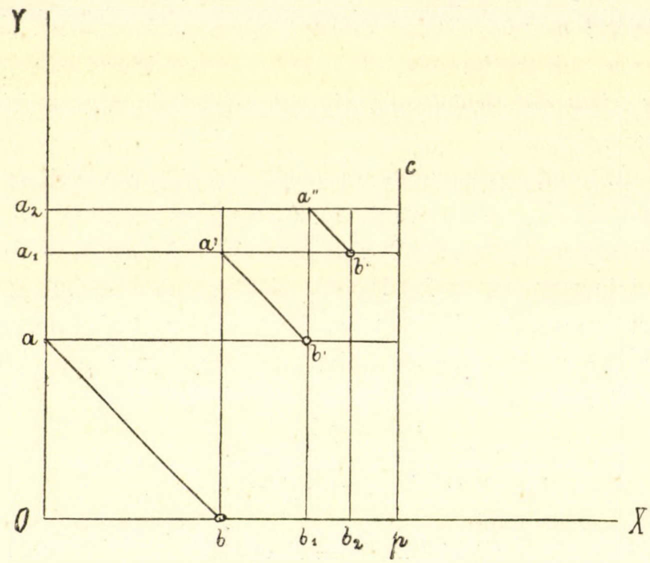
$$y=\frac{z-a}{\beta-a}$$

$$x=\frac{u-a}{\beta-a}$$

lineár helyettesítést a következő tételt nyerjük:

III. *Valamely z változó, mely az $(a \ldots \beta)$ számköz minden értékét felveheti a kivételével, egyenlő értékű oly u változóval, mely e számköz minden értékét veheti fel.*

E tételből pedig könnyen jutunk a következőhöz:



IV. *Ha ω oly változó, mely az $(a \ldots \beta)$ számköz minden értékét felveheti, kivéve a két szélsőt a-t és β-t és u változó ugyane számköz minden értékét felveheti, akkor e két változónak értékeiből alkotott sokaság egyenlő hatványú.*

Ugyanis legyen γ egy tetszőleges érték a és β között, vehesse fel továbbá

ω az $(\alpha \dots \beta)$ számköz összes értékeit α és β kivételével
z az $(\alpha \dots \beta)$ « « « α kivételével
ω' az $(\alpha \dots \beta)$ « « « α és γ kivételével
ω'' a $(\gamma \dots \beta)$ « « « β kivételével
u'' a $(\gamma \dots \beta)$ « « « kivétel nélkül,

akkor

$$\omega \equiv \{\omega', \omega''\}$$
$$z \equiv \{\omega', u''\}$$

de a III. alatti tétel szerint

$$\omega'' \sim u''$$

úgy, hogy

$$\omega \sim \{\omega', u''\}$$

és innen

$$\omega \sim z\,;$$

de minthogy ismét a III. alatti tétel értelmében

$$\omega \sim z,$$

következik, hogy

$$\omega \sim u$$

és ezt épen akartuk bebizonyitani.

Vezessük be most a következő segédváltozókat:

f' vegye fel az $(0 \dots \varepsilon_1)$ köz minden értéket ε_1 kivételével
f''' « « « $(\varepsilon_2 \dots \varepsilon_3)$ « « « ε_2 és ε_3 «
. . . .
$f^{(\nu)}$ « « « $(\varepsilon_{\nu-1} \dots \varepsilon_\nu)$ « « « $\varepsilon_{\nu-1}$ és ε_ν «

továbbá

x'' vegye fel az $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_2)$ « « « kivétel nélkül
. . . .
$x^{(2\nu)}$ « « « $(\varepsilon_{2\nu-1} \dots \varepsilon_{2\nu})$ « « « « «

továbbá pedig

f vegye fel az $(0 \dots 1)$ « « « egy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu$ sorozat kivételével
x « « « $(0 \dots 1)$ « « « kivétel nélkül,

akkor

$$f \equiv \{f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots, 1\}$$

$$x \equiv \{f', x'', f''', x^{(\mathrm{IV})}, \ldots, f^{(2\nu-1)}, f^{(2\nu)}, \ldots, 1\},$$

de

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)}, f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)}, 1 \sim 1,$$

tehát

$$f \sim x;$$

azaz

V. *Két oly változó, melyek közül az egyik a* (0 . . . 1) *számköz összes értékeit kivétel nélkül, a másik ugyanezeket egy bizonyos* ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$) *sorozat értékeinek kivételével veheti fel, ahol* $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ *és* $\lim \varepsilon_\nu = 1$, *egyenlő értékűek.*

Ámde a (0 . . . 1) számközben fekvő raczionális számok megszámlálható sokaságot és így egy ily $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu$ sort is képeznek, (v. ö. Kőnig Analizis I. p. 167) úgy hogy tételünket így is fogalmazhatjuk:

VI. *Oly sokaság, melynek elemei a* (0 . . . 1) *számköz összes valós értékei, egyenlő hatványú avval a sokasággal, melynek elemei ugyane számköz összes irraczionális értékei.*

Legyen már most $T_n^{(i)}$ egy oly n-méretű sokaság, melynek elemei a (0 . . . 1) számköz összes irraczionális elemei, $T_1^{(i)}$ egy époly egyméretű sokaság és $T_n^{(\nu)}$ egy oly n-méretű sokaság, melynek elemei a (0 . . . 1) számköz összes valós elemei, akkor

$$T_n^{(i)} \sim T_1^{(i)}$$

$$T_1^{(i)} \sim T_1^{(\nu)}$$

$$T_n^{(i)} \sim T_n^{(\nu)}$$

tehát

$$T_n^{(\nu)} \sim T_n^{(1)}$$

Ha ezt az igazságot a (III.) tétel alapján egy tetszőleges számközre átvisszük, végül Cantor tételének bebizonyítását nyerjük.

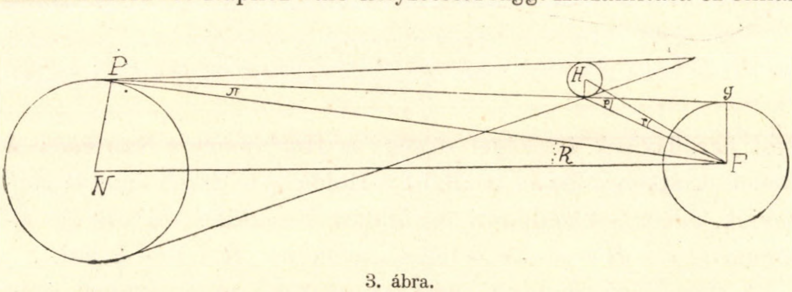
Kopp Lajos.

A FOGYATKOZÁSOK GRAPHIKUS MEGHATÁROZÁSA.

(Második és befejező közlemény.)

II. Napfogyatkozások.

Ha a Hold közel az ekliptikához, tehát valamelyik csomópontjának szomszédságában conjunctióba jut a Nappal (újhold), napfogyatkozás keletkezhetik. De míg a holdfogyatkozás tényleges sötétülés, mely egyidőben az egész félföldön látható, addig a napfogyatkozás lényegesen parallaktikus jelenség, mely a megfigyelőnek a Hold- és Naphoz való helyzetétől függ. Kiszámítása ez oknál



3. ábra.

fogva tetemesen bonyolúltabb. Szerkesztésünk a napfogyatkozás lefolyását adja a Föld számára általában; hogy a jelenségben az egyes földfelületi pontok helyzetüknél és a tengelyforgás következtében miképen vesznek részt, ezt ismét egyszerűbben a glóbussal döntjük el.

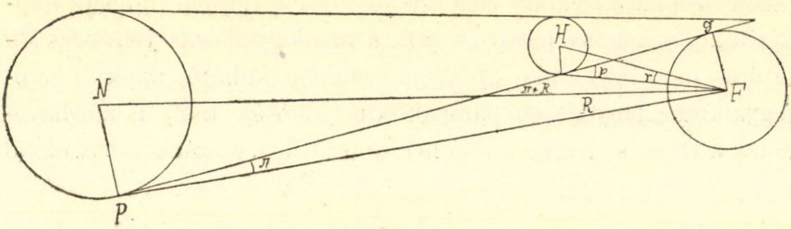
A 3. ábra a részleges napfogyatkozás határát adja, a mennyiben a Föld *G* pontján álló megfigyelő a Hold és Nap külső érintését észlelheti. Ez esetben a Nap és Hold középpontjainak egymástól való látszó távolsága az *NFH* szög, mely nyilván

$$NFH = (p - \pi) + R + r$$

Éppen így adja a 4. ábra a teljes napfogyatkozás határát, a menynyiben az árnyékkúp csúcsán álló megfigyelő a Nap és Hold belső érintkezését megfigyelheti. Ez esetben a Hold és Nap látszó távola, azaz

$$NFH = p - \pi + r - R.$$

Ezen utolsó két egyenlet még más úton is nagyon egyszerüen származtatható. A Föld középpontjában álló megfigyelő ugyanis részleges vagy teljes fogyatkozást *még* lát, ha Hold és Nap egymást külsőleg, illetve belsőleg érintik. Ekkor a két égi test középponti távolsága, $r + R$ illetőleg $r - R$. Ha most a két korong centrális vonalával párhuzamosan a Föld szinéig emelkedünk, mindkét égi



4. ábra.

test parallaxisuk értékével sülyed: a Hold p-vel, a Nap π-vel. A szélek érintkezése ismét beáll, ha a Holdat $p - \pi$-vel emelve gondoljuk, mikor is középponti távolságuk a részleges fogyatkozás alkalmával $r + R + p - \pi$, a teljes esetén $r - R + p - \pi$ lett.

A fogyatkozás határai ismét ez értékek szélső értékei szabják meg; ugyanis

p változik	53′ 53,0″	és	61′ 27,0″	között
π «	8,7	és	9,0	«
r «	14 43,0	és	16 46,5	«
R «	15 45,5	és	16 17,5	«

Ennek következtében:* $p - \pi + r + R$ minimuma $= 84'12{,}5''$, maximuma $= 94'22{,}3''$.

* L. A 2. lapon álló jegyzetet.

És éppen így: $p - \pi + p - R$ minimuma $= 52' 41{,}8''$, maximuma $= 61' 47{,}0''$.

Ha az előbb idézett sphærikus háromszögben (csomópont, hold- és a földárnyék középpontja) a földárnyék helyébe a Napot teszszük, akkor nyerjük a távolságokat, melyekben a Nap a holdcsomóponttól állhat, hogy a fogyatkozás még éppen lehetséges legyen. Ha ismét a hold-naptávolságnak, *NH* (az előbbi *AH* helyett) maximumait a pályahajlás minimumával összevetjük, és megfordítva, a következő értékekhez jutunk:

	Szükséges határ:	Lehetséges határ:
Részleges napfogyatkozásoknál ...	15° 23′	18° 21′
Teljes vagy gyűrűs fogyatkozásoknál	9 33	11 54

vagyis: Ha újhold alkalmával a Nap távolsága a legközelebbi csomóponttól kisebb mint 9° 33′, akkor *szükségképen* bekövetkezik egy teljes vagy gyűrűs napfogyatkozás; ha e távolság 9° 33′ és 11° 54′ között van, *szükségképen* látunk teljes, gyűrűs, vagy részleges fogyatkozást; 11° 54′ és 15° 23′ között *szükségképen* részleges fogyatkozás áll be, míg 15° 23′ és 18° 21′ között a részleges fogyatkozás *lehetősége* még megvan, 18° 21′-cznyi távolságon tul pedig már e lehetőség is *ki van zárva*. A Hold pályahajlás négyzetével egyenlő rendü tagok elhanyagolásával ezen határok helyébe ismét az $NH = p - \pi + r + R$ távolságok is léphetnek, ha ezeket a Hold szélességének tekintjük.

A centrális napfogyatkozás átlagos tartama ugyancsak könynyen kiszámitható; a Hold perczenkénti relativ útja a Naphoz képest 30,48″, s a fogyatkozás teljes tartama alatt a két égi test átmérőinek összegével egyenlő útat fut be; ez átlag 3791,6″ s ennélfogva az átlagos tartam 124^m; mivel azonban a megfigyelő a Földdel együtt ugyancsak a holdmozgás irányában kelet felé mozog, e tartam 2 óránál valamivel nagyobb lesz. A teljes vagy gyűrűs fogyatkozás átlagos tartáma ellenben csak néhány perczre rug, mivel a Hold az átmérők csekély külömbségét gyors mozgásánál fogva igen hamar befutja.

A fogyatkozás egyes fázisainak tanulmányozására ismét szerkesztést veszünk igénybe; példa gyanánt választom az 1764-iki teljes napfogyatkozást. Elemei, melyek ez esetben kényelmesebben az ekliptikára vonatkoztathatók, és melyek ugyanoly módon beszerezhetők és a hosszkülömbségnek az interpolátióval való tekintetbevételével tetszőleges hely meridiánjára átszámíthatók, mint a holdfogyatkozásnál a következők :

		Valódi párisi idő.
Conjunctió hosszúságban: 1764 április 1. d. e.		$10^h 31^m 23^s$
☾ szélessége	+	0° 39′ 36″
☾ óránkénti mozgása hosszúságban	+	29′ 39″
⊙ « « «	+	2′ 27″
☾ óránkénti mozgása szélességben	+	2′ 31″
☾ horizontális æquator parallaxisa	$p =$	54′ 9″
⊙ « « «	$\pi =$	9″
☾ látszólagos sugara	$r =$	14′ 47″
⊙ látszólagos sugara	$R =$	16′ 1″

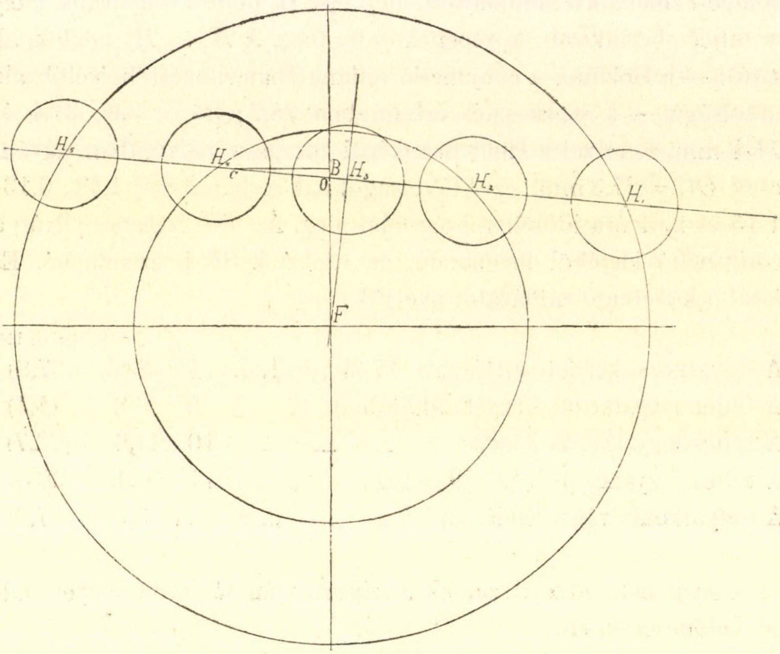
Mivel a 3. és 4. ábra szerint a Föld nappali félgömbjének szélén fekvő G hely számára a részleges és teljes napfogyatkozás kezdődik vagy végződik, ha Nap és Hold szögtávolsága $p - \pi + R + r$. illetőleg $p - \pi + r - R$, irjunk le ezen értékü sugarakkal két concentrikus kört. Ha ismét $p. o.$ 1 ívpercz = 1 mm., akkor $p - \pi + R + r =$ $= 84' 49'' = 84{,}8$ mm. és $p - \pi + r - R = 52' 45'' = 52{,}8$ mm. E két kör nyilván a Föld napos féltekéjének (a Hold távolságában) a részleges, illetve teljes napfogyatkozás kezdetén és végén rajzolt orthogonális projectiójának felel meg. F, a Földnek, éppen úgy, mint a Napnak szélessége állandóan O, mivel mindkettőnek középpontja az ekliptikában fekszik. A 2. ábrával való konformitás tekintetében a vizszintes átmérő a Föld napos oldalának szélességköre, az erre merőleges átmérő a Föld napos oldalának hosszúsági köre nevét is viselheti. Mivel a conjunctió pillanatában a Hold északi szélessége 39′ 36″, ugyancsak az előbbi ábrának megfelelő O pont 39,6 mm.-nyi távolságba kerül F-től észak felé. A Hold relativ mozgása a Földhez szélességben + 2′ 31″ (mivel a Föld állandóan az ekliptikában marad) és hosszúságban 29′ 39″ — 2′ 27″ = 27′ 12″ (mivel a Föld ezirányu mozgása a Napéval azonos). Ha tehát

$OB = 2,5$ mm. és $BC = 37,2$ mm., akkor $OC = 27,3$ mm. a Hold valódi óránkénti útja, és e vonal $H_1 \,.\,.\, H_5$ meghosszabbitása szolgáltatja a Hold relativ pályáját, melynek csomópontja az egyenesnek s az ekliptikának meghosszabbitásának metszésében keresendő. A Holdpálya H_1, H_5 és H_2, H_4 pontjai nyilván azok, melyekben a Föld napos oldalának szélén a részleges, illetve a teljes fogyatkozás kezdete és vége észlelhető. Ha F pontból még merőlegest emelünk a holdpályára, még egy H_3 pontot is nyerünk, mely a teljes fogyatkozás közepének felel meg. A $H_1 \,.\,.\, H_5$ pontoknak O-tól — a Holdnak a conjunctió pillanatában elfoglalt helyétől való távolságai — a szerkesztés értelmében 78,7; 38,7; 3,6; 31,4 és 71,4 mm. és mivel a Hold óránkénti mozgása pályájában ugyancsak $OC = 27,3$ mm., ezen távolságoknak sorban 2,88; 1,42; 0,13; 1,15 és 2,61 óra időkülömbség felel meg. Az első három nyilván a conjunctió idejéből levonandó, az utolsó kettő hozzáadandó. Ez által a következő táblázatot nyerjük:

		V. párizsi idő.		
A fogyatkozás kezdete általában:	1764 ápr. 1. d. e.	7^h	38^m6	(37,8)
A teljes fogyatkozás kezdete általában		9	6,2	(4,4)
A teljes fogyatkozás közepe		10	23,6	(22,7)
A teljes fogyatkozás vége általában		11	40,4	(38,8)
A fogyatkozás vége általában	d. u.	1	8,0	(7,6)

A zárjelekbe fogott számok a szigoru számitás eredményeit adják, időperczekben.

Mindezen adatok természetesen a tengelyforgással nem biró Földre vonatkoznak; vagy más szóval a fogyatkozás kezdete és vége imént közölt idő-adata azon helyekre érvényes, melyek a napos félföld szélén feküsznek, melyek számára tehát a Nap éppen fogyatkozva kel és nyugszik. Hogy ez a Föld mily pontjaira vonatkozik, s hogy e jelenségben a tengelyforgásnak mily szerep jut, az ismét a földglóbus segélyével határozható meg legegyszerübben. E czélra ellátjuk a glóbust egy $\sqcap$ alaku vonalzóval, mely a fahorizontra a félgömb fölé állitható, s melynek a glóbus felé néző éle a holdpályát ábrázolja a fogyatkozás alatt. A «pályavonalzó» helyes felállítása kedvéért rajzoljuk az 5. ábrába az F ponton átmenő æquatort, mely a glóbuson a fahorizontot az állandó kelet és nyugot pontokban metszi. Aequator és ekliptika képe egymással ábránkban nyilván ugyanazt a szöget zárja be, melyet a Napon átmenő hosszúsági- és órakör fog közbe. De az æquator és ekliptika pólusaitól, P és Π-től, valamint a Nap N által képezett sphaerikus három-



5. ábra.

szögben $P\Pi = \varepsilon = 23^\circ\, 27'$, $\Pi N = 90^\circ$ (mivel a Nap szélessége állandóan 0), $\Pi NP \measuredangle = p$ a keresett szög, $\Pi PN \measuredangle = 90^\circ + \alpha$, hol α a Nap rectascensiója. Ebből következik:

$$\sin p = \sin \varepsilon \cos \alpha$$

mi egyszersmind az æquatort hajlás és irány szerint meghatározza. Mivel a mi esetünkben $\alpha = 10^\circ\, 33'$, $\varepsilon = 23^\circ\, 27'$, $p = 23^\circ\, 2'$-nek adódik, az æquator $23^\circ\, 2'$-nyi szöglet alatt úgy fektetendő F ponton át az ekliptikához, hogy ennek nyugoti (jobboldali) ága az æquator nyugoti ágától északra kerüljön. A vonalzó két lábát ennélfogva a Hold északi declinatiója esetében annyi fokkal állítjuk a kelet és nyugot ponttól északra (déli declinatió esetében dél felé), a hány fokra fekszik az 5. ábrában H_2 és H_4 a teljes, H_1 és H_5 a részleges fogyatkozás esetében az æquator és a belső, illetőleg az æquator és a külső kör metszési pontjaitól. Ezzel a vonalzó belső éle a holdpálya relativ fekvését a Földhöz képest helyesen adja vissza. Az F pontban az æquatorra merőleges egyenes a Nap óraköre, melyet ezentúl a glóbus fémmeridiánjával fogunk azonosítani, s mely alatt a Föld tengelyforgása közben elfordúl.

Most emeljük a glóbus északi vagy déli pólusát annyi fokkal a fahorizont fölé, a mennyit a Nap északi vagy déli declinátiója a fogyatkozás napján kitesz (a mi esetünkben $\delta = + 4° 30'$, s ennyivel emelendő az északi pólus), a mivel elértük, hogy a Nap aznapi parallelköre a glóbus zenithjén megy át. Mivel a Napot a fémmeridiánban, mint saját óraköréhen képzeljük, ez tényleg a glóbus zenithjében áll, s a fahorizont feletti rész adja a Föld nappali oldalát, mig a «pályavonalzó» a glóbushoz képest teljesen úgy fekszik, mint ábránkban a $H_1 .. H_5$ pálya a Föld orthogonális projectiójában.

Mivel a glóbus és a felette képzelt Nap úgy áll, hogy a *párhuzamos* napsugarak merőlegesen esnek a glóbus horizontjára, a vonalzóhoz illesztett függőón egy ilyen napsugár képét szolgáltathatja. Ha a függőón a gömb keleti és nyugoti oldalát érinti, a vonalzón nyilván a H_2 és H_4 pontoknak megfelelő holdhelyeket kapjuk, feltéve, hogy a teljes fogyatkozásnak megfelelőleg, a glóbus sugarát a belső kör sugarának megfeleltetjük. E két helyzetnek megfelel a teljes fogyatkozás kezdete és vége, $9^h\,6^m$ és $11^h\,40^m$, a miért is e két pont között a vonalzó mindjárt 154 részre — minutára — osztható, hogy a Hold helye valamely földfelületi pont felett az egész teljes fogyatkozás tartama alatt meghatározható legyen.

Hátra van még végül a glóbus helyes forgatása. Példánkban a teljes fogyatkozás kezdete beáll, ha Párisban az óra délelőtti $9^h\,6^m$-et mutat, ha tehát Páris a Napot magában foglaló órakörtől még $12^h - 9^h\,6^m = 2^h\,54^m$-nyire *nyugot* felé fekszik. Hozzuk tehát

Párist a fémmeridián alá. Állítsuk a számlapját a fogyatkozás kezdetére, $9^h\ 6^m$-ra, és forgassuk a glóbust nyugot felé, míg a számlap déli 12 órára nem áll. Ekkor Páris a követelménynek megfelelőleg $2^h\ 54^m$-nyira fekszik nyugotra, s ez utolsó művelettel végül az egész tünemény hű mechanikai mását nyertük a fémmeridián alatt fekvő helyek számára egyszerre van dél, a *nyugoti* horizont mentén fekvő pontok egyszerre látják a Nap *keltét*, a *keleti* horizont pontjai a Nap *nyugtát*.

A nyugoti horizonton a «pályavonalzó» alatt függőlegesen fekvő hely az *első*, mely $9^h\ 6^m$ párisi időben látja a teljes fogyatkozás kezdetét. Valamely keletre, de mindig a «pályavonalzó» alatt álló pont *ugyanez* időben a részleges fogyatkozásnak éppen kezdetét láthatja akkor, ha a vonalzóra illesztett függőón távolsága a Hold helyétől (a fogyatkozás kezdetét jelölő $9^h\ 6^m$ ponttól) a két égi test sugarának összegével azonos. Ez összeg 30′ 48″ ; másrészt a glóbus átmérője, mely a vonalzó osztott hosszával egyenlő, 154 részből áll, melyek együttvéve az 5. ábra belső körének átmérőjével 105′ 30″-czel felelkeznek. Ennélfogva a keresett távolság x:

$$\frac{x}{154} = \frac{30'48''}{105'30''}$$

s ha a vonalzó $9^h\ 6^m$-pontjától ezen x távolságra függélyest bocsátunk le, a Földnek azt a helyét nyerjük, melyben $9^h\ 6^m$ párisi időben a részleges fogyatkozás éppen kezdődik. Ugyan így megállapíthatók mindazon helyek is, melyekben a fogyatkozás adott időben éppen egy előírt nagyságot elért. Ha ezen egész eljárást ismételjük a fogyatkozás közepére és végére nézve is, midőn a Hold helyét a vonalzón a $10^h\ 24^m$, illetve $11^h\ 40^m$ pontban keressük, a tünemény teljes lefolyását a Földforgás tekintetbevételével tanulmányozhatjuk, különösen pedig kereshetjük azt a pontot is, melyben a teljes fogyatkozás $11^h\ 40^m$ párisi időben utoljára látják.

Az ily módon felkeresett vagy felkereshető pontok összesége geographiai helyzetük szerint térképekbe rajzolva megadják a tünemény láthatóságának teljes zónáját, melynek szélessége nyilván a teljes fogyatkozás esetében a holdárnyék földfelületi átmetszetével azonos; és a ki a térképvetítés tanaiban csak némi jártassággal bir, könnyű szerrel képes lesz úgy a hold-, mint a napfogyatkozásokra nézve előadott mechanikai megoldást sokkal nagyobb pontossággal tisztán graphikailag is eszközölni. Én ezen tisztán mechanikai eljárásokat mutattam be; jó oldaluk a nagyobb áttekinthetőség, melyekre azután graphikus módszerek már könnyű szerrel alapíthatók.

Kövesligethy Radó.

A SURLÓDÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Harmadik közlemény.)

9. Legyenek a mozgópont koordinátái t időben x, y, z, és legyen tömege $m = 1$. Jelöljük a pályagörbe t időbeli érintőjét, első görbületi sugarát és a másodikat v, ρ, β-val; továbbá az adott szilárd felület normálisát és érintősíkját az x, y, z pontban n illetve S-sel, a v sebesség projekczióját az S síkra jelöljük f-fel és végül az n és f egyenesek közös normálisát b-vel.

A tömegpontra ható szabad erő legyen P, míg a felület ellenállását két komponensre bontjuk. A felület *reakczió erejének* azt az erőt nevezzük, melyet a rajta mozgó pontra az ezen a helyen vont normális irányában gyakorol; a felület *súroló erejének* pedig azt az erőt, melyet az ő érintő síkján az f relativ sebességgel épen ellenkező irányban kifejt.

A mozgási egyenletek fölirására ugyanazok a meggondolások vezetnek, mint az előbbi fejezetben. Ugyanis a tömegpont összes gyorsulásának komponensei a v, ρ, β koordináta-rendszerben

$$\frac{dv}{dt}, \quad \frac{v^2}{\rho}, \quad 0;$$

másrészről ezt a gyorsulást létrehozzák a P, F, N gyorsító erők, melyek közül az utóbbi kettő iránya az f illetve n egyenesekével összeesik. Ezen okból a gyorsulás és a vele æquivalens gyorsító erőknek az f, n, b irányokra való projicziálása révén a következő egyenletek írhatók fel:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt}\cos(v, f) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, f) &= P\cos(P, f) - F, \\
\frac{dv}{dt}\cos(v, n) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, n) &= P\cos(P, n) + N, \qquad (22) \\
\frac{dv}{dt}\cos(v, b) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, b) &= P\cos(P, b).
\end{aligned}$$

Ezek már a keresett mozgási egyenletek. Belőlük ugyanazon eljárással, mint az előbbi fejezetben, a felület összes ellenállásának meghatározására ugyanazt az egyenletet nyerjük, t. i. ezt:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2} + P^2 - 2P\left(\frac{dv}{dt}\right)\cos(v, P) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, P) = F^2 + N^2. \quad (23)$$

10. Ha *az adott szilárd felület mozdulatlan,* akkor az egyenletek egyszerűbb alakot öltenek fel. Ekkor ugyanis a v és f sebességek azonosak lévén

$$\begin{aligned} (v, f) = 0, \quad (\rho, f) &= (\rho, v) = \frac{\pi}{2}, \\ (n, f) &= (n, v) = \frac{\pi}{2}; \\ (b, f) &= (b, v) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (24a)$$

továbbá a v sebesség iránya merőleges az n, b és ρ egyenesek irányára, minélfogva ezek ugyanabban a síkban feküsznek; ámde $(n, b) = \frac{\pi}{2}$; azért a b értelmének kellő megállapításával

$$(n, \rho) + (\rho, b) = \frac{\pi}{2}. \quad (24b)$$

A (24*a*) alattiak tekintetbe vételével a (22) mozgási egyenletek ezekké válnak:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} - P\cos(P, v) &= -F, \\ \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, n) - P\cos(P, n) &= N, \\ \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, b) - P\cos(P, b) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Ez egyenletek közül a második azonos a Fröhlich tagtárs úr dolgozatában* más úton levezetett egyenlettel, és úgy mint ott a $\rho = n \cos(\rho, n)$ Meusnier-tétel alkalmazásával ezen egyszerűbb alakban is irható:

---

* Mathematikai és Phys. Lapok 1893 pag. 256.

$$\frac{v^2}{n} - P\cos(P, n) = N. \tag{25a}$$

A (25) alatti utolsó egyenletből pedig érdekes következtetéseket vonhatunk.

Tegyük föl, hogy a P erő a felület (x, y, z) pontjabeli ama normális síkban működik, mely a v sebességet ábrázoló vonalat tartalmazza, ekkor $\cos(P, b) = 0$ lévén, a nevezett egyenletből, — ha csak nem $\rho = \infty$, — az következik, hogy $\cos(\rho, b) = 0$. Szóval *ha a felület görbe, és az erő minden pontjában az anyagi pont sebességét tartalmazó normális síkban működik, akkor a pálya görbületi sugara a normálisba esik és* $\rho = n$; a pálya simuló síkja tehát egyszersmind a felület normális síkja, és így *a pályagörbe a felületnek geodétikus vonala.*

A pálya akkor is geodétikus vonal a felületen, a mikor a szabad erő $P = 0$.

Ha pedig a P erő nem ilyen speciális fekvésű, úgy hogy $\cos(P, b) \gtrless 0$, akkor egyszersmind $\cos(\rho, b) \gtrless 0$, és pedig a (25) egyenletek utolsója által meghatározott módon. Ennek az egyenletnek felhasználásával az N értéke a következő alakokban irható:

$$N = \frac{\cos(P, b)\cos(\rho, n) - \cos(P, n)\cos(\rho, b)}{\cos(\rho, b)} P,$$

$$N = \frac{\cos(P, b)\cos(\rho, n) - \cos(P, n)\cos(\rho, b)}{\cos(P, b)} \frac{v^2}{\rho}.$$

11. Megjegyzést érdemel, hogy az imént fölírt két tört közös számlálójának átalakításával az N a következőképen irható:

$$\left.\begin{aligned} N &= P\,\frac{\sin(P, \rho)}{\sin(n, \rho)}\cos A, \\ N &= \frac{v^2}{\rho}\,\frac{\sin(P, \rho)}{\cos(P, b)}\cos A; \end{aligned}\right\} \tag{25b}$$

hol A az a szög, melyet a P és a b egyenesein át fektetett normális síkok egymással bezárnak.

Ugyanis tekintettel, hogy a v, n, b orthogonális rendszert alkotnak, ismeretes tétel szerint

$$\cos(P,\rho) = \cos(P,v)\cos(\rho,v) + \cos(P,n)\cos(\rho,n) + \\ + \cos(P,b)\cos(\rho,b);$$

úgy hogy $\cos(\rho,v) = 0$ folytán

$$-\cos(P,n)\cos(\rho,n) = \cos(P,b)\cos(\rho,b) - \cos(P,\rho)$$

és a (24a) egyenletet is tekintetbe véve

$$[\cos(P,b)\cos(\rho,n) - \cos(P,n)\cos(\rho,b)]\cos(\rho,n)$$
$$= \cos(P,b)\cos^2(\rho,n) + \cos(P,b)\cos^2(\rho,b) - \cos(P,\rho)\cos(\rho,b)$$
$$= \cos(P,b) - \cos(P,\rho)\cos(b,\rho).$$

Ámde ismeretes gömbháromszögtani tétel alkalmazásával

$$\cos(P,b) = \cos(P,\rho)\cos(b,\rho) + \sin(P,\rho)\sin(b,\rho)\cos A;$$

azért végül a (24a) ismételt alkalmazásával

$$\cos(P,b)\cos(\rho,n) - \cos(P,n)\cos(\rho,b) = \sin(P,\rho)\cos A;$$

és evvel a szándékolt átalakitás megvan.

12. Ha a surlódás alaptörvényét, mely szerint

$$F = kN$$

tekintetbe vesszük, akkor az F-et és N-et eliminálván a (25) egyenletekből, ered

$$\frac{dv}{dt} = P\cos(P,v) - k\left(\frac{v^2}{n} - P\cos(P,n)\right). \qquad (26)$$

$$0 = \frac{v^2}{n}\operatorname{tg}(\rho,n) - P\sin(P,n).$$

Ezek az egyenletek másodikából, miként a 10. pontban láttuk, az következik, hogy a midőn szabad erő nem hat az anyagi pontra, a pálya az adott kezdősebességhez tartozó geodétikus vonal.

A mozgási problema tehát geodétikus vonal meghatározását követeli; és ha ez megvan, a változó sebesség meghatározása tényleg elvégezhető az előbbi fejezetben leirt uton.

A pont sebességét e geodétikus vonalon ugyanis megnyerjük a (26)-ból $P = 0$ tevésével kiadódó

$$\frac{dv}{dt} = -k\frac{v^2}{n}$$

egyenlet megoldása révén. Ez egyenlet

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

folytán így irható

$$\frac{dv}{ds} = -k\frac{v}{n};$$

ha tehát az adott görbe felületen meghatározzuk az n görbületsugarat mint az s ívhossz függvényét, akkor ezen differencziálegyenlet megoldása csak az

$$\int\frac{dv}{kv} + \int\frac{ds}{n} = 0 \qquad (27)$$

egyenletben jelölt quadraturák végzését követeli meg, a mi tekintettel arra, hogy a k surlódási együttható csakis a v függvénye, mindig eszközölhető.

Az imént bebizonyított tétel Mayertől ered.

De miként láttuk, a pálya akkor is geodétikus vonal, ha *az erő a pálya minden pontjában a pálya érintőjén áttett normális síkban működik.* Ekkor úgy n, mint P és $\cos(P, n) = \sin(P, v)$ értékei meghatározandók a geodétikus vonal minden pontjában mint az s ívhossz függvényei; meghatározott értékeiket behelyettesítvén, a (26) alatti első egyenlet ezt az alakot veszi fel:

$$v\frac{dv}{ds} = f_1(s) - k\left(\frac{v^2}{n} - f_2(s)\right).$$

Ez az egyenlet pedig azonos az előbbi fejezetben tényleg megoldott differencziálegyenlettel.

Ha tehát van a felületen olyan geodétikus vonal, melynek simuló síkjai az erők egyeneseit tartalmazzák, akkor a vonal érintője irányában bármekkora sebességgel induló pont a geodétikus vonal mentén halad tova, és mindenkori sebességének értéke határozott integrálok kiszámításával adódik ki.

Ha pl. súlyos pontnak adott felületen surlódással járó mozgásáról van szó, és van a felületnek olyan geodétikus vonala, melynek simuló síkjai függélyesek, akkor e vonal érintője irányában ellódított anyagi pont a geodétikus vonalon marad, és mindenkori sebessége az előbbi fejezetben tárgyalt módon quadraturával tényleg kiszámítható.

Réthy Mór.

A KÖRMÉRÉS ELMÉLETE ÉS TÖRTÉNETE.

(Kilenczedik és befejező közlemény.)

Az e és π számok transzczendens voltának egyszerűsitett bebizonyítása.

Hilbert, Hurwitz és Gordan rövidítései és egyszerűsítései után az e és π számok transzczendens voltának bebizonyítása következőképen eszközölhető.

1. Induljunk ki az exponencziális sor maradéksorának vizsgálatából. Az

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

kitevős sor

$$R_n = \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{x^{r+2}}{(r+2)!} + \cdots + \frac{x^{r+k}}{(r+k)!} + \cdots,$$

maradéksorának tagjai abszolut értékre nézve rendre kisebbek mint a következő sor tagjai:

$$\frac{|x|^{r+1}}{r!\ 1!} + \frac{|x|^{r+2}}{r!\ 2!} + \cdots + \frac{|x|^{r+k}}{r!\ k!} + \cdots,$$

melynek összege

$$\frac{|x|^r}{r!}(e^{|x|} - 1).$$

Tehát

$$|R_n| < \frac{|x|^r}{r!}(e^{|x|} - 1),$$

s innen

$$|R_n| < \frac{|x|^r}{r!}(e^{|x|},$$

vagy részletesebben kiírva

$$(1) \quad \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{x^r}{r!}\right) \right| < \frac{|x|^r}{r!} e^{|x|}.$$

Legyen most már adva valamely

$$g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_r x^r + \cdots + c_s x^s$$

s-ed fokú egész függvény, továbbá jelentse $G(x)$ a $g(x)$-nek és első s differencziálhányadosának összegét.

Akkor

$$G(x) = \sum_{r=0}^{s} c_r r! \left(\frac{x^r}{r!} + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + \cdots + \frac{x}{1!} + 1 \right)$$

és

$$G(0) = \sum_{r=0}^{s} c_r r!,$$

továbbá

$$e^x G(0) - G(x) = \sum_{r=0}^{s} c_r r! \left\{ e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^r}{r!}\right) \right\}$$

Innen

$$|e^x G(0) - G(x)| \leqq \sum_{r=0}^{s} |c_r| r! \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^r}{r!}\right) \right|$$

és ha a jobb oldal tagjaira rendre az (1) alatti egyenlőtlenséget alkalmazzuk, akkor végre:

$$|e^x G(0) - G(x)| < e^{|x|}(|c_0| + |c_1| |x| + |c_2| |x|^2 + \cdots + |c_s| |x|^s)$$

Ezzel be van bizonyítva a következő

I. Segédtétel: *Ha $G(x)$ valamely $g(x)$ egész függvénynek és összes differencziálhányadosainak összegét jelenti, $\gamma(x)$ pedig az a ráczionális egész függvény, melynek együtthatói a $g(x)$ együtthatóinak abszolut értékeivel egyenlők, akkor*

$$(2) \quad |e^x G(0) - G(x)| < \gamma(|x|) e^{|x|}$$

2. *Az e szám transzczendens voltáról.* Annak eldöntésénél, hogy valjon az e szám eleget tehet-e valamely

$$(3) \quad C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \cdots + C_r e^r + \cdots + C_n e^n = 0$$

ráczionális együtthatókkal biró algebrai egyenletnek, képezzük a

$$g(x)=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x)^p(2-x)^p\dots(r-x)^p\dots(n-x)^p$$

egész függvénynek és valamennyi differencziálhányadosának öszszegét: $G(x)$-et. Itt p a $|C_0|$-nál és n-nél nagyobb törzsszámot jelent.

Továbbá szorozzuk meg a (3) alatti egyenlet baloldalát $G(0)$-sal, a nyert

$$(4)\qquad G(0)(C_0+C_1e+C_2e^2+\dots+C_re^r+\dots+C_ne^n)$$

kifejezésben helyettesítsük

$$eG(0),\ e^2G(0),\dots,e^rG(0),\dots,e^nG(0)$$

helyébe rendre

$$G(1),\ G(2),\dots,G(r),\dots,G(n)$$

-et s jelöljük az ily módon keletkezett

$$(5)\qquad C_0G(0)+C_1G(1)+C_2G(2)+\dots+C_rG(r)+\dots+C_nG(n)$$

összegnek a (4) alatti szorzattól való eltérését ε-nal, úgy hogy

$$(6)\qquad G(0)(C_0+C_1e+C_2e^2+\dots+C_re^r+\dots+C_ne^n)=$$
$$C_0G(0)+C_2G(1)+C_2G(2)+\dots+C_rG(r)+\dots C_nG(n)+\varepsilon.$$

Az (5) *alatti összeg egy p-vel nem osztható ráczionális egész számmal egyenlő.*

Ha ugyanis $g(x)$-et x hatványai szerint rendezzük, akkor

$$g(x)=$$
$$=\frac{1}{(p-1)!}(n!\,x^{p-1}+C_{00}x^p+C_{01}x^{p+1}+C_{02}x^{p+2}+\dots+C_{0,np-1}x^{np+p-1}),$$

hol a C együtthatók ráczionális egész számok. Innen

$$G(0)=n!+p(C_{00}+C_{01}(p+1)+C_{02}(p+1)(p+2)+\dots).$$

Az $n!$ csupa p-nél kisebb szám szorzata, tehát nem osztható p-vel. Ellenben $G(0)$ második része osztható p-vel. Maga $G(0)$ ennélfogva nem osztható p-vel.

Ha másrészt $g(x)$-et $(x-r)$ hatványai szerint rendezzük, hol r az n-nél nem nagyobb közönséges egész számot jelent, akkor

$$g(x)=\frac{1}{(p-1)!}(C_{r0}(x-r)^p+C_{r1}(x-r)^{p+1}+C_{r2}(x-r)^{p+2}+\cdots),$$

hol a C-k megint ráczionális egész számok; továbbá innen

$$G(r)=p(C_{r0}+C_{r1}(p+1)+C_{r2}(p+1)(p+2)+\cdots)$$

tehát $G(r)$ a p-vel osztható egész szám.

Az (5) alatti összegben e szerint az első tag egy p-vel nem osztható egész szám, a többi tagok pedig mindannyian p-nek többszörösei; ennélfogva maga az összeg csakugyan egy p-vel oszthatatlan egész számmal egyenlő.

A mi ε-t illeti, úgy ez p alkalmas választásával tetszőlegesen kicsinynyé tehető.

Ugyanis segédtételünk értelmében

(7) $$|e^r G(0)-G(r)|<\gamma(r)e^r,$$

hol

$$\gamma(r)=\frac{r^{p-1}}{(p-1)!}(1+r)^p(2+r)^p\ldots(n+r)^p.$$

Itt r legfeljebb n-nel egyenlő, tehát

$$\gamma(r)\leqq\frac{n^{p-1}}{(p-1)!}(1+n)^p(2+n)^p\ldots(2n)^p,$$

s ha rövidség kedvéért

$$K=(1+n)(2+n)\ldots 2n$$

és

$$k=n(1+n)(2+n)\ldots 2n,$$

tesszük, akkor

$$\gamma(r)\leqq\frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Ezt és a (7) alatti relácziót tekintetbe vévén, lesz továbbá

$$|e^r G(0)-G(r)|<\frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!}e^r$$

s innen

$$\left|\sum_{r=1}^{n} C_r [e^r G(0) - G(r)]\right| < \frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!} \sum_{r=1}^{n} |C_r| e^r.$$

Itt a bal oldalon ε abszolut értéke áll. A jobb oldalon k a p választásától független állandót jelent, tehát

$$\frac{k^{p-1}}{(p-1)!}$$

tetszőlegesen kicsinynyé tehető, ha csak p-t eléggé nagynak választjuk. Ugyanez áll egyenlőtlenségünk egész jobb oldaláról, mert

$$K, \sum_{r=1}^{n} |C_r| e^r$$

állandó tényezők.

Egyenlőtlenségünk értelmében tehát ε abszolut értéke csakugyan tetszőlegesen kicsinynyé tehető.

Az (5) alatti összegről s az ε-ról mondottak szerint a (6) alatti egyenlőség jobb oldalának mindig a zérustól külömböző értéke lesz, ha csak p-t eléggé nagynak választjuk. Ennélfogva ugyanott a bal oldal második tényezője szintén nem lehet zérus, vagyis e nem elégithet ki semmiféle ráczionális egész együtthatókkal biró algebrai egyenletet, hanem *transzczendens* szám.

3. A ludolfi számra vonatkozó analog vizsgálat előtt bizonyitsuk még be a következő

II. Segédtételt. *Ha α valamely*

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

ráczionális egész együtthatókkal biró algebrai egyenletnek tesz eleget, továbbá

$$g(x) = \frac{(a_0 x)^{p-1}}{(p-1)!} [a_0^{n-1} f(x)]^p,$$

hol p valamely törzsszámot jelent, végre $G(x)$ a $g(x)$-nek és differencziálhányadosainak összege, akkor

$$G(\alpha)$$

egyenlő valamely algebrai egész számnak p-szeresével.

Ugyanis rendezzük $g(x)$-et

$$z=x-\alpha$$

hatványai szerint; akkor

$$\frac{1}{p}g(x)=\frac{1}{p}g(z+\alpha)=$$

$$\frac{a_0^{np-1}}{p!}(K_0(\alpha)z^p+K_1(\alpha)z^{p+1}+\dots+K_i(\alpha)z^{p+i}+\dots+K_{np-1}(\alpha)^{np+p-1}),$$

hol K_i az α-nak ráczionális egész együtthatókkal biró s legfeljebb $(np-i-1)$ fokú egész függvénye. Innen

$$\frac{1}{p}G(\alpha)=a_0^{np-1}(K_0(\alpha)+(p+1)K_1(\alpha)+(p+1)(p+2)K_2(\alpha)+\cdots),$$

hol a jobb oldalon a zárjelben α-nak ráczionális egész együtthatókkal biró s legfeljebb $(np-1)$-ső fokú egész függvénye áll. Legyen ez:

$$C_0+C_1\alpha+C_2\alpha^2+\cdots+C_{np-1}\alpha^{np-1},$$

akkor

$$\frac{1}{p}G(\alpha)=$$

$$=C_0a_0^{np-1}+C_1a_0^{np-2}(a_0\alpha)+C_2a_0^{np-3}(a_0\alpha)^2+\cdots+C_{np-1}(a_0\alpha)^{np-1}$$

azaz $\frac{1}{p}G(\alpha)$ az $a_0\alpha$-nak ráczionális egész együtthatókkal biró egész függvénye.

Az $a_0\alpha$ szorzat eleget tesz az

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_0a_2x^{n-2}+a_0^2a_3x^{n-3}+\cdots+a_0^{n-1}a_n=0$$

egyenletnek, tehát algebrai egész szám s vele együtt bármely egész számú együtthatókkal biró egész függvénye is algebrai egész szám. Az $\frac{1}{p}G(\alpha)$ tehát algebrai egész szám és $G(\alpha)$ ennek p-szerese.

4. *A π számnak transzczendens voltáról.* Ha a ludolfi szám nem volna transzczendens, akkor vele együtt πi is algebrai szám volna, vagyis

$$x_1=\pi i$$

eleget tenne egy bizonyos ráczionális együtthatókkal biró algebrai egyenletnek. Ha továbbá ennek többi gyökeit rendre

$$x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_r$$

-rel jelöljük, akkor az

$$(e^{x_1}+1)\ (e^{x_2}+1)\ \ldots\ (e^{x_r}+1)$$

szorzat első tényezője, t. i.

$$e^{\pi i}+1$$

zérus volna s vele együtt az egész szorzat is elenyésznék.

Ennélfogva a ludolfi szám transzczendens voltának kimutatására elég bebizonyítanunk azt, hogy *ha*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$$

valamely ráczionális együtthatókkal biró algebrai egyenletnek összes gyökeit jelentik, akkor az

$$(e^{x_1}+1)\ (e^{x_2}+1)\ \ldots\ (e^{x_r}+1) \tag{8}$$

szorzat értéke nem lehet zérus.

A vizsgálandó szorzat egyenlő az

$$1+e^{x_1}+\cdots+e^{x_r}+e^{x_1+x_2}+\cdots+e^{x_{r-1}+x_r}+\cdots+e^{x_1+x_2+\ldots+x_r}$$

összeggel, vagy rövidebben

$$\prod_{\lambda=1}^{r}(x^{\lambda}+1)=\sum_{\mu=0}^{2^r-1}e^{w_\mu},$$

hol a jobb oldalon álló összeg e-nek mindama hatványait tartalmazza, melyeknek kitevői az

$$w_\mu=\varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2+\cdots+\varepsilon_r x_r$$

képletből akként keletkeznek, hogy

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_r$$

helyébe a 0-ok és 1-esekből alkotható valamennyi értékrendszert helyettesítjük.

Ha itt az w_μ-kitevők között a zérussal egyenlőknek száma C, a zérustól külömböző w_μ-ket pedig rendre

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

-nel jelöljük, akkor továbbá

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda}+1) = C + \sum_{\nu=1}^{n} e^{\alpha_\nu}. \tag{9}$$

Az

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

számokhoz mindig található oly ráczionális egész együtthatókkal biró n-ed fokú egyenlet

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

melynek épen az α_ν-k a gyökei.

Ugyanis a

$$\prod_{\mu=0}^{2^r-1} (x - w_\mu) = \prod_{\mu=0}^{2^r-1} (x - \varepsilon_1x_1 - \varepsilon_2x_2 - \cdots - \varepsilon_rx_r)$$

szorzat oly $\varphi(x)$ többtagúval egyenlő, melyben az együtthatók $x_1, x_2, \ldots, x_r$ szimmetrikus egész kifejezései, tehát ráczionális számok. E $\varphi(x)$-ből az $f(x)$ úgy adódik, hogy x-nek C-dik hatványával osztunk, továbbá valamely alkalmas egész számmal való szorzás segitségével az együtthatók nevezőit eltávolítjuk.

Legyen most már

$$g(x) = \frac{(a_0x)^{p-1}}{(p-1)!} [a_0^{n-1} f(x)]^p,$$

hol p oly törzsszámot jelent mely nagyobb mint $|a_0|$, $|a_n|$ és 2^r, tehát egyszersmind nagyobb mint C és n is. Továbbá képezzük $g(x)$-nek és differenczialhányadosainak összegét: $G(x)$-et, és szorozzuk meg $G(0)$-sal a (9) alatti egyenlőség jobb oldalát.

A nyert

$$G(0)\left(C + \sum_{\nu=1}^{n} e^{\alpha_r}\right) \tag{10}$$

szorzatban helyettesitsünk $e^{\alpha_r}\, G(0)$ helyébe $G(\alpha_\nu)$-t s jelöljük az így keletkezett

(11) $$CG(0)+\sum_{\nu=1}^{n}G(\alpha_\nu)$$

összegnek a (10) alatti szorzattól való eltérését ε-nal, úgy hogy

(12) $$G(0)\left(C+\sum_{\nu=1}^{n}e^{\nu}\right)=CG(0)+\sum_{\nu=1}^{n}G(\alpha_\nu)+\varepsilon.$$

Itt $CG(0)$ egy p-vel oszthatatlan ráczionális egész számmal egyenlő. Ugyanis $g(x)$-et x hatványai szerint rendezvén, leszen

$$g(x)=\frac{1}{(p-1)!}(a_0^{np-1}a_n^p x^{p-1}+C_0x^p+C_1x^{p+1}+\cdots),$$

a honnan

$$G(0)=a_0^{np-1}a_n^p+p(c_0+C_1(p+1)+\cdots).$$

Itt a jobb oldal első tagja csupa p-nél kisebb szám szorzata, tehát nem osztható p-vel. Ellenben $G(0)$ második része osztható p-vel. Maga $G(0)$ ennélfogva nem osztható p-vel.

Minthogy továbbá C sem osztható a nálánál nagyobb p törzsszámmal, azért a $CG(0)$ sem osztható vele.

Ellenben

$$\sum_{\nu=1}^{n}G(\alpha_\nu)=G(\alpha_1)+G(\alpha_2)+\cdots+G(\alpha_\nu)+\cdots+G(\alpha_n)$$

a p-vel osztható ráczionális egész szám. Ugyanis ennek az összegnek egyes tagjai a II. segédtétel értelmében algebrai egész számoknak p-szeresei, tehát maga az összeg is egy bizonyos algebrai egész számnak p-szerese.

Még pedig ez az algebrai egész szám nem lehet irraczionális, mert a vizsgált összeg az α-kban szimmetrikus.

Ezeknél fogva

$$CG(0)+\sum_{\nu=1}^{n}G(\alpha_\nu)$$

valamely p-vel nem osztható ráczionális egész számmal egyenlő.

A mi ε-t illeti, úgy ez p alkalmas választásánál tetszőlegesen kicsinynyé tehető.

Ugyanis I. segédtételünk szerint

13) $$|e^{\alpha_\nu}G(0)-G(\alpha_\nu)|<\gamma(|\alpha_\nu|)\,e^{|\alpha_\nu|}$$

hol

$$\gamma(|\alpha_\nu|) = \frac{|a_0\alpha_\nu|^{p-1}}{(p-1)!}\left[|a_0|^{n-1}(|a_0|\,|\alpha_\nu|^n+|a_1|\,|\alpha_\nu|^{n-1}+\cdots+|a_n|)\right]^p.$$

Ha β alatt az α_ν-k abszolut értékei közül a legnagyobbat értjük, akkor

$$\gamma(|\alpha_\nu|)\leqq\gamma(\beta)=\frac{|a_0|^{p-1}\beta^{p-1}}{(p-1)!}\left[|a_0|^{n-1}(|a_0|\beta^n+|a_1|\beta^{n-1}+\cdots+|a_n|)\right]^p.$$

Legyen továbbá rövidség kedvéért

$$K=|a_0|^{n-1}(|a_0|\beta^n+|a_1|\beta^{n-1}+\cdots+|a_n|)$$

és

$$k=|a_0|^n\beta(|a_0|\beta^n+|a_1|\beta^{n-1}+\cdots+|a_n|),$$

úgy hogy

$$\gamma(|\alpha_\nu|)\leqq\frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!},$$

akkor a (13) alatti egyenlőtlenség folytán

$$|e^{\alpha_\nu}G(0)-G(\alpha_\nu)|<\frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!}e^{|\alpha_\nu|}$$

és innen

$$\left|G(0)\sum_{\nu=1}^{n}e^{\alpha_\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}G(\alpha_\nu)\right|<\frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!}\sum_{\nu=1}^{n}e^{|\alpha_\nu|}$$

Itt a bal oldalon ε abszolut értéke áll, a jobb oldalon pedig oly kifejezés, melynek értéke tetszőlegesen kicsinynyé tehető, ha csak p-t eléggé nagynak választjuk. Egyenlőtlenségünk értelmében tehát ε abszolut értéke csakugyan tetszőlegesen kicsinynyé tehető.

A (11) alatti összegről és ε-ról mondottak szerint a (12) alatti egyenlőség jobb oldalának mindig a zérustól külömböző értéke lesz, ha csak p-t eléggé nagynak választjuk. Ennélfogva ugyanott a bal oldal második tényezője, mely a (8) alatti szorzattal egyenlő, sem lehet zérus. *Tehát π nem lehet algebrai szám.*

Történeti áttekintésünkben eljutottunk a legrégibb reánk maradt emléktől a legujabb mozgalmakig. Bárha soraimmal sikerült volna tiszteletet gerjesztenem a multnak eredményei és érdeket a jelen munkálkodása iránt.

Kürschák József.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Kis légnyomások megméréséről. A levegő nyomásának csökkenését a légszivattyúban rendesen kurtitott barometerrel, az u. n. manometer csővel mérik. Ezzel a készülékkel a nyomás legjobb esetben is legfölebb 0,1 mm. pontossággal mérhető.

A légszivattyúkkal elérhető nyomásokat gyakran csak nagyjából megbecsülik. Igy tudva van, hogy a radiometer 0,04 mm. nyomás alatt élénkebb forgásba jön a fény behatása alatt; a CROOKES-féle tünemény 0,01 mm.; a levegő spectruma 0,1 mm. nyomásnál áll elő legélesebben. Ha tehát valamely szivattyúval ilyen csöveket összekötünk, akkor e tünemények bekövetkezéséből a nyomás nagyságára vonhatunk következtetést.

Ha 0,1 mm. légnyomásnál kisebb, például 0,01, 0,001, sőt 0,00001 mm. nyomásokat kell mérni, akkor más szerkezetű manometerek jönnek alkalmazásba.

Az elv, melyen az ilyen manometerek szerkesztése alapul, 1832-ből ARAGO és KUPFFER-től származik. Ugyanezen elven szerkesztette Mc. LEOD* amerikai fizikus a róla nevezett manometerét.

A Mc. LEOD-féle *manometer lényege abban áll, hogy vele ismert térfogatú és nagy ritkitású levegő, ugyancsak ismert, de sokkal kisebb térfogatba szoríttatik össze, mikor is a vele közlekedő csőben a nyomás annyiszor nagyobbnak mutatkozik, ahányszorosan előbbi térfogata összeszoríttatott.*

Az ábrában egy SCHULLER-féle ** szivattyú fő testrésze látható, olyan alakban, hogy az egyszersmind Mc. LEOD-féle manometert képez, mellyel a nyomás 0,00001 milliméterig mérhető.

Az itt feltüntetett változtatást abból a czélból tettem az eredeti SCHULLER-féle önműködő higanyos légszivattyún, hogy vele magának a szivattyúnak ritkító képessége meghatározható legyen.

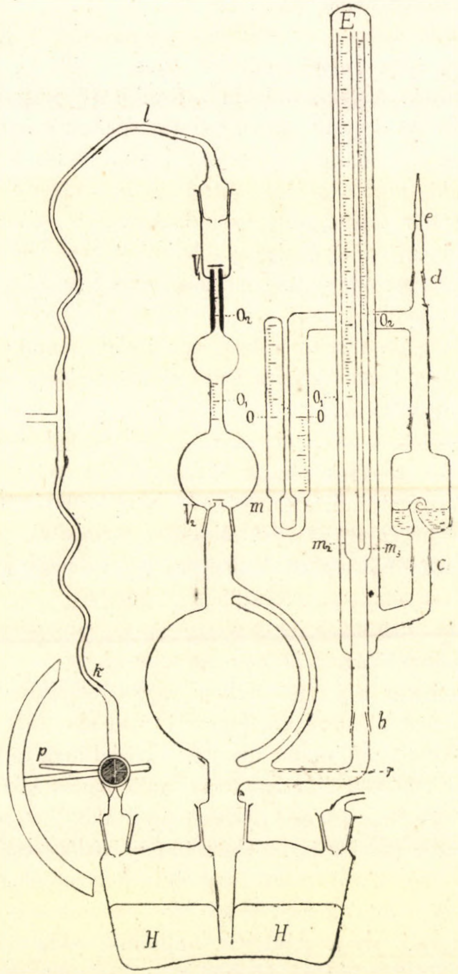
---

* Phil. Mag. 4. XLVIII. p. 110, 1874.

** Közölve a M. T. Akad. Ért. a term. tud. köréből. XI. k. 8. szám és Wied. Ann. Bd. 13. S. 528.

A szivattyú főrészei a következők:

Alul, mint a rajzon látható, egy 3 nyakú erős falu Woulf-féle palaczk van, melynek nyílásaiba 3 köszörült dugó illik. A dugók közül a bal-



oldalon levőre 3 furásu csap van forrasztva, a csap fejére pedig egy kar segélyével fém köriv van ragasztva. A csap 2 szára vékonyra van kihúzva és pedig ezek közül a vízszintes szárnak olyan kicsi a nyílása, hogy rajta a levegő csak lassú áramban hatolhat keresztül a nagy palaczkba. A jobboldali beköszörült dugót a készülék könnyű megérthetése szempontjából képzeljük teljesen bezártnak. Ez a rész a teljesen felszerelt készüléknél a regulátorhoz vezet, melyet itt egyszerűség okáért elhagyunk. A palaczk középső nyilásába a Mc. Leod-féle manometerrel fölszerelt szivattyú van jól záró köszörüléssel beillesztve.

A G golyó felső szárán, valamint az erre reá csiszolt kettős golyóval ellátott csőrészleten felfelé nyíló és lefelé teljesen záró V_1 V_2 kis üveglapból álló szelepek ülnek. A teke oldalán, a b-vel jelölt köszörülésen egy hoszszabb cső ül, melybe egy U alakú cső van forrasztva. Ez utóbbinak egyik ága, m_2 4 mm. — a másik ág, az m_3, 1 mm. belső átmérőjű. Maga az E cső arra való, hogy a golyókban fel-alá járó higany ne mehessen be a c köszörülésen ülő szárítóba, s ezen keresztül a szivattyúzott részekbe. (Az E cső a palaczkban levő higany felszinétől 80—85 cm. magasságban végződik, s így a barometer állásnál magasabb.) Az U alakú cső két szára felül az E csőbe nyílik.

A tömény kénsavat rejtő szárító egy rövid manometerrel közlekedik. Az e cső arra való, hogy a kiszivattyúzandó üvegedény, például a Geissler-féle cső, reá forrasztassék.

A Mc. Leold-féle manometer szerkesztése czéljából — alkalmazandó a fentebbi elvet, — az egyes részek térfogatát a következőkép állapítottam meg. A nagy üveggolyó űrtartalma egészen v_1 szelepig 1000 cm^3-től v_1-től O_1-ig 1 cm^3, v_1-től O_2-ig 0,1 cm^3. Mindezen térfogatok pontosan mérlegelt higany segítségével határoztattak meg. Igy tehát a nagy golyó térfogatának 0,001 ill. 0,0001 része van a készüléken kijelölve.

Az O_1 és O_2 vonásokkal jelölt vízszín az E csőbe zárt manometer megfelelő keresztmetszetű ágain is meg van jelölve.

Ez a manometer a jelen esetben 0,00001 millimeter nyomás mérésére is alkalmazható. Utóbbi esetben 0·1 mm-nyi közt kell leolvasnunk, 1 mm. pedig 0,0001 millimeter nyomásnak felel meg rajta.

Hogy az így elkészült manometerrel való bánás könnyen meg legyen érthető, képzeljük hogy a k és l nyílások egy T alakú cső révén közlekednek. Fogjunk be ezen cső közös oldalszárán egy vízlégszivattyút, vagy bármiféle szivattyút s legyen a 3 furatú csap olyan helyzetben, hogy a p kis nyíláson át a palaczk a külső levegővel közlekedjék, mikor is K nyílást a csap a palaczktól elzárja. Ha a szivattyú működik, akkor a nagy golyóban, mert l-nél ritkítunk, a higany egészen v_1 szelepig felemelkedik s a levegőt maga előtt kitolja.

Ha most a 3 fúratú csapot elfordítjuk, a p nyílás bezárul, K pedig a palaczkkal összeköttetésbe jön, a szivattyú a benne levő levegőt szivatytyúzni kezdi, s ennek következtében a golyóban levő higany leesik. Ugyde v_1 v_2 szelepek lefelé zárván, a tekében Toricceli-féle űr keletkezik, melybe, mihelyt a higany r pontig leesett, az oldalcsövön át a ritkítandó térből beömlik a levegő : tehát a ritkítás megindul. A csapot újra elfordítván, a higany újra felemelkedik, s kihajtja a szelepen keresztül a golyóba beáramlott levegőt. Ez a játék folyton ismétlődik. A csap forgatását a SCHULLER szivattyúnál egy igen elmés és egyszerű regulator eszközli.*

Ha már most a ritkítás fokát mérni akarjuk, a higanyt csak a nagy golyó felett levő O_1 ill. O_2 vonásig hagyjuk felemelkedni, — a mi a csap lassú, óvatos elfordításával igen könnyen elérhető — és a jobboldali csöveken az O_1 vagy O_2 vonás felett millimeterekben olvassuk le a nyomás nagyságát. Az m_1 ill. m_2 ágon leolvasott 1 mm. 0,001 s ill. 0,0001 mm. nyomást jelent. Ha a leolvasás 0,1 mm. pontosságú, a nyomás is megfelelően kisebb.

A mérés alatt v_1 szelepnek okvetlen zárva kell lennie, különben a mérés hasznavehetetlen. A kapilláris hatásokból eredő hiba azáltal van kizárva, hogy a nagy teke felett levő O_1 és O_2 szűk csövek az ugyanolyan keresztmetszetű m_2 és m_3 csövekből vannak levágva.

Ilyen mérőeszköz segélyével a SCHULLER-féle szivattyú működési képességére vonatkozólag a következő adatokat találtam :

Két egyforma szivattyút vizsgálván, az egyikkel 57 szívás után a ritkítás határa 0,00015 mm., a másiknál 71 szivás után a nyomás 0,00003 mm. volt a mi 0,000005 ill. 0,0000025 légköri nyomást jelent.

A szivattyúk egyike a Stuttgarti polytechnikumon HELL tr. tulajdona, másika laboratoriumomban van felállítva.

Meg kell még jegyeznem, hogy az ilyen módon mért nyomások csak *partiális nyomások*, mert csak a kiszivattyúzott térben levő levegő nyomását mutatják, ellenben a szivattyú minden részét betöltő telitett higanygőz nyomását nem vagyunk képesek ezen eljárással megmérni, még akkor sem, ha absorbeáló anyagokat alkalmazunk, mivel a higanygőzt azokkal teljesen elnyeletni még eddig nem sikerült. BESSEL-HAGEN pedig kimutatta, hogy a higanygőz nyomása ily körülmények között 20°-nál még mindig 0,2 mm.-t teszen ki.

Dr. Kiss Károly.

---

* L. i. h.

A Mathematikai és Physikai Társulat második rendes közgyűlése.

A f. é. május hó 12-re hirdetett közgyűlés alkalmából a társulati tagok d. e. 9 órakor összegyűlvén, b. Eötvös Lóránd elnök melegen üdvözli a szép számban megjelenteket. Kiemeli, hogy épen úgy mint az első közgyűlést, a mostanit is arra kivánjuk felhasználni, hogy egymástól tanuljunk s egymás társaságában néhány kellemes órát töltsünk s ekként munkakedvünket kölcsönösen fokozzuk s a társulati összetartást szilárdítsuk. Külön is üdvözölvén a szép számban megjelent vidéki tagtársakat, felkéri Dr. Klupáthy Jenő r. tagot, hogy a közgyűlés alkalmára hirdetett előadását megkezdeni szíveskedjék.

Dr. Klupáthy J. az *állandó elektromos áram méréséről* tárgyaló előadását 9 órakor megkezdi; előadása, leszámítván az üdülésre szánt $^1/_2$ órai időt, $12^1/_2$ óráig tartott.

Előadását, mely különösen a tanítás szempontjából fontos, egész terjedelmében fogjuk közölni.

*

A társulat tagjai d. u. 3 órakor az *Első Magyar Villamossági Részvény Társulat* középponti telepén találkoztak s ennek beható megszemlélése után az *Általános Villamossági Részvény Társulat* telepére mentek át.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

B. Eötvös Lóránd elnök a közgyűlést a következő szavakkal nyitja meg:

Tisztelt Tagtársaim!

Megalakulásunk óta ez a második rendes közgyűlés, a melyen Társulatunk ügyeit nyilvánosan fogjuk megbeszélni. Tavalyi összejövetelünk alkalmával, mely mindegyikünk emlékezetében, de különösen az enyémben, mint egy kedves és jó kezdet áll elénk, ezen része összejövetelünknek, a közgyűlési tárgyalás, lehetőleg rövid volt és én azt hiszem, rövid lesz a mai tárgyalásunk is, a mint rövidek lesznek a jövendőben is, mert én azt gondolom, hogy mi nem ülésekben való együttes tanácskozásokban, hanem mindannyian a magunk munkájával igyekezünk előmozdítani közös czélunkat, mely nem más, mint hogy kedvelt tárgyainkat: a mathematikát és a physikát a magunk örömére, hazánk tudományosságanak és iskoláinak hasznára tőlünk telhetőleg míveljük s ebben egymást támogassuk.

Összejövetelünknek az is a czélja, hogy évenként legalább egyszer kezet szoríthassunk, egymástól tanuljunk s egymás lelkesedéséből a magunkét tápláljuk.

Titkárunk jelentésében el fogja mondani mindazt, a mi fontos dolog Társulatunk második évében történt, a mik között, nem kétlem, lesznek olyan dolgok is, melyek Társulatunkra nézve kedvezők és haladását tüntetik fel.

De én is akarok két örvendetes jelenséget megemlíteni, a melyekből Társulatunk felvirágoztatására következtethetünk.

Az egyik, a miről a társulat ügyvivő titkára részletesebben fog jelentést tenni, hogy eddigi eljárásunk és működésünk már is bizalmat keltett a Társulat munkaképessége iránt a kivülállók körében is. Meg fogja említeni a minket megtisztelő megbizást, melyet a nagyméltóságú vallás- és közoktatásügyi ministeriumtól nyertünk, midőn megbizott, hogy a milleniumi kiállításra physikai mintagyűjteményt állítsunk össze. Ez az eszme, melyet mi már előbb is felvetettünk, most meg fog valósulhatni a kormánytól igért támogatás mellett és büszkeségünkre válhatik, hogy Társulatunk fiatal, zsenge korában ily megtiszteltetésben részesültünk.

A második eseményről a titkári jelentés nem fog beszélni, mert arról a titkár hivatalosan egyelőre értesítve nincsen. Örömmel jelentem, t. Tagtársaim, hogy a múlt év folyamán a Math. és Phys. Társulat jelentékenyebb alapítvány birtokába jutott.

A természettudományok lelkes barátja, néhai báró Majthényi Ottó, kit a társulat tagjai közül sokan mint tanulótársukat ismertek akkor, midőn már teljes férfikorában az egyetemi előadások látogatására adta magát, s különösen a mathematikai és physikai tárgyakat tanulta, művelte nagy előszeretettel. Ez a mi buzgó szaktársunk egy végrendeletet hagyott hátra, melyben vagyonának nagy részét tudományos, kulturális és jótékony czélokra hagyta.

Úgy rendelkezett, hogy a hagyaték mirefordítása és felosztása iránt a végrendeletben megnevezett barátjai (báró Podmaniczky Frigyes, báró Lipthay Béla, Than Károly és báró Eötvös Loránd) rendelkezzenek. Ezen végrendeleti hagyomány sorsa, mint sok másé, az volt, hogy perrel támadtatott meg s az eredetileg nagynak contemplált adomány kicsiny összegre zsugorodott. 13,500 forint volt az összeg, mely a megkötött egyezkedés után megmaradt alapítványi czélokra ez előtt úgy másfél esztendővel és melyről az örökhagyónak barátai rendelkezhettek. Ezen határozatnak alkalmazkodnia kellett a végrendelet ama pontjához, hogy egyenlő részekben tudományos, kulturalis és jótékony czélokra fordíttassék. Ezen tekintetből 3 egyenlő részre osztották és kimondották, hogy a kiosztás akkor történjék meg, midőn az összeg 15,000-re szaporodott, a mi a közel jövőben, még ez év folyamán meg is fog történni. Ebből a 15000 frtból a tudományos czélra szánt harmadot a megbizott férfiak a Mathematikai és Physikai Társulatnak adták, azt tartván szem előtt, hogy ezen tudományok azok, a melyekkel az örökhagyó legszívesebben foglalkozott s abban a meggyőződésben, hogy az ő szellemében intézkedtek.

Ezen 5000 frtos alapítvány előttünk becses lesz, mert nemcsak javát fogjuk élvezni, de szép emléket is fogunk kiséretében megőrizni: Majthényi emlékét, ki a tudomány igaz barátja és művelője volt. Ezen hagyomány biztosítás társulatunk fennállására s — vonatkozással az előbb említett megbizásra is — azt mondhatom, hogy ebben az évben egyszerre munkát és kenyeret kaptunk.

Hogyha a fennállásról szólunk, ne vegyük a szó szoros értelmében, hogy ez pl. megállás lenne, hanem legyen Társulatunk vezérelve, melyet mindig követni fog: a haladás és pedig nem valamelyes külső dísz dolgában — melyre nem vágyunk, — hanem minden egyes tag haladása.

Ezen kivánsággal újra üdvözlöm t. Tagtársaimat s a második közgyűlést ezennel megnyitottnak nyilvánítom.

Elnök bemutatja a múlt közgyűlés Farkas Gyula és Jedlik Ányos társulati tagoktól hitelesített jegyzőkönyvét. Minthogy a jegyzőkönyv a *Math. és Phys. Lapok* II. kötetének 209. és rákövetkező lapjain egész terjedelmében közöltetett, a közgyűlés felolvasottnak tekinti.

Ezzel kapcsolatban Elnök a következő szavakat intézi a közgyűléshez: Társulatunk első rendes tagja, Jedlik Ányos, ki az első közgyűlésen valamennyink örömére fáradhatatlanul részt vett minden előadásunkon, ülésünkön és szórakozásunkban, nagy sajnálatunkra ez alkalommal nincsen közöttünk. Sajnáljuk őszintén, valamennyien, hogy ezen legérdemesebb tagtársunk jelenlétének ezúttal nem örvendhetünk; de legalább az a megnyugvásunk van, hogy nem komoly baj tartotta vissza az utazástól, mely baj miatt a M. T. Akadémia nagygyűlésén, melyen különben mindig megjelent volt, sem vehetett részt. Nagy korához képest jól érzi magát, csupán csak a járás esik neki egy idő óta nehezére, de a baj múló természetű s remélhető, hogy jövő közgyűlésünkön ismét körünkben üdvözölhetjük. Azt hiszem, hogy a jelenlevők mindegyikének kivánságát fejezem ki, midőn azt indítványozom, hogy a közgyűlés nagyérdemű tudósunkat, első tagtársunkat üdvözöljük, mély tiszteletünknek és szeretetünknek jegyzőkönyvünkben is kifejezést adjunk.

(A közgyűlés zajos éljenzéssel határozattá emelte az indítványt.)

A II. közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítésére elnök Fényes Dezső és Hlatky Miklós tagtárs urakat kérte fel.

2. Titkári jelentés, Bartoniek Gézától.

Midőn a Math. és Phys. Társulat működésének II. évéről jelentésemet előterjeszteni bátorkodom, mindössze néhány perczre kell becses türelmüket fárasztanom.

Jelentésem azért lehet rövid, mert a társulat működése t. Tagtársaink előtt ismeretes, mert azon mederben folyt, melyet az I. közgyűlés helyesnek ismert el.

A társulat működésének legfontosabb eszközei a rendes üléseken tartott előadások s a folyóirat. Rendes ülést a társulat 11-et tartott, melyen 20 tagtársunk 21 külömböző tárgyról értekezett. 20 előadó, 21 előadási tárgy, nem soknak látszik az előadások egy évi cziklusában. Ámde tudvalevő dolog, hogy a statisztikai számok többféle magyarázatot tűrnek meg. Nem fogja keveselni ezt a számot az, a ki fontolóra veszi, hogy egyes előadóink szaktárgyuk mily terjedelmű részét ölelték fel aránylag rövid s épen ez okból nagy szellemi munka árán kidolgozott előadásukban: ellenkezőleg, nagy súlyt fog e számnak tulajdonítani. Nem tagadható azonban annak a nézetnek jogosultsága sem, mely előadásainkban nagyobb változatosságot, több élénkséget szeretne látni, egy-egy előadásunkon nem egy- vagy két nagyobb, hanem több apróbb tárgynak fejtegetését meghonosítani. Ha erre a mindnyájunk előtt helyesnek tartott útra csak habozva térünk, ezt leginkább a kezdőket — pedig azok vagyunk — jellemző túlbuzgalomnak tulajdonítható. Megnyugtató, hogy a jó akarat s a képesség a társulat tagjaiban erre is meg van, a hozzá szükséges tapasztalatot pedig épen a működés első évei fogják megadni.

Az ülések ezen társulati évben is élénk látogatottságnak örvendtek, bizonyságául annak, hogy az érdeklődés nem csökkent, s a társulati összetartás az idő folyamán lazulást nem szenvedett.

Az előadások szövege folyóiratunkban nagy részt megjelent, a többi pedig legközelebb meg fog jelenni s így azon t. tagtársaink hasznára és ítélete alá is esik, kik rendes üléseinken részt nem vehettek.

A Math. és Phys. Lapok II. kötete $27\frac{1}{2}$ iven jelent meg s összesen 47 tagtársunk közleményeit foglalja magában. Mint különösen örvendetes tényt legyen szabad kiemelnem, hogy a szerzők között ezúttal is sok új nevet találunk, mely társulatunk folyóirata révén került az irodalomba, ösztönözvén szerzőjét s többi tagtársainkat további munkálkodásra. — Megvallom, az egyes füzetek összeállítása, a mióta a választmány a szerkesztőket arra kötelezte, hogy a társulat pénzügyeire való tekintetből a füzetek három ívnél nagyobb terjedelműek ne legyenek, nem ritkán nehézséggel járt. Egész rovatokat voltunk kénytelenek egyes füzetekben a takarékosságnak áldozatul hozni s nehezen várjuk az időt, hogy az I. évfolyamban kipróbált négy íves füzetre térhessünk át, melyben összes rovataink helyet találhatnak s lehetővé válik, hogy mindig több és több munkaerőt vonhassunk be a közös működésre.

A választmány a II. társulati évben öt ülést tartott. — A május 26-án tartott ülésen, napirenden lévén az I. közgyűlés után teendők megbeszélése, a választmány egybehangzó véleménye az volt, hogy a közgyűlés ezentúl is lehetőleg előadásokkal kapcsolatos legyen, hogy a vidékről felránduló t. Tagtársak fáradságukért kárpótoltassanak.

A legnagyobb nehézséget az időnek olyan megválasztása okozza, mely a legtöbb Tagtársunk érdekének és kivánságának legjobban megfelel. Nem is tudott a választmány pontosabb időmeghatározást tenni, mint a mit az alapszabályok mondanak, hogy t. i. a közgyűlés húsvét táján tartassék. Az egyetlen módnak, mely a nehézséget megszünteti, az látszik, melyet m. tisztelt Elnökünk jelölt volt meg. Az ő eszméje szerint a közgyűlésnek nem egy-két, hanem több, pl. nyolcz napra kellene terjednie. Ha ez idő alatt naponkint legfölebb két előadás tartatnék, máris lehetséges volna, hogy t. tagtársaink a szaktárgyak egyes részleteiről, az azokban tett haladásról egész cursusokat hallgathassanak meg s azonfelül még egyes hasznos műveleteket, pl. üvegfuvást, fémesztergályozást s több effélét elsajátíthassanak. M. t. Elnökünk igen kivánatosnak jelezte azt is, hogy a közgyűlés ne mindig Budapesten, hanem felváltva a fővárosban s a vidéken tartassék meg és pedig oly czélzattal, hogy a nagyobb városokban inkább a tudományos munka, kisebb helyeken pedig a tudományos törekvéseket hathatósan előmozdító társas szellem adja meg a közgyűlés szinezetét.

Kivánatos, hogy az eszméket t. Tagtársaink megszívleljék s ha helyesnek itélik, valósításukhoz maguk részéről hozzájáruljanak. — Természetes, a kérdésnek pénzügyi oldala van, melyet azonban egyelőre még nem tárgyalhatunk.

Ugyanez ülésén a választmány egy másik, igen fontos határozatot hozott. Megállapította, mily módon kiván a milleniumi kiállításon megjelenni. M. t. Elnökünk indítványára azt határozta a választmány, hogy a kiállításon a közép-iskola teljes physikai felszerelésével kiván megjelenni. A társulat czélja levén a tudományt a tanítás szolgálatába vinni, szempontunkból s a kiállítás igényeinek is a legmegfelelőbbnek mutatkozik, ha magunk részéről elkövetünk mindent arra nézve, hogy a jelenleg elterjedt, egységes terv és czél nélkül létrejött, inkább a tanszerkészítő s a tanszerkereskedő, a legkülömbözőbb korok izlését és nézetét visszatükröztető készülékek helyébe a tudós tanítóét propagáljuk, a ki a tanítás s a tudomány követelményeit egyenlő mértékben tartja szemmel. Az ilyen gyűjtemény jó része nem kész, könnyen összevásárolható készülékekből fog létrejönni, de olyanokból, melyek a megállapított elveknek megfelelően újra lesznek készítendők. Egyik főelvünk az, hogy a gyűjtemény lehetőleg kevés, de csakis jó és sokoldalúan kihasználható darabokból állíttassék össze.

Fiatal társulatunk sikerének tekinthetjük, hogy a vallás- és közoktatásügyi minisztérium 1894. febr. 27-én 8054. sz. a. kelt leiratával társulatunkat egy ilyen minimális minta-gyűjteménynek a kiállítás számára való elkészítésére felszólította s a szükséges pénzösszeget rendelkezésünkre bocsátotta. Határozatunk ezáltal könnyebben végrehajthatóvá s egyúttal mélyen kihatóvá lett, mert ez alapon biztosan várható, hogy a megbizás révén a Math. és Phys. Társulat tagjainak közös működéséből eredő gyűjtemény a tanintézeteinkbe való bevonulásának útja s ezzel értékesűlésének legjobb módja megnyittatott. Már most a társulat választmányán a sor, hogy a joggal hozzákötött várakozásoknak s a beléje helyezett bizalomnak teljes mértékben megfeleljen.

Egy másik, társulatunkat igen megtisztelő felszólítást vettünk a *Congrès international de bibliographie des siences mathématiques* intézőségétől. A mathematikusok ezen congressusa Poincaré elnöklete alatt elhatározta egy, a mathematikai munkákat felölelő bibliografia kiadását. A magyar szerzőktől eredő munkák összeállítására a congressus társulatunkat szólította fel, melynek választmánya Rados, Tőtössy, Kürschák, Tangl és Kopp tagtársakból álló bizottságot küldött ki a munkálat elkészítésére. A bizottság a reája bízott munkát nagy szorgalommal elvégezte, hálára kötelezvén vele társulatunkat, sőt a magyar tudományt is. Munkálata biztosíték arra nézve, hogy a magyar tudósok munkássága — legyen az kicsi, vagy nagy — igazságosan lesz ezen nagyfontosságú műbe bejegyezve. Legyen szabad hozzátennem, hogy Rados titkár-társam közbelépésére a bizottság magyar szempontból lényeges változtatást tett tervezetén, midőn a munkálat egyik fejezetének czímeül *Géometrie de Lobatschewsky* helyett *Géom. de Bólyai et Lobatschewsky* czímet fogadta el, elismervén ezzel a magyar mathematikusnak a geometria ezen ágának megalkotása körül szerzett nagy érdemeit.

Legyen szabad ezek után jelentenem, hogy a társulatnak mai napon 393 tagja van, folyóiratának pedig 32 előfizetője. Tagtársaink buzgóságára és a társulathoz való hűségére következtethetünk abból, hogy — igen kis kivétellel — tagsági dijaikat rendesen küldik be s ezzel módot adnak a folyóirat fentartására.

Fájdalom, szomorú kötelességet is kell teljesítenem. Tudomásom szerint négy tagtársunkat, névszerint Czógler A., Ignics Boldizsár, Szabó Ferencz és Csernus László urakat ragadta el tőlünk a halál. Valamennyiök veszteség társulatunkra, de azt hiszem nem vétek a köteles kegyelet ellenében, midőn Czógler tagtársunk halálát ezen felül társulatunkat ért nagy csapásnak is mondom. Mi pótolja veszteségünket, melyet az ő nagy tudásában, páratlan szorgalmában, önzetlen lelkesedésében s — tegyük hozzá — hű barátságában mindenkorra elveszítettünk? Folyóiratunk egy gyászszegélyű lapján van fájdalmunk feljegyezve, de veszteségünket folyóiratunknak még ezután megjelenendő köteteibe beillesztett üres, fehér lapok tudnák csak méltóan és igazán kifejezni!

Végül még működésünk egyik lényeges tényezőjéről, bevételeinkről kell megemlékeznem. Fő bevételünk a tagsági díjakból van, mely az előfizetési díjakkal együtt mintegy 1400 frtot tesz ki; erre az összegre úgy látszik állandóan számíthatunk, sőt emelkedésére is reménykedhetünk. Annyira azonban sohasem fog emelkedhetni, hogy társulatunk költséges folyóiratát belőle fentarthatnók. Nagy hálával tartozunk a M. T. Akadémiának, mely ez évben is 1000 frttal segélyezte társulatunkat, nem kötvén semmi feltételt a segélyezéshez, bízván abban, hogy társulatunk, ha nem is míveli, de legalább előkészíti a neki kihasított foltján a talajt, melyen az Akadémia munkálkodik, s melyen a magyar tudományt és kultúrát felvirágoztatni, a nemzet javára gyümölcsözővé tenni szent feladata és egyetlen törekvése.

Ha t. Tagtársaink füzeteinket olykor soványaknak s ennélfogva nem elég tartalmasaknak találják, ne vádoljanak minket addig, míg az eredményt a folyóirat kiadására fordítható költségen meg nem mérték.

Reméljük, hogy idővel kedvezőbbé alakul mérlegünk s akkor szigorúbb elbirálást kérünk.

Hogy azonban az itélet ekkor se legyen kedvezőtlen, a társulat minden egyes tagjának kell buzgólkodnia. Ki milyen hatáskört választott magának a társulati működés sokféle ágazataiban, törekedjék azt úgy betölteni, mintha csupán csak tőle függne a társulat felvirágzása, mintha az ő dolgozata a folyóiratot színvonalon, mintha az ő forintja tartaná a pénztár mérlegét egyensúlyban.

Kérem a t. közgyűlést, méltóztassék jelentésemet tudomásul venni.

A közgyűlés a titkári jelentést tudomásul veszi.

3. A pénztárvizsgáló bizottságok jelentése.

A közgyűlés részéről kiküldött pénztárvizsgáló bizottság a következő jelentést adja:

T. közgyűlés! Alulirottak a Mathematikai és Physikai Társulat 1893. évi közgyűlésének megbizásából az első társulati év — mely 1892. év végeig terjed — számadásait megvizsgáltuk és rendben találtuk. Budapest, 1894. május 10-én. *Balog Mór, Bogyó Samu, Müller József.*

A választmány részéről kiküldött pénztárvizsgáló bizottság jelentése így hangzik:

Tekintetes Választmány! A tekintetes választmánynak f. évi április 5-én tartott üléséből kapott megbizatásunkban eljárván, május hó 5-én megvizsgáltuk a Mathem. és Physikai Társulat 1893. évi számadásait és azokat 2727 frt 81 kr. bevétellel és 2430 frt 96 kr. kiadással vagyis 296 frt 85 kr. pénztármaradványnyal rendben találtuk. A kiadások mind okmányokkal igazolva vannak. A bevételeket illetőleg, épen úgy mint más ilynemű társaságoknál, az ellenőrzésnek más módja nincsen, minthogy minden tag kisérje figyelemmel a folyóirat borítékán levő nyugtatványozást. Ezeknél fogva indítványozzuk, hogy a választmány a maga részéről adja meg a pénztárnoknak a felmentvényt. Budapesten, 1894. május hó 5-én. *Mauritz Rezső, Wagner Alajos.*

A tőkésített pártoló és örökítő tagsági dijak összege 1893. évi decz. 31-én 950 frt.

A közgyűlés a jelentéseket tudomásul veszi, a bizottságoknak fáradozásukért köszönetet mond. — A közgyűlés a maga részéről a pénztár megvizsgálására Balog Mór, Bogyó Samu és Müller József urakat küldi ki azzal a kéréssel, hogy a pénztárvizsgálatot ez alkalommal egészen a folyó év végeig (1894. deczember 31.) megejteni sziveskedjenek.

4. A Mathematikai és Physikai Társulat költségelőirányzata az 1894. évre.

Bevételek.

1. Tagsági díjakból	1250	forint
2. Előfizetésekből	150	«
3. Hátralékokból	80	«
4. Hirdetésért	80	«
5. Kamatokból	40	«
6. A M. T. Akadémia segélye	1000	«
	2600	forint

Kiadások.

1. A Math. Phys. Lapok kiadása	2000	forint
2. Expeditio	90	«
3. Előadások költsége	72	«
4. Postaköltség	36	«
5. Irodai költség	10	«
6. Oklevélirás	6	«
7. A pénztárnok tiszteletdíja	50	«
8. Szolgálatokért	40	«
9. A nyomdai tartozás törlesztésére	296	«
	2600	forint

5. Választmányi tagok választása.

Az alapszabályok 12. §-ának rendelkezése szerint kisorsolt választmányi tagok helyébe a következők választattak meg:

Fröhlich Izidor, Klupáthy Jenő, Mauritz Rezső és Tőtössy Béla.

6. Inditványok.

Titkár bemutatja Szily Kálmán vál. tagnak a választmányhoz beadott indítványát, mely következő:

Bólyai János sírja teljes enyészetnek indúlt: emlék nem díszíti, sőt már halom sem jelöli s csak egyesek élő emlékezete őrzi a nagy magyar mathematikus hamvainak pihenőhelyét. Rendezzen gyüjtést a társulat tagjai között Bólyai sírján emelendő szerény siremlék költségének födözésére.

A választmány az indítványt elfogadta s elhatározta, hogy az indítványt a közgyűlésnek is bemutatja.

Elnök saját részéről melegen ajánlja az indítványt s a gyüjtőivet a közgyűlés tagjainak.

A gyűjtés eredménye a Math. és Phys. Lapokban fog közzé tétetni.

*

Hlatky Miklós és Képessy Imre tagtárs uraknak az első közgyűlésen beadott indítványait a választmány elfogadásra nem ajánlja (L. a *Math. Phys. Lapok* II. köt. 218. és 288. l.).

*

Végül a titkár a választmány határozatából bemutatja a közgyűlésnek a Bibliographiai Bizottság jelentését, mely itt következik:

7. A bibliografiai bizottság jelentése.

Tisztelt választmány!

A párisi «Congrés international de bibliographie des sciences mathématiques» POINCARÉ elnöklete alatt elhatározta egy a mathematikai munkákat felölelő bibliografia kiadását a következő fontosabb elvek alapján:

«1. A munka magába foglalja az 1800-tól 1889-ig megjelent *önálló* mathematikai munkákat és dolgozatokat, (iskolai használatra való könyvek ki vannak zárva), valamint a mathematika történetének 1600-tól 1889-ig terjedő korszakára vonatkozó dolgozatokat.

2. 10—10 évenként pótló kötet jelenik meg.

3. A bibliografiából ki vannak zárva az oly művek, melyek eredeti eredményeket nem tartalmaznak, valamint a tankönyvek általában.

4. Az alkalmazott mathematikára vonatkozó munkák *csak annyiban említendők,* a mennyiben a *tiszta mathematikára* nézve is *becses* eredményeket tartalmaznak.

5. A különböző munkálatok csoportosíttatnak és felosztatnak osztályokra, alosztályokra, csoportokra, fejezetekre és alfejezetekre, melyek külömböző számok és betükkel jelöltetnek.

6. A nem franczia, német, angol, spanyol, olasz vagy latin munkák czímei franczia fordításban is közlendők.»

A magyar szerzőktől megjelent munkák, összeállítására a Congrés KÖNIG és RADOS tagtársainkat kérte fel, kiknek indítványára a tisztelt választmány egy KOPP, KÜRSCHÁK, RADOS, TANGL és TŐTÖSSY tagokból álló albizottságot küldött ki, mely a munkát el is végezte.

Mellékeljük az összeállított dolgozatok névsorát, melynek közlését a Math. és Phys. Lapokban kérjük, hogy a tisztelt tagtárs urak esetleges hiányokat pótolhassanak.*

Egyúttal van szerencsénk jelenteni, hogy a Congrés a neki beküldött összeállítást nagy munkájába felvette és hogy RADOS felszólítására az egyik alfejezet czímét, mely eredetileg «Géometrie de LOBATSCHEVSKI» nevet viselt, «Géometrie de LOBATSCHEVSKI et BÓLYAI»-ra változtatta.

Budapesten, 1894. ápril. 4-én.

Kopp Lajos	*Rados Gusztáv*
az albizottság jegyzője.	az albizottság elnöke.

*

A tárgysor elintéztetvén, elnök a közgyűlést berekeszti.

---

* Ezt az összeállítást Lapunk egyik legközelebbi számában közöljük. *Szerk.*

A közgyűlés után Harkányi Béla tagtársunk számos szebbnél szebb képet mutatott be vetitésben, melyeket Gothard Jenő tagtárs urral É-Amerikában tett utazásuk alkalmával ez utóbbi a nevezetesebb csillagvizsgáló intézetekről, valamint a Nemzeti Park páratlan szépségű tájairól való eredeti fölvételei után készített volt.

A napot közös vacsora fejezte be, melyen a beszéd fő tárgya a — legközelebbi közgyűlés volt.

*

Másnap Grúber Nándor kisérletezett az ő utasításai szerint átalakított universális dinamógéppel s még nehány más iskolai készüléket is mutatott be, melyeket a Calderoni czég volt szives rendelkezésünkre bocsátani.

A közgyülés tagjai még a Dr. Kiss Károly t. társ úr vezetése alatt álló üvegtechnikai intézetet is megtekintette, hol alkalma nyílt az üvegfúvás és köszörülés érdekesebb műveleteivel közvetlen szemléletből megismerkedni.

A Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai.

A választmány f. é. április hó 5-én tartott ülésén a Mathematikai és Physikai Társulat rendes tagjaiul a következőket választotta meg: *Soós Mihály* premontrei kanonok és tanár Csornán, (aj. *Schmidt Ág.* és *Bartoniek*); *Gidró Bonifácz* szt. Benedekrendi tanár Győrött, (aj. *Ábrahám* és *Récsei*); *Lendvay Hugó* gymn. tanár, (aj. *Ábrahám* és *Récsei*); *Skopál István* főreáliskolai tanár Székes-Fehérvárott (aj. *Rados* és *Tőtössy*); *Knoblauch Aladár* tanár Bpesten, (aj. *Csomóssy* és *Tangl*); *Kanitz Aristides* menny. és természettud. kari hallgató Kolozsvárt, (aj. *Farkas* és *Vályi*); *Dr. Anderkó Aurél* meteorologiai intézeti assistens Budapesten, (aj. *Tangl* és *Róna*); *Krónits Lénárd* tanár Bpesten, (aj. *Gruber* és *Tangl*); *Kirsch József* mechanikus Budapesten, (aj. *Süss* és *Tangl*); *Buchböck Gusztáv* tud. egyet. assistens, (aj. *Tangl* és *Bartoniek*); *Brandt József* plébános Temesvárott, (aj. *Rados* és *Tőtössy*); *Barkáts Mária* áll. fels. leányiskolai tanitónő Budapesten, (aj. *Fröhlich* és *Bartoniek*); *Nagy Dezső* műegyetemi tanár Budapesten (aj. *Rados* és *Bartoniek*).

JELÖLJÜK MEG BÓLYAI JÁNOS SIRJĂT?

Bólyai János síremlékére befolyt adományok első kimutatása.

Szily Kálmán (5 frt), b. Eötvös Loránd (10), Kőnig Gyula (10), Bogyó Samu (2), Kürschák József (2), Heller Ágost (1), Réthy Mór (10), Dr. Kiss Károly (1), Fröhlich Izidor (5), Rados Ignácz (2), Csillag Vilmos (1), Csopey László (1), Held Károly (1), Rados Gusztáv (3), Suták József (1), Beke Manó (1), Hornischek Henrik (1), Wittmann Ferencz (2), Klupáthy Jenő (2), Bein Károly (1), Kohányi Gyula (1), Gruber Nándor (1), Székely Károly (1), Fényes Dezső (2), Bodola Lajos (1), Balog Mór (1), Tangl Károly (1), Kövesligethy (1), Tőtössy Béla (3), Bélteky Albert (1), Kirchknopf András (1), Fraunhoffer Lajos (1), Osztrogonácz János (1), Hlatky Miklós (1), Koschowitz Gyula (2), Bartoniek Géza (1), Wagner Alajos (1), Szuppán Vilmos (1), Kleiszner Rezső (1), Kopp Lajos (2), Kiss Ernő János (1), Orbán Antal (1), Éberling József (1).

Az eddig befolyt összeg: 90 frt.

Az adományokat kérjük Dr. Kopp Lajos tanár (Budapest, IX. ker. Üllői-út 53.) czíme alatt beküldeni.

MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

HARMADIK ÉVFOLYAM

VI—VII. FÜZET. 1894 OKTÓBER—NOVEMBER

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894

TARTALOM

Lap

SKOPÁL ISTVÁN: Egy helyzetgeometriai tétel 257
VÁLYI GYULA: Desargues tantételének térbeli analogonjáról 264
RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez. (Negyedik és befejező közlemény ... 274
BEKE MANÓ: Az adjungált helyettesítések alkalmazása az adj. diff. egyenleteknél 286
BAUER MIHÁLY: A karakterisztikus egyenletek elméletéhez 293
Physikai szemle (A hőmérséklet mérése elektromos úton)... 299
A Math. és Phys. Társulat ünnepélyes ülése. (Az elnök üdvözlése. — A tanulók versenyén megitélt dijak kiosztása. — Dr. KLUPÁTHY előadása.) 321
A Math. és Phys. Társulat I. versenyén jutalmazott dolgozatok. (SEIDNER MIHÁLY és PAP PÁL dolgozatai.)... 316
Megoldott feladatok. (VLADÁR LAJOS, PRIVORSZKY ALAJOS, BAUER MIHÁLY és SUTÁK JÓZSEF uraktól.)... 324
Értesítő a Math. és Phys. Társulat előadásairól. (Dr. HOÓR: A villámhárítókról.) 333
A Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai 352

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalabb 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

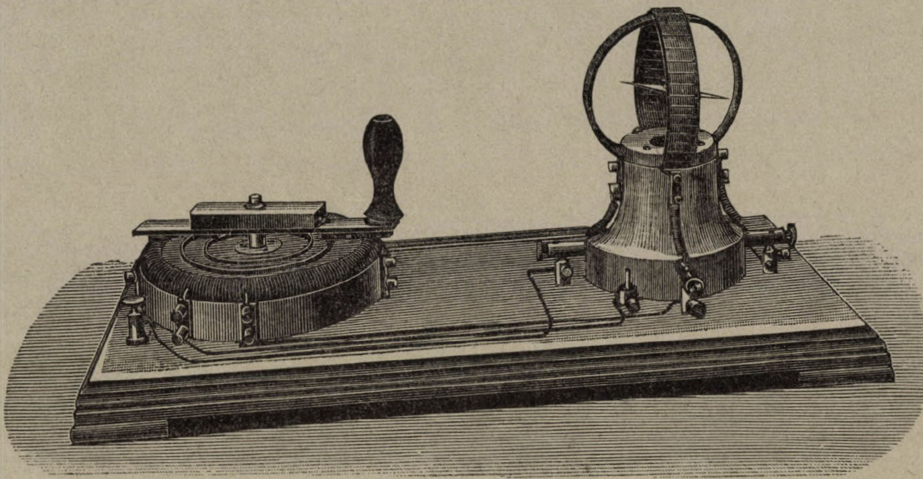
Társulati mondanivalók. A harmadik társulati év 1894. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czimére — legczélszerűbben a 1. füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *A múlt évről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért*, hogy a folyóirat költségeit fedezhessük. Az eddig teljesitett befizetéseket a következő füzetben nyugtáztatjuk.

Rendes ülések. A társulat rendes üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czimére **(VI. Bulyovszky-u. 16.)** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár **(VII., Csengery-u. 1)**, a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesitjük.

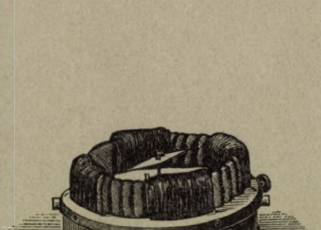
T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesitésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó tetemes kiadástól mentik fel.

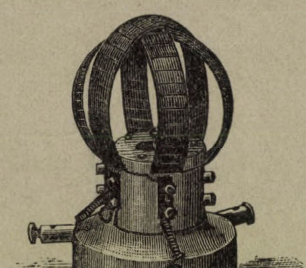


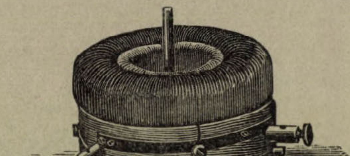
WEINHOLD-féle készülék

FORGÓ MÁGNESES TÉR ELŐÁLLITÁSÁRA.

A II. kötet 275. stb. oldalain ismertetett készülékeket (3., 8., 9. és 11. ábra) minden hozzávaló mellékkészülékkel teljesen felszerelve igen ajánlhatjuk a t. cz. tanár urak becses figyelmébe.







A teljes készülék ára legfinomabb kivitelben ***60 forint*** *loco Budapest. A készülék egyes részei külön is kaphatók méltányos árakon.*

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

EGY HELYZETGEOMETRIAI TÉTEL A TETRAÉDER ÉLEIRŐL.

1. Valamely egyágú (hiperbolikus) hiperboloid alkotói két rendszerbe oszlanak; az ugyanazon rendszerhez tartozó elemek nem metszik egymást azaz kitérő sugarak, ellenben az egyik rendszer bármely eleme metszi a másik rendszer összes elemeit. Az egyik rendszert pl. H-val, a másikat H'-vel jelölöm, míg magának a hiperboloidnak jelölésére bármelyik rendszer jelét veszem.

Legyen a H rendszer négy sugara: a, b, c, d; ezek a másik rendszer két x' és y' eleméből négy-négy pontot metszenek ki: az A_1, B_1, C_1, D_1, illetőleg A_2, B_2, C_2, D_2 pontokat. Feltéve, hogy A_1 és A_2 az a egyenesen, B_1 és B_2 a b-n stb. van, a két négyes pontsor projektív, azaz megfelelően képezett kettős viszonyaik egyenlők; képletben:

$$(A_1B_1C_1D) = (A_2B_2C_2D).$$

E kettős viszonyt, az a, b, c, d kitérő egyenesek kettős viszonyának is nevezem és $(abcd)$-vel jelölöm.

Ha még a négy egyenes bármelyike két pontja által volna meghatározva pl. $a = \overline{LM}$ és $b = \overline{NP}$, akkor a következőkben, felesleges jelek kikerülése végett, a szóban forgó kettős viszonyt még igy is irom:

$$(abcd) = (\overline{LM}\,\overline{NP}\,cd).$$

Ez előleges megjegyzések után nyilvánvaló, hogy négy kitérő egyenes harmonikus csoportot alkot, ha

$$(abcd) = -1.$$

Nyilvánvaló az is, hogy az a és b kitérő egyenesekre, mint konjugált párra nézve, a tér bármely harmadik, az előbbieket nem metsző c egyeneséhez a konjugált negyedik harmonikus d egyenes egyértelműen meghatározható.

A szerkesztés következőképen történhet:

Veszem az a, b, c egyenesek bármely két transzverzálisát, az x' és y' egyeneseket; az x' kimetszi az a, b, c egyenesekből rendre az A_1, B_1, C_1 pontokat, az y' az A_2, B_2, C_2 pontokat. Meghatározván a D_1 és D_2 pontokat úgy, hogy

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2) = -1$$

legyen, a keresett negyedik harmonikus egyenes a

$$\overline{D_1 D_2} = d$$

egyenes lesz.

2. Legyen most már egy valódi (nem degeneráló) tetraéder négy szögpontja

$$L, M, N, P$$

és legyen továbbá e oly egyenes, mely tetraéderünk egyik élét sem metszi.

A tetraéderen

$$\begin{matrix} \overline{LM}, & \overline{NP} \\ \overline{LN}, & \overline{MP} \\ \overline{LP}, & \overline{MN} \end{matrix}$$

három pár kitérő egyenes.

Ha mindegyik kitérő élpárra nézve meghatározom az e egyenessel konjugált negyedik harmonikust, akkor három egyenest kapok: f, g, h-t, melyekre nézve áll, hogy

$$(\overline{LM}\ \overline{NP}\ ef) = (\overline{LN}\ \overline{MP}\ eg) = (\overline{LP}\ \overline{MN}\ eh) = -1 \qquad \text{I.)}$$

Vizsgáljuk az így meghatározott f, g, h egyenesek közt fennálló kapcsolatot.

Az $\overline{LM}, \overline{NP}, e$ és f egy hiperboloid ugyanazon H_1 alkotórendszerének elemei, melynek másik alkotórendszere H_1'.

Ép úgy $\overline{LN}, \overline{MP}, e$ és g egy második hiperboloid H_2 rendszerének elemei; ennek másik alkotórendszere H_2'.

És végül $\overline{LP}, \overline{MN}, e$ és h elemei a H_3 rendszernek, e hiperboloid másik alkotórendszere H_3'.

Van tehát három hiperboloidunk, melyek mind az e egyenest és az L, M, N, P pontokat tartalmazzák.

3. Bebizonyítom, hogy az f, g, h egyenesek kitérők, azaz egyik sem metszi a másikat.

Felteszem, hogy pl. az f és g egymást bizonyos K pontban metszik. Ez közös pontja a H_1 és H_2 hiperboloidnak, és akkor ezen át még a H_1' és H_2' rendszerek egy-egy eleme, k_1' és k_2' halad, melyek a H_1, illetőleg H_2 alkotórendszerek összes elemeit metszik.

Mondjuk, hogy k_1' a H_1 rendszer LM, NP és e elemeit X_1, Y_1 és Z_1 pontokban, míg k_2' a H_2 rendszer LN, MP és e elemeit X_2, Y_2 és Z_2 pontokban metszi, akkor

$$(X_1 Y_1 Z_1 K) = (X_2 Y_2 Z_2 K) = -1.$$

A mint ebből látjuk, e két projektív négyes pontsornak egy megfelelő pontpárja a K-ban összeesik, tehát a két négyes pontsor pespektív. Ez annyit tesz, hogy $\overline{X_1 X_2}$, $\overline{Y_1 Y_2}$ és $\overline{Z_1 Z_2}$ egy ugyanazon O pontban találkoznak, a mely pont az e egyenesen van, mert

$$\overline{Z_1 Z_2} = e.$$

Mivel továbbá az $\overline{X_1 X_2}$ az $\overline{LM}$ és $\overline{LN}$ egyeneseket az X_1 illetőleg X_2 pontokban metszi, ez csak úgy lehetséges, hogy vagy

$$X_1 \equiv X_2 \equiv L$$

vagy hogy $\overline{X_1 X_2}$ az LMN síkban fekszik.

Az első esetben a k_1' és k_2' két közös ponttal bír, a mennyiben mindegyik tartalmazza a K és L pontot, de akkor

$$k_1' \equiv k_2'$$

és egyszersmind

$$Z_1 \equiv Z_2,$$

mert ez utóbbiak rajta vannak az e és a $k_1' \equiv k_2'$ egyeneseken.

De ha két projektív négyes pontsor három elempárja összeesik, a negyedik elempár is összeesik azaz

$$Y_1 \equiv Y_2 \equiv P.$$

Más szóval:

$$k_1' \equiv k_2' \equiv \overline{LP},$$

tehát az $\overline{LP}$ él metszené az e egyenest, a mi feltevéseinkkel ellenkezik.

A második esetben $\overline{X_1X_2}$ benne feküdnék az LMN síkban és X_1 az X_2-től különböző és így [mivel P nem fekszik az LMN síkban] egyszersmind Y_1 és Y_2 is különböző pontok az MNP síkban. Az O pont tehát, mint az $\overline{X_1X_2}$ és $\overline{Y_1Y_2}$ közös pontja benne fekszik az LMN és MNP síkban, azaz e síkok $\overline{MN}$ élében. Ez ismét annyit tesz, hogy a tetraéder egyik éle metszi az e egyenest, a mit pedig kizártunk.

Ezek után el kell ejtenünk azt a feltevésünket, hogy f és g egymást metszik. Egészen analog eljárással mutathatjuk ki, hogy f és h, valamint g és h is kitérő egyenesek, a mivel fentebbi állításunk be van bizonyítva.

Kiegészítésül még az is megjegyezhető, hogy az e egyenes az f, g, h egyenesek egyikét sem metszi. Mert pl. e és f a H_1 alkotórendszer két eleme s mint ilyenek kitérők. Hasonlóképen áll a dolog e és g, valamint c és h egyenesekre, melyek a H_2 illetőleg H_3 rendszer elemei.

Így az első eredmény az, hogy az *e, f, g, h egyenesek kitérők.*

4. A viszonyok behatóbb vizsgálatára, tekintsük az f, g, h egyenesek ama pontjait, melyek az e egyenesen és a tetraéder egyik pl. L szögpontján át gondolt síkban feküsznek.

Ez az eL sík tartalmazza a H_1', H_2', H_3' rendszer egy-egy elemét, mert e eleme a H_1, H_2 és H_3 rendszernek. Legyenek ez elemek l_1', illetőleg l_2', l_3'. Az l_1' metszi a H_1 rendszer minden elemét, nevezetesen

$\overline{LM}$	egyenest	L	pontban
$\overline{NP}$	«	A_1	«
e	«	E_1	«
f	«	F_1	«,

a mely pontokról az I.)-ben felírt feltételek alapján mondhatjuk, hogy

$$(LA_1E_1F_1) = -1.$$

Hasonló módon l_2' metszi a H_2 rendszer minden elemét és pedig

$\overline{LN}$ egyenest L pontban
$\overline{MP}$ « A_2 «
e « E_2 «
g « G_2 «

és ismét

$$(LA_2E_2G_2) = -1.$$

Végül l_3' metszi a H_3 rendszer minden elemét és pedig

$\overline{LP}$ egyenest L pontban
$\overline{MN}$ « A_3 «
e « E_3 «
h « H_3 «

és ismét

$$(LA_3E_3H_3) = -1.$$

E három állítás összefoglalása a következő reláczíót adja:

$$(LA_1E_1F_1) = (LA_2E_2G_2) = (LA_3E_3H_3) = -1.$$

Ily felírásban látjuk, hogy e három projektív négyes pontsorban egy elem L megfelelően közös; de akkor e négyes pontsorok páronkint perspektívek. A három párnak megfelelően volna három perspektív czentrum, melyről azonban könnyen kimutatható, hogy összeesik.

Ugyanis, mind a három czentrum rajta van az e egyenesen, mint az E_1, E_2, E_3 összeköttetésén; másrészt az egyik czentrumon átmegy $\overline{A_1A_2}$, a másikon $\overline{A_2A_3}$, a harmadikon $\overline{A_3A_1}$, de A_1, A_2 és A_3 szintén egy ugyanazon egyenesen feküsznek, ugyanis

A_1 fekszik az $\overline{NP}$ egyenesen
A_2 « « $\overline{MP}$ «
A_3 « « $\overline{MN}$ «

azaz A_1, A_2, A_3 pontok az MNP síkban feküsznek és szintén az eL síkban, tehát a kettő metszésvonalán: a-n.

Ez annyit tesz, hogy

$$\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3} \equiv \overline{A_3A_1} \equiv a.$$

Mind a három perspektiv czentrum rajta van ezen az a egyenesen és az e egyenesen, tehát e kettő metszéspontjában mind a három czentrum összeesik. Legyen ez a pont A.

Ebből a vizsgálódásunkra nézve döntő jelentőségű következményre jutunk, hogy F_1, G_2, H_3 és A pontok egy ugyanazon egyenesen feküsznek, a mennyiben F_1, G_2 és H_3 a perspektív vonatkozásban megfelelő pontok és A a perspektív czentrum.

Ezt az eredményt más szóval úgy is mondhatjuk ki, hogy az e, f, g, h egyeneseknek az eL síkban van egy közös transzverizálisuk: t_1.

Hasonló módon mutathatom ki, hogy az eM, eN, eP síkokban s van egy-egy transzverzálisa az e, f, g, h egyeneseknek, legyenek ezek t_2, t_3, t_4.

Ennek tényleges bebizonyítása azonban az I.) feltétel némi átalakítását teszi szükségessé. Ugyanis az I.) feltételben az elemek elrendezése olyan, hogy az eL sík, mindegyik négyes sugársornak első elemét metszi ugyanazon pontban az L-ben, már pedig csakis ezen az alapon mondhatjuk, hogy a keletkezett négyes pontsorok perspektivek. Ha azonban az eM síkot veszem, ott az első sugársor első elemét e sík ugyan M pontban metszi, de a többiek első elemét más pontokban, úgy hogy a keletkező négyes pontsorokban M nem lesz megfelelően közös.

E látszólagos nehézség eloszlatható azon megjegyzés alapján, hogy a harmonikus csoportok konjugált elemei felcserélhetők, vagyis az I.) feltétel még a következő alakokba irható:

$$(\overline{LM}\,\overline{NP}\,ef) = (\overline{MP}\,\overline{LN}\,eg) = (\overline{MN}\,\overline{LP}\,eh) = -1 \qquad \text{II.)}$$
$$(\overline{NP}\,\overline{LM}\,ef) = (\overline{LN}\,\overline{MP}\,eg) = (\overline{MN}\,\overline{LP}\,eh) = -1 \qquad \text{III.)}$$
$$(\overline{NP}\,\overline{LM}\,ef) = (\overline{MP}\,\overline{LN}\,eg) = (\overline{LP}\,\overline{MN}\,eh) = -1 \qquad \text{IV.)}$$

Ha most már az eM síkkal való metszésnél a II.), az eN síkkal való metszésnél a III.) és eP-nél a IV.) feltételt használom, teljesen oly viszonyokkal állunk szemben mint az első, részletezett esetben.

Így tehát az e, f, g, h egyeneseknek négy különböző síkban van egy-egy transzverzálisa.

E transzverzálisok közül kettő nem eshetik össze, mert ha össze-esnék, úgy az csak az *e* egyenesen lehetne, már pedig ez az *f*, *g*, *h* egyenesek egyikét sem metszi.

Ámde, ha négy kitérő egyenesnek kettőnél több transzverzálisa van, azok egy hiperboloidon feküsznek. Vagyis áll a következő tétel:

Ha valamely e egyenes az LMNP tetraéder egyik élét sem metszi, a tetraéder három kitérő élpárjára nézve az e egyeneshez konjugált negyedik harmonikus egyenesek f, g, h az e egyenessel együtt egy ugyanazon hiperboloidnak ugyanazon rendszerbeli alkotói.

Skopál István.

DESARGUES TANTÉTELENEK TÉRBELI ANALOGONJÁRÓL.

1. A térbeli vonalkoordinátákról.

Ha az egyenes vonal helyzetét tetraéderes koordináta-rendszerre vonatkozólag meg akarjuk határozni, vagy az egyenesnek az alapsikokkal való metszéspontjait, vagy az egyenest az alappontokból projicziáló síkokat vehetjük segítségül.

Legyenek az alappontok $A_1 A_2 A_3 A_4$ és vegyük az egyenest először két pontja

$$M(x_1 x_2 x_3 x_4) \quad \text{és} \quad N(y_1 y_2 y_3 y_4)$$

által adottnak.

A két pont meghatározta lineáris pontsor változó elemének koordinátái

$$\lambda x_i + \mu y_i \; (i = 1, 2, 3, 4);$$

tehát az i-ik alapsík metszéspontjára nézve

$$\lambda : \mu = y_i : -x_i.$$

Ha behozzuk a

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

jelölést, a mely szerint

$$p_{ik} + p_{ki} = 0, \; p_{ii} = 0,$$

az alapsíkok metszéspontjainak koordinátái lesznek:

$$\begin{matrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & 0 \end{matrix} \qquad 1)$$

Az egyenest az alappontokból projicziáló síkok

$$A_iMN \; (i=1, 2, 3, 4)$$

egyenleteiből könnyű ezek koordinátáit kiolvasni. E koordináták lesznek:

$$\begin{matrix} 0 & p_{34} & p_{42} & p_{23} \\ p_{43} & 0 & p_{14} & p_{31} \\ p_{24} & p_{41} & 0 & p_{12} \\ p_{32} & p_{13} & p_{21} & 0 \end{matrix} \qquad 2)$$

Látszik ezekből, hogy az egyenesnek a koordináta-rendszerhez való viszonyát p_{ik} számok arányai határozzák meg.

De ezek nem függetlenek egymástól, mert az 1) pontok akármelyike benne van a 2) síkok akármelyikében. Ebből az következik, hogy

$$[p] \equiv p_{23}p_{14}+p_{31}p_{24}+p_{12}p_{34}=0.$$

Megfordítva, ha a p_{ik} számokat a

$$p_{ik}+p_{ki}=0, \; [p]=0$$

feltételeknek megfelelően választjuk s van közöttük 0-tól különböző ezek a számok egyetlenegy egyenes vonalat fognak meghatározni, mert az 1) pontok közül három-három egy egyenesben lesz, a 2) síkok közül három-három egy egyenesben metszi egymást, minthogy a két mátrix összes harmadfokú determinánsai elenyésznek. A két úton meghatározott egyenes pedig ugyanaz, mert az 1) pontok mindenike benne van a 2) síkok mindenikében.

E szerint a p_{ik} számokat az *nz egyenes vonal koordinátáinak* nevezhetjük.*

Igy minden egyenesnek hat koordinátát adunk, melyeket rendesen a

$$p_{23}, \; p_{31}, \; p_{12}, \; p_{14}, \; p_{24}, \; p_{34}$$

sorrendben szoktunk felsorolni. Ezeket a

$$[p]=0$$

* A vonalkoordinátákat PLÜCKER vezette be. (Neue Geometrie des Roumes.)

egyenlet köti össze s a mellett csak egymáshoz való arányuknak van geometriai értelme.

Az összes egyenesek így négyszeresen végtelen sokaságot alkotnak, de analitikai előállításuk olyan, mintha ötszörösen végtelen sokaságból kimetszett quadratikus sokaságot alkotnának. Azonban ez a legtermészetesebb meghatározási mód, mert a koordináta-rendszernek hat alapegyenese van, t. i. a tetraéder hat éle. Igy ezek épen úgy, mint az alappontok és alaksikok azzal vannak jellemezve, hogy koordinátáik egy hijával elenyésznek. A_iA_k alapegyenes koordinátái közül csak p_{ik} nem $=0$.

Tegyük fel másodszor, hogy az egyenes két síkja

$$M(u_1u_2u_3u_4) \quad \text{és} \quad N(v_1v_2v_3v_4)$$

által van adva.

Ha a

$$\pi_{ik}=u_iv_k-u_kv_i$$

jelöléseket, használjuk az egyenest az alappontokból projicziáló síkok koordinátái

$$\begin{matrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & 0 & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & 0 \end{matrix} \qquad 3)$$

és az alapsíkok metszéspontjainak koordinátái

$$\begin{matrix} 0 & \pi_{34} & \pi_{42} & \pi_{23} \\ \pi_{43} & 0 & \pi_{14} & \pi_{31} \\ \pi_{24} & \pi_{41} & 0 & \pi_{12} \\ \pi_{32} & \pi_{13} & \pi_{21} & 0 \end{matrix} \qquad 4)$$

Minthogy a 3) síkok mindenike átmegy a 4. pontok mindenikén,

$$[\pi]=\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{31}\pi_{24}+\pi_{12}\pi_{34}=0.$$

Ha MN és MN egyenesek azonosak, akkor 1. és 4., 2 és 3. matrix megfelelő elemeinek arányosoknak kell lenniök.

Tehát

$$\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{12}:\pi_{14}:\pi_{24}:\pi_{34}=p_{14}:p_{24}:p_{34}:p_{23}:p_{31}:p_{12}$$

Igy koordináta-meghatározásunk a dualitás elvével is egyezik.

Az egyenes vonal geometriájából még csak arra a feltételre lesz szükségünk, a mely mellett két koordinátáival (p_{ik}, q_{ik}) adott egyenes metszi egymást.

Legyen p egyenes két pontja

$$M(x_1 x_2 x_3 x_4) \quad \text{és} \quad N(y_1 y_2 y_3 y_4),$$

q egyenes két pontja

$$R(z_1 z_2 z_3 z_4) \quad \text{és} \quad S(t_1 t_2 t_3 t_4).$$

A két egyenes metszi egymást, ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0.$$

A Laplace-tétel szerint az az egyenlet így is írható:

$$[p, q] = [q, p] = p_{23} q_{14} + p_{31} q_{24} + p_{12} q_{34} + p_{14} q_{23} + p_{24} q_{31} + p_{34} q_{12}.$$

2. A lineáris sugársorokról.

1. Keressük fel a két egyenes (p és q) meghatározta lineáris sugársort. Ekkor

$$s_{ik} = \lambda p_{ik} + \mu q_{ik}$$

csak úgy lehetnek vonalkoordináták, ha

$$[s] = \lambda\mu [p, q] = 0.$$

Tehát két egyenes csak úgy származtat lineáris sugársort, ha metszik egymást. A sugársor azon egyenesek összeségéből áll, a melyek p és q közös pontján keresztülmennek és közös síkjában feküsznek, mert p és q minden közös metszője (l) metszi az s egyenest is. Ugyanis

$$[s, l] = \lambda [p, l] + \mu [q, l].$$

A sugársornak ezt a faját *síkbeli lineáris sugársornak* fogjuk nevezni.

A feltétel arra nézve, hogy három adott egyenes síkbeli lineáris sugársorhoz tartozzék, abban áll, hogy a koordinátáikból alkotott matrix összes harmadfokú determinánsainak el kell enyészniök.

2. Keressük fel a három egyenes (p, q és r) meghatározta lineáris sugársort, ha a három egyenes nem tartozik síkbeli lineáris sugársorhoz. Ismét

$$s_{ik}=\lambda p_{ik}+\mu q_{ik}+\nu r_{ik}$$

csak úgy lehetnek vonal-koordináták, ha

$$[s]=\mu\nu[q, r]+\nu\lambda[r, p]+\lambda\mu[p, q]=0.$$

A következő eseteket kell megkülönböztetnünk:

a) p, q, r egyenesek kettőnként nem metszik egymást.

Ekkor a sugársor egyszerűen végtelen sok tagból áll azzal a tulajdonsággal, hogy p, q, r minden közös metszője (l) őket is metszi. Mert

$$[s, l]=\lambda[p, l]+\mu[q, l]+\nu[r, l].$$

Ebből az következik, hogy a sugársor a p, q, r egyenesek meghatározta másodrendű és másodosztályú felületen (egyköpenyű hyperboloid vagy hyperbolikus paroboloid) fekszik és azon azt az egyenesrajt alkotja, melynek p, q, r is tagjai.

b) p és q metszik egymást, de p és r, q és r nem.

Ekkor

$$[s]=\nu(\lambda[p, r]+\mu[q, r])=0$$

egyenlet azt mutatja, hogy a sugársor két síkbeli lineáris sugársorból áll. Egyiknek ($\nu=0$) alapsugarai p és q, a másikéi

$$p_{ik}\cdot[q, r]-q_{ik}[p, r] \text{ és } r \text{ egyenesek.}$$

Tehát két síkbeli lineáris sugársor külön czentrummal és síkkal, de közös sugárral. A közös sugár koordinátái

$$[q, r]\cdot p_{ik}-[p, r]\cdot q_{ik}\,.$$

c) p és q, q és r metszik egymást, de p és r nem.

Ekkor

$$[s]=\lambda\nu[p, r]=0$$

egyenlet mutatja, hogy a sugársor megint két síkbeli lineáris sugársorból áll p és q, q és r alapsugarakkal, tehát megint két síkbeli lineáris sugársor külön czentrummal és síkkal, de közös sugárral.

d) p, q, r egyenesek kettőnként metszik egymást és így vagy közös pontjuk, vagy közös síkjok van.

Ekkor $[s]=0$ egyenlet identitás. Így a sugársor kétszeresen végtelen sok tagból áll, melyeket p, q, r minden közös metszője metszi.

Ha p, q, r egyeneseknek közös pontja van, ezen mennek át az összes sugarak *(sugárpont)*, ha p, q, r egyeneseknek közös síkja van, ebben feküsznek az összes sugarak *(sugársík)*.

Az eddigiekből az következik, hogy ha négy egyenes lineáris sugársorhoz tartozik, de hármanként nem tartoznak síkbeli lineáris sugársorhoz, akkor a következő négy eset lehetséges:

1. A négy egyenes egy másodrendű és másodosztályú felületen fekszik, de kettőnként nem metszik egymást. *(Hiperbolikus sugarak.)*
2. A négy egyenes két szögöt alkot külön szögponttal és síkkal, de olyan helyzetben, hogy egyiknek szögpontja a másiknak síkjában fekszik és viszont. *(Kétszögös sugarak.)*
3. A négy egyenesnek közös pontja van. *(Pontbeli sugarak.)*
4. A négy egyenesnek közös síkja van. *(Síkbeli sugarak.)*

A feltétel arra nézve, hogy négy adott egyenes lineáris sugársorhoz tartozzék, abban áll, hogy a koordinátáikból alkotott mátrix összes negyedfokú determinánsainak el kell enyészniök.

Ezek után áttérhetünk Desargues tantétele analogonjának felkeresésére.

3. A lineáris tetraéderekről.

Desargues tantétele a síkban így is fogalmazható:

Ha a két háromszög megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalok metszéspontjai lineáris pontsor tagjai.

Tekintetbe véve azt, hogy a térben a lineáris sugársor recziprókja megint lineáris sugársor, analog tantételnek a következőt lehet tekinteni:

Ha a két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei szintén lineáris sugársor tagjai.

Két tetraéder ilyen viszonyát *lineáris*-nak fogjuk nevezni.

A tantétel bebizonyítása következő:

Legyenek két tetraéder szögpontjai $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ és oldalsíkjai $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$. A jelölés legyen úgy választva, hogy pl.

$$\alpha_1 = A_2A_3A_4.$$

Megfelelő elemek legyenek az egyenlő indexüek.

Az első tetraédert válasszuk a koordinátarendszer alapjának és így a szögpontok koordinátái legyenek:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} b_{11}b_{12}b_{13}b_{14} \\ b_{21}b_{22}b_{23}b_{24} \\ b_{31}b_{32}b_{33}b_{34} \\ b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}. \end{array}$$

Minthogy a második tetraéder is valóságos, a b_{ik} elemek determinánsa $B \lesseqgtr 0$.

Az oldalsíkok koordinátái

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} B_{11}B_{12}B_{13}B_{14} \\ B_{21}B_{22}B_{23}B_{24} \\ B_{31}B_{32}B_{33}B_{34} \\ B_{41}B_{42}B_{43}B_{44}, \end{array}$$

a hol B_{ik} jelenti B determinánsban a b_{ik} elem aldeterminánsát.

A következőkben feltesszük, hogy b_{ik}, B_{ik} elemek közül egyik sem $=0$. Ezzel azt mondjuk ki, hogy egyik tetraéder szögpontjai közül egyik se feküdjék a másik tetraéder valamelyik oldalsíkjában. Ezzel egyszersmind kimondottuk azt is, hogy a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek közül három-három ne feküdjék egy síkban és a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei közül három-három ne messe egymást egy pontban.

A megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek koordinátái, ha azokat

$$p_{23},\ p_{31},\ p_{12},\ p_{14},\ p_{24},\ p_{34}$$

sorrend szerint soroljuk fel:

$$\begin{matrix} 0 & -b_{13} & b_{12} & b_{14} & 0 & 0 \\ b_{23} & 0 & -b_{21} & 0 & b_{24} & 0 \\ -b_{32} & b_{31} & 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} \end{matrix}$$

A négy egyenes lineáris sugársorhoz tartozik, ha ezen mátrix összes negyedfokú determinánsai elenyésznek. Ez a következő hét egyenlethez vezet:

$$(1)\qquad b_{12}b_{23}b_{31}=b_{13}b_{32}b_{21}$$

$$(2)\qquad b_{13}b_{34}b_{41}=b_{14}b_{43}b_{31}$$

$$(3)\qquad b_{14}b_{42}b_{21}=b_{12}b_{24}b_{41}$$

$$(4)\qquad b_{23}b_{34}b_{42}=b_{24}b_{43}b_{32}$$

$$(5)\qquad b_{12}b_{23}b_{34}b_{31}=b_{14}b_{43}b_{32}b_{21}$$

$$(6)\qquad b_{13}b_{34}b_{42}b_{21}=b_{12}b_{24}b_{43}b_{31}$$

$$(7)\qquad b_{14}b_{42}b_{23}b_{31}=b_{13}b_{32}b_{24}b_{41}$$

De a négy utolsó egyenlet a három elsőnek következése, mert

(4) következik (1), (2) és (3)—
(5) « (1) és (2)—
(6) « (2) és (3)
(7) « (2) és (1)

szorzásából.

A koordináták homogének és feltétel szerint 0-tól különbözők lévén, előre beigazíthatók úgy, hogy

$$b_{21}=b_{12},\ b_{31}=b_{13},\ b_{41}=b_{14}$$

legyen. De akkor a három első egyenlet szerint egyszersmind

$$b_{23}=b_{32},\ b_{34}=b_{43},\ b_{42}=b_{24},$$

azaz B szimmetrikus determináns.

Épen így a feltétel arra nézve, hogy a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei lineáris sugársorhoz tartozzanak, abban áll, hogy a B_{ik} elemek determinánsát a soroknak czélszerűen választott faktorokkal szorzásával szimmetrikussá lehessen tenni.

De egy determináns és adjungáltja közül, ha egyik szimmetrikus, a másik is az. Ebből az következik, hogy:

Ha a két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei szintén lineáris sugársor tagjai, és megfordítva.

De ha a

$$b_{ik}=b_{ki}$$

egyenletek állanak, akkor a két tetraéder között polárreczíproczitás áll fenn arra a másodrendű és másodosztályú felületre nézve, melynek egyenlete síkkoordinátákban

$$\Sigma b_{ik}\, u_i\, u_k=0.$$

Áll tehát a következő tantétel is:

Minden tetraéder bármely másodrendű és másodosztályú felületre vonatkozó polárrecziprókjával lineáris viszonyban van.*

A lineáris viszony fajainak meghatározására megjegyzendő, hogy a feltétel arra nézve, hogy A_1B_1 és A_2B_2 messék egymást:

$$b_{13}b_{24}-b_{14}b_{23}=0.$$

A $b_{ik}=b_{ki}$ feltételeket tekintetbe véve, ugyanez a feltétel arra nézve is, hogy A_3B_3 és A_4B_4 messék egymást.

A_1B_1 és A_3B_3, A_2B_2 és A_4B_4 metszik egymást, ha

$$b_{12}b_{34}-b_{14}b_{32}=0$$

A_1B_1 és A_4B_4, A_2B_2 és A_3B_3 metszik egymást, ha

$$b_{12}b_{43}-b_{13}b_{42}=0.$$

---

* Ez a tantétel CHASLES-tól ered. Lásd SALMON-FIEDLER Analytische Geometrie des Raumes 1. kötet 180. lap (második kiadás) és a hozzá csatolt jegyzetet.

A három egyenlet közül kettőnek a harmadik következése.

Vegyük tekintetbe ezenkívül azt, hogy az adjungált determinánsok ismert tulajdonsága szerint:

$$b_{13}b_{24}-b_{14}b_{23}=0 \text{ és } B_{31}B_{42}-B_{32}B_{41}=0$$

egyenletek közül egyik a másiknak következése, azaz ha A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek metszik egymást, metszik egymást $\alpha_3\beta_3$ és $\alpha_4\beta_4$ is.

Ezek alapján a lineáris viszonynak következő három faját kell megkülönböztetnünk:

1. Mind a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek, mind a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei hiperbolikus sugarak. *(Hiperbolikus viszony.)* *

2. Mind a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek, mind a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei kétszögös sugarak. *(Kétszögös viszony.)*

3. A megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek pontbeli, a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei síkbeli sugarak. *(Perspektiv viszony.)*

Vályi Gyula.

---

* A tantételnek ez a része HERMES-től ered. (Crelle-Journal, 56. kötet.)

A SURLÓDÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Negyedik és befejező közlemény.)

III. A pont mozgásának részletes leírása adott felületen.

13. A pont adott görbe felületen történő mozgásának részletes leírásánál a felület olyan görbe seregeiből alkotott koordinata-rendszert veszünk alapul, mely lehetőleg egyszerű leírást enged meg. Legyenek

$$u_1 = \text{const.},$$
$$u_2 = \text{const.},$$

olyan két görbesereg egyenletei, melyek közül az egyikhez tartozók derékszög alatt metszi a másikhoz tartozók mindegyikét; akkor az u_1 és u_2 számértékei a metszéspont görbevonalas derékszögű koordinátái. Ezt az u_1, u_2 rendszert fektetvén alapul, a pont sebességének analitikai kifejezése:

$$v=(U_1^2 u_1'^2 + U_2^2 u_2'^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{28}$$

hol U_1 és U_2 függvényei az u_1, u_2 koordinátáknak és hol a szokott

$$u_1' = \frac{du_1}{dt}, \quad u_2' = \frac{du_2}{dt} \tag{29}$$

rövidítésekkel élünk.

A pontra ható összes (szabad *és* surlódási) erők virtuális munkája e rendszerben kifejezve legyen

$$Q_1 \delta u_1 + Q_2 \delta u_2;$$

akkor a tömegpont mozgásának differencziál-egyenletei Lagrange második rendszere értelmében

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial u_i'} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial u_i} = Q_i; \quad [i=1, 2].$$

Ezek az egyenletek a 28)-ból folyó

$$\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial u_i'} = U_i^2 u_i',$$

$$\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial u_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1^2}{\partial u_i} u_1'^2 + \frac{\partial U_2}{\partial u_i} u_2'^2\right)$$

egyenletek alapján explicite így írhatók:

$$\frac{d}{dt}(U_i^2 u_i') = Q_i + \frac{1}{2}\frac{\partial U_1^2}{\partial u_i} u_1'^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial U_2^2}{\partial u_i} u_2'^2, \quad [i=1, 2]. \tag{30}$$

14. Az egyenletek integrálását eszközlendők, azon esetre szorítkozunk, a midőn a mozgató erő csakis a nehézség; még itt is azt a további feltevést kell bevezetnünk, hogy a felület, melyen a pont mozog, forgási felület és hogy a forgási tengely függélyes. Ezen föltevések mellett az egyenletek integrálása visszavezethető egyetlen egy másodrendű *közönséges* differencziál-egyenlet integrálására, mely ha megvan, a mozgási probléma teljes megoldása csak egyszerű quadraturákat követel meg.

Megjegyzem, hogy ha e föltevéseket nem használjuk, a probléma ugyanazon az úton, a *közönséges* helyett, másodrendű *parcziális* differencziál-egyenlet teljes megoldására vihető vissza.

A szóban levő speczial esetben czélszerű lesz u_1-gyel a forgási felületet leíró síkgörbe meridián szögét jelölni, u_2-vel pedig e síkgörbe ívhosszát, az ívhosszat számítván az egyik tengelyponttól a tömegpontig; egyébként kényelmesebb írás kedvéért u_2 helyett csak u-t fogunk írni.

E koordináta-rendszert fektetvén alapul a (28) helyébe lép,

$$v = (U_1^2 u_1'^2 + u'^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{31}$$

hol U_1 csakis az u függvénye lévén $\frac{\partial U_1}{\partial u_1} = 0$. Tekintettel erre és azon körülményre, hogy $U_2 = 1$, a mozgási egyenletek most így írhatók:

$$\frac{d}{dt}(U_1^2 u_1') = Q_1 \tag{31a}$$

$$\frac{du'}{dt} = Q_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial U_1^2}{\partial u} u_1'^2. \tag{31b}$$

A működő erők a nehézség és a surlódás.

A nehézség munkája

$$g \cos.(z, u)\,\delta u = g\frac{dz}{du}\delta u.$$

A surlódás munkája

$$-kN\cos.(v, u_1)\,U_1\delta u_1 - kN\cos.(v, u)\,\delta u.$$

Ezekből folyólag

$$Q_1 = -kNU_1\cos.(v, u) = -kN\frac{U_1^2 u_1'}{v}, \tag{32a}$$

$$Q_2 = -kN\frac{u'}{v} + g\frac{dz}{du}. \tag{32b}$$

A mi az N értékét illeti, az előbbi közlemény (25a) egyenlete értelmében

$$N = -g\cos.(z, r) + \frac{v^2}{r},$$

míg Euler ismeretes tétele szerint

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos.^2(v, u_1)}{r_1} + \frac{\cos.^2(v, u_2)}{r_2},$$

hol r_2 a forgási felület leíró síkgörbéjének, és r_1 az erre merőleges normálmetszetnek görbületi sugara. Az Euler tételének fölhasználásával lesz tehát

$$N = -g\cos.(z, r) + \frac{v^2\,\mathrm{co.s}^2(v, u_1)}{r_1} + \frac{v^2\cos.^2(v, u_2)}{r_2}$$

azaz

$$N = -g\cos.(z,r) + \frac{U_1^2 u_1'^2}{r_1} + \frac{u_2'^2}{r_2}.$$

Az N előbbi képlete érvényes bármilyen felület esetén is, ha r_1 és r_2 a főgörbületi sugarak, és u_1 és u_2 a főmetszetek érintőinek irányát jelentik. Forgási felületek esetén még tekintetbe vehető, hogy U_1 és r_1 között fönnáll

$$U_1 = r_1 \sin.(z,r),$$

minélfogva N értéke így is írható:

$$N = -g\cos.(z,r) + r_1 u_1'^2 \sin.^2(z,r) + \frac{u_2'^2}{r_2},$$

azaz

$$N = -g\cos(z,r) + U_1 u_1'^2 \sin(z,r) + \frac{u_2'^2}{r_2}, \tag{33}$$

Ezek szerint a 31) és 32) egyenletek összefoglalásával kimondható, hogy a mozgási probléma megoldása a következő differencziál-egyenlet-rendszer megoldására van visszavezetve:

$$\frac{d}{dt}(U_1^2 u_1') = -kN\frac{U_1^2 u_1'}{v}, \tag{34a}$$

$$\frac{du'}{dt} - U_1\frac{dU_1}{du}u_1'^2 = -kN\frac{u'}{v} + g\frac{dz}{du}, \tag{34b}$$

hol N értékét az imént levezetett képletek adják meg.

15. Ezen egyenlet-rendszerből levezetünk két velük egyenértékű egyenletet, melyek egyike az eleven erő tételét fejezi ki, másika pedig lényegileg azonos az előbbi fejezet (25) alatti egyenletek harmadikával.

Ugyanis az első egyenletet szorozván u_1'-vel, a másodikat u'-vel, összegezés után ered a bal oldalon

$$u_1'\frac{d}{dt}(U_1^2 u_1') + u'\frac{du'}{dt} - U_1\frac{dU_1}{dt}u_1'^2,$$

mely ismert átalakitás révén *

$$=\frac{d}{dt}\frac{U_1^2u_1'^2+u'^2}{2}=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}v^2.$$

A jobb oldalon pedig kijő

$$-kN\frac{U_1^2u_1'^2+u'^2}{v}+g\frac{dz}{dt},$$

mely

$$=-kNv+\frac{d}{dt}(gz).$$

Ezek folytán

$$\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}v^2-gz)=-kNv,$$

mely egyenlet az eleven erő tételét fejezi ki.

Más részről a 34*a*) egyenletet így irom:

$$-\frac{kN}{v}=\frac{d}{dt}\cdot\log.(U_1^2u_1');$$

és a $-\frac{kN}{v}$ ezértékét behelyettesítvén a (34*b*) egyenletbe, az eredmény így irható:

$$u'\left(\frac{d}{dt}\log.u'-\frac{d}{dt}\log.(U_1^2u_1')\right)=g\frac{dz}{du}+U_1\frac{dU_1}{du}u_1'^2,$$

vagy rövidebben

$$u'\frac{d}{dt}\log.\frac{u'}{U_1^2u_1'}=g\frac{dz}{du}+U_1\frac{dU_1}{du}u_1'^2,$$

mely egyenlet csak más alakban fejezi ki ugyanazt, a mit a harmadik egyenlet (25) alntt.

---

* Az átalakítás, a melyre a hivatkozás történik, ez:

$$u_1'\cdot\frac{d(U_1^2u_1')}{dt}=U_1u_1'\frac{d(U_1u_1')}{dt}+U_1u_1'^2\frac{dU_1}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(U_1^2u_1'^2)+U_1\frac{dU_1}{dt}u_1'^2$$

azaz

$$u_1'\frac{d}{dt}(U_1^2u_1'^2)-U_1\frac{dU_1}{dt}u_1'^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(U_1^2u_1'^2).$$

16. Az egyenletekben független változóúl a t helyett az u-t hozván be, azokat $u' = \frac{du}{dt}$ folytán így írjuk:

$$u' \frac{d}{du}(v^2 - 2gz) = -2kNv, \tag{35a}$$

$$u'^2 \frac{d}{du} \log. \frac{u'}{U_1^2 u_1'} = g\frac{dz}{du} + U_1 \frac{dU_1}{du} u_1'^2, \tag{35b}$$

Jelöltessék

$$\frac{u'}{U_1 u_1'} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad x = \frac{1}{u^2 \cos^2 \vartheta} = \frac{v^2}{U_1^2 u^2 u_1'^2}; \tag{36}$$

E jelöléssel élve

$$\frac{d}{du} \log. \frac{u'}{u_1^2 u_1'} = \frac{d}{du} \log. \frac{\sqrt{u^2 x - 1}}{U_1}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2ux + u^2 \frac{dx}{du}}{u^2 x - 1} - \frac{\frac{dU_1}{du}}{U_1},$$

és

$$u_1'^2 = \frac{u'^2}{U_1^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{u'^2}{U_1^2 (u^2 x - 1)};$$

úgy hogy

$$u'^2 \frac{d}{du} \log. \frac{u'}{U_1^2 u_1'} - U_1 \frac{dU_1}{du} u_1'^1$$

$$= u'^2 \left(\frac{1}{2} \frac{2ux + u^2 \frac{dx}{du}}{u^2 x - 1} - \frac{\frac{dU_1}{du}}{U_1} - \frac{\frac{dU_1}{du}}{U_1 (u^2 x - 1)} \right)$$

$$= u'^2 \frac{u^2 U_1 \frac{dx}{du} + 2ux \left(U_1 - u \frac{dU_1}{du} \right)}{2 U_1 (u^2 x - 1)}.$$

Ez átalakítás fölhasználásával a (35b) egyenletből következik, hogy

$$u'^2 = \frac{2g U_1 (u^2 x - 1) \frac{dz}{du}}{u^2 U_1 \frac{dx}{du} + 2ux \left(U_1 - u \frac{dU_1}{dx} \right)} \tag{37a}$$

A $\frac{dz}{du}$, $\frac{dU_1}{du}$ és az U_1 maga a felületet leíró vonal egyenletéből egyenesen kiadódván, ez az egyenlet megadja az u' sebesség-komponenst mint az x, u és $\frac{dx}{du}$ függvényét; és már mostan u_1', v és N is fölírhatók mint ez argumentumok függvényei. Jelesül

$$u_1'^2 = \frac{2g\frac{dz}{du}}{u^2U_1^2\frac{dx}{du} + 2uU_1x\left(U_1 - u\frac{dU_1}{du}\right)} \tag{37b}$$

$$v^2 = \frac{2gx\frac{dz}{du}}{\frac{dx}{du} + 2x\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{U_1}\frac{dU_1}{du}\right)} \tag{37c}$$

$$\frac{v}{u'} = \frac{u\sqrt{x}}{\sqrt{u^2x-1}} \tag{37d}$$

$$N = -g\frac{dU_1}{du} + \left(\frac{1}{r_2} + \frac{\frac{dz}{du}}{U_1(u^2x-1)}\right)\frac{2g(u^2x-1)\frac{dz}{du}}{u^2\frac{dx}{du} + 2xu\left(1 - \frac{u}{U_1}\frac{dU_1}{du}\right)}$$

A v^2, N és $\frac{v}{u'}$ helyett az imént fölírt kifejezéseiket tévén be a (35a) egyenletbe, másodrendű közönséges differencziál-egyenletet nyerünk az x számára, melyből ez mint az u függvénye van meghatározva. Az egyenlet megoldása után a (37.) képletek közvetetlenül megadják a sebességeket és a nyomást mint az u függvényeit; a

$$t = \int\frac{du}{u'}$$

egyszerű quadratura megadja az időt mint az u függvényét; végül a pont pályagörbéjét megkapjuk a

$$\frac{du_1}{du} = \frac{u_1'}{U'} = \frac{1}{U_1\sqrt{u^2x-1}}$$

egyenlet folytán az

$$u_1 = \int \frac{du}{U_1 \sqrt{u^2 x - 1}}$$

egyszerű quadratura végzésével.

Az x függvényt meghatározó másodrendű differencziál-egyenlet legegyszerűbb, ha a forgási felület körkúp, in specie henger és sík. Jelöljük a körkúp tengelye és alkotója közötti szöget γ-val; az alkotó hosszát a csúcstól a tömegpontig u-val; akkor

$$\frac{dz}{du} = \cos.\gamma\,;\; U_1 = u \sin.\gamma\,;\; \frac{dU_1}{du} = \sin.\gamma\,;\; r_2 = \infty,$$

minélfogva

$$1 - \frac{u}{U_1} \sin.\gamma = 0$$

és

$$v^2 = \frac{2gx \cos.\gamma}{\frac{dx}{du}}\,; \tag{38a}$$

$$\frac{v}{u'} = \frac{u\sqrt{x}}{\sqrt{u^2 x - 1}} \tag{38b}$$

$$N = -g \sin.\gamma + 2g \frac{\cos.^2\gamma}{u^3 \frac{dx}{du} \sin.\gamma} \tag{38c}$$

$$\frac{d}{du}\frac{1}{2}v^2 - g\frac{dz}{du} = g \cos.\gamma \left(\frac{d}{du} \frac{x}{\frac{dx}{du}} - 1 \right)$$

$$= -g \cos.\gamma \frac{x \frac{d^2x}{du^2}}{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2}\,;$$

Ezek folytán a keresett egyenlet

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{k \frac{dx}{du}}{u^2 \sqrt{x(u^2 x - 1)}} \left(2 \operatorname{ctg}.\gamma - u^3 \frac{dx}{du} \operatorname{tg}.\gamma \right) \tag{39}$$

másodrendű *negyedfokú* differencziál-egyenlet.

E differencziál-egyenletet csak azon esetekben sikerült *egyszerű* quadraturákra visszavinnem, ha $\gamma=0$, vagy $\frac{\pi}{2}$, azaz ha a körkúp körhengerré vagy síkká degenerál. Csak e speczialesetekre vonatkozó számítások közlésére szorítkozom.

17. Ha a felület körhenger, akkor az egyenlet nagyon egyszerűvé és könnyen megoldhatóvá lesz. Az átmenetelt eszközlendők, hozzuk be változókul X és z-t e helyettesítések révén.

$$u^2 x = X$$

$$R + \frac{z}{\cos\gamma} = u,$$

hol R a helyettesítésnél állandó, míg az átmenetnél

$$\lim R = \infty, \lim \gamma = 0.$$

Lészen

$$\lim. u^2 x = \lim. R^2 x = X,$$

$$\lim. R^2 \frac{d^2 x}{du^2} = \frac{d^2 X}{dz^2}$$

$$\lim. R^2 \frac{dx}{du^2} = \frac{dX}{dz},$$

minélfogva az egyenlet ez lesz:

$$\frac{d^2 X}{dz^2} = \frac{k \frac{dX}{dz}}{\sqrt{X(X-1)}} \lim. \left(\frac{2 \operatorname{ctg} \gamma}{u} - \frac{dX}{dz} \operatorname{tg}. \gamma \right)$$

Ámde

$$u \sin. \gamma = U_1; \; \lim. \operatorname{tg} \gamma = 0; \; \lim. \cos. \gamma = 1,$$

azért a körhenger esetén a mogoldandó differencziál-egyenlet egyszerűen ez:

$$\frac{d^2 X}{dz^2} = \frac{2k}{U_1} \frac{\frac{dX}{dz}}{\sqrt{X(X-1)}}, \tag{40}$$

hol U_1 a körhenger sugarát jelenti.

Ezen egyenlet két egymásután végzendő quadraturára vihető

$$u_1 = \int \frac{du}{U_1 \sqrt{u^2 x - 1}}$$

egyszerű quadratura végzésével.

Az x függvényt meghatározó másodrendű differencziál-egyenlet legegyszerűbb, ha a forgási felület körkúp, in specie henger és sík. Jelöljük a körkúp tengelye és alkotója közötti szöget γ-val; az alkotó hosszát a csúcstól a tömegpontig u-val; akkor

$$\frac{dz}{du} = \cos.\gamma\,;\; U_1 = u \sin.\gamma\,;\; \frac{dU_1}{du} = \sin.\gamma\,;\; r_2 = \infty,$$

minélfogva

$$1 - \frac{u}{U_1} \sin.\gamma = 0$$

és

$$v^2 = \frac{2gx \cos.\gamma}{\frac{dx}{du}}\,; \tag{38a}$$

$$\frac{v}{u'} = \frac{u\sqrt{x}}{\sqrt{u^2 x - 1}} \tag{38b}$$

$$N = -g \sin.\gamma + 2g \frac{\cos.^2\gamma}{u^3 \frac{dx}{du} \sin.\gamma} \tag{38c}$$

$$\frac{d}{du}\frac{1}{2}v^2 - g\frac{dz}{du} = g\cos.\gamma \left(\frac{d}{du} \frac{x}{\frac{dx}{du}} - 1 \right)$$

$$= -g \cos.\gamma \frac{x \frac{d^2x}{du^2}}{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2}\,;$$

Ezek folytán a keresett egyenlet

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{k\frac{dx}{du}}{u^2 \sqrt{x(u^2x - 1)}} \left(2\,\mathrm{ctg}.\gamma - u^3 \frac{dx}{du} \mathrm{tg}.\gamma \right) \tag{39}$$

másodrendű *negyedfokú* differencziál-egyenlet.

$$Y=\frac{2k}{U_1}\int\frac{dX}{\sqrt{X(X-1)}}$$

azaz

$$Y=\frac{k}{U_1}\log.(X+\sqrt{X(X-1)})+\text{const.} \tag{43}$$

Végül

$$z=\int\frac{dX}{Y} \tag{44a}$$

formula megadja a differencziál-egyenlet megoldását, egyben a tömegpont vertikális emelkedését mint az X változó függvényét. A tömegpont meridiánszöge

$$u_1=\int\frac{dz}{U_1\sqrt{X-1}},$$

azaz

$$u_1=\frac{1}{U_1}\int\frac{dX}{Y\sqrt{X-1}}. \tag{44b}$$

Meghatározandó még az idő mint az X függvénye. Ámde

$$u'=v\sqrt{\frac{X-1}{X}}$$

és

$$v=\sqrt{2g}\sqrt{\frac{X}{\frac{dX}{dz}}}$$

tehát

$$u'=\sqrt{2g}\sqrt{\frac{X-1}{Y}}=\frac{dz}{dt}$$

honnan

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{dX}{\sqrt{Y(X-1)}}. \tag{44c}$$

18. A differencziál-egyenlet megoldása még egyszerűbb, ha a kúp vízszintes síkká degenerál; ekkor $\gamma=\frac{\pi}{2}$ folytán

$$\text{ctg.}\,\gamma=0,\quad \text{tg.}\,\gamma=\infty,$$

tehát a differencziál-egyenlet csak úgy lesz kielégítve, ha

$$\frac{dx}{du}=0,$$

azaz x=const.

Ennek az eredménynek mechanikai jelentése az, hogy horizontális síkon a tömegpont pályája egyenes vonal. Ugyanis a (36) értelmében

$$x=\frac{1}{u^2\cos^2\vartheta},$$

minélfogva

$$u\cos\vartheta=\text{const.},$$

a mi a szóban levő koordinátákban, az egyenes egyenlete.

Réthy Mór.

AZ ADJUNGÁLT HELYETTESÍTÉSEK ALKALMAZÁSA AZ ADJUNGÁLT LINEÁR DIFFERENTIALEGYENLETEKNÉL.

RADOS úr az adjungált helyettesítésekről írt értekezésében * említi, hogy az

$$y_\alpha = a_{\alpha_1} x_1 + c_{\alpha_2} x_2 + \dots + c_{\alpha_n} x_n$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

lineár helyettesítés elmélete voltaképen nem más, mint a

$$c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}, \dots, c_{\alpha n}$$

-ből alkotott

$$\| c_{\alpha\beta} \|$$

mátrixok elmélete. E mátrixok elmélete önként felmerül, ha az

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

változókkal kogrediens változókat vezetünk be, és e kogrediens-sorozatokból alkotjuk meg az összes m-edfokú determinánsokat. RADOS úrnak az említett értekezésben levezetett tétele e szerint e determinánsok lineár helyettesítéseinek karakterisztikus egyenletére vonatkozik. Ha kogrediens változókul tekintjük egy homogén lineár differencziálegyenlet alaprendszerét és ez alaprendszer differencziálhányadosait egészen az $(m-1)$-sőig, akkor RADOS úr tétele adjungált lineár differentiálegyenletek *alapegyenletére* vonatkozó tétellé válik.

1. Legyen:

---

* Math. és Phys. Lapok III. köt. 12. l.

$$\begin{array}{l} x_{11}\,,\ x_{12}\,,\ \ldots\,,\ x_{1n} \\ x_{21}\,,\ x_{22}\,,\ \ldots\,,\ x_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{m1}\,,\ x_{m2}\,,\ \ldots\,,\ x_{mn} \end{array} \qquad 1)$$

a kogrediens változóknak m sora (ahol $n > m$). Az

$$x'_{ik} = c_{k1}\,x_{k1} + c_{k2}\,x_{i1} + \ldots + c_{kn}\,x_{in} \qquad 2)$$
$$(k=1, 2, \ldots, n,\ i=1, 2, \ldots, m)$$

lineár helyettesítés együtthatói tehát függetlenek az i indextől, vagyis a felírt változók minden sora ugyanazt a 2) alatti lineár helyettesítést szenvedi.

Jelöljük az 1) alatti mátrixból alkotható m-ed fokú determinánsokat bizonyos sorrendben

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_\mu \qquad \left(\mu = \binom{n}{m}\right) \qquad 3)$$

-vel és alkalmazzuk a 3) alatti sorozatban az x_{ik} változókra a 2) alatti lineár helyettesítéseket, akkor X_i átmegy az

$$X'_i = C_{i1}\,X_1 + C_{i2}X_1 + \ldots + C_{i\mu}X_\mu \qquad 4)$$
$$(i=1, 2, \ldots, \mu)$$

kifejezésbe, a hol a C_{ij} együtthatók a $|c_{ik}|$ determináns m-edfokú aldeterminánsait jelölik, még pedig, ha

$$X_i = \begin{vmatrix} x_{1i_1} & x_{1i_2} & \ldots & x_{1i_m} \\ x_{2i_1} & x_{2i_2} & \ldots & x_{2i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{mi_1} & x_{mi_2} & \ldots & x_{mi_m} \end{vmatrix}$$

és

$$X = \begin{vmatrix} x_{1j_1} & x_{1j_2} & \ldots & x_{1j_m} \\ x_{2j_1} & x_{2j_2} & \ldots & x_{2j_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{mj_1} & x_{mj_2} & \ldots & x_{mj_m} \end{vmatrix},$$

akkor

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} c_{i_1j_1}, & c_{i_1j_2} & \ldots & c_{i_1j_m} \\ c_{i_2j_1}, & c_{i_2j_2} & \ldots & c_{i_2j_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{i_mj_1}, & c_{i_mj_2}. & \ldots & c_{i_mj_m} \end{vmatrix}.$$

Rados úr tétele szerint a 4) alatti lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei a 2) alatti lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökeiből úgy nyerhetők, hogy e gyökök közül minden lehető módon m különbözőt kiválasztunk és ezek szorzatát alkotjuk. A kogrediens változók bevezetésével tehát olyan új

$$X_1, X_2, \ldots, X_\mu$$

változókat nyertünk, melyek az adjungált lineár helyettesítésnek vannak alávetve.

2. Ilyen kogrediens változókat nyerünk akkor is, ha egy homogén lineár differencziálegyenlet alaprendszerét és ez alaprendszer differencziálhányadosait vesszük tekintetbe.

Legyen az adott homogén lineár differencziálegyenlet a következő:

$$y^{(n)}+p_1\, y^{(n-1)}+\ldots+p_n y=0, \tag{5}$$

a hol

$$y^{(i)}=\frac{d^i y}{dx^i} \tag{5}$$

és a p együtthatók a független x változó egyértékű analitikai függvényei. Legyen e differencziálegyenlet egyik, valódi szinguláris pontja a, akkor, miként ismeretes, e pont *környezetét** egész a legközelebbi szinguláris pontig terjedő, az a körűl, mint középpont körűl leírt kör határozza meg. Ha $x=x_0$ pont e körön belül fekszik és az a-tól különbözik, akkor, mint a lineár differencziálegyenletek elméletéből ismeretes, e pont környezetében előállíthatók oly $x-x_0$ pozitiv egész hatványai szerint haladó

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \tag{6}$$

partikuláris megoldások, melyek *alaprendszert* alkotnak.

Ha a független változó az $x=a$ szinguláris helyet körüljárván, eredeti helyzetébe visszatér, akkor, ha az a pont *igazi* szinguláris pont volt, nem pedig *látszólagos,* a 6) alatti alaprendszer e szinguláris ponthoz tartozó lineár helyettesítést szenved. E körüljárás folytán y_i átmegy

* Fuchs Crelle J. 66. k. 125. l.

$$y_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \dots + c_{in} y_n \qquad 7)$$
$$(i=1, 2, \dots, n)$$

-be. Ugyanezt a lineár helyettesitést szenvedik az alaprendszerrel együtt a differencziálhányadosok is, amennyiben $y_i^{(k)}$ átmegy:

$$y_i^{(k)} = c_{i1} y_1^{(k)} + c_{i2} y_2^{(k)} + \dots + c_{in} y_n^{(k)}$$

-ba. E szerint tehát mondhatjuk, hogy az

$$\begin{array}{lll} y_1, & y_2, \dots & y_n \\ y_1', & y_2', \dots & y_n' \\ y_1'', & y_3'', \dots & y_n'' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-1)}, & y_2^{(m-1)}, \dots & y_n^{(m-1)} \end{array}$$

rendszer a változók m kogrediens sorozatát alkotja.

Ha már most e rendszertől ép úgy, mint az 1) alatti rendszerből megalkotjuk az

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_\mu \qquad \left(\mu = \binom{n}{m}\right) \qquad 9)$$

m-edfokú determinánsokat, akkor a 9) alatti függvények a 7) alatti lineár helyettesítés m-edik adjungált helyettesítésének lesznek alávetve, ha a független változó az $x - x_0$ pontból kiindulva, az $x = a$ szinguláris pont körül jár oly úton, mely csakis ezt a szinguláris pontot kerüli meg.

3. A 9) alatti függvények általánosságban oly μ-edrendű homogén lineár differencziálegyenletnek alaprendszerét alkotják, melynek együtthatói az 5) alatti differencziálegyenlet együtthatóiból és azok differencziálhányadosaiból (egész a μ-ik rendig) raczionális módon alkothatók meg.

Legyen például:

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y_1' & y_2' & \dots & y_m' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \dots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

Ha már mostan Y differencziálhányadosait alkotjuk, akkor közvetetlenül látjuk, hogy

$$Y' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y_1' & y_2' & \dots & y_m' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-2)}, & y_2^{(m-2)}, & \dots & y_m^{(m-2)} \\ y_1^m & y_2^m & \dots & y_m^m \end{vmatrix},$$

mert ha nem az utolsó sorban levő elemek differencziálhányadosait képezzük, akkor a keletkező determináns identice 0. Ha a differencziálást folytatjuk és arról gondoskodunk, hogy az m-ik differencziálhányadosok mindig az 5) alatti differencziálegyenlet segítségével alacsonyabb rendűek által fejeztessenek ki, akkor általában ilyen alakú kifejezésekre jutunk:

$$Y^{(\varrho)} + A_{1\varrho} v_1 + A_{1\varrho} v_2 + \dots + A_{\mu\varrho} v_\mu, \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots, \mu) \tag{11}$$

a hol az A együtthatók az 5) alatti egyenlet együtthatóiból és azok differencziálhányadosaiból raczionális módon keletkeznek, továbbá a v kifejezések az

$$\begin{Vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ y_m & y_m' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{Vmatrix} \tag{12}$$

mátrixból alkotható m-edfokú determinánsokat jelölik.

Altalánosságban a 11) alatti lineár egyenletrendszer determinánsa nem 0, tehát a $v_1, v_2, \dots v_\mu$ eliminálása rávezet a következő

$$Y^{(\mu)} + P_1 Y^{(\mu-1)} + \dots + P_\mu Y = 0 \tag{13}$$

homogén lineár differencziálegyenletre, melynek a 10) alatti determináns eleget tesz. E differencziálegyenlet megalkotásánál csak azt vettük tekintetbe, hogy az $y_1, y_2, \dots, y_m$ az 5) alatti homogén lineár differencziálegyenlet integráljai, következésként e 13) alatti differencziálegyenletnek eleget tesznek az összes

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_\mu \tag{9}$$

m-edrendű determinánsok. Megint a legáltalánosabb esetet tartva szem előtt, mondhatjuk, hogy ez a rendszer a 13) alatti egyenlet alaprendszere, azaz nem áll fönn ilyen alakú reláczió:

$$a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_\mu Y_\mu = 0,$$

a hol $a_1 \ldots a_\mu$ 0-tól különböző állandók.

4. Ha az x független változó ez $x=a$ szinguláris pont körül jár a már jelzett módon, akkor a 9) alatti alaprendszer lineár helyettesítést szenved, mert Y_i átmegy

$$Y_i = C_{i1} Y_1 + C_{i2} Y_2 + \ldots + C_{i\mu} Y_\mu \tag{14}$$

-be, a hol a szereplő lineár helyettesítés, miként említve volt, a 7) alatti helyettesítés m-edik adjungált helyettesítése.

Ismeretes, hogy minden szinguláris ponthoz tartozik általánosságban μ olyan, egymástól független megoldás, a melyek a lehető legegyszerűbb körüljárási relácziót tüntetik fel, a mennyiben mindegyikük egy *állandóval* szorzódik. Ez állandó szorzók nem egyebek, mint a

$$\begin{vmatrix} C_{11}-\Omega, & C_{12} & \ldots & C_{1\mu} \\ C_{21} & C_{22}-\Omega & \ldots & C_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{\mu 1} & C_{\mu 2} & \ldots & C_{\mu\mu}-\Omega \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei. Ez az egyenlet a 13) alatti homogén lineár differencziálegyenlet $x=a$ szinguláris pontjához tartozó *alapegyenlet.*

Ha rövidség végett a 13) alatti egyenletet az 5) alatti eredeti differencziálegyenlet m-edik adjungált differentiálegyenletének nevezzük, akkor, miként látjuk, ez adjungált differencziálegyenlet alapegyenlete az adjungált helyettesítés karakterisztikus egyenlete és e szerint Rados úr tétele a következő egyszerű tételre vezetett:

Az m-edrendű adjungált homogén lineár differencziálegyenlet alapegyenletének gyökei az eredeti differencziálegyenlet megfelelő alapegyenletének gyökeiből úgy származnak, hogy az n gyökből minden lehető módon m gyök szorzatát alkotjuk.

5. Ez a tétel a homogén lineár differencziálegyenlet általános elméletéből is következik. Ismeretes ugyanis, hogy ha az a szinguláris ponthoz tartozó alapegyenlet gyökei:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

és általában

$$r_k = \frac{1}{2\pi i} \log \omega_k$$

tesszük, akkor az $x=a$ pont környezetében az alaprendszer előállítható a következő alakban:

$$Y_k = (x-a)^{r_k} P(x-a), \qquad 16)$$
$$(k=1, \ldots n)$$

a hol a $P(x-a)$ az $(x-a)$ hatványai szerint haladó LAURENT-féle sor, mely abban az esetben, midőn az $x=a$ pont a differencziálegyenletnek úgynevezett *határozott* pontja, csak véges számú negativ hatványt tartalmaz.* (A FUCHS-féle osztálynál minden szingularis pont ilyen jellegű.) Ha y_k ezen értékeit tekintetbe vesszük, akkor azon Y determinâns, mely az

$$y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_m}$$

-ből és ezek differencziálhányadosaiból alakul, tehát az

$$Y = \begin{vmatrix} y_{i_1} & y_{i_2} & \cdots & y_{i_m} \\ y'_{i_1} & y'_{i_2} & \cdots & y'_{i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y^{(m-1)}_{i_1} & y^{(m-1)}_{i_2} & \cdots & y^{(m-1)}_{i_m} \end{vmatrix}$$

ilyen alakra hozható az a pont környezetében:

$$Y = (x-a)^{r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_m}} R(x-a)$$

tehát az x független változónak az a pont körül járásánál valóban az

$$\Omega = e^{2\pi i (r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_m})} = \omega_{i_1} . \omega_{i_2} \ldots \omega_{i_m}$$

-mel szorzódik. *Beke Manó.*

---

* FUCHS Crelle Journal 66. pag. 132.

A KARAKTERISZTIKUS EGYENLETEK ELMÉLETÉHEZ.

A karakterisztikus egyenletek elmélete igen alkalmas arra, hogy bizonyos algebrai feladatoknak *explicit* megoldását nyújtsa. Ez azon a megjegyzésen * alapszik, hogy

«*Minden algebrai egyenlethez raczionális uton található oly helyettesítés, a melynek karakterisztikus egyenlete vele összeesik.*»

A jelen dolgozatban e megjegyzés alapján a következő feladatokat tárgyalom :

1. *Adva lévén két egyenlet, megszerkesztendő amaz egyenlet, melynek gyökei az adott egyenletek gyökeinek szorzatai, azaz, ha az első egyenlet gyökei* $\omega_{i\,(i=1,2,\ldots,m)}$, *a másodikéi* $\omega'_{k\,(k=1,2,\ldots,n)}$ *a keresett egyenlet gyökei*

$$\omega_i\omega'_k \quad (i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$$

legyenek.

2. *Adott egyenlethez megszerkesztendő az az egyenlet, melynek gyökei az adott egyenlet gyökeinek adott pozitív egész kitevővel képezett hatványai.*

*

1. Az első feladat megoldását a következő tétel szolgáltatja :

Ha az

$$x'_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rm}x_m \qquad (A)$$
$$(r=1,2,\ldots,m)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m,$$

---

* L. Rados G.: Az adjungált helyettesítések elméletéről. E folyóirat III. kötetének 18. és 19. l.

ha továbbá az

$$y_s = b_{s1}y_1 + \dots + b_{sn}y_n \qquad (B)$$
$$(s=1, 2, \dots, n)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\omega_1', \omega_2', \dots, \omega_n'$$

akkor a

$$z_{rs}' = \sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n} a_{r\varrho}b_{s\sigma}z_{\varrho\sigma} \qquad (A, B)$$
$$(r=1, 2, \dots, m;\ s=1, 2, \dots, n)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\omega_i\omega_k$$
$$(i=1, 2, \dots, m;\ k=1, 2, \dots, n).$$

Az utolsó helyettesítés részletesen kiírva a következő:

$$z_{11}' = a_{11}b_{11}z_{11} + \dots + a_{11}b_{1n}z_{1n} + \dots + a_{1m}b_{11}z_{m1} + \dots + a_{1m}b_{1n}z_{mn}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$z_{1n}' = a_{11}b_{n1}z_{11} + \dots + a_{11}b_{nn}z_{1n} + \dots + a_{1m}b_{n1}z_{m1} + \dots + a_{1m}b_{nn}z_{mn}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$z_{m1}' = a_{m1}b_{11}z_{11} + \dots + a_{m1}b_{1n}z_{1n} + \dots + a_{mm}b_{11}z_{m1} + \dots + a_{mm}b_{1n}z_{mn}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$z_{mn}' = a_{m1}b_{n1}z_{11} + \dots + a_{m1}b_{nn}z_{1n} + \dots + a_{mm}b_{n1}z_{m1} + \dots + a_{mm}b_{nn}z_{mn}$$

A bebizonyítás áttekinthetővé tétele végett vezessük be a következő KRONECKER-féle jelöléseket: legyen

$$\delta_{r\varrho} = 0, \quad r \gtrless \rho; \quad \delta_{s\sigma}' = 0, \quad s \gtrless \sigma$$
$$\delta_{r\sigma} = 1, \quad r = \rho; \quad \delta_{s\sigma}' = 1, \quad s = \sigma$$
$$\begin{pmatrix} r, \varrho=1, 2, \dots, m \\ s, \sigma=1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

Ezeknek alkalmazása után præmissáink a következők. Az

$$(a_{11} - \delta_{11}\omega_i)x_1 + \dots + (a_{1m} - \delta_{1m}\omega_i)x_m = 0$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad 1.$$
$$(a_{m1} - \delta_{m1}\omega_i)x_1 + \dots + (a_{mm} - \delta_{mm}\omega_i)x_m = 0$$
$$(i=1, 2, \dots, m)$$

és

$$\begin{array}{l} b_{11}-\delta'_{11}\omega'_k y_1+\ldots+(b_{1n}-\delta'_{1n}\omega'_k)y_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}-\delta'_{n1}\omega'_k y_1+\ldots+(b_{nn}-\delta'_{nn}\omega'_k)y_n=0 \\ (k=1,2,\ldots,n) \end{array} \qquad \text{II.}$$

lineár egyenletrendszerek kielégíthetők az x és y ismeretlenek oly értékrendszerei által, melyeknek van a zérustól különböző x és a zérustól különböző y eleme.

Legyen egy-egy ily értékrendszer

$$\begin{array}{l} x_1=\xi_2,\quad x_2=\xi_2,\ldots,x_m=\xi_m \\ y_1=\eta_1,\quad y_2=\eta_2,\ldots,y_n=\eta_n \end{array} \qquad \text{III.}$$

Ha az I. alatti egyenletek mindegyikét rendre végig szorozzuk a II. alatt álló egyenletek mindegyikével, akkor ismét oly rendszert nyerünk, melyet a III. alatti értékrendszer kielégít.

E rendszer a következő:

$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(a_{r\varrho}-\delta_{r\varrho}\omega_i)(b_{s\sigma}-\delta'_{s\sigma}\omega'_k)x_\varrho y_\sigma=0$$
$$(r,i=1,2,\ldots,m;\ s,k=1,2,\ldots,n)$$

Vagy ha a kijelölt műveleteket végrehajtjuk, lesz:

$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(a_{r\varrho}b_{s\sigma}+\delta_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}\omega_i\omega'_k)x_\varrho y_\sigma-\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}a_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}\omega'_k x_\varrho y_\sigma-$$
$$-\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}b_{r\varrho}\delta_{s\sigma}\omega_i x_\varrho y_\sigma=0 \qquad \text{IV.}$$
$$(r,i=1,2,\ldots,m;\ s,k=1,2,\ldots,n).$$

De más oldalról az I. és II. alatt álló egyenletekből következik, hogy

$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(a_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}\omega'_k-\delta_{r\sigma}\delta'_{s\sigma}\omega_i\omega'_k)x_\varrho y_\sigma=0$$
$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(b_{s\sigma}\delta_{r\varrho}\omega_i-\delta'_{s\sigma}\delta_{r\varrho}\omega_i\omega'_k)x_\varrho y_\sigma=0;$$
$$(r,i=1,2,\ldots,m;\ s,k=1,2,\ldots,n)$$

ha ezeket az egyenleteket a IV. alattihoz adjuk, lesz:

$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(a_{r\varrho}b_{s\sigma}-\delta_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}\omega_i\omega'_k)x_\varrho y_\sigma=0$$
$$(r,i=1,2,\ldots,m;\ s,k=1,2,\ldots,n).$$

E rendszert szintén kielégíti a III. alatti értékrendszer és így a:

$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(a_{r\varrho}b_{s\sigma}-\delta_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}\omega_i\omega'_k)z_{\varrho\sigma}=0$$
$$(r,i=1,2,\dots,m;\ s,k=1,2,\dots,n)$$

lineár egyenletrendszernek van oly megoldása, melyben nem minden ismeretlennek értéke zérus. Ennélfogva kell, hogy e rendszer determinánsa eltünjék. Minthogy a

$$\delta_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}=1$$

egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$r=\varrho,\quad s=\sigma,$$

és e szorzat minden más esetben zérus, e rendszer determinánsa a

$$z'_{rs}=\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}a_{r\varrho}b_{s\sigma}z_{\varrho\sigma}$$

helyettesítés karakterisztikus függvényének helyettesítési értéke az

$$\omega_i\omega'_k$$
$$(i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n)$$

helyeken és ez a helyettesítési érték egyenlő zérussal.

Azonban a vizsgált karakterisztikus egyenlet gyökei általánosságban különbözők s minthogy a talált gyökök száma mn az egyenlet fokszámával megegyez, nem is lehet más gyöke az egyenletnek, mint az előbb említettek, tehát az összes gyökök a következő táblázatban foglaltatnak:

$$\begin{array}{l}\omega_1\omega'_1,\ \omega_1\omega'_2,\ \dots,\ \omega_1\omega'_n\\ \omega_2\omega'_1,\ \omega_2\omega'_2,\ \dots,\ \omega_2\omega'_n\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \omega_m\omega'_1,\omega_m\omega'_2,\ \dots,\ \omega_m\omega_n.\end{array}$$

Ezzel a fönt kimondott tétel be van bizonyítva.

E tételből még egy ismeretes determinánstétel következik. Ha ugyanis az $A, B, (A, B)$ helyettesítések determinánsainak értékeit rendre $A, B, (A, B)$-vel jelöljük, akkor az algebra elemei szerint

$$\frac{(-1)^{mn}}{(-1)^{mn}}(A,B)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\omega_i\omega'_k=(\omega_1\omega_2\dots\omega_m)^n(\omega'_1\omega'_2\dots\omega'_n)^m;$$

de

$$(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_m)^n = \left(\frac{(-1)^m}{(-1)^m} A\right)^n$$

$$(\omega'_1\omega'_2 \ldots \omega'_n)^n = \left(\frac{(-1)^n}{(-1)^n} B\right)^m$$

és így

$$(A, B) = A^n B^m.$$

Ezt a tételt legelőször Rados tanár úr állította fel * és Grassman módszereinek alkalmazásával bizonyította be, újabban Hensel más módszer alapján bizonyította be ujból.**

II. Éppen úgy, a mint az előbbi módon két, helyettesítésből alkottunk egy harmadikat, úgy összetehetünk három helyettesítést is megállapítván, hogy

$$(A_1, A_2, A_3) = ((A_1, A_2), A_3),$$

és általában p számú helyettesítést, a hol megállapítjuk, hogy

$$(A_1, A_2, \ldots, A_p) = ((A_1, A_2, \ldots, A_{p1}), A_p)$$

legyen.

2. E megjegyzés után áttérhetünk a második feladat megoldására. Legyenek az A helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m.$$

Képezzük az $(A, A, \ldots, A^{\underline{p}})$ helyettesítést. Ennek karakterisztikus egyenlete az

$$\omega_{i_1}\omega_{i_2} \ldots \omega_{i_p}$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, m)$$

gyökökkel bir. Jelöljük ezt az egyenletet $a)$ egyenletnek.

Az A helyettesítés másodfokú aldeterminánsaiból képezett helyettesítést jelöljük A'-vel. Rados úrnak az adjungált helyettesítésekről szóló és már idézett dolgozatából tudjuk, hogy karakterisztikus egyenletének gyökei:

* Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. VIII. pg. 60.

** Acta Math. Bd. XIV. Ugyanitt találni e tételre vonatkozó irodalmi megjegyzéseket.

$$\omega_{i_1}\omega_{i_2}$$
$$(i_1 \gtrless i_2;\ i_1\ i_2 = 1, 2, \ldots, m).$$

Képezzük most az $(A', A', A, \ldots, A^{\overbrace{p-2}})$ helyettesitést. Karakterisztikus egyenletének gyökei lesznek:

$$\omega_{i_1}\omega_{i_2}\omega_{i_3} \cdots \omega_{i_p}$$
$$(i_1 \gtrless i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, m).$$

Jelöljük ezt az egyenletet $\beta)$-val.

Az $\alpha)$ és $\beta)$ egyenletek explicit alakban vannak megadva. A legnagyobb közös osztó algorithmusa segítségével áttérhetünk az $\alpha')$, $\beta')$ egyenletekre, melynek az $\alpha)$ illetőleg a $\beta)$ egyenlet gyökeit csak egyszerűen tartalmazzák.

Azt állitom, *hogy az $\alpha')$ és $\beta')$ egyenletek többtagúinak hányadosa adja a keresett egyenletet.*

Ugyanis az $\alpha')$ egyenletben a következő tipusú gyökök vannak. Olyanok, melyekben p tényező különböző, ezek bent vannak a $\beta')$ egyenletben is; olyanok, melyekben $p-i$ $_{(i=1, 2, \ldots, p-2)}$ tényező különböző, ezek a $\beta')$ egyenletnek is gyökei.

És ezzel kimeritettük a $\beta')$ egyenlet gyökeit; de az $\alpha')$ egyenletben még oly gyökök is vannak, melyekben az összes tényezők egyenlők és ezek a következők:

$$\omega_i^p, \quad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Ezzel a 2. feladat is meg van oldva.

Bauer Mihály.

PHYSIKAI SZEMLE.

A hőmérséklet mérése elektromos úton.

Dr. Carl Barus: Die physikalische Behandlung und die Messung hoher Temperaturen. Leipzig Amb. Barth 1892.

Karl Barus: Die Messung hoher Temperaturen. Physikalische Revue II. Band 295—317. l. 1892.

L. Holborn und W. Wien: Ueber die Messung hoher Temperaturen. Zeitschrift für Instrumentenkunde. Zwölfter Jahrgang. 257—267 és 296—307 l. 1892.

C. E. Guillaume: La mesure des températures par les procédés électriques. La Lumière Électrique XXVIII. köt. 1888.

J. Blondin: Recherches récentes sur la mesure des températures par les procédés électriques. La Lumière Électrique XLVII. köt. 1893.

*

A physikai méréseknek igen nagy része czéljául tűzi ki annak megállapítását: miképen változik a különböző anyagok szerkezete s az őket jellemző állandók a hőmérséklettel. Hogy ezt tehesse, s hogy a különböző mérések egymással összehasonlíthatók legyenek, mindenek előtt a hőmérséklet mérésére vonatkozólag egységes megállapodásra van szükség. Bármely jelenség, mely a hőmérséklettel változik, alapja lehet a hőmérséklet definitiójának. A míg a hőmérsékletnek theoretikus alapon való definitiója nem történik, addig ama szempont dönt, hogy mennyire állítható elő az illető jelenség menten minden egyéb zavaró körülménytől, hogy tehát mennyire biztos a megállapodás. Már Galilei folyadék kiterjedésére alapította hőmérsékleti skáláját. Mióta Gay-Lussac kimutatta, hogy valamennyi gáz a hőmérséklettel egyformán terjed ki, azóta a hőmérséklet tudományos definitiója a gázok kiterjedése alapján történik. Közben azonban a thermodynamika fejlődvén, lehetségessé vált a megfordítható körfolyamatok segítségével a hőmérsékletnek theoretikus alapon való definitiója. Ugyanakkor kiderült, hogy a tökéletes gázok kiterjedésére alapított hőmérsékleti skála eme theoretikusan megállapított skálával egyezik. A mennyiben azonban a «permanens» gázok sem követik tökéletesen a Gay-Lussac-Mariotte-féle törvényt, az egyes gázok kiterjedésére alapított skálák egymástól, valamint az absolut skálától némi eltérést mutatnak. Azonban a hydrogénre ez az eltérés oly csekély, hogy mindeddig még az eltérés irányát sem sikerült kideríteni.

A léghőmérőnek nagy előnye, hogy igen széles körben használható.

Lefelé a levegő kritikus hőmérséklete szab határt, melynek közelében a levegő elveszti a tökéletes gáz jellegét. Felfelé pedig az edény szab határt, melybe a levegőt szükségképen zárni kell; igen magas hőmérsékletnél t. i. az edény vagy megolvad vagy nem zárja el a levegőt tökéletesen a környezettől. Rosz oldala a léghőmérőnek, hogy igen gondos kezelést követel, ha megbízható eredményeket várunk tőle, s aránylag nagy tért foglal el; pedig nagyobb téren belül magas hőmérsékletet előállítani és állandósítani, oly esetekben pl. a melyekben folyadékfürdők már nem használhatók, igen nehéz feladat.

Gyakorlati szempontból tehát igen kivánatos oly módszer megállapítása, mely az előbb említett hátrányoktól ment. Elvi szempontból bármely, a hőmérséklettel változó jelenség felhasználható e czélra, csak biztos adatokat adjon. Igen régen hasznosítják e czélból a folyadékok, nevezetesen a higany kiterjedését a hőmérséklettel. Üvegcsőbe zárt higanynak persze más a látszólagos kiterjedése, mint a levegőé, azért a higany hőmérőt a léghőmérővel kell összehasonlítani, ha az absolut skálában akarunk vele mérni. Kellő gonddal kezelve a higanyhőmérő 0 és 100° között néhány ezred fokig biztos adatokat szolgáltat. Azonban sokkal kisebb körben használható, mint a léghőmérő, mert hiszen 39°-nál a higany megfagy, 300°-on túl pedig gőzének sürűsége igen rohamosan növekszik.

Felfelé a higany forrpontján túl is használhatóvá teszik a higanyhőmérőt az által, hogy a capillaris csövet nitrogennel töltik meg. Ekkor azonban a hőmérő utólagos kalibrálása keresztül nem vihető, másrészt a hőmérő belsejében előálló nyomásváltozások az edény oly deformatióját hozzák létre, melyről nehéz pontosan számot adni. Ily módon a higanyhőmérő használható ugyan még 400°-on túl is, de 200°-on túl alig eszközölhetők vele igen pontos mérések. Kitünik ebből oly módszernek a szükségessége, mely úgy nagyon magas, mint nagyon alacsony hőmérsékletek mérésére alkalmas s melylyel a léghőmérő hátrányai elkerülhetők.

Kinálkoznak erre elektromos módszerek: nevezetesen a thermoelem elektromotoros erejének s a vezetők ellenállásának változása a hőmérséklettel.

Különösen a thermoelektromos módszer kecsegtet nevezetes előnyökkel. 1. A tér, melynek hőmérséklete lemérendő, igen kicsiny lehet, mert hisz a thermo-elem egyik forrasztási helyét kell csak a térbe elhelyezni; kis keresztmetszetű drótokból készítve az elemet, a forrasztási hely tényleg csak igen kis helyet foglal el. — 2. Az elekromotoros erő csak a két forrasztási hely hőmérsékletétől függ; független a hőmérséklet eloszlásától az elem mentén. — 3. Platinát s annak valamely ötvényét használva, a módszer használhatóságának felső határa a platina olvadási pontja; tehát igen tág közben alkalmazható. — 4. A forrasztási hely igen rövid idő alatt felveszi ama tér hőmérsékletét, melybe helyeztetett, holott a léghőmérő gömbje pl. csak hosszabb idő mulva veszi fel teljesen a környezet hőmérsékletét.

A kisérlet feladata már most eldönteni, hogy a módszer tényleg használható-e, azaz hogy ugyanazon elem ugyanazon hőmérsékleti viszonyok között ugyanazon elektromotoros erőt mutatja-e, hogy idővel, nevezetesen többszöri hevítés után nem változnak-e meg állandóan az elem adatai.

A kisérletezés útja elő van írva: meg kell határozni, miképen változik az elem elektromotoros ereje a hőmérséklettel? Ha az összefüggés a hőmérséklet és elektromotoros erő között minden időben ugyanaz marad, akkor a módszer hasznavehető. Lemérve az elem elektromotoros erejét, visszakövetkeztethetünk az egyik forrasztási hely, s ezzel a környezet hőmérsékletére. Magától értetődik, hogy csak az egyik forrasztási hely hőmérsékletét kell változtatni, míg a másik állandóan ugyanazon hőmérsékleten marad.

Az előbb említett czélból sok kisérletet tettek. Csakhamar a thermo-elekromos áramok felfedezése után Becquerel és Breschet sikerrel alkalmazták a thermo-elemet az emberi test hőmérsékletének mérésére. Regnault is foglalkozott a thermo-elemekkel. Kisérleteiből azt a következtetést vonta, hogy a thermo-elem hőmérséklet-mérésre alkalmatlan. Nem ismerve még tüzetesebben a thermo-áramok sajátságait, Regnault abban a nézetben volt, hogy a thermo-elem elektromotoros ereje csak a két forrasztási hely hőmérséklet-különbségétől függ. Jelenleg azonban tudjuk, hogy függ a két hely abszolut hőmérsékletétől is; úgy hogy az egyik helyet állandó hőmérsékleten tartva, a másikat emelve, az elektromotoros erő növekedik bizonyos pontig, azontúl hevítve azonban, az elektromotoros erő csökken: ezen pont közelében az elektromotoros erő lassan változik. Ebből rögtön levonható ama következtetés, hogy oly thermo-elemet kell választanunk, melynek az u. n. neutrális pontja messze fekszik a hőmérsékletiköztől, melyben az elem mérésre használandó.

Részletesen foglalkozott a kerdéssel Le Chatelier; különféle elemeket vetett vizsgálat alá; legjobbnak találta a platina és 10%-os rhodiumos platinából készült elemeket, melyek igen állandóknak mutatkoztak: többszöri hevítés az elemen semmit sem változtatott. A léghőmérő használatát elkerülte azzal, hogy elemének egyik forrasztási helyét ismert forrpontú folyadék forró gőzébe helyezte; igen magas hőmérsékleteknél pedig olvadó fémbe.

Az egyes fémek olvadási pontjául a Violle meghatározta értékeket vette.

Ugyanilyen elemmel Wien és Holborn is foglalkoztak; a hőmérsékleteket közvetlenül léghőmérővel határozták meg. Különös gondot fordítottak a léghőmérő ugynevezett «kártékony teréből» származó hibára. A léghőmérő gömbje ugyanis igen vékony cső segítségével van a manometerrel — melylyel a léghőmérőben levő állandó térfogatu levegő nyomását mérik —

összekötve. Az ezen csőben lévő levegő igen rosszúl definiált hőmérsékleti viszonyok között van, a miből hibák származnak, melyekről igen nehéz számot adni. Hogy a hőmérséklet ezen csőben való elosztását kipuhatolják, magát a thermo-elemet használták fel.

A thermo-elem két vékony összeforrasztott drótból állott; rendes észlelésnél a forrasztási hely a léghőmérő gömbjének közepén volt elhelyezve, úgy azonban, hogy a sodronyt a léghőmérőben s a vékony csőben el lehetett tolni, miáltal a forrasztási helyet a vékony cső különböző helyeire hozhatták. Az ott észlelt elektromotoros erő értékéből következtethettek a hőmérsékletre, miután már előző kisérletekből közelítőleg ismerték a hőmérséklet és elektromotoros erő közötti összefüggést. Kisérleteiket 400°-tól körülbelül 1400°-ig terjesztették ki. Az eredményeket formulába foglalták, mely az elektromotoros erőhöz a megfelelő hőmérsékletet adja. A formula ily alaku:

$$t = 13{,}76e - 0{,}004841e^2 + 0{,}000\,001\,378e^3$$

e az elektromos erő, t az egyik forrasztási hely hőmérséklete, míg a másik 0° hőmérsékleten van.

Ez a képlet számos mérés eredményét fejezi ki; egy ugyanazon elem elektromotoros erejéből számított hőmérséklet a tényleg észlelttől 1000° körül legfeljebb 5°-kal tér el, ugy hogy elemükkel 1000° körül a hőmérsékletet 5°-nyi pontossággal határozhatják meg. Ugyanekkora eltéréseket mutatnak egymástól az egyes elemek, melyek lehetőleg egyforma anyagból készültek.

Legbehatóbban foglalkozott a kérdéssel legujabban Barus. A platina és 10%-os iridiumos platinából készült elemet vizsgálta egyenesen a léghőmérővel. Hogy a léghőmérő gömbjében a hőmérséklet lehető egyforma legyen, úgy a léghőmérőnek, mint a fűtőkemenczének igen érdekes szerkezetet adott. Az elem egyik forrasztási helyét a gömbbe benyúló csőbe helyezte. A bayeux-i porczellánból készült léghőmérőt muflival vette körül és így helyezte a kemenczébe, melynek lángjai tehát a hőmérőt direct nem érték. A mufli a léghőmérő csöve mint tengely körül foroghatóan volt elhelyezve, mi által a hőmérőben a forgás tengelye körül a hőmérséklet eloszlása symmetrikus volt. Maga a kemencze függélyes hengerből állott, melybe két láng oldalnyilásokon, tangentiális irányban lépett be; ez által valóságos lángörvény keletkezett a kemenczében, s egyúttal a hőmérőben függélyes tengely körül is symmetrikusan oszlott el a hőmérséklet.

A gonddal végzett kisérletek igen kielégítő eredményre vezettek; az elem többszöri használat után is egyformán viselkedett. A hőmérséklet és elektromos erő közötti össeefüggést nem sikerült emprikus formulába önteni az észlelés határain belül. Az elektromotoros erő görbéje különben igen közel egyenes. Az elem annyira állandónak mutatkozott, hogy Barus becslése szerint még 1300°-nál is 1°-ig biztosan meghatározható vele a hőmérséklet. Az elektromotoros erő 350°-tól 1100°-ig 3400 mikrovolttól körülbelül 14000-ig változik. Az egyes elemek viselkedésében nagyobb külömbségek mutatkoztak, ugyanazon elektromotoros erőnek körülbelül 5°-kal eltérő hőmérsékletek feleltek meg.

Mindeme kisérletekből kitünik, hogy előzetesen kalibrált platina a 10%-os rhodiumos ptatina elemmel a hőmérséklet 1300°-ig körülbelül 1°-nyi pontossággal meghatározható; nagy gonddal készült, de előzetesen nem kalibrált elemmel pedig körülbelül 5°-nyival.

Ha az ellenállás változásával akarjuk a hőmérsékletet az absolut skálában mérni, mindenek előtt tudnunk kell, miképen változik az ellenállás a hőmérséklettel. Erre vonatkozólag igen számos mérést eszközöltek, különféle vezetőkkel. Egyenesen a hőmérséklet mérése szempontjából vizsgálta a platina ellenállását CALLENDAR. Rendkivül tiszta platinával rendelkezett, melyen a leggondosabb chemiai elemzés sem volt képes idegen alkatrészeket kimutatni. Körülbelül 0,2 mm-es drótot használt, melynek ellenállása méterenkint 0°-nál körülbelül 5 ohm. Mindenek előtt a drótok ellenállásának változatlanságát vizsgálta s meggyőződött, hogy többszöri hevítés után ugyanazon hőmérsékletnél 0° és 600° között az ellenállás $\frac{1}{5000}$-ig állandó; a drótokat t. i. csak ilyen közben vizsgálta. Azután ugyanazon anyagból készült külömböző drótokat hasonlított össze; kitünt hogy a külömböző drótok ellenállásából számított hőmérsékletek 0° és 100° között nehány század fokig, 600°-nál pedig 1°-ig egyeztek. 0° és 600° között az észlelés határain belül parabolikus formulával állíthatta elő az ellenállást, nevezetesen:

$$r_t = r_0 \,(1 + 0{,}003448t - 0{,}000000533t^2)$$

Exponentialis formulával is kifejezhette a viszonyt s pedig ily alakban:

$$r_t = r_0 e^{\frac{\alpha t}{1+\beta t}}$$

hol

$$\alpha = 0{,}003426 \text{ és } \beta = 0{,}001529$$

Látható tehát, hogy az ellenállás változásával 0 és 100° között a hőmérséklet néhány századfokig, 600° körül pedig körülbelül 1°-ig biztosan mérhető. CALLENDAR különben kisérleteit 600°-on túl is folytatja.

Rendkivül érdekesek CAILLETET és COLARDEAU kisérletei. Említve volt, hogy középhőmérsékletnél a hydrogen-thermometer adatai teljesen egyeznek a thermodynamikus absolut skálával. Az a kérdés, lefelé meddig tart az egyezés? A hydrogen folyósodási pontjához közeledve, elveszti a tökéletes gáz jellegét, s akkor a két skála nem egyezhet.

Meddig megbízható a hydrogen-thermometer? Ezen kérdéssel foglalkoznak CAILLETET és COLARDEAU. A mint a gázhőmérő felmondja a szolgálatot, nem áll biztos módszer a rendelkezésünkre a hőmérsékletnek abszolut skálában való mérésére, s egyenesen a gázhőmérő adataiból nem is lehet eldönteni, valjon eltérnek-e már az absolut skálától vagy nem. Csak kerülő úton lehet erről meggyőződni.

«Képzeljük, hogy ugyanazon térben egy hydrogen hőmérő mellett oly készülékek sora van felállítva, melyek a hőmérséklettől függő külömböző sajátságokon alapulnak.

Jegyezzük fel mindegyiknek az állását: J_1 J_2 J_3 . . . ha a hőmérséklet T_1 T_2 T_3 . . ., mely utóbbi adatokat a hydrogen-hőmérő szolgáltatja oly közben, melyben még eléggé tökéletes gáz.

Ezen eredmények görbéit megrajzolva, mindegyik készülékre egy

$$J = f(T)$$

összefüggést nyerünk, mely a készülék adatait az absolut hőmérséklettel öszszefűzi. Fordítva felhasználhatjuk eme képletet arra, hogy minden egyes készülék adatából a hozzátartozó hőmérsékletet kiszámítsuk. De világos, hogy ezen számítás csak addig bir értékkel, a míg T oly határok között fekszik, melyek között a kalibrálás eszközöltetett. Minden, kissé távoleső extrapolatio igazolva van a többiekkel való egyezése által és pedig annál biztosabban, minél nagyobb a felhasznált készülékek száma s minél különfélébb jelenségeken alapulnak.

Lassankint sülyesztvén a hőmérsékletet, minden valószínűség szerint be áll majd ama pillanat, mikor a hydrogen, kritikus pontját eléggé megközelítve, nem ad eléggé egyező adatokat.»

Cailletet és Colardeau 5 ily készüléket használtak: 1. hydrogen-hőmérőt; 2. 0,2 mm. átmérőjű és 6 m. hosszú platina-sodronyt, melynek ellenállását mérték; 3. Le Chatelier-féle thermo-elemet; 4. vasvörösrézből álló thermo-elemet; 5. 300 gr. sulyú platina-darabot, melylyel a hőmérsékletet kalorimetrikusan mérték. Mindegyikhez meghatározták a hozzá tartozó $f(T)$ görbét, meghatározták az ethylen forrpontját normális nyomás alatt s a következő értékeket nyerték:

Hydrogen-hőmérővel	102°,4
Platina ellenállásával	102°,6
Calorimetrikusan	102°
Le Chatelier elemével	102°,1
Vas-vörösrézelemmel	102°,9

Az egyezés teljesen kielégítő, s így biztosra vehető, hogy —100°-ig a hydrogen-thermometer adatai a thermodynamikus skálával egyeznek. Azelőtt már Wroblewsky végzett hasonló vizsgálatokat, de thermometerét csak egy thermo-elemmel hasonlította össze s azt következtette, hogy a hydrogen-thermometer —190°-ig helyes. Következtetése azonban nem oly biztos, mint az előbbi. *Tangl Károly.*

A Mathematikai és Physikai Társulat ünnepélyes ülése

1894. OKTÓBER HÓ 25-ÉN.

Dr. KŐNIG GYULA alelnök az ülését megnyitván, üdvözli a nagy számmal megjelent tagtársakat. Előadja, hogy a választmány határozata szerint a mai ülés feladata a társulat elnökét, b. EÖTVÖS LORÁND urat mint m. kir. vallás- és közoktatásügyi minisztert, a Math Phys. Társulat nevében üdvözölni, az érettségi vizsgálatot tett tanulók első mathematikai versenyének eredményét kihirdetni s a jutalmakat kiosztani.

Felkéri FÉNYES DEZSŐ (Arad) és SZABÓ JÓZSEF (Vácz) tagtárs urakat, hogy MAURITZ REZSŐ vál. tag vezetése alatt ő Nagyméltóságát az ülésre meghívni sziveskedjenek.

Az egybegyültek a belépő elnököt felállással üdvözlik, zajos éljenzéssel fogadják, mire KŐNIG alelnök a következő szavakkal nyitotta meg a rövid időre félbeszakadt ülést:

Nagyméltóságú Elnök Úr, tisztelt Tagtársak!

A Mathematikai és Physikai Társulat ma családi ünnepet ül. E családi jellegnek felel meg az egyszerű külszín; de azért mégis úgy tetszik, úgy érezzük, mintha valami láthatatlan dísz járná be megszokott otthonunkat, mintha a magyar tanügy, a magyar tudomány ünnepe volna, a mit megülni készülünk.

Legmélyebb alattvalói hódolattal emlékszünk meg Ő Felsége legkegyelmesebb elhatározásáról, mely b. EÖTVÖS LORÁNDOT, társulatunk szeretett elnökét a magyar közoktatásügy élére állította. Üdvözletét hozza ez alkalomból e társulat elnökének és megalkotójának; jogos örömünket és bizalmunkat, nagyratörő reményekkel párosult megnyugvásunkat tolmácsolja majd fölkért szónokunk. De engedjék azért röviden kimondani azt, hogy üdvözletünknek az ünnepelt férfiu kiváló személyes tulajdonságai mellett, még messzevágó elvi jelentősége is van.

A magyar tanügy, a magyar tudomány b. EÖTVÖS LORÁND miniszterré való kinevezésével nagykorúvá lett. Gyámság alatt álltunk; és a gyámság alól — bármily jóakaró legyen is — szabadulni, mindenkor jogos vágya az ifjunak. Önállók lettünk, a magunk jelölte, körünkből lett vezér parancsol sorainknak és már ezért is fokozott kötelességtudással, fokozott buzgalommal keressük útunkat pályánk rózsái és tövisei között.

Ma a rózsák napja derül; nem legkevésbbé nekem. Mert igaz hálával tartozom Önöknek, t. tagtársak, hogy én nyithattam meg ezen ülésünket, és hogy én adom majd ismét át e helyet szeretett elnökünknek, honnét a mainál hosszabb időre sem ma, sem később nem eresztjük el soha!

Most pedig a szó Bartoniek Géza titkár urat illeti.

A szólásra felhivott a következő beszédet mondta:

Nagyméltóságú Miniszter úr, mélyen tisztelt Elnökünk!

A Mathematikai és Physikai Társulat igen emlékezetes évfordulóhoz közeledik: negyedik fordulójához annak a napnak, a melyen a helybeli mathematikus és physikus szaktársak Nagyméltóságod meghívására ezen a helyen első izben összegyűltek, hogy meghallgassák Nagyméltóságodnak a gravitatióra vonatkozó vizsgálatairól tartandó előadását.

Nagyméltóságod két előadásban ugyanannyi év páratlan kitartású munkásságának fényes eredményeivel ismertetett meg bennünket. Láttuk, mint enyészteti el Nagyméltóságod az akadályokat, melyek más kutatókat az útnak úgyszólván a legelején megállítottak. Láttuk, miként teszik át Nagyméltóságodnak szinte végtelenig finomított módszerei a kutatások határait oly terekbe, a melyeken az elmélet ugyan már előbb is otthonosan mozoghatott, de hol a szabatos ismeretszerzés még alig próbálkozott. Láttuk, miként vezet egy-egy szerencsésen megoldott kérdés új problémák egész seregére s a végleges benyomás, mely rajtunk erőt vett, az volt, hogy a Nagyméltóságod kutatásaiban felszínre vetett kérdések megoldása nem egy tudós, hanem a tudósok egész iskolájának munkájára vár.

Azonban minderről bővebben szólni nem érzem magam illetékesnek. Csupán csak egy kisérletre hivom fel most tisztelt tagtársaim figyelmét: arra a kisérletre, a melyet ő Nagyméltósága amaz előadásainak hallgatóin s közvetve az összes magyar mathematikusokon és physikusokon folyamatba tett. Kisérlet tárgyává tette, nem lehetne-e a magyar mathematikusokat és physikusokat egyesíteni oly czélból, hogy az a munka, melyet az egyes a saját szakbeli tökéletesedése terén elvégez, a többi szaktársakra is értékesüljön s hogy egymást támogatva, valamennyien könnyebben haladjunk. A társulás czélját nem valami hangzatos, csalogató jelszavakba burkolva fejezte ki. «Tanuljunk egymástól, hogy mennél jobban taníthassunk!» Erre szólított fel bennünket Nagyméltóságod; s várakozásában nem csalódott.

Excellentiádnak ez a kisérlete, mint sok más, sikerült. A magyar mathematikus és physikus szaktársak meghallották Nagyméltóságod hivását, egyesültek s rövid idő alatt létrejött a Mathematikai és Physikai Társulat.

Nagy érdeme Nagyméltóságodnak, s nagy érdeme és dicsősége Nagyméltóságoddal együtt annak a kicsi, de lelkes tanárcsapatnak, mely a mai nemzedéket nevelte s nevelte úgy, hogy a mesterek eszméiért lelkesedni tudott, bárha egy része a sorssal nem épen könnyű harczban áll. A magyar mathematikusok és physikusok megértették, hogy Nagyméltóságodnak bámulatosan egyszerű formulája mély értelmet rejt, magasztos czél felé vezet. Megérezték, hogy a tudomány, a tudományhoz vezető iskola s ezzel műveltségünk szinvonala látja hasznát, ha az egyes a szakbeli tökéletesedés útján előbbre halad.

A ki társulatunk ügyeiről csupán csak szerény folyóiratunk lapjairól értesülhet s ha tárgyiasan és elfogulatlanul itélni tud, azt a megdönthetetlen igazságot fogja róluk leolvasni, hogy Nagyméltóságod társulatunkat nemcsak életre szólította, de valósággal megalapította és megalakította, oly szervezetet adván neki, mely fennállását hosszú időre biztosítja. Mindenesetre addig, a meddig a magyar mathematikusok és physikusok szellemi irányzata lényegében meg nem változik.

A társulat ama tagjai, kiknek azzal kedvezett a szerencse, hogy Nagyméltóságodat a társulat alapítás munkájában közvetlenül szemlélhették, többet is láttak: tartoznak vele a jelennek s a jövőnek, hogy ezt most ünnepélyesen konstatálják.

Minden társulati működés sikerességének egyik legfőbb tényezője, éltető eleme, a jó társulati szellem. A mi kis társulatunk kiváló szerencséje, hogy állandóan Nagyméltóságod példája lebegett előttünk. Ha csak kiváló állásából folyó kötelességei lehetetlenné nem tették, mindenkor megjelent összejöveteleinken, példát adott a munkában s példát adott abban, miként kell egymás törekvéseit méltányolnunk, egymást buzdítanunk, serkentenünk. Nagyméltóságod személyes tulajdonságainak köszönjük, hogy társulatunkban a minden jó ügyet megrontó kicsinyes rivalitások gyökeret nem vertek s hogy tarsulati működésünk nekünk nemcsak továbbképzésünkre hasznos, hanem egyúttal kellemes foglalkozásunk is. Röviden úgy merném ezt kifejezni, hogy Nagyméltóságod a társulatnak nemcsak életet, hanem erkölcsöt is adott.

Mind ennek természetes következménye, hogy mi, a társulat tagjai, Nagyméltóságod bölcs vezetésében rendületlen bizalmukat helyezzük s Nagyméltóságod előtt a legmélyebb tisztelettel, de egyúttal legbensőbb vonzalommal is hódolunk. S ha eddig még sem gondoltunk arra, hogy tiszteletünknek, legőszintébb hálánknak kifejezést adjunk, tán azért van, mert Nagyméltóságod megmutatta nekünk, mint kell az eszmék szolgálatában lelkesedéssel munkálkodni, de személyek kultuszára példát soha sem adott.

Hálánk néma volt és lehetett mindaddig, míg külső, nagy impulzus szólásra nem kényszeríté.

Nem hiszem, hogy akad tagtársam, a ki túlzással vádolna, ha azt mondom, hogy azon a napon, a melyen Ő Felsége legmagasabb kegyelme Nagyméltóságod kezére bizta hazánk szellemi ügyeinek legfőbb intézését s a magyar művelődésnek minden híve a legigazabb örömmel telt el, a mi érzelmeink egy fokkal melegebbek voltak, s lelkesedésünk magasabbra emelkedett.

Most már nem hallgathattunk. De épen azért, mivel abban a kivételesen szerencsés helyzetben voltunk, hogy Nagyméltóságod társulatunkért többet tett, mint másokért, mi is többel tartoztunk, mint mások. Híven Nagyméltóságod előttünk jól ismert intentióihoz, nem szóval, hanem tettel, vagy legalább is a jó szándék és a becsületes elhatározás kétségtelen jeleivel akartunk ma Nagyméltóságod előtt megjelenni.

Az esemény emlékét a társulat életében megörökítendő, a választmány elhatározta, hogy a hazai középiskolákon érettségi vizsgálatot tett tanulókat minden évben mathematikai-physikai versenyre szólítja, a verseny győzteseit megjutalmazza; és hogy ki legyen fejezve az a szerencsés körülmény, hogy társulatunknak Nagyméltóságod volt alapító elnöke, elhatározta azt is, hogy a díjak *b. Eötvös*-díj néven adassanak ki; a mihez ezennel kegyes beleegyezését kérjük.

Az első versenyt megtartottuk s örömünkre, sikerrel tarthattuk meg.

Mielőtt arra kérnők Nagyméltóságodat, hogy az eredményt kihirdetni s a megitélt jutalomdíjakat kiosztani méltóztassék, még egy más kéréssel is járulunk Nagyméltóságod elé.

Annak a komoly elhatározásnak bizonyságául, hogy a Nagyméltóságodtól a társulatba vitt eszmék szolgálatában a jövőben is rendületlenül kitartani kivánunk, összegyűjtöttük aláírásainkat. Nem pompás kötetbe, csupán szerény fasciculusba foglaltuk, melynek egyetlen ékessége a társulat symboluma: a *Mathematika*.

Kedves előttünk ez a symbolum eredete miatt; és kedves ama symbolikus erejénél fogva, melyet mi neki tulajdonítunk.

Nem a klasszikus szépségek piaczáról vettük mását: eredetije a M. T. Akadémia homlokzatát díszíti. Mi onnét lehoztuk és szövetségünk külső jelét: oklevelünket ékesítettük vele. Ma már ott díszlik tudományszakaink legszerényebb munkásának főbüszkesége, a könyves polcza fölött. Hő vágyunk, erős hitünk, hogy a hová Mathematikánk képe bevonult, a tudomány szeretetét, ha szunnyadt, felébresztette, s ha ébren volt, kitartásra buzdította.

De kedves nekünk ez a symbolum azért is, mert emlékezetünkbe hozza, hogy azok a dicsők, kiknek rendelkezéséből a művész alkotása az Akadémia homlokzatára jutott, nagy, a nemzet művelődésében igen nagy fontosságot tulajdonítottak ama a szakoknak, a melyekért mi lelkesedünk.

És igaz, mély megindulás fog el bennünket, ha arra gondolunk, hogy a legtöbb, a legtisztább, a legmelegebb fényt abban az időben épen annak a neve sugározta ki az Akadémiából, mely névnek Nagyméltóságod az örököse. Ez a fény messze elhatott, addig, a meddig a civilisatió terjed; de legmelegebb sugarait mégis a haza fogta fel, és felfogta épen akkor, a mikor az életet ébresztő meleg után a nemzet a legjobban áhitozott.

S hatásukra élet gerjedt. Most már élet van a hazában, minden téren; de hogy az élet egészséges fejlődésre vezessen, világosság, sok világosság kell még ahhoz.

A társulat minden tagjának szivéből olvasom ki a kivánságot: Legyen Nagyméltóságod működése az, mely ezt a világosságot szétáraszsza. És adja Isten, hogy Nagyméltóságod az eszmék diadalát boldogságban érhesse meg.

S midőn végül arra kérem Nagyméltóságodat: fogadja kegyesen a mai ünnep emlékeül ezt a mi neveinkkel teleirt fasciculust, a társulat összes tagjainak még egy kérését is bátorkodom előadni: Ne hagyja el Nagyméltóságod társulatunkat, maradjon elnökünk ezentúl is. Nem úgy értjük kérelmünket, hogy annyi munkáját, gondját mernők társulatunk javára kivánni, mint eddig; jól tudjuk, hogy Nagyméltóságodat immár az egész ország gondjai terhelik, hogy minden munkás órája nagy érdekek szolgálatában múlik el.

De vannak, lesznek pihenő perczei is. Ezekben gondoljon Nagyméltóságod mi reánk, a mi szerény társulatunkra s jőjjön el körünkbe meggyőződni, vajjon híven kitartunk-e amaz eszmék szolgálatában, melyek ápolását társulatunkra bizta.

S ha Nagyméltóságod tapasztalata mi reánk nézve kedvező lesz, ne vonja meg tőlünk jóindulatát.

*

E szavak elhangzása után ő Nagyméltósága a jelenlevők zajos éljenzése között a következő beszéddel foglalja el az elnöki széket:

Mélyen tisztelt Mathematikai és Physikai Társulat!

Avval, hogy itt oly nagy számmal megjelentek, azzal, hogy hozzám nem annyira magasztaló, mint inkább barátságos szavakat intéztek, örömet kivántak nekem okozni. És én nem tagadhatom, bevallom szives örömest, hogy igazán nagy örömet is okoztak. Örvendek, hogy a Mathematikai és Physikai Társulat, melynek alapításához én is hozzájárulhattam valamivel fennállásának négy éve alatt azzá fejlődhetett, a mi ma, hogy tagjainak száma szaporodott s folyton szaporodik; hogy tagjainak szivében az egyetértés, mely minden társulat fennállására és gyarapodására szükséges, nagyra növekedett és nem szűnt meg soha az igazi lelkesedés a tudományos, a kulturális czélok iránt.

De a mikor ezen örömről szólok, a melyet nekem most okoztak, nem tagadhatom el azt sem, hogy ezen öröm mellett, mint minden földi öröm mellett van valami fájdalom is; valami abból a fájdalomból, melyet érez az, a ki a megszeretett otthont, a melyben nagyra nőtt, a melyben soká dolgozott, elhagyni kényszerült és a melyet azután később, bár mint szeretett vendég, de mégis csak mint vendég láthat meg. Hisz ez a terem nekem otthonom, kedves otthonom volt, most pedig csak vendégül jelenek meg benne.

Önök uraim ismernek engem jól, hiszen eddigi pályatársaim, nagyrészt régi barátaim; azért tudják azt, nem szükséges, hogy részletesen kifejtsem önök előtt, hogy nem a nagyravágyás, nem a hatalom után való törekvés volt az, a mely arra indított, hogy jelen állásomat elfoglaljam. Tudják, hogy erre is ugyanazon törekvés, ugyanazon czélokra való törekvés indított, a mely az előtt vezérelt; az a törekvés: hogy hazánknak a tudomány szolgálatában munkása legyek.

Előbb azok közé tartoztam, kik a tudomány művelését maguk eszközlik; magam fogtam meg mintegy azon szerszámokat, ásót, kapát, a melylyel a tudomány földét művelik. Most más feladat áll előttem, a melynek czélja mégis a régi maradt, bár teendőm más; az t. i., hogy egyengessem az útat azoknak, a kik ezen tudományos föld művelésében dolgozni kivánnak.

Mostani foglalkozásom mellett, mostani állásomban, a mikor a miniszteri székben ülök, részrehajlónak lennem nem szabad; nem szabad részrehajlónak lennem nemcsak egyének, de tudományszakok iránt sem. A miniszteri székben nem szabad, hogy csak physikus legyek. Hanem hiszen, a mint az előttem szóló is mondta, a munka közben vannak pihenő órák is; és ezen pihenő órákban engedjék meg, hogy ismét ide jőjjek és akkor ismét a régi physikus, mint régen, ismét az Önök körében jó barátjuk maradhassak.

Már most szívből jövő köszönetemet mondom ki az ünnepeltetésért és a barátságos jóindulatért, a melyet irántam tanusítottak. Engedjék meg, hogy, mint régen, ezen elnöki székemet elfoglalhassam, hogy ujra együtt hozzáláthassunk azon munkához, a mely minket eddig is egyesített.

*

S most térjünk át a munkára. — A mai ülés második tárgya a tanulók mathematikai versenyéről szóló jelentés s a díjak kiosztása. Felszólítom az ügyvivő titkárt jelentésének előterjesztésére.

Bartoniek Géza ü. titkár jelentése a következő:*

Mélyen tisztelt Mathematika és Physikai Társulat!

A választmány f. é. junius hó 22-én tartott ülésén azzal bízott meg, hogy a hazai középiskolákon a lefolyt tanévben érettségi vizsgálatot tett tanulók között rendezendő országos verseny ügyében a szükséges intézkedéseket megtegyem.

Szerencsém van jelenteni, hogy a versenyre szóló felhívást az összes hazai teljes középiskolák igazgatóinak megküldtem, azzal a kérelemmel, hogy azt az abiturienseknek tudomására hozni szíveskedjenek.

Bár oly időben vették a felszólítást, a mikor a legtöbb helyütt a tanulók már elszéledtek volt s az évzárás teendőivel legjobban voltak elhalmozva, az igazgató urak méltányolták a társulat törekvését s gondoskodtak róla, hogy a versenyre hívatottak a felszólításról értesüljenek. Tudomásom van róla, hogy több igazgató magánlevélben hívta fel az intézet volt tanítványait a versenyben való részvételre.

Az igazgató urak buzgalmának s a napi sajtó készséges támogatásának köszönhető, hogy a verseny felől az érdekeltek jókor értesülhettek.

A kitűzött határidőig, szeptember 8-ig összesen 67 érettségit tett tanuló jelentkezett.

Ekkor az elnökség megállapította a verseny tételeit s a verseny megtartását szeptember hó 17-re, d. u. 2 órára tűzte ki.

A kitűzött időre a jelentkezők közől Budapesten 48, Kolozsvárott pedig 6 kezdő főiskolai tanuló jelent meg.

A társulat részéről Budapesten a verseny helyén megjelentek: König Gyula és Schmidt Ágoston alelnökök, Balog Mór, Beke Manó, Csillag Vilmos, Fröhlich Izidor, Gruber Nándor, Kürschák József, Nagy Dezső, Tangl Károly, Tőtössy Béla, Wagner Alajos, Wittmann Ferencz t. tagok, végre Bartoniek Géza, Rados Gusztáv titkárok, Kopp Lajos és Kövesligethy Radó jegyzők.

Kolozsvárott a verseny ugyanabban az időben Farkas Gyula, Pfeiffer

* Az ülésen időkimélésből csak rövid kivonata adatott elő.

Péter, Sárkány Lajos és Zachár János tagtárs urak jelenlétében vette kezdetét.

Schmidt alelnök melegen üdvözölte az elnök nevében «az első országos mathematikai verseny bajnokait» s nyugodt, kitartó munkára buzdítván őket, sok sikert kívánt működésöknek.

Miután az ügyvivő titkár a verseny föltételeit kihírdette, a kitűzött tételeket elzáró boríték a versenyzők előtt felbontatott s a tételek kihírdettettek.

A verseny — természetesen zárt helyen — szabályszerűn folyt le, miről a verseny tartama alatt vezetett jegyzőkönyv tanuskodik.

A versenyre kitüzött idő végeig a két helyen együttvéve 29 dolgozat adatott be. Minden dolgozat készítője a felügyelő tagok előtt dolgozatát aláírta s aláírását az átvétellel megbízott két társulati tag a dolgozaton hitelesítette. A verseny végével az összes dolgozatok lepecsételtettek.

A biráló bizottság jelentését a választmány október hó 19-én tartott ülésén tudomásul vette s a dijaknak javaslat szerint való kiadását elrendelte.

A dolgozatok megbirálására kiküldött bizottság jelentése, melyet Rados G. titkár terjesztett elő, következőleg hangzik:

A Mathematikai és Physikai Társulat 1894. évi szeptember hó 17-én tartott tanulóversenyén a következő tételeket tűzte ki megoldásra:

1. Bizonyíttassék be, hogy a $2x+3y$ és $9x+5y$ kifejezések x és y ugyanazon egész számú értékeire oszthatók 17-tel.

2. Adva van egy kör és két pont, P és Q; szerkesztessék meg ebbe a körbe irt derékszögű háromszög, melynek egyik befogója a P ponton, másik befogója a Q ponton megy át. A P és Q pontok milyen fekvése zárja ki a megoldás lehetőségét?

3. Valamely háromszög oldalai oly számtani haladványt alkotnak, melynek különbsége d; a háromszög területe T. Mekkorák e háromszög oldalai és szögei? Ugyane feladat megoldandó, ha $d=1$ és $T=6$.

A versenyen 29 dolgozatot adtak be; ezek közül 21 olyan, a melyben a kitűzött tételek egyike sem volt helyesen megoldva s így tekintetbe nem jöhetett; maradt tehát nyolcz olyan dolgozat, a mely legalább egy tételnek helyes megoldását tartalmazza. Ezek közül ötben a versenyző csakis egy feladatot tudott megoldani és így azok a jutalmazásnál tekintetbe nem vétettek. A végül fönmaradó három dolgozat készítői: Kupferschmidt József, Pap Pál és Seidner Mihály urak.

Pap és Seidner urak mind a három feladat megoldását teljesen kidolgozták és így méltók arra, hogy megjutalmaztassanak. A biráló bizottság a nevezett urak dolgozatainak belértéke között világosan döntő különbséget nem tudott találni és így a pályadíjak odaitélésénél azt a körülményt is tekintetbe kellett vennie, hogy Seidner úr 2 óra 10 percz alatt, Pap úr pedig 3 óra 10 percz alatt készült el dolgozatával. A biráló bizottság ennélfogva egyhangúlag hozott határozata alapján azt ajánlja, hogy Seidner Mihály úr az első-, Pap Pál úr pedig a második Eötvös-díjjal jutalmaztassék.

Kupferschmidt úr dolgozatában két tétel helyesen lévén kidolgozva, a biráló bizottság Kupferschmidt József úr megdicsérését ajánlja.

Budapest, 1894 szeptember 25.

Szemethy Béla,	*König Gyula,*	*Mauritz Rezső.*
Rados Gusztáv,	*Éberling József,*	*Bartoniek Géza,*

A jelentés meghallgatása után elnök a következőket mondta:

Ezennel kijelentem, hogy az érett tanulók első mathematikai versenyének első díját Seidner Mihály, a losonczi állami főgymnasium végzett tanulója, a második díjat pedig Pap Pál, a sárospataki ev. ref. főgymnasium volt tanulója nyerte el. Kupferschmidt József, a budapesti V. ker. kir. kath. főgymnasium volt tanulójának a dolgozata dicséretben részesült. Lépjenek elő s vegyék át szép dolgozataik jutalmát.

A verseny győztesei a társulat tagjainak rokonszenves üdvözlése közben az elnök asztala elé lépnek. Ő Nagyméltósága a következő szavakat intézte hozzájuk:

Önök a hallott birálati jelentés szerint a társulat mathematikai versenyén a feladatok helyes megoldásával jelét adták önálló felfogásuknak, mathematikának művelésére való rátermettségöknek s kiemelkedtek pályázó társaik felett.

A kitüzött díjakat a társulat színe előtt ime fogadják nyilvánosan; fogadják egyszersmind a társulat köszönetét törekvésökért azzal a reménységünkkel kapcsolatban, hogy a megkezdett jó uton haladván, tovább fogják fejleszteni tehetségeiket s hazai tudományosságunknak majdan díszére fognak válni. Nehéz út áll még önök előtt, sok munka és sok küzdelem; de csakis az így szerzett győzelem az, melynek igaz értéke van.

Gondolataik ebben a pillanatban bizonyára azoknál időznek, a kikre akkor kellett gondolniok, mikor munkájukhoz a siker reményével hozzáfogtak, mikor kész munkálatukat megítélés czéljából kezökből kiadták. Önök most hálával gondolnak azokra az intézetekre, hol tanulmányaikat elvégezték s hálás szivvel gondolnak szeretett tanáraikra, kik önöket tanították, kiknek ezen szép sikeröket köszönik. Seidner Mihály, az ön tanára Winter József úr, öné pedig, Pap Pál, Ellend József úr volt. Írják meg nekik, hogy mily sikert köszönnek az ő fáradozásuknak; köszönjék meg nekik kitünő tanításukat s írják meg nekik, hogy én a magam, valamint a Mathematikai és Physikai Társulat üdvözletét és köszönetét küldöm nekik.

*

A társulat elnökének átnyújtott felírat szövege a következő:

Nagyméltóságú Miniszter Ur,
Mélyen tisztelt Elnökünk!

A Mathematikai és Physikai Társulatnak alulírott tagjai legmélyebb tisztelettel üdvözlik Nagyméltóságodat a m. kir. vallás- és közoktatásügyi miniszter magas állásában. Minket, kik nagyrészt a tanítás terén vagyunk a magyar kultúrának munkásai, de kivétel nélkül valamennyien lelkesedünk érte: a legigazabb örömmel és legszebb reménységgel tölt el a tudat, hogy hazánk szellemi haladásának legfelsőbb intézése immár Nagyméltóságod kezére van bízva. Nagyméltóságod a tudománynak, a tudományhoz vezető iskolának összes ügyeit az egyedűl jogosúlt, t. i. a legmagasabb ideális álláspontból tekinti és életföltételeiket ennek megfelelőleg itéli meg. Ez forrása örömünknek, reménységeinknek.

Nem tagadhatjuk meg magunktól, hogy legmélyebb hálánkat is ki ne fejezzük Nagyméltóságod előtt; hálánkat azért, hogy Nagyméltóságod társulatunkat megalakította, munkásságát folyamatba hozta és haladásának útját s a czélhoz vezető eszközöket hosszú időre helyesnek igérkező módon megjelölte. «Tanúljunk egymástól, hogy mennél jobban taníthassunk!» Ezekkel a szavakkal szólított minket Nagyméltóságod a közös munkára, a munkából mindjárt kezdetben az oroszlánrészét foglalván le magának.

Társulatunk élete még rövid; olyan rövid, hogy történetét elmondani, megírni alig lehet. A kezdet kezdetén vagyunk csak, de tele a jövőbe vetett bizalommal s lelkesedéssel az elénk tűzött czélért.

Egy eredménye, s az eredmény fontossága miatt nagynak mondható eredménye már is van társulati működésünknek: a szaktársak tömörültek és soraink mindjobban tömörülnek; általánossá vált a kívánság, hogy együtt munkálkodjunk s a hit, hogy együtt munkálkodva a Nagyméltóságod kitűzte czélhoz közel jutunk.

Hálánkat azzal kivánjuk leróni, hogy a lelkesedést, melyet Nagyméltóságod a társulatba belevitt, ébren tartjuk, a társulat czéljaihoz hívek maradunk.

Kérve Nagyméltóságodat, hogy társulatunkhoz s hozzánk való nagy jóindulatát, addig míg reája érdemesek vagyunk, tőlünk meg ne vonja, maradunk

Nagyméltóságodnak alázatos szolgái :
(Aláírások).

A felirat fehér pergamen-bőrbe van kötve. A táblán a *Mathematika* képe látható, R. Hirsch Nelly művészi tuss-rajzában. Az initiale-t Rauscher Lajos műegyetemi tanár volt szives elkészíteni; a szöveget antiqua-írásban Nagy Sándor írta meg. Az ívek, 387 tagtárs aláirásával, fasciculusba vannak összefűzve s a véletlentől adott sorrendben következnek egymásután.

*

Ezután következett dr. Klupáthy Jenő t. társ előadása, melyet az előadások rovatában fogunk ismertetni.

A Math. Phys. Társulat I. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

1. Seidner Mihály dolgozata.

Valamely háromszög oldalai oly számtani haladványt alkotnak, melynek különbsége d, a háromszög területe T; mekkorák e háromszög oldalai és szögei? Ugyanezen feladat megoldandó, ha d=1 és T=6.

Megoldás.

A háromszög oldalai: a, $a+d$, $a+2d$; a $\triangle$ területe

$$T=\sqrt{s\,.\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

hol

$$s=\frac{a+b+c}{2}, \qquad s=\frac{3}{2}(a+d)$$

$$[s-(a+d)]=\frac{a+d}{2}, \qquad [s-(a+2d)]=\frac{a-d}{2}\cdot$$

Alkalmazva tehát

$$T=\sqrt{\frac{3}{2}(a+d)\left(\frac{a+d}{2}\right)\cdot\left(\frac{a-d}{2}\right)\left(\frac{a+3d}{2}\right)}$$

$$T=\frac{a+d}{4}\sqrt{3\,(a-d)\,(a+3d)}.$$

Vegyük fel, hogy $(a+d)=x$, akkor

$$T=\frac{x}{4}\sqrt{3\,(x-2d)\,(x+2d)}$$

$$4T=x\sqrt{3\,(x^2-4d^2)}$$

$$16T^2=3x^4-12x^2d^2,$$

melyből

* A dolgozatok minden változtatás és javítás nélkül vannak lenyomatva.
Szerk.

$$x = \sqrt{\left(\frac{+12d^2 \pm \sqrt{144d^4+192T^2}}{6}\right)}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{6d^2 \pm \sqrt{36d^4+48T^2}}{3}\right)} = a+d$$

$$a = -d \pm \sqrt{\left(\frac{6d^2 \pm \sqrt{36d^4+48T^2}}{3}\right)},$$

mely egyenletbe d-nek fent adott $d=1$ és $T=6$ értékeket behelyettesítve, lesz

$$a = -1 \pm \sqrt{\left(\frac{6 \pm \sqrt{36+1728}}{3}\right)}$$

$$a = -1 \pm \sqrt{\left(\frac{6 \pm \sqrt{1764}}{3}\right)}$$

$$a = -1 \pm \sqrt{\frac{6 \pm 42}{3}}$$

$$a = -1 \pm 4$$

$$a = 3;\ a+d=4,\ a+2d=5,$$

az a háromszög tehát derékszögű háromszög, melynek átfogója 5.

A szögekre nézve pedig

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Minthogy azonban derékszögü háromszögről van szó, azért én a

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

képletet használhatom

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\log\sin\alpha = \log 3 - \log 5$$

$$\log 3 = 0{\cdot}47712$$

$$\log 5 = 0{\cdot}69897$$

$$\log\sin\alpha = 9{\cdot}77815-10$$

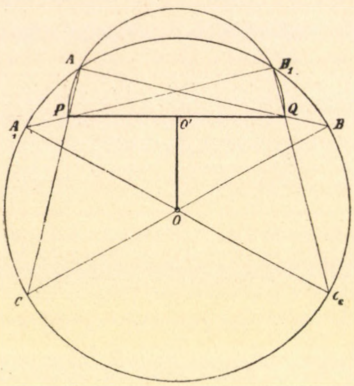
$$\alpha = 36°52''10{\cdot}71'';\ \beta = 90-\alpha = 53°7'49{\cdot}29''$$

*

Adva van egy kör és két pont P és Q; szerkesztessék meg ebbe a körbe írt derékszögű háromszög, melynek egyik befogója a P, másik befogója a Q ponton megy át. A P és Q pontok milyen fekvése zárja ki a megoldás lehetőségét.

Megoldás.

A szerkesztés alapja az, hogy a félkör alapon nyugvó kerületi szög derékszög. Ha tehát én a P-t és Q-t összekötő egyenest felezem, s a felezési pontból, mint középpontból a felezett távolsággal, mint sugárral kört rajzolok, akkor ezen kör bármely pontjából kiinduló és a P és Q pontokon átmenő két egyenes derékszöget zár be. A két kör metszési pontjában lesz a keresett háromszög derékszögének csúcspontja, miből önként következik, hogy a feladat csak akkor oldható meg, ha P—Q távolság fele nagyobb, mint a Q—P vonalnak a kör kerületétől való távolsága, s ha a P és Q pontok a körön belül vannak.



Ime: Ilyen háromszög kettő van.

*

Bizonyíttassék be, hogy a $2x+3y$ és $9n+5y$ kifejezések x és y ugyanazon egész számú értékeire 17-tel oszthatók.

Megoldás.

Vegyük fel, hogy $2x+3y=n.17$, hol n valamely positiv egész szám. Ezen egyenletből

$$x=\frac{17.n-3y}{2}=8n-y+\frac{n-y}{2}$$

$$\frac{n-y}{2}=s,$$

melyből

$$y=n-2s$$

$$x=8n-n+2s+s=7n+3s,$$

x-nek eme értékeit a másik $(9x+5y)$ kifejezésbe behelyettesítve lesz:

$$9x+5y=62n+27s+5n-10s=68n+17s=17\ (4n+s)$$

miből látjuk, hogy $(9x+5y)$ szintén többszöröse 17-nek, tehát ezzel osztható.

2. Pap Pál dolgozata.

1. Feladat. Bizonyíttassék be, hogy a $2x+3y$ és $9x+5y$ kifejezések x és y ugyanazon egész számú értékeire 17-el oszthatók.

Osszuk a két kifejezést 17-el, legyenek ekkor a hányadosok: q és q', akkor

$$\frac{2x+3y}{17}=q$$

és

$$\frac{9x+5y}{17}=q'.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet 4-el, s az így nyert egyenletet adjuk össze a másodikkal, akkor

$$\begin{aligned} &\frac{8x+12y}{17}=4q \\ +&\frac{9x+5y}{17}=q' \\ \hline &x+y\quad=4q+q'. \end{aligned}$$

Ha x és y bizonyos egész számú értékénél tehát p. a $2x+3y$ kifejezés osztható 17-el, vagyis q egész szám, akkor az utolsó egyenlet szerint a $9x+5y$ kifejezés is osztható 17-el, mert q' is egész szám. Az utolsó egyenletben ugyanis $x+y$ és $4q$ egész számok, következésképp q' is egész szám, mert egész szám csakis egész számmal összeadva ad eredményül egész számot.

2. Feladat. Adva van egy kör és két pont p és q; szerkesztessék meg ebbe a körbe írt derékszögű háromszög, melynek egyik befogója a p ponton, másik befogója a q ponton megy át. A p és q pontok mily fekvése zárja ki a megoldás lehetőségét?

A p és q pontokat* összekötő pq egyenes a körbe rajzolt derékszögű Δ befogóinak ama részeivel, melyek tőle a derékszög felé esnek, egy kisebb derékszögű Δ-et alkot, melynek átlója pq.

Az adott p és q pontokon át úgy szerkesztünk derékszögű háromszöget, hogy a pq egyenes felező pontjából $\frac{pq}{2}$ sugárral kört rajzolunk. E kör geometriai helye lesz oly derékszögű Δ csúcs pontjainak, melyeknek átfogója pq. Minthogy pedig egy adott körbe rajzolt derékszögű Δ kerestetik, a keresett csúcspont az adott körvonal és a rajzolt $\frac{pq}{2}$ sugarú körvonal két

* A rajz az előbbivel lényegében egyező, csak p helyett P és q helyett Q teendő. *Szerk.*

metszéspontja lesz. A csúcspontokból a p és q pontokon keresztül menő s az adott kör kerületéig terjedő egyenesek lesznek a keresett derékszögű háromszögek befogói.

A keresett háromszögek itt: ABC és $A'B'C'$ Δ.

Ha p és q pontok olyan helyzetet foglalnak el, hogy a rajtok keresztül haladó $\frac{pq}{2}$ sugarú kör nem metszi az adott kört, a megoldás lehetetlen. E két kör pedig nem metszi egymást akkor, ha

$$OO' > r + \frac{pq}{2} \qquad 1)$$

$$OO' > r - \frac{pq}{2}. \qquad 2)$$

OO' jelenti az adott kör középpontjának a pq egyenes felező pontjától való távolságát, r az adott kör sugarát.

Ha p és q a kör kerületén belül fekszik, s a megfejtésre nézve kedvező helyzetet foglal el, akkor a két derékszögű Δ befogói tényleg átmennek a két ponton; ha pedig a két pont a kerületen kivül fekszik, akkor a befogók meghosszabbításai. Ha a két pont az adott kör kerületébe esik, végtelen számú megoldás van.

3. Feladat. Valamely Δ oldalai oly számtani haladványt alkotnak, melynek külömbsége $=d$. A Δ területe $=t$. Mekkorák e háromszög oldalai és szögei? Ugyanez a feladvány megoldandó, ha $d=1$ és $t=6$.

Legyen a Δ egyik oldala $=b$, akkor $a=b-d$ és $c=b+d$, továbbá

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}, \; s-a = \frac{b}{2} + d, \; s-b = \frac{b}{2}, \; s-c = \frac{b}{2} - d,$$

s mivel

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

azért

$$\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b}{2}+d\right)\left(\frac{b}{2}-d\right) = t^2$$

s innen

$$\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4} - d^2\right) = t^2$$

és

$$b^4 - 4b^2d^2 = \frac{16t^2}{3}$$

s ebből

$$b = \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16t^2}{3}}} = \sqrt{2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4t^2}{3}}\right)}$$

A gyökjelek előtt azért alkalmazunk «+» jelt, mert b-nek tagadó és imaginarius szám nem felelhet meg.

Az utolsó képlet alapján

$$a=b-d=-d+\sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4t^2}{3}}\right)}$$

és

$$c=b+d=\ d+\sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4t^2}{3}}\right)}.$$

Az ismeretlen szögeket legczélszerűbben a $t=\frac{bc}{2}\sin\alpha$ és $t=\frac{ac}{2}\sin\beta$ és $\gamma+180^\circ-\alpha-\beta$ képletek alapján határozhatjuk meg, a honnan

$$\sin\beta=\frac{2t}{ac},\qquad \sin\alpha=\frac{2t}{bc}.$$

Ha $d=1$ és $t=6$, akkor

$$b=\sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4t^2}{3}}\right)}=\sqrt{2\left(1+\sqrt{1+\frac{4.36}{3}}\right)}=$$

$$=\sqrt{2(1+\sqrt{49})}=4$$

$a=b-d=3$, $c=b+d=5$. Tehát $a=3$, $b=4$, $c=5$.

A szögekre nézve:

$$\sin\alpha=\frac{2t}{bc}=\frac{2.6}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\begin{array}{r} \log 3=0{\cdot}477121 \\ -\log 5=0{\cdot}698970 \\ \hline \log\sin\alpha=9{\cdot}778151-10 \\ 14 \\ \hline 32:2{\cdot}81= \end{array}$$

$$\alpha=36^\circ 52' 12''$$

$$\sin\beta=\frac{2t}{ac}=\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r} \log 4=0{\cdot}602060 \\ \log 5=0{\cdot}698970 \\ \hline \log\sin\beta=9{\cdot}903090-10 \\ 19 \\ \hline 76:1{\cdot}58=48 \end{array}$$

$$\beta=53^\circ 7' 48''$$

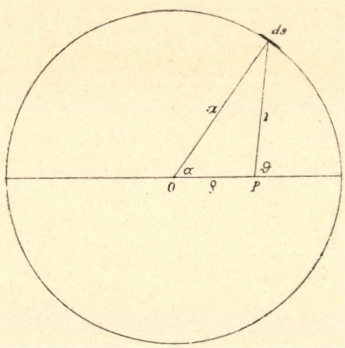
Mivel pedig $\alpha+\beta=90^\circ$, azért $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)=90^\circ$.

MEGOLDOTT FELADATOK.

19. *Valamely egyenletes vonalas körgyűrű elemei a gyűrű vonalán kívül levő pontokra csak a távolságtól függő centralis erőkkel hatnak. Milyennek kell az erők törvényének lennie, hogy a gyűrű középpontjába helyezett, a gyűrű síkjában szabadon mozogható pont az erők behatása alatt stabilis egyensúlyban legyen?* (Fröhlich.)

Megoldás Vladár Lajos tanárjelölt úrtól.*

1. Legyen a P pont helyzete ρ, φ polárcoordináták által megadva. Az egész gyűrű U erőfüggvénye, mely e pont coordinátainak függvénye, az adott viszonyok közt csak ρ-tól függ, minthogy ugyanazon ρ távolságban körül vive P pontot a centrum körül, a viszonyok bármely φ-nál változatlanul maradnak. Ha egyszerűség kedveért P coordinátai ρ, 0-nak választatnak, ha továbbá a gyorsulás meghatározandó törvénye $f(r)$, a kör sugara a, akkor az r távolságban levő μ lineár sűrűséggel biró ds ívelem részéről P-re kifejtett erő ρ-menti összetevője



$$\mu ds f(r) \cos\vartheta = -\mu a d\alpha \frac{dV(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial\rho} \qquad 1)$$

hol a $V(r) = \int f(r)\,dr$ a gyorsulás potentiálja, továbbá:

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\alpha\,; \qquad \partial\rho = -\partial r\cos\vartheta.$$

A ρ-ra merőleges erőcomponensek az OP-re nézve symmetrikusan fekvő ds elempárokra vonatkozólag ellentetten egyenlők lévén, összegük zérus s az eredőre nem folyhatnak be.

E szerint az egész kör részéről gyakorolt erő

---

* Augusztus hóban Bián, szülőhelyén meghalt. *F.*

$$\frac{dU}{d\rho}=F=-2a\mu\int_0^\pi \frac{dV(r)}{dr}\frac{\rho-a\cos\alpha}{\sqrt{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\alpha}}d\alpha. \qquad 2)$$

P pont a kör centrumába helyezve stabilis vagy labilis egyensúlyba jut, a mint az erőfüggvény e helyen maximum vagy minimum. E szerint kell, hogy $\begin{smallmatrix}\text{stabilis}\\ \text{labilis}\end{smallmatrix}$ egyensúly esetén álljon $(F)_{\varrho=0}=0$ közös feltétel mellett

$$\frac{d^2U}{d\rho^2}=\left(\frac{dF}{d\rho}\right)_{\varrho=0}\lesseqgtr 0. \qquad 3)$$

2. Közvetlenül látható, hogy $(P)_{\varrho=0}=0$ feltétel a 2) értelmében mindig teljesül.

Más oldalról a 3) feltétel, ha 2)-vel a 3)-ban jelzett míveleteket végrehajtjuk, írható

$$\left(\frac{dF}{d\rho}\right)_{\varrho=0}=a\mu\pi\left\{\frac{d^2V(a)}{da^2}+\frac{1}{a}\frac{dV(a)}{da}\right\}\lesseqgtr 0. \qquad 4)$$

A

$$\frac{d^2V(a)}{da^2}+\frac{1}{a}\frac{dV(a)}{da}=\frac{df(a)}{da}+\frac{1}{a}f(a)=0$$

megoldása

$$f(a)=\frac{k}{a},$$

épen indifferens egyensúlyra vezet, mert ekkor, — mint erről könnyű számítás győz meg, — F összes magasabb differentiálhányadosai $\rho=0$-ra eltünnek.

Továbbiakra az

$$f(a)=\frac{k}{a}$$

megoldásban k az a függvényeképen úgy határozandó meg, hogy

$$\frac{d}{da}\left(\frac{k(a)}{a}\right)+\frac{1}{a}\frac{k(a)}{a}=\frac{1}{a}\frac{dk(a)}{da}\lesseqgtr 0$$

legyen $\begin{smallmatrix}\text{stabilis}\\ \text{labilis}\end{smallmatrix}$ egyensúlyi állapotnak megfelelőleg.

2*a*. Ha pl. a távolság hatványával arányos erők vizsgálatára szorítkozunk, a midőn tehát

$$f(a)=\pm c^2a^n, \text{ s így } k(a)=\pm c^2a^{n+1},$$

a fentebbi feltételeknek megfelelőleg

$$\frac{1}{a}\frac{dk(a)}{da}=\pm(n+1)c^2a^{n-1}\lesseqgtr 0.$$

Azaz, taszító erő esetén $\begin{matrix}\text{stabilis}\\ \text{labilis}\end{matrix}$ az egyensúly, a mint $n \lesseqgtr -1$, vonzó erő esetén megfordítva, a mint $n \gtreqless -1$. Innen látható, hogy az

$$f(a) = -\frac{c^2}{a^2}$$

Newton-féle erőtörvény labilis egyensúlyi állapotot létesít.

Ha pl. a körvonal vezető s elektromos töltést nyer, a levezetett megoldás szerint a P pontot a centrumból kimozdítván, oda visszatér vagy nem, a mint a P pont a vezető kör töltésével egyenlő vagy ellentett nemű elektromosságú.

2*b*. Ha a kör kerületéből induló kifeszített rugalmas fonalak tartják a pontot egyensúlyban, ez esetben, minthogy a fonál részéről gyakorolt rugalmas erő a pont kitérésével (x) arányos s ennek irányával ellenkező,

$$f(r) = -C^2(r-r_0);$$

hol r_0 a fonál hoszsza normális (ki nem feszített) állapotban

$$\frac{df(a)}{da} = -C^2;$$

továbbá

$$\frac{f(a)}{a} = -C^2\frac{a-r_0}{a} = -C^2 + C^2\frac{r_0}{a}.$$

Az egyensúly tehát *stabilis*, mert mindig

$$\frac{df(a)}{da} + \frac{f(a)}{a} = -2C^2 + C^2\frac{r_0}{a} < 0.$$

hol kifeszített fonalaknál $r_0 : a$ hányados mindig kisebb az egységnél. Ez az eredmény a tapasztalással szintén megegyezik.

*

20. *Bizonyíttassék be, hogy*

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}^2$$

mindig osztható 2-vel, $(a+1)$-gyel és $2(2a-1)$-gyel. (Szily).

*

Első megoldás Privorszky Alajos műegyetemi hallgató úrtól.

A feladatban adott binomiális együtthatók négyzetösszege, ismét binomiális együttható. Kiindulunk az

$$\binom{m+n}{l} = \sum_{k=0}^{l}\binom{m}{k}\binom{n}{l-k} = \binom{m}{0}\binom{n}{l} + \binom{m}{1}\binom{l}{l-1} + \cdots + \binom{m}{l}\binom{n}{0}$$

ismeretes egyenlőségből; ha felteszszük, hogy

$$m=n=l=a$$

és tekintetbe veszszük, hogy

$$\binom{a}{k}=\binom{a}{a-k}$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, a)$$

a következő eredményhez jutunk:

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^2=\binom{2a}{a}.$$

Az eredeti feladat ezzel vissza van vezetve annak a kimutatására, hogy a $\binom{2a}{a}$ binomiális együttható a fent felsorolt számelméleti tulajdonságokkal bír.

1. A $\binom{2a}{a}$ *együttható páros*, mert

$$\binom{2a}{a}=\frac{2a(2a-1)\ldots(a+1)}{1.2\ldots a}=\frac{2a}{a}\binom{2a-1}{a-1}=2\binom{2a-1}{a-1}$$

és $\binom{2a-1}{a-1}$ egész szám.

2. A $\binom{2a}{a}$ *binomiális együttható osztható* $(a+1)$*-gyel*, mert

$$\binom{2a}{a}=\frac{2a(2a-1)\ldots(a+2)}{1.2.3\ldots(a-1)}\cdot\frac{a+1}{a}=\frac{a+1}{a}\binom{2a}{a-1},$$

továbbá $\binom{2a}{a}$ egész szám, $a+1$ és a relatív prímszámok és így ennek következtében

$$\frac{1}{a}\binom{2a}{a-1}=p$$

szintén egész szám; de akkor

$$\binom{2a}{a}=p(a+1),$$

tehát $\binom{2a}{a}$ $(a-1)$-gyel osztható.

3. A $\binom{2a}{a}$ *binomiális együttható osztható* $2(2a-1)$*-gyel.* Ugyanis

$$\binom{2a}{a} = \frac{2a(2a-1)}{a.(a-1)} \cdot \frac{(2a-2)\ldots(a+1)}{1.2\ldots(a-2)} =$$

$$= \frac{2(2a-1)}{a} \cdot \frac{(2a-2)\ldots(a+1)\,a}{1.2\ldots(a-2)\,(a-1)} = \frac{2(2a-1)}{a}\binom{2a-2}{a-1};$$

de hogy

$$\frac{1}{a}\binom{2a-2}{a-1} = q$$

egész szám, ez a 2. tulajdonság következménye ; ekkor pedig

$$\binom{2a}{a} = 2(2a-1)\,q$$

egyenlőségből következik, hogy $\binom{2a}{a}$ $2(2a-1)$-gyel is osztható.

*

Hasonló megoldást küldöttek be dr. Horváth József főiskolai tanár úr Pápán, Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úr Pécsett és Csillag Vilmos főreáliskolai h. tanár úr *Szerk.*

*

Második megoldás Bauer Mihály műegyetemi hallgató úrtól.

Tegyük fel, hogy

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^2 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ a+1),$$

ki fogjuk mutatni, hogy ekkor egyszersmind

$$\sum_{k=0}^{a+1}\binom{a+1}{a}^2 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ a+2).$$

Ugyanis

$$\binom{2a+2}{a+1} = \binom{2a+2}{a}\frac{a+2}{a+1}$$

és

$$\binom{2a+2}{a} = \frac{(2a+2)\,(2a+1)}{(a+2)\,(a+1)}\binom{2a}{a} = \frac{2(2a+1)}{a+2}\binom{2a}{a};$$

de

$$\binom{2a}{a} = \sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^2 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ a+1).\text{*}$$

---

* Szily «A binomiális együtth. stb.» Math. és Phis. Lapok II. 297. l.

Minthogy továbbá $a+2$ relativ prim $a+1$-hez képest és a $\binom{2a+2}{a}$ binomiális együttható egész szám, kell hogy

$$\binom{2a+2}{a} \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ a+1)$$

legyen és így

$$\binom{2a+2}{a+1} = \sum_{k=0}^{a+1} \binom{a+1}{k}^2 = \binom{2a+2}{a} \frac{a+2}{a+1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ a+2).$$

De ezzel ki van mutatva, hogy a tetszőleges értékeinél a kérdésben forgó összeg osztható $(a+1)$-gyel, mert az $a=1$ esetben

$$\binom{1}{0}^2 + \binom{1}{1}^2 = 2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Hasonlóképen járhatunk el a második tétel bebizonyításában. Ugyanis

$$\binom{2a+2}{a+1} = \frac{(2a+2)(2a+1)}{a+1} \frac{2a(2a-1)\ldots(a+1)}{1.2.3\ldots a} \frac{1}{a+1} =$$

$$= \frac{2(2a+1)}{a+1} \binom{2a}{a};$$

de mivel

$$\binom{2a}{a} \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ a+1),$$

$$\binom{2a+2}{a+1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2\ (2a+1)).$$

Hozzuk be a következő jelölést

$$a+1=a',$$

akkor

$$\binom{2a'}{a'} = \sum_{k=0}^{a'} \binom{a'}{k}^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2\ (2a'-1))$$

és a' felvehet minden egész értéket, mert az $a'=1$ esetre

$$\binom{1}{0}^2 + \binom{1}{1}^2 = 2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2).$$

E tételekkel kapcsolatban legyen szabad még a következő tételt bemutatnom :

Ha

$$a+1=p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$$

az $a+1$ szám törsstényezős alakja, *akkor a*

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^{2n}=\binom{a}{0}^{2n}+\binom{a}{1}^{2n}+\cdots+\binom{a}{a}^{2n}.$$

összeg az n minden egész értékénél osztható, a

$$p_1p_2\cdots p_m$$

szorzattal.

A kimutatást lépésenként fogom eszközölni.

I. *Legyen* $a+1=p$ *törzsszám, akkor*

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^{2n}\equiv 0 \pmod{p}.$$

Ugyanis az

$$a-k\equiv-(k+1) \pmod{a+1}$$

azonos kongruenczia mindkét oldalán szorozván az

$$a(a-1)\ldots(a-k+1)$$

szorzattal, lesz

$$\binom{a}{k+1}(k+1)!\equiv-\binom{a}{k}(k+1)! \pmod{a+1}.$$

E kongruenczia minden esetre érvényes, ha

$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

de k ugyanezen értékei mellett $(k+1)!$ az $a+1$ törzsszámhoz képest relatív primszám lévén, $(k+1)!$-sel rövidíthetünk és így lesz

$$\binom{a}{k+1}\equiv-\binom{a}{k} \pmod{a+1};$$
$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

ebből pedig

$$\binom{a}{k+1}^{2n}\equiv\binom{a}{k}^{2n} \pmod{a+1},$$
$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

vagyis

$$\binom{a}{a}^{2n}\equiv\binom{a}{a-1}^{2n}\equiv\cdots\equiv\binom{a}{0}^{2n}\equiv 1 \pmod{a+1}$$

és így ennek következtében

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^{2n}\equiv a+1\equiv 0 \pmod{a+1},$$

de ezt akartuk mindenekelőtt kimutatni.

II. *Ha* $a+1=p$ *törzsszám, akkor:*

$$\sum_{k=0}^{m(a+1)-1} \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} = \sum_{k=0}^{mp-1} \binom{mp-1}{k}^{2n} \equiv 0 \pmod{p}$$

ha n, m tetszőleges pozitív egész számok.

A szóban levő összeget részletösszegekre bonthatjuk fel:

$$\sum_{k=0}^{m(a+1)-1} \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} = \sum_{k=0}^{a} \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} +$$

$$+ \sum_{k=a+1}^{2a+1} \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} + \cdots + \sum_{k=(m-1)(a+1)}^{m(a+1)-1} \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}$$

Először is kimutatom azt, hogy

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} \equiv 0 \pmod{a+1}.$$

E végből bebizonyítom, hogy

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}^{2n} \equiv \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} \pmod{a+1}.$$
$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

Ugyanis

$$m(a+1)-1-k \equiv -(k+1) \pmod{a+1},$$

szorozván mindkét oldalon az

$$(m(a+1)-1)(m(a+1)-2)\ldots(m(a+1)-k)$$

szorzattal, lesz

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}(k+1)! \equiv -\binom{m(a+1)-1}{k}(k+1)! \pmod{a+1}.$$

E kongruenczia minden esetre érvényes, ha

$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

de ugyanekkor rövidíthetünk $(k+1)$!-sal és ezt megtéve, lesz

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1} \equiv -\binom{m(a+1)-1}{k} \pmod{a+1},$$
$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

ebből

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}^{2n} \equiv \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} \pmod{a+1}$$
$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

$$\binom{m(a+1)-1}{a}^{2n} \equiv \binom{m(a+1)-1}{a-1}^{2n} \equiv \cdots \equiv \binom{m(a+1)-1}{0}^{2n} \equiv$$
$$\equiv 1 \pmod{a+1},$$

tehát

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} \equiv 0 \pmod{a+1}.$$

A második részletösszegre nézve szintén ki fogjuk mutatni, hogy

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}^{2n} \equiv \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} \pmod{a+1}.$$
$$(k+1=a+1, a+2, \ldots, 2a+1)$$

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy $\binom{m(a+1)-1}{k+1}$ az

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1} = \frac{[m(a+1)-1]\ldots[(m-1)(a+1)+1]}{1\ldots a}$$
$$(m-1)\frac{[(m-1)(a+1)-1]\ldots[m(a+1)-k-1]}{(a+2)\ldots(k+1)}$$

alakban írható. Ha ismét a

$$m(a+1)-1-k \equiv -(k+1) \pmod{a+1}$$

kongruenczia mindkét oldalán szorzunk az

$$[m(a+1)-1]\ldots[(m-1)(a+1)+1](m-1)[(m-1)(a+1)-1]\ldots$$
$$[m(a+1)-k]$$

szorzattal, lesz:

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1} a!(a+2)\ldots(k+1) \equiv -$$
$$-\binom{m(a+1)-1}{k} a!(a+2)\ldots(k+1) \pmod{a+1}.$$

E kongruenczia mindenesetre érvényes a

$$(k+1=a+1, a+2, \ldots, 2a+1)$$

értékekre. Ekkor rövidíthetünk is az $a!(a+2)\ldots(k+1)$ kifejezéssel és lesz

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1} \equiv -\binom{m(a+1)-1}{k} \pmod{a+1}$$
$$(k+1=a+1, a+2, \ldots, 2a+1)$$

és ebből

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}^{2n} \equiv \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} \pmod{a+1}$$
$$(k+1=a+1, a+2, \ldots, 2a+1)$$

vagyis

$$\binom{m(a+1)-1}{2a+1}^{2n} \equiv \binom{m(a+1)-1}{2a}^{2n} \equiv \cdots \equiv \binom{m(a+1)-1}{a+1}^{2n} (\mathrm{m}.\ a+1)$$

és így

$$\sum_{k=a}^{2a+1} \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} \equiv (a+1)\binom{m(a+1)-1}{a+1}^{2n} \equiv 0 \pmod{a+1}$$

A bebizonyítás ugyanígy vihető tovább. A dolog veleje mindig csak az, hogy az

$$\frac{m(a+1)-1-a}{a+1} \cdot \frac{m(a+1)-1-2(a+1)}{2(a+1)} \cdots$$

törtalakok szorzata egész szám.

És így bebizonyítottnak tekinthetjük a

$$\sum_{k=0}^{m(a+1)-1} \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} \equiv \sum_{k=0}^{mp-1} \binom{mp-1}{k}^{2n} \equiv 0 \pmod{p}$$

relácziót is, a melyben m akármilyen pozitív egész számot jelenthet.

III. Az I. és II. alatt foglaltak már kiadják tételünket. Ha ugyanis

$$a+1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha} = p_1 m_1 = p_2 m_2 = \ldots = p_r m_r$$

akkor a II. alatti tétel következtében

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}^{2n} \equiv \sum_{k=0}^{m_i p_i - 1} \binom{m_i p_i - 1}{k} \equiv 0 \pmod{p_i};$$
$$(i=1, 2, \ldots, m)$$

de mivel $p_1, p_2, \ldots, p_r$ mint $(a+1)$-nek prímtényezői egymáshoz képest relativ törzsszámok, kell hogy

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}^{2n} \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \cdots p_m}$$

legyen de ezzel a bevezetésben felemlített tétel teljesen be van bizonyítva.

*

Harmadik megoldás dr. Suták József főgimnáziumi tanár úrtól Budapesten.

Ismeretes, hogy

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}^2 = \binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{a!\, a!}.$$

Ha a 2-nek n-dik hatványával még osztható, akkor $a!$ 2-nek

$$s = E\left(\frac{a}{2}\right) + E\left(\frac{a}{2^2}\right) + \cdots + E\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

kitevőjű, $(2a)!$ pedig 2-nek

$$s_1 = E\left(\frac{2a}{2}\right) + E\left(\frac{2a}{2^2}\right) + \cdots + E\left(\frac{2a}{2^{n+1}}\right)$$

kitevőjű hatványával osztható, s mivel

$$s_1 > 2s,$$

azért $\binom{2a}{a}$ osztható kettővel.

CATALAN tétele szerint

$$\frac{(2a)!\,(2b)!}{a!\,(a+b)!\,b!}$$

egész szám; ha

$$b = a - 1,$$

akkor

$$\frac{(2a)!\,(2a-2)!}{a!\,(2a-1)!\,(a-1)!} = \frac{(2a)!}{a!\,(a-1)!\,(2a-1)}$$

szintén egész szám; de minthogy a és $2a-1$ viszonylagos törzsszámok, *azért*

$$\frac{(2a)!}{(a!)^2\,(2a-1)}$$

szintén egész szám, még pedig a föntebb kimutatott tételnél fogva páros szám.

Az ismeretes

$$\frac{(2a)!\,(2b)!}{a!\,(a+b)!\,b!} = \binom{2a}{a}\binom{2b}{b} + 2\sum_{k=1}^{b}(-1)^k\binom{2a}{a-k}\binom{2b}{b-k}$$

képletnél s az először kimutatott tételnél fogva:

$$\frac{(2a)!\,(2b)!}{2.a!\,(a+b)!\,b!}$$

egész szám, tehát ($b=1$ esetben)

$$\frac{(2a)!}{(a!)^2\,(a+1)}$$

is az.

*

Hasonló megoldást beküldött dr. SZABÓ PÉTER úr Kolozsvárról. *Szerk.*

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

A villámhárítókról.*

Franklin óta az utolsó évtizedig az épületek megvédésére szolgáló villámhárító elrendezésekben alig történt haladás. Mindenütt a Franklin ajánlotta átalánosan ismert elrendezést használják, noha a tapasztalás azt mutatta, hogy az nem minden esetben véd meg biztosan.

Franklin villámhárítójának alapeszméje ismeretes. Az épületek szerinte oly módon védhetők meg, hogy közvetetlen közelében, vagy még helyesebben az épület tetejére csúcsos vezető rudakat szerelünk és ezeket a rudakat fémes vezetékkel a földhöz kötjük. Az elektromos kisülés, ha a vezeték jó karban van és vezetőssége elég nagy, *minden körülmény* között a függőlegesen szerelt csúcsos rúd közvetítésével történik; az épület az elektromos kisülésnek, vagyis a villámnak káros hatásától ment marad.

Ez volt az uralkodó nézet a nyolczvanas évek végéig; s ha a tapasztalás megmutatta, hogy egyik-másik esetben Franklin villámhárítója nem vált be, akkor azt nem az elv, hanem az elrendezés, rendszerint a földvezetés fogyatékosságának tulajdonították.

Ennek következtében a villámhárítókat egész évszázadon át a régi minta szerint szerkesztették és szerkesztik világszerte még ma is, anélkül, hogy az időközben végzett elméleti és kisérleti kutatások eredményeit e téren alkalmazásban látnók. Elméleti és kisérleti tanulmányok megmutatták, hogy az elektromos kisülésnek a villámláskor nyilvánuló tüneményeit meghatározó tényezőkről vallott régibb nézetek helytelenek, s hogy a Franklin-féle minta szerint készített villámhárítók sok esetben nem is válhatnak be.

Tárgyalni kivánom a villámhárítókra vonatkozó régi s helytelen nézeteket, s ez után az idevonatkozó elméleti és kisérleti kutatásokból kiindulva bemutatom a *helyes* és a régieknél *olcsóbb* új villámhárító-szerkezeteket.

---

* Előadatott a Math. és Physikai Társulat 1894. évi márczius hó 15-én tartott ülésén. L. A Mérnök- és Építész Egylet Közlönyé-ben 1894. évf. 3—4. füz.

A régi elmélet szerint azt hitték, hogy a villámhárító annál tökéletesebb, minél csekélyebb a villámhárító rúdjának és földhöz szolgáló vezetékének elektromos ellenállása; tehát minél jobb vezetősségű fémből és minél nagyobb keresztmetszetű rudakból készítik, annál jobb. A földvezetést *elsőrendű* tényezőnek tekintették és a villámhárító vezetékeknek lehetőleg a talajvízszinig való kiterjesztését szükségesnek tartották.

Az ilyen villámhárító elrendezések kellő állapotáról és az összeköttetések jóságáról galvántelepektől szolgáltatott gyönge áramokkal s galvanométerekkel avagy egyszerű ellenállásmérésekkel győződtek meg. A régi nézetek szerint az ilyen vizsgálatok alapján helyesnek talált villámhárító elrendezés minden esetben teljes biztossággal védi meg az épületet villámcsapásoktól s a villámhárító vezetékek közelében lévő tárgyak, személyek biztosságában vannak, ha a villám a hárító vezetékbe csap.

A tapasztalás azonban számtalan esetben azt mutatta, hogy teljesen ép, költséges villámhárító vezetékek sem feleltek meg s a védett épületekben kár történt.

Ennek okát — a fönt részletezett nézet okozta elfogultságban — a nehezen ellenőrizhető és folyton változó jóságú földvezetés hiányaiban keresték. A rendelkezésre álló statisztikai adatok összevetéséből és a balesetek leirásából azonban kiviláglik, hogy a hiányos védő hatást sem a földvezetés hiányai, sem a vezeték ellenállása nem okozhatták.

Az elektromos kisülés akárhányszor nem a legcsekélyebb ellenállású úton történik; a villám, vastag kőfalat áttörve a vezeték vastag rézrúdjából az épületben lévő fémtárgyakba csap s ezekről az épületben lévő csővezetékre ugorván, a földbe jut; hasonlóan megesik, hogy a villám valamely védett kémény belsejében a falazatot szétroncsolva tör a földbe s mellőzi a harító vezetéket.

Mind a két esetben a villám tényleges utjának elektromos ellenállása, még abban az esetben is, ha a hárító vezetékben hibák volnának, sok milliószor nagyobb a hárító vezeték ellenállásánál.

Az is megtörténik, hogy a hosszú időig bevált villámhárító vezetékeknek hiányossá lesz a védő hatásuk, ha az épületben lévő fémtárgyak csoportosulása változik s ismét megfelelő, ha a fémtárgyak régi helyükre kerülnek.

A villámhárító vezetékhez közel, az épület belsejében a falhoz támasztott puska, új csővezeték stb. a tapasztalás szerint okot szolgáltathat arra, hogy a villámhárító vezeték védő hatása megszünjön.

Sokszoros tapasztalat mutatja tehát, hogy a villámhárító vezetékek védő hatása, illetőleg a hárító elrendezés jósága nem csak a vezetékek ellenállásától, illetőleg a keresztmetszet nagyságától és a fém vezetőségétől, de más tényezőktől is függ.

Az e kérdésre vonatkozó viták mindaddig — a míg szigorú kisérleti alapon nem álltak — nem vezethettek eredményre. E viták közül a Faraday és Snow Harris William között folyt élénk harczot kell kiemelnünk. Faraday azt állította, hogy a villámhárító jósága csakis a vezetékek vezetősségétől függ, míg Snow Harris a mellett kardoskodott, hogy az elektromos kisülés útját meghatározó tényezők között a vezeték keresztmetszetének alakja és a vezetékek elrendezésének módja is szerepel. A vita eredménytelen volt, mert a két hirneves természettudós egyike sem tudta nézeteit helytállóan megokolni.

A később szerzett kisérleti tapasztalások Snow Harris nézeteinek helyességét igazolták. E kisérleti tapasztalások arra tanítanak bennünket, hogy az *állandó áramok* útját, eloszlás módját jellemző tapasztalati törvények (pl. az Ohm-féle törvény) rövid tartamú, változó erősségű áramokra, pl. a *villámcsapás* névvel jelzett elektromos kisülésekre nem alkalmazhatók. Az ily kisülések útját első sorban a vezetékek elektrostatikai foganóssága (kapaczitás), továbbá elektromágneses tehetetlensége (önindukcziója) s csekélyebb mértékben elektromos ellenállása befolyásolja.

Az első helyen említett két tényező jelentőségét a mechanikából származó analógia segítségével magyarázhatjuk meg, ha az elektromos vezetékeket csővezetékeknek képzeljük, melyekben összenyomhatatlan folyadék mozog.

Képzeljünk pl. száraival függőlegesen álló két végén nyitott *U* alakú üvegcsövet. A cső végkeresztmetszeteiben uralkodó nyomáskülönbségek következtében e csövön másodperczenkint határozott mennyiségű folyadék haladhat keresztül.

E mennyiség a nyomás különbségétől, a cső keresztmetszetétől, a folyadékoszlop mozgásakor érvényesülő molekularis ellenállásoktól függ. Ezt a függést oly képlet fejezi ki, mely az elektromótoros erő, áramerősség és elektromos ellenállás közötti viszonyt ábrázoló Ohm-féle tapasztalati törvényhez hasonló.

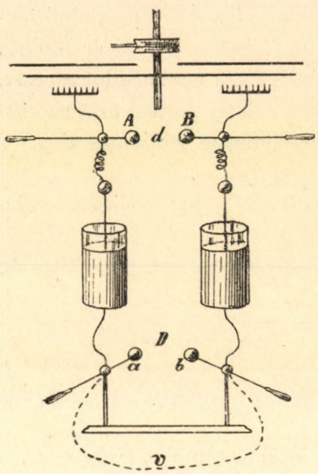
Az ez alkalommal észlelhető tüneményektől elütő tüneményeket láthatunk azonban akkor, ha ugyan-e csőben nyugvó folyadékoszlopot fölszinére mért erős ütéssel akarjuk mozgásba hozni. A folyadékoszlop tehetetlenségénél fogva nem enged az ütésnek s megeshetik — ha elég erős ütést mérünk a folyadék felszinére, hogy az üvegcső falai megrepednek és a folyadék kiömlik. Ez eset akkor áll be legkönnyebben, ha a cső falai merevek; de elmarad esetleg akkor, ha a cső falai rugalmasak és az ütés okozta nyomást és lökést szakadás nélkül kiállják.

A csőfal rugalmassága az elektromos vezetékek kapaczitását, a folyadékoszlop tehetetlenségből származó tünemények pedig a változó erősségű elektromos áramokkal észlelhető önindukczió jelenségeket jellemzik.

Valamely elektromos vezeték tehát, legyen bár keresztmetszete csekély, az elektromos kisülésnek biztos útat nyit, ha kapaczitása elég nagy s önindukcziója csekély; másrészt megeshetik az, hogy az elektromos átmeneti áram elhagyja az előzőnél sokkal nagyobb keresztmetszetű vezetéket, ha ez utóbbinak kapaczitása csekély s önindukcziója nagy.

A villámhárítók kérdésének ez alapon való kisérleti vizsgálását először GUILLEMIN és HUGHES kisérlették meg igen tanulságos eredménynyel.* Ujabb időben, a nyolczvanas évek végével OLIVER LODGE nagybecsű kisérleteivel hatalmasat lendített a villámhárítók kérdésének végleges megfejtésén.**

Mindenekelőtt LODGE kisérleteit akarom behatóbban tárgyalni.



1. ábra.

Az első kisérlet annak egyszerű kimutatására való, hogy az igen rövid idő alatt végbemenő statikai kisülések útját meghatározó tényezők között az elektromos ellenállásnak alsórendű szerepe van.

Ennek kimutatására az 1. ábrán előtüntetett elrendezés szolgálhat. Valamely elektromos megosztó gép két A — B kisütő rúdját kössük vezetően össze két leydeni palaczk belső felületével. A száraz faállványon álló palaczkok külső felületei pedig két ab kisütő rúddal állnak vezető összeköttetésben.

Az AB gömbök d távolsága és az ab gömbök D távolsága változtatható, és pontosan meghatározható. Ha A és B között kisülések történnek, ezekkel egyidőben az ab gömbök között is szikrák csapnak át: az ab között létesülő kisülések az AB között történő kisülések közvetetlen következményei és a D szikrahosszúsága bizonyos körülmények között a d szikratávolságnak közel kétszerese lehet.

A két távolság viszonya a d távolság abszolut értékétől, az alkalmazott leydeni palaczkoknak s az egész rendszernek kapaczitásától s önindukcziójától függ.

Az állandó erősségű áramokra vonatkozó kisérleti tapasztalataink alapján már most azt következtethetnők, hogy a és b között a szikrák meg-

* HUGHES: Annales Télégraphiques 1865. GUILLEMIN: Comptes Rendus 1866, p. 1083.

** OLIVER LODGE: Lightning conductors and lightning guards, London 1892.

szünnek, ha az *ab* rúdakhoz, tehát a *d* szikratávolsággal párvonalosan, vezetőt, pl. vastag rézdrótot kapcsolunk.

Evvel szemben azt tapasztaljuk, hogy ámbár *a* és *b* között vezető összeköttetést létesítettünk, *a* és *b* között szikrák csapnak át, ha a *D* távolság bizonyos a *d* távolságtól és az összekötő drót méreteitől, alakjától stb. függő értékénél kisebb.

Azt tapasztaljuk tehát, hogy *a* és *b* között a *D* levegőrétegen át halad az elektromos kisülés, jóllehet ez útnak ellenállása sok milliószor nagyobb az *a* és *b*-t összekötő rézdrót ellenállásánál.

Állítsuk be már most *D* távolságot úgy, hogy az *A* és *B* között átcsapó szikráknak megfelelő *a* és *b* között végbemenő kisülések majd a levegőn, majd a rézdróton haladjanak át; nevezzük e kritikus távolságot Δ-nak.

Egy kisérletben pl. *V* 150 cm. hosszú, 1 cm. átmérőjű sárgaréz volt; ez esetben Δ kb. 19 mm.

Ha már most az előbb említett sárgarézrudat ugyanoly hosszúságú s átmérőjű 0·5 mm. falvastagságú sárgarézcsővel helyettesítem, a kritikus távolság kisebb; tehát a sárgarézcső, noha ohmikus ellenállása sok százszorta kisebb a tömör sárgarézrudénál, szemlátomást jobban vezeti a kisüléseket.

Ha végre a *V* csövet pl. 10 méter hosszú, 3 mm. átmérőjű rézdróttal helyettesítjük, a Δ kritikus távolság attól függ, mily alakba hajlítjuk a drótot.

Azt találjuk, hogy Δ a legkisebb, ha a rézdrótot zeg-zúgban ide-oda hajlítjuk vagy a drótot felező pontjában meghajlítva, a két félt szorosan egymás mellé fektetjük, de úgy, hogy egymást ne érintsék, a végeket pedig *a*-hoz, illetőleg *b*-hez kötjük s legnagyobb értékét éri el Δ, ha a drótot spirálisba csavarjuk.

Azt találjuk továbbá, hogy Δ távolság tetemesen kisebbedik, tehát az *a*-t és *b*-t összekötő *V* rézdrót jobban s jobban vezeti a kisüléseket, ha lapos szalaggá kalapáljuk, vagy a rézdrótot ugyanakkora keresztmetszetű rézszalaggal helyettesítjük.

Ezekből következik, hogy az ilyen rohamos lefolyású áramok, statikai kisüléseit első sorban a vezetők alakja, illetőleg a vezetők elektromágneses tehetetlensége (önindukcziója) szabja meg; a vezető annál jobban vezeti a kisülést, minél kisebb az önindukcziója.

Ha az előbb említett rézdrótot vékonyabb, ugyanolyan hosszúságú rézdrót helyettesíti, Δ kisebb mint az előző esetben; azaz a vékonyabb drót jobban vezeti a kisülést a vastagabbnál. Még kisebbé lesz Δ, ha a vezető összeköttetést igen vékony vasdrót alkotja. A vékony vasdrót tehát jóllehet ellenállása több százszor nagyobb az első helyen említett rézdrót ellenállásánál, emennél jobban vezeti az elektromos kisülést.

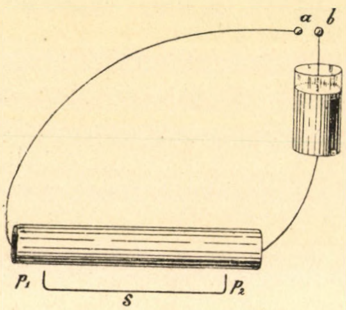
Ha végre igen nagy, több ezer Ohm-nyi ellenállású, de csekély önindukcziójú

cziójú vezetővel, pl. hajcsőbe zárt folyadékoszloppal létesítünk vezető összeköttetést *a* és *b* között, azt találjuk, hogy a Δ távolság alig növekszik, tehát ez az óriási ellenállású folyadékfonál alig vezeti valamivel rosszabbul a kisülést mint a rézdrót.

Mindezekből tehát azt kövelkeztetjük, hogy ha a felhő és a föld között történő kisülést jó vezető úton úgy akarják elvezetni, hogy a kisülés minden esetre e vezetőn keresztül haladjon, vagyis a vezető jó villámhárító legyen ; ekkor első sorban a vezetékek alakjára elrendezésére, egyszóval a rendszer önindukcziójára kell tekintettel lenni.

Ha e tényezőket figyelmen kívül hagyva, a keresztmetszet lehető nagyításában, lehetőleg vastag vezetőrudakban keressük a megoldást, nem érünk czélt.

A vastag vezetékek megbízhatósága megitélhető a következő kisérletből.



2. ábra.

A 2. ábrabeli leydeni palaczk kisülési áramát pl. 1 m. hosszú, 2—3 cm. átmérőjű szigetelt *R* vörösrézrúdon vezetjük keresztül és az *R* rézrúddal párvonalasan az *s* vékony, pl. 0·02 mm. átmérőjű platina szált fektetjük, melynek p_1 és p_2 végei k. b. 0·5 mm. távolságban állnak *R* rúdtól. Azt tapasztaljuk, hogy p_1-be és p_2-be *R* rúdból szikrák csapnak át, valahányszor *a* és *b* között a leydeni palaczkot kisütő nagy szikra csap át.

Hasonlóan meglehetős erős ütéseket kapunk, ha pl. 1 cm. átmérőjű 3—4 m. hosszú rézdrótból készített spirálison keresztül vezetjük a leydeni palaczk kisülő áramát és a spirális végeit nedves kézzel megérintjük.

Ha már most összevetjük az *a* és *b* között észlelhető szikrát a villám tüneményével s ily módon képet alkotunk a két kisülés nagyságának egymáshoz való viszonyáról, fogalmat alkothatunk arról is, hogy a vezetékekből történő esetleges oldalkisülések éppen nem ártatlan jellegűek.

Az itt bemutatott kisérleteket elméletileg Stefan J. nyomán követhetjük.*

Stefan a vezetőket az áramfonalaknak megfelelő vezetőfonalakra bontja, s e vezető fonalakra a párhuzamosan kapcsolt vezetőkre vonatkozó ismert képleteket alkalmazza.

Legyen két ilyen I. és II. fonál ohmikus ellenállása r_1 illetőleg r_2, önindukcziója L_1 illetőleg L_2 s kölcsönös indukcziójuk M; jelöljük a meg-

* Stefan J. Wied. Ann. XLI. köt., p. 400. 1890.

felelő áramok erősségét i_1 illetőleg i_2-vel, akkor e két fonálra egész általánosan az

$$i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

egyenlet áll.

Ha már most — mint az előző kisérletek esetében i_1 igen gyorsan irányát változtatgatja, ha tehát elektromos oscillatiókról van szó; akkor az $i_1 r_1$ és $i_2 r_2$ tagok a többiekhez képest igen kicsinyek s elhanyagolhatók. Ekkor tehát az 1) egyenlet az

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

alakot ölti, melyből -- mivel az időtől független tagok nincsenek az egyenletben — az

$$L_1 i_1 + M i_2 = L_2 i_2 + M i_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

egyenlet ered.

2) egyenlet pedig kriterium arra, hogy az

$$A = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2M i_1 i_2 + L_2 i_2^2)$$

kifejezés, mely az áramfonalak jelenlétéből származó a környező térben felhalmozott elektromágneses energia minimum legyen.

Stefan ez eljárást s eredményt két áramfonálról háromra, n-re, végre az áramfonalak végtelen seregére alkalmazva, a 2) képlet alapján a következő tételt mondja ki:

A váltakozó irányú (oscilláló) elektromos áramok a vezetőkben oly módon oszolnak el, hogy a velük együttjáró, a térben felhalmozott energia különben egyenlő viszonyok mellett minimum legyen. Az energia minimuma pedig akkor áll be, ha az áramok a vezetők felszinén haladnak.

A tényleges viszonyok annál jobban közelítik meg ez ideális állapotot, minél nagyobb az áramok váltakozási száma.

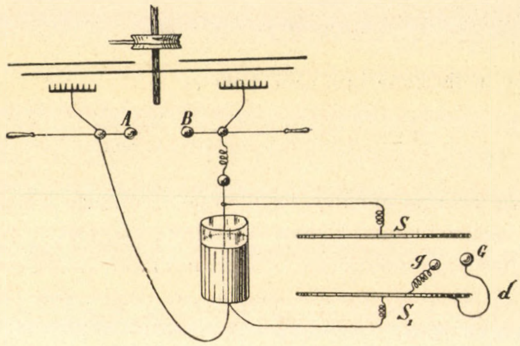
A dolog tényleg úgy áll, hogy az áramsűrűség a vezetők felszinében legnagyobb s innen a vezető tengelye felé fogy, és pedig annál gyorsabban fogy, minél nagyobb a váltakozási szám, s minél nagyobb az illető fém fajlagos vezető-képessége.

Az itt mondottak helyessége külömben az előzőleg közölt elvtől függetlenül is beláthatók, ha megfontoljuk, hogy a vezetők külső fonalainak önindukcziója kisebb, mint a belsőké, s azért a külső rétegekben az áramsürűség szükségképen nagyobb, mint a tengelyben, s pedig aránylag annál nagyobb, minél nagyobb a váltakozási szám, s minél nagyobb a fém fajlagos vezető képessége.

Ezekből következik, hogy bizonyos körülmények között fémcső épen oly jól vagy még jobban vezetheti az ily oscilláló áramokat, mint vele egyenlő méretű tömör rúd, továbbá hogy igen rövid elektromos hullámok a különféle fémekből való vezetékekben* egyforma sebességel terjednek; az első pontot az itt bemutatott kisérletek igazolják, a második következtetést pedig HERTZ igazolta kisérletileg.

Teljesség kedveért néhány megközelítő számítással nyert számértéket közlök. 4 mm. átmérőjű vasdrót felületén, ha a teljes váltakozások száma másodperczenkint $n=500$, k. b. 6-szor nagyobb az áramsűrűség, mint a drót tengelyében; ha $n=1000$, akkor a felületi sűrűség a tengelyben való áramsűrűségnek k. b. 20-szorosa.

Ha $n=50\times10^6$, akkor az áramsűrűség a felszin alatti 0·0085 mm. mélységben már 100-ad része a felszinben való áramsűrűségnek. $d=0·0058$



3. ábra.

mm. mélységben a felszín alatt az áramsűrűség 23-szorta kisebb a felszinen való sűrűségnél, s az áram fáziskülömbsége a felszinben haladó áramokkal szemben egy fél periodus, tehát az áramok ebben a mélységben a felszinben haladó áramokkal minden pillanatban ellenkező irányúak. Ez a jelenség 4 mm. átmérőjű rézdrótban k. b. 0·045 mm., ugyanoly vastag ujezüst drótban pedig 0·1 mm. mélységben lép fel.

Lássuk már most az u. n. *oldalkisülések* létrejöttét elősegítő tényezőket (3-ik ábra).

A és *B* az elektromos megosztó gép két kisütő rúdja, mely a leydeni palaczk két felületével áll vezető összeköttetésben. E két felület az *S* és S_1 fémlemezekkel van összekötve.

A palaczk kisüthető pl. oly módon, hogy a *G* szigetelt gömböt *d* drót

* Ilyenkor az áramok, ha helyesen akarunk beszélni, nem a *vezetékekben*, hanem a *vezetékeken* haladnak.

közvetítésével az S_1 lemezhez kötjük. A kisülés ekkor az S és G között létesülő szikrával történik és d drót vezeti a kisülés áramát. Ha már most d szomszédságába G gömbhöz közel g gömböt szerelünk s ezt r ellenállás közvetítésével S_1-hez kötjük, azt látjuk, hogy a G és S között létesülő szikrákkal egyidejűleg d és g között is létesülnek szikrák, r ellenállás növelése gyengíti a szikrákat, de nem szünteti meg.

A g és d között létesülő szikrák különben egyenlő körülmények között annál élénkebbek, minél nagyobb a d vezetéknek önindukcziója; tehát akkor a legerősebbek, ha d drót spirálisba van hajlítva. Az e kisérletből szerzett tapasztalatokat alkalmazhatjuk a villámcsapáskor történő kisülésre s a villámhárító vezetékekre.

S_1 lemez a földet, S a felhőt, d a villámhárító vezetéket és g a földdel többé-kevésbbé vezető összeköttetésben lévő, az épületben elhelyezett fémtárgyakat, személyeket jelképezi.

E kisérletek után a Franklin mintája szerint készült villámhárító elrendezések fogyatékosságára vonatkozó tapasztalatok nem lephetnek meg bennünket. E tapasztalatok sehogy sem egyeznek a villámhárítókra vonatkozó és sajnos még ma is általánosan hitt régi nézetekkel; eredményük a következő 2 pontban foglalható össze:

1. Jókarban lévő, jó földvezetéssel ellátott villámhárító nem szolgáltat föltétlen biztos védelmet; a villámlétesítette kisülő áram gyakran az egész villámhárító vezetéknek vagy egyes részeinek mellőzésével az épületekbe csap át.

2. A villámhárító vezetékének szomszédságában lévő vezetők, személyek a villámcsapás pillanatában veszélyben vannak; gyakran előforduló oldalkisülések végzetesekké válhatnak.

Az előző kísérletek egyúttal megmutatják az útat, hogy miképpen fokozható a villámhárító vezetékek révén elérhető biztosság s miképen zárható ki a veszedelem.

Mielőtt ezek alapján a helyes és megfelelő villámhárító elrendezések tárgyalásába fognék, még a villámhárítók végvezetőire, a csúcsos, függőleges rudak szerepére és czélszerűségére vonatkozó néhány téves nézetet igazítok helyre.

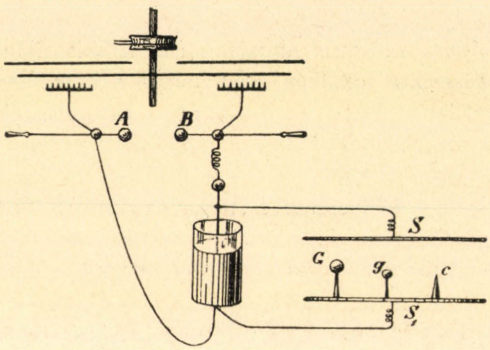
A régi villámhárító elrendezésekben szereplő 2—3 m. hosszú aranyozott hegyű függőleges rúdnak az épület megvédésében elsőrendű szerepet tulajdonítanak. Számos, jelenleg használatban lévő szakmunka e függőleges rúd méretezését és szerelésmódját különös gonddal tárgyalja. A villámhárítótól védett terület méretei a régi elmélet szerint a felfogó rúd magasságától függnek; a villámhárító ugyanis a régi felfogás szerint megvédi abban a kúpban foglalt testeket, melynek csúcsa a villámhárító rúd csúcsában, alapkörének középpontja pedig a rúd talpában fekszik. Az alapkör sugarát a villámhárító csúcs magasságának kétszeresére, mások háromszorosára veszik.

Az előbb közölt kisérletek alapján belátható, hogy ennek a törvénynek ily általános alakban nincs komolyan vehető alapja; sőt a következő kisérletekből kiviláglik, hogy sok esetben a csúcsos függőleges rúdnak védő hatást egyátalában nem tulajdoníthatunk.

Vegyük szemügyre e czélból a következő elrendezést (4. ábra).

Az elektromos megosztógép *A B* kisütő rudjaihoz a leydeni palaczkot s az *S* és S_1 szigetelt fémlemezeket kötjük.

Az S_1 lemezre a *G* nagy rézgömböt, a *g* kis gömböt és a *c* csúcsot szereljük úgy, hogy ezeknek *S* lemeztől való távolsága szabályozható legyen anélkül, hogy az S_1 lemezzel való vezető összeköttetés megszünnék.



4. ábra.

Ha a *G* és *g* gömböket és a *c* csúcsot egyforma magasságban szereljük, azt találjuk, hogy az S_1 és *S* között való kisülések nem szikra alakjában, nem időnkint, hanem folytonosan a csúcs közvetítésével történnek: a csúcs végében az ismeretes gyönge fénytüneménynyel járó csöndes kisülés látható. A viszonyok változatlanok maradnak, ha a csúcs a golyóknál jóval alacsonyabban van szerelve. A csúcs tehát megakadályozza az erősebb, időközönkint való kisülések létrejöttét. Ha végre a csúcsnak *S* lemeztől való távolsága elég nagy, ekkor a csúcsból történő csöndes kisülések mellett a csúcsból átcsapó gyönge szikrákat is éleszthetünk. A csúcs tehát a *G* és *g* golyókat megvédi a szikráktól.

C csúcsot eltávolítván, meggyőződhetünk arról is, hogy *g* kis gömb a nagyobb *G* gömböt védi, a mennyiben a nagy gömbnél jóval lejebb kell szerelnünk, hogy a szikrák *G* nagy gömbbe csapjanak.

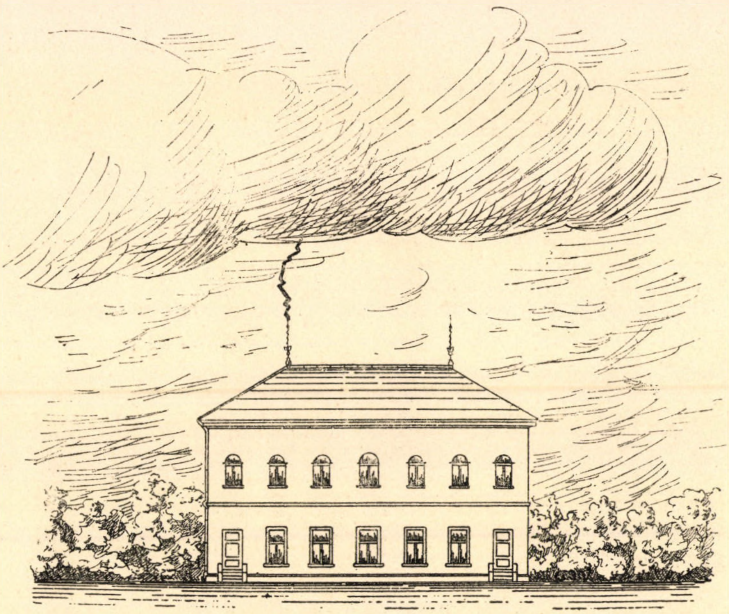
A *G* és *g* gömböket megvédi az S_1 lemezen álló Bunsen-láng is, vagy olyan fémcső, melyből forró levegő áramlik ki.

Együttal meggyőződhetünk arról is, hogy a csúcs a lángot védi, s hogy ennél sokkal jobb szikraháritó.

A gömböknek és a csúcsnak vezetékeibe igtatott nagyobb ellenállások a védő hatásokon nem változtatnak, a szikrák mindössze gyöngébekké válnak.

Az S és S_1 lemezek potentiálkülömbsége ez esetben *nem hirtelen*, hanem fokozatosan emelkedik a szikrák létesítésére szükséges értékre.

Hasonló viszonyok uralkodnak a természetben abban az esetben, mi-



5. ábra. Elsőrendű villámcsapás.

dőn pl. valamely épület felett lévő felhő és a föld között való potentiál különbség lassan emelkedik a villám létesítésére szükséges értékre, s a villám a felhőből az épületbe csap. (5. ábra.)

Az előző kisérletből következik, hogy az épületen lévő csúcsos, szegletes testek védik a többieket s hogy függőleges, a földdel vezető összeköttetésben lévő rúddal ellátott villámhárító elrendezés jobban felel meg mint más ily csúcsok hiján szerkesztett villámhárító.

A természetben azonban gyakori az az eset, hogy valamely felhő a felette lévő felhőbe sül ki; az alsó felhő s a föld között való potentiálkülömbség ennek következtében hirtelen felszökik, s a felhőből villám csap az alant lévő épületbe. (6. ábra.)

Ez az eset a 7. ábrabeli kisérleti elrendezéssel utánozható. A megosztó gép *A B* kisütő rúdjaihoz a leydeni palaczkot kötjük. S_1 lemezt a leydeni palaczk külső felületéhez, *S* lemezt *b* gömbhöz, *a* gömböt pedig *B* gömbhöz kötjük. Az *S* és S_1 lemezek potentiálkülömbsége, ha *a* és *b* között szikra csap át, hirtelen emelkedik fel arra az értékre, mely a *G* és *g* gömbök és *S* között való szikra létesítésére szükséges.

Azt látjuk, hogy ez esetben a kisebb gömb nem védi meg a nagyobbat és a csúcs sem védi meg a gömböket. A csúcsot a két gömbbel egy magas-

6. ábra. Másodrendű villámcsapás.

ságba állíthatjuk anélkül, hogy megakadályozhatnók ezzel *S* lemez és a gömbök között való szikrák létesülését.

Ha ellenben égő Bunsenlámpát szerelünk az S_1 lemezre, vagy forró légáramlatot bocsájtunk ki az S_1-re szerelt fémcsőből, azt tapasztaljuk, hogy e forró légáram teljesen megvédi a csúcsot és a gömböket, s a légoszlopba, illetőleg a lámpa lángjába erős szikrát csapnak.

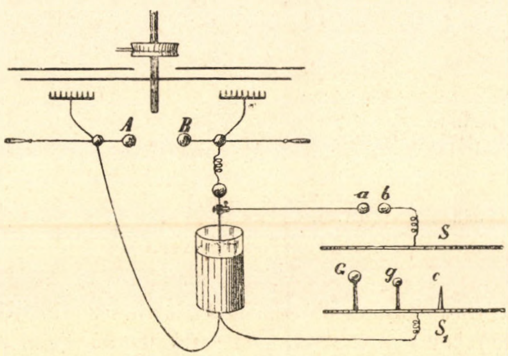
Következik ebből, hogy a 6. ábrán előtüntetett esetben a csúcsos rúd nem növeli a villámhárító elrendezés biztosságát. Növeli azonban a villámcsapás valószínűségét, mivel a csúcs jóval magasabban van az épület tetejénél; s a vezeték fogyatékosságánál fogva kárt okozhat az ilyen villámcsapás, mely — ha a csúcsos rudat mellőzük, nem is létesült volna.

Belátható továbbá ezek alapján, hogy gyárak kéményeit, házak kürtőit régi divatú csúcsos villámhárító nem védheti meg hasonló esetben a villámcsapástól.

A tapasztalás mutatja, hogy sok esetben a kisülés a villámhárító vezetéknek s a csúcsos rúdnak részben vagy teljesen való mellőzésével és a forró légoszlopnak és falazatnak közvetítésével halad a föld felé.

E kisérletek alapján hozzáfoghatunk a helyes, illetőleg a régi villámhárító elrendezéseknél helyesebb, czélszerűbb elrendezések tárgyalásához és megokolásához.

A bevezető sorokban az elektromos vezetékeket csővezetékekhez hasonlítottuk és az elektrosztatikai kapaczitásból és önindukczióból származó tüneményeket a csőrendszer falainak rugalmasságával, illetőleg a csőrendszerben haladó folyadék tehetetlenségével jelképeztük.



7. ábra.

Kifejtettük, hogy a csőrendszer annál jobban helyt állhat a folyadék oszlopra mért ütéseknek, minél nagyobb falainak rugalmassága s minél kevésbbé érvényesül a folyadék tehetetlensége.

Ha tehát teljesen megfelelő villámhárító vezetéket, azaz oly vezetékeket akarunk létesíteni, melyeket a villámcsapáskor történő hirtelen kisülést jól vezessék, a vezetékeket oly módon válaszszuk meg és rendezzük el, hogy elektrosztatikai kapaczitásuk lehető nagy s önindukcziójuk lehető csekély legyen.

Mind a két föltételnek eleget tehetünk, ha lehetőleg nagy felszinü, csekély keresztmetszetü vezetékeket, vagy vezetékkötegeket alkalmazunk; a vezetékek keresztmetszetét — tekintettel a kisüléskor beálló hőfejlődésre, természetesen nem szabad oly csekélyre vennünk, hogy kisüléskor esetleg elolvadjanak. Kondenzátorokat a vezetékek kapacitásának növelésére nem alkalmazhatunk: e kondenzátorok a kisüléskor szereplő nagy potentialkülömbségnek helyt nem állhatnának s első alkalommal tönkremennének.

Könnyen belátható, hogy bizonyos határon túl nem csökkenthető a villámhárítóvezetékek önindukcziója, a mi egyértelmű avval, hogy a régi mintájú villámhárító elrendezés s annak változatai nem szolgálhatnak föltétlen biztos védelmet.

Ha valamely épületet föltétlen biztossággal akarunk megvédeni, s ki akarjuk zárni teljesen annak lehetőségét, hogy a kisülés az épületet útjába ejtse, ekkor az épületet fémhálóból, vagy még czélszerűbben 2—3 mm. vastag fémlemezekből való teljesen zárt vagy zárható burkolattal kell ellátni és e burkolatot a földel kell összekötni.

Az ilyen burkolat föltétlen biztossággal védi meg az épületet; a burkolatba csapó villámok minden körülmények között a burkolat mentén jutnak a földbe.

Az ilyen villámhárító elrendezés azonban lakóházak, templomok stb. védésére költséges volta és az architektura miatt, továbbá gyakorlati okokból nem alkalmazható.

Ilyennek alkalmazása tényleg csak ott okolható meg, a hol a legcsekélyebb elektromos szikra is nagy veszedelmet idézhetne elő; tehát puskapor raktárak, puskapor gyárak, s hasonló rendeltetésű épületek megvédésére.

Az ilyen fémlemez vagy hálóburkolat azonban csak akkor védi meg az épületet föltétlen biztossággal, ha tökéletesen zárt; ez annyit jelent, hogy a falakra, tetőre rakott lemez vagy háló burkolat az ajtókra alkalmazott fémburkolattal, s az ablakra feszített fémhálókkal együtt összefüggő vezető felületet alkosson.

A vezető felületet bárhol áttörő szigetelt drót (pl. telegráf vezeték, vagy világító vezeték) a villámcsapást az épület belsejébe juttathatja. Ez az eshetőség csak oly módon zárható ki, ha a vezetéknek s kezdetének kellő megvédéséről gondoskodunk. — Tökéletes alakban ez oly módon eszközölhető, hogy a vezetéket szigetelt fémburkolattal látjuk el; e fémburkolat az itt szóban lévő épület fémburkolatához, másrészt a vezeték másik végén lévő szerkezeteket védő épület fémburkolatához csatlakozik.

Ily módon pl. a távíró vezetékek, valamint a végeiben alkalmazott készülékek teljesen zárt vezető burkolattal környeztetnek. Védetlen, vagy hiányosan védett épületekben elhelyezett éghető vagy robbanó anyagok oly módon védhetők meg a villámcsapások ellen föltétlen biztossággal, ha fémburkolattal s földvezetéssel ellátott, teljesen zárható tartókba helyeztetnek el.

A tartót magába záró összefüggő vezető felülettől határolt tér teljesen ment a felületben haladó kisüléséktől s szikrák az e felülettől határolt térben nem létesülhetnek.

Az ilyen tökéletes villámhárító elrendezés költségeinél fogva, valamint gyakorlati s architektonikus okokból nem alkalmazható lakóházak, középületek stb. megvédésére. Az előzőleg tárgyalt kisérleti tapasztalások felhasználásával azonban elég olcsó (a Franklin-féle villámhárító elrendezéseknél tetemesen olcsóbb) villámhárító elrendezésekkel láthatók el az épületek, melyek igen jó védelmet szolgáltatnak. Megeshetik ugyan, hogy gyöngébb oldalkisülések, még ezek alkalmazása ellenére is jutnak az épületbe, de ezek jelentékenyebb kárt nem ejthetnek. Ez oldalkisülésre okot az épületben lévő fémes, egyátalában vezető testek, gáz- és vízvezetéki csövek kályhák stb. szolgáltatnak, de hatásuk s egyuttal az oldalkisülések valószinűsége aránylag könnyen csökkenthető.

A szóban forgó egyszerű elrendezés az épület főbb körvonalait, a tetőnek, a falaknak éleit követi és megfelelő földvezetékkel ellátott fémes vezetékvázból áll. E czélból az épület tetejének gerinczét, a tető széleit, az épület függőleges éleit és sarkait követve k. b. 3 mm. átmérőjű czinkezett vasdrotot vagy ugyanilyen keresztmetszetű vasdrót-köteget húzunk. E vezetékeket találkozó s metsző helyeikben gondosan összeforrasztjuk s ily módon összefüggő vezető vashálót létesítünk.

Czélszerű a tető gerinczén végig haladó vezetékre 3—4 cm. hosszú fémcsúcsokat szerelni, megfelelő forrasztásokkal a vezetékekkel való vezető összeköttetést kellőleg biztosítva.

Ily vezetékek létesítésére igen alkalmas az általánosan ismert, kerítések készítésére használatos *czinkezett tüskés vasdrót.* Ez elrendezést Maxwell ajánlotta először anélkül, hogy megokolta volna. Nyilván a fémhálót akarta főbb vonásaiban utánozni. Angolországban, valamint az afrikai angol gyarmatokban sok helyütt alkalmazzák ujabb időben ezt az elrendezést, még pedig a mint a statisztikai adatok mutatják, a legjobb sikerrel.

Az eredmény kivált az afrikai gyarmatokban szembeötlő, a hol a zivatarok hevességüknél s gyakoriságuknál fogva emberéletben s vagyonban azelőtt jelentékeny károkat okoztak.

Az afrikai gyarmatokban ez elrendezés bevált még egy másik gyakorlati előnynél fogva is.

Az ily vasdrótból készült vázakat kevés költséggel mezőkön álló magányos épületek, szinek, szénaboglyák megvédésére is lehet alkalmazni.

Az itt vázolt elrendezések földvezetésének készítésekor ugyanazok az elvek követendők, melyeket a felső vezetékek elrendezésekor kell szem előtt tartani.

A földvezetékeket is oly módon kell méretezni, hogy önindukcziójuk lehetőleg csekély s kapacitásuk lehető nagy legyen. Tömör, hengeres rudaknak alkalmazása teljesen helytelen és szerfelett drágítja az elrendezést. Legczélszerűbb 2—3 mm. vastag, 4—5 cm. széles czinkezett vasbádogból vágott fémszalagokat alkalmazni, melyek alsó végéből 2—3 mm. átmérőjű és k. b. 40—50 cm. hosszú vasdrótok ágaznak szét. Minél több az e fajta földvezeték, annál jobb; számuk az épület nagyságától függ. — Nagyobb épületnél, pl. nagyobb bérháznál czélszerű az épület mindegyik sarkán lefutó vezetékhez földvezetéket kötni.

Az előbb említett vasszalagok helyett előnyösen vékony, czinkezett vasdrótból készült köteleket alkalmazhatunk, melyeknek alsó végén a szálakat 40—50 cm. szélességben szétfejtjük.

Mint már említettük azelőtt a földvezetés kérdésének elsőrendű fontosságot tulajdonítottak; gyakran a száz m.-t meghaladó hosszúságú vezetékeket is készítettek, csakhogy a villámhárító földvezetékét valamely kútnak vagy tónak vizével hozhassák vezető összeköttetésbe.

Értekezésünk elején kisérletekkel bizonyítottuk be azt, hogy a vezetés jósága ez esetben csak másodsorban kerül szóba; s a régi villámhárító elrendezésekről, bárminő jó vezető összeköttetést is létesítettek a földdel, nagy önindukcziójuknál, azaz helytelen alakjuknál fogva nem képezhettek jó földvezetéket. Ellenben a fönt részletezett villámhárító elrendezés tapasztalás szerint tényleg még akkor is megteszi a szolgálatot, ha a föld és földvezeték között létesitett vezető összeköttetés nem is éppen a legjobb.

E vezető összeköttetés jósága a földvezetékek elrendezésmódjának megválasztásától függ, melynek esetről-esetre a talajviszonyokhoz kell alkalmazkodnia.

A legjobb vezető összeköttetés az, ha a földvezeték a talajvíz színeig megy. Kutaknak, folyóknak, tavaknak vize czélszerűen használható fel vezető összeköttetés közvetítésére, föltéve, hogy közvetetlenül a védett épület mellett vannak, s így a vezeték nem okoz tetemes költséget.

Kutaknak stb. ily czélokra való felhasználása azonban csak akkor engedhető meg, ha fémes vezetékek nem torkolnak beléjök. Ily fémes vezetékek, pl. vízvezetéki csövek stb. állandó veszély forrásai zivatar idején.

A tapasztalás ugyanis arra tanít, hogy a villámhárító vezeték közvetítésével a vízbe jutó villámcsapás az egész víztömegben s a vele összeköttetésben levő csővezetékben tetemes zavarokat idézhet elő. A vízbe torkolló csővezetékek több száz méternyi távolban levő végeiből erős szikrák csaphatnak át szomszédos tárgyakba, s életben és vagyonban kárt okozhatnak. Az ilyen villámcsapás hatását legjobban mutatja egy Angolországban megfigyelt eset, melyben egy tó összes halállománya tönkrement, a tótól körülbelül 100 m-nyire levő villámhárítóba ütött villám következtében, mely a villámhárító főbb vezetékén át a tó vizébe jutott.

Ott, a hol a nagy távolság vagy az imént említett veszélyek miatt kutakat, nagyobb víztömegeket nem használhatunk a földvezetés közvetítésére, ott legczélszerűbben a következő elrendezést követjük. A földvezetéket közel az épület alapfalaihoz legalább 4—5 m-nyire a földbe mélyesztvén, e mélységben elágaztatjuk; czélszerű, ha a földvezetés számára készített függőleges fúrás alsó részét kóksz-szal vagy faszénnel töltjük meg, s a környező földréteget a túlságos kiszáradástól óvjuk.

Nem szorúl bővebb magyarázatra, hogy különben egyenlő nedvességi viszonyok mellett a földvezetés annál jobb, minél mélyebbre visszük a föld felszíne alá: a kisülés elvesztése annál tökéletesebb lesz.

A földvezetés kérdésével kapcsolatban sokat foglalkoztak szakértők és bizottságok annak a kérdésnek a tisztázásával, vajjon megengedhető-e a villámhárítók földvezetékének a földalatti gáz- vagy vízvezetéki csövekhez való kapcsolása?

A míg a gyors statikai kisülések eloszlására és mozgására ugyanazokat a törvényeket alkalmazták, mint az állandó áramok eloszlására, addig e kérdésekre igenlő volt a felelet. A tapasztalat mai állása szerint azonban e kérdésre csak tagadólag felelhetünk; illetőleg ki kell mondanunk azt, hogy a földalatti csővezetékeket lehetőleg kerülnünk kell, még pedig nem azért, mintha a csővezetéken esetleg ejthető károktól tartanánk, hanem ama kákárok miatt, melyeket e csővezetéknek, a házakba torkolló elágazásai okozhatnak.

A csővezeték egy részén haladó kisülés a csővezeték távolabb eső részeiben és a csővezeték egyes pontjai vagy a végrészek és a föld között tetemes elektromos erőket létesíthet. A végrészeken alkalmazott csapokból a szomszédos vezetőkbe, esetleg a csap közelében levő személyekbe, erős szikrát csaphatnak át és komoly bajt okozhatnak.

Érdekes adatokat szolgáltat ehhez az Angolországban megejtett idevonatkozó megfigyelések statisztikája. Sok esetben megtörtént, hogy valamely épületbe csapott villám hatása következtében a szomszédos épület valamely csövéből kiáramló világító gáz meggyuladt, vagy a szomszédos épület vízvezetéki csapjánál foglalatoskodó egyén hatalmas ütést kapott.

Egyébiránt megjegyzendő, hogy sok esetben a földvezetés és a csővezetékek között létesített kapcsolás révén elért eredmény vajmi kétes. E csővezetékek földvezetése sok esetben vajmi hiányos, s ezért a kapcsolás a villámhárító földvezetésének tökéletességét csak mérsékelt módon gyarapítja.

Megjegyzéseink egyformán vonatkoznak gáz- és vízvezetéki csövekre. A vízvezetékből helyenkint kiszivárgó víz tapasztalás szerint nem sokat változtat a földvezetés minőségén, ez első sorban a talajviszonyoktól függ.

Egyébiránt teljesen hibás volna, ha azt tételeznők fel, hogy a kisűlés levezetésében a csőrendszer egész terjedelmében szerepelhet: a csővezetékek nagy önindukcziója miatt a csőrendszernek csak igen csekély kiterjedésű része vesz részt a kisülés levezetésében.

Városokban a villámhárítók földvezetékei akárhányszor csővezetékek közelébe jutnak; ez a helyi viszonyok miatt el nem kerülhető. Ez esetben villámcsapáskor a földvezetékből erősebb kisülések juthatnak a csővezetékbe (különösen akkor, ha a földvezeték nem halad le kellő mélységig), s nagyobb károkat ejthetnek a csövekben. Ilyenkor két baj közül a kisebbet választva, a csővezetékhez kötjük a hárító földvezetéket.

Már említettük, hogy a villámhárító elrendezések (ha csak nem fémlemez vagy fémháló burkolatokat alkalmazunk) ugyan elég nagy biztossággal, de nem feltétlen biztossággal védik meg az épületben levő vezetőket. A villámhárító vezetékből átcsapó oldalkisülések, vagy a kisülés indukcziós hatásából származó, az egyes vezetők között átcsapó szikrák ha nem is nagy, de mégis számbavehető károkat okozhatnak.

A villámcsapáskor beálló viszonyokat különben kicsiben utánozhatjuk, ha a villámhárító vezeték legfelső részeiben valamely elektromos megosztó gépből töltődő leydeni palaczktelep kisüléseit bocsátjuk. A villámhárító vezeték alsó részeiből ekkor meglehetős szikrákat csalhatunk, a vezeték közelében szigetelten felállított vezetők között; ha elég közel vannak, apró szikrák csapnak át. Sötétben a házban lévő csővezetékek csapjain, a villámhárító vezetékhez közel lévő vezetőkön fénytüneményeket észlelünk a padláson elhelyezett leydeni palaczktelep kisülésekor. Az e kisérletkor szereplő töltések elenyésző csekélyek a villámcsapások mennyiségeihez képest s e kisérlet alapján képet alkothatunk a villámcsapástól okozott indukczió hatások nagyságáról.

Az épületekben lévő vezetők, csővezetékek legczélszerűbben oly módon védhetők meg ily indukcziós hatások és oldalkisülések hatásaitól, ha vékony, k. b. 2—3 mm. átmérőjű vasdrót vezetékkel kötjük őket össze és e vezetéket külön földvezetéshez kapcsoljuk. A villámhárító földvezetését nem szabad e czélra felhasználnunk. Ily összeköttetéseket a gyakorlatban természetesen csak állandó helyű vezetők között létesíthetünk s ez esetben a vakolatba rejthetők az összekötő drótok. Egyébiránt pedig ügyeljünk arra, hogy a külső villámhárító vezetékek közelébe fémtestek, pl. dísztárgyak, fegyverek stb. ne kerüljenek. A villámhárító vezeték közelében lévő egyének a villámcsapás pillanatában veszélyben forognak, a vezetékből átcsapó oldalkisülések vagy a villám-indukczió hatásai végzetes következményekkel járhatnak.

Az afrikai angol gyarmatokból származó statisztikai jelentések ismételten említenek oly eseteket, melyekben az épületen kívül lecsapó villám az épületben lévő egy-két egyénnek halálát okozta, anélkül, hogy az épületben vagy az illető egyéneken bárminemű külső sérülés látható lett volna.

Az épületben levő vezető testeknek előzőleg ismertetett összeköttetése csak akkor fontos követelmény, ha az épület magányosan áll, s a légköri viszonyok a villámcsapásoknak a 6. ábrán előtüntetett változatát előmozdítják. Nagyobb városok épületeinek fémtetői, csúcsai stb. közreműködnek a fölöttük lévő felhő s a föld között lévő elektromótoros erő kiegyenlítésében, s ezért a nagyobb városok felett végbemenő zivatarok soha sem oly erősek, mint a szabad területek felett.

A kiegyenlítő hatás azonban nem érvényesül, ha a város felett lévő felhőnek potencziálja a 6. ábrán előtüntetett módon hirtelen emelkedik. Ilyen esetekben a régi szerkezetű villámhárítók sehogy sem felelnek meg, s az elrendezésre fordított költség semmiképen sem áll arányban a védelem biztosságával.

Helyén való lesz, ha itt még magas, falazott kürtőknek helyes megvédéséről is megemlékezünk.

Az eddig szokásos, 20—30 m. hosszú csúcsban végződő, tömör rézvezetékek nagy önindukcziójuknál fogva tapasztalás szerint sok esetben felmondják a szolgálatot.

A 6. ábrán ismertetett esetben pedig teljesen hibás volna azt hinni, hogy a kürtőnek megvédésében az ilyen vezetéknek szerep juthat. Az említett eset tárgyalásakor kisérletileg kimutattuk, hogy a forró gázok, ez esetben tehát a kürtőből kiáramló forró égéstermékek sokkal jobban vezetik a hirtelen elektromos kisülést, mint a fémes, önindukcziós vezetékek. A villám ezért a vezetékrudakat részben vagy egészben mellőzve a forró légoszlopban halad lefelé és megrongálja a falazatot.

Megfelelő villámhárító elrendezést oly módon készíthetünk, ha a kürtőn végig kívül 2—3 mm. vasdrótból való egy vagy két vezetéket húzunk a kürtő alapfalai mellett lévő földvezetéshez és e vezetékekhez, egymástól 3—4 m-nyi távolságban, a kürtőt körülövező drótgyűrűket forrasztunk.

Az e dolgozatban vázolt elrendezések költségei jóval csekélyebbek a régi, Franklin-féle minta szerint készített villámhárítók költségeinél.

Igaz ugyan, hogy gyakran akadunk e régi minta szerint készült oly villámhárítókra, melyek a szerelés gyarlóságánál fogva igen csekély költségbe kerülhettek, de ezek adott alkalommal nem is felelnek meg ; oldalkisülések akárhányszor veszélyeztetik az ily elrendezésektől védett épületek biztosságát.

Végül még csak kötelességemnek akarok megfelelni, midőn megemlékezem dr. MANN-ról, ki az afrikai angol gyarmatokban végzett kisérleteivel s ott gyüjtött statisztikai adatokkal nagy szolgálatokat tett a villámhárítók ügyének.

Dr. Hoór.

A Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai.

A választmány f. é. október hó 19-én tartott ülésen a Mathematikai és Physikai Társulat új tagjaiul a következőket választotta meg: *Berkes Ottó* premontrei kanonok és tanár Csornán (aj. *Edelmann* és *Módly*); *Terlanday Emil* Szt. Benedekrendi tanár Kőszegen (aj. *Simon* és *Bartoniek*); *Serédi Marczell* Szt. Benedekrendi tanár Pannonhalmán (aj. *Palatin* és *Fröhlich*); *Sárgay Antal* k. r. tanár Léván (aj. *Sinkovits* és *Schmidt*); *Pálya Mihály* polg. isk. igazgató Csáktornyán (aj. *Alszeghy* és *Bartoniek*); *Fischer Endre* polg. isk. tanár Csáktornyán (aj. *Alszeghy* és *Bartoniek*); *Dr. Kuthy József* főreálisk. igazgató Székesfehérvárott (aj. *Bod* és *Szily*); *Fabuss Alajos* polg. isk. igazgató Beszterczebányán (aj. *Marcsiss* és *Wagner*); *Bruckner Károly* főgymn. tanár Késmárkon (aj. *Klein* és *Mauritz*); *Korbuly Emil, Orosz József, Nagy Sándor* és *Petres János* mennyiség- és természettudományi kari hallgatók Kolozsvárott (aj. *Farkas* és *Vályi*); *Joó István* a tiszántuli ref. főgymnasiumok felügyelője Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Orosz István* ref. tanítóképezdei tanár Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Gerecz Lajos* áll. főreálisk. tanár Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Potomcsik Ignácz* keresk. akad. tanár Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Priváry József* r. kath. gymn. tanár Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Lesska Ferencz* a M. Á. V. üzletvezetőségének ellenőre Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Stahl Géza* városi főmérnök Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Kappel György* áll. főreálisk. tanár N.-Várad (aj. *Vidovich* és *Krüger*); *Szabó János, Rózsa István, Frank István, Somogyi István* és *Grexa Loránd* prem. rendű tanárok Kolozsvártt (aj. *Farkas* és *Novotny*); *Burkovits Lajos* főgymn. tanár Keszthelyen (aj. *Edelmann* és *Módly*); *Láng Emil* prem. kanonok és főgymn. tanár Keszthelyen (aj. *Edelmann* és *Módly*); *Fischer Miklós* ág. ev. főgymn. igazgató Iglón (aj. *Kövi* és *Mauritz*); *Dr. Lévay Ede* k. r. főgymn. tanár Nyitrán (aj. *Ferenczy* és *Schmidt*); *Szirtes Ignácz* áll. főreálisk. tanár Pécsett (aj. *Dischka* és *Maksay*); *Riegler Sándor* az áll. keresk. akademia igazgatója Fiumén (aj. *b. Eötvös* és *Bartoniek*); *Dr. Salcher Péter* a cs. és kir. tengerészeti akademia tanára Fiumén (aj. *b. Eötvös* és *Fröhlich*); *Dózsa Jakab* áll. főreálisk. tanár Székely-Udvarhelyt (aj. *Hlatky* és *Rados J.*); *Kolbenheyer Károly Arnold* főgymn. tanár Nagy-Szebenben (aj. *Gidófalvy* és *Ferenczy*); *Karvázy Zsigmond, Mikola Sándor* és *Ondrus Pál* tanárjelöltek Budapesten (aj. *Klupáthy* és *Tangl*); *Niedermayer Gyula* áll. középkereskedelmi iskolai tanár Ujvidéken (aj. *Szutrély* és *Pap*); *Molnár Aladár* áll. polg. isk. tanár Ujvidéken (aj. *Szutrély* és *Pap*).

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

HARMADIK ÉVFOLYAM

VIII. FÜZET. 1894 DECZEMBER

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894

TARTALOM

Lap

SZILY KÁLMÁN: A körvonal üldöző görbéje 353
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről. (Első közl.) 359
BAUER MIHÁLY: Megjegyzés Dirichlet egyik tételéhez 368
Physikai Szemle. (A kritikus pont meghatározásáról. — Folyadékok és telített gőzök sürűségéről) 373
Irodalom. (Oliver Heaviside, Electrical Papers. Ism. HELLER.) 383
Megoldott feladatok. (20. feladat megoldása RADOS I.-tól) 388
Physikai Laboratorium. (Kisérletek a folyadékok felületi feszültségére. — A fémek külömböző kiterjedése. — A kifeszitett kaucsuk összehuzódása.) 396
Értesítő a Math. és Phys. Társulat előadásairól. (KLUPATHY JENŐ: Kisérletek elektromos oscillatiókkal.) 399

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalabb 3 ivnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 iv terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

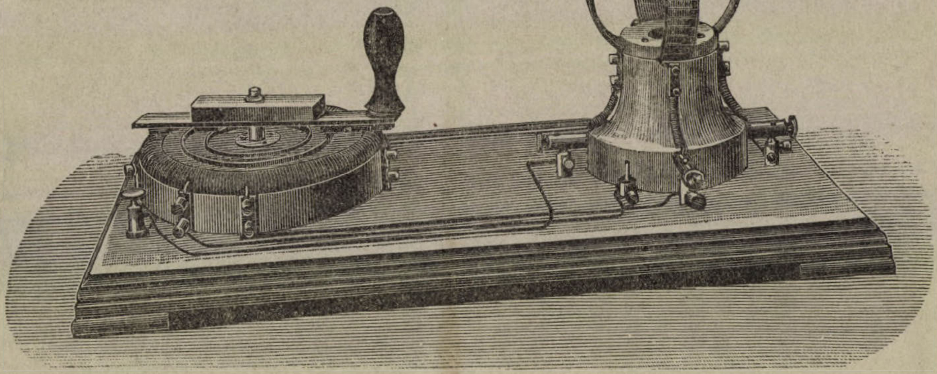
Társulati mondanivalók. A harmadik társulati év 1894. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében volt esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czímére — legczélszerűbben a I. füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *Hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

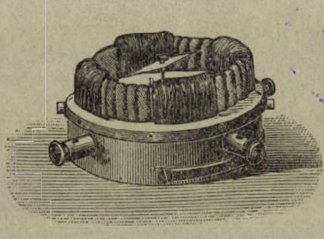
Rendes ülések. A társulat üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

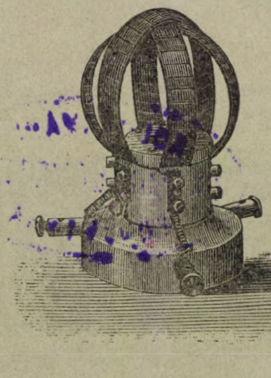
A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czimére (**VI. Bulyovszky-u. 16.**) intézendők.

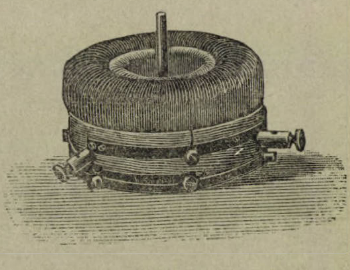
A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár (**VII., Csengery-u. 1**), a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesitésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó tetemes kiadástól mentik fel.









FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A KÖRVONAL ÜLDÖZŐ GÖRBÉJE, ÁLLANDÓ TÁVOLSÁG MELLETT.*

Klerics Lyubomir úr, a belgrádi főiskolán a mechanika tanára, 1893. őszszel Budapesten átutaztában közölte velem, hogy *szerkesztés* útján egy meglepő kinematikai tételre jutott, a mely, ha általános érvényességét mathematikai szigorúsággal be lehetne bizonyítani, nemcsak elméleti szempontból, hanem a gyakorlati planimetria tekintetében is rendkívüli fontosságú lenne.

A tétel ez: «Mialatt az üldözött A pont a síkban egy tetszőleges *zárt* görbét körül fut s visszaérkezvén kiindulása helyére (A_0-ba), onnan a zárt görbétől befoglalt terület súlypontjáig (S-ig) egyenes vonalon leszáll, — az alatt az üldöző B pont (föltéve, hogy távolsága A-tól állandó marad, s a mozgás kezdetén B_0, A_0 és S egy egyenesben feküdtek) utoljára egy oly helyre (B_s-be) jut, hogy a B_s-ből A_0B_0-ra bocsátott merőleges hosszát (h-val) az AB távolsággal (l-lel) megszorozván, *e szorzat* (hl) *egyenlő lesz a zárt görbétől befoglalt síkidom területével.*»

Meg akartam győződni, vajjon e tétel, legalább egy síkidomra nézve, bárha bizonyos határok között is, szigorúan igaz-e? Ez okból meghatároztam a *kör* kerületén egyszer körülfutó s azután a középpontig egyenes vonalon leszálló pont üldöző görbéjét, állandó távolság mellett.

Vizsgálataim eredményét Klerics tanár úr előterjesztette a kir. szerb akadémia 1893. deczemberi osztályülésén és közzé is tette a Glasz czímű szerb akadémiai folyóirat 41-ik kötetében.

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat deczember hó 6-án tartott rendes ülésén.

Szabadjon a főbb eredményeket a Mathematikai és Physikai Lapok olvasóival is megismertetnem.

I.

Tegyük föl egyelőre, hogy az üldözött A pont az

$$y = f(x) \tag{1}$$

tetszőleges síkpályán mozog; minő pályát ír le az üldöző B pont, a távolság köztök állandóan ugyanaz maradván.

Jelöljük az A pont derékszögű koordinátáit x és y-nal, a B pontéit ξ és η-val, állandó távolságukat l-lel, úgy

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = l^2 \tag{2}$$

és

$$\eta - y = \frac{d\eta}{d\xi}(\xi - x). \tag{3}$$

Jelöljük továbbá az üldöző görbe pálya elemét $d\sigma$-val, úgy a (2) és (3) egybekapcsolásából származik:

$$\xi - x = \pm\, l \frac{d\xi}{d\sigma}$$

$$\eta - y = \pm\, l \frac{d\eta}{d\sigma}.$$

Ha innen x és y értékeit (1)-be helyettezzük, megkapjuk az üldöző görbe differencziálegyenletét.

A (2) alatti egyenlet differencziálása, egyszerű átalakítás után, a

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = \frac{l^2}{\xi - x}\,d\xi = \frac{l^2}{\eta - y}\,d\eta \tag{4}$$

relaczióra vezet, a melyre az alábbiakban szükségünk lesz.

II.

Legyen az A pont pályája: a sugarú kör, melynek középpontját (S-t) a koordináták kezdetéül véve, lesz:

$$\left(\xi \mp l \frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\eta \mp l \frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 = a^2$$

és innen, ha B vezérsugarát ρ-val jelöljük:

$$\frac{d\sigma}{d\rho} = \pm \frac{2l\rho}{\rho^2 + l^2 - a^2}.$$

Vezessünk be ide polár-koordinátákat (ρ és ϑ) s a ϑ szöget számítsuk az SA_0B_0 kezdeti helyzettől, úgy:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\rho}\right)^2 = 1 + \rho^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\rho}\right)^2$$

és ebből, minthogy ϑ nőttével ρ csökken,

$$\frac{d\vartheta}{d\rho} = -\frac{\sqrt{4l^2\rho^2 - (\rho^2 + l^2 - a^2)^2}}{\rho(\rho^2 + l^2 - a^2)}$$

Az integrálás megkönnyebbítése végett, hozzuk be ρ helyett, a

$$\cos \alpha = \frac{\rho^2 + a^2 - l^2}{2a\rho}$$

értelmezés alapján, új változóul α-t, vagyis az SA és SB vezérsugarak közé zárt szöget. Kellő összevonás után lesz:

$$\frac{d\vartheta}{d\alpha} = \frac{a^2 \sin^2\alpha}{l^2 - a^2 \sin^2\alpha}$$

Jelöljük az

$$\sqrt{1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2}$$

számot k-val s integráljunk:

$$\vartheta + \alpha = \frac{1}{k} \operatorname{arctg}(k \operatorname{tg} \alpha) \tag{5}$$

az integrálás állandója zérus levén, minthogy a kezdeti helyzetben mind α mind ϑ zérus.

Az SA vezérsugár irányszögét (SA_0-tól számítva) jelöljük φ-vel, s vegyük figyelembe, hogy

$$\alpha = \varphi - \vartheta,$$

úgy az (5) alatti egyenlet még így is írható:

$$\operatorname{tg}(\varphi-\vartheta)=\frac{1}{k}\operatorname{tg}(k\varphi) \qquad (6)$$

Ez az egyenlet minden φ-re megadja a hozzátartozó ϑ-t, vagyis kifejezi (ϑ és φ koordinátákban) a *kör üldöző görbéjének egyenletét, állandó távolság mellett.*

Ha $k^2<0$, akkor az üldöző görbe spirális, mely az S középpontú és $\sqrt{a^2-l^2}$ sugarú körvonal felé közeleg; ha $k=0$, a görbe akkor is spirális, mely az S középpont felé közeleg; ha végre $k^2>0$, akkor ρ periodikus függvénye φ-nek, és a periodus egyenlő $\frac{2\pi}{k}$-val.

III.

A körkerület egyszeri körüljárása be levén fejezve,

$$\varphi=2\pi$$

és a (6) egyenlet szerint, a megfelelő $\vartheta=\vartheta_1$ lesz

$$\operatorname{tg}\vartheta_1=-\frac{1}{k}\operatorname{tg}2\pi k. \qquad (7)$$

Most az A pont az A_0S félátmérőn leszáll a középpontba. Vegyük az SA_0B_0 egyenest y tengelyül, úgy a (4) alatti egyenletben $x=0$ és tekintettel (2)-re, lesz:

$$\frac{dy}{d\xi}=\frac{l^2}{\xi\sqrt{l^2-\xi^2}}$$

Integrálva és az integrálás állandóját $\frac{c}{l}$-lel jelölve,

$$\xi=\frac{2l}{e^{\frac{c-y}{l}}+e^{-\frac{c-y}{l}}}$$

és (2) szerint

$$\eta=y+\frac{e^{\frac{c-y}{l}}-e^{-\frac{c-y}{l}}}{e^{\frac{c-y}{l}}+e^{-\frac{c-y}{l}}}\,l$$

E két kifejezésből származik

$$\sqrt{\frac{l+y}{l-y}}e^{\frac{c-y}{l}}=\frac{l}{\sqrt{l^2-y^2}}\frac{\eta}{\xi}+\sqrt{\frac{l^2}{l^2-y^2}\frac{\eta^2}{\xi^2}+1} \tag{8}$$

Az A_0S egyenes valamennyi pontja elsget tartozik tenni ezen egyenletnek. Az A_0 pontra:

$$y=a;\quad \frac{l}{\sqrt{l^2-y^2}}=\frac{1}{k};\quad \frac{\eta}{\xi}=\operatorname{cotg}\vartheta_1,$$

tehát:

$$\sqrt{\frac{l+a}{l-a}}e^{\frac{c-a}{l}}=\frac{1}{k}\operatorname{cotg}\vartheta_1+\sqrt{\frac{1}{k^2}\operatorname{cotg}^2\vartheta_1+1}.$$

Azonban (7) szerint

$$\frac{1}{k}\operatorname{cotg}\vartheta_1=-\operatorname{cotg}2\pi k$$

és így kellő összevonás után:

$$\sqrt{\frac{l+a}{l-a}}e^{\frac{c-a}{l}}=-\operatorname{cotg}\pi k. \tag{9}$$

Az S pontra:

$$y=0 \quad \text{és} \quad \frac{\eta}{\xi}=\operatorname{cotg}\vartheta_s$$

hol is ϑ_s az SB_s egyenes irányszögét jelenti.

E szerint

$$e^{\frac{c}{l}}=\operatorname{cotg}\frac{\vartheta_s}{2} \tag{10}$$

(10) és (9)-ből származik:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta_s}{2}=-\sqrt{\frac{l+a}{l-a}}e^{-\frac{a}{l}}\operatorname{tg}\pi k$$

vagy ha $\frac{a}{l}$ helyébe m-t írunk:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta_s}{2}=-\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}e^{-m}\operatorname{tg}(\pi\sqrt{1-m^2})$$

s ezzel meg van határozva az SB véghelyzetének irányszöge ϑ_s, a kezdeti helyzettől számítva; a B_s pont vezérsugara pedig

$$\rho_s=l.$$

IV.

Klerics úr szerkesztése szerint az

$$l^2 \sin \vartheta_s$$

kifejezésnek egyenlőnek kellene lenni πa^2-tel, vagyis

$$\frac{\sin \vartheta_s}{\pi m^2} = 1. \qquad (11)$$

A (11) egyenlet szerint kiszámítottam ϑ_s értékét m különféle értékeire. Az eredményeket a következő kis táblába foglalom össze:

m	$\frac{\sin \vartheta_s}{\pi m^2}$
0·50	0·98063
0·48	0·99257
0·465	0·99968
0·4643	1·00000
0·46	1·00176
0·25	1·01485.

Látjuk, hogy az állítólagos tétel m-nek csakis egyetlen egy értékére szigorúan igaz; de látjuk azt is, hogy a hiba aránylag igen tág határok közt oly csekély (2%-nál is kevesebb), hogy a megegyezés mindenesetre igen figyelemreméltó; mert a hibát a szerkesztésben jóformán észre sem lehet venni.

Szily Kálmán.

AZ INVARIÁNSOK ELMÉLETÉNEK ALAPTÉTELÉRŐL.

(Első közlemény.)

Az algebrai alakok invariánsainak fogalma mindjárt e lapok első számaiban beható elemzésben részesült.[1] A vizsgálat abból az értelmezésből indult ki, hogy valamely egyes algebrai alaknak vagy több alakból álló rendszernek együtthatóiból képezett oly ráczionális egész kifejezés, mely az egyes alakok együtthatóiban különkülön homogén, akkor neveztetik *invariánsnak*, ha ezt egyrészt az eredeti, másrészt a lineár transzformácziónak alávetett alakoknak együtthatóiból képezzük, a nyerendő kifejezések csak egy állandó szorzóban térnek el egymástól. Az elemzés eredménye az volt, hogy e szorzó csak a helyettesités determinánsának valamely hatványa lehet. E hatvány kitevőjét Hermite az invariáns *indexé*nek nevezte.

Egy második közlemény[2] a binär vagyis két változós alakok invariánsaival még részletesebben foglalkozott s különösen ama Gordan-tól eredő tétel egyik bebizonyítását ismertette, hogy

valamely alak vagy alakrendszer összes invariánsai bizonyos véges számú invariánsnak ráczionális egész összetételei.

Hogy e tétel több változós alakokra vonatkozólag szintén érvényes-e, az sokáig nyilt kérdés volt. Csak 1890-ben sikerült Hilbert Dávid-nak a tétel általános érvényességét bebizonyítania.[3]

---

[1] Kopp. Az invariánsok elméletének alapjairól. I. köt., 68—75. lap.

[2] U. a. (Második és befejező közlemény.) I. köt., 200—213. lap.

[3] Ueber die Theorie der algebraischen Formen. Mathematische Annalen. 36. köt.

Újabb bebizonyításokat tartalmaznak:

Story. On the Covariants of a System of Quantics Math. Ann. 41. köt.

Jelen közleményem czélja e bebizonyitás ismertetése.

Kiinduló pontúl oly eljárás megállapitása szolgál, mely az alakrendszer minden egyes alakjának együtthatóiban homogén függvényekből csupa invariánst állít elő, még pedig az összes ily függvényekből az összes invariánsokat. Ily módon persze végtelen sok invariánst nyerünk.

Egy további fejezet épen azért végtelen függvénysokaságokkal foglalkozik, s a következő tétel bebizonyitását tartalmazza:

Ha adva van az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

változók raczionális egész függvényeinek valamely végtelen sokasága, akkor benne mindig található oly véges

$$F_1, F_2, \ldots, F_m$$

függvénysorozat, hogy a vizsgált sokaság bármely F függvénye az

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_mF_m$$

alakban állítható elő, hol az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ együtthatók, az x-eknek alkalmasan választott ráczionális egész függvényei.

Ha itt

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

az adott alakrendszer együtthatóit jelentik, az F-ek pedig az invariánsokat, akkor az

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

együtthatókról kimutatható, hogy vagy már maguk invariánsok vagy invariánsokkal pótolhatók. Ennek igazolásában áll az algebrai alakok szóban forgó alaptételének Hilbert-féle bebizonyitása.

Egyszerűség kedvéért vizsgálatainkban ternär alakokra fogunk szorítkozni, de bárhány változó esetében ugyanaz az eljárás követendő.

Gordan. Ueber einen Satz von Hilbert. Math. Ann. 42. köt. (Csak egy f alak esetével foglalkozik.)

Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. Nachrichten etc. zu Göttingen. 1892. (3-te Note.)

I.

1. Legyen adva k ternär alak

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}.$$

A bennök előforduló változókat jelöljük x_1, x_2, x_3-mal s végezzük el a következő helyettesitést

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{aligned} \tag{1}$$

melynek determinánsa

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

A transzformált alakokat jelöljük

$$f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}\text{-val.}$$

Ha e transzformált alakok együtthatóinak oly $F_{(fa)}$ ráczionális egész függvényét, mely minden egyes alak együtthatóiban külön-külön homogén, megszorozzuk az a determináns valamely nem negativ egész hatványával s az így nyert $a^q F_{(fa)}$ szorzaton az

$$\begin{aligned} \Omega_a = & \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\partial a_{22}\partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\partial a_{23}\partial a_{32}} + \\ & + \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\partial a_{23}\partial a_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\partial a_{21}\partial a_{33}} + \\ & + \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\partial a_{21}\partial a_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\partial a_{22}\partial a_{31}} \end{aligned}$$

műveletet annyiszor ismételjük, míg végre az

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{33}$$

helyettesítési együtthatóktól ment kifejezésre jutunk, akkor az

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$$

alakrendszer együtthatóinak ily módon nyert függvénye — $I_{(f)}$ — mindenkor az adott alakrendszer valamely invariánsa lesz.

Ennek bebizonyításánál az (1) alatti helyettesítésen kívül, még más kettőt végezünk. Az egyiknél x_1, x_2, x_3 helyébe egyszerűen y_1, y_2, y_3-t írunk s e változókra a következő transzformácziót alkalmazzuk

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + b_{13}z_3 \\ y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + b_{23}z_3 \\ z_3 &= b_{21}z_1 + b_{32}z_2 + b_{33}z_3. \end{aligned} \tag{2}$$

A másik transzformáczió az (1) és (2) alattinak összetétele. Ennél a régi és új változók a következő összefüggésben vannak

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 \\ x_3 &= c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3, \end{aligned} \tag{3}$$

hol

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k}.$$
$$(i, k=1, 2, 3).$$

A (2) alatti transzformáczió, melynek determinánsát b-vel jelöljük, az adott alakrendszert

$$f_b^{(1)}, f_b^{(2)}, \ldots, f_b^{(k)}\text{-ba}$$

vigye át. A neki megfelelő differencziáló művelet

$$\begin{aligned} \Omega_b = & \frac{\partial^3}{\partial b_{11}\partial b_{22}\partial b_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{11}\partial b_{23}\partial b_{32}} + \\ & + \frac{\partial^3}{\partial b_{12}\partial b_{23}\partial b_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{12}\partial b_{21}\partial b_{33}} + \\ & + \frac{\partial^3}{\partial b_{13}\partial b_{21}\partial b_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{13}\partial b_{22}\partial b_{31}}. \end{aligned}$$

A (3) alatti transzformáczió, melynek determinánsa

$$c = ab,$$

az adott alakrendszert

$$f_c^{(1)}, f_c^{(2)}, \ldots, f_c^{(k)}\text{-ba}$$

vigye át. A megfelelő differencziáló művelet

$$\Omega_c = \frac{\partial^3}{\partial c_{11}\partial c_{22}\partial c_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{11}\partial c_{23}\partial c_{32}} +$$
$$+ \frac{\partial^3}{\partial c_{12}\partial c_{23}\partial c_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{12}\partial c_{21}\partial c_{33}} +$$
$$+ \frac{\partial^3}{\partial c_{13}\partial c_{21}\partial c_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{13}\partial c_{22}\partial c_{31}}.$$

Az $a^q F_{(fa)}$-ból Ω_a ismételt alkalmazása után keletkező

$$\Omega_a \left\{ a^q F_{(fa)} \right\}, \quad \Omega_a^2 \left\{ a^q F_{(fa)} \right\}, \quad \Omega_a^3 \left\{ a^q F_{(fa)} \right\}, \ldots$$

sorozatban a p-dik elem legyen az első, melyben az $a_{11}, \ldots, a_{33}$ együtthatók többé nem fordulnak elő. (Az utána következők akkor azonosan eltünnek.)

Minthogy e szerint az

$$I_{(f)} = \Omega_a^p \left\{ a^q F_{(fa)} \right\}$$

egyenletben az a determináns elemei csak látszólag fordulnak elő, azért szabad őket a (2) helyettesítés együtthatóival pótolni. Leszen

$$I_{(f)} = \Omega_b^p \left\{ b^q F_{(fb)} \right\}.$$

Ha itt mindkét oldalt az eredeti alakrendszer együtthatói helyébe

$$f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$$

együtthatóit tesszük be, akkor

$$I_{(fa)} = \Omega_b^p \left\{ b^q F_{(fc)} \right\},$$

s innen

$$a^q I_{(fa)} = \Omega_b^p \left\{ c^q F_{(fc)} \right\}. \tag{4}$$

Ugyanis a az Ω_b műveletnél mint állandó viselkedik s azért szabad a vele való szorzásnak s az Ω_b műveletnek sorrendjét felcserélni.

A $c^q F_{(fc)}$ szorzat az

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$$

együtthatóinak, továbbá az a és b helyettesitési determinánsok elemeinek függvénye, de ez utóbbiakat csak a c_{ik} kapcsolatokban tartalmazza. Ámde e kapcsolatok bármely G függvényéről (alább) könnyen igazolható, hogy

$$\Omega_b G = a\Omega_c G, \tag{5}$$

tehát ez átalakitás p-szer való ismétlése után a (4) alatti egyenlet a következőbe megy át:

$$a^q I_{(fa)} = a^p \Omega_c^p \{ c^q F_{(fc)} \}. \tag{6}$$

Továbbá $I_{(f)}$ nem változik, ha az f_a-k helyett f_c-ket irunk s egyszersmind az Ω_a műveletet Ω_c-vel cseréljük fel. E szerint

$$I_{(f)} = \Omega_c^p \{c^q F_{(fc)}\}$$

s a (6) alatti egyenlet egyszerűbben így irható

$$I_{(fa)} = a^{p-q} I_{(f)},$$

a mi épen annak képletben való kifejezése, hogy $I_{(f)}$ az adott alakrendszernek invariánsa.

Az (5) alatti képlet, mely imént végzett levezetésünk egyik forduló pontja, következőleg igazolható.

G-nek bármelyik $b_{\varkappa k}$ szerinti differencziálhányadosa

$$\frac{\partial G}{\partial b_{\varkappa k}} = a_{1\varkappa}\frac{\partial G}{\partial c_{1k}} + a_{2\varkappa}\frac{\partial G}{\partial c_{2k}} + a_{3\varkappa}\frac{\partial G}{\partial c_{3k}} = \sum_{i=1}^{3} a_{i\varkappa}\frac{\partial G}{\partial c_{ik}}$$

s háromszoros differencziálás után

$$\frac{\partial^3 G}{\partial b_{\varkappa k}\partial b_{\lambda l}\partial b_{\mu m}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{h=1}^{3} a_{i\varkappa}a_{j\lambda}a_{h\mu}\frac{\partial^3 G}{\partial c_{ik}\partial c_{jl}\partial c_{hm}},$$

vagy szokott jelöléssel

$$\frac{\partial^3 G}{\partial b_{\varkappa k}\partial b_{\lambda l}\partial b_{\mu m}} = \left(a_{1\varkappa}\frac{\partial}{\partial c_{1k}} + a_{2\varkappa}\frac{\partial}{\partial c_{2k}} + a_{3\varkappa}\frac{\partial}{\partial c_{3k}}\right)$$

$$\left(a_{1\lambda}\frac{\partial}{\partial_{1l}} + a_{2\lambda}\frac{\partial}{\partial c_{2l}} + a_{3\lambda}\frac{\partial}{\partial c_{3l}}\right)\left(a_{1\mu}\frac{\partial}{\partial_{1m}} + a_{2\mu}\frac{\partial}{\partial c_{2m}} + a_{3\mu}\frac{\partial}{\partial c_{3m}}\right) G.$$

Itt a jobb oldalon álló szimbolikus szorzat úgy értendő, hogy a kijelölt szorzások elvégzendők, mintha $\frac{\partial}{\partial c_{1k}}$, stb. számok volnának s azután

$$\frac{\partial}{\partial c_{ik}}\frac{\partial}{\partial c_{jl}}\frac{\partial}{\partial c_{hm}}G$$

alatt a megfelelő differencziálhányados értendő.

E szimbolikus jelölés segitségével a determinánsok szorzástételének alapján az igazolandó képlet helyessége rögtön belátható. Valóban

$$\Omega_b G = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial b_{11}} & \frac{\partial}{\partial b_{12}} & \frac{\partial}{\partial b_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial b_{21}} & \frac{\partial}{\partial b_{22}} & \frac{\partial}{\partial b_{23}} \\ \frac{\partial}{\partial b_{31}} & \frac{\partial}{\partial b_{32}} & \frac{\partial}{\partial b_{33}} \end{vmatrix} G =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{i1}\frac{\partial}{\partial c_{i1}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i1}\frac{\partial}{\partial c_{i2}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i1}\frac{\partial}{\partial c_{i3}} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{i2}\frac{\partial}{\partial c_{i1}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i2}\frac{\partial}{\partial c_{i2}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i2}\frac{\partial}{\partial c_{i3}} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{i3}\frac{\partial}{\partial c_{i1}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i3}\frac{\partial}{\partial c_{i2}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i3}\frac{\partial}{\partial c_{i3}} \end{vmatrix} G =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial c_{11}} & \frac{\partial}{\partial c_{12}} & \frac{\partial}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial c_{21}} & \frac{\partial}{\partial c_{22}} & \frac{\partial}{\partial c_{23}} \\ \frac{\partial}{\partial c_{31}} & \frac{\partial}{\partial c_{32}} & \frac{\partial}{\partial c_{33}} \end{vmatrix} G =$$

$$= a\Omega_c G,$$

m ként előbb állítottuk.

2. Alkalmazzuk a bebizonyított tételt ama kiválóan egyszerű esetekre, mikor F az egységgel vagy egy invariánssal egyenlő.

Az első esetben

$$a^q F \equiv a^q$$

az $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$-nak $3q$-ad fokú függvénye s ennélfogva $p=q$. Ugyanis az Ω_a operáczió minden egyes alkalmazása a kifejezés fokát 3 mal kisebbiti, ennélfogva Ω_a-t q-szor kell alkalmaznunk, hogy az $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ valamely $3q$-ad fokú függvényéből e mennyiségek épen kiessenek.

Az előbbi tétel segítségével nyert invariánsunk tehát a következő lesz

$$\Omega_a^p a^p$$

Itt a^p ily alakú tagoknak összege

$$E a_{11}^{p_{11}} a_{12}^{p_{12}} \ldots a_{33}^{p_{33}},$$

hol

$$E = \pm 1 \quad p_{11} + p_{12} + \ldots + p_{33} = 3p.$$

Az Ω_a^p szimbolum ebből az összegből akként adódik, hogy benne

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$$

helyébe

$$\frac{\partial}{\partial a_{11}}, \frac{\partial}{\partial a_{12}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial a_{33}}$$

differencziálási jeleket írjuk.

$\Omega_a^p a^p$ most már úgy képezendő, hogy a^p minden egyes tagjára elvégezzük az Ω_a^p egyes tagjai által előirt differencziálásokat s az igy nyert részleteredményeket összeadjuk. Minden egyes összeadandó $+1$ vagy 0 lesz.

Ha ugyanis Ω_a^p valamely tagját az a^p-nek épen ama tagjára alkalmazzuk, melyből az imént mondott módon keletkezett, akkor a differencziálás eredménye a positiv egység; minden más esetben pedig zérust kapunk. E szerint

$$\Omega_a^p a^p$$

bizonyos N_p pozitiv egész számmal egyenlő.

Abban az esetben, mikor F az alakrendszernek valamely $I(f)$ invariánsával egyenlő, a transzformált rendszer együtthatóinak $I(f_a)$ függvénye $I(f)$-től csak egy oly tényezőben külömbözik, mely a-nak valamely hatványa. Ennélfogva $a_q\, I(f_a)$ ily alakú

$$a^p I(f),$$

és

$$\Omega_a^p \{a^p I(f)\} = I(f)\, \Omega_p a^p = N_p I(f).$$

Ekkor tehát a nyert invariáns csak egy pozitiv állandó tényezőben külömbözik attól, melyből nyertük.

E megjegyzésekből könnyen belátható, hogy az invariánsok képezésére adott eljárás már abban az esetben is, ha q-t állandóan *zérus*-nak veszszük, az adott alakrendszer összes invariánsait adja meg, azaz *bármely $I(f)$ invariánshoz tartozik oly $F(f)$ függvény, hogy*

$$\Omega_a^p F(f)$$

épen az illető $I(f)$-et adja.

Ha ugyanis az $I(f)$ invariánsnak *indexe* p, akkor

$$\Omega_a^p \left\{ \frac{1}{N_p} I(f_a) \right\} = \Omega_a^p \left\{ \frac{a^p}{N_p} I(f) \right\} = I(f),$$

tehát

$$F(f) = \frac{1}{N_p} I(f)$$

a czéljainknak megfelelő függvény.

Kürschák József.

MEGJEGYZÉS DIRICHLET EGYIK TÉTELÉHEZ.

Dirichlet-nek szóban forgó tétele a következő:

Minden számtani haladvány, melynek kezdőtagja és különbsége relativ törzsszámok, végtelen sok törzsszámot tartalmaz.

A tételt legelőször Legendre mondotta ki s ugyancsak ő kijelölt olyan módszereket is, a melyek a tétel bebizonyitására a legelső útmutatást adták. Legendre maga, noha a tétel teljes bebizonyitása még hiányzott, már felhasználta számos más vizsgálatában, a mit Gauss azután a szigorúság szempontjából jogosan kifogásolt is.* A Legendre-tól kijelölt úton Dirichlet kisérlette meg a tovább haladást.

Ez úton azonban, saját kijelentése szerint, legyőzhetetlen nehézségekre bukkant és csak miután ezt az utat végkép elhagyta, sikerült neki a tételnek kifogásolhatatlan bebizonyitását adni.**

Dirichlet bebizonyitása azonban az analizis legösszetettebb segédeszközeit használja fel s így természetes az arithmetikának az a törekvése, hogy a bebizonyitást tisztán arithmetikai alapokra fektesse, annyival is inkább, mert a legspecziálisabb esetnek, a $2x+1$ általános taggal biró haladvány esetének, ilyen tárgyalását már Euklides ismerte. Egyes más specziális esetek arithmetikai tárgyalása sem nyújt nagyobb nehézségeket s csak a számelmélet első elemeinek felhasználását igényli.*** Az első azonban, a ki

---

* Disquisitiones arithmeticæ auctore Gauss. Art. 151, 297.

** Abhandlungen der Kg. Preussischen Akademie der Wissenschaften von 1837 S. 45—81. Bericht über die Verhandlungen der Kg. Preussischen Akademie Jahrg. 1837 S. 108—110.

*** Ilyen példákat dolgoztunk a kir. Józsefműegyetemen König tanár úr által vezetett math. gyakorlatokon. (1892/3).

nagyobb általánosság jellegével biró speciális esetet arithmetikailag tárgyalt, LUCAS volt. LUCAS ugyanis a következő tételt mutatta ki:

*Ha a tetszőleges pozitiv egész számot jelent, az $ax+1$ általános taggal biró számtani haladvány végtelen sok törzsszámot tartalmaz.**

LUCAS bizonyítása azonban, a tárgy egyszerűségéhez képest, nem a legrövidebb. Később PEROTT ugyanezt a tételt mutatta ki azzal a megszorítással, hogy *a* törzsszámhatvány legyen. PEROTT tárgyalása a körosztási egyenlet többtagújából indul ki. Dolgozatából** világosan kitetszik, hogy ő LUCAS eredményéről tudomással nem birt. Ugyancsak kikerülte az ő figyelmét az a körülmény, hogy abból az alakból kiindulva, melyet ő használt, a LUCAS-féle eredményt is le lehet vezetni; pedig, a mint az alábbiakból ki fog tünni ez a legegyszerübb eljárás.

A jelen dolgozatban foglalt tárgyalás azt az eddig még fel nem használt szempontot érvényesíti, hogy a *végtelen számban levő törzsszám létezésének kimutatását visszavezeti egy egyetlen törzsszám létezésének kimutatására.* A részletes tárgyalás a következő két tétel alapján történik.

1. *Tétel. Az $ax+1$ kifejezésben a akármilyen egész számú értékénél x mint pozitiv egész szám meghatározható úgy, hogy $ax+1$ törzsszám legyen.*

Legyenek

$$p_1, p_2, \ldots, p_r$$

egymástól különböző, de tetszőleges törzsszámok (a 2 sincs kizárva) és legyen továbbá

$$a=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r};$$

ha továbbá

$$g_1(x),\ g_2(x), \ldots$$

* LUCAS: Théorie des fonctions numériques simplement périodiques (American Journal of Mathematics Vol. I. 1878).

** PEROTT: Remarques sur le théorème d'Euclide etc. (American Journal of Mathematics Vol. XIII. 1891).

raczionális egész függvények, melyeknek együtthatói egész számok és x legmagasabb hatványának együtthatói 1-gyel egyenlők és e függvényeknek ama legkisebb közös többszörösét, melyben az x legmagasabb hatványának együtthatója szintén 1-gyel egyenlő, az

$$M[g_1(x), g_2(x), \ldots]$$

jellel jelöljük, azon felül az

$$a_k = \frac{a}{p^k} \quad (k=1, 2, \ldots, r)$$

rövidített jelöléssel élünk, akkor tudjuk, hogy az

$$F(y) = \frac{y^a - 1}{M[(y^{a_1}-1), \ldots, (y^{a_r}-1)]}$$

függvény y egész függvénye egész számú együtthatókkal, és benne y legmagasabb hatványának együtthatója pedig az egység.

Ha n határozatlan egész számot jelent, akkor ez úgy választható, hogy az

$$F(n) = \frac{n^a - 1}{M[(n^{a_1}-1), \ldots, (n^{a_r}-1)]} \tag{I}$$

$$F_1(n) = \prod_{k=1}^{r}(n^{a_k}-1)$$

számok relativ törzsszámok legyenek. Először is az

$$\frac{n^a-1}{n^{a_k}-1}, \; n^{a_k}-1 \quad (k=1, 2, \ldots, r) \tag{I*}$$

számok relativ törzsszámok, ha az

$$n^{a_k} \equiv 1 \pmod{p_k} \quad (k=1, 2, \ldots, r) \tag{II}$$

kongruenczia nincsen kielégítve. Ugyanis

$$\frac{n^a-1}{n^{a_k}-1} = \frac{(n^{a_k})^{p_k}-1}{n^{a_k}-1} = (n^{a_k}-1)\left(n^{a_k(p_k-1)} + 2n^{a_k(p_k-2)} + \ldots + (p_k-1)\right) + p_k$$

és így az (I*) alatti számok minden közös osztója egyszersmind közös osztója $n^{a_k}-1$-nek és p_k-nak; minthogy azonban p_k törzsszám, e legnagyobb közös osztó vagy 1 vagy p_k és így a szóban forgó számok csakugyan relativ törzsszámok, ha az

$$n^{a_k}-1\equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, p_k)$$

kongruenczia nincsen kielégítve. Ha már most n értékét úgy választjuk, hogy pl.

$$n\equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, p_1 p_2 \ldots p_r)$$

legyen, akkor a (II) alatti kongruenczia k-nak egyetlen egy értékénél sincsen kielégítve, és így az (I*) alatti számok relativ törzsszámok k minden értékénél.

Mivel $F(n)$ osztója $\dfrac{n^a-1}{n^{a_k}-1}$-nek, következik, hogy az

$$F(n) \text{ és } n^{a_k}-1 \qquad (k=1,2,\ldots,r)$$

számok relativ törzsszámok és így relativ törzsszámok az

$$F(n) \text{ és } F_1(n)=\prod_{k=1}^{r} n^{a_k}-1$$

számok is; de ezt akartuk épen bebizonyitani.

Legyen most $F(n)$-nek egyik pozitív törzstényezője q, akkor

$$n^a\equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\, q), \tag{III}$$

mert n^a-1 többszöröse $F(n)$-nek; minthogy azonban $F(n)$ és $F_1(n)$ relativ törzsszámok, az

$$n^{a_k}\equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\, q) \qquad (k=1,2,\ldots,r) \tag{III*}$$

kongruencziák egyike sincsen kielégítve. Innen következik, hogy $n\,(\mathrm{mod.}\, q)$ az a kitevőhöz tartozik. Ugyanis, ha a-nál kisebb kitevőhöz tartoznék, akkor ez, miuthogy a-nak osztója, az

$$a_1, a_2, \ldots, a_r$$

számok valamelyikének is osztója lenne, a mi a (III*) alatti kongruencziák legalább egyikének kielégítését vonná maga után.

Minthogy n (mod. q) az a kitevőhöz tartozik

$$q-1\equiv 0 \,(\text{mod. } a) \qquad \text{(IV)}$$

Tehát tényleg találtunk egy $ax+1$ alakú törzsszámot, mert a (IV)-ből

$$q=ax+1$$

2. *Tétel. Az $ax+1$ általános taggal biró számtani haladvány végtelen sok törzsszámot tartalmaz, bármily pozitiv egész szám is a.*

Tegyük fel ugyanis, hogy a haladvány csak véges számú törzsszámot tartalmazna és legyen ezek között a legnagyobb Q, akkor van oly k egész szám, mely kielégiti az

$$a^k > Q$$

feltételt. Ha most az

$$a\,(a^k x)+1=a^{k+1}x+1$$

általános taggal biró számtani haladványt alkotjuk, akkor ez egyetlen egy törzsszámot sem tartalmazhat, mert különben kellene, hogy az eredeti haladvány Q-nál nagyobb törzsszámot tartalmazzon, tehát nem létezhetnék $a^{k+1}x+1$ alakú törzsszám. Ez azonban az előző tétellel ellenkezik s így kell, hogy a szóban forgó haladvány végtelen sok törzsszámot tartalmazzon.

Fentartom magamnak, hogy a Dirichlet-féle tétel más speciális eseteire alkalmilag még visszatérjek.

Bauer Mihály.

PHYSIKAI SZEMLE.

A kritikus pont meghatározásáról. Pellat, De la définition et de la détermination du point critique. *Journ. de Physique.* III-e Sér. T. 225. l.

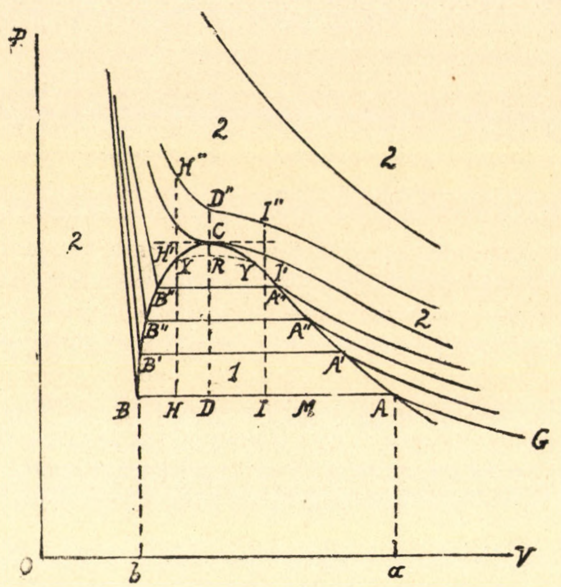
Általánosan ismeretesek Andrews kisérletei, melyekben a széndioxyd térfogata és nyomása között állandó hőmérsékletek alatt fenálló kapcsolatot megállapította, s ismeretesek a görbék, melyekkel — Clapeyron eljárása szerint — vizsgálatainak eredményeit igen szemléltetőleg előállította. Görbéi a mellékelt rajzban láthatók. A 31° alatt levő hőmérsékletekhez tartozó isothermák mindegyikének a térfogatok tengelyével párhuzamos AB egyenes része van, mely a gáz folyósodását tünteti elő. Az A, A' A'',... pontok annak az állapotnak felelnek meg, a melyben az egész szénsav-tömeg telített gőzalakban van. Az egyes pontokhoz tartozó abscissák (pl. Oa), minthogy a rajz az anyag tömegegységére vonatkozik, a telített gőz fajlagos térfogatát jelenti, melyet u jelöljön. A B, B', B'',... pontok annak az állapotnak felelnek meg, melyben az egész tömeg a telített gőz nyomása alatt folyós halmazállapotu s abscissája: Ob, a folyadék u' fajlagos térfogatát adja. Az egyenesen fölvett bármely M pont azt az állapotot fejezi ki, melyben a tömegnek x része telített gőzalakú, x' része pedig folyós $(x+x'=1)$; könnyű kimutatni, hogy

$$\frac{x}{x'}=\frac{MB}{MA}.$$

A hőmérséklet emelkedtével az isotherma egyenes része megrövidül, a mennyiben a folyadék u' fajlagos térfogata nagyobbodik, a telített gőz u fajl. térfogata pedig kisebbedik. 31°-nál valamivel magasabb hőfokra nézve az egyenes AB rész elenyészik; vagyis az izothermának C-ben inflexiós pontja van, melynek érintője a végtelen kicsinynyé vált AB-vel párhuzamos, tehát vízszintes. Ezen a hőfokon túl a görbék inflexiója kevésbbé szembeszökő s mindinkább elmosódik, míg végre a magasabb hőmérsékletek alatt teljesen eltünik.

Az összes A pontokat és B pontokat folytonos vonallal összekötvén, ezek C pontban találkoznak, mely az A és B pontok határa: a két vonal ebben a pontban egyetlenegy folytonos vonallá folyik össze, melynek C-ben vízszintes az érintője. Látni való, hogy ez a vonal a síkot két részre osztja. Az egyikben (1) a cseppfolyós és gázállapot egyidejüleg fenállhat; a másikban (222) csakis folyékony állapot létezhetik egymagában és a hol a tökéletes gázállapot és tökéletes folyékony állapot között minden közbenső állapot is található.

Több fizikusnak, különösen pedig RAMSAY-nak munkálatai kiderítették, hogy más gázokra nézve az isothermák menete ugyanaz, mint a széndioxid esetében és kétségtelen, hogy valamennyi folyadékra nézve ez az általános alak.



Szükséges volt ezen jól ismert dolgokat fölemlíteni, hogy a következők világosak legyenek.

Az isotherma C pontját, mely a vízszintes érintőre nézve inflexiós pont, *kritikus pontnak* nevezték el; a test megfelelő hőmérséklete, nyomása és térfogata a *kritikus hőmérséklet* (T_c), *kritikus nyomás* (P_c) és *kritikus térfogat* (V_c) nevét viselik.

A kritikus hőmérsékletről más meghatározás is létezik; az, mely CAGNIARD-LATOUR klasszikus kisérleteiből következik. T. i. több szerző kritikus hőmérsékletnek azt a hőmérsékletet (t_c) nevezi, a melyen eltünik a folyadékot és gőzét szétválasztó határfelület; sokáig ugyanis azt hitték, hogy $T_c = t_c$.

Cailletet és Colardeau igen érdekes kisérletei alapján ki lehet mutatni, hogy e két hőmérséklet nem egyenlő és hogy $t_c < T_c$. E szerzők tényleg azt találták, hogy a t_c hőmérsékleten, a melyen eltünik a meniscus, *a folyadék sürüsége nagyobb, mint a telített gőz* sürüsége. Ámde a T_c meghatározása szerint ezen hőmérsékleten a folyadék és a gáz sürüsége egyenlő, mert a kritikus C pontnál az AB vonal, mely a folyadék és a telített gőz fajlagos térfogatainak $(u—u')$ különbségét jelenti, zérussá lett.

Hátra van még annak eldöntése, vajjon a T_c és t_c hőmérsékek szomszédosak-e vagy távol esnek-e egymástól? A következő fejtegetés talán hozzájárul e kérdés eldöntéséhez.

Ha Cagniard-Latour kisérletét akarjuk ismételni s az elzárt csőbe igen kevés folyadékot teszünk, — tehát gőzéből sokat —, a rendszer ábrázoló pontja hidegben meg fog felelni az isotherma valamely I pontjának, mely közelebb van A-hoz mint B-hez.

A cső melegítése közben a rendszerben végbemenő változást valamely $II'I''$ egyenes vonal fogja jelképezni, mely a nyomások tengelyével párhuzamos, ha az üvegcső kitágulása elhanyagolható. Látható, hogy az $II'I''$ vonal a különböző isothermák egyenes vonalú részeit oly pontokban metszi, hogy az $\frac{MA}{MB}$-hez hasonló viszonyszámok folyton kisebbednek, míg a viszony az I' pontra nézve, melyben $II'I''$ az ACB vonalt metszi, zérussá lesz. Ez azt jelenti, hogy a folyadék mennyisége a hőmérséklet emelkedtével folyton kisebbedő, a míg az I pontnál zérussá lesz. Ez csakugyan az, a mit tényleg észlelni lehet. *(1. eset.)*

Ellenkezőleg, ha kezdetben a folyadék mennyisége sokkal felülmulja a gőzét, úgy, hogy az ábrázoló pont az AB isotherma H pontjába esik, állandó térfogat melletti hevítés esetében a $HH'H''$ egyenes vonal azt mutatja, hogy a folyadék mennyisége állandóan növekedőben van, mig végre a csövet egészen betölti, a mi akkor fog bekövetkezni, a mikor az ábrázoló pont az egyenes vonal és az ACB görbe H' metszési pontjába esik. *(2. eset.)*

Ha végre a csőbe épen oly arányban zárunk el folyadékot és gőzt, hogy az ábrázoló pont az AB isotherma azon D pontjába essék, melynek a kritikus ponttal, C-vel egyező abscissája van, az állandó térfogat melletti hevítést a DCD'' egyenes jelképezi; a folyadék és gőzének viszonya keveset fog változni és abban a pillanatban, midőn az ábrázoló pont eléri C-t, a cseppfolyós állapot egybeesik a gáznemüvel. *(3. eset.)*

Láthatni azonban, hogy a szerint, a mint az ábrázoló pont egy kissé jobbra vagy balra esik a D ponttól, az első vagy második esettel van dolgunk s vagy a folyadék tünik el egészen, vagy a gőz, de még mielőtt a kritikus hőmérséket elérték volna.

Már most a kisérlet azt igazolja, hogy a folyadék és gőz kezdetbeli viszonyát elég tág határok között lehet változtatni, és hogy a meniscus eltünése mindamellett bizonyos határozott t_c hőmérsék mellett következik be, mielőtt az állandó hevítést feltüntető egyenes vonal az ACB görbét metszi. Ebből azt kell következtetni, hogy az XRY vonal, mely azon állapotoknak felel meg, midőn a meniscus eltünik, az ACB görbe felső XCY része alatt van és hogy ezen görbét két, egymástól jelentékenyen távol eső X és Y pontban metszi. Igy tehát az Andrews-féle isothermák figyelmes szemlélése alapján előre látható azon eredmény, melyet Cailletet és Colardeau fönnebb említett kisérletei igazoltak, hogy t. i. a folyadék és az ő gőze megtartja egymástól eltérő sürűségét még azon hőmérsékleten túl is, a melyen a meniscus eltünik.

Ha az épen most tárgyalt XRY vonal vízszintes egyenes, teljesen meghatározott p_c nyomásnak és t_c hőmérsékletnek felel meg; ez az, a mit rendesen föltételeznek, de oly kisérleti adatok alapján, melyek talán nem egészen kielégítők. Ha az XRY vonal görbe, látható, hogy a p_c nyomás és a t_c hőmérséklet, melyek mellett a meniscus eltünik, a folyadék és a gőz kezdetleges viszonyától függ. E kérdést csak összehasonlító kisérletekkel lehetne megoldani, melyeket különböző csövekkel eszközölnének olyformán, hogy a folyadék és gőz különböző viszonyai mellett ugyanazon fürdő használtatnék a hevítésre.

Az állandó térfogat melletti hevítést föltüntető $II'I''$, DCD'', $HH'H''$ vonalak szemlélése még a következő megjegyzésre vezet. Bármelyik legyen is a szemügyre vett vonal, azaz bármilyen is a folyadék és a gőz kezdetleges viszonya, míg a hőfok alacsonyabb annál, a melyen az ábrázoló pont a sík 1-el jelzett részéből kilép (I', C, v. H' pontok), ugyanazon hőmérséknél a nyomás is ugyanaz marad s ez nem egyéb, mint a telitett gőz nyomása. Midőn azonban ezen vonalak a 2, 2, 2-vel jelzett térbe behatolnak, ugyanazon isothermát I'', D'', H'' pontokban metszik, melyeknek nincs ugyanazon ordinátájuk, vagyis az ugyanazon hőmérsékletnek megfelelő nyomások már különbözőkké lesznek. Tehát az I', C, vagy H' pontokban, melyekben az egyenlő térfogatot jelző vonalak metszik az ACB görbét, a nyomás megszünik a hőmérséklet oly függvényének lenni, mely független a folyadék és gőzének eredeti viszonyától.

Ez csakugyan azon eredmény, melyet Cailletet és Colardeau a víz kritikus pontjának meghatározását czélzó, jelentőségteljes kisérleteikkel elértek. A vonalak, melyek a nyomást a folyadék és gőz különböző viszonyai mellett mint a hőmérsék függvényét tüntetik fel, eleinte összeesnek, majd egyenként széjjelválnak a közös nyalábtól, részint fölfelé (H' pont), részint lefelé (I' pont).

De a mi ezen kisérletezőknek a kritikus pont megtalálására alkalmazott módszerét igazolja, ez azon körülmény, hogy az utóbbi görbék, melyek a közös nyalábtól szétválnak, ezt majdnem egy pontban teszik, mivel az *ACB* görbe ordinátái a *C* pontban maximumot érnek el; ez azon legmesszebb pont, melyet jogosan kritikus pontnak tekintettek.

Ha az *ACB* görbe felső része elég lapos és ha az *XBY* vonal vízszintes egyenes, vagy legalább majdnem közel az, megtörténhetik, hogy ezen vonal mindenütt szomszédos az *XCY* vonallal és következőleg t_c csak keveset tér el T_c-től, a mint azt általánosan föltételezik; ez azonban nem bizonyos és erre a kérdésre a kisérletnek kell majd megfelelnie. Cagniard-Latour kisérlete t_c-re vezet, ellenben a Cailletet és Colardeau által a víz kritikus pontjának meghatározására alkalmazott módszer T_c-re.

Mint láttuk, Cailletet és Colardeau kisérleti elrendezése az *ACB* görbe különböző pontjainak meghatározását engedi meg; az övékhez hasonló kisérletek ilyformán meg fogják ismertetni ezen görbét, melynek tetőpontján vízszintes érintőt húzván, meg fogják kapni a kritikus pontot.

Ez eljárásnak meg lesz azon előnye, hogy hozzá fog járulni a *megfigyelések kritikus pontjának* meghatározásához, midőn a cső megtelik gőzzel vagy folyadékkal, még oly hőmérséknél is, mely elég távol van a kritikus ponttól. Egyébiránt az *ACB* görbe magában véve is igen érdekes.

Mindezekből következik, hogy a t_c és T_c hőmérsékek számára lehetetlen ugyanazon nevet megtartani; mert a mint láttuk, a tudomány jelenlegi állásánál nem vagyunk biztosak abban, hogy t_c ugyanegy testre nézve ugyanegy hőmérséklet-e; azonkívül ezen hőmérséklet csak a meniscus eltünésének jelenségére bír fontossággal, mely a meghatározást adja. A «kritikus hőmérséklet» elnevezést fönn is kell tartani a T_c hőmérsékletre, mely teljesen meghatározott és általános érdekü.

A kritikus pont adatai tényleg lehetővé teszik Van der Waals vagy Clausius jellemző egyenletében az állandók meghatározását, következőleg meghatározott hőmérsékletre alkalmazva, megengedik Massieu jellemző függvényének alakítását, melyből aztán a tárgyalt folyadék összes mechanikai és hőtani sajátságai megállapíthatók.

Az egyedüli módszerek, melyek eddig szabatosan vezettek az igazi kritikus pontra, 1. az Andrews módszere; 2. az a módszer, melyet legújabban Cailletet és Colardeau alkalmaztak a víz esetében; 3. a folyadék és telített gőz térfogatának közvetlen mérése ugyanazon hőmérsékleten, melyet a kritikus pont közeléig fokoznak; ezt a módszert több fizikus alkalmazta, különösen Cailletet és Mathias, továbbá Amagat.

Daczára a szép dolgozatoknak, melyeket most fölemlítettünk, kisérleti szempontból még a sok tenni való ezen a téren.

Csemez.

*

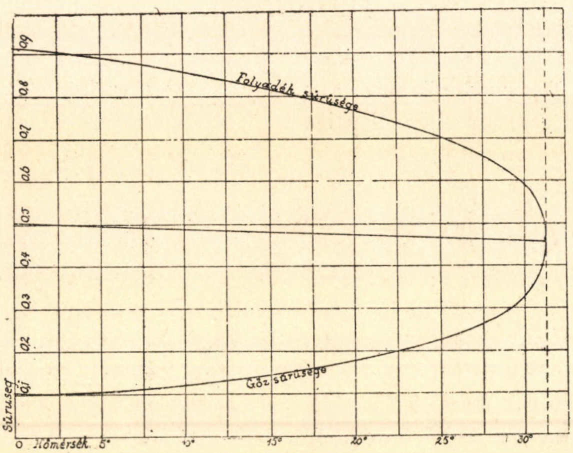
Folyadékok és telített gőzök sűrűségéről. E. H. AMAGAT: Sur la détermination de la densité des gaz liquéfiés et de leurs vapeurs saturées. *Journ. de Physique,* 1892. Sér. III. 1. köt. 288—298. l. — E. MATHIAS. Sur la densité critique et le théorème des états correspondants. *Journ. de Physique,* 1893. Sér. III. 2. köt. 1—22. l.

AMAGAT a gázok folyósítására vonatkozó vizsgálataiban az elzárt térben hevített folyadék és telített gőzének sűrűségére vonatkozólag néhány igen érdekes eredményre jutott. Ha ugyanis a hőmérsékletet mint abscissát, a hozzátartozó folyadék- és gőzsűrűséget pedig mint ordinatát rakjuk fel, akkor nyilván oly görbét nyerünk, melyet az ordináta tengelylyel párhuzamos egyenes két pontban metsz. A nagyobbodó abscissák felé a görbének két ága egymáshoz közeledik, mert hisz a hőmérséklet növekedtével a folyadék sűrűsége kisebbedik, a gőzé pedig nagyobbodik; végre a kritikus hőmérsékletnek megfelelő pontban egymással találkoznak: ott ugyanis a folyadék sűrűsége a gőz sűrűségével egyenlő. A szénsavra végzett kisérletekből kitünt, hogy eme görbe igen nagy közelítéssel parabola: a parabola csúcspontja megfelel a kritikus hőmérsékletnek; ott tehát a folyadék és a gőz sűrűsége a hőmérséklettel gyorsan változik. Ugyane pontban a görbe görbülete a kelleténél valamivel kisebb. Az említett görbe parabolikus természetéből következik, hogy ha az egyes hőmérsékletekhez a hozzátartozó folyadék- és gőz-sűrűségek középértékeit felrakjuk, egyenes vonalat nyerünk, mely nem egyéb mint a parabola tengelye. Tehát ha d a folyadék sűrűsége, d' pedig a telített gőzé, ekkor $\frac{d+d'}{2}$ a hőmérséklettel pontosan arányosan változik. A kisérletekből kitűnt (l. az ábrát), hogy ezen egyenes hajlása az abscissa tengelyhez igen kicsiny, tehát a két sűrűség középértéke a hőmérséklettel keveset változik. AMAGAT csak széndioxiddal kisérletezett, 0° és 31° között. MATHIAS azután megvizsgálta, valjon eme törvény más anyagokra nézve is érvényben marad-e, s hogy nagy hőmérsékleti közökre is szigorú-e, avagy csak közelítő jelleggel bír. E czélra YOUNG SYDNEY észleléseit használta fel s úgy járt el, hogy $\frac{d+d'}{2}$ két hőmérsékletnél észlelt értékéből meghatározta az előbb említett egyenest; a többi hőmérsékletre azután összehasonlította $\frac{d+d'}{2}$-nek az egyenesből folyó értékeit a közvetlen észlelés szolgáltatta értékekkel. Számításait a következő anyagokra végezte: benzol, fluórbenzol, eczetsav, ónchlorid, széntetrachlorid és etilalkohol.

·2 perczentnél nagyobb eltérés a két érték között csak az alkoholoknál mutatkozott a kritikustól 180°-nál meszebbre fekvő hőmérsékleteknél. A többi anyagra az eltérés legfeljebb $1/400$, úgy hogy a megegyezés teljesnek nevezhető.

Nem kevésbbé érdekes azon módszer, melyet Amagat a folyadék és telített gőz sűrűségének meghatározására alkalmazott. Ugyanis ha m az elzárt folyadék és telített gőzének együttes tömege, v, d és v', d' pedig a folyadék ill. a telített gőz térfogata, ill. sűrűsége, akkor

$$vd+v'd'=m\,;$$



ha most az egészet ugyanazon hőmérsékletnél kisebb térfogatra szorítja, akkor a gőz egy része lecsapódik, tehát a gőz térfogata $\varDelta v'$-tel kisebbedik, ugyanakkor több folyadék lesz az elzárt térben, a folyadék térfogata tehát $\varDelta v$-vel nagyobbodik; nyilván való, hogy

$$d\varDelta v=d'\varDelta v'.$$

Ezen két egyenletből d és d' kiszámítható.

Tangl.

IRODALOM.

Oliver Heaviside, Electrical papers. In two volumes I. 560 pag. II. 587 pag. London. Macmillan 1892.

A szerző ezen két kötetben azokat az értekezéseket gyűjtötte össze, melyeket 1872 óta a «Philosophical Magazine», az «Electrician», «English Mechanic», «Telegraphic journal» és egyéb szakfolyóiratban és a «Philosophical Transactions»-ben közzétett. A mint művének előszavában mondja, az elektromagnetikai elméletnek rendszeres műben való kidolgozására szólíttatott fel. Ő azonban czélszerűbbnek találta, ha e helyett az egyes kérdésekről írt értekezéseit összegyűjtve kiadja. Serkentették ez elhatározásában Hughes 1886-ban és Hertz és Lodge 1887-ben tett kisérletei; különösen Hertz-nek nevezetes eredményei az elektromos erő sugarairól és az elektromagnetikai hullámokról. Mindezek az értekezések és vizsgálatok megerősítik azt az alapot, melyen Heaviside dolgozatai állanak, ú. m. a Faraday-Maxwell-féle felfogást. A szerző panaszképen említi, hogy ezt a felfogást, noha az elektromos háborgásoknak mérhető idő alatt és közegen keresztül történő terjedését épen a Hertz-féle kisérletek az igen valószinű hypothesisek sorából a megállapított tények közé emelték, még hazájában sem méltatják a kellő figyelemre. A continensen pedig, hol a régi felfogások még túlságosan erősek, az új eszmék és fogalmak mai napig sem bírtak gyökeret verni.

Midőn az energia megmaradása elvét megállapították, az elektromosság és mágnesség tekintetében nem állítottak fel mechanikai hypothesist, hanem megelégedtek azzal, hogy a távolbahatás alapján megállapított, az elektromosság és mágnesség fluidumelméletén alapuló vonatkozások ezen principiummal ellentétben ne legyenek. Söt midőn egyes esetben, mint ez a Weber-féle törvényt illetőleg előfordult, ellenmondást gyanítottak ama általános természettörvénynyel, csakis az illető törvényt helytelennek nyilvánították, annak kiindulását alkotó alapját pedig nem bolygatták.

Az inductio jelenségeinek tüzetesebb tanulmányozása és különösen a már említett Hertz-féle vizsgálatok, melyeket az egész tudományos világban, a merre physikusok vannak, ismételtek és bővebben tanulmányoztak, mindinkább megmutatják, hogy az egész elektromosságtan épülete, melyen több mint száz éven keresztül folyton csak foltozgattak, végre alapos átépítést igényel.

Faraday nem bírta az ő felfedezéseinek megfelelő elméletet megteremteni, Maxwell a Faraday-féle eszméket formulázta ugyan, de neki sem sikerült eltalálni azt az alakot, melyben a régi, még mindig uralkodó eszmékkel sikeresen síkra szállhatott volna. Mindjárt megmondhatjuk, hogy meggyőződésünk szerint az előttünk fekvő két kötet értekezés sem fog ez irányban lényeges változást létrehozni. Ennek oka részben a szerzőtől használt Hamilton-féle scalar- és vectorszorzatok alkalmazása, noha bevallja, hogy a Hamilton-féle quaterniokat ő maga sem tartja arra alkalmasaknak, hogy az elméleti physikában általánosan használtassanak.

Ebből azonban szerinte korántsem következik, hogy a vectoralgebrát nem lehetne czélszerűen használni, sőt ennek tulajdonképen nincs is semmi köze a quaterniokhoz, mely utóbbiak használata annyi nehézséggel jár, hogy ezek legyőzésére csak kevesen vállalkoznak.

A következőkben a két kötet tartalmát röviden jelezzük. Az első tizenhét értekezés technikai kérdésekre vonatkozik, különösen a duplextelegraphiára és egyéb a telegraphiára vonatkozó dolgokra. Azután következik nehány értekezés, mely a mágnes-elektromos áram generatoraival, párhuzamos drótok inductiójával, az elektromosság terjedésével drótokban, az áram energiájával stb.-vel foglalkozik. A könyvnek jó részét az elektromágnesi inductióról és terjedéséről írt terjedelmes értekezés foglalja el, melynek első része az első kötetben található. Czíme: «Electromagnetic induction and its propagation.» Az egész értekezés, melyet szerzője 1882 és 1887 között a «The Electrician» czímű folyóiratban közzétett egy általános elektromos elméletet foglal magában. Kezdődik az elektromos mennyiségek kapcsolatával, melyek a Maxwell-féle elektromagnetikai schema szerint a következők: Conductivity, azaz vezető képesség, elektrostatikai kapacitás és mágneses permeabilitás. A testben elektromos áram, elektromosság elhelyezése és mágnesi inductio forduljon elő, melyre nézve a következő három egyenletet kapja: $C=kE$ (Ohm-féle törvény), hol E az áramsűrűség, E az elektromotorikus erő és k a fajlagos vezetőképesség. Az «electric displacement» $D=\frac{cE}{4\pi}$, hol c a capacitást jelenti. A magnetikai inductio $B=\mu H$, hol μ a permeabilitás és H a mágnesi erő, csakhogy μ oly mennyiség, mely a hőmérséktől és a vas molecularis szerkezetétől nagy mértékben függ.

E szerint tehát az elektrikus energia $U=\frac{cE^2}{8\pi}$, a mágneses energia pedig $T=\frac{\mu H^2}{8\pi}$. A használt mathematikai apparatus a vectoralgebra elemi formájában.

A második kötet tartalma a következő: Az elektromágnesi hullámfelületről, a nomenclaturára vonatkozó megjegyzések, az önínductióról drótokban, a WHEASTONE féle hínak inductiómérleg gyanánt való használatáról. Ez után következik az electromágnesi inductióról és terjedéséről szóló második rész. A kötet végén a telefon elméletéről és a hysteresisről, földfeletti drótokban a capacitásról van szó stb.

A szerző az elektromos és mágneses egységek dolgában változást javasol, minthogy a most használtakban, daczára annak, hogy a körrel vagy gömbbel semmi közük sincsen, mégis definitiójukban 4π mint tényező előfordul. HEAVISIDE oly «rationális» egységrendszert javasol, melyben p. o. az egységnyi mágnessarkból jelenleg számított 4π erővonal helyett csak egy indul ki. E szerint két sark (m, m_1) egymásra való hatása r távolságban a mostani $\frac{mm_1}{r^2}$ helyett volna $\frac{mm_1}{4\pi r^2}$. Ekként volna az *új ohm* $= 4\pi$ *régi ohm*, az *új ampère* $= \frac{\textit{régi ampère}}{\sqrt{4\pi}}$, az *új volt* $= \sqrt{4\pi}$ *régi volt* s így tovább.

HEAVISIDE műve mindenesetre érdekes olvasmány, melyről kivánni lehet, hogy a szaktársak figyelemre méltassák, noha irásmodora, a használt mathematikai apparatus és a szerzőnek sok tekintetben a szokottól elütő gondolatmenete, az olvasást tetemesen nehezítik.

Heller Ágost.

MEGOLDOTT FELADATOK.

21. *Legyen*

$$F(u,v)=0$$

valamely görbének egyenlete vonalkoordinátákban; bizonyíttassék be, hogy az (u, v) *érintőnek érintéspontjában a görbületi mértéket a következő képlet adja:*

$$G=\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}=$$

$$=\frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial^2F}{\partial u\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial^2F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}$$

(KÜRSCHÁK).

*

Első megoldás Rados Ignácz főreáliskolai tanár úrtól Budapesten

Az (u, v) érintőnek érintéspontja mint annak a pontnak határfekvése fogható fel, melyben az

$$ux+\quad vy+1=0$$
$$(u+\Delta u)x+(v+\Delta v)y+1=0$$

egyenleteknek megfelelő egyenesek egymást metszik, ha

$$\lim \Delta u=0.$$

E két egyenes metszéspontjának koordinátái a következők:

$$x=-\frac{\Delta v}{u\Delta v-v\Delta u},\; y=\frac{\Delta u}{u\Delta v-v\Delta u},$$

mely kifejezések még így is írhatók:

$$x = -\frac{\left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right)}{u\frac{\Delta v}{\Delta u} - v} \qquad y = \frac{1}{u\frac{\Delta v}{\Delta u} - v}.$$

Minthogy

$$\lim_{\Delta u = 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right) = \frac{dv}{du},$$

mint az (u, v) érintőnek megfelelő érintéspont koordinátáit a következőket nyerjük:

$$x = -\frac{\frac{dv}{du}}{u\frac{dv}{du} - v}, \quad y = \frac{1}{u\frac{dv}{du} - v} \tag{A}$$

Ezzel a kitűzött feladat megoldását transzformáczióra vezettük vissza, mert most már csak a $\frac{dy}{dx}$ és $\frac{d^2y}{dx^2}$ differencziálhányadosokat a v-nek u szerint vett differencziálhányadosai segítségével kell kifejeznünk és a nyert eredményeket a

$$G = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{B}$$

képletbe behelyettesítenünk.

E transzformácziónak kivitelére kiindulópontul szolgálhat a

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{du}$$

képlet, a melyből $\frac{dy}{dx}$-et meghatározván, lesz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}. \tag{C}$$

Ha már most az (A) képletekből $\frac{dy}{du}$-t és $\frac{dx}{du}$-t meghatározzuk, ezeket nyerjük:

$$\frac{dx}{du} = \frac{v\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^2}, \quad \frac{dy}{du} = -\frac{u\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du} - 1\right)^2}, \tag{D}$$

Igy tehát a (C) képlet szerint lesz:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}. \qquad (E)$$

Megjegyezzük, hogy erre az eredményre minden számítás mellőzésével az a meggondolás is vezet, hogy $\frac{dy}{dx}$ az

$$ux + vy + 1 = 0$$

érintőnek iránytényezője.

Hogy a $\frac{d^2y}{dx^2}$-et is meghatározhassuk az utoljára nyert eredményt differencziáljuk u szerint, akkor nyerjük, hogy

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{du} = \frac{u\frac{dv}{du} - v}{v^2}.$$

Ha most ebbe $\frac{dx}{du}$ értékét (D)-ből helyettesítjük és $\frac{d^2y}{dx^2}$-et kiszámítjuk, lesz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{v^3 \frac{d^2v}{du^2}},$$

és így, hogy ha $\frac{d^2y}{dx^2}$-nek ezt az alakját és $\frac{dy}{dx}$-nek (E) alakját a (B) képletbe helyettesítjük, valóban azt nyerjük, hogy

$$G = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2v}{du^2}}.$$

A kérdésben megjelölt második alakot megkapjuk, ha $\frac{dv}{du}$-t és $\frac{d^2v}{du^2}$-et a

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{du} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{dv}{du} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2} = 0$$

egyenletekből kiszámítjuk, a melyek az

$$F(u,\, v) = 0$$

egyenlet differencziálásából származnak.

*

E feladat megoldásához hozzácsatolom még annak az analog kérdésnek fejtegetését, hogy *miképen fejezhető ki valamely felület* GAUSS-*féle görbülete az* $(u,\, v,\, w)$ *érintősík érintéspontjában, ha e felület egyenlete sík-koordinátákra vonatkozólag van megadva.*

Az érintéspont koordinátáinak meghatározása végett ismét abból a felfogásból indulhatunk ki, hogy az $(u,\, v,\, w)$ érintősík érintéspontja határpontja ama pontnak, melyben az

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

$$(u + \Delta_1 u)\, x + (v + \Delta_1 v)\, y + (w + \Delta_1 w)\, z + 1 = 0$$
$$(u + \Delta_2 u)\, x + (v + \Delta_2 v)\, y + (w + \Delta_2 w)\, z + 1 = 0$$

egyenleteknek megfelelő síkok egymást metszik, hogy ha

$$\lim. \Delta_1 u = 0, \quad \lim. \Delta_1 v + 0, \quad \lim. \Delta_2 u = 0, \quad \lim. \Delta_2 v = 0.$$

E síkok metszéspontjának koordinátái a következő alakban írhatók:

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \dfrac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u} \\ \dfrac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} & \dfrac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v & w \\ 1 & \dfrac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \dfrac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u} \\ 1 & \dfrac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} & \dfrac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u} \\ 1 & \dfrac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v & w \\ 1 & \dfrac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \dfrac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u} \\ 1 & \dfrac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} & \dfrac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}},$$

$$z = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} \\ 1 & \dfrac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v & w \\ 1 & \dfrac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \dfrac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u} \\ 1 & \dfrac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} & \dfrac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}}.$$

Noha az u és v egymástól függetlenül változnak, mégis feltehetjük, hogy míg az u változó az u értékből $u+\Delta_1 u$ illetőleg $u+\Delta_2 u$ értékekbe megy át, a v a

$$v = \varphi_1(u)$$

illetőleg

$$v = \varphi_2(u)$$

törvények szerint változik, hol $\varphi_1(u)$ és $\varphi_2(u)$ az u tetszés szerinti függvényeit jelentik, melyekről csak azt teszszük fel, hogy differencziálhatók. Ezt feltéve lesz:

$$\lim_{\Delta_1 u=0}\left(\frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u}\right) = \varphi_1'(u), \quad \lim_{\Delta_1 u=0}\left(\frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u}\right) = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\varphi_1'(u)$$

$$\lim_{\Delta_2 u=0}\left(\frac{\Delta_2 v}{\Delta_1 u}\right) = \varphi_2'(u), \quad \lim_{\Delta_2 u=0}\left(\frac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u}\right) = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\varphi_2'(u).$$

Ezeket a kifejezéseket az x, y, z számára fentebb nyert kifejezésekbe behelyettesítvén, mint az (u, v, w) érintősík érintéspontjának koordinátáit a következőket nyerjük:

$$x = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}}{u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v} - w}$$

$$y = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial v}}{u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v} - w} \qquad \text{I.}$$

$$z = \frac{1}{u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial u} - w}.$$

Ha már most a felület Gauss-féle görbületét a (u, v, w) érintősík érintéspontjában síkkoordináták segítségével akarjuk kifejezni, a $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ differencziálhányadosokat a w-nek u és v szerint vett differencziálhányadosaiból ki kell számítanunk és a nyert értékeket a következő képletbe behelyettesítenünk:

$$G = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial z^2}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2}. \qquad \text{II.}$$

A $\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ differencziálhányadosok meghatározására a következő egyenletek szolgálnak

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}\right\} \qquad \text{III.}$$

Ha a $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ differencziálhányadosokat az I. egyenletekből meghatározzuk, a következőket nyerjük:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{\left(v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - v\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2} \\
\frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{\left(v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - v\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2} \\
\frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} - w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - u\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2} \\
\frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} - w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - u\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2} \\
\frac{\partial z}{\partial u} &= -\frac{u\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2} \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= -\frac{u\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + v\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{IV.}$$

Ezeknek tekintetbe vételével a III. egyenletekből $\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ számára a következő értékek származnak:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w} \qquad \text{V.}$$

Mint könnyen belátható, ezekre az eredményekre itt is más meggondolások segítségével számítás nélkül is juthattunk volna.

Ha az utoljára nyert egyenleteket ismét u és v szerint differencziáljuk, a következő egyenletek származnak:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{u\dfrac{\partial w}{\partial u}-w}{w^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{u\dfrac{\partial w}{\partial v}}{w^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{v\dfrac{\partial w}{\partial u}}{w^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w}{w^2}$$

a melyekből IV. alapján a második differencziálhányadosok következő kifejezései adódnak ki:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w}{w^3}\cdot\frac{u^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2u\dfrac{\partial w}{\partial v}\left(u\dfrac{\partial w}{\partial u}-w\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\left(u\dfrac{\partial w}{\partial u}-w\right)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w}{w^3}\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)^2}\left\{u\frac{\partial w}{\partial v}\left(v\frac{\partial w}{\partial v}-w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\left[uv\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(u\frac{\partial w}{\partial u}-w\right)\left(v\frac{\partial w}{\partial v}-w\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+v\frac{\partial w}{\partial u}\left(u\frac{\partial w}{\partial u}-w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w}{w^3}\cdot\frac{\left(v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w\right)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2v\dfrac{\partial w}{\partial u}\left(v\dfrac{\partial w}{\partial u}-w\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+v^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)^2}.$$

Ezeket és a $\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ értékeit V.-ből a II. képletbe behelyettesítvén, az (u, v, w) érintősík érintéspontjában a Gauss-féle görbület kiszámítására a következő képletet nyerjük:

$$G = \frac{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^4}{(u^2+v^2+w^2)^2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right)^2\right]}.^*$$

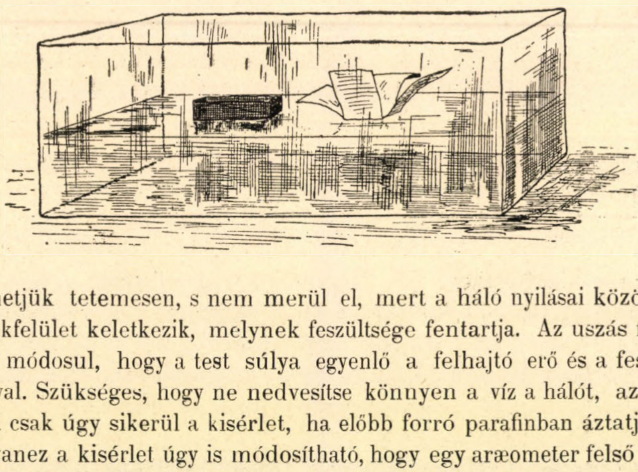
* A többi beérkezett megoldások Lapunk legközelebbi füzetében jelennek meg. *Szerk.*

PHYSIKAI LABORATORIUM.

1. Kisérlet a folyadékok felületi feszültségére. A folyadékok felületi feszültségét rendesen a szappanhártyákon szokás bemutatni; de épen olyan egyszerű kisérletek tehetők nagy folyadéktömegek szabad felületein is.

Azt, hogy a folyadékban működő erők a folyadék szabad válaszfelületét kisebbíteni törekednek s hogy a folyadék felülete olyanféle hatásokat fejt ki, mint egy kifeszített hártya, szemléltetik a következő kisérletek, melyek jó részt Boys «Soap-Bubbles» czímű könyvecskéjében * is le vannak írva.

Sárgaréz dróthálóból egy darabot, vagy hálós fenekű skatulyát a víz felületére fektethetünk a nélkül, hogy elmerülne; sőt még széttel meg is



terhelhetjük tetemesen, s nem merül el, mert a háló nyilásai között nagy folyadékfelület keletkezik, melynek feszültsége fentartja. Az uszás feltétele akként módosul, hogy a test súlya egyenlő a felhajtó erő és a feszültség hatásával. Szükséges, hogy ne nedvesítse könnyen a víz a hálót, azért vashálóval csak úgy sikerül a kisérlet, ha előbb forró parafinban áztatjuk.

Ugyanez a kisérlet úgy is módosítható, hogy egy aræometer felső részére egy köralakú dróthálót erősítünk, úgy hogy ez ne merüljön el a vízben.

* Az eredeti művecske teljes czime: «*Soap-Bubbles and the Forces which mould them. Being a course of three lectures delivered in the theatre of the Lonoon Institution on the afternoons of Dec. 30 1889, Jan. 1, and 3. 1890, lefore a juvenile audience.* By C. V. Boys. Németül Dr. G. Mayer átdolgozásában jelent meg, A. Barth (Leipzig 1893) kiadásában. — Ára 3 márka.

Ha azután belemerítjük a hálót is a vízbe s szép lassan emelkedni engedjük, látjuk, hogy a háló a víz felületén fennakad.

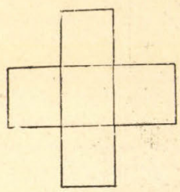
Aræometer helyett egy kis üveg lombikot vehetünk, melyet egyfúratú dugóval elzárunk s ebbe egy üvegcsövet teszünk: a dróthálót erre erősítjük. A lombikba annyi srét vagy higany teendő, hogy az nyakáig a vízbe merüljön.

Ha vízre olyan papirdarabot teszünk, melynek szélei fel vannak hajtogatva (legczélszerűbb e czélra négyszögletü skatulyavázat készíteni), a felhajtott részek rövid idö mulva a víz felületén elterülnek, mutatván ezzel, hogy a víz szabad felülete lehetöleg összehúzodni törekedik.

Minthogy az æthernek sokkal kisebb a felületi feszültsége (1,8) mint a vízé (7,5), a legcsekélyebb æther a víz felületi feszültségét tetemesen leszállítja, a miről szintén sok egyszerű kisérlet győz meg.

Ha a vizen uszó drótháló vagy papir egyik szélére kevés æthert cseppentünk, vagy csak ætherbe mártott vattával közelítünk hozzá, a lemez gyorsan az ellentett oldalra szalad; az elmerített aræometer pedig azonnal kiemelkedik, ha a hálóra egy csepp æthert öntünk.

Ismeretes, hogy ha lapos edénybe vizet öntünk s azon két parafagolyót usztatunk, azok egymást vonzzák; de ha a két golyó közé æthert cseppentünk, azonnal szétszaladnak, mert két oldalt a tiszta víz nagyobb felületi feszültsége széthúzza a közben levő ætheres víz kisebb feszültsége ellenében.



Ugyanezt mutathatjuk be más formában, ha egy vékonyra kihuzott cső végén függő vízcsepphez alulról ætheres edénynyel közeledünk: a vízcsepp azonnal leesik, jeléül annak, hogy az æthergőzök a vízcsepp felületi feszültségét annyira csökkentik, hogy az akkora víztömeget többé megtartani nem képes.

A pecséttisztítás theoriáját (Maxwell) * is igazolhatjuk egyszerű kisérlettel, melyet vetítve mutathatunk be. Üveglemezen olajcsepp képviseli a pecsétet, ha egy vékony üvegcső vagy fapálczika végére csavart vatta-pamacsot ætherbe mártunk s azután ezt az olajcsepp közepéhez érintjük, az szétszalad, — a pecsét nagyobb lesz, — mert az olaj felületi feszültsége nagyobb (2,5), mint az ætheré.

Fordítva, ha az ætherrel a pecsét széléhez közelítünk, a folt összehuzódik — kisebb lesz — s a pecsét közepébe helyezett itatós papirba huzódik fel, úgy hogy teljesen eltávolíthatjuk.

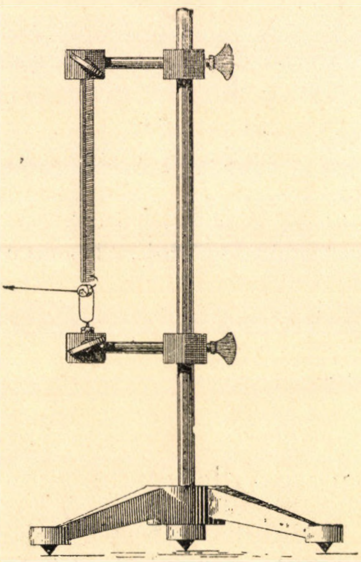
Ugyanezt ismételhetjük melegített vassal is, æther helyett, a mi ismét azt mutatja, hogy a felületi feszültség a hőmérséklet emelkedésével csökken.

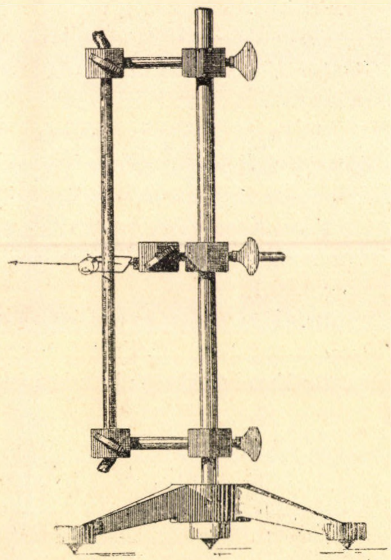
* L. Maxwell *Theorie d. Wärme* ford. Neesen 333. l.

A féme‹ külömböző kiterjedése. A kettős fémlemezek meggörbülését a melegítésnél s annak a fémhőmérők szerkesztésére való felhasználását egyszerűen mutathatjuk, ha az ilyen sárgaréz és vasból összeerősített lemez egyik végét megfogjuk, a másikat pedig az ábrán látható egyszerű emelős áttétellel látjuk el.

Égő gyujtóval közeledvén a vaslemezhez, a lemez kiterjed s abban az egy irányban meghajlítja, a mutató előre megy, de azután a réz is fölmelegszik s mert nagyobb a kiterjedési együtthatója, a lemezt visszahajlítja, a mutató megfordul s ellentett irányban tér ki.

A kifeszített kaucsuk összehuzódását a melegítésnél ugyancsak ilyen emelős mutatóval láthatóvá tehetjük, ha egy, két végén megerősített





és jól kifeszített kaucsuk cső közepén alkalmazzuk a rajzon látható érzékeny mutatót; és pedig oly módon, hogy a kaucsukon átszúrunk egy gombostűt, mely gombjával egy tengelyen forgó parafadugót érint. A dugó még egy könnyű mutatót — pl. gyujtószálat — tart. Kézzel való húzás által előbb meggyőződünk, hogy az egyik fél megrövidülésével a mutató mily irányú kitérése felel meg s ha azután azt a részt lánggal csak kissé is melegítjük, látjuk a mutatót ugyanabban az irányban mozogni, jeléül, hogy a melegítésnél a kaucsuk valóban összehuzódik. Minél jobban ki van feszítve a kaucsukcső, annál érzékenyebb a mutató. *K. J.*

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Április 5-én. Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről.

Április 19-én. TŐTÖSSY BÉLA: A szimbolikus számítások a projektiv geometriában.

TAXGL VÁROLY: Az árnyékról.

Október 25-én. Az elnök üdvözlése. — A tanulók versenyén megitélt díjak kiosztása.

Dr. KLUPÁTHY JENŐ: Kisérletek az elektromos oscillatiókkal.

November 15-én. Dr. KŐNIG GYULA: Az egy- és többméretü sokaságok kölcsönösen egyértelmű vonatkoztatása.

FUCHS KÁROLY: A capillaritás elméletének kiinduló pontjairól.

Deczember 6-án. SZILY KÁLMÁN: A körvonal üldöző görbéje, állandó távolság mellett.

Dr. HOÓR MÓR: Az elektromótorokról.

Deczember 20-án. Dr. KLUG LIPÓT: A lineáris complexusról.

Dr. KLUPÁTHY JENŐ: Előadási kisérletek.

*

Kisérletek elektromos oscillatiókkal.

Az elektromos oscillatiókkal tett újabb kisérletek általános érdeklődést keltettek úgy a fizikusoknál, mint a gyakorlat embereinél. A fizikusoknál, mert az oscillatiók térbeli elterjedésének ismerete az elektromos jelenségek elméletére, nevezetesen a FARADAY-MAXWELL-féle felfogásra nézve bír döntő jelentőséggel, amennyiben felvilágosítást nyújthat arra nézve, hogy az elektromos állapot megváltozása a tér dielektrikus polarisátiója utján véges sebességgel terjed-e el, vagy sem?

De mert az elmélet szerint ennek a terjedési sebességnek a levegőben igen nagynak, a fényével megegyezőnek, tehát 300,000 km. sec^{-1} kellene lennie, világos hogy igen gyorsan egymásra következő villamos állapotváltozásokat kell előállítani, hogy azok kis térben való elterjedésénél az egyidejűség, vagy az időbeli elterjedés között dönteni lehessen.

Ez indította a kisérletezőket arra, hogy módokat keressenek igen gyors villamos állapotváltozások létesítésére.

A villamos kisülés oscilláló természetét annak hatásaiból már rég ismerték.

Így SAVARY azt tapasztalta, hogy a szikrával mágnesezett vasdarabok sarkai váltakozók; a voltameteren átvezetett szikraáram hatása alatt mind a két elektródon mind a két gáz (H, O) kiválását vették észre. Hasonlóan a Geissler-csövek fényjelenségei forgó tükörben a szikrák oscilláló természetét bizonyították. HELMHOLTZ a battériák kisülésénél RIESS-től talált törvényszerűség magyarázatát az oscilláló kisülésre vezette vissza s THOMSON elméletileg megállapította az ily oscilláló kisülések periodusát is, kimutatva azt, hogy ha C a vezető kapacitása és L önindüctiójának együtthatója, az oscillatió rezgésideje

$$T=24\sqrt{CL}.$$

FEDDERSEN volt az, ki a periodust először kisérletileg határozta meg forgó tükörrel, és sikerült neki THOMSON képletét igazolnia oly kisüléseknél, melyeknek periodusa egy milliomod másodpercz.

HERTZ kis kapacitású vezetők kisütésével $1-2.10^{-8}$ s. oscillatiókat állított elő, s ezzel mutatta ki ismert kisérleteivel a villamos hatás terjedésének véges sebességét.

E kisérletek közben az elektromos oscillatiók néhány érdekes sajátságát tapasztalták; így pl. a légritkított cső világítását az oscilláló térben, a vezetők ellenállásának látszólagos változását stb.

E kisérletekkel lépést tartva, az electrotechnika a villamosság gyakorlati alkalmazásában igyekezett azok eredményeit értékesíteni. S itt a kilátás, melyet e vizsgálatok nyújtottak, e szempontból nem kevésbbé kecsegtető, mint az előbbi. Először módot látszik nyújtani az elektromos energia átvitelére vezető sodronyok nélkül, csupán a tér közvetítésével, mint a fénynél; azután meg az elektromos energia közvetlen átalakítására fénynyé, a melegítés kikerülésével.

Ez a törekvés indította az elektrotechnikusokat arra, hogy a gyors elektromos oscillatiókkal nagy méretekben kisérletezzenek.

E tekintetben különösen TESLA MIKLÓS tett igen sok s jórészt érdekes kisérletet, melyek czélja az elektromos oscillatiók gyakorlati értékesítése s a melyek lényegben nem egyebek, mint FEDDERSEN, BEZOLD, HERTZ s mások kisérleteinek nagy arányokban való kivitele.

Ennek a czélnak megfelelőleg természetesen arra törekedett TESLA, hogy oly oscillatiókat állítson elő, amelyek szaporaságukon kívül nagy munkaképességgel is bírnak és állandóan fenntarthatók, hogy a hatásaik folytonosak legyenek.

Az elektromos kiegyenlítődések munkaképessége általában arányos a potentiál különbséggel és az elektromosság mennyiségével; ezért oly oscillatiók a leghatásosabbak, melyeknek nagy feszültségök és intensitásuk van. Ez utóbbi, és az oscillatiók állandóságának szempontjából indulva ki, TESLA az oscillatiók előállítására legelőször igen gyors váltakozású áramgépeket szerkesztett, mint a melyek a legegyszerűbb mechanikai szerkezetek folytonosan és egyenletesen oscilláló intensiv áram előállítására. De a technikai nehézségek miatt az ily gépekkel másodperczenkint 30,000-né szaporább váltakozású áramot nem tudott előállítani, ez pedig igen kevés a százmillióhoz képest, úgy, hogy kénytelen volt az elektromos szikra oscillatióit használni fel.

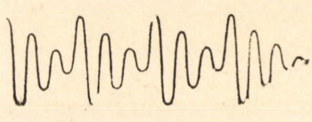
Gyors váltakozás, nagy feszültség és *állandóság* a hármas feladat, melyet a kisérletezőnek meg kell oldania. A gyors váltakozást adja egy kondenzator (pl. a leydeni batteria) kisülési szikrája; nagy feszültség előállítására pedig ismert eszközeink vannak a transformatorokban (pl. az általános használatban levő Ruhmkorff-félében), melyeknek ha vastagabb tekercsén átüttetjük a kis feszültségű szikrát, a vékonyabb sokmenetű tekercsben nagy feszültségű váltakozó áramot, vagyis oscillatiókat nyerünk. Csakhogy igen nagy feszültségnél a közönséges Ruhmkorffok szigetelése nem elegendő; de tudvalevő, hogy a folyékony szigetelők, különösen pedig az olajok sokkal jobban szigetelnek; azért TESLA erre a czélra olyan Ruhmkorff-féle transformatort készített, melynek két tekercse* olajjal telt edénybe merül s ez által kitünően el vannak egymástól szigetelve. Ez az úgynevezett «olajtransformator».

Már most csak az oscillatiók állandóságáról kell gondoskodni. Ha az ilyen transformatoron át egy szikrát üttetünk át, akkor a vékony tekercsben az oscillatiók rövid ideig tartanak, gyorsan csillapodnak, olyanformán, mintha egy ingát vagy hangvillát meglökünk, ill. megütünk, annak a lengései is rövid idön megszünnek. Ha azt akarjuk, hogy azok állandóan mozogjanak, gondoskodni kell, hogy mindig újabb lendítést adjunk, mielőtt még az első lengések véget érnek. Épen így itt is gondoskodni kell, hogy az első szikra által keltett oscillatiók meg ne szünjenek, mielőtt a második szikra a tekercsen át üt, mert különben az oscillatiók olyan egyenlőtlen lefolyásuak lesznek, mint azt az 1. ábra graphikusan ábrázolja. Természetes, hogy minél lassabban csillapodnak a transformatorban az oscillatiók, annál könnyebb elérni az állandóságot, már pedig az oscillatiók csillapodása, mint az elmélet és a kisérletek mutatják, annál kisebb, minél kisebb a ka-

---

* Az egyik 3 mm.-es nem szigetelt drótból készült mintegy 20 menetes solenoid, míg a másik ebonit vagy üveg csőre csavart egy réteg (2—300 menet) jól szigetelt $^{1}/_{2}$—$^{3}/_{4}$ mm.-es drótból áll.

pacitás és minél nagyobb a vezető öninductiója — azért arra kell törekedni, hogy lehetőleg kis kapacitása és nagy öninductiója legyen a transformator secundär vezetékének. Másrészt arról kell gondoskodni, hogy a vastag tekercsen átütő szikrák minél gyorsabban kövessék egymást. Ez természetesen olyan elektromosság-forrásra utal, mely lehetőleg nagy elektromosság-menynyiséget szolgáltat. Ezért is nagy hatások bemutatására legalkalmasabb a váltóáramú gép; de a Ruhmkorff által adott váltakozó áram, vagy pedig egy több lemezes megosztó gép is megfelel a czélnak.



1. ábra.

Ezeknek az általános elveknek megfelelő az az összeállítás, mellyel itt a Tesla kisérleteinek egy részét fogom bemutatni s a melynek rövid áttekintése a következő. (2. ábra.)

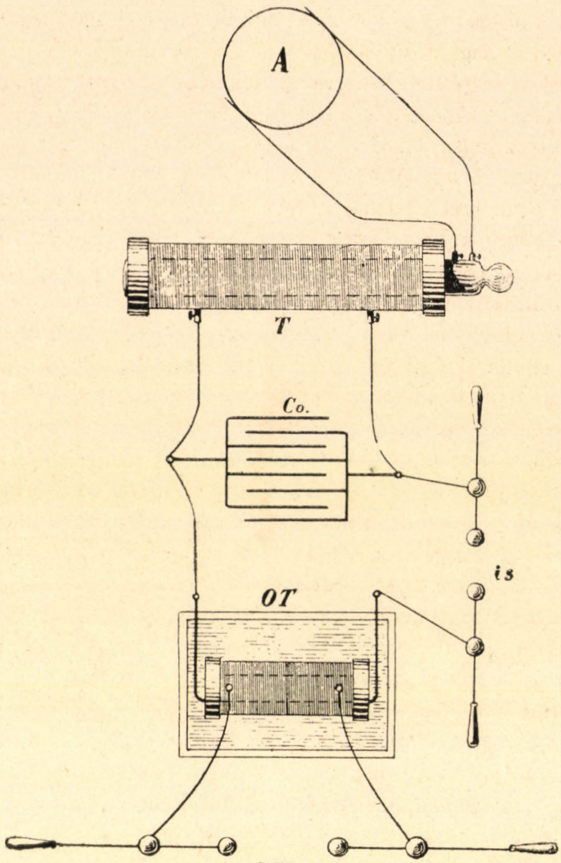
Az *(A)* áramforrásból jövő kis feszültségű (100 voltos) váltakozó áram a *T* transformator primär tekercsén halad át; a secundär tekercs két vége egy 4 palaczkból álló leydeni batteria *(Co)* töltése végett annak külső és belső fegyverzetével van összekötve. A battéria az olajtransformator *(OT)* primär tekercsén sül ki — e czélra egy szikraköz *(is)* van közbeiktatva — s ez által keletkeznek a még kis feszültségű, de szapora váltakozású oscillatiók. Az olajtransformator secundär tekercsében azután keletkeznek az indukált nagy feszültségű és gyors váltakozású oscillatiók *(NFS)*.

Az *is* szikraköz kellő szabályozása által elérhetjük, hogy ezek az oscillatiók állandóak legyenek. (Erre a czélra Tesla ajánlja az indukáló szikra lángját egy fujtató légáramával, vagy elektromágnessel eltávolítani; jónak találtam Hinstedt szerint a czink elektródokat: ezek alkalmazásánál egész felesleges a fujtató.)

Ezzel a kisérleti berendezéssel kivánok a t. értekezletnek néhány, az oscillatiókat jellemző kisérletet bemutatni.

A gyors váltakozású áramoknál természetesen az öninductió jelenségei nagy mértékben érvényesűlnek; így, ha egy vezetőn vezetjük át ezen áramokat, akkor a vezető két pontja közötti potentiálkülömbség nagyobb lesz, mint állandó áram esetén. Ez a vezető ellenállásának látszólagos növekedése s a vele kapcsolatos impedantia.

Ha például egy vastag dróton át vezetem a *(Co)* battéria kisülési szikráját (a nélkül, hogy az olajtransformator be volna csatolva), akkor e drót két pontja között az ily szapora váltakozású kis feszültségű oscillatióknál egész száz voltig terjedő potentiál külömbség lép fel, úgy hogy a drót két pontjával összekötött 30 voltos izzólámpák erősen világítanak és pedig minél távolabbi pontokat kötnek össze, annál erősebben. Hogy ez nem az izzólámpák vacuumának befolyása, mint Tesla gondolja, arról meggyőződhe-



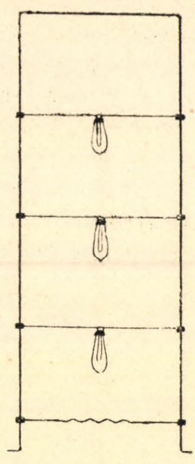
2. ábra.

tünk, ha platinadrótot kötünk a rézdrót két pontjához: ez is izzásba jő a levegőn s eközben, ha lazán lógott, megfeszül és zeg-zugos alakot vesz fel. (3. ábra.)

A leydeni batteria szikrájának oscillatióit könnyen letransformálhatjuk olyan kis feszültségre, hogy egyszerű 20 voltos izzólámpát világítanak. Erre a czélra két dróttekercset készítünk, mind a kettőt 3—4 mm.-es nem szigetelt rézdrótból. Az egyik 15—20 menetű, a másik 2—3 menetű; ha az elsőn átütnek a szikrák, akkor a másiknak végei közé erősített lámpa izzásba jő.

Eddig az oscillatiók aránylag kis feszültségűek voltak, amit onnan láthatunk, hogy a szikraköz, melyet át birnak ütni, alig 2 cm. hosszú; transformáljuk most át nagy feszültségűekre az olajtransformator segélyével. Ezt becsatolva látjuk, hogy az *(NFS)* kisütőnél hatalmas nagy szikrák egész serege keletkezik. Erős, csattogó, fényes szikrapamatok, mindenütt rendkívül nagy kisugárzás, jellemzői a nagy feszültségű gyors oscillatióknak. Feltűnően ugyanazok a jelenségek, melyeket a nagy influentia-gépeken tapasztalunk s az ezekkel végzett kisérleteket itt nagyobb mértékben s szebben ismételhetjük. Különösen a két elektródon a kisugárzás rendkivül nagy, s ezt szépen bemutathatjuk külömböző formákban, aszerint, amint az elektródok alakját változtatjuk. Így származik két körgyűrű szembeállitásával az a szép jelenség, melyet Tesla «sugárzó nap»nak nevez. Szigetelő, pl. kaucsuk lemezt helyezve a két elektród közé, a szikrák eleinte a széle körűl ütnek át; később a lemez egészen átmelegszik, lágy lesz mint a vaj, s akkor a szikrák rajta törnek át.

Megfordítva azt látjuk, amit először Hertz mutatott ki, hogy az ily oscillatiók a vezetők belsejébe nem hatolnak be és pedig annál kevésbbé, minél szaporábbak. Ha Geissler-csövet szigetelő állványra helyezve, az egyik elektróddal összekötjük, míg a másikat a földdel kötjük össze, a cső szépen világít. De ha most a csövet fémhálóval borítjuk le, úgy amint azt a megfelelő elektrostatikai kisérletnél szokás, a cső megszűnik világítani, de újra világít, mihelyt a hálót leemeljük.



3. ábra.

Ez adja egyúttal magyarázatát annak a tapasztalatnak, hogy az ily szapora oscillatiókat minden veszély nélkül átvezethetjük testünkön. Megfogom az egyik kezemmel az elektródot, a másikban Geissler-csövet tartok s a cső fényesen világít, anélkül hogy a legkisebb kellemetlen érzésem lenne. A Geissler-csöveknek elég egy elektródját összekötni a kisülő egyik végével, hogy világítsanak; sőt távolból minden vezető összeköttetés nélkülis világítanak. Sőt oly kiszivattyúzott gömbök és hosszú csövek, melyekben nincs is elektród, szépen világítanak, ha kezembe veszem s közelítem a kisütőhöz.

Itt az az érdekes dolog tűnik fel, hogy az ilyen elektród nélküli csövet először igen közel kell vinni a kisütőhöz — gyakran érinteni is kell — míg világítani kezd, vagy amint mondani szokták az akusztikai analogon folytán, míg megszólal. Az egyszer megszólalt csövet azután nagy távolságra vihetjük s még mindig világít. Különböző csövek nem egyformán világítanak, általában hosszabb csövek jobban világítanak; minél kisebb a cső, annál gyorsabb oscillatiók kellenek — úgy látszik — a megszólaltatásra. Ezek az elektródnélküli világító csövek képezik TESLA szerint a «jövő világosságának» csiráit. Mozgatva e csöveket, igen szépen látjuk e jelenség oscilláló természetét, mert a csőnek sok képét látjuk egymás mellett s a «lángoló kard» vagy a «pompás legyező» valóban meglepően szép látványos kisérletek. S valóban meglepő s reményeket keltő ez a jelenség, különösen ha abban a formában állítjuk elő, mint azt TESLA párisi előadásában tette. Az előadási asztal fölé vékony czinklemezt függesztünk fel, mintegy 2 m. magasban (50—60 cm. széles, 2—3 m. hosszú) s azt összekötjük az oscilláló kisütő egyik elektródjával, míg a másikat a földbe vezetjük (vagy esetleg a földre helyezett másik fémlemezbe). Ha mos az asztalra helyezett csöveket kezünkbe vesszük, azok világítanak, sőt a lemeztől 2—3 méternyire is távozhatunk s még mindig fényesek. Természetes, hogy kis fantáziával magunk elé képzelhetjük azt az ideális világítást, a mikor a szoba mennyezete és padlója van összekötve az oscillatiók forrásával s a szobában bárhol elhelyezett ilyen lámpák világítanak, a zsebünkből kivett kis cső adja a gyujtó helyett a világosságot.

Egyelőre azonban még baj, hogy az oscillatiókat nagy távolságra nem lehet vezetni, mert az önindunctió folytán rendkivül nagy lesz az ellenállás s azután mint láthatjuk ez a «jövő világossága» még csak dereng!

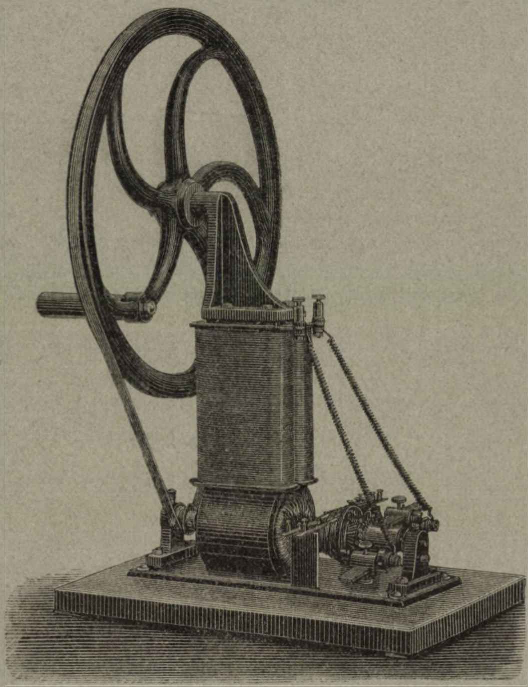
Klupathy Jenő.

DINAMO-ELEKTROMOS GÉP

Gramme-féle gyűrűvel ellátva

egyirányú, váltakozó és forgó áram számára

Az áram erőssége 4 Ampère, feszültsége 30 Volt.



Egyidejűleg meg lehet például világitani ezen géppel 3 izzólámpát egyirányú és 2 izzólámpát váltakozó vagy különböző fázisú forgó árammal. Ugyszintén izzásba hoz több lámpát akár egyirányú, akár forgó árammal, ha azok egymás mellett csatoltatnak a gépbe. Szerkezete e lapok V. füzetében ismertetve van.

A gép kizárólagosan iskolai czélokra készült és pedig nem csakis a dynamogép stb. bemutatására, hanem mint állandóan kész, erős villamos forrás, mivel egy kézzel igen könnyen hajtható és árama minden iskolai kisérlethez teljesen elegendő.

Részletes utasitás minden géphez mellékeltetik.

A gép ára 100 forint.

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.