MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

TIZENÖTÖDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1906

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

TIZENÖTÖDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első—Második füzet.

Harmadik—Negyedik füzet.

Ötödik füzet.

*

Hatodik—Hetedik füzet.

Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Önálló és ismertető czikkek.

Társulati ügyek.

Kitűzött és megoldott feladatok.

Sajtóhibák.

DETERMINÁNSOK IRREDUCIBILITÁSÁRÓL.

Ha az

$$A = \left| a_{ij} \right|_{(i, j = 1, 2, \ldots, n)}$$

determinánsban az elemek egymástól független határozatlanok, akkor e determináns az n^2 elemnek **irreducibilis** *raczionális és egész formája.**

Ha a

$$B = \left| b_{ij} \right|_{(i, j = 1, 2, \ldots, n)}.$$

szimmetrikus determinánsban, hol

$$b_{ij} = b_{ji}$$

a

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ & & \ldots & \\ & & & b_{nn} \end{matrix}$$

elemek egymástól független határozatlanok, akkor e determináns a b-knek **irreducibilis** *raczionális és egész formája.*

E két tétel, melyek közül az első általánosan ismeretes, a következő módon bizonyitható be *egyszerre.*

Ha A vagy B mint elemeinek n dimensiós formája reducibilis volna, akkor ilyennek kellene lennie bármely oly n di-

---

* KŐNIG nyomán valamely formát (azaz racz. egész függvényt) *raczionális és egésznek* akkor mondunk, ha együtthatói racz. egész számok. Az F raczionális és egész forma *irreducibilis*, ha csak úgy bontható fel két raczionális és egész forma szorzatára, hogy az egyik tényező $+1$ vagy -1, a másik tényező pedig $+F$ ill. $-F$.

mensiós formának is, mely A-ból ill. B-ből úgy keletkezik, hogy a határozatlanok egy részét meghatározott raczionális egész számokkal helyettesítjük. Tehát reducibilisnek kellene lennie a következő formának is:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{vmatrix},$$

hol a fődiagonálisban meghagyott határozatlanokat rövidség kedvéért

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$$

-nel jelöltük. Ámde $n=1$ és $n=2$ esetében közvetetlenül világos, hogy

$$D_1 = x_1, \quad D_2 = x_1 x_2 - 1$$

irreducibilis. Tetszőleges n esetére pedig a következő $(n-1)$-ről n-re való következtetést alkalmazhatjuk.

Minthogy

$$D_n = x_n D_{n-1} - D_{n-2},$$

hol a D_{n-1} és D_{n-2} determinánsok az x_n-től ment formák, azért D_n csak úgy lehetne reducibilis, ha a D_{n-1} és D_{n-2} formáknak volna egy $+1$-től és -1-től különböző közös osztója. Ámde ez lehetetlen, mert D_{n-1} és D_{n-2} két oly egymástól különböző forma, melyeknek irreducibilitását már bebizonyítottnak tekintjük.

Kürschák József.

A Γ FÜGGVÉNY ELMÉLETÉHEZ.

1. GAUSS a Γ-függvényre vonatkozó LEGENDRE-tételt általánosítván, a következő, nevezetes összefüggést állapitotta meg:

$$Q(x) = \Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right) =$$
$$= \Gamma(mx)\,m^{\frac{1}{2}-mx}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}. \qquad 1)$$

E tétel levezetése a transcendens egész függvények WEIERSTRASS-féle előállításának segítségével igen egyszerűvé válik. Talán nem végzek felesleges munkát, ha a különben elég hosszadalmas számítások elkerülése végett, ezt a levezetést, mint a WEIERSTRASS-féle alapvető tétel alkalmazását közlöm.

Előre bocsátom e tétel amaz egyszerű és igen könnyen kimutatható esetét, mely $x = \frac{1}{m}$-nek (m pozitiv egész szám) felel meg:

$$P = \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{-\frac{1}{2}}. \qquad 2)$$

Ezt a tételt a Γ függvény ú. n. második alaptulajdonsága segitségével állapitjuk meg. Ez a második alaptétel, a

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi},$$

melyet a Γ-függvény WEIERSTRASS-féle alakjából azonnal megkaphatunk, ha az első alaptulajdonságot, a

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

egyenletet felhasználjuk. E szerint ugyanis:

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(x),$$

tehát:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = -x\Gamma(x)\Gamma(-x)$$

és minthogy

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx} x \prod_{k=1,2,\dots} \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

(C az Euler-féle állandó), tehát:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-x)} = -\frac{1}{x \,.\, \Gamma(x)\Gamma(-x)} = x\Pi\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Ha már most a kiszámitandó P négyzetét ebben az alakban írjuk:

$$P^2 = \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(\frac{m-2}{m}\right)\dots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right),$$

akkor a második tulajdonság alkalmazásából ered:

$$P^2 = \frac{\pi^{m-1}}{\sin\frac{\pi}{m} \,.\, \sin\frac{2\pi}{m} \dots \sin\frac{(m-1)\pi}{m}}$$

és a nevezőben álló kifejezést a körosztási egyenlet segítségével ismeretes módon kiszámítván, kapjuk a 2) alatti kifejezést.

Most áttérünk a $Q(x)$ kiszámitása. $Q(x)$ reciprok értéke oly transcendens egész függvény, melynek egyszerű zérus-pontjaihoz jutunk, ha

$$x + \frac{k}{m} = -\rho,$$

a hol k a 0-tól $m-1$-ig és ρ a 0-tól ∞-ig minden pozitiv egész értéket felvesznek; tehát az $\frac{1}{Q(x)}$ egyszerű zérushelyei az összes $-\frac{r}{m}$ alakú számok, a hol r 0-tól ∞-ig minden pozitiv egész értéket felvesz.

Az $\frac{1}{Q(x)}$ tényezői, a $\Gamma\left(x+\frac{k}{m}\right)$ reciprok értékei, mindannyian elsőnemű transcendens egész függvények. Minthogy véges számban vannak e tényezők, a szorzat is legfölebb első nemű lehet.

A jelen esetben ez a szorzat tényleg első nemű, mert a zérushelyek abs. értékeinek reciprokjaiból alkotott

$$m\Sigma\frac{1}{k}$$

sor széttartó és

$$m^2\Sigma\frac{1}{k^2}$$

convergens és az elülálló exponentialis factorok szorzatában az exponens x-ben elsőfokú.

Az $\frac{1}{Q(x)}$ transcendens egész függvény WEIERSTRASS-féle alakja tehát csakis ilyen lehet:

$$\frac{1}{Q(x)}=Ae^{\alpha x}x\Pi\left(1+\frac{xm}{k}\right)e^{-\frac{xm}{k}}. \tag{3}$$

Az A és α állandókat kell csak meghatároznunk. Ha az x-et a bal oldalra hozzuk a $\Gamma(x)$-hez, ebből $\Gamma(x+1)$ lesz; tehát

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right)}=$$

$$=Ae^{\alpha x}\Pi\left(1+\frac{xm}{k}\right)e^{-\frac{xm}{k}}.$$

Tegyük $x=0$, akkor

$$A=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)}=\frac{m^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}.$$

Ha pedig a 3) alatti egyenletben $x=\frac{1}{m}$ teszszük, akkor:

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)}=Ae^{\frac{\alpha}{m}}\frac{1}{m}\Pi\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-\frac{1}{k}}.$$

De minthogy

$$e^{C}\Pi\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-\frac{1}{k}}=\frac{1}{\Gamma(1)}=1,$$

tehát A értékének figyelembe vételével:

$$e^{\frac{a}{m}} = me^{C}$$

és így:

$$a = m\log m + mC,$$

tehát:

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} m^{mx} e^{Cmx} \frac{mx}{m} \Pi\left(1 + \frac{mx}{k}\right) e^{-\frac{mx}{k}}.$$

vagyis:

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{m^{mx-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \cdot \frac{1}{\Gamma(mx)}$$

és így:

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right) =$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{m^{mx-\frac{1}{2}}} \Gamma(mx)$$

és ezzel Gauss-nak tételét bebizonyítottuk.

2. E Gauss-féle tételben szerepel a $\Gamma(mx)$. Ennek asymptotikus kifejezését akarjuk a Gauss-féle formulából megállapitani. Ily módon a Stirling-féle nagyfontosságú formulának új, elég egyszerű levezetéséhez jutunk. E végből legelőször az

$$\int_x^{x+1} \log \Gamma(x)\, dx$$

integrálból indulok ki.

A 2) alattiból ugyanis

$$\sum_1^m{}_k \log\Gamma\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{m-1}{2}\log 2\pi - \tfrac{1}{2}\log m$$

és így:

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)\, dx = \lim_{m=\infty} \frac{1}{m}\Sigma \log\Gamma\left(\frac{k}{m}\right) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Ha

$$I = \int_x^{x+1} \log\Gamma(z)\, dz,$$

akkor

$$\frac{dI}{dx} = \log\Gamma(x+1) - \log\Gamma(x) = \log x,$$

tehát

$$I = x\log x - x + C',$$

a hol

$$C' = \int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\log 2\pi,$$

tehát *

$$\int_x^{x+1} \log\Gamma(z)\,dz = x\log x - x + \tfrac{1}{2}\log 2\pi. \tag{4}$$

3. A Gauss-féle formulát ebben az alakban írjuk:

$$\log\Gamma(x) + \log\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right) + \log\Gamma\left(x+\frac{2}{m}\right) + \cdots + \\ + \log\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right) = (-xm+\tfrac{1}{2})\log m + \\ + \frac{m-1}{2}\log 2\pi + \log\Gamma(xm). \tag{5}$$

A baloldalon álló összegre valós x esetében az Euler-Maclaurin összegformulát alkalmazzuk: **

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(z)\,dz + A_1[f(b)-f(a)] + A_2 h[f'(b)-f'(a)] + \cdots + \\ + A_{n-1}h^{n-2}[f^{(n-2)}(b)-f^{(n-2)}(a)]\int_0^h \varphi_n(z)\sum_{x=a}^b \frac{d^n f(x+h-z)}{h\,dx^n}\,dz,$$

a hol a jelen esetben:

$$f(x) = \log\Gamma(x), \quad h = \frac{1}{m}, \quad a = x, \quad b = x+1$$

az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ állandók közül $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_{2k+1} = 0$ és

$$A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!},$$

a hol B_k a k-ik Bernoulli-féle szám. A $\varphi_n(z)$ az n-ik Bernoulli-féle polynom.

---

* A mi levezetésünk Hermite-étől (L. Cours, p. 129) a $\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx$ egyszerű meghatározásában tér el.

** L. például Markoff Differenzenrechnung, p. 112.

A baloldalon álló összeget az 5) alatti formula szolgáltatja, a jobboldalon álló integrált pedig a 4) alatti képlet adja; a jobboldali további kifejezések rendre a következők:

$$f(b)-f(a)=\log \Gamma(x+1)-\log \Gamma(x)=\log x$$

$$f'(b)-f'(a)=\left[\log \Gamma(x+1)\right]'-\left[\log \Gamma(x)\right]'=\frac{1}{x}$$

. . . .

és általában:

$$f^{(k)}(b)-f^{(k)}(a)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}.$$

A maradéktag MARKOFF szerint (l. c. p. 121) a következő alakban írható:

$$\vartheta A_{2k} h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right],$$

$$0<\vartheta<1,$$

a mi esetünkben tehát e maradéktag:

$$\frac{\vartheta A_{2k}(2k-1)!}{(mx)^{2k-1}}.$$

E szerint tehát:

$$(-xm+\tfrac{1}{2})\log m+\frac{m-1}{2}\log 2\pi+\log \Gamma(xm)=$$

$$=(x\log x-x+\tfrac{1}{2}\log 2\pi)m+A_1\log x+$$

$$+\frac{A_2}{mx}+\frac{2A_4}{(mx)^3}+\cdots+\frac{\vartheta A_{2k}(2k-1)!}{(mx)^{2k-1}}.$$

Tekintetbe véve, hogy $A_1=-\frac{1}{2}$, ebből:

$$\log \Gamma(xm)=xm\log xm-\tfrac{1}{2}\log xm+\tfrac{1}{2}\log 2\pi-xm+$$

$$+\frac{A_2}{mx}+\cdots+\frac{\vartheta A_{2k}(2k-1)!}{(mx)^{2k-1}}.$$

Vagy $xm=z$ téve:

$$\log \Gamma(z)=z\log z-\tfrac{1}{2}\log z+\tfrac{1}{2}\log 2\pi-z+$$

$$+\frac{A_2}{z}+\cdots+\frac{\vartheta A_{2k}(2k-1)!}{z^{2k-1}},$$

miből:

$$\Gamma(z) = z^z e^{-z} \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\, e^{\frac{A_2}{z} + \frac{2A_4}{z^3} + \cdots}$$

vagy az első tagnál berekesztve a sort, $A_2 = \frac{1}{12}$ téve: *

$$\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{\theta}{12z}}.$$

Beke Manó.

* Megjegyezzük, hogy levezetésünk nem csak valós z esetében érvényes, mert az EULER-MACLAURIN-féle összegformula, a melyre támaszkodtunk, általánosabb érvényű. Ez összegformulára vonatkozó vizsgálatokból kitünik, hogy a Stirling-formula érvényes mindig, ha a z valós része negativ. [L. pl. Lindelöf Calcul des Residus p. 75.]

A GAUSS-FÉLE MEDIUM ARITHMETICO-GEOMETRICUM ALGORITHMUSÁNAK ÉS ÁLTALÁNOSÍTÁSÁNAK ELMÉLETE

A JACOBI-FÉLE THETA-FÜGGVÉNYEK ALAPJÁN.[1]

(Első közlemény.)

GAUSS, a mint ismeretes, ABEL-t és JACOBI-t több mint húsz évvel megelőzve, az elliptikus függvények elméletébe mélyen behatolt.[2]

Ide vonatkozó eredményeit azonban nem közölte, hanem csak töredékesen följegyezve hagyta hátra.[3]

Jellemző kiinduló pontjául a medium arithmetico-geometricum algorithmusa, illetőleg ennek egy általánositása tekinthető.[4] Ezekből jut el az elliptikus függvények alkotó elemeihez, a manapság JACOBI után elnevezett theta-függvényekhez, az «új transcendensekhez».[5]

A következőkben ennek a módszernek megfordítottját akarjuk megállapitani. Kiindulunk a theta-függvények elméletéből s ezen az alapon igyekszünk behatolni az említett algorithmusok elméletébe.

---

[1] Jelen dolgozat a kolozsvári Tudomány-Egyetem 1902/3. évi felsőbb mennyiségtani pályatétele folytán készült.

[2] Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER, II. Altona 1860. pag. 177—178. (1828, május 30.)

GAUSS, Werke III. Göttingen 1876. p. 492—496.

[3] U. o. p. 352. etc.

[4] U. o. p. 352, 361, 372, 448, 467—469, 477—478 és 387. A med. arith. geometric. algorithmusát már LAGRANGE ismerte: Mémoires de l'Académie royale de Turin, 1784—85. p. 237. vagy Oeuvres II. p. 252. etc.

[5] U. o. p. 494.

E föladatot különösen indokolja az, hogy GAUSS ide vonatkozó eredményeit többnyire bebizonyítás nélkül jegyezte föl s a bizonyításokat kiadójának, SCHERING-nek becses észrevételei és magyarázatai mellett is elveszetteknek tekinthetjük; és, hogy míg GAUSS pozitiv valós számokra szorítkozott, addig itt módunkban áll algorithmusunkat tetszőleges komplex számokra értelmezni.

I.

Értelmezzünk három, két irányban végtelen sorozatot a következő módon:

$$\begin{aligned} a_n &= \mu\vartheta_{00}^2(0;\, \omega_n), \\ b_n &= \mu\vartheta_{01}^2(0;\, \omega_n), \\ c_n &= \mu\vartheta_{10}^2(0;\, \omega_n), \end{aligned} \tag{1}$$

$$(n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

hol μ tetszőleges, zérustól különböző, arányossági tényező és

$$\omega_n = 2^n \omega_0.$$

ω_0-ban s így ω_n-ben is az i szorzóját lényegesen pozitivnak akarván venni azért, mivel

$$\frac{c_n}{a_n} = \varkappa_n, \quad \frac{b_n}{a_n} = \varkappa_n'$$

egy-egy modulus-láncz (LEGENDRE elnevezése) általános tagjai: e hányadosoknak a

$$0, \ \pm 1, \ \infty$$

-től különböző értékeire kell szorítkoznunk.

Tehát az ismeretes theta-relánczió szerint lévén

$$a_n^2 = b_n^2 + c_n^2, \tag{2}$$

azért az említett singuláris értékek elkerüléséhez szükséges és elegendő, hogy legyen

$$a_n \neq 0, \qquad b_n \neq 0, \qquad a_n \neq \pm b_n, \tag{3}$$

ekkor azután még

$$c_n \neq 0, \qquad b_n \neq \pm i c_n, \qquad c_n \neq \pm a_n.$$

Mindezek így foglalhatók egybe

$$a_n b_n c_n \neq 0.$$

Rövidség kedveért a theta-függvényekben az argumentum zérus voltát ne jelezzük és legyen szokás szerint

$$e^{\pi i \omega_n} = q_n.$$

Tehát, mint e végtelen sorokból

$$\begin{aligned}
\vartheta_{00}(\omega_n) &= 1 + 2q_n + 2q_n^4 + 2q_n^9 + \cdots, \\
\vartheta_{01}(\omega_n) &= 1 - 2q_n + 2q_n^4 - 2q_n^9 + \cdots, \\
\vartheta_{10}(\omega_n) &= \phantom{1 +{}} 2q_n^{\frac{1}{4}} + 2q_n^{\frac{9}{4}} + 2q_n^{\frac{25}{4}} + \cdots
\end{aligned}$$

azonnal látszik, ha n pozitive végtelenbe nő

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = \mu, \\
&\lim_{n=\infty} c_n = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

mivel ekkor, ω_n lényegesen pozitiv képzetes része következtében

$$\lim_{n=\infty} q_n = 0.$$

A másodrendű transzformáczió szerint *

$$\begin{aligned}
2\vartheta_{00}^2(\omega_{n+1}) &= \vartheta_{00}^2(\omega_n) + \vartheta_{01}^2(\omega_n), \\
\vartheta_{01}^2(\omega_{n+1}) &= \vartheta_{00}(\omega_n)\,\vartheta_{01}(\omega_n), \\
\vartheta_{00}^2(\omega_n) &= \vartheta_{00}^2(\omega_{n+1}) + \vartheta_{10}^2(\omega_{n+1}), \\
\vartheta_{01}^2(\omega_n) &= \vartheta_{00}^2(\omega_{n+1}) - \vartheta_{10}^2(\omega_{n+1}), \\
\vartheta_{10}^2(\omega_n) &= 2\vartheta_{00}(\omega_{n+1})\,\vartheta_{10}(\omega_{n+1}).
\end{aligned}$$

---

* H. Weber, Elliptische Functionen etc. Braunschweig 1891, p. 79—80, $u=0$ téve.

Ha tehát az (1)-ből $\sqrt{a_n}$, $\sqrt{b_n}$, $\sqrt{c_n}$ amaz értékeit választjuk, a melyekre nézve

$$\sqrt{a_n} : \sqrt{b_n} : \sqrt{c_n} = \vartheta_{00}(\omega_n) : \vartheta_{01}(\omega_n) : \vartheta_{10}(\omega_n),$$

a mi kétféleképp lehetséges, akkor

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \tfrac{1}{2}(a_n + b_n), \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n}\ \sqrt{b_n}; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+1} + c_{n+1}, \\ b_n &= a_{n+1} - c_{n+1}, \\ c_n &= 2\sqrt{a_{n+1}}\ \sqrt{c_{n+1}}. \end{aligned} \tag{7}$$

A (6) alatti egyenletek értelmezik a GAUSS-féle medium arithmetico-geometricum algorithmusát.* A (4) szerint ez algorithmussal az (1) első két sorozatának bármely két megfelelő (egyenlő indexű) tagjából indulva ki, ugyanazon μ számhoz közeledünk s a határban e μ-t el is érjük. Ezt GAUSS-sal így jelöljük

$$M(a_n ; b_n) = \mu.$$

Ha ν tetszőleges egész szám és ρ tetszőleges a zérustól különböző szorzó, akkor ezek után az (1)-ből közvetetlenül írhatjuk, hogy**

$$M(a_{n+\nu} ; b_{n+\nu}) = M(a_n ; b_n), \tag{8}$$

$$M(\rho a_n ; \rho b_n) = \rho M(a_n ; b_n). \tag{9}$$

Fölmerül az a különösen — arithmetikai szempontból — fontos kérdés, hogy algorithmusunk két tetszőleges «kezdő» tagja pl. a_0 és b_0 a (3) alatti korlátozásoktól eltekintve, tetszőleges számok lehetnek-e? Erre könnyű megfelelni.

---

* Megkülönböztetésül egy hasonló, de elemibb természetű algorithmustól: KŐNIG GY., Analizis I. Budapest 1887. p. 114. BEKE M., Math. és Phys. Lapok 1902. p. 310.

** GAUSS. Werke III. Göttingen 1876. p. 363, 365.

$\frac{b_0^2}{a_0^2} = \varkappa_0'^2$-nak a $0, +1, \infty$ értékektől különböző, tetszőleges értékéhez tartozik megfelelő lényegesen pozitiv együtthatóját képzetes részű ω_0.* Tehát a

$$0, \quad \pm 1, \quad \infty$$

értékeket kizárva

$$\frac{b_0}{a_0}$$

vagy a tetszőlegesen előírt λ, vagy a $-\lambda$ értéket veheti föl, vagy mindkettőt. Tehát a μ arányossági tényező kellő választásával vagy az

$$a_0 \quad \text{és} \quad b_0,$$

vagy az

$$a_0 \quad \text{és} \quad -b_0$$

számpár, vagy mindkettő előállítható az (1) alatti módon. Látni fogjuk azonban (III.), hogy ha $M(a_0; b_0)$ létezik, akkor $M(a_0; -b_0)$ is létezik és viszont. Tehát a_0 és b_0 — hacsak a (3) föltételeket kielégítik — valóban tetszőlegesek lehetnek.

Ha a (3) *egy* bizonyos n, pl. $n=0$ mellett teljesül, akkor a (6) és (7) alapján könnyen kimutatható, hogy *minden* (véges) n mellett teljesül.

A theta-függvények fölirt sorainak négyzetéből kitünik, hogy a_0 és b_0 ω_0-t csak hozzája additive járuló tetszőleges páros számtól, míg a_0, b_0 és c_0 tetszőleges négygyel osztható számtól eltekintve határozzák meg. Úgy hogy a_0 és b_0 megadásával egyáltalában nincs módunkban

$$c_0 = \sqrt{a_0^2 - b_0^2}$$

teljes meghatározása, mivel ω_0-nak négygyel nem osztható páros számmal való szaporodásakor c_0 jegyet változtat, míg a_0 és b_0 változatlanok maradnak.

*

* H. Weber, Elliptische Functionen etc. Braunschweig 1891. p. 142.

Tegyünk nehány észrevételt.

Az (1)-ből*

$$M\big(\vartheta_{00}^2(\omega_n);\ \vartheta_{01}^2(\omega_n)\big) = 1.$$

Ha n pozitive végtelenbe nő, a (9)-et alkalmazva

$$M(\rho;\rho) = \rho.$$

Legyen pld. $|a_0| \geqq |b_0|$, akkor a (6)-ból

$$|a_1| \leqq |a_0|; \quad |a_2| \leqq |a_0|; \ldots$$

$$|b_1| \leqq |a_0|; \quad |b_2| \leqq |a_0|; \ldots$$

azaz

$$|M(a_0;\ b_0)| \leqq |a_0|, \qquad |a_0| \geqq |b_0|.$$

A (6)-ból

$$|a_{n+1}| \leqq \frac{|a_n| + |b_n|}{2}; \quad |b_{n+1}| = |\sqrt{a_n}|\ |\sqrt{b_n}|$$

$$|a_{n+2}| \leqq \frac{|a_{n+1}| + b_{n+1}|}{2} \leqq \text{stb.}; \quad |b_{n+2}| = |\sqrt{a_{n+1}}|\ |\sqrt{b_{n+1}}| \leqq$$

stb. és így tovább.

Tehát fölírhatjuk limesével együtt a következő monoton sorozatot:

$$M(|a_n|;\ |b_n|) \geqq M(|a_{n+1}|;\ |b_{n+1}|) \geqq \cdots \geqq \text{in inf.}$$
$$= |M(a_n;\ b_n)|.$$

Külön kiemeljük ebből, hogy

$$M(|a_n|;\ |b_n|) \geqq |M(a_n;\ b_n)|.$$

Ha

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n'}{b_n'} = \frac{a_n''}{b_n''} = \cdots,$$

azaz

$$a_n = \frac{1}{\lambda'}\,a_n' = \frac{1}{\lambda''}\,a_n'' = \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\lambda'}\,b_n' = \frac{1}{\lambda''}\,b_n'' = \cdots,$$

akkor

---

* Gauss, Werke III. Göttingen 1876. p. 467.

$$M(a_n;\, b_n) + M(a_n';\, b_n') + M(a_n'';\, b_n'') + \cdots$$
$$= M(a_n + a_n' + a_n'' + \cdots;\; b_n + b_n' + b_n'' + \cdots),$$

a bal oldal t. i. így írható

$$(1 + \lambda' + \lambda'' + \cdots)\, M(a_n;\, b_n).$$

Mivel tehát

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{-a_n}{-b_n},$$

azért

$$M(a_n;\, b_n) + M(-a_n;\, -b_n) = M(0;\, 0)$$
$$= M(a_n;\, b_n) - M(a_n;\, b_n) = 0.$$

A (3) alatti kivételes eseteknek ily módon történő és történendő elintézése után is természetesen föntartjuk a (3)-at.

*

Legyen *

$$2^n a_n = \bar{a}_{-n},\quad 2^n b_n = \bar{b}_{-n},\quad 2^n c_n = \bar{c}_{-n}.$$

A (6) és (7) ekkor, czélszerűen rendezve s n helyett $-n-1$ írva

$$\bar{a}_{n+1} = \tfrac{1}{2}(\bar{a}_n + \bar{c}_n),$$
$$\bar{c}_{n+1} = \sqrt{\bar{a}_n}\,\sqrt{\bar{c}_n};$$

$$\bar{a}_n = \bar{a}_{n+1} + \bar{b}_{n+1},$$
$$\bar{c}_n = \bar{a}_{n+1} - \bar{b}_{n+1},$$
$$\bar{b}_n = 2\sqrt{\bar{a}_{n+1}}\,\sqrt{\bar{b}_{n+1}}.$$

Hol az utolsó előtti két egyenlet ezen közvetetlenül adódó összege illetőleg külömbsége

$$\bar{a}_{n+1} = \tfrac{1}{2}(\bar{a}_n + \bar{c}_n),\qquad \bar{b}_{n+1} = \tfrac{1}{2}(\bar{a}_n - \bar{c}_n).$$

A (2)-ből pedig

$$\bar{a}_n^2 = \bar{c}_n^2 + \bar{b}_n^2.$$

---

* Gauss, Werke III. Göttingen 1876. p.

Tehát mellék-reláczióival együtt épen azt az algorithmust nyertük

$$\bar{a}_n \quad \text{és} \quad \bar{c}_n$$

számára, mint a melyet értelmeztünk

$$a_n \quad \text{és} \quad b_n$$

részére. Vagyis összes a_n és b_n-re nyerhető eredményeink közvetetlenül átvihetők $\bar{a}_n$ és $\bar{c}_n$-ra s így a_n és c_n-re.

Például a (8) szerint

$$M(a_{-n-\nu};\ b_{-n-\nu}) = M(a_{-n};\ b_{-n}),$$

tehát

$$M(\bar{a}_{-n-\nu};\ \bar{c}_{-n-\nu}) = M(\bar{a}_{-n};\ \bar{c}_{-n}),$$

vagyis [1]

$$2^{\nu} M(a_{n+\nu};\ c_{n+\nu}) = M(a_n;\ c_n). \tag{10}$$

E tételnek később más, mélyebbre vágó bizonyítását fogjuk látni.

Ugyanezen a módon kiegészíthetjük a (4)-et:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} a_{-n} = \lim_{n=\infty} c_{-n} = \infty, \\ &\lim_{n=\infty} b_{-n} = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_{-n}}{c_{-n}} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

*

A (6) és (7) $M(a_n;\ b_n)$ s így egyúttal $M(a_n;\ c_n)$-re is igen könnyen számos sorfejtést szolgáltat. GAUSS-nál[2] 12 ilyen sor van följegyezve. SCHLESINGER egy értekezésében[3] ezek közül, többre nem lévén szüksége, 8-at származtat. Teljesség kedvéért itt valamennyit előállítjuk.

---

[1] GAUSS, Werke III. Göttingen 1876. p. 376.

[2] U. o. p. 376—377.

[3] Über die GAUSS'sche Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und ihre Beziehungen zur Theorie der elliptischen Modulfunction. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1898, p. 346.

Az

$$a_m = a_{m+1} + c_{m+1},$$
$$a_{m+1} = a_{m+2} + c_{m+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

relácziók összeadásából

$$M(a_n;\, b_n) = a_m - c_{m+1} - c_{m+2} - \cdots,$$
$$M(a_n;\, b_n) = b_m + c_{m+1} - c_{m+2} - \cdots.$$

Ezekbe $\bar{a}_n$ stb. bevezetve

$$2^{-n}M(a_{-n};\, c_{-n}) = 2^{-m}a_{-m} - 2^{-m-1}b_{-m-1} - 2^{-m-2}b_{-m-2} - \cdots,$$
$$2^{-n}M(a_{-n};\, c_{-n}) = 2^{-m}c_{-m} + 2^{-m-1}b_{-m-1} - 2^{-m-2}b_{-m-2} - \cdots.$$

A (6) és (7)-ből az (5) alatti értelemben

$$\sqrt{a_{n+2}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n});\quad \sqrt{c_{n+2}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}).$$

Mivel ezekből

$$\sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{a_n} = -\sqrt{c_{n+2}};\quad \sqrt{b_n} + 2\sqrt{c_{n+2}} = \sqrt{a_n},$$

azért, n helyett ismét m írva

$$\sqrt{M(a_n;\, b_n)} = \sqrt{a_m} - \sqrt{c_{m+2}} - \sqrt{c_{m+4}} - \cdots,$$
$$\sqrt{M(a_n;\, b_n)} = \sqrt{b_m} + \sqrt{c_{m+2}} - \sqrt{c_{m+4}} - \cdots.$$

Ezekből, mint előbb

$$\sqrt{2^{-n}M(a_{-n};\, c_n)}$$
$$= \sqrt{2^{-m}a_{-m}} - \sqrt{2^{-m-2}b_{-m-2}} - \sqrt{2^{-m-4}b_{-m-4}} - \cdots,$$
$$\sqrt{2^{-n}M(a_{-n};\, c_n)}$$
$$= \sqrt{2^{-m}c_{-m}} + \sqrt{2^{-m-2}b_{-m-2}} - \sqrt{2^{-m-4}b_{-m-4}} - \cdots.$$

Végre az

$$a_m^2 = a_{m+1}^2 + 2a_{m+1}c_{m+1} + c_{m+1}^2,$$
$$a_{m+1}^2 = a_{m+2}^2 + 2a_{m+2}c_{m+2} + c_{m+2}^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

relácziók összeadásából és 2-vel való szorzással

$$2M(a_n\,;\,b_n)^2$$
$$=2a_m^2-c_{m+1}(4a_{m+1}+2c_{m+1})-c_{m+2}(4a_{m+2}+2c_{m+2})-\cdots.$$

A (7) utolsó egyenletét fölhasználva

$$2M(a_n\,;\,b_n)^2=2a_m^2-c_m^2-3c_{m+1}^2-3c_{m+2}^2-\cdots.$$

Tehát

$$M(a_n\,;\,b_n)^2=a_m^2-\tfrac{1}{2}c_m^2-\tfrac{3}{2}c_{m+1}^2-\tfrac{3}{2}c_{m+2}^2-\cdots,$$

$$M(a_n\,;\,b_n)^2=b_m^2+\tfrac{1}{2}c_m^2-\tfrac{3}{2}c_{m+1}^2-\tfrac{3}{2}c_{m+2}^2-\cdots;$$

$$2^{-2n}M(a_{-n}\,;\,c_{-n})^2=2^{-2m}a_{-m}^2-2^{-2m-1}b_{-m}^2-3\,.\,2^{-2m-3}b_{-m-1}^2-\cdots,$$

$$2^{-2n}M(a_{-n}\,;\,c_{-n})^2=2^{-2m}c_{-m}^2+2^{-2m-1}b_{-m}^2-3\,.\,2^{-2m-3}b_{-m-1}^2-\cdots.$$

Tekintve e sorok származását és a (4) második egyenletét: ismert tétel szerint valamennyien összetartók.

II.

Czélszerűnek látszik egy, a következőkben többször alkalmazandó eljárást itt a maga általánosságában vázolni.

Az I. (1) szerint

$$a_n : b_n : c_n = \vartheta_{00}^2(\omega_n) : \vartheta_{01}^2(\omega_n) : \vartheta_{10}^2(\omega_n).$$

Gondoljuk, hogy ω_n-et transzformáljuk (e szó legáltalánosabb értelmében) egy szintén lényegesen pozitiv képzetes részü

$$2^n\tilde{\omega}_0=\tilde{\omega}_n$$

-be és hogy

$$\rho_n a_n : \rho' b_n : \rho_n'' c_n = \vartheta_{g_1 g_2}^2(\tilde{\omega}_n) : \vartheta_{g_1' g_2'}^2(\tilde{\omega}_n) : \vartheta_{g_1'' g_2''}^2(\tilde{\omega}_n),$$

hol a

$$(g_1\,,\,g_2)\,; \qquad (g_1'\,,\,g_2')\,; \qquad (g_1''\,,\,g_2'')$$

karakterisztika párok bizonyos sorrendben azonosak a

$$(0,\,0)\,; \qquad (0,\,1) \qquad (1,\,0)$$

karakterisztika párokkal és

$$\rho_n; \quad \rho'_n; \quad \rho''_n$$

általában az n és ω_0 függvényei.

Föltéve, hogy ezek egyértékű függvények, van oly egyetlen

$$\tilde{\mu}_n,$$

mely általában n függvénye, mikép

$$\rho_n a_n = \tilde{\mu}_n \vartheta^2_{g_1 g_2}(\tilde{\omega}_n),$$

$$\rho'_n b_n = \tilde{\mu}_n \vartheta^2_{g'_1 g'_2}(\tilde{\omega}_n),$$

$$\rho''_n c_n = \tilde{\mu}_n \vartheta^2_{g''_1 g''_2}(\tilde{\omega}_n).$$

Vagyis $\tilde{\mu}_n$ a baloldalok valamelyik kettőjének medium arithmetico-geometricuma.

Ismerve mármost az eredeti és a transzformált theta-függvények összefüggését: μ és $\tilde{\mu}_n$ közt kapunk összefüggést.

III.

A II.-ben ismertetett eljárást fogjuk alkalmazni ω_n lineár transzformáczióinál.

A lineár alap-transzformácziók ide vonatkozó képletei.*

$$\vartheta^2_{00}\left(\frac{-1}{\omega_n}\right) = -i\omega_n \vartheta^2_{00}(\omega_n),$$

$$\vartheta^2_{01}\left(\frac{-1}{\omega_n}\right) = -i\omega_n \vartheta^2_{10}(\omega_n), \qquad (A)$$

$$\vartheta^2_{10}\left(\frac{-1}{\omega_n}\right) = -i\omega_n \vartheta^2_{01}(\omega_n);$$

$$\vartheta^2_{00}(\omega_n+1) = \vartheta^2_{01}(\omega_n),$$

$$\vartheta^2_{01}(\omega_n+1) = \vartheta^2_{00}(\omega_n), \qquad (B)$$

$$\vartheta^2_{10}(\omega_n+1) = i\vartheta^2_{10}(\omega_n).$$

* H. WEBER, Elliptische Functionen etc. Braunschweig 1891. p. 77—78. $u=0$ téve.

Az

$$a_n : b_n : c_n = \vartheta_{00}^2(\omega_n) : \vartheta_{01}^2(\omega_n) : \vartheta_{10}^2(\omega_n)$$

aránylatból

$$
\begin{aligned}
b_n : a_n : ic_n &= \vartheta_{00}^2(\omega_n+1) : \vartheta_{01}^2(\omega_n+1) : \vartheta_{10}^2(\omega_n+1), && (B).\\
a_n : c_n : b_n &= \vartheta_{00}^2\left(\frac{-1}{\omega_n}\right) : \vartheta_{01}^2\left(\frac{-1}{\omega_n}\right) : \vartheta_{10}^2\left(\frac{-1}{\omega_n}\right), && (A).\\
a_n : -b_n : c_n &= \vartheta_{00}^2\left(\frac{\omega_n}{1-2\omega_n}\right) : \vartheta_{01}^2\left(\frac{\omega_n}{1-2\omega_n}\right) : \vartheta_{10}^2\left(\frac{\omega_n}{1-2\omega_n}\right), && (A), (B), (B), (A).\\
a_n : -c_n : b_n &= \vartheta_{00}^2\left(\frac{-1}{\omega_n+2}\right) : \vartheta_{01}^2\left(\frac{-1}{\omega_n+2}\right) : \vartheta_{10}^2\left(\frac{-1}{\omega_n+2}\right), && (B), (B), (A).\\
b_n : ic_n : a_n &= \vartheta_{00}^2\left(\frac{-1}{\omega_n+1}\right) : \vartheta_{01}^2\left(\frac{-1}{\omega_n+1}\right) : \vartheta_{10}^2\left(\frac{-1}{\omega_n+1}\right), && (B), (A).\\
c_n : ib_n : a_n &= \vartheta_{00}^2\left(\frac{\omega_n}{-\omega_n+1}\right) : \vartheta_{01}^2\left(\frac{\omega_n}{-\omega_n+1}\right) : \vartheta_{10}^2\left(\frac{\omega_n}{-\omega_n+1}\right). && (A), (B), (A).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Hol jobbfelől jelezve vannak megfelelő sorrendben az alkalmazott transzformácziók.

Az (1)-ből az alkalmazott transzformáczióknak fordított módon és sorrendben való alkalmazásával például

$$
\begin{aligned}
a_n &= M(b_n;\, a_n)\,\vartheta_{01}^2(\omega_n+1) = M(b_n;\, a_n)\,\vartheta_{00}^2(\omega_n),\\
a_n &= M(a_n;\, c_n)\,\vartheta_{00}^2\left(\frac{-1}{\omega_n}\right) = -i\omega_n M(a_n;\, c_n)\,\vartheta_{00}^2(\omega_n),^{\star}\\
a_n &= M(a_n;\, -b_n)\,\vartheta_{00}^2\left(\frac{\omega_n}{1-2\omega_n}\right) = (2\omega_n-1)\,M(a_n;\, -b_n)\,\vartheta_{00}^2(\omega_n),\\
a_n &= M(a_n;\, -c_n)\,\vartheta_{00}^2\left(\frac{-1}{\omega_n+2}\right) = -i\,(\omega_n+2)\,M(a_n;\, -c_n)\,\vartheta_{00}^2(\omega_n),\\
b_n &= M(b_n;\, ic_n)\quad \vartheta_{00}^2\left(\frac{-1}{\omega_n+1}\right) = -i\,(\omega_n+1)\,M(b_n;\, ic_n)\,\vartheta_{01}^2(\omega_n),\\
c_n &= M(c_n;\, ib_n)\quad \vartheta_{00}^2\left(\frac{\omega_n}{1-\omega_n}\right) = (1-\omega_n)\,M(c_n;\, ib_n)\,\vartheta_{10}^2(\omega_n).
\end{aligned}
$$

---

* Gauss, Werke III. Göttingen 1876. p. 383, 385.

Ezeket az I. (1) megfelelő egyenleteivel összehasonlítván, kapjuk

$$\begin{aligned} M(a_n\,;\,b_n) &= M(b_n\,;\,a_n), \\ M(a_n\,;\,b_n) &= -i\omega_n M(a_n\,;\,c_n), \\ M(a_n\,;\,b_n) &= (-2\omega_n+1)\,M(a_n\,;\,-b_n), \\ M(a_n\,;\,b_n) &= -i(\omega_n+2)\,M(a_n\,;\,-c_n), \\ M(a_n\,;\,b_n) &= -i(\omega_n+1)\,M(b_n\,;\,ic_n), \\ M(a_n\,;\,b_n) &= (1-\omega_n)\,M(c_n\,;\,ib_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Az első egyenlet már az I. (6)-ból következik.

Tisztán arithmetikai jellegű relácziókat nyerhetünk a (2)-ből ω_n kiküszöbölésével. Ekkor azonban tekintetbe veendő, hogy, mint már I-ben láttuk, a_n, b_n és c_n által ω_n csak egy hozzá additive járuló négygyel osztható tetszőleges számtól, míg a_n és b_n által tetszőleges páros számtól eltekintve van meghatározva.

Épen ezért a (2)-ből ω_n értékei további következtetésekre alkalmas módon így irandók:

$$\begin{aligned} \omega_n &= i\frac{M(a_n\,;\,b_n)}{M(a_n\,;\,c_n)} + 4s_1, \\ \omega_n &= \frac{M(a_n\,;\,-b_n) - M(a_n\,;\,b_n)}{2M(a\,;\,-b_n)} + 4s_2, \\ \omega_n &= \frac{iM(a_n\,;\,b_n) - 2M(a_n\,;\,-c_n)}{M(a_n\,;\,-c_n)} + 4s_3, \\ \omega_n &= \frac{iM(a_n\,;\,b_n) - M(b_n\,;\,ic_n)}{M(b_n\,;\,ic_n)} + 4s_4, \\ \omega_n &= \frac{-M(a_n\,;\,b_n) + M(c_n\,;\,ib_n)}{M(c_n\,;\,ib_n)} + 4s_5. \end{aligned} \tag{2a}$$

Följegyezzük a (2) második és harmadik egyenletéből nyerhető alakot is

$$\omega_n = \frac{2M(a_n\,;\,-c_n)}{M(a_n\,;\,c_n) - M(a_n\,;\,-c_n)} + 4s_6.$$

s_6 bevezetése nem szükséges, ha a (2a) második és harmadik egyenletéből küszöböljük ki $M(a_n\,;\,b_n)$-et.

Az $s_1, \ldots, s_6$ tehát egész számok. Egyiküknek tetszőleges egész értck adható. Ez által, tekintve az M egyértékű voltát, ω_n s így a többi is teljesen határozott lesz.

A $(2a)$ második egyenletében $4s_2$ helyett $2s_2$ írható, mivel benne c_n nem szerepel; de ekkor mindenütt c_n helyett $(-1)^{s_2} c^n$ lép.

Legyen $s_1=0$, ekkor

$$\omega_0 = \frac{iM(a_n\,;\,b_n)}{2^n M(a_n\,;\,c_n)}.$$

Tehát a tört alsó az n-től független s így ha ν tetszőleges egész szám

$$2^\nu M(a_{n+\nu}\,;\,c_{n+\nu}) = M(a_n\,;\,c_n), \tag{3}$$

mint azt más úton már az I-ben találtuk.

Rendre a többi s-et is zérusnak véve, hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2^\nu}\left[1-\frac{M(a_{n+\nu}\,;\,b_{n+\nu})}{M(a_{n+\nu}\,;\,-b_{n+\nu})}\right] = 1-\frac{M(a_n\,;\,b_n)}{M(a_n\,;\,-b_n)}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2^\nu}\left[2-\frac{iM(a_{n+\nu}\,;\,b_{n+\nu})}{M(a_{n+\nu}\,;\,-c_{n+\nu})}\right] = 2-\frac{iM(a_n\,;\,b_n)}{M(a_n\,;\,-c_n)}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2^\nu}\left[1-\frac{iM(a_{n+\nu}\,;\,b_{n+\nu})}{M(b_{n+\nu}\,;\,ic_{n+\nu})}\right] = 1-\frac{iM(a_n\,;\,b_n)}{M(b_n\,;\,ic_n)}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{2^\nu}\left[1-\frac{M(a_{n+\nu}\,;\,b_{n+\nu})}{M(c_{n+\nu}\,;\,ib_{n+\nu})}\right] = 1-\frac{M(a_n\,;\,b_n)}{M(c_n\,;\,ib)}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2^\nu}\left[2-\frac{2M(a_{n+\nu}\,;\,-c_{n+\nu})}{M(a_{n+\nu}\,;\,c_{n+\nu})}\right] = 2-\frac{2M(a_n;\,-c_n)}{M(a_n\,;\,c_n)}. \tag{8}$$

P. Dávid Lajos.

AZ OSTWALD-FÉLE MECHANIKAI ELVRŐL.

Bevezetés.

OSTWALD «Lehrbuch der allgemeinen Chemie»* czímű munkájában szószerint a következő, általános energetikai elvet állította fel:

«*Von allen möglichen Energieumwandlungen wird diejenige eintreten, welche in gegebener Zeit den grösstmöglichen Umsatz ergiebt.*»

A tiszta mechanika keretén belül maradva, bármiként fogjuk is fel a mathematikai tárgyalás szempontjából ezt az elvet, mindenesetre tisztáznunk kell a következő két kérdést:

a) Létezik-e egyáltalában olyan mozgás, mely az adott feltételeknek eleget tesz, és a mely minden, az összehasonlításra megengedett mozgással szemben az OSTWALD-féle módon ki van tüntetve?

b) Ha létezik ilyen mozgás, megegyezik-e ez a mozgás az ugyanazon feltételek mellett a NEWTON LAGRANGE-féle differencziálegyenletekből adódó mozgással vagy nem?

A válasz, melyet e kérdésekre kapunk természetesen lényegesen függ attól, hogy miképen fogjuk fel az OSTWALD-féle elvet. Egy határozott felfogása az elvnek egy határozott mathematikai tárgyalásban nyer kifejezést.** Ilyen felfogást kép-

* 1902, I. kötet, 36, 37. oldal.

** Nézetünk szerint az OSTWALD-féle elvnek a szövegben közölt fogalmazása tiszta mechanikai jelenségek esetében egész határozott mathematikai tárgyalást von maga után, azt a tárgyalási módot épen, melyet ezen dolgozatban közlünk. Ugyanis tiszta mechanikai jelenség esetében minden, a fentidézett OSTWALD-féle fogalmazásban fellépő fogalomnak, visel a C. NEUMANN-féle,* az egyetlen, melyet ezen bevezető sorokban részletesen megbeszélünk, mert olyannak tartjuk, mely az irodalomban fellépő felfogások között a legközelebb áll a, nézetünk szerint az OSTWALD-féle elv eredeti fogalmazásában már benne rejlő, dolgozatunkban részletesen kifejtendő mathematikai felfogáshoz.

A NEUMANN-féle tárgyalási mód — egységnyi tömegű tömegpont $U(x, y)$ potencziálú szabad mozgására szorítkozva — lényegben a következőben áll:

Legyenek x_0, y_0 a $t=0$ időpontnak megfelelő kezdőhelyzet derékszögű koordinátái, és u_0, v_0 a szintén megadott kezdősebesség komponensei. Legyenek $\tau (\tau > 0)$ idő mulva x, y a tömegpont koordinátái és u, v sebességének komponensei. Ezen ismeretlen végsebességre nézve először is áll a postulált

$$x'^2 + y'^2 = 2\left(U(x, y) + h\right)$$

elevenerő-egyenlet, azaz

$$u^2 + v^2 = 2\left(U(x, y) + h\right),$$

hol h az elevenerő-állandó, melyet az

$$u_0^2 + v_0^2 = 2\left(U(x_0, y_0) + h\right)$$

egyenlet határoz meg.

A h kiküszöbölése által az

$$u^2 + v^2 - (u_0^2 + v_0^2) = 2\left(U(x, y) - U(x_0, y_0)\right)$$

egyenlethez jutunk, melyben az $U(x, y)$ potencziált az (x_0, y_0) hely környezetében linearizálva, az

---

követelésnek meg van a maga határozott, konvenczionális mathematikai equivalense, a mely körülmény az elvet egy határozott mathematikai állítás fokára emeli. Mindazonáltal *az elv könnyű modifikáczióját nagyon is jogosultnak, sőt kivánatosnak tartjuk*, épen azért, mert kiderül — ezt kimutatni dolgozatunk egyik főczélja — hogy a «szószerint vett OSTWALD-féle elv» csak kivételesen vezet mozgásra.

* 1892, Sächsische Berichte, 44. kötet.

$$u^2+v^2-(u_0^2+v_0^2)=2\left[\frac{\partial U}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial U}{\partial y}(y-y_0)\right]$$

egyenlethez jutunk; itt a $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ differencziálhányadosok az (x_0, y_0) helyen veendők. Ha még az

$$x-x_0=\frac{u+u_0}{2}\tau,\quad y-y_0=\frac{v+v_0}{2}\tau$$

közelítő értékeket használjuk, akkor a keresett u, v végsebességekre vonatkozólag az

$$u^2+v^2-\tau\frac{\partial U}{\partial x}u-\tau\frac{\partial U}{\partial y}v=u_0^2+v_0^2+\tau\frac{\partial U}{\partial x}u_0+\tau\frac{\partial U}{\partial y}v_0 \qquad (\alpha)$$

u, v-ben négyzetes relacziót kapjuk. Feladatunk most már egyelőre meghatározni azon u, v értékpárt, mely az (α) egyenletnek tesz eleget, és a melyre vonatkozólag az

$$\frac{u^2+v^2}{2}-\frac{u_0^2+v_0^2}{2}$$

energiaforgalom értéke maximum.

Ábrázoljuk a viszonyokat geometriailag az u, v független változók síkjában. Az (α) relacziónak itt egy kör felel meg, melynek C_τ-val jelölendő középpontjának* koordinátái

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\tau}{2}\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Sugarát jelöljük R_τ-val. Feladatunk – minthogy $\sqrt{u^2+v^2}$ jelenti az (u, v) pontnak a koordinátarendszer kezdőpontjától való távolságát — most már abban áll: határozzuk meg a C_τ középpontú és R_τ sugarú kör azon M_τ pontját, mely a koordinátarendszer O kezdőpontjától a lehető legnagyobb távolságban van. Világos, hogy a keresett M_τ pontot azon félsugárnak a

---

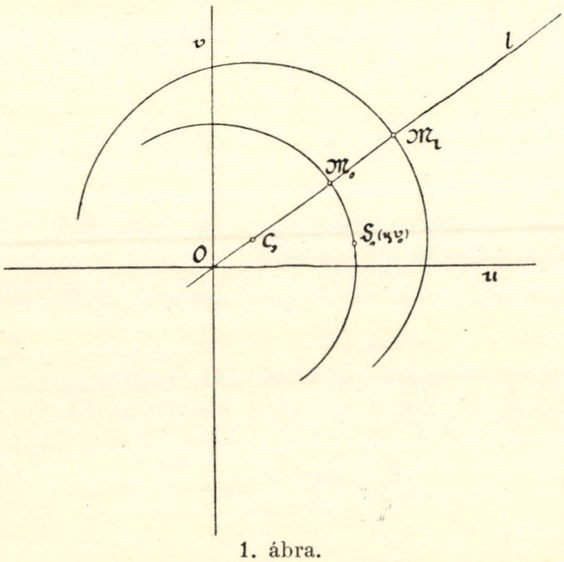
* Ez csak akkor esik össze a koordinátarendszer kezdőpontjával, ha az (x_0, y_0) kezdőhelyzet, egyensúlyi helyzet. Ez nyilván kivételes eset.

körrel való metszéspontja szolgáltatja, mely az O pontot a C_τ ponttal köti össze. Ezen M_τ pont u, v koordinátái — melyeket ezentúl jellemzőbben u_τ, v_τ-val jelölünk — lesznek a keresett u, v értékek.

A tulajdonképeni feladat megoldását most már a NEUMANN-féle módon úgy kell befejeznünk, hogy a nyert u_τ, v_τ értékekkel a

$$\lim_{\tau=0} \frac{u_\tau - u_0}{\tau}, \quad \lim_{\tau=0} \frac{v_\tau - v_0}{\tau} \qquad (\beta)$$

határértékeket képezzük, melyek, ha léteznek, megadják a kezdőgyorsulást a kezdőhelyzet és kezdősebesség függvényeként.



1. ábra.

Ámde *a* (β) *alatti határértékek, ha az* u_0, v_0 *komponensek közül csak egyik is zérustól különböző, általában nem is léteznek.* E végből elég kimutatnunk, hogy az u_τ, v_τ értékpár a lim. $\tau=0$ határátmenetnél *nem* is *konvergál* az u_0, v_0 értékpárhoz, vagy a mi ugyanaz, *hogy az* M_τ *pont a* lim. $\tau=0$ *határátmenetnél nem konvergál az* $u_0 v_0$ *koordinátájú* S_0 *ponthoz.*

Nézzük tehát, mely ponthoz konvergál M_τ a lim. $\tau=0$ határátmenetnél?

A C_τ középpont a szóban forgó határátmenetnél az O kezdőponthoz konvergál és pedig *egy határozott, a τ-tól egészen független l félsugár mentén,* a melyet pl. úgy szerkeszthetünk, hogy a $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ koordinátájú ponttal összekapcsoljuk az O kezdőpontot (l. 1. ábrát).

A kör R_τ sugara pedig $\sqrt{u_0^2+v_0^2}$-hoz konvergál. Ebből rögtön következik, hogy az M_τ pont azon M_0 ponthoz konvergál, melyben az említett «l» félegyenes az O középpontú és $\sqrt{u_0^2+v_0^2}$ sugarú kört, vagyis az O középpontú és S_0 ponton áthaladó kört metszi. Minthogy pedig általában ezen M_0 pont az S_0 ponttól különböző (ugyanis az l félegyenest az $U_x(x_0, y_0)$, $U_y(x_0, y_0)$ értékek, az S_0 pontot pedig az ezen értékpártól teljesen függetlenül megadható u_0, v_0 kezdősebességi komponensek határozzák meg), tehát *általánosságban, tetszőleges, zérustól különböző kezdősebesség esetén, a* NEUMANN*-féle módszer semmiféle differencziálegyenletrendszerre sem vezet.*

De abban a speciális esetben, melynek vizsgálatára NEUMANN idézett akadémiai czikkében egyedül szorítkozik, *midőn* ugyanis $u_0=0$, $v_0=0$, igenis *határozott eredményhez jutunk.* Ekkor ugyanis S_0 a kezdőpontban van és M_τ a lim. $\tau=0$ határátmenetnél *ugyanezen* S_0 ponthoz konvergál. Ekkor, mint tüstént belátható

$$u_\tau=\tau\frac{\partial U}{\partial x}, \quad v_\tau=\tau\frac{\partial U}{\partial y} \tag{γ}$$

és minthogy ezen esetben

$$\lim_{\tau=0} u_\tau = u_0 = 0, \quad \lim_{\tau=0} v_\tau = v_0 = 0,$$

tehát

$$\lim_{\tau=0} \frac{u_\tau}{\tau} = x''(0), \quad \lim_{\tau=0} \frac{v_\tau}{\tau} = y''(0)$$

és így a (γ) alatti egyenletekből lim. $\tau=0$ határátmenettel az

$$x_0'' = U_x(x_0, y_0), \quad y_0'' = U_y(x_0, y_0)$$

NEWTON-LAGRANGE-féle egyenletekhez jutunk, melyeket azonban természetesen *nem* mint *minden* időben érvényes *differencziálegyenleteket* kaptunk ki az OSTWALD-féle elvből, hanem mint egyenleteket, melyek megadják a *kezdő*gyorsulást, ha a *kezdő*helyzet meg van adva és ha a szintén megadott *kezdősebesség zérus.**

A most megbeszélt NEUMANN-féle tárgyalási módszer tehát a mozgásnak csak egy speciális esetére nézve hozzáférhető: a «nyugalomból mozgásba jövés» esetére. Itt az eljárás feleletet ad az *a), b)* kérdésekre, olyan értelemben, hogy ekkor az OSTWALD-féle elv vezet határozott mozgásra, de csak a nyugalmi állapotot követő első időelemben, és hogy ezen «mozgásba jövés» tényleg a NEWTON-LAGRANGE-féle egyenletek szerint történik.

*

Azt hiszszük, hogy az előzők átgondolása után, az OSTWALD-féle elvnek szigorú elemzését, a jellemző nehézségeknek lehetőleg erős kidomborítását több szempontból is kivánatosnak fogjuk tartani.

Ezt kisértjük meg keresztülvinni ezen dolgozatban, teljesen az elvnek OSTWALD-féle fogalmazásához ragaszkodva.

A nyert eredmények a szövegben eléggé ki vannak emelve. Összefoglalásukat tehát fölöslegesnek tartjuk.**

---

* Az $\frac{u_0}{v_0} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$ eset külön vizsgálandó. Ez a NEUMANN-féle eseten kivül az egyetlen speciális eset, melynél szintén S_0-hoz konvergál az M_τ pont.

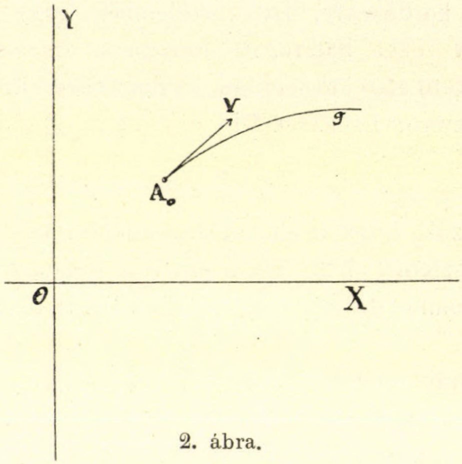
** A mi a kérdés irodalmát illeti, Voss Encyklopädia (Band IV, Heft 1, S. 110) czikkében idézett dolgozatokon kivül a következőket említjük:

1892. C. NEUMANN: Sächsische Berichte, Bd. 44.
1901. A. VOSS: Bayerische Berichte, Bd. 53.
1903. G. ZEMPLÉN: Annalen der Physik, Bd. 12.
1903. E. FÖRSTER: Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 49.
1904. M. RÉTHY: Mathematische Annalen, Bd. 59.

I. Az Ostwald-féle feladat.

Jelölje A_0 az XOY derékszögű koordinátarendszer síkjában mozgó tömegpont kezdőhelyzetét. Jelöljük x_0, y_0-sal az A_0 pont koordinátáit. Legyenek továbbá x'_0, y'_0 a kezdősebesség komponensei és ábrázolja az A_0V vektor a kezdősebességet nagysága és irányítása szerint.

Vegyünk fel most egy *tetszőleges* A_0g görbét, mely az A_0 pontban az A_0V vektor által meghatározott félsugarat érinti.



2. ábra.

Akkor — mint ismeretes — a tömegpontot, mely a $t=0$ időpontban az A_0 helyzetet foglalja el, lehet az A_0g pályán úgy vezetni, hogy bármely időpontban az

$$\frac{x'^2+y'^2}{2}=U(x,y)+h \tag{1}$$

elevenerő-egyenletnek tesz eleget, és hogy azonfelül, ezen vezetés mellett még az

$$x(0)=x_0,\quad y(0)=y_0$$
$$x'(0)=x'_0,\quad y'(0)=y'_0$$

kezdőfeltételek is ki vannak elégítve. Itt $U(x, y)$ jelenti az adott potencziálfüggvényt, h pedig egy állandót, melyet a kezdőfeltételek teljesen meghatároznak.

Legyen továbbá t egy adott időpont.* Akkor az A_0-ból kiinduló, az A_0g görbén az (1) elevenerő egyenlet által előírt «menetrend» szerint haladó pont a t időpontban egy újabb helyzetet foglal el, melyet A_t-vel jelölünk. Ha s-sel jelöljük a t idő alatt befutott $\widehat{A_0A_t}$ ívhosszúságot és $d\sigma$-val az A_0g görbe ívelemét, akkor a

$$t = \int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{2(U(x, y)+h)}} \tag{2}$$

egyenlet határozza meg (implicite) a szóban forgó A_t ponthoz tartozó s ívhosszúságot. (Fölösleges hozzátennünk, hogy az előbbi integrál az A_0g görbe mentén, és pedig az A_0, A_t határok között veendő.)

Tekintsük most már az A_0-ból kiinduló és A_0-ban az A_0V félsugarat érintő görbék összességét. Mindegyikhez tartozik — az előbb részletezett módon — egy A_t pont. Az Ostwald-féle feladat — felfogásunk szerint — most már a következőkben áll: *Határozzuk meg azon A_0 pontból kiinduló és A_0 pontban az adott A_0V félsugarat érintő A_0g görbét, melyhez tartozó A_t pontban az $U(x, y)-U(x_0, y_0)$ potencziálkülönbség lehető legnagyobb.*

A most fogalmazott Ostwald-féle feladat láthatólag nem közönséges variácziószámítási föladat (nem tetszőleges görbétől függő határozott integrál az, a melynek szélsőértéke vizsgálandó), hanem inkább kissé szokatlan mellékföltételekhez kötött függvény-szélsőértéki feladat. Az $U(x, y)$ két változós függvény az, melynek maximuma keresendő, és pedig abban a tartományban, melyet az előbb jellemzett A_t pontok összessége alkot.

Közelebbi vizsgálat mindjárt egy lényeges megkülönböztetésre vezet. Más jellegű ugyanis az Ostwald-féle feladat akkor, mi-

---

* A t egyelőre tetszőleges fix időpontot jelöl, de föntartjuk magunknak, hogy később a $(0, t)$ időintervallumot bizonyos következtetések levonhatósága érdekében kellőleg kicsinyíthessük.

dőn a tömegpont a $t=0$ időpontban nyugalomban van, és más jellegű, ha zérustól különböző kezdősebességgel indul útnak.*

Az első esetben ugyanis a kezdősebességi vektor *ponttá zsugorodik össze,* tehát nem is ad vektoriális irányt és igy az A_0g görbék azon fontos megszorítás alól, mely szerint azok A_0-ban egy adott A_0V félsugarat érinteni tartoznak, föl vannak mentve.

A második esetben azonban a kezdősebességi vektor egy egész *határozott* A_0V *félsugarat szab meg,* melyet aztán az összes A_0g görbék A_0-ban érinteni tartoznak.

A most jelzett eset-szétválasztás «zérus» és «nem zérus» kezdősebesség szerint azonban nem végleges számunkra. *Reánk nézve* ugyanis *csak az fontos: szolgáltat-e a kezdősebességre vonatkozó föltétel egy határozott* A_0V *vektort, melyet a tekintetbe jövő* A_0g *görbék* A_0*-ban érinteni tartoznak, vagy nem.* Épen azért az Ostwald-féle feladat tárgyalásánál a következő két esetet különböztetjük meg:

1. eset, midőn az $\overrightarrow{A_0V}$ *kezdősebességi vektor csak nagyságára nézve van megadva, míg irányítására nézve szabad.* (Az $\overrightarrow{A_0V}=0$ különös esetnek a nyugalomból való kiindulás felel meg.)

2. eset, midőn az $\overrightarrow{A_0V}$ (nagyságára nézve zérustól különböző) *vektor úgy nagyságára, mint irányítására nézve meg van adva.*

Lássuk most már, miért is fontos ez a megkülönböztetés. Ezt czélszerű lesz egy, az Ostwald-féle feladathoz teljesen rokon természetű feladaton megvilágitani, melynél azonban a viszonyok szemléletesebbek, mert a föllépő mennyiségeknek egyszerű *geometriai* jelentésük van, míg az Ostwald-félénél legfeljebb a *mechanikai* jelentésük egyszerű. Az Ostwald-féle feladatra nézve jellemző nehézségek azonban már ezen egyszerű geometriai feladaton is föl fognak tünni.

Ez a síkgeometriai feladat a következő.

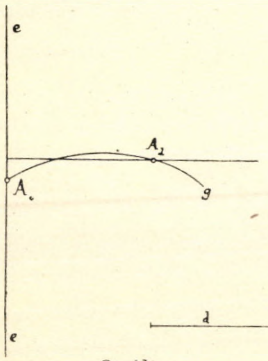
---

* Ezt a tényt, hogy a mondott két eset között különbség van, már a Neumann-féle elemzés is felszínre hozta.

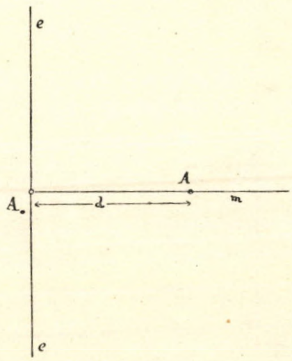
II. Egy síkgeometriai feladat tárgyalása.

Legyen adva egy ee egyenes vonal és rajta egy A_0 pont. Legyen továbbá adva egy d hosszúság. Keressük azon A_0-ból kiinduló, és az ee egyenestől jobbra eső félsíkban haladó A_0g görbét, melyre az adott d hosszúságot (A_0-tól kezdve) ráfektetve olyan A_d végpontot nyerünk, melynek az ee egyenestől való merőleges távolsága a lehető legnagyobb. És pedig oldjuk meg ezt a feladatot

I. abban az esetben, midőn az A_0g görbéket az A_0 pontra vonatkozólag semmiféle érintési megszorításnak nem vetjük alá.



3. ábra.



4. ábra.

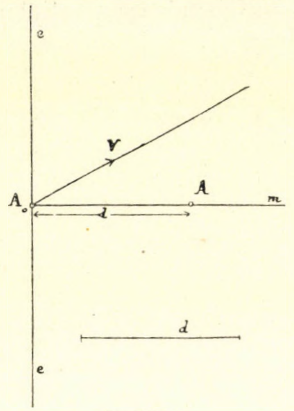
II. abban az esetben, midőn az A_0g görbéket azon föltételhez kötjük, hogy A_0-ban egy A_0-ból kiinduló és az ee egyenestől jobbra eső félsíkban haladó A_0V félsugarat érintsenek.

Látható, hogy az I. feladat megfelel az 1. Ostwald-féle feladatnak, míg a II. feladat a 2. Ostwald-féle feladatnak felel meg.

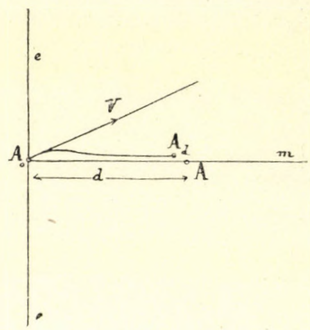
Világos, hogy az I. feladatnak van megoldása. Emeljük ugyanis A_0-ban ee-re az A_0m merőleges félsugarat, mérjük rá A_0-ból a «d» hosszúságot, akkor nyerünk egy A-val jelölendő végpontot. Most már tüstént belátható, hogy valóban az A_0m merőleges az a vonal, melyen d hosszúságnyira haladva a lehető legmesszebbre jutunk az *ee* egyenestől, és hogy ennek következtében A épen az a pont, a mely a jelzett föltételek mellett a lehető legmesszebbre van az *ee* egyenestől. Ezt fölösleges részleteznünk.

Míg az I. feladatnak van, addig a II. feladatnak nincs megoldása.

Hogy ezt beláthassuk, ejtsük el egy pillanatra azt a megszorítást, mely szerint az A_0g görbék érinteni tartoznak A_0-ban az A_0V vektort. Ha ezt teszszük, az I. feladatra térünk vissza. Ennek megoldása azon A pontra vezet (5. ábra), melyre vonat-



5. ábra.

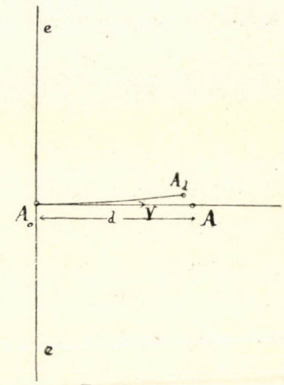


6. ábra.

kozólag $\overline{A_0A}=d$. Most már az I. feladatnak megfelelő A pont szerkesztése után, ennek felhasználásával könnyen beláthatjuk, hogy a II. feladatnak valóban nincs megoldása. Először is világos, hogy olyan A_d végponthoz, melynek távolsága az *ee* egyenestől nagyobb mint az A ponté (tehát nagyobb mint d), nem juthatok. De «d» távolságnyira sem juthatok el! Ugyanis az egyetlen d hosszúságú vonaldarab, melynek egyik végpontja A_0-ban van és másik végpontja «d» távolságnyira van az *ee* egyenestől, az A_0A merőleges vonaldarab, és ez a vonaldarab nem érinti A_0-ban a megadott A_0V vektort. De míg a megadott föltételekhez simulva «d» messzeségű végponthoz nem juthatok el, addig eljuthatok tetszőleges δ messzeségű végponthoz, bármilyen közel essék is a δ érték a «d» értékhez, és ha persze $\delta < d$.

Ennek bizonyítására elég megjegyeznünk azt, hogy eljuthatunk olyan A_d végponthoz, mely A-hoz tetszőleges közel van. Ha ugyanis a 6. ábra által megadott typusú $A_0 g$ görbén haladunk, akkor A-hoz tetszőleges közel juthatunk, a nélkül hogy a kezdőpontban követelt érintési föltételt megszegnők.

Az előbbiekből látjuk, hogy *a II. feladat esetében az A_d végpontnak az ee egyenestől való távolságának van* (Weierstrass-féle) *felső határa* (ez «d»), *de nincs maximuma*, mert nincs olyan a feltételeknek megfelelő $A_0 g$ görbe, melyhez tartozó végpont «d» távolságnyira volna az *ee* egyenestől.



7. ábra.

A II. feladatnak tehát általában nincs megoldása. Jeleznünk kell azonban azt a fontos *speczialis esetet, a mikor mégis van megoldása*. Ez a kivételes eset akkor áll be, midőn az $A_0 V$ vektor merőleges az *ee* egyenesre. Világos, hogy *akkor az érintési mellékfeltétel nem okoz semmi nehézséget*, és az A pont — ugyanazon pont, melyre az I. feladat vezet — képezi a feladat megoldását.

Ezen terjedelmes discussio után, mely azonban később fölment bennünket attól, hogy ugyanazt lényegtelenül komplikáltabb viszonyok közt ejtsük meg, áttérünk az Ostwald-féle feladat megoldására.

Először az 1. esettel foglalkozunk.

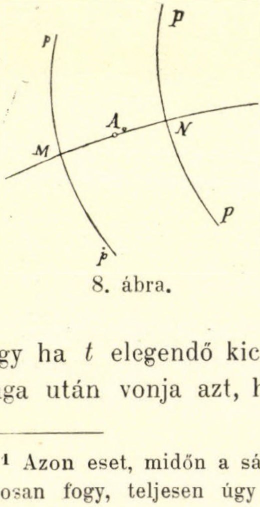
III. Az 1. eset tárgyalása.

Legyen A_0 a kezdőhelyzet, továbbá *pp* és *PP* két equipotencziális görbe, a melytől alkotott sávban az A_0 pont benne van, és a mely sávon belül a potencziál *folyton nő*. Ez utóbbi kifejezés alatt pontosabban azt értjük, hogy a potencziál folyton nő,[1] midőn az MA_0N erővonal mentén haladunk a pp equipotencziális vonalon fekvő M ponttól, a PP equipotencziális vonalon fekvő N pontig.[2] Most már kezdettől fogva a szerkesztett sávra szorítkozunk.

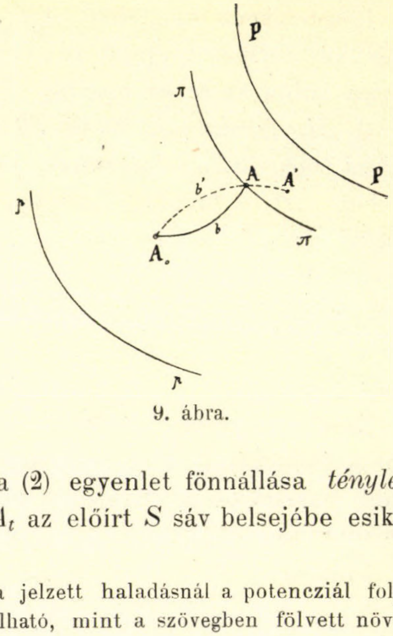
Más szóval: olyan kicsinyre választjuk a megadott t időt, hogy az A_0g görbén fekvő, és a

$$t=\int\limits_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{2(U+h)}} \tag{2}$$

követelésnek megfelelő A_t végpont mindig a pp és PP equipotencziális görbék által meghatározott — és ezentúl S-sel jelölendő — sáv belsejébe essék. Könnyű belátni — ezt nem is részletezzük —



8. ábra.



9. ábra.

hogy ha t elegendő kicsiny, a (2) egyenlet fönnállása *tényleg* maga után vonja azt, hogy A_t az előírt S sáv belsejébe esik.[3]

[1] Azon eset, midőn a sávban a jelzett haladásnál a potencziál folytonosan fogy, teljesen úgy tárgyalható, mint a szövegben fölvett növekedés esete.

[2] Ilyen sáv általában mindig kijelölhető. Kivételt képez pl. azon eset, midőn A_0-ban stabilis egyensúly van. Kellő feldarabolással azonban ezen eset vizsgálata is a szövegben tárgyalt módszerrel végezhető.

[3] Midőn így az adott t időt nagyságára nézve megszorítjuk (a minek tehát geometriailag az felel meg, hogy az S sávra szorítkozunk), tulaj-

Legyen most már ezek után A_0bA azon pálya, melyen az elevenerő-egyenlet által megállapitott menetrend szerint haladva t idő mulva magasabb potencziállal biró A ponthoz jutunk, mint *minden* egyéb, az A_0 pontból kiinduló pályán. Azt állítjuk, hogy ugyanazon A_0bA pálya a következő tulajdonsággal is bir:

Az összes az A_0 és A pontokat összekapcsoló görbék között az A_0bA görbeívet futja be a mozgó pont a legrövidebb idő alatt, föltéve, hogy az összes mozgások az elevenerő-egyenlet által megállapított menetrend szerint történnek.

Föltéve ugyanis, hogy léteznék egy $A_0b'A$ pálya, melyre vonatkozólag a

$$\tau = \int_{A_0}^{A} \frac{d\sigma}{\sqrt{2(U+h)}}$$

(az $A_0b'A$ görbe mentén integrálva) befutási idő kisebb volna az A_0bA görbéhez tartozó t befutási időnél. akkor az $A_0b'A$ görbe mentén haladva már a τ időpontban az A ponthoz érkeznénk, úgy hogy a még rendelkezésünkre álló $(t-\tau)$ időt arra fordíthatnók, hogy egy olyan A' pontba jussunk, melyben a potencziál nagyobb mint A-ban. E szerint a föltevéssel ellentétben, t idő alatt olyan A' ponthoz juthatnánk, melyben a potencziál magasabb mint A-ban.

Tehát valóban az A_0bA pályának felel meg a legrövidebb befutási idő, más szóval *az A_0bA pálya az A_0, A pontok által, és az* (1) *elevenerő egyenlet által meghatározott brachistochron pálya.* (Az (1) egyenletben a h állandó teljesen meg van határozva, mert $t=0$ időben a sebesség *nagysága:* $\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}$ meg van adva.)

Eddigi fontos eredményünk most már úgy fejezhető ki, hogy:

Valamely, az A_0 pontból kiinduló brachistochron pálya az,

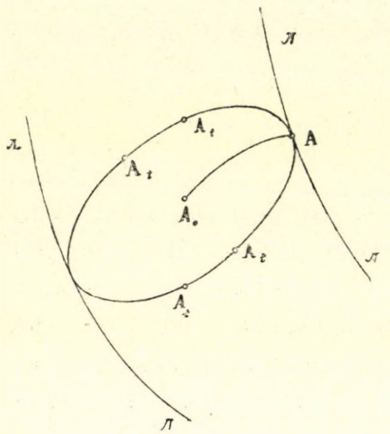
---

donképen egy, a mechanikai variácziós elveknél szokásos korlátozást teszünk. Ezeknél a szélsőértéki tulajdonság *valóban* csak bizonyos elegendő kicsiny időközben mutatkozik.

melyen a tömegpont az adott nagyságú kezdősebességgel indulva meg, azon tovább haladva a rendelkezésre álló t idő mulva a lehető legmagasabb potencziállal biró helyhez jut.

Már most az ugyanazon A_0 pontból kiinduló, és ugyanazon h elevenerő-állandóhoz tartozó brachistochron görbék egy egydimenziós végtelen sokaságot, egy «brachistochronális sugársor»-t alkotnak. További feladatunk most már csak abban áll, hogy e brachistochron-sugársor azon elemét válaszszuk ki, melyen a tömegpont a sokszor részletezett módon haladva t idő alatt a lehető legmagasabb potencziálú helyhez jut. Ez már egy közönséges, függvénymaximum meghatározását követelő feladat, mely részletesen a következőképen hangzik:

Határozzuk meg előbb az összes, az A_0 pontból kiinduló brachistochron görbéken azon A_t pontokat, a melyekhez a tömegpont az illető brachistochron görbén haladva az adott t idő lefolyása után jut. Az így nyert A_t pontok mértani helye egy zárt görbe, melyet «brachistochronális kör»-nek nevezhetünk. Az említett függvénymaximum-feladat most már abban áll, hogy *határozzuk meg az $U(x, y)$ függvény maximumát a most jellemzett «t sugarú» «brachistochronális kör»-ön.*



10. ábra.

E relativ maximum-feladat megoldása már rendkívül egyszerű. Felkeressük e végből azon $\pi\pi$ equipotencziális görbéket, melyek a szerkesztett brachistochronális kört érintik. Ilyen equipotencziális görbe (ha csak t elegendő kicsiny) általánosságban csak kettő van (l. 10. ábrát). Jelöljük a két nyert érintési pont közül A-val azt, a melyben a potencziál magasabb, akkor *az A_0A brachistochron ívdarab képezi az* 1. Ostwald-*féle feladat megoldását.*

Mielőtt tovább haladnánk, a megoldást képező A_0A brachistochron görbének egy, reánk nézve fontos tulajdonságát mutatjuk ki, t. i. azt, hogy *az A végpontján keresztül haladó ππ equipotencziális görbére merőleges.* Ez pl. közvetlenül következik egy franczia mathematikusnak, ROGERnek, a brachistochronális körre vonatkozó tételéből.* E tétel szerint azon pontok mértani helye, mely pontokhoz egyenlő (t) idő alatt az ugyanazon pontból (A_0) kiinduló különböző brachistochron görbéken, az elevenerő-egyenlet által előirt menetrend szerint eljutok, olyan görbe, mely az összes, az A_0 pontból kiinduló brachistochrongörbékre *merőleges.* E tételből rögtön következik, hogy az A_0A brachistochrongörbe merőleges a ππ equipotencziális görbére. Ugyanis az A_0A görbe merőleges A-ban a brachistochronális körre; ez azonban A-ban érinti a ππ görbét; *tehát az A_0A görbe merőleges a ππ görbére.*

IV. Az Ostwald-féle elv tárgyalása zérus kezdősebesség esetére.

Miután az I. OSTWALD féle feladat tárgyalását általánosságban befejeztük, könnyű lesz most már a következő, bennünket leginkább érdeklő kérdésre a feleletet megadni:

Föltéve, hogy az A_0V kezdősebesség egyenlő zérussal, létezik-e olyan, az A_0 pontból kiinduló pálya, melyen a pont az elevenerő-egyenlet által megállapitott menetrend szerint mozogván, a mozgás *minden időpontban* az OSTWALD féle maximum tulajdonsággal bir?

Előbbi eredményeink szerint a szóban forgó pálya csak brachistochron pálya lehet. De minthogy a maximum-tulajdonságot minden (elegendő kicsiny) t időre nézve követeljük, tehát kell továbbá az is, hogy az emlitett brachistochron pálya

* L. ROGER: Thèse sur les bracchistochrones (Journal de Liouville, 1re série, t. XIII, p. 41, 1848) és főkép DARBOUX: Théorie générale des surfaces, t. II, p. 456.

merőleges legyen az összes equipotencziális görbékre. Ha tehát a maximum-tulajdonság érvényességét minden t időre nézve követeljük, akkor kell, hogy az A_0 ponton keresztül menő *erővonal egyszersmind brachistochron is legyen. Minthogy pedig általánosságban az erővonal nem lehet brachistochron görbe, tehát az* OSTWALD-*féle elv általánosságban véges időközben* (legyen az különben bármilyen kicsiny) *még a nyugalomból mozgásba jövés esetében sem érvényes.*

Mikor érvényes mégis az OSTWALD-féle elv a nyugalomból mozgásba jövés esetében, és pedig véges időközben? Láttuk, hogy akkor és csak akkor, a midőn az A_0 ponton áthaladó erővonal egyszersmind brachistochron görbe. Azt állítjuk most már, hogy olyan erővonal, mely egyszersmind brachistochron is tartozik lenni, föltétlenül *egyenes vonal.*

Ennek bizonyítására egy, azt hiszszük új és talán önálló érdekű tételt fogunk felhasználni.

V. Egy variáczió-számítási tétel.

Tehát tárgyalásainkat egy pillanatra félbeszakítva, legyen adva egy, bizonyos határok között vett, és a következő alakú

$$\int f(x, y)\, \varphi(y')\, dx \tag{3}$$

határozott integrál. Itt $y' = \dfrac{dy}{dx}\cdot$

Állítsuk a (3) alatti integrál mellé az

$$\int \frac{\varphi(y')}{f(x, y)}\, dx \tag{4}$$

integrált, és kérdezzük, milyen kapcsolatban vannak a (3) és (4) integrálokhoz tartozó variácziószámítási problémák LAGRANGE-féle differencziálegyenletei?

Az integrálokban $f(x, y)$ jelenti az x, y változók tetszőleges függvényét, $\varphi(y')$ pedig y' tetszőleges függvényét.

Vezessük be a következő rövidítéseket:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y, \quad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'',$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = \varphi', \quad \frac{d^2\varphi}{dy'^2} = \varphi''.$$

Akkor a (3) integrál LAGRANGE-féle differencziálegyenlete:

$$-f_y\varphi + f_x\varphi' + f_y\varphi'y' + f\varphi''y'' = 0,$$

a (4) integrálé pedig

$$\frac{1}{f^2} f_y\varphi - \frac{1}{f^2} f_x\varphi' - \frac{1}{f^2} f_y\varphi'y' + \frac{1}{f}\varphi''y'' = 0,$$

vagy f^2-tel szorozva*

$$f_y\varphi - f_x\varphi' - f_y\varphi'y' + f\varphi''y'' = 0.$$

Ha tehát a (3) *integrál* LAGRANGE-*féle differencziálegyenlete*

$$y'' = F(x, y, y'),$$

akkor a (4) *integrál* LAGRANGE-*féle differencziálegyenlete*

$$y'' = -F(x, y, y').$$

Ezen tétel fejezi ki a (3) és (4) integrálok LAGRANGE-féle differencziálegyenletei között fönnálló egyszerű kapcsolatot.

*

Alkalmazzuk ezt a tételt a következő speciális esetre:

$$f(x, y) = \sqrt{U(x, y) + h}, \quad \varphi(y') = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Ekkor az

$$\int \sqrt{U+h}\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (M)$$

és

$$\int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{U+h}}\,dx \qquad (B)$$

* Ezáltal a differencziálegyenlet integráljaihoz csak az ismeretes $f(x, y) = 0$ egyenlet által jellemzett függvényt csatoljuk hozzá.

integrálokról van szó. Ezek közül az első az ú. n. akczió-integrál, melynek extremálisai az U potencziálhoz és h elevenerő állandóhoz tartozó *mechanikai trajektóriák*.

A második integrál extremálisai pedig tudvalevőleg az U potencziálhoz és h elevenerő-állandóhoz tartozó *brachistochron görbék*.

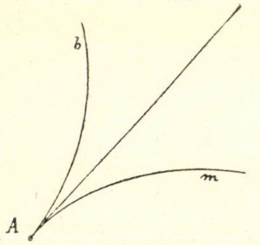
Minthogy pedig az említett mechanikai trajektóriák differencziálegyenlete

$$y'' = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial y} - y' \frac{\partial U}{\partial x}\right)(1+y'^2)}{2(U+h)}, \tag{5}$$

tehát a brachistochron görbéké:

$$y'' = -\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial y} - y' \frac{\partial U}{\partial x}\right)(1+y'^2)}{2(U+h)}. \tag{6}$$

Ha tehát úgy a mechanikai differencziálegyenletrendszerből, mint a brachistochrongörbék közönséges differencziálegyenletrendszeréből az elevenerő-egyenlet segítségével — mint szokás röviden mondani — «*az időt elimináljuk*», akkor az (5), illetve (6) alatti, fölötte egyszerű összefüggésben lévő differencziálegyenletekhez jutunk.



11. ábra.

Ezen összefüggés geometriailag a következőképen interpretálható:

Legyen A közös pontja (az ugyanazon h elevenerő-állandóval biró) Am mechanikai és Ab brachistochron pályának. Akkor, ha ezen pályáknak az A pontban közös érintőjük van, ezen A pontban egyszersmind abszolut értékben egyenlő, de jelre nézve ellentett görbületi mértékük is van.*

* Ezen tétel a síkbeli mechanikai pályák egyszerű jellemzését adja a síkbeli brachistochron pályák segítségével. *Egyszerű*nek ezen jellemzést talán azért mondhatjuk, mert a brachistochron görbe a maga részéről egyszerűbben jellemezhető, mint a mechanikai pálya. A brachistochron

VI. A IV. folytatása.

Ezen kitérés után, *lássuk most már, mikor lehet erővonal egyszersmind brachistochrongörbe?*

Ha az

$$y = y(x)$$

görbe erővonal, akkor kell, hogy

$$\frac{\partial U}{\partial y} - y' \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

legyen. Ha egyszersmind brachistochrongörbe, akkor kell, hogy a (6) egyenletnek is eleget tegyen. A két egyenletből — (6)-ból és (7)-ből — pedig következik, hogy

$$y'' = 0.$$

E szerint, ha a tömegpont A_0 pontból zérus kezdősebességgel indul meg, akkor a mozgás akkor és csak akkor fog minden időben (de azért határozott időközben) *az* Ostwald-*féle elv szerint mozogni, ha az A_0 ponton átmenő erővonal egyenes vonal.*

Világos, hogy *ebben az esetben a mozgás a mechanikai differencziálegyenleteknek is eleget tesz,* úgy hogy mondhatjuk: *Ha* a nyugalomból való mozgásba jövés esetében a tömegpont az Ostwald-féle elv szerint mozog, *akkor* a mozgás ebben az esetben ugyanaz, mint a melyet a mechanikai differencziálegyenletek szolgáltatnak. Persze sajnos, hogy a nyugalomból mozgásba jövés véges időközre, csak abban a rendkívül speczialis esetben történik az Ostwald-féle elv szerint, midőn az erővonalak egyenes vonalak; más szóval, a midőn az equi-

---

görbék ugyanis a (B) integrált teszik minimummá, egy integrált, melynek egyszerűen «idő» mechanikai jelentése van, míg a mechanikai pályák megfelelő jellemzése mint: olyan pályák, melyek az (M) akcziómintegrált teszik minimummá, talán jelentésében komplikáltabb, és pedig azért, mert az (M) akcziómintegrálnak nincs olyan közvetlenül egyszerű mechanikai jelentése, mint a (B) időintegrálnak.

potencziális görbék orthogonális trajektórái egyenes vonalok, vagy végre, *midőn az equipotencziális görbék parallel-görbék.*

A IV. és VI. paragrafusok végeredménye tehát abban nyer kifejezést, hogy az Ostwald-*féle elv már a nyugalomból mozgásba jövés esetében is csak speciális potenciál esetében vezet a mechanikai pályára, ha annak érvényességét véges, de különben bármilyen kicsiny időtartamra követeljük.**

VII. A 2. eset tárgyalása.

Intézzük el néhány szóval a 2. eset tárgyalását. Azt állitjuk, hogy míg az 1. feladatnak általában van, addig *a 2. feladatnak általában nincs megoldása.* Ezt nem részletezzük, lévén a 2. feladat ugyanolyan viszonyban az 1. feladathoz, mint a II. feladat az I. feladathoz. A II. feladatnak, láttuk, van kivételesen megoldása. *A 2. feladatnak is van kivételesen megoldása,* és pedig akkor, midőn a kezdősebességi A_0V vektor érinti az A_0A brachistochron görbét. Itt A jelenti azt a pontot, melyet a kezdősebesség irányának elejtésével az 1. feladat megoldásaképen nyerünk.

*

Ezen, a 2. feladatra vonatkozó néhány megjegyzésünket előrebocsátva, kimondhatjuk, hogy olyan, *zérustól különböző kezdősebességgel biró mozgás, mely az* Ostwald-*féle elvnek eleget tenne, általában nem is létezik.* (Hiszen már olyan mozgás sem létezik, melyre vonatkozólag az Ostwald-féle maximumtulajdonság egy határozott t időre nézve ki volna elégítve, a mint azt épen a 2. feladat tárgyalása mutatta). Könnyen ki lehet most már mutatni, hogy *a következő kivételes esetben* (és csakis abban) *mégis érvényes az* Ostwald-*féle elv: midőn*

---

* Egyenesvonalú erővonalak lépnek fel pl. az esésnél (ez épen azon eset, melyen Ostwald az ő elvét exemplifikálja), czentrális mozgásnál stb. Ezen elementáris esetekben tehát a nyugalomból mozgásba jövés véges időközben az Ostwald-féle elv szerint történik.

t. i. *az A_0 ponton keresztül haladó erővonal egyenes vonal, és midőn az A_0V kezdősebesség iránya az erővonal irányával megegyez.*

*

Nem lesz talán érdektelen annak a kiemelése, hogy *kivételesen létezhetik olyan A_0 kezdőpont, a melyből bármilyen nagyságú és irányítású kezdősebességgel indítva meg a tömegpontot, a mozgás véges időtartamban az* Ostwald-*féle elv szerint történik.* Ilyen pont pl. $U(r)$, $r^2=x^2+y^2$, potencziállal biró czentrális mozgás esetében a czentrális mozgás középpontja (az $r=0$-nak megfelelő pont), ha az U függvény az $r=0$ pontban reguláris, és ha ugyanezen pontban minimuma van. (Például ha $U(r)=r$). Itt könnyen verifikálható, hogy minden a középpontból kiinduló mozgás, bizonyos határolt időközben az Ostwald-féle elv szerint történik.

Érdekes, hogy *általános tárgyalásunk ezt az esetet is mintegy magától kiadja.* Térjünk vissza egy pillanatra az 1. feladatra. Tudjuk, hogy az 1. feladatnak megfelelő A pont mint a «t» sugarú és «A_0 középpontú brachistochronális kör», és az ezen kört érintő equipotencziális görbe közös érintkezési pontja adódott. Most már lehetséges, hogy e brachistochronális kör *összeesik teljesen* egy equipotencziális görbével. Ebben az esetben az 1. feladatnak végtelen sok megoldása van, mert az emlitett equipotencziális görbe minden pontja megfelel a feladatnak. Ha már most ebben az esetben áttérünk a 2. feladatra az által, hogy a kezdősebesség irányát is megadjuk, akkor, éppen azért, mert az 1. feladatnak végtelen sok megoldása van (egy egész brachistochronális sugársor felel meg az 1. feladatnak), lehetséges lesz a kezdő irányhoz való simulás. Az emlitett sugársorból egyszerűen ki kell választanunk azt a brachistochront, mely az adott kezdőirányt érinti.

Ennek előrebocsátása után, nézzük mit von maga után azon követelés, hogy ezen határozatlanság az 1. feladat megoldásában *bármilyen t* időre vonatkozólag föllépjen. Világos, hogy ez equivalens azon követeléssel, mely szerint az A_0

középpontú, és különböző t sugarú brachistochronális körök equipotencziális görbék legyenek. De ebből, előző eredményeink felhasználásával rögtön következik, hogy ebben az esetben az erővonalak mind egyenes vonalak, melyek azonfelül mind az A_0 ponton mennek keresztül. Ebből azonban tüstént következik, hogy *az equipotencziális görbék konczentrikus körök,* melyeknek A_0-ban van közös középpontjuk. E szerint a potencziál $U(r)$ alakú. Ilyen módon tehát valóban az előbb említett czentrális mozgás példájára vezettettünk.

VIII. A Darboux-féle leképezés.

Megjegyezzük, hogy az Ostwald-féle feladat különösen szemléletes formában jelentkezik, ha a síkot a Darboux-féle módon (l. idézett helyet) egy olyan

$$\xi=\xi(x, y), \quad \eta=\eta(x, y), \quad \zeta=\zeta(x, y)$$

felületre képezzük le, melynek ds' íveleme

$$ds'^2=d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=\frac{ds^2}{U+h}=\frac{1}{U(x, y)+h}(dx^2+dy^2).$$

E leképezés a szóban forgó felületre konform, és *a sík brachistochron görbéinek a felület geodetikus vonalai felelnek meg.*

A felületen most már az Ostwald-féle feladatnak (pl. az 1.-nek) a következő feladat felel meg:

Adva van a felületen egy A_0 pont. Adva van továbbá egy t hosszúság. Határozzuk meg azon, az A_0-ból kiinduló és a felületen haladó görbe vonalat, melyre a t hosszúságot A_0-tól kezdve ráfektetve olyan végponthoz jutunk, melyben az $U(x, y)$ függvény értéke a lehető legnagyobb.

Így az Ostwald-féle feladat rokonsága a II. paragrafusban tárgyalt geometriai feladattal még sokkal feltünőbb.

IX. Összefüggés a C. Neumann-féle eredménynyel.

Azt állitjuk, hogy egészen szigorúan áll a következő tétel: *Ha valamely mozgás A_0-ból zérus kezdősebességgel indul meg, és ha egyetlenegy időpontban eleget tesz az* Ostwald-*féle maximumkövetelésnek, akkor a mozgásnak A_0-ban ugyanazon kezdőgyorsulása van, mint az A_0-ból zérus kezdősebességgel kiinduló mechanikai mozgásnak.*

Legyenek ugyanis x_0, y_0 az A_0 koordinátái, és válaszszuk h-t úgy, hogy

$$U(x_0, y_0)+h=0$$

legyen. Akkor a brachistochron görbékmenti (csak ezen görbék jönnek a föltevés következtében tekintetbe), és idő tekintetében az (1) egyenlet szerint lefolyó mozgások differencziálegyenlete:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\frac{\partial U}{\partial x}x' + \frac{\partial U}{\partial y}y'}{U+h}\,x' \\ y'' &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\frac{\partial U}{\partial x}x' + \frac{\partial U}{\partial y}y'}{U+h}\,y'. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ezen egyenletekre nézve az

$$x(0)=x_0,\quad y(0)=y_0,\quad x'(0)=0,\quad y'(0)=0 \tag{9}$$

kezdőértékrendszer *singuláris*. Ez összhangzásban van azzal, hogy ezen kezdőföltételekhez az integrálgörbéknek egy egyszeresen végtelen sokasága tartozik, míg a mechanika

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ y'' &= \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

egyenletei, melyekre nézve a (9) kezdőértékrendszer *reguláris*, egyetlenegy mozgást szolgáltatnak.

A (9) kezdőértékrendszerhez tehát a (8) egyenletek az A_0-ból kiinduló mozgásoknak egy egydimenzionális végtelen sokaságát szolgáltatják. *Azt állítjuk, hogy ezen mozgások valamennyien nemcsak egyenlő kezdősebességgel (ez zérus), hanem ugyanazon kezdőgyorsulással is indulnak meg A_0-ból, és pedig azon gyorsulással, melyet ugyanazon kezdőföltételek mellett a mechanika* (10) *alatti egyenletei szolgáltatnak.*

Ugyanis pl.

$$x' \frac{\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y'}{U+h} = x' \frac{(U+h)'}{U+h},$$

tehát a DE L'HÔPITAL-féle szabály kétszer egymásután való alkalmazásával:

$$\lim . x' \frac{\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y'}{U+h} =$$

$$= \lim_{t=+0} \frac{x'''(U+h)' + 2x''(U+h)'' + x'(U+h)'''}{(U+h)''} = 2x''(0).$$

Tehát a $\lim. t = +0$ határátmenet révén a (8) egyenletrendszer az

$$x''(0) = - U_x(x_0, y_0) + 2x''(0)$$
$$y''(0) = - U_y(x_0, y_0) + 2y''(0)$$

egyenleteket szolgáltatja, melyek $x''(0)$, $y''(0)$ számára ugyanazon értékeket adják, mint a (10) rendszer.

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk és vizsgálatainknak az összefüggését a C. NEUMANN-féle eredménynyel tisztáztuk.

Fejér Lipót.

JELZŐKÉSZÜLÉKEK A VÁLTAKOZÓ ÁRAM ALAPJELENSÉGEINEK BEMUTATÁSÁRA.

A lassú váltakozású áram jelenségeinek elemi analitikai és grafikus tárgyalásánál feltételezzük, hogy a generator kapcsai között működő feszültség az egyszerű harmonikus mozgás törvényeit követi. Ha még felteszszük, hogy a zárókör ohmikus és induktiv ellentállása, továbbá kapacitása állandó, számítási eredményül kapjuk, hogy az áramzárás pillanatától számított rövid idő után az áramerősség is harmonikusan változik. E számítási eredményt azután a váltakozó áram jelenségeinek grafikus tárgyalásánál lépten-nyomon alkalmazzuk.

Jelen dolgozatban egyszerű kisérleti összeállításokat és kisérleteket tárgyalok, melyekkel a váltakozó áram alapjelenségei nagy közönség számára is szembetünőkké tehetők s így megértésök könnyítésére hivatottak.

Hasonló czélú berendezést ismertetett Puluj.* Eszköze velejében vasmagvat tartalmazó dróttekercs, melyen keresztül váltakozó áramot vezetünk; a vasmag előtt vashorgony van, mely egyik végén megrögzített rugalmas aczélsáv szabad végére van erősítve; a rugó eme végére még tükör van ragasztva. Próba útján megkapjuk a rugónak azt a hosszát, melynél saját teljes rezgés ideje (a lengésidő duplája) a fél áramhullám idejét megközelíti; ekkor a váltakozó áram okozta mágnestér a horgonyt legnagyobb kitérésű egyszerű rezgésre készti, melyet a tükörrel

* Über einen Messapparat für Phasendifferenzen von Wechselströmen und einige mit demselben ausgeführte Messungen. Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. Wien. Bd. 102. 1893; és Elektrotechnische Zeitschrift. Jahrg. 1893. S. 686.

ernyőn, fényes hullámvonal alakjában teszünk szembetűnővé. E készüléket egyszerű összeállítása ajánlja; de rugója kétszerannyi rezgést végez, mint a mennyi a váltakozó áram teljes hullámainak megfelel, mert az áram okozta mágnesérnek mindegyik félhulláma a sarkiságától függetlenül, a rugót teljes rezgésre készti. Még amaz észrevétel is felmerül, hogy a készüléknek nagy önindukczió tényezője van.

Két egyenlő felszerelésű készüléket használva, melyeknek rugói a vizsgálandó váltakozó áramok hatása alatt párvonalas tengelyek körül rezegnek, az ernyőn egyidőben két fényes áramhullámot kapunk.

Ha a készülékek rugóinak tengelyei egymásra merőlegesek, egyenlő periodusú és általában fázisban eltérő váltakozó áramok hatásának eredőjéül az ernyőn ellipszist kapunk.

Ismertetendő eszközeim müködésmódja a Puluj-félékétől abban különbözik, hogy a mozgó rész egy teljes rezgését a teljes áramhullám idejének megfelelően végzi. Továbbá eszközeimnek csekély önindukczió tényezőjük lévén, az áramfázist nem igen változtatják.

Jelzőkészülékeim galvánmérők, melyeknek saját rezgésidejök kevéssel különbözik egy teljes áramhullám időtartamától; ily készülékeket használva, még az esetben is, ha az áramgörbe menete a sinustörvénytől lényegesen eltér, a készülék mozgékony része egyszerű rezgést végez.

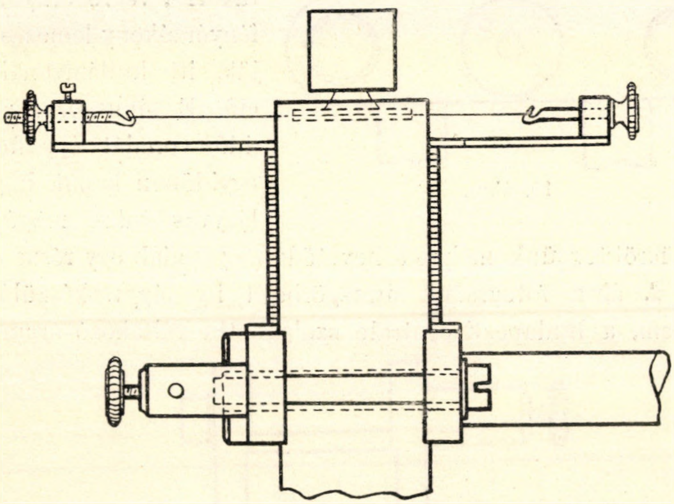
Eme jelzőkészülékek az oszcillografoknál is alkalmazott elvek szerint készültek, de ezektől a mozgó rész saját rezgésideje tekintetében lényegesen különböznek; a jelzőkészülék rezgésideje kb. $\frac{1}{50}$ mp. az oszcillografé $\frac{1}{5000}$ mp., a miért is az utóbbi az $\frac{1}{40}$ mp. alatt végbemenő áramnak periodikus lefolyását hiven követi, míg a jelzőkészülék mozgékony része mint fentebb említettem, mindenkor egyszerű rezgést végez.

A jelzőkészülékeket kétféle tipus szerint szerkesztem.

Az első ú. n. lágyvas tipusnál álló dróttekercs közelében mozgékony lágyvas van, melynek azzal adunk erős mágneses sarkiságot, hogy patkóalakú erős aczélmágnes sarkai közé hozzuk.

A másik, Deprez D'Arsonval tipusú eszköz, melynél néhány menetű mozgékony dróttekercs van patkóalakú erős aczélmágnes sarkai között.

A *lágyvas eszköznél,* erős aczélmágnes sarkai közé, rugalmas újezüstdrót mint tengely körül, elfordulható lágyvaslemezt hozunk; (1*a*, 1*b*, 1*c*. ábrák) ezt a mágneses erővonalak irányában elhelyezkedő oly mágnesek rendszerének tekinthetjük, melynek mágneses tengelye a forgástengelyre merőleges.



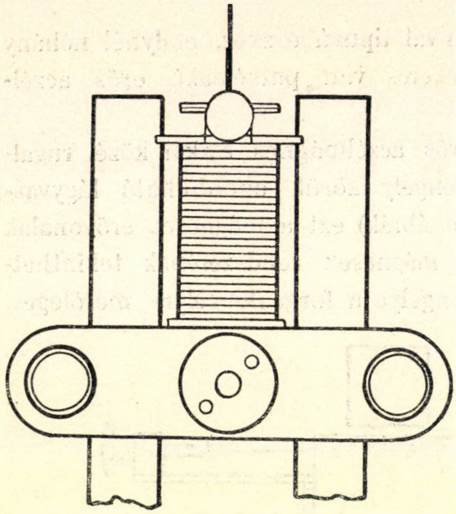
1*a*. ábra.

Eme sarkitott vas mögött, az aczélpatkó szárai között, hosszában átszelt fémhüvelyre csavart dróttekercs van; meneteinek síkja a mágnestér erővonalaival párvonalas.

A fémhüvelynek a sarkokhoz közelebb végén levő zárófala fémkeretté van alakitva, melyen az újezüstdrót végeinek megfogására, a drót feszitésére, esetleg kivánt csekély elforditására való berendezés van.

A lágy vaslapra kártyapapirt és erre siktükröt ragasztunk, melynek egész felülete a mágnessarkok közéből kiáll s így szabadon látható.

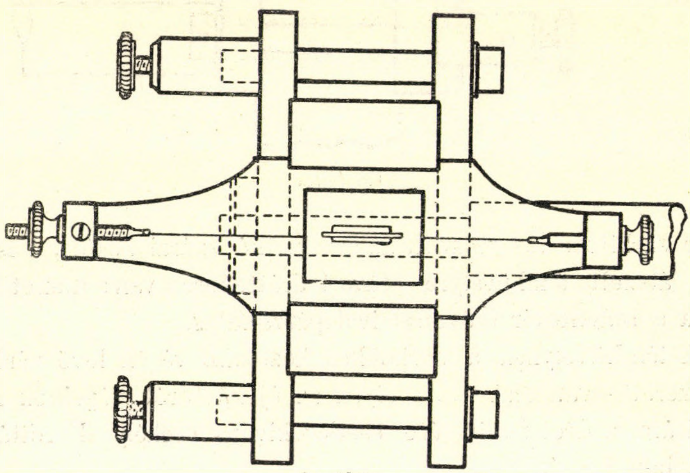
Ha a dróttekercsen váltakozó áramot vezetünk át a lágyvas



1*b*. ábra.

egyszerű rezgést végez. A készülék oly felállitását tegyük fel, hogy a lágyvas tengelye vízszintes; ha a tükörre összeverődő fényt vetünk és a visszavert nyalábot függélyes tengely körül forgó tükörre, végre ernyőre v. fényérzékeny lemezre ejtjük, itt hullámvonal áll elő. E sinusgörbe zérus (idő) vonalát úgy fogjuk egyidőben kapni, hogy a lágyvas tükre mögé kis álló tükröt teszünk, melyre a bevetődő fénynyaláb egy része esik.

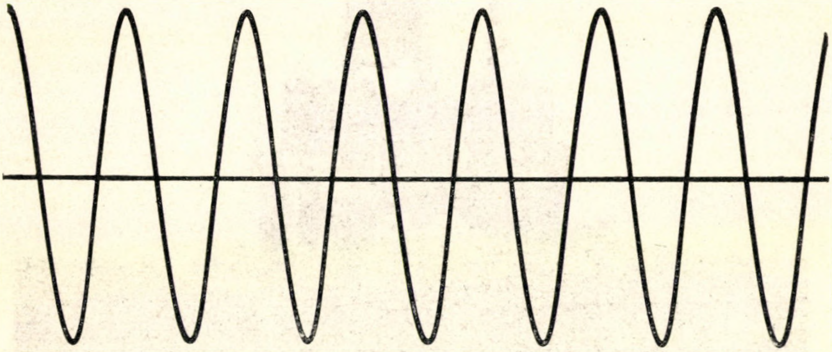
A 2. ábra fotografált sinusgörbéjét ily lágyvaskészülékkel nyertem, a budapesti centrale szolgáltatta váltakozó árammal,



1*c*. ábra.

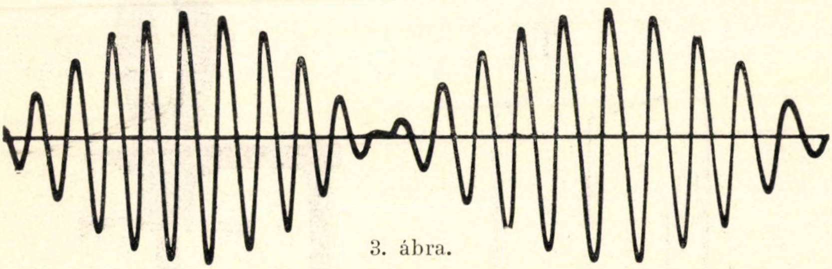
melynek méréseim szerint 41,3 teljes hulláma jár le másodperczenkint; a jelzőkészülék pedig méréseim szerint másodperczenkint 55,87 teljes rezgést végzett.

Valamint a szóban levő, úgy az utóbb ismertetendő áramgörbék is, balról jobbfelé származnak, az idő mérőszámai növekedésének megfelelően.



2. ábra.

A 3. ábra fotografiai felvétele arra az esetre vonatkozik, ha a tekercsen egyidőben két váltakozó áramot vezetünk, melyeknek periodusa kevéssé különbözik; az egyik áramot a centrale,



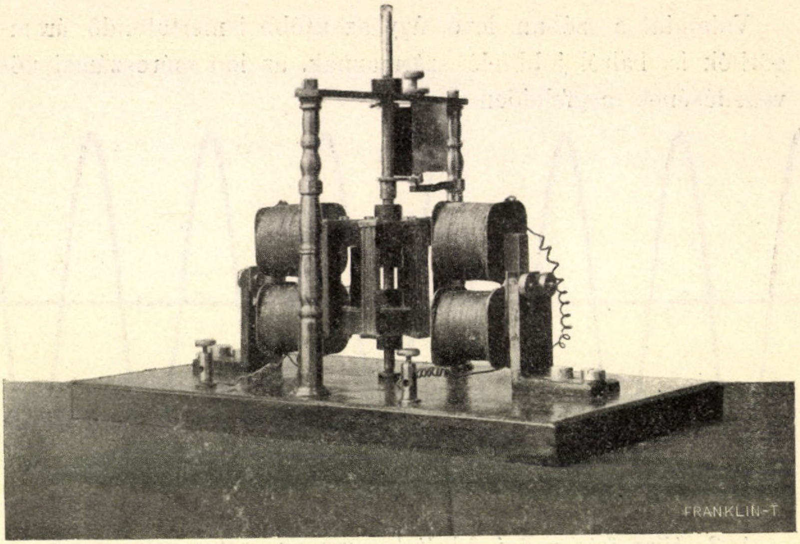
3. ábra.

a másik kisebb váltakozásút a laboratoriumi kis négysarkú váltakozó áramú generator szolgáltatta.*

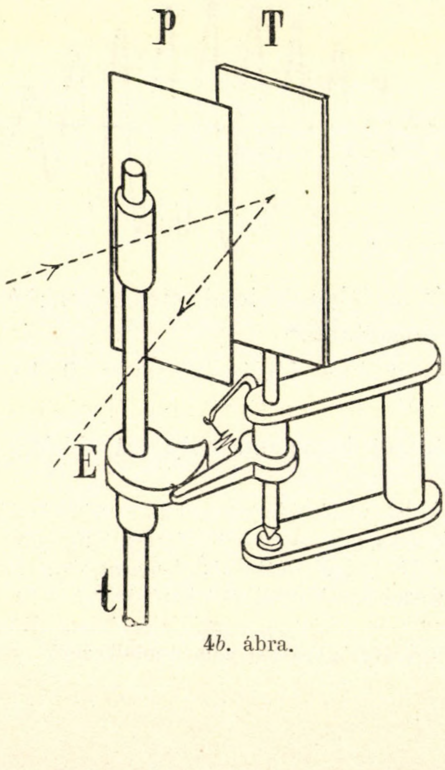
Az egyidőben végbemenő rezgések idejének aránya, 9 : 10.

Hogy az áramgörbe az ernyőn folyton lássék, függélyes tengely körül forgó sokszögű tükröt használhatunk; ezt abból a

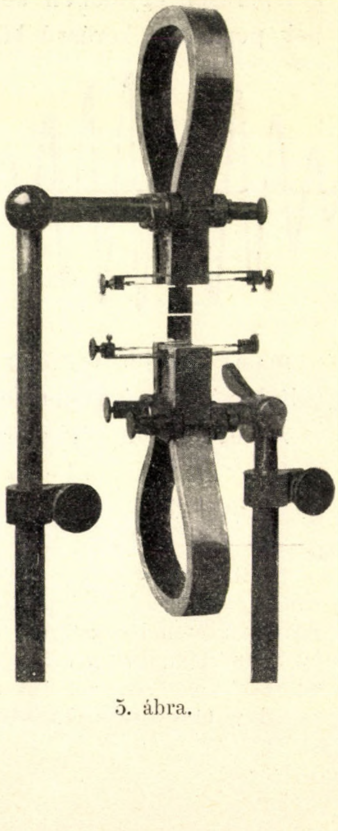
* Ezt a generatort a Ganz-féle közel egy lóerejű kommutatoros négysarkú szinchrónmotornak oly átalakitásával kaptam, hogy a forgó rész tengelyére egyirányú áram bevezetésére való két gyűrűt húztam. Érdemesnek tartom ezt felemlíteni, mert a fizikai eszközök szerkesztői váltakozó áramú generatorokat nem készítenek; ők ugyanis az armatura magvát alkotó lamellált vasnak pontos megmunkálására szükséges gépekkel nem rendelkeznek.



4*a*. ábra.



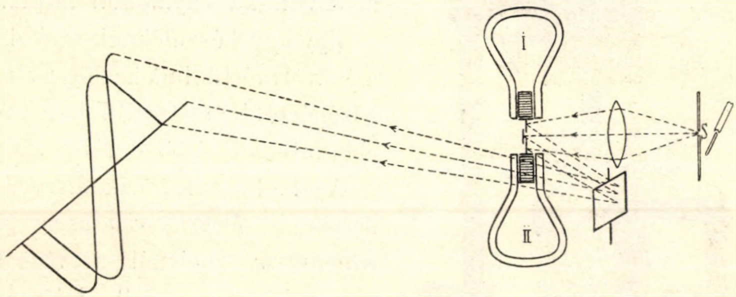
4*b*. ábra.



5. ábra.

czélból, hogy az áramgörbe az ernyőn helyben maradjon, a váltakozó áramforrás hajtotta kis szinchrónmotorral, például fonikus kerékkel járatjuk.*

A szinchrónmotor hajtotta sokszögű tükröt a berendezés egyszerűsítéseképpen síktükörrel helyettesítjük, melynek az áramgörbe mozdulatlan előállítására alternáló elfordulást kell végeznie (4*a*, 4*b*. ábra). Ez elfordulásnak egy irányban a szinchrónmotor szögelfordulásával arányosnak kell lennie; e végből a szinchrónmotor (*t*) tengelyére (4*b*. ábra) archimedesi csigavonalalakú (*E*) excentert ékelünk, melyhez az alternativ mozgású (*T*) tükör tengelyéből kiinduló kar illeszkedik. Ha e



6. ábra.

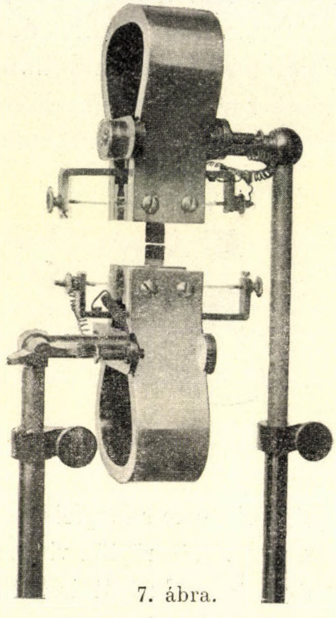
kar az excenter legszélsőbb részét már érintette s megfelelően a tükör legnagyobb kitérése helyén van, a tükör rögtön visszapattan másik szélső helyére és egyenletes elfordulását ismétli. Hogy a tükör visszapattanásának rövid ideje alatt származó részét az áramgörbének eltüntessük, a szinchrónmotor fekete papirsávot (*P*) forgat, mely az említett rövid időre a tükörre bevetődő fénynyaláb útját állja.

Két áramgörbe egyidejű előállítására két készüléket használunk. Elhelyezésük olyan, hogy a lágyvasak tengelyei víz-

---

* A fonikus kerék és sokszögű tükörrel való felszerelésének leírása «Akusztikai kisérletek» cz. dolgozatomban, Természettudományi Közlöny pótfüzete 1905 febr. és Akustische Demonstrationsversuche czímen Zeitschrift f. phys. u. chem. Unterricht 1905 márcz. füzetében van.

szintesek és párvonalasak és a függélyes tükörsíkok közeljutnak egymáshoz (5. és 6. ábra). Ezeknek köze mögé beigazítható álló tükröt hozunk, melylyel a zérusvonalat állítjuk elő. Kisérlet előtt az álló tükröt és a jelzőkészülékek tükreit úgy kell beigazitanunk, hogy a megvilágított kerek (S) nyilásnak, mint tárgynak, az ernyőn illetőleg a fotografáló készülék áttetsző lapján előálló három képe pontosan födje egymást.



7. ábra.

Ha a jelzőkészülékeken váltakozó áramot vezetünk és a szinchrónmotort járatjuk, az ernyőn a két mozdulatlan áramgörbét és a zérusvonalat egyidőben látjuk.

Egy-egy készüléknek szekohmméterrel mért önindukcziótényezője középértékben 0,000497 henry; az ellentállások: 1,33 illetőleg 1,68 Ω.

A jelzőkészülék második berendezése a *Deprez rendszerű galvanometer*, melynél a vörösréz keretre összesen 10 drótmenet van csavarva. Az aczélmágnes létesítette mágnestér egyenletessé tételére a dróttekercs üregében a mágnes tartójához rögzitett hengeres vasmag van.

Két készülék használatánál a forgástengelyek vízszintesre és párvonalasra úgy igazitandók be, hogy a sarkok közéből kiálló tükrök közel jussanak és egy nyilásból kiinduló, összeverődővé tett fénynyaláb mind a két tükröt és a mögöttük lévő álló tükröt is érje. (7. ábra.)

Egy-egy készüléknek szekohmméterrel mért önindukcziótényezője középértékben 0,000069 henry, az ellentállások 0,34 illetőleg 0,39 Ω.

E készülékekkel szakasztott oly módon kisérletezünk, mint a lágyvas eszközökkel.

Az egészen két méter magasságú hullámgörbéket nagy auditorium is jól látja.

Az alkalmazások köréből a következőket emeljük ki.

I. Két sinusgörbe egyidejű előállítása.

A) A készülékek egyikét a villámforrás — nálunk a transformator szekundérje — kapcsai közötti *feszültséggörbe* jelzésére használjuk; ekkor a készülékhez mintegy 200 Ω indukcziómentes ellentállást csatolunk és a vezeték végpontjait a 105 volt feszültséget adó transformator kapcsaihoz kötjük. A másik készüléket vagy az osztatlan zárókörbe, vagy erős áram esetén az indukcziómentes rész végpontjaihoz párvonalasan kapcsoljuk; ekkor e készülék az *áramerősségi görbét* jelzi. E berendezéssel a következő érdekesebb jelenségeket mutathatjuk ki.*

1. Indukcziómentes zárókörben a feszültség és áramerősség fázisban megegyeznek.

2. Induktiv ellentállású zárókörben az áramerősség a feszültséghez képest fázisban elmarad; változatlan ohmikus ellentállásnál a fáziselmaradás függését az önindukczió tényezőtől például azzal mutathatjuk ki, hogy a dróttekercs üregében levő vasmagvat fokozatosan kihúzzuk, azután a tekercsbe betoljuk.

3. Sorosan kapcsolt ohmikus ellentállás és kapacitás esetén az intensitás görbéje a feszültségi görbét fázisban megelőzi. Sorosan kapcsolt induktiv ellentállás és kapacitás esetén kimutatható, hogy az intensitás fázisban elmarad, illetőleg megelőzi a feszültséget vagy vele fázisban megegyezik ahhoz képest, a mint az önindukczionak az áramfázist késleltető

---

* A harmonikusan változókra vonatkozó analitikai és grafikus tárgyalások meg vannak a következő művekben: Elektrotechnika, írta dr. Hoor Mór; I. rész, 279—334. lap.

Elektrotechnika írta Straub Sándor. II. kiadás, III. rész, 108—127. lap.

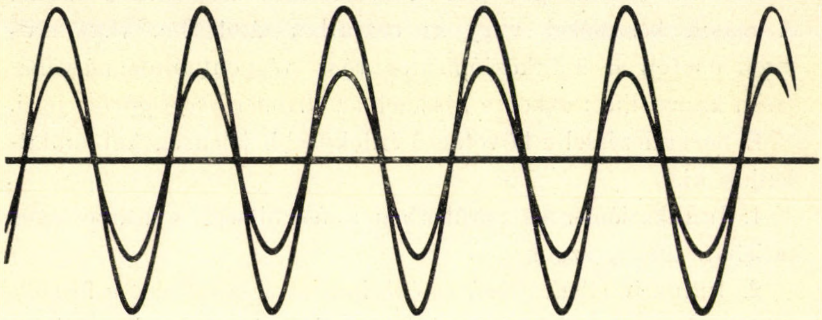
Arnold: Wechselstromtechnik I. Bd. Theorie der Wechselströme und Transformatoren v. J. L. la Cour.

vagy a kapacitásnak siettető hatása túlnyomó, avagy eme hatások egymást kiegyenlítik.

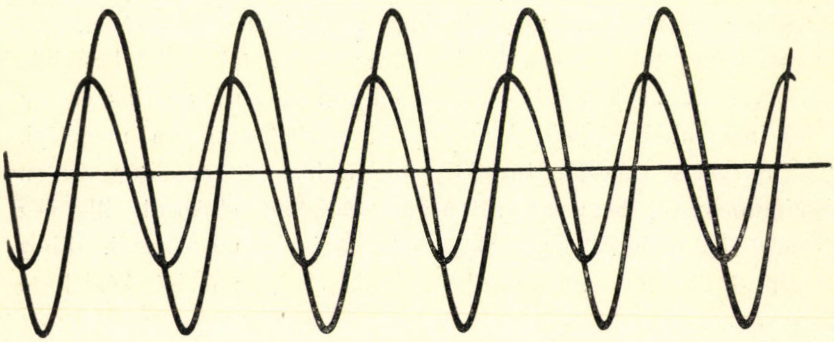
4. A transformator primér és szekundér vezetékében a feszültségi és áramerősségi görbék kölcsönös helyzete kimutatható.

B) Elágazó vezetékben az áramerősségi görbék előállítása.

Ily esetben a jelzőkészülékeket az egyes ágakba igtatjuk. Mutatványokul adom a lágyvaskészülékkel nyert fotografiai felvételeket.



8. ábra.

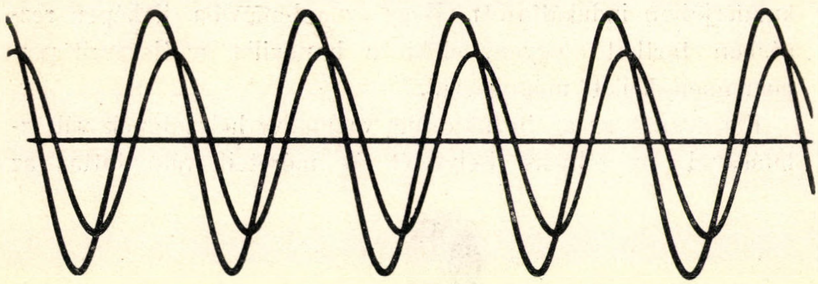


9. ábra.

1. Ohmikus ellentállás esetén az áramfázisok megegyeznek, a mint azt a 8. ábra mutatja.

2. Az egyik ágban induktiv, a másikban ohmikus ellent-

állás van; az első vezetőben az áram fázisban elmarad a másik vezetőt átjáró áramhoz képest. A 9. ábra fotografiai fel-



10. ábra.

vétel, melyben az elmaradó áramot a nagyobb ordináták mutatják.

3. A kondenzator kapcsaiból ohmikus ellentállást ágaztatunk el; a kondenzator vezeték árama megelőzi a másik vezető áramát.

A 10. ábra fotográfiai felvétel, melyben a nagyobb ordinátákkal biró sinusgörbe a kondenzator vezetékére vonatkozik.

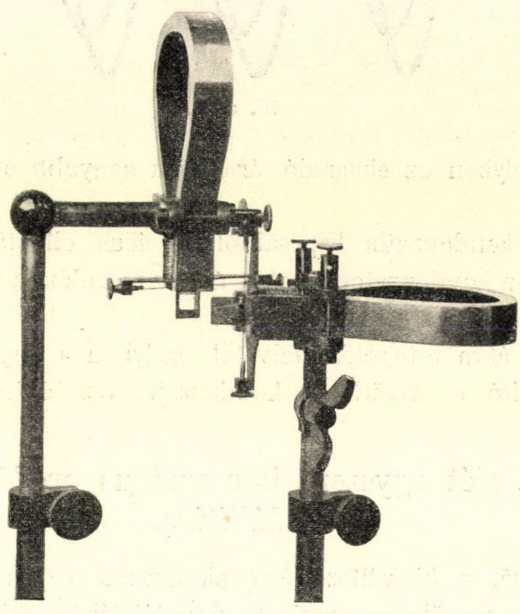
II. Két egyszerű harmonikus eredőjének előállítása.

Az első, a ki változó áramok okozta, egyenlő periodusú, egymásra merőleges rezgések összetételéből ellipsist állított elő és ezen tett mérésekből az áramok fáziskülönbségét határozta meg, tudtommal Ettingshausen volt.* Érdekes eljárásának lényege a következő. Lissajous elrendezését követve, vegyünk két egyenlően hangolt tükörfelszerelésű hangvillát, melyek rezgéstengelye vízszintes, illetőleg függélyes. Az egyik hangvillát szokásos módon, elektromagnetice azzal a szaggatott árammal tartjuk rezgésben, mely egy induktorium pri-

* A. v. Ettingshausen: Beobachtung der Verzögerung im Verlaufe der Induktionsströme mittels des Stimmgabelapparates, Poggendorf's Annalen 159. kötet, 51. lap, 1876. évfolyam.

mérjét is átjárja; a másik hangvilla elektromágnesén pedig azt a váltakozó áramot vezetjük át, mely az induktorium szekundérjében indukáltatott. Hogy ez a hangvilla ilyképen rezgésben tartható legyen, előbb a hangvilla aczélszárait permanensen kellett mágnesezni.

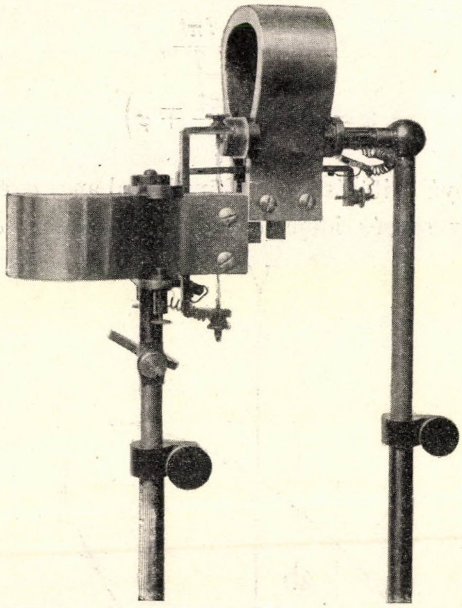
Ettingshausen az induktorium vasmagva helyzetének változtatásával, az ellipsis helyzetét és méreteit változtatta; az



11. ábra.

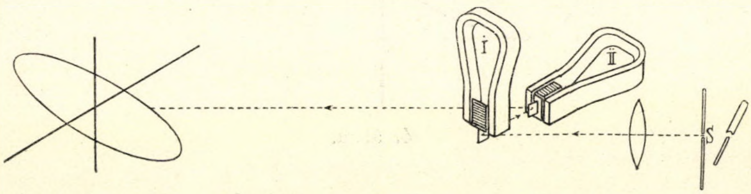
ellipsisen tett mérésekből a primér és szekundér változó áramok létesitette egyszerű rezgések fáziskülönbségére következtetett.

Kisérleteimnél a két egymásra merőleges irányban végbemenő egyszerű harmonikusok eredőjének előállitására az előbb leirt egyik vagy másik készülékpárt használom (11, 12. és 13. ábrák); csakhogy mig a magasabb I. készülék helyben marad, a II. készüléket, a tartója könyökrészének vízszintes tengelye körül 90°-kal és az állvány mint függélyes tengely körül mintegy 180°-kal elforgatjuk. Ezzel a második készülék rezgéstengelye függélyessé vált és a két készülék



12. ábra.

tükrei egymással szembejutottak. Az első tükörre vetett összeverődő fényt (13. ábra), visszaverődés után a második tükörre

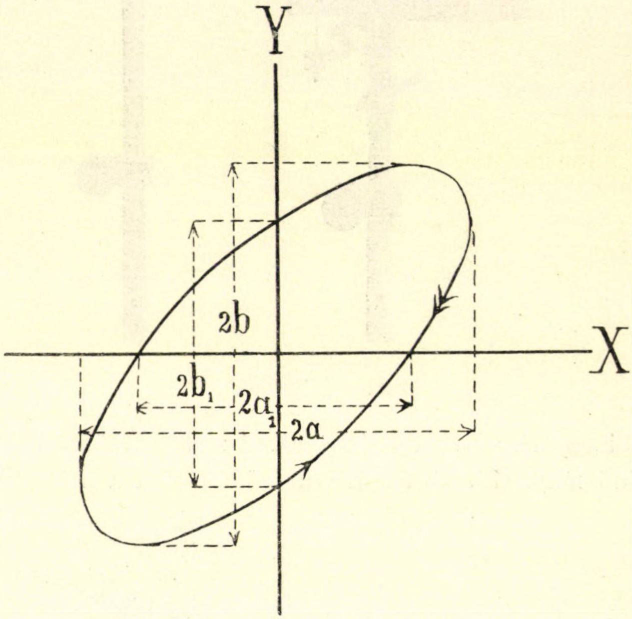


13. ábra.

és innét az ernyőre, illetőleg fényérzékeny lemezre irányítjuk. A készülékeket úgy kell beigazítanunk, hogy ha csupán a magasabb I. készüléket járja át váltakozó áram, akkor függélyes, ha csak a második készülék az áramtól átjárt, vízszintes fénysávot kapjunk az ernyőn. Mindkét készüléken vezetvén egyenlő periodusú váltakozó áramot, eredőül általában ellipsist kapunk. Az alkotó harmonikusok fáziskülönbségét a következőképen mérhetjük.

Legyenek
$$x = a \sin \frac{2\pi t}{T}, \qquad 1)$$
$$y = b \sin\left(\frac{2\pi t}{T} \mp \varphi\right) \qquad 2)$$

az x és y irányú kitérések t időpillanatban; a és b az amplitudók, T egy rezgés ideje, φ a fáziskülönbség. A φ negativ



14. ábra.

előjele az y irányú harmonikusnak fáziselmaradását jelenti az x irányúhoz képest; a φ positiv előjele mutatja, hogy y fázisban megelőzi x-et.

Mivel a példakép közlendő kisérleteink amaz esetekre szorítkoznak midőn $\varphi < \frac{\pi}{2}$-nél, y fáziselmaradása esetén az ellipsis (14. ábra) az óramutató járásával ellenkező értelemben iratik le (a rajzon az egyszerű nyíl szerint); ha y fázisban megelőzi x-et, akkor az ellipsisben való mozgás az óramutató értelmében megy végbe (dupla nyíl jelzés szerint).

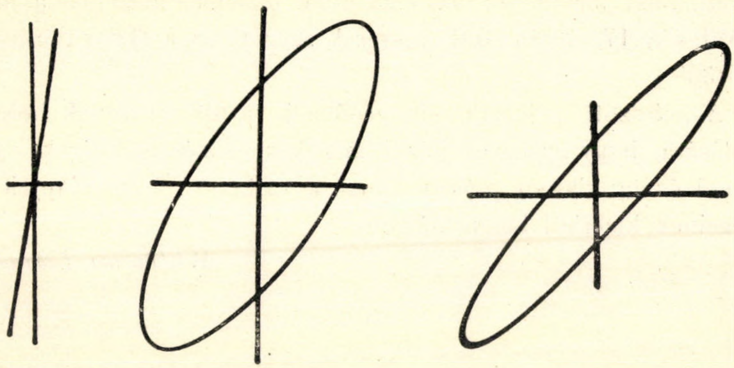
Ha felteszszük, hogy $x=0$, a mi 1) egyenlet szerint egyszer $t=0$ időben is történik, akkor a 2) egyenlet értelmében

$$y = \mp b_1 = b \sin(\mp \varphi) = \mp b \sin \varphi,$$

ebből

$$\sin \varphi = \frac{b_1}{b} = \frac{2b_1}{2b};$$

$2b_1$ és $2b$ az ellipsisen lemérhetők, tehát φ megvan határozva.



15. ábra. 16. ábra. 17. ábra.

Ellenőrző értéket a φ-re még így kaphatunk.:

A 2) egyenlet szerint

$$y = 0 \quad \text{ha} \quad t = \pm \frac{\varphi}{2\pi} T$$

ugyanekkor 1) egyenletből

$$x = \pm a_1 = a \sin(\pm \varphi) = \pm a \sin \varphi$$

és

$$\sin \varphi = \frac{a_1}{a} = \frac{2a_1}{2a}$$

végeredményben

$$\sin \varphi = \frac{2b_1}{2b} = \frac{2a_1}{2a}$$

és a két mérés középértéke φ pontosabb értékét adja.

A fotografiai felvételek a következő esetekre vonatkoznak.

1. Elágazó indukcziómentes vezetőkben az áramok fázisban megegyeznek. Az alkotó harmonikusok eredője egyenes, melynek mentén harmonikus mozgás megy végbe; a 15. ábra az egyes alkotókat és az eredőt is mutatja.

2. Az elágazó vezetők egyike induktiv, a másik ohmikus ellentállást tartalmaz. Az első áram a másodikhoz képest fázisban elmarad (16. ábra). A mérések eredménye, hogy e fázis-elmaradás $40°55'$.

3. Az elágazó vezetők egyike kondensatort, a másik ohmikus ellentállást tartalmaz; az első áram fázisban megelőzi a másikat s a 17. ábrán tett mérések szerint ez a fáziskülönbség $20°50'$.

A felhozott példákat elengedőknek tartottam annak beigazolására, hogy az egyes jelzőkészülékek és készülékpárak egyszerű és tanulságos módot adnak a váltakozó áram alapjelenségeinek kisérleti bemutatására.

Wittmann Ferencz.

A KRITIKUS ÁLLAPOTRÓL.

I.

Az utolsó évek kisérletei, melyek a kritikus hőmérsékletnek s egyáltalában a kritikus átmenetnek megvizsgálására vonatkoztak, úgy látszik, megingatják az ANDREWS-féle elméletet. Jelen dolgozatnak czélja annak megbeszélése, hogy éppen ezen újabb kisérletek már mennyiben szolgáltattak döntő eredményeket a régi elmélet megváltoztatásához.

ANDREWS fölfedezésének lényege abban állott, hogy megállapította, hogy van egy meghatározott hőmérséklet, melyen a légnemű testet a nyomás puszta növelése által folytonos módon folyós testté lehet sűriteni, a folyós testet pedig a nyomás csökkentése által folytonos módon légnemű állapotba átvinni s a mely hőmérséklet felett bármily nagy nyomás alkalmazásával sem lehet a légnemű testet folyós testté sűríteni. Ezen hőmérsékletet elnevezte *kritikus hőmérsékletnek*. *A kritikus hőmérséklet tehát egy határhőmérséklet*, mely felett az anyag csakis légnemű állapotban fordulhat elő. A kritikus hőmérsékleten pedig az anyag teljesen homogén.

II.

Lássuk most az emlitett kisérleti eredmények fontosabbjait.

A. HAGENBACH megvizsgálta az elektromos vezetőképességnek a hőmérséklettel való változását kénessavban való sóoldatokra nézve[1]. A megvizsgálandó anyagot erősfalú üvegedénybe zárta,

---

[1] Ann. d. Phys. I. pag. 481 ; 1900 — V. pag. 276 ; 1901.

melybe két elektród volt beforrasztva. Minket érdeklő kisérleti eredményei szerint oldatainál megtalálta ugyanazon jelenségét, melyet már CAILLETET és COLARDEAU észleltek, mikor jódnak folyékony kénsavban való oldatát hevitették a kritikus hőmérséklet fölé.[1] Ha ugyanis az edényben az oldat szinezve volt, bár a gőztér a meniszkusz eltünése előtt kis szinezést nyert, mégis a szineződés az edény alsó részében még a meniszkusz eltünése után is élénkebb volt, mint a felső részében. A mi az elektromos tulajdonságokat illeti, megállapította, hogy a megvizsgált sóoldatok elektrolytikus vezetőképessége megmarad a kritikus hőmérsékletek fölött is. Az elektromos ellenállás a kritikus hőmérséklet fölött is különböző volt, a szerint, a mint az elektródok a gőztérben, vagy az oldatban voltak elhelyezve. A kisérleti eredmények szerint a meniszkusz eltünése után a csőben alant nagyobb volt a vezetőképesség, mint a felső részben. Ha azonban a csövet, melyben az oldat volt, miután a hőmérséklet a kritikus fölé emelkedett, a melegitő fürdőben lassan megforditotta, elérte azt, hogy a cső mindkét részében ugyanakkora vezetőképesség mutatkozott.

Ezt a kiegyenlitődést akkor is el lehetett érni, ha a csövet hosszabb ideig a kritikus hőmérsékletnél magasabb hőfokon tartotta. Az elektródokat a gőztérbe helyezve, az ellenállás ekkor fokozatosan csökkent; ha az elektródok az oldatban voltak, az ellenállás növekedését lehetett észlelni. Körülbelül két órai melegités után az ellenállásra nézve mindkét esetben ugyanakkora értéket kapott.

Másik kisérleti berendezése szerint HAGENBACH[2] egy elemet szerkesztett két fémből és egy sónak folyékony kénessavban való oldatából. Az elemet különböző hőmérsékletekre hevitve

[1] Journ. phys. (2) VIII. pag. 389; 1889 — Math. és Phys. Lapok VIII. pag. 320; 1899.

[2] Ann. d. Phys. VIII. pag. 568; 1902. L. még P. EVERSHEIM értekezését u. o. pag. 539.

kitünt, hogy a kritikus hőmérsékleten felül is szolgáltatott áramot, ennélfogva az oldat elektrolytikus vezetőképessége csakugyan megmarad a kritikus hőmérsékletnél magasabb hőfokon is.

A sürűség változását vizsgálta meg igen nagy pontossággal a kritikus hőfok körül G. Teichner.[1] Eljárásának lényege azon alapszik, hogy a megvizsgálandó folyadékba igen parányi üvegtestecskéket helyezett, a melyeknek fajsúlyát előzetesen meghatározta. Ezek a testecskék azután a csőben a sürűségüknek megfelelő helyeken lebegnek s így ezek helyzeteiből, illetőleg helyzetváltozásaiból a csőben levő anyag sürűségének változására nézve következtetést lehet vonni.

Kisérleteinek eredményeit a következőkben foglaljuk össze:

A meniszkusz eltünésének hőfoka a hevítés módjától függ s attól is, hogy elősegítjük-e a csőben levő anyag összekeveródését. Ezen két tényezőtől függ az is, hogy a meniszkusz a cső melyik helyén tünik el.

Ha a cső tartalmának összevegyülését lehetőleg meggátoljuk, akkor a kritikus hőfok felett is lényeges (kb. 8—50%) sürűségkülönbségek jelentkeznek. Ha a hevítés alatt gondoskodunk az összekeverődésről, akkor a meniszkusz hamarább eltünik, a cső tartalma homogén lesz, de erősen elhomályosodik és teljesen állandó hőmérséklet mellett élénk csomóképződés, eresedés lép fel. Emelve a hőmérsékletet, a megzavarodás s a csomóképződés szünik s mintegy 4°-kal a meniszkusz eltünésének hőfoka felett teljesen megszünik.

A sürűség változása nem történik folytonos módon.

III.

Mindezen kisérletek, melyek részben megerősítik más kutatóknak régebbi észleleteit,[2] az Andrews-féle elmélettel össze-

---

[1] Ann. d. Phys. XIII. pag. 595; 1904.
[2] De Heen, Dwelshauvers-Dery, Galitzine.

egyezhetetlen eredményeket adtak. Megpróbálták tehát, a régi elméletet teljesen elvetve, más alapon adni meg a kritikus jelenségek magyarázatát.

J. TRAUBE[1] a következő hipotézist állítja fel. A molekulákat alkotó atomok térfogatának a hőmérséklet emelkedése alkalmával jelentkező nagyobbodása nem történik folytonos módon. Kétféle molekula van: liquidogén és gazogén molekula. Gazogénrészecskék feloldhatók a liquidogénfázisban és forditva. A hőmérséklet meghatározza a kétféle molekulafaj halmazának viszonyát (Mengenverhältniss)[2] úgy a tiszta folyadékban, mint annak telitett gőzében. *A kritikus hőfok átalakulási temperatura,*[3] *azon hőfok, melynél a gazogén- és liquidogénrészecskék minden arányban keveredhetnek.*

A hipothézis szerint tiszta folyadék, mely csak liquidogén molekulákból áll, csak az abszolut 0 fokon létezhetik; ezen hőfok felett a folyadékok gazogénrészecskéknek oldatai a liquidogénfázisban, a telitett gőzök pedig liquidogénrészecskék oldatai a gazogénfázisban. A kritikus hőfok közelében a liquidogénrészecskék átalakulása gazogénekké jelentékenyen megszaporodik s ez magyarázza meg, hogy a folyadék térfogata ekkor annyira növekedik.

A geometriai ábrázolásban a két fázis görbéje egymást a kritikus hőfokban metszi s ezen hőfok fölött a két fázisnak közös görbéje van. A hol ezen görbe a hőmérséklet tengelyét metszi, az azon hőfokot adja, melyen felül csak gazogénrészecskék állhatnak fenn.[4]

TEICHNER is foglalkozik kisérleteivel kapcsolatban a kritikus jelenség megmagyarázásával.[5] Kiindul a kinetikus gázelmélet

---

[1] Ann. d. Phys. VIII. pag. 283; 1902 — V. pag. 556; 1901.

[2] Math. és Phys. Lapok XIV. pag. 275; 1905 a *) alatti jegyzet.

[3] Umwandlungs temperatur. De Heen és Dwelshauvers-Derynél: température de transformation.

[4] Absoluter Vergasungspunkt. — De Heen és Dwelshauvers-Dery szerint température de la dissociation physique.

[5] Ann. d. Phys. XIII. pag. 609; 1904.

azon ismeretes tételéből, a mely megállapitja a folyékony és gázalakú molekulák mozgásának alakját. A hőmérséklet emelkedésekor ezen kétfajta mozgás mindinkább hasonlóvá lesz egymáshoz; a folyadékmolekulák körpályái a kinetikus energia növekedése következtében mindig nagyobbak lesznek, a gőzmolekulák pedig a tovahaladó mozgás számára mindig szükebb helylyel fognak birni s végre is csak kis térben mozoghatnak ide-oda egy nyugalmi helyzet körül. Beáll azután az az állapot, a mikor a kétfajta mozgás annyira hasonló lesz egymáshoz, hogy egymás mellett nem állhat fenn zavartalanul és interferálnak. Az interferálás jele a meniszkusz eltünése. Nem kell azonban, hogy ezen pillanatban a kétfajta mozgás már teljesen identikus legyen egymással. Így aztán a meniszkusz eltünésekor a két fázis még külön fennállhat s a csőben különböző sürűségeket észlelhetünk.

IV.

Vizsgáljuk meg most más szempontból, hogy az ismertetett kisérleti eredmények mennyiben döntik meg a régi elméletet s mennyiben tesznek szükségessé új, ettől lényegesen különböző magyarázatot.

Andrews elméletének megvizsgálásánál a kérdés így fogalmazható: van-e oly hőmérséklet, a melyen a folyékony és a légnemű állapotok egymásba folytonos módon átmennek; mi módon viselkednek ezen hőfokon a különböző fizikai tulajdonságjelzők? Más kérdés azután: mi ezen állapot beálltának az experimentális ismertető jele?

Az ismertetett kisérletek szerint a meniszkusz eltünésének pillanatában a cső tartalma nem válik homogénné, a folyadéknak s telitett gőzének sürűségei egymástól különböznek. A meniszkusz eltünésekor — oldatokra nézve — még mindig kétféle elektromos vezetőképesség volt észlelhető a csőben. A sürűségeknek, valamint a vezetőképességeknek kiegyenlitődését sietteti, ha a cső tartalmát valami módon megrázzuk vagy megkavarjuk. Elérhető ez azonban oly módon, ha a csövet a meniszkusz eltünésekor észlelt hőmérsékletnél magasabb hőfokon tartjuk hosszabb ideig.

Itt azonban utalni kell egy körülményre, melyre eddig nem helyeztek kellő súlyt.

Az észleléseknél természetszerűleg mindig az volt a feltevés, hogy a kritikus állapot beálltának külső ismertető jele a meniszkusz eltünése. De vajjon ez helyes föltevés-e? A meniszkusz eltünésekor sem a sürűségek, sem az elektromos vezetőképességek nem egyenlők a csőben, de néhány fokkal magasabb hőmérséklet mellett ezen egyenlőség beáll.

Az egyik kérdés, a mi itt felmerülhet, az, hogy vajjon nem ezen magasabb hőmérséklet jellemzi-e a kritikus állapotot s a jelenség lefolyásában észlelt diszkontinuitásokat nem azon körülmény okozta-e, hogy az anyagra nézve még nem állott be a kritikus állapot, mikor a meniszkusz eltünt?

Egy másik s talán ennél még fontosabb kérdés is szóba kerülhet. Teichner észlelései szerint a meniszkusz eltünésének hőfoka nem állandó. Vajjon az a magasabb hőmérséklet, melyen a cső tartalma tényleg homogénné válik, állandó-e vagy függ szintén külső körülményektől? Ezen problémának akármily értelemben való eldöntése nagyfontosságú lenne a kritikus viszonyok ismeretére nézve.

Végezetül meg kellene vizsgálni a különféle fizikai tulajdonságjelzők változásait ezen pont környezetében és pedig különösen arra helyezve a fősúlyt, hogy ha e tulajdonságjelzők értékei a folyadékra s telitett gőzére vonatkoztatva, egymáshoz közelednek, vajjon az egyenlő értéket mind ugyanazon hőfokon veszik-e fel, vagy sem.

Közbevetőleg megjegyzem, hogy fontos lenne annak pontos ismerete, hogy a kisérleteknél észlelt hőmérsékletek mennyiben és mikor felelnek meg a csőben levő anyag valódi hőmérsékletének? Ennek felderitésére végzett előzetes kisérleteim arra mutatnak, mintha a hőmérséklet változása a cső belsejeben másképpen történnék, mint azt eddig a kisérleteknél általában feltételezték.

Azt hiszem, hogy a felsorolt okoknál fogva az Andrews-féle elmélet végleges elejtéséről még nem szólhatuk. Az ismertetett kisérletek részben még nem szolgáltattak oly döntő eredményeket, melyek annak lényegét végleg megczáfolják; részben pedig oly pontokat hagytak földerítetlenül, melyeknek teljes ismerete nélkül a végső szót nem lehet kimondani.

Péch Aladár

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA BOLYAI-JUTALMA.

1902 deczember 15-én mult száz éve, hogy hazánknak eddig legnagyobb mathematikusa, a lángelméjű Bolyai János született. Ezt az évfordulót kegyelettel és büszkeséggel ültük meg itt hazánkban és velünk ünnepeltek a művelt világ összes mathematikusai. Ebből az ünneplésből a Magyar tudományos Akadémia hozzá méltó módon vette ki a részét azt határozván, hogy a *Bolyai*-ak emlékére nemzetközi mathematikai nagyjutalmat alapít. E *Bolyai*-jutalom szabályzatának eredeti szövege a következő:

«1. Bolyai János születése századik évfordulójának ünnepléséhez a Magyar Tudományos Akadémia azon határozatával járul hozzá, hogy a halhatatlan tudósnak, valamint az ő mélyen gondolkozó atyjának és a tudományos mesterének emlékezetére, első ízben 1905-ben és azután minden ötödik évben a deczemberi összes ülésén, a megelőző öt évben bárhol és bármely nyelven megjelent legkiválóbb mathematikai vizsgálat szerzőjét, tekintetbe véve az illetőnek előbbi tudományos működését is, 10,000 korona «Bolyai-jutalom»-mal és éremmel tünteti ki. Az érem egyik oldalát a M. Tud. Akadémia és Budapest képe, másik oldalát magyar felirat diszíti.

2. Ha meghalt író munkája itéltetik legjobbnak, az elhunyt örököseinek adatik ki a jutalom.

3. A jutalom odaitélése évében a M. Tud. Akadémia III. osztálya, legkésőbb márcziusi üléséből, két belső és két külső tagból álló bizottságot választ, mely október első felében, Budapesten egybegyűlve, határoz. A bizottság saját kebléből maga választja elnökét, ki a bizottságban szintén szavaz és szavazategyenlőség esetében szavazatával dönt. Ugyancsak a bizottság határozatáról, a díjat odaitélő összes ülés számára, részletesen indokolt jelentést készít.

4. A bizottsági tagoknak esetleg szóba jöhető dolgozatai mind a bizottságnak határozatából, mind a jelentésből ki vannak zárva.

5. A külső tagok, kik a tanácskozásra hozzánk fáradnak és néhány

napot nálunk töltenek, egyenként 1000 koronában részesülnek. Az előadói jelentés tiszteletdíja 300 korona.

6. A jelentés az Akadémiai Értesítőben jelenik meg; a Magy. Tud. Akadémia gondoskodik azonkívül a jelentésnek külföldön is közzétételéről s a szövetségben álló akadémiák számára való megküldéséről.»

(Kelt a Magyar Tud. Akadémia 1902. évi január 27-én tartott összes ülésében; ügyrendbe iktattatott 1903. évi január 26-án.)

E jutalom az idén került legelőször kiosztásra és Akadémiánk döntését világszerte a legnagyobb érdeklődéssel várták. E jutalomra vonatkozó jelentést kivonatban itt közöljük t. olvasóinkkal.*

Jelentés a Bolyai-jutalomról.

(Előterjesztette *Rados Gusztáv* l. t. a Magyar Tudományos Akadémia 1905 decz. 18-iki összes ülésén.)

A M. Tud. Akadémia III. osztálya az alapítványi szabályzat értelmében járva el, márcziusi ülésében az 1905. évre Kőnig Gyulá-t a III. osztály titkárát és Rados Gusztáv ugyanennek az osztálynak tagját, mint az Akadémia belső tagjait, Gaston Darboux-t, a franczia tudományos akadémia örökös titkárát és Félix Klein-t, a göttingai kir. tudós társaság tagját, mint külső tagokat küldötte ki a Bolyai-jutalmat odaitélő bizottságba. E bizottság f. é. október hó 11-én Budapesten gyűlt össze 11-én és 12-én folytatott szóbeli tárgyalásaira és elnökéül Gaston Darboux-t, előadójául pedig Klein Félix-et választotta meg.

A bizottság üléséről felvett jegyzőkönyv befejező része szószerint a következő:

«A bizottság mindenekelőtt constatálta, hogy a modern mathematikai kutatást irányító új nézőpontok igen tekintélyes számú oly mathematikai munkát hoztak napvilágra, a melyeknek nagy becsét a bizottság örömmel ismeri el; de éppen ez a körülmény nehezítette meg rendkívüli módon a bizottság feladatát.»

«A bizottság úgy volt meggyőződve, hogy az Akadémia intentiójának legjobban felel meg, ha csak azon munkák tárgyalására szorítkozik, a melyeknek a mathematika általános fejlődésére legkiválóbb hatásuk volt. Ily értelemben a bizottság arra szorítkozhatott, hogy csak két kutató munkáit tegye megfontolása tárgyává. E két kutató David Hilbert és

---

* E jelentés megjelent az Akadémiai Értesítő 1906. évi februári füzetben; német nyelven a «Mathematische Annalen», franczia nyelven pedig a «Bulletin des Sciences Mathématiques» czímű folyóiratok közlik.

Henri Poincaré, a kiknek működése minden oldalról a legáltalánosabb elismerésben részesül.»

«A bizottság ezután egyhangúlag úgy határozott, hogy a Bolyai-jutalmat Henri Poincaré-nak javasolja odaitélni, a kinek 1879-ben megindult kutatásai a mathematika egész területe körül mintegy körfutásukat azóta bevégezték, mindenütt új nézőpontokkal szolgálva a mathematikai kutatásnak.»

«A bizottság azonban ugyanekkor azt is határozta, hogy megbízza előadóját azzal, hogy — a közszokás ellenére — jelentésében David Hilbert munkáira épp oly részletességgel kiterjeszkedjék, mint Poincaré-ira; ezzel Hilbert iránti nagyrabecsülésének különös jelét óhajtván adni, kinek munkáit általános jelentőségükre nézve teljesen elismeri, s róluk úgy van meggyőződve, hogy ezek hova-tovább a legnagyobb hivatású szerepre fognak szert tenni.»

Gaston Darboux, a bizottság elnöke.

Félix Klein, a bizottság előadója.

Kőnig Gyula, Rados Gusztáv, bizottsági tagok.

E határozatok értelmében Félix Klein-nak jutott volna a feladat, hogy, mint a bizottság megválasztott előadója, Henri Poincaré és David Hilbert munkáit az új mathematikai eszmékre és módszerekre való fejlesztő hatásuk tekintetében behatóan ismertesse és méltassa. Sajnos, hogy Félix Klein kíméletet igénylő egészségi állapota miatt előadói tisztjéről kénytelen volt lemondani és így a bizottságnak — és hozzátehetem — az egész mathematikai közönségnek is a legnagyobb sajnálat érzésével kellett Klein-nak érdeklődéssel várt jelentéséről lemondania. Klein jelentésével, ha azt előterjeszthette volna, bizonyára fényes és fontos adalékot szolgáltatott volna a modern mathematikai kutatás történetéhez. A bizosttság, hogy a várt jelentés elmaradásáért csak némi pótlást is adjon, engem részesített abban a meg nem érdemelt megtiszteltetésben, hogy Félix Klein helyébe lépjek. Tekintve az idő rövidségét, mely a felette dús anyag tanulmányozására rendelkezésemre állott, de különben e jelentés feladatának nagy nehézségeit is, attól kell tartanom, hogy az előadói tisztemhez fűződő igényeknek csak igen tökéletlen módon fogok megfelelhetni. Hogy a támasztható követeléseknek csak némileg is eleget tegyek, már eleve arra kellett szorítkoznom, hogy az itt tekintetbe jövő igen nagy számú munkálat közül csak azokat ismertessem részletesebben, melyeket a bizottság szóbeli tárgyalásai alkalmával mint különösen fontosakat kiemelt.

Henri Poincaré a jelenkornak kétségtelenül legnagyobb hatást keltő kutatója a mathematika és mathematikai physika terén. Erősen kidomborodó egyéniségével intuitiv kutatónak mutatkozik, a ki messzevágó vizsgálódásaira az ösztönzést a geometriai és physikai szemlélet kiapadhatatlan forrásából meríti, de e mellett kutatásának tárgyát logikai szigorúsággal is felépíteni képes. Fényes mathematikai leleményességén kívül talán az a tehetsége jellemzi őt legjobban, melylyel mathematikai vonatkozásokat a legmerészebb módon és e mellett sikeresen általánosítani képes, a mivel nem egyszer vált előtte lehetővé, hogy a megismerésünk határait úgy a tiszta, valamint az alkalmazott mathematika terén messzire kitolja.

Erről tanúságot tesznek már az automorph függvényekre vonatkozó első dolgozatai, a melyekkel megindította azoknak a fényes közleményeknek sorát, melyek minden idők legkiválóbb mathematikai alkotásai közé számítandók. Arra törekedvén, hogy a differentiálegyenletek megoldásai számára egyértelmű és mindenütt összetartó előállításokat nyerjen, első sorban a totális differentiálegyenletek legegyszerűbb, addig is már pontosabban megvizsgált osztályához, az olyan közönséges lineár differentiálegyenletek osztályai felé fordult, melyeknek együtthatói rationálisok, vagy pedig algebraiak. E vizsgálatai új transcendens függvényekre vezették őt, melyek úgy az elliptikus, mint az elliptikus modulus-függvények messzevágó általánosításának tekinthetők és egyszersmind a linear differentialegyenletek megoldásánál ugyanazt a szolgálatot teszik, melyet az elliptikus és Abel-féle thetafüggvények az algebrai differentiálok integráljainak elméletében tettek. Ezeket az új transcendens függvényeket az a tulajdonságuk jellemzi, hogy a lineár tört-helyettesítések bizonyos nem folytonos csoportjainak transformatióinál változatlanul maradnak. Ha e

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

helyettesítések determinánsa, $ad-bc=1$ és az összes együtthatók valósak, akkor alkalmazásukkor a valós számok tengelyét hagyják változatlanul. Ha már most az ilyen helyettesítéseket olyanokkal komponáljuk, a melyeknek együtthatói tetszés szerinti komplex számok, akkor e komponált helyettesítések bizonyos kört hagynak változatlanul, melyet Poincaré alapkörnek nevez. Az így jellemzett csoportok azok, melyeket Poincaré Fuchs-féle csoportoknak elnevezett, míg a lineár helyettesítések legáltalánosabb csoportjait Klein-féle csoportoknak nevezi. Nagy elmeéllel alkalmazott nem-euklidesi mérési módszerrel sikerült Poincaré-nak az említett csoportok leirását és meghatározását szemléletessé tenni. E csoportok mindegyike ugyanis alkalmat ad a síknak, vagy pedig a térnek bizonyos szabályos beosztására és ezzel a Fuchs-féle és Klein féle csoportok felállításának problemája arra van visszavezetve, hogy meghatározandók a síknak és térnek összes szabályos beosztásai. Az úgynevezett cyklusok bevezetése után POINCARÉ a FUCHS féle csoportokra vonatkozólag lehetséges fundamentális tartományokat hét családba sorozhatta és végül valósággal fel is állíthatta az egyes beosztásokhoz tartozó csoportokat is. Felmerült most már az a további fontos problema, a mely valamely FUCHS-féle csoport helyettesítéseinél invariansnak mutatkozó függvény meghatározását követeli. Ezek a POINCARÉ-től FUCHS-féléknek nevezett függvények. Itt POINCARÉ t ismét az elliptikus függvényekkel való analogia vezeti. Ismeretes, hogy az elliptikus thetafüggvények nem szakaszos függvények, hanem az argumentumnak egy periodussal való növesztésekor bizonyos kitevős tényező lép hozzájuk. POINCARÉ most már végtelen sorokat alakít, a melyeken valamely FUCHS-féle csoport helyettesítéseinek hatása már külsőleg is mutatkozik és a melyeknek magatartása hasonlít az elliptikus thetafüggvényekre. Ezek a sorok

$$\theta\,(z, H\,(z)) = \Sigma H \left(\frac{a_i\, z + b_i}{c_i\, z + d_i}\right) (c_i\, z + d_i)^{-2m}\ (m > 1) \qquad 1)$$

alakúak, hol az összeadás a csoport összes helyettesítéseire kiterjesztendő és H tetszés szerinti rationális függvény jele. Az e sorokkal értelmezett egyértékű analytikai függvények azok, melyeket POINCARÉ FUCHS-féle thetafüggvényeknek nevez. Ezek az adott FUCHS-féle csoport minden

$$\left(z, \frac{a_k\, z + b_k}{c_k\, z + d_k}\right)$$

helyettesítésére nézve kielégítik a

$$\theta\left(\frac{a_k\, z + b_k}{c_k\, z + d_k}\right) = \theta\,(z)\,\frac{1}{(a_k\, z + b)^{2m}}$$

függvényegyenletet. A mint POINCARÉ-nak egy további elmés analysise mutatja, a Fuchs-féle thetafüggvényeknek két faja van. Az egyik fajta ilyen függvényre nézve az alapkör ú. n. természetes határ és így ezek a függvények csak ezen a körön belül léteznek, a másiknak pedig az alapkör kerületén csak izolált singularitásai vannak, a miért is ezek az utóbbiak az egész síkban folytathatók.

Az elliptikus függvények elméletében követett eljárással analogiában POINCARÉ egyenlő fokú θ-függvények hányadosaival olyan függvényeket állít elő, a melyek az adott FUCHS-féle csoport transformatiói iránt érzéketlenek. Ezek a függvények a FUCHS-féle függvények, a melyekre nézve az elliptikus függvényekre vonatkozó törvényekkel analog törvények érványesek. A zérus- és a végtelen-helyeiknek száma egy fundamentális sokszögön belül mindig ugyanaz. Ugyanannak a csoportnak megfelelő két FUCHS-féle függvényt mindig olyan algebrai egyenlet fűzi egymáshoz, a melynek neme a megfelelő csoport geometriai úton megállapított nemével megegyezik. Ezzel az algebrai függvények elméletével oly kapcsolat létesült, a melyet POINCARÉ sikeresen felhasznált a következő tétel bebizonyítására: Valamely tetszés szerinti módon megadott algebrai görbe pontjainak koordinátái mindenkor mint valamely parameter egyértelmű függvényei állíthatók elő. A FUCHS-féle függvények a vizsgálatnak ugyancsak hathatós eszköze gyanánt mutatkoztak az Abel-féle integrálok elméletében is. POINCARÉ-nak ama vizsgálatai, melyek ily integráloknak alacsonyabb neműekre való visszavezethetőségére vonatkoznak, azok, a melyek e felette nehéz kérdés velejébe a legmélyebben beléhatolnak.

Az ú. n. FUCHS-féle zetafüggvények bevezetésével, melyeknek értelmezése egy rationális tagú sor és egy θ-sor hányadosa segítségével történik, sikerült végre POINCARÉ-nak azt is bebizonyítania, hogy minden lineár differentiálegyenletnek megoldása, melynek együtthatói a független változónak algebrai függvényei, ezeknek az új transcendenseknek segítségével hasonló módon állítható elő, mint pl. az algebrai differentiálok integráljai az Abel-féle θ-függvények segítségével.

POINCARÉ ezzel az automorph függvények tanulmányozásának és alkalmazásának tág teret nyitott és megvilágítván az összefüggést, mely ezt az elméletet a differentiálegyenletek elméletéhez fűzi, az utóbbit új és termékeny módszerekkel gazdagította.

POINCARÉ-nak további általános függvénytani vizsgálatai közül kiemeljük a «Sur un théorème de la théorie générale des fonctions» (Bulletin de la Société mathématique de France. 1883.) czímű értekezését. Ebben a többértelmű analytikai függvények elméletének az egyértelmű analytikai függvények elméletére való visszavezetéséről szól. Valóban sikerült is POINCARÉ-nak a következő alapvető tételt felállítania. Ha y az x-nek tetszés szerinti többértelmű függvénye, akkor mindig meghatározható a z változó oly módon, hogy x és y mint ennek egyértelmű függvényei előállíthatók legyenek.

Megemlékezünk itt még továbbá POINCARÉ-nak ama fontos munkájáról, mely a transcendens egész függvények LAGUERRE-féle nemére vonatkozik (Bulletin de la Soc. Math. 1883.). Ennek főtétele a $\Sigma A_n\, x^n$ transcendens egész függvény nemére p-re nézve a következő vonatkozást állapítja meg:

$$\lim_{n=\infty} A_n\,(n!)^{\frac{1}{p+1}} = 0,$$

melynek későbbi fontos vizsgálatokban jelentékeny szerep jutott.

Nagy jelentőségű volt az analytikai függvények általános elméletében annak a kérdésnek eldöntése, vajjon lehetséges-e valamely adott függvényelem folytatásainak megszámlálhatatlan halmazából szabályos eljárás segítségével a folytatásoknak azt a halmazát kiválasztani, melyek az analytikai függvény teljes meghatározására elegendők. Ez a kérdés a legszorosabban függ össze azzal, hogy mekkora valamely többértékű analytikai függvény értékei alkotta halmaznak számossága tartományának tetszés szerinti helyén. POINCARÉ bebizonyította, hogy bármely analytikai függvény teljes meghatározására a függvényelemeknek már megszámlálható halmaza elegendő és így a tartomány tetszés szerinti helyéhez tartozó függvényértékek is megszámlálható halmazt alkotnak.

Hogy a széttartó soroknak bizonyos feltevések mellett való használata a mathematikai kutatásnak törvényesen elismert segédeszközei közé emelkedett, főleg annak a körülménynek köszönhető, hogy POINCARÉ a tőle asymptotikusoknak nevezett előállításokat a lineáris differentiálegyenletek irreguláris megoldásaira vonatkozó vizsgálataiban és a «Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique» czímű híres értekezésében bőven alkalmazta és ezzel másokat hasonló irányú vizsgálódásokra buzdított.

Új fordulatot adott az n főegységből alakított hypercomplex számok elméletének is azzal, hogy reámutatott ennek a Lie-féle csoportelmélettel való összefüggésére, a mivel a complex számok elméletét egészen új világításba helyezte és lehetővé tette, hogy az ide vonatkozó alapproblemák megoldására a csoportelmélet segédeszközeit felhasználjuk.

Megemlítjük még a határtalan sok egyenletből álló és határtalan sok ismeretlent tartalmazó lineár egyenletrendszerek elméletét, a melynek POINCARÉ a voltaképeni megalapítója, mert ő foglalkozott legelőször végtelen determinánsokra vonatkozó összetartó kriteriumokkal.

Még röviden meg kell emlékeznem POINCARÉ-nak néhány olyan dolgozatáról, a melylyel a több változós analytikai függvények elmélete számára készítette elő a talajt. Itt első sorban meg kell említenünk «Sur les résidus des intégrales doubles» czímű értekezését. Az egy és több változós függvények elméletének már alapjában is mélyreható külömbségek mutatkoznak. Az egyik elmélet tételeinek közvetetlen átvitele a másikba csak a legritkábban sikerül. POINCARÉ megmutatta, hogy miképen mondhatók ki többszörös integrálok esetében CAUCHY-nak a residuumra vonatkozó alapot vető tételei és ezután felhasználja ezeket a többszörös integrálok periodicitási modulusainak és az Abel-féle thetafüggvények tanulmányozásában.

Evvel kapcsolatban még kiemeljük a magasabb sokaságok analysis situs-ára vonatkozó vizsgálatait. Itt arra a fontos eredményre jutott, hogy a magasabb dimensiós sokaság, az összefüggést jellemző BETTI-féle számok révén még nincsen meghatározva, sőt ellenkezőleg a BETTI-féle számok egy-egy rendszerének még végtelen sok olyan sokaság felel meg, a melyet deformálással egymásba át nem vihetünk. Különösen kiemelendő itt még a polyederekre vonatkozó EULER-féle tételnek általánosítása tetszés szerinti dimensiós polyederekre, melyeknek összefüggése is tetszés szerinti lehet.

POINCARÉ volt az, a ki legelőször bebizonyította a következő Weierstrass-féle tételt: Ha két complex változó valamely analytikai függvénye mindenütt meromorph, akkor mint ugyanazon változók két egész függvényének hányadosa állítható elő.

Továbbá még megemlékezünk az Abel-féle theorema egy figyelemreméltó általánosításáról, a mely a következőképen mondható ki: Ha $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_q, y_q, z_q)$ valamely algebrai felület és valamely C algebrai térgörbe metszéspontjainak koordinátái és

$$(x_i + dx_i, y_i + dy_i, z_i + dz_i)$$

egy a C-vel szomszédos C' térgörbe pontjainak koordinátái, akkor bizonyos számú

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 + \cdots + X_qdx_q = 0$$

alakú vonatkozás áll fenn, hol az X_i-k az x, y, z változóknak rationális függvényei.

Említsük még meg az Abel-féle thetafüggvényekre kiterjedő vizsgálatait, az Abel-féle függvényeknek theta-hányadosokkal való előállítására vonatkozó bebizonyítását és végre az elliptikus függvények residuumösszegére vonatkozó tételnek az ABEL-féle függvényekre kiterjesztett általánosítását. (1902.)

Az általános közönséges differentiálegyenletek elmélete is bővült Poincaré vizsgálatai révén. Itt a megoldások ama topographikus vizsgálatára akarok utalni, a mely lehetségessé teszi az integráloknak úgyszólván qualitativ analysisét még meghatározásuk előtt. Poincaré idevágó kutatásainak tekintélyes sora míg egyrészt előkészítették a három test problemájára vonatkozó dolgozatát, addig másrészt eredményeik bősége és mélysége révén további alkalmazások tekintetében még fontos szerepre vannak hivatva.

Poincaré számelméleti dolgozatai közül mindenekelőtt kiemeljük «Sur une mode nouveau de représentation géometrique des formes quadratiques définies ou indéfinies» czímű értekezését, melyben a rácsrendszerek számelméletének kifejtése után, ezt igen leleményes módon fel tudja használni arra, hogy az æquivalentia-tételeket, valamint Gauss-nak a quadratikus alakok compositiójára vonatkozó elméletét geometriai úton kifejtse. Az itt használt módszernek többméretű sokaságokra való átvitele őt később a láncztört-algorithmusnak felette érdekes általánosítására vezette. Megemlítjük még e helyen számelméleti invariansokra vonatkozó kutatásait; ezeket végtelen sorok és határozott integrálok segítségével állítja elő és æquivalentia-kérdések megoldására használja fel. A lineár helyettesítések ama nem folytonos csoportjainak tárgyalása révén, a melyek adott ternær indefinit quadratikus alakot önönmagába átvisznek, csatlakozást talált ismét az automorph függvények elméletével. E csoportok mindegyike isomorph rokonságban van bizonyos speciális Fuchs-féle csoporttal. Az ezekhez tartozó automorph függvények azok, melyeket Poincaré számelméleti Fuchs-féle függvényeknek nevezett, s a melyek azzal válnak ki az általános automorph függvények közül, hogy van összeadási tételök; de egyébként is annak a számos vonatkozásnak felkutatása, a mely ily számelméleti Fuchs-függvények között fennáll, az algebra és számelmélet terén dús eredménynyel kecsegtető problemákat szolgáltat. Részben algebrai, részben pedig számelméleti természetűek Poincaré ama dolgozatai, a melyek a magasabb rendű alakok æquivalentiájára vonatkoznak és a melyekkel Hermite és Jordan idevágó vizsgálódásaiknak eredményeit nagy mértékben tökéletesítette.

Áttérek már most Poincaré ama munkáira, melyek az elméleti physika, illetve a mechanika problemáira vonatkoznak. Mint e sorozat legjelentékenyebbike kiemelendő a pályadíjjal koszorúzott nagy értekezése: «Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique» (Acta Mathematica. XIII. k. 1890.). Tekintettel a nagy nehézségekre, melyek a három test problemáját fogalmazó differentiálegyenletek integrátiójában mutatkoznak, a dolog velejére nézve Poincaré vizsgálatai is csak negativ eredményre vezettek. De Poincaré nak nagy érdeme, hogy nemcsak reámutatott, hanem be is bizonyította, hogy a mai mathematikai módszerek a problema megoldására egyáltalában nem alkalmasak. Ugyanis teljes szigorúsággal sikerült neki kimutatnia azt, hogy az ismeretes integrálokon kívül, a problemának más egyértelmű analytikai integrálják egyáltalában nincsenek, úgy hogy a problema megoldása egészen más segédeszközöket igényel, mint a milyenekkel ma rendelkezünk. Beható vizsgálatnak vetette alá a problemának azt a speciális esetét, midőn az A tömegét nagynak, a B tömegét kicsinynek és a C tömegét végtelen kicsinynek választja és A és B körmozgást végeznek. A tárgyalásra az integrálinvariánsok, a variált differentiálegyenletek, a charakteristikus kitevők, valamint a periodikus és asymptotikus előállítások mathematikailag is igen termékeny módszereit használja fel és ezekkel az említett speciális esetre nézve sikerül kimutatnia, hogy akkor, midőn AC véges marad, az A, B, C tömegek eredet helyzetüket, a mennyire közel csak akarjuk, végtelen sokszor foglalják el. E csodálatraméltó értekezés ezenkívül még igen gazdag oly messzevágó principiumokban, melyeket Poincaré az ég mechanikájának feltárt és a melyeknek fontosságát ma már a gyakorlati csillagászok is elismerték.

Nem kevésbbé fontos és hatásában eredményes «Sur l'équilibre d'une masse fluide animé d'un mouvement de rotation» czímű értekezése (1885). Poincaré ebben az értekezésben a forgó folyadéktömeg egyensúlyi alakjának meghatározására vonatkozó régi classikus problema megoldására igen elmés módon új elméletet teremtett. A bifurcatiós és határalakok, valamint stabilitási együtthatók fogalmainak megállapítása és a Lamé-függvények új elméletének kifejtése után, sikerült neki nemcsak a Mathiessen és W. Thomson-tól felismert egyensúlyi alakoknak, hanem ezeken kívül még végtelen sok másnak is létezését bebizonyítania. Különösen kiemeljük ezek közül azt az alakot. melyet Poincaré körte-alaknak (pyriforme) nevezett és a melynek közelebbi vizsgálata később más kutatókat fontos cosmogenetikai búvárlatokra ösztönzött. Az egyensúlyi alakok stabilitására vonatkozólag a stabilitási együtthatók előjeleinek vizsgálata révén Poincaré a következő fontos eredményekre jutott. Az E forgási Jacobi-ellipsoidnál kevésbbé lapos forgási ellipsoidok stabilis egyensúlyi alakok. A három tengelyű ellipsoidok stabilok, ha hosszúkások. Ezek az eredmények viscositás esetében is érvényesek. Forgási ellipsoidok, a melyeknek lapossága az E Jacobi-féle ellipsoid laposságát felülmulja, csak surlódás nélküli folyadékok esetén stabilok.

Itt említjük még «Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique» czímű értekezését (1886). Az elméleti physika számos problemája a Laplace-féle vagy ehhez hasonló másodrendű partiális differentiálegyenlet megoldására utal. A mindenkor hozzá csatolandó határfeltételek nagy változatossága mellett is, e problemák számos rokon vonást mutatnak, melyek arra engednek következtetni, hogy e problemák megoldásainak is közös tulajdonságai várhatók. E problemáknak szembeszökő közös vonása mindenekelőtt azok a szerfeletti nehézségek, melyek már megoldásaik létezésének bebizonyításakor mutatkoznak. Poincaré-nak sikerült az itt nevezett problemák tekintélyes sorára nézve a felmerült nehézségeket eredményesen leküzdenie. Így pl. a Dirichlet-féle határproblema megoldására vonatkozó felette eredeti söprési módszerét (méthode de balayage) itt fejti ki legelőször, ugyancsak itt tárgyalja sikeresen azt a Fourier-től reánk maradt problemát, mely a testek kihülésére vonatkozik.

Az itt említett kutatásaival a legszorosabban függnek össze a «Sur les équations de la physique mathématique» czímű értekezésében bemutatott eredményei, a melyekkel az elméleti physika számos fontos és nehéz problemáját vitte dülőre. A kifeszített lemezek rezgésének problemája, a rugalmasságtan, a hővezetés Fourier-től származó elmélete, az elméleti physikának még számos egyéb problemája is egyaránt a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\xi v+f=0 \qquad \text{(I)}$$

másodrendű pártialis differentiálegyenlet megoldására utalnak, a melyben ξ állandó, f pedig x, y, z adott függvénye. Poincaré itt különösen a következő feladattal foglalkozott: Határoztassék meg v mint a coordinatáknak oly függvénye, mely bizonyos véges és összefüggő tartomány összes helyein első és második partiális differentiálhányadosaival együtt folytonos, az (I.) egyenletet kielégíti, az említett tartomány határfelületének összes helyeire nézve a

$$\frac{dv}{dn}+bv=0$$

feltételnek eleget tesz, a hol $\frac{dv}{dn}$ a normális szerint képezett differentiálhányadost, b pedig állandót jelent.

Poincaré e problemát az itt fellépő esetek legtöbbjére nézve H. Schwarz és C. Neumann-tól eredő módszerek felette elmés felhasználásával sikeresen oldotta meg. Külön ki kell itt emelnünk amaz önmagukban is fontos segédtételeknek sorozatát, melyeket Poincaré az

$$\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau$$

alakú integrálokra vonatkozólag kifejtett és vizsgálataiban nagy sikerrel felhasznált.

E vizsgálataival kapcsolatban állanak azok is, melyeket «La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet» czímű értekezésében tett közzé. C. Neumann már régebben fejtett ki módszert oly harmonikus függvényeknek konvergens kifejezések segítségével való előállítására, melyek bizonyos mindenütt convex határolású véges tartomány határfelületén vannak megadva. Poincaré-nak sikerült C. Neumann módszerét oly tartományokra is általánosítani, a melyeknek határfelületük minden pontjában érintősíkjuk és két meghatározott főgörbületi sugaruk van, de különben tetszés szerinti alakúak. Különösen fontosak Poincaré-nak az ú. n. alapfüggvényekre vonatkozó fejtegetései. Minden határfelülethez az ily alapfüggvényeknek végtelen sorozata tartozik, a melyek gömbalakú határfelület esetében nem egyebek, mint a jól ismert gömbfüggvények. Poincaré most már észrevette, hogy önkényesen megadott függvény ilyen alapfüggvények szerint haladó sorba kifejthető, a mely kifejtésben szereplő együtthatók a határfelületre kiterjesztett kettős integrálok alakjában állíthatók elő. Az alapfüggvények ismerete után Dirichlet problemájának megoldása úgy a határfelületen belül eső tartományra, valamint a határfelületen kívül eső tartományra vonatkozólag egyaránt egyszerűen megoldható.

Meg kell még említenünk ama könyveknek jelentékeny sorát, melyekkel Poincaré a mathematikai és physikai irodalmat gazdagította. Különösen figyelemre méltók a következők: «Les méthodes de la Mécanique céleste»; «Leçons de Mécanique céleste» (1905); «Calcul de Probabilité» (1896) és «La science et l'hypotèse» (1902); továbbá elméleti physikai előadásai, a melyek könyv alakjában megjelentek: «Théorie mathématique de la lumière» (1887, német fordításban is megjelent); «Électricité et Optique» (1890, szintén le van fordítva németre); «Thermodynamique» (1890); «Leçons sur la théorie de l'Elasticité» (1890); «Théorie des tourbillons» (1891); «Les oscillations électriques» (1892); «Capillarité» (1895); «Théorie analytique de la propagation de la chaleur» (1895); «Théorie du potentiel newtonien» (1899).

Fejtegetéseimben Poincaré 300-nál több darabot felölelő publicatióinak csak kis töredékéről emlékezhettem meg, de úgy hiszem, hogy már a felsoroltakból is világosan kitűnik, hogy Poincaré műveit a mathematika irodalmában mily domináló állás illeti meg, hogy a mathematika fejlődését saját kutatásaival az egész vonalon hatalmasan előmozdította, a tőle kieszelt módszerek mélységével, eszméinek gazdagságával pedig termékenyítő és buzdító hatású volt tudományának számos művelőjére, úgy hogy Poincaré méltán állítható egy sorba ama nagy franczia mathematikusokkal, a kik közűl Laplace, Galois, Cauchy és Hermite nevei örök fényben ragyognak.

Végül legyen szabad «Sur la valeur de la science» (1905) czímű legújabb művéről megemlékeznem, a melyben — úgyszólván — tudományos hitvallásának tételeit kifejti. E felette érdekes mű egyik helyét, a melyen Poincaré a logikai és szemléleti intuitio ellentétét leírja, szó szerint óhajtom idézni. A logikus irányzatú kutatókat illetőleg Poincaré ekként vélekedik: «En rejetant le secours de l'imagination, qui, nous l'avons vu, n'est pas toujours infaillible, ils peuvent avancer sans crainte de se tromper. Heureux donc ceux qui peuvent se passer de cette appui! Nous devons les admirer, mais combien ils sont rares!»

E ritka és csodálatraméltó gondolkodók egyike DAVID HILBERT, a logikai analysis mestere, a mathematika terén. Fényes logikai combináló tehetsége révén, a mathematika fogalmainak pusztán összekötésével vagy szétbontásával, gyűjtésével vagy általánosításával, tisztán önönmagából teremti meg alkotásait, úgy hogy a szemlélődéseiben külső szemléletből eredő impulsusoknak teljesen nyoma vész.

Számára a bebizonyítás menetének logikai élessége és egyszerűsége egyenlő értelmű követelések és egész tudós valójának legmélyén meg van róla győződve, hogy a vizsgálódások logikai szigorúsága sohasem meddőségre, hanem inkább a mathematikai eszméknek termékeny továbbfejlesztésére vezet. Hilbert kutatásaiban előszeretettel a sokáig megoldatlanul maradt, s a legnehezebb mathematikai problemák felé fordul; ezeknek velejét oly bámulatos éles észszel ismeri fel, hogy nemcsak e problemák teljes megoldását adja, hanem ezzel együtt egész mathematikai disciplinákat betetőz, a melyeknek körébe e problemák tartoztak.

Ilyenek mindjárt első kutatásai, a melyekben az invariáns elmélet alaptételének bebizonyítását kifejti. Binär alapalakok rendszerének esetére e tételt már GORDAN bizonyította be, de a tőle alkalmazott módszerek megtagadták a szolgálatot oly alakrendszerek esetében, a melyek kettőnél több változót tartalmaznak és elégteleneknek bizonyultak akkor is, midőn az alapalakok két változónak több sorozatát tartalmazzák s ezekre a sorozatokra különböző lineár átalakítások alkalmazandók. Hogy ennek az alaptételnek, sokaktól és régóta hiába keresett, bebizonyítására szükséges segédeszközöket megteremtse, HILBERT a homogen rationális egész függvényekből összetett modulusoknak egészen új, mélyen alapozott és ma már alapvető fontosságúnak elismert elméletét kifejti. Ez elméletnek egyik finom elmeéllel kigondolt és immár classikussá vált alaptétele a következő: Adva lévén az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változóknak $F_1, F_2, F_3, \ldots$ alakjaiak végtelen sorozata, akkor az m egész szám mindenkor meghatározható úgy, hogy e sorozat bármely alakja ekként állítható elő:

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_mF_m,$$

a hol $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ugyancsak az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változóknak alkalmasan választott oly alakjai, a melyeknek együtthatói ugyanabból a rationális tartományból valók, a melyekhez az F alakok együtthatói tartoznak. Hilbert e tételt a számelmélet nézőpontjából oly irányban is tökéletesítette, hogy érvényességét ama korlátozó feltétel esetére is bebizonyította, a mely az összes előforduló együtthatóknak rationális és egész voltát előírja. A modulusok elméletében e tételeknek az a jelentésük van, hogy bármely modulusból kiválasztható, az alakoknak oly véges rendszere, hogy a modulus tetszés szerinti alakja, mint ezeknek linearis összetétele előállítható legyen. Geometria értelmezésben ez pedig azt jelenti, hogy adott algebrai térbeli görbén a felületeknek oly

$$F_1 = o, \; F_2 = o, \ldots, F_m = o$$

rendszere átfektethető, hogy minden e térbeli görbén áthaladó felület egyenlete az

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m = o$$

alakban felírható, hol $A_1, A_2, \ldots, A_m$ quaternär alakokat jelentenek. E kutatásának további folyamában HILBERT bizonyos diophantosi lineár egyenletekből alakított rendszernek vizsgálatába bocsátkozik. E rendszernek megoldásai között fennálló relatiók az eredetihez hasonló diophantosi rendszert szolgáltatnak, a melyet HILBERT első leszármaztatott rendszernek nevez; ennek a leszármaztatott rendszernek ismét lehet leszármaztatása s í. t. HILBERT e rendszerekre vonatkozólag a következő végleges eredményre jutott. Ha adva van az

$$F_{t1} X_1 + F_{t2} X_2 + \cdots + F_{tm} X_m = o$$
$$(t = 1, 2, \ldots, m)$$

diophantosi egyenletrendszer, a melyben úgy az F_{tm} együtthatók, valamint az X_i ismeretlenek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók homogen rationális egész függvényeit jelentik, akkor a leszármaztatott egyenletrendszerek lánczolata véges, és legkésőbben a n-edik leszármaztatott rendszerrel megszakad, mert ennek már semmiesetre sem lehet megoldása. A leszármaztatott rendszerek lánczolatának ismerete most már mélyen enged bepillantani az $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ modulus algebrai szerkezetébe és Hilbertet arra képesíti, hogy a modulusokra vonatkozó elméletnek alapkérdéseire teljesen kielégítő választ adhasson. Igy pl. meghatározhatja ama feltételek számát, a melyeknek valamely R-edrendű alakot alá kell vetnünk, hogy az $(F_1, F_2, \ldots F_m)$ modulusra nézve zérussal legyen congruens. Az egymástól lineárisan független ilynemű feltételeknek számát a

$$X(R) = X_0 + X_1 \binom{R}{1} + \cdots + X_d \binom{R}{d} \, d < n$$

képlettel fejezi ki, a melyben az $X_o, X_i, \ldots X_d$ együtthatók bizonyos az $(F_1, F_2, \ldots F_m)$ modulust jellemző egész számok sorozata és R bizonyos értéken alul marad, $\binom{R}{k}$ pedig binomiális együttható jele. Ez az $X(R)$ az, a melyet HILBERT a modulus charakteristikus függvényének nevez, s a mely a modulusok vizsgálatára felette hatékony eszköznek bizonyult. Igy például sikerült bebizonyítania azt a tételt, hogy két modulus charakteristikus függvényeinek összege mindenkor egyenlő azzal az összeggel, a mely a két modulus legnagyobb közös modulusának és legkisebb tartalmazó modulusának charakteristikus függvényéből alakíthatunk.[1] E mellett felette érdekes HILBERT-nek az az észrevétele, hogy a charakteristikus függvényben együtthatókként szereplő $X_0, X_1, \dots X_d$ egész számok és a modulus alapján meghatározott térbeli görbe nemét jellemző Nöther-féle számok között a legszorosabb összefüggés áll fenn.

A modulus-elmélet itt felsorolt tételei, valamint egy az Ω-folyamatra vonatkozó, velejében már GORDAN-tól és MERTENS-től felismert tétel alapján sikerül most már HILBERT-nek az invarianselmélet alaptételét bebizonyítani, még pedig a legáltalánosabb feltevések alapul fektetése mellett. E tétel magának HILBERT-nek fogalmazásában a következő:

Adva lévén akárhány változó-sort tartalmazó alakoknak rendszere, melynek változó-sorozataira tetszés szerint előírt különböző lineár helyettesítések is alkalmazhatók, akkor e rendszerre vonatkozólag mindig létezik a rationális és egész invariansoknak véges rendszere, a melyeknek segítségével bármely más invariáns rationális és egész módon kifejezhető.

Ugyanez áll a covariansok, combinansok és contravariansokra nézve, mivel ezek az invarians invarians fogalmának alárendelhetők.

Ha pedig irreducibilis syzygia alatt az alakrendszer alapinvariansai közötti oly relatiót értünk, a mely alacsonyabb rendű syzygiák lineár összetételeként elő nem állítható, akkor e syzygiákra nézve, miként ezt Hilbert kimutatta, a következő befejező tételek érvényesek:

Az invariansok véges rendszerére nézve az irreducibilis syzygiáknak is csak véges rendszerei léteznek.

A különböző fajú irreducibilis syzygiák rendszerei a leszármaztatott

---

[1] Ha $(F_1, F_2, \dots, F_m)$ és $(H_1, H_2, \dots, H_h)$ két függvény-modulus és

$$X_1 = F_{1s},\ X_2 = F_{2s}, \dots, X_m = F_{ms}$$
$$Y_1 = H_{1s},\ Y_2 = H_{2s}, \dots, Y_h = H_{hs}$$
$$(s = 1, 2, \dots, k)$$

az

$$F_1 X_1 + \dots + F_m X_m = H_1 Y_1 + \dots + H_h Y_m$$

egyenletnek teljes megoldása, akkor a

$$K_s = \sum_{i=1}^{m} F_i F_{is} = \sum_{j=1}^{h} H_j H_{js}$$

alakokat képezvén, a $(K_1, K_2, \dots K_s)$ modulus az, a melyet a legkisebb $(F_1, F_2, \dots F_m)$ és $(H_1, H_2, \dots, H_h)$ modulusokat tartalmazó modulusnak nevezünk. E két modulus legnagyobb közös modulusát, — mint ismeretes — az $(F_1. F_2, \dots, F_m; H_1, H_2, \dots, H_h)$ modulus szolgáltatja.

diophantosi egyenletrendszereknek oly lánczolatát alkotják, a mely legkésőbben az $(m+1)$-edik leszármaztatással megszakad, ha m a teljes invarians-rendszerben foglalt invariansok számát jelenti.

Miután HILBERT ily módon az alapinvariansok véges rendszerének létezését kimutatta, önként merült fel a kérdés, hogy miképpen lehet ez alaprendszerek meghatározását már eleve teljesen áttekinthető és véges számításokból álló folyamatra visszavezetni. Hilbert kutatásainak erre vonatkozó részében most már oly csodálatos fordulat állott be, a melynek következtében ma az egész invarianselmélet teljesen új színben tűnik fel előttünk. Ő reámutatott ugyanis arra, hogy az invarians-elmélet egészében amaz általánosabb elméletnek alárendelhető, a mely a függvény-testek arithmetikájára vonatkozik, úgy hogy az invarians-elmélet most már ennek az általánosabb elméletnek csak különösen figyelemreméltó példája gyanánt tekinthető, akárcsak úgy, a hogyan a számelméletben ma a körosztási számtestek elmélete, mint az általános algebrai számtesteknek oly példája szerepel, a melyen az általános számtesteken belül uralkodó tételeket és törvényeket legelőször tanulmányozták. HILBERT ugyanis kimutatta, hogy az alapalakoknak tetszés szerint megadott rendszeréhez tartozó oly algebrai függvénytest szerkeszthető, melynek összes algebrai egész függvényei nem egyebek, mint a megadott alakrendszer összes invariansai. Ezt a függvénytestet HILBERT invarianstestnek nevezi. E meglepő kapcsolat felismerése után világos, hogy a teljes invarians-rendszer felállítása, KRONECKER-nek a függvénytestek alaprendszereire vonatkozó tétele alapján, a függvénytestek arithmetikájából jól ismert elemi számelméleti problemákra vezethető vissza.

HILBERT vizsgálódásainak folytatására oly tételt állít fel és alkalmaz, a mely méltóan csatlakozik a modulus-elméletnek előbb felsorolt szép tételeihez és a melyet nagy fontosságánál és sokoldalú alkalmazhatóságánál fogva különösen kell kiemelnem. Ez a tétel így szól: Ha adva vannak az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változóknak $f_1, f_2, \ldots, f_m$ homogen rationális egész függvényei, ha továbbá $F, F', F'' \ldots$ ugyan e változóknak oly homogen rationális egész függvényei, a melyek valamennyien oly $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékrendszer mellett zérussal egyenlők, a melyre nézve az $f_1, f_2, \ldots f_m$ függvények egyszerre tünnek el: akkor mindig meghatározható az r egész szám úgy, hogy az $F, F', F'', \ldots$ sorozat bárhogyan választott r függvényének szorzata $\Pi^{(r)}$ a következő alakban előállítható:

$$\Pi^{(r)} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m,$$

a hol $a_1, a_2, \ldots, a_m$ az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változóknak alkalmasan választott homogen és rationális egész függvényei. HILBERT maga mutatta e tételnek több alkalmazását, egyebek között egy DEDEKIND-től származó és a hypercomplex számok elméletében szereplő fontos tételnek bebizonyítására is. Ugyanez a tétel az algebrai invariánsok elméletének egyik legfontosabb kutató eszközét szolgáltatja. További részletek beható ismertetéséről, a melyek e jelentés keretében már helyet nem találhatnak, sajnálattal le kell mondanom. De fel kell említenem, hogy Hilbert idevonatkozó elmélete a tőle nulla-alakoknak nevezett formák használatán épül fel, nulla alakok alatt olyanokat értvén, a melyeknek összes invariánsai az alakok együtthatóinak speciális választása folytán zérussal egyenlők. E nulla-alakok mindegyike unimodulár lineár helyettesítés alkalmazása révén bizonyos kanonikus alakra hozható, úgy hogy az összes nulla-alakok meghatározása e kanonikus nulla-alakok meghatározására van visszavezetve. Ez utóbbiak meghatározására szolgáló diophantosi egyenlőtlenségek megoldása — mint Hilbert maga mutatja — legczélszerűbben graphikai úton végezhető. Hilbert végül a teljes invariansrendszer felállítására nézve a következő eljárásra jutott:

1. Meghatározandó az oly invariansok S_1 rendszere, a melyeknek segítségével az alapalakok összes többi invariansai, mint algebrai egész függvények kifejezhetők; S_1 úgy adódik, hogy az invariansok oly rendszerét választjuk ki, a melyeknek eltünése az összes többi invariansok eltünését maga után vonja.

2. Meghatározandó az összes invariansok amaz S_2 rendszere, a melyeknek segítségével az összes többiek rationalisan állítható elő.

3. Kiszámítandó az S_1 és S_2 meghatározta függvénytestre nézve az algebrai egész függvények teljes rendszere, ezen S_3 rendszer függvényei invariansok, és S_1-gyel összefoglalva az invariansok keresett teljes rendszerét szolgáltatják.

E három feladat közül legnehezebb az elsőnek megoldása; ez, mint említve volt, úgy történik, hogy meghatározzuk azokat az invariansokat, a melyeknek eltünése az összes többieknek is eltünését maga után vonja; ezeknek meghatározására pedig elegendő azokat figyelembe vennünk, melyeknek súlya adott határ alatt marad. Hilbert különben azt is kimutatta, hogy az invariansok teljes rendszere az S_3 rendszer ismerete nélkül is megtörténhetik.

Hilbert e kutatásai az invariansok elméletének eladdig megoldatlan volt összes kérdéseire a legtökéletesebb módon hozták meg a kivánt választ, úgy hogy az ő munkálkodásának köszönhető, ha az invariansok tana ma elméleti kérdései tekintetében teljesen betetőzött disciplinának tekinthető.

Áttértek most Hilbert számelméleti buvárlatainak ismertetésére. A számelmélet alapjának egyszerűségével, fogalomalkotásainak pontosságával, következtetéseinek módszertani szigorúságával a mathematikusok szemében mindenha mint az összes mathematikai disciplinák követendő mintaképe tűnt fel, de mint olyan is, a mely művelésére a logikai abstractioképességnek rendkívül magas fokát igényli. Nem csoda tehát, hogy a számelmélet varázserejével HILBERT-re, az elvont gondolkodóra, is hatással volt, és őt mélyreható buvárlatokra ösztönözte. A számelmélet iránt táplált érzelmeit talán legvilágosabban fejezik ki saját szavai.[1] «A számelmélet — mondja — olyan, mint a gyönyörű építészeti műremek, tele csodálatos szépséggel és összhanggal; ez épület leggazdagabban kiképzett részét az Abel-féle és relativ Abel-féle számtestek elméletei teszik ki, melyek Kummer-nek a magasabb reciprocitási tételekre vonatkozó vizsgálatai, Kronecker-nek pedig a complex multiplicatióra vonatkozó kutatásai révén reánk származtak. Az a mély bepillantás, a melyet e két mathematikus ebbe az elméletbe előttünk megnyitott, mutatja, hogy a kutatás e területén még számos kincs van elrejtve, mely dús jutalmat igér annak a kutatónak, a ki ily kincsek értékének felismeréséhez ért és azokat szeretettel tudja keresni». HILBERT-nek e szép szavaihoz csak annyi a hozzátenni valónk, hogy Hilbert maga volt az, kinek megadatott, hogy e kincsek közül a legmélyebben elrejtetteket és egyszersmind legbecsesebbeket maga megtalálja.

Arithmetikai vizsgálódásai közül első helyen «Ein neuer Beweis des KRONECKER'schen Fundamentalsatzes über ABEL'sche Zahlkörper» czímű értekezését említjük. KRONECKER már 1853-ban állította fel azt az alapvető tételt, hogy minden ABEL-féle egyenletnek gyökei, — a rationális számokból álló számtartományt, mint rationális tartományt alapul véve — egységgyökök segítségével kifejezhetők. KRONECKER-nek e tétele hosszú időn át bebizonyítás nélkül maradt és csak mintegy 30 évvel a tétel kimondása után sikerült HEINRICH WEBER-nek e tételt felette bonyolódott módon és transcendens segédeszközök felhasználása mellett bebizonyítania. HILBERT a fogalom-alkotásoknak tőle először használt rendszerével és MINKOWSKI ismert discriminans-tételének felhasználásával a legegyszerűbb módon bizonyítja be e tétel érvényességét oly módon, hogy e mellett még világossá lesz annak a problemának megoldása is, a mely adott csoporthoz és discriminanshoz tartozó ABEL-féle testek felállítására vonatkozik.

Meg kell továbbá emlékeznem HILBERT-nek már előbb idézett «Die Theorie der algebraischen Zahlkörper» czímű művéről, melyet HILBERT a német mathematikusok egyesületének megbízásából jelentés alakjában írt meg. Ez a jelentés az algebrai számtestek elméletének fejlődéstörté-

[1] L. Die Theorie der algebraischen Zahlen. Bericht von D. Hilbert 1897.

netét adja elő, oly világos elrendezésben, a tételeknek oly gondos bebizonyításával, hogy ilynemű összefoglalások valóságos mintaképének mondandó; de e mellett a HILBERT részéről itt legelőször közzétett új fogalmaknak és módszereknek nagy mennyisége révén az algebrai számok elméletének messzevágó továbbfejlesztésére vezetett. A relativ számtest, relativ-norma, relativ-discriminans, elágazó számtest: szétbontó számtest mindannyian oly fogalomalkotások, melyek szerves összefüggésükben itt tárgyaltattak legelőször. Különösen eredményesnek bizonyultak HILBERT-nek a KUMMER-féle számtestre vonatkozó fejtegetései és a norma-maradék fogalma. Ennek segítségével sikerült Hilbert-nek a hatványmaradékok elméletében szereplő általános reciprocitási tételt az

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right) = 1$$

képlet segítségével kifejezni, a melyben $\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right)$ bizonyos egységgyököt jelent, a sorozat pedig a számtest összes $\mathfrak{w}$ törzsideáljaira kiterjesztendő.

«Ueber die Theorie der relativ-quadratischen Körper» czímű értekezésében a quadratikus maradékok elméletét arra az esetre fejtette ki, a melyben azt alaptest képzetes és osztályszáma páratlan. E kutatások felette fontos eredménye a reciprocitási tétel, valamint az a további tétel, hogy valamely relativ-quadratikus számtestben a képzelhető chakter-rendszerek fele része genusok által van képviselve. Ez utóbbi tétel GAUSS idevonatkozó tételének általánosítása gyanánt tekintendő.

«Zur Theorie der relativ-Abel'schen Körper» czímű értekezésében az imént említett tételek általánosítását adja tetszés szerinti k alaptest esetére. Alapvető fontosságú segédeszköznek bizonyult itt az osztálytest fogalmának képzése és felhasználása. Ez az a k-ra nézve relativ-Abel-féle számtest, melynek relativ-discriminánsa 1 és az összes k-ra nézve elágazás nélkül való számtesteket magában foglalja. KRONECKER már 1856-ban azt a meglepő megjegyzést tette, hogy minden másodfokú képzetes számtesttel associálható oly számtest, melynek relativ-discriminánsa 1 és a melynek adjunctiója után az eredeti számtestnek összes ideáljai valóságos algebrai egész számokkal pótolhatók. Az associált számtestek természetének tanulmányozása — Kronecker vélekedése szerint — a számelmélet egyik legmagasabb és elérésre legméltóbb czélpontja. E czélpont elérésére szükséges eszközöket HILBERT teremtette meg, kinek alapvető kutatásaitól ösztönözve, Furtwängler-nek bármely számtest osztálytestének megszerkesztése sikerült.

Mesterműveknek és HILBERT egyszerűsítő képességének fényes bizonyítékai gyanánt tekintendők «Ueber die Zerlegung der Ideale eines

Zahlkörpers in Primideale» és «Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π» czímű értekezései, melyekben DEDEKIND ismert ideál-tételét a GALOIS-féle számtest alapulfektetése mellett, HERMITE és LINDEMANN tételeit pedig mindkettőt a legelemibb segédeszközökkel és alig felülmulható egyszerűséggel bizonyítja be. Hilbert Hermite-nek tárgyalását azzal egyszerűsítette oly bámulatos módon, hogy bizonyos kifejezésnek zérustól különböző voltát, nem úgy mint Hermite felette nehezen végezhető becslések alapján mutatja ki, hanem úgy, hogy oly modulusnak létezését bizonyítja be, a melyre vonatkozólag e kifejezés zérussal congruens nem lehet.

Attérve HILBERT geometriai kutatásainak ismertetésére első sorban «Grundlagen der Geometrie» czímű művét kell kiemelnem. A geometria alapvetéséről szóló ezen műve e tudomány alapelveinek kritikus elemzése; e tudományra alapvető szemléleti tényeket az axiomáknak öt csoportjába foglalja össze, mely csoportokban foglalt axiomák összeférőségét úgy bizonyítja be, hogy oly arithmetikai sokaságokat szerkeszt, a melyek az összes axiomák követeléseinek megfelelnek, egymástól való függetlenségüket pedig úgy, hogy bizonyos arithmetikai sokaságok szerkesztése sikerül, a melyek egyes axiomák kivételével az összes többiek követeléseit kielégítik. A geometria alapvető tételeit a DESARGUES- és PASCAL-féle tételeket pedig úgy bizonyítja be, hogy az egy es axiomacsoportoknak e tételekhez való viszonylata evidentiába lép. Végül a geometria alapszerkesztéseit tárgyalja és fejtegetéseit azzal fejezi be, hogy a számelmélet egyik legrejtettebb, és tőle talált, tételnek felhasználásával kifejti a szükséges és elegendő feltételeket arra nézve, hogy valamely geometriai szerkesztés tisztán egyenes vonalak huzásával és vonaldarabok átvitelével elvégezhető legyen.

Ezzel kapcsolatban még felemlítjük a transformatio-csoportok használatán alapuló és a geometria tudományos alapozására vonatkozó későbbi kutatásait is, a melyeknek eredményével Lie-nek idevágó vizsgálódásait messze felülmulja.

HILBERT-nek e művei nyomán, a melyeknek nagy jelentőségét POINCARÈ beható ismertetésben méltatta, gazdag literatura keletkezett, mintegy HILBERT ama meggyőződésének igazolásaképpen, hogy a vizsgálat logikai szigorúsága mindenkor termékeny fejlődés csiráit hordja magában.

És most még hadd említsek fel egyet-mást HILBERT függvénytani kutatásaiból. Legelső sorban arról a csodálatraméltó bebizonyításáról szeretnék megemlékezni, a melylyel a híres DIRICHLET-féle elvet véglegesen sikerült igazolnia. Ezzel az elvvel DIRICHLET, egy kettős integrál evidensnek felvett minimum-tulajdonságának felhasználása mellett, az ismeretes kerületi problema megoldásainak létezését mutatta ki. Ez az elv az algebrai integrálok, valamint a mathematikai physika számos problemáira való sokoldalú alkalmazhatósága folytán, a modern függvénytani kutatás egyik leghatékonyabb eszközének bizonyult. De ennek a segédeszköznek nyugodt és biztos használatát nagyban megzavarta WEIERSTRASS megsemmisítő kritikája, a ki igen egyszerűen szerkesztett példán DIRICHLET következtetése módjának fogyatékosságát mutatta ki. Ezzel WEIERSTRASS — úgy látszott — e nagy szolgáltató képességű elvnek élete fonalát, mintha keresztülvágta volna. NEUMANN, SCHWARZ és POINCARÈ-nak csak a legnagyobb erőmegfeszítéssel sikerült ezt az elvet existentia-tételeikkel pótolniok.

Annál magasabb beszámítás alá esik HILBERT-nek érdeme, a ki a DIRICHLET elvét a maga classikus egyszerűségében bámulatosan egyszerű bebizonyításával mintegy halottaiból új életre támasztotta s ezen felül még azt is megmutatta, hogy következtetésének használt módjával a mathematikai physika még általánosabb problemái is megoldhatók.

Felette fontos továbbá HILBERT-nek «Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen» czímű értekezése. (1902-től fogva) Integrálegyenleten HILBERT oly egyenletet ért, a mely a meghatározandó ismeretlen függvényt valamely határozott integrál jele alatt az integrandusban és ezen felül esetleg explicite is tartalmazza. HILBERT csakhamar meggyőződött arról, hogy ez integrálegyenletek elmélete az analysis egészére messze kiható fontosságu, különösen a határozott integrálok, az önkényesen adott függvények sorkifejtéseinek, a lineár differentiálegyenleteknek és a potentiálnak elméletére. Mindenekelőtt megvizsgálja az ilyen integrálegyenletek megoldásai között fennálló összefüggéseket ama megszorító feltevés mellett, hogy a tőle függvénymagnak (Kernfunction) nevezett függvény argumentumaira nézve symmetrikus. E mellett az önkényesen megadott függvényeknek oly sorkifejtéseire jutott, a melyek a trigonometrikus, gömbfüggvények, Lámé-függvények, Sturm-függvények, Bessel-függvények szerint haladó sorkifejtéseket mint speciális eseteket felöleli. Érdekes, és HILBERT dolgozásának módjára éles fényt vet, az az észrevétel, hogy HILBERT e mély vizsgálódásaiban egy már régebben is használt heuristikus elvből indul ki, a melyet bámulatos éles észszel bizonyító principiummá átalakított.

Végül még a variatió-számítás terén végzett legújabb vizsgálatait akarom felemlíteni, a melyek — úgylátszik — e disciplinára teljesen átalakító hatással lesznek. Oly úton indulván el, a melyen Weierstrass haladt legelőször, a variatió-számításnak meglepő egyszerűsítéseire jutott, a mennyiben a szélső érték bekövetkeztére vonatkozó kriteriumai a második variatiónak kiszámítását és részben az első variatióhoz fűződő bonyodalmas tárgyalásokat feleslegessé tették.

Félbeszakítom most már Hilbert mélyreható kutatásainak e sebtében adott leírását, mert a mit ezekből eddig felsoroltam, teljesen elegendő arra, hogy Hilbert személyében oly mathematikust ismerjünk fel, a ki a legritkább qualitásokkal ékeskedik, a ki szigorúságot sokoldalúsággal, logikai éles észt nagy felfedező erővel, higgadt megfontolást tudománya iránti lángoló lelkesedésével magában egyesít.

De most már be is fejezem e hosszúra nyult jelentésemet is azzal, hogy újból alkalmat keresek annak a kifejezésére, hogy a bizottságot mennyire áthatották a megelégedés és öröm érzetei, midőn a M. Tud. Akadémia neki alkalmat nyujtott arra, hogy a jelenkor két legnagyobb mathematikusának műveit érdemlegesen méltassa, a kiknek működése a multban egyformán jelentőséges, a jövőre pedig egyaránt áldást igérő.

★

Végül annak illusztrátiójaként, hogy a tudományos világ mekkora súlyt tulajdonít e díjjal való kitüntetésnek, legyen szabad itt azt az üdvözlő beszédet közölnünk, a melyet a franczia Akadémia elnöke Troost, a franczia Akadémia 1905 deczember 18-án tartott ülésén a Bolyai-jutalom nyerteséhez Poincaré-hez intézett: «. . . . Végezetül kellemes kötelességnek kell eleget tennem, midőn azon nagy sikerről beszámolok, melyet egy társunk most ért el. A budapesti Akadémia egy 10,000 koronás nemzetközi díjat alapított a nagy magyar mathematikus, Bolyai János emlékére. E díj öt évenként itélendő oda az ezen idő alatt megjelent legjelentékenyebb mathematikai munkának. Első kiadása 1905 deczemberében történt, Bolyai születésének századik évfordulóján. A jury, mint maga a díj is, nemzetközi; két magyar és két külföldi tagja van. A jury magyar tagjai Kőnig Gyula és Rados Gusztáv budapesti műegyetemi tanárok voltak; a két külföldi pedig Felix Klein göttingai egyetemi tanár és Gaston Darboux, a párisi Académie des Sciences örökös titkára. Darboux választatott meg a jury elnökének. Mélyreható vita után, melynek sok-sok kitünő munka közül ki kellett választania azokat, melyek legnagyobb hatással voltak a mathematikai kutatás fejlődésére, a bizottság egyhangúlag hozott itéletben állapodott meg. A Bolyai-díjat kitünő társunknak, Henri Poincaré úrnak itélte oda. Megragadjuk ezen alkalmat, hogy üdvözöljük testvérünket, a magyar Akadémiát, azon szolgálatért, melyet a tudományos kutatásnak tett oly férfiú emlékére alapított díj által, kinek művei az emberiség díszére válnak és örvendünk, hogy az egész Institut de France szerencsekivánatait tolmácsolhatjuk a Bolyai-díj első elnyerőjének s üdvözölhetjük őt azon dicsőségért, melyet az emberi gondolkodás ezen nemzetközi versenyén a franczia tudománynak szerzett.» (Compte rendus hebdomadaire des séances de l'Académie des Sciences. Tome CLXI, No 25.) *Szerk.*

AMERIKAI TUDÓS A BÓLYAI-DÍJRÓL.

Arra az érdeklődésre, melylyel az egész tudományos világ a Magyar Tudományos Akadémia BÓLYAI-díja iránt viseltetett, jellemző GEORGE BRUCE HALSTED amerikai mathematikusnak, a Kenyon College (Gambier, Ohio) tanárának következő czikke a Science 1905. évi szeptember 1-i számában (Science N. S. bol. XXII. No 557. p. 270 f.): *A Bólyai-díj*: Amerika örvendeni fog, hogy legutóbb Magyarország azzal tisztelte meg maga-magát, hogy csodagyermekének, BÓLYAI JÁNOS-nak emlékét megtisztelte. Az ő csodálatos kincse, a legrendkivülibb két tuczat oldal az emberi gondolkodás történetében, előbb Amerikában jelent meg angolul, mint Magyarországon magyarul, bármily büszkék legyenek is a magyarok nyelvükre; sőt a mi több, az amerikai fordítást újra lenyomatták még Japánban is, mielőtt hasonlóképen az eredetit ujra kiadták volna Magyarországon.

Amerikai és nem európai ember volt az első Magyarországon kívüli, a ki Maros-Vásárhelyre utazott tisztán BÓLYAI JÁNOS kedveért, hogy azt a magyar levelet lássa, a mely BÓLYAI elsőbbségi jogát és jogczímét az ő új világához megállapítja, és hogy először közzétegye ezt a levelet, a mely az 1823-diki évszámot örökké emlékezetessé teszi. CHARLES S. PEÉRCE a The Nation 1892. évi márczius 17-iki számában HALSTED BÓLYAI-jának ismertetése közben ily szavak kiséretében közli ezt a levelet:

«Van BÓLYAI JÁNOS-nak egy megnyerően lelkes levele atyjához, melyben neki nagy vívmányát bejelenti. Én oly magasztos dolgokot fedeztem fel, mondja, hogy magam is elcsodálkoztam rajtuk. Örök kár lenne, ha elvesztek volna. Ha atyám meglátja, majd maga is el fogja azt ismerni. Jelenleg nem mondhatok többet, mint hogy semmiből egy egész új világot teremtettem».

Tíz évvel később ezt a levelet Magyarországon közzétették magyarul és latinul is és utána következett a nagy BÓLYAI-díj megállapítása a Magyar Tudományos Akadémia részéről. (HALSTED itt közli a szabályzatot, majd így folytatja:) a fenti szabályzatnak megfelelően a Magyar Tudományos Akadémia a jelen év folyamán adja ki először a Bólyai-díjat, mely egy emlékéremből és 10,000 koronából áll.

Az Akadémia által saját kebeléből összeállított és a jury jogaival felruházott bizottság tagjai: Darboux Gaston (Páris), Klein Félix (Götningen), König Gyula (Budapest) és Rados Gusztáv (Budapest). Ez a bizottság a folyó év október havában Budapesten fogja tárgyalásait folytatni. *Ha egy kevés jóslás meg van engedve, előre merem megmondani, hogy a díj Poincaré*-nak *jut.*

(Közli: *Kopp Lajos.*)

Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1906. év január hó 1-től április hó 31-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1902. évre: Winkler Lajos dr. 10 k. Összesen ... ... 10 kor.

1904. évre: Gidófalvy Géza 6 k. Összesen ... ... 6 kor.

1905. évre: Asbóth Emil, 10 k., Benda Jenő 10 k., Bielek Miksa 10 k., Borossay Dávid 6 k., Harkay István 6 k., Hronyecz György 6 k., Klúg Nándor dr. 10 k., Muraközy Károly 10 k., Nagy Dezső 10 k., Oberle Károly 10 k., Pecz Samu 10 k., Schimanek Emil 10 k., Schuller Alajos 10 k., Strausz Ármin 10 k., Szavkay Ede 10 k., Szily Kálmán 10 k., Tolnay Lajos 10 k., Waldapfel János dr. 10 k., Wartha Vincze dr. 10 k., Wittmann Ferencz 10 k. Összesen ... ... 188 kor.

1906. évre: Bárányi Balázs 6 k., Bodola Lajos 10 k., Eberling József 10 k., Eltscher Simon 6 k., Eötvös Loránd br. dr. 10 k., Feichtinger Győző 10 k., Fekete Jenő 10 k., Ferenczy István 10 k., ifj. Füzy Rezső Vilmos 10 k., Goldziher Károly dr. 10 k., Hirschmann Nándor 6 k., Hortobágyi Zsigmond 6 k., Hronyecz György 6 k., Ilosvay Lajos dr. 10 k., Jordán Károly dr. 10 k., Karai Sándor 6 k., Király Henrik 6 k., K. Kiss József 6 k., Klatt Román 6 k., Kopp Lajos dr. 10 k., Korda Dezső 6 k., Koschovitz Gyula 10 k., Laczó Endre 6 k., Kunszt János 6 k., Luckhaub Gyula 6 k., Magdics Gáspár 6 k., Morotz Kálmán 10 k., Novothny Endre 10 k., Pallos Béla Kajetán 6 k., Pekár Dezső dr. 10 k., Pécsi Albert dr. 10 k., Rados Ignácz 10 k., Ráth Arnold Lajos 10 k., Richter Rezső 10 k., Schöndorfer Gyula 6 k., Szőke Béla 10 k., Terlanday Emil 10 k., Tresztyánszky Sándor 6 k., Vámos Dezső 10 k., Vörös Cyrill 10 k. Összesen ... 354 kor.

1907. évre: Riegl Sándor 6 k. Összesen ... ... 6 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1905. évre: Budapesti II. ker. áll. főreáliskola 10 k. Összesen ... 10 kor.

1906. évre: Bártfai áll. főgymnasium 10 k., Beregszászi áll. főgymn. 10 k., Brassói áll. főreáliskola 10 k., Brassói r. kath. főgymn. 10 k., Budapesti II. ker. áll. főreáliskola 10 k., Budapesti V. ker. áll. főreáliskola 10 k., Budapesti VI. ker. áll. főráliskola 10 k., Budapesti premontrei tanárképző 10 k., Budapesti ciszt. r. tanárképző 10 k., Budapesti tanárképző int. gyakorló főgymn. 10 k., Csiksomlyói r. kath. főgymn. 10 k., Deési áll. főgymn. 10 k., Egri áll. főreáliskola 6 k., Fogarasi áll. főgymn. 10 k., Győri áll. főreáliskola 10 k., Gyulafehérvári róm. kath. főgymnasium 10 k., Hajdunánási ev. ref. főgymn. 10 k., Jászberényi kir. kath. főgymn. 10 k., Jászói prépostság könyvtára 10 k., Kaposvári áll. főgymn. 10 k., Karczagi ev. ref. főgymn. 10 k., Kecskeméti áll. főreálisk. 5 k., Késmárki ág. hitv. ev. lyceum 10 k., Kisujszállási ev. ref. főgymn. 10 k., Kolozsvári ev. ref. theol. ifj. egy. 10 k., Körmöczbányai áll. főreáliskola 10 k., Makói áll. főgymn. 10 k., Marosvásárhelyi róm. kat. főgymn. 10 k., Mármarosszigeti állami tanitóképző 10 k., Nagyenyedi Bethlen főiskola 10 k., Nyitrai felsőbb leányiskola 10 k., Privigyei kegyes rendi gymnasium 10 k., Pozsonyi állami főreáliskola 10 k., Salgótarjáni polgári iskola 10 k., Sepsi-szent-györgyi ev. ref. főgymnasium 10 k., Soproni ág. hitv. ev. lyceum 10 k., Soproni áll. főreáliskola 6 k., Szabadkai közs. főgymn. 10 k., Szarvasi ág. h. ev. főgymn. 10 k., Szászvárosi ev. ref. Kun-kollegium 6 k., Szegzárdi áll. főgym. 10 k., Székelyudvarhelyi ref. főgymn. 6 k., Székesfehérvári áll. főreáliskola 10 k., Szepesiglói áll. tanitóképző 10 k., Temesvári áll. főgymn. 10 k., Temesvári áll. főreáliskola 10 k., Temesvári felső leányiskola 10 k., Ujvidéki kir. kath. főgymn. 10 k., Ujpesti közs. gymn. 10 k., Ungvári áll. főreáliskola 10 k., Ungvári kir. kath. főgymnasium 10 k., Zeidner H. 10 k., Zilahi ev. ref. főgymn. 10 k. Összesen ... 525 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból ...	204 kor.	január 1-től	204 kor.
F. és köv. évi tagsági dijakból	360 kor.	« «	360 kor.
Előfizetési dijakból ...	535 kor.	« «	535 kor.

Kelt Budapesten, 1906. május 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-ut 15.)

A TÉRFOGALOM GENEZISE.[1]

(Első közlemény.)

Bevezetés.

A geometria mint exakt tudomány bizonyos föltevéseken épül fel, melyek axiomák gyanánt állíttatnak élére. A geometria minden rendszere jogosult, ha az alapul szolgáló axiomák rendszere ellentmondást nem tartalmaz és ha a rendszer teljes, azaz, ha a dolgoknak bármely két csoportja, mely az illető axioma-rendszert kielégíti, szükségképen megfordíthatóan egyértelmü vonatkozásban van olykép, hogy ha az egyiknek részét képező csoportnak bizonyos az axiomákban definiált tulajdonsága megvan, ugyan e tulajdonsága megvan a megfelelő csoportnak is.

A geometria különböző rendszereihez tartozó számos ilyen axiomarendszer ismeretes; egyesek már mélyreható vizsgálatok tárgyát képezték.

Ha azonban a geometriát mint alkalmazott tudományt tekintjük, úgy a föltevések minden rendszeréről, melyet leíró geometria élére akarunk állítani, először eldöntendő, vajjon térszemléletünkkel, térbeli képzeteinkkel összefér-e, mily mértékben következménye azoknak és alkalmas e térbeli képzeteink leírására?

Mindjárt az első lépésnél, az első kérdés vizsgálásakor oly hézagra bukkanunk, a melyet hosszu időn át hallgatagon figyelmen kívül hagytak. A dolgok azon rendszerei, a melyek-

[1] Bemutatva a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának 1906. január hó 22-iki ülésén.

kel a geometria mint exakt tudomány operál, a fölépitéskor mathematikai kontinuumokká egyesítve jelennek meg, bizonyos folytonossági, helyesebben összefüggési vonatkozásokat mutatnak, sűrítve vannak; az axiomák alapján ugyanis az egyes elemek bizonyos részhalmazokhoz sűrűsödési helyül rendeltetnek. Sőt épen azok a geometria alapvetését czélzó kisérletek, a melyek legközelebb állanak a fizikai felfogáshoz, az n-szeresen kiterjedt sokaság fogalmából[1] indulván ki, kezdettől fogva a mathematikai kontinuum egy nemével dolgoznak. Ezzel szemben térképzeteink fizikai kontinuumok, szétválasztható és szét nem választható dolgoknak rendszerei; az itt iránytadó vonatkozások teljesen elütnek a mathematikai kontinuum lényeges vonatkozásaitól.

Mindenesetre valamely mathematikai kontinuum részhalmazainak csoportjai könnyen foghatók fel fizikai kontinuum gyanánt, ha ugyanis az olyan részhalmazok, melyeknek közös elemük van, megkülönböztethetetlenek, a közös elemet nem tartalmazó részhalmazok pedig megkülönböztethetőknek vétetnek; meg is adhatunk minden egyes térképzetünkhöz megfelelő mathematikai kontinuumot; ezzel azonban az a kérdés, vajjon egy egyetlen mathematikai kontinuum segítségével leírható-e minden lehetséges térképzet, koránt sincsen eldöntve.

Az első és az utolsó kérdés azonban nem a legfontosabb; exakt geometriai rendszereink egyelőre mindenesetre elégsége-

---

[1] RIEMANNnál az n-szeresen kiterjedt sokaság fogalmának még valami misztikus színezete van; LIE egyszerűen n-dimenziós számkontinuummal helyettesíti; nagyobb általánosságban és élesen körülhatárolva a fogalom csak HILBERT-nél jelenik meg. (Göttinger Nachrichten 1902 p. 17.) Mindazonáltal még jobban általánosítható.

A folytonosságról kiváló előszeretettel nyilatkoznak a nem mathematikus filozófusok, rendszerint azonban a delosi jósoknál is misztikusabban. Idézem itt RUSSEL szavait, melyek nemcsak HEGELre találók: ... the Hegelian dictum that every thing discrete is also continuous and vice versa. This remark, ... has been tamely repeated by all his followers. But as to what they meant by continuity and discreteness, they preserved a discret and continuous silence; ... (Principles of math. I. p. 287.)

sek a praktikus geometria czéljaira. Tegyük fel, hogy létezik olyan mathematikai kontinuum, vagy akár olyan geometriai rendszer, mely térképzeteinkkel nemcsak hogy összefér, de azoknak leírására teljesen elegendő; akkor is elintézendő lesz még az a kérdés, hogy miképen függ ez a rendszer térbeli képzeteinktől; vajjon gondolkodásunk, psychikai életünk természete által meg van-e egyértelműen határozva, vagy esetleg többféle rendszer alkalmas-e ugyanarra a szolgálatra. A kérdés *a térfogalom keletkezésének* a kérdése. Megfelelni rá csak úgy lehet, ha psychologiai hipotézisekből indulunk ki, a mely hipotéziseket indukczió útján agymunkánk eddigi megfigyeléséből származtatjuk le, és a mely hipotézisek térbeli és időbeli képzeteink viszonyát rögzitik meg.

Nem szándékom itt KANT elméletét megtámadni, mely szerint a tér és az idő a gondolkodás apriorisztikus formái. Mindenesetre akkor, a mikor már képesek vagyunk arra, hogy magunknak agybeli munkánkról némileg számot adjunk, az öntudat legkezdetlegesebb stádiumában is, megvan bennünk *a hajlam és képesség, hogy érzeteinket térben és időben rendezzük*, azaz, hogy olyképen egyesitsük fizikai kontinuumokká, hogy térbeli és időbeli képzetek keletkezzenek, a képzeteknek ez oly két tipusa, melyeknek *realitásuk* van, abban az értelemben, hogy az egyes vonatkozások fölött eszmecsere lehetséges. Vajjon azután hajlamunk és képességünk átöröklött-e, szervezetünkben gyökeredzik-e, vagy pedig a fizikai élet praktikus szükségletei hozták létre olyan korban, a mikor psychikai életünknek még nem voltunk eléggé tudatában, számunkra mellékes. Lényeges csak az, hogy egy bizonyos időponttól kezdve hajlamunk és képességünk megvan.

Érzetcsoportjaink, melyek térbeli és időbeli képzeteinket alkotják, kettenként vagy *megkülönböztethetők* egymástól vagy *megkülönböztethetetlenek. A képesség, hogy ezeket a csoportokat térben és időben rendezzük, abban áll, hogy akár belső szükségességből, akár tapasztalatilag igazolt czélszerűségből olyan érzetcsoportokat is, melyek megkülönböztethetők, térben, illetőleg* *időben meg nem különböztetünk, tehát érzetcsoportjaink viszonyításánál megkülönböztethetetleneknek tekintünk.*[1] Érzetcsoportjaink rendszerei ily módon fizikai kontinuumokat alkotnak és egyrészt az időpontok egyszerűen rendezett soraihoz, *a momentán időképzetekhez* vezetnek, másrészt minden időponthoz egy-egy fizikai kontinuumot, *a momentán térképzetet,* rendelik. Az a hipotézis, hogy *tudatunk minden időpontig csak véges számú érzetet vett fel,* kapcsolatban azzal, hogy psychikai életünk határát nem ismerjük, arra vezet, hogy a psychologiai, a szubjektív időfogalmat az időpontok megszámlálható sorának tekintsük; ennek azután a momentán térképzetek megszámlálható sora felel meg; *minden egyes momentán térképzet véges számú elemből álló fizikai kontinuum.* E fizikai kontinuumoknak és egymással való kapcsolataiknak összessége a térfogalom első konczepcziója. Ennek az összességnek a segítségével definiálom azt a mathematikai kontinuumot, melyet térnek nevezek; az egyes fizikai kontinuumok, valamint összes térképzeteink is megfordíthatóan egyértelműen ábrázolhatók a tér részhalmazaiból képezett rendszereken akképen, hogy közös ponttal bíró részhalmazok megkülönböztethetetlen, szeparált részhalmazok pedig megkülönböztethető fizikai pontoknak felelnek meg.

A momentán térképzetek sorára felállított hipotézisekből definiált mathematikai kontinuum egyes tulajdonságaira következtetünk, a melyek annak sűrítési jellegét ugyan nem határozzák meg egyértelműen, de azt mindenesetre, mint a mathematikai kontinuumoknak egyszerűbb tipusát karakterizálják. Az az analogia, mely ezen tulajdonságok és egy számkontinuum ismert tulajdonságai között észlelhető, rámutat arra az útra, melyen a további vizsgálatnak haladnia kell. A vizsgálat e stádiumában *a tér mint összefüggő mathematikai kontinuum jelentkezik,* a Bolzano-Weierstrass-, illetőleg az álta-

[1] A megfelelő pszichologiai folyamatok alaposabb analizisét illetőleg Poincaré La valeur de la science cz. könyvére utalok.

lánosított Borel-féle tétellel analog törvények érvényesek; a mellett minden pontjához vannak a pont felé konvergáló megszámlálható pontsorozatok; és végül, megadható a speciális környezeteknek oly kielégítő rendszere, a mely megszámlálható. Mindezek a tulajdonságok azonban még a mathematikai kontinuumok egy kiterjedt osztályának tulajdonságai; miképen választható ki a tér sűrítési jellege?

Mindama geometriai rendszereknek, melyeket térképzeteink leírására használunk, van egy közös sajátsága, melyet, a nélkül, hogy teljes terjedelmében értékelni tudná, mindenki ismer, a ki csak bevezető oktatást nyert a geometria elemeiből; az t. i., hogy *a tér három dimenziós sokaság.* A térképzeteket, mint fizikai kontinuumokat illetőleg, Poincaré megkísérlette a dimenzió-fogalom elemezését; arra az eredményre jut, hogy megengedhető és kényelmes a térképzeteket úgy fogni fel fizikai kontinuumok gyanánt, hogy a legnagyobb dimenziószám három legyen.[1]

Ha azonban megkísérelnők, hogy a térfogalom további elemzését a Poincaré-féle dimenziófogalomra alapítsuk, mint a hogy ezt Poincaré lehetőnek tartja, nemsokára nagy akadályokba ütköznénk. Mert egyrészt már Poincaré a fogalom bevezetésénél nem számol olyan jegyekkel, melyek már a legnaivabb dimenzióképzeteknek is sajátjai; így például azzal, ha egy bizonyos dimenziójú rendszer egy részének dimenziója a rendszer dimenziójánál nem lehet nagyobb; valamely kettős kúpnak mint fizikai kontinuumnak a dimenziója Poincaré definicziója értelmében 1. Ezen a hibán azonban könnyen lehet segíteni. A tulajdonképeni nehézség a mathematikai kontinuumok dimenziójának fogalmazásában[2] rejlik; ennek a fogalomnak beható elemzése nélkül gondolni sem lehet arra, hogy a fizikai kontinuum dimenziójának fogalmai közötti kapcsolat megvizsgáltas-

[1] L. c. p. 59—136.

[2] A dimenziófogalmat ill. l. F. Riesz, Sur les ensembles discontinus, C. R. 23 octobre 1905.

sék. A dimenziófogalom tehát nem szolgálhat egyelőre a további vizsgálat alapjául.

Bizonytalan keresés helyett vizsgálataimnak határozott irányt akarok szabni. Megfordítom tehát a kérdést és azt kérdezem: *Mindazok a vizsgálatok, melyek a geometria alapvetésénél a folytonos tér fogalmából indulnak ki, a tér sűrítési jellegének bizonyos sajátságokat tulajdonítanak; térképzeteinkről alkotandó minő föltevések szükségesek, hogy ezekhez a sajátságokhoz eljussunk?* E fokon lép be vizsgálataimba teljes terjedelmében *a rendezés* fogalma, mely már kisebb mértékben az időbeli rend magyarázatánál szerepelt. A rendezett fizikai kontinuum fogalma már a térszemlélet kezdetleges stádiumában jelentkezik akkor, a mikor bizonyos tárgyaknak hosszuságot, szélességet, magasságot tulajdonitunk. A rendezett fizikai kontinuum és a rendezett mathematikai kontinuum fogalmainak segítségével sikerül megállapitani azokat a föltevéseket, melyek szükségesek ahhoz, hogy a tér mint olyan mathematikai kontinuum jellemeztessék, mely minden pontja környezetében háromszorosan rendezhető úgy, hogy a pontnak legyen abszolut összefüggő teljes környezete. Az előbbi föltevések biztosítják azután, hogy a tér a valós számok segítségével leírható.

A sűrítési jelleg ilyetén való körülhatárolásával azonban a geometria alapvetése még nincsen befejezve. A sűrítési jelleg még nincsen egyértelműen meghatározva; de még ilyen egyértelmű meghatározással is csak az *analysis situs* alapjai vettetnének meg. A metrikus, az affin, de már a projektív geometriák is kitüntetnek bizonyos ponthalmazokat más velük homöomorf ponthalmazok felett; milyen további föltevések vezetnek az ilyen megkülönböztetéshez, vezetnek például az egyenes fogalmára? Az idevágó kérdésekkel egyelőre csak rövid megjegyzésekben foglalkozom.

Ezzel be is fejezem vizsgálataimat. Nem czélom a térszemlélet psychologiai elemezése; ezt illetőleg Poincaré többször idézett nagyértékű könyvére utalok. Én csak azt az utat keresem, mely a térképzetektől a térfogalomhoz vezet. Meglehetősen nehéz feladat; mert a megszokás folytán többnyire összetévesztjük a mathematikai tért a fizikaival, szinte lehetetlen már térképzeteinket a mathematikai tértől különválasztanunk. Ha sikerült mégis az útra rámutatnom, úgy elértem czélomat.

A fizikai kontinuum.

Valamely halmazt akkor nevezek *fizikai kontinuumnak,* ha egy bizonyos elv alapján bármely két eleme közt a következő két vonatkozás közül az egyik és csakis az egyik áll fönn: *a)* a két elem *megkülönböztethető* (szétválasztható); *b)* a két elem *megkülönböztethetetlen* (szétválaszthatatlan).

Az *a* és *b* elemek megkülönböztethetők (megkülönböztethetetlenek) helyett úgy is mondom: *a* megkülönböztethető (megkülönböztethetetlen) *b*-től, vagy úgy is: *b* megkülönböztethető (megkülönböztethetetlen) *a*-tól.

A fizikai kontinuum *valódi,* ha legalább egy pár megkülönböztethető és egy pár megkülönböztethetetlen elemet tartalmaz; *diszkrét,* ha bármely két elem megkülönböztethető; *pontszerű,* ha bármely két eleme megkülönböztethetetlen. A következőkben főképen csak valódi fizikai kontinuumokról lesz szó; röviden fizikai kontinuum alatt ezentúl, ha csak az ellenkezőt nem hangsulyozom, valódi fizikai kontinuumot értek.

A fizikai kontinuum *összefüggő,* ha nem bontható szét két részhalmazra úgy, hogy az egyik részhalmaz minden eleme a másik részhalmaz minden elemétől megkülönböztethető. Eszerint, ha az összefüggő fizikai kontinuumot bármiként is bontjuk két részhalmazra, a két részhalmaznak legalább egy-egy eleme van, melyek megkülönböztethetetlenek.

Ha az összefüggő fizikai kontinuumot úgy osztjuk két részhalmazra, hogy az egyik részhalmaz csak egy elemből áll, akkor a másik részhalmaznak legalább egy eleme ettől az elemtől megkülönböztethetetlen. Hogy tehát egy fizikai kontinuum összefüggő legyen, ahhoz okvetetlenül szükséges, hogy minden eleméhez legalább egy elem létezzék, melytől megkülönböztethetetlen. Közvetlenül világos, hogy ez a föltétel még nem elégséges arra, hogy a fizikai kontinuum összefüggö legyen. A szükséges és egyszersmind elegendő feltételt a következő tétel adja:

I. tétel. Ha a és b egy összefüggő fizikai kontinuumnak két tetszés szerinti eleme, akkor létezik a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *elemek oly véges sora, úgy hogy az* $a_1\ c_1, c_2, \ldots, c_n, b$ *sor bármely két egymásra következő eleme megkülönböztethetetlen. Megfordítva, ha valamely fizikai kontinuum minden elempárjához, a-hoz és b-hez létezik a* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *elemek egy véges sora, úgy hogy az* $a, c_1, c_2, \ldots, c_n, b$ *sor minden két egymásra következő eleme megkülönböztethetetlen, akkor a fizikai kontinuum összefüggő.*

Ha ugyanis az összefüggő fizikai kontinuum valamely a eleméhez léteznék olyan b elem, hogy az a, b elempárnak nincs meg a tételben kifejezett tulajdonsága, akkor az összes ilyen b elemek egy részhalmazt alkotnának; a kiegészítő halmaz bármely eleméből és az a elemből képezett elempárnak meg volna az idézett tulajdonsága. Mivel a fizikai kontinuum összefüggő, mindenesetre van a részhalmaznak egy d és a kiegészítő halmaznak oly e eleme, melyek megkülönböztethetetlenek; minthogy az a, e elempárnak megvan az idézett tulajdonsága, vagyis létezik az $a, c_1, c_2, \ldots, c_n, e$ elemek véges sora, melynek minden két egymásra következő eleme megkülönböztethetetlen, létezik a hasonló tulajdonsággal biró $a, c_1, c_2, \ldots c_n, e, d$ sor is, vagyis az a, d elempárnak is megvan az idézett tulajdonsága. A föltevés, a melyből kiindultunk, eszerint ellentmondásra vezet.

Megfordítva, bontsunk valamely fizikai kontinuumot, melynek minden elempárjának megvan az idézett tulajdonsága, tetszésszerinti módon két részhalmazra. Legyen a az egyik, b a másik részhalmaznak egy-egy eleme; legyen $a, c_1, c_2, \ldots, c_n, b$ egy megfelelő sor. A sornak amaz elemei közt, melyek az első részhalmazhoz tartoznak, mindenesetre van egy utolsó; mivel ez az elem nem b, van a sorban egy közvetetlen reá következő elem, a két egymásra következő elem megkülönböztethetetlen és az egyik az első, a másik a második részhalmazhoz tartozik. A fizikai kontinuum ennélfogva összefüggő.

Két megkülönböztethetetlen elemről akkor mondom, hogy *logikailag* megkülönböztethetetlenek, ha nincs a fizikai kontinuumnak olyan eleme, mely az egyik elemtől megkülönböztethetetlen, a másiktól megkülönböztethető.

A pontszerű fizikai kontinuum bármely két eleme logikailag megkülönböztethetetlen.

Ha a és b, b és c logikailag megkülönböztethetetlenek, akkor a és c is logikailag megkülönböztethetetlenek.

Valamely fizikai kontinuumot akkor mondok *logikailag* diszkrétnek, ha minden megkülönböztethetetlen elempárja logikailag megkülönböztethetetlen. A megkülönböztethetetlen elemek összeolvasztásával a logikailag diszkrét kontinuum diszkrét kontinuumnak tekinthető.

Valamely valódi összefüggő fizikai kontinuum legalább egy *a, b* elempárt tartalmaz, a mely megkülönböztethető. Két részhalmazra bontván a halmazt, úgy hogy az egyik részhalmazt *a*-val együtt az *a*-tól megkülönböztethetetlen elemek képezzék, van mindenesetre ennek a halmaznak egy *c* és a kiegészítő halmaznak egy *d* eleme, melyek megkülönböztethetetlenek; *a* a kiegészitő sokaság minden elemétől, tehát *d*-től is megkülönböztethető. *a* és *c* ennélfogva nem logikailag megkülönböztethetetlenek. Vagyis áll a következő

II. tétel. Minden valódi összefüggő fizikai kontinuum legalább egy megkülönböztethetetlen elempárt tartalmaz, mely nem logikailag megkülönböztethetetlen.

A mathematikai kontinuum.

Valamely halmazt akkor nevezek *mathematikai kontinuumnak*, ha minden eleme és minden részhalmaza közt fönnáll a következő két vonatkozás közül az egyik és csak az egyik: *a)* az elem *sűrűsödési helye* a részhalmaznak; *b)* az elem a részhalmazra nézve *izolált*, és ha a következő feltételek kielégíttetnek:

1. Véges számú elemből álló részhalmazra nézve minden elem izolált.

2. Valamely részhalmaz minden sűrűsödési helye sűrűsödési helye minden olyan részhalmaznak is, mely az előbbi részhalmazt tartalmazza.

3. Ha valamely részhalmaz két részhalmazra bontatik, akkor a részhalmaz minden sűrűsödési helye sűrűsödési helye a két részhalmaz közül legalább az egyiknek.

4. Ha A a t részhalmaz sűrűsödési helye és B egy A-tól különböző elem, akkor van a t részhalmaznak olyan további t^* részhalmaza, melynek A sűrűsödési helye, és a melyre nézve B izolált.

A mathematikai kontinuum legegyszerűbb példái a ponthalmazok. A közvetítő elv különféle lehet; alapulhat például a távolság vagy a rendjelleg fogalmán. A mathematikai kontinuum általánosabb példáját szolgáltatják az egyszeres és a többszörös rendjellegek. A függvényhalmazok vizsgálására már nem elégséges a rendjelleg fogalma: a feladat természete szerint a sorkonvergenczia fogalmának, vagy a távolságfogalom czélszerű általánosításának felhasználása szükséges. A közvetítő elvvel esetleg a hozzárendelés is megváltozik, azaz olyan elemek, a melyek az egyik elv alapján valamely részhalmaznak sűrűsödési helyei és más olyan elemek, melyek a részhalmazra nézve izoláltak, más közvetítő elv alkalmazásával szerepet cserélhetnek. Annak, hogy miként alkalmazhatók ugyanarra a halmazra különböző közvetítő elvek, érdekes példái az erős és a gyenge extremum fogalmai, melyeknek éles megkülönböztetése a variácziószámításban új korszakot jelentett.

Ha két mathematikai kontinuum elemei megfordithatóan egyértelműen egymáshoz rendelhetők, úgy hogy az egyik kontinuum bármely eleme és bármely részhalmaza és a másik kontinuum megfelelő eleme és megfelelő részhalmaza ugyanazon vonatkozásban vannak, akkor azt mondom, hogy a két kontinuum *hasonlóan sűrített*. Az összes hasonlóan sűrített kontinuumok összfogalma a *sűrítési jelleg*. A rendjelleg CANTOR-féle definicziójának mintájára a sűrítési jelleg mint azon általános fogalom definiálható, mely keletkezik, ha az elemek tulajdonságaitól eltekintünk, de az elemek és részhalmazok közti vonatkozásokat megtartjuk.

A mathematikai kontinuum egy elemét *főelemnek* nevezem, ha van olyan részhalmaz, melynek sűrűsödési helye.

A mathematikai kontinuum egy részhalmazát az A elem környezetének nevezem, ha A-t tartalmazza és A a kiegészitő halmazra nézve izolált. Az olyan elemnek, a mely nem főelem, minden az elemet tartalmazó részhalmaz környezete. A 3. alatti föltételből következik, hogy *ha A valamely t halmaznak sűrűsödési helye, akkor sűrűsödési helye a halmaz minden olyan részének, melyet valamely környezete a halmazból kiválaszt.* Az 1. alatti föltétel alapján ebből az következik, hogy *A-nak minden környezete a t halmaznak végtelen sok elemét tartalmazza. A tétel megfordítható.*

Ha $u_1, u_2, \ldots, u_n$ az A elemnek véges számú környezete, akkor azon elemek összessége, melyek mind az n környezetben tartalmaztatnak, az A elemnek ugyancsak környezete. A tétel a 2. és 3. alatti föltevésekből teljes indukczió segítségével következik.

A mathematikai kontinuumokra vonatkozó egyes problemák természete gyakran czélszerűvé teszi a környezet fogalmának megfelelő specziálizálását. Igy pl. a ponthalmazok elméletében gömbszerű, koczkaszerű, projektiv alapvetésnél esetleg tetraedrális környezetekkel dolgozunk.[1] A *speczíális környezetek* egy rendszerét akkor mondom *kielégítőnek*, ha minden főelem bármely környezetéhez van az elemnek olyan speczíális környe-

[1] Az irraczionális számok elméletének mélyitésére BAIRE R. sikerrel alkalmaz olyan speczíális környezeteket, melyeket az irraczionális számoknak közönséges végtelen láncztörttel való kifejezése segítségével származtat. (Sur la théorie des ensembles; Sur la théorie des fonctions discontinues, C. R. 1899.)

zete, mely amabban tartalmaztatik. Igy például a számtérben a raczionális koordinátájú középpontokkal biró, raczionális sugarú gömbök összessége a speczialis környezeteknek egy kielégítő, megszámlálható rendszere.

A t halmaz A eleme a halmaznak *belső eleme,* ha a t halmaz az elemnek környezete, azaz ha A a kiegészítő halmazra nézve izolált; a t halmaz minden olyan elemét, mely nem belső elem, a halmaz *szélső elemének* mondom. A t halmaz *nyilt,* ha minden eleme belső elem.

A t halmaz szélső elemei és a kiegészítő halmaz szélső elemei együtt alkotják a t halmaz *határát.* Két egymást kiegészítő halmaz határa közös.

A mathematikai kontinuum *összefüggő,* ha nem bontható szét két nyilt részhalmazra, melyek egymásnak kiegészítő halmazai.

A t halmaz sűrűsödési helyeinek összességét a t halmaz *derivált* halmazának nevezem. A t halmaz derivált halmazát t'-vel jelölöm.[1] A t és t' halmazok egyesitési halmazát $\{t, t'\}$-vel jelölöm.

Két részhalmazt *szeparáltnak* mondok, ha nincsen közös elemük.

A t_1 és t_2 halmazokról akkor mondom, hogy egymásra nézve *izoláltak,* ha a $\{t_1, t'_1\}$ és $\{t_2, t'_2\}$ halmazok szeparáltak.

A t halmaz *összefüggő,* ha nem bontható föl két izolált részhalmazra.

A t halmaz *abszolute összefüggő,* ha bármiként is bontassék föl két részhalmazra, legalább egy olyan elem van, mely az egyik részhalmaznak eleme, a másiknak sűrűsödési helye.

A mathematikai kontinuum minden részhalmaza önállóan is mathematikai kontinuumnak tekinthető és pedig úgy, hogy elemei és részhalmazai közt ugyanazok a vonatkozások állanak

[1] A t' halmaz nem mindig tartalmazza a $t'' \equiv (t')'$ halmazot. A mathematikai kontinuumok általános elméletében nélkülözni kell a derivált halmaz zárt voltát, mely a ponthalmazok elméletében mint számos következtetés premiszszája, annyira termékeny.

fönn, mint az eredeti kontinuumban. Annak a föltétele, hogy a részhalmaz abszolute összefüggő legyen, így is kifejezhető: a részhalmaz mint önálló mathematikai kontinuum összefüggő. Az összefüggő ponthalmazok egyesítési halmazaira vonatkozó ismert tételek úgy az összefüggő, mint az abszolut öszszefüggő részhalmazokra könnyen átvihetők.

A mathematikai kontinuum összefüggő voltának szükséges és elégséges feltételét adja a következő

III. tétel. Arra, hogy valamely mathematikai kontinuum összefüggő legyen, szükséges és elegendő, hogy elemeinek minden párjához létezzék legalább egy abszolute összefüggő részhalmaz, mely az elempárt tartalmazza.

A föltétel szükséges volta közvetlenül világos; mert maga az összefüggő mathematikai kontinuum oly abszolut összefüggő részhalmaz, mely minden elempárt tartalmaz. De a föltétel elegendő is. Bontsunk szét egy mathematikai kontinuumot, mely a feltételt kielégíti, tetszésszerinti módon két, t_1 és t_2 részhalmazra; legyen A_1 a t_1, A_2 a t_2 halmaznak egy-egy eleme. A föltétel szerint létezik egy abszolut összefüggő t^* részhalmaz, mely az A_1 és A_2 elemeket tartalmazza. A t^* halmazt a t_1^* és t_2^* halmazokra bontom úgy, hogy t_1^* t_1-ben, t_2^* t_2-ben tartalmaztatik. Mindkét halmaz legalább egy elemet, A_1-et, ill. A_2-t, tartalmaz. Mivel a t^* halmaz abszolut összefüggő, annálfogva létezik legalább egy olyan B elem, mely a t_1^*, t_2^* halmazok közül az egyiknek eleme, a másiknak sűrűsödési helye. A B elem a 2. föltétel értelmében a t_1, t_2 halmazok közül is az egyiknek eleme, a másiknak sűrűsödési helye; a mathematikai kontinuum ennélfogva összefüggő.

Azok a további fogalmak, melyek a ponthalmazok elméletében szerepelnek, valamint olyan mélyebben fekvő fogalomalkotások is, melyeknek a ponthalmazok elméletében nincsen jelentőségük, könnyen kifejthetők és alapjául szolgálnak a sűrítési jellegek általános elméletének.[1] Jelen dolgozatban csak

[1] Mielőtt a speciális sűrítési jellegek egyes osztályai alaposan meg

azokat a fogalmakat elemezem, melyeknek alkalmazását feladatom természete igényli. A már tárgyalt fogalomalkotásokon kívül ilyenek a *rendjelleg* és a *folytonos ábrázolás* fogalmai. A mathematikai kontinuum, illetve a sűrítési jelleg fogalma tudtommal itt adatik először teljes általánosságban. A sűrítési jelleggel kapcsolatos fogalmak elemzésében némileg messzebb mentem, mint az ezen dolgozatban tárgyalt probléma specziális czéljaira szükséges. Nem akartam azonban elmulasztani a kinálkozó alkalmat, hogy rámutassak arra a fontos rendszeresítő szerepre, melyre a sűrítési jelleg fogalma a mathematikában hivatva van.

A képzet mint fizikai kontinuum.

Bizonyos, tudatunkban végbemenő folyamatok eredménye, hogy érzetcsoportok egyes rendszereit fizikai kontinuumok gyanánt fogjuk föl olykép, hogy az egyes csoportokat egymásra vonatkoztatjuk és bizonyos csoportokat egymástól megkülönböztethetetlennek, másokat megkülönböztethetőknek tekintünk. Első sorban azokat a csoportokat tekintjük megkülönböztethetetleneknek, melyeket egymástól megkülönböztetni nem tudunk; másodsorban pedig azokat, melyeket nem akarunk egymástól megkülönböztetni. A megkülönböztethetetlenségnek ezt a második fokát az elsővel — a *szükségképeni* megkülönböztethetetlenséggel — szemben *megegyezés alapján* való megkülönböztethetetlenségnek[1] nevezem. Az elvet — a megegyezést —,

---

nem vizsgáltatnak, azt hiszem, korai volna a sűrítési jellegek általános elméletének alapvetését megkísérelni. A sűrítési jellegek egy kiterjedt osztályát vizsgálta meg FRÈCHET t. i. azokat a sűrítési jellegeket, melyekben minden főelemhez létezik egy feléje konvergáló megszámlálható sorozat. Különösen érdekes eredményeket talált FRÈCHET azokra a sűrítési jellegekre vonatkozólag, melyekre az «*écart*» fogalma alkalmazható. (C. R., 21 novembre 1904; 2 janvier 1905; 20 mars 1905.)

[1] POINCARÉ kifejezése: identique par convention, könnyen ad alkalmat a félreértésre. Hangsulyozom, hogy két érzetcsoport megkülönböztethetetlen volta alapján a két csoport azonos voltáról mit sem mondhatunk mondá-

melynek alapján bizonyos gondolkodási folyamatokban egyébként megkülönböztethető csoportokat megkülönböztethetetleneknek tekintünk, a tapasztalat igazolta czélszerűség indokolja. A gondolkozási folyamat különböző czélja szerint a megegyezés is különféle. A számos lehetséges elv közül feladatunkra való tekintettel kettő érdekel. Hajlamunk van arra, hogy érzetcsoportjainkat térben, valamint arra is, hogy időben egymásra vonatkoztassuk. A szerint, hogy az egymásra vonatkoztatásnál milyen megegyezés szerepel, keletkeznek térbeli, illetőleg időbeli képzeteink. A megegyezéseket, a tapasztalatokat, melyek reájuk vezetnek, jogosultságukat és czélszerűségüket itt nem elemezem; az erre vonatkozó érdekes fejtegetések Poincaré idézett könyvében találhatók. Számomra csak az a lényeges, hogy vannak olyan tudatomban végbemenő folyamatok, melyek térbeli és időbeli képzetekhez, mint fizikai kontinuumokhoz vezetnek, és hogy abban a pillanatban, melyben ezt a mondatot befejezem, tudatomban egy határozott momentán térképzet létezik.

A momentán idő- és térképzetek.

Az összes, tudatomba felvett érzetcsoportok tudatomban *időbeli rendben jelentkeznek,* olyképen, hogy az egyik érzetcsoport előbb, a másik később lép be tudatomba, vagy pedig a két érzetcsoport rendjét illetőleg különbséget tenni nem tudok. Ha a csoportok minden egyéb tulajdonságától absztrahálok és azokat csupán időbeli rendjük szempontjából tekintem, azokat, a melyek rendjét illetőleg különbséget tenni nem tudok, megkülönböztethetetleneknek, a többieket megkülönböztethetőknek veszem, akkor minden csoport egy *momentán időképzetet* határoz meg, egy bizonyos fizikai kontinuumot, mely

sunknak egyáltalában nem volna semmi értelme. Az azonosság fogalma csak a logikai gondolkodás magasabb fokán, a tudományos gondolkodás folyamán keletkezik. Képzeteknél csak megkülönböztethetetlenségről beszélhetünk, azonosságról nem; legfeljebb annyiban, a mennyiben minden érzet és minden képzet magamagával azonos.

az «előbb» és «később» vonatkozások bevezetése után egyszeresen rendezett.[1] Ennek a fizikai kontinuumnak bármely két eleme vagy megkülönböztethetetlen, vagy pedig megkülönböztethető; utóbbi esetben az egyik elem megelőzi a másikat, és pedig, ha *a* megelőzi *b*-t, *b* pedig *c*-t, akkor *a* is megelőzi *c*-t. Ha már most ezen fizikai kontinuum elemeinek minden olyan csoportját, mely logikailag megkülönböztethetetlen elemekből áll és melynek elemei egyetlen bele nem tartozó elemtől sem logikailag megkülönböztethetetlenek, *időpontnak* nevezzük, akkor az időpontok egy egyszeresen rendezett fizikai kontinuumot alkotnak, melynek egyetlen elempárja sem logikailag megkülönböztethetetlen.

Egy első megszorító föltevés az, hogy a tudatunkba *bármely időpontig, azaz bármely érzetet megelőzőleg fölvett érzetek száma véges*. Ebből a föltevésből az következik, hogy *bármely időpontot megelőző időpontok száma is véges*. Valamely időpontig terjedő időpontok tehát véges sort alkotnak, és minden időpontnak határozott *rangja* van.

Minden időpontig bizonyos véges számu érzetcsoport vétetett föl tudatunkba; az érzetcsoportok egyrészt időben vagy megkülönböztethetetlenek vagy egymásra következnek, másrészt a térben megkülönböztethetetlenek vagy megkülönböztethetők; megkülönböztethetetleneknek tekintjük az érzetcsoportokat, ha akár szükségképen, akár megegyezés alapján megkülönböztethetetlenek; ellenkező esetben két érzetcsoportot megkülönböztethetőnek tekintünk.

Rekonstruálni kivánván emlékezetünkben egyes érzetcsoportokat, a létrejövő psychikai ingereket nem mindig az illető érzetcsoportok, hanem más tőlük megkülönböztethetetlen érzetcsoportok is determinálják. Ha mármost *n-edrendű fizikai pontnak* nevezem a térben megkülönböztethetetlen, időben

---

[1] A rendezett fizikai kontinuumokat illetőleg l. az illető fejezetet. Hogy az «előbb» és «később» vonatkozásokat milyen megegyezés szabályozza, azzal itt nem foglalkozom; az időben való rendezhetőséget készen veszem át az idevágó pszikológiai vizsgálatokból.

egymásra következő érzetcsoportok minden sorát, mely csupán az n-edik időpontig (bezárólag) a tudatba felvett érzetcsoportokat tartalmaz; ha továbbá megkülönböztethetetlennek tekintek két fizikai pontot, ha az alkotó érzetcsoportok mind megkülönböztethetetlenek, ellenkező esetben pedig megkülönböztethetőnek, akkor az n-edrendű fizikai pontok egy bizonyos fizikai kontinuumot alkotnak, melyet *n-edik momentán térképzetnek* nevezek. Az n-edik momentán térképzet segítségével minden térképzet, mely az n-edik időpontig fölvett érzetekből alakult, rekonstruálható.

Az n-edik időpontot megelőző valamely m-edik időponthoz egy határozott m-edik momentán térképzet tartozik. Ennek a térképzetnek minden eleme újra feltalálható az n-edik momentán térképzetben; egyes elemeknek a mellett folytatásai is feltalálhatók az n-edik térképzetben, t. i. az olyan sorok, melyeknek az m-edik időpontig fölvett érzetcsoportjai az m-edik momentán térképzet illető elemét alkotják, melyhez ezenkívül még későbbi érzetcsoportok is járultak. Az a_m m-edrendű fizikai pontról akkor mondom, hogy tartalmazza az a_n n-edrendű fizikai pontot, ha az a_m-et alkotó érzetcsoportok egyszersmind az a_n-et is alkotják vagy legalább az alkotó érzetcsoportok között szerepelnek és minden további az a_n-t alkotó érzetcsoport az m-edik időpont után jött a tudatba.

Az a_n n-edrendű fizikai pontról akkor mondom, hogy *valódi* n-edrendű fizikai pont, ha az a_n-t alkotó érzetcsoportok között van olyan, mely az n-edik időpontban jött a tudatba; ellenkező esetben *színleg* n-edrendű fizikai pontnak mondom.[1]

[1] A térfogalom megalkotásánál csupán a valódi n-edrendű fizikai pontok a lényegesek; a színleg n-edrendű fizikai pont fogalmát csak a tárgyalás egyszerűsítése végett vezettem be.

A momentán térképzetek sora.

Az előző fejezetben minden időponthoz egy fizikai kontinuumot rendeltem; az n-edik időponthoz tartozó fizikai kontinuumot n-edik momentán térképzetnek, elemeit n-edrendű fizikai pontoknak neveztem; megkülönböztettem valódi n-edrendű és színleg n-edrendű fizikai pontokat. A különböző momentán térképzetek elemeit egymásra vonatkoztattam olykép, hogy ha $n > m$ és a_m m-edrendű, a_n pedig n-edrendű fizikai pont, akkor a_m a_n-t vagy tartalmazza vagy pedig nem tartalmazza. A momentán térképzeteknek és egymásra vonatkoztatásuknak definicziójából a momentán térképzetek sorának bizonyos tulajdonságai következnek, melyek psychológiai jellegű föltevéseinktől csak a kifejezésmódban különböznek; ezek szolgáltatják a momentán térképzetek soráról való föltevéseink első csoportját (1—7.).

Térképzeteinket illető tapasztalataink a föltevések egy második csoportjára vezetnek, olyan föltevésekre, melyek már nem következményei a definicziónak, de a melyeknek érvényességét eddig tapasztaltuk és további lehetséges térképzeteinkre föltételezzük (8, 9.).

Psychikai életünk határát, a perczipiálható érzetek számát nem ismerjük. Ha a térfogalmat véges számú érzetből akarnók megkonstruálni, lehetséges volna, hogy egy még elérendő időpontban térfogalmunk elégtelen volna térképzeteink leírására. Ha ellenben a momentán térképzetek sorának határt nem szabunk, ha e mellett nemcsak a saját tapasztalatainkkal, de a másokéival is számolunk és a tapasztalati geometria mint tudomány realitását, a lehetséges eszmecserét, minden tudománynak ezt a nélkülözhetetlen alapföltételét szem előtt tartjuk, akkor a térfogalom definiálására a momentán térképzetek végtelen sorát kell alkalmaznunk, mely, azon föltevés alapján, hogy bármely időpontig tudatunkba csak véges számu képzet vétetett fel, szükségképen ω tipusu; a sor viselkedését a föltevések egy harmadik csoportja által szabályozzuk (10—16.). Ezek a föltevések tapasztalatainkból sem nem következnek, sem velük nem ellenkeznek; abban a logikai proczeszszusban, mely a geometriai tudomány alapját megvetette, csupán, talán öntudatlanul, azért vezettettek be, hogy a tudomány realitása minél valószinűbb legyen, azaz hogy valószínűség szerint minél messzebb tolassék ki az az időpont, melyben a megállapított geometria térképzeteink leírására nem lesz elégséges. Ezek a föltevések a momentán térképzetek végtelen sorának viselkedését szabályozzák és véges sorra már nem értelmezhetők.

A momentán térképzetek végtelen sora segítségével az időben egymásra következő, egymástól megkülönböztethetetlen érzetcsoportok végtelen sorai, illetőleg egymásban tartalmazott fizikai pontok olyan végtelen sorai értelmezhetők, melyek végtelen sok valódi fizikai pontot tartalmaznak. Ezek a sorok szolgáltatják a mathematikai pontokat és a momentán térképzetek sora, a tér, ezen mathematikai pontok és vonatkozásaiknak összessége által lesz leírható. Ezt az összességet szintén térnek nevezem.

A tér mint mathematikai kontinuum.

A megelőző fejezetben a tért mint bizonyos fizikai kontinuumoknak, a momentán térképzeteknek sorát definiáltam. Minden egyes momentán térképzet mint fizikai kontinuum fizikai pontokból áll; az n-edik momentán térképzet elemeit n-edrendű fizikai pontoknak neveztem. Megkülönböztettem valódi és szinleg n-edrendű fizikai pontokat. Ha $n>m$, akkor minden a_m m-edrendű és minden a_n n-edrendű fizikai pont között fönnáll a következő két vonatkozás közül az egyik és csak az egyik: 1. a_m tartalmazza a_n-t; 2. a_m nem tartalmazza a_n-t (1. a_n tartalmaztatik a_m-ben; 2. a_n nem tartalmaztatik a_m-ben). A momentán térképzetek és vonatkozásaik eleget tesznek a következő föltevéseknek:

1. Minden m-edrendű fizikai pont egy és csak egy színleg $m+1$-edrendű fizikai pontot tartalmaz, és minden színleg $m+1$-edrendű fizikai pont egy m-edrendű fizikai pontban tartalmaztatik.

2. Ha a_m tartalmazza a_n-t és a_n tartalmazza a_p-t, akkor a_m is tartalmazza a_p-t.

3. Ha $m<n<p$ és a_m tartalmazza a_p-t, akkor van olyan a_n, mely a_m-ben tartalmaztatik és a_p-t tartalmazza.

4. Az a_m-ben tartalmazott színleg $m+1$-edrendű fizikai pont megkülönböztethetetlen minden a_m-ben tartalmazott valódi $m+1$-edrendű ponttól.

5. Ha a_m és b_m megkülönböztethetők, akkor az a_m-ben tartalmazott a_n és a b_m-ben tartalmazott b_n n-edrendű fizikai pontok is megkülönböztethetők.

6. Ha a_m és b_m megkülönböztethetetlenek, akkor az a_m-ben tartalmazott a_{m+1} és a b_m-ben tartalmazott b_{m+1} színleg $m+1$-edrendű fizikai pontok is megkülönböztethetetlenek.

7. Ha a_m és b_m két nem azonos m-edrendű fizikai pont, akkor az a_m-ben tartalmazott a_n pont b_m-ben nem tartalmaztatik.

8. Minden momentán térképzet véges számú fizikai pontból áll.

9. A valódi n-edrendű fizikai pontok kontinuuma összefüggő.

10. A momentán térképzetek sorának rendjellege ω.

11. Minden fizikai pont tartalmaz valódi magasabb rendű fizikai pontot.

12. Ha az a_m és b_m m-edrendü fizikai pontok megkülönböztethetők, akkor van olyan n szám, hogy minden valódi n nél magasabb rendű fizikai pont, mely valamely a_m-ben tartalmazott fizikai ponttól megkülönböztethetetlen, megkülönböztethető minden b_m-ben tartalmazott ugyanolyan rendű fizikai ponttól.

13. Ha az a_m és b_m m-edrendű fizikai pontok megkülönböztethetetlenek. akkor van olyan n szám, hogy minden a_m-ben

tartalmazott valódi n-nél magasabb rendű fizikai pont legalább egy b_m-ben tartalmazott ugyanolyan rendű fizikai ponttól megkülönböztethető.

14. Ha az a_m és b_m m-edrendű fizikai pontok megkülönböztethetetlenek, akkor van olyan két megkülönböztethetetlen a_n és b_n fizikai pont, melyek a_m, illetőleg b_m-ben és valódi m-nél magasabb rendű fizikai pontokban tartalmaztatnak.

15. Minden a fizikai ponthoz van olyan n szám, hogy minden olyan fizikai pont, mely nem tartalmaztatik n-nél alacsonyabb rendű fizikai pontban, minden az a pontban tartalmazott ugyanolyan rendű fizikai ponttól megkülönböztethető.

16. Minden a_m m-edrendű fizikai ponthoz van olyan n, hogy azon n-edrendű fizikai pontok kontinuuma, melyek a_m-ben és valódi m-nél magasabb rendű fizikai pontokban tartalmaztatnak, összefüggő és minden a_m-ben tartalmazott n-nél magasabb rendű fizikai pont legalább egy ilyen pontban tartalmazott ponttól megkülönböztethetetlen.

Mathematikai pontnak nevezem az $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ fizikai pontok olyan végtelen sorozatát, melyben az egymásra következő tagok rendszámai 1-gyel különböznek, minden fizikai pont tartalmazza a következőt és a melyben minden n-hez van valódi n-nél magasabb rendű fizikai pont.

Mathematikai pontok létezése a 1. és 11. alatti föltevésekből következik.

Ha $A \equiv \{a_m, a_{m+1}, \ldots\}$ az $a_m, a_{m+1}, \ldots$ sorozattal definiált mathematikai pont, és a_p a sorozat egy eleme, akkor azt mondom: az a_p fizikai pont *tartalmazza* az A mathematikai pontot.

Az $A \equiv \{a_m, a_{m+1}, \ldots\}$ és $B \equiv \{b_n, b_{n+1}, \ldots\}$ mathematikai pontokat *azonosaknak* mondom, ha minden m-nél és n-nél nagyobb N-re az a_N és b_N pontok azonosak vagy megkülönböztethetetlenek. Az A és B pontok azonosságát $A \equiv B$-vel jelölöm. Az azonosság definicziójából következik: 1. $A \equiv A$; 2. *ha* $A \equiv B$, *akkor* $B \equiv A$. A 12. föltevésből következik, hogy *ha* $A \equiv B$ *és* $B \equiv C$, *akkor* $A \equiv C$.

Az A és B mathematikai pontokat *különbözőknek* mondom, ha nem azonosak.

A következőkben az olyan mathematikai pontokat, melyek azonosak, egy mathematikai pontnak tekintem. Az azonosság jegyei folytán tehetem ezt a nélkül, hogy ez által két különböző pontot is egy pontnak tekinteném. E megállapodás után ugyanazon mathematikai pont fizikai pontoknak különböző soraival definiálható; minden olyan fizikai pontról, mely a sorok egyikében előfordul, azt mondom, hogy a mathematikai pontot *tartalmazza*. Valamely mathematikai pontot *n-edrendűnek* mondok, ha tartalmaztatik valamely n-edrendű, de nem tartalmaztatik n-nél alacsonyabb rendű fizikai pontban. Azon mathematikai pontok összességét, melyek egy valódi n-edrendű fizikai pontban tartalmaztatnak, *n-edrendű elemi halmaznak* nevezem. A 2., 11. és 12. föltevésekből következik, hogy *minden fizikai pont végtelen sok különböző mathematikai pontot tartalmaz;* minden elemi halmaz ennélfogva végtelen sok pontból áll. Áll tehát a következő

IV. tétel. A tér mathematikai pontoknak transzfinit sokasága.

A 14. föltevés segítségével következik, hogy két megkülönböztethetetlen fizikai ponthoz mindig van legalább egy-egy mathematikai pont, melyek azonosak és a melyek közül az egyiket az egyik, a másikat a másik fizikai pont tartalmazza. Megállapodásunk alapján ezt a tételt a következőképen fogalmazhatom: *Két megkülönböztethetetlen fizikai pont legalább egy közös mathematikai pontot tartalmaz.*

Két megkülönböztethető fizikai pont nem tartalmaz közös mathematikai pontot.

Két mathematikai pontról akkor mondom, hogy a két pont *szomszédos* (n), ha van olyan n-edrendű, de nincsen magasabb rendű elemi halmaz, mely mind a két pontot tartalmazza. Két különböző mathematikai ponthoz, melyek ugyanazon elemi halmazban tartalmaztatnak, okvetlen van olyan n, hogy a két pont szomszédos (n). Ha nincsen olyan elemi halmaz, mely mind a két pontot tartalmazza, akkor azt mondom, hogy a két pont *szomszédos (o).*

Hogy a tért mathematikai kontinuum gyanánt foghassuk fel, meg kell adni egy *sűrítési elvet,* vagyis egy elvet, mely megállapítja, vajjon egy mathematikai pont valamely részhalmazra nézve sűrűsödési hely-e avagy izolált. A sűrítési elvnek számolni kell a térfogalom pszikologiai alapjaival. Legyen A egy mathematikai pont és t a mathematikai pontok egy halmaza. A psychikai proczeszszusban elérkeztűnk az n-edik időponthoz. Ha van olyan n-edrendű fizikai pont, mely az A pontot és a t halmaznak tőle különböző pontját tartalmazza, akkor ezen a fokon még nem dőlt el a két pont azonossága vagy különböző volta: az n-edik időpontban az A pont összetéveszthető a halmaz valamely tőle különböző pontjával. Tegyük fel, hogy egy bizonyos n-től kezdve minden időpontban ugyanez az eset ismétlődik; és tegyük fel egyelőre, hogy A nem tartozik a halmazhoz.

Akkor minden véges időpontban kétséges, vajjon A a t halmazhoz tartozik vagy sem; ebben az esetben azt mondom, hogy A a t halmaz sűrűsödési helye. A mathematikai kontinuumokra megszabott 2. föltétel azután kiterjeszti a sűrűsödési hely fogalmát arra az esetre is, ha A a t halmaznak pontja.

A sűrítési elv e szerint a következő: Az A pont a t halmaznak *sűrűsödési helye,* ha minden n számra van a halmaznak legalább egy olyan A-tól különböző pontja, mely A-val szomszédos *(p)*, hol $p > n$; ellenkező esetben az A pont a t halmazra nézve *izolált.*

Föltevéseinkből könnyen következtethető, hogy ha az A pont a t halmaznak sűrűsödési helye, akkor minden n-hez a halmaznak végtelen sok olyan pontja van, mely A-val szomszédos *(p)*, hol p az egyes pontok szerint változó, de mindig n-nél nagyobb szám.

Közvetetlenül világos, hogy az adott sűrítési elv megfelel a mathematikai kontinuumokra megszabott első három föltételnek. A most bizonyitandó tételből következik, hogy a sűrítési elv a 4. föltételt is kielégiti.

V. tétel. Ha az A pont a t halmaznak sűrűsödési helye, akkor van a t halmaznak olyan megszámlálható részhalmaza, melynek az A pont az egyetlen sűrűsödési helye.

Van ugyanis egy első olyan n_1 szám és a t halmaznak egy megfelelő A_1 pontja, hogy A és A_1 szomszédosak (n_1). Van továbbá egy első olyan $n_2 > n_1$ szám és a t halmaznak egy megfelelő A_2 pontja, hogy A és A_2 szomszédosak (n_2). Az $n_1, n_2, \ldots$ számok sora és a megfelelő A_1, $A_2 \ldots$ pontok sora tetszés szerint folytatható. Létezik tehát mindenesetre az n_i számok egy folyton növekvő végtelen sorozata és az A_i pontok egy megfelelő sora, úgy, hogy A és A_i szomszédosak (n_i).[1] Az A pont az $A_1, A_2, \ldots$ sorozatnak sűrűsödési helye. Ha a sorozatnak volna egy A-tól különböző A^* sűrűsödési helye, akkor kiválasztható volna belőle egy A_{k_1}, $A_{k_2}, \ldots$ végtelen sor, melyben $k_1, k_2, \ldots$ folyton növekvő számok, és léteznének az $r_1, r_2, \ldots$ és $s_1, s_2, \ldots$ számok folyton növekvő sorai, úgy, hogy A és A_{k_i} szomszédosak (r_i), A^* és A_{k_i} szomszédosak (s_i). Akkor azonban bármilyen nagy n-hez léteznék két olyan megkülönböztethetetlen fizikai pont, melyek valódi n-nél magasabb rendű fizikai pontokban tartalmaztatnak és a melyek közül az egyik az A pontot, a másik az A^* pontot tartalmazza. Ez azonban a 12. és 15. föltevés következtében csak úgy lehetséges, ha az A és A^* pontok azonosak.

A tért ilyen módon mint mathematikai kontinuumot definiáltam; e mathematikai kontinuumnak egy első fontos tulaj-

---

[1] Az $A_1, A_2, \ldots$ sornak csak a létezését bizonyítom be; a sor maga nincsen egyértelműen meghatározva. Ha volna olyan elvünk, melynek segítségével érzeteinket ω tipusu sorba, vagy akár csak jól rendezhetnénk, akkor ki lehetne egy határozott $A_1, A_2, \ldots$ sort választani. Ilyen elv hiján kénytelen voltam a használt bizonyítási módra szorítkozni, mely különben halmazelméleti vizsgálatokban gyakran használtatik. L. egyébiránt: *F. Bernstein*, Bemerkung zur Mengenlehre, Gött. Nachr. 1904, p. 6.

donságát az V. tétel adja. Első sorban már most azt a kérdést kell elintéznünk, hogy föltevéseinkből ennek a mathematikai kontinuumnak még milyen jellemző tulajdonságai következnek?

A Bolzano-Weierstrass-féle tétel.

Valamely ponthalmazról, azaz a mathematikai pontok valamely halmazáról azt mondom, hogy *végesben fekszik,* ha van olyan szám, melynél bármely pontjának rendszáma kisebb. Minden véges számú pontból álló valamint minden elemi halmaz végesben fekszik. Véges számú, végesben fekvő halmaz egyesítési halmaza és minden végesben fekvő halmaznak bármely részhalmaza szintén végesben fekszik.

VI. tétel. Minden végesben fekvő transzfinit ponthalmaznak legalább egy sűrűsödési helye van.

Minthogy ugyanis a halmaz végesben fekszik, létezik olyan N szám, mely a halmaz bármely pontjának rendszámánál nagyobb. A ponthalmaz minden pontjához ennélfogva legalább egy olyan N-edrendű fizikai pont van, a mely tartalmazza. Minthogy a ponthalmaz transzfinit, az N-edrendű fizikai pontok száma pedig véges, legalább egy olyan N-edrendű fizikai pont van, mely a halmaznak végtelen sok pontját tartalmazza. Legyen a_N egy ilyen N-edrendű fizikai pont. A halmaz minden a_N-ben tartalmazott pontját legalább egy a_N-ben tartalmazott $N+1$-edrendű fizikai pont tartalmazza. Ennélfogva legalább egy olyan a_N-ben tartalmazott $N+1$-edrendű fizikai pont létezik, mely a halmaznak végtelen sok pontját tartalmazza. Ha van ilyen tulajdonságu valódi $N+1$-edrendű fizikai pont, akkor ilyet választunk a_{N+1}-nek; ellenkező esetben egy a tulajdonsággal biró színleg $N+1$-edrendű fizikai pontot. Ha a_{N+2} analog tulajdonsággal biró, lehetőleg valódi $N+2$-edrendű fizikai pont s i. t., akkor az egymásban tartalmazott a_N, a_{N+1}, $a_{N+2}, \ldots$ fizikai pontok sorozata a 13. föltevés értelmében végtelen sok valódi fizikai pontot tartalmaz és ennélfogva egy

A mathematikai pontot definiál.[1] Minden egyes, a sorban előforduló fizikai pont a halmaznak végtelen sok pontját tartalmazza, mindenesetre tartalmaz tehát oly pontokat, melyek a halmazba tartoznak és *A*-tól különbözők. Vagyis *A* a halmaznak sűrűsödési helye.

Az adott tétel analogonja a számhalmazok elméletében a Bolzano-Weierstrass-féle tétel néven ismeretes. Tételünket röviden szintén Bolzano-Weierstrass-féle tételnek nevezem.

Riesz Frigyes.

[1] A meghatározás egyértelműségét illetőleg l. az V. tétel bizonyításához fűzött megjegyzést.

A CAUCHY-FÉLE INTEGRÁLTÉTELEK.

1. A függvénytan alaptételei az ú. n. Cauchy tételek. Ezek közül az első:

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \tag{1}$$

azt fejezi ki, hogy ha az $f(z)$, az A tartományban, melyben a C görbe egy összefüggő tartományt zár be, egyértékű, mindenütt véges, a z változónak monogen függvénye, akkor a C görbe mentén vett integrál értéke zérus. A második pedig ugyanolyan feltételek mellett:

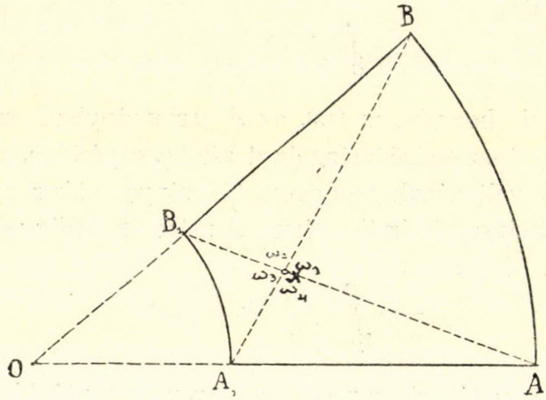
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = f(x), \tag{2}$$

ha az x hely a C tartományon belül van. Ez utóbbi tétel egyszerű következménye annak, hogy

$$\int_C \frac{dz}{z-x} = 2\pi i, \tag{3}$$

ha a C görbe az x helyet egyszerűen veszi körül.

E két tételből, miként ismeretes, következik az $f(x)$ függvénynek a szabályos a hely környezetében az $x-a$ szerinti Taylor-sora és a b szingularis hely környezetében $x-b$ pozitiv és negativ hatványai szerinti Laurent-sora. E sorfejtések megállapitása a függvénytani tárgyalás legfontosabb feladata. Ehhez pedig nem is szükséges a Cauchy-féle tételek általános megállapítása, a mi rendszerint a görbe vonal pontos fogalmazásban rejlő nehézségek miatt nem tekinthető elemí feladatnak. Elégséges lesz a jelzett czél elérhetése végett a Cauchy-féle tételnek, illetőleg a 3) alatti egyenlőségnek a megállapítása oly C görbére nézve, melyet az OA és OB egyeneseknek A_1A, illetőleg B_1B részei és az $OA_1 = OB_1$ sugárral, valamint az $OA = OB$ sugárral leírt A_1A, illetőleg BB_1 körívek alkotják. Ha ugyanis az ilyen — mondjuk körgyűrű-czikkre nézve az 1) és 3) alatti tételek bebizonyítjuk, akkor azonnal következik, hogy a 2) alatti tétel érvényes arra az esetre, midőn a C görbe a körgyűrű két határvonala és x a gyűrűtartomány bármely pontja. Ez pedig, miként ismeretes, a LAURENT-féle tétel megállapítására vezet.



1. ábra.

Az ábrában feltüntetett tartományra nézve az 1) alatti tételt úgy bizonyítjuk be, hogy kimutatjuk, hogy az 1) alatti integrál független az AOB szögtől. Ezzel ugyanis az lesz megmutatva, hogy e szög 0 is lehet és akkor az integrál az A_1A és azután AA_1 mentén veendő, tehát 0.

2. Legyen az OA a valós tengelyen és az AOB szög: α. Az 1) alatti integrál:

$$I = \int_{A_1}^{A} f(z)\,dz + \int_{A}^{B} f(z)\,dz + \int_{B}^{B_1} f(z)\,dz + \int_{B_1}^{A_1} f(z)\,dz. \qquad 4)$$

Ha

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad OA_1 = r_1, \quad OA = r,$$

akkor

$$I = \int_{r_1}^{r} f(\rho)\,d\rho + ir\int_{0}^{\alpha} f(re^{i\varphi})\,e^{i\varphi}d\varphi + e^{i\alpha}\int_{r}^{r_1} f(\rho e^{i\alpha})\,d\rho +$$

$$+ ir_1\int_{\alpha}^{0} f(r_1e^{i\varphi})\,e^{i\varphi}d\varphi,$$

mert az első integrálban $z=\rho$ valós, a másodikban $z=re^{i\varphi}$, a hol r állandó; a harmadikban $z=\rho e^{i\alpha}$, a hol α állandó és végre a negyedikben $z=r_1e^{i\varphi}$ és az integratio alatt r_1 állandó. Az első integrál független az α-tól. A másodiknak α szerinti differencziálhányadosa:

$$irf(re^{i\alpha})\,e^{i\alpha} \tag{5}$$

a negyediknek α szerinti differencziálhányadosa:

$$-ir_1f(r_1e^{i\alpha})\,e^{i\alpha}. \tag{6}$$

A harmadik integrálnak α szerinti differencziálásánál tekintetbe veszszük az

$$f(\rho e^{i\varphi})$$

monogeneitását. A monogeneitás föltételeit legegyszerűbben megkaphatjuk, ha az $f(z)$-t a

$$\log z = \log\rho + i\varphi$$

függvényének tekintjük. Kell, hogy a $\log\rho$ és az $i\varphi$ szerinti differencziálhányadosok megegyezzenek, azaz:

$$\frac{\partial f(\rho e^{i\varphi})}{\partial \log r} = \frac{\partial f(\rho e^{i\varphi})}{\partial (i\varphi)}$$

legyen, vagyis:

$$ri\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

A harmadik integrálnak α szerinti differencziálhányadosa a következő:

$$ie^{\alpha}\int_{r}^{r_1} f(\rho e^{i\alpha})\,d\rho + e^{i\alpha}\int_{r}^{r_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,d\rho$$

vagy $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ helyébe $\rho i\frac{\partial f}{\partial \rho}$ téve, a másodig tag

$$ie^{i\alpha}\int_r^{r_1}\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}d\rho$$

és ez egyenesmenti integrált parcziálisan integrálva:

$$ie^{i\alpha}r_1f(r_1e^{i\alpha})-ie^{i\alpha}rf(re^{i\alpha})-ie^{i\alpha}\int_r^{r_1}f(\rho e^{i\alpha})\,d\rho,$$

vagyis az I harmadik tagjának α szerinti differencziálhányadosa:

$$ie^{i\alpha}r_1f(r_1e^{i\alpha})-ie^{i\alpha}rf(re^{i\alpha})$$

és így az 5) és 6)-tal együtt:

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=0.$$

A körgyűrűczikkre vonatkozó integrál tehát független az α nyilástól. Ha $\alpha=0$, ez integrál eltűnik, tehát általában minden ilyen integrál 0. Ezzel egyúttal az is meg van mutatva, hogy ha a C görbe egy körgyűrű két határvonalából áll (a körgyürű körre is redukálódhatik), akkor

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

az említett feltételek mellett.

3. Legyen x pont a körgyűrűczikk belsejében. A tárgyalás egyszerűsítése végett feltehetjük, hggy x a valós tengelyen van, melyre nézve a czikk szimmetrikus és nyilása 2α. Számítsuk ki a

$$j=\int_C\frac{dz}{z-x}$$

integrált. Tegyük $z=\rho e^{i\varphi}$; akkor j négy integrál összege. Az első integrál:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{ire^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}-x}.$$

A nevezőben álló kifejezés kezdőértéke az xA vectornak, végértéke az xB vectornak felel meg. Ez az integrál tehát röviden így írható:

$$\log \frac{xB}{xA} = \omega_1 i.$$

A második integrál:

$$\int_r^{r_2} \frac{e^{i\alpha} dr}{re^{i\varphi}-x},$$

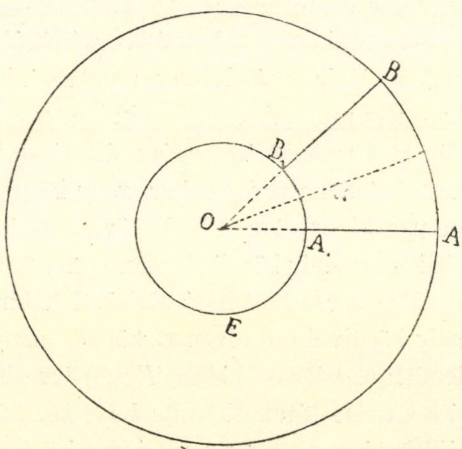
mely nem más, mint

$$\log \frac{xB_1}{xB} = \omega_2 i.$$

Éppen így a harmadik integrál $\omega_3 i$, a negyedik pedig $\omega_4 i$ és így:

$$\int_C \frac{dz}{z-x} = 2\pi i.$$

Ha x nem valós, akkor is ugyanerre az eredményre jutunk. Ha x a körgyűrű tetszésszerinti pontja, akkor az x-en átmenő



2. ábra.

radiushoz szimmetrikusan vonjuk az OA és OB radiusokat és ha C a körgyűrű határvonalait jelenti, akkor

$$\int_C \frac{dz}{z-x} = \int_{C_1ABB} \frac{dz}{z-x} + \int_{C_1} \frac{dz}{z-x},$$

a hol C_1 az $ADBB_1EA_1A$ körgyűrűczikket jelenti. Minthogy ez utóbbiban $\frac{1}{z-x}$ mindenütt véges, tehát ez az integrál 0 és így

$$\int_C \frac{dz}{z-x} = 2\pi i.$$

Ebből az ismeretes módon következik a második Cauchy-féle tétel, az egész függvénytannak — mondhatnók — alaptétele:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = f(x)$$

és ebből, ha a belső kör sugara 0, a függvény Taylor-sora, ha pedig valóban körgyűrűről van szó, a Laurent-sor.

4. Ezzel voltaképpen már az egész függvénytan felépítése elő van készítve. A továbbhaladás szempontjából a Cauchy-féle tételek ezen specialis esetei elégségesek; de a függvények másnemű (pl. polynomsorokban) előállítása czéljából szükségünk lehet a Cauchy-féle tételre más határvonalakkal biró területekre nézve is. Ezért megmutatjuk, hogy minő egyszerűen lehet az eddigiek alapján a Cauchy-tételt egész általánosságban is bebizonyítani. Ha tehát a határvonal kör, vagy körgyűrű, akkor a Cauchy-tétel be van bizonyítva. Ebből következett az $f(z)$ függvénynek a szabályos a hely körüli Taylor-sorba fejtése. Ha már most olyan tetszőleges rectificálható görbével határolt Γ területről van szó, mely körülvehető olyan C körrel, melynek belsejében $f(z)$ mindenütt szabályos, akkor Γ-ra nézve is közvetlenül megállapítható a Cauchy-tétel. Ugyanis, ha a kör középpontja a, akkor $f(z)$ előállítható a $z-a$ hatványai szerint haladó Taylor-sorban, mely összetartó az egész C kör belsejében, tehát összetartó a Γ görbe pontjaira nézve is. Következésképpen az

$$f(z) = \Sigma a_n (z-a)^n\text{-}$$

nak a Γ mentén vett integrálját megkaphatjuk, ha e hatványsort tagonként integráljuk. Azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy az

$$\int_\Gamma (z-a)^n dz = 0.$$

Rövidség kedveért azt mutatjuk meg, hogy $\int_\Gamma z^n dz = 0$. Ez integrál definicziója szerint:

$$\int_\Gamma z^n dz = \lim \Sigma \zeta_i^n (z_i - z_{i-1}),$$

ha $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a Γ görbe pontjai, ζ_i a z_i és z_{i-1} közé eső tetszőleges hely és a fölvett pontok számát úgy növesztjük, hogy $\lim |z_{i+1} - z_i| =$ legyen minden i-re nézve. ζ_i^n gyanánt válaszszuk ezt az értéket:

$$\zeta_i^n = \frac{1}{n}(z_i^n + z_i^{n-1} z_{i-1} + \cdots + z_{i-1}^n).$$

Minthogy $\lim |z_i - z_{i-1}| = 0$ esetében $\zeta_i^n = z_i^n$, tehát a $|z_i - z_{i-1}|$ hurok felső határa Δ választható oly kicsinyre, hogy a ζ_i^n a z_i^n-től megadott kis ε számmal kisebb absolét értékű számmal különbözzék. Ha a Γ görbe egész hossza L és $L' < L$, válaszszuk $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2L'}$. Válaszszuk a Δ-t úgy, hogy minden

$$|\zeta_i^n - z_i^n| < \frac{\varepsilon}{2L'}$$

legyen, vagyis

$$\zeta_i^n = z_i^n + \varepsilon_i,$$

a hol

$$|\varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2L'}.$$

Ekkor tehát

$$\Sigma \zeta_i^n (z_i - z_{i-1})^n = \Sigma z_i^n (z_i - z_{i-1}) + \Sigma \varepsilon_i (z_i - z_{i-1}).$$

A Δ oly kicsinyre választható, hogy a $\Sigma z_i^n (z_i - z_{i-1})$ az $\int_\Gamma z^n dz$-től mindig $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kevesebbel különbözzék, azaz

$$\Sigma z_i^n (z_i - z_{i-1}) = \int_\Gamma z^n dz + \varepsilon'$$

$$|\varepsilon'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A baloldalon álló

$$\Sigma\zeta_i^n(z_i-z_{i-1})=\frac{1}{n}\Sigma(z_i^{n+n}+z_i^{n-1}z_{i+1}+\cdots+z_{i-1}^n)(z_i-z_{i-1})=$$

$$=\frac{1}{n}\Sigma(z_i^{n+1}-z_i^{n+1})=0,$$

tehát

$$0=\int_\Gamma z^n dz+\varepsilon'+\Sigma\varepsilon i_i(z_i-z_{i-1}).$$

A beosztást annyira sűríthetjük, hogy a $\Sigma|z_i-z_{i-1})|$ húrösszeg az L'-nál mindig kisebb legyen, mert hiszen $L'>L$ és így

$$|\Sigma\varepsilon_i(z_i-z_{i-1})|<\Sigma\varepsilon_i|z_i-z_{i-1}|<\frac{\varepsilon}{2L'}L'=\frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis

$$|\int_\Gamma z^n dz|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

tehát valóban

$$\int_\Gamma z^n dz=0.$$

Ebből következik, hogy egyúttal

$$\int_\Gamma (z-a)^n dz=0$$

és így a Γ görbére vonatkozólag:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=0.$$

Ezzel tehát a Cauchy-féle integráltételt oly Γ görbére nézve, a mely egészen beleesik a C körbe, bebizonyítottuk.

5. Most már tetszés szerinti Γ görbére nézve is kimutathatjuk a Cauchy-tétel érvényességét. Be van ugyanis eddigelé bizonyítva, hogy ha $f(z)$ a C körön belül mindenütt szabályos és a Γ zárt görbe a C körön belül van, akkor $\int_\Gamma f(z)\,dz=0$. Legyen már most egy tetszésszerinti Γ_1 görbével határolt egyszerűen összefüggő terület, melyen belül $f(z)$ szabályos, mely azonban

nem illeszthető bele oly körbe, melyen belül $f(z)$ mindenütt szabályos. Rajzoljunk a Γ_1-be egy tetszőleges c kört. Akkor c körön belül mindenütt reguláris az $f(z)$. E c kör középpontjából, mint hasonlósági czentrumból rajzoljunk oly Γ_1' görbét, mely egészen benne van a c-ben és Γ_1-hez hasonló; akkor tehát, ha Γ_1' valamely pontjának megfelelő számérték z, akkor a Γ_1-nek megfelelő számértek θz, a hol θ állandó, 1-nél nagyobb szám. Az

$$F(z) = f(\theta z)$$

függvény a Γ_1' görbén belül mindenütt szabályos, mert hiszen ha z a Γ_1'-on belül van, akkor θz a Γ_1-en belül marad, tehát föltételünk szerint $f(\theta z)$ reguláris.

De a Γ_1' görbére nézve (mely a c körön belül van) érvényes a Cauchy-tétel, vagyis

$$\int_{\Gamma_1'} F(z)\,dz = 0.$$

Ha a z a Γ_1' kerületen mozog, akkor θz a Γ_1-en mozog és így ha $\theta z = u$ teszszük:

$$\int_{\Gamma_1'} F(z)\,dz = \int_{\Gamma_1'} f(\theta z)\,dz = \frac{1}{\theta}\int_{\Gamma_1} f(u)\,du,$$

vagyis egész általánosan:

$$\int_{\Gamma_1} f(u)\,du = 0.$$

Ezzel tehát a Cauchy-féle integráltételt is minden egyszerűen összefüggő területre nézve, következésképen minden ilyenre felbontható többszörösen összefüggő területre nézve is kimutattuk.

Beke Manó.

A GAUSS-FÉLE MEDIUM ARITHMETICO-GEOMETRICUM ALGORITHMUSÁNAK ÉS ÁLTÁNOSÍTÁSÁNAK ELMÉLETE

A JACOBI-FÉLE THETA-FÜGGVÉNYEK ALAPJÁN.

(Második és befejező közlemény.)

IV.

Ha a_0 és b_0 pozitiv valósok és $a_0 > b_0$, akkor, mint SCHLESINGER vizsgálataiból kitünik,* ω_0 tisztán képzetes, eltekintve természetesen az egész számbeli határozatlanságtól. Tehát hasonló értelemben ω_n is tisztán képzetes s így a_n és b_n is pozitiv valósok és $M(a_n\,;\, b_n)$ is az.

Ekkor ω_n-nek a III. $(2a)$-beli második alakjában van s_2-nek oly egész értéke, legyen ez épen s_2, hogy a jobboldal is tiszta képzetes.

Legyen

$$\omega_n = i\omega'_n, \qquad \omega'_n > 0,$$

$$M(a_n\,;\, -b_n) = r_n + is_n.$$

Akkor ω_n említett alakjában

$$i\omega'_n = \frac{1}{2} - \frac{M(a_n\,;\, b_n)}{2M(a_n\,;\, -b_n)} + 4s_2$$

a valós és képzetes részeket szétválasztván

$$M(a_n\,;\, b_n) - 2\omega'_n s_n = r_n (8s_2 + 1)$$

$$2\omega'_n r_n = s_n (8s_2 + 1).$$

$8s_2 + 1$ kiküszöbölésével

$$M(a_n\,;\, b_n)\, s_n = 2\omega'_n\, |M(a_n\,;\, -b_n)|^2.$$

---

* Lásd a 10. oldal utolsó jegyzetében idézett helyen, p. 347. és 360

Tehát

$$s_n > 0,$$

azaz, ha $M(a_n; -b_n)$ legkisebb pozitiv szöge φ_n, akkor

$$\begin{aligned} 0 < \varphi_n < \pi, \\ M(a_n; b_n)\sin\varphi_n = 2\omega'_n \, |M(a_n; -b_n)|. \end{aligned} \tag{1}$$

Mivel

$$M(b_n; -a_n) = - M(a_n; -b_n),$$

azért eredményeink átvihetők az $a_0 < b_0$ esetre is. Sőt az I. (9)-ben

$$\rho = e^{i\varepsilon}$$

téve, átmehetünk arra az általánosabb esetre, mikor a_0, b_0 szögei nem zérussal, hanem ε-nal egyenlők.

⁎

A III. (3)-ból, mivel ha ν pozitive végtelenbe nő

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n+\nu} = 0,$$

kapjuk, hogy

$$M(\rho; 0) = 0.$$

A III. ($2a$) második egyenletében n-et növelve pozitive végtelenbe, tekintve, hogy

$$M(\mu; \mu) = \mu$$

véges, lesz

$$M(\rho; -\rho) = 0.$$

Ezzel az összes I. (3) alatti kivételes eseteket elintéztük. Az eredmények arithmetikailag triviálisok, ha megállapodunk abban, hogy

$$\sqrt{\rho \cdot \rho} = \rho.$$

⁎

Ha a_n és b_n, mint két, az I. (3)-nak megfelelő szám van adva, akkor arithmetikailag csak

$$|b_{n+1}| = |\sqrt{a_n}|\,|\sqrt{b_n}| = |\sqrt{a_n b_n}|$$

ismeretes és, hogy

$$b_{n+1} = \pm \sqrt{a_n b_n}.$$

De pontosan az előjelt nem tudjuk megadni. Bár az I. (5) által ez a kérdés transcendens módon elvileg kielégitően van elintézve, mégis érdemes volna ennek az előjelnek választására nézve «gyakorlati szabályt» állapítani meg.

Ez azonban, a már elintézett kivételes, speciális esetektől eltekintve, úgy látszik szokatlan nehézségekbe ütközik. És oka körülbelül az lehet, hogy, mint a következő fejezetben látni fogjuk, $M(a_n; b_n)$-et egy komplet elsőfajú elliptikus integrál értelmezi, de nem teljesen, mivel benne $\varkappa_n^2$ révén a_n^2 és b_n^2 szerepelnek.

V.

Az I. (1)-ből a_n-el osztva

$$1 : \varkappa_n' : \varkappa_n = \vartheta_{00}^2(\omega_n) : \vartheta_{01}^2(\omega_n) : \vartheta_{10}^2(\omega_n),$$

vagyis

$$1 = M(1;\ \varkappa_n')\,\vartheta_{00}^2(\omega_n),$$

$$\varkappa_n' = M(1;\ \varkappa_n')\,\vartheta_{01}^2(\omega_n),$$

$$\varkappa_n = M(1;\ \varkappa_n')\,\vartheta_{10}^2(\omega_n).$$

Ha

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa_n^2 \sin^2\varphi}},$$

$$K_n' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa_n'^2 \sin^2\varphi}},$$

akkor *

$$2K_n = \pi \vartheta_{00}^2(\omega_n),$$

$$2iK_n' = \pi\omega_n \vartheta_{01}^2(\omega_n).$$

---

* H. Weber, Elliptische Functionen etc. Braunschweig 1891. p. 112.

Tehát az (1) első egyenletéből

$$K_n = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{M(1;\varkappa'_n)}. \tag{2}$$

Es a IV-ben talált

$$\omega_n = \frac{iM(a_n\,;\,b_n)}{M(a_n\,;\,c_n)} = \frac{iM(1;\,\varkappa'_n)}{M(1;\,\varkappa_n)}$$

képletet számbavéve

$$K'_n = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{M(1;\,\varkappa_n)}. \tag{2a}$$

Ha $\varkappa_n^2$ vagy $\varkappa_n'^2$ egynél nem kisebb pozitiv valós számok (ami egyszerre nem következhetik be, lévén $\varkappa_n^2+\varkappa_n'^2=1$), akkor a K_n illetőleg K'_n-ben szereplő gyökmennyiség az integrálás alatt egyszer eltünik. A (2) illetőleg (2a) szerint azonban ezen integráloknak ekkor is jól meghatározott értéke van. Az említett singularitást tényleg el is kerülhetjük bizonyos $K_{n+\nu}$ illetőleg $K'_{n+\nu}$-re való átmenetellel, mivel ha ν pozitiv, az I. (4) szerint:

$$\lim_{\nu=\infty} \varkappa_{n+\nu} = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \varkappa'_{n+\nu} = 1.$$

Ez az átmenetel természetesen fölösleges, ha már

$$\varkappa_n=0,\ 1, \qquad \varkappa'_n=1,\ 0.$$

Ekkor a (2) és (2a)-ból egyszerűen

$$K'_n=\infty,\ \frac{\pi}{2}, \qquad K_n=\frac{\pi}{2},\ \infty.$$

A (2) és (2a) módot nyujtanak az említett átmenetelhez szükséges összefüggések megállapitására.

Ugyanis

$$K_n = \frac{\pi}{2}\,\frac{a_n}{M(a_n\,;\,b_n)}, \qquad K_{n+\nu} = \frac{\pi}{2}\,\frac{a_{n+\nu}}{M(a_{n+\nu}\,;\,b_{n+\nu})},$$

$$K'_n = \frac{\pi}{2}\,\frac{a_n}{M(a_n\,;\,c_n)}, \qquad K'_{n+\nu} = \frac{\pi}{2}\,\frac{a_{n+\nu}}{M(a_{n+\nu}\,;\,c_{n+\nu})}.$$

Ezekből az I. (8) és (10) segélyével

$$\begin{aligned} K_{n+\nu} : K_n &= a_{n+\nu} : a_n \,, \\ K'_{n+\nu} : K'_n &= a_{n+\nu} : 2^{-\nu} a_n \,. \end{aligned} \tag{3}$$

Ezen aránylatokból még, mivel

$$K_n = a_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi}} \,,$$

$$K'_n = a_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + c_n^2 \sin^2\varphi}} \,,$$

kapjuk

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_{n+\nu}^2 \cos^2\varphi + b_{n+\nu}^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(a_n\,;\, b_n)} \,,\text{*} \tag{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + c_n^2 \sin^2\varphi}} = 2^{-\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_{n+\nu}^2 \cos^2\varphi + c_{n+\nu}^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(a_n\,;\, c_n)} \,. \tag{4a}$$

A (4*a*) a (4)-ből $\bar{a}_n$ stb. bevezetésével is származtatható (10. l.). (Az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2} \, \frac{1}{M(a_n\,;\, b_n)}$$

* Gauss, Werke III. Göttingen 1876. p. 352.

reláczió, mint ENNEPER megjegyzi * az a_n és b_n számok medium arithmetico-geometricumának általános értelmezésére szolgálhat. Ez az értelmezés önmagában véve nyilván nem egészen szabatos v. ö. 18. l.)

A III. (2)-ből a_n-el való osztás után

$$M(1;\, \varkappa_n') = -i\omega_n M(1;\, \varkappa_n),$$

$$M(1;\, \varkappa_n') = (-2\omega_n + 1)\, M(1;\, -\varkappa_n'),$$

$$M(1;\, \varkappa_n') = -i(\omega_n + 2)\, M(1;\, -\varkappa_n),$$

$$M(1;\, \varkappa_n') = -i(\omega_n + 1)\, \varkappa_n' M\left(1;\, i\frac{\varkappa_n}{\varkappa_n'}\right),$$

$$M(1;\, \varkappa_n') = (-\omega_n + 1)\, \varkappa_n M\left(1;\, i\frac{\varkappa_n'}{\varkappa_n}\right).$$

*

Legyen**

$$a_n = \sqrt{\alpha_n + \beta_n},$$

$$b_n = \sqrt{\alpha_n - \beta_n},$$

$$2\varphi = \psi.$$

Akkor

$$\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi} = \sqrt{\alpha_n + \beta_n \cos\psi}.$$

Legyen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{\alpha_n + \beta_n \cos\psi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (A + A_1 \cos\psi + A_2 \cos 2\psi + \cdots)\, d\psi.$$

Akkor

$$A = \frac{1}{M(a_n;\, b_n)}.$$

VI.

Az I.-ben fölállított $M(a_n;\, b_n)$ stb.-re vonatkozó sorok mellett GAUSS-nál logarithmikus sorok is vannak följegyezve.***

* A. ENNEPER, Ellipt. Functionen, Halle a/S. 1876. p. 314.

** GAUSS, p. 359. (Göttingische gelehrte Anzeigen.)

*** GAUSS, Werke III. Göttingen 1876. p. 377.

Schlesinger * ezek közül egyet vezet le. Itt hasonló módon mindegyiket származtatjuk.

Az I. (7) utolsó egyenletéből, n helyett m írva

$$\frac{4a_m}{c_m} = \frac{a_m}{a_{m+1}} \sqrt{\frac{4a_{m+1}}{c_{m+1}}}.$$

Vegyük ennek logarithmusát és szorozzuk

$$\frac{M(a_m;\, c_m)}{M(a_m;\, b_m)} = \frac{1}{2^m} \frac{M(a_0;\, c_0)}{M(a_0;\, b_0)} = 2\, \frac{M(a_{m+1};\, c_{m+1})}{M(a_{m+1};\, b_{m+1})}$$

-el. Lesz

$$\frac{M(a_m;\, c_m)}{M(a_m;\, b_m)} \log \frac{4a_m}{c_m}$$

$$= \frac{1}{2^m} \frac{M(a_0;\, c_0)}{M(a_0;\, b_0)} \log \frac{a_m}{a_{m+1}} + \frac{M(a_{m+1};\, c_{m+1})}{M(a_{m+1};\, b_{m+1})} \log \frac{4a_{m+1}}{c_{m+1}}.$$

Legyen

$$\frac{M(a_0;\, b_0)}{M(a_0;\, c_0)} \frac{M(a_m;\, c_m)}{M(a_m;\, b_m)} \log \frac{4a_m}{c_m} = \frac{1}{2^m} \log \frac{4a_m}{c_m} = u_m.$$

Akkor

$$u_{m+1} - u_m = -\frac{1}{2^m} \log \frac{a_m}{a_{m+1}}.$$

S mivel ha m pozitive nő végtelenbe

$$\lim_{m=\infty} u_m = u_n + (u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1}) + \cdots$$

azért

$$\frac{M(a_0;\, b_0)}{M(a_0;\, c_0)} \lim_{m=\infty} \frac{M(a_m;\, c_m)}{M(a_m;\, b_m)} \log \frac{4a_m}{c_m}$$

$$= \frac{1}{2^n} \log \frac{4a_n}{c_n} - \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+\nu}} \log \frac{a_{n+\nu}}{a_{n+\nu+1}}. \qquad (1)'$$

* Lásd a 10. oldal utolsó jegyzetében idézett helyen. p. 353.

Tehát egyúttal $\bar{a}_m$ stb. bevezetésével

$$\frac{M(a_0\,;\,c_0)}{M(a_0\,;\,b_0)}\lim_{m=\infty}\frac{M(a_{-m}\,;\,b_{-m})}{M(a_{-m}\,;\,c_{-m})}\log\frac{4a_{-m}}{b_{-m}}$$

$$=\frac{1}{2^n}\log\frac{4a_{-n}}{b_{-n}}-\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+\nu}}\log\frac{2a_{-n-\nu}}{a_{-n-\nu-1}}. \qquad (2)'$$

(A jobboldali első logarithmusban Gauss-nál 4 helyett tévesen 2 áll, mint ezt művei III-ik kötetének kiadója Schering már észrevette.*

Más két hasonló sorhoz a következőleg juthatunk.

Az I. (6) második egyenletébe irjunk n helyett $(m+1)$-et s a (7) harmadik egyenletébe m-et és osszuk el a két relácziót egymással. Lesz

$$\frac{c_m}{\sqrt{c_{m+1}}}=\frac{2b_{m+2}}{\sqrt{b_{m+1}}}.$$

Legyen

$$\frac{M(a_0\,;\,b_0)}{M(a_0\,;\,c_0)}\cdot\frac{M(a_m\,;\,c_m)}{M(a_m\,;\,b_m)}\log\frac{4b_{m+1}}{c_{m+1}}=\frac{1}{2^m}\log\frac{4b_{m+1}}{c_m}=v_m.$$

Akkor

$$v_{m+1}-v_m=\frac{1}{2^m}\log\left(\frac{b_{m+2}}{b_{m+1}}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2^{m+1}}\log\frac{b_{n+2}}{b_{m+1}}.$$

S mivel ha m pozitive végtelenbe nő

$$\lim_{m=\infty}v_m=v_n+(v_{n+1}-v_n)+(v_{n+2}-v_{n+1})+\cdots,$$

azért

$$\frac{M(a_0\,;\,b_0)}{M(a_0\,;\,c_0)}\lim_{m=\infty}\frac{M(a_m\,;\,c_m)}{M(a_m\,;\,b_m)}\log\frac{4b_{m+1}}{c_m}$$

$$=\frac{1}{2^n}\log\frac{4b_{n+1}}{c_n}+\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{3}{2^{n+\nu+1}}\log\frac{b_{n+\nu+2}}{b_{n+\nu+1}}. \qquad (3)'$$

Ebből épen úgy, mint előbb

---

* Schering E., Gesammelte Math. Werke I. Berlin 1902. p. 399.

$$\frac{M(a_0;\,c_0)}{M(a_0;\,b_0)}\lim_{m=\infty}\frac{M(a_{-m};\,b_{-m})}{M(a_{-m};\,c_{-m})}\log\frac{2c_{-m-1}}{b_{-m}}$$

$$=\frac{1}{2^n}\log\frac{2c_{-n-1}}{c_{-n}}+\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{3}{2^{n+\nu+1}}\log\frac{c_{-n-\nu-2}}{c_{-n-\nu-1}}. \tag{4'}$$

Az (1)', (2)', (3)' és (4)'-ben a baloldalakon szereplő limesek értéke mind $\frac{\pi}{2}$.* Ezt SCHLESINGER ** egy LEGENDRE-től eredő formulára való hivatkozással mutatja ki.

Lényegében mi is ehhez az eljáráshoz csatlakozunk, csak hogy itt a megelőzők után minden segédeszköz rendelkezésünkre áll.

A theta-függvények I-ben fölírt soraiból, ha m pozitive nő végtelenbe,

$$\lim_{m=\infty} q_m^{-1}\vartheta_{10}^4(\omega_m)=16,$$

$$\lim_{m=\infty}\vartheta_{00}^4(\omega_m)=1.$$

Tehát

$$\lim_{m=\infty} q_m^{-1}\varkappa_m^2=16,$$

azaz

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{\varkappa_m^2}{16}-q_m\right)=1.$$

Tekintve q_m definiczióját

$$\lim_{m=\infty}\left(\log\frac{\varkappa_m^2}{16}-\pi i\omega_m\right)=0, \tag{L_1}$$

a mi alapjában véve az említett LEGENDRE-formula, ha hozzávesszük még az alábbi (L_2)-öt.

Mivel (19—20. l.)

$$\lim_{m=\infty} K_m=\frac{\pi}{2},$$

$$K_m'=-i\omega_m K_m,$$

azért

$$\lim_{m=\infty} K_m'=-\frac{\pi i}{2}\lim_{m=\infty}\omega_m. \tag{L_2}$$

---

* GAUSS, Werke III. Göttingen 1876. p. 377.

** Lásd a 10. oldal utolsó jegyzetében idézett helyen, p. 354.

Mármost

$$\lim_{m=\infty} \frac{M(a_m; c_m)}{M(a_m; b_m)} \log \frac{4a_m}{c_m} = \lim_{m=\infty} \frac{M(a_m; c_m)}{a_m} \log \frac{4a_m}{c_m}$$

$$= \lim_{m=\infty} M(1; \varkappa_m) \log \frac{4}{\varkappa_m}$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{m=\infty} \frac{\log \frac{4}{\varkappa_m}}{K'_m} = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \lim_{m=\infty} \frac{\log \frac{\varkappa_m^2}{16}}{K'_m} = \frac{\pi}{2}.$$

Tehát egyúttal a (2)′ baloldalán szereplő limes értéke is $\frac{\pi}{2}$.

A (3)′-ban előjövő limes pedig így határozható meg:

$$\log \frac{4b_{m+1}}{c_m} = \frac{1}{2} \log \frac{16 b_{m+1}^2}{c_m^2} = \frac{1}{2} \log \frac{16 \frac{b_m}{a_m}}{\varkappa_m^2}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{16}{\varkappa_m^2} + \frac{1}{2} \log \frac{b_m}{a_m} = \log \frac{4}{\varkappa_m} + \frac{1}{2} \log \frac{b_m}{a_m}.$$

Tehát

$$\lim_{m=\infty} \frac{M(a_m; c_m)}{M(a_m; b_m)} \log \frac{4b_{m+1}}{c_m} = \lim_{m=\infty} M(1; \varkappa_m) \log \frac{4}{\varkappa_m}$$

$$+ \lim M(1; \varkappa_m) \frac{1}{2} \log \frac{b_m}{a_m} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Így egyúttal a (4)′ alatti limes is $\frac{\pi}{2}$.

Az (1)′, (2)′, (3)′, (4)′ már most:

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(a_0; b_0)}{M(a_0; c_0)} = \frac{1}{2^n} \log \frac{4a_n}{c_n} - \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+\nu}} \log \frac{a_{n+\nu}}{a_{n+\nu+1}}, \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(a_0; c_0)}{M(a_0; b_0)} = \frac{1}{2^n} \log \frac{4a_{-n}}{b_{-n}} - \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+\nu}} \log \frac{2a_{-n-\nu}}{a_{-n-\nu-1}}, \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(a_0; b_0)}{M(a_0; c_0)} = \frac{1}{2^n} \log \frac{4b_{n+1}}{c_n} + \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{3}{2^{n+\nu+1}} \log \frac{b_{n+\nu+2}}{b_{n+\nu+1}}, \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(a_0; c_0)}{M(a_0; b_0)} = \frac{1}{2^n} \log \frac{2c_{-n-1}}{c_{-n}} + \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{3}{2^{n+\nu+1}} \log \frac{c_{-n-\nu-2}}{2c_{-n-\nu-2}}. \quad (4)$$

VII.

A theta-függvényekre vonatkozó differencziál-egyenletek némelyike érdekes eredményeket ad a medium arithmetico-geometricum elméletéhez.

Két-két theta-függvény hányadosának logarithmusára nézve állanak: *

$$2d\log\frac{\vartheta_{10}^2(\omega_n)}{\vartheta_{01}^2(\omega_n)} = \pi i 2^n \vartheta_{00}^4(\omega_n)\, d\omega_0,$$

$$2d\log\frac{\vartheta_{10}^2(\omega_n)}{\vartheta_{00}^2(\omega_n)} = \pi i 2^n \vartheta_{01}^4(\omega_n)\, d\omega_0,$$

$$2d\log\frac{\vartheta_{00}^2(\omega_n)}{\vartheta_{01}^2(\omega_n)} = \pi i 2^n \vartheta_{10}^4(\omega_n)\, d\omega_0.$$

ω_0-nak III. (2a) alatti első alakját használva

$$2d\log\frac{c_n}{b_n} = 2^n\pi i\frac{a_n^2}{M(a_0;b_0)^2}d\omega_0$$

$$= 2^n\pi\frac{a_n^2}{M(a_0;b_0)\,M(a_0;c_0)}\,d\log\frac{M(a_0;c_0)}{M(a_0;b_0)},$$

$$2d\log\frac{c_n}{a_n} = 2^n\pi i\frac{b_n^2}{M(a_0;b_0)^2}d\omega_0$$

$$= 2^n\pi\frac{b_n^2}{M(a_0;b_0)\,M(a_0;c_0)}\,d\log\frac{M(a_0;c_0)}{M(a_0;b_0)},$$

$$2d\log\frac{a_n}{b_n} = 2^n\pi i\frac{c_n^2}{M(a_0;b_0)^2}d\omega_0$$

$$= 2^n\pi\frac{c_n^2}{M(a_0;b_0)\,M(a_0;c_0)}\,d\log\frac{M(a_0;c_0)}{M(a_0;b_0)}.$$

Vagyis, Gauss jelölését használva **

---

* H. Weber, Ellipt. Funct. p. 60. (Némi átalakítással.)

** Gauss, Werke III. Göttingen 1876. p. 379—380.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{a_n^2}\,d\log\frac{c_n}{b_n}\\
&= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{b_n^2}\,d\log\frac{c_n}{a_n}\\
&= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{c_n^2}\,d\log\frac{a_n}{b_n}\\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{M(a_0;b_0)M(a_0;c_0)}\,d\log\frac{M(a_0;c_0)}{M(a_0;b_0)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

független n-től és a_n, b_n, c_n bizonyos permutáczióitól.

Tegyük hozzá, hogy

$$|\Delta| \qquad (1a)$$

pedig független n-től és a_n, b_n, c_n összes ismétlés nélküli permutáczióitól.

Δ harmadik alakjából

$$\begin{aligned}
2^{n+1}\Delta c_{n+1}^2 &= d\log a_{n+1} - d\log b_{n+1}\\
&= d\log(a_{n+1}b_{n+1}) - d\log b_{n+1}^2\\
&= d\log(a_{n+1}b_{n+1}) - d\log(a_n b_n).
\end{aligned}$$

Míg Δ második alakjából

$$\begin{aligned}
2^{-n-1}\Delta b_{-n-1}^2 &= d\log c_{-n-1} - d\log a_{-n-1}\\
&= d\log c_{-n-1}^2 - d\log(a_{-n-1}c_{-n-1})\\
&= d\log(4a_{-n}c_{-n}) - d\log(a_{-n-1}c_{-n-1})\\
&= d\log\,(a_{-n}c_{-n}) - d\log(a_{-n-1}c_{-n-1}).
\end{aligned}$$

Tehát *

$$\begin{aligned}
d\log(a_n b_n) &= d\log(a_{n+1}b_{n+1}) - 2^{n+1}\Delta c_{n+1}^2,\\
d\log(a_{-n}c_{-n}) &= d\log(a_{-n-1}c_{-n-1}) + 2^{-n-1}\Delta b_{-n-1}^2.
\end{aligned} \qquad (2)$$

A (2)-ben az első egyenletbe n helyett $n, n+1, \ldots$ in inf. téve, összeadással kapjuk a ($2a$) első egyenletét. A második egyenletből pedig a ($2a$) második egyenlete nyerhető hasonló módon, ha azt így írjuk

* Gauss, Werke III. Göttingen 1876. p. 380.

$$d \log (2^{-n} a_{-n} 2^{-n} c_{-n})$$
$$= d \log (2^{-n-1} a_{-n-1} 2^{-n-1} c_{-n-1}) + 2^{-n-1} \Delta b^2_{-n-1}$$

és tekintjük, hogy (I)

$$\lim_{n=+\infty} 2^{-n} a_{-n} = \lim_{n=+\infty} 2^{-n} c_{-n} = M(\bar{a}_n ; \bar{c}_n)$$
$$= M(a_0 ; c_0) = 2^n M(a_n ; c_n) ;$$
$$2d \log 2^n M(a_n ; c_n) = 2d \log M(a_n ; c_n).$$

$$\left.\begin{aligned} 2d \log M(a_n ; b_n) &= d \log (a_n . b_n) + \Delta \sum_{\nu=1}^{+\infty} 2^{n+\nu} c^2_{n+\nu}, \\ 2d \log M(a_n ; c_n) &= d \log (a_{-n} . c_{-n}) - \Delta \sum_{\nu=1}^{+\infty} 2^{-n-\nu} b^2_{-n-\nu}. \end{aligned}\right\} \quad (2a)^*$$

A $(2a)$-ban írjunk

$$d \log M(a_n ; b_n) \quad \text{és} \quad d \log M(a_n ; c_n)$$

helyett

$$d \log M(a_0 ; b_0) \quad \text{és} \quad d \log M(a_0 ; c_0)$$

-at. Továbbá a második egyenletben n-et helyettesítsük $-n$-el s vonjuk ki belőle az elsőt. Ekkor

$$2d \log \frac{M(a_0 ; c_0)}{M(a_0 ; b_0)} = d \log (a_n c_n) - d \log (a_n b_n)$$
$$- \Delta \left\{ \cdots + 2^{n-2} b^2_{n-2} + 2^{n-1} b^2_{n-1} + 2^{n+1} c^2_{n+1} + 2^{n+2} c^2_{n+2} + \cdots \right\}$$

$$d \log (a_n c_n) - d \log (a_n b_n) = d \log \frac{c_n}{b_n}$$

lévén, a Δ első és negyedik alakja (1) segélyével találjuk a következő egyenletet,** hacsak $\Delta \neq 0$

$$\frac{4}{\pi} M(a_0 ; b_0) M(a_0 ; c_0)$$
$$= \cdots - 2^{n-2} b^2_{n-2} - 2^{n-1} b^2_{n-1} + 2^n a^2_n - 2^{n+1} c^2_{n+1} - 2^{n+2} c^2_{n+2} - \cdots \quad (3)$$

---

* U. o. p. 380.

** GAUSS, Werke III. Göttingen 1876. p. 380.

VIII.

Áttérünk a medium arithmetico-geometricum algorithmusának Gauss-féle általánosítására.[1]

Értelmezzünk négy, két irányban végtelen sorozatot a következő módon:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \mu_n \vartheta^2_{00}(v_n\,;\,\omega_n), \\ \beta_n &= \mu_n \vartheta^2_{01}(v_n\,;\,\omega_n), \\ \gamma_n &= \mu_n \vartheta^2_{10}(v_n\,;\,\omega_n), \\ -\delta_n &= \mu_n \vartheta^2_{11}(v_n\,;\,\omega_n), \end{aligned} \tag{1}$$

$$(n=\ldots -2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\ldots),$$

hol (I) recursive

$$\mu_n^2 = \mu\mu_{n+1} \tag{2}$$

és ω_n mintájára

$$v_n = 2^n v_0.$$

Legyen pl. $\mu_0 \neq 0$, akkor mindenik $\mu_n \neq 0$.

Ha pl. $v_0=0$, akkor mindenik $v_n=0$ és ha még pl. $\mu_0=\mu$, akkor mindenik $\mu_n=\mu$ vehető. Ekkor tehát az (1) megfelelően átmegy az I. (1)-be, t. i. $\delta_n=0$.

Vegyük a másodrendű transzformáczió következő képleteit[2]

$$\begin{aligned} 2\vartheta_{00}(\omega_{n+1})\,\vartheta_{00}(v_{n+1}\,;\,\omega_{n+1}) &= \vartheta^2_{00}(v_n\,;\,\omega_n) + \vartheta^2_{01}(v_n\,;\,\omega_n), \\ \vartheta^2_{01}(\omega_{n+1})\,\vartheta^2_{01}(v_{n+1}\,;\,\omega_{n+1}) &= \vartheta^2_{00}(v_n\,;\,\omega_n)\,\vartheta^2_{01}(v_n\,;\,\omega_n), \\ 2\vartheta_{00}(\omega_{n+1})\,\vartheta_{10}(v_{n+1}\,;\,\omega_{n+1}) &= \vartheta^2_{10}(v_n\,;\,\omega_n) - \vartheta^2_{11}(v_n\,;\,\omega_n), \\ \vartheta^2_{01}(\omega_{n+1})\,\vartheta^2_{11}(v_{n+1}\,;\,\omega_{n+1}) &= \vartheta^2_{10}(v_n\,;\,\omega_n)\,\vartheta^2_{11}(v_n\,;\,\omega_n), \end{aligned}$$

és a theta-függvények négyzetei között fönnálló egyedüli[3] relációkat[4]

$$\begin{aligned} \vartheta^2_{01}(\omega_n)\,\vartheta^2_{00}(v_n\,;\,\omega_n) &= \vartheta^2_{00}(\omega_n)\,\vartheta^2_{01}(v_n\,;\,\omega_n) - \vartheta^2_{10}(\omega_n)\,\vartheta^2_{11}(v_n\,;\,\omega_n), \\ \vartheta^2_{01}(\omega_n)\,\vartheta^2_{10}(v_n\,;\,\omega_n) &= \vartheta^2_{10}(\omega_n)\,\vartheta^2_{01}(v_n\,;\,\omega_n) - \vartheta^2_{00}(\omega_n)\,\vartheta^2_{11}(v_n\,;\,\omega_n). \end{aligned}$$

---

[1] U. o. p. 387.

[2] Weber, Elliptische Functionen etc. Braunschweig 1891. p. 79—80.

[3] H. Burkhardt, Ellipt. Funktionen, Leipzig 1899. p. 118—119.

[4] H. Weber, Ellipt. Functionen etc. Braunschweig 1891. p. 54.

Ezek szerint

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1}\,\alpha_{n+1} &= \left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)^2, \\ b_{n+1}\,\beta_{n+1} &= \alpha_n\,\beta_n; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1}\,\gamma_{n+1} &= \left(\frac{\gamma_n+\delta_n}{2}\right)^2, \\ b_{n+1}\,\delta_{n+1} &= \gamma_n\,\delta_n; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} b_n\,\alpha_n &= a_n\,\beta_n + c_n\,\delta_n, \\ b_n\,\gamma_n &= c_n\,\beta_n + a_n\,\delta_n. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

E két utolsó egyenletből δ_n kiküszöbölésével s az I. (2) alkalmazásával

$$a_n\,\alpha_n = b_n\,\beta_n + c_n\,\gamma_n. \tag{5a}$$

Az I. megfelelő képleteit a (3), (4), (5) és (5*a*)-val összehasonlítva azonnal szembetünik, hogy ennek az algorithmusnak általánosabb volta lényegében a medium arithmetico-geometricum algorithmusában szereplő quadratikus kifejezéseknek bilineárisokkal való helyettesítésében áll.*

A (3), (4), (5) és (5*a*)-ból, ha a gyököket az I. (5)-nek megfelelően így választjuk:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\alpha_n} : \sqrt{\beta_n} : \sqrt{\gamma_n} : \sqrt{-\delta_n} \\ &= \vartheta_{00}(v_n\,;\,\omega_n) : \vartheta_{01}(v_n\,;\,\omega_n) : \vartheta_{10}(v_n\,;\,\omega_n) : \vartheta_{11}(v_n\,;\,\omega_n) \end{aligned} \tag{6}$$

egyszerű számításokkal a relácziók egész serege adódik.** Például:

$$\begin{aligned} b_n\,c_n(b_n\,\gamma_n - c_n\,\beta_n) = c_n\,a_n(a_n\,\gamma_n - c_n\,\alpha_n) &= a_n b_n(b_n\,\alpha_n - a_n\,\beta_n) \\ &= a_n\,b_n\,c_n\,\delta_n, \end{aligned}$$

$$\alpha_n^2 + \delta_n^2 = \beta_n^2 + \gamma_n^2,$$

$$\frac{a_n}{c_n}(\alpha_n\,\gamma_n - \beta_n\,\delta_n) = a_n\,(\alpha_{n+1}+\gamma_{n+1}),$$

$$\frac{b_n}{a_n}(\beta_n\,\alpha_n - \gamma_n\,\delta_n) = b_n\,(\alpha_{n+1}-\gamma_{n+1}),$$

---

* P. GÜNTHER, Lionville Journal III. Série V. 1897. p. 98.

** GAUSS, Werke III. Göttingen 1876. p. 387.

$$\frac{c_n}{b_n}(\gamma_n\beta_n+a_n\delta_n)=2c_n\sqrt{a_{n+1}}\sqrt{\gamma_{n+1}}.$$

*

A (2)-ből

$$\frac{\mu_0}{\mu}=\sqrt[2^n]{\frac{\mu_n}{\mu}}. \tag{2a}$$

Tehát

$$\sqrt[2^n]{\frac{a_n}{\mu\vartheta_{00}^2(v_n;\,\omega_n)}}=\sqrt[2^n]{\frac{\beta_n}{\mu\vartheta_{01}^2(v_n;\,\omega_n)}}$$

$$=\sqrt[2^n]{\frac{\gamma_n}{\mu\vartheta_{10}^2(v_n;\,\omega_n)}}=\sqrt[2^n]{\frac{\delta_n}{-\mu\vartheta_{11}^2(v_n;\,\omega_n)}}=\frac{\mu_0}{\mu}.$$

Mivel, ha n pozitive nő végtelenbe

$$\lim_{n=\infty}\vartheta_{00}^2(v_n;\,\omega_n)=\lim_{n=\infty}\vartheta_{01}^2(v_n;\,\omega_n)=1;$$

és mivel

$$\vartheta_{10}(v_0;\,\omega_0)=q_0^{\frac14}(e^{\pi i v_0}+e^{-\pi i v_0})+q_0^{\frac94}(e^{3\pi i v_0}+e^{-3\pi i v_0})+\cdots$$

-ból

$$\vartheta_{10}^2(v_n;\,\omega_n)=q_0^{2^{n-1}}e^{2.2^n\pi i v_0}(1+\cdots),$$

vagyis

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[2^n]{\vartheta_{10}^2(v_n;\,\omega_n)}=q_0^{\frac12}e^{2\pi i v_0};$$

s épen így

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[2^n]{-\vartheta_{11}^2(v_n;\,\omega_n)}=q_0^{\frac12}e^{2\pi i v_0},$$

azért *

$$\begin{aligned}\lim_{n=\infty}\sqrt[2^n]{\frac{a_n}{\mu}}&=\lim_{n=\infty}\sqrt[2^n]{\frac{\beta_n}{\mu}}=\frac{\mu_0}{\mu},\\ \lim_{n=\infty}\sqrt[2^n]{\frac{\gamma_n}{\mu}}&=\lim_{n=\infty}\sqrt[2^n]{\frac{\delta_n}{\mu}}=\frac{\mu_0}{\mu}q_0^{\frac12}e^{2\pi i v_0}.\end{aligned}\tag{7}$$

IX.

Legyen

$$\pi u_n=\frac{K_n}{2^{n-1}}v_n, \tag{1}$$

* Gauss, Werke III. Göttingen 1876. p. 388

a hol

$$u_n = \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa_n^2 \sin^2\varphi}} = a_n \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi}}. \tag{2}$$

Az (1)-ből az V. (3)-at is számbavéve

$$u_{n+\nu} : u_n = K_{n+\nu} : K_n = a_{n+\nu} : a_n .$$

Tehát

$$\int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi_{n+\nu}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_{n+\nu}^2 \cos^2\varphi + b_{n+\nu}^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \Phi \frac{1}{M(a_n; b_n)},$$

ha t. i. egész formálisan, pozitive végtelenbe növekedő n-nél

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n = \Phi.$$

E határ-értéket pontosan meghatározzuk a következőképen. Az (1)-ből

$$\pi u_n = 2K_n v_0,$$

s mivel pozitive végtelenné váló n mellett, mint láttuk,

$$\lim_{n=\infty} K_n = \frac{\pi}{2},$$

azért

$$\lim_{n=\infty} u_n = v_0.$$

A (2) és (3) szerint

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{a_n} = \Phi \frac{1}{M(a_n; b_n)},$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} u_n = \Phi,$$

azaz

$$\Phi = v_0. \tag{4}$$

Az

$$(\omega_n ; \omega_n + 1)$$

lineáris alap-transzformáczió * által

$$\alpha_n; \quad \beta_n; \quad \gamma_n; \quad \delta_n$$

rendre átmennek

$$\beta_n; \quad \alpha_n; \quad i\gamma_n; \quad i\delta_n$$

-be.

$$K_n; \quad u_n; \quad \varphi_n; \quad \Phi$$

-nek ekkor feleljenek meg sorban

$$\overline{K}_n; \quad \bar{u}_n; \quad \bar{\varphi}_n; \quad \bar{\Phi}.$$

Tehát

$$\pi \bar{u}_n = \frac{\overline{K}_n}{2^{n-1}} v_n, \tag{1a}$$

$$\bar{u}_n = b_n \int_0^{\bar{\varphi}_n} \frac{d\bar{\varphi}}{\sqrt{b_n^2 \cos^2 \bar{\varphi} + a_n^2 \sin^2 \bar{\varphi}}}, \tag{2a}$$

$$\int_0^{\bar{\varphi}_n} \frac{d\bar{\varphi}}{\sqrt{b_n^2 \cos^2 \bar{\varphi} + a_n^2 \sin^2 \bar{\varphi}}} = \int_0^{\bar{\varphi}_{n+\nu}} \frac{d\bar{\varphi}}{\sqrt{b_{n+\nu}^2 \cos^2 \bar{\varphi} + a_{n+\nu}^2 \sin^2 \bar{\varphi}}}$$

$$= \bar{\Phi} \frac{1}{M(b_n; a_n)}, \tag{3a}$$

$$\bar{\Phi} = v_0. \tag{4a}$$

S így,**

$$\Phi = \bar{\Phi}$$

lévén

$$\int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\bar{\varphi}_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_n^2 \cos^2 \varphi + a_n \sin^2 \varphi}}$$

$$= \frac{v_0}{M(a_n; b_n)}. \tag{5}$$

X.

Legyen

$$2K_n v_n = w_n,$$

$$2\overline{K}_n v_n = \bar{w}_n, \tag{1}$$

---

* H. WEBER, Ellipt. Functionen etc. Braunschweig 1891. p. 77.

** GAUSS, Werke III. Göttingen 1876. p. 388, 390.

a hol

$$
\left.\begin{aligned}
w_n &= a_n \int\limits_0^{\psi_n} \frac{d\psi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \psi + b_n^2 \sin^2 \psi}}, \\
\bar{w}_n &= b_n \int\limits_0^{\bar{\psi}_n} \frac{d\bar{\psi}}{\sqrt{b_n^2 \cos^2 \bar{\psi} + a_n^2 \sin^2 \bar{\psi}}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)
$$

[A IX. (3)-nak megfelelő reláczió ezekre az integrálokra is fölállítható.]

Az ismeretes definicziók szerint*

$$
\left.\begin{aligned}
sn\, w_n &= \sin \psi_n = \sqrt{\frac{a_n}{c_n} \cdot \frac{-\delta_n}{\beta_n}}, \\
cn\, w_n &= \cos \psi_n = \sqrt{\frac{b_n}{c_n} \cdot \frac{\gamma_n}{\beta_n}}; \\
sn\, \bar{w}_n &= \sin \bar{\psi}_n = \sqrt{\frac{b_n}{c_n} \cdot \frac{-\delta_n}{a_n}}, \\
cn\, \bar{w}_n &= \cos \bar{\psi}_n = \sqrt{\frac{a_n}{c_n} \cdot \frac{\gamma_n}{a_n}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)
$$

Hol úgy gondolandó az I. (5) és VIII. (6) szerint, hogy pl.

$$
\sqrt{\frac{a_n}{c_n} \cdot \frac{-\delta_n}{\beta_n}} = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{c_n}} \cdot \frac{\sqrt{-\delta_n}}{\sqrt{\beta_n}}.
$$

*

A további vizsgálódást elhagyhatjuk. A találtak a lényegesek és jellemzők. Befejezésül azonban még egy, a IX. (5)-öt fejlesztő észrevételt tehetünk.

Az

$$
\frac{a_n}{M(a_n;\, b_n)} + \frac{b_n}{M(b_n;\, a_n)} = \frac{2a_{n+1}}{M(a_{n+1};\, b_{n+1})}
$$

* U. o. p. 388.

és

$$\frac{a_n}{M(a_n;\, b_n)} \cdot \frac{b_n}{M(b_n;\, a_n)} = \frac{b_{n+1}^2}{M(b_{n+1};\, a_{n+1})^2}$$

egyenletekből V. segélyével

$$K_{n+1} = \tfrac{1}{2}(K_n + \overline{K}_n),$$

$$\overline{K}_{n+1} = \sqrt{K_n}\,\sqrt{\overline{K}_n}.$$

Vagyis [IX. (1), (1a)]

$$u_{n+1} = \tfrac{1}{2}(u_n + \bar{u}_n),$$

$$\bar{u}_{n+1} = \sqrt{u_n}\,\sqrt{\bar{u}_n}.$$

E szerint pozitive végtelenbe növő n mellett

$$\lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} \bar{u}_n = M(u_n;\, \bar{u}_n).$$

De a IX-ben láttuk, hogy

$$\lim_{n=\infty} u_n = v_0.$$

Tehát

$$v_0 = M(u_n;\, \bar{u}_n). \tag{4}$$

Ugy hogy az

$$\frac{u_n}{a_n} = \frac{\bar{u}_n}{b_n}$$

integrálok két medium arithmetico-geometricum hányadosa gyanánt vannak előállítva.

P. Dávid Lajos.

STABILITÁSI ÉS LABILITÁSI VIZSGÁLATOK A TÖMEGPONTRENDSZER MECHANIKÁJÁBAN.*

A stabilitás fogalmának még a tömegpontrendszerek mechanikájának keretén belül is nagyon különböző tartalmat szokás adni. Azon vitatkozni, hogy ezen különböző definicziók között melyik a legjobb — nem lehet; a stabilitás ugyanis, mint populáris fogalom, néhány — tőle igazán elválaszthatatlan jegyen kívül annyira határozatlan, továbbá annyira relativ, hogy a fenforgó viszonyok különfélesége szerint egymástól lényegesen különböző stabilitási definicziókat állíthatunk fel, a nélkül, hogy a stabilitás populáris fogalmával ellentmondásba jutnánk.

Igyekezzünk előbb átnézetet nyerni a tudomány történetében föllépő különböző értelmezések fölött.

Jelöljön S egy tömegpontrendszert, melyre ható erők egy U potencziálfüggvényből származnak, és a melyet pl. szabadnak tételezünk föl. Legyenek a P_1, $P_2, \ldots, P_n$ tömegpontoknak egy szilárd derékszögű koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái rendre

$$x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$$

és tömegük rendre

$$m_1, \ldots, m_n.$$

Ha e pontrendszernek $t=0$-ra nézve előírjuk az

$$(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0})$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

* Magántanári próbaelőadás, melyet 1905 junius 23-án a kolozsvári Ferencz-József tudományegyetem mathematikai és természettudományi Kara előtt tartottam.

koordinátaértékeket, továbbá az

$$(x'_{i0},\ y'_{i0},\ z'_{i0})$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

sebességi komponensértékeket, akkor a tömegpontrendszer mozgása egész lefolyásában determinálva van. Tegyük fel most, hogy ezen kezdőértékek úgy vannak választva, hogy bármilyen nagy t idő leforgása után sem jön létre *összeütközés* a tömegrendszer két pontja között. Ezáltal természetesen nincs kizárva az, hogy esetleg P_i és P_k az idő folyamán egymáshoz minden határon túl közelednek egymáshoz, mint mondani szokás, asymptotikusan közelednek. Nevezzük az épen most zérusindexszel jellemzett kezdőföltételekhez tartozó mozgást M_0-nak. Most már az M_0 mozgást «*astronomiailag stabilis*»-nek mondjuk (például Poincaré, Mécanique céleste, Tom. III, 140. old. nyomán), ha a következő három tulajdonsággal bír:

1. azzal a tulajdonsággal, hogy a mozgás teljes lefolyása alatt bármilyen két tömegpontnak egymástól való távolsága egy *véges felső határ alatt* marad;

2. azzal a tulajdonsággal, hogy a mozgás minden stadiumában bármilyen két tömegpontnak egymástól való távolsága egy zérustól különböző *alsó határ fölött* marad;

3. azzal a tulajdonsággal, hogy a tömegpontrendszer a mozgás folyamán *kezdőhelyzetéhez végtelen sokszor tetszőleges közel jut*.

Az astronomiai stabilitás legyen teendő megkülönböztetésünk szerint az első fajtája a mozgás-stabilitásnak.

Mielőtt a másodikat értelmezném, előre kell bocsátanom, mit értek valamely mozgás *környezeti* mozgásai alatt. Tegyük föl, hogy sikerül a kezdő koordinátákat és sebességi komponenseket olyan kis határok között változtatnunk, hogy ezen határokon belül bármelyik kezdeti értékrendszerhez tartozó mozgásban ütközés nem jön létre. Ezen mozgások összességét az M_0 mozgás környezeti mozgásainak nevezzük. Ha már most ezen környezeti mozgások *folytonosan* mennek át az M_0 mozgásba, a környezetnek úgyszólván czentrumába, akkor azt mondjuk a mozgásról, az M_0 mozgásról magáról, hogy *stabilis* — egyelőre minden jelző nélkül. De pontosan meg kell még mondanom, hogy mit értek az alatt, miszerint a környezeti mozgások folytonosan csatlakoznak az M_0 mozgáshoz. Ez alatt azt értjük, hogy

adva lévén egy tetszőleges kicsiny positiv szám δ, sikerül megállapitanunk egy másik positiv számot ε-t úgy, hogy bármilyen

$$\begin{pmatrix} \xi_{i0}, & \eta_{i0}, & \zeta_{i0} \\ \xi'_{i0}, & \eta'_{i0}, & \zeta'_{i0} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

kezdeti értékrendszerhez, melyre nézve

$$|\xi_{i0}-x_{i0}| < \varepsilon, \ldots \quad (6n \text{ egyenlőtlenség}),$$

olyan mozgás tartozik, melyben bármilyen nagy t idő mulva is az ugyanazon időponthoz tartozó koordináta- és sebességi-komponens-különbségekre nézve

$$|\xi_i(t)-x_i(t)| < \delta \quad (3n \text{ egyenlőtlenség})$$
$$|\xi'_i(t)-x'_i(t)| < \delta \quad (3n \text{ egyenlőtlenség}).$$

A mozgás stabilitásának ezt a nemét, a mely szemben az astronomiaival a stabilitást nem annyira az M_0 mozgástól magától, mint az összes környezeti mozgások tulajdonságaitól teszi függővé, Klein Felix után *absolut stabilitás*nak nevezzük. [Theorie des Kreisels, II. füzet, 342. old.]

Klein ezt a definiczióját a stabilitásnak rendkívül szűknek tartja. Tényleg, ez az értelmezés nem más, mint az *egyensúlyi helyzet* stabilitásának merev általánositása.

Kevésbbé szűk definicziókat kapunk az absolut stabilitás definicziójából, ha egyes tulajdonságok követelését, a többiek megtartásával, elejtjük. Így pl. rögtön lemondhatunk arról a tulajdonságról, hogy az idő folyamán nemcsak a koordináta-értékek, hanem a sebességi komponensértékek is örökösen szomszédosak maradjanak, megelégedvén azzal, hogy *csak a* *koordinátaértékek maradjanak szomszédosak* — az M_0 mozgásra, és egy tetszőleges környezeti mozgásra nézve.

Megjegyezzük, ha valamely *egyensúlyi helyzet* ebben a tágasabb értelemben stabilis, akkor egyszersmind absolut stabilitás is fönnáll. Erről az elevenerő-egyenlet segítségével könnyen meggyőződhetünk.

Tovább mehetünk — és a stabilitás fogalmát újból tágítjuk olyan módon, hogy most már nem is követeljük, hogy az ugyanazon t időhöz tartozó koordinátaértékek legyenek szomszédosak, hanem megelégszünk a pályák *geometriai szomszédosságával.*

Hogy mit értünk ez alatt, ezt talán a következő példa világítja meg. Az XOY derékszögű koordinátarendszer O kezdőpontjában egységnyi tömegű tömegpont van elhelyezve. Ez a P tömegpontot a Newton-féle erővel vonzza. Most ha P-t az $(a, 0)$ koordinátájú pontba helyezzük és a $\left(0, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ komponensű sebességet adjuk neki, akkor a P pont O középpontú és «a» sugarú körben mozog, és pedig egyenletes, $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$ értékű szögsebességgel.

Helyezzük most a P pontot az $(a+\varepsilon, 0)$ szomszédos pontba. Adjuk neki megfelelően a $\left(0, \frac{1}{\sqrt{a+\varepsilon}}\right)$ sebességet. Akkor e szomszédos pont O középpontú, $(a+\varepsilon)$ sugarú körben mozog, még pedig egyenletes, $\frac{1}{\sqrt{(a+\varepsilon)^3}}$ értékű szögsebességel. Most már a nyert körpályák geometriailag szomszédosak ugyan, de a rajtuk történő mozgások már nem szomszédosak. Az absolut értelemben tehát labilitással van dolgunk, míg a szó általánosabb értelmében stabilitással. Talán «*geometriai stabilitásnak*» volna nevezhető a stabilitásnak ez a módja.

Megjegyezzük ismét, hogy ha valamely *egyensúlyi helyzet* geometriailag stabilis, akkor egyszersmind absolute véve is stabilis. Ez könnyen belátható.

Klein ebben az irányban még tovább megy, de, rövidség kedvéért, nem követhetjük tovább a stabilitás fogalmának ezen érdekes árnyalásait, a minthogy nem is foglalkozhatunk azzal a kérdéssel, hogy milyen függési viszonyban vannak ezen különböző értelmezések. Csak még megjegyezzük, hogy más irányban is lehet ilyen *parcziális* (szemben az absoluttal!) stabilitási megállapításokhoz jutni.

Eddig ugyanis az M_0 mozgást az *összes* környezeti mozgásokkal hasonlítottuk össze. Ha azonban ezen környezeti mozgások összességéből bizonyos módon, egy részletsokaságot kiragadunk, és csakis ezen részletsokaságban foglalt mozgásokra nézve kivánjuk

a) akár hogy: úgy a koordináták, mint a sebességi komponensekre nézve;

b) akár: csak a koordinátákra nézve;

c) akár: csak a geometriai konfigurázió tekintetében legyen meg a szomszédosság — akkor megint általánosabb és igen változatos stabilitási értelmezésekhez jutunk. Fontos példa erre nézve, midőn csak *azon* környezeti mozgásokat vonjuk be az összehasonlításba, melyekre nézve az összes energia (vagyis az eleven erő állandója) *ugyanaz*, mint az M_0 mozgásra vonatkozólag. Lord Kelvin szerint akkor azt mondjuk, hogy a környezeti mozgás az eredetiből *konzervativ zavarással* keletkezett.

*

Áttérünk most már azon módszerek megbeszélésére, melyeknek segitségével a stabilitás és labilitás fönnállását *szigorúan* ki lehet mutatni.

Minthogy igen ritkán van olyan mozgási problémákkal dolgunk, melyeknek differencziálegyenletrendszere az analysis mai segédeszközeivel tanulmányozható függvényekkel meg volna oldható — kénytelenek vagyunk általában a rendelkezésünkre álló «integrálok»-kal megelégedni. Ezekből, és bizonyos kifejezésekből, melyeket a rendszer és az integrálok segítségével származtatunk, igyekezünk aztán a stabilitásra vonatkozólag kiolvasni annyit, a mennyit csak épen tudunk. Két egyenlet játszsza itt a főszerepet. Az egyik a rendszer egy integrálja: az elevenerő-egyenlet, a másik egy, JACOBI dynamikájában szereplő egyenlet, melyet a mozgási egyenletekből az elevenerő-integrál fölhasználásával származtatunk.

E két egyenletet, az elevenerő-egyenletet és a JACOBI-*féle egyenletet tárgyalásom élére állítom. Czélom egyszerűen az: átnézetet adni azon stabilitási és labilitási következtetések fölött, melyeket ezen egyenletekből vontak.* Ha a POINCARÉ-féle vizsgálatoktól, a melyek az ú. n. POISSON-féle stabilitásra vonatkoznak, és a melyek egy harmadik, szintén a formális integráczióelméletben föllépett kifejezést, az utolsó multiplikátort használják fel a nevezett stabilitás kimutatására — mondom, ha ezektől eltekintünk, akkor az említett két egyenletünkből levezethető eredmények úgyszólván kimerítik az összes, eddigelé *szigorúan* származtatott stabilitási eredményeinket.

Mindkét egyenlet a mozgási differencziálegyenletekből könnyen nyerhető.

A mozgási egyenletek

$$m_i x_i'' = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

$$m_i y_i'' = \frac{\partial U}{\partial y_i}$$

$$m_i z_i'' = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

Mindkét oldalt rendre x_i', y_i', z_i'-sal szorozva, az egyenleteket összeadva és integrálva a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2}{2} = U + h \tag{I}$$

elevenerő-egyenletet nyerjük, melyet *első alapegyenlet*nek nevezünk.

A mi a JACOBI-féle egyenlet származtatását illeti, úgy stabilitási vizsgálatról lévén szó, természetes dolog az

$$S=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

kifejezés értékváltozása után járni, hol r_i a P_i pontnak az O kezdőponttól való távolságát jelzi.

Világos, hogy

$$S'=2\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i x_i'+y_i y_i'+z_i z_i')$$

és

$$\frac{S'}{4}=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2}{2}+\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{x_i x_i''+y_i y_i''+z_i z_i''}{2}.$$

[Megjegyezzük tájékoztatás végett, hogy ezen utóbbi egyenlet az, melyből integráczió által, miután x_i'', y_i'', z_i''-t az erőértékekkel pótoltuk, a CLAUSIUS-féle viriáltételt nyerjük.] A mozgási egyenleteknek és a belőlük már származtatott elevenerő-egyenlet segítségével végre az

$$\frac{1}{4}S''=U+h+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{\partial U}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial U}{\partial y_i}+z_i\frac{\partial U}{\partial z_i}\right) \tag{II}$$

egyenlet a JACOBI-féle egyenletet nyerjük. Többször *második alapegyenlet*nek is fogjuk nevezni.

Lássuk most már, hogy miként használhatók fel az (I), (II) egyenletek egyrészt astronómiai stabilitási és labilitási következtetésekre *speczi**á**lis* problémák (ilyenek az n test problémák stb.) — másrészt *általános* vizsgálatokra. (Ilyen: tetszőleges tömegpontrendszer mozgása az egyensúlyi helyzet környezetében.)

*

Vizsgáljuk az n test problémáját. Minthogy szempontunkból a mozgások csak annyiban érdekelnek bennünket, a mennyiben ezek a súlyponttal ismeretes módon tovahaladó koordinátarendszerre vonatkoznak, tehát írjuk fel alapegyenleteinket erre a mozgórendszerre. Ezek formájukat teljesen megtartják, csak az

$$x_i, \ldots, x_i', \ldots$$

absolut koordináták és sebességi komponensek helyett a

$$\xi_i, \ldots, \xi_i', \ldots$$

relativ koordinátákat és sebességi komponenseket kell tennünk, és a h elevenerő állandó helyett a h' relativ elevenerő állandót kell írnunk. Ha még tekintetbe veszszük azt is, hogy NEWTON-féle erő esetében U a koordináták (-1)-edrendű *homogén* függvénye, akkor egyenleteink formája

$$T = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2}{2} = U + h' \tag{I'}$$

$$\frac{1}{4}\Sigma'' = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2\right)'' = \frac{U}{2} + h', \tag{II'}$$

hol ρ_i jelenti a P_i távolságát a pillanatnyi súlyponttól.

Most már az (I') egyenletből annál a döntő ténynél fogva, hogy a baloldal bármilyen t mellett *positiv* vagy 0, következik, hogy

$$U + h' \geqq 0.$$

Ebben az általánosságban maradva azonban ebből az egyenlőtlenségből semmiféle becses következtetést vonni nem lehet. Még a h' összes energia lehetséges *előjelére* nézve sem mond ki ezen egyenlőtlenség lényeges dolgot. Ellenben a bizonyos tekintetben mélyebb JACOBI-féle egyenletből rögtön következik, hogy

A) astronomiai stabilitás csak akkor lehetséges, ha az összes energia h' értéke (a mozgó rendszerre vonatkoztatva) *negativ.*

Ha ugyanis h' positiv, akkor Σ'' állandóan positiv alsó határ alá (t. i. a h' alá) nem is sülyedhet. De ha valamely, minden t értékre nézve értelmezett $\Sigma(t)$ függvénynek a második differencziálhányadosa állandóan egy pozitiv alsó határ fölött fekszik, akkor kell, hogy Σ az idővel minden határon túl nagyobbodjék. Könnyen lehet belátni azt is, hogy $h'=0$ esetben sem lehet stabilitás. Ha ugyanis volna, akkor Σ'' mégint $>\varepsilon$ volna. Ellentmondás.

Ezen eredmény, hogy h' szükségképen negativ a következőképen interpretálható. A rendszer kezdeti konfigurácziójának megfelel egy bizonyos pozitiv U_0 potencziálérték. Már most ha az eleven erő, a mely bizonyos tekintetben a kezdeti lökés intenzitásának a mértéke, az U_0 potencziálértéknél *kisebb*, akkor a kezdeti sebességek *iránya* szerint lehet még stabilitás és labilitás is. De ha a lökés bármily kevéssé is haladja meg az U_0 értéket, akkor a kezdősebességek irányától egészen függetlenül föltétlenül labilitás következik be.

A JACOBI-féle egyenletből továbbá következik, hogy

B) ha az astronomiai stabilitás első tulajdonsága ki van elégítve, akkor egyik test sem közeledik asymptotikusan a másikhoz.

Ekkor ugyanis megint minden időben (helyesebben: ha t elég nagy) $\Sigma''>\varepsilon$ volna, a mi a föltevéssel ellentmondásban van.

Téves volna azonban ebből arra következtetni, hogy az astronomiai stabilitás 1. tulajdonságából, vagyis abból, hogy a kölcsönös távolságok végesek maradnak — a 2. tulajdonság, a mely szerint a távolságok egy alsó határ fölött maradnak, már következik. Tehát hogy egyszerüen fölösleges külön követelésként fölvenni az értelmezésbe. Ugyanis *a* JACOBI-*féle egyenlet bár kizárja azt, hogy két test egymáshoz asymptotikusan közeledjék (föltéve, hogy a kölcsönös távolságok végesek maradnak), de nem zárja ki azt, hogy újból és újból való eltávolodás után az egyik test ne juthasson mégis a másiknak tetszőleges közelségébe.* [Lásd LEVI-CIVITA: Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg. 1904.]

C) A JACOBI-féle egyenletből következik, hogy az egész mozgás folyamán

$$U + 2h'$$

állandóan 0 körül *oszczillál*. Ez könnyen verifikálható speciális esetekben.

D) Ha a JACOBI-féle egyenlet segítségével már megállapitottuk, hogy h' negativ, akkor az elevenerő-egyenletből nyert

$$U + h' \geqq 0$$

egyenlőtlenségből következik, hogy az n test mozgásánál az *összes* kölcsönös távolságok nem válhatnak *simultán* végtelen nagygyá. Különben nyernők, hogy neg. szám $\geqq 0$.

*

Ezen JACOBI-féle következtetések kétségkívül nagyon nevezetesek, de alapjában véve megoldatlanul hagyják azt a fontos kérdést: milyen kezdőföltételek mellett maradnak a kölcsönös távolságok véges felső határ alatt. Mindjárt hozzátehetjük, hogy *szükségképen* megoldatlanul hagyják, mert általában a fölött, hogy a kölcsönös távolságok végesek maradnak-e vagy sem, az eleven erő h' állandója egymaga nem dönthet. Már pedig az (I), (II) alapegyenletekbe valamely pálya a maga individuálitásával csak a h' állandó révén lép be. A *két* test problémájánál igenis a h' állandó már dönt a kérdés fölött. Itt az (I), (II) egyenletek teljes fölvilágositást is adnak a helyzetről. De már a három test *általános* problémájánál nem így áll a dolog. Az (I), (II) egyenletek itt maguk nem döntenek. Sőt, a mint ismeretes (pl. POINCARÉ: Mécanique céleste t. III. p. 165) a hátralévő három területi tétel fölhasználásával sem tudjuk a relativ koordináták értékeit véges határok közé szorítani.

Míg a viszonyok az általános három test problémájánál így állanak, addig egyes *speciális* esetekben már *maga az eleven erő-egyenlet czélhoz vezet.* Ezen speciális esetek között elsőrangú fontosságú az ú. n. *asteroidikus három test probléma,* vagy a frankcziák elnevezése szerint a *problème restreint*. Ez a következőkben áll.

Jelöljük az egyik testet N-nel, és nevezzük *nap*nak; a másikat J-vel, és nevezzük *Jupiter*nek; a harmadikat B-vel, és nevezzük *bolygó*nak. Az általános három test problémájából az asteroidikus probléma a következő speczializácziók által származik.

Fölteszszük, hogy a B-nek m_3 tömege egyenlő zérussal. Akkor N és J a B-től függetlenül a két test problémájánál lehetséges pályák valamelyike szerint mozog. *Ezt* a mozgást is speczializáljuk. Fölteszszük, hogy N és J a súlypontjuk körül *ugyanazon* és *állandó* szögsebességgel keringenek. Ha N és J az m_1, m_2 tömegükre és kezdőhelyzetükre nézve meg vannak adva, akkor ezen közös, és állandó szögsebesség, a melylyel N és J a súlypontjuk körül keringenek — már teljesen meg van határozva.

N és J tehát mozgásukra nézve elő vannak írva, de a mint láttuk, úgy hogy ezen mozgás a három test *pontos* egyenleteivel az $m_3=0$ föltevés mellett összefér.

Kérdés, hogyan mozog a B?

E mozgásra vonatkozó differencziálegyenlet természetesen rendelkezésünkre áll; t. i. a három test egyenleteibe egyszerűen be kell vezetnünk az N, J koordinátáit az idővel expliczite kifejezve. Az így nyert mozgási egyenletekben azonban a potencziál függ az időtől; ha azonban az NJ egyenessel együtt forgó rendszert használunk, akkor a B síkmozgására nézve az

$$x''-2ny'=\frac{\partial\Omega}{\partial x}$$

$$y''+2nx'=\frac{\partial\Omega}{\partial y}$$

egyenleteket kapjuk, hol

$$2\Omega=m_1\left(r_1^2+\frac{1}{r_1}\right)+m_2\left(r_2^2+\frac{1}{r_2}\right)$$

és

$$n \text{ az állandó szögsebesség} = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{NJ}},$$

$$r_1 = \overline{NB}, \quad r_2 = \overline{JB}.$$

A koordinátarendszer, melyre vonatkozólag x, y jelölik a B pont koordinátáit, mint említettük, szilárd O kezdőpontja körül forog. Az x tengelye összeesik az NJ egyenes vonallal, kezdőpontja az N, J tömegpontpár súlypontjában van és így y tengelye az e súlyponton keresztül haladó, és az NJ vonalra merőleges egyenes.

A mozgási egyenletekből az

$$x'^2+y'^2 = 2\Omega - C$$

eleven erőegyenlet az ú. n. JACOBI-*féle integrál* adódik. Ez lényegben már JACOBI dynamikájában (42. oldal) található.

Az eleven-erőegyenlet szerint most már a B bolygó az (x, y) síknak csak olyan tartományaiban mozoghat, a melyekben

$$2\Omega - C \geqq 0.$$

Látjuk, hogy az egész diszkusszió a

$$z = \Omega(x, y) \equiv m_1\left(r_1^2 + \frac{1}{r_1}\right) + m_2\left(r_2^2 + \frac{1}{r_2}\right)$$

egyenletű felületnek az (x, y) síkkal párhuzamos síkmetszeteinek a vizsgálatán fordul meg. Ezt a rendkívül fontos felületet HILL-féle felületnek nevezhetjük; a

$$2\Omega = C$$

bipolárkoordinátákban adott görbét pedig CHARLIER szerint a C JACOBI-féle állandóhoz tartozó HILL-*féle határgörbének* nevezzük. Ez a fölület teljesen az (x, y) sík fölött fekszik és háromféleképen nyúlik a végtelenbe. Az N és J pontokban állított merőlegesekhez asymptotikusan, kéményszerűleg konvergál, továbbá a végtelenben is végtelen lesz. Öt figyelemreméltó pontja van, melyekhez az ú. n. *librácziós czentrumok* tartoznak; ezek azon pontok, a melyekben a fölülethez tartozó érintősík párhuzamos az (x, y) síkkal. Két pontban a felületnek legmélyebb pontja van, a többi háromban azonban negativ a görbület.

A HILL-féle határgörbével való stabilitási bizonyításokat először HILLnél találhatjuk: American Journal, 1878. I. kötet. Továbbá olvashatunk erre vonatkozólag BOHLINtól: Acta Mathematica 10. kötet, 1887; POINCARÉtól: Mécanique céleste, III. kötet, 157. oldal stb.; DARWINtól: Acta Mathematica, 21. kötet, 1897 és végre CHARLIERtól: Mechanik des Himmels, 2. kötet, 1905.

Az elemzéseket nem részletezhetjük, csak tájékoztatásul említjük azt az esetet, midőn a vizsgálandó mozgásra nézve a C JACOBI-féle állandó igen *nagy* positiv érték. Ekkor egy az (x, y) sík fölött igen magasan haladó és vele párhuzamos síknak a HILL-féle felülettel való metszését kell meghatároznunk. Ez a sík azonban a felületnek már csak az előbb említett kéményszerű nyulványait fogja metszeni — és egy külső nagy görbében, mely azonban nem érdekel bennünket. Ha most az épen nyert metszeteket az (x, y) síkra vetítjük, akkor két, az N és J pontokat körülzáró görbét kapunk. *Ha már most valamely időpontban a C* JACOBI-*féle állandóval biró bolygó pl. az N napot körülvevő görbén belül van, akkor soha abból a görbéből ki nem lép, és soha azon a görbén kívül nem volt.* HILLnek ilyen módon sikerült kimutatnia, hogy a hold a földtől való mostani távolságának négyszeresénél soha nagyobb távolságban a földtől nem lesz. Az összes kisbolygókra nézve egy a napot körülvevő zárt HILL-féle stabilitási görbe adódott — a mennyiben csak a Jupiter perturbáczióját veszszük tekintetbe. Kivételt képez a Thule nevü legnagyobb középnaptávolsággal biró asteroid, mely a stabilitásnak körülbelül a határán fekszik. Persze mindezen számítások föltételezik azt, hogy az excentriczitások és hajlások egyenlők zérussal. KOLB astronomus a Thulenál az excentriczitást is tekintetbe vette, és így határozott labilitást talált a napra vonatkoztatva. [CHARLIER, 2. kötet, 294. oldal.]

*

Eddig az alapegyenleteket astronomiai stabilitásnak a vizsgálatára használtuk föl. Feltünhetett, hogy tulajdonképen csak az első szükséges tulajdonságot mutattuk ki t. i. azt, hogy a kölcsönös távolságok végesek maradnak. Az alapegyenletek segítségével tényleg csak ennyi lehetséges. A mi a másik két tulajdonságra vonatkozó vizsgálatokat illeti, úgy kénytelen vagyok beérni azzal, hogy pusztán megemlitem, miszerint POINCARÉnak és LEVI-CIVITAnak vannak erre vonatkozó jelentékeny vizsgálataik. Kutatásaik épen a tárgyalt asteroidikus három test problémára vonatkoznak.

*

Térjünk most már át alapegyenleteinknek alkalmazására valamely *egyensúlyi helyzet* stabilitásának vagy labilitásának a kimutatásánál.

Itt már alapegyenleteink egész általános és teljes eredményeket szolgáltatnak.

Egyszerűség kedvéért szoritkozzunk szabad pontnak $U(x, y)$ potencziáltól függő sik mozgására.

Egyensúlyi helyzetnek nevezzük az olyan pontot, melyben a $\frac{\partial U}{\partial x}$ és $\frac{\partial U}{\partial y}$ erőkomponensek egyszerre eltünnek. Ezeknek megfelelő pontokban a

$$z = U(x, y)$$

fölületnek vizszintes érintősikja van.

Legyen pl. (x_0, y_0) egy egyensúlyi helyzet. Akkor, *ha* az $U(x, y)$ függvénynek az x_0, y_0 helyen *maximuma* van, akkor a szóban forgó egyensúlyi helyzet *stabilis* egyensúlyi helyzet. Vagyis: lehet az (x_0, y_0) pont olyan környezetét kijelölni, hogy ha a pont valamely t_0 időpontban ezen környezeten belül fekvő kis kör belsejében van, és ha a sebessége elegendő kicsiny, akkor nemcsak mindig az emlitett környezet belsejében *marad* a pont — hanem mindig is ezen környezet belsejében *volt*. Ez az a hires stabilitási tétel, mely tulajdonképen MAUPERTUIStől való, melyet először LAGRANGE mondott ki egész világosan. LAGRANGE bizonyítása [Mécanique analytique, II édition, 1811, p. 68.] a «kis mozgások» elméletén alapszik, és tulajdonképen csak látszatos bizonyítás. Egy tisztán az elevenerő-egyenleten és a maximumtulajdonságon alapuló bizonyítást DIRICHLET adott a CRELLE Journal 33. kötetében, 1846-ban.

Megjegyezzük, hogy a DIRICHLET-féle stabilitási kritériumban lényegesen föl van használva az, hogy az (x_0, y_0) helyen ú. n. *isolált* maximuma van az $U(x, y)$ potencziálfüggvénynek. Ha a maximum nem isolált, akkor labilitás következhetik be. Például:

Fektessünk le egy vízszintes lapra egy üres körhengert, és tegyük fel, hogy valamely P tömegpont a nehézség hatása alatt, és a hengerfelületen kénytelen mozogni. Legyen *ee* azon egyenes vonal, melyben a henger a vízszintes lapot érinti. Akkor kétségtelen, hogy a nehézségi potenciálnak A-ban — az *ee* egy pontjában — maximuma van. De ez a maximum nem isolált, mert az *ee* egyenes minden más pontjában is ugyanaz a potencziál mint A-ban. Igaz, hogy magasabb potencziálú hely nincs a felületen, de azért az A egyensúlyi helyzet nem stabilis. Ugyanis *bármilyen kicsiny* sebességet is adunk az A pontnak az *ee* irányban, a pont egyenletes mozgással fog az *ee* egyenesen haladni, és bárha kis sebességgel is, de mindenesetre véges idő mulva átlépi az A bármely környezetét.

Megvizsgáltam, hogy miképen módosul a DIRICHLET-féle stabilitási tétel, ha a tömegpont *ellenálló közegben* mozog. A közeg ellenállását természetesen csak olyan primitiv módon fogjuk a számításba vinni, mint azt az analytikai mechanikában szokás.

Térben való mozgást tartva szem előtt, legyenek x, y, z a tömegpont koordinátái.

A mozgás differencziálegyenletei:

$$mx'' = \frac{\partial U}{\partial x} - f(v)\frac{x'}{v}$$
$$my'' = \frac{\partial U}{\partial y} - f(v)\frac{y'}{v}$$
$$mz'' = \frac{\partial U}{\partial z} - f(v)\frac{z'}{v}.$$

Itt $f(v)$ az *ellenállási függvényt* jelenti, mely minden pozitiv v értékre nézve pozitiv, eltünik ha $v=0$ és v-vel folyton nő.

Szorozzuk meg a mozgási egyenleteket rendre x', y', z'-sal, adjuk őket össze és integráljunk a 0 és t határok között. Akkor az

$$m\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{2} + \int_0^t f(v)\,v dt = U+h$$

egyenletet nyerjük, melyet elevenerő egyenletnek nevezhetünk. Világos, hogy ez nem integrálja rendszerünknek, de czéljainkra nézve ugyanúgy fölhasználható, mint előbb az elevenerő-egyenlet.

Legyen ugyanis $t>0$, vagyis vizsgáljuk a mozgás lefolyását a kezdeti idő *után*, kezdeti időnek véve egy olyan időpontot, a melyben a tömegpont az említett kis kör belsejében van. Akkor az elevenerő-egyenlet baloldala pozitiv. Az első tag ugyanis nyilvánvalóan nem negativ; a második tag szintén nem negativ, mert a szereplő integrál integrandusa pozitiv, a felső határa pedig nagyobb mint az alsó határa. Tehát kell, hogy $t>0$ esetében

$$U+h \geqq 0$$

legyen, a miből a Dirichlet-féle okoskodással a stabilitásra lehet következtetni. De csak a jellemzett kezdeti idő *után!* Érdekes, hogy míg közegellenállás nélkül a stabilitás a mult időre is következik, addig most *csak* a jövő időre következik a potencziálfüggvény maximális voltából. Ha ugyanis t negativ, akkor

$$\int_0^t f(v)\,v dt$$

negativ, és így az okoskodás nem végezhető. A következő példa mutatja, hogy labilitás a «mult»-ban tényleg bekövetkezhetik.

Sík példát veszünk. Legyen

$$U = -\frac{x^2+y^2}{2} \quad \text{és} \quad f(v) = v$$

a mikor is az ú. n. csillapított harmonikus mozgással van dolgunk. Ekkor egy megoldást az

$$x = e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

egyenletek adnak. Ezekből az említett tulajdonság közvetlenül látszik.

Megjegyzem még, hogy az eleven-erőegyenlet a mozgásnak egy főkarakterét is elárulja. Minthogy ugyanis a mozgás $t>0$-nál állandóan az egyensúlyi helyzet környezetében játszódik le, tehát világos, hogy $U+h$ véges marad — ha $t>0$. E szerint az eleven erőegyenlet baloldalának is végesnek kell maradnia, és különösen az

$$\int_0^t f(v)\, v dt$$

értéknek. Minthogy az $f(v)$ függvény a v monoton függvénye, ezen integrál csak úgy maradhat véges, ha v az idő folyamán *végtelen sokszor tetszőleges kicsiny* lesz. Tudvalevő, hogy ennek *nem* kell így lennie, ha nincs közegellenállás. Például a közönséges harmonikus mozgásnál, melyet az

$$x = \varepsilon \cos t$$
$$y = \varepsilon \sin t$$

egyenletek adnak a sebesség állandó — tehát nem lesz végtelen sokszor tetszőleges kicsiny.

Az itt közölt vizsgálat, mely az ellenállásnak az egyensúlyi helyzet stabilitására és labilitására való befolyását tárgyalja, csak része egy nemsokára közlendő terjedelmesebb tanulmánynak.

*

Térjünk vissza az ellenállásnélküli esetre.

A DIRICHLET-féle tétel szerint a stabilitásra nézve *elegendő* föltétel, hogy a potencziálfüggvénynek a vizsgált egyensúlyi helyzetben *maximuma* legyen. Kérdés most már, vajjon a potencziálfüggvénynek maximális volta *szükséges-e* egyszersmind a stabilitásra? Ez a kérdés egész általánosságban még ma sincs elintézve, jóllehet a mechanikában előforduló legtöbb esetre nézve a rendelkezésünkre álló labilitási kritériumok már megfelelnek. Erre a kérdésre vonatkoznak KNESER (CRELLE Journal, T. 115, 1895; T. 117, 1897); LIAPOUNOFF (Journal de Mathématique de LIOUVILLE, T. III, 1897); HADAMARD (Journal de LIOUVILLE, T. III, 1897; T IV, 1898); PAINLEVÉ (Comptes-Rendus, T. 125, 1897, 1021. oldal); HAMEL (Mathematische Annalen 1903) stb. vizsgálatai.

Az említett dolgozatok egyikében sincs a II-ik alapegyenletünkre, a JACOBI-féle egyenletre határozott utalás téve; pedig ennek vagy ilyenszerű egyenletnek a felhasználásában áll a módszer lényege. Míg ugyanis maximum esetében pusztán az elevenerő-egyenlet segítségével sikerül a stabilitást kimutatni, addig minden egyéb esetben a labilitás effektiv kimutatására más segédeszköznek — és (pontrendszerek esetében) nevezetesen igen előnyösen a JACOBI-féle egyenletnek a használatát is követeli.

Vegyük a maximumhoz képest szélső esetet: a *minimum* esetét. Ezzel foglalkoznak KNESER és LIAPOUNOFF szép dolgozataikban. Legyenek (0, 0) az egyensúlyi helyzet koordinátái, és legyen ott az $U(x, y)$ függvénynek minimuma. Tegyük föl továbbá, hogy a minimum létezése már a MACLAURIN-féle sor legalacsonyabbrendű tagja segítségével konstatálható. Tehát

$$U = U_n + U_{n+1} + \cdots$$

hol

$$U_n,\quad U_{n+1},\dots$$

rendre

$$n,\quad n+1,\dots$$

-edrendű homogén egész függvényei az x, y-nak, és U_n *pozitiv definit alak.* (KNESER az $n=2$, LIAPOUNOFF általánosan az $n=2\nu$ esetet tárgyalja.)

Az elevenerő-egyenlet:

$$\frac{x'^2+y'^2}{2}=U+h$$

és a JACOBI-féle egyenlet:

$$\frac{1}{4}(r^2)''=U+h+\frac{x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}}{2},$$

hol r jelenti a pontnak az egyensúlyi helyzettől való távolságát. Ámde

$$x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}=x\frac{\partial U_n}{\partial x}+y\frac{\partial U_n}{\partial y}+\cdots,$$

és a homogén függvényeknek EULER-féle tétele értelmében:

$$=nU_n+(n+1)\,U_{n+1}+\cdots$$

Tehát alapegyenleteink összeállítva:

$$\frac{x'^2+y'^2}{2}=U+h$$

és

$$\frac{1}{4}(r^2)''=U+h+\frac{n}{2}\,U_n+\cdots$$

Azt állítjuk, hogy az egyensúlyi helyzet *labilis.* Jelöljük ki ennek kimutatására az O egyensúlyi helyzet egy olyan K (kör által határolt) környezetét, a melyben és melynek határán

$$\frac{n}{2}\,U_n+\frac{(n+1)}{2}\,U_{n+1}+\cdots$$

és

$$U_n+U_{n+1}+\cdots$$

mindkettő pozitiv — csak az O pontot véve ki, a melyben mindkettő egyenlő zérussal. Ilyen kört az U_n pozitiv definit voltánál fogva mindenesetre találhatunk.

Azt állítjuk most már, hogy ha a K kör belsejének bármely pontjából (az O-t kivéve) a P tömegpontot zérus kezdősebességgel útnak bocsátjuk, akkor véges idő mulva a K kör kerületéhez ér. Ezzel a labilitás ki lesz mutatva.

Legyen ugyanis $P_0(x_0, y_0)$ a kiindulási hely és U_0 az ott föllépő pozitiv potencziálérték. A kezdősebesség zérus legyen, tehát

$$h = -U_0.$$

Most már az (I) alapegyenlet szerint P csak az

$$U + h \geqq 0,$$

vagyis az

$$U \geqq U_0$$

tartományban mozoghat. E szerint az O egyensúlyi helyzetet körülvehetjük egy kis K_0 görbével, úgy hogy a P pont állandóan ezen K_0 görbén *kívül* mozog.

Míg P a K_0 és K görbék *között* tartózkodik, addig

$$\frac{1}{4}(r^2)'' > \varepsilon.$$

$$(\varepsilon > 0)$$

Ugyanis

$$U + h \geqq 0,$$

és

$$\frac{n}{2} U_n + \cdots$$

egy *pozitiv* (véges) *alsó határ fölött* marad a K_0 és K görbék között. Tehát ha minden időben K_0 és K között maradna a tömegpont, akkor kellene, hogy r minden határon túl nagyobbodjék. Ez abszurdum. A labilitás ezzel ki van mutatva.

Ez csak próbája annak, hogy miképen lehet a Jacobi-féle egyenletet labilitási tételek kimutatására alkalmazni. Más, Painlevé által tárgyalt esetekben is czélhoz vezet a Jacobi-féle egyenlet. Mindenkor az a döntő, hogy az

$$U \quad \text{és} \quad \frac{1}{n}\left(x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

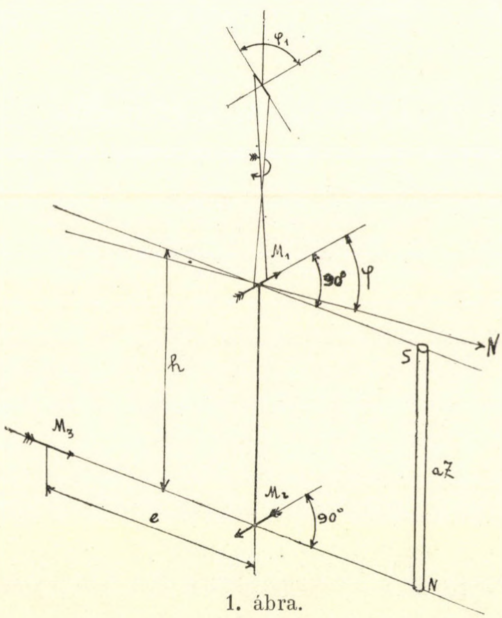
függvények Maclaurin-féle sorában a legalacsonyabbrendű tag egyenlő.

Erre azonban már nem terjeszkedhetek ki.

Fejér Lipót.

EGY ÚJ VERTIKÁLIS INTENSITÁS VARIOMÉTER.

Jelen sorok irójának sikerült egy új vertikális intensitás variométert szerkeszteni, a mely az eddigi mintegy féléve tartott megfigyelések tanusága szerint minden tekintetben bevált, és sokkal jobbnak és megbizhatóbbnak bizonyult az eddigieknél. A verti-



1. ábra.

kális intensitás megfigyelése Ó-Gyallán már ezen műszerrel történik, úgy hogy elérkezettnek láttuk az időt annak publikálására.

A műszer schémája az 1. ábrán látható. Lengő része két egymással szilárd összeköttetésben álló közel egyenlő momentumú M_1M_2 mágnest tartalmaz, melyek ellenkező polusokkal vannak egymás alá helyezve, úgy hogy elmondhatjuk e *tűcombinatióról,* hogy *közel astatikus.* A tűpár bifilárra van fölfüggesztve, akárcsak a bifilár horizontális intensitás variométer egyszerű mágnese.

A tűktől 90° szög alatt bizonyos állandó távolban vertikális lágyvasdrótköteg van elhelyezve (rézcsőbe szorítva). E lágyvasban a földmágnesség vertikális componense mágnességet indukál, úgy hogy ennek lent lesz a N pólusa, felül pedig az S.

Ezen berendezéssel elérjük, hogy: 1. A horizontális intensitás a variométerünkre igen kevés befolyással bír, mivel astatikus tűpárral van dolgunk. (Gyakorlati értelemben ezen befolyás a normális intensitás változásoknál elhanyagolható.)

2. Ugyancsak astatikus voltából kifolyólag a declinatióváltozásokat sem érzi meg a műszer.

3. Hasonló okból a műszer fölállításánál figyelemmel sem kell igen lenni a meridiánra; (elegendő azt csak szemmérték szerint állítani merőlegesen a $N—S$ irányra).

4. Mivel a lágyvasnak a N pólusa hat az egyik tűre, az S a másikra és a tűk ellenkező pólusaikkal vannak egymáshoz képest elhelyezve, a lágyvasnak a két tűre gyakorolt forgató nyomatéka összegeződik, úgy hogy a műszer teljes mértékben alkalmas a vertikális intensitás mérésére. Az így berendezett műszernek azonban van még temperaturacoefficiense. Ennek megszüntetésére van a lengő tűk másik oldalán elhelyezve egy bizonyos előre kiszámított e távolban az M_2 tűhöz képest az I. Gauss helyzetben a compensáló M_3 tű, oly czélból, hogy ennek a temperaturaváltozásával beálló nyomaték-változása ép törölje a műszer többi részeinél hasonló okból beálló nyomatékváltozásokat.

Első kérdésünk az lesz, hogy milyen értelmű nyomatékot kell kifejtenie a compensáló mágnesnek a lengő tűkre? Állapodjunk meg abban, hogy felülről az *óramutató járásával egyező forgató nyomatékot positivnak* (+) veszszük.

A mikor nincs még compensáló mágnesünk, a lengő tűpárra hat:

a lágyvas $+m_1$ nyomatékkal,

a horizontális intensitás $-m_2$ nyomatékkal.

Ha a műszerünket kellő érzékenynyé akarjuk tenni, szükséges, hogy

$$m_1 > m_2,$$

tehát az m_1 nyomatékkal nem tud még egyensúlyt tartani az m_2, úgy hogy a bifilár nyomatékának m_3 az m_2-vel egyező előjelűnek kell lennie.

Ekkor:

$$m_1 - m_2 - m_3 = 0. \qquad 1)$$

Ámde az egyensúlyi helyzet csak egy bizonyos temperaturánál marad fönn.

A hőfok növekedésével az

m_1 kisebbedik Δm_1-el,
m_2 « Δm_2-el,
m_3 nagyobbodik Δm_3-al.

Az előbbi egyenlőség helyett, most már a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$m_1 - \Delta m_1 - (m_2 - \Delta m_2) - (m_3 + \Delta m_3) \neq 0. \qquad 2)$$

A 2) egyenlőtlenségből 1)-et levonva:

$$-\Delta m_1 + \Delta m_2 - \Delta m_3 \neq 0. \qquad 3)$$

Ezen 3) egyenlőtlenségről még többet is tudhatunk, ha meggondoljuk, hogy

$$\Delta m_1 > \Delta m_2$$

(mivel $m_1 > m_2$ és úgy az m_1 mint az m_2 változása a lengő mágnesek temperaturacoefficiensétől függ).

A 3) helyett ily módon írhatjuk:

$$-\Delta m_1 + \Delta m_2 - \Delta m_3 < 0. \qquad 3a)$$

Hogy tehát ez *ne negativ* érték legyen, *hanem nulla,* szükséges, hogy az M_3 compensáló tű m_4 nyomatékának változása: Δm_4 positiv legyen, a mi csak úgy lehetséges, hogy a nyomaték maga negativ érték. *A compensáló mágnest úgy kell tehát alkalmaznunk, hogy a lágyvasrúd forgató nyomatékával ellenkezőleg* *hasson a tűpárra.* (Föltéve természetesen azt, a miből kiindultunk, hogy kellő érzékenység elérése végett a lágyvas nyomatéka már a priori nagyobb a horizontális intensitás által létrehozott nyomatéknál.)

A 3*a*) képletből még azt is megtudjuk, mikor nincs még a műszer kicompensálva és mikor van már túlcompensálva, azaz mikor van még messze a compensáló mágnes a tűpártól, és mikor van túlságos közel.

A 3*a*) képlet ugyanis azt mondja, hogy a mikor még egyáltalán nem alkalmazunk compensáló mágnest, tehát a mikor még egyáltalán nincs compensálva a műszer, akkor negativ értelmű forgatónyomaték fog hatni a tűpárra, a mely aztán olyan értelemben fordul el, mintha a vertikális intensitás csökkent volna. Kimondhatjuk szabályként a műszer viselkedésére :

Ha a variométer növekvő hőfoknál oly értelemben fordul el, mintha a vertikális intensitás csökkent volna, még nincs kicompensálva.

Most hogy már ismerjük a műszer viselkedését minőségileg, térjünk át a számitásokra, nevezetesen számitsuk ki azon *e* távolságot, a melyben alkalmaznunk kell a compensáló tűt, hogy a műszernek ne legyen temperaturamenete, és számitsuk ki adott esetre a műszer érzékenységét.

A) Az *e* távolság számítása.

Null fok mellett a lengő a rajzolt nyugalmi helyzetben van, tehát a *reá ható forgató nyomatékok algebrai összege* $= 0$.

A lengőre hat :

a) A földmágnesség vertikális componense (Z) $+a(M_1+M_2)Z$ nyomatékkal ; *

b) a bifilár $-b\varphi_1$ nyomatékkal ; **

---

* a a lágyvascombinátio inductio tényezője, a mi függ a vas minőségétől és a tűkhöz mért távolságától.

** b a bifilár torsionyomatéka 1° torsio mellett.

c) a földmágnesség hor. componense (H) $-H(M_1-M_2)\sin\varphi$ nyomatékkal;

d) az M_3 mágnes az M_2-re gyakorolt $\frac{-M_2M_3}{e^3}$ nyomatékával;[1]

e) az M_3 mágnes az M_1-re gyakorolt $\frac{+M_1M_3}{(e^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$ nyomatékkal.[2]

Mivel a tű nyugalomban van:

$$a(M_1+M_2)Z-b\varphi_1-H(M_1-M_2)\sin\varphi-\frac{M_2M_3}{e^3}+\frac{M_1M_3}{(e^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}=0. \quad 4)$$

A 4 egyenlet csak addig érvényes, míg a műszer 0°-ú temperaturával biró környezetben van. Ha a környezet hőfokát 1°-al emeljük, akkor az:

M_1 nyomaték megváltozik $M_1(1-\alpha_1)$-re,
M_2 « « $M_2(1-\alpha_2)$-re,
M_3 « « $M_3(1-\alpha_3)$-re,
b bifilár torsionyomatéka megváltozik $b(1+\beta)$-re,
e^3 távolság « $e^3(1+3\delta)$-re,
$(e^2+h^2)^{\frac{3}{2}}$ távolság « $(e^2+h^2)^{\frac{3}{2}}.\ 1+3\delta)$.[3]

Föltéve, hogy a műszer ki van compensálva, az így megváltozott nyomatékok is egyensúlyban tartják egymást, úgy hogy a 4) egyenlet átalakul:

$$a.[M_1(1-\alpha_1)+M_2(1-\alpha_2)]Z-b(1+\beta)\varphi_1-H[M_1(1-\alpha_1)-M_2$$
$$(1-\alpha_2)]\sin\varphi-\frac{M_2M_3}{e^3}[1-(\alpha_2+\alpha_3+3\delta)]+\frac{M_1M_3}{(e^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$[1-(\alpha_1+\alpha_3+3\delta)]=0^{4} \quad 5)$$

5)-ből a 4)-et levonva:

---

[1] Lásd LAMONT, WILD stb. munkáit.

[2] Mert itt az M_3 tű nem e, hanem $\sqrt{e^2+h^2}$ távolságra van az M_1 tű közepétől.

[3] Mert a mágnesek megfelelő temperatura-coefficienseit α-val, a bifilárét β-val, a sárgaréz (a sin anyaga) lineáris hőkiterjedési coefficiensét δ-val jelöljük.

[4] A temperatura-coefficiensekkel mindjárt mint kis mennyiségekkel számolunk.

$$-aZ(M_1a_1+M_2a_2)-b\beta\varphi_1+H\sin\varphi\,(M_1a_1-M_2a_2)+\frac{M_2M_3}{e^3}$$

$$(a_2+a_3+3\delta)-\frac{M_1M_3}{(e^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(a_1+a_3+3\delta)=0. \qquad 6)$$

A $b\beta\varphi_1$ a 4) egyenletből:

$$-b\beta\varphi_1=$$

$$=\beta\left[-a(M_1+M_2)Z+H(M_1-M_2)\sin\varphi+\frac{M_2M_3}{e^3}-\frac{M_1M_3}{(e^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

6)-ba helyettesítve:

$$-aZ\left[M_1(a_1+\beta)+M_2(a_2+\beta)\right]+H\sin\varphi\left[M_1(a_1+\beta)-M_2(a_2+\beta)\right]+$$

$$+\frac{M_2M_3}{e^3}(a_2+a_3+3\delta+\beta)-\frac{M_1M_3}{(e^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}(a_1+a_3+3\delta+\beta)=0. \qquad 7)$$

Ezen egyenletet a *regula falsi* szerint oldjuk meg oly módon, hogy

$$(e^2+h^2)^{\frac{1}{2}}=ne$$

helyettesítjük, a mikor is a 7)-ből:

$$e^3=\frac{M_2M_3(a_2+a_3+3\delta+\beta)-\frac{M_1M_3}{n^3}(a_1+a_3+3\delta+\beta)}{a[M_1(a_1+\beta)+M_2(a_2+\beta)]\,Z-H\,[M_1(a_1+\beta)-M_2(a_2+\beta)]\sin\varphi}. \qquad 7a)$$

Ez csak akkor végleges megoldás, ha az n-et helyesen választottuk.

De ha számára más jön ki az

$$n=\frac{[e^2+h^2]^{\frac{1}{2}}}{e} \qquad 7b)$$

egyenletből, ezt helyettesítjük újra az e^3 képletébe, a mire az így nyert e-ből már az n-re közelebb eső értéket kapunk.

Két-három próba után sikerülni fog az egyenletet elég pontosan megoldani, a mint majd a számpéldából kitünik.

B) A műszer érzékenységének $\frac{\Delta Z}{\Delta\varphi}$-nek keresése és elemzése.

Vegyünk a 4) egyenletben a

$$\begin{array}{lll} Z & \text{helyett} & Z+\Delta Z\text{-t}, \\ \varphi_1 & \text{"} & \varphi_1+\Delta\varphi\text{-t}, \\ \varphi & \text{"} & \varphi-\Delta\varphi\text{-t}, \end{array}$$

$$a(M_1+M_2)(Z+\Delta Z)-b(\varphi_1+\Delta\varphi)-H(M_1-M_2)\sin(\varphi-\Delta\varphi)-$$

$$-\frac{M_2M_3}{e^3}+\frac{M_1M_3}{(e^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Kifejtjük, $\Delta\varphi$-vel mint kis mennyiséggel számolva, és levonjuk belőle a 4) egyenletet.

$$a(M_1+M_2)\Delta Z=\Delta\varphi\left[b-H(M_1-M_2)\cos\varphi\right]$$

$$\frac{\Delta H}{\Delta\varphi}=\frac{b-H(M_1-M_2)\cos\varphi}{a(M_1+M_2)} \qquad 8)$$

a b t 4)-ből kiszámítva:

$$b=\frac{a(M_1+M_2)Z+H(M_1-M_2)\sin\varphi-\frac{M_2M_3}{e^3}+\frac{M_2M_3}{n^3e^3}}{\varphi_1},$$

ebbe pedig a $\left(-\frac{M_2M_3}{e^3}+\frac{M_1M_3}{n^3e^3}\right)$-t a 7)-ből számoljuk ki:

$$-\frac{M_2M_3}{e^3}+\frac{M_1M_3}{n^3e^3}=$$

$$=\left[-aZ(M_1+M_2)+H\sin\varphi(M_1-M_2)\right]\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\alpha_3+\beta+3\delta}\,\star$$

a helyettesitések s egyszerűsitések után:

$$b=\left[\frac{aZ(M_1+M_2)}{\varphi_1}-\frac{H(M_1-M_2)\sin\varphi}{\varphi_1}\right]\frac{\alpha_3+3\delta}{\alpha+\alpha_3+\beta+3\delta}.$$

⋆ $\alpha_1\cong\alpha_2\cong\alpha$ helyettesitéssel.

Ezt helyettesítve 8)-ba az egyszerűsítések után végre:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta\varphi}=\left[\frac{Z}{\varphi_1}-\frac{H\sin\varphi}{a\,.\,\varphi_1}\,\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}\right]\frac{a_3+3\delta}{a+a_3+\beta+3\delta}-$$
$$-\frac{H\cos\varphi}{a}\,\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}. \qquad 8a)$$

Látható, hogy minél nagyobb a φ_1 torsioszög, annál kisebb a $\frac{\Delta Z}{\Delta\varphi}$, azaz annál érzékenyebb a műszer.

A bifiláris φ_1 torsioszöge pedig, mivel a compensáló mágnes ugyanolyan értelmű nyomatékot ad a tűnek, mint a bifilár, annál kisebb lesz, minél közelebb hozzuk a compensáló mágnest a tűkhöz. *A compensáló mágnes közelítésével a műszer veszít érzékenységéből.*

A 8*a)* képlet még azt is kimutatja, hogy egy bizonyos mágnesnek használata mellett határa is van az *érzékenységnek.*

E végből írjuk még át a két képletünket $\varphi=90^\circ$ esetére, a minthogy ez a műszernél a legczélszerűbb is.

$$e^3=\frac{M_2M_3(a_2+a_3+\beta+3\delta)-\frac{M_1M_3}{n^3}(a_1+a_3+\beta+3\delta)}{a\,[M_1(a_1+\beta)+M_2(a_2+\beta)]\,Z-H\,[M_1(a_1+\beta)-M_2(a_2+\beta)]}, \qquad 9)$$

a hol

$$n=\frac{(e^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}{e}$$

$$\frac{\Delta Z}{\Delta\varphi}=\left[\frac{Z}{\varphi_1}-\frac{H}{a\,.\,\varphi_1}\,\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}\right]\frac{a_3+3\delta}{a+a_3+\beta+3\delta}. \qquad 10)$$

Elemezzük kissé ez utóbbi egyenletet! A $\left[\frac{H}{a\,.\,\varphi_1}\,\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}\right]$ elhanyagolható a $\left[\frac{Z}{\varphi_1}\right]$ mellett a mi vizsgálódásainknál.

$$\frac{\Delta Z}{\Delta\varphi}\cong\frac{Z}{\varphi_1}\,\frac{a_3+3\delta}{a+x_3+\beta+3\delta}.$$

Itt a Z egy meghatározott érték,

$$\frac{a_3+3\delta}{a+a_3+\beta+3\delta}$$

szintén egy meghatározott valódi tört egy bizonyos mágnesre vonatkozólag, a φ_1-et közönséges bifilárnál nem igen lehet 120°-on túl venni, úgy hogy $\varphi_1 = \frac{120\pi}{180}$-nál kapjuk a legnagyobb érzékenységet.

C) A műszer képlete és értelmezése változó vert. és hor. intensitás mellett.

Vegyük ismét elő a 4) egyenletet:

$$a(M_1+M_2)Z - b\varphi_1 - H(M_1-M_2)\sin\varphi - \frac{M_2M_3}{e^3} + \frac{M_1M_3}{n^3e^3} = 0,$$

Z helyett $Z+\Delta Z$-t véve
H « $H+\Delta H$-t «
φ « $\varphi-\Delta\varphi$-t «
φ_1 « $\varphi_1+\Delta\varphi_1$-t «

Behelyettesítve ezeket az alapegyenletet levonjuk belőle:

$$a(M_1+M_2)\Delta Z - b\Delta\varphi - \Delta H(M_1-M_2)\sin\varphi + \\ + H(M_1-M_2)\cos\varphi\Delta\varphi = 0 \qquad 11)$$

$\varphi = 90°$-ot veszünk.

$$\Delta Z(M_1+M_2)a - \Delta H(M_1-M_2) = \Delta\varphi b,$$

$$\Delta\varphi = \frac{a}{b}(M_1+M_2)\Delta Z - \frac{M_1-M_2}{b}\Delta H.$$

$$\Delta\varphi = A\Delta Z - B\Delta H, \qquad 12)$$

a hol

$$A = a\frac{M_1+M_2}{b},$$

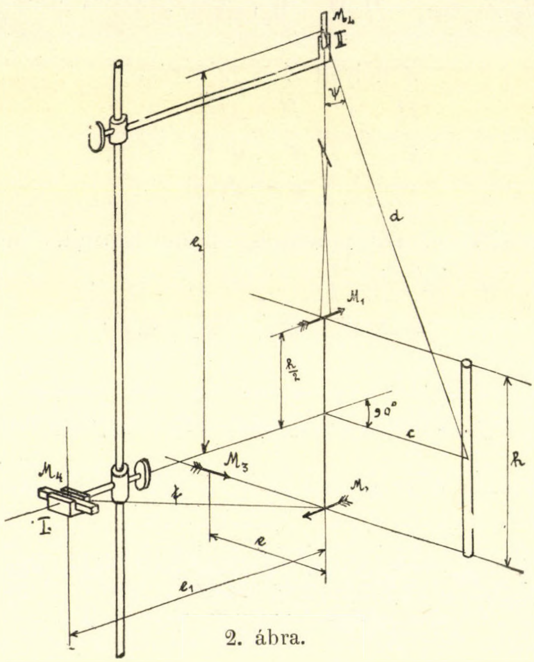
$$B = \frac{M_1-M_2}{b}.$$

A vertikális intensitás variátiót pedig:

$$\Delta Z = \frac{\Delta\varphi + B\Delta H}{A} \qquad 12a)$$

képlet adja.

Ha ezen képleteket vizsgáljuk, látjuk, hogy azon esetben, ha $M_1 = M_2$, csakis a vertikális intensitásra érzékeny a műszer, a horizontális intensitásra nem, mert $B = 0$, a declinátióra sem, mert a tűpár astatikus, de még ha nem is volna teljesen, még akkor sem érezné a declinátióvariatiókat, mert a tűpár közel merőlegesen van elhelyezve a meridiánra, akár egy közönséges bifilárvariométer. Azt ugyan teljes pontossággal nem érhetjük el, hogy $M_1 = M_2$ legyen, de *könnyen keresztülvihető, hogy a horizontális intensitásnak a normális változásai a műszeren észrevehető kitérést nem okoznak.*



2. ábra.

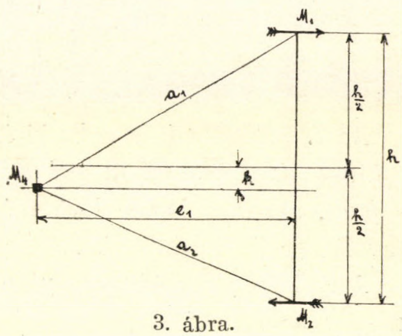
D) A műszer graduálása és annak berendezése.

A graduálás a 2. ábrán látható tartó segélyével történik,* a melyen két hüvely van elhelyezve, mindkettőbe mágnes helyezhető.

* Legjobb ezt a műszeroszlopba begipszelni.

E hüvelyeknek úgy kell állaniok, hogy a *graduáló* M_4 *tű az hüvelybe állítva pontosan az* M_1, M_2 *tűk vertikális távolságát felező vízszintes síkban legyen, a II. helyen pedig pontosan a lengő tűk fölött álljon.*

Hogyan érhető el az I. hüvely pontos állása? Behelyezve az M_4 tűt az I. hüvelybe, ennek *föl-le tologatása* által könnyen megtalálhatjuk azt a helyet, a hol a tű az M_1, M_2 lengő tűpárra hatással nem lesz. Ekkor az M_4 az M_1 tűre ép akkora forgatónyomatékkal hat, mint az M_2-re, csak ellenkező értelemben.



3. ábra.

A fölső tagok elhanyagolása mellett kimondhatjuk, hogy az M_4 nyomatéka az

$$M_1 \text{ tűre } m_1 = \frac{M_1 M_4}{a_1^3},$$

$$M_2 \quad « \quad m_2 = \frac{M_2 M_4}{a_2^3}.$$

(Lásd 3. ábrát.)

Ezen elhanyagolással elkövetett hiba, ha esetleg a nyomatékok absolut értékeire van is befolyással, de azok különbségére nem, vagy csak igen kevéssé, mert az a_1 közel egyenlő a_2-vel.

$$\frac{M_1 M_4}{a_1^3} - \frac{M_2 M_4}{a_2^3} = 0,$$

ebből

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

A 3. ábra szerint:

$$a_1^2 = \left(\frac{h}{2} + k\right)^2 + e_1^2 = \frac{h^2}{4} + e_1^2 + hk,$$

$$a_2^2 = \left(\frac{h}{2} - k\right)^2 + e_1^2 = \frac{h^2}{4} + e_1^2 - hk,$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{e_1^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 + hk}{e_1^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 - hk},$$

legyen $e_1^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = f^2$, akkor:

$$k = \frac{f^2}{h} \cdot \frac{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2}{3}} + 1}. \tag{13}$$

Az I. tartót tehát, a nulla kitérésből kapott helyzetéből *el kell tolnunk az erősebbik tű felé a* 13) *képletből számított k távolsággal,* akkor a benne levő mágnes pontosan az M_1, M_2 tűk távolát felező vízszintes síkban lesz.

A II. hüvely függőón segélyével elég pontosan állítható a mágnespár fölfüggesztési pontja fölé, mert itt a tapasztalat szerint még 2 mm. eltolás a középből sincs lényeges befolyással (alig változtatja meg a kitérést 2—3%-al).

Az e_1 távolságot is elég pontosan (0·5 mm-ig) megmérhetjük, ha függőón által feszítve tartott zsinórokat vezetünk át, úgy az I. mind a II. tartó közepén, és ezen zsinórok horizontális távolát mérjük meg.

Az e_2 is könnyen mérhető akár kathetométerrel, akár a tartók közepein vízszintesen kifeszített zsinegek segélyével. Hogy a graduálást számítás tárgyává tehessük, írjuk át a 11) képletet $\varphi = 90°$ esetére:

$$b\Delta\varphi = a(M_1 + M_2)\Delta Z - (M_1 - M_2)\Delta H. \tag{14}$$

A graduálás kivitele a következő:

a) Kitérítünk e távolból a második Gauss helyzetből az M_4 graduáló tűvel egy közönséges declinátióvariométert egyszer W felé, majd átfektetve a tűt, E felé is, a két kitérés:

$\Delta n'$, $\Delta n''$ skálarész (pars).

b) Kitérítjük ugyanezen M_4 tűvel a műszerünket az I. tartóba fektetve azt, ugyancsak mindkét irányba, a kitérések: $\Delta n_1'$, $\Delta n_1''$.

c) A II. tartóba téve az M_4-et, egyszer N pólussal lefelé, egyszer fölfelé, így is kapunk két kitérést. (Mivel az M_4 tű a lágyvasban mágnességet indukál.) A kitérések $\Delta n_2'$, $\Delta n_2''$.

Ezen hat kitérésből pontosan kiszámítható a műszer viselkedése, még pedig az első négy a műszer érzékenységét adja horizontális intensitás iránt, az első és utolsó pár kiütésből pedig a vertikális intensitás iránti érzékenységet kapjuk.

A horizontális intensitásra való érzékenységét a Mascart által kontemplált módon számítjuk.

Az M_4 tű kitéríti a declinátiótűt a Gauss második helyzetéből:

$$e^3 \frac{H}{M_4} \operatorname{tg} \varphi = 1$$

s ebből

$$M_4 = e^3 H \operatorname{tg} \varphi,$$

nálunk

$$\varphi \text{ percz} = \varepsilon \frac{\Delta n' + \Delta n''}{2}$$

(az ε 1 parsnak megfelelő kitérési szög ívperczekben a declinátióvariométernél).

Mivel a kitérési szög kicsiny, vehető az ív a tangens helyett:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= 0{\cdot}000291 \varphi', \\ &= 0{\cdot}000291 \frac{\Delta n' + \Delta n''}{2} \cdot \varepsilon, \\ M_4 &= e^3 H \left[0{\cdot}000291 \frac{\Delta n' + \Delta n''}{2} \right] \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

A műszernek M_1 illetve M_2 mágneseire az M_4 tű

$$f = \left[e_1^2 + \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

távolból hat, tehát a tűk középpontjaiban az általa létrehozott intensitás változás:

$$\frac{M_4}{f^3} = \left(\frac{e}{f} \right)^3 H \left[0{\cdot}000291 \frac{\Delta n' + \Delta n''}{2} \right] \varepsilon. \qquad 14a)$$

Ezen mennyiséget kell a 14) egyenletbe a ΔH helyett bevezetnünk, a ΔZ helyett pedig nullát, mert közben nem változott a vertikális intensitás, a $\Delta\varphi$ pedig a műszer $\Delta n'_1$, $\Delta n''_1$ kitéréseiből számított:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta n'_1 + \Delta n''_1}{2}$$

lesz.

$$b\frac{\Delta n'_1 + \Delta n''_1}{2} = -\left(\frac{e}{f}\right)^3 H\left[0{\cdot}000291\frac{\Delta n' + \Delta n'}{2}\right].(M_1 - M_2).\varepsilon$$

s ebből:

$$B = \frac{M_1 - M_2}{b}{}^{*} = -\frac{\Delta n'_1 + \Delta n''_1}{\Delta n' + \Delta n''}\left(\frac{e}{f}\right)^3 \frac{1}{H.0{\cdot}000291.\varepsilon}. \qquad 15)$$

A vertikális intensitás iránti érzékenységét pedig a következő meggondolás alapján nyerjük. A lágyvasban az M_4 mágnes a

$$\frac{2M_4}{d^3}(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\psi)^{**}$$

indukáló erőt fejti ki, a hova d és $\sin^2\psi$ következőkép kaphatók:

$$d = (e_2^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin^2\psi = \frac{c^2}{d^2} \qquad 16)$$

(lásd 2. ábrát).

Az indukáló erő tehát:

$$M_4\frac{2d^2 - 3c^2}{d^5} = e^3 H\left[0{\cdot}000291\frac{\Delta n' + \Delta n''}{2}\right].\varepsilon.\frac{2d^2 - 3c^2}{d^5}. \qquad 16a)$$

Ezen indukáló erő a 14) egyenletben megfelel ΔZ-nek, a $\Delta H = 0$ és $\Delta\varphi = \frac{\Delta n'_2 + \Delta n''_2}{2}$, mivel csakis az M_4 tű okozta vertikális intensitás változás hozott létre kitérést a műszernél.

A 14) tehát átalakul:

$$b\frac{\Delta n'_2 + \Delta n''_2}{2} =$$

---

* Lásd a 12) képletet.

** LAMONT után.

$$= a(M_1+M_2)e^3H\left[0\cdot000291\,\frac{\Delta n'+\Delta n''}{2}\right]\varepsilon\,.\,\frac{2d^2-3c^2}{d^5}\,.$$

Ebből:

$$A=\frac{a(M_1+M_2)^{\star}}{b}=$$

$$=\frac{\Delta n'_2+\Delta n''_2}{\Delta n'+\Delta n''}\cdot\frac{1}{e^3}\cdot\frac{d^5}{2d^2-3c^2}\cdot\frac{1}{H\,.\,0\cdot000291\,.\,\varepsilon}\,. \qquad 17)$$

Ha a deklinátióvariométernél is az I. tartóhoz hasonló fix tartót használunk, úgy a 15) képletben levő:

$$\left(\frac{f}{e}\right)^3\frac{1}{H\,.\,0\cdot000291\,.\,\varepsilon}=b \qquad 18)$$

és a 17) képletben az

$$\frac{1}{e^3}\,\frac{d^5}{2d^2-3c^2}\,\frac{1}{H\,.\,0\cdot000291\,.\,\varepsilon}=a^{\star\star} \qquad 19)$$

részek egyszer s mindenkorra kiszámíthatók, úgy hogy a 15), 17) képletek ezek helyettesítésével átmennek a

$$B=-\,b\,\frac{\Delta n'_1+\Delta n''_1}{\Delta n'+\Delta n''}, \qquad 20)$$

$$A=\ \ a\,\frac{\Delta n'_2+\Delta n''_2}{\Delta n'+\Delta n''} \qquad 21)$$

képletekbe, a mik a graduálás kiszámítását rendkívül megkönnyítik.

Az eddigiekben előadtuk a graduálást mágnes segélyével, de nálunk Ó-Gyallán a mágneses variométerek elektromos graduálásra vannak berendezve, úgy hogy a számpélda közlése miatt még ezt is le kell írnunk legalább vázlatosan. Az elektromos graduálásnál a műszerek oszlopaiba begipszelt sárgarézcsőtartókon ugyancsak sárgarézcsőre csévélt solenoidok vannak elhelyezve, a melyekbe elektromos áram vezethető és commutálható is.

A 4. ábra a graduálásnál használt deklinátió variométer tartóját mutatja.

---

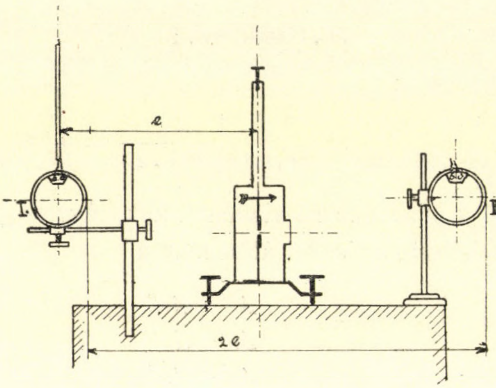
* Lásd a 12) egyenletet.

** A H helyébe elegendő az illető helyen uralkodó közepes intensitást venni.

I. a rendes graduáló tekercs, ez mindig a helyén marad szilárd fölállításban, rendesen áram nélkül, csak graduáláskor vezetünk beléje áramot.

II. egy teljesen I-hez hasonló tekercs, ez csak arra szolgál, hogy vele pontosan meghatározhassuk az I. távolát a lengő mágnestől.

A két tekercset egymásután (seriesbe) kapcsoljuk oly módon, hogy a kettő hatása a mágnesre egymással ellenkező lesz mihelyt áramot vezetünk beléjük. Most a II-t addig közelítjük-távolítjuk,



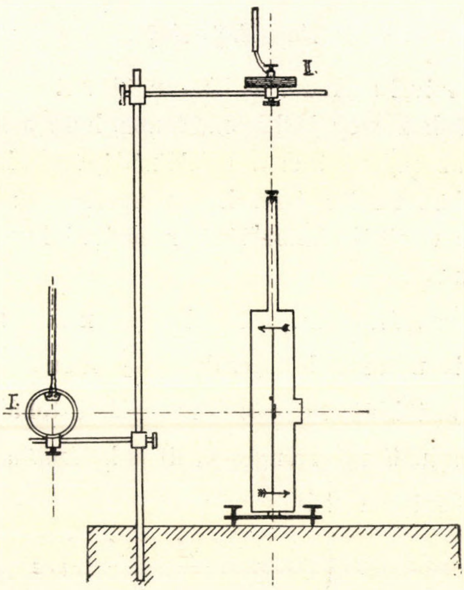
4. ábra.

míg a variométer kitérése nulla nem lesz, akkor a két tekercs egymástól való távola az I. solenoidnak és mágnesnek kétszeres távolát adja. A II. tekercset persze ezen meghatározás után eltávolítjuk.

Az 5. ábra az előbb leírt új vertikális intensitás műszer graduáló tekercseit mutatja be. Ezek beállítása, távolságaiknak meghatározása teljesen hasonló a mágnesekkel való graduáláshoz készített I., II. hüvelyek elhelyezéséhez, csak persze az I. solenoidba áramot kell vezetnünk, a mikor a nulla kitérésnek megfelelő helyzetét keressük.

Graduáláskor itt egy kis eltérés van az előbbitől. Ennél ugyanis mindenkor vezetünk áramot úgy az I. mind a II. tekercsbe; de *az I-ben* még, függetlenül a II-től, *meg is fordítható az áram* *iránya*, úgy hogy a két tekercsnek a műszerre való hatása *egyszer összegeződik, másszor levonódik.*

Az áramhozzávezetés az egyes műszerekhez a mennyezetről történik porczellánisolatorokra erősitett ólomkábelekkel, oly módon hogy a belül levő vörösrézdrót az egyik vezeték, az ólomköpeny



5. ábra.

meg a másik. Minden egyes műszertől egy kábel megy a helyiség falán elhelyezett kapcsolótáblához, úgy hogy a tekercseknek megfelelő kapcsolása innen, mint egy czentrumból igazgatható a nélkül, hogy a műszerekhez nyulnánk.

A deklinátió variométer tekercsét seriesbe kapcsolva a vertikális intensitás variométer két tekercsével, áramot vezetünk keresztül rajtuk, mire a műszerek következő kitéréseket adják:

a declinátió variométer Δn_1-et,

a vertikális intensitás variométer Δn_1^v-et.

Az áramirányt megfordítva a V_1 tekercsben, de meghagyva a többiben, megmarad a declinátió variométer Δn_1 kitérése,

de megváltozik a vertikális intensitás variométer kitérése:

Δn^v-re.

Az egész körben megfordítva az áramirányt, kapjuk a

Δn_2, Δn_3^v, Δn_4^v

kitéréseket, a mivel a graduálás be van fejezve.

A kiszámításhoz meg kell gondolnunk, hogy a solenoidok átmérője ugyanaz (nálunk 8 cm.) a deklinátió, valamint a vertikális intensitás variométerek I. tercseinek menetszáma ν_1 is közös (nálunk 5), míg a vertikális intensitás variométer tekercseinek menetszáma ν_2 (nálunk 12).

Mivel ugyanaz áram megy a tekercseken át, ezek mágneses momentuma is ugyanaz lesz, csak a V_{II} tekercsé lesz $\frac{\nu_2}{\nu_1}$-szer akkora, mint a többié. Az összes levezetések tehát, a mik mágnessel való graduálásra érvényesek, itt is használhatók, úgy hogy a tekercs momentuma itt is

$$M = e^3 H \left(0{\cdot}000291 \frac{\Delta n_1 + \Delta n_2}{2}\right) . \varepsilon$$

lesz (mint előbb a graduáló mágnes M_4 momentuma).

A variométer érzékenységének kiszámitásához a 12) egyenlet szükséges:

$$\Delta\varphi = A\Delta Z = B\Delta H.$$

Most a variométerre egyidőben hat mindkét tekercs, úgy hogy a ΔH változást majd az I. solenoid okozza, a ΔZ-t pedig a II.

A solenoidok hatását a 14a) illetve 16a) egyenletekből kapjuk.

Jelöljük

az I. tekercs hatását $\frac{K}{2}$-el,

a II. « « $\frac{G}{2}$-el.

Akkor:

$$\frac{K}{2}=\left(\frac{e}{f}\right)^3 H\,.\,0{\cdot}000291\,.\,\frac{\Delta n_1+\Delta n_2}{2}\,\varepsilon,$$

$$\frac{G}{2}=\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)e^3 H\,.\,0{\cdot}000291\,.\,\frac{\Delta n_1+\Delta n_2}{2}\,.\,\varepsilon\,\frac{2d^2-3c^2}{d^5}\,. \qquad 23)$$

Még egyszerűbb alakot nyernek ezek, ha az

$$\left(\frac{e}{f}\right)^3.\,H\,.\,0{\cdot}000291\,.\,\varepsilon=k,$$

$$\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)e^3 H\,.\,0{\cdot}000291\,.\,\varepsilon\,\frac{2d^2-3c^2}{d^5}=g^{\star} \qquad 24)$$

helyettesítéseket végezzük.

$$K=k\,(\Delta n_1+\Delta n_2).$$
$$G=g\,(\Delta n_1+\Delta n_2). \qquad 24a)$$

A mikor a két tekercs hatása összegeződik:

$$\Delta H=-\frac{K}{2},$$

$$\Delta Z=\frac{G}{2},$$

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta n_1^v+\Delta n_4^v}{2}.$$

Ha pedig levonódnak:

$$\Delta H=\frac{K}{2},$$

$$\Delta Z=\frac{G}{2},$$

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta n_2^v+\Delta n_3^v}{2}.$$

Ezen helyettesitésekkel két egyenletet kapunk két ismeretlennel:

$$\Delta n_1^v+\Delta n_4^v=A\,.\,g\,(\Delta n_1+\Delta n_2)+B\,.\,k\,(\Delta n_1+\Delta n_2),$$
$$\Delta n^v+\Delta n_3^v=A\,.\,g\,(\Delta n_1+\Delta n_2)-B\,.\,k\,(\Delta n_1+\Delta n_2).$$

⋆ Mert a II. tekercsnek ν_2 menete van, míg a dekl. variometer tekercsének csak ν_1.

Megoldva ezeket A és B szerint:

$$A = \frac{1}{2g} \frac{\Delta n_1^v + \Delta n_2^v + \Delta n_3^v + \Delta n_4^v}{\Delta n_1 + \Delta n_2},$$

$$B = \frac{1}{2k} \frac{\Delta n_1^v + \Delta n_4^v - \Delta n_2^v - \Delta n_3^v}{\Delta n_1 + \Delta n_2}. \qquad 25)$$

Minket azonban inkább a 12a) képlet coefficiensei érdekelnek, a mely szerint:

$$\Delta Z = \left(\frac{1}{A}\right) \Delta\varphi + \left(\frac{B}{A}\right) \Delta H. \qquad 26)$$

Az előbbiekből az

$$\frac{1}{A} = 2g \frac{\Delta n_1 + \Delta n_2}{\Delta n_1^v + \Delta n_2^v + \Delta n_3^v + \Delta n_4^v},$$

$$\frac{B}{A} = \frac{g}{k} \frac{\Delta n_1^v + \Delta n_4^v - \Delta n_2^v - \Delta n_3^v}{\Delta n_1^v + \Delta n_2^v + \Delta n_3^v + \Delta n_4^v}. \qquad 26a)$$

*

Hátra van még a számadatok közlése.

1. A compensáló mágnes távolságának (e) számítása az új műszernél.

Műszerünknél a következő mágneseket alkalmaztuk:

$M_1 = 120{\cdot}0$ C. G. S. $\alpha_1 = 0{\cdot}000650$,
$M_2 = 114{\cdot}8$ « $\alpha_2 = 0{\cdot}000573$,
$M_3 = 143{\cdot}2$ « $\alpha_3 = 0{\cdot}000685$.

A bifilárra és a compensáló mágnest tartó sinre pedig a temperatura-coefficiensek:

$\beta = 0{\cdot}00002455$,
$3\delta = 0{\cdot}00005799$.

A műszer dimensióiból pedig szükségünk van:

$h = 24{\cdot}5$ cm.
$c = 6{\cdot}5$ « lásd 2. ábrát.

A számításhoz első közelítésnél felvehető:

$$a = 0{\cdot}25,\star$$
$$n = 1{\cdot}2.$$

Czélszerű előre kiszámitani a következőket:

$$\begin{aligned} a_1+a_3+\beta+3\delta &= 0{\cdot}001418, \\ a_2+a_3+\beta+3\delta &= 0{\cdot}001341, \\ a_1+\beta &= 0{\cdot}000625, \\ a_2+\beta &= 0{\cdot}000598. \end{aligned}$$

Nálunk: $H = 0{\cdot}211$ C. G. S.

$Z = 0{\cdot}405$ «

A 9) szerint számítva kapunk

$$e^3 = 524{\cdot}0\text{-t},$$

a miből:

$$e = 8{\cdot}07 \text{ cm},$$

úgy hogy a $7b$)-ből az n-re:

$$n = 3 \text{ adódik ki.}$$

Második közelítéshez veszünk:

$$n = 2\text{-t},$$

akkor

$$e = 10{\cdot}9 \text{ cm.}$$

jön ki és a javított n:

$$n = 2{\cdot}46 \text{ lesz.}$$

Ha

$$n = 2{\cdot}4\text{-et}$$

veszünk föl e-re kapunk:

$$e = 11{\cdot}1 \text{ cm-t}$$

és az n-re a $7b$)-ből is a fölvett

$$n = 2{\cdot}4$$

⋆ Lásd LAMONT lágyvas inclinatio variométereit.

jön ki, a mivel a számitás be van fejezve. A compensáló mágnest tehát $e = 111$ mm. távolban kell elhelyeznünk.

Számos fütési kisérlet tanusága szerint a műszernél *1° temperaturaemelkedésnek még mindig 1·89 mm. kitérésnövekedés felel meg* (a műszert egy magas tágas faládával boritva le spirituslámpával hevitett sárgarézcsövekkel fütjük 6—8 óra hosszat egyenletesen, a temperaturát különböző magasságokban elhelyezett hőmérőkkel ellenőrizzük), de ezen temperaturacoefficiens nem oly nagy, hogy meg ne hagyhatnók. A fütés tanusága szerint a műszert már kissé túlcompensáltuk. E hiba valószinűleg onnan ered, hogy az a inductiótényezőt kissé nagyra becsültük.*

2. Graduáló tekercsek elhelyezése és távolságaik meghatározása az új műszernél.

Miután az I. tekercset elhelyeztük óly módon, hogy a műszer ne adjon kitérést, ki kell számitanunk a 13) képletből a k távolságot.

Ehhez az eddigi adatokból szükségünk van az e_1-re:

$$e_1 = 26{\cdot}3 \text{ cm.}$$

előzetesen közelitőleg lemérve.

Czélszerű előre kiszámitani a következő értékeket:

$$f^2 = 826{\cdot}0 \text{ cm},$$

$$\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1{\cdot}0184.$$

A számitás 13)-ból a k-ra

$$k = 3{\cdot}1 \text{ mm-t ad ki.}$$

Az I. tekercset az igy kiszámitott 3·1 mm. távolsággal fölemelve rögzitjük.

A II. tekercset függőón után állitva be, a pontos távolságokra

$$e_1 = 26{\cdot}0 \text{ cm.}$$
$$e_2 = 50{\cdot}3 \text{ « adódik ki.}$$

* Ujabban sikerült ezen kis temperatura-coëfficienst is egészen megsemmisiteni.

(A k számításához előzetesen fölvett $e_1 = 26{\cdot}3$ nem különbözik annyira az így pontosan kapott értéktől, hogy e miatt a k-n javítanunk kellene.)

3. A variométerünknél a graduálás kiszámításához szükséges állandó értékek számítása.

A declinátió variométerünknél a tekercs távolát, az elektromos graduálásnál leírt módon határoztuk meg segédtekercs segélyével és kaptunk

$$e = 25{\cdot}15 \text{ cm-t}, \quad \varepsilon = 1{\cdot}35',$$

úgy hogy a vertikális intensitás variométerre a 24)-ből:

$$k = 5{\cdot}53,$$
$$g = 4{\cdot}7.\text{*}$$

4. Graduálás és a műszer képlete.

A graduálás a következő kitéréseket adta:

$$\text{dekl. var.} \begin{cases} \Delta n_1 = 14{\cdot}0 \text{ mm.} \\ \Delta n_2 = 12{\cdot}8 \text{ «} \end{cases}$$

$$\text{vert. int. var.} \begin{cases} \Delta n_1^v = 10{\cdot}2 \text{ mm.} \\ \Delta n_2^v = 8{\cdot}6 \text{ «} \\ \Delta n_3^v = 8{\cdot}4 \text{ «} \\ \Delta n_4^v = 9{\cdot}7 \text{ «} \end{cases}$$

A vertikális intensitás variométerhez a 25)-ből:

$$A = 0{\cdot}147,$$
$$B = 0{\cdot}00985.$$

A műszer egyenlete tehát:

$$\Delta\varphi \text{ mm.} = 0{\cdot}147 \,.\, \Delta Z\gamma - 0{\cdot}00985 \,.\, \Delta H\gamma + 1{\cdot}89\,(t-15).\text{**}$$

---

* Ezen értékek számításakor a H-t a C. G. S. egység ötödik decimálisában (ú. n. γ-ban) vettük föl $H = 21{,}000$-nak, úgy hogy majd a segítségükkel kiszámított érzékenység is γ-ban fogja az intensitás variatiókat adni.

** t a variométer környezetének hőfoka. A variométer nyugalmi helyzetét, honnan a variátiókat számítjuk, 15° temperaturának veszszük.

A 26) egyenlet coefficiensei pedig a 26a) szerint:

$$\frac{1}{A} = 6{\cdot}8,$$

$$\frac{B}{A} = 0{\cdot}067.$$

Egy tetszésszerinti $\Delta\varphi$ kitéréshez, ΔH horizontális intensitás variátió és t° temperatura mellett lesz a

$$\Delta Z^\gamma = 6{\cdot}8 \, . \, \Delta\varphi \text{ mm.} + 0{\cdot}067 \, . \, \Delta H^\gamma - 1{\cdot}89 \, . \, (t - 15).$$

Ezen legutolsó egyenletből láthatjuk, mennyire csekély befolyással van a horizontális intensitás a ΔZ-re, úgy hogy, a mint már előre is jeleztük, a horizontális intensitás normális változásait a ΔZ számításánál elhanyagolhatjuk. (A leírt műszer gyártását Edelmann vette át.)

Büky Aurel.

A KEDVEZMÉNYES TARIFASZÁMÍTÁS MATHEMATIKAI ALAPELVEI.

Minden vállalat, a melynek termelése nagyszámú fogyasztók között oszlik meg, az olyan fogyasztók részére, a kik a termelést intensivebb mértékben veszik igénybe, bizonyos kedvezményeket szokott nyujtani.

Ezek az árkedvezmények a legtöbb esetben önkényes, ugrásszerű skálák alapján szoktak megállapíttatni (zónarendszer) és nincsenek kimutatható vonatkozásban a vállalat termelőképességével és jövedelmezőségi számításaival. Egynémelyikük meg épen oly természetű, hogy bizonyos extrém igénybevételekre extrapolálva képtelen ármegállapításokhoz vezet.

A fennebbiekre való tekintettel már 1901. évben dolgoztam ki oly *általános érvényű* eljárást, a melynek alapján a nagyszámú fogyasztók által igénybevett vállalatok árszabása raczionális módon, ugrások elkerülésével, folytonos függvény alakjában válik megállapithatóvá, oly módon, hogy a levezetett általános képletbe csak a vállalat termelési és eladási viszonyainak megfelelő «állandókat» legyen szükséges behelyettesiteni.

Az eljárásom alapját képező elvek a következők:

1. Az eladási egységár még a legnagyobb kedvezményre való jogosultság esetén is mindig felülmaradjon bizonyos minimumon, a melyet a vállalat termelési és üzleti viszonyai szabnak meg.

2. Az ezen minimumon felül fizetendő ártöbblet annál kisebb legyen, mennél nagyobb az igénybevétel.

Jelölje: p az 1. pontban említett határt, x az összes igénybevételt, y az ennek megfelelő eladási árat, C egy azonnal meghatározandó állandót, akkor a fennebbi elveknek megfelelőleg

$$y = p + \frac{C}{x}, \qquad \text{I.}$$

a miből

$$C = x(y-p).$$

Ha a lehető legnagyobb mérvű igénybevétel esetén x az X értéket éri el, mely esetben az eladási egységár minimum s a p alsó határtól ennek k perczentjével különbözik:

$$y_{min.} = p\left(1 + \frac{k}{100}\right),$$

akkor

$$C = X\frac{pk}{100}. \qquad \text{II.}$$

Az I. számú egyenletnek megfelelő görbét a szövegábra tünteti fel; ezt az egyenletet

$$x = \xi, \quad y = \eta + p$$

transformálással O_1 kezdőpontra vonatkozólag az

$$\eta = \frac{C}{\xi}$$

alakban állíthatjuk elő. A kedvezményes árszabás görbéje tehát általában oly egyenoldalú hyperbola, a mely az asymptotái által alkotott coordinátarendszerben van felrajzolva, míg az I. számú, nem transformált egyenlet az egyenoldalú hyperbolát oly rendszerben ábrázolja, a melynek ordinátatengelye az egyik asymptota, abscissatengelye pedig a másik asymptotától p távolsággal van párhuzamosan eltolva.

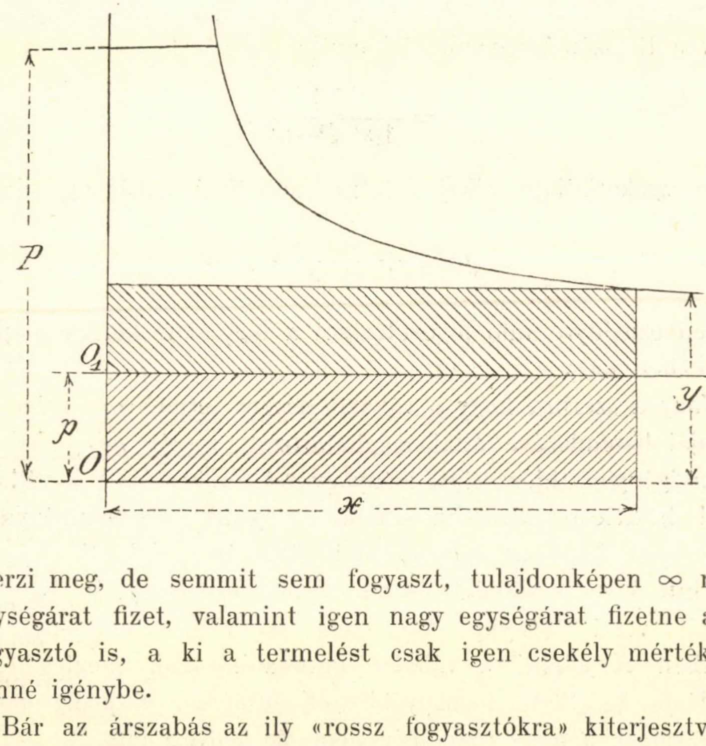
A rajzon látható két vonalkázott derékszögű négyszög felszíneinek összege az x igénybevétel esetén fizetendő xy pénzösszeget tünteti fel:

$$xy = C + px,$$

a mi azt mutatja, hogy minden kedvezményes fogyasztó fizet a fogyasztásáért:

1. egy állandó C «alaptaksát» (mert hiszen $C=\xi\eta=$const.); 2. egy, a fogyasztásával arányos px «fogyasztási taksát», melyben az összes fogyasztás a p határegységáron van számítva. Az alaptaksa értékét a fennebbi II. sz. egyenlet adja.

Természetes, hogy végeredményben az a fogyasztó fogyaszt olcsóbban, a ki a termelést nagyobb mértékben veszi igénybe, mert alaptaksája nagyobb fogyasztásra oszlik el. Oly fogyasztó, a ki az alaptaksa lefizetésével csak a *fogyasztói jogosultságot*



szerzi meg, de semmit sem fogyaszt, tulajdonképen ∞ nagy egységárat fizet, valamint igen nagy egységárat fizetne az a fogyasztó is, a ki a termelést csak igen csekély mértékben venné igénybe.

Bár az árszabás az ily «rossz fogyasztókra» kiterjesztve is teljesen logikus, mert hiszen a vállalatnak az összes bejegyzett fogyasztók maximális igényeihez képest kell berendezkednie s ez által amortizáczió- és üzemköltségei nagyobbodnak, melyeknek viseléséhez az összes fogyasztók tartoznának hozzájárulni, mind a mellett a vállalatok a gyakorlatban az egységárnak egy felső határát szokták megállapitani, melynél drágábban még a «legrosszabb» fogyasztó sem tartozik a fogyasztását megfizetni.

Az ilyen maximális P egységárhoz bizonyos $x=a$, *kedvezménynélküli* fogyasztás tartozik, még pedig miután

$$P=p+\frac{c}{a},$$

lesz

$$a=\frac{C}{P-p},$$

vagy a II. számú egyenlet tekintetbe vételével

$$a=\frac{Xpk}{100(P-p)} \qquad \text{III.}$$

és a gyakorlatban alkalmaztatni szokott árszabás egyenlete:

$$y=p+\frac{a(P-p)}{x}. \qquad \text{IV.}$$

A kedvezményre való jogosultságot a fogyasztó kétféle alapon szerezheti meg.

Vagy a szerint, hogy a vállalat összes termelőképességének a saját berendezése által meghatározott részét *hány órában* veszi igénybe (időszerinti igénybevétel), mikor is X a vállalat által betartott üzemórák számát, a pedig a kedvezménynyel még nem honorált igénybevételi óraszámot jelenti, vagy a szerint, hogy a vállalat összes termelőképességének hányadrészét veszi igénybe (fogyasztás szerinti kedvezmény). Ez esetben X jelenti a vállalat munkabirásának megfelelő és eladásra kerülhető legnagyobb teljesítményt, a pedig azt a fogyasztást, a mely után még nem jár kedvezmény.

Fényes Dezső.

DESARGUES TÉTELE.

Jelöljük az ABC és $A'B'C'$ háromszögek oldalait a szokásos módon az a, b, c, ill. a', b', c' betűkkel.

Az AA', BB', CC' egyenesek akkor és csak akkor találkoznak egy pontban, ha az aa', bb', cc' pontok egy egyenesen vannak.

A következő sorok DESARGUES e tételének új analitikai bebizonyítását tartalmazzák. Tárgyalásomban projektiv koordinátákat használok.

1. Ha koordinátaháromszögnek az $A'B'C'$ háromszöget használjuk és ABC szögpontjainak projektiv koordinátái

$$\begin{array}{ll} A) & \bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3, \\ B) & \bar{b}_1,\ \bar{b}_2,\ \bar{b}_2, \\ C) & \bar{c}_1,\ \bar{c}_2,\ \bar{c}_3, \end{array}$$

akkor az AA', BB', CC' egyenesek egyenletei

$$\bar{a}_3x_2-\bar{a}_2x_3=0, \quad -\bar{b}_3x_1+\bar{b}_1x_3=0, \quad \bar{c}_2x_1-\bar{c}_1x_2=0.$$

E három egyenes akkor és csak akkor találkozik egy pontban, ha

$$\begin{vmatrix} 0 & \bar{a}_3 & -\bar{a}_2 \\ -\bar{b}_3 & 0 & \bar{b}_1 \\ \bar{c}_2 & -\bar{c}_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

vagyis ha

$$\bar{a}_3\bar{b}_1\bar{c}_2-\bar{a}_2\bar{b}_3\bar{c}_1=0. \qquad \text{(I)}$$

2. Térjünk most már át egy tetszésszerinti $N_1N_2N_3$ koordinátaháromszögre. ABC szögpontjainak, illetve $A'B'C'$ oldalainak az $N_1N_2N_3$-ra vonatkozó projektiv koordinátái legyenek:

$$\begin{array}{llll} A) & a_1,\ a_2,\ a_3, & a') & \alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \alpha'_3, \\ B) & b_1,\ b_2,\ b_3, & b') & \beta'_1,\ \beta'_2,\ \beta'_3, \\ C) & c_1,\ c_2,\ c_3, & c') & \gamma'_1,\ \gamma'_2,\ \gamma'_3. \end{array}$$

Egy tetszésszerinti pontnak az $N_1N_2N_3$ háromszögre vonatkozó koordinátáit jelöljük az x_1, x_2, x_3 betűkkel, ugyane pontnak az $A'B'C'$ háromszögre vonatkozó koordinátáit pedig az y_1, y_2, y_3 betűkkel. Ha még az $A'B'C'$ rendszer egységpontját alkalmasan választjuk, akkor

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3, \\ \rho y_2 &= \beta'_1 x_1 + \beta'_2 x_2 + \beta'_3 x_3, \\ \rho y_3 &= \gamma'_1 x_1 + \gamma'_2 x_2 + \gamma'_3 x_3, \end{aligned}$$

hol ρ a zérustól különböző arányossági tényező.

E transzformáló képleteket pl. az A pontra alkalmazván, nyilván

$$\rho \bar{a}_1 = (a\alpha'),\quad \rho \bar{a}_2 = (a\beta'),\quad \rho \bar{a}_3 = (a\gamma'),$$

hol

$$(a\alpha') = a_1\alpha'_1 + a_2\alpha'_2 + a_3\alpha'_3.$$

A transzformálás után tehát az (I) alatti egyenlet az

$$(a\gamma')(b\alpha')(c\gamma') - (a\beta')(b\gamma')(c\alpha') = 0 \qquad \text{(II)}$$

egyenletbe megy át.

Ez az egyenlet fejezi ki bármely koordinátaháromszög esetében az

$$AA',\quad BB',\quad CC'$$

egyenesek egy pontban való találkozásának föltételét.

3. Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögeket egymással fölcseréljük, továbbá minden fogalom helyébe rendre a duálját teszszük, akkor a (II) alatti egyenlethez hasonló egyenletre jutunk, csakhogy az A, B, C pontok szerepet cserélnek az a', b', c' egyenesekkel. Minthogy e fölcserélésnél a (II) alatti egyenlet bal oldala csak előjelét változtatja, azért

$$aa',\quad bb',\quad cc'$$

egy egyenesen való fekvésének feltételét valóban szintén a (II) alatti egyenlet fejezi ki. *Kürschák József.*

ADALÉK A BERNOULLI-FÉLE TÉTELHEZ.[1]

Legyen E_1, E_2 két egymástól független és egymást kizáró eshetőség, melynek valószínűsége p illetve q, de

$$p+q=1.$$

Ha l kisérletet végzünk, akkor annak valószínűsége, hogy E_1 eshetőség m-szer, az E_2 pedig n-szer előálljon,

$$\frac{l!}{m!\,n!}p^m q^n$$

a hol

$$m+n=l$$

és m és n is 0-tól l-ig minden értéket felvehet. Az előállható egyes esetek valószínűségét

$$(p+q)^l=\sum_{m=0}^{m=l}\frac{l!}{m!\,n!}p^m q^n \qquad 1)$$

egyes tagjai adják. Ha amaz előállható eshetőséget, melynek legnagyobb a valószínűsége, a legvalószínűbb eshetőségnek mondjuk, akkor a Bernoulli tétele vonatkozik egyrészt a legvalószínűbb eshetőség valószínűségének meghatározására, másrészt megállapitja annak a valószínűségét, hogy a beálló eset és a legvalószínűbb eshetőség között az eltérés $\pm s$ legyen.

A legvalószínűbb eshetőséget a következőképen szokás meghatározni. Keressük az 1) alatti kifejezés ama tagját, a melyre áll, hogy

$$\frac{l!}{(m-1)!\,(n+1)!}p^{m-1}q^{n+1}<\frac{l!}{m!\,n!}p^m q^n>$$
$$>\frac{l!}{(m+1)!\,(n-1)!}p^{m+1}q^{n-1};$$

[1] Előadva a Math. és Phys. Társulat 1906 márczius 29-iki ülésén.

azaz keressük ama tagot, a mely a közvetetlen megelőzőnél és közvetetlen utána következőnél nagyobb.

E föltétel lehető egyszerűsités után és figyelembe véve, hogy

$$p+q=1 \quad \text{és} \quad m+n=l$$

a következőre vezet

$$p(l+1) > m > p(l+1)-1.$$

m csak egész szám lehet és igy, ha $p(l+1)$ tört, akkor — tekintetbe véve, hogy a két határérték között az eltérés 1 — m az $p(l+1)$-ben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

Ha $p(l+1)$ egész szám, azt mondjuk, hogy két értéke van, t. i. $p(l+1)$ és $p(l+1)-1$.

m-nek ily módon való meghatározása hiányos. Hiányos még pedig azért, mert

1. ha valamely többtagú kifejezésnek egyik tagja a közvetetlen megelőző és utána következő tagnál nagyobb, abból még nem következik, hogy ez egyszersmind az összes tagok közül a legnagyobb.

2. E levezetés mintegy kizárja ama eshetőséget, hogy a legnagyobb az utolsó, vagy első tag legyen, holott p-nek és q-nak mindig lehet oly számbeli értéket tulajdonitani, hogy vagy az első, vagy az utolsó tag a legnagyobb.

3. A kiindulásból azt kell következtetnünk, hogy akkor, mikor $p(l+1)$ egész szám m-re nézve nem két érték van, hanem egyáltalában nincsen megoldás, mert nincs oly egész szám, a mely két egymásután következő egész szám között feküdjék.

m meghatározására szolgáló fentebbi eljárás csak akkor fog minden kétséget kizárni, ha megelőzőleg kimutatjuk, hogy minden

$$(1+x)^l = \sum \frac{l!}{(l-k)!\ k!} x^k = \sum_{k=0}^{k=l} T_k \qquad a)$$

kifejezésre, a hol x bármely egész pozitiv szám, áll a következő:

1. ha

$$T_k > T_{k+1}, \qquad 1)$$

akkor

$$T_k > T_{k+r};$$

2. ha

$$T_k > T_{k-1}, \tag{2)}$$

akkor

$$T_k > T_{k-r};$$

3. ha

$$T_k = T_{k+1}, \tag{3)}$$

akkor

$$T_{k-r} < T_k > T_{k+r}$$

r bármely értéke mellett.

Ha az 1), 2) és 3) egyenlőtlenségekbe a T helyett α)-ból a megfelelő értékeket helyettesítjük, a következőkre jutunk:

$$\frac{k+1}{l-k} > x \tag{β)}$$

$$x > \frac{k}{l-k+1} \tag{γ)}$$

és végre a 3) alatti feltételből

$$x = \frac{k+1}{l-k}. \tag{δ)}$$

Az α) egyenletből következik, hogy

$$\frac{T_{k+r}}{T_k} = \frac{(l-k)!\,k!}{(l-k-r)!\,(k+r)!}x^r =$$
$$= \frac{(l-k-r+1)(l-k-r+2)\ldots(l-k)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+r)}x^r. \tag{ε}$$

Ha az egyenlet jobb oldalába x helyett a β) alatti egyenlőtlenségből a nála nagyobb $\frac{k+1}{l-k}$ értéket helyettesítjük, kapjuk

$$\frac{T_{k+r}}{T_k} < \frac{(l-k-r+1)(l-k-r+2)\ldots(l-k)(k+1)^r}{(k+1)(k+2)\ldots(k+r)(l-k)^r}.$$

Mivel azonban

$$(l-k-r+1)(l-k-r+2)\ldots(l-k) < (l-k)^r,$$

továbbá

$$(k+1)^r < (k+1)(k+2)\ldots k+r$$

következik, hogy

$$\frac{T_{k+r}}{T_k} < 1, \quad \text{vagy} \quad T_{k+r} < T_k.$$

Épúgy következik az α) alatti egyenletből, hogy

$$\frac{T_k}{T_{k-r}} = \frac{(l-k+r)!\,(k-r)!}{(l-k)!\,k!}x^r =$$

$$= \frac{(l-k+1)(l-k+2)\dots(l-k+r)}{(k-r+1)(k-r+2)\dots k}x^r, \qquad \varepsilon_1)$$

vagy x helyett a γ) alatti egyenlőtlenség alapján a nála kisebb $\frac{k}{(l-k+1)}$ értéket helyettesítjük, lesz

$$\frac{T_k}{T_{k-r}} < \frac{(l-k+1)(l-k+2)\dots(l-k+r)k^r}{(k-r+1)(k-r+2)\dots k(l-k+1)^r}.$$

Mivel azonban

$$(l-k+1)(l-k+2)\dots(l-k+r) > (l-k+r)^r$$

és

$$k^r > (k-r+1)(k-r+2)\dots k,$$

következik, hogy

$$\frac{T_k}{T_{k-r}} > 1 \quad \text{vagy} \quad T_k > T_{k-r}.$$

Végre, ha a ε) és az ε_1) alatti egyenletekbe a δ) alatti értéket helyettesítjük, vagyis felteszszük, hogy

$$T_k = T_{k+1},$$

akkor az ε) egyenlet arra vezet, hogy

$$\frac{T_{k+r}}{T_k} < 1, \quad \text{azaz} \quad T_{k+r} < T_k$$

és az ε_1) alatti egyenlet pedig arra, hogy

$$\frac{T_k}{T_{k-r}} > 1 \quad \text{vagy} \quad T_k > T_{k-r}.$$

Bogyó Samu.

A BINOMIÁLIS SOR EGY SPECZIÁLIS ESETÉRŐL.[1]

A következőkben n pozitiv egész szám, $0<p<1$, $0<q<1$ és $p+q=1$, a minek megfelelőleg

$$(p+q)^n = p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \cdots +$$

$$+ \binom{n}{m} p^m q^{n-m} + \cdots + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q^1 + p^n q^0 =$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_m + \cdots + P_{n-1} + P_n = 1.$$

Tudvalevőleg e sor tagjai a valószinűség-számitásban, BERNOULLI tételének levezetésében, mint valószinűségek mérőszámai szerepelnek.

Kérdés, hogy melyik a sor $n+1$ tagja között a legnagyobb.

A sor egyes tagjainak a megelőző taghoz való viszonya sorjában véve:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{n}{1}\frac{p}{q}, \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{n-1}{2}\frac{p}{q}, \ldots, \frac{P_m}{P_{m-1}} = \frac{n-m+1}{m}\frac{p}{q}, \ldots,$$

$$\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = \frac{2}{n-1}\frac{p}{q}, \quad \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{p}{q}.^{[2]}$$

Ha

$$\frac{P_m}{P_{m-1}} = \frac{n-m+1}{m}\frac{p}{q} = \frac{\frac{p(n+1)}{m} - p}{1-p} \gtreqqless 1,$$

vagyis ha

$$p(n+1) \gtreqqless m,$$

a szerint

$$P_m \gtreqqless P_{m-1}.$$

Ha azonban $p(n+1)>m$, egyúttal

$$p(n+1) > m-1 > \cdots > 2 > 1,$$

a minek megfelelőleg

$$P_0 < P_1 < P_2 < \cdots < P_{m-2} < P_{m-1} < P_m.$$

---

[1] Előadva a Math. és Phys. Társulat 1906 április hó 5-iki ülésén.

[2] Ezek a hányadosok m növekedésével folytonosan kisebbedő számok.

Így például, ha $p(n+1)>n$, $P_0<P_1<P_2<\cdots<P_{n-1}<P_n$ és P_n a legnagyobb tag.

Hasonlóképen, ha $p(n+1)<m$, egyúttal

$$p(n+1)<m+1<\cdots<n-1<n$$

és

$$P_{m-1}>P_m>P_{m+1}>\cdots>P_{n-2}>P_{n-1}>P_n.$$

Ha például $p(n+1)<1$, $P_0>P_1>P_2>\cdots>P_{n-1}>P_n$ és P_0 a legnagyobb tag.

Ha tehát egyidejűleg

$$m<p(n+1)<m+1, \qquad \text{I.}$$

a megelőzőkből kifolyólag:

$$P_0<P_1<\cdots<P_{m-2}<P_{m-1}<P_m>P_{m+1}>\cdots>P_{n-1}>P_n,$$

a mi azt jelenti, hogy ekkor P_m a legnagyobb tag.

Ez annak az esetnek felel meg, a mikor $p(n+1)$ nem egész szám.

Ha egész szám, és pedig

$$p(n+1)=m, \qquad \text{II.}$$

minthogy ekkor egyúttal $p(n+1)>m-1>\cdots>2>1$ és

$$p(n+1)<m+1<\cdots<n-1<n,$$

egyidejűleg lesz

$$P_0<P_1<\cdots<P_{m-2}<P_{m-1}=P_m>P_{m+1}>\cdots>P_{n-1}>P_n,$$

a mi azt mondja, hogy ez esetben $P_m=P_{m-1}$ s mindkét tag egymással egyenlő legnagyobb tag.

Összefoglalva tehát a legnagyobb tag rendszámát úgy kapjuk meg, mint a legnagyobb, a $p(n+1)$ szorzatban foglalt pozitiv egész számot, a zérust is ennek tekintve. Ha $p(n+1)$ maga pozitiv egész szám,

$$P_{p(n+1)}=P_{p(n+1)-1}$$

s mindkét tag egymással egyenlő legnagyobb tag.

Az előföltételeknek megfelelőleg a $p(n+1)$ szorzatra mindig áll, hogy

$$0<p(n+1)<n+1.$$

Bodola Lajos.

NÉHÁNY SZÓ A FÖLDRENGÉSÍRÓK MŰKÖDÉSÉRŐL.

A földrengésnek a talajban való tovaterjedésére többféle elméletet állitottak föl, ezek vitatásába bocsátkozni nem érzem magam hivatottnak, de azt hiszem a *földrengésírók czélja* ettől függetlenül *csakis az lehet,* hogy a föld kérgének mozgásait ismeretes erősen nagyított léptékben *lehetőleg hűen* lerajzolják. Csak majd ha lehetőleg hűen kapjuk meg az egyes földrengéseknél hálózatunk minden egyes állomásán a talaj mozgásait, csakis akkor nyerhet a fölállitott elméletek valamelyike teljes bebizonyítást.

Mennyiben felelnek meg e czélnak a különböző rendszerek és vajjon összehasonlíthatók-e a különféle műszerek diagrammjai, ehhez szeretnék kissé hozzászólni.

Kezdem azon tapasztalatok fölsorolásával, a melyek figyelmemet e kérdésre fordították.

Az ó-gyallai observatoriumban már mintegy másfél éve kétféle műszer áll rendelkezésemre a földrengések megfigyeléséhez: a *Bosch*-féle nehéz ingák és egy *Vicentini* inga. A rengéseket rendszerint mind a kettő registrálta, úgy hogy az összehasonlításhoz elég nagy sorozat áll rendelkezésemre.

A *Bosch*-ingák lengésideje $\sim$ 15 sec. a *Vicentinié* $\sim$ 4·5 sec. Már ebből a körülményből is következik, hogy e két földrengésjelző lényegesen különböző adatokat fog szolgáltatni még egy és ugyanazon földrengésről is, mivel a *Bosch*-inga, mint mondani szoktuk, érzékenyebb.

Az itt következő tabellába bevettem egy pár jellemzőbb földrengésnek a kezdetét, a végét, a maximális kilengés idejét és nagyságát és a rengés tartamát. Minden egyes földrengésnél az első vízszintes sorban megadom a *Bosch A* inga (Kelet—Nyugat irányú rengéseket ad) adatait, a másodikban a *Bosch B* ingáét (Észak—Dél irány), a harmadik a *Vicentini A*, a negyedik a *Vicentini B* adatait tartalmazza.

Az egyedüli nagyjából állandó eltérés a két műszer adatai közt csak az, hogy a *Bosch* műszer a földrengés tartamát rendszerint jóval nagyobbnak adja meg, mint a *Vicentini*.

Más szabályfélét az ingák viselkedésére nem lehet fölfedezni. A 2., 4., 5., 6. és 8. számú földrengésnél a *Bosch*-inga mutatott nagyobb maximális amplitudót (gyakran 6—8-szorosát a *Vicentininek*), míg a 3 és 7-nél a *Vicentini* adott nagyobb kilengést. Az 1-nél meg a két maximális amplitudó közel egyenlőnek mutatkozott.

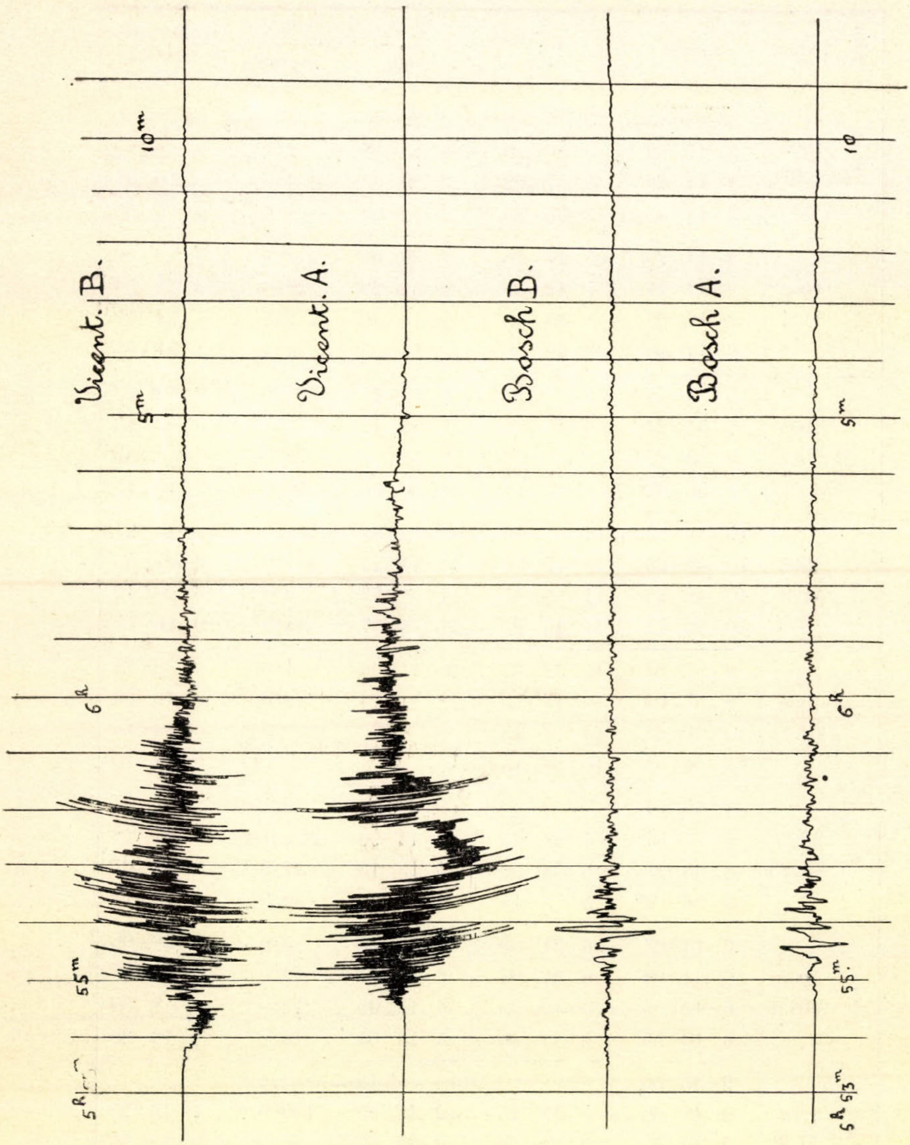
Érdekes az is, hogy a hol nagyobb különbség van a földrengések tartamában, az az által jön létre, hogy a *Vicentini* sokkal hamarabb fejezi be a diagrammírást, a kezdetek valamennyi földrengésnél meglehetősen összeesnek.

Az 1. ábrán a 3. számú földrengés diagrammjait mutatom be, hogy meggyőződhessék az olvasó, hogy a műszerek rendben dolgoznak, és az eltérések köztük nem helytelen kezelésből eredtek.

Hogy mindeme jelenségeket némileg kimagyarázhassuk, szükséges a földrengésírók alapgondolatáig visszamennünk.

Egy teljesen tökéletes (a valóságban persze csak megközelíthető) földrengésíró két részből kell, hogy álljon: egy a talajhoz erősített részből, a mi tehát a talaj összes mozgásait végzi, és egy *fix* részből, a minek egyáltalán nem szabad éreznie a földkéreg mozgásait.

Képzeljünk a talajhoz erősített részen bekormozott papirt, a fixen pedig egy hegyes csúcsot, a mely azt érinti, akkor a csúcs a kormozott papiron a talaj mozgásait fogja lerajzolni. Persze a talaj mozgása a térben bármely irányban történhetik, ezért ennek leirása csakis három komponens által lehetséges, úgy hogy egy földrengésregistráló állomáson háromféle földrengésiróra van szükségünk, a mik közül kettő a horizontális



1. ábra.

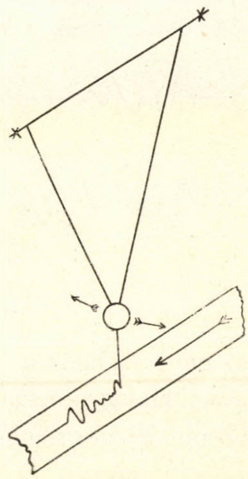
Tabella.

Szám	Datum	Kezdet	Vég	Maximalis kilengés ideje	Maximalis kilengés nagysága	Földrengés tartama
1	1905 I/20	$3^h\ 49^m\ 18^s$	$3^h\ 57^m\ 18^s$	$3^h\ 52^m\ 10^s$	$3 \cdot 0^{mm}$	$0^h\ 8^m\ 00$
		3 47 52	3 56 20	3 53 18	2·0	0 8 28
		3 48 26	3 59 02	3 50 30	4·0	0 10 36
		3 48 45	3 55 35	3 51 00	1·0	0 6 50
2	1905 IV/4	2 11 25	5 15 15	2 36 01	12·0	3 3 50
		2 11 19	5 42 53	2 34 29	28·0	3 31 54
		2 11 25	3 45 45	2 16 35	2·0	1 34 20
		2 11 05	3 42 50	2 14 55	4·1	1 31 45
3	1905 VI/1	5 54 47	6 9 10	5 55 27	21·0	0 14 23
		5 53 22	6 15 07	5 55 42	28·0	0 21 45
		5 54 27	6 6 04	5 56 27	72·0	0 11 37
		5 53 32	6 10 18	5 56 30	46·0	0 16 46
4	1905 VII/9	10 49 25	13 4 48	11 12 32	132·0	2 15 23
		10 49 25	13 17 00	11 11 21	111·0	2 27 35
		10 49 25	11 9 37	11 6 27	9·0	0 20 12
		10 49 25	11 36 20	11 6 57	14·0	0 46 55
5	1905 VII/11	9 57 04	10 32 32	10 11 04	1·0	0 35 28
		9 57 04	10 43 10	10 11 14	2·0	0 46 06
		10 00 35	10 12 45	Mikroseismikus nyugt.		0 12 10
		10 00 35	10 12 45			0 12 10
6	1905 VII/23	3 55 07		toll a dobról leugrott		
		3 55 07	7 22 25	∼4 14 00	igen nagy	3 27 18
		3 55 45	5 54 52	4 13 15	27·0	3 59 07
		3 56 00	5 3 15	4 14 00	30·0	1 7 15
7	1905 VIII/4	6 11 03	6 31 03	6 13 55	5·0	0 20 00
		6 11 03	6 31 03	6 13 55	12·0	0 20 00
		6 10 56	6 19 33	6 13 05	12·0	0 8 37
		6 10 56	6 21 26	6 13 05	15·0	0 10 30
8	1905 IX/8	2 45 00		toll a dobról leugrott		
		2 45 00	3 58 25	∼2 49 25	130·0 ?	1 13 25
		2 46 29	3 06 19	2 49 07	30·0	0 19 50
		2 46 29	3 3 04	2 49 07	43·0	0 16 35

Óraszámitás éjféltől—éjfélig.

komponenseket, (É—D és K—Ny irányba), egy pedig a vertikálisat adja meg.

Minden földrengésíró egy inga, a melynek lengő része nem követi azonnal a föld mozgását. (Lásd 2. ábrát.) Az inga vége vagy közvetlenül, vagy nagyító áttevéssel egy bekormozott papirszalagra ér, a mit bizonyos gyorsasággal elhúznak alatta. Ily módon az inga és papirszalag relativ eltolódásai görbe az ú. n. földrengés-diagramm alakjában lerajzolódnak a kormozott szalagra. Ezen diagrammokból akar az észlelő következtetni a földrengésre.



2. ábra.

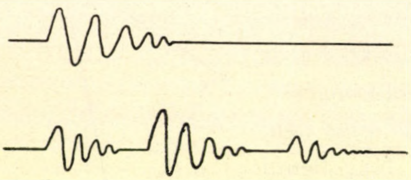
A valóságban *az inga lengő vége* nem fog a földkéreg mozgásától függetlenül állva maradni, hanem valamilyen *többé-kevésbé összetett mozgást végezni,* a mint majd később látni fogjuk, úgy hogy a hozzáerősitett írószerkezet sem írja majd le hűen a földrengést.

Egy egyszerű meggondolás azonnal rávezet erre minket.

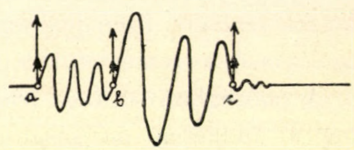
Képzeljük, hogy a földrengés csak egyetlenegy lökésből áll, mit fog a műszer csinálni? Az inga kileng de nem áll meg, hanem a kilengés után rendes lengéseket végez mindaddig, a míg a surlódás meg nem állítja. A diagramm tehát egy folyton kisebbedő amplitudójú sinusvonalból áll, a mint a 3. ábra fölső rajza mutatja. Ha a második lökés már csak ezen saját lengés megszünése után jön, még egy sinusvonalat kapunk és így tovább, a mint a 3. ábra alsó rajzán látható.

Ezen speczialis kivételes esetben tehát még mindig tájékozva vagyunk a lökések erejéről és idejéről.

Ámde, ha a második lökés már akkor jön, a mikor az inga az első után még mozog, akkor ezen újabb lökés vagy még elősegiti az inga mozgását, vagy fékezi, a szerint, a mint ezen új lökés iránya összeesik az inga pillanatnyi mozgásirányával, avagy vele ellenkező. Így például a 4. ábrán: *a*-ban kapta a nyugvó inga az első lökést, kezd mozogni, és még mozgása közben kapja *b*-ben a másodikat oly irányban, hogy az amplitudót még növelte. További mozgása közben *c*-ben egy oly lökést kapott, a mi majdnem megállította. Ha az ilyen lökések időre megegyeznek az inga saját lengésidejével, vagy annak többszörösével, az inga egyre nagyobb és nagyobb lengésbe jön, a míg csak a súrlódás neki határt nem szab.



3. ábra.



4. ábra.

A *Bosch*- és *Vicentini*-ingák különböző, látszólag ellentmondó viselkedése az egyes földrengéseknél ezekből már teljesen kimagyarázható. Ha ugyanis az egyik földrengés lökései olyan egymásutánban jönnek, a mi az előbbi meggondolások alapján nagyon jól egyezik a *Bosch*-inga saját lengésidejével, akkor ennek jóval nagyobb amplitudjai lesznek, mint a *Vicentini*nek. Az ellenkező eset állhat be például egy másik földrengésnél. Előbbire példa a 2., 4., 5., 6. és 8. számú földrengés, utóbbira a 3. és 7.

*

Ezen jelenségek ismertetése után vizsgáljuk az egyes földrengésírókat, mennyiben felelnek meg czéljuknak és mily irányban szorulnak javításra?

Válaszszuk először azon egyszerűbb esetet, hogy fékező erő nincs, és a meglévő kicsi súrlódás csak a műszer saját lengéseit szünteti meg. Egy földrengésjelző ingája többé-kevésbé *kényszerített lengést* végez. Mivel ezen fékezés nélküli kényszerített lengés levezetését lejebb a *Wiechert*-ingánál tárgyalandó elméleti rész (fékezéssel) felöleli, itt csakis a végeredmények és a belőlük levont következtetések elmondására szorítkozom.

Ha *a földrengés lengése sokkalta lassúbb,* mint az inga saját lengése, akkor az inga szabad vége majdnem egyenlő mozgást végez a fölfüggesztési pontjával, egyáltalán nem képez fix pontot, *a mit a műszer nem jelez.*

Ha ellenben *az inga lengése sokkalta lassúbb,* mint a földrengésé, akkor a szabad vége majdnem állva marad, jó fixpontot ad, a *műszer hűen másolja a föld mozgását.*

Czélszerű tehát *minél nagyobb lengésidejű ingát* választanunk, nehogy valamiképen egy túllassú földrengés a műszer adatait teljesen használhatatlanná tegye.

Általában véve még az inga nagyítási fokába is belejön a földrengés periodusa, csakhogy szerencsére ennek befolyása az inga lengésidejének növekedtével igen erősen fogy.

Így például elegendő, ha már csak tízszerte nagyobb az inga saját lengésideje, mint a földrengésé, már akkor a szabad vége majdnem mozdulatlan, körülbelül csak egy századnyi kiütéseit adja a föld mozgásának, úgy hogy a műszer 1% hibával már ezt a földrengést egész hűen írja le.

Megelégedhetünk 4—5% hibával is, erre pedig elegendő, ha a műszer lengésideje csak ötször akkora, mint a leglassúbb földrengésé, a mit még vele észlelni akarunk.

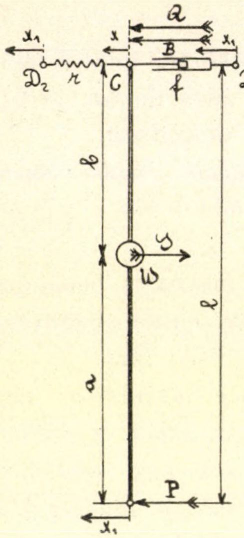
A *Vicentini horizontális* ingák lengésideje 5 sec. körül szokott lenni, tehát az előbbiek szerint hűen csak 1 sec.-ént vagy gyorsabban jövő lökéseket — lengéseket registrál, minden lassúbb mozgást többé-kevésbé eltorzít.

Valamivel jobbak már a *Bosch-ingák,* mert lengésidejüket 15 sec-re szokták venni, úgy hogy a még hűen registrálható földrengés lengésidejének maximális határa itt mégis már 5 sec.

A *Vicentini vertikális lökéseket* jelző műszer meg egyáltalán nem is tekinthető registráló műszernek, mert lengésideje 0·2—1 sec. szokott lenni, úgy hogy ez a mozgásával csak a lökés vagy lökések jelenlétét mutatja, bővebb fölvilágosítást róluk nem ad.

*

Az eddig általánosan legjobbnak ismert *Wiechert*-inga fékezve van. Schémáját az 5. ábra mutatja.



5. ábra.

A csuklóban foroghatóan van fölállítva *l* kar, a mire *a* távolban *W* súly van erősítve.

Az *l* kar végére *c*-ben *r* rúgó van erősítve, a mi megakadályozza, hogy az inga a labil egyensúlyból kijövet fölborulhasson. Ugyanezen pontra van még *f* pneumatikusan fékező henger is erősítve. (Teljesen az önműködő ajtózárók fékeihez hasonló.)

Az ingára hatnak:

a) A földrengés lökésekor ez az *A* pontra *P* erővel hat. Lökés közben az inga alsó vége és a D_1D_2 pontok x_1 távolsággal mennek el a földdel, míg az inga fölső *c* vége csak x-el.

b) A *w* súly a *G* erővel.

c) Az *r* rúgó a *Q* erővel.

d) Az *f* fékező henger a *B* erővel.

Az első fölállitható egyenlet szerint az összes erők eredője egyenlő a mozgó tömeg szorozva a súlypont gyorsulásával.

Vagyis:

$$P - G + Q + B = \frac{w}{g}$$

(súlypont gyorsulás). Itt:

$$G = w \triangle a = - w \frac{x - x_1}{a + b},$$

$$Q = - c(x - x_1)$$

(arányos a rúgó megfeszitésével)

$$B = - d(x' - x'_1)$$

(arányos a fékhenger dugattyújának sebességével)

$$\text{a súlypont gyorsulása} = (ax'' + bx''_1) \frac{1}{a + b} \cdot$$

Az első egyenletünk lesz tehát:

$$P = G - Q - B + \frac{w}{g}(ax'' + bx_1'')\frac{1}{a+b}. \tag{1}$$

A második egyenlet szerint az erőknek a súlypont mint forgástengely körül vett eredő nyomatéka egyenlő az ingának a súlypont körül vett tehetetlenségi nyomatéka szorozva a szöggyorsulással.

$$Pa - Qb - Bb = I_s \text{ (szöggyorsulás)}$$

$$\text{a szöggyorsulás} = \frac{x'' - x_1''}{a+b},$$

úgy hogy a második egyenletünk:

$$P = \frac{I_s}{a}\frac{x'' - x_1''}{a+b} + Q\frac{b}{a} + B\frac{b}{a}. \tag{2}$$

1)-et és 2)-őt egyenlítve és $\frac{w}{g} = M$-et véve, lesz:

$$x'' + \frac{ld\left(1 + \frac{b}{a}\right)}{\frac{I_s}{a} + aM}x' + \frac{\left(c - \frac{w}{a+b} + c\frac{b}{a}\right)l}{\frac{I_s}{a} + aM}x =$$

$$= x_1''\frac{\frac{I_s}{a} - bM}{\frac{I_s}{a} + aM} + \frac{ld\left(1 + \frac{b}{a}\right)}{\frac{I_s}{a} + aM}x_1' + \frac{\left(c - \frac{w}{a+b} + c\frac{b}{a}\right)l}{\frac{I_s}{a} + aM}x_1.$$

De

$$\frac{I_s}{a} + aM = \frac{I}{a} = \frac{M}{a}k_1^2$$

(itt I az A pont körül vett inertianyomaték, k_1 az inertiasugár)

$$\frac{\frac{I_s}{a} - bM}{\frac{I_s}{a} + aM} = 1 - \frac{al}{k_1^2} = e^2,$$

$$\frac{ld\left(1+\frac{b}{a}\right)}{\frac{I_s}{a}+aM}=m^2,$$

$$\frac{\left(c-\frac{w}{a+b}+c\frac{b}{a}\right)l}{\frac{I_s}{a}+aM}=n^2.$$

Ezeket a helyettesitéseket elvégezve:

$$x''+m^2x'+n^2x=e^2x_2''+m^2x_1'+n^2x_1.$$

Az ingával összekötött irótoll azonban a papiron az

$$x-x_1=y$$

relativ elmozdulást fogja rajzolni, és mi ép ennek az összefüggését keressük a föld mozgásával x_1-el.

Ezen helyettesités elvégzése után:

$$y''+m^2y'+n^2y=(e^2-1)x_1'',$$

$$y''+m^2y'+n^2y=-\frac{al}{k_1^2}x_1''. \qquad 3)$$

A föld mozgása egy bizonyos periodikus görbében történik, mivel pedig bármely periodikus görbe szétbontható sinusgörbékre, elegendő, ha az összehasonlitás czéljából tiszta sinusmozgást tételezünk föl a talajnál.

$x_1=A\sin gt$-t helyettesitve:

$$y''+m^2y'+n^2y=aq^2\sin qt, \qquad 4)$$

a hol

$$a=\frac{al}{k_1^2}A. \qquad 4a)$$

Ezen differentiálegyenlet általános megoldása a következő:

$$y=C_1e^{w_1t}+C_2e^{w_2t}-\frac{aq^2}{w_1-w_2}\left(\frac{w_1}{w_1^2+q^2}-\frac{w_2}{w_2^2+q^2}\right)\sin qt-$$

$$-\frac{aq^3}{w_1-w_2}\left(\frac{1}{w_1^2+q^2}-\frac{1}{w_2^2+q^2}\right)\cos qt, \qquad 5)$$

a mihez a w_1 és w_2-őt a

$$w_1 = -\frac{m^2}{2} + \sqrt{\frac{m^4}{4} - n^2}$$

$$w_2 = -\frac{m^2}{2} - \sqrt{\frac{m^4}{4} - n^2} \qquad 5a)$$

egyenletekből kapjuk.

Mivel a w_1 és w_2 vagy negativ vagy complex szám, a két első tag bizonyos idő mulva 0-á válik, úgy hogy, hogy úgy fejezzem ki magam, a műszer megindulása után a földrengést jellemző diagramm egyenlete lesz:

$$y = -\frac{aq^2}{w_1 - w_2}\left(\frac{w_1}{w_1^2+q^2} - \frac{w_2}{w_2^2+q^2}\right)\sin qt -$$

$$-\frac{aq^3}{w_1-w_2}\left(\frac{1}{w_1^2+q^2} - \frac{1}{w_2^2+q^2}\right)\cos qt. \qquad 6)$$

A) Ezen általános megoldásból könnyen áttérhetünk a *Vicentini* és *Strassburgi* ingákra, a miknél nincs fékezés, tehát:

$$m = 0$$

és

$$w_1 = + ni$$

$$w_2 = - ni$$

és

$$y = -a\frac{q^2}{q^2-n^2}\sin qt,$$

$$y = \frac{al}{k_1^2} A \frac{q^2}{n^2-q^2}\sin qt. \qquad 7)$$

Az n az ingánál nem egyéb, mint *a saját lengésének periodusszáma,* mert

$$n^2 = \frac{\left(c - \frac{w}{a+b} + c\frac{b}{a}\right)l}{\frac{I_s}{a} + aM} = \frac{\left(ca - \frac{w}{a+b}a + cb\right)l}{I_s + a^2M},$$

$$n^2 = \frac{\left(cl - \frac{w}{a+b}a\right)l}{I_p} = \frac{\text{forgató nyomaték}}{\text{tehetetlenségi nyomaték}}.$$

Ámde az ingánál a lengésidő:

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\text{tehetetl. nyomaték}}{\text{forgató nyomaték}}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{n^2}},$$

azaz

$$n = \frac{2\pi}{T} \qquad 8)$$

és ez a periodusszám.

A q pedig a földrengés periodusszáma. A 7) egyenletben előforduló

$$\frac{q^2}{n^2 - q^2}$$

tört vagy igen kicsiny lesz, vagy közel -1, a szerint, a mint a földrengés periodusszáma sokkal kisebb az inga saját periodusánál, avagy sokkal nagyobb.

Ha például

$$q = 5n,$$

akkor

$$\frac{q^2}{n^2 - q^2} = -1{\cdot}04 \cong -1,$$

4% hibával, úgy hogy akkor

$$y \cong -\frac{al}{k_1^2} A \sin qt. \qquad 7a)$$

Még nagyobb periodusszámú földrengésnél még kisebb hibával alkalmazható a 7*a*) egyenlet, a mint már ezt előbb a *Vicentini* és *Bosch* ingák tárgyalásánál is mondottuk.

A föld mozgása és a diagramm közt, a mint a 7*a*) egyenlet tanusítja, *180° fáziseltérés van,* a mi azt mondja, hogy például N—S irányú lökésnél az inga látszólagos kiütése S—N irányban észlelhető.

*

B) Ha mi az ingát fékezzük, akkor $n \neq 0$, és az 5*a*) egyenletből w_1 és w_2 vagy komplex értékek avagy két egyenlő vagy nem egyenlő reális számok, a szerint, a mint az $\frac{m^4}{2} - n^2$ discriminans negativ érték, nulla vagy positiv érték.

1. Vegyük az első esetet, a mikor

$$n > \frac{m^2}{2} > 0,$$

akkor, ha $\frac{m^2}{2} = a$

$$\sqrt{\frac{m^4}{4} - n^2} = bi,$$

$$w_1 = -a + bi,$$
$$w_2 = -a - bi.$$

Ezeket 6)-ba helyettesítve, a diagrammra

$$y = -aq^2 \frac{-2a^2 + (a^2 - b^2 + q^2)}{(a^2 - b^2 + q^2)^2 + 4a^2b^2} \sin qt -$$
$$- aq^3 \frac{2a}{(a^2 - b^2 + q^2)^2 + 4a^2b^2} \cos qt$$

adódik.

2. A második esetben:

$$\frac{m^2}{2} = n^2.$$

A discriminans nulla, tehát:

$$w_1 = -\frac{m^2}{2} = -a$$

$$w_2 = -\frac{m^2}{2} = -a$$

és

$$y = -aq^2 \frac{-a^2 + q^2}{(a^2 + q^2)^2} \sin qt -$$

$$- aq^3 \frac{2a}{(a^2 + q^2)^2} \cos qt.$$

3. És végre, ha

$$n < \frac{m^2}{2} < \infty$$

a discriminans positiv, és ha

$$\frac{m^2}{2} = a,$$

$$\sqrt{\frac{m^4}{4} - n^2} = b,$$
$$w_1 = -a + b,$$
$$w_2 = -a - b,$$

akkor

$$y = -aq^2 \frac{-2a^2+(a^2+b^2+q^2)}{(a^2+b^2+q^2)^2-4a^2b^2} \sin qt -$$
$$- aq^3 \frac{2a}{(a^2+b^2+q^2)^2-4a^2b^2} \cos qt.$$

Végeredményképen kimondhatjuk, hogy *ha az ingát fékezzük, általában* nemcsak az amplitudja függ a fékező erő nagyságától, hanem *mindig egy bizonyos 180°-tól különböző phazis-eltérés is fog létrejönni* (a mely még függ a földrengés periodusszámától is) *a föld mozgása és a lerajzolt diagramm közt.* A Wiechert-ingánál tehát, a mellett, hogy lengésidejét lehetőleg nagyra veszszük, még ajánlatos a fékezést is nem tulságosan alkalmazni, mert az ú. n. agyonfékezés nagyon meghamisítja a diagrammot.

*

Hátra van még az n és m értékek kisérleti meghatározása egy bizonyos ingánál.

Az ingát lengésbe hozzuk és megfigyeljük az *első* és n-ik amplitudót (h_1 és h_n), akkor

$$\tfrac{1}{2}(dl)\, T_1 = \frac{\log h_1 - \log h_n}{(n-1)\log e}$$

itt T_1 az inga lengésideje az észlelés alatt (tehát a fékező erő befolyásával).

Ebből

$$dl = \frac{2}{T_1} \frac{\log h_1 - \log h_n}{(n-1)\log e}. \qquad 10)$$

A fékezés nélküli lengésidő:

$$T = \frac{T_1}{1 + \frac{1}{8} d^2 l^2 \frac{T_1^2}{\pi^2}},$$

n-re tehát az észlelésből kapjuk:

$$n = \frac{2\pi}{T_1}\left(1 + \tfrac{1}{8} d^2 l^2 \frac{T_1^2}{\pi^2}\right). \tag{11}$$

Áll továbbá

$$m^2 = \frac{ld\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)}{\dfrac{I_s}{a} + aM} = \frac{ld(a+b)}{I_s + a^2 M} = \frac{l^2 d}{I},$$

$$n^2 = \frac{cl^2 - wa}{I}.$$

A két egyenlet osztva:

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{l^2 d}{cl^2 - wa}$$

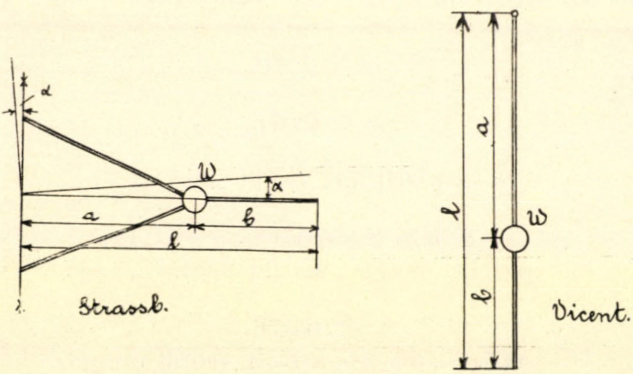
és ebből

$$m^2 = n^2 \frac{l^2 d}{cl^2 - wa}. \tag{12}$$

Mindezen levezetések érvényesek a fékezett *Strassburgi* vagy *Vicentini* ingákra is.

A *Strassburgi* ingánál azonban irandó:

$cl^2 - wa$ helyett .... $aw \sin \alpha$
a *Vicentininél* pedig .... aw.



6. ábra.

Az egyes betűk jelentését a 6. ábra adja.

*

Következik egy pár számpélda, hogy a fékezés befolyását az inga mozgására tisztán láthassuk.

Legyen az inga lengésideje:

$$T = 18{\cdot}8 \text{ sec,}$$

úgy hogy

$$n = \frac{2\pi}{18{\cdot}8} = \frac{1}{3}.$$

Ha a föld mozgására az

$$x_1 = 1 \,.\, \sin 2t$$

egyenletet veszszük föl, akkor

$$A = 1 \text{ mm,}$$
$$q = 2 \text{ «}$$

1. Ha nincs fékezés, a diagramm egyenlete 7)-ből:

$$y = \frac{al}{k_1^2} \frac{4}{\frac{1}{9}-4} \sin 2t = - a \,.\, 1{\cdot}03 \sin 2t,$$

vagy 3% hibával

$$y \cong - a \sin 2t$$

a phasiseltérés tehát 180°.

2. Ha az ingát fékezzük, még pedig a *B)* 1. eset szerint úgy, hogy például

$$m = 0{\cdot}39,$$

akkor

$$a = 0{\cdot}076,$$

$$bi = \sqrt{(0{\cdot}076)^2 - 0{\cdot}111} = 0{\cdot}324 i$$

és

$$y = -a \,.\, 4 \frac{-2 \,.\, 0{\cdot}076^2 + (0{\cdot}076^2 - 0{\cdot}324^2 + 4)}{(0{\cdot}076^2 - 0{\cdot}324^2 + 4)^2 + 4 \,.\, 0{\cdot}076^2 \,.\, 0{\cdot}324^2} \sin 2t -$$

$$- a \,.\, 8 \frac{2 \,.\, 0{\cdot}076}{(0{\cdot}076^2 - 0{\cdot}324^2 + 4)^2 + 4 \,.\, 0{\cdot}076^2 \,.\, 0{\cdot}324^2} \cos 2t$$

és a kiszámítás után

$$y = - a \,.\, 1{\cdot}02 \sin 2t - a \,.\, 0{\cdot}08 \cos 2t.$$

3. A *B)* 2. esetben:

$$m = 0{\cdot}817$$

és

$$a = 0{\cdot}33,$$

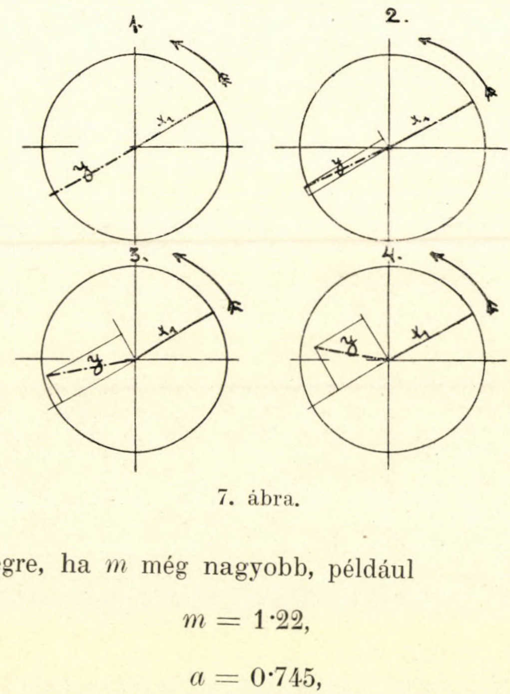
úgy hogy

$$y = -a\,.\,4\,\frac{-(0{\cdot}33)^2+4}{[(0{\cdot}33)^2+4]^2}\sin 2t -$$

$$-a\,.\,8\,\frac{2\,.\,0{\cdot}33}{[(0{\cdot}33)^2+4]^2}\cos 2t,$$

tehát

$$y = -a\,.\,0{\cdot}92\sin 2t - a\,.\,0{\cdot}316\cos 2t.$$



7. ábra.

4. És végre, ha m még nagyobb, például

$$m = 1{\cdot}22,$$

akkor

$$a = 0{\cdot}745,$$

$$b = 0{\cdot}666$$

és

$$y = -a\,.\,4\,\frac{-2\,.\,0{\cdot}745^2+(0{\cdot}745^2+0{\cdot}666^2+4)}{(0{\cdot}745^2+0{\cdot}666^2+4)^2-4\,.\,0{\cdot}745^2\,.\,0{\cdot}666^2}\sin 2t-$$

$$-a\,.\,8\,\frac{2\,.\,0{\cdot}745}{(0{\cdot}745^2+0{\cdot}666^2+4)^2-4\,.\,0{\cdot}745^2\,.\,0{\cdot}666^2}\cos 2t,$$

tehát

$$y = -a \,.\, 0{\cdot}65 \sin 2t - a \,.\, 0{\cdot}496 \cos 2t.$$

A 7. ábra ezen négy esetben megadja a földrengésnek és diagrammjának vektorait azon esetre, ha $a = 1$, azaz az inga végpontja percussiós pont.

A mint látható, a diagramm a 2—4 esetekben 180°-nál kisebb pházissal siet előre.

Büky Aurél.

A HULLÓCSILLAGOK RADIACZIÓS PONTJAINAK KISZÁMÍTÁSA.

A hullócsillagok eredetére vonatkozó, még ma sem tisztázott kérdések adtak nagy lendületet az astronomia azon ágának, mely a hullók látszópályájának pontos meghatározását czélozza s az utóbbi évtizedekben örvendetes positiv eredményekhez is vezetett. Nevezetesen e látszó pályákat a feltünés- és eltünés-pontot összekötő legnagyobb köríveket, egy, e czélra készült térképbe rajzolván azon tapasztalatra jutunk, hogy a hullók rajokban az ég egyes pontjaiból látszanak kiindulni. E pontok az egyes rajok radiacziós pontjai. Bármily gonddal történjék is a legalkalmasabb projekcziókba a látszópályák pontos berajzolása, a nagy észlelési hibák s egyéb a radiacziós pontokra vonatkozó előitéletek folytán a sugárzási pontok felkeresésében igen önkényesen járhatunk el. A tapasztalat beigazolja, hogy igen nagyszámú radiacziós pont vehető fel még egy estén végzett, terjedelmes észlelési anyagra is.

E közlemény czélja az egy helyen végzett hullóészlelések feldolgozására oly módszereket nyujtani, melyek a grafikus eljárásban rejlő önkényes feltevéseket kizárják. Ily módszerek csakis számitáson alapulhatnak melynél minden megfigyelésnek egyforma fontosságot tulajdonitunk. Hogy a számitási módszerek előnyét átláthassuk, ismertetem azon eljárásokat is, melyek a grafikus úton nyert közelitő radiansokat valószinű sugárzó pontokká dolgozzák fel.

A látszópályák berajzolása útján nyert kezdetleges radiansokból egy vagy több valószinű radianst vezethetünk le. Össze-vonhatunk oly pontokat, melyeknek megfelelő coordinatái között nem nagy különbségek merülnek fel.

Legyenek az egyesíthető radiansok coordinatái: a_1, δ_1; a_2, δ_2; ... a_m, δ_m, e sugárzópontokat nyujtó hullók száma n_1, $n_2, \ldots, n_m$, akkor e pontokból nyerhető valószinű radians coordinatáit:

$$a = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + \cdots + n_m a_m}{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}$$
$$\delta = \frac{n_1 \delta_1 + n_2 \delta_2 + \cdots + n_m \delta_m}{n_1 + n_2 + \cdots + n_m} \tag{1}$$

képleteket nyujtják.

Sokkal természetesebb a valószinű radianst egy sokszög csúcspontjait képező kezdetleges radiansokból a következő eljárással számítani.

Az i-dik és a valószinű radians között levő sphærikus távolság legyen σ_i, ennek súlya n_1, akkor

$$n_i \cos \sigma_i = n_i [\sin \delta_i \sin \delta + \cos \delta_i \cos \delta \cos (a_i - a)]. \tag{2}$$

Nem lehetne-e (a, δ) valószinű radianst úgy meghatározni, hogy $\sum_{i-1}^{m} n_i \sigma_i = 0$ legyen? E feltétel elég helyes meghatározását adja (a, δ) pontnak, s közelítőleg kielégítik azon pontok, melyeknél

$$f = \frac{1}{n_1 + n_2 + \cdots + n_m} \sum_{i=1}^{m} n_i \cos \sigma_i \tag{3}$$

a legnagyobb értéket veszi fel. Ily (a, δ) pont csak akkor van, ha

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \delta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial \delta}\right)^2 < 0 \tag{4}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} < 0.$$

A (4) alatti két egyenletet

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \sin\alpha_i \cos\delta_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i \cos\alpha_i \cos\delta_i},\\ \operatorname{tg}\delta &= \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \sin\delta_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i \cos\delta_i \cos(\alpha-\alpha_i)}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

egyenletnek megoldásai elégítik ki. A (4) alatti egyenlőtlenségek és $\sum_{i=1}^{m} n_i\sigma_i = 0$ rámutatnak azon észlelésekre, melyek vagy nagyon hibásak, vagy más radianshoz tartoznak.

Az (1) és (5) alatti egyenletek alapján szokás a grafikus eljárás adatait egyesiteni. Mindkét esetben az egyesithető pontok megválasztásában igen nagy önkénynek van helye, s nem egészen jogos az egyes pontoknak különböző súlyt tulajdonitanunk.

E hátrányok nincsenek meg a következő számítási módszerekben. Minden egyes észlelésnek egyenlő fontossága van.

Kiindulunk a gömbháromszög alaptételéből. Ha F, G, H egy és ugyanazon legnagyobb kör pontjai, P a gömbfelület tetszőleges pontja, akkor a (GH), (HF), (FG) és a (PF), (PG), (PH) szögekre, legnagyobb körívekre áll:

$$\cos(PF)\sin(GH) + \cos(PG)\sin(HF) + \cos(PH)\sin(FG) = 0. \quad (6)$$

Legyenek valamely hulló kezdőpontjának (I) coordinatái α_1, δ_1; végpontjáé (II) α_2, δ_2; α, δ (0) a radianséi, P az æquator polusa, akkor a (6) értelmében:

$$\sin\delta_1 \sin(20) + \sin\delta_2 \sin(01) + \sin\delta \sin(12) = 0, \quad (7)$$

minthogy (I), (II), (0) egy és ugyanazon legnagyobb kör pontjai. E három pont és P által képezett gömbháromszögekből pedig:

$$\frac{\sin(20)}{\sin(\alpha_2-\alpha)}=\frac{\cos\delta}{\sin(P\,\mathrm{II}\,0)};\quad \frac{\sin(12)}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}=\frac{\cos\delta_1}{\sin(P\,\mathrm{II}\,0)}$$

$$\frac{\sin(01)}{\sin(\alpha-\alpha_1)}=\frac{\cos\delta}{\sin(P\,\mathrm{I}\,0)}=\frac{\cos\delta\cos\delta_1}{\cos\delta_2\sin(P\,\mathrm{II}\,0)}. \tag{8}$$

A (8) folytán a (7)-re a következő alakot nyerjük:

$$\operatorname{tg}\delta_1\sin(\alpha_2-\alpha)+\operatorname{tg}\delta_2\sin(\alpha-\alpha_1)+\operatorname{tg}\delta\sin(\alpha_1-\alpha_2)=0. \tag{9}$$

Ha az egy este észlelt hullók ugyanazon (α, δ) radianshoz tartoznának és az észlelések is tökéletesek volnának, akkor minden egyes hullóra a (9) szigorúan érvényesülne. A valóságban (9) zérustól különböző értéket mutat. Az (α, δ) pont mindazon hullók radiansának tekinthető, melyekre

$$F=\Sigma\,[\operatorname{tg}\delta_1\sin(\alpha_2-\alpha)+\operatorname{tg}\delta_2\sin(\alpha-\alpha_1)+ \\ +\operatorname{tg}\delta\sin(\alpha_1-\alpha_2)]^2=\text{minimum} \tag{10}$$

és ez a minimum közel zérus. Itt Σ az észlelt hullók számára vonatkozik.

Ha

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\delta_1\cos\alpha_2-\operatorname{tg}\delta_2\cos\alpha_1&=P,\\ \operatorname{tg}\delta_1\sin\alpha_2-\operatorname{tg}\delta_2\sin\alpha_1&=Q,\\ \sin(\alpha_1-\alpha_2)&=S\end{aligned} \tag{11}$$

jelzéseket használunk, akkor csakis oly (α, δ) pont tesz (10)-nek eleget, melyre

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=(\Sigma Q^2-\Sigma P^2)\frac{\sin 2\alpha}{2}+(\Sigma PQ)\cos 2\alpha+ \\ +[(\Sigma PS)\cos\alpha+(\Sigma QS)\sin\alpha]\operatorname{tg}\delta=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial\delta}=(\Sigma QS)\cos\alpha-(\Sigma PS)\sin\alpha+(\Sigma S^2)\operatorname{tg}\delta=0; \tag{12}$$

avagy

$$\operatorname{tg}2\alpha=2\frac{\Sigma PS\Sigma QS-\Sigma PQ\Sigma S^2}{(\Sigma Q^2-\Sigma P^2)\Sigma S^2+(\Sigma PS)^2-(\Sigma QS)^2}$$

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{\sin\alpha\Sigma PS-\cos\alpha\Sigma QS}{\Sigma S^2} \tag{13}$$

és

$$\frac{\partial^2F}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2F}{\partial\delta^2}-\left(\frac{\partial^2F}{\partial\alpha\partial\delta}\right)^2>0$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial\alpha^2}>0.$$

Ha az összes hullókra alkalmazzuk (10)-t, akkor a (13) egyenlőtlenségek alapján és azon feltételből, hogy a minimum közel zérus, a nem használható hullóészleléseket kivethetjük, esetleg ezekre egy más radianst vezethetünk le ugyanezen módon. Több ily számítás alapjául szolgáló módszer kereshető. Némely tekintetben az előbbinél egyszerűbb a következő: Legyenek 1, illetve 1′ egy hulló kezdő, illetve véghelyzetei; 2, illetve 2′ egy második hullóié, akkor mindenekelőtt világos, hogy e négy pont coordinatái egyértelműleg megadják a két hulló látszópályája által bezárt σ_1 szöget. Ha a megfigyelések tökéletesek volnának és az észlelt hullók mind egy radianshoz tartoznának, akkor mindannyi az előbbi két hulló metszéspontjából indult volna ki, mint radiansból. A nagy megfigyelési hibák miatt csak közelítőleg kapjuk meg a radianst, (α, δ) pontot. Ez az (α, δ) pont igen jól meghatározott, ha

$$\Sigma(\sigma_1-\sigma_1')^2 = \text{minimum},$$

avagy

$$\Sigma\left(\frac{1}{\sin\sigma_1}-\frac{1}{\sin\sigma_1'}\right)^2 = \text{minimum}, \tag{14}$$

a hol σ_1 az (1, 1′, 2, 2′) pontok által meghatározott mennyiség, σ_1' pedig az $\big((\alpha, \delta), 1, 2\big)$ pontok által definiált érték.

Minthogy (14)-nek (α, δ) függvényeként való kifejtése hosszadalmas számítással jár, azért egyszerűbb és (14)-el egyértelmű követelést állítunk fel. Ha az észlelések hibátlanok volnának, akkor

$$\cos\delta\sin(\alpha_2-\alpha) = \frac{1}{\sin\sigma_1}\sin(1'12)\sin(12)\sin(P22') = s \tag{15}$$

teljesülne két-két hullóra. Minthogy ez nem történik meg, az (α, δ) radians jól lesz meghatározva, ha a hibák négyzete minimum és e minimum közel zérus, azaz:

$$\Phi = \Sigma[\cos\delta\sin(\alpha_2-\alpha)-s]^2 = \text{minimum}. \tag{16}$$

Ha

$$\sin\alpha_2 = p, \quad \cos\alpha_2 = q,$$

$$\frac{1}{\sin\sigma_1}\sin(1'12)\sin(12)\sin(P22') = s,$$

akkor $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \delta} = 0$ egyenletek a következő alakot veszik fel:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \Sigma [(p \cos \alpha - q \sin \alpha) \cos \delta - s] (p \sin \alpha + q \cos \alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \Sigma [(p \cos \alpha - q \sin \alpha) \cos \delta - s] (p \cos \alpha - q \sin \alpha) = 0,$$

avagy:

$$\{(\Sigma p^2 - \Sigma q^2) \sin \alpha \cos \alpha + \Sigma pq (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\} \cos \delta =$$
$$= (\Sigma ps) \sin \alpha + (\Sigma qs) \cos \alpha,$$
$$\{\cos^2 \alpha \Sigma p^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \Sigma pq + \sin^2 \alpha \Sigma q^2\} \cos \delta =$$
$$= \sin \alpha \Sigma qs + \cos \alpha \Sigma ps. \qquad (17)$$

E két egyenlet osztása és kellő rendezés után a valószínű radians jellemzőit:

$$\frac{\Sigma pq \Sigma qs - \Sigma q^2 \Sigma ps}{\Sigma ps \Sigma pq - \Sigma p^2 \Sigma qs} \operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\Sigma pq \Sigma qs - \Sigma q^2 \Sigma ps}{\Sigma ps \Sigma pq - \Sigma p^2 \Sigma qs} \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0 \qquad (18)$$

$$\cos \delta = \frac{\sin \alpha \Sigma ps + \cos \alpha \Sigma qs}{\sin \alpha \cos \alpha (\Sigma p^2 - \Sigma q^2) + \cos 2\alpha \Sigma pq}$$

egyenletek adják, melyek második és

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\Sigma ps \Sigma pq - \Sigma p^2 \Sigma qs}{\Sigma pq \Sigma qs - \Sigma q^2 \Sigma ps} \qquad (19)$$

adják (α, δ) radianst.

E módszerek bármelyike kétségtelenül hosszas számítást kiván, de feltétlenül jobb eredményekhez vezetnek többszörös alkalmazással, mint a grafikus eljárás. Ha a számításhoz szükséges táblázatok állanak rendelkezésünkre, semmivel sem járnak nagyobb fáradsággal a térképbe rajzolásnál.

Hogy az első módszer használhatóságáról meggyőződjem, 1903 jul. 28-án Ó-Gyallán észlelt 59 hullót feldolgoztam. Két, már nagy körültekintéssel meghatározott, radianshoz jutottam.

E hullók adatait az I. táblázat tartalmazza; az első rovat a hulló sorszámát, a második a megfigyelési időt, a harmadik, illetve negyedik a feltünés-, illetve eltünés-pont coordinatáit.

I. Táblázat. 1903. jul. 28-án Ó-Gyallán észlelt hullók.

Sorszám	Megfigyelési csillagidő	Kezdet α	Kezdet δ	Vég α	Vég δ
1.	$17^h\ 32^m\ 56^s$	305°.5	64°.2	315°.4	62°.8
2.	34 42	265.7	20.0	211.8	3.8
3.	36 39	34.7	80.1	25.3	72.4
4.	42 54	300.7	57.6	341.2	50.0
5.	45 18	315.4	65.4	324.0	70.2
6.	45 37	282.4	34.5	259.1	15.5
7.	47 04	162.9	63.1	128.8	58.8
8.	48 32	350.9	52.0	355.4	49.1
9.	18 13 10	307.3	70.9	268.7	82.9
10.	13 25	137.1	54.8	112.2	54.9
11.	14 54	213.6	19.1	207.4	19.3
12.	15 39	224.6	35.8	216.9	26.2
13.	17 16	303.2	40.1	320.9	34.4
14.	23 14	307.8	59.9	312.1	73.2
15.	24 41	275.8	28.9	286.1	42.2
16.	26 53	222.7	74.1	179.9	67.6
17.	27 24	287.9	—8.3	275.8	—20.1
18.	30 37	310.0	35.2	312.4	58.6
19.	36 41	281.0	30.9	263.1	41.6
20.	37 23	209.0	30.8	201.4	26.1
21.	37 38	286.5	29.7	279.4	47.9
22.	37 46	22.7	69.8	40.9	71.1
23.	38 23	304.5	74.9	62.9	85.2
24.	41 07	273.1	43.0	278.4	42.0
25.	45 16	211.6	30.1	195.1	32.9
26.	47 33	274.6	27.7	262.0	40.5
27.	51 55	180.6	69.2	191.4	48.6
28.	53 16	352.2	41.3	6.9	46.4
29.	56 04	359.5	70.2	11.3	67.0
30.	59 06	195.2	30.1	187.2	29.9
31.	19 03 08	247.0	50.2	250.8	57.6
32.	10 06	320.7	19.5	340.9	27.1
33.	12 52	241.0	22.7	241.0	12.2
34.	15 09	240.0	70.0	216.6	69.1
35.	16 33	283.7	56.2	261.4	59.8
36.	22 24	359.5	43.0	12.8	43.1
37.	22 26	282.9	33.0	260.4	42.0
38.	27 01	279.7	—5.2	269.5	—13.9
39.	31 50	337.6	11.5	352.3	24.2
40.	34 36	297.1	13.0	292.6	32.9
41.	36 48	266.7	9.3	263.9	—0.5

Sorszám	Megfigyelési csillagidő	Kezdet α	Kezdet δ	Vég α	Vég δ
42.	$37^m\ 56^s$	277°3	42°9	268°6	35°2
43.	39 11	348.3	41.0	355.4	42.4
44.	41 28	271.7	71.5	225.9	75.4
45.	42 16	261.9	3.5	257.7	1.2
46.	42 38	239.9	9.9	235.2	—0.4
47.	45 27	0.1	16.9	353.9	4.9
48.	47 02	173.8	54.0	187.2	43.0
49.	52 06	241.9	23.9	240.3	22.5
50.	53 41	239.4	83.3	30.5	77.6
51.	20 04 11	264.7	38.0	270.4	50.8
52.	05 40	32.7	61.2	40.5	61.7
53.	05 42	28.1	69.3	38.6	65.8
54.	07 16	204.4	48.7	201.4	49.5
55.	07 39	292.3	38.1	265.1	13.4
56.	10 43	303.6	10.1	3.0	16.5
57.	10 46	344.9	42.3	346.3	25.1
58.	14 06	325.9	10.3	328.3	—6.9
59.	16 11	267.9	10.5	268.9	7.6

Ezen 59 hulló közül 3, 5, 9, 11, 14, 17—20, 22—25, 28, 30, 34—39, 43, 47, 48, 51, 52, 56—59. I. radianshoz tartoznak; az 1, 2, 4, 6—8, 10, 12, 13, 15, 16, 21, 26, 27, 29, 31—33, 40—42, 44—46, 49, 50, 53—55. a II. radianst adják. E csoportosításra a fejtegetett kritériumok vezettek. Úgy a feltételi egyenletek, mint a radians definitiója, a kérdéses összeg minimuma e csoportosítások esetében zérus.

Az első esetben

$$\Sigma PQ = -109.98,\ \Sigma QS = -11.23,\ \Sigma PS = 6.74,\ \Sigma P^2 = 73.48,$$
$$\Sigma Q^2 = 279.4,\ \Sigma S^2 = 8.47\,;$$

ez értékekhez tartozó radians (I) coordinatái pedig:

$$\alpha = 28^\circ,\quad \delta = 56^\circ.$$

Julius 26-án a Perseidák látszó radiansának æquatoriális coordinatái:

$$\alpha = 27{\overset{\circ}{.}}0,\quad \delta = 55{\overset{\circ}{.}}0.$$

Tekintetbe vévén, hogy a Föld mozgása következtében a radians is megváltoztatja helyét, a felmerülő különbség ily csekély számú hulló esetén elenyésző, az egyezés kitünő.

A második esetben:

$$\Sigma PQ = 95.22, \quad \Sigma QS = 0.31, \quad \Sigma PS = 0.28, \quad \Sigma P^2 = 117.13,$$
$$\Sigma Q^2 = 83.16, \quad \Sigma S^2 = 4.60;$$

belőlük számítható radians coordinatái pedig:

$$\alpha = 314^\circ.0, \quad \delta = 89^\circ.8.$$

ZEZIOLI megfigyeléseiből pedig SCHIAPARELLI jul. 24—aug. 11-ig hulló rajra

$$\alpha = 315^\circ.0, \quad \delta = 87^\circ.0$$

radianst találja. Az egyezés ismét igen jó.

E kevés anyag feldolgozása is mutatja, hogy e számítási módszerekre fordított fáradság sokkal nagyobb haszonnal jár, mint a grafikus eljárás.

Terkán Lajos.

MEGOLDOTT FELADATOK.

32. (30.) *Adva van valamely ellipszis és ennek egy tetszőleges húrja. Megszerkesztendők e húrt érintő körök közül azok, melyek az ellipszist kettősen érintik.* (Szépréthy.)

Első megoldás Csillag Vilmos, műegyetemi tanársegédtől.

Jelen megoldás a de la Gournerie «Traité de géom. descr.» 1891. Livre IV. p. 154., továbbá Fiedler «Darst. Geom.» 1885. II. köt. 381—383. lapjain foglaltakból keletkezett.

Ezek alapján ismeretesnek tételezem föl:

1. hogy az ellipszist kettősen érintő körök összessége két rendszerre oszlik: az $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{egyik}}{\text{másik}}$ rendszert alkotó körök középpontjai a $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{nagy}}{\text{kis}}$ tengelyben feküsznek. A gyújtópontok (két $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{valós}}{\text{konjugált képzetes}}$ a $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{nagy}}{\text{kis}}$ tengelyben) a kettősen érintő körök határesetei;

2. a megadott ellipszis tengelyeire vonatkoztatott egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{I}$$

lévén, az első rendszerbe tartozó körök *tetőpontjai** az

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{II}$$

ellipszisben, a másik rendszerben foglalt körök *szélsőpontjai** az

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-b^2}=1 \tag{III}$$

hiperbolában feküsznek.

Képezzük le immár a (II) ill. (III) kúpszeletet *affin*-módon úgy, hogy x ill. y-tengely legyen az affinitás tengelye és az x ill. y-tengelyre merőleges húrok — nagyságukat változatlanul megtartva, a feladatban megadott (g*)

* *Tető-* ill. *szélső* pontok alatt azok értendők, melyekben az érintő az x- ill. y-tengelylyel párhuzamos.

egyenesre merőleges helyzetbe jussanak. Az ekkép keletkező (II*) ill. (III*) kúpszeletek metszik ki a megadott (g^*) egyenesből ennek érintési pontjait a kivánt körökkel, mely körökről azonkívül ismeretes, hogy középpontjaik az adott (I) ellipszis nagy ill. kis tengelyében vannak.

A tényleges konstruktiv kivitelnél czélszerű lesz, ha a fönt jellemzett affinitással megszerkesztjük a (g^*) egyenes homologját a (II) ill. (III) kúpszelet rendszerében, mert az így származó (g_2) ill. (g_3) egyenes metszése a (II) ill. (III) kúpszelettel a keresett körök egy-egy tető- ill. szélső pontját szolgáltatja.

A (II*) és (III*) kúpszeletek érintik az (I) ellipszist azon átmérő végpontjaiban, mely a megadott (g^*) egyenes irányához konjugált és látnivaló, hogy a feladatnak *általánosságban két valós és két képzetes megoldása* van; abban az esetben, ha (g^*) érinti az (I)-et, két-két összeeső valós megoldást nyerünk. Végre megemlítendő, hogy a szerkesztés egész hasonlóan végezhető akkor is, midőn a feladatban ellipszis helyett hiperbola vagy parabola adatik meg. Ha (I) hiperbola, akkor (II) és (III) szintén hiperbolák; ha (I) parabola, akkor csak (II) marad meg parabola alakjában.

Második megoldás dr. Szabó Péter főgimnáziumi tanár úrtól Budapesten.

1. A következő, általánosabb feladattal foglalkozom előbb. *Keressük annak a kúpszeletnek egyenletét, a mely a*

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0$$

*kúpszeletek mindegyikét kettősen érinti.**

Ha a két érintéshúr egyenlete rendre:

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0,$$

akkor a keresett kúpszelet egyenlete a

$$\begin{aligned} K &\equiv \mu K_1 - l_1^2 = 0, \\ K &\equiv \nu K_2 - l_2^2 = 0 \end{aligned} \qquad 1)$$

alakokban írható, a hol μ, ν állandó szorzók. Vegyük még segítségül a K_1 és K_2 közös húrjainak kettejét; ha ezeknek egyenletei:

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0,$$

akkor meghatározható λ úgy, hogy

$$K_1 - \lambda K_2 = e_1 e_2 \qquad 2)$$

* Az alkalmazott módszerre v. ö. Salmon-Fiedler: Kegelschnitte V. Aufl. II. 552. l.

azonosan álljon fenn. 2)-ből az 1) egyenletek közül az elsőbe írjuk be K_1 kifejezését. Akkor a két egyenlet összehasonlítása révén nyerjük

$$\nu = \mu\lambda, \qquad 3)$$
$$l_1^2 - \mu e_1 e_2 = l_2^2.$$

Ez utolsó egyenlet még így írható

$$l_1^2 - l_2^2 = \mu e_1 e_2,$$

a honnan l_1 és l_2 meghatározható. A két oldalon a szembeötlő lineár tényezők egyenlítéséből:

$$l_1 + l_2 = \mu e_1,$$
$$l_1 - l_2 = e_2;$$

és

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \tfrac{1}{2}(\mu e_1 + e_2), \\ l_2 &= \tfrac{1}{2}(\mu e_1 - e_2). \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Az egyenlő lineár tényezők lehetséges különböző választása csak a jelölésben okoz eltérést.

Ezek után a keresett kúpszelet egyenlete (még egy számbeli állandóval szorzottan) a következő azonos alakokban írható:

$$\left.\begin{aligned} 4\mu K_1 - (\mu e_1 + e_2)^2 &= 0, \\ 4\mu\lambda K_2 - (\mu e_1 + e_2)^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Vagy még 2) felhasználásával, a következő szimmetrikusabb formában:

$$\mu^2 e_1^2 - 2\mu(K_1 + \lambda K_2) + e_2^2 = 0. \qquad 5a)$$

Miután μ egészen tetszés szerinti mennyiség és az egyenlet μ-ben másodfokú, a kúpszelet nem határozott és a sík minden pontján kettő megy keresztül.

Az is látható, hogy *az érintéshúrok a közös húrokkal harmonikusan konjugált sugarak.*

2. A kitűzött feladat megoldására jutunk, ha az egyik kúpszelet egyenes párrá fajul el.

Ugyanis ismeretes, hogy az ellipszist kettősen érintő körök középpontjai a nagytengelyen feküsznek. Tehát, ha egy húrt érintenek, akkor érintik annak a nagytengelyre vett tükörképét is. Ezt az egyenespárt tekintjük a második, elfajult kúpszeletnek. Legyen az ellipszis egyenlete:

$$K_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad 6)$$

Ha a húr egyenlete normál alakban:

$$h \equiv x \cos\varphi + y \,.\, \sin\varphi - d = 0;$$

akkor e húrt és tükörképét előállítja:

$$K_3 \equiv (x \cos \varphi - d)^2 - y^2 \sin^2 \varphi = 0. \tag{7}$$

Az előbb mondottak szerint, szükséges λ-t úgy meghatározni, hogy

$$K_1 - \lambda K_2 = 0 \tag{8}$$

két lineár tényezőre legyen szétbontható. Ilyen λ érték általában három, specziális esetünkben kettő van, t. i.:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{b^2 \sin^2 \varphi}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi - d^2}.$$

Miután kettősen érintő kör érintéshúrja úgy az ellipszissel, mint az egyenes-párral párhuzamos a kis tengelylyel, azt az értéket kell λ számára választanunk, a melyet beírva, a 8) baloldala csupán x-től függ. Ilyen pedig csak λ_1.*

Feltéve, hogy a h egyenes valóban metszi az ellipszist, metszéspontjainak abszczisszái valós számok. Ha ezeket x', x''-vel jelöljük, van:

$$K_1 - \lambda_1 K_2 \equiv \frac{a^2 - c^2 \sin^2 \varphi}{a^2 b^2 \sin^2 \varphi} (x - x')(x - x''),$$

a hol

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Innen látható, hogy jelen esetünkben vehetjük

$$e_1 \equiv \frac{\sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \varphi}}{ab \sin \varphi} (x - x') = 0,$$

$$e_2 \equiv \frac{\sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \varphi}}{ab \sin \varphi} (x - x'') = 0.$$

Tehát az ellipszist és egyenespárt kettősen érintő kúpszelet egyenlete 5a)-ból:

$$\begin{aligned} &\mu^2 (a^2 - c^2 \sin^2 \varphi)(x - x')^2 - \\ &- 2\mu \, . \, a^2 b^2 \sin^2 \varphi \left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{(x \cos \varphi - d)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{2y^2}{b^2} - 1 \right] + \\ &+ (a^2 - c^2 \sin^2 \varphi)(x - x'')^2 = 0. \end{aligned}$$

Csak azt kell még kifejeznünk, hogy ez a kúpszelet kör. Mivel xy-os tag nincsen, ez analitikailag csak egy feltételt ad, x^2 és y^2 együtthatóit egyenlítvén:

$$\mu^2 + 2 \frac{a^2 + c^2 \sin^2 \varphi}{a^2 - c^2 \sin^2 \varphi} \, . \, \mu + 1 = 0. \tag{9}$$

* A λ_2 értékkel az a föltevés, hogy a kettősen érintő kúpszelet kör, általában, ellenmondásra vezet.

Ebből az egyenletből μ-nek két valós értéke adódik ki, tehát kimondhatjuk:

*Valamely húr érintő körei között van kettő, a mely az ellipszist kettősen érinti.**

3. A kör szerkesztésére általában elég, ha a húron az érintés pontját ismerjük. Ebből merőlegest emelvén a húrra, a nagy tengelylyel való metszéspont a középpontot adja. Keressük ezért az egyenespár és a kör érintéshúrját.

Az érintéshúr egyenlete 4) szerint:

$$\mu e_1 - e_2 = 0.$$

Mivel 9)-ből:

$$\mu_1 = -\frac{a+c\sin\varphi}{a-c\sin\varphi}, \quad \mu_2 = -\frac{a-c\sin\varphi}{a+c\sin\varphi} = \frac{1}{\mu_1};$$

továbbá állandó, zérustól különböző közös szorzóktól e_1, e_2-nél eltekinthetünk, a két lehetséges érintéshúrt előállítják:

$$\left.\begin{aligned}(a+c\sin\varphi)(x-x') + (a-c\sin\varphi)(x-x'') = 0,\\ (a-c\sin\varphi)(x-x') + (a+c\sin\varphi)(x-x'') = 0.\end{aligned}\right\} \quad 10)$$

Irjuk rövidítésül:

$$r' = a + c\sin\varphi,$$
$$r'' = a - c\sin\varphi,$$

ekkor nyerjük

$$\left.\begin{aligned}x = \frac{r'x'+r''x''}{r'+r''},\\ x = \frac{r''x'+r'x''}{r'+r''}.\end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Mivel r', r'' d-től nem függenek és parallel-projekczióval az arányszámok nem változnak, innen következik:

A két kör érintéspontjai egy párhúzamos húrrendszer minden húrját a változatlan r'' : r' ill. r' : r'' arányokban osztjuk.

A két érintési pont a húr közepétől egyenlő távolságokban van.

A konstruktiv eljárást egyszerűsíti ama megjegyzés, hogy elég az érintéspontokat az adott húrhoz parallel átmérőre meghatározni; erről czentrális projekczióval átvihetjük bármely parallel húrra a pontokat. A czentrális projekcziónál a végpontokat hozzuk megfelelésbe. A szerkesztés czéljából írjuk a 11)-et részletesebben:

$$x = \frac{x'+x''}{2} \pm \frac{c\,.\sin\varphi}{a} \cdot \frac{x'-x''}{2}. \quad 11')$$

* Itt és a következőkben még az a megszorítás teendő, hogy a húr nem párhuzamos a kis tengelylyel.

Minthogy átmérőnél

$$x' = -x'',$$

a két kör szimmetrikus a kis tengelyhez és az érintéspontok szerkesztése a következő:

Az F gyujtópontot projicziáljuk merőlegesen a húrral parallel átmérőre H-ba. Az O középpontból irjunk OH sugárral kört, a mely a nagytengelyt L_1, L_2 pontokban messe. Kössük össze az átmérő és nagytengely egyik végpontját: az L_1 és L_2-ből evvel párhuzamosan vont egyenesek metszik az átmérőt a körök érintéspontjaiban.

A szerkesztés csak a kis tengelylyel párhuzamos húrokra nem adja a körök czentrumát is. Minthogy ekkor (φ=0 lévén) $\lambda_1=\infty$, az egész eljárás elveszti értelmét.

A szerkesztésnél, nagy tengelyre vonatkozólag L_1, L_2 pontok helyére egyszerűen a gyujtópontok lépnek.

Említésre méltó speczialis eset, mikor az ellipszis helyett kört veszünk. Kettősen érintő körök a konczentrikusok, végtelen távoli érintéshúrral és konjugált képzetes érintéspontokkal.

A szerkesztés ekkor is alkalmazható annak megfontolásával, hogy a gyujtópontok, tehát L_1 és L_2 is, a középpontba estek össze. Minthogy ekkor $r'=r''$, tehát

$$x = \frac{x'+x''}{2},$$

a mi a következő elemi tételt adja:

Ha a körnek húrját konczentrikus kör érinti, az érintéspontja a húrt felezi.

4. A kettősen érintő kör és az ellipszis érintéshúrja mindig valós, és a húrral való metszéspontja, a kör érintéspontja és a húr két végpontja *harmonikusok.*

A lehetséges két érintéshúr egyenlete

$$\mu e_1 + e_2 = 0$$

alakú, a honnan az érintéshúrok és a nagytengely metszéspontjára, az előbbi jelölések megtartásával, nyerjük

$$x = \frac{r'x' - r''x''}{r' - r''},$$
$$x = \frac{r''x' - r'x''}{r' - r''}. \qquad 12)$$

Hogy az érintéspontok is valósak legyenek, ahhoz szükséges és elégséges, hogy a 12) jobboldalok abszolut értéke

$$\leqq a$$

legyen.

Ha x', x'' részletes alakjait beirjuk, feltételt kapunk d-re, még pedig

$$d \leqq \frac{c^2}{a} \cos\varphi - \frac{b^2}{a}, \quad \text{vagy} \quad d \geqq \frac{c^2}{a} \cos\varphi + \frac{b^2}{a}.$$

Ez egyenlőtlenségek úgy igazak, hogy $\varphi > \frac{\pi}{2}$ esetében $+\frac{c^2}{a}$ helyett $-\frac{c^2}{a}$ irandó. Mivel $\frac{b^2}{a}$ a nagytengely csúcsához tartozó simuló kör sugara és $\left(\pm\frac{c^2}{a}, 0\right)$ e kör középpontjának meghatározói, következik innen: *Mindkét kettősen érintő kör érintéspontjai az ellipszisen valósak, a míg a húr a nagytengely csúcsainak simuló körei közül egyet sem metsz.* Ha metsz simuló kört a húr: az érintő körök körül legalább egyik képzetes pontokban érint.

Ez az eredmény előre látható, mert ez a kör olyan, a melynél két érintéspont esett össze a csúcspontba.

Az érintéshúr távolsága d nőttével nő, és maximumot ér el, ha a húr a gyujtópontok egyikén átmegy:

$$d = \pm c \,.\cos\varphi.$$

Ekkor az egyik érintéshúr a directrix; mivel

$$x = \frac{a^2}{c};$$

azután megint fogy a távolsága, a míg a húr érintő lesz.

Ebből a nagy tengelylyel párhuzamos húrokra $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ az következik, hogy ha távolságuk a *parameter*nél kisebb, mindkét kör érintéspontjai konjugált képzetesek lesznek. Magán a nagytengelyen a két kör az ellipszis gyujtópontjaiba zsugorodik össze, a mi más megfontolások rendjén szintén ismeretes.

Érintőknél, minthogy a két metszéspont összeesik, a két kör is összeeső.

5. Új megállapítást kivánnak az eredmények a kis tengelylyel párhuzamos húrokra.

Olyan kört, a mely a $(d, 0)$ pontban az

$$x - d = 0$$

húrt érinti, előállít

$$x^2 + y^2 - 2ux - d(d - 2u) = 0; \tag{13}$$

a hol $(u, 0)$ a kör középpontja.

Most előbb u-t, azután az ellipszis és kör érintéshúrját határozzuk meg.

Ha a kör az ellipszist kettősen érinti, szükséges, hogy 13)-at azonossá tehessük a

$$\rho K_1 + (px + q)^2 = 0 \tag{14}$$

alakkal, a hol ρ állandó szorzó,

$$px + q = 0$$

az érintéshúr egyenlete. Az azonosság révén van:

$$\rho = b^2, \quad p = \pm \frac{c}{a}, \quad q = \mp \frac{au}{c}$$

és u számára

$$a^2u^2 - 2c^2du + c^2(d^2 - b^2) = 0, \tag{15}$$

a honnan:

$$u = \frac{c^2d \pm bc(a^2 - d^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}. \tag{16}$$

Tehát ebben az esetben is két érintő kör van, a míg $|d| < a$.

A 16)-ban megjegyezzük, hogy

$$\eta = \frac{b}{a}(a^2 - d^2)^{\frac{1}{2}}$$

a húr és ellipszis közös pontjainak ordinátája, abszolut értékben. Úgy hogy

$$u = \frac{c}{a}\left[\frac{c}{a}d \pm \eta\right].$$

A két érintéshúr egyenlete pedig.

$$\left.\begin{aligned} x - \left(d + \frac{a}{c}\eta\right) &= 0, \\ x - \left(d - \frac{a}{c}\eta\right) &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

tehát a húrral párhuzamosak, és egyenlő távolságokban vannak tőle.

Miután irhatjuk

$$\cos\psi = \frac{c}{a},$$

a hol ψ a kis tengely végpontjának gyujtóponti vektora és a nagytengely alkotta szög, innen a következő szerkesztés olvasható ki:

A kis tengelylyel párhuzamos húrra kört irunk, s meghúzzuk átmérőjét, a mely párhuzamos a kis tengely végpontjának gyujtóponti vektorával. Ennek végpontjaiban vont érintők a nagytengelyt az érintéshúrok metszéspontjaiban találják.

Ebben az esetben az egyik kör mindenesetre valós pontokban érint, ha $0 < |d| \leqq a$, mert ekkor:

$$\left| d - \frac{a}{c}\eta \right| \leqq a.$$

A második kör érintéspontjai csak addig valósak, a míg

$$|d| \leqq a-2\frac{b^2}{a}=\frac{c^2}{a}-\frac{b^2}{a},$$

a mi az előbb talált eredményt e kivételes esetben is igaznak mutatja. Valós pontban érintő kör az érintéshúrból szerkeszthető. A képzetes pontokban érintő kör szerkesztésére a czentrumok u_1, u_2 koordinátái közötti

$$u_1-u_2=\frac{c}{a}\eta$$

összefüggést használhatjuk fel.

A kistengely ($d=0$) érintő körei addig érintik az ellipszist valós pontokban, a míg

$$b \leqq c$$

*

Harmadik megoldás Privorszky Alajos főreáliskolai tanár úrtól Temesvárott.

E feladat speczializálása a következő általánosabb feladatnak.

Adva van valamely ellipszis és a síkjában egy tetszőleges egyenes. Megszerkesztendők ezt az egyenest érintő körök közül azok, melyek az ellipszist kettősen érintik. Ha a nevezett húr ezen egyenesnek az ellipszis belsejében fekvő része és a nyert megoldásokból azokat a köröket kiválasztjuk, a melyek az ellipszisen belül vannak, az adott feladatot is megoldottuk.

Mielőtt ez általánosabb feladat megoldására rátérnék, a következőket bocsátom előre.

1. Az ellipszist kettősen érintő körök középpontjai valamelyik tengelyen vannak. Mert az ellipszisnek az érintéspontokban húzott érintői, a mennyiben a körnek is érintői, egyenlő hosszúak; ez csak úgy lehet, ha metszéspontjuk az ellipszis tengelyében van. Minthogy e tengely szükségképen az ezen érintők alkotta szöget felezi, a kör középpontja ugyanabban a tengelyben van.

2. Az a pont, mely az ellipszist kettősen érintő kör középpontját, az ugyanazon tengelyben fekvő (valós vagy képzetes) gyujtópontoktól harmonikusan elválasztja: az érintéspontokat összekötő egyenes pólusa, úgy az ellipszist, mint a kört illetőleg. Minthogy az érintéspontokban húzott érintők a tengelyben metszik egymást, a pólus ez érintők valamelyikének a tengelylyel való metszése; az érintőkör középpontja az ugyanazon érintéspontban húzott normálisnak a tengelylyel való metszése. Minthogy pedig az ellipszis bármely pontjában húzott érintő és normális a tengelyt annak az involuczionak egy elempárjában metszi, a melynek kettőspontjai az

abban a tengelyben fekvő két gyujtópont, e metszéspontok e fókuszoktól harmonikusan vannak elválasztva. Ezzel a tétel be van bizonyítva.

3. Ha az ellipszist kettősen érintő kör az adott egyenest is érinti, akkor az érintési pontokat összekötő egyenes és az adott egyenes metszése, az egyenes és kör érintéspontjával konjugált harmonikus pólus az ellipszist illetőleg. Mert az összes kúpszeletek, a melyek a két érintéspontban az ellipszist érintik kúpszeletsort alkotnak, mely az adott egyenest involutorius pontsorban metszi. Ennek egyik kettőspontja az érintési pontokat összekötő egyenesen fekszik, másik kettőspontjában pedig érinti a kör az egyenest. Minthogy az egyenest az ellipszis is ennek az involucziónak egy kapcsolt pontpárjában metszi, ezek a kettőspontoktól harmonikusan vannak elválasztva, tehát e kettőspontok konjugált harmonikus pólusok az ellipszist illetőleg.

4. Ha a kúpszeletet kettősen érintőkör érintéshúrjának az adott egyenessel való metszéspontja, a kör középpontjának az egyenesre vonatkoztatott orthogonális vetületével konjugált harmonikus pólus az ellipszist illetőleg, akkor a kör az egyenest is érinti, még pedig a kör középpontjának felemlített vetületében. Mert a kör és ellipszis érintéspontjaiban az ellipszist érintő kúpszeletek kúpszeletsort alkotnak, s így az adott egyenest involucziós pontsorban metszik, a melynek kettőspontjai az említett harmonikus pólusok. Ez involucziónak egy kapcsolt pontpárja lesz a körnek az egyenessel való két metszéspontja is, melyek a középpont orthogonális vetületére nézve szimmetrikusan vannak elhelyezve. Így e metszéspontok egyúttal azon egyenlőoldalú hyperbolikus involucziós pontsornak kapcsolt pontjai, melynek végesben fekvő kettőspontja, a kör középpontjának orthogonál vetülete. A kör metszéspontjait tehát e két involucziós pontsor közös elempárja adja meg. Mivel pedig e két involucziós pontsor kettőspontjainak egyike összeesik, míg a másik általában különbözik, a közös elempár két eleme s így a körnek az adott egyenessel való metszéspontjai is, e közös kettőspontokban összeesik, vagyis a kör az egyenest 2 pontban érinti.

E tétel nem érvényes, ha az egyenes merőleges az ellipszis ama tengelyére, melyben a kör középpontja van. Ez könnyen belátható, mert akkor a két involuczió nem különbözik egymástól.

E tételek előre bocsátása után áttérek a szerkesztésre, melyet ezek teljesen indokolják s minden bővebb magyarázgatás nélkül helyességét is igazolják.

Felveszünk az egyenesen $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, $R^{(1)}$, . . . pontokat, a melyeknek konjugált harmonikus pólusai az egyenesen az ellipszist illetőleg: $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$, $R^{(2)}$, . . . E két pontsor projektiv:

$$P^{(1)}Q^{(1)}R^{(1)} \ldots \overline{\wedge}\, P^{(2)}Q^{(2)}R^{(2)} \ldots$$

Az első pontsor pontjaiból az adott egyenesre merőlegeseket húzunk, melyeknek valamelyik tengelylyel való metszései: P', Q', R', ... A másik pontsor pontjaiból pedig erre a tengelyre húzunk merőlegeseket, a melylyel való metszéspontok P'', Q'', R'', ... sorozata az előbb nyert pontsorral projektiv.

Továbbá a P', Q', R', ... pontoktól az ebben a tengelyben fekvő fókuszok által harmonikusan elválasztott P_1, Q_1, R_1, ... pontok sora ismét projektiv a P'', Q'', R'', ... pontoktól az ezen tengely végpontjaitól harmonikusan elválasztott P_2, Q_2, R_2, ... pontok sorával. Tehát

$$P_1Q_1R_1 \ldots \overline{\wedge}\, P_2Q_2R_2 \ldots$$

E két pontsor M és N két kettőspontja, az ebben a tengelyben fekvő középponttal biró keresett két kör és az adott ellipszis közös érintőinek metszéspontja; a megfelelő M', N' pontok a körök középpontjai; a megfelelő M'' és N'' pontokban az illető tengelyre bocsátott merőlegesek, az illető kör érintési pontjain mennek át; a megfelelő $M^{(1)}$, $N^{(1)}$ pontokban pedig érintik e körök az adott egyenest.

Az általános feladatnak mindössze négy megoldása van; az adott speciális feladatnak kettő, s e körök középpontjai az ellipszis nagy tengelyén vannak. Ez utóbbi esetben a szerkesztés gyakorlati keresztülvitelénél, czélszerű $P^{(1)}$ és $Q^{(1)}$ pontokul a húr végpontjait választani; akkor $P^{(2)}$ $P^{(1)}$-gyel és $Q^{(2)}$ $Q^{(1)}$-gyel egybeesik; továbbá $R^{(1)}$ legyen a húr felezőpontja, akkor $R^{(2)}$ a végtelenben van.

A mondottak alapján megszerkesztjük a P', Q', R' és P'', Q'', R'' pontokat s ezeket összekötjük a nagy tengelyen kívül fekvő valamely T ponttal, mely például a kis tengelyben fekszik. Így nyerjük a p', q', r' és p'', q'', r'' sugarakat. Azonkívül összekötjük a nagy tengely két végpontját A és B-t és a két fókuszt G és H-t is T-vel; így kapjuk az a, b és g, h sugarakat. A T ponton átmenő segédkör segítségével meghatározzuk a g, h és az a, b kettőssugaraknak megfelelő involucziókban a p', q', r' ill. a p'', q'', r'' sugarakhoz konjugált p_1, q_1, r_1 ill. p_2, q_2, r_2 sugarakat.

E két projektiv sugársor kettőssugarainak, m és n-nek a nagytengelylyel való metszéspontjai, a keresett M és N pontok. Az m és n-nek a két involuczióban megfelelő m', n' és m'', n'' sugaraknak a nagy tengelylyel való metszéspontjai, az M', N' ill. M'', N'' pontokat adják. Így a feladatot megoldottnak tekinthetjük.

E módszer nagy hátránya, hogy segítségével, az általános esetben, ha az egyenes valamelyik tengelyre merőleges, az ebben a tengelyben fekvő középponttal biró körök középpontjai meg nem határozhatók. Ez magából a szerkesztés természetéből, de a 4) alatt közöltekhez fűzött megjegyzésből is következik. Ezért legyen szabad még a következő szerkesztést idecsatolnom.

Kiindulunk a cziklografia elemeiből, melyek szerint minden kör két térbeli pontot határoz meg. E pontoknak a kör síkjára vonatkoztatott vetületei a kör középpontja, ordinátájuk a kör sugara. Ezen értelmezés szerint az ellipszist kettősen érintő körök két görbe vonalat képviselnek, melyek közül az egyik, a nagy tengelyben, a másik a kis tengelyben az ellipszis síkjára merőlegesen állított síkban van. Az analitikai geometria módszerével könnyen bebizonyítható, hogy az első görbe oly ellipszis, mely egyik tengelyének végpontjai az adott ellipszis fókuszai, míg a másik tengely hossza az adott ellipszis kis tengelyének hosszával egyenlő; a másik görbe vonal hyperbola, melynek képzetes tengelye az adott ellipszis kis tengelyével egybeesik s hossza a fókusoknak egymástól való távolsága; a valós tengely hossza az ellipszis nagy tengelyének hosszával egyenlő.

Ama körök pedig, a melyeknek középpontjai a tengelyekben vannak, s az adott egyenest érintik, a tengelyekben emelt merőleges síkokban egy-egy egyenespárt határoznak meg. Ezen egyenesek és az ugyanabban a síkban fekvő görbe vonalak metszéspontjainak megfelelő körök, a kérdéses körök.

A szerkesztést a legnagyobb könnyűséggel elvégezzük, ha az adott ellipszis tengelyeiben emelt merőleges síkokat, a tengelyek körül az ellipszis síkjába fektetjük. E szerkesztésből is kitűnik, hogy az általános feladatnak négy megoldása van.

*

Negyedik megoldás Privorszky Alajos főreáliskolai tanár úrtól Temesvárott.

Sokszor síkbeli konstrukcziók igen könnyen oldhatók meg, ha azokat térbeli vonatkozásokra vezetjük vissza. Ilyen természetű ez a feladat is.

Állítsunk ugyanis az adott h húrban az ellipszis síkjára merőleges S síkot s képzeljük az adott ellipszist és a keresett érintő kört az ellipszis nagy tengelye körül forgatva. Az ellipszis nyujtott forgási ellipszoidot ír le, míg a keresett kör oly gömböt, mely egyrészt az ellipszoidot abban a körben érinti, melyet az ellipszis és kör érintési pontjai M, N leirnak, másrészt érinti az S síkot is abban az F pontban, melyben a keresett kör a h húrt.

Tudjuk azonban, hogy valamely másodrendű forgásfelületet körben érintő gömb érintősíkja ezt a forgásfelületet oly kúpszeletben metszi, melynek egyik fókusza a sík és a gömb érintési pontja.* Ebből következik, hogy a keresett kör és a h húr érintési pontja F, annak a kúpszeletnek fókusza,

* Fiedler: Darstellende Geom. III. kiadás II. köt. 44. §. 18. p. 351. lap.

melyben az S sík az ellipszoidot metszi. Ezzel a feladat vissza van vezetve ennek a metszési ellipszis fókuszainak meghatározására, a mi az ábrázoló geometria legelemibb ismereteivel végezhető, s azért leirását mellőzzük. Az eredmény most is azt mutatja, hogy a megoldások száma kettő.

*

Ötödik megoldás Riesz Frigyes tanárjelölt úrtól Budapesten.

A feladat megoldásához a cziklográfia módszerét fogom használni.

A cziklográfia a sík összes köreinek oly módon felelteti meg a tér összes pontjait, hogy minden egyes körhöz egy-egy pontot rendel, melynek orthogonális vetülete a kör középpontja s melynek ordinátája egyenlő a kör sugarával. Ily módon egy-dimenziós körseregeknek görbék, két-dimenziósaknak felületek felelnek meg. A cziklográfia e helyettesítés révén körseregek közös köreinek keresését görbék, illetve felületek közös pontjainak szerkesztésére vezeti vissza.

Legyenek a kúpszelet tengelyei $2a$, $2b$ (b valós vagy imaginarius voltától függ a kúpszelet neme). Koordinátasíkokul a kúpszelet síkját, továbbá az erre merőleges, a tengelyeken átmenő síkokat választjuk.

A kúpszeletet kettősen érintő körök középpontjai a tengelyeken feküsznek. Ha e középpont koordinátái $(x, 0)$, illetve $(0, y)$, úgy a kör sugarának, tehát egyszersmind a cziklográfikusan konjugált pont ordinátájának négyzete

$$\frac{b^2}{a^2-b^2}(a^2-b^2-x^2), \quad \text{illetve} \quad \frac{a^2}{b^2-a^2}(b^2-a^2-y^2).$$

Jelöljük a kúpszelet gyujtópontjainak távolságát $2e$-vel; akkor $a^2-b^2=e^2$. A két körseregnek az

$$y=0;\ \frac{x^2}{e^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \quad \text{és} \quad x=0;\ -\frac{y^2}{e^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

kúpszeletek felelnek meg.

Másrészt az adott egyenest érintő köröknek azon két sík felel meg, melyeknek nyoma az adott egyenes és melyek az xy síkhoz $45°$-ú szög alatt hajlanak. E síkok, valamint a két kúpszelet is, az xy síkra szimmetrikusak, szimmetrikusak tehát a kúpszeletekkel való metszéspontjaik is; ép ezért csak az egyik síkra van szükségünk. E sík az xz és yz síkokat két egyenesben metszi, melyeknek az x, illetve y tengelyekkel közös pontjai az adott egyenesnek e tengelyekkel közös pontjai; míg közös, a z tengelyben fekvő pontjuknak ordinátájuk egyenlő a középpontnak az adott egyenestől való távolságával.

A feladatot ekkép kúpszelet és egyenes metszéspontjainak szerkesztésére vezettük vissza.

A négy megoldás közül legfeljebb kettő lehet valós.

A fentebbi megoldás általánosságban kúpszeletre (határátmenettel igen egyszerűen alkalmazható parabolára) és az egyenesnek a kúpszelettel szemben való tetszőleges helyzetére vonatkozik. A feladat tulajdonképen nem kivánja az általánosságot; a benne kijelölt speczialis eset, midőn a kúpszelet ellipszis és az egyenes húrja vagyis metszi, speczialis voltának bizonyos kiváltságainál fogva elegánsabb megoldásra vezet, melyet ábrázoló geometriai alapon (orthogonális projekcziót használva) fogok adni.

Válaszszuk egy gömb valamely főkörének síkját affinitássíkul; a gömb affin transzformáltja ellipszoid, melynek az affinitássíkkal parallel síkmetszetei körök. E körök projekcziói az affinitássíkra ellipszist burkolnak, mely ellipszis az ellipszoid projekcziójának konturja. A körrendszer nullkörei, vagyis az ellipszoid legmagasabb és legalacsonyabb pontjának — melyek a gömb hasonló természetű pontjainak transzformáltjai — projekcziói az ellipszis gyujtópontjai.

Ha még a szerkesztés egyszerűsítése kedvéért felteszszük, hogy az affinitás iránya az affinitás síkjával párhuzamos, minden ellipszist egy bizonyos ellipszoid projekcziójának tekinthetünk; ez ellipszoid egy gömb affin transzformáltja, mely gömbátmérője egyenlő az ellipszis kis tengelyével; az ellipszoid legmagasabb és legalacsonyabb pontja az ellipszis gyujtópontjainak a gömbnek az ellipszis síkjával párhuzamos érintősíkjaira vetett képei. Az affin transzformáczió ekkép meg van határozva.

Ha az adott egyenest egy vetítő sík első nyomának tekintjük, e sík és az ellipszoid metszésének legalacsonyabb és legmagasabb pontjain átmenő körök projekcziói a keresett érintőkörök. E pontokat kapjuk, ha a síkot, mint az ellipszoid rendszeréhez tartozót a gömb rendszerébe transzformáljuk; az így nyert sík és a gömb metszésének legalacsonyabb és legmagasabb pontját keressük és ezeket ismét az ellipszoid rendszerébe viszszük át.

*

Hatodik megoldás Grünwald Miksa főreáliskolai tanár úrtól Losonczon.

Az adott ellipszist és húrját

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0 \tag{1}$$

$$\mu x+\lambda y-\lambda\mu=0 \tag{2}$$

alakban, a keresett kört pedig

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\rho^2=0 \tag{3}$$

alakban veszszük föl.

Az 1) és 3) kúpszeletek négy metszéspontján keresztül menő kúpszeletsereget

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2-k\,[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\rho^2]=0 \qquad 4)$$

egyenlet képviseli. Ha azonban 1) és 3) kettősen érintik egymást, akkor a négy metszéspontból két érintési pont lesz, és a 4) alatti kúpszeletek egyike összeeső egyenespárrá fajul el. Ha u. i. az 1) és 3) két érintési pontján keresztül menő egyenes egyenlete

$$Ax+By+C=0,$$

akkor az említett elfajuló kúpszelet egyenlete:

$$(Ax+By+C)^2=0. \qquad 5)$$

Minthogy azonban 4)-ben az xy szorzat nem fordul elő, 3) csak úgy lehet azonos 5)-tel, ha $AB=0$, azaz vagy $A=0$, vagy $B=0$.

1. Ha $B=0$, akkor 5)-ben y nem fordul elő, a mi 4)-ben csak úgy lehetséges, ha

$$k=a^2 \quad \text{és} \quad \beta=0.$$

Ekkor 4)-ből lesz:

$$c^2x^2-2a^2\alpha x+a^2(b^2+\alpha^2-\rho^2)=0,$$

a hol $c^2=a^2-b^2$, és minthogy 5) baloldala teljes négyzet,

$$a^4\alpha^2-a^2c^2(b^2+\alpha^2-\rho^2)=0$$

vagy

$$b^2\alpha^2+c^2\rho^2=b^2c^2. \qquad 6)$$

Ez az egyenlet fejezi ki azt a föltételt, mely alatt a 3) alatti

$$(x-\alpha)^2+y^2=\rho^2 \qquad 7)$$

kör az 1) ellipszist kettősen érinti. De ez az egyenlet azt mutatja, hogy α és ρ egy olyan pont koordinátái ($x=\alpha$, $y=\rho$), melynek geometriai helye ellipszis. Ez a segédellipszis pedig könnyen szerkeszthető, mert egyik féltengelye ugyanaz, mint az adotté, a másik pedig ez utóbbi lineár excentricitása.

Annak a föltétele pedig, hogy a 7) alatti kör a 2) egyenest érintse:

$$\rho^2(\lambda^2+\mu^2)=\mu^2(\alpha-\lambda)^2$$

vagy

$$\rho=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}(\alpha-\lambda). \qquad 8)$$

E szerint α és ρ egy olyan pontkoordinátái, melynek geometriai helye egy egyenespár. E segédegyenesek az x tengelyt ugyanott metszik, a hol a 2) húr, az y tengelyt pedig két oly pontban, melyek távolsága a kezdőponttól annyi, mint ez utóbbié a 2) húrtól. A segédegyenesek a segédellipszist négy (A, A', B, B') pontban metszik. Ha A és A' vetülete az x tengelyre A_1, akkor A_1 a keresett kör középpontja, és $AA_1 = A'A_1$ a sugara. Hasonlóképen a BB' pontok is adnak egy megfejtést.

2. A másik föltevés, mely szerint $A = 0$, kevésbbé érdekes, mert nem vezet valós megfejtésekre. Az előbbihez hasonló úton egy

$$c^2\rho^2 - a^2\beta^2 = a^2c^2$$

segédhiperbolát, és egy

$$\rho^2(\lambda^2+\mu^2) = \lambda^2(\beta-\mu)^2$$

segédegyenespárt kapunk, de a négy metszéspont most imaginarius. Ha u. i. ρ-t kiküszöböljük, β-ra nézve oly másodfokú egyenletet kapunk, a melynek discriminansa

$$\lambda^2\mu^2 - b^2\lambda^2 - a^2\mu^2 = (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2) - a^2b^2.$$

Ez a kifejezés zérussal egyenlő, ha a 2) egyenes az 1) ellipszist érinti; e szerint ez a kifejezés csak akkor pozitiv, ha a két egyenes az ellipszisen kívül esik, ellenben negativ, ha a 2) egyenes az 1) ellipszis húrja.

A HALMAZOK ELMÉLETÉHEZ.*

Tekintve a logika, arithmetika és halmazelmélet alapjai körül jelenleg folyó vitát, CANTOR æquivalentia-tétele új bizonyításának, melyet e sorokban adok — úgy hiszem — elég nagy fontossága van. Csak *Synthetikus logiká*-m kifejtésében (mely — remélem — legközelebb megjelenik s melyet mult évi előadásomban már kifejtettem) akartam eleinte adni. De az ily dolgok iránti mai érdeklődés folytán külön közlöm e kis czikket.

POINCARÉ szellemes és mély kritikája (l. a Revue de Métaphysique et de Morale, 1906, májusi számát) negativ részeiben véleményem szerint megczáfolhatatlan. A mi eddig megvan, az talán szükséges volt az új logikai tudomány fejlődéséhez, de semmi esetre sem az, a mit keresünk: nem alapja ezen új tudománynak.

A mi az említett tételt illeti, melyet először CANTOR mondott ki és utána BERNSTEIN, SCHRÖDER és ZERMELO bizonyítottak be, azt evidenssé kellene tenni a szám fogalmának használata nélkül. Sőt a teljes indukczió elvét is el kell kerülnünk, melyet, mint POINCARÉ igen helyesen megjegyzi, minden eddig közölt bizonyitás felhasznál. (A számfogalmat illetőleg annyi bizonyos, hogy magunknak kell azt megalkotnunk. A közvetetlen intuiczióban is van mindenesetre valami belőle, *élmény* vagy *tapasztalat;* de ez a maradék okvetetlenül szükséges.)

Az æquivalentia-tétel az intuicziónak tétele. Ennek kimutatá-

* E czikk eredetileg megjelent a franczia Akadémia «Comptes Rendus»-jében «Sur la théorie des ensembles» czímen (1906. juliusi füzetben).

sára CANTOR terminologiáját fogom használni; kiemelve azonban, hogy részletesebb és preczizebb fejtegetésben ez nem igen tartható fönn.

Legyen X, Y két meghatározott halmaz, X_1, Y_1 pedig X-nek, illetve Y-nak egy-egy részlethalmaza. Ki kell mutatnunk, hogy $X \sim Y_1$, $Y \sim X_1$-ből mindig $X \sim Y$ következik.

Az $X \sim Y_1$ kijelentés a következő (I) törvény feltételezését jelenti.

X-nek egy tetszőleges x eleme meghatározza Y-nak egy és csak egy y elemét, mely viszont is meghatározza a megfelelő x-et. Vannak azonban Y-nak oly elemei, melyek e törvényben nem szerepelnek.

Ép így «$Y \sim X_1$» egy (II) törvény feltételezését jelenti, melyet fölösleges volna már részletezni.

Legyen most x_1 az X egy tetszőleges eleme; (I) szerint x_1 megadja Y_1 meghatározott y_1 elemét; ez az y_1 pedig a (II) törvénynyel X_1 egy x_2 elemét adja meg stb. Ezt végezve nem *számolunk;* az 1, 2,... jeleket csak az X elemeinek megkülönböztetésére használjuk. Az egymásra *következés* és *sorozat* fogalmait azonban, mint végleges logikai fogalmakat el kell fogadnunk.

Ily módon az

$$\ldots x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots$$

sorozat jobbra mindig folytatható, de balra nem mindig. Ha x_1 eleme X_1-nek, a (II) törvény megadja az x_1-et közvetetlenül megelőző y_0-t; ha azonban x_1 oly eleme X-nek, mely X_1-ben nem foglaltatik, akkor sorozatunk balra nem folytatható.

Tehát a következő esetek lehetségesek.

A sorozat X egy elemével kezdődik. A sorozat Y egy elemével kezdődik. A sorozat balra is mindig folytatható.

X két eleme x_1' és x_1'' két megfelelő sorozatot ad:

$$\ldots x_1' y_1' x_2' y_2' \ldots \tag{1}$$

$$\ldots x_1'' y_1'' x_2'' y_2'' \ldots \tag{2}$$

Ha az (1) és (2) sorozatnak van közös eleme, akkor a rájuk következő elemet az (I), illetve (II) törvény meghatározza és így ez (1)-ben és (2) ben ugyanaz lesz. Ugyanez áll a megelőző elemekre is.

Tehát: X bármely eleme meghatározza a hozzátartozó sorozatot. A periodikus sorozat esetét nem kell külön részletezni. Világos, hogy periodikus sorozat mindig folytatható balra is.

Az æquivalentia-törvényt, melyet $X \sim Y$ fejez ki, ezen meggondolások máris megadják.

Legyen $\bar{x}$ az X tetszőleges eleme; utasításunk van a megfelelő sorozat képzésére. Ha ez X egy elemével kezdődik, vagy ha balra is mindenkor folytatható, akkor Y azon elemét fogjuk $\bar{x}$-hoz hozzárendelni, mely e sorozatban közvetetlenül követi. Ha azonban a sorozat Y egy elemével kezdődik, akkor Y-nak $\bar{x}$-t közvetetlenül megelőző elemét fogjuk mint $\bar{x}$-nak megfelelő elem választani.

Az $X \sim Y$ æquivalentia ily módon meg van állapítva. A tiszta szemlélet vezet létezésének felismeréséhez.

Ezen fejtegetés természetesen még sok pontatlanságot tartalmaz, mivelhogy nem vitattuk meg alaposan a bennük előforduló logikai fogalmakat. Ilyen például a «jobbra» és «balra» kifejezés is.

Kőnig Gyula.

A MÁSODRENDŰ PARTIALIS DIFFERENTIALIS EGYENLETEK ELMÉLETÉHEZ.[1]

$V\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx . dy$ kettős egészlete legnagyobb vagy legkisebb értékének meghatározására az első szükséges feltételt

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{d}{dy}\frac{\partial V}{\partial q} = 0, \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

egyenlet adja, vagy kibontott alakban:

$$\frac{\partial P}{\partial p} \cdot r + 2\frac{\partial P}{\partial q} s + \frac{\partial Q}{\partial q} t = 0, \tag{1}$$

$$\left(P = \frac{\partial V}{\partial p}, \; Q = \frac{\partial V}{\partial q}, \; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Monge bebizonyította,[2] hogy

$$Rr + Ss + Tt + U = 0$$

másodrendű partialis differentialis egyenletnek, a hol R, S, T, U függvényei x, y, z, p, q-nak, csak akkor van

$$u = F(v)$$

[1] E dolgozat 1880-ban Kolozsvárt, Stein János m. k. egyetemi nyomdásznál nyomatott ki először, mint «a bölcsészettudori czím elnyerése végett a kolozsvári m. kir. tud.-egyetem mennyiségtan-természettudományi karához benyujtott» értekezés. Bár a könyvpiaczra nem került, hatása alatt hazánkban és a külföldön több figyelemre méltó értekezés keletkezett. Már csak ezért is kivánatosnak látszott e dolgozatot lapunkban szélesebb köröknek is hozzáférhetővé tenni. (Szerk.)

[2] «Histoire de l'Académie des Sciences» 1784. Szigorú bizonyítást ad Boole: «Ueber die partielle Differentialgleichung $Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$.» (Crelle, Journal LXI. kötet.)

alakú elsőrendű általános megoldása, — a hol u és v függvényei x, y, z, p, q-nak, F tetszésszerinti függvény, — ha

$$u = \text{constans}, \quad v = \text{constans}$$

megoldásai ennek a közönséges differentialis egyenletrendszernek:

$$\begin{gathered} Rdy^2 - Sdx \,.\, dy + Tdx^2 = 0, \\ Rdy \,.\, dp + Tdx \,.\, dq + Udx \,.\, dy = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{gathered}$$

Czélunk meghatározni a szükséges és elégséges feltételeket arra nézve, hogy az 1) egyenletnek $u = F(v)$ alakú elsőrendű általános megoldása lehessen, egyszersmind megmutatni, miképen lehet ezeket a feltételeket felhasználni magának az egészletnek meghatározására.

I.

Azt az esetet kizárhatjuk, a mikor $\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial q} = 0$, mert ebben az esetben az 1) egyenlet $s = 0$ egyenletre redukálódik, a melynek egészlete $z = f(x) + \varphi(y)$ alakban ismeretes. Ezért feltehetjük, hogy $\frac{\partial P}{\partial p}$, $\frac{\partial Q}{\partial q}$ közül legalább az egyik nem $= 0$.

A következőkben felteszszük, hogy $\frac{\partial P}{\partial p}$ nem $= 0$.

Az 1) egyenlethez tartozó MONGE-féle simultan egyenletek:

$$\frac{\partial P}{\partial p} dy^2 - 2\frac{\partial P}{\partial q} dx \,.\, dy + \frac{\partial Q}{\partial q} dx^2 = 0, \tag{a}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} dy \,.\, dp + \frac{\partial Q}{\partial q} \,.\, dx \,.\, dq = 0, \tag{b}$$

$$dz - pdx - qdy = 0, \tag{c}$$

vagy ha

$$\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial p} \cdot \frac{\partial Q}{\partial q}} = D, \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial q} - D}{\frac{\partial P}{\partial p}} = f, \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial q} + D}{\frac{\partial P}{\partial p}} = g$$

jelöléseket behozzuk, a) egyenlet lesz:

$$(dy-fdx)(dy-g\,.\,dx)=0$$

így a szerint, a mint az egyik vagy a másik factort teszszük $=0$, kapjuk fennebbi egyenletek helyett a következőket:

$$\left.\begin{aligned} dy-fdx&=0\\ dp+gdq&=0\\ dz-(p+qf)\,dx&=0 \end{aligned}\right\}\ 2)\quad \text{vagy}\quad \left.\begin{aligned} dy-gdx&=0\\ dp+fdq&=0\\ pz-(p+qg)\,dx&=0 \end{aligned}\right\}\ 3)$$

Így arra nézve, hogy az 1) egyenletnek $u=F(v)$ alakú általános elsőrendű egészlete legyen, szükséges és elégséges, hogy a 2) vagy 3) egyenletrendszernek két egészlete legyen meghatározható.

Vegyük a 2) alatti rendszert.

$dp+gdb=0$ egyenlet magában egészelhető, mert g, p és q függvénye. Egészlete

$$\varphi=\text{constans},$$

ha φ megoldása ennek a partialis differentialis egyenletnek:

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial q}=0. \qquad 4)$$

Ha φ megoldás, akkor $F(\varphi)$ is az, a hol F tetszésszerinti függvény.

Hogy a 2) egyenletrendszernek még egy egészlete legyen, szükséges és elégséges, hogy meghatározni tudjunk olyan λ és μ szorzókat, hogy

$$\lambda(dy-fdx)+\mu\big(dz-(p+qf)\,dx\big)=0$$

egészelhető legyen $\varphi=$constans egészlet felhasználásával. Erre nézve szükséges, hogy

$$\lambda,\ \mu \quad \text{és} \quad \lambda f+\mu(p+qf)$$

csak annyiban függjenek p-től és q-tól, a mennyiben φ függvényei, azaz a 4) egyenletnek megoldásai kell hogy legyenek. Így állani kell ezeknek az egyenleteknek:

$$g\frac{\partial\lambda}{\partial p}-\frac{\partial\lambda}{\partial q}=0,$$

$$g\frac{\partial\mu}{\partial p}-\frac{\partial\mu}{\partial q}=0,$$

$$\lambda\left(g\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial q}\right)+\mu\left(g\frac{\partial(p+qf)}{\partial p}-\frac{\partial(p+qf)}{\partial q}\right)=0.$$

Tegyük

$$g\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial q}=\frac{A}{\frac{\partial P}{\partial p}}$$

$$g\frac{\partial(p+qf)}{\partial p}-\frac{\partial(p+qf)}{\partial q}=g-f+q\left(g\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial q}\right)=\frac{B}{\frac{\partial P}{\partial p}},$$

akkor az utolsó egyenlet:

$$\lambda A+\mu B=0$$

alkalmazzuk erre még egyszer a $\left(g\frac{\partial}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial q}\right)$ míveletet. Lesz:

$$\lambda\left(g\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial q}\right)+\mu\left(g\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)=0.$$

A két egyenletből λ és μ eliminálása után

$$A\left(g\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)-B\left(g\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial q}\right)=0. \quad 5)$$

Ez a feltétel tehát szükséges arra, hogy a 2) egyenletrendszernek két egészlete legyen, de elégséges is. Mert az 5) egyenlet azt mondja ki, hogy vagy $A=0$, vagy pedig $\frac{B}{A}$ függvénye φ-nek.

Első esetben $dy-fdx=0$ egyenlet egészelhető, mert $A=0$ szerint f csak φ függvénye, így $\varphi=\text{const.}$ egészlet felhasználásával egészlete lesz:

$$y-f.x=\text{const.}$$

Második esetben $dz-(p+qf)dx-\frac{B}{A}(dy-fdx)=0$ egyenlet egészelhető, mert 5) szerint $\frac{B}{A}$ φ függvénye, s akkor $p+qf-\frac{B}{A}f$ is az, mert a 4) egyenletnek megfelel. Úgy, hogy $\varphi=\text{const.}$ egészlet felhasználásával fennebbi egyenlet egészlete lesz:

$$z-\left(p+qf-\frac{B}{A}f\right)x-\frac{B}{A}y=\text{const.}$$

E szerint az 5) egyenlet adja a szükséges és elégséges feltételt arra nézve, hogy az 1) egyenletnek $u=F(v)$ alakú elsőrendű általános egészlete lehessen.

Az 5) egyenlet átalakítására határozzuk meg A és B értékét, felhasználva f, g és D definitióját.

$$A=\frac{\partial P}{\partial p}\left(g\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial q}\right)=\frac{\partial D}{\partial q}-f\frac{\partial D}{\partial p},$$

$$B=\frac{\partial P}{\partial p}\left(q\left(g\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial q}\right)+g-f\right)=q\left(\frac{\partial D}{\partial q}-f\frac{\partial D}{\partial p}\right)+2D.$$

Ezeknek egyszerűbb alakot adhatunk, ha D-t, a melyet eddig, mint p és q függvényét tekintettük, ezután q és P függvényeül veszszük fel, azaz p és q helyett q és P-t vezetjük be új variabilisokul. Ha D-nek ily értelemben q és P szerint vett partialis differentialis quotienseit D_1 és D_2-vel jelöljük:

$$\frac{\partial D}{\partial q}=D_1+D_2\frac{\partial P}{\partial q},$$

$$\frac{\partial D}{\partial q}=D_2\frac{\partial P}{\partial p}$$

ezeket bevezetve, lesz:

$$A=D_1+DD_2,\quad B=q(D_1+DD_2)+2D.$$

Az 5) egyenlet szerint

$$A^2\left(g\frac{\partial\frac{B}{A}}{\partial p}-\frac{\partial\frac{B}{A}}{\partial q}\right)=0,$$

vagy ha $\frac{B}{A}$-nak, mint q és P függvényének partialis differentialis quotienseit $\left(\frac{B}{A}\right)_1$ és $\left(\frac{B}{A}\right)_2$-vel jelöljük:

$$A^2\left[\left(\frac{B}{A}\right)_1 - D\left(\frac{B}{A}\right)_2\right] = 0$$

vagy A és B értékének helyettesítése után

$$-2DD_{11}+2D^3D_{22}+3D_1^2+D^2D_2^2 = 0, \qquad 6)$$

ha D_{11} és D_{22}-vel D-nek q és P szerint vett második part. diff. quotiensét jelöljük.

Ha D ennek az egyenletnek eleget tesz, eleget tesz $-D$ is. Már pedig a 3) egyenletrendszer csak annyiban különbözik a 2) egyenletrendszertől, hogy a hol itt D, ott $-D$ áll. Tehát, ha a 2) rendszernek két egészlete van, két egészlete van a 3) rendszernek is. Ebből pedig Monge tantétele szerint következik, hogy az 1) másodrendű partialis differentialis egyenletnek vagy két $u=F(v)$ alakú elsőrendű általános egészlete van, vagy egy sincsen.

A 2) és 3) egyenletrendszer azonos, ha $D=0$. Ekkor az egyenletrendszernek három egészlete van, mert ezen esetben $A=0$, $B=0$, ezek pedig azt fejezik ki, hogy f és $p+qf$ csak φ függvényei, így

$$dy-fdx=0,$$
$$dz-(p+qf)\,dx=0$$

egyenletek $\varphi=\text{const.}$ egészlet felhasználásával egészelhetők. Ha egészleteiket $\psi=\text{const.}$, $\chi=\text{const.}$ által jelöljük, akkor az 1) egyenletnek elsőrendű általános egészletei lesznek:

$$\psi=F(\varphi),\quad \chi=G(\varphi),$$

a hol F és G tetszésszerinti függvények.

Tehát ebben az esetben is két elsőrendű általános egészlete van az 1) egyenletnek.

II.

Mihelyt D a 6) egyenletnek megfelel, azonnal bizonyos, hogy a 2) és 3) egyen etrendszernek két-két egészlete van, s így az 1) egyenletnek két elsőrendű általános egészlete. Az egészelésnél egyedüli nehézséget

$$dp+gdq=0, \quad dp+fdq=0$$

egyenletek egészelése adhat, a melyek egyes esetekben complicált differentialis egyenletek lehetnek. Meg fogjuk mutatni, hogy ugyanazzal a számítással, a mely szükséges arra nézve, hogy az elsőrendű általános egészletek létezéséről meggyőződjünk, egyszersmind megkapjuk ezeknek az egyenleteknek egészleteit is. Egyes esetekben ugyan nem kapjuk közvetlenül magukat az egészleteket, de épen ezen esetekre megmutatjuk, hogy a fennebbi egyenletek olyanok, a melyek egészelésére módszereink vannak.

Hogy rövidebben fejezhessük ki magunkat, minden függvényt, a mely = const. téve $dp+gdq=0$ egyenlet egészletét adja, φ függvénynek, azt pedig, a mely = const. téve $dp+fdq=0$ egyenlet egészletét adja, ψ függvénynek fogjuk nevezni.

A 2) egyenletrendszerrel szoros összefüggésben levő A-nak és B-nek megfelelőleg a 3) egyenletrendszernél bevezetjük a-t és b-t, definiálva következőképen:

$$a=\frac{\partial P}{\partial p}\left(f\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial g}{\partial q}\right)=-D_1+DD_2,$$

$$b=\frac{\partial P}{\partial p}\left(f\frac{\partial(p+qg)}{\partial p}-\frac{\partial(p+qg)}{\partial q}\right)=q(-D_1+DD_2)-2D,$$

$a=0$ a feltétel arra, hogy g ψ függvény legyen,
$b=0$ a feltétel arra, hogy $(p+qg)$ ψ függvény legyen.

Az 5) alatti egyenletnek megfelelő

$$a^2\left(f\frac{\partial\frac{b}{a}}{\partial p}-\frac{\partial\frac{b}{a}}{\partial q}\right)=0 \tag{7}$$

a és b értékének betevése után újra a 6) egyenletet adja, mint fennebb már kimutattuk. Úgy, hogy a 7) és 5) egyenlet egy és ugyanaz.

A következőkben összeállitjuk az összes eseteket, a melyek az 1) egyenlet egészelésénél eléjöhetnek.

1. $D=0$. Ekkor a 2)-ik és 3)-ik egyenletrendszer azonos. $dp+gdq=0$ egyenlet $dP=0$ alakot ölt, tehát P φ függvény. A mellett ezen esetben $A=0$, $B=0$, tehát f és $p+qf$ is φ függvények, úgy hogy az 1) egyenlet elsőrendű általános egészletei lesznek.

$$y-f.x=F(\varphi), \quad z-(p+qf)x=G(\varphi),$$

a hol φ helyett P, f vagy $p+qf$ vehető.

2. $D=$ constans. Ekkor $A=a=0$, tehát f φ függvény, g ψ függvény. Még egy φ és ψ függvény könnyen kapható. Ugyanis $dp+gdq=0$ egyenlet így is irható: $dP+Ddq=0$, és $dp+fdq=0$ így is: $dP-Ddq=0$. Tehát jelen esetben $P+Dq$ φ függvény, $P-Dq$ ψ függvény. Az 1) egyenlet egészletei lesznek:

$$y-f.x=F(\varphi), \quad y-g.x=G(\psi),$$

a hol φ helyett f vagy $P+Dq$, $-\psi$ helyett g vagy $P-Dq$ is tehető.

3. $A=0$, de D és f nem constansok.

Az 5) alatti egyenlet teljesülvén, a vele egy ugyanazon 7) egyenlet szerint $\frac{b}{a}$ ψ függvény. Másfelől $A=0$ szerint f φ függvény. A számára ezt az értéket is kaptuk volt:

$$A=\frac{\partial D}{\partial q}-f\frac{\partial D}{\partial p},$$

tehát $A=0$ szerint D is ψ függvény. Így az 1) egyenlet egészletei lesznek:

$$y-f.x=F(f),$$

$$z-\frac{b}{a}y+\left(\frac{b}{a}g-p-qg\right)x=G(\psi),$$

a hol ψ helyett $\frac{b}{a}$ vagy D vehető.

4. $A=0$, D nem constans, de $f=$ constans. Ez az egyik eset, a mikor nem írhatjuk fel készen az 1) egyenlet egészleteit. Mert f ugyan eleget tesz a φ-t definiáló 4) egyenletnek, de $dp+gdq=0$ egészletét még sem szolgáltathatja. ψ függvényünk ugyan most is van, mert D és $\frac{b}{a}$ ψ függvények. Ha a második constans is volna, D feltétel szerint nem az. Így egyik egészlete most is:

$$z-\frac{b}{a}y+\left(\frac{b}{a}g-p-qg\right)x=G(\psi),$$

a hol $\psi=D$ vagy $\frac{b}{a}$.

Hogy a másik egészletet meghatározhassuk, határozzuk meg, milyen alakú kell hogy legyen V, hogy f constansnak jőjön ki? $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial q}-D}{\frac{\partial P}{\partial p}}=f$ egyenletből V számára ezt a part. diff. egyenletet kapjuk:

$$f^2\frac{\partial P}{\partial p}-2f\frac{\partial P}{\partial q}+\frac{\partial Q}{\partial q}=0$$

ennek egészlete a Monge módszere szerint:

$$V=q\,.\,\Phi(p+qf)+\Psi(p+qf).$$

Ebből

$$P=q\,.\,\Phi^1+\Psi^1;\quad Q=\Phi+f\,.(q\Phi^1+\Psi^1)\ \text{ és }\ D=\Phi^1.$$

Tehát $P=qD+\omega(D)$, a hol ω függvényjel.

Az egészlendő egyenlet: $dp+gdq=0$, mint említők, azonos ezzel: $dP+Ddq=0$. Tehát a mostani esetre:

$$2D\,.\,dq+\bigl(q+\omega^1(D)\bigr)dD=0.$$

Ez pedig q-ban vonalos differentialis egyenlet, a mely ismert módszer szerint egészelhető. Így határozhatunk meg ebben az esetben egy φ függvényt, a melylyel azután lesz a másik egészlete az 1) egyenletnek:

$$y-f\,.\,x=F(\varphi).$$

5. $\frac{B}{A}=C$, $\frac{b}{a}=c$ constansok.

Ebben az esetben D megfelel ennek a két egyenletnek:

$$(q-C)(D_1+DD_2)+2D=0,$$
$$(q-c)(-D_1-DD_2)-2D=0,$$

de akkor még ennek is:

$$(q-c)(q-C)D_1+D(2q-C-c)=0,$$

ennek egészlete azonban:

$$D=\frac{\omega(P)}{(q-C)(q-c)}.$$

Hogy a fennebbi egyenleteknek is megfeleljen, kell lenni:

$$C-c+\omega^1(P)=0,$$

tehát $\omega(P)=(c-C)P+e$, a hol e egészleti constans.

Tehát a szóban forgó eset csak akkor lehetséges, a mikor

$$D=\frac{(c-C)P+e}{(q-c)(q-C)}.$$

De ekkor a MONGE-féle egyenletrendszernek — 2) és 3) — könnyen egészelhetők.

$dP+Ddq=0$ egészlete lesz: $\varphi=\frac{q-c}{q-C}\left((c-C)P+e\right)=\text{const.}$

$dP-Ddq=0$ egészlete lesz: $\psi=\frac{q-C}{q-c}\left((c-C)P+e\right)=\text{const.}$

tehát az 1) egyenlet elsőrendű egészletei lesznek:

$$z-Cy+(Cf-p-qf)x=F(\varphi),$$
$$z-cy+(cg-p-qg)x=G(\psi).$$

6. $\frac{B}{A}=C$ constans, $\frac{b}{a}$ azonban nem.

Az 5) egyenlet állván, a vele azonos 7) egyenlet szerint $\frac{b}{a}$ ψ függvény. Csak φ függvényt kell még kapnunk. $\frac{B}{A}=C$ adja D számára ezt az egyenletet:

$$(q-C)(D_1+DD_2)+2D=0.$$

Ennek egészlete pedig

$$P+(q-C)D=\omega\big((q-C)^2D\big),$$

a hol ω tetszésszerinti függvény.

A φ-t definiáló egyenlet: $dP+Ddq=0$, lesz:

$$(q-C)\,dD-d\omega=0.$$

Azonban $(q-C)^2D=\chi(\omega)$ alakban meghatározható.

Ezt bevezetve az egyenlet lesz:

$$\frac{dD}{\sqrt{D}}-\frac{d\omega}{\sqrt{\chi(\omega)}}=0.$$

Így φ meghatározása quadraturára van visszavive. Az 1) egyenlet egészletei lesznek:

$$z-Cy+(Cf-p-qf)x=F(\varphi),$$

$$z-\frac{b}{a}y+\left(\frac{b}{a}g-p-qg\right)x=G\left(\frac{b}{a}\right).$$

7. Sem $\frac{B}{A}$, sem $\frac{b}{a}$ nem constans, de a 6) egyenlet áll. Ekkor az ezzel azonos 5) szerint $\frac{B}{A}$ φ függvény, 7) szerint $\frac{b}{a}$ ψ függvény. Tehát az egészletek lesznek:

$$z-\frac{B}{A}y+\left(\frac{B}{A}f-p-qf\right)x=F\left(\frac{B}{A}\right),$$

$$z-\frac{b}{a}y+\left(\frac{b}{a}g-p-qg\right)x=G\left(\frac{b}{a}\right).$$

8. D az 5) egyenletnek nem tesz eleget. Ekkor $u=F(v)$ alakú elsőrendű általános egészlete 1)-nek nincsen.

*

Az előbbiek illustrálására lássunk egy pár példát.

1. $V=\sqrt{p^2+q^2}$; ebből:

$$P=\frac{p}{V},\quad Q=\frac{q}{V},\quad \frac{\partial P}{\partial p}=\frac{q^2}{V^3},\quad \frac{\partial P}{\partial q}=\frac{-pq}{V^3},\quad \frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{p^2}{V^3},$$

$$D=0,\quad f=g=-\frac{p}{q}.$$

Az egészelendő egyenlet:

$$q^2r-2pqs+p^2t=0.$$

Elsőrendű egészletei:

$$y-\frac{p}{q}x=F\left(\frac{p}{q}\right),$$

$$z=G\left(\frac{p}{q}\right).$$

Ez a második egyenlet könnyen egészelhető még egyszer. Egészlete:

$$y=x\omega(z)+\chi(z).$$

2. $V=\frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{q+1}\right)^2$. Ebből

$$P=\frac{p+1}{(q+1)^2},\quad Q=-\frac{(p+1)^2}{(q-1)^3},$$

$$\frac{\partial P}{\partial p}=\frac{1}{(q+1)^2},\quad \frac{\partial P}{\partial q}=-\frac{2(p+1)}{(q+1)^3},\quad \frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{3(p+1)^2}{(q+1)^4},$$

$$D=\frac{p+1}{(q+1)^3}=\frac{P}{q+1},\quad f=-\frac{3(p+1)}{q+1},\quad g=-\frac{p+1}{q+1},$$

$A=0$, tehát ez a példa a fennebb 3. alatt felsorolt esethez tartozik.

Az egészelendő egyenlet:

$$(q+1)^2r-4(p+1)(q+1)s+3(p+1)^2t=0.$$

Elsőrendű egészletei:

$$y+3\frac{p+1}{q+1}=F\left(\frac{p+1}{q+1}\right),$$

$$x+y+z=G\left(\frac{p+1}{(q+1)^3}\right).$$

3. A minimalis felületek problemájánál $V=\sqrt{1+p^2+q^2}$:

$$P=\frac{p}{V},\quad Q=\frac{q}{V},$$

$$\frac{\partial P}{\partial p}=\frac{1+q^2}{V^3},\quad \frac{\partial P}{\partial q}=\frac{-pq}{V^3},\quad \frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{1+p^2}{V^3},$$

$$D=\frac{i}{V^2}$$

(ha i a képzetes egység.)

D és P között a relatio:

$$D=\frac{i(1-P^2)}{1+q^2},$$

$$\frac{B}{A}=\frac{Pq+i}{P-iq}$$ az 5) egyenlettel azonos

$$\left(\frac{B}{A}\right)_1-D\left(\frac{B}{A}\right)_2=0$$

-nak nem felel meg.

Tehát a megfelelő part. diff. egyenletnek $u=F(v)$ alakú elsőrendű általános megoldása nincsen.

III.

A 6) egyenlet azokat a V függvényeket definiáló partialis differentialis egyenlet, a melyekre vonatkozó 1) egyenletnek $u=F(v)$ alakú elsőrendű általános egészletei vannak. Ha a 6) egyenletet egészelni tudnók, akkor megkapnók az összes ilyen V függvényeket.

A 6) egyenlet Monge-féle part. diff. egyenlet D számára. Ha a hozzátartozó simultan-egyenleteket alakítjuk, s az ezek egészelésére szolgáló módszereket[1] alkalmazzuk, meggyőződhetünk, hogy a 2) és 3) egyenletrendszerekkel analog simultan egyenleteknek csak egy-egy egészlete határozható meg. Ezek által

[1] Imschenetsky «Etude sur les méthodes d'integration des équations aux dérivées partielles du second ordre». III. fejezet.

kaphatunk a 6) egyenlet számára egy particularis egészletet három tetszésszerinti constanssal. Ez az egészlet:

$$D=\frac{(a-b)(P+c)}{(a-q)(b-q)}.$$

Ha IMSCHENETSKY módszerét[1] alkalmazzuk, a és b constansokat P és q, $-c$ constant a és b függvényének tekintjük, még pedig úgy, hogy

$$\frac{\partial D}{\partial a}=\frac{P+c}{(a-q)^2}+\frac{a-b}{(a-q)(b-q)}\frac{\partial c}{\partial a}=0,$$

$$\frac{\partial D}{\partial b}=-\frac{P+c}{(b-q)^2}+\frac{a-b}{(a-q)(b-q)}\frac{\partial c}{\partial b}=0,$$

akkor c számára a partialis differentialis egyenlet:[2]

$$(a-b)\frac{\partial^2 c}{\partial a\,.\,\partial b}-2\sqrt{-\frac{\partial c}{\partial a}\cdot\frac{\partial c}{\partial b}}=0.$$

De ennek egészelésére eddig módszert nem ismerünk. Így a 6) egyenlet általános egészletét nem tudjuk meghatározni.

Egy néhány particularis megoldást fennebb már láttunk. Ilyenek ezek:

$D_1 \pm DD_2=0$, ennek egészlete $P\mp qD=F(D)$,

$(q+a)(D_1\pm DD_2)+2D$, ennek egészlete
$P\pm(q+a)D=F\big((q+a)^2D\big)$.

Vályi Gyula.

---

[1] Ugyanott IV. fejezet.

[2] [E dolgozat első kiadásában e partialis differentialis egyenlet helyett tévedésből

$$(a-b)\sqrt{-\frac{\partial c}{\partial a}\cdot\frac{\partial c}{\partial b}}\cdot\frac{\partial^2 c}{\partial a\,.\,\partial b}+\frac{\partial c}{\partial a}\cdot\frac{\partial c}{\partial b}-1=0$$

állott. A tévedést KAPTEYN vette észre (*Archiv für Math. und Phys.* III. Reihe. Bd. 9. 322. lap. 2. sor), kinek azután a 6) egyenlet integrálása is sikerült.]

BIZONYOS DETERMINÁNSOK JELLEMZŐ TULAJDONSÁGAIRÓL.

1. Jelentse

$$(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$$

azt az n-edfokú determinánst, melyben az i-dik sor elemei

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}.$$

Akkor, mint ismeretes:*

$$(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})(y^{(1)}, \dots, y^{(\varrho-1)}, y^{(\varrho)}, y^{(\varrho+1)}, \dots, y^{(n)}) =$$
$$= \sum_{\varrho=1}^{n}(y^{(\varrho)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})(y^{(1)}, \dots, y^{(\varrho-1)}, x^{(1)}, y^{(\varrho+1)}, \dots, y^{(n)})$$

Ha az n-edfokú determinánsban az első m sor elemeit meghagyjuk változóknak, az utolsó $n-m$ sor helyébe pedig az

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}$$
$$(i=1, 2, \dots, n-m)$$

állandókat helyettesítjük, akkor az előbbi azonosság a következőbe megy át:

$$(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}, A)(y^{(1)}, \dots, y^{(\varrho-1)}, y^{(\varrho)}, y^{(\varrho+1)}, \dots, y^{(m)}, A) =$$
$$= \sum_{\varrho=1}^{m}(y^{(\varrho)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}, A)(y^{(1)}, \dots, y^{(\varrho-1)}, x^{(1)}, y^{(\varrho+1)}, \dots, y^{(m)}, A), \quad (1)$$

hol A rövidítés $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n-m)}$ helyett.

A jelen sorok czélja a következő tételt bebizonyítani:

---

* L. pl. E. Pascal, *I determinanti*, (Milano, 1897) § 31. A német átdolgozásban (Lipcse, 1900) § 32. foglalkozik ezzel az egyenlőtlenséggel.

A) *Az*

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)} \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

változósoroknak valamely $F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$ *függvénye akkor és csak akkor állítható elő mint*

$$(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)})$$

alakú determináns, ha a következő három tulajdonsága van:

α) F az

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)} \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

változósorok mindegyikének homogén lineáris függvénye;

β) F csak előjelét változtatja, ha két változósort fölcserélünk;

γ) F kielégíti az (1) *mintájára alkotott*

$$F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})\, F(y^{(1)}, \ldots, y^{(\varrho-1)}, y^{(\varrho)}, y^{(\varrho+1)}, \ldots, y^{(m)}) =$$
$$= \sum_{\varrho=1}^{m} F(y^{(\varrho)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})\, F(y^{(1)}, \ldots, y^{(\varrho-1)}, x^{(1)}, y^{(\varrho+1)}, \ldots, y^{(m)}) \quad (2)$$

függvényegyenletet.

Hogy F csak ebben az esetben állítható elő a kivánt alakban, az ismeretes; a következőkben tehát pusztán azt kell bebizonyítanunk, hogy e föltételek elégségesek F-nek a kivánt alakban való előállíthatására.

2. Tárgyalásainkat a következő segédtétel bebizonyításával kezdjük meg:

B) *Bármely*

$$U = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)})$$

n-edfokú determináns a

$$V = \left| b_1^{(j)} x_1^{(i)} + b_2^{(j)} x_2^{(i)} + \cdots + b_n^{(j)} x_n^{(i)} \right| \quad (i, j=1,2,\ldots,m)$$

m-edfokú determináns alakjában is állítható elő, melyben a b-k állandók. Fordítva, bármely V alakú determináns az U alakra hozható.

Ez közvetetlenül világos, ha U vagy V mint az

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

változósorok függvénye azonosan *egyenlő zérussal*. Ezt az esetet tehát a következő meggondolásokból kizárhatjuk.

Ha az U determináns nem azonosan zérus, akkor mindig találhatunk oly

$$c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_n^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

értékeket, hogy a

$$C = (c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(m)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{n-m})$$

determináns a zérustól különböző. Jelöljük e determinánsban az i-dik sor j-dik eleméhez tartozó determinánst $C_j^{(i)}$-vel és szorozzuk U-t a $C_j^{(i)}$-ből alkotott

$$C^{n-1} = (C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(n)})$$

determinánssal oly módon, hogy a két determináns sorait egymással komponáljuk. A szorzás után nyert determinánsban az első m sor ily alakú

$$g_1(x^{(i)}), g_2(x^{(i)}), \dots, g_n(x^{(i)}), \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

hol $g_j(x^{(i)})$ úgy keletkezik a C determinánsból, hogy a j-dik sor helyébe az

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$$

változókat írjuk. A szorzatdetermináns többi $n-m$ sorában a fődiagonálisban levő elem C-vel egyenlő, minden más elem pedig zérus. Tehát

$$C^{n-1}U = C^{n-m} \, | g_j(x^{(i)}) | \quad (i, j=1, 2, \dots, m)$$

és innen

$$C^{m-1}U = | g_j(x^{(i)}) |. \quad (i, j=1, 2, \dots, m)$$

Ha itt a C^{m-1} állandó tényezővel úgy osztunk, hogy valamelyik

g_j függvényt osztjuk vele, akkor U-t valóban a V alakban nyerjük kifejezve.

Induljunk ki most fordítva a V determinánsból, mely a

$$\left\| \begin{matrix} b_1^{(1)} & \dots & b_n^{(1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_1^{(m)} & \dots & b_n^{(m)} \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{(m)} & \dots & x_n^{(m)} \end{matrix} \right\|$$

matrixokból úgy keletkezik, hogy soraikat egymással komponáljuk. Minthogy a $V \equiv 0$ esetet kizártuk, azért a b-kből alkotott matrix m-edfokú determinánsai közül legalább egy a zérustól különböző értékű. Ennélfogva mindig találhatunk oly

$$\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}, \dots, \gamma_n^{(i)} \qquad (i=1, 2, \dots, n-m)$$

értékeket, hogy a

$$\Gamma = (b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(m)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{n-m})$$

determináns a zérustól különböző. Jelöljük Γ-ban az i-dik sor j-dik eleméhez tartozó aldeterminánst $\Gamma_j^{(i)}$-vel. Továbbá szegjük be a V determinánst oly n-edfokú determinánssá, melyben az első m sor ily alakú

$$\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu^{(1)} x_\mu^{(i)} \dots \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu^{(m)} x_\mu^{(i)} \sum_{\mu=1}^{n} \gamma_\mu^{(1)} x_\mu^{(i)} \dots \sum_{\mu=1}^{n} \gamma_\mu^{(n-m)} x_\mu^{(i)}, \qquad (i=1, 2, \dots, m)$$

míg a többi sorban a fődiagonálisban levő elem az egységgel, minden más elem pedig a zérussal egyenlő. Az így nyert determináns megint egyenlő V-vel. A V ezen új alakját szorozzuk meg a $\Gamma_j^{(i)}$-kből alkotott

$$\Gamma^{n-1} = (\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(n)})$$

determinánssal oly módon, hogy V sorait a másik tényező oszlopaival komponáljuk. A szorzás után nyert determinánsban az első m sor csak annyiban különbözik az U determináns megfelelő soraitól, hogy minden elem Γ-val meg van szorozva; a többi sor elemei puszta állandók. Tehát a V determináns valóban az U alakra hozható.

3. Most már lássuk, hogy F-re nézve rendre milyen következtetéseket vonhatunk az **A)** tételben említett *a), β), γ)* tulajdonságokból.

Ha valamely a) tulajdonságú $F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$ *függvény oly két D és D' raczionális egész függvény szorzatára bontható fel, melyek egyike sem puszta állandó, akkor az*

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$$
$$(i=1, 2, \ldots, m)$$

változósorok úgy oszthatók két osztályba, hogy D csak az egyik és D' csak a másik osztályba tartozó változósorokat tartalmazza.

Ha ugyanis

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$$

egy tetszőleges változósor, akkor — F e változósorban lineáris lévén — a D és D' tényezők egyike e változósorban lineáris, a másik pedig tőle egészen ment. Még pedig lesznek oly változósorok, melyekben D lineáris és olyanok, melyekben D' lineáris. Ugyanis ellenkező esetben a D és D' tényezők közül az egyik puszta állandó volna.

4. *Ha valamely* $F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$ *függvénynek az a) tulajdonságon kívül még van a β) tulajdonsága is* (és F nem azonosan zérus), *akkor F az x-eknek irreduczibilis raczionális egész függvénye.*

Tegyük ugyanis fel, hogy F reduczibilis, azaz, hogy

$$F = DD',$$

hol a D és D' raczionális egész függvények egyike sem puszta állandó. Akkor az imént mondottak értelmében van két oly változósor, mondjuk

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)},$$

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)},$$

melyek közül az első csak D-ben, a második csak D'-ben fordul elő.

Ezt tudva, helyettesítsük az $F=DD'$ egyenletben az

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$$

változósor helyébe is az

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$$

változósort. E helyettesítés után F a *β)* tulajdonságnál fogva eltünik, ellenben D változatlan marad és D' sem fog eltünni, hanem csak annyiban változik, hogy bizonyos változók másképp lesznek jelölve. Föltevésünk tehát ellenmondásra vezet.

4. Tegyük most már fel, hogy F-nek az *α)*, *β)* és *γ)* tulajdonsága van.

A (2) alatti függvényegyenlet röviden így is írható

$$F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})\, F(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}) = \\ = \sum_{\varrho=1}^{n} \varphi_1(y^{(\varrho)}) f_\varrho(x^{(1)}), \tag{3}$$

hol

$$f_\varrho(x) = F(y^{(1)}, \ldots, y^{(\varrho-1)}, x, y^{(\varrho+1)}, \ldots, y^{(m)})$$

és hasonlóképen

$$\varphi_i(y) = F(x^{(1)}, \ldots, x^{(i-1)}, y, x^{(i+1)}, \ldots, x^{(m)}).$$

Ha még tekintetbe veszszük F-nek *β)* tulajdonságát, akkor a (3) alatti egyenletből a következők folynak:

$$\delta_{ij} F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})\, F(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}) = \\ = \sum_{\varrho=1}^{m} \varphi_i(y^{(\varrho)}) f_\varrho(x^{(j)}), \tag{4}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

hol δ_{ij} az egységet vagy a zérust jelenti a szerint, hogy $i=j$ vagy $i \gtrless j$.

Tehát ha a

$$\varphi = \begin{vmatrix} \varphi_1(y^{(1)}) & \ldots & \varphi_m(y^{(1)}) \\ . & \ldots & . \\ \varphi_1(y^{(m)}) & \ldots & \varphi_m(y^{(m)}) \end{vmatrix}$$

determinánst úgy szorozzuk a

$$\varDelta = \begin{vmatrix} f_1(x^{(1)}) & \dots & f_m(x^{(1)}) \\ . & \dots & . \\ f_1(x^{(m)}) & \dots & f_m(x^{(m)}) \end{vmatrix}$$

determinánssal, hogy ψ oszlopait a $\varDelta$ soraival komponáljuk, akkor az így nyert determinánsban a fődiagonális bármely eleme az

$$F(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})\, F(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}) \tag{5}$$

szorzattal egyenlő, minden más elem pedig zérus. E szerint $\psi\varDelta$ a (5) alatti szorzat m-dik hatványával egyenlő. Ez F irreduczibilis volta miatt csak úgy lehetséges, hogy ψ és $\varDelta$ mindegyike csak egy állandó tényezőben különbözik $F(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$ és $F(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)})$ bizonyos hatványainak szorzatától. Ha még tekintetbe veszszük, hogy ψ és $\varDelta$ az egyes változókban hányadfokúak, akkor a

$$\varDelta = \lambda\, F(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})\, F(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)})^{m-1}$$
$$\psi = \mu\, F(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})^{m-1}\, F(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)})$$

egyenleteket nyerjük, hol λ és μ a zérustól különböző állandók.

Helyettesítsünk e két egyenlet közül az elsőben az y-ok helyébe állandó értékeket; akkor $\varDelta$ egy V alakú determinánsba megy át, az egyenlet jobb oldala pedig csak egy állandó tényezőben fog az $F(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$ függvénytől különbözni.

Ezzel, minthogy a **B)** segédtétel értelmében V mindig az U alakra hozható, az **A)** tétel teljesen be van bizonyítva.

Kürschák József.

A KAPCSOLÁSTANHOZ.

A M. Ph. L. VIII. kötetében (p. 350) megmutattam, hogy az ismétlődő elemekből alkotott permutatiók képzése és az ismétlésnélküli combinatiók alkotása egy és ugyanaz az operatió. Most egy másik ilyen egyszerű kapcsolatra akarok utalni, megmutatva, hogy n elemnek ismétléses k-adosztályú combinatióinak képzése ugyanaz a művelet, mint $n+k-1$ elem egyszerű k-adosztályú combinatióinak megalkotása.

Legyen adva n különböző elem:

$$a, b, c, \ldots, r.$$

Egy ismétléses k-adosztályú combinatió-csoport a következő: (mindig *abc* sorban képzelhetők az elemek)

$$\underbrace{aa\ldots a}_{k_1}\ \underbrace{bb\ldots b}_{k_2}\ \underbrace{cc\ldots c}_{k_3}\ldots$$

a hol

$$k_1+k_2+k_3+\cdots=k.$$

Ez a csoport teljesen meg van határozva, ha tudom, hogy *mely elemek vannak benne* (vagyis az $abc\ldots r$ elemek közül, melyek fordulnak elő e csoportban) és tudom, hogy *hányadik helyen ismétlődnek ezek az elemek.* Így például a jelen esetben ismétlődés van a $2, 3, \ldots, k_1$; k_1+2, $k_1+3, \ldots, k_1+k_2$; $k_1+k_2+2, \ldots, k_1+k_2+k_3 \ldots$ stb. helyeken.

E számok, melyek az ismétlődő elemek sorszámai, nem egyebek, mint a

$$2, 3, 4, \ldots, k$$

számok sora annyi kihagyással, a hány betű szerepel a csoportban a csoport első betűje után.

E szerint tehát, ha megmondom, hogy egyik csoportban például a

$$b, c, e, g, \ldots$$

elemek szerepelnek (pl. i elem) és $i-1$ kihagyással felírjuk a

$$2, 3, 4, \ldots, k$$

számot, (összesen tehát $k-i$ számot) [például 2, —456—9...] akkor ezzel az illető csoport teljesen jellemezve van. [A példaképpen említett esetben ez a csoport volna: *bbccccegg*... mert a b elem a 2-ik helyen ismétlődik, a következő c elem a 4., 5., 6-ik helyeken, a csoport következő eleme nem ismétlődhetik, mert a 8-ik helyen nincs ismétlődés.][1]

A csoport jellemzéséhez tehát szükséges a csoportban szereplő i számú betű és az ismétlődő betűk rendszámai: $k-i$ szám, vagyis az $n+k-1$ számú

$$a, b, c, \ldots, r, \quad 2, 3, 4, \ldots, k$$

elemekből ismétlés nélkül kiválasztott k elem [ezek között mindenesetre legalább egyik betű lesz, mert csak $k-1$ szám van]. Világos, hogy az n elem minden ismétléses k-adosztályú combinátiójának egyetlen egy ilyen egyszerű combinatió felel meg és viszont. Az n elem k-adosztályú ismétléses combinatióinak száma tehát ugyanannyi, mint az $n+k-1$ elem egészen k-adosztályú combinatióinak száma.[2]

Beke Manó.

---

[1] Legegyszerűbb a csoport felírása, ha először a kihagyott számok helyeit jelöljük meg, mert ott fordul az elem és a közöket kitöltjük. A vastag szám kihagyott számot jelent:

$$\begin{array}{ccccccccc} .\,2, & \mathbf{3} & \mathbf{4} & 5 & 6 & \mathbf{7} & \mathbf{8} & 9, \ldots \\ b & c & & & & e & g & \end{array}$$

[2] Felhasználom ezt az alkalmat, hogy egy előbbi czikkemet a [CAUCHY-féle integráltételek M. Ph. L. ezidei III. füzetében] megcorrigáljam. Sajnálatos tévedés folytán a nyomda nem vette tekintetbe a szerkesztőségnek a kellő időben átadott correcturámat. Így esett meg, hogy czikkem 129-ik lapja hemzseg a sajtóhibáktól és hogy az 5-ik pont olyan formában jelent meg, mint az eredeti kéziratban, nem pedig a correcturámban már

megváltoztatott alakjában. A 129-ik lapon a legfőbb, értelemzavaró sajtóhibák ezek: A 9-ik sorban $|z_{i+1}-z_i| =$ után 0 teendő. A 11-ik sor képletében n helyett $n+1$ teendő. A 14-ik sorban *számmal* helyett *számnál* irandó. A 15-ben $L'<L$ helyett $L'>L$ teendő. A 23-ik sor baloldalán az n exponens kihagyandó. A 130-ik lapon a 2-ik sorban ismét n helyett $n+1$ teendő; éppen így a következő sorban és az 5-ik sorban εi_i helyett ε_i irandó. Az egész 5-ik pontot az említett correcturában kihagytam és helyébe a következő gondolatmenet lépett: Ha a Γ_1 görbe nem foglaltatik az $f(z) = \Sigma a_n z^n$ convergentia körén belül, akkor e hatványsor analytikai folytatásait kell megalkotni a convergentia körön túl. Tegyük fel, hogy a C körön belül elég közel egy vele concentrikus C_1 kört rajzoltunk és ennek valamelyik pontjához tartozó analytikai folytatást alkotjuk, mely egy γ körön belül convergens sorra vezet és a γ kör kinyulik a C-ből, továbbá C_1 egy más pontjában éppen így a γ-val szomszédos γ_1-et készitjük el, mely a γ-val egy bizonyos l körlencsét alkot és így haladunk tovább, míg a $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ körökkel a C kört egészen körülvettük. Ha már most a γ körben egy c (négyszögalakú) zárt görbét szerkesztünk, melynek egyik oldala a C_1-en, más két oldala a γ két lencséjében van, akkor e c mentén vett integrál eltűnik, mert a c görbe egészen benne van a γ convergentia körben. Minthogy pedig a c-nek a C_1-en levő oldala mentén vett új integrál ellenkezően egyenlő a C_1 mentén vett integrál ezen darabjával, tehát a CAUCHY-tétel érvényessége a C_1 és c-ből álló összetett, (a C-ből kinyuló) görbére nézve is bebizonyult. Most a c_1 görbét alkotjuk meg a γ_1 körben úgy, hogy a γ és γ_1 lencséjében levő oldala megegyezzék a c görbe megfelelő oldalával. Erre a c_1 görbére is érvényes a CAUCHY-tétel és minthogy a c és c_1-nek egy oldala közös, a CAUCHY-tétel érvényessége kiterjesztett a $C+c_1+c_1$ területre. Így haladva tovább, eljutunk egy a C kört teljesen körülvevő görbéhez, mely a C-től mindenütt véges távolságban van (csak a C-n levő singularitás helyen nem). Ezen eljárás folytatásával eljutunk magához a megadott Γ_1 görbéhez is, melyen belül feltételünk szerint $f(z)$ mindenütt szabályos. Ezzel a CAUCHY-tételt minden egyszerűen összefüggő területre, következésképpen minden ilyenre felbontható többszörösen összefüggő területre nézve is kimutattuk.

Beke Manó.

ÚJ MÓDSZER A TÉRBELI ALAKZATOK ÁBRÁZOLÁSÁRA.

(Első közlemény.)

Projektiv természetű, kivált vonalgeometriai szerkesztések technikai kivitele az ábrázoló geometria szokásos módszereivel gyakran nagyon bonyolult. A komplikáczió egyik oka, hogy az ábrázolásban a pont és a sík egymásban fekvésének csak közvetett kritériuma van, t. i. egyrészt a pont és az egyenes, másrészt a sík és az egyenes egymásban fekvése kritériumainak összefoglalása. A következőkben olyan ábrázolási módot adok meg, melyben mind a három kritérium: pont és egyenes, pont és sík, egyenes és sík egymásban fekvésének kritériumai a szemléletnek közvetetlenül hozzáférhető alakban jelennek meg.

Az I—VII. fejezetekben végzett vizsgálatok tisztán projektiv jellegűek. A tér egyeneseit és síkjait egy lineáris kongruenczia, pontjait a kongruenczia és a képsíkban fekvő kongruencziaegyenes egy kitüntetett pontja segítségével ábrázolom egy képsíkon úgy, hogy a síkok és pontok képei egymásban fekvő pontból és egyenesből összetett pontegyenesek, az egyenesek képei pedig egymásban fekvő pontokból és kúpszeletekből összetett pontkúpszeletek. Az egyenest mint síksort és mint pontsort két különböző pontkúpszelet ábrázolja, melyeknek azonban kúpszelete közös, pontjai közt pedig nagyon egyszerű összefüggés áll fenn.

A részletes diszkusszió rámutat arra, hogy az ábrázolás szempontjából bizonyos térelemek és pedig a kongruenczia tengelyei és a képsíkban fekvő kongruencziaegyenes akár mint sík-, akár mint pontsorok kivételesen viselkednek. A legfontosabb szinguláris térelemek a kongruenczia tengelyeinek nyompontjai; az egyeneseket ábrázoló pontkúpszeletek kúpszeletei ezeken mennek át. A VIII. fejezetben ezt a két pontot arra használom föl, hogy az ábrázolásnak metrikus jelleget adjak. A két pontot a képsík képzetes körpontjaiba helyezem; ezáltal az egyenesek ábrázolására szolgáló kúpszeletek körökké, nullakörökké és a sík végtelenben fekvő egyenesét tartalmazó egyenespárokká lesznek. Az ilyen módon nyert metrikus jelleg révén lesz az ábrázolás konstruktive használhatóvá.

A IX. fejezetben tárgyalom azokat a planimetriai szerkesztéseket, a melyek az adott ábrázolásban a térbeli, projektiv alapszerkesztések síkbeli equivalensei. Figyelmen kívül hagyom egyelőre azt, hogy az ábrázolás mi módon történt. A IX. fejezet ilyen módon konstruktiv tárgyalása egy geometriának, melyben bizonyos síkbeli alakzatokat pontoknak, másokat egyeneseknek és ismét másokat síkoknak nevezek, és a melyben ezen alakzatokat bizonyos föltételek mellett egymásban fekvőknek mondom.

A X. fejezet tárgya a térbeli alakzatok ábrázolása és rekonstrukcziója; vagyis lényegében a térelemek térbeli helyzete és képei közti kapcsolat konstruktiv megállapitása. A térelemek térbeli helyzetének megadására a középponti vetítést alkalmazom.

Az adott ábrázolásnak más ábrázolási eljárásokkal (derékszögű, ferde parallelprojekczió, stb.) való kapcsolata hasonló módon vizsgálható.

I.

Az egyenes ábrázolása.

Az adandó ábrázolás czéljára kiválasztok egy π képsíkot és egy $\mathfrak{K}^2$ lineáris kongruencziát úgy, hogy a kongruenczia t_1 és t_2 tengelyei közül egyik sem fekszik a képsíkban. A t_1 és t_2 tengelyeknek a képsíkkal való metszéspontjait I_1-gyel és I_2-vel jelölöm. A π képsík a $\mathfrak{K}^2$ kongruencziának egy u egyenesét tartalmazza.

Az u egyenes az I_1 és I_2 pontokon megy keresztül.[1]

A kongruenczia segítségével egy tetszésszerinti a egyenest a képsíkon a következő módon ábrázolok:

Az a egyenest metsző kongruencziaegyenesek, vagyis az a, t_1 és t_2 egyeneseket metsző egyenesek összesége általában hiperboloidikus egyenessor, melynek a π képsíkon való nyompontjai egy $\underline{a}$ kúpszeletet alkotnak. Az $\underline{a}$ kúpszelet átmegy az I_1 és I_2 pontokon és az a egyenes $\bar{a}$ nyompontján. Az $\underline{a}$ kúpszeletet és a rajta fekvő $\bar{a}$ pontot együttesen az $\underline{\bar{a}}$ pontkúpszeletnek nevezem; az $\bar{a}$ pontot a pontkúpszelet pontjának, az $\underline{a}$ kúpszeletet a pontkúpszelet kúpszeletének mondom.

Az a egyenestől ily módon meghatározott $\underline{\bar{a}}$ pontkúpszelet viszont az a egyenest általában egyértelműen határozza meg. Minthogy ugyanis az $\underline{a}$ kúpszelet átmegy az I_1 és I_2 pontokon, azért a kúpszelet többi pontjain átmenő kongruencziaegyenesek egy-egy az I_1 és I_2 pontokon átmenő kongruencziaegyenessel együtt általában hiperboloidikus egyenessort alkotnak; az a egyenes, mint ennek a sugársornak az $\bar{a}$ ponton átmenő vezető egyenese, általában egyértelműen van meghatározva.

Ilyen módon valamely térbeli a egyenesnek általában a képsík $\underline{\bar{a}}$ pontkúpszelete felel meg, melynek kúpszelete az I_1 és I_2 pontokon megy át; és viszont a sík egy $\underline{\bar{a}}$ pontkúpszeletének, melynek kúpszelete az I_1 és I_2 pontokon megy át, általában egy térbeli a egyenes felel meg.

Az a egyenes meghatározta $\underline{\bar{a}}$ pontkúpszeletet az a egyenes képének, az a egyenest az $\underline{\bar{a}}$ pontkúpszelet eredetijének nevezem.

Az adott ábrázolási elv bizonyos egyeneseknél többé-kevésbbé megtagadja a szolgálatot, a mennyiben vagy a pontkúpszelet pontja vagy kúpszelete határozatlan. Az ilyen módon az ábrázolás szempontjából szinguláris egyenesek a következők:

---

[1] Parabolikus kongruenczia esetén, vagyis midőn a t_1 és t_2 tengelyek egybeesnek, az elmondandók lényegtelenül módosulnak. A jelenlegi alkalmazás szempontjából egyébként a parabolikus kongruenczia esete nem érdekel.

1. Az u egyenes. Az $\bar{u}$ pont határozatlan. Az $\underline{u}$ kúpszelet a kétszeresen számító u egyenes.

2. A t_1 és t_2 egyenesek, mint a melyek az összes kongruencziaegyeneseket metszik; az illető kúpszeletek ennélfogva határozatlanok.

3. A képsíkban fekvő egyenesek, mint a melyeknek nyompontja határozatlan. A megfelelő pontkúpszelet kúpszelete ellenben — az u egyenes kivételével — határozott, és pedig az illető egyenes és az u egyenes alkotta egyenespár.

Bizonyos tágabb értelemben szingulárisaknak tekinthetők még egyrészt a többi, az u egyenest metsző egyenesek, másrészt a $\mathfrak{K}^2$ kongruenczia további egyenesei. Az utóbbiaknál a pontkúpszelet kúpszelete a nyompontot az I_1 és I_2 pontokkal összekötő egyenespárrá fajul el; az előbbieknél pedig olyan egyenespárrá, mely az u egyenest tartalmazza. A pontkúpszelet pontja valamennyinél egyértelműen van meghatározva.

Az 1. és 3. alatti szinguláris egyenesek a képsíkban feküdvén, megállapodhatunk abban, hogy önmaguk ábrázolják magukat. Ilyképen az alkalmazásnál az ábrázolás egyértelmű voltát illetőleg majd csak a t_1 és t_2 egyenesekkel kell számolnunk.

Az eredeti egyeneseknek képeikből való rekonstrukcziója általában egyértelmű. Kivételt csak az a két pontkúpszelet alkot, melyeknek pontjai az I_1, ill. az I_2 pontok, kúpszelete pedig a kétszeresen számító u egyenes. Ez a kivételes viselkedés azonban az adandó alkalmazásnál nehézséget nem okoz.

II.

A sík ábrázolása.

A tér síkjait a π képsíkon a $\mathfrak{K}^2$ lineáris kongruenczia segítségével a következő módon ábrázolom:

Az α síkban általában a kongruencziának egy k_α egyenese fekszik; az α sík nyomvonalát a képsíkon $\underline{\alpha}$-val, a k_α egyenes nyompontját $\bar{\alpha}$-val jelölöm. A nyomvonal és a nyompont általában egyértelműen vannak meghatározva, és a nyompont a nyomvonalon fekszik. Az $\bar{a}$ pontot és az $\underline{a}$ egyenest együtt $\underline{\bar{a}}$ pontegyenesnek nevezem; $\bar{a}$ a pontegyenes pontja, $\underline{a}$ a pontegyenes egyenese.

Az α sík által ilyen módon meghatározott $\underline{\bar{a}}$ pontegyenes viszont az α síkot általában egyértelműen határozza meg. Az $\bar{a}$ ponton át ugyanis általában egy k_α kongruencziaegyenes fektethető, a mely általában az $\underline{a}$ egyenestől különbözik: a sík, mint az $\underline{a}$ és k_α egyeneseken át fektethető sík tehát általában egyértelműen van meghatározva.

Ilyen módon a tér egy α síkjának általában a képsík egy $\underline{\bar{a}}$ pontegyenese, és viszont a képsík egy $\underline{\bar{a}}$ pontegyenesének általában a tér egy α síkja felel meg.

Az α sík által meghatározott $\underline{\bar{a}}$ pontegyenest az α sík képének, az α síkot pedig az $\underline{\bar{a}}$ pontegyenes eredetijének nevezem.

A sík ábrázolására adott előírás bizonyos esetekben megtagadja a szolgálatot és pedig, ha vagy az $\bar{a}$ pont, vagy az $\underline{a}$ egyenes, vagy végre mindkettő határozatlan. Ebben az értelemben szinguláris viselkedésű síkok a következők:

1. A π képsík. A megfelelő pontegyenes teljesen határozatlan.

2. A többi, az u egyenest tartalmazó sík. A pontegyenes pontja határozatlan.

3. A t_1 és t_2 tengelyen átmenő síkok. A megfelelő pontegyenesek pontjai határozatlanok.

Az eredeti sík reprodukcziója képéből általában szintén egyértelmű. Kivételt csak azok az $\underline{\bar{a}}$ pontegyenesek képeznek, melyeknél vagy több k_α kongruencziaegyenes fektethető az $\bar{a}$ ponton át, vagy pedig az $\bar{a}$ ponton átmenő k_α kongruencziaegyenes az $\underline{a}$ egyenessel egybeesik. Ilyen módon a reprodukcziót illetőleg szinguláris pontegyenesek:

1. Azok, a melyeknek pontja I_1 vagy I_2.

2. Azok, a melyeknek egyenese az u egyenes.

III.

Egyenes és sík egymásban fekvésének kritériuma.

Az a egyenes és az α sík egymásban feküsznek; milyen összefüggésben vannak egymással az egyenes és a sík $\underline{\bar{a}}$ és $\underline{\bar{\alpha}}$ képei?

Fölteszem, hogy a két kép egyértelműen meg van határozva. Az $\bar{a}$ pont e szerint az a egyenes egyértelműen meghatározott nyompontja; az $\underline{\alpha}$ egyenes az a egyenesen átmenő α sík egyértelműen meghatározott nyomvonala; az $\bar{a}$ pont ennélfogva az $\underline{\alpha}$ egyenesen fekszik. Másrészt a k_α kongruencziaegyenes az α síkban fekszik és így vagy metszi az $\underline{a}$ egyenest vagy egybeesik vele; az $\bar{\alpha}$ pont mindkét esetben az a kúpszeleten fekszik. A pontkúpszelet pontja e szerint a pontegyenes egyenesén, a pontegyenes pontja a pontkúpszelet kúpszeletén fekszik. Röviden azt mondom, hogy az $\underline{\bar{a}}$ pontkúpszelet és az $\underline{\bar{\alpha}}$ pontegyenes egymásban feküsznek.

Legyen viszont $\underline{\bar{a}}$ egy (az I_1 és I_2 pontokon átmenő) pontkúpszelet és $\underline{\bar{\alpha}}$ egy pontegyenes, melyek egymásban feküsznek. Fölteszem, hogy $\underline{\bar{a}}$ az eredeti a egyenest, $\underline{\bar{\alpha}}$ az eredeti α síkot egyértelműen meghatározzák.

A $\bar{a}$ ponton átmenő és a föltevés szerint egyértelműen meghatározott k_α kongruencziaegyenes az $\underline{a}$ kúpszelet által a kongruencziából kiválasztott hiperboloidikus egyenessorba tartozik és ennélfogva vagy metszi az a egyenest, vagy összeesik vele (az utóbbi eset csak elfajuló hiperboloidikus sor esetén lehetséges). Másrészt az $\underline{a}$ pont az $\underline{\alpha}$ egyenesen fekszik. Az a egyenesnek tehát úgy a k_α, mint az $\underline{\alpha}$ egyenessel van közös pontja. Ha ez a két pont különböző, akkor az a egyenes okvetlen az α síkban fekszik.

Az a egyenes a k_α és $\underline{\alpha}$ egyeneseket csak akkor metszheti egy és ugyanabban a pontban, ha az $\bar{a}$ és $\bar{\alpha}$ pontok egybeesnek. Ebben az esetben csak akkor mondom, hogy $\underline{\bar{a}}$ és $\underline{\bar{\alpha}}$ egymásban feküsznek, ha az $\underline{\alpha}$ egyenes az $\underline{a}$ kúpszeletet érinti.

Ez az eset könnyen diszkutálható és a már elmondottakkal a következő tételben foglalható össze:

Annak, hogy az a egyenes és az α sík, melyek $\underline{\bar{a}}$ és $\underline{\bar{\alpha}}$ képeiket egyértelműen meghatározzák és viszont képeik által egyértelműen meg vannak határozva, egymásban feküdjenek, szükséges és elegendő feltétele, hogy az $\underline{\alpha}$ egyenes a $\underline{a}$ kúpszeletnek az $\bar{a}$ és $\bar{\alpha}$ pontok által meghatározott szelője, ill. érintője legyen.

A kritérium nem alkalmazható olyan egyenesekre és síkokra, melyek akár az ábrázolás, akár a rekonstrukczió tekintetében kivételesen viselkednek. Ezek közül eddig csak a képsíkban fekvő egyeneseket és a képsíkot ábrázoltuk — önmaguk által. A képsíkban fekvő egyenes és egy sík egymásban fekvésének, valamint a képsík és egy egyenes egymásban fekvésének kritériumai kéznél fekvők.

IV.

Két sík metszésvonala.

Az $\underline{\bar{\alpha}}$ és $\underline{\bar{\beta}}$ képeik által megadott α és β síkok metszésvonalának képét megszerkeszteni, a mondottak után azonos a következő feladattal: keresni olyan pontkúpszeletet, mely az $\underline{\bar{\alpha}}$ és $\underline{\bar{\beta}}$ pontegyenesek mindegyikével a megelőző fejezetben adott kritériumban leírt összefüggésben van, és melynek kúpszelete az I_1 és I_2 pontokon átmegy. A kúpszelet ennélfogva átmegy még az $\bar{\alpha}$ és $\bar{\beta}$ pontokon is; a meghatározásához szükséges ötödik pont pedig az $\underline{\alpha}$ és $\underline{\beta}$ egyenesek metszéspontja, mely mint a metszésvonal nyompontja, a keresett pontkúpszelet pontja.

A metszésvonalat ábrázoló pontkúpszelet ilyen módon meg van határozva, hacsak a következő esetek valamelyike fönn nem forog:

1. Az α és β síkok egybeesnek.
2. A síkok valamelyikét nem tudjuk ábrázolni.
3. Az $\underline{\alpha}$ és a $\underline{\beta}$ egyenesek egybeesnek.

4. Az $\bar{\alpha}$ és a $\bar{\beta}$ pontok egybeesnek.

5. Az $\bar{\alpha}$ és $\bar{\beta}$ pontok valamelyike egybeesik az $\underline{\alpha}$ és $\underline{\beta}$ egyenesek metszéspontjával.

6. Az 5.-ben említett három pont valamelyike összeesik az I_1 vagy az I_2 ponttal.

Az utolsó eset az alkalmazások szempontjából nem érdekel. Az 1. alatti esetben a metszésvonal határozatlan. A többi esetban azonban a metszésvonal meghatározott egyenes. Kérdés, hogy ábrázolható-e? ha igen, úgy miképen szerkeszthető meg az ábrázoló pontkúpszelet?

Azok közül a síkok közül, melyekhez az adott ábrázolási elv pontegyenest nem rendel, csupán a képsíkot vagyunk képesek nevével megadni. A 2. alatti esetben ennélfogva — legalább egyelőre — csak akkor lehet szó a metszésvonal ábrázolásáról, ha a síkok egyike a képsík. Ebben az esetben azonban a megoldás triviális; a keresett metszésvonal a másik sík nyomvonala. Hasonlóképen triviális a megoldás a 3. alatti esetben is, a mikor ugyanis a két sik nyomvonala közös.

A 4. alatti esetben a két sík metszésvonala az egybeeső $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ ponton átmenő kongruencziaegyenes; az egyenest az $\underline{\bar{\alpha}}$ pontkúpszelet ábrázolja, melynek pontja az $\bar{\alpha}$ pont, kúpszelete pedig az $[\bar{\alpha}I_1, \bar{\alpha}I_2]$ egyenespár.

Végre az 5. alatti esetben, ha például az $\bar{\alpha}$ pont esik össze a két egyenes metszéspontjával, akkor az $\underline{\alpha}$ egyenes a pontkúpszelet kúpszeletét érinti; a kúpszelet négy pontja és az egyikben érintő egyenes által ismét egyértelműen van meghatározva.

A kúpszelet esetleges szétesését nem tekintettem kivételes esetnek.

V.

A pont ábrázolása.

A projektiv tér három síkjának vagy egy egyenese vagy csupán egy pontja közös. Annak a kritériuma, hogy három sík egy közös egyenest tartalmazzon, az előző megfontolások alapján könnyen megadható. Három olyan sík, melyek a kritériumot nem elégítik ki, egyértelműen határozza meg a tér egy pontját, mint a három sík metszéspontját.

Könnyen adható meg továbbá annak a kritériuma is, hogy a tér két egyenese ugyan abban a síkban feküdjék. Két egyenes, mely a kritériumot kielégíti, ugyancsak egyértelműen határoz meg egy pontot, mint a két egyenes metszéspontját.

A pont ábrázolása e szerint akár a sík, akár az egyenes ábrázolásával és az illető kritériumok kifejtésével elintézettnek volna tekinthető; konstruktiv szempontból mindenesetre csak akkor, ha még az alapvető szerkesztések: egyenes fektetése két ponton át, sík fektetése ponton és egyenesen át megadatnának; a mi viszont a pont és az egyenes, illetőleg a pont és a sík egymásban fekvése kritériumainak kifejtése után elintézhető. Az illető kritériumok a pontnak akár három közös egyenest nem tartalmazó sík, akár pedig két egymást metsző egyenes által való meghatározására támaszkodhatnának.

Mindez elvégezhető, és ezzel a pont, az egyenes és a sík egy képsíkon egy lineáris kongruenczia segítségével általánosságban ábrázoltattak a nélkül, hogy szükséges lett volna bármely további téralakzat kitüntetése. Elméleti szempontból lényeges ez az eredmény; a gyakorlati hasznavehetőség tekintetében azonban nem felel meg, és pedig két okból. Először azért, mert a pont előállítása akár három sík, akár két egyenes segítségével nem kanonikus, és újabb téralakzat kitüntetése nélkül nem is tehető kanonikussá; másodszor, mert az említett kritériumok, melyekre az alapvető szerkesztések támaszkodnak, tulságosan nehézkesek.

Az említett hiányok közül az elsőn segíthetünk, ha a pont helyének kijelölésére egy harmadik módszert alkalmazunk és a pontot mint egyenes és sík metszéspontját adjuk meg. A pontot ugyanis a rajta átmenő kongruencziaegyenes és az u egyenesen és a ponton átmenő sík általában egyértelműen határozzák meg és viszont a pont is általában egyértelműen határozza meg az egyenest és a síkot. A kongruencziaegyenesek és az u egyenesen átmenő síkok e szerint bizonyos értelemben koordinátarendszert alkotnak. A koordinátarendszernek a képsíkon való ábrázolása a tér pontjainak általánosságban megfordíthatóan egyértelmű ábrázolását szolgáltatná. Egyelőre még nem szolgáltatja, mert újabb akadály merül fel; az u egyenesen átmenő síkok ugyanis az ábrázolást illetőleg szingulárisan viselkednek. Hogy czélhoz jussunk, először is ezeket a síkokat kell valami módon ábrázolnunk.

Az u egyenesen átmenő síkokat a következő módon ábrázolom: Az $[u, t_1]$ síkhoz az $\{I_2, u\}$, az $[u, t_2]$ síkhoz az $\{I_1, u_2\}$ pontegyenest rendelem. Kiválasztok továbbá az u egyenesen egy I_1-től és I_2-től különböző, egyébként tetszésszerinti U pontot. A π képsíkhoz az $\{U, u\}$ pontegyenest rendelem. Az u tartójú síksor három síkjához e szerint egy-egy pontegyenest rendeltem; a három pontegyenes egyenese u. Megállapodom végre abban, hogy az u tartójú síksor összes síkjait olyan pontegyenesek által ábrázolom, melyeknek egyenese u, és pedig úgy, hogy a síksor és a megfelelő pontegyenesek pontjai által alkotott pontsor projektivek legyenek. A projektiv geometria alaptétele értelmében ez a megállapodás a síksor minden síkjához határozott pontegyenest, és viszont minden pontegyeneshez, melynek egyenese u, határozott síkot rendel.

Ilyen módon egyetlen U pont kitüntetése árán sikerült az u tartójú síksor és az u egyenesű pontegyenesek szinguláris viselkedését — legalább az ábrázolás egyértelmű volta szempontjából[1] — megszüntetnünk. Nem részletezem egyelőre, hogy miként használható fel az U pont kitüntetése az egyenes ábrázolásánál fellépő szingularitások megszüntetésére és a sík és egyenes egymásban fekvésére adott kritérium egységessé tételére. Az u tartójú síksor ábrázolásával első sorban az volt a czélom, hogy a tér pontjait kanonikus módon ábrázolhassam.

A tér egy tetszésszerinti A pontján át, ha csak nem fekszik

[1] Az ábrázolás folytonossága szempontjából az illető síkok és pontegyenesek továbbra is szingulárisan viselkednek.

a t_1, t_2, u egyenesek valamelyikén, a $\mathfrak{K}^2$ kongruencziának egy határozott egyenese és az u tartójú síksornak egy határozott síkja megy át. Az egyenest egy széteső pontkúpszelet ábrázolja, melynek pontja az egyenes $\bar{A}$ nyompontja, kúpszelete az $\bar{A}I_1$, $\bar{A}I_2$ egyenespár. A sík képe egy $\{U_A, u\}$ pontegyenes. Az A ponton átmenő kongruencziaegyenest az $\bar{A}$ pont, a ponton és az u egyenesen átmenő síkot pedig az u egyenesen fekvő U_A pont egyértelműen határozzák meg; a kongruencziaegyenes és a sík végre egyértelműen határozzák meg az A pontot mint metszéspontjukat.

Ilyképen a tér minden A pontjához, mely a t_1, t_2, u egyenesek egyikén sem fekszik, a π sík egy $\bar{A}$ és az u egyenes egy U_A pontja tartozik; és viszont a π sík minden nem az u egyenesen fekvő $\bar{A}$ pontja és az u egyenes minden U_A pontja egyértelműen határozzák meg a tér egy A pontját. A tér azon pontjait tehát, a melyek a t_1, t_2, u egyenesek egyikén sem feküsznek, megfordíthatóan egyértelműen ábrázoltuk a π sík azon pontpárjain, melyek egy az u egyenesen kívül és egy rajta fekvő pontból állanak. A pontpár helyett a pont ábrázolására az $\bar{A}$ pontból és az $\underline{A} \equiv \bar{A}U_A$ egyenesből összetett $\underline{\bar{A}}$ pontegyenest alkalmazom, mi által a pontok a síkokhoz analog módon ábrázoltattak.

Az u egyenes pontjainak ábrázolását az adott módszer nem szolgáltatja. Megállapodom abban, hogy az u egyenes pontjait azokkal a pontegyenesekkel ábrázolom, melyeknek pontjai maguk az illető pontok, egyenesük pedig az u egyenes.

A projektiv tér pontjai a t_1 és t_2 egyeneseken fekvő, I_1 és I_2-től különböző pontok kivételével megfordíthatóan egyértelműen ábrázoltattak a projektiv képsík pontegyeneseinek egy rendszerén; a rendszert a képsík összes pontegyenesei alkotják azon pontegyenesek kivételével, melyeknek pontjai az u egyenesen feküsznek, egyenesük azonban nem az u egyenes. A pontegyeneseknek ugyanezen rendszerén ábrázoltattak ugyancsak megfordíthatóan egyértelműen a tér síkjai, kivéve a t_1, ill. t_2 egyeneseken, de nem az u egyenesen átmenő síkokat.

Ezzel felmerül az a kérdés, vajjon nincsen e közelebbről leírható összefüggés azon pontok és síkok között, melyeket ugyanazon pontegyenesek ábrázolnak? Könnyen igazolható, hogy azok a pontok és síkok, melyeknek képei közösek, egymásnak abban a nullrendszerben felelnek meg, mely a π síkot az U ponthoz, a $\mathfrak{K}^2$ kongruenczia egyeneseit pedig önmagukhoz rendeli.

Miután ilyen módon a sík és a pont ábrázolása közti dualitást fölismertük, könnyű mindazt, a mit síkok és egyenesek kölcsönös helyzetét illetőleg az ábrázolásról megállapitottunk, pontok és egyenesek kölcsönös helyzetére átvinni; csupán arra van szükségünk, hogy megállapitsuk azt a kapcsolatot, mely két, a nullrendszerben egymáshoz rendelt egyenes képei közt fennáll. Az a és $a^{\star}$ konjugált egyeneseknek tudvalevőleg az a tulajdonsága, hogy minden olyan önmagához konjugált egyenes, mely az egyiket metszi, metszi a másikat is. Ebből az következik, hogy az a-t ábrázoló $\underline{\bar{a}}$ és az $a^{\star}$-ot ábrázoló $\underline{\bar{a}}^{\star}$ pontkúpszeletek kúpszelete ugyanaz, az $\bar{a}$ és $\bar{a}^{\star}$ pontokat összekötő egyenes pedig az U ponton megy át. Ha az a egyenes önmagához konjugált, az összekötő egyenes helyébe a kúpszelet érintője lép.

Miután ilyen módon jellemeztem azt a kapcsolatot, mely a nullrendszerben egymáshoz rendelt térelemek képei között fennáll, mindaz, a mit az előző fejezetekben a sík ábrázolását és annak az egyenes ábrázolásával való kapcsolatát illetőleg elmondottam, minden nehézség nélkül átvihető a pont ábrázolására és annak az egyenes ábrázolásával való kapcsolatára; még pedig szószerint, ha az egyenest ábrázoló pontkúpszelet pontja helyébe a konjugált egyenes nyompontját teszszük.

Riesz Frigyes.

AZ n ELEMBŐL ALAKÍTHATÓ i-EDRANGÚ PERMUTÁCZIÓK SZÁMÁRÓL.

Valamely n elemű permutácziót i-edrangúnak nevezvén akkor, midőn a benne előforduló inverziók száma i, ezen i-edrangú permutácziókra vonatkozó következő tétel érvényes:

Az n elemű i-edrangú permutácziók száma megegyezik a

$$P=(1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+x+\cdots+x^n)=$$

$$=p_0^{(n)}+p_1^{(n)}x+p_2^{(n)}x^2+\cdots+p_i^{(n)}x^i+\cdots+p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}x^{\frac{n(n+1)}{2}}\quad(p_0^{(n)}=1)$$

szorzat x hatványai szerint rendezett kifejtésében x^i-dik hatványának együtthatójával $p_i^{(n)}$-vel.

E tétel bebizonyítása és discutálása képezi a jelen közlemény tárgyát.

Minthogy e tétel helyessége az $n=1$, 2, 3 esetekben közvetetlenül lép evidencziába, általános érvényességének bebizonyítása a teljes indukczió módszerével történhetik.

Tegyük fel, hogy a tétel n elemű permutácziók esetében helyes, akkor bebizonyitható, hogy $n+1$ elemű permutácziókra nézve is érvényben marad.

Legyenek az elemek $1, 2, \ldots, n, n+1$, akkor ezeknek összes permutácziói az $1, 2, \ldots, n$ elemek összes permutáczióiból vezethetők le. Ha az $1, 2, \ldots, n$ elemek összes permutáczióit az

$$i_1 i_2 \ldots i_{n-k} i_{n-k+1} \ldots i_n$$

symbolum képviseli, akkor az $1, 2, \ldots, n, n+1$ elemeknek

$$i_1 i_2 \ldots i_{n-k-1},\ n+1,\ i_{n-k} \ldots i_n$$

alakban foglalt permutáczióit egy csoportba foglaljuk össze, a melyet k-adiknak nevezünk. Ily értelemben e csoportok összessége megadja az $n+1$ elem összes különböző permutáczióit.

Ha $1, 2, \ldots, n$ elemek összes permutáczióiban a különböző rangú permutácziók száma: $p_0^{(n)} p_1^{(n)} \ldots p_i^{(n)} \ldots p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}$ úgy az $1, 2, \ldots, n+1$ elemek permutáczióiban az első csoportba tartozó $0, 1, \ldots, i \ldots \frac{n(n+1)}{2}$ -edrangú permutácziók száma respective:

$$p_0^{(n)},\ p_1^{(n)} \ldots p_i^{(n)} \ldots p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}.$$

A 2-ik csoport permutáczióit az első csoportéiból úgy nyerjük, ha ezekben az $n+1$ indexű elemet egy helylyel balra teszem; ez által minden permutáczió inverzióinak száma egy egységgel emelkedik s így e csoportban a

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, i, \ldots, \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

-edrangú permutácziók száma respective:

$$0,\ p_0^{(n)},\ p_1^{(n)} \ldots p_{i-1}^{(n)} \ldots p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}.$$

Ha általában a k-adik csoport permutáczióiból képezzük a $k+1$-edik csoport permutáczióit, az $n+1$ indexű elemet egy helylyel balra téve, minden permutáczió inverzióinak száma és így rangja is egygyel emelkedik, azaz a

$$0,\ 1, \ldots, k-2,\ k-1, k, k+1 \ldots, \frac{n(n+1)}{2} + 1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2} + k - 1$$

rangú permutácziók száma:

$$0,\ 0, \ldots 0,\ p_0^{(n)},\ p_1^{(n)},\ p_2^{(n)} \ldots, p_{\frac{n(n+1)}{2}-k}^{(n)}, \ldots, p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}.$$

Kikeresvén az $1, 2, \ldots, n+1$-edik csoportokban az i-edrangú permutácziók számát, ezek összege megadja az $n+1$ számú elem permutáczióiban az i-edrangú permutácziók számát.

A

$$0,\ 1, \ldots, i \ldots n \ldots \frac{n(n+1)}{2},\ \frac{n(n+1)}{2}+1, \ldots \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

rangú permutácziók száma:

az 1. csoportban respective

$$p_0^{(n)}\ p_1^{(n)} \ldots p_i^{(n)} \ldots p_n^{(n)}, \ldots, p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)},\quad 0, \quad \ldots, 0$$

a 2. csoportban respective

$$0 \quad p_0^{(n)} \ldots p_{i-1}^{(n)} \ldots p_{n-1}^{(n)} \ldots, p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}-1,\ p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}, \quad \ldots, 0$$

a 3. csoportban respective

$$0 \quad 0 \quad \ldots p_{i-2}^{(n)} \ldots p_{n-2}^{(n)} \ldots, p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}-2,\ p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}-1, \quad \ldots, 0$$

. . . .

az $n+1$ csoportban respective

$$0 \quad 0 \quad \ldots 0 \quad \ldots p_0^{(n)} \ldots, p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}-n,\ p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}-(n+1), \ldots, p_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}^{(n)}$$

és így

$$\begin{aligned}
p_0^{(n+1)} &= p_0^{(n)} \\
p_1^{(n+1)} &= p_0^{(n)} + p_1^{(n)} \\
p_2^{(n+1)} &= p_0^{(n)} + p_1^{(n)} + p_2^{(n)} \\
. &= . \ . \ . \ . \ . \ . \\
p_{n+1}^{(n+1)} &= p_0^{(n)} + p_1^{(n)} + p_2^{(n)} + \cdots + p_n^{(n)} + p_{n+1}^{(n)} \\
p_{n+1+1}^{(n+1)} &= p_1^{(n)} + p_2^{(n)} + p_3^{(n)} + \cdots + p_{n+1}^{(n)} + p_{(n+1)+1}^{(n)} \\
p_{n+1+2}^{(n+1)} &= p_2^{(n)} + p_3^{(n)} + p_4^{(n)} + \cdots + p_{n+2}^{(n)} + p_{n+1+2}^{(n)} \\
. &= . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
p_{n+1+i}^{(n+1)} &= p_i^{(n)} + p_{i+1}^{(n)} + p_{i+2}^{(n)} + \cdots + p_{n+1+i-1}^{(n)} + p_{n+1+i}^{(n)} \\
. &= . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
p_{n+1+\frac{n(n+1)}{2}}^{(n+1)} &= p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Ha

$$(1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+x^2+\cdots+x^n) =$$

$$= p_0^{(n)} + p_1^{(n)}x + \cdots + p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}\, x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

akkor

$$[(1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^n)][1+x+\dots+x^n+x^{n+1}]=$$
$$=[p_0^{(n)}+p_1^{(n)}x+\dots+p_{\frac{n(n+1)}{2}}x^{\frac{n(n+1)}{2}}][1+x+\dots+x^{n+1}]$$

s a szorzást formálisan elvégezvén, az

$$(1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^{n+1})$$

kifejezés együtthatói:

$$p_0^{(n+1)},\ p_1^{(n+1)},\dots,p_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}^{(n+1)}$$

az

$$(1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^n)$$

kifejezésnek

$$p_0^{(n)}p_1^{(n)}\dots p_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(n)}$$

együtthatóiból tényleg a fentebbi törvény szerint nyerhetők.

Az $(1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^n)=P$ szorzat együtthatóinak meghatározása.

Mivel

$$\sum_{k=0}^{i}x^k=\frac{x^{i+1}-1}{x-1}$$

azért a

$$P(x)=\prod_{i=1}^{n}(\sum_{k=0}^{i}x^k)=0$$

egyenlet összes gyökei úgy adódnak, ha az $x=1$ gyök elhagyásával rendre felírjuk az összes $1, 2,\dots, n+1$-dik egységgyököket.

Waring formulájával minden algebrai egyenlet együtthatói kifejezhetők a gyökök hatványösszegeivel.

Legyenek $\sum_{k=0}^{m}p_kx^{m-k}=0$ egyenlet gyökei $x_1, x_2,\dots, x_m$ úgy

$$p_i=\sum(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_i}\frac{s_1^{\lambda_1}s_2^{\lambda_2}\dots s_i^{\lambda_i}}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots i^{\lambda_i}\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1)\dots\Gamma(\lambda_i+1)},$$

hol

$$s_i=\sum_{r=1}^{m} x_r^i$$

és

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+i\lambda_i=i,$$

hol

$$\lambda_1,\ \lambda_2\ldots\lambda_i\geqq 0$$

egész számok.

Viszont a gyökök hatványösszegei kifejezhetők az algebrai egyenlet együtthatóinak szimmetrikus függvényeivel.

$$s_n=\sum(-1)^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m}\frac{n\Gamma(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m)p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}\ldots p_m^{\mu_m}}{\Gamma(\mu_1+1)\Gamma(\mu_2+1)\ldots\Gamma(\mu_m+1)},$$

hol a Σ-jel kiterjesztendő mindama nem negativ egész μ értékekre, a melyek

$$\mu_1+2\mu_2+\cdots+m\mu_m=n$$

feltételt teljesítik.

A $\prod_{i=1}^{n}(\sum_{k=0}^{i}x^k)=0$ egyenlet gyökei: $\alpha_1^{(2)}$; $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha^{(3)}\ldots$; $\alpha_1^{(n+1)}$, $\alpha_2^{(n-1)}\ldots\alpha_n^{(n-1)}$, 0, $1,\ldots,n+1$-edrendű egységgyökök $+1$ kivételével.

Legyenek $P(x)=0$ egyenlet hatványösszegei:

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ldots,\sigma_i,\ldots,\sigma_n,$$

akkor

$$\sigma_i=s_i^{(1)}+s_i^{(2)}+\cdots+s_i^{(m)}+\cdots+s_i^{(n)}+s_i^{(n+1)},$$

hol $s_i^{(m)}$ az

$$1+x+\cdots+x^m=0$$

egyenlet gyökeinek i-edik hatványösszege.

Waring formulájából:

$$s_i^{(m)}=\sum(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_m}\frac{i\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)}{\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_m+1)},$$

hol

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+m\lambda_m=i$$

$$\sigma_n=\sum_1^n{}^m\sum(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m+1}\frac{n\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{m+1})}{\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_m+1+1)}$$

$$p_i^{(n)}=\sum(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i}\frac{\sigma_1^{\lambda_1}\sigma^{\lambda_2}\ldots\sigma_i^{\lambda_i}}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots i^{\lambda_i}\Gamma(\lambda_1+1)\ldots\Gamma(\lambda_i+1)}.$$

Fejezzük a ki $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i$ hatványösszegeket ismeretes mennyiségekkel.

Az $x^m = 1$ egyenlet összes gyökei: $x_{1m}, x_{2m} \ldots x_{mm}$. Az m-dik egységgyökök μ-edik hatványösszege

$$\sum_{k=1}^{m} x_{km}^{\mu} = m,$$

ha μ az m-mel osztható, minden más esetben 0.

Alkossuk meg

$$\sum_{m=1}^{m} (x_{1m}^{\mu} + x_{2m}^{\mu} + \cdots + x_{mm}^{\mu}) = \sum_{m=1}^{\mu} x_{1m}^{\mu} + \sum_{m=1}^{\mu} x_{2m}^{\mu} + \cdots + \sum_{m=1}^{\mu} x_{mm}^{\mu} = S$$

kifejezést, hol $x_{1m}, x_{2m} \ldots x_{\mu m} \ldots x_{mm}$ az m-edik egységgyökök.

S-nek csak ama tagjai lesznek 0-tól különbözők, a melyekben m a μ-nek osztója és e tagok értéke m, tehát az összegben csupán μ összes osztói szerepelnek, vagyis ha μ szám osztóinak összege: $\sum(\mu)$

$$\sum(\mu) = \sum_{m=1}^{\mu} (x_{1m}^{\mu} + x_{2m}^{\mu} + \cdots + x_{mm}^{\mu}) = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{m} x_{km}^{\mu},$$

azaz

A μ szám összes osztóinak összege kifejezhető az 1-től μ-edrendűig képezett egységgyökök μ-edik hatványösszegével.

Valamely p szám akkor és csak akkor lévén törzsszám, midőn

$$\sum(p) = p + 1$$

a fentebbiek értelmében

$$\sum_{m=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} e^{\frac{2kp\pi}{m} i} = p+1$$

egyenlet a törzsszámokat jellemző szükséges és elegendő feltételt fejez ki.

Waring formuláját alkalmazván

$$\sum(\mu+1) =$$

$$= \mu + 1 + \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{(\lambda)} (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m} \frac{\mu \Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)}{\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_m+1)},$$

hol

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+m\lambda_m=\mu.$$

Ha $\mu+1=p$ törzsszám, akkor $\sum(\mu+1)=\mu+2$, tehát

$$1=\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{(\lambda)}(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m}\frac{(p-1)\,\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)}{\Gamma(\lambda_1+1)\,\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_m+1)},$$

hol

$$\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+m\lambda_m=p-1$$

a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy p törzsszám legyen.

E segédtételekkel könnyen bebizonyítható, hogy

$$p_i^{(n)}=\sum(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i}$$

$$\frac{\left\{\sum_1^{(n+1)}-(n+1)\right\}\left\{\sum_2^{(n+1)}-(n+1)\right\}\ldots\left\{\sum_i^{(n+1)}-(n+1)\right\}}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots i^{\lambda_i}\Gamma(\lambda_1+1)\ldots\Gamma(\lambda_i+1)},$$

hol

$$\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+i\lambda_i=i$$

és $\sum_i^{(n+1)}$ jelenti az i számnak az $1, 2, \ldots, n+1$ sorozatból vett összes osztóinak összegét. Ha itt $i\leqq n+1$, úgy

$$\sum_i^{(n+1)}=\sum(i).$$

Determinánssal $p_i^{(n)}$ még így fejezhető ki:

$$p_i^{(n)}=\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\begin{vmatrix} \sum_1^{(n+1)}-(n+1) & 1 & 0 & 0 \\ \sum_2^{(n+1)}-(n+1) & \sum_1^{(n+1)}-(n+1) & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_i^{(n+1)}-(n+1) & \sum_{i-1}^{(n+1)}-(n+1) & \sum_{i-2}^{(n+1)}-(n+1) & \overset{i-1}{\sum_1^{(n+1)}}-(n+1) \end{vmatrix}$$

A $p_i^{(n)}$ együtthatók kiszámítására recursiós formulák gyanánt használhatók a NEWTON-féle identitások.

A $p_i^{(n)}$ együtthatók $\sum_1^{(n+1)}\ldots\sum_i^{(n+1)}$ homogén raczionális egész függvényei.

Viszont

$$\Sigma(n) = n+1+(-1)^n \begin{vmatrix} p_1^{(n)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2p_2^{(n)} & p_1^{(n)} & 1 & \dots & 0 \\ 3p_3^{(n)} & p_2^{(n)} & p_1^{(n)} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n-1)p_{n-1}^{(n)} & p_{n-2}^{(n)} & p_{n-3}^{(n)} & \dots & 1 \\ np_n^{(n)} & p_{n-1}^{(n)} & p_{n-2}^{(n)} & \dots & p_1^{(n)} \end{vmatrix}$$

Az összes osztók összege az n számú elemből képezhető i-edrangú permutácziók számával raczionális egész módon kiszámitható. Mivel $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_i^{(n)}, \dots, p_n^{(n)}$ összeadások és szorzások által nyerhető, tehát Σ_1, $\Sigma_2 \dots \Sigma_n$ szintén egyszerű összeadások és szorzások által nyerhető, a nélkül, hogy az n számot primtényezőire kellett volna bontanunk, tehát a keresett összeg ily módon kisérleti elemtől független számitó folyamat útján adódik. Innen az i szám primszám voltának szükséges és elegendő feltétele:

$$\begin{vmatrix} p_1^{(i)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2p_2^{(i)} & p_1^{(i)} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ip_i^{(i)} & p_{i-1}^{(i)} & p_{i-2}^{(i)} & \dots & p_1^{(i)} \end{vmatrix} = 0.$$

Ez a feltétel egyenlet alakjában adódott, míg az ismeretes WILSON-féle feltétel kongruenczia alakjában szolgáltat kritériumot.

A $\Sigma(1)$, $\Sigma(2) \dots \Sigma(n)$ értékek rekurziv kiszámitására NEWTON identitásait alkalmazván:

$$S_n + p_1^{(n)} S_{n-1} + p_2^{(n)} S_{n-2} + \dots + p_{n-1}^{(n)} S_1 + np_n^{(n)} = 0,$$

hol

$$S_n = \Sigma(n) - (n+1).$$

E szerint $\Sigma(1)$, $\Sigma(2) \dots \Sigma(n)$ között lineár reláczió van, a melynek együtthatói $p_1^{(n)}$, $p_2^{(n)} \dots p_n^{(n)}$ s csak egyféle ily reláczió lehet, a melynek együtthatói, mint könnyen belátható, nem is lehetnek mások, mint $p_1^{(n)}$, $p_2^{(n)} \dots p_n^{(n)}$ együtthatók.

Vörös Dezső.

A LÉGNYOMÁS HORIZONTÁLIS GRÁDIENSÉRŐL.*

A légnyomás eloszlását a vízszintes síkon — a tengerszínén — izobárgörbékkel ábrázoljuk, melyeket lehetőleg alacsony tengerszíni magasságú állomásokon végzett észlelésekből szerkesztünk, hogy az átszámításban előforduló hőmérsékleti, nedvességi stb. korrekcziók a valóságot minél inkább megközelítsék és a szélsebességek is inkább megfeleljenek a tengerszíni szélsebességeknek. Az egymásra következő izobárok közötti légnyomáskülönbség pedig a horizontális grádienst szolgáltatja, mely az izobár normálisában van és positiv előjelű, ha az a nagyobb légnyomásnak megfelelő izobártól, az alacsonyabb nyomást jellemző izobár felé van irányítva, ellenkező esetben pedig negativ előjelű.

A tényleges légmozgást pedig a szelek iránya és sebessége jellemzi; a szelek mindenkor szoros összefüggésben vannak a légnyomás változásaival és azokat a külső körülmények is nagy mértékben módosíthatják.

A levegő vízszintes síkon történő mozgásának elméleti tárgyalásánál a hydrodynamikai differencziális egyenleteket alkalmazzuk, tekintetbe véve a Föld forgását, meg a levegő surlódását a földfelületén. A mozgást jellemző egyenletek következők:

$$\frac{du}{dt} = -\lambda v - ku - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{dv}{dt} = +\lambda u - kv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}. \qquad \mathrm{I}$$

Hol

$$X = -\lambda v - ku$$
$$Y = +\lambda u - kv \qquad (1)$$

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat f. é. márcz. 22-iki rendes ülésén.

a külső erőösszetevőket, $\lambda = 2\omega \sin\varphi = \frac{4\pi}{86164} \sin\varphi$, k a levegő surlódási együtthatóját a földfelületén, u és v egymásra merőleges sebességösszetevőket ($V^2 = u^2 + v^2$), továbbá p a légnyomást és ρ a sűrűséget jelenti.

Ezeket az egyenleteket a levegő bármilyen mozgására érvényeseknek tekintjük és a következőkben alkalmazzuk azokat, ha 1) *a légáramlás staczionárius,* 2) *a légáramlás nem staczionárius, de azért létezik a sebességi potencziál* és 3) *a levegőben örvénylő — kavargó — mozgás keletkezik.* A levegőt 1. és 2. esetben inkompresszibilisnek tekintjük és a 3. esetben a levegő sűrűsége az időnek függvénye lesz.

1. *A horizontális grádiens egy tételéről.* A légáramlást staczionáriusnak tekintvén, a $\varphi = \varphi(x, y)$ sebességi potencziál differencziális hányadosai a sebességi összetevőkkel egyenlők, azaz

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{és} \quad V^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2,$$

melyek az időtől szintén függetlenek és az (1) alattiból, tekintettel a kontinuitás egyenletére $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ nyerjük, vagyis a külső erők forgást nem létesíthetnek.

Hogy a fenti egyenletrendszert integrálhassuk, szorozzuk meg a felső egyenletet dx-szel, az alsót dy-nal, azután pedig a két egyenlet összegét képezzük, lesz

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} \partial y\right) = \lambda(udy - vdx) - k(udx + vdy) -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x} dx + \frac{\partial V^2}{\partial y} dy\right),$$

vagyis

$$\frac{dp}{\rho} = \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dx\right) - k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy\right) - \tfrac{1}{2} dV^2.$$

Ha a $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ és $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ hányadosok folytonosak, végesek és határozott értékűek, akkor a k szorzója a sebességi potencziál teljes változásával, a λ szorzója pedig a $\varphi = \text{const.}$ görbékkel orthogonális trajektóriákat képező áramlási görbéknek $\psi(x, y)=\text{const.}$ a teljes differencziálisával egyenlő, vagyis

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy \quad \text{és} \quad d\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}dx.$$

Ha most még felteszszük, hogy a levegő a MARIOTTE-GAY-LUSSAC-féle törvénynek eleget tesz, azaz $p=\gamma\rho$, akkor a fenti differencziális egyenletet könnyen integrálhatjuk, úgy hogy

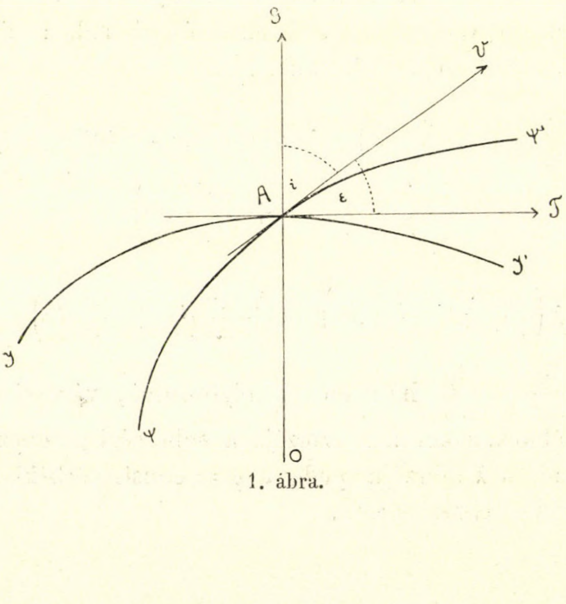
$$\gamma \lg p = \lambda\psi - k\varphi - \tfrac{1}{2}V^2 + C, \tag{2}$$

hol C az integráczióállandót jelenti.

A valóságban a szélirányokhoz, mint tangensekhez tartozó áramlási görbék és az izobárok gyakran trajektóriákat képeznek, vagyis a két görbe rendszer állandó (ε) szög alatt metszi egymást, úgy hogy adott izobárokhoz $I(x, y)=\text{const.}$ tartozó tényleges áramlásgörbéket $\psi(x, y) = \text{állandót}$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\dfrac{\partial I}{\partial x}dx + \dfrac{\partial I}{\partial y}dy}{\dfrac{\partial I}{\partial x}dy - \dfrac{\partial I}{\partial y}dx}$$

egyenletnek integrálja szolgáltatja. Az 1. ábrában legyen az izobár II' és a tényleges áramlásgörbe $\psi\psi'$ által feltüntetve,



1. ábra.

akkor a két görbe az A pontban $VAT=\varepsilon$ szög alatt metszi egymást; legyen továbbá az izobárnak az A ponton átmenő normálisa $\overline{OG}$, mely a tényleges áramlásgörbével az A pontban $GAV=i$ szöget képez, melyet a meteorologiában inklinaczió-szögnek neveznek és ε-nak pótszöge, akkor az A metszőpontban érvényes fenti egyenletet még írhatjuk:

$$\operatorname{cotg} i = \frac{\frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy}{\frac{\partial I}{\partial x} dy - \frac{\partial I}{\partial y} dx}. \tag{3}$$

Ha a (3) alattival a $\psi=$áll.-t meghatároztuk, akkor a sebességi potencziált a $\varphi(xy)=$áll.-t a következő egyenletből kiszámítjuk:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dy - \frac{\partial \psi}{\partial y} dx = 0, \tag{4}$$

mert a ψ és φ görbék orthogonális trajektoriák.

A (2) alattiban tehát a $\lambda\psi - k\varphi$ csupán az izobár mértani helyét jellemző egyenlettől függ úgy, hogy azt röviden, következően jelölhetjük:

$$\lambda\psi - k\varphi = f(I).$$

Tehát a (2) alattit írhatjuk:

$$\gamma \cdot \lg p = f(I) - \tfrac{1}{2} V^2 + C.$$

Ha a szomszédos izobárok között a normális hoszszát dn-nel jelöljük, akkor az utolsó egyenlet differencziális hányadosa a horizontális grádienst szolgáltatja, azaz

$$\frac{dp}{dn} = \frac{p}{\gamma}\left(\frac{df}{dn} - V\frac{dV}{dn}\right), \tag{5}$$

melynél jobb oldal p csupán a nyomástól, az izobártól és a szélsebességtől függ úgy, hogy általánosan írhatjuk

$$\frac{dp}{dn} = F(p, I, V).$$

Ha tehát a vízszintes síkon — staczionárius mozgás esetében — két helyen különböző numerikus értékű, de ugyanazon rendszerhez tartozó izobár átvonul, akkor a köztük levő *horizontális grádiens mindenkor a légnyomásnak és az izobárt jellemző görbének, meg a szélsebességnek függvénye.*

A cyklonos és anticyklonos légáramlásról. A következőkben a tételnek alkalmazását mutatjuk meg: 1. Legyenek az izobárok közös középpontú körök, melyeknek egyenlete

$$I = x^2 + y^2 - r.$$

A tényleges áramlásgörbéket a (3) alatti szerint

$$\operatorname{cotg} i = \frac{xdx + ydy}{xdy - ydx} = \frac{c_1}{c_2}$$

egyenletből kapjuk, hol c_1 és c_2 később meghatározandó mennyiségek és hányadosuk állandó. A fenti egyenletnek integrálja következő:

$$\psi(x, y) = \frac{c_2}{2} \lg(x^2 + y^2) - c_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \text{állandó},$$

vagy poláris koordinátákban ($x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$)

$$\psi(r, \vartheta) = c_2 \lg r - c_1 \vartheta = \text{állandó}.$$

Ebből a $\frac{c_1}{c_2}$ hányadosnak egy jellemző sajátságát nyerjük, ha az utolsó egyenletet t idő szerint differencziáljuk. Az időszerinti differencziális hányadosokat vonalakkal jelöljük úgy, hogy

$$c_2 \frac{r'}{r} - c_1 \vartheta' = 0.$$

Ebből

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r'}{r\vartheta'},$$

vagyis c_1 a sugármenti sebességösszetevővel és c_2 a sugárra merőleges (forgásmenti) sebességösszetevővel arányos úgy, hogy *a helyzetüket nem változtató közös középpontú izobárok területén a staczionárius légáramlás oly logarithmusos spira-*

lisban történik, melynek jellemzője az inklinaczioszögnek trigonometrikus tangense, vagyis a sugármenti és a sugárra merőleges (forgásmenti) sebességösszetevőkből képezett állandó értékű hányados.

A sebességi potencziált a (4) alatti szerint könnyen kiszámíthatjuk, mely a következő lesz:

$$\varphi(x, y) = \frac{c_1}{2} \lg(x^2+y^2)+c_2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \text{áll.}$$

vagy poláris koordinátákban ($x=r\cos\vartheta$ és $y=r\sin\vartheta$).

$$\varphi = c_1 \lg r + c_2\vartheta = \text{áll.}$$

Ebből a sebesség

$$V^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$$

szerint, lesz

$$V^2 = \frac{c_1^2+c_2^2}{x^2+y^2} = \frac{c^2}{r^2},$$

hol

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

Tehát

$$V = \pm\frac{c}{r},$$

vagyis, a sebesség a kezdőponttól mért távolsággal fordítva arányos — kizárva a középpontot és annak környékét — és a positiv előjel szerint az áramlás a középpont felé történik, a negativ előjel szerint pedig a középponttól kifelé. Továbbá a c állandónak c_1 és c_2 két egymásra merőleges összetevőit jelenti, a melyeket az alábbiakban meghatározunk.

Ezen czélból írjuk a (2) alattiba a ψ, φ és V fenti értékeit, akkor némi összevonás után nyerjük, hogy

$$\gamma \lg p = (\lambda c_2 - kc_1)\lg r - (\lambda c_1 + kc_2)\,\vartheta - \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{r^2} + C.$$

Mivel az r=áll. izobár mentén a p nyomás állandó, a fenti egyenlet jobb oldala ezen követelménynek eleget tesz, ha a ϑ szorzója zérus. Ezt a felvételt megtehetjük, mert c_1 és c_2 még határozatlan mennyiség, vagyis határozzuk meg a c_1 és c_2 úgy, hogy legyen

$$\lambda c_1 + k c_2 = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{\lambda}{k} = -\frac{c_2}{c_1}.$$

Az északi félgömbön λ és k mindenütt positiv mennyiség, ennélfogva a c_1 és c_2-nek ellenkező előjelűnek kell lenni, azaz, ha $c_2 \lesseqgtr 0$ ugyanakkor $c_2 \gtreqless 0$ (egyszerre vagy a felső vagy az alsó relácziók érvényesek), a déli félgömbön pedig hol λ negativ és k positiv a c_1 és c_2-nek azonos előjelűnek kell lenni. A továbbiakban csupán az északi félgömbre érvényes c_1 és c_2-t határozzuk meg, mert azoknak alkalmazása a déli félgömbre nehézséget nem okoz.

Az északi félgömbön tehát, tekintettel az előzőkre

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{c_2}{c_1} = \operatorname{tg} i.$$

Ebből pedig, mivel $c^2 = c_1^2 + c_2^2$ a $c_1 = c\cos i$ és $c_2 = c\sin i$ vagy

$$c_1 = \frac{ck}{\sqrt{\lambda^2+k^2}}, \quad c_2 = \frac{c\lambda}{\sqrt{\lambda^2+k^2}}.$$

Legyen

(1 $c_1 < 0$ és $c_2 > 0$.

Ha tekintetbe veszszük az előzőket, akkor

c_1 az r távolságot csökkenti, a c_2 pedig a ϑ szöget növelni törekszik, az áramlás tehát a középpont felé tart és folytonosan balra eltér (az óramutató járásával ellenkezően). Az áramlást *cyklonosnak* mondjuk és a sebesség

$$V = +\frac{c}{r}.$$

Legyen

2) $c_1 > 0$ és $c_2 < 0$.

c_1 az r távolságot növeli, a c_2 pedig a ϑ szöget csökkenteni törekszik, az áramlás tehát a középponttól kifelé tart és folytonosan jobbra eltér (az óramutató járásával egyezően). Az áramlást *anticyklonosnak* mondjuk és a sebesség

$$V = -\frac{c}{r}.$$

A nyomást jellemző egyenleteket a (2) alattiból nyerjük:

$$\gamma \lg p = +(\lambda c_2 + k c_1) \lg r - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + C,$$

vagy

$$\gamma \lg p = +c\sqrt{\lambda^2+k^2} \lg r - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + C.$$

$$\gamma \lg p = -(\lambda c_2 + k c_1) \lg r - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + C,$$

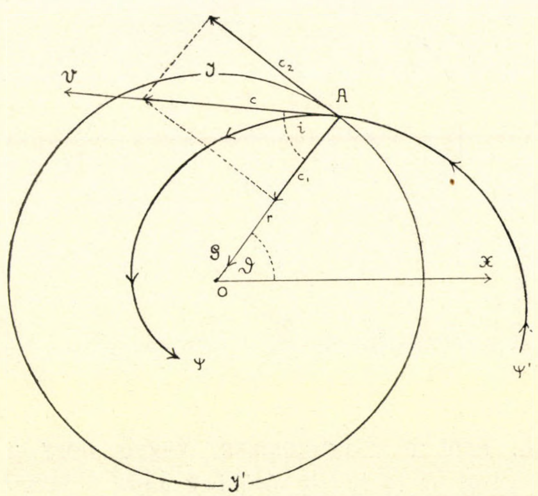
vagy

$$\gamma \lg p = -c\sqrt{\lambda^2+k^2} \lg r - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + C.$$

Tehát azonos szélsebesség mellett

a p nyomás az r sugár kisebbedésével a középpont felé folytonosan csökken úgy, hogy a középpontban a légnyomás minimum, az izobárok tehát *depressziót* ábrázolnak (2. ábra).*

a p nyomás az r sugár kisebbedésével a középpont felé folytonosan növekszik úgy, hogy a középpontban a légnyomás maximum, az izobárok tehát *barometeres maximumot* ábrázolnak (3. ábra).*



2. ábra.

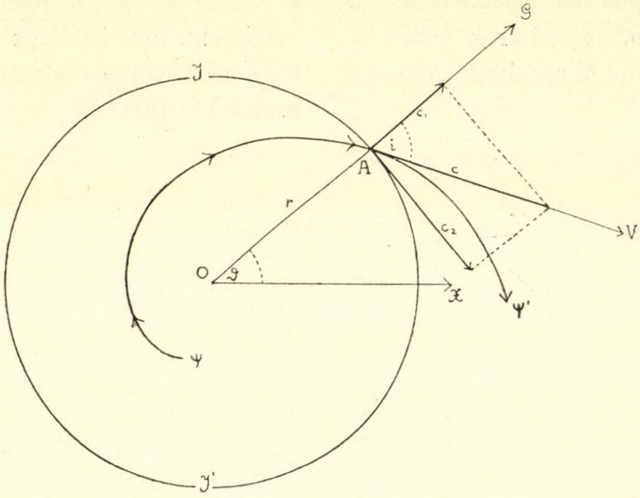
* A 2. és 3. ábrában — hasonlóan az 1. ábrához — az izobárokat Π'-vel és az áramlásgörbéket $\psi\psi'$-vel jelöltük, a nyilak pedig az áramlás irányát mutatják.

A fentiből a nyomásváltozást a sugár mentében, vagyis a horizontális grádienst r szerinti differencziálással nyerjük, azaz

$$\frac{dp}{dr}=\sqrt{\lambda^2+k^2}\cdot\frac{p}{\gamma}\frac{c}{r}+\frac{p}{\gamma}\frac{c^2}{r^3}. \qquad \frac{dp}{dr}=\sqrt{\lambda^2+k^2}\,\frac{p}{\gamma}\frac{c}{r}-\frac{p}{\gamma}\frac{c^2}{r^3}.$$

Mivel a két grádiens ellenkező irányú, tehát ha $\frac{dp}{dr}$ a depresszióban positiv, akkor a maximumban a $\frac{dp}{dr}$ helyett $-\frac{dp}{dr}$-t kellett írni.

A kétféle grádiens összehasonlításából nyerjük, hogy azonos körülmények mellett a horizontális grádiens nagyobb a de-



3. ábra.

presszióban, mint a maximumban, vagyis hogy a minimális légnyomás körül az izobárok sűrűbbek, mint a maximum körül.

Végre megmutatjuk az elméletileg számított és az észlelésekből nyert horizontális grádiens összehasonlítását a következő példában.

Ezen czélból a Botteni- és Finn-öböl környékén megjelent depressziók közül kiválasztottam olyanokat, melyeknek középpontjuk csaknem ugyanarra a helyre esett és az izobárok megközelítették a köralakot, helyzetüket pedig egy nap alatt csak alig változtatták. Ezen depressziók légnyomásaiból megszerkesztettem az átlagos izobárokat, melyek csekély elhanyagolással közös középpontú körök voltak, a közös középpont geografiai hossza G-től 23° és szélessége 59°. A fenti egyenlet igazolása czéljából két olyan állomást választottam, melyeknél a c-ket és geografiai szélességeket egyenlőknek tekinthetjük és a középponttól mért távolságok is olyanok, melyek között még a sebességet a távolsággal fordítva arányosnak vehetjük és tengerszíni magasságaik sem nagyok úgy, hogy az észlelt szélsebességeket a tenger színére is érvényeseknek tarthatjuk. Ilyen két meteorállomás Petersburg és Stockholm, melyeknek jellemző adatai következők:

	φ	p	t	v	r
Petersburg:	59°56′	749·7 mm.	7·17 C°	1·7 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$	440000 m.
Stockholm:	59°21′	744·8 «	6·14 «	3·0 «	250000 «

Ezeket tekintetbe véve, ha a differencziálok helyébe a differencziákat vezetjük be, azaz

$$\varDelta p = \sqrt{\lambda^2+k^2} \cdot \frac{p \cdot c}{\gamma} \cdot \frac{\varDelta r}{r} + \frac{pc^2}{\gamma} \cdot \frac{\varDelta r}{r^3},$$

akkor nyerjük, hogy $\varDelta p = 4{\cdot}38 + 0{\cdot}12 = 4{\cdot}50$ mm, mely az észlelésből nyert nyomáskülönbséggel (4·9 mm.) elég jól egyezik. A horizontális grádiens pedig, kifejezve azt az egyenlítő egy fokára eső nyomáskülönbséggel $G = \frac{111}{190} \varDelta p = 2{\cdot}84$ mm-t tesz, mely még jóval kisebb azon határnál (6·0), melynél már viharok szoktak jelentkezni.

Megjegyezzük, hogy a középpont környékén a képletet nem alkalmazhatjuk, mert mint a tapasztalás mutatja, a sebesség ott a távolsággal már egyenes arányos összefüggést mutat; a mi külön vizsgálatot igényel.

A surlódási együttható meghatározása. Találtuk, hogy

$$k = \lambda \,.\, \mathrm{cotg}\, i,$$

vagyis

$$k = \frac{4\pi}{86164} \sin\varphi \,.\, \mathrm{cotg}\, i,$$

melylyel a surlódási együtthatót kiszámíthatjuk, ha az időjárási helyzeteket jellemző térképekről az izobárok normálisai és a szélirányok által a φ szélesség alatt képezett i szöget lemérjük és azután az i, meg φ szöget a fentibe helyettesítjük.

A fenti reláczió akkor is érvényes, ha az áramlás egyenesvonalú és egyenletes úgy, hogy csekély elhanyagolással párhuzamos izobároknak tekinthető helyzetekből Magyarországra érvényes surlódási együtthatót meghatározhattam. És pedig

	φ	i	k
Nagy Alföldön:	46°30′	52°35′	0·000081
Északi Kárpátok között:	48°30′	47°50′	0·000099

A surlódási együttható meghatározására táblázatot szerkesztettem, melynek első függőleges oszlopa a φ geografiai szélességeket és első vízszintes sora i inklinácziós szögeket foglalja magában, úgy hogy az i és φ-hez tartozó k surlódási együtthatót közvetlenül a táblázatból nyerjük.

			$i°$		
$\varphi°$	5°	10°	20°	30°	40°
5°	0·000145	0·000072	0·000035	0·000022	0·000015
10°	290	144	070	044	030
20°	571	283	137	086	060
30°	834	414	201	126	087
40°	1073	532	258	162	112
50°	1278	634	307	194	133
60°	1445	717	347	219	151
70°	1568	778	377	237	164
80°	1643	815	395	249	172
90°	1669	828	401	253	174

φ°	i° 50°	60°	70°	80°
5°	0·000011	0·000007	0·000005	0·000002
10°	021	015	009	004
20°	042	029	018	009
30°	061	042	027	013
40°	079	054	034	017
50°	094	065	041	020
60°	106	073	046	022
70°	115	079	050	024
80°	121	083	052	025
90°	123	084	053	026

A horizontális grádiens alkalmazása a barométeres magasságkülönbség meghatározásánál. Mivel az izobárok csak igen ritkán közelítik meg a szabályos rendszert, ennélfogva a horizontális grádienst is a valóságban csak ritkán számíthatjuk ki a jellemző adatokból, azonban az izobártérképekről leolvasott izobárkülönbséget bizonyos esetekben előnyösen felhasználhatjuk.

Ha például a hypszometrikusképlettel két olyan észlelőhely magasságkülönbségét kell meghatározni, melyeken ugyanazon rendszerhez tartozó, de különböző numerikus értékű izobárok vonulnak át, akkor a barométeradatokat, még ezen izobárkülönbséggel is korrigálni kell.

A szokás az, hogy az izobárkülönbséggel az alsó állomás légnyomását korrigálják, még akkor is, ha az alsó állomás tengerszíni magassága jelentékeny; az izobárkülönbséget tehát az egész légoszlopban állandónak tekintik, vagyis az izobárkülönbséggel akár a felső, akár az alsó állomásnak légnyomását javítjuk, a magasságkülönbségben lényeges eltérés nem keletkezhetik.* A valóságban azonban — különösen nagyobb magasságkülönbségek meghatározásánál — a szerint eltér a számított magasságkülönbség, a mint az alsó állomás légnyomását redukáljuk a

* Dr. J. Hann: «Lehrbuch der Meteorologie».

felső állomás függőlegesébe, vagy pedig a felső légnyomást számitjuk át az alsó állomás merőlegesébe, a mi a logarithmusfüggvény természetéből következik. Ezen eljárással tehát az izobárkülönbség alkalmazásában némi bizonytalanság mutatkozik. Ezt a bizonytalanságot azonban eloszlathatjuk, ha a két izobár között a középértékű izobárt választjuk, melyre vonatkoztatott nyomáskülönbséggel egyfelől az alsó, másfelől pedig a felső állomás légnyomását javitjuk. Ekkor a két korrekcziót az első közelitésben egy korrekczióval helyettesithetjük oly módon, hogy az eredeti izobárkülönbséget a két állomás légnyomásaiból képezett arithmetikai közép légnyomás síkjában alkalmazzuk.

Hogy ezt kimutassuk, írjuk fel a hypszometrikus képlet általános alakját:

$$h = \log \frac{B}{b} \cdot \frac{1+\alpha\theta}{1-\beta H} \cdot a - \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g},\text{*}$$

hol B az alsó és b a felső állomás légnyomását jelenti, mely szabad levegőre vonatkozik és nehézségi korrekczióval van ellátva; a többi mennyiségek pedig ismeretesek. Legyen most az alsó állomáshoz tartozó izobár p_2, a felsőhöz tartozó izobár pedig p_1, és az izobárkülönbség $p_1 - p_2 = \Delta p$, melynek felével $\frac{1}{2}\Delta p$-vel korrigáljuk mind a két barometerállást. A korrekczió természetesen positiv vagy negativ, a szerint mint $p_1 \gtrless p_2$, úgy hogy a fenti képletben a $\log \frac{B}{b}$ helyébe $\log \frac{B \pm \frac{1}{2}\Delta p}{b \pm \frac{1}{2}\Delta p}$ irunk. Ebből pedig

$$\log \frac{B \pm \frac{1}{2}\Delta p}{b \pm \frac{1}{2}\Delta p} = \log \frac{B}{b} + \log \frac{1 \pm \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{B}}{1 \pm \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{b}} =$$

$$= \log \frac{B}{b} \pm M \cdot \frac{\Delta p}{2}\left[\frac{1}{B} + \frac{1}{b}\right].$$

Ha most a két légnyomás középértékét $\frac{B+b}{2} = p$ bevezetjük úgy, hogy $B = p + \delta$ és $b = p - \delta$, hol $\frac{\delta}{p} < 1$, akkor első közelí-

* Math. és Phys. Lapok XIV. k.

tésben $\frac{1}{B}+\frac{1}{b}=\frac{2}{p}$, tehát a hypszometrikus képletben a $\log\frac{B}{b}$ helyébe $\log\frac{B}{b}\pm M.\frac{\Delta p}{p}$ írhatunk. Ekkor a hypszometrikus képlet közelítő alakja a következő: [1]

$$h=h_0+C_t+C_\eta+C_g^\lambda+C_g^{h_0}+C_d+C_i. \qquad (6)$$

Hol h a tényleges magasság-különbséget m.-ben, $h_0=18400\log\frac{B}{b}$ a nyers magasság-különbséget, $C_t=0{\cdot}00367\theta\,.\,h_0$ a hőmérsékleti, $C_\eta=0{\cdot}378H\,.\,h_0$ a nedvességi, $C_g^\lambda=0{\cdot}00259\cos 2\lambda\,.\,h_0$ a nehézség okozta szélesség szerinti, $C_g^{h_0}=k\frac{z+\frac{1}{2}h_0}{R}h_0$ a nehézség okozta magasság szerinti, $C_d=-\frac{v_1^2-v_2^2}{2g}$ a dynamikai és

$$C_i=\pm 7991\,.\,\frac{\Delta p}{p}\left[1+0{\cdot}00367\theta+0{\cdot}378H\right],$$

vagy a hőmérsékleti és nedvességi korrekcziókat összevonva, $C_i=\pm 8003\left(1+0{\cdot}002\left(t_1+t_2\right)\right)\frac{\Delta p}{p}$ az izobáros korrekcziót jelenti. Megjegyezzük, hogy a h_0-ban előforduló, a B és b szabadban észlelt 0°-os higany barométeradatok nehézségi korrekcziókkal vannak ellátva; ha azonban a barométeradatok csupán szélességi korrekcziókkal látjuk el, akkor a h_0-t meg kell még szorozni 1·00157-tel; ha pedig a hőmérsékleti és nedvességi korrekcziókat összevonjuk, akkor közelítően a C_t-t és C_η-t

$$C_{t,\eta}=1{\cdot}00154\,.\,0{\cdot}004\theta h_0=0{\cdot}004006\theta h_0\text{-val}$$

kell helyettesíteni.[2]

A következőkben a Hann által használt példával igazolni akarjuk a mondottakat.[3]

Felső állomás Vent:

$$b=610{\cdot}90\text{ mm},\quad t_1=0{\cdot}7\text{ C}^\circ,\quad e_1=4{\cdot}0\text{ mm},$$

$$V_1=5{\cdot}0\,\frac{\text{m}}{\text{sec}},\quad \varphi_1=46^\circ 52'.$$

---

[1] V. ö. Meteor. Zeitschrift. 1905. évf. decz. füz.

[2] Dr. J. Hann: «Lehrbuch der Meteorologie» pag. 777. és 782.

[3] Dr. J. Hann: «Lehrbuch der Meteorologie» pag 791.

Alsó állomás Triest:

$$B=759{\cdot}10 \text{ mm}, \quad t_2=13{\cdot}0 \text{ C}^\circ, \quad e_2=8{\cdot}4 \text{ mm},$$

$$V_2=3{\cdot}8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad \varphi_2=45^\circ 39'.$$

A nehézségi korrekcziókkal ellátott és zárt helyről a szabadra vonatkoztatott* barométerállások következők: $b=610{\cdot}65$ mm, $B=759{\cdot}10$ mm, továbbá

$$\theta=\frac{t_1+t_2}{2}=6{\cdot}85 \text{ C}^\circ, \quad H=\frac{1}{2}\left(\frac{e_1}{b}+\frac{e_2}{B}\right)=0{\cdot}0088,$$

$$\lambda=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=46^\circ 15'$$

Vent tengerszíni magassága $H_1=1833{\cdot}3$ m, Triest tengerszíni magassága $H_2=25{\cdot}8$ m, a Venten átvonuló izobár $763{\cdot}0$ mm. és a Triesten átvonuló izobár $761{\cdot}4$ mm, tehát

$$+\Delta p=1{\cdot}6 \text{ mm.} \quad \text{és} \quad p=\frac{B+b}{2}=684{\cdot}88 \text{ mm.}$$

Tehát a (6) alattiban előforduló tagok lesznek:

$$h_0=1738{\cdot}9 \text{ m}, \quad C_t=43{\cdot}7 \text{ m}, \quad C_\eta=5{\cdot}8 \text{ m}, \quad C_g^\lambda=-0{\cdot}2 \text{ m},$$

$$C_g^{h_0}=0{\cdot}5 \text{ m}, \quad C_d=-0{\cdot}5 \text{ m} \quad \text{és} \quad C_i=17{\cdot}3 \text{ m},$$

vagy $21{\cdot}5$ m, vagy $19{\cdot}2$ m a szerint, a mint a triesti légnyomást Vent függőlegesébe, vagy a venti légnyomást Triest merőlegesébe, vagy pedig a triesti és a venti légnyomásokat a két állomás közötti közép izobárra számítjuk át. Tehát a magasság-különbség 1) $h_1=1805{\cdot}5$ m, 2) $h_2=1809{\cdot}7$ m és 3) $h_3=1807{\cdot}4$ m. Ezeket a triangulaczióval meghatározott magasság-különbséggel, $h=1807{\cdot}5$ m. összehasonlítva, nyerjük, hogy a h_3 leginkább egyezik a h-val, a mi az előzőkben tárgyalt izobárkorrekcziónak számítási módját megerősíti.

---

* A zárt helyen észlelt barometeradatot szabad levegőre átszámítjuk, ha az átlagos szélsebességet $-0{\cdot}02$-vel szorozzuk; v. ö. Meteor. Zeitschrift. 1905. decz. füz.

A meteorologiában a hypszometrikus képletet általában az állomások tengerszíni magasságainak számításánál használják; azonban ott, hol az állomások magasságai ismeretesek a barometerészleléseknél, bizonyos körülmények figyelembe vételével, a (6) alattit kritikai módszerül is használhatjuk, mert a barométeradatoktól megkivánjuk, hogy azok a millimeter első tizedeséig jók legyenek; a mi azt jelenti, hogy a (6) alattival számított és a nivellált magasság-különbség (h) az egészszámú méterekben egyezzék. Ha tehát a két állomás észleléseiből számított és a nivellált magasság-különbségek között lényeges eltérés nincs, akkor a barométerészleléseket megbizhatóknak tartjuk, ha pedig az eltérés jelentékeny, akkor a felső vagy alsó állomás a barométer adatait külön meg kell vizsgálni.

A valóságban rendesen a kétséges barometeradattal és egy már minden tekintetben kifogástalan állomás adataival kiszámitjuk a magasság-különbséget és czélszerű legalább két olyan állomást választani, melyeknek vízszintes és függőleges távolságai a kérdéses állomástól aránylag kicsinyek legyenek (mert ekkor ugyanazon izobár vonul keresztül az állomásokon és a hőmérsékletkülönbség sem okoz a valóságtól lényegesen eltérő hatást a h ban), továbbá szükséges, hogy az észlelések egyidejűek legyenek.

Ezen eljárást a következő példán bemutatjuk. Mult évben a késmárki meteorologiai állomáson a helybeli barométerrel, meg egy Budapestről vitt és a normálissal összehasonlitott barométerrel rövid időn át párhuzamos leolvasások végeztettek. Ezen összehasonlitás eredménye az volt, hogy a késmárki barométer 0·6 mm-rel kevesebbet mutatott a budapestinél úgy, hogy a naponkénti izobárok szerkesztésénél a késmárki adatokat 0·6-del nagyobbitani kellett. Az így korrigált adat azonban legtöbbször nehézséget okozott az izobárok szerkesztésénél, ennélfogva a korrekczió jogosultságában kételkedtem és a késmárki légnyomási adatokat külön megvizsgáltam. Kezdetben a Késmárkhoz közelfekvő meteorologiai állomások légnyomásainak napi meneteit vizsgáltam, azonban ezen kicsiny korrekczió helyességét megállapitani, sem FRAUNHOFFER barátomnak, sem nekem nem sikerült. Ezután a (6) alatti egyenlet alkalmazására gondoltam, mert a 0·6 mm. különbség a számitott magasság-különbséget körülbelől 6 méterrel fogja megváltoztatni. A számitások meglepő eredményre vezettek.

Késmárkhoz legközelebb fekszik Poprádfelka és Csorbató meteorologiai állomás, melyeknek észleléseit számitásaimban felhasználtam. Meghatároztam a magasság-különbséget először Poprádfelka és Csorbató között, hogy a két állomás barométer adatainak mineműségéről meggyőződjem, azután pedig Késmárk és Poprádfelka, majd Késmárk és Csorbató között. A három állomáson átvonuló izobár a 762·7 mm., tehát $\Delta p=0$.

A számitáshoz szükséges észlelési adatok a következő táblázatban foglaltatnak. Az adatokat* FRAUNHOFFER Lajos barátom volt szives rendelkezésemre bocsájtani, kinek fáradságáért e helyen is köszönetet mondok.

Állomások	Geogr. széless. φ°	Tengersz. magas. H	Zérus fok. barometer b	Hőmérséklet C°	Páranyom e	Szél sebess. V	Nehézs. korrek. $C_g^{\varphi,h}$	Szabadr. korrek. εV
Csorbató	49°8′	1332·3	648·7	3·5	4·1	4·7	+0·08	—0·09
Poprád-Felka	49°4′	683·2	702·4	6·2	5·1	4·0	+0·15	—0·08
Késmárk	49°8′	622·5	707·6	6·6	5·8	3·0	+0·18	—0·06

$\Theta=\frac{t_1+t}{2}$	$H=\frac{1}{2}\left(\frac{e_1}{b_1}+\frac{e_2}{b_2}\right)$	$z+\frac{1}{2}h_0$	Nivellált magasság-különbség h
Csorbató és Poprád-Felka között			
4·85	0·0070	1001·5	649·1 m.
Csorbató és Késmárk között			
5·05	0·0070	970·5	709·8 m.
Poprád-Felka és Késmárk között			
6·40	0·0075	652·3	60·7 m.

* Az adatok az 1904. évi átlagokra vonatkoznak.

A (6) alattival számított magasság-különbségek (h):

Csorbató—Poprádfelka	*Csorbató—Késmárk*	*Poprádfelka—Késmárk*
$h_0 = 636{\cdot}5$ m.	$h_0 = 696{\cdot}1$ m.	$h_0 = 59{\cdot}5$ m.
$C_t = 11{\cdot}4$ «	$C_t = 12{\cdot}9$ «	$C_t = 1{\cdot}5$ «
$C_\eta = 1{\cdot}5$ «	$C_\eta = 1{\cdot}7$ «	$C_\eta = 0{\cdot}2$ «
$C_g^{h_0} = -0{\cdot}2$ «	$C_g^\lambda = -0{\cdot}3$ «	$C_g^\lambda = -0{\cdot}2$ «
$C_g^\lambda = +0{\cdot}1$ «	$C_g^h = 0{\cdot}1$ «	$C_g^h = +0{\cdot}1$ «
$C_d = -0{\cdot}3$ «	$C_d = -0{\cdot}5$ «	$C_d = -0{\cdot}4$ «
$C_i = 0{\cdot}0$ «	$C_i = 0{\cdot}0$ «	$C_i = 0{\cdot}0$ «
$h = 649{\cdot}0$ m.	$h = 710{\cdot}0$ m.	$h = 60{\cdot}7$ m.

Ha most a hypszometrikus képlettel számított és a nivellált magasság-különbségeket összehasonlítjuk, azt látjuk, hogy azok feltünően egyeznek, bár a késmárki légnyomásadatot az említett 0·6-del nem javítottam; ennélfogva a késmárki barometernek a párhuzamos leolvasásokból meghatározott 0·6 korrekcziója a valóságban nem létezik.

Végre megjegyzem, hogy a hypszometrikus képlet gyakorlati alkalmazására táblázatok vannak, melyekkel a dynamikai korrekczió kivételével, valamennyi korrekcziót könnyen kiszámíthatjuk. Ezen táblák pótlásául a következőkben közelítő értékű táblát szerkesztettem, melylyel a dynamikai korrekcziót könnyen számíthatjuk.

A táblázatban az első függőleges sorban az észlelt szélsebesség egész számokban, az első vízszintes sorban pedig az észlelt szélsebesség tizedrészei foglaltatnak. A táblázatban ezen adatokhoz tartozó számok megadják a $\frac{v^2}{2g}$ közelítő értékét, úgy hogy a C_d korrekcziót közvetlenül a táblából nyerjük, mert

$$C_d = -\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \quad (C_d < 0, \text{ ha } v_1 > v_2 \text{ és } C_d > 0, \text{ ha } v_1 < v_2),$$

vagyis a (6) alattiban a dynamikai korrekczió negativ, ha a felső állomáson észlelt szélsebesség nagyobb, mint az alsó állomáson, ellenkezően positiv. Így például a venti állomáson a szélsebesség $v_1 = 5{\cdot}0 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ annak megfelel a táblában 1·28 m. a triesti állomáson $v_2 = 3{\cdot}8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ és ennek megfelel 0·74 m., tehát

$$C_d = -(1{\cdot}28 \text{ m.} - 0{\cdot}74 \text{ m.}) = -0{\cdot}54 \text{ m.}$$

v	·0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9
0	0·00	0·00	0·00	0·00	0·01	0·01	0·02	0·02	0·03	0·04
1	0·05	0·06	0·07	0·09	0·10	0·11	0·13	0·15	0·17	0·18
2	0·20	0·22	0·25	0·27	0·29	0·32	0·34	0·37	0·40	0·43
3	0·46	0·49	0·53	0·56	0·59	0·62	0·66	0·70	0·74	0·78
4	0·82	0·86	0·91	0·95	0·99	1·03	1·08	1·13	1·18	1·23
5	1·28	1·33	1·30	1·43	1·49	1·54	1·60	1·66	1·72	1·78
6	1·84	1·90	1·97	2·03	2·09	2·15	2·22	2·29	2·36	2·43
7	2·50	2·57	2·65	2·72	2·79	2·86	2·94	3·02	3·10	3·18
8	3·26	3·34	3·43	3·51	3·59	3·67	3·76	3·85	3·94	4·03
9	4·13	4·22	4·32	4·41	4·51	4·60	4·70	4·80	4·90	5·00
10	5·10	5·20	5·31	5·41	5·52	5·62	5·73	5·84	5·95	6·06
11	6·17	6·28	6·40	6·51	6·63	6·74	6·86	6·98	7·10	7·22
12	7·34	7·46	7·59	7·71	7·84	7·96	8·09	8·22	8·35	8·48
13	8·62	8·75	8·89	9·02	9·16	9·29	9·43	9·57	9·71	9·85
14	10·00	10·14	10·29	10·43	10·58	10·72	10·87	11·02	11·17	11·32
15	11·48	11·63	11·79	11·94	12·10	12·25	12·41	12·57	12·73	12·89
16	13·06	13·22	13·39	13·55	13·72	13·88	14·05	14·22	14·39	14·57
17	14·74	14·91	15·09	15·26	15·44	15·61	15·79	15·97	16·15	16·34
18	16·52	16·70	16·89	17·08	17·27	17·45	17·64	17·83	18·02	18·22
19	18·41	18·60	18·80	19·00	19·19	19·39	19·59	19·79	19·99	20·20
20	20·40	20·60	20·81	21·02	21·22	21·43	21·64	21·85	22·06	22·28
21	22·49	22·70	22·92	23·14	23·36	23·58	23·80	24·02	24·24	24·46
22	24·68	24·90	25·13	25·36	25·59	25·82	26·05	26·28	26·51	26·74
23	26·98	27·21	27·45	27·69	27·93	28·17	28·41	28·65	28·89	29·13
24	29·38	29·62	29·87	30·11	30·36	30·61	31·86	31·11	31·37	31·62
25	31·88	32·13	32·39	32·64	32·90	33·16	33·42	33·68	33·95	34·21

2. *A másodrendű depresszióknak egy sajátságáról.* Az I. alatti egyenletrendszert az inkompresszibilis levegő nem staczionarius áramlására alkalmazzuk, vagyis oly légmozgásra, melynél a sebességösszetevők az időnek is függvényei $u = u(x, y, t)$ és $v = v(x, y, t)$, de a sűrűség a mozgás alatt az időtől független

marad úgy, hogy az áramlás jellemzője most is a $\varphi=\varphi(x, y, t)$ sebességi potencziál lesz és a külső erőösszetevők a jelen esetben sem létesithetnek forgást, a mennyiben a kontinuitás egyenletnek tekintetbe vételével az (1) alattiból $\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\equiv 0$ feltételt nyerjük.

Ebben az esetben is, mint a staczionárius mozgásnál legyen

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy$$

és a vele orthogonális trajektóriát képező görbe egyenlete

$$d\psi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx,$$

úgy hogy a (2) alatti egyenlet szerkesztésénél követett eljáráshoz hasonlóan a következő egyenletet nyerjük:

$$P=\lambda\psi-k\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}V^2+\Phi(t),$$

hol $P=\int\frac{dp}{\rho}$ és $\Phi(t)$ integrácczió állandót jelent, mely most az időnek függvénye lehet.

A következőkben ezen egyenletnek egy alkalmazását bemutatjuk, ha a depresszióban a légáramlás logarithmusos spirálisban és oly középpont körül történik, mely helyzetét folytonosan változtatja, vagyis a középpontnak koordinátái, valamely álló orthogonális rendszerben, $\xi=f_1(t)$ és $\eta=f_2(t)$ és $t=0$ pillanatban $\xi=0$, $\eta=0$, tehát ezen $t=0$ pillanatban a középpont és a rendszer kezdőpontja egybeesik.

Ekkor az áramlás egyenlete

$$\psi=\frac{c_2}{2}\lg[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]-c_1\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}=\text{áll.},$$

vagy

$$\psi=c_2\lg r-c_1\vartheta=\text{áll.}$$

és a sebességi potencziál

$$\varphi=\frac{c_1}{2}\lg[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]+c_2\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}=\text{áll.},$$

vagy

$$\varphi = c_1 \lg r + c_2 \vartheta = \text{áll.},$$

hol

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \quad \text{és} \quad x = \xi + r\cos\vartheta, \quad y = \eta + r\sin\vartheta.$$

Ebből a czentrum körül (depresszióban) az áramlás sebessége:

$$V^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{c^2}{r^2},$$

hol

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2$$

és

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\left[c_1(x-\xi) - c_2(y-\eta)\right]\frac{\partial\xi}{\partial t} - $$

$$-\frac{1}{r^2}\left[c_2(x-\xi) + c_1(y-\eta)\right]\frac{\partial\eta}{\partial t}.$$

Továbbá képezzük

$$\lambda\psi - k\varphi = (\lambda c_2 - kc_1)\lg r - (\lambda c_1 + kc_2)\,\vartheta.$$

És most is határozzuk meg a c_1 és c_2 úgy, hogy

$$\lambda c_1 + kc_2 = 0, \quad \text{vagyis} \quad \frac{\lambda}{k} = -\frac{c_2}{c_1}.$$

Mivel az áramlás depresszióban van, tehát $c_1 < 0$ és $c_2 > 0$, vagyis a c_1 helyébe $-c_1$ kell írni úgy, hogy ezt tekintetbe véve, a nyomás egyenlete a következő lesz:

$$P = (\lambda c_2 + kc_1)\lg r - \frac{1}{r^2}\left[c_1(x-\xi) + c_2(y-\eta)\right]\frac{\partial\xi}{\partial t} +$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[c_2(x+\xi) - c_1(y-\eta)\right]\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + \Phi(t).$$

A légnyomás tehát a depresszió-czentrum folytonos helyzetváltozása alatt, a folyó idővel változik és szoros összefüggésben van a czentrum haladó mozgásának sebességével, az időtől független izobárok pedig csupán a helyzetét nem változtató depresszióban lesznek közös középpontú körök (v. ö. az előzőket).

Ha most felteszszük, hogy a depresszió oly parabolán mozog, mely az álló rendszer kezdőpontján áthalad és a positiv y tengelyre szimmetrikus, azaz a czentrum koordinátái $\xi = at$ és $\eta = bt^2$, ebből $\eta = \frac{b}{a^2}\xi^2$, akkor

$$P = (\lambda c_2 + kc_1)\lg r - \frac{a}{r^2}[c_1(x-at)+c_2(y-bt^2)] +$$
$$+ 2\frac{b}{r^2}[c_2(x-at) - c_1(y-b^2t)]\,t - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + \Phi(t),$$

hol

$$r^2 = (x-at)^2 + (y-bt^2)^2.$$

Vizsgáljuk meg most a nyomást abban a pillanatban, midőn a depresszióczentrum az állórendszernek kezdőpontjában van, ekkor t. i. $t=0$ és a $P=P_0$, mely a következő lesz:

$$P = (\lambda c_2 + kc_1)\lg r_0 - \frac{a}{r_0^2}(c_1x + c_2y) - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r_0^2} + \text{Const.},$$

hol $r_0^2 = x^2 + y^2$.

Megjegyzem, hogy hasonló körülmények között teljesen azonos egyenletet nyerünk akkor is, ha a depresszió kezdőpontjának koordinátái $\xi = at$ és $\eta = 0$ által van meghatározva, vagyis, ha a depresszió az x tengelyen a állandó sebességgel nyomul előre.

A fenti egyenlet szerint a nyomásnak lehetnek a czentrumon kívül még más szélsőértékei is. Ugyanis, ha képezzük az x és y szerinti parczialis differencziálhányadosokat, akkor a nyomás szélső értékeinek mértani helyét

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial P_0}{\partial y} = 0$$

szimultán egyenletek szolgáltatják. Mielőtt ezeket kiszámítjuk, egyszerűsítjük a P_0 jobb oldalát az által, hogy a surlódást ne vegyük figyelembe, azaz $k=0$, a miből aztán következik, hogy

$$c_1 = 0 \quad \text{és} \quad c_2 = c.$$

Ekkor tehát

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = \lambda c\frac{x}{r_0^2} + 2ac\frac{xy}{r_0^4} + c^2\frac{x}{r_0^4} = 0,$$
$$\frac{\partial P_0}{\partial y} = \lambda c\frac{y}{r_0^2} + 2ac\frac{y^2}{r_0^4} - ac\frac{1}{r_0^2} + c^2\frac{y}{r_0^4} = 0.$$

Ebből

$$\lambda r_0^2 x + 2axy + cx = 0,$$
$$\lambda r_0^2 y + 2ay^2 - ar_0^2 + cy = 0.$$

Ezen egyenletrendszernek egyik valós gyökpárja $x_1=0$, $y_1=0$, és a második egyenletből $x_1=0$-hoz még y_2, y_3 gyökök is tartoznak, melyek bizonyos feltétel mellett szintén valósak lehetnek; különben pedig az egyenletrendszer többi gyökeivel egy későbbi dolgozatban szándékozom foglalkozni.

A feltételes valós gyököket tehát a második egyenletből nyerjük, ha $x=0$ helyettesítünk, azaz

$$y^2 + \frac{a}{\lambda} y + \frac{c}{\lambda} = 0.$$

Ebből

$$y_2 = -\frac{a}{2\lambda}\left[1 + \sqrt{1 - 4\frac{\lambda c}{a^2}}\right]$$

és

$$y_3 = -\frac{a}{2\lambda}\left[1 - \sqrt{1 - 4\frac{\lambda c}{a^2}}\right].$$

Az y_2 és y_3 általában a negativ y tengelyen vannak és valósak, ha

$$\frac{4\lambda c}{a^2} < 1, \text{ és képzetesek, ha } \frac{4\lambda c}{a^2} > 1.$$

Most még csak azt kell eldönteni, vajjon a nyomás melyik pontban ($x = 0$, $y = y_2$ vagy $x = 0$, $y = y_3$) maximum vagy minimum. Ezen czélból képezzük a $P_0(x, y) = P_0(0, y)$ függvénynek másodrendű differencziálhányadosát, melynek előjele fogja eldönteni a maximumot és minimumot.

Mivel

$$\frac{dP_0}{dy} = \frac{\lambda c}{y} + \frac{ac}{y^2} + \frac{c^2}{y^3},$$

tehát

$$\frac{d^2P}{dy^2} = -\frac{\lambda c}{y^2} - 2\frac{ac}{y^3} - 3\frac{c^2}{y^4} = -\frac{c}{y^4}[\lambda y^2 + 2ay + 3c].$$

Az előjelt az utolsó tényező dönti el, ennélfogva elegendő azt kiszámitani. Ugyanis

$$=[\lambda y_2^2+2ay_2+3c]=-\frac{a^2}{2\lambda}-\frac{a^2}{2\lambda}\mu+2c$$

és

$$=[\lambda y_3^2+2ay_3+3c]=-\frac{a^2}{2\lambda}+\frac{a^2}{2\lambda}\mu+2c,$$

hol

$$\mu=\sqrt{1-4\frac{\lambda c}{a^2}}.$$

Ha tekintetbe veszszük $a^2>4\lambda c$ relacziót, akkor

$$[\lambda y_2^2+2ay_2+3c]<0 \quad \text{és} \quad [\lambda y_3^2+2ay_3+3c]>0,$$

úgy hogy általában

$$\left(\frac{d^2P}{dy^2}\right)_{y=y_2}>0 \quad \text{és} \quad \left(\frac{d^2P}{dy^2}\right)_{y=y_3}<0;$$

vagyis az $x=0$, $y=y_2$ pontban a nyomás minimum és az $x=0$, $y=y_3$-ban maximum.

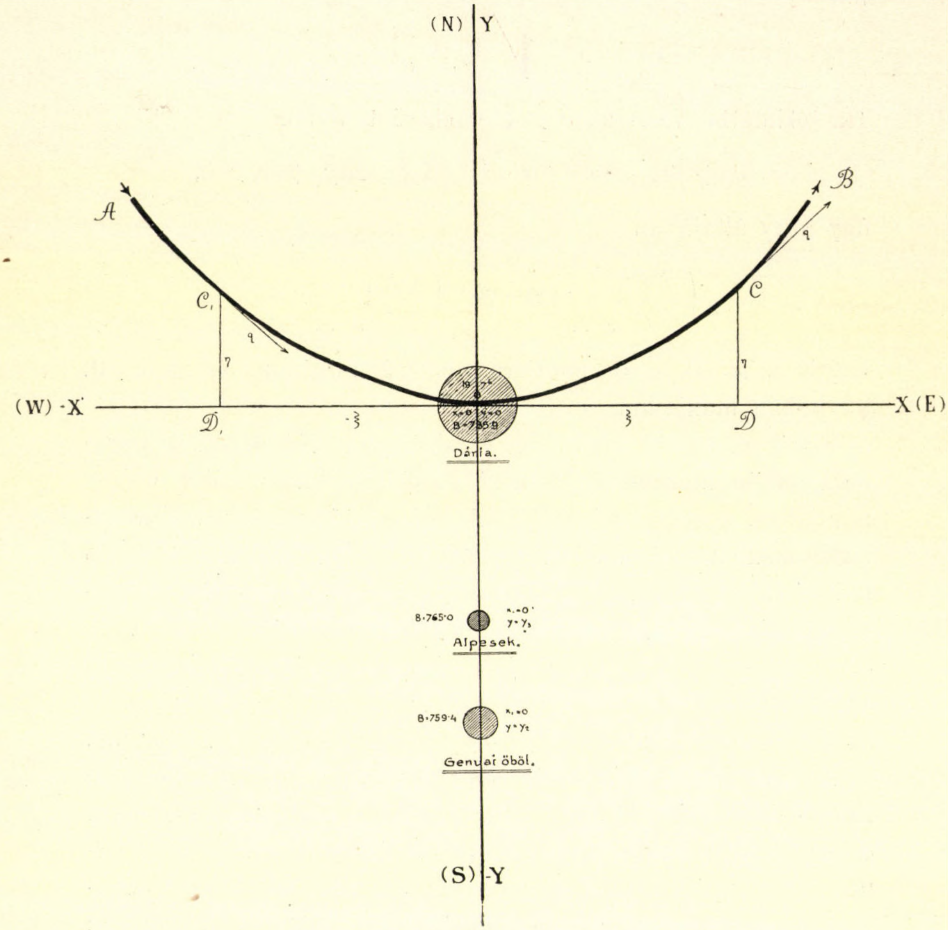
Tehát az északi félgömbön valahányszor a depressziók parábola-görbén mozognak, akkor $t=0$ pillanatban, a pálya csúcspontjában, a mozgásiránytól jobb felé, a légnyomásban viszonylagos maximum és minimum fejlődhetik, ha csak a depresszió haladó mozgásának sebessége (a) és a levegő áramlási sebessége (v) között $a^2>4\lambda c$, vagyis $a^2>4\lambda rv$ reláczió fennáll; vagy általánositva, mondhatjuk: *Valahányszor a depresszióval kapcsolatosan másodrendű depresszió is keletkezik, akkor ezt, mint az eredeti depressziónak dynamikai következményét tekinthetjük.*

A valóságban az eredeti depresszióval kapcsolatos másodrendű depresszió és barometer-maximum távolságai bár nem egyeznek, (a mi nem meglepő, mert hiszen az elméleti számításoknál csupán a Föld forgása szerepel, mint külső erő), azonban az arányos összefüggés valószínűnek látszik. Legyen az eredeti és a másodrendű depressziók czentrumainak távolsága $L_{min.}$, és az eredeti depresszió, meg a maximum távolsága $L_{max.}$, akkor

$$L_{min.}=ay_2 \quad \text{és} \quad L_{max.}=ay_3.$$

Az α-t egyelőre csak tapasztalásból határozhattam meg úgy, hogy a tényleges és számított távolságok viszonyát több esetből

Az 1906. évi Január 18-19-20-i depresszió pályája Európában.



4. ábra.

kiszámítottam. Az α hányados középértékére találtam, hogy az például Dánia és a Genuai öböl között $\alpha = 19{\cdot}2$, vagy a Finn-öböl és a Fekete tenger között $\alpha = 23{\cdot}4$. Az α-nak ilyen nagy értékeiből gyaníthatjuk, hogy az nem tisztán állandó, sőt függvényjellegű is lehet, a mi egy későbbi vizsgálat feladatát fogja képezni.

A következő példában bemutatjuk az egyenletek alkalmazását: *a)* 1906. évi január 18—20-ig az Atlanti Oczeánról depresszió vonult a Ladoga tó felé és czentrumának pályája nagy vonásokban oly parabola volt, melynek csúcspontja január 19-én reggel 7^h-kor Dánia alatt, a Keleti tenger nyugoti részére került és a depresszió ezen pontján átvonuló délkörre a görbe ($AC'OCB$) szimmetrikus volt (4. ábra). A görbe egyenlete $\xi = at$ és $\eta = bt^2$, ebből $\eta = \frac{b}{a^2}\xi^2$. A $\xi = \overline{OD}$-t és $\eta = \overline{CD}$-t a térképről lemérhetjük, és a depresszió haladó mozgásának sebességét is (q) a térképről megállapíthatjuk úgy, hogy a-t könnyen kiszámíthatjuk, mert

$$q^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2.$$

Ebből tekintettel a parabola egyenletére

$$a = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2}} \cdot q.$$

A depresszió czentrumától körülbelől 130 km. távolságban (r) az észlelt szélsebesség $v' = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. A v' azonban két részből áll, ú. m. az előnyomulás okozta sebességből és a depresszióban a légáramlás okozta sebességből, vagyis $v' = v + q$. A jelen esetben $v = 2{\cdot}59 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. A czentrum geografiai szélessége $\varphi = 56°$. Tehát számításhoz szükséges adatok következők:

Észlelt adatok	*Számított adatok*
$\xi = 1000$ km. $= 1000000$ m.	$\eta = 2222200\xi^2$. (m).
$\eta = 450$ « $= 450000$ «	$\lambda = 0{\cdot}00012 \frac{1}{\text{sec}}$
$v' = 20{\cdot}0 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$	$a = 12{\cdot}94 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$
$q = 17{\cdot}41 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$	$c = 335758 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$
$r = 130$ km. $= 129636$ m.	

$$\frac{4\lambda c}{a^2} = 0\cdot96 < 1 \quad \text{és} \quad \sqrt{1-4\lambda\frac{c}{a^2}} = 0\cdot194.$$

Ennélfogva

$$y_2 = -\frac{a}{2\lambda}\left[1+\sqrt{1-4\lambda\frac{c}{a^2}}\right] = -64380 \text{ m.}$$

$$y_3 = -\frac{a}{2\lambda}\left[1-\sqrt{1-4\lambda\frac{c}{a^2}}\right] = -43460 \text{ «}$$

Hogy a felső a relativ minimumhoz, az alsó pedig a relativ maximumhoz tartozik, azonnal kiviláglik, ha $\lambda y^2+2ay+3c$-t képezzük. Ugyanis

$$\lambda y_2^2+2ay_2+3c=-156500 \quad \text{és} \quad \lambda y_3^2+2ay_3+3c=+111900.$$

Tehát $x=0$, $y=y_2$ pontban a légnyomás relativ minimum (másodrendű depresszió) és $x=0$, $y=y_3$ pontban a légnyomás relativ maximum. Ezeknek távolságai az eredeti depressziótól ($x_1=0$, $y_1=0$) következők:

$$L_{min.} = ay_2 = 1236 \text{ km.} \quad \text{és} \quad L_{max.} = ay_3 = 835 \text{ km.},$$

vagyis, midőn az eredeti depresszió Dánia fölé került, akkor a dynamikai hatás okozta másodrendű depresszió a Genuai öbölben képződik és a két depressziót elválasztó magas légnyomás körülbelől az Alpeseken van. (V. ö. az 1906. évi jan. 18., 19., 20-iki időjárási jelentéseket.)

b) Ugyancsak az Atlanti Oczeánról jövő és La Manche csatorna felett 1901 deczember 12-én reggel megjelent depresszió is a 4. ábrában feltüntetett parabola görbéhez hasonló pályában vonult el Európa felett. A depresszió pályájának csúcspontjába (Páris és Griznez között ca. $\varphi=50°$ szélesség alatt) deczember 14-én reggel érkezett, azután pedig ugyancsak a Ladoga tó felé tartott (decz. 16), tehát a depresszió pályájának ezt a részét négy nap alatt tette meg, vagyis kétszer annyi idő alatt, mint az *a)* alatt említett depresszió.

Ebben az esetben a depresszió előhaladásának középsebessége $q = 5\cdot0 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, a pálya jellemzői $\xi=700000$, $\eta=150000$ m és a depresszió középpontjától $r=130$ km. távolságban észlelt szélsebesség átlagos értéke $6{\cdot}73 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ volt. Ezekből a $t=0$ időpillanatban érvényes adatok következők: $\lambda=0{\cdot}00011 \frac{1}{\mathrm{sec}}$, $a=4{\cdot}6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$, és $c=225000 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{sec}}$ úgy, hogy

$$\frac{4\lambda c}{a^2}=4{\cdot}74>1,$$

tehát az y_2 és y_3 nem lehet valós mennyiség; vagyis a valóságban, midőn az eredeti depresszió pályájának csúcspontjába ért, a negativ y tengely mentében másodrendű depresszió és barométeres-maximum nem keletkezhetik, mint azt az 1901 deczember 13., 14. és 15-iki időjárási jelentések tényleg igazolják is.

Megjegyzem, hogy a valóságban Európa felett másodrendű depressziók leggyakrabban a Földközi, az Adriai, a Fekete, majd a Keleti tengeren keletkeznek, de ritkábban a szárazföldön is előfordulnak. (V. ö. pl. az 1906. évi április 22. és 23-iki időjárási helyzeteket.) Ezen másodrendű depressziókat egymás között összehasonlítván, azt látjuk, hogy az orografiai viszonyok általában módosító befolyással vannak a keletkezett depressziók kifejlődésére és jellegére: A tengereken keletkezett másodrendű depressziókban a légnyomás alacsonyabb mint a szárazföldön keletkezett depressziók területein és az izobárok határozottabbak a tengereken, mint a szárazföldön stb.

Bár a másodrendű depressziók létezésénél elméletileg megállapitott és a fentiekben tárgyalt feltételeket a valóságban a legtöbbször igazolva látjuk, azonban a kérdés még sok vizsgálatot igényel. Fontosnak tartom a vizsgálatokat külön az oczeánokra és külön a kontinensekre kiterjeszteni, mert az első esetben az orografiai viszonyok homogének, azoknak zavaró hatásától eltekinthetünk, a második esetben pedig az orografiai viszonyok heterogének, tehát azokat esetről-esetre vizsgálni kell.

3. *A Marchi-féle cyklonelmélet alapegyenletéről.* Legyenek a külső erőösszetevők most is az (1) alattival meghatározva, és a sebességösszetevők nemcsak az x és y-nak, hanem az

időnek is függvényei maradnak, de a levegőt most nem tekintjük inkompresszibilisnek úgy, hogy a (ρ) sűrűség az idő függvénye lesz, tehát ebben az esetben sebességi potencziál és erőfüggvény nem létezik, hanem a zz' tengely körül az xy síkban forgás keletkezhetik, mely

$$2\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \tag{7}$$

$$\xi = 0 \text{ és } \eta = 0$$

által van meghatározva. Ekkor tehát a levegő *örvénylő* — kavargó — mozgást végez. A kontinuitás egyenletében

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

a két utolsó tag összege most a zérustól különböző mennyiség.

Hogy a sűrűség és az idő közötti összefüggést meghatározhassuk, írjuk fel a levegő vízszintes mozgását jellemző egyenletrendszert, tekintettel az (1) és (7) alattiakra,* t. i.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2v\zeta &= -\lambda v - ku - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 2u\zeta &= +\lambda u - kv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Ha a felsőt y, az alsót pedig x szerint differencziáljuk, azután a felsőből az alsót levonjuk, a következő egyenletet nyerjük:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial (u\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial (v\zeta)}{\partial y}\right) =$$

$$= -\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - k\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Ezt azonban tekintettel a (7) és (8) alattira következően írhatjuk:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\left(\zeta + \frac{\lambda}{2}\right) + k\zeta = 0.$$

---

* V. ö. Math. és Phys. Lapok. XIV. k.

Ha most a három első tagot összevonjuk és az egyenlőség mind a két oldalához $\frac{\lambda}{2}$-t adunk, azután 2-vel szorozzuk, lesz

$$\frac{d(2\zeta)}{dt}+\left(k-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)(2\zeta+\lambda)=k\lambda.$$

Mivel λ az időtől független, az első tagban 2ζ helyett írhatunk $2\zeta+\lambda$-t úgy, hogy

$$\frac{d(2\zeta+\lambda)}{dt}+\left(k-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)(2\zeta+\lambda)=k\lambda. \tag{9}$$

Ezen elsőrendű lineáris differencziális egyenletre SPRUNG[1] megjegyzi, miután az egyenlet levezetése, úgy MARCHI eredeti értekezéséből,[2] mint MARGULES ismertetéséből[3] hiányzik, úgy látszik, hogy az egyenlet csak olyan köralakú szélrendszerben érvényes, melyben minden elem csupán a vezérsugártól függ. A fenti tárgyalásban azonban ily megszorításra szükség nem volt, úgy hogy a (9) alatti egyenletet nemcsak köralakú, de másféle szélrendszerben is érvényesnek tekinthetjük.

SPRUNGot ezen megjegyzésre valószínűleg az vezette, hogy MARCHI az általa *«teljes rotácziónak»* nevezett $\zeta+\frac{\lambda}{2}$-t, állandónak tekintette. Ez pedig akkor érvényes, ha a (9) alattiban a következő feltételek teljesülnek:

1) az örvényben a kezdőpont körül minden elem szimmetrikus; 2) az izobárok közös középpontú körök, és 3) a szélpályák — a trajektóriák — logarithmusos spirálisok legyenek.

Hogy ezt kimutassuk a II. alattiban a felső egyenletet y-nal, az alsót pedig $-x$-szel szorozzuk, és azután adjuk össze a két egyenletet, nyerjük:

---

[1] Dr. A. SPRUNG: «Lehrbuch der Meteorologie» pag. 154.

[2] Riceche sulla theoria matematica dei venti del Dot. Luigi de Marchi: Estrato dagli Annali della Meteorologia parte I. 1882; Roma 1883.

[3] Österr. Zeitschrift für Meteorologie XIX. B. 1884, pag. 278—286.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}y - \frac{\partial v}{\partial t}x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x}y - \frac{\partial V^2}{\partial y}x\right) +$$

$$+ (2\zeta+\lambda)(ux+vy) = - k(uy-vx) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}y - \frac{\partial p}{\partial y}x\right).$$

Ha most tekintetbe veszszük, hogy

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}u\end{aligned}\right. \quad \text{és} \quad V^2 = u^2+v^2,$$

akkor a két első zárójeles tagnak összegét a következő alakban is írhatjuk:

$$\left(\frac{\partial u}{dt}y - \frac{\partial v}{\partial t}x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x}y - \frac{\partial V^2}{\partial y}x\right) =$$

$$= \left(\frac{du}{dt}y - \frac{dv}{dt}x\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(ux+vy).$$

Ha pedig bevezetjük $x = r\cos\vartheta$ és $y = r\sin\vartheta$ substituczióval a poláris koordinátákat (r, ϑ), akkor

$$\left(\frac{\partial u}{dt}y - \frac{\partial v}{\partial t}x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x}y - \frac{\partial v^2}{\partial y}x\right) =$$

$$= - \frac{\partial(r^2\vartheta')}{\partial\vartheta}\vartheta' - r'\frac{\partial r'}{\partial\vartheta}.$$

Ha pedig tekintetbe veszszük az első feltételt, hogy az örvényben minden elem a kezdőpont körül szimmetrikus legyen, akkor az r' és $r^2\vartheta'$ is a ϑ-tól független, úgy hogy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}y - \frac{\partial v}{\partial t}x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x}y - \frac{\partial V^2}{\partial y}\right) = 0.$$

A második feltétel szerint az izobárok közös középpontú körök (r=const.), ekkor könnyen kimutathatjuk, hogy

$$\frac{\partial p}{\partial x}y - \frac{\partial p}{\partial y}x \equiv 0.$$

Ennélfogva a fenti egyenletből a következő lesz:

$$(2\zeta+\lambda)(ux+vy) = - k(uy-vx),$$

vagy poláris koordinátákban

$$\left(\zeta+\frac{\lambda}{2}\right)\frac{d(r^2)}{dt}=kr^2\vartheta'.$$

A harmadik feltevésünk értelmében a szélpályák legyenek logarithmusos spirálisok $\vartheta=C'+c\lg r$, akkor

$$\left(\zeta+\frac{\lambda}{2}\right)\frac{d(r^2)}{dt}=k\frac{C}{2}\frac{d(r^2)}{dt}.$$

Mivel pedig $\frac{dr^2}{dt}$ általában a zérustól különböző véges mennyiség, tehát

$$\zeta+\frac{\lambda}{2}=k\frac{C}{2}=\text{állandó}.$$

A mi bebizonyítandó volt. Ekkor a (9) alattiból

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{2k}{2\zeta+\lambda}\rho\cdot\zeta.$$

A levegő mozgása közben kiterjed ott, hol a ζ negativ és összehúzódik ott, hol ζ positiv. És ebből

$$\rho=C\left(\zeta+\frac{\lambda}{2}\right)e^{\frac{2k\zeta}{2\zeta+\lambda}t},$$

hol C integráczió-állandót jelenti, mely positiv-mennyiség, úgy hogy a *sűrűség* (ρ) *minden pillanatban növekszik ott, hol a forgási sebesség ζ növekszik és csökken, hol a ζ csökken.*

Ezeken az egyenleteken alapszik a Marchi-féle cyklon-elmélet, melylyel itt nem foglalkozhatunk és csak megjegyezzük, hogy a fenti integrálegyenlet a (9) alatti differencziális egyenletnek nem képezi általános megoldását.

Anderkó Aurél.

ÚJ MÓDSZER HULLÁMVONALAK ELŐÁLLÍTÁSÁRA ÉS A REZGÉSSZÁM ABSOLUT MEGHATÁROZÁSÁRA.[1]

Néhány évvel ezelőtt egy fénytani jelenséget írtam le, amely vonalas részekből összetett testek forgatásánál keletkezik.[2] Már akkor jeleztem, hogy ezt a jelenséget módosított alakban föl lehet használni, húrok és egyéb vonalszerű testek rezgésszámának meghatározására.

Azóta e módszert tovább fejlesztve sikerült oly kisérleti berendezést összeállitanom, amely a hangtan több ágában nemcsak előadási czélokra, hanem tudományos és gyakorlati meghatározásokra is sikerrel alkalmazható. Erről óhajtok a következőkben beszámolni.

A módszer leglényegesebb alkatrészét egy forgó sávsorozat alkotja (fehér sávok fekete mezőn). A legegyszerübb módon úgy állítható elő, hogy hengerpalástot fekete posztóval vonunk be és arra fehér papiros sávokat ragasztunk. (1. ábra K.)

Ha a sávsorozat forog, a fehér és fekete sávok a fényérzet hosszabb megmaradása miatt szemünkben összeolvadnak és egyenletesen megvilágított szürkésfehér ernyőt adnak. Erre épúgy lehet képet vetíteni, mint akár a falra, akár fehér vászonernyőre. Ha tehát a nyugvó S húr képét rávetítjük a forgó sávsorozatra, azon épúgy kapunk egy fekete árnyékvonalat, mint a

---

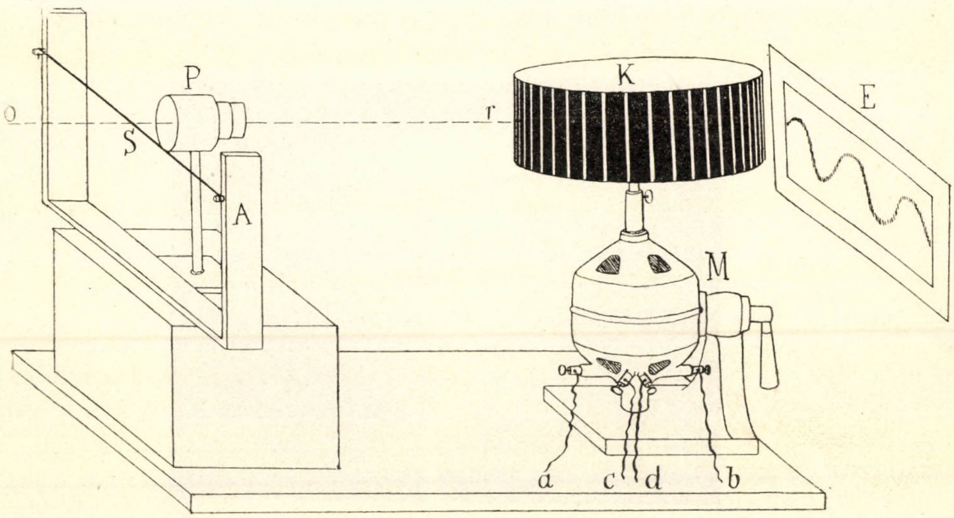
[1] Előadatott a Mathematikai és Bhysikai Társulat 1906. februárius 22-iki ülésén.

[2] Mathematikai és Physikai Lapok 1902. évfolyam 165. lap. Ujabban a Zeitschrift f. d. Phys. u. Chem. Unterricht 1904 évf. 341. l. megjelent egy cikk, amely egészen hasonló jelenség leirását és magyarázatát tartalmazza és utal arra, hogy ilyenekről már Roget, Plateau, Faraday és Emsmann is tudott.

fehér falon. (Az 1. ábrán *or* a skioptikonból vagy a heliostatról jövő fénysugár irányát jelzi, *P* pedig a vetítő lencsét.)

Egészen máskép áll a dolog ha a húr rezeg. Ebben az esetben nem elmosódott árnyéksávot kapunk, ahogy az a fehér falon jelentkeznék, hanem éles fekete hullámvonalat, miként azt a 2. ábra fotografikus úton nyert képben mutatja.

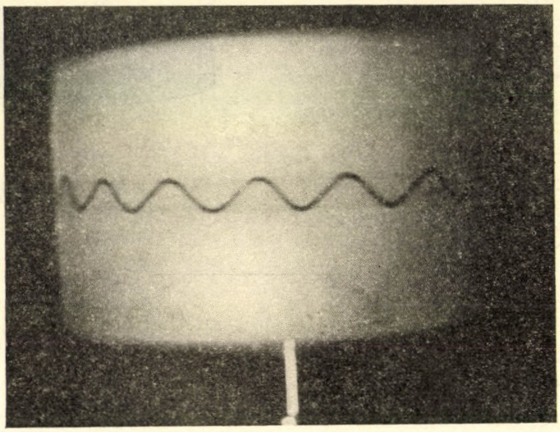
Hogyan keletkezik ez az éles hullámvonal? Mindenekelőtt tegyük fel, hogy a fekete hengerpaláston csak egyetlenegy fehér



1. ábra.

sáv volna. Ha erre a húr fekete árnyékképe ráesik, csak oly széles foltot látunk, amilyen széles a sáv. A fekete hengerpaláston ugyanis nem emelkedhetik ki az ugyancsak fekete árnyék. Amint a sáv tovább halad, a fekete folt is lejebb vagy feljebb emelkedik aszerint, milyen fázisban rezeg a húr. Mikor a húr a szélső helyzetnél megfordul, ugyanazt teszi a fekete folt is. Egy teljes rezgésidő alatt épen egy hullámhegyet és egy hullámvölgyet ír le. A fényérzet hosszabb megmaradása folytán ezt a hullámvonalat nem az időben egymásután leírtnak, hanem a térben állónak látjuk. Igaz ugyan, hogy a fekete folt tulajdonképen csak a fényérzet hiányát jelenti, de úgy látszik, hogy a feketeségre, mint a fényérzet hiányára ugyanaz a szabály áll mint magára a fényérzetre: a fekete folt mint a fényérzet hiányának helye is hosszabb ideig marad meg.

Tegyük már most fel, hogy a forgó fekete hengerpaláston több sáv van egyenletesen elosztva. Tegyük még hozzá föl, *hogy e fehér sávok másodperczenkinti váltakozásainak száma* (N) *megegyezik a húr rezgésszámával* (n). Tehát $N=n$. E föltételek mellett a második, harmadik, negyedik stb. sáv fekete foltja a tér ugyanazon helyére esik, amelyen az első sáv is fekete foltot



2. ábra.

hagyott; *tehát az összes többi előnyomuló sávok az első sávtól előállított hullámvonalat erősítik.* Egy sáv esetében a hullámvonal nagyon halvány, alig észrevehető; minél nagyobb a sávok száma, annál intenzivebb a hullámvonal.

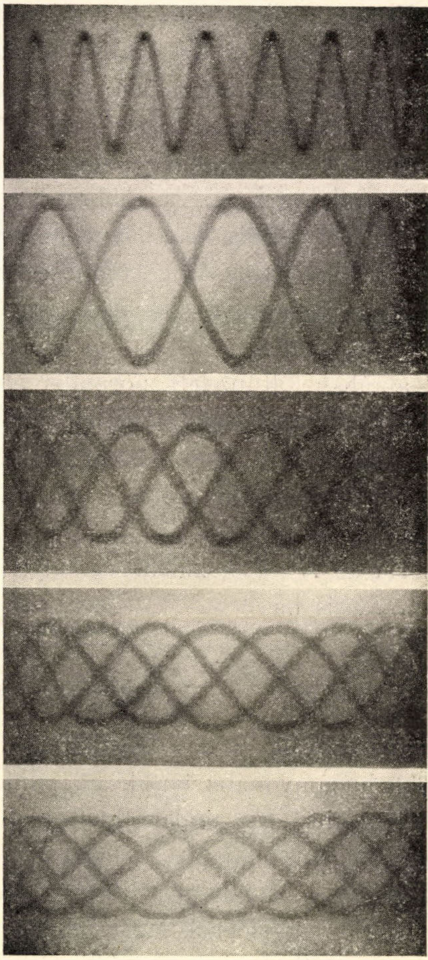
Ha $N=2n$, akkor az első, harmadik, ötödik stb. sáv egy hullámvonalat, a második, negyedik, hatodik stb. sáv pedig egy másik hullámvonalat ád. A két hullámvonal egymáshoz képest $\frac{1}{2}$ hullámhosszal el van tolva. (3. ábra II.)

Ha $N=3n$, akkor három hullámvonal keletkezik, amelyek egymáshoz képest $\frac{1}{3}$ hullámhosszal vannak eltolva, nevezetesen egy-egy hullámvonalat adnak a következő csoportok:

1., 4., 7., . . . stb.
2., 5., 8., . . . stb.
3., 6., 9., . . . stb.

Így megy ez tovább, ahányszor nagyobb a sávok másodperczenkénti váltakozásainak száma, mint a húrrezgésszáma, annyi hullámvonal szövődik össze. Ha $N=k.n$, akkor az összeszövődő hullámvonalak száma: k. A 3. ábra az így nyert hullámvonalak fotografikus úton nyert képét mutatja[1], nevezetesen:

I. $N=n$
II. $N=2n$
III. $N=3n$
IV. $N=4n$
V. $N=5n$



3. ábra.

Ha a sávsorozat váltakozásainak száma csak kis mértékben tér el a húr rezgésszámától, akkor a 3. ábra I. számú képében feltüntetett hullámvonal kifejlődik ugyan, azonban nem marad álló helyzetben, hanem tovább halad. A tovahaladás sebessége arányos a váltakozások számának és a rezgésszámnak különbségével és pedig aszerint amint ez a különbség pozitiv vagy negativ, a tovahaladás iránya is ellenkező.

[1] A felvétel elektromos ívlámpa fénynyel történt (15 ampère). Az expositió körülbelől $\frac{1}{100}$ sec volt. A szerző csak kisebb minőségű fényképezőgéppel dolgozhatott és különben is a fotografálásban járatlan lévén, föltehető, hogy a közölteknél élesebb képek is nyerhetők.

Ugyanígy áll a dolog a 3. ábrában feltüntetett többi rezgési alakkal is. Ezek is csak akkor állók, ha a váltakozások száma egyenlő a rézgésszám illető többszörösével. Ellenkező esetben ezek az alakok is az egyik vagy a másik irányban haladnak. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ez a haladó hullámvonal csak addig tart, mig a többször emlitett különbség ($N—k.n$) bizonyos — eddig még bővebben meg nem határozott — értéket föl nem vesz. Ha a különbség ennél az értéknél nagyobbá válik, de még nem érte el a rezgésszámot, akkor másodrendű kevésbbé intenziv alakok képződnek, de ezeknek jellegük elüt a 3. ábrában föltüntetett normális alakoktól. A szerző meg van győződve arról, hogy az előbb említett érték, amely a haladó hullámok és a másodrendű alakok között átmenetet képez, szoros összefüggésben van a fényérzet tovább megmaradásának idejével.

Ha az $N—k.n$ különbség folyton növekedve eléri az n értéket, vagyis ha

$$N—kn=n$$

akkor

$$N=(k+1)n$$

és így el van érve a következő hullámsorozat, amely egygyel több hullámvonalat tartalmaz, mint a megelőző.

Vegyünk egy példát. Legyen a húr rezgésszáma $n=120$ és legyen a forgóhengeren 20 darab fehérsáv; ha a forgást végző szerkezet fordulatszámát 0-tól kezdve folyton növeljük, akkor az esetek úgy fognak bekövetkezni, ahogy azt a következő táblázat mutatja; megjegyezzük még, hogy δ igen kis értéket jelent, amely a föntebb említett határértéken alól van.

Fordulat szám f	Váltakozások száma $N=20f$	A hullám jellege
$6-\delta$	$N=120-20\delta$	egyes balra haladó hullám ... ... I. 3. ábra
6	$N=120$	egyes álló hullám I. 3 ábra
$6+\delta$	$N=120+20\delta$	egyes jobbra haladó hullám ... ... I. 3. ábra
$6+\delta<f<12-\delta$	$120+20\delta<N<240-20\delta$ ...	másodrendű alakok
$12-\delta$	$N=240-20\delta$	kettős balra haladó hullám ... ... II. 3. ábra
12	$N=240$	kettős álló hullám II. 3. ábra
$12+\delta$	$N=240+20\delta$	kettős jobbra haladó hullám ... ... II. ábra
$12+\delta<f<18-\delta$	$240+20\delta<N<360-20\delta$ ...	másodrendű alakok
$18-\delta$	$N=360-20\delta$	hármas balra haladó hullám ... ... III. 3. ábra

És így tovább. Meg kell továbbá azt is jegyezni, hogyha a váltakozások száma (N) kisebb mint a húr rezgés száma (n), akkor is képződnek hullámvonalak, azonban ez esetben a hullámvonal hossza kisebb mint két szomszédos sáv egymástól való távolsága. Nevezetesen a föntebb említett esetben, ha például a fordulatszám csak 3 és így a váltakozások száma 60, ép olyan egyes hullámot kapunk mint a 3. ábra I. képe, csakhogy a hullámhosszúság épen fele a sávköznek.

Húrok rezgésszámának meghatározása. A föntebbiekből magától adódik a módszer. A fordulatszámot addig kell változtatni, míg elő áll az egyes hullám (I), melynek hosszúsága akkora mint a sávköz; ezt a fordulatszámot (f) le kell mérni és megszorozni a sávok számával (s), akkor

$$n=f.s.$$

Azután ellenőrző méréseket végezhetünk a kettes (II), hármas (III) és magasabb rendű alakokkal, amely esetekben a váltakozások számát a hullámvonalak számával el kell osztani.

Ez a módszer az úgynevezett *nulla metodusok* közé sorozható és így a lehető legnagyobb pontosságra képesít. A hullámvonal tudniillik csak akkor áll, ha a váltakozások száma teljes pontossággal egyezik a rezgésszámmal, illetőleg annak többesével.

Ellenkező esetben az egyik vagy a másik irányban halad. Ez a körülmény a módszer előnye, de egyszersmind hátránya, amennyiben tetszésszerinti állandó sebességet nagyon bajos huzamosabb időn át fenntartani.

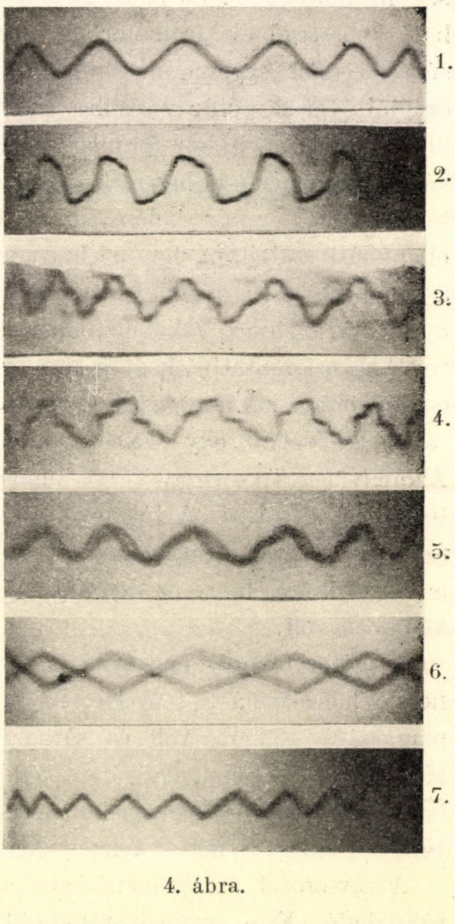
A fordulatszám meghatározás akkor a legkényelmesebb, ha a forgatást végző mótor tengelyére másodpercz órával ellátott fordulatszámmérő van fölszerelve. Ilyen motorok ujabban forgalomban is vannak. A szerző a James Jaquet svájczi czégtől származó fordulatszámmérővel dolgozott. Ez az eszköz úgy van készítve, hogy bármely mótorba bekapcsolható. Ehhez csak az szükséges, hogy az eszköz tengelyét a mótor tengelyének nyilásába gyenge nyomással beletoljuk. A becsatolás pillanatában megindul az eszközzel kapcsolatos másodperczóra. A fordulatszámláló tengelye együtt forog a motor tengelyével és a számláló szerkezet a fordulatok számát direkt jelzi. Ha az eszközt elveszszük, megáll az óra. Ily módon az időt és a fordulatok számát egy eszközről lehet leolvasni.

Hangvillák, rezgő lapok, harangok rezgésszámát oly módon határozhatjuk meg, hogy az illető test legélénkebben rezgő helyére vékony rövid pálczikát ragasztunk és ennek képét vetítjük a forgó sávsorozatra. Alkalmazhatjuk még a MELDE-féle fonalhullám eljárást is, különösen szépen hangvilláknál. A hangvilla egyik szárára czérnát vagy húrt erősítünk, ennek másik végét egy csigán átvetjük és megfelelő súlylyal kifeszitjük. A húr hosszát úgy változtatjuk, hogy a megfelelő hullám kifejlődhessék. A hangvillát azután elektromagnetikus megszakítóval is rezgésbe hozhatjuk. Ily módon állandó nagy amplitudójú rezgéseket vetíthetünk a forgó sávsorozatra. Igy készültek a 3. ábra alakjai.

A húr rezgéseinek vizsgálata. A 4. ábra 1 méter hosszú és 0·5 mm. átmérőjű zongorahúrnak rezgéseit állítja elibénk. A húr megfeszitése és a sávsorozat váltakozásainak a száma is ugyanaz maradt; pusztán a húr megindítási módjai voltak különbözők. Az 1. kép esetében a húrt közepe táján ujjainkkal pendítettük meg. Az ábrából látható, hogy ezen esetben a húr egyszerű harmonikus mozgást végez, felhangok észrevehetőleg nem fejlődnek ki. Amint azonban a megpendítés helyével a húr végéhez közeledünk, mind jobban és jobban föllépnek a felhangok és a hullámvonalat torzítják. A 2. kép a húr rezgése, ha $\frac{1}{3}$-ban ujjainkkal, a 3. kép ha $\frac{1}{6}$-ban ujjainkkal, a 4. kép ha ugyanitt körmünkkel pendítjük meg.

Érdekes megfigyelni azt is, hogy a felhangok leginkább a megpendítés után fejlődnek ki, azután mind jobban és jobban csillapodnak, úgy hogy az egyszerű harmonikus mozgás jellege jobban és jobban kidomborodik.

Érdekes az is, hogy a húr végénél felhangok jobban fejlődnek ki, mint közepe táján. Igy pl. az 5. kép a húr rezgését mutatja végéhez közel, akkor mikor a közepén pendítettük meg, vagyis amikor közepe az 1. képből látható egyszerű harmonikus mozgást végzi.



4. ábra.

A 6. és 7. kép a húr rezgését mutatja, ha vonóval húzzuk meg (a 6. arra az esetre vonatkozik, mikor $N=2n$). Érdekes, hogy a vonóval való megpendítést mindig éles szögletű (tört egyenes vonalakból összetett) hullámvonal jellemzi.

Részletes megjegyzések az eszköz összeállítására. Legkényesebb rész a forgató szerkezet. A reá vonatkozó követelmény az, hogy a sebesség állandó, de mindazonáltal igen tág határok között — úgyszólván folytonos átmenetekben változtatható legyen. A kézzel hajtott centrifugál géppel a kisérletezés nagyon kényelmetlen és ha nincs nagy tétlenség becsatolva, az állandó sebesség megtartása is igen bajos. Legjobban megfelel egy nem kicsiny hatásképességű elektromótor. A szerző $\frac{1}{8}$ lóerejű 110 Volt feszültségre készült egyenáram shuntmótort használt (Ganz és Társa czégtől). Ha a mótor sarkaiba a 110 Volt-nyi feszültség direkt be volt csatolva, akkor fordulatszáma 2500-ra ment fel perczenként. Már most ehhez a kisérlethez úgy az álló mint a forgó tekercs elé egy-egy külön RUHSTRATT-féle 600 ill. 200 OHMOS ellenállást csatoltam be (az I. ábrában *a* és *b* a forgó, *c* és *d* a mágnes tekercs végei). Ily módon a fordulatszám 10-től 2500-ig majdnem folytonos fokozatokban változtatható volt. A tapasztalat továbbá azt mutatta, hogy a motor csak akkor jár biztosan és egyenletesen, ha nem szalad üresen. Ép azért a forgó sávsoroattal egyidőben egy szélkerék (ventilator) is be volt csatolva. Azonkivül a sávsorozatot vivő henger bizonyos de nem túlnagy tétlenséggel is birt. A túlnagy tétlenség szintén nem fér meg a föntebb fölsorolt követelményekkel. A tapasztalat továbbá azt is bizonyította, hogy az egyenetlen járásnak oka legtöbbször a kefékben volt.

A mótor tengelyének nyilásába direkt beleillett a sávsorozatot hordó hengerpalást tengelye. A hengerpalást átmérője 25 cm, magassága 15 cm volt és sárgaréz lemezből volt kinyomva. Merevítésére fél magasságában fémkorongot forrasztottam falaihoz. E korong középpontjában erősítetett meg a kúpos aczéltengely, amely a mótor tengelyébe illik.

A sávsorozat alapja mattfekete posztó, amely a hengerpalástra ráhuzható. Erre vannak ráragasztva a fehérpapirból készült sávok. A sávok szélessége attól függ, milyen vastag húrt milyen távolságba akarunk vetíteni. *Arra kell törekedni, hogy a sáv szélessége megegyezzék a húr árnyékának szélességével.* Ez esetben legélesebb a kép. A sávok egymástól való távolsága oly nagynak választandó, amekkora hullámvonalat elérni akarunk. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy minél nagyobb a sávköz, annál halványabb a hullámvonal, viszont minél sűrűbbek a sávok, annál rövidebb a hullámvonal. Nálam a sávok szélessége 2—4 mm. volt, a sávközök pedig 2—5 cm.-ig terjedtek.

Végül röviden összefoglalhatjuk, hogy a leírt módszer hol és mire alkalmazható.

1. Bemutathatjuk a Lissajous-féle idomokhoz analog rezgési alakokat, sőt épen ez a módszer tárhatja fel a Lissajous-féle összetettebb alakok keletkezése módját.

2. Megmutathatjuk vele az álló, haladó és összetett hullámok keletkezését.

3. Húrok, hangvillák és más testek rezgésszámának absolut meghatározását elvégezhetjük.

4. Alkalmazható mint hanganalizator különösen a húrok rezgésénél. Nevezetesen kimutathatók a felhangok.

Legfőbb előnye, hogy mindezek nagy hallgatóság előtt is bemutathatók.

Mikola Sándor.

NEM FOLYTONOS JELENSÉGEK AZ ELEKTRODINAMIKÁBAN (ELEKTRONELMÉLETBEN).[1]

(Első közlemény).

TARTALOMJEGYZÉK.

1. §. Bevezetés.

A nem folytonos mozgások tekintetbe vétele érdekes és tanulságos világitásba helyez több hidrodinamikai problémát. Így például ama felületek tovaterjedésének vizsgálata, melyeken az áramlási sebesség összetevői és a sűrűség idő és koordináták szerinti differencziálhányadosai szenvednek ugrásszerű változást, összefüggésbe hozható a folyadékban tovaterjedő hanghullámokkal. Az a felület, melyen az említett differencziálhányadosok szakadásai feküsznek — az ú. n. *gyorsulási*

[1] Ezen értekezés magyar átdolgozása a szerző «Über die Kompatibilitätsbedingungen bei unstetigen Erscheinungen in der Elektrodynamik» czímű czikkének, mely a Mathematische Annalen 62. kötetében jelent meg.

hullám — a hanghullám *homlokának* felel meg, azaz ama felületnek, mely minden időpillanatban a tér oly két részét határolja, melyek egyikébe már eljutott a hang, a másikba még nem.

Még érdekesebbek az ú. n. *sebességi* vagy *lökéshullámok*: ezek a folyadékban tovaterjedő oly felületek, melyeken maguk a sebességi összetevők és a sűrűség szenvednek ugrásszerű változást. Ezeket legelőször RIEMANN vizsgálta meg tisztán elméleti alapon, később azonban több oly jelenséget tapasztaltak nagy sebességgel végbemenő gázáramlatokban, melyek legjobban a RIEMANN-féle lökéshullámok segítségével írhatók le.

A hidrodinamikával úgy az analitikai fogalmazás, mint a ma uralkodó fizikai felfogás dolgában bizonyos rokonságot mutat az elektromosság mozgásának elmélete, az elektrodinamika. Valóban az elektrodinamika bizonyos tekintetben a hidrodinamika általánosításának tekinthető.

Az elektrodinamikában ugyanis szintén bizonyos anyagnak, az elektromosságnak mozgását vizsgáljuk s e tekintetben az elektrodinamika tényleg a súlytalan folyadékok hidrodinamikájával hasonlítható össze. A hidrodinamikában magán a folyadék mozgásán kívül még bizonyos, a folyadék mozgási állapota által meghatározott ú. n. *nyomó* erőknek eloszlása érdekel; e nyomó erőknek a folyadék határfelületén kívülről való alkalmazásával viszont befolyásolhatjuk magát a mozgást. Hasonlók a viszonyok az elektrodinamikában is: maga az elektromos folyadék mozgása bizonyos elektromos és mágneses erőket kelt, melyeknek külső segédeszközökkel való változtatása által magát az elektromos folyadék mozgását módosíthatjuk.

Az elektrodinamika és hidrodinamika eme kapcsolatánál fogva várható, hogy nem lesz hálátlan dolog a nem folytonos jelenségekre vonatkozólag a hidrodinamikában alkalmazott meggondolásokat az elektrodinamikába is átültetni. Sőt, az elektrodinamikának egyik újabban kiépített ágában az ú. n. elektronelméletben állandóan nem folytonos jelenségekkel állunk szemben az elektromossággal töltött részecskének, az *elektronnak* határfelületén. Hiszen például az egyenletes térfogati töltéssel felruházott gömbalakú elektron felülete oly felület, melyen az elektromosság térfogati sűrűsége ugrásszerű változást szenved. Az eddigi szerzők — kevés kivétellel — az elektron felületének ezen szerepét ama feltevéssel igyekeztek kiküszöbölni, hogy az elektromos sűrűség változása az elektron felületén nem ugrásszerű, hanem igen gyors, de folytonos.[1] E föltevés bevezetése tisztán az analitikai tárgyalás egyszerűsitése végett történik és a jelenségekről alkotott fizikai kép egyszerűségének csak rovására van. Kivánatos tehát inkább az analitikai eljárás oly tökéletesítése, hogy az elektromosság atómikus részecskéinek ezen legegyszerűbb alakját megszorítás nélkül fentarthassuk.

Az eddigi eljárások tökéletlenségének oka az, hogy kiindulásúl az elektrodinamikának *folytonos jelenségekre* vonatkozó alapegyenleteit használják: így tehát a szakadási felületekre vonatkozólag vagy új hipotésiseket kell bevezetniök vagy pedig a fizikai kép módosításával megszüntetniök a szakadást (természetesen ez utóbbi módszer nem is lesz minden szakadásnál alkalmazható).

A következőkben oly eljárást fogunk alkalmazni, a mely ezen fogyatkozástól ment s a melyet sikerrel alkalmaztam már a hidrodinamikában fellépő nem folytonos mozgások tárgyalásánál is.[2] Az eljárás abban áll, hogy nem a folytonos jelenségekre érvényes differencziálegyenletekből indulunk ki, hanem alkalmasan megfogalmazott variácziós integrálelvből, mint a milyen a mechanikában a staczionárius működés HAMILTON-féle elve. Ezen elv analitikai fogalmazásában az integrál jel alatt előfordulnak a jelenségnek ama jellemzői, melyek helyenkint szakadást szenvednek: ha a szakadás csupán *véges ugrás-*

---

[1] E föltevés az alapja az elektronelmélet ama fogalmazásának is, melyet H. A. LORENTZ ismertet az Encyklopädie der math. Wiss. V. kötete II. részében «Elektronentheorie» czímen (145—280. l.), (Leipzig, 1904).

[2] ZEMPLÉN GY.: Mathematische Annalen, 61. k. 437. l. (1905) és Math. és Phys. Lapok 14. évf. 361. l. (1905).

szerű változásból áll, akkor e szakadás ellenére is megmarad az integrálnak határozott mathematikai jelentése és alkalmazva reá a variácziószámítás módszereit ki fognak adódni:

a) a jelenség ama szakaszaira nézve, melyekben minden folytonos, a folytonos jelenségek ismert differencziálegyenletei;

b) a nem folytonos szakaszokra pedig új ú. n. *összeférési* (kompatibilitási) föltételek, melyek a lehetséges szakadások között állapitanak meg összefüggéseket.

A *b)* alatti összeférési egyenletek — a mint látni fogjuk — meg fogják szabni, mily más mennyiségek szakadását vonja maga után a sűrűségnek az elektron felületén való szakadása, továbbá milyen törvények szerint terjed tovább az elektromos és mágneses erőknek egyszer létrejött szakadása (azaz arról, mikép terjednek tova az elektromos hullámok). Hogy ezen eljárást az elektrodinamikában alkalmazhassuk, első sorban szükségünk van egy alkalmas integrálelvre, mondjuk a staczionárius működés elvének megfelelő általánositására elektrodinamikai jelenségekre vonatkozólag. K. Schwarzschild állított fel 1903-ban egy ily integrálelvet az ú. n. elektrokinetikai potencziál segitségével, a mely azonban némi tökéletesítésre szorul, a melyet a 4. §-ban fogunk részletesen kifejteni. Az így tökéletesitett Schwarzschild-féle elv fog azután alapul szolgálni a további tárgyalásoknál.

Ezt megelőzőleg a 2. §-ban megbeszélem a továbbiakban használandó jelöléseket és ennek keretén belül röviden ismertetem a vektormennyiségekkel való számolás alapelveit, a mely jelölési módszert e dolgozatban használni szándékozom, minthogy általa a képleteknek sokkal rövidebb felírása lehetséges.

2. §. Jelölések magyarázata: műveletek vektormennyiségekkel.

Az ú. n. vektorszámolás tulajdonképen a következő elven alapszik:

Ha ki akarjuk fejezni képlettel azt, hogy két vektor egymással nagyság és irány szerint egyenlő, erre nem a szokásos hosszabb egyenletrendszert használjuk, mely kimondja, hogy a két vektor három-három összetevője rendre egyenlő egymással, hanem egyetlen betüvel jelöljük az egyik vektort magát, ugyancsak egy betüvel a másikat s e két betü közé írjuk az egyenlőségi jelet. Ilyenformán egyetlen szimbolikus egyenlőséggel ugyanazt fejeztük ki, a mit rendesen három egyenlőségben szokás felírni.

Az ily vektorokra vonatkozó egyenlőségeket vektoregyenlőségnek szokás nevezni.

Félreértések elkerülése végett kivánatos a vektorok jelölésére szolgáló betüket valamiképpen a skaláris mennyiségek jeleitől megkülönböztetni. Általánosan elterjedt ma már az a szokás, hogy a vektorokat *német* betükkel jelöljük, mi is tehát a következőkben e szokást fogjuk követni.

E szerint az

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

egyenlőség azt fejezi ki, hogy az $\mathfrak{A}$ vektor nagyság és irány szerint megegyezik a $\mathfrak{B}$ vektorral.

Valamely $\mathfrak{A}$ vektornak bizonyos n irányra való vetületét $\mathfrak{A}^{(n)}$-nel fogjuk jelölni, ennek megfelelően az $\mathfrak{A}$ vektor derékszögű összetevői valamely x, y, z rendszerben:

$$\mathfrak{A},^{(x)} \mathfrak{A}^{(y)}, \mathfrak{A}^{(z)}$$

lesznek. Megjegyezzük, hogy a hol a hatványnyal való összetévesztéstől nem kell tartanunk az

$$\mathfrak{A}^{n}, \mathfrak{A}^{x}, \mathfrak{A}^{y}, \mathfrak{A}^{z}$$

jeleket is használni fogjuk. Valamely $\mathfrak{A}$ vektor nagyságát $|\mathfrak{A}|$-val fogjuk jelölni.

Kiemeljük, hogy a tárgyalásainkban fellépő derékszögü koordinátarendszerek mind ú. n. *jobbsodrású rendszerek* lesznek, a melyeknél a positiv z tengely irányába tekintve a positiv x tengely az óramutató járásával megegyező 90°-nyi forgatás által fog a positiv y tengely előbbi helyére kerülni.

Ha a vektorok összetevőin bizonyos műveleteket kell végrehajtanunk, akkor ezt bizonyos szimbolumokkal ismét maguknak a vektort jelző betűknek felhasználásával végezzük, a mi a képletek felírását ismét nagy mértékben egyszerűsíti.

A következő rövidítéseket fogjuk használni:

1. Az $\mathfrak{A}\pm\mathfrak{B}$ jel oly vektort jelent, melynek összetevői az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ megfelelő összetevőinek összegei, illetve különbségei. Az $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ vektor e szerint nem egyéb, mint az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ vektorok *eredője*, $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ pedig az a vektor, mely $\mathfrak{B}$-vel összetéve az $\mathfrak{A}$ eredőt szolgáltatja.

2. $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$-nak és $\mathfrak{B}$-nek ú. n. *skaláris* sorozata a következő skaláris mennyiséget jelenti:

$$|\mathfrak{A}|\,|\mathfrak{B}|\cos(\mathfrak{A},\mathfrak{B})=\mathfrak{A}^{(x)}\mathfrak{B}^{(x)}+\mathfrak{A}^{(y)}\mathfrak{B}^{(y)}+\mathfrak{A}^{(z)}\mathfrak{B}^{(z)}.$$

Ha egy anyagi pont, melyre homogén erőtérben a $\mathfrak{B}$ erő hat $\mathfrak{A}$ elmozdulást szenved $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}$ erőnek e közben végzett munkája.

Ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ közül egyik sem zérus, akkor abból, hogy $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=0$ az következik, hogy $\mathfrak{A}$ merőleges $\mathfrak{B}$-re.

3. $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$, a két vektornak ú. n. *vektorszorzata* azt a vektort jelenti, melynek derékszögű összetevői:

$$\mathfrak{A}^{(y)}\mathfrak{B}^{(z)}-\mathfrak{A}^{(z)}\mathfrak{B}^{(y)},\quad \mathfrak{A}^{(z)}\mathfrak{B}^{(x)}-\mathfrak{A}^{(x)}\mathfrak{B}^{(z)},\quad \mathfrak{A}^{(x)}\mathfrak{B}^{(y)}-\mathfrak{A}^{(y)}\mathfrak{B}^{(x)}.$$

Legyen $\mathfrak{A}$ egy pontnak a koordinátarendszer kezdőpontjától mért *elmozdulása*, $\mathfrak{B}$ pedig a pontra ható erő, akkor $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ ezen erő forgató nyomatéka a kezdőpontra vonatkozólag.

Ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ közül egyik sem zérus, abból, hogy $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}=0$ az következik, hogy $\mathfrak{A}$ párhuzamos $\mathfrak{B}$-vel.

Látható, hogy a bevezetett kétféle «szorzat» csupán szimbolikus elnevezés, mert például a szorzás formális szabályai egyik szorzatnál sem állanak fenn valamennyien; így például nem beszélhetünk *három* vektor skaláris szorzatáról, mert már kettejüknek skaláris szorzata skaláris. A vektorszorzatra pedig az

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}=-(\mathfrak{B}\times\mathfrak{A})$$

egyenlőség érvényes, azaz $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}$ egyenlők, de ellenkező irányúak.

4. Ha $\mathfrak{A}$ valamely s skalárisnak függvénye $\frac{d\mathfrak{A}}{ds}$ ama vektort jelenti, a melynek összetevői

$$\frac{d\mathfrak{A}^{(x)}}{ds},\ \frac{d\mathfrak{A}^{(y)}}{ds},\ \frac{d\mathfrak{A}^{(z)}}{ds}.$$

A következőkben vektoraink leggyakrabban x, y, z-nek és a t folyó időnek lesznek függvényei, az előbbinek megfelelő értelme lesz tehát a

$$\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x},\ \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y},\ \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z},\ \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}$$

jeleknek is.

Az írás egyszerűsítése végett még megállapodunk abban, hogy *valamely változó szerinti parcziális differencziálhányadost úgy jelöljük, hogy e változót a függvényjel mellé írjuk alsó indexképen.*

E szerint az $\mathfrak{A}_x = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x}$ vektor összetevői

$$\mathfrak{A}_x^{(x)},\ \mathfrak{A}_x^{(y)},\ \mathfrak{A}_x^{(z)}$$

lesznek.

A ∇^2 szimbolum a $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ művelet jele lesz.

A következő megállapodások ú. n. *vektorterekre* vonatkoznak, oly terekre, melyek minden pontjához bizonyos meghatározott vektor tartozik.

5. $\operatorname{div}\mathfrak{A}$ rövid jele a következő *skalárisnak:*

$$\mathfrak{A}_x^{(x)}+\mathfrak{A}_y^{(y)}+\mathfrak{A}_z^{(z)};$$

$\operatorname{div}\mathfrak{A}$ t úgy olvassuk, hogy «divergenczia $\mathfrak{A}$».

Ha τ oly teret jelent, melynek minden x, y, z pontjához tartozik bizonyos meghatározott $\mathfrak{A}$, $d\tau$ e térnek térfogateleme, f e teret határoló zárt felület, df e felület eleme, n e felületelem kifelé mutató normálisának iránya, akkor fennáll a következő fontos egyenlőség:

$$\int_{(\tau)} \operatorname{div}\mathfrak{A}\,d\tau = \int_{(f)} \mathfrak{A}_n df. \qquad \text{I)}$$

A térfogati integrál az egész τ térre, a felületi az egész f felületre terjesztendő ki. ($d\tau$ és df térfogat-, illetve felületelem jelentésüket a következőkben is meg fogják tartani.) Ha $\mathfrak{A}$ valamely összenyomhatatlan folyadék áramlási sebességét jelenti, div $\mathfrak{A}$ az illető pontban lévő «forrás» bőségét jellemzi.

6. rot $\mathfrak{A}$ (rotáczió $\mathfrak{A}$) azt a vektort jelenti, melynek összetevői:

$$\mathfrak{A}_y^{(z)}-\mathfrak{A}_z^{(y)},\quad \mathfrak{A}_z^{(x)}-\mathfrak{A}_x^{(z)},\quad \mathfrak{A}_x^{(y)}-\mathfrak{A}_y^{(x)}.$$

Ha $\mathfrak{A}$ valamely térben végbemenő áramlás sebességét jelenti, akkor rot $\mathfrak{A}$ a megfelelő örvénylő mozgás intenzitása.

Fontos a következő azonosság:

$$\text{div rot}\,\mathfrak{A} = 0. \qquad \text{II)}$$

Ha valamely vektortér minden pontjában div $\mathfrak{A}=0$, akkor azt mondjuk, hogy a vektortér szolenoidszerű vagy «forrásnélküli», ha rot $\mathfrak{A}=0$, akkor azt mondjuk, hogy a vektortér lamelláris vagy «örvénynélküli».

7. Legyen adva a Φ skaláris tér, azaz rendeljük az x, y, z pontok mindegyikéhez a Φ skaláris bizonyos értékét, akkor ez által definiálva van a grad. Φ (gradiens Φ) vektortér is, melynek összetevői

$$\Phi_x,\quad \Phi_y,\quad \Phi_z.$$

Így például ha Φ potencziált jelent grad Φ adja a megfelelő erőt.

Fontos a következő egyenlőség:

$$\text{rot grad}\,\Phi = 0. \qquad \text{III)}$$

Hidrodinamikai jelentése ezen egyenletnek (Φ a sebességi potencziál) az, hogy potencziális mozgásnál nincs örvénylés. Valamely *örvénynélküli vektortér* mindig mint egy *skaláris tér gradiense*, a *forrásnélküli* vektortér mint egy *vektortér rotácziója* állítható elő.

$$\text{div grad}\,\Phi = \nabla^2\Phi. \qquad \text{IV)}$$

Zemplén Győző.

KITÜZÖTT FELADATOK.

37. Bármely

$$\frac{d^2y}{dx^2} + F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

közönséges másodrendű differencziálegyenlet így is írható

$$M(x, y, p)\, dp + N(x, y, p)\, dx = 0, \tag{1}$$

hol p az y-nak x szerinti első differencziálhányadosát, M és N pedig az x, y, p-nek (tehát a Lie-féle elemkoordinátáknak) oly két függvényét jelenti, melyeknek $\frac{N}{M}$ hányadosa egyenlő F-fel.

Az (1) alatti differencziálegyenletre nézve, mint ismeretes

$$J = \frac{\partial M}{\partial x} + p\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial p},$$

$$W = M\frac{\partial N}{\partial y} - N\frac{\partial M}{\partial y}$$

vagy

$$U(f) = M\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial y}\right) - N\frac{\partial f}{\partial p}$$

eltünésének egyszerű jelentése van. Az $U(f)$ eltünése azt jelenti, hogy az U-ba behelyettesített $f(x, y, p)$ függvény (1)-nek egy első integrálja; J eltünése azt jelenti, hogy (1)-nek — vagy pontosabban kifejezve, a neki megfelelő $U(f) = 0$ parcziális differencziálegyenletnek — egyik Jacobi-féle multiplikátora egyenlő az egységgel; végre a W Wronski-féle determináns akkor és csak akkor tünik el, ha a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{N}{M} = 0$$

differencziálegyenlet y-tól ment, mely esetben integrálása lényegesen egyszerűsbödik.

Másrészt ismeretes, hogy a

$$M(x, y, p)\,dp + N(x, y, p)\,dx \tag{3}$$

kifejezés bármely

$$x' = X(x, p), \quad p' = P(x, p), \quad y' = y + \Omega(x, p) \tag{4}$$

alakú érintkezési transzformáczió után megint egy

$$M'(x', y', p')\,dp' + N'(x', y', p')\,dx' \tag{5}$$

alakú kifejezésbe megy át.

Bebizonyítandó:

α) hogy J és W a (3) alatti kifejezésnek a (4) alatti transzformácziókkal szemben *differencziálinvariánsa*, azaz az (5) alatti transzformált kifejezésre nézve képezett

$$J' = \frac{\partial M'}{\partial x'} + p'\frac{\partial M'}{\partial y'} - \frac{\partial N'}{\partial p'},$$

$$W' = M'\frac{\partial N'}{\partial y'} - N'\frac{\partial M'}{\partial y'}$$

egyenlő a (3) alatti eredeti kifejezésre nézve képezett J-vel ill. W-vel;

β) hogy $U(f)$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ *differencziálparameterek*, azaz $U(f)$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$, ha bennök f helyébe egy differencziálinvariánst helyettesítünk, megint differencziálinvariánsokat szolgáltatnak.

(KÜRSCHÁK.)

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS A DETERMINÁNSOK ELMÉLETÉHEZ.

I.

Mindenek előtt oly módszert óhajtok bemutatni, mely tudtommal eddig ismeretlen volt és a melynek segitségével μ-edrangú matrixból alakitható determinánsok között fennálló relácziókat vezethetünk le. Az

$$\| a_{ik} \| \quad (i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$$

matrix tudvalevőleg μ-edrangú, ha a belőle alakitható μ-edfokúnál magasabbfokú $|a_{rs}|$ determinánsok mindannyian eltűnnek, míg a μ-edfokú $|a_{rs}|$ determinánsai közül legalább egy van olyan, mely zérustól különböző.

Hogy a matrix μ edfokú determinánsai között fennálló bilineár relácziókat találjunk, vegyük szemügyre a következő determinánst;

$$D = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_\mu} & x_1 a_{i_1 k_1} & x_2 a_{i_1 k_2} & \cdots & x_\mu a_{i_1 k_\mu} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_\mu} & x_1 a_{i_2 k_1} & x_2 a_{i_2 k_2} & \cdots & x_\mu a_{i_2 k_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i_\mu j_1} & a_{i_\mu j_2} & \cdots & a_{i_\mu j_\mu} & x_1 a_{i_\mu k_1} & x_2 a_{i_\mu k_2} & \cdots & x_\mu a_{i_\mu k_\mu} \\ a_{l_1 j_1} & a_{l_1 j_2} & \cdots & a_{l_1 j_\mu} & y\, a_{l_1 k_1} & y\, a_{l_1 k_2} & \cdots & y\, a_{l_1 k_\mu} \\ a_{l_2 j_1} & a_{l_2 j_2} & \cdots & a_{l_2 j_\mu} & y\, a_{l_2 k_1} & y\, a_{l_2 k_2} & \cdots & y\, a_{l_2 k_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{l_\mu j_1} & a_{l_\mu j_2} & \cdots & a_{l_\mu j_\mu} & y\, a_{l_\mu k_1} & y\, a_{l_\mu k_2} & \cdots & y\, a_{l_\mu k_\mu} \end{vmatrix}$$

Ez a determináns, a mint LAPLACE kifejtési tétele mutatja, ha ezt az első $\mu+1$ sorból álló sorkombináczióra alkalmazzuk, mindig zérus, valahányszor $y = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$, mert az alapul vett $\| a_{ik} \|$ matrix μ-edrangú. De mivel e determináns egyszersmind y-nak μ-edfokú raczionális egész függvénye, azért

$$D = A(y-x_1)(y-x_2)\ldots(y-x_\mu),$$

a hol A az y-tól valamint az $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ határozatlanoktól független mennyiség.

Ha most már a D-ben előforduló $(-1)^{\mu-k} y^k x r_1 x r_2 \ldots x r_{\mu-k}$ $(r_1, r_2, \ldots, r_{\mu-k}$ az $1, 2, \ldots, \mu$ sorozat különböző számait jelentik) hatványszorzatok együtthatóit kiszámítjuk, akkor a D-nek kétféle kifejtéséből a megadott matrix μ-edfokú determinánsai között fennálló bilineár reláczióknak sorozatát találjuk. A legegyszerűbb és egyszersmind legfontosabb ezek közül y^μ és $(-1)^\mu x_1 x_2 \ldots x_\mu$ együtthatóinak összehasonlításából ered. Ha rövidség kedvéért az

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_\mu \\ j_1, j_2, \ldots, j_\mu \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\mu} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_\mu} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{i_\mu j_1} & a_{i_\mu j_2} & \ldots & a_{i_\mu j_\mu} \end{vmatrix}$$

jelölést használjuk, ez a reláczió:

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_\mu \\ j_1, j_2, \ldots, j_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1, l_2, \ldots, l_\mu \\ k_1, k_2, \ldots, k_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_\mu \\ k_1, k_2, \ldots, k_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1, l_2, \ldots, l_\mu \\ j_1, j_2, \ldots, j_\mu \end{pmatrix},$$ [1]

a mely különben ismeretes.

A többi y^μ, $y^{\mu-1}x_1$, $y^{\mu-2}x_1x_2, \ldots$ együtthatóinak összehasonlításából következő relácziókat az

---

[1] Ha az adott matrix symmetrikus, azaz $a_{ik} = a_{ki}$, akkor speczializálás útján rögtön a

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_\mu \\ i_1, i_2, \ldots, i_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1, l_2, \ldots, l_\mu \\ l_1, l_2, \ldots, l_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_\mu \\ l_1, l_2, \ldots, l_\mu \end{pmatrix}^2$$

reláczió adódik, mely mutatja, hogy μ-edrangú matrix főminorai, a mennyiben a zérustól különbözők, mind megegyező előjelűek, ha az elemek valós számok.

$$\binom{i_1, i_2, \dots, i_\mu}{j_1, j_2, \dots, j_\mu}\binom{l_1, l_2, \dots, l_\mu}{k_1, k_2, \dots, k_\mu} =$$

$$= \sum_r \binom{i_1, i_2, \dots, i_r, \dots, i_\mu}{j_1, j_2, \dots, k_1, \dots, j_\mu}\binom{l_1, l_2, \dots, l_\mu}{j_r, k_2, \dots, k_\mu} =$$

$$= \sum_{r,s} \binom{i_1, i_2, \dots, i_r, \dots, i_s, \dots, i_\mu}{j_1, j_2, \dots, k_1, \dots, k_2, \dots, j_\mu}\binom{l_1, l_2, l_3, \dots, l_\mu}{j_r, j_s, k_3, \dots, k_\mu} = \dots$$

$$(r, s = 1, 2, \dots, \mu;\ r \gtrless s)$$

alakban írhatjuk.

Világos, hogy az imént alkalmazott módszer, a mely μ-edfokú determinánsok között fennálló bilineár relácziók levezetésére alkalmasnak mutatkozott, felhasználható μ_1-ed és μ_2-edfokú determinánsok között fennálló relácziók levezetésére is, ha $\mu_1 + \mu_2 > \mu$.

II.

E czikkben meg akarom mutatni miképen lehet egy RADOS GUSZTÁVtól[1] bebizonyitott tételt általánositani. Ez az általánositás egyszersmind egyszerűsítésre is vezet.

Mindenekelőtt a RADOS-féle tételt kissé módosított alakban bizonyítom be újból, miközben néhány ismeretes, lineár helyettesítésekre vonatkozó elemi tételre támaszkodom. Az

$$y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \qquad (1)$$
$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

lineár helyettesítést röviden így jelölöm:

$$y = A(x).$$

E mellett fel fogom tenni, hogy ennek a helyettesítésnek valamint az összes később előforduló helyettesítéseknek determinánsa zérustól különböző. Ha az y_k határozatlanokra a

$$z_k = b_{k1}y_1 + b_{k2}y_2 + \dots + b_{kn}y_n, \qquad (2)$$
$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

[1] L. G. RADOS: Zur Theorie der adjungierten Substitutionen, Math. Annalen 48, pag. 417; továbbá W. H. METZLER: Compound Determ., Americ. Journal of Math., Vol. XVI. pag. 181.

vagy röviden a

$$z = B(y)$$

helyettesitést alkalmazzuk, közvetetlenül világos, hogy az x_k és z határozatlanok között a $z = C(x)$, vagy részletesebb kiirásban a

$$z_k = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \cdots + c_{kn}x_n \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

lineár helyettesités áll fenn, melyben

$$c_{kl} = b_{k1}a_{1l} + b_{k2}a_{l2} + \cdots + b_{kn}a_{nl}. \qquad (k, l=1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

E mellett a $|c_{kl}|$, $|b_{kl}|$, $|a_{kl}|$ determinánsokat a

$$|c_{kl}| = |b_{kl}| \cdot |a_{kl}|$$

reláczió fűzi össze. A következőkben determinánsok szorzása mindig a (4) alatti kompoziczió-szabály értelmében történjék. A $z = C(x)$ helyettesitést is az A és B helyettesitések szorzatának mondjuk és a

$$C = BA$$

alakban írjuk.

Alkalmazzuk (1)-re az $x = T(x')$, $y = T(y')$ helyettesitéseket, melyek részletesen kiirva a következők legyenek:

$$\begin{aligned} x_k &= t_{k1}x'_1 + t_{k2}x'_2 + \cdots + t_{kn}x'_n, \\ y_k &= t_{k1}y'_1 + t_{k2}y'_2 + \cdots + t_{kn}y'_n, \end{aligned} \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

akkor könnyű számitás y' és x' között a következő relácziókra vezet:

$$y' = T^{-1}AT(x'), \tag{6}$$

a hol T^{-1} a T-nek inverz helyettesitését jelenti.

Most már ismeretes tétel értelmében

$$(y'_k = \mu_k x'_k, \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

ha az

$$|a_{ik} - \delta_{ik}x| = 0 \qquad \begin{pmatrix} \delta_{ik}=0, \text{ ha } i \gtrless k \\ \delta_{ik}=1, \text{ ha } i=k \end{pmatrix} \tag{7}$$

charakteristikus egyenletnek gyökei

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n,$$

különbözők. Ez a tétel még ekként is kifejezhető: A történt feltevések mellett az $|A|$ determinánshoz mindig meghatározhatók a $|T|$ és $|T^{-1}|$ determinánsok úgy, hogy a $|T^{-1}|\,|A|\,|T|$ szorzat egyenlő legyen a $|\mu_{ik}|$ determinánssal, a melyben $\mu_{ik} = 0$, ha $i \gtrless k$ és $\mu_{kk} = \mu_k$.

Az (1) helyettesitéssel RADOS-nak módjára egyszerre tekintetbe veszszük annak adjungált helyettesitéseit. Ezeket úgy kapjuk meg, hogy segitségül veszszük a következő m n-elemű számsorozatot:

$$x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(m)}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

és a velük kogrediens következő m n-elemű sorozatot:

$$y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots, y_k^{(m)},$$

a hol $m \leq n$. Rendezzük továbbá az $1, 2, \ldots, n$ elemeknek $N = \binom{n}{m}$ számban lévő m-edosztályú ismétlés nélkül való kombináczióit és legyen e rendezés mellett az $r_1, r_2, \ldots, r_m$ az e-dik helyen lévő. Jelentse továbbá $X_e^{(m)}$ a

$$X_e^{(m)} = \begin{vmatrix} x_{r_1}^{(1)} & x_{r_2}^{(1)} & \ldots & x_{r_m}^{(1)} \\ x_{r_1}^{(2)} & x_{r_2}^{(2)} & \ldots & x_{r_m}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{r_1}^{(m)} & x_{r_2}^{(m)} & \ldots & x_{r_m}^{(m)} \end{vmatrix} \tag{9}$$

determinánst és jelentse $Y_e^{(m)}$ a hasonló az y-okból alakított determinánst, akkor a BINET-CAUCHY-féle determinánstételből következik:

$$Y_e^{(m)} = a_{e1}^{(m)} X_1^{(m)} + a_{e2}^{(m)} X_2^{(m)} + \cdots + a_{eN}^{(m)} X_N^{(m)}, \tag{10}$$
$$(e=1, 2, \ldots, N)$$

a hol

$$a_{ef}^{(m)} = \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & a_{r_2 s_2} & \ldots & a_{r_1 s_m} \\ a_{r_2 s_1} & a_{r_2 s_2} & \ldots & a_{r_2 s_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{r_m s_1} & a_{r_m s_2} & \ldots & a_{r_m s_m} \end{vmatrix}$$

és $s_1, s_2, \ldots, s_m$ az $1, 2, \ldots, n$ elemek m-edosztályú kombinácziói között az f-ediket jelenti.

A (10) alatti helyettesítést így fogjuk jelölni:

$$Y^{(m)} = A^{(m)}(X^{(m)}),$$

a hol $A^{(1)}$ természetesen A-val egyenlő értelmű. Ha ugyanígy megszerkesztjük a (2) helyettesités adjungált helyettesítéseit, akkor ugyancsak a Binet-Cauchy-féle tétel felhasználása mellett a

$$(BA)^{(m)} = B^{(m)}A^{(m)} \tag{13}$$

összefüggés adódik.

Ha ezt a tételt a (6) alatti helyettesítésre alkalmazzuk, lesz

$$(T^{-1}AT)^{(m)} = (T^{-1})^m A^{(m)} T^{(m)}$$

és ha (6) a (8) alatti helyettesitéssel megegyezik, az adjungált helyettesítés lesz:

$$Y_e^{(m)} = \mu_e^{(m)} X_e^{(m)}, \quad (e=1, 2, \ldots, N) \tag{14}$$

a hol

$$\mu_e^{(m)} = \mu_{r_1} \mu_{r_2} \ldots \mu_{r_m}. \tag{14'}$$

A μ_k és $\mu_e^{(m)}$ számok jelentéséből tüstént a következő tétel foly:

Ha az

$$|a_{ik} - \delta_{ik} x| = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenletnek gyökei $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *különbözők, akkor az*

$$|a_{ef}^{(m)} - \delta_{ef} x| = 0 \quad (e, f = 1, 2, \ldots, N)$$

egyenletnek gyökei:

$$\mu_1^{(m)}, \mu_2^{(m)}, \ldots, \mu_N^{(m)},$$

a hol δ_{ik}, δ_{ef} *zérussal vagy* 1-*gyel egyenlők, a szerint, a mint az* i, k *vagy* e, f *indexek egymástól különbözők vagy megegyezők.*

Ezzel Rados tétele be van bizonyítva. A bebizonyítás itt adott módja lehetővé teszi a tételnek általánosítását. Mindenekelőtt érvényessége kiterjeszthető oly

$$|a_{ik}-b_{ik}x|=0 \quad (i, k=2, \ldots, n) \tag{17}$$

egyenletekre, a melyekben $b_{ik}=0$, ha $i \gtrless k$ és $b_{kk}=\nu_k$, a hol $\nu_k \gtrless 0$. Ha ugyanis a (17) alatti egyenletben a szereplő determináns k-adik oszlopát ν_k-val elosztjuk az

$$|a'_{ik}-\delta_{ik}x|=0 \quad \begin{pmatrix}\delta_{ik}=0, \text{ ha } i \gtrless k\\ \delta_{kk}=1\end{pmatrix} \tag{18}$$

egyenletet kapjuk, a melyben

$$a'_{ik}=\frac{a_{ik}}{\nu_k}.$$

Ha a (18) egyenletre RADOS tételét alkalmazzuk (az a'_{ik}-re vonatkozó ismert megszorítások mellett), akkor rögtön ismeretesekké válnak az

$$|a^{(m)}_{ef}-\delta_{ef}x|=0 \quad \begin{pmatrix}\delta_{ef}=0, \text{ ha } e \gtrless f\\ \delta_{ee}=1\end{pmatrix} \tag{10}$$
$$(e, f=1, 2, \ldots, N)$$

egyenletnek gyökei.

Ha most a (19) egyenletben szereplő determináns f-edik oszlopát a

$$\nu_{s_1}\nu_{s_2}\ldots\nu_{s_m}=\nu^{(m)}_f=b^{(m)}_{ff}$$

számmal megszorozzuk, akkor ezáltal az egyenlet átmegy az

$$|a^{(m)}_{ef}-b^{(m)}_{ef}x|=0 \quad \begin{pmatrix}b_{ef}=0, \text{ ha } e \gtrless f\\ b_{ee}=\nu^{(m)}_e\end{pmatrix} \tag{20}$$

egyenletbe, de gyökei nem változnak meg.

Ennek következtében a (20) alatti egyenletnek gyökei:

$$\mu^{(m)}_1, \mu^{(m)}_2, \ldots, \mu^{(m)}_N,$$

ha

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$$

a (17) alatti egyenletnek különböző gyökeit jelentik.

Tekintsük végül az

$$|a_{ik}-b_{ik}x|=0 \quad (i, k=1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

egyenletet, a melynek az a_{ik} és b_{ik} mennyiségek csak annak a megszorításnak legyenek alávetve, hogy ennek az egyenletnek, valamint a

$$|b_{ik}-\delta_{ik}x| = 0 \quad \begin{pmatrix}\delta_{ik}=0, \text{ ha } i<k\\ \delta_{kk}=1\end{pmatrix}$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, n)$$

egyenleteknek gyökei egymástól és zérustól különbözők legyenek. Az előzők szerint lehet most már a $|T|$ és $|T^{-1}|$ determinánsokat úgy meghatározni, hogy a

$$|T^{-1}|\,|b_{ik}|\,|T|$$

determinánsszorzat fődiagonálisában álló elemek a zérustól különbözők, az összes többi elemek pedig zérussal egyenlők legyenek. Ennek következtében a

$$|T^{-1}|\,|a_{ik}-b_{ik}x|\,|T| \qquad (23)$$

determináns ugyan olyan alakú mint a (17) alatti és így

$$|(T^{-1})^m|\,|a_{ef}^{(m)}-b_{ef}^{(m)}x|\,|T^{(m)}| \qquad (24)$$

ugyanolyan alakú mint (20). Mivel pedig a (21) alatti és az

$$|a_{ef}^{(m)}-b_{ef}^{(m)}x| = 0 \qquad (25)$$

egyenlet gyökei ugyan azok, mint amaz egyenletekéi, a melyeket úgy kapunk, hogy a (23) és (24) alatti kifejezéseket zérussal egyenlővé teszszük és mivel továbbá ez utóbbi egyenleteknek alakja a (17) illetve (20) alatti egyenletekével megegyez és közöttük ugyanaz a vonatkozás is fennáll, mint a (17) és (20) alatti egyenletek között, azért a (21) és (25) alatti egyenletek gyökei között is ugyanaz a vonatkozás áll fenn, mint a (17) és (20) alatti egyenletek gyökei között, t. i.:

Ha a (21) alatti egyenlet gyökei:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n,$$

akkor a (25) alattinak gyökei

$$\mu_1^{(m)}, \mu_2^{(m)}, \ldots, \mu_N^{(m)}.$$

Egyszerű átalakitás után e tételnek következő formásabb fogalmazását adhatjuk:

Ha

$$|a_{ik}x+b_{ik}y| = \prod_l (a_l x+\beta_l y), \qquad (i, k, l=1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

akkor

$$|a^{(m)}_{ef}x+b^{(m)}_{ef}y| = \prod_g (a^{(m)}_g x+\beta^{(m)}_g y). \qquad (e, f, g=1, 2, \ldots, N) \tag{27}$$

E mellett e, f, g az $1, 2, \ldots, n$ elemeknek $r_1, r_2, \ldots, r_m$, illetve $s_1, s_2, \ldots, s_m$, illetve $t_1, t_2, \ldots, t_m$ kombináczióit határozzák meg; a $a^{(m)}_{ef}$ értelme (15) alatt található, egészen analog szerkezetű $b^{(m)}_{ef}$; végül $a^{(m)}_g$ és $\beta^{(m)}_g$ értelmét a következő egyenletek magyarázzák:

$$a^{(m)}_g = a_{t_1}a_{t_2}\ldots a_{t_m}, \quad \beta^{(m)}_g = \beta_{t_1}\beta_{t_2}\ldots\beta_{t_m}.$$

Ennek az általánositott RADOS-féle tételnek bebizonyitása néhány megszorító feltevés teljesüléséhez volt kötve, de könnyű kimutatni, hogy érvényessége ezektől független. A (26) és (37) alatti egyenletek bal oldalai n-ed, illetve N-edfokú binär alakok; hogy a jobb oldalaikkal kifejezett vonatkozás fennálljon, szükséges és elegendő, hogy a bal oldalon álló binär alakok együtthatói között bizonyos algebrai úton kiszámitható relácziók fennálljanak. Ezek a relácziók a mi esetünkben azonosan, azaz határozatlan a_{ik} és b_{ik} mennyiségek mellett is fennállanak és így teljesülni fognak akkor is, ha a_{ik}, b_{ik} helyébe tetszésszerinti számértékeket helyettesitünk.

De ebből világosan következik, hogy a fent kimondott tétel függetlenül minden megszorítástól, azaz *korlátlanul érvényes.*

III.

Az előző fejezetek tételei többféle módon használhatók fel determinánstételek levezetésére. Néhány példát állitok ide.

1. Legyenek adva az

$$|a_{ik}x+b_{ik}y| = \prod_l (\alpha_l x+\beta_l y) \tag{29}$$
$$(i, k, l=1, 2, \ldots, n)$$

és

$$|c_{i'_1k'_1}x+d_{i'_1k'_1}y| = \prod_{l'_1} (\gamma_{l'_1}x+\delta_{l'_1}y) \tag{29'}$$
$$(i'_1, k'_1, l'_1=1, 2, \ldots, n'_1)$$

binär alakok és alakitjuk belőlük a

$$\left|\begin{array}{c:c} \text{Matrix } (a_{ik}x+b_{ik}y) & \text{Nullák} \\ \hdashline \text{Nullák} & \text{Matrix } (c_{i'_1k'_1}x+d_{i'_1k'_1}y) \end{array}\right| \tag{30}$$

determinánst. Ez a determináns egyenlő a (29) és (29') bal oldalainak szorzatával. Alkalmazzuk most a II. fejezet tételét az $m=2$ esetben. Az

$$1, 2, \ldots, n, 1', 2', \ldots, n'$$

elemek másodosztályú ismétlés nélkül való kombinácziót három csoportba foglalom:

a) az $1, 2, \ldots, n$ másodosztályú kombinóczióit;

b) az $1', 2', \ldots, n'$ másodosztályú kombinácziót;

c) mindama másodosztályú kombinácziókat, melyekben az első elem az $1, 2, \ldots, n$ számok egyik, a második elem pedig az $1', 2', \ldots, n'$ számok egyike.

A (30) alattival $m=2$ értékhez tartozó adjungált determináns ily alakban írható:

$$\begin{array}{r|c|c|c|}
\binom{n}{2}\text{ sor}\Big\{ & \text{Matrix}\,(a^{(2)}_{ef}x+b^{(2)}_{ef}y) & \text{Nullák} & \\
\hline
\binom{n'_1}{2}\text{ sor}\Big\{ & & \text{Matrix}\,(c^{(2)}_{e'_1f'_1}x+d^{(2)}_{e'_1f'_1}y) & \\
\hline
nn'_1\text{ sor}\Big\{ & & & \text{Matrix}\,(a_{ik}c_{i'_1k'_1}x+b_{ik}d_{i'_1k'_1}y) \\
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\binom{n}{2}\text{ oszlop}}} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\binom{n'_1}{2}\text{ oszlop}}} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{nn'_1\text{ oszlop}}}
\end{array} \tag{31}$$

Ez a determináns pedig három determinánsnak szorzatával egyenlő. Az előző fejezetben levezetett tétel ismételt alkalmazása révén azt találjuk, hogy

$$|a_{ik}c_{i'_1k'_1}x+b_{ik}d_{i'_1k'_1}y| = \prod_{l,l'_1}(a_l\gamma_{l'_1}x+\beta_l\delta_{l'_1}y) \tag{32}$$
$$(i,\ k,\ l=1,2,\ldots,n;\quad i'_1,\ k'_1,\ l'_1=1',2',\ldots,n')$$

A bal oldalon szereplő determináns felírásánál arra kell ügyelnünk, hogy egy sor elemei ugyanazon (i, i'_1), egy oszlop elemei pedig ugyanazon (k, k'_1) párhoz tartoznak és hogy továbbá a sorok és oszlopok felírásánál a használandó másodosztályú kombinácziók sorrendje ugyanaz legyen.

A (31) alatti identitásból $x^{nn'_1}$ együtthatójának x^n és $x^{n'_1}$ hatványoknak (29) illettve (29')-ben szereplő együtthatóinak összehasonlítása révén a

$$|a_{ik}c_{i'_1k'_1}| = |a_{ik}|^{n'_1}|c_{i'_1k'_1}|^n$$
$$(i,\ k=1,2,\ldots,n;\quad i'_1,\ k'_1=1',2',\ldots,n')$$

relácziót kapjuk, melyet rendesen a KRONECKER-féle relácziónak neveznek.[1]

2. A (26) és (27) alatti egyenletekből x különböző hatványaihoz tartozó együtthatók összehasonlításából különböző determináns-tételekhez juthatunk. Legyen például $b_{ik}=0$, midőn $k > q$ $(q > m,\ q < n)$. Rendezzük az $1, 2, \ldots, n$ m-edosztályú kombinácziót úgy, hogy első helyekre az $1, 2, \ldots, q$ elemek m-edosztályú kombináczióit írjuk, azután a többieket akkor

[1] Idézet az Encykl. der math. Wiss. I. A. 2. pag. 40; franczia kiadásban pag. 99. Nem tarthatom indokoltnak azt a súlyt, melyet erre a KRONECKER-féle tételre helyeznek; mert KRONECKER tétele csak egészen speciális esete ama FRANKE-féle tételnek, melynek értelmében

$$|a_{ef}^{(m)}| = |a_{ik}|^{\binom{n-1}{m-1}}$$
$$(i,\ k=1,2,\ldots,\lambda;\quad e,\ f=1,2,\ldots,N)$$

és a melyből KRONECKER tétele ugyanazzal az eljárással levezethető, a melynek segítségével a (26) és (27)-ből (32)-t levezettem.

$b_{ef}^{(m)}=0$, ha $f>\binom{q}{m}$. Most már (27) bal oldalán $x^{N-\binom{q}{m}}y^{\binom{q}{m}}$ együtthatója az

$$|A_{ef}|$$
$$(e, f=1, 2, \ldots, N)$$

determináns, a hol $A_{ef}=b_{ef}^{(m)}$, ha $f=\binom{q}{m}$; $A_{ef}=a_{ef}^{(m)}$, ha $f>\binom{q}{m}$. Ha még meggondoljuk, hogy a (26) alatti alak x^{n-q}-t mint tényezőt tartalmazza és hogy ennek következtében

$$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_{n-q}=0$$
$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{n-q}=1$$

tehető, akkor egyszerű számítás után a következő relácziót kapjuk:

$$|A_{ef}| = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1q} & a_{1q+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nq} & a_{nq+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}^{\binom{q-1}{m-1}} \cdot |a_{ik}|^{\binom{n-1}{m-1}-\binom{q-1}{m-1}}$$
$$(e, f=1, 2, \ldots, N;\ i, k=1, 2, \ldots, n)$$

3. Ha végül a megelőző fejezet főtételét $m=n-1$ esetben alkalmazzuk, akkor közvetetlenül az

$$|xa_{ik}+yb_{ik}| = |a_{ik}|\,|b_{ik}|\,|x\beta_{ik}+y\alpha_{ik}|$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, n)$$

egyenlettel kifejezhető tétel adódik, a hol

$$\alpha_{ik}=\frac{1}{|a_{ik}|}\frac{\partial|a_{ik}|}{\partial a_{ik}}, \quad \beta_{ik}=\frac{1}{|b_{ik}|}\frac{\partial b_{ik}}{\partial b_{ik}}$$

és ez a tétel Siacci ismeretes képlete, melyet az orthogonális helyettesítésekre vonatkozó Brioschi-féle tétel általánosításának levezetésére felhasznált.

Petr Károly.

A KÖRT PROJICZIÁLÓ KÜLÖNÖS KÚPOK CSÚCSAINAK GEOMETRIAI HELYEIRŐL.

Nyolcz egymástól független helyzetű pont négy II. r. kúpot határoz meg, a mely azokon keresztül megy. Ha e pontok közül öt ugyanegy síkban van, akkor a kúpok e pontokon átfektetett kúpszeleten mennek keresztül és számuk csak kettő. Adott kúpszelet tehát, a melyen egy kúp keresztül menjen, a kúp meghatározásánál ötszörös föltételnek tekinthető. Ezért háromszorosan végtelen sok kúp van, a mely adott körön vezethető keresztül. Ha e kúpokat még egy egyszerű föltételnek vetjük alá, pl. hogy *különös* kúpok legyenek, akkor csak kétszeres úpsokaságot nyerünk; ezeknek csúcsai kétszeres pontsokaságot képeznek, azaz felületen vannak. Ez pedig oly forgásfelület, a melynek forgástengelye t a kör síkjára annak középpontjában merőlegesen áll és a melynek a kör síkja szimmetriai síkja. Ugyanis a k kört valamely M pontból projicziáló kúp kongruens mindazokkal a kúpokkal, a melyek a k-t a t körül forgó M pont bármely helyzetéből és ezeknek a k síkjára vonatkozó tükörképéből projicziálják. E szerint alakra nézve csak egyszeresen végtelen sok különböző különös kúp van, a mely adott körön átfektethető. És mert minden másodrendű kúp adott kör szerint metszhető, azért *az alakilag különböző különös másodrendű kúpok száma egyszeresen végtelen sok.*

Jelen értekezés tárgya azoknak a forgásfelületeknek meghatározása, a melyeknek pontjaiból valamely adott kör különös kúpokkal projicziálható.

*

1. Jelöljük a következőkben a k körnek középpontját K-val, síkját $\varkappa$-val és sugarát r-rel. E körön átmenő forgáshengeren felveszünk egy tetszőleges M pontot, a melynek derékszögű projekcziója $\varkappa$-ra az A, és az AK körátmérőnek a második végpontja a B. A k kör az M pontból oly különös kúppal, úgynevezett *orthogonális* kúppal projicziáltatik, a melynek alkotóit az MA, MB alkotókkal összekötő síkok egymásra merőlegesek. Ama forgáshenger tehát geometriai helye azoknak a pontoknak, a melyekből a k kör orthogonális kúpokkal projicziálható.

2. Vezessük most a k körön keresztül azt a gömböt, a melynek a k főköre és legyen az M annak tetszésszerinti pontja. A k kört az M-ből projicziáló kúp egyrészt az MK egyenesen átmenő síkoktól, másrészt az M-ből a $\varkappa$-ra merőlegesen bocsátható síkoktól derékszögű alkotópárokban metszetik. E különös kúpot REYE PAPPUS-féle kúpnak nevezi. Ama gömb lesz tehát a k-n átmenő PAPPUS-féle kúpok csúcsainak geometriai helye. — E két ismert geometriai helyet csak a teljesség végett említettem.

3. Írjunk be az adott k körbe egy ABC hegyesszögű háromszöget és vezessük ennek oldalain keresztül azt a három síkot, a mely páronként egymásra merőleges és egymást pl. a kör síkja fölött az M pontban metszi és a melynek tehát derékszögű projekcziója a kör síkjára az ABC háromszög H magasságpontjában van. A CH magasság az AB oldalt a D pontban a kört másodszor az E pontban metszi és $ED = DH$. Ha az MH egyenesnek egyik metszőpontja azzal a gömbbel, a melynek k a főköre N, úgy a CMD, CNE derékszögű háromszögekből következik

$$\overline{HN}^2 : \overline{HM}^2 = CH \, . \, HE : CH \, . \, HD = 2 : 1.$$

Ebből látható, hogy az M pontot a gömbnek N pontjából akkép származtathatjuk le, hogy a k kör síkjára merőleges NH félhúrját $\sqrt{2} : 1$ viszony szerint rövidítjük. Ezek az M pontok tehát a gömbbel affin felületen feküsznek, a mely egy úgynevezett szféroid; ennek äquatora a k, forgástengelye pedig egyenlő hosszu a k-ba írható négyzet oldalával.

Az M pontból az ABC háromszög egy orthogonális triéder éleivel, a kör pedig egy oly kúppal projicziálható, a melybe ama triéder be van írva. Az ily kúpot *egyenoldalú* kúpnak nevezzük és az a tulajdonsága, hogy abba végtelen sok ily orthogonális triéder írható be. Ehhez képest:

A kört projicziáló egyenoldalú kúpok csúcsainak geometriai helye oly szféroid, a melynek a kör maga az äquatora és a meridiánusok tengelyeinek viszonya $\sqrt{2}:1$.

4. Jelöljük egy a k kör körül írt hegyesszögű háromszög csúcsait $A_1A_2A_3$-mal, magasságpontját H-val; a háromszöget projicziáló orthogonális triéder csúcsát M-mel és éleinek hajlásszögeit a k kör síkjához $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$-mal, végre a kör K középpontjának derékszögű projekczióját a triéderélekre $K_1K_2K_3$-mal. Minthogy

$$MK_i = r\cos\alpha_i,$$

azért

$$\overline{MK}^2 = \overline{MK}_1^2 + \overline{MK}_2^2 + \overline{MK}_3^2 = r^2(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3) = 2r^2,$$

tehát az M pont a K ponttól $r\sqrt{2}$ távolságra van és így az M pont geometriai helye egy ugyanily sugarú gömb.

A k kört az M pontból projicziáló kúp be van írva ama orthogonális triéderbe, tehát a kúp az *egyenoldalúnak reczi-prokus* kúpja, vagyis:

Az r sugarú kört a vele közös középpontú és $r\sqrt{2}$ sugarú gömb pontjaiból projicziáló kúpok az egyenoldalúnak reczi-prokus kúpjai.

Jegyzet. Azok a pontok, a melyekből egy a, b, c féltengelyekkel biró ellipszoidhoz oly érintősíkok vezethetők, a melyek páronként egymásra merőlegesek, mint azt már MONGE meghatározta, egy az ellipszoiddal konczentrikus gömbön vannak, a melynek sugara négyzetre emelve egyenlő $a^2+b^2+c^2$. Ha a felvett kört egy ily igen vékony ellipszoidnak tekintjük ($a=b$, $c=0$), akkor az elébb talált gömb a körré elkorcsosult ellipszoidra nézve a MONGE-féle gömb. Így mindazon feladatok, a melyeket itt tárgyalunk az ellipszoidra, vagy általánosabban bármily másodrendű felületre általánosíthatók. Úgy vélem azonban, hogy a tárgyalandó specziális feladatok a bizonyításoknál használt egyszerű eszközöknél fogva érdemelnek figyelmet.

5. Érintse az l kör a k kört az A pontban és síkja hajoljék ennek síkjához $\varkappa$-hoz, 2φ szög alatt. Ha az A ponthoz tartozó két körátmérőnek második végpontját B és C-vel jelöljük, akkor a két kört projicziáló kúpnak M csúcsa a BC egyenesen és az ABC háromszög körülirt körnek az A ponthoz tartozó érintőjén van, azaz az AM az l körnek AC átmérőjével ugyanoly szögeket képez, mint a BM a k körnek BA átmérőjével. Ha az l körnek AC átmérőjét nagyságra nézve változtatjuk és A végpontját megtartjuk, akkor az AM, BM egyenesek az A és B pont körül két ellenkezőleg forgó kongruens sugársort írnak le, a melynek képződménye, mint az M pontok geometriai helye egyenlőoldalú hiperbola. Ennek az AB átmérője és az AC az A pontban érintője. A k kört e hiperbola pontjaiból és a $\varkappa$-ra vonatkozó tükörképének pontjaiból projicziáló kúpok pedig olyanok, hogy cziklikus síkjai $BAC=2\varphi$ szöget zárnak be. Ezért:

Az r sugarú k kört projicziáló oly kúpoknak csúcsai, a melyeknek cziklikus síkjai 2φ szöget képeznek, a k-n keresztül menő két forgásfelületen vannak; ezeknek forgástengelye a k síkjára annak középpontjában merőlegesen áll, meridiánusai oly egyenlőoldalú hiperbolák, a melyeknek középpontja a k középpontjában van, $2r\sqrt{\sin 2\varphi}$ hosszúságú főtengelyei pedig a k síkjával $(45°-\varphi)$ szöget képeznek.

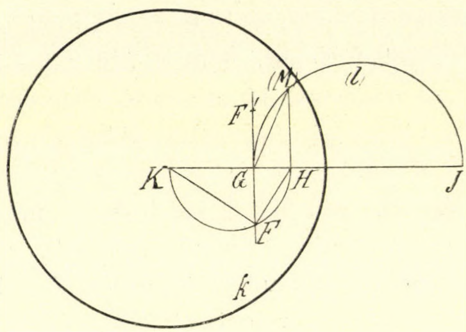
Ha $2\varphi=90°$, akkor a kúpok cziklikus síkja egymásra merőlegesek, azaz a kúpok *orthocziklikusak.* Az előbbi tételből pedig következik, hogy:

A k kört projicziáló orthocziklikus kúpok csúcsainak geometriai helye oly forgási hiperboloid, a melynek torokköre a k és meridiánusai egyenlőoldalú hiperbolák.

Ha $2\varphi=0°$, akkor a kúpok cziklikus síkjai egybeesnek, a csúcsok helyét képező hiperbolák pedig oly két egyenessé korcsosulnak, a melyeknek egyike a kör síkjára a középpontban merőlegesen áll, a másika pedig egy-egy körátmérő. Az első egyenesen lévő pontokból a kört *forgáskúpok* projicziálják, a körátmérőin lévő pontokból pedig síkká elkorcsosult kúpok.

6. Az r sugarú k körön most oly kúpokat akarunk átvezetni, a melyeknek fokális sugarai 2φ szöget képeznek.

E végből (1. ábra) a kör síkjában felveszünk egy oly I pontot, a melynek távolsága a körnek K középpontjától $r : \sin\varphi$;



1. ábra.

ennek polárisa a KI egyenest a K-tól $r \sin\varphi$ távolságra levő G pontban metszi ($KG = r \sin\varphi$, $KI = r : \sin\varphi$). A GI vonaldarab, mint átmérő fölé leírjuk azt az l kört, a melynek síkja a k-nak síkjára $\varkappa$-ra, merőleges és e körön tetszésszerint felveszszük az M pontot. Végre az M pontnak derékszögű projekczióját a GI egyenesre H-val és a KH átmérő fölé a $\varkappa$ síkban leírt körnek metszőpontjait a I pont polárisával F, F'-sel jelöljük.

A szerkesztés folytán egyrészt

$$KG = r \sin\varphi, \quad GI = \frac{r}{\sin\varphi} - r \sin\varphi = \frac{r \cos^2\varphi}{\sin\varphi},$$

tehát

$$KG : GI = \operatorname{tg}^2\varphi\,;$$

másrészt a KFH, MGI derékszögű háromszögek miatt

$$\overline{FG}^2 : \overline{GM}^2 = KG \,.\, GH : GI \,.\, GH = \operatorname{tg}^2\varphi,$$

és ezért, mint az FGM derékszögű háromszögből látható: az FM (valamint az $F'M$ is), a GM egyenessel φ szöget képez. Az MFK, MFH síkok, valamint az MFG, MFI síkok egymásra merőlegesek és e síkpárok a k körnek FK, FH; FG, FI konjugált poláris párjain mennek keresztül. Ezért az MF, valamint az MF' egyenes is fokális sugara annak a kúpnak, a mely a k kört az M pontból projicziálja és e fokális sugarak 2φ szöget képeznek.

Minthogy az M pontot az l körön tetszésszerint vehetjük fel, magát az l kört pedig a K pontban a $\varkappa$ síkra merőleges tengely körül forgathatjuk: az l kör által e forgatás alkalmával leírt gyűrűfelület geometriai helye a keresett M pontoknak. Tehát:

A k kört projicziáló oly kúpoknak csúcsai, a melyeknek fokális sugarai 2φ szöget képeznek egy körgyűrűn vannak; e gyűrű torokköre és äquatora a k-val konczentrikus és a körök sugarai $r \sin\varphi$, illetve $r : \sin\varphi$.

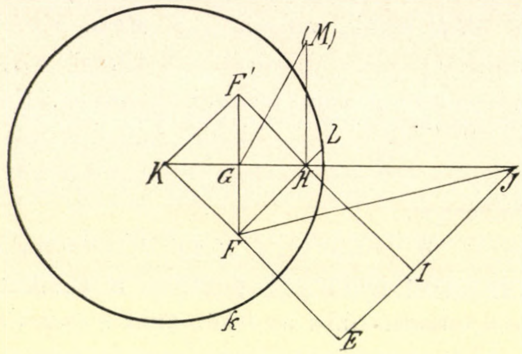
Ha a $2\varphi = 90°$, tehát a kúpok fokális sugarai egymásra merőlegesek, azaz a kúpok *orthofokálisak*, a következő tételt nyerjük:

Az r sugarú k kört projicziáló orthofokális kúpok csúcsainak geometriai helye oly körgyűrű, a melynek torokköre és äquatora $r : \sqrt{2}$, illetve r sugarú és a k-val konczentrikus.

Ha $2\varphi = 0°$, tehát a fokális sugarak egyesülnek, akkor a körgyűrű meridiánusai a kör síkjára annak középpontjában merőlegesen álló egyenessé korcsosulnak el, a melynek pontjaiból a kör *forgáskúpokkal* projicziáltatik.

7. A PAPPUS-féle kúpnak reciprokus kúpja az úgynevezett HACHETTE-féle kúp. Ennek a többek között az a tulajdonsága van, hogy bármelyik fokális sugarának poláris síkja merőleges a másik fokális sugárra. E tulajdonságra támaszkodva akarjuk a k körön átmenő HACHETTE-féle kúpok csúcsainak helyét meghatározni.

E végből rajzoljunk (2. ábra) a k körön belül egy $KFHF'$ négyzetet, a melynek K szögpontja a kör középpontjában van és átlói a G pontban találkoznak. E négyzetnek FH oldala a



2. ábra.

kört egy L pontban, az F pont polárisa a KF, $F'H$ oldalakat és a KH átlót az E, I és J pontban metszi; az FL-lel egyenlő HM vonaldarab pedig a H pontban merőlegesen áll a kör síkjára. Minthogy a szerkesztés folytán

$$\overline{HM}^2 = \overline{FL}^2 = KF \,.\, FE = GH \,.\, HJ,$$

ezért az MG, MJ egyenesek, valamint az MGF, MJF síkok egymásra merőlegesek, minthogy továbbá az MKF, MHF síkok szintén merőlegesek egymásra és így az M pontból a GF, JF; KF, HF konjugált poláris párok derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak: az MF és hasonlókép az MF' is fokális sugara annak a kúpnak, a mely a k kört az M pontból projicziálja. De ez a kúp Hachette-féle, mert az MF'' fokális sugara a

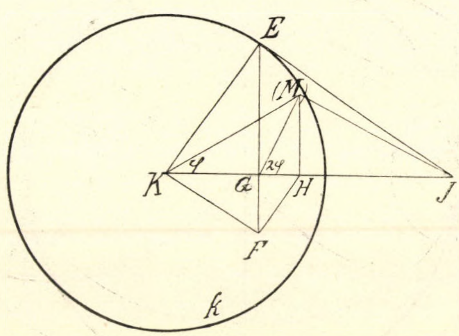
$$\overline{HM}^2 = KF \,.\, FE = F'H \,.\, HI$$

vonatkozás miatt merőleges az MF-nek poláris síkjára MEI-re.

Ha a k kört az FK tengely körül 90°-kal forgatjuk és a forgatás után pontjait az FH-val parallel sugarakkal az MKH síkra projicziáljuk, úgy e projekczióban nyerjük az M pontoknak geometriai helyét az MKH sikban. Ezért:

A k kört projicziáló Hachette-*féle kúpok csúcsainak geometriai helye az a szféroid, a melynek forgástengelye a kör átmérőjével egyenlő és annak középpontjában síkjára merőlegesen áll és a melynek fokális köre (a meridiánusok gyújtópontjainak helye) a k kör.*

8. Az 1-ső pontban említett orthogonális kúpnak recziprokusa egy oly kúp, a melyet az egyes fokális sugarakra merőleges síkok parabolában metszenek. Minthogy ebből folyólag a parabolának számos tulajdonsága átvihető erre a kúpra, azért azt *parabolikus* kúpnak nevezhetjük.



3. ábra.

Hogy egy olyan M pontot szerkeszszünk, a melyből a k kör parabolikus kúppal projicziálható, nevezzük (3. ábra) a k-n kívül fekvő J pontnak polárisát a k-ra vonatkozólag EF-nek; ennek egyik metszőpontját a k-val E-nek, a JK körátmérővel G-nek, a KE körsugárra a K középpontban merőlegesen álló egyenessel pedig F-nek. Legyen továbbá a H pont a KJ egyenesen úgy választva, hogy $FH \parallel KE$ és az M pont a H pontban a kör síkjára merőlegesen álló egyenesen úgy meghatározva, hogy $KG = GM$, végre legyen $MKG\measuredangle = \varphi$, tehát $MGH\measuredangle = 2\varphi$.

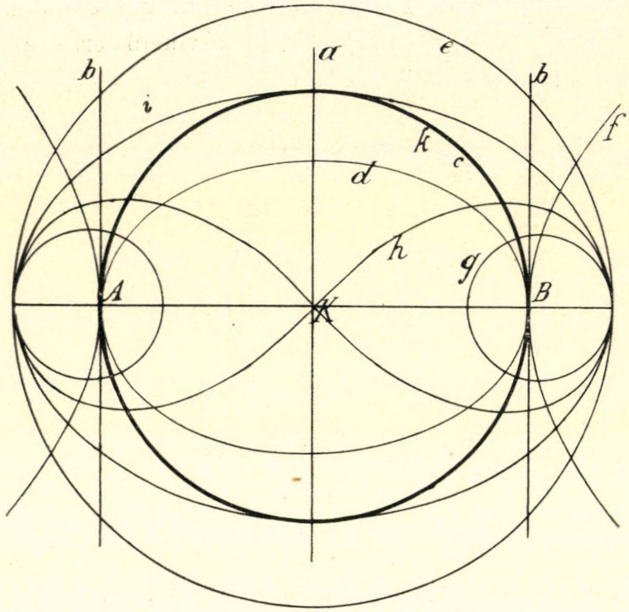
Minthogy a HFK, KEJ hasonló háromszögek miatt

$$HG : GK = GK : GJ,$$

és így

$$\overline{GM}^2 = \overline{GK}^2 = HG \,.\, GJ,$$

a GM, MJ egyenesek és az FGM, FMJ síkok egymásra merőlegesek, tehát a KF, FH; GF, FJ konjugált poláris párok az M pontból derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak; minthogy továbbá az EJ körérintő, valamint az ME egyenes ($EKF \cong EMF$ miatt) az MF-re merőlegesen áll, azért a k kört az M pontból projicziáló kúpnak MF fokális sugara merőleges az MEJ érintősíkra, tehát a kúp parabolikus.



4. ábra.

Hogy az M pontnak geometriai helyét a KMJ síkban megpont állapíthassuk, ha a J a KJ átmérőn változik, vegyük tekintetbe, hogy az előbbi kongruens háromszögek kölcsönös helyzete folytán

$$\overline{KM}^2 = 2 \,.\, \overline{KF}^2,$$

továbbá

$$\frac{\overline{KF}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{\overline{HF}^2}{\overline{KF}^2} = \frac{HG}{GK} = \frac{HG}{MG} = \cos 2\varphi,$$

a miből

$$\overline{KM}^2 = 2 \,.\, \overline{KE}^2 \,.\, \cos 2\varphi.$$

Ez pedig annak a közönséges *lemniszkatá*nak egyenlete, a melynek gyújtópontjai a KJ körátmérőnek végpontjai. Ezért: *A k kört projicziáló parabolikus kúpok (az orthogonalissal recziprokus kúpok) csúcsainak geometriai helye oly forgásfelület, a melynek meridiánusai közönséges lemniszkaták; ezeknek gyújtópontjai a k kör átmérőinek végpontjai.*

9. A 4. ábrában fel vannak tüntetve azoknak a forgásfelületeknek meridiánusai, a melyeknek pontjaiból az ábra síkjából az AB tengely körül 90°-kal elforgatott k kör pontjai különös kúpokkal projicziálhatók. Még pedig az elforgatott k kör

az	a	egyenes	pontjaiból	forgáskúpokkal	
a	b	egyenespár	«	orthogonális	kúpokkal
a	c	kör	«	Pappus-féle	«
a	d	ellipszis	«	egyenlőoldalú	«
az	e	kör	«	az egyenlőoldalú-val recziprokus	«
az	f	hiperbola	«	orthocziklikus	«
a	g	körpár	«	orthofokális	«
a	h	lemniszkata	«	parabolikus	«
az	i	ellipsis	«	Hachette-féle	«

projicziálható.

Az $a, b, \ldots h$ vonalak közül bármely kettőnek metszőpontjából az elforgatott k kör oly kúpokkal projicziálható, a melyek kétféle különlegességet mutatnak.

Klug Lipót.

NEM FOLYTONOS JELENSÉGEK AZ ELEKTRODINAMIKÁBAN (ELEKTRONELMÉLETBEN).

(Második közlemény.)

A vektorszámítás egyéb segédtételeit itt nem részletezzük: a hol egyikükre szükségünk lesz, ott röviden vázolni fogjuk a segédtétel levezetését.

A következőkben főleg a következő mennyiségek fognak szerepelni, melyeket itt felsorolunk a használandó állandó jelükkel együtt, a nélkül, hogy itt még részletes értelmezésükbe bocsátkoznánk:

$\mathfrak{E}$ = az elektromos tér erőssége;
$\mathfrak{H}$ = a mágneses tér erőssége;
$\mathfrak{F}$ = az egységnyi elektromos töltésre ható tömegmozgató (ponderomotorikus) erő;
Φ = skaláris potencziál;
$\mathfrak{A}$ = vektorpotencziál;
ρ = elektromos térfogati sűrűség;
$d\tau$ = térfogatelem;
σ = elektromos felületi sűrűség;
df = felületelem;
$\mathfrak{v}$ = az elektromosság áramlási sebessége.

Gyakran fogjuk a $[\chi]$ jelet használni: ennek jelentése a következő: χ legyen a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változóknak oly függvénye, mely folytonos a

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) < 0$$

egyenlőtlenség meghatározta «1» és a

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > 0$$

egyenlőség meghatározta «2» tartományban, e két tartomány

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$$

«határfelületén» azonban véges ugrást szenved, úgy hogy ugyanazon $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ pontján a $\psi=0$ felületnek

$$\chi_1 = \lim_{\psi \leqq 0} \chi$$

(a hol a határátmenetnél az «1» tartományon keresztül közeledünk a $\psi=0$ «szakadási felülethez») általában nem egyenlő a

$$\chi_2 = \lim_{\psi \geqq 0} \chi$$

mennyiséggel (a hol a határátmenet a «2» tartományon keresztül végzendő el).

A $\chi_2-\chi_1$ különbséget, a szakadás *nagyságát* jelöljük $[\chi]$-vel. Ha μ_1 sűrűségű szilárd golyót, μ_1-től különböző μ_2 sűrűségű folyadékba mártunk, akkor a μ sűrűség az x, y, z koordináták oly függvényének tekinthető, mely a golyó határfelületén épen ily szakadást szenved. Ha a koordinátarendszer kezdőpontja az A sugarú golyó középpontjával összeesik, akkor

$$\psi(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-A^2.$$

A golyón belül

$$\psi < 0,$$

a golyón kívül

$$\psi > 0$$

a golyó felületén a sűrűség határértéke más, a szerint a mint a folyadékon vagy a szilárd testen át közeledünk hozzá; a golyó felülete a szakadási felület:

$$[\mu] = \mu_2-\mu_1.$$

3. §. A folytonos jelenségek elektrodinamikájának alapegyenletei.

Az elektromosságot a következőkben bizonyos folyadéknak tekintjük, mely az egész x, y, z térben áramlik. Ezen áramlás leírására, ép úgy mint a hidrodinamikában, kétféle úton juthatunk el.

Vagy azt kérdezzük, mi a ρ sűrűségnek és a $\mathfrak{v}$ áramlási sebességnek értéke a tér valamely x, y, z pontjában a t idő valamely értékénél (ú. n. EULER-féle felfogás), vagy azt, melyik x, y, z pontban van a t időpillanatban az az elektromos pont, melyet az a, b, c parameterek jellemeznek (ú. n. LAGRANGE-féle felfogás); a, b, c lehetnek például x, y, z értékei a $t=0$ időpontban.

Az első esetben az ismeretlenek

$$\rho(x, y, z, t), \quad \mathfrak{v}^x(x, y, z, t), \quad \mathfrak{v}^y(x, y, z, t), \quad \mathfrak{v}^z(x, y, z, t), \tag{1}$$

a másodikban

$$x(a, b, c, t), \quad y(a, b, c, t), \quad z(a, b, c, t). \tag{2}$$

Ismerve x, y, z-t mint a, b, c, t függvényét és a ρ sűrűség *kezdőállapotát*, $\rho(a, b, c, 0)=\rho_0$-t, kiszámíthatjuk ρ értékét bármely pontban bármely t időre nézve, minthogy, ha például a, b, c épen x, y, z kezdőértékeit jelentik:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix} \tag{3}$$

Az itt szereplő függvénydeterminánst a következőkben röviden ω-val fogjuk jelölni.

Ha a, b, c nem jelentik x, y, z kezdőértékeit, hanem más parameterek, akkor a következő egyenlőség áll fenn

$$\frac{\bar{\rho}_0}{\rho} = \omega, \tag{4}$$

a hol ρ_0 szintén nem jelenti a sűrűség kezdőállapotát, hanem a, b, c-nek oly függvénye, mely a sűrűség kezdőállapota által — épen a (4) alapján — meghatározható s így ugyancsak a (4)-ből ρ értéke minden további t időre is a, b, c függvényeképen előállítható.

Ha tehát ρ-t és $\mathfrak{v}$-t mint x, y, z, t függvényét előállítottuk, ismerjük teljesen az elektromosság áramlását; ugyanez mondható akkor is, ha megadjuk ρ_0-t mint a, b, c függvényét és x, y, z-t mint a, b, c, t függvényeit.

Ezzel a tisztán kinematikai leírással azonban még nem elégszünk meg: a hidrodinamikában sem elégszünk meg azzal, ha pontosan ismerjük a folyadék mozgását, még azt is kérdezzük milyen erők lépnek fel a folyadékban; keressük a *nyomást,* mely adott áramlás mellett a folyadékban fellép, vagy pedig azt, milyen mozgást létesít a folyadékban a nyomásnak bizonyos eloszlása, szóval a mozgás és a nyomás közti összefüggéseket keressük; így jutunk a hidrodinamika alapegyenleteihez. Itt is azt kérdezzük, mily erőket kelt az elektromosságnak áramlása, annál inkább, mert itt épen csak ezen erők képezhetik kisérleti megfigyelés tárgyát, magának a pusztán feltételezett elektromos folyadéknak áramlása azonban nem.

Ezen összefüggések, melyek az elektromos áramlás jellemzői és a fellépő elektromágneses erők között fellépnek szolgáltatják az *elektrodinamikai alapegyenleteit.*

Mindjárt itt figyelmeztetni akarok azonban ama rendkívül lényeges különbségre, mely a hidrodinamikai és elektrodinamikai alapegyenletek közt fennáll.

A hidrodinamikai nyomás teljesen a folyadékhoz kötött erő; a hol folyadék nincs, ott nem is beszélhetünk nyomásról: egészen máskép áll a dolog az elektromos és mágneses erőkre vonatkozólag.

Valamely elektromos folyadékrész elektromos teret létesít *maga körül,* még pedig úgy, hogy a hatás *véges sebességgel* terjed tova a térben minden irányban, akár van ott elektromos test, akár nincs: igaz, hogy *nyilvánulni* az erő csak akrko fog, ha a véges sebességgel felfúvódó erőtér elektromossággal töltött testet ér, de a nyilvánulás képessége közlődik az egész térrel. Az elektromágneses tér hatásképességét épen az által mérjük, mily hatás lépne fel az illető térben, ha ott elektromos test volna jelen. Az elektromágneses erők e szerint mindig nemcsak az áramló elektromos folyadékon belül határozandók meg — mint a hidrodinamikai nyomás — hanem mindig az egész térben. Továbbá valamely rendszerben fellépő erők nem lesznek a rendszer mindenkori állapotának függvényei (mint a milyen a nyomás surlódás nélküli folyadékoknál), hanem a rendszer egész *történetétől* fognak függeni. Hiszen valami előbbi változás a rendszer még oly távoli részeiben oly erőket kelthet, melyek épen a megfigyelt pillanatban *érkeznek* meg a rendszernek általunk megfigyelt részeibe, úgy hogy valamely rendszer *jövője* csak akkor lesz ismeretes, ha *egész multját* ismerjük.

Minthogy pedig az elektromos hatásoknak még a súlynélküli anyagtól ment világür sem vethet gátat az egész világegyetemet egyetlen rendszernek kell tekintenünk s így *szigorúan véve* egyetlen elektromos jelenséget sem tudunk pontosan leírni, hacsak a *világegyetem elektromágneses történetét nem ismerjük.*

Persze a rendszer részeinek egymástól való nagy távolsága és a hatásoknak a távolsággal való rohamos gyöngülése, végre a tovaterjedési sebesség nagysága (fényterjedési sebessége) folytán e történetből legtöbbször csak a közvetlen megfigyelt rész aránylag kis környezetének rövid időre terjedő történetét kell ismernünk.

Talán nem érdektelen az a megjegyzés, hogy a véges tovaterjedésen alapuló Faraday-Maxwell-féle felfogás szerint ki van zárva a természetnek ama Laplace által kitűzött ideális exakt leírása, mely szerint kiindulva a világegyetemnek bizonyos időpontbeli állapotából, az összes további jelenségeket differencziálegyenletek szabják meg. Az elektromos jelenségeknél már nem elegendő egy bizonyos időpontbeli állapot, itt már a világegyetem keletkezésétől fogva mindennek ismeretesnek kell lenni addig a bizonyos időpontig.

Analitikailag ennek megfelelően igen nagy különbség van a hidrodinamika és elektrodinamika alapegyenletei közt: az elektrodinamika alapegyenletei, a mint látni fogjuk nem tiszta differencziálegyenletek, hanem *integrálegyenletek*, oly egyenletek, melyekben az ismeretlen függvények integráljelek alatt lépnek fel, sőt nem is tiszta integrálegyenletek, hanem *differencziál-integrálegyenletek*, azaz egyik változócsoportra nézve differencziál-, a másikra integrálegyenletek. Ez az oka annak, hogy ezen alapegyenletek megoldása csak néhány igen egyszerű esetben sikerült.

*

Az áramló elektromos mező létesítette erőteret két vektorral szokás jellemezni: az ú. n. *elektromos erőtér* és a *mágneses erőtér* erősségével $\mathfrak{E}$-vel és $\mathfrak{H}$-val. Mindkét vektor az x, y, z koordinátáknak és a t időnek függvénye.

Pontos értelmezésük ezen változók szerinti differencziálegyenletek segítségével történik: e differencziálegyenletek helyes felállítása dönti el az elmélet sorsát. Mi nem fogunk ama meggondolásokra kiterjeszkedni, melyek ezen egyenletek felállításához vezettek, hanem mindjárt közöljük az egyenleteknek H. A. Lorentztól származó alakját,[1] s néhány szóval megemlékezünk az egyenletek fizikai jelentéséről:

Az $\mathfrak{E}$ vektor az áramló elektromos folyadék által létesített elektromos erőtér erősségét jellemzi; $\mathfrak{E}$ az az erő, melyet az áramló elektromosság Coulomb törvénye szerint az x, y, z pontban lévő elektromos tömeg egységére gyakorol a t időpillanatban; ennek megfelelően $\mathfrak{E}$ ép úgy, mint az elektrosztatikában eleget tesz a

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\rho \tag{5}$$

[1] H. A. Lorentz: La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Leyden (E. J. Brill) 1892.

differencziálegyenletnek, a hol az elektromos tömeget (sűrűséget) a közönséges elektrosztatikai mértékrendszerben mérjük. Hasonló jelentése van $\mathfrak{H}$-nak mágneses tömegekre és erőkre nézve: $\mathfrak{H}$-t a közönséges mágneses rendszerben mérjük. Minthogy fölteszszük, hogy tárgyalásainkban mágneses tömegek nem szerepelnek a megfelelő egyenlet $\mathfrak{H}$-ra nézve:

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{6}$$

Az (5) és (6) egy-egy egyenlet $\mathfrak{E}$ illetve $\mathfrak{H}$-nak három-három összetevője között; ezek tehát $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ definicziójához még nem elegendők. A további egyenletek az elektromos áram és mágnesek kölcsönhatása és az indukczió alapjelenségeinek megfelelő általánosításából adódnak.

A mágneses tér időbeli változása az elektromos tér helyi megváltozását vonja maga után a következő egyenletnek megfelelően:

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = - \mathfrak{H}_t, \tag{7}$$

a hol a c állandó a fény terjedési sebességét jelenti s a mértékrendszerek említett megválasztása folytán lép be tárgyalásainkba.

Egészen hasonló egyenletrendszer adja meg a $\mathfrak{H}$ helyi megváltozását az elektromos tér időbeli változásának függvényeképpen, csakhogy a — jel helyére + lép és tekintetbe veendő, hogy az elektromosság áramlása szintén *mágneses* mezőt kelt maga körül, úgy hogy a megfelelő egyenletrendszer a következő:

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{E}_t + 4\pi\rho\mathfrak{v}. \tag{8}$$

Ez most már együttvéve nyolcz egyenlet $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ hat összetevőjére nézve: ezen egyenletek azonban nem teljesen függetlenek egymástól, mert a (7) rendszer első két egyenletét x illetve y szerint differencziálva és összeadva a (6)-ra való tekintettel a (7) rendszernek z szerint differencziált harmadik egyenletét kapjuk.

Hasonlóképen, ha az (5)-öt t szerint a (8) első és második egyenletét x illetve y szerint differencziáljuk és összeadjuk a

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathfrak{v}) \tag{9}$$

folytonossági egyenletre való tekintettel a (8)-nak z szerint differencziált harmadik egyenletét nyerjük.

Ha tehát megadjuk az áramlást (ρ-t és $\mathfrak{v}$ t) az (5)—(8) MAXWELL-LORENTZ-féle egyenletek — kellő határfeltételek mellett — meghatározzák az elektromos és mágneses tér erősségét. Ezeket az egyenleteket ennek megfelelően az *elektromágneses tér egyenleteinek szokás nevezni.*

A tér ezen egyenletein kívül szükségünk van még négy egyenletre, melyek ρ-t és $\mathfrak{v}$-t mint x, y, z és t függvényeit meghatározzák: ezek lesznek az ú. n. *mozgásegyenletek.*

Ezen egyenletek egyikét már felírtuk: ez a (9) alatti folytonossági egyenletet. Még hármat kapunk az ú. n. tömegmozgató (ponderomotorikus) erő bevezetése által.

Mozgásegyenletre természetesen csak azon pontokban van szükségünk, a melyekben elektromos tömeg valóban előfordul, tehát a hol ρ zérustól különböző s így a legközelebbi meggondolások csakis ily pontokra vonatkoznak.

Valamely ily x, y, z pontban szerkeszszünk $d\tau$ térfogatelemet; legyen μ az e térfogatelemben foglalt anyagi tömeg sűrűsége; akkor, ha $\mathfrak{K}$ a mechanikai tömegmozgató erő, mely e térfogatelemre hat, akkor — ha a térfogatelem szabadon mozoghat —

$$\mu d\tau \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{K} \tag{10}$$

lesz a térfogatelem mozgásegyenlete. Tegyük fel, hogy rendszerünkre kizárólag elektromágneses eredetű erők hatnak és legyen $\mathfrak{F}$ az elektromos tömeg egységére eső ponderomotorikus erő, akkor, mivel:

$$\mathfrak{K} = \rho d\tau \mathfrak{F}$$

a (10) mozgásegyenlet átmegy a következőbe:

$$\mu \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \rho\mathfrak{F}. \tag{11}$$

Feladatunk tehát $\mathfrak{F}$ előállitása. $\mathfrak{F}$ két összeadandó részből áll: az egyik rész az elektromos térerősség $\mathfrak{E}$ maga; ezenkivül azonban még egy erő hat térfogatelemünkre: ha elektromozott tömeg mozog mágneses térben — mint ismeretes — bizonyos ellenállást kell leküzdenie, ez az ellenállás $\mathfrak{F}$-nek második része. Az elektromozott test *mozgása* által bizonyos ú. n. konvekczióáram létesül. Ennek a konvekczióáramnak Rowland és mások tapasztalata szerint ugyanolyan a mágneses hatása mint a közönséges elektromos áramlatoknak; az áramok bizonyos mágneses teret létesitenek maguk körül, vagyis a mozgó elektromos test mágneses erőt gyakorol a közelébe helyezett mágnesre. Megforditva a mágnes vagy a mágneses tér jelenléte folytán bizonyos erő fog hatni a mágneses térben mozgó elektromos testre.

Ezen erőnek legmeggyőzőbb példáját a kathódsugarakban láthatjuk, ha ezeket mozgó elektromos testecskék nyalábjának tekintjük. Mint ismeretes e sugarak a mágneses mező irányára merőlegesen elgörbülnek, a melyből oly erőre lehet következtetni, mely úgy a mágneses tér, mint a mozgó sebességére merőleges. Ha a sebesség párhuzamos a mágneses tér irányával, nincs elgörbülés, a keletkező erő zérus. Az erő azonkívül arányos egyrészt a sebességgel, másrészt a mágneses tér erősségével, úgy hogy a tapasztalatoknak meg fog felelni, ha $\mathfrak{F}$ ezen második részét az

$$\frac{1}{c}\,\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}$$

vektorszorzattal egyenlőnek veszszük, tehát a

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,\mathfrak{v}\times\mathfrak{H} \tag{11}$$

képletből indulunk ki, és mozgásegyenleteknek e szerint a

$$\mu\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \rho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}\right) \tag{12}$$

egyenletrendszert választjuk.

Ha a mozgó térfogatelem anyagnélküli tiszta elektromosság, mint a milyeneknek legújabban az elektronok térfogatelemeit képzeljük, akkor a mozgásegyenletek a tér ama pontjaiban, melyekben *szabadon mozgó* elektromos tömeg van jelen:

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\mathfrak{v}\times\mathfrak{H} = 0. \tag{13}$$

Óvakodjunk attól, hogy ezen egyenleteket oly pontokra nézve is érvényeseknek tekintsük, melyekben elektromos tömeg nincs; ezekre nézve ugyanis a (12) alatti *általános* egyenletek $\mu=0$ esetén, $\rho=0$ által ki vannak elégítve, a (12)-ből nem következik tehát a (13).

Az (5), (6), (7), (8), (9) és (13) alatti egyenletek szolgáltatják az elektromos áramlásnak s a megfelelő elektromágneses térnek analitikai fogalmazását.

*

Ezen meglehetősen bonyolult egyenletrendszer bizonyos ú. n. *potencziáloknak* bevezetése által áttekinthetőbbé és egyszerűbbé lesz.

Minthogy a $\mathfrak{H}$ vektortér forrásnélküli ($\operatorname{div}\mathfrak{H}=0$), $\mathfrak{H}$ mint egy másik vektornak rotácziója írható fel:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}, \tag{14}$$

a hol $\mathfrak{A}$-t *az elektromágneses tér vektorpotencziáljának* nevezzük.

Betéve (14) ezen értékét (7)-be, azt kapjuk, hogy:

$$c\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\operatorname{rot}\mathfrak{A}_t,$$

tehát

$$\operatorname{rot}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\mathfrak{A}_t\right) = 0,$$

azaz az $\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\mathfrak{A}_t$ vektor örvénynélküli, s mint ilyen egy skaláris gradiense által állítható elő, tehát:

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\mathfrak{A}_t = -\operatorname{grad}\Phi,$$

a hol Φ az *elektromágneses tér skaláris potencziálja,* tehát:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\mathfrak{A}_t - \operatorname{grad}\Phi. \tag{15}$$

$\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{E}$-nek ezen visszavezetése $\mathfrak{A}$-ra és Φ-re azonban nem egyértelmű; könnyen belátható ugyanis, hogy ha a $\mathfrak{A}_0$ és Φ_0 potencziálok adott $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ mellett a (14) és (15)-nek megoldásai, akkor ugyancsak megoldások lesznek a következő mennyiségek is:

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0-\operatorname{grad}\chi, \quad \Phi = \Phi_0 + \frac{1}{c}\chi_t. \tag{16}$$

De mindazon $\mathfrak{A}$ és Φ függvényrendszerek közül, melyek a

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\Phi_t = 0 \tag{17}$$

egyenletnek eleget tesznek csak egy van, a mely a (14) és (15)-t kielégíti. Ha ugyanis $\mathfrak{A}$ és Φ (16)-beli értékeit a (17)-be helyettesítjük, azt kapjuk, hogy:

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\chi_{t^2} = \operatorname{div}\mathfrak{A}_0 + \frac{1}{c}\Phi_{0t}. \tag{18}$$

Erről az egyenletről pedig kimutatható, hogy ha χ, χ_n és χ_t értékeit egy tetszőleges zárt felületen megadjuk, ez által χ értéke egyértelműen meg van határozva,[1] egyértékűen lesz meghatározva a (16) alapján az $\mathfrak{A}$ és Φ is.

Ha most $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{E}$ (14) és (15) alatti értékeit a tér 5—8 egyenleteibe behelyettesítjük és tekintettel vagyunk a (17)-re a potencziálok számára ugyanoly alakú egyenleteket kapunk, mint a (18), nevezetesen:

$$\nabla^2\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\mathfrak{A}_{t^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho\mathfrak{v}, \tag{19}$$

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\Phi_{t^2} = -4\pi\rho. \tag{20}$$

---

[1] Encykl. der math. Wiss. V. k. 14. sz. (H. A. Lorentz Elektronentheorie 158. l.)

Ezen egyenletek megoldása is tetemesen egyszerűsbödik, ha fölteszszük, hogy a potencziálok egy tetszőleges megelőző időpontban a végtelenben eltüntek; ez esetben a megoldás

$$\Phi = \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \rho\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right) dx'dy'dz' \tag{21}$$

és

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \rho\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right) \mathfrak{v}\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right) dx'dy'dz', \tag{22}$$

a hol

$$r^2 = (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2.$$

A mint látható Φ ugyanolyan szerkezetű, mint a közönséges elektrosztatikai potencziál:

$$\iiint \frac{\rho(x', y', z', t)}{r} dx'dy'dz',$$

csakhogy Φ t időbeli értékében nem az a ρ sűrűség jön számításba, a mely ugyanazon t időpillanatban lép fel a $dx'dy'dz'$ térfogatelemben, hanem az a sűrűség, a mely bizonyos $\frac{r}{c}$ idővel előbb lépet fel ugyanott; de $\frac{r}{c}$ épen az az idő, a mely alatt a fény az r távolságot befutja, tehát a sűrűségeknek mindig egy előbbi keletű értéke számít, épen mert a hatásnak bizonyos időre van szüksége, hogy az r távolságot befussa és az x, y, z pontban érvényesüljön.

Φ ezen alakjában tehát igen szemlélhető módon jut kifejezésre a hatásoknak *véges sebességgel való tovaterjedése.* Hasonló megjegyzés érvényes $\mathfrak{A}$-ra vonatkozólag is.

Minthogy a hatások bármily távolról is érkezhetnek, Φ és $\mathfrak{A}$ csak akkor számíthatók ki, ha ρ és $\mathfrak{v}$ értékeit bármily távoli pontban, tetszőleges «régi» időben ismerjük. Az integrálokban ugyanis az x', y', z' szerinti integráczió $-\infty$-től $+\infty$-ig terjesztendő ki s így belépnek ρ és $\mathfrak{v}$ értékei t-nek negativ, sőt $-\infty$ értékei mellett. Így nyilvánul analitikailag az, hogy a *jelen* leirásához a véges sebességgel való tovaterjedés folytán az *egész multat* ismernünk kell.

Végeredményben tehát ρ és $\mathfrak{v}$-ra a következő differencziál-integrálegyenletrendszert kapjuk:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathfrak{v}) = 0,$$

$$\mathfrak{F} \equiv -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\mathfrak{A}_t + \frac{1}{c}\mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0, \tag{23}$$

a hol (23)-ban Φ és $\mathfrak{A}$ (21) és (22)-beli értékei helyettesitendők be. A (23) e szerint oly rendszer lesz, melyben az ismeretlen ρ és $\mathfrak{v}$ függvények háromszoros integráljel és egyszeres differencziálási jel alatt fordulnak elő.

E miatt nem is sikerült még ezen egyenletrendszernek ily általánosságban való tárgyalása.

Zemplén Győző.

KITÜZÖTT FELADATOK.

37. Bebizonyítandó, hogy ha az

$$F = \Sigma \frac{n!}{i_1!\, i_2! \dots i_m!} a_{i_1 i_2 \dots i_m} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_m^{i_m}$$
$$(i_1 + i_2 + \dots + i_m = n)$$

homogen formában az a együtthatók határozatlanok, akkor

$$H = \frac{1}{n^n (n-1)^n} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_{1n}} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_{1n}} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_m^2} \end{vmatrix}$$

az a-knak és x-eknek *irreduczibilis* ráczionális egész formája.

KÜRSCHÁK.

*

38. Bebizonyítandó, hogy egy algebrai felületnek k-szoros pontja ($k>1$) a HESSE-féle felületnek ($4k-6$)-szoros pontja s hogy e pontban az eredeti felület minden érintője a HESSE-féle felületet is érinti.

KÜRSCHÁK.

*

39. Bebizonyítandó, hogy egy harmadfokú determinánsban nem lehet mind a hat tag pozitiv értékű, még akkor sem, ha komplex elemeket engedünk meg.

RADOS.

A Mathematikai és Physikai Társulat XIII. tanulóversenye.

A folyó évi október 13-ára hirdetett tanulóversenyre Budapesten 55, Kolozsvárt 10 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett teljes rendben folyt le és Budapesten 6^h15^m-kor, Kolozsvárt 6^h-kor ért véget. A verseny lefolyásáról mindkét helyen jegyzőkönyv vétetett fel, melynek tanusága szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapesten 34, Kolozsvárt 8 dolgozat adatott be. A mult évhez képest a versenyzők száma 13-mal, a dolgozatok száma 11-gyel fogyott.

A tanulóverseny tételei a következők voltak:

1. Bebizonyítandó, hogy azoknak és csak azoknak a szögeknek sinusa és cosinusa raczionális szám, a melyek fele részöknek tangense raczionális.

2. Jelentsék K, L, M, N valamely rhombus oldalai fölé (kifelé) emelt négyzetek középpontjait; bebizonyítandó, hogy a K, L, M, N négyszög maga is négyzet.

3. Legyen $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ az $1, 2, 3, \dots, n$ számok tetszésszerinti permutácziója; bebizonyítandó, hogy az

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\dots(a_n-n)$$

szorzat páros szám, ha n páratlan.

A versenydolgozatok nyomban a verseny befejezése után lepecsételtettek és előzetes birálatra Szijártó Miklós tanár úrnak adattak át. A teljes biráló bizottság f. hó 1-én ült össze; munkálkodásáról a következő jegyzőkönyv szól.

Jegyzőkönyv

felvétetett a Mathematikai és Physikai Társulat XIII. tanulóversenyén beadott dolgozatok megbirálására kiküldött bizottságnak üléséről.

A bizottság a 42 dolgozatot, melyek közül 34-et Budapesten és 8-at Kolozsvárt adtak be, pontosan átvizsgálva, egyhangúlag elhatározza, hogy az első díjat Erdős Vilmosnak, a budapesti V. ker. állami főreáliskola volt növendékének, a második díjat pedig Gotléb Istvánnak, a VIII. ker. tavaszmező-utczai állami főgymnázium volt növendékének itéli oda, a kik mind a három feladatot helyesen megoldották, jóllehet Gotléb István dolgozatában az utolsó feladat megoldásának a fogalmazása kissé fogyatékos. Az első díj nyertesét Szekeres Kálmán dr., a második díj nyertesét pedig Winter József tanította.

A jutalmazásra ajánlott dolgozatokon kívül a bizottság még két dolgozatot dicséretre érdemesnek talált, noha ezek az első feladatot csak felerészben oldják meg. E dolgozatok közül az egyiket Vámos József, a szegedi áll. főreáliskola volt növendéke és Blau Ármin tanítványa, a másikat pedig Bálint Elemér, a budapesti V. ker. áll. főgymnázium volt növendéke és Wagner Alajos tanítványa készítette.

Budapest, 1906 november 1-én.

Szijártó Miklós, a biz. előadója. *Kőnig Gyula*, a biz. elnöke.
Beke Manó, *Kövesligethy Radó*,
Éberling József, *Kürschák József*,
Kopp Lajos, *Rados Gusztáv*,
Szekeres Kálmán,
a biráló bizottság tagjai.

A folyó évi november hó 8-án tartott választmányi ülés e jelentést tudomásul vette és a javaslathoz egyhangúlag hozzájárulván, azt határozattá emelte. Ennek alapján a nyomban tartott rendes ülés kezdetén kihirdettetett a verseny eredménye, mire báró Eötvös Loránd elnök a nyerteseknek kiosztotta a jutalmat, kérve őket, hogy volt tanáraiknak is adják át a Társulat üdvözletét.

A Mathematikai és Physikai Társulat XIII. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.[1]

I. Erdős Vilmos dolgozata.

1. Bebizonyítandó, hogy azoknak és csak azoknak a szögeknek a sin —a és cos —a raczionális szám, a melyek fele részének tangense raczionális.

Legyen ω egy tetszőleges szög. Ekkor

[1] A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

$$\sin\omega = 2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\operatorname{cosec}\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{1}{\sec\frac{\omega}{2}} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2}}\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{2\,.\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}} \qquad \text{I)}$$

$$\cos\omega = \cos^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{\omega}{2} =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}} - \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2}} =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}} - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}} =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}. \qquad \text{II)}$$

1°. Ha $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ raczionális szám, akkor I) és II) kifejezésekben csak raczionális számok fordulnak elő és csak a 4 alapművelet van véges számszor alkalmazva, tehát:

akkor, ha $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ raczionális szám, akkor mind $\sin\omega$, mind $\cos\omega$ is raczionális számok.

2°. Most ki kell mutatnunk, hogy $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ minden nem raczionális értékénél $\sin\omega$ és $\cos\omega$ közül mind a kettő nem lehet raczionális szám. Lehet, hogy $\sin\omega$ és $\cos\omega$ közül az egyik raczionális (például

$\text{tg}^2\omega = (\sqrt{a})^2 = a$; ekkor II) raczionális), de ezzel az esettel nem foglalkozunk. Csak azt fogjuk kimutatni, hogy mind a kettő nem lehet raczionális. Írjuk fel a következő goniometriai egyenletet:

$$\text{tg}\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\omega)^2}{1-\cos\omega}} = \frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}. \qquad \text{III)}$$

Ha $\text{tg}\frac{\omega}{2}$ irraczionális szám, akkor nem lehet két raczionális szám hányadosa, tehát vagy a számláló, vagy a nevező, vagy mind a kettő irraczionális. Ha

a) a számláló irraczionális, akkor $\cos\omega$ az egységből és egy irraczionális számból képezett különbség, tehát $\cos\omega$ irraczionális;

b) a nevező irraczionális, ekkor $\sin\omega$ irraczionális;

c) mind a számláló, mind a nevező irraczionális, ekkor $\sin\omega$ és $\cos\omega$ irraczionális.

Mind az *a)*, *b)* és *c)* esetben $\sin\omega$ és $\cos\omega$ közül legalább az egyik irraczionális, tehát 1° és 2°-t összegezve:

$\sin\omega$ és $\cos\omega$ akkor és csak akkor raczionális, ha $\text{tg}\frac{\omega}{2}$ raczionális.

q. e. d.

2. Jelentsék *K*, *L*, *M* és *N* valamely rombus oldalai fölé (kifelé) emelt négyzetek középpontjait. Bebizonyítandó, hogy *KLMN* maga is négyzet.

Legyen *ABCD* adott rombus

$$ABD\,\triangle \cong BK_bL_b\,\triangle, \qquad \text{I)}$$

mert

$$\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BK_b} = \overline{BL_b} \quad \text{és} \quad K_bBL_b\sphericalangle = 2R - \beta = BAD\sphericalangle.$$

Ezek után

$$N_aK_aBD \,\square \cong K_bL_b\,.\,CA\,\square\,;$$

ugyanis I)-nél fogva

$$\overline{K_bL_b} = \overline{BD}$$

hasonlóan kimutatható, hogy

$$\overline{N_aK_a} = \overline{AC}\,;$$

továbbá

$$N_aDB\sphericalangle = DBK_a\sphericalangle = ABD\sphericalangle + 45^\circ = BK_bL_b\sphericalangle + 45^\circ =$$
$$= AK_bL_b\sphericalangle = CL_b\,.\,K_b\sphericalangle.$$

Minthogy a két trapéz egybevágó, azért középvonalaik egyenlők, vagyis:

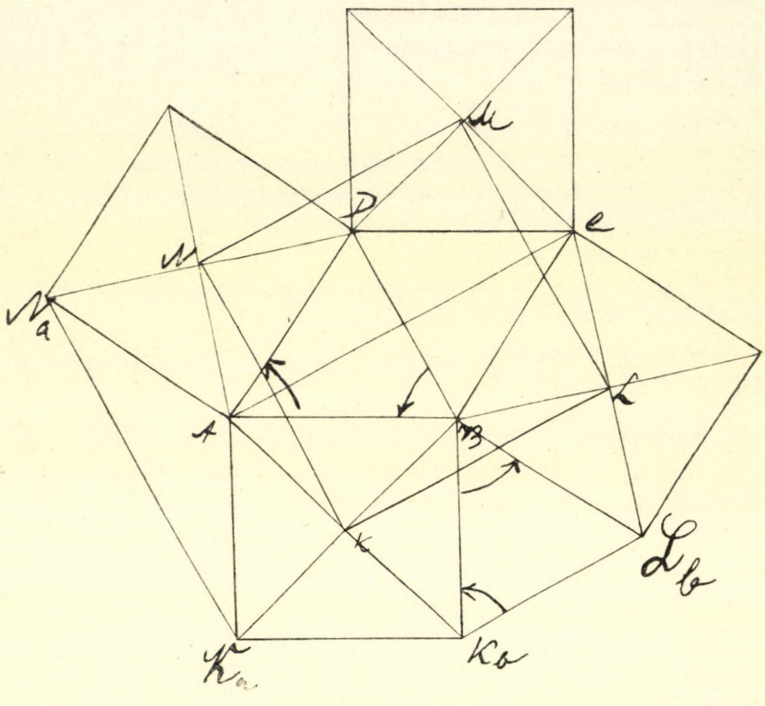
$$\overline{NK} = \overline{KL}.$$

Minthogy az egész bizonyítás $\overline{LM}$ és $\overline{MN}$-re is alkalmazható, azért

$$\overline{NK} = \overline{KL} = \overline{LM} = \overline{MN}.$$

De $\overline{NK} \perp \overline{AC}$, $\overline{KL} \perp \overline{BD}$, a rombus tulajdonságánál fogva pedig $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, így tehát

$$\overline{NK} \perp \overline{KL}.$$



A $NKLM$ idom oldalai egyenlők és egymásra merőlegesek, tehát

$NKLM$ idom négyzet. *q. e. d.*

3. Legyen $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ az $1, 2, 3, \ldots, n$ számok tetszésszerinti permutácziója; bebizonyítandó, hogy

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\ldots(a_n-n)$$

szorzat páros, ha n páratlan.

Ki fogjuk mutatni, hogy az

$$(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_n-n) \qquad \text{I)}$$

szorzatban van legalább egy olyan (a_i-i) tényező, mely páros.

Ha n páratlan, akkor így írható

$$n = 2k + 1.$$

Ekkor az első n szám tartalmaz k páros és $k+1$ páratlan számot. Képezzük először az I) szorzat azon $(a_i - i)$ tényezőit, a melyekben a_i páratlan; ilyen tényező van $k+1$. Ha azt akarjuk, hogy ezen tényezők egyike se legyen páros, akkor minden páratlan a_i számból egy páros számot kell kivonnunk. De az $2, 4, 6, \ldots, 2k$ számok száma k; ha tehát azon tényezőket képezem, melyekben a_i páratlan és melyeknek száma $k+1$, akkor k ilyen tényezőből még tudok páros számot levonni, de a $(k+1)$-ik tényező képezésénél már kifogytak a páros számok, tehát páratlan számot kell kivonni; ekkor ez a tényező *páros* lesz, így tehát az

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_n - n)$$

szorzat is páros.[1] *q. e. d.*

II. Gotléb István dolgozata.

1. Bebizonyítandó, hogy azoknak és csak azoknak a szögeknek sinusa és cosinusa raczionális, melyek felének tg-se raczionális.

Legyen ω oly szög, melynél

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = m,$$

akkor

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega}}$$

egyenletből $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ föntebbi értékének helyettesítése után $\cos \omega$-ra nézve nyerjük

$$\cos \omega = \frac{-m^2 + 1}{m^2 + 1} \tag{1}$$

egyenletünket. Másrészt

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega}$$

egyenletből $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ és $\cos \omega$ talált értékeinek helyettesítése után $\sin \omega$-ra nézve nyerjük a következő értéket:

$$\sin \omega = \frac{2m}{(m^2 + 1)}. \tag{2}$$

---

[1] *Jegyzet.* Ha van több tényező, melyekben $a_i = i$, akkor a szorzat $= 0$, tehát szintén páros.

Ha m raczionális szám, akkor a és b egész számok hányadosaként foghatjuk föl:

$$m=\frac{a}{b}.$$

Helyettesítés útján (1) és (2) egyenletek a következő alakot veszik föl

$$\cos\omega=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \quad \text{és} \quad \sin\omega=\frac{2ab}{b^2+a^2}$$

és így $\cos\omega$ és $\sin\omega$ is egész számok hányadosának tekinthető.

Ha most például $\cos\omega$ és $\sin\omega$ raczionális számok, akkor bebizonyítom, hogy $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ is raczionális és ez által igazoljuk, hogy *csak* akkor helyes tételünk, ha $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ raczionális.

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}.$$

Ha $\sin\omega$ és $\cos\omega$ raczionális számok, akkor ilyen alakúak:

$$\sin\chi=\frac{c}{d}, \quad \cos\chi=\frac{e}{f},$$

hol c, d, e, f egész számok.

Helyettesítés útján lesz:

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\frac{df-de}{cf},$$

azaz $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ is raczionális szám.

2. Jelentsék K, L, M, N valamely rombus oldalai fölé (kifelé) emelt négyzetek középpontjait; bebizonyítandó, hogy a $KLMN$ □ maga is négyzet.

A tétel helyes, ha

$$a)\ ML=KL \quad \text{és} \quad b)\ MLK\sphericalangle=90^\circ.$$

a) Azt állítom, hogy

$$MBL\,\triangle \cong KCL\,\triangle,$$

mert

$$CK=MB;$$
$$CL=LB;$$

és

$$KCL\sphericalangle=360-KCD\sphericalangle-DCB\sphericalangle-BCL\sphericalangle,$$

a hol

$$KCD\sphericalangle=BCL\sphericalangle=45;$$

tehát

$$KCL \sphericalangle = 360-45-DCB \sphericalangle -45 = 270-DCB \sphericalangle, \quad (1)$$
$$MBL \sphericalangle = MBA \sphericalangle + ABC \sphericalangle + CBL \sphericalangle,$$

a hol

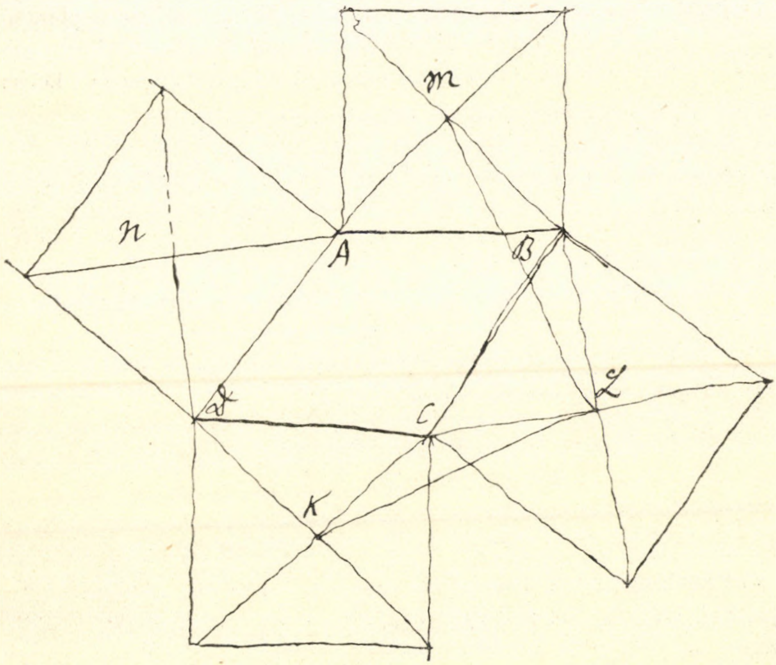
$$MBA \sphericalangle = CBL \sphericalangle = 45°$$

és

$$ABC \sphericalangle = 180-DCB \sphericalangle;$$

tehát

$$MBL \sphericalangle = 45° + 180-DCB \sphericalangle + 45° = 270-DCB \sphericalangle = KCL \sphericalangle.$$



A két egybevágó háromszögben

$$ML = KL.$$

b) Helyesek a következő egyenletek:

$$\left| \begin{array}{l} CLM \sphericalangle = CLM \sphericalangle \\ KLC \sphericalangle = MLB \sphericalangle \end{array} \right|$$

E két egyenlet összeadása útján nyerjük:

$$CLM + KLC \sphericalangle = CLM \sphericalangle + MLB \sphericalangle$$

vagy pedig

$$KLM \sphericalangle = CLB \sphericalangle = 90°.$$

Hasonló eljárással kimutathatjuk ugyanezt a *KLMN* négyszög többi oldalaira nézve is és így tételünk általános igazolást nyert.

3. Legyen $a^1, a^2, a^3, a^4, \ldots, a^n$ az $1, 2, 3, \ldots, n$ számoknak tetszésszerinti permutaczziója; bebizonyítandó, hogy az

$$(a^1-1)(a^2-2)(a^3-3)\ldots(a^n-n)$$

szorzat páros szám, ha n páratlan.

Keressünk olyan permutacziót, melyre nézve az említett szorzat páratlan. Olyan alakú permutaczióhoz kell fordulnunk, melynek a páratlan számú helyeken levő tagjai párosak, a párosszámú helyeken levő tagja pedig páratlanok. Mivel n páratlan szám, tehát a páratlan számú helyek száma 1-gyel nagyobb, mint a mennyi páros szám rendelkezésünkre áll. Egy ilyen helyre okvetetlenül páratlan számot kell helyeznünk. Ebben az esetben tehát ez a tényező mint két páratlan szám különbsége páros szám lesz. És így maga a szorzat is páros szám lesz. E fejtegetésünk két egyelőre önkényesen fölvett tételen alapszik, ezeket tehát a következőkben bizonyítom be.

a) Két páratlan vagy két páros szám különbsége páros szám; egy páros és egy páratlan szám különbsége páratlan szám.

Legyenek a és b bármilyen értékű egész számok. A tétel helyességét a következő egyenletek fejezik ki:

$$\begin{aligned} 2a-2b &= 2(a-b) \\ (2a+1)-(2b+1) &= 2(a-b) \\ 2a-(2b+1) &= 2(a-b)-1 \\ (2a+1)-2b &= 2(a-b)+1. \end{aligned}$$

b) Bebizonyítandó, hogy 1-től n-ig (ha n páratlan szám), akkor a páratlan számok száma 1-gyel nagyobb, mint a páros számok száma. Ennek helyességét a következő táblázat mutatja:

1	3	5	. . . . . .	$n-2$	n
	2	4	. . . . . .		$n-1$

Meg kell jegyeznünk, hogy abban az esetben, ha a zérust is páros számnak tekintjük, akkor tételünk már nem lesz többé érvényes.

A Mathematikai és Physikai Társulat tizenharmadik rendes közgyűlése.

A választmánynak márczius 20-án kibocsátott meghivójára a Mathematikai és Physikai Társulat XIII. rendes közgyülését folyó évi április 28-án tartotta meg. A kitett íven tagtársaink következő névsorát találjuk: Balog Mór, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Beke Manó, Bihary Ferencz, Bodola Lajos, Bogyó Samu, Demeter István, Eberling József, br. Eötvös Loránd, Erdődy Imre, Feichtinger Győző, Fekete Jenő, Fényes Dezső, Fröhlich Izidor, Goldziher Károly, Gruber Nándor, Harsányi Dezső, Hoor Mór, Juckel Gyula, Károly Irén, Klupathy Jenő, Kopp Lajos, Kőnig Gyula, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Mattyasóvszky Kászon, Mikola Sándor, Mórocz Kálmán, Novothny Endre, Oberle Károly, Pécsi Albert, Pekár Dezső, Rados Gusztáv, Réthy Mór, Soós Ernő, Steiner Lajos, Szabó Gábor, Szabó József (Vácz), Szabó Péter, Szőke Béla, Terlanday Emil, Tötössy Béla, Vajnóczky István, Vámos Dezső, Vörös Czirill, Winter József, Wittmann Ferencz, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1906-ra.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. A tisztikar és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

A közgyűlést báró Eötvös Loránd elnök nyitotta meg ezúttal — a gyűlés alkalmából hirdetett számos előadásra való utalással — nehány szives üdvözlő szóra szorítkozván.

A mult közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jegyzőkönyv hitelesítésére Demeter István és Erdődy Imre tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt közgyűlés!

Alapszabályaink nem követelik tőlünk, hogy a mathematika és physika középiskolai tanítására befolyjunk, és nem éppen sűrűn hallott didaktikai irányu előadásokon kívül erre eszközünk sincs. Mégis a Társulat szónál és előadásnál hatékonyabb módot talált arra, hogy fiatalságunkban e két tudomány iránt való kedvet és szeretetet éleszsze és ébren tartsa, és ez úton talán még tanártársainkra is jótékonyan hat, mert szabadabban mozoghatnak. Eszköze a mathematikai tanulóverseny, a melyeknek sorozatában az elmult évben a XII-et tartottuk meg. Nagyon is megérdemli, hogy róla megemlékezzünk, mert Gaston Darboux és Félix Klein, a kiváló franczia és német mathematikus, és a mathematika tanítása terén mutatkozó reformtörekvések leghivatottabb szószólója, a kiket az akadémia Bolyai-díj odaitélő bizottsága hozott körünkbe, nem csak személyes jelenlétével tette emlékezetessé október 12-iki díjazó ülésünket, hanem annak értékét e tárgykörből vett előadásukkal is emelték. Ha a mult esztendőben a Társulat anyagi emelkedéséről szólhattam, szólhatok most joggal erkölcsi nyereségéről is, arról, hogy a külföld két nagy tudósát tagjaink körébe számíthatjuk. Remélhetjük, hogy tanulóversenyeink sikerének emlékét és komoly törekvésünk tudatát magukkal vitték.

A verseny 1905 október 7-én tartatott meg, és Budapesten és Kolozsvártt összesen 78 résztvevő versenyzett és 53 dolgozatot adott be. Az első díjat Ujj Gyula, a kaposvári, a második díjat Neubauer Constantin, a budapesti VII. ker. állami főgymnasium volt növendéke nyerte el. A versenyzők száma a mult évihez képest 25-tel nőtt.

Az elmult társulati évben nehány, a Társulat hivatali teendőivel foglalkozó választmányi ülésen kivül 10 rendes előadó ülést tartottunk. Az előbb említett két előadást nem számítva, ezekben nyolcz-nyolcz előadó 10 mathematikai és 9 physikai tárgyról értekezett, és a tárgyak talán még sohasem voltak annyira változatosak, a mathematika és physika nagyobb körére annyira kiterjeszkedők, mint épen a lefolyt esztendőben. Kisérleti előadásokkal takarékoskodtunk ugyan most is, de talán csak azért, hogy velük a Tisztelt Közgyűlésnek kedveskedhessünk. Mégis fel szeretném ujítani néhány évvel ezelőtt tett indítványomat, a mely a választmány tagjaihoz fordult, kérve őket, hogy évenkint legalább egy előadást tartsanak szakmájukból.

Folyóiratunk XIV. évfolyama $25^{1}/_{2}$ ív terjedelemben megjelent, utolsó kettősfüzete épp jókor, hogy róla már mint megjelentről szólhassak. Benne 10 szerző 12 mathematikai, öt szerző hat physikai tárgyról értekezik. Physikai részében hiányzik ezúttal a nagyobb változatosság, mert Curiené terjedelmes dolgozatának fordítása sok helyet igényelt.

Annyira érdekes e dolgozat tárgyánál fogva, és annyira fontos és tanulságos uj vizsgálati módszerek megteremtése által, hogy még az is fog belőle tanulhatni, a ki a természettudományoknak a radioactivitástól messze eső más területein búvárkodik, hogy a Társulat az amúgy is meglevő külön lenyomatokat önálló könyv alakjában is adta ki. Félős azonban, hogy ezen első könyvkiadó vállalkozásunknak valami nagy anyagi sikere nem lesz, mert a Természettudományi Társulat is ugyanezen tárgyra vonatkozó, ismereteinket népszerűbb alakban feldolgozó pályanyertes munkát tett közé, és mert a mi kiadványunk, noha a füzet ki volt szedve, — miként lapunk is — tetemesen elkésett. A késés oka a szerkesztőségen kívül van, a nyomdai osztály érdemes főszedőjének hónapokig elhúzódó betegsége, mely — fájdalom — halállal végződött. Igaz, hogy a két munka czélja más, és a mienk nem készült könnyebb, tájékoztató munkának.

Tagtársaink száma az elmult társulati év végén 409, előfizetőink száma 90; a tagok sorában van 17 alapító és 8 hölgy, A budapesti tagok száma 231. A Társulat consolidált pénzügyi állapota feleslegessé teszi, hogy — mint az elmult években — panaszoknak vagy terjeszkedésünk hiú reményének adjak helyet.

De mindig fog kelleni támaszkodnunk a Magyar Tudományos Akadémiára, a melynek III. osztályától és annak Mathematikai és Természettudományi Bizottságától kegyesen nyujtott segélye nélkül nem tudnánk megélni sem. A midőn e segélyért hálás köszönetet mondunk a Magyar Tudományos Akadémiának, kérjük őt meg, hogy szives jóindulatában tovább is részesíteni kegyes legyen.

Veszteségektől, súlyos veszteségektől megkimélve nem maradtunk; alig egy-két nap választ el a gyászünneptől, melyen Lipthay Sándor emlékének hódolunk, és hosszú útjára — ki előbb, ki utóbb, Társulatunk még több lelkes hive és szorgalmas munkása kisérte. Ezek: Antolik Károly, Dobsay Antal, Kuncz Adolf és Tokaji Aladár.

Áldás emlékükre!

Nem ily szomorú emlékkel szeretném végezni jelentésemet, de jó érzékem cserben hágy és nem igazít el, valjon helyén való-e, a mit még mondani szeretnék. De ha meggondolom, hogy itt, a Társulatban láttuk nagyranőni azokat a vizsgálatokat, a melyek a nehézség változásait mélyen a Föld méhében fürkészik, akkor úgy hiszem, jogunk van együttesen örülnünk minden ujabb sikernek. Szives felhatalmazás alapján három évvel ezelőtt alkalmam volt e vizsgálati módszereket és eredményeit seismologusok előtt ismertethetni, és rámutatni, mily kitünő szolgálatokat tehetnének a gravitatiós variometerek különösen Japánban és Olaszországban. A Vezuv okozta utóbbi katastrophára az olaszok most minden valószinűség szerint a nekünk jól ismert műszereket az elvontabb, tisztán tudományos működésükből egyenesen a gyakorlatba, eminens emberi érdekek megvédése czéljából, ültetik át.

A Titkárság megbizatásának 3 éves cyclusa lejárt. Köszönettel és hálával adjuk vissza a Tisztelt Közgyűlés kezébe megbizatásunkat, és kérjük Tisztelt Tagtársainkat, hogy az irántunk kivétel nélkül mindig tapasztalt szives készséget és jóindulatot utódainknak is juttassa.

Kérem jelentésem szives tudomásul vételét.

Budapest 1906 április 28-án.

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1905-re és a pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

Mélyen T. Közgyűlés!

Örömmel jelentem, hogy azon kedvező fordulat, mely néhány év előtt Társulatunk anyagi helyzetében beállott, a mult évi zárszámadásban is föllelhető.

Összes bevételeink, mint az itt kiosztott számadás mutatja 9263 K 96 fillér, összes kiadásaink pedig 6976 K 94 fillér volt és így a pénztári maradvány részint készpénzben, részint takarékpénztári betétben 2287 K 02 fillért tesz ki, mely összeg maga is elegendő volna a számadásunkat terhelő és 1635 K 85 fillért kitevő tartozásaink kiegyenlítésére, de ezenkívül még 450 K követelésünk is van és így az előbb említett 1635 K 85 fillér tartozás födözeteül 2737 K 02 fillérrel rendelkezünk.

Tartozásaink a Franklin-Társulatnál a mult évi utolsó három füzet nyomdai költsége 1232 K 85 fillér és a mult évi utolsó két füzet irói t. dija 403 K.

Követeléseink: tagdíjhátralékokban 250 K, föl nem vett hirdetési díj, a hirdetők utólag t. i. a hirdetés megjelenése után szoktak fizetni, 200 K.

Számadásunk kedvezőleg alakult:

mert a f. é. tagdíjakból	140 K	—	fillérrel,
a hátralékos tagdíjakból	486 «	—	«
kamatokból	20 «	79	«
vegyes és átmeneti bevételekből	382 K	14	«
összesen	1028 K	93	fillérrel több folyt

be, mint a mennyit előirányoztunk.

Kiadásaink, a tartozásokat is hozzászámítva, alig haladják túl az előirányzatot.

A M. T. Közgyűlés utólagos jóváhagyása reményében az expedicio és irodai költségeknél 60 K 16 fillérrel adtunk ki többet, mint a mennyit a mult évi közgyűlés erre megszavazott. A vegyes és nagyrészben átmeneti kiadások pedig 161 K 70 fillért tettek ki, a melyre előirányzat nem is volt. Ezenkívül kérem a M. T. Közgyűlés jóváhagyását, hogy a mutatkozó szükséghez képest irói t. díjakra a már említett 403 K-t fizethessünk ki, jólehet a mult évi költségvetés értelmében csak 230 K 86 fillér állana az elnökség rendelkezésére.

A nyomda 1232 K 85 fillérnyi követeléseinek kiegyenlítésére még a mult évi közgyűlés adott fölhatalmazást mivel a 4195 K 49 fillér előirányzott összegből csak 2962 K 64 fillér fizettetett ki, az előbb említett összeg még a tavalyi meghatalmazás alapján igénybe vehető.

Számadásom jólesö kiegészítését képezi azon bejelentésem, hogy szeretve tisztelt alelnökünk, dr. Károly Irén 200 K alapítói díjat fizetett be — ezt az alaptőkéhez csatoltam s így alaptőkénk 13070 koronáról 13270 koronára emelkedett.

Az 1906. évi költségelőirányzat a megelőző évitől alig különbözik. A különbség csakis a zárszámadásból az előirányzatba áthelyezendő tételekben, t. i. a pénztári maradvány, tagdíjhátralékok, továbbá a nyomdai tartozás s a mult évi irói t. díjak tételénél van, ezenkívül a kiadásoknál egy új tételt óhajtottam volna fölvenni azonban azt a nyomda kihagyta s én — bocsánat a tévedésért — csak későn vettem észre. A középiskolai tanulóverseny után vegyes kiadások czímén 150 koronának kellene következni. A 8245 K 85 fillér végösszegbe e 150 K bele van számítva.

Az ily módon összeállított költségvetésünk 28 K 83 fillér hiánynyal zárulna. Remélem azonban, hogy zárszámadásunkban még e csekély hiánynyal sem fogunk találkozni.

Kérem a M. T. Közgyűlést, kegyeskedjék zárszámadásomat, valamint az előterjesztett költségvetést elfogadni és nekem a szokásos föntartások mellett a multra nézve a fölmentvényt megadni.

A közgyűlés e jelentést helyeslőleg tudomásul veszi, az alábbi számadás és költségelőirányzat tételenkint vett mérlegelése és a pénztárvizsgáló-bizottságnak felolvasott jelentése alapján a pénztárnoknak a felmentvényt megadja és 1906-iki költségelőirányzatát elfogadja.

1905. év

BEVÉTEL	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
1905. évi zárszámadási maradvány	2025	03	2025	03
Alapitói dij	—	—	200	—
Folyó és köv. évi tagdijak	2200	—	2340	—
Hátralékos tagdijak	200	—	686	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	340	—	240	—
Kamatok	540	—	560	79
Előfizetési dijak	700	—	830	—
Vegyes és átmeneti bevételek			382	14
	8005	03	9263	96

Vagyon-

VAGYON	1904. év végén Kor.	fill.	1905. év végén Kor.	fill.
Forgó tőke:				
Készpénz	289	53	420	37
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	1231	70	1430	85
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	455	—	387	—
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	600	—	800	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2262	—	2262	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv.	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle alap	10000	—	10000	—
Tagdijhátralékok	250	—	250	—
Föl nem vett hirdetési dij	240	—	200	—
	15585	03	16007	02

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk

A választmány megbizásából: *Kövesliget*

Rátz László s. k. *Beke Manó dr.* s. k. ügy

1906. évi költség-

BEVÉTEL	1905. évi előirányzat Kor.	fill.	1906. évi előirányzat Kor.	fill.
1905. évi zárszámadási maradvány	2025	03	2287	02
Folyó évi tagdijak	2200	—	2200	—
Hátralékos tagdijak	200	—	150	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	340	—	340	—
Kamatok	540	—	540	—
Előfizetési dijak	700	—	700	—
Hiány	13	26	28	83
	8018	29	8245	85

zárszámadás.

KIADÁS	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
Nyomdai költségek	4195	49	2962	64
Irói tiszteletdijak	2762	80	2531	94
Expeditió- és irodai költségek együtt	900	—	960	16
Vegyes és átmeneti kiadások			161	70
Középiskolai mathemat. tanulóverseny	160	—	160	50
Alaptőkéhez			200	—
Pénztári maradvány *a)* készpénzben			420	37
b) takarékp. betétben			1866	65
	8018	29	9263	96

mérleg.

TEHER	1904. év végén Kor.	fill.	1905. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	1195	49	1232	85
Irói tiszteletdijak	362	80	403	—
Tiszta vagyon	14026	74	14371	17
	15585	03	16007	02

Budapesten, 1906 április 25.

adó dr. *s. k.* A közgyülés megbizásából:

kár. *Bogyó Samu s. k.* *Balog Mór s. k.*

előirányzat.

KIADÁS	1905. évi előirányzat Kor.	fill.	1906. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai tartozás	1195	49	1232	85
Folyó évi nyomdai költségek	3000	—	3000	—
Irói tiszteletdijak:				
a) a mult évre	362	80	403	—
b) a folyó évre	2400	—	2400	—
Expeditió- és irodai költségek	900	—	900	—
Középisk. math. tanulóverseny	160	—	160	—
Vegyes kiadások			150	—
	8018	29	8245	85

Feichtinger Győző
pénztárnok.

5. A tisztikar és választmányi tagok választása.

A Társulat alapszabályainak 20. §-a értelmében a tisztikar egy ujabb harmadévi cyclus leteltével visszalép és a választmányból Bartoniek Géza, Szily Kálmán, Than Károly és Wagner Alajos kilépnek.

A választás idejére elnök felfüggeszti az ülést és Fényes Dezső elnöklete alatt Mikola Sándor és Szőke Béla tagtársakból álló szavazatszedő bizottságot küld ki,

A választás megejtetvén, a bizottsági elnök jelenti az ujból megnyitott közgyűlésnek, hogy a beadott 38 szavazatból elnökül: br. Eötvös Loránd 37, alelnökül Kőnig Gyula 36 és Károly Irén 37, titkárokul: Kövesligethy Radó 35 és Rados Gusztáv 37, jegyzőkül: Kopp Lajos 37. Kürschák Józsek 37 és pénztárnokul: Feichtinger Győző 37 szavazattal választatott. A választmányba Bartoniek Géza 37, Szily Kálmán 38. Than Károly 37 és Wagner Alajos 38 szavazattal választatott.

6. Indítványok.

Indítvány nem adatván be a napirend utolsó pontja magától el esik

*

Elnök végre a pénztár vizsgálására a közgyűlés nevében ismét Balog Mór és Bogyó Samu tagtársakat kéri fel és ezzel a közgyűlés hivatalos része elintézést nyervén, a közgyűlést berekeszti.

*

A közgyűlést előadó ülés követte, melyen Kőnig Gyula a mathematika és philosophia határterületéről, Károly Irén a Röntgen-sugarak töltő hatásáról értekezett.

Másnap április 29-én Fröhlich Izidor az elhajlított fény polározásának új törvényszerűségeiről tartott kisérleti előadást, és Wittmann Ferencz kisérleteket mutatott be a váltakozó áramjelenségek köréből, váltakozó áramot jelző készülékek — egyszerű és dupla oszcillografokhiszterezimèterek — Braun-féle kathodcső alkalmázásával. Végül pedig Kövesligethy Radó rövid ismertetés kapcsán bemutatta a M. Nemzeti Múzeumban elhelyezett seismologiai observatoriumot.

Észrevett sajtóhibák a XIV. kötetben.

A 2. és 3. old. mindenütt $\mathfrak{Q}$ helyett olv. $\mathfrak{G}$.

A 6. old. 6. sorban «ez a fokszám» helyett olv. «a norm».

A 88. old. 13. sorában «tényezője» után beszurandó: «ha pl. az a sokaság csak oly elemekből állana, melyekre a törzstényezők száma adott véges határon alól marad».

A 89. old. (4) és (5) képletében Ay helyett olv. Ap.

A 89. old. utolsó sorában $\sigma-1$ helyett olv. $\sigma>1$.

A 91. old. 6. sorában «függ» után beszurandó: «a mondott esetben».

A 91. old. 7. sorban «érvényesítettük, mert» helyett olv. «érvényesithettök, hanem».

Utalványczím: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1906. év május hó 1-től julius hó 10-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1903. évre: Fejér Lipót dr. 6 kor., Kronit Lénárd 5 kor. Összesen ... 11 kor.

1904. évre: Fejér Lipót dr. 6 kor., Fertig Vilmos 10 kor., Héjas Endre 3 kor., Papp István 6 kor. Összesen ... 25 kor.

1905. évre: Cholnoky Jenő dr. 6 kor., Dombay Narczisz 6 kor., Fejér Lipót dr. 6 kor., Fröhlich Károly 10 kor., Kemény Ferencz dr. 10 kor., Kovács Béla 6 kor., Kötse István 6 kor., Papp István 6 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Schlesinger Lajos 6 kor., Szabó Péter 10 kor., Terkán Lajos dr. 6 kor., Összesen ... 88 kor.

1906. évre: Baló Gyula 6 kor., Barabás Jenő 6 kor., Bartoniek Géza 10 kor., Bauer Mihály 10 kor., Bellágh Kálmán 10 kor., Beke Manó dr. 10 kor., Berkes Imre 10 kor., Bogyó Samu 10 kor., Bozóky Endre dr. 10 kor., Bretz Berta 6 kor., Bricht Lipót 10 kor., Buchböck Gusztáv dr. 10 kor., Buky Aurél 6 kor., Bukovszky János 6 kor., Cholnoky Jenő dr. 4 kor., Csorba György 6 kor., Czekeliusz Aurél 10 kor., Dávid Lajos dr. 6 kor., Demeter István 6 kor., Dombay Narczisz 6 kor., Ellend József 6 kor., Farbaky István dr. 6 kor., Fejér Lipót dr. 6 kor., Feldmann Gyula 10 kor., Fölser István 10 kor., Frank István 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., Gerecz Lajos 6 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Glücklich Vilma 10 kor., Hahóthy Sándor 10 kor., Harkay István 6 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Heuer Ede 10 kor., Hilbert Stefánia 10 kor., Horváth Kálmán 6 kor., Javorik János 6 kor., Jónás Ödön 10 kor., Juckel Gyula dr. 10 kor., Jurányi Henrik 10 kor., Kalecsinszky Sándor 10 kor., Ketterer Károly 6 kor., Kherndl Antal 10 kor., Király László 6 kor., Kirchknopf András 6 kor., Klein Pál 6 kor., Kleiszner Rezső 10 kor., Klupathy Jenő dr. 10 kor., Konkoly Thege Miklós ifj. 6 kor., Konkoly Thege Miklós dr. 10 kor., Kováts Adolf 6 kor., Kovács Ferencz 6 kor., König Gyula dr. 10 kor., Kövesligethy Radó dr. 10 kor., Lakner József 6 kor., Lendvay Hugó 6 kor., Lengyel Béla dr. 10 kor., Lengyel Endre 6 kor., Lengyel Imre 6 kor., Lengyel Sándor 10 kor., Lévay Ede dr. 10 kor., Lóky Béla dr. 6 kor., Marczell György 10 kor., Mattyasovszky Kászon dr. 6 kor., Mialovich Mór 10 kor., Mihálovich Alajos 6 kor., Miller Gyula 6 kor., Módly Krizsó 6 kor., Nagy Balázs 6 kor., Neumann Jenő 6 kor., Neustadt Lipót 10 kor., Ondrus Pál 6 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pech Aladár 10 kor., Pék János 6 kor., Pető Menyhért 6 kor., Petry Gyula 6 kor., Prokess Ignácz 6 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Riesz Frigyes dr. 6 kor., Róna Zsigmond 10 kor., Schenek István dr. 10 kor., Schlesinger Lajos dr. 6 kor., Scholtz Ágost dr. 10 kor., Schwartz Ottó dr. 2 kor., Simon Ferencz 6 kor., Simon Tádé 6 kor., Sós Ernő 10 kor., Stanics Fulgent 6 kor., Stauber József 6 kor., Straub L. Gyula 10 kor., Strompf László 6 kor., Szabó János 6 kor., Szabó József 6 kor., Szabó Lajos 6 kor., Szabó Péter dr. 4 kor., Szakmáry József 6 kor., Szalay István 6 kor., Szavkay Ede 10 kor., Széky István 6 kor., Szentmiklósy Jenő 6 kor., Takáts Gyula 6 kor., Tangl Károly dr. 6 kor., Terkán Lajos dr. 6 kor., Thán Károly dr. 10 kor., Ulreich Ede 6 kor., Wagner Alajos dr. 10 kor., Wéber Márton 6 kor., Wittmann Ferencz 10 kor., Wodeczky József 6 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Zettner Ede 10 kor., Zilahy László 6 kor. Összesen ... ... 864 kor.

1907. évre: Buky Aurél 6 kor., Harkay István 6 kor., Király Henrik 6 kor., Schwartz Ottó dr. 4 kor., Sinkó József 6 kor. Összesen ... ... 28 kor.

1908. évre: Sinkó József 6 kor. Összesen ... ... 6 kor

Előfizetési dijat fizettek:

1905. évre: Budapesti orsz. meteorologiai int. 10 kor. 10 kor.

1906. évre: Aradi áll. tanitóképző 10 kor., Aradi kir. főgymn. 10 kor., Békés-Csabai ev. ref. Rudolf főgymn. 10 kor., Budapesti Egyet. könyvtár 10 kor., Budapesti orsz. meteorologiai int. 10 kor., Debreczeni áll. főreáliskola 10 kor., Eötvös-Kollegium 10 kor., Kolozsvári kegy.-rendi Kalazantinum 10 kor., Mérnök-épitész-egylet 10 kor., Nagyváradi áll. főreáliskola 10 kor., Podolini kegy.-rendi gymnasium 10 kor., Vancsó Béla 10 kor. Összesen 120 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból	124 kor.	január 1-től	328 kor.
F. és köv. évi tagsági dijakból	898 kor.	« «	1258 kor.
Előfizetési dijakból	130 kor.	« «	665 kor.

Kelt Budapesten, 1906 julius 10.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-ut 15.)

Kimutatás

az 1906. év julius hó 10-től november hó 20-ig befolyt dijakról.

Tagsági dijat fizettek:

1902. évre: Fogarasi Béla 6 kor. Összesen … … … … … 6 kor.

1903. évre: Bujk Béla 6 kor., Dózsa Jakab 6 kor., Kiss E. János 10 kor., Fr. Kiss Károly 10 kor., Kronich Lénárd 5 kor., Stáhl Géza 6 kor., Tordai Imre 10 kor. Összesen … … … … … … 53 kor.

1904. évre: Dobay Sándor 6 kor., Héjas Endre 7 kor., Klatt Virgil 6 kor., Kronits Lénárd 5 kor., Tatár Balázs 6 kor. Összesen … 30 kor.

1905. évre: Eberhardt Béla dr. 6 kor., Fettl Lipót 10 kor., Hauser Ignácz 6 kor., Héjas Endre 2 kor., Kármán Ferencz 10 kor., Képessy Imre 10 kor., Kosztolányi Árpád 6 kor., Kovács János dr. 10 kor., Kúthy József dr. 6 kor., Payer Jenő 10 kor., Seidner Mihály 10 kor., Söpkéz Sándor 10 kor., Szabó Gábor 10 kor., Szontágh Gusztáv 6 kor. Összesen … … … … … … … … … 112 kor.

1906. évre: Anderkó Aurél dr. 10 kor., Andor Tivadar 10 kor., Beck Károly 6 kor., Biró Sándorné 10 kor., Blau Ármin 6 kor., Bozzay Zoltán 10 kor., Csibortits Imre 6 kor., Csopey László 10 kor., Czuczy Emil 6 kor., Demeczky Mihály dr. 10 kor., Dózsa János 6 kor., Félegyházy Antal 6 kor., Gotthard Jenő 6 kor., Hajnal Márton 10 kor., Halász Ernő 10 kor., Hill József 6 kor., Hoór Mór dr. 10 kor., Kántor Nándor 6 kor., Karlovitz László 10 kor., Kiss Dénes 6 kor., Kiss Gábor 6 kor., Kiss Zoltán 6 kor., Kövesi Ferencz dr. 6 kor., Kurländer Ignácz 10 kor., Lakits Ferencz dr. 10 kor., Leber Gyula 6 kor., Malatin Gotthárd 4 kor., Markoss Imre 6 kor., Margittai Antal 6 kor., Melczer Gusztáv dr. 10 kor., Molnár Szaniszló 6 kor., Müller József 10 kor., Novobátzky Károly 6 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Privorszky Alajos 6 kor., Radó Simon 6 kor., Rátz László 10 kor., Rigó Ferencz 10 kor., Steiner Lajos dr. 10 kor., Steiner Miklós 6 kor., Streitmann András 6 kor., Süss Nándor 10 kor., Szabó Péter dr. 6 kor., Szekeres Kálmán dr. 10 kor., Szemethy Béla 10 kor., Velics Lajos 10 kor., Walther Béla 6 kor. Összesen … … … … … … … … … … … … … 368 kor.

1907. évre: Malatin Gotthárd 6 kor. Összesen ... ... 6 kor.

1908. évre: Malatin Gotthárd 2 kor. Összesen ... ... 2 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1906. évre: Budapesti áll. polg. iskolai tanitóképző 10 kor., Budapesti VI. k. áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Gyulai főgymn. 10 kor., Hajdú-Böszörményi ev. ref. főgymn. 10 kor., Kecskeméti áll. főreáliskola 5 kor., Kilian Frigyes utóda 20 kor., Szamosujvári áll. főgymn. 10 kor., Székely-udvarhelyi áll. főreáliskola 10 kor., Székely-udvarhelyi r. kath. főgymn. 10 kor. Összesen ... 95 kor.

1907. évre: Budapesti Premontrei tanárképző 10 kor. Összesen ... ... 10 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból	201 kor.,	január 1-től	529 kor.
F. és köv. évi tagsági díjakból	376 «	« «	1534 «
Előfizetési díjakból	105 «	« «	770 «

Kelt Budapesten, 1906. nov. 21.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-út 15.)

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT JÓTEVŐINEK ÉS TAGJAINAK JEGYZÉKE 1906. ÉV VÉGÉN.

I.

Magyar Tudományos Akadémia (a Társulatot fönállása óta évi 2000 kor. segélyben részesiti).

Majthényi Ottó br.,† (hagyatékából a Társulat 10000 kor. kapott).

Dobszay Antal dr.,† (1 drb. 100 kor. koronajáradék kötvényt ajándékozott).

Mandák Dezső,† (50 kor. ajándékozott).

II. Pártoló, örökítő és rendes tagok:

Ábrahám Istv., tanár, Budapest, IX. ker. ev. ref. főgymn., Lónyai-u.
Aliquander Lajos, tanár Selmeczbánya.
Anderkó Aurél dr., met. int. adjunktus, Budapest, II., Fő-u. 6.
Andor Tivadar, tanár, Budapest, I., Mikó-u. 1.
5 Angheben Albin, főgymn. tanár, Fiume.
Antal Márkus, tanárjelölt, Budapest, VIII. József-körút 22. II. 21.
Aranyosi Miksa, polg. és keresk. isk. igazg., Budapest, V., Nagykorona-u. 13.
Arató Frigyes, igazgató, Pozsony.
Asbóth Emil, min. tanácsos, Ganzgyári igazgató, Budapest, II., Ganzgyár.
10 Babiak Nándor, főreálisk. tanár, Arad.
Balla József, tanárjelölt, Alsó Dobsa, (Zemplén m.)
Baló Gyula, főgymn. tanár, Kaposvár.
Balog Mór, főreálisk. tanár, Budapest, VI., Bulyovszky-u. 22.
Bánki Donát, műegy. tanár, Budapest, Műegyetem.
15 Barabás Jenő, főreálisk. tanár, Székely-Udvarhely.
Barányi Balázs, főgymn. tanár, Jászberény.
Bartoniek Géza, Eötvös-Coll. igazgató, *vál. tag*, Budapest, IX., Csillag-u. 8.
Bauer Mihály, műegy. adjunk. Budapest, VI., Izabella-u. 78.
Bátori József, fg. tanár, H. M. Vásárhely.
20 Bein Károly, tanár, Budapest, VIII., Baross-u. 47.
Beck Károly tanár, Erzsébetváros.
Bellágh Kálmán, tanár, Budapest, IV., Kálvin-tér 3. II. 8.
Beke Manó dr., egyet. tanár, *vál. tag*, Budapest, II., Bimbó-u. 26.
Benda Jenő, tanár, Budapest, VIII., Sándor-u. 23/b. II. 9.
25 Benko Imre, főgymn. tanár, Nagy-Kőrös.
Beregi Ernő, tanárjelölt, Kolozsvár.
Berkes Imre, főreálisk. igazgató, Budapest, VIII., Horánszky-u. 9.
Bielek Miksa, műegyet. tanár, Budapest, V., Hold-u. 29.
Bihary Ferencz, tanár, Miskolcz.
30 Biró Sándorné, Budapest, Erzsébet Nőiskola, VII., István-út 93.
Bláthy Ottó Titusz, főmérnök, Budapest, II., Retek-u. 77.
Blau Ármin, főreálisk. tanár, Szeged.
Bóbita Endre, főreálisk. tanár, Kassa.
Bodola Lajos, udv. tanácsos, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Horánszky-u. 9.
35 Bodola László, főgymn. tanár, Csurgó.
Bogyó Samu, keresk. akad. tanár, Budapest, VI., Munkácsi-u. 22.
Borcsa Gergely, tanárjelölt, Kolozsvár.
Borossay Dávid, sz. B. r. tanár, Esztergom.
Bozmánszky Gyárfás, sz. B. r. tanár, Pannonhalma.
40 Bozóky Endre dr., főgymn. tanár, Budapest, II., Albrecht-út 45/a.
Bozzay Zoltán, főreálisk. tanár, Budapest, V., Markó-u. 20.
Bretz Berta, tanárnő, Szarvas.

Bricht Lipót, keresk. akad. tanár és titkár, Budapest, V., Alkotmány-u. 11.
Bruck Ferencz, tanár, Budapest, VII., Hernád-u. 5. I. 1.
45 Bruckner Károly, ev. főgymn. igazgató, Késmárk.
Buchböck Gusztáv dr., egyet. adjunkt., Budapest, VIII., Muzeum-körút 4. I. Chemiai intézet.
Bugarszky István, egyet. m. tanár, Budapest, VII., Rottenbiller-utcza, állatorv. főiskola.
Bujk Béla, gymn. tanár, Karczag.
Bukovszky János, gymn. igazg., Békés-Csaba.
50 Butorka Száva dr., tanár, Versecz.
Cholnoky Jenő dr., egyetemi tanár, Kolozsvár.
Csajkás Mihály, főgymn. tanár, Szabadka.
Csemez József, tanár, Budapest, VI., Dembinsky-u. 50. II. 17.
Csibortits Imre, tanár, Gyulafehérvár.
55 Csopey László, főgymn. tanár, Budapest, II., Halász-u. 1. III, 12.
Csorba György, főgymnasiumi tanár, Miskolcz.
Czakó Adolf, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Czekeliusz Aurél, min. tan., Budapest, Ferencz József-rakpart 9.
Czuczy Emil, csill. adjunktus, Ógyalla.
60 K. Danch Ferencz, tanár, Temesvár.
Darvai Mór dr., igazg., Budapest, Vallás- és közokt. minist., V., Hold-u.
Dávid Lajos dr., tanár, Kolozsvár, Mátyáskirály-tér 24.
Demeter István, főgymn. tan., H.-M.-Vásárhely.
Demeczky Mihály dr., udv. tan. főgymn. igazg., Budapest II., Ilona-u. 8.
65 Dienes Pál, tanár, Budapest, X., főgymn. Tisztviselőtelep.
Dietz E. Lajos, tanár, Budapest, VI., Lovag-u. 18.
Dobay Sándor, ev. ref. főgymn. igazgató, Mármaros-Sziget.
Dohnányi Frigyes, főgymn. tanár, Pozsony.
Dombay Narczisz, sz. Benedek-rendi tanár, Esztergom.
70 Dózsa Jakab, főreálisk. tanár, Székely-Udvarhely.
Dózsa János, ipari szakiskolai igazgató, Brassó.
Dörney Károly, polg. isk. igazgató, Salgótarján.
Eberhardt Béla dr., kegyesrendi tanár, Debreczen.
Eberling József, főreáliskolai tanár, Budapest, IV., Zöldfa-u. 15.
75 Edelmann Sebő dr., prem. r. kanonok igazg., Szombathely.
Egly Sándor, prem. r. tanár, Kassa.
Elekes Pál, tanár, Sátoraljaujhely.
Ellend József, tanár, Sárospatak.
Eltscher Simon, ág. ev. főgymn. tanár, Nyiregyháza.
80 Emszt Kálmán dr., földt. int. vegyész, Budapest, VII., Stefánia-út 14.
Eötvös Loránt b. dr. v. b. t. t., egy. tanár, Budapest VIII., Eszterházy-utcza 3. *Elnök.*
Erdődy Imre, polg. isk. igazg., Budapest, VIII., Csokonay-u.
Fabinyi Rezső dr., egyetemi tanár, Kolozsvár.
Faragó Andor, főgymn. tanár, Sopron.
85 Farbaky István dr., főbányatanácsos, Selmeczbánya.
Farkas Gyula dr., egyet. tanár, Kolozsvár.
Fehér Ipoly, v. b. t. t. főapát, p. t.,* (200 K.) Pannonhalma.
Feichtinger Győző, tanár, Budapest, VII., Aréna-út 15. *Pénztárnok.*
Fejér Lipót dr., tanár, Kolozsvár.
90 Fekete Jenő, tanár, Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3.
Feldmann Gyula, mechanikus, Budapest, VI., Felső-erdősor.
Félegyházy Antal, ref. coll. tanár, Székely-Udvarhely.
Fényes Dezső, tanár, ö. t., (120 K.) Arad.
Ferenczy István, főgymn. igazgató, Nagy-Szeben.
95 Ferenczy József, kegyesrendi gymn. tanár, Nyitra.
Fertig Vilmos, tanár, Budapest, VIII., Kőfaragó-u. 10. II. 20.
Fettl Lipót, tanár, Budapest, II., főgymn.
Fodor László dr., akad. tanár, Selmeczbánya.
Fogarassi Béla, főgymn. tanár, Nagy-Enyed.
100 Fölser István, műegyet. tan., Budapest, VIII., Műegyetem.
Frank István, kegyesrendi főgymn. tanár, Szeged.
Fraunhoffer Lajos, met. int. adj., Budapest, II., Fő-u. 6.
Fröhlich Izidor dr., udv. tan. egyetemi tanár, p. t. (200 K.) *vál. tag*, Budapest, VI., Eötvös-u. 26.

* p. t. = pártoló tag. ** ö. t. = örökítő tag.

Fröhlich Károly, tanár, Budapest, VI., Eötvös-utcza 30.
105 Ifj. Füzy Rezső Vilmos, gépészmérnök, Budapest, VI., Eötvös-u. 43.
Gerecz Lajos, főreálisk. tanár, Kassa.
Gidófalvy Géza, főgymn. tanár, Nagy-Szeben.
Gidró Bonifácz, szt. Benedek-rendi tanár, Komárom.
Glücklich Vilma, Budapest, VII., Kemnitzer-u. 19. II. 12.
110 Goldziher Károly, dr. a magy. halandósági táblák szerk. hiv. vezetője, Budapest, VII., Holló-u. 4.
herényi Gotthard Jenő, a m. tud. akad. l. tagja, Herény, Vasm.
Groo Vilmos, gymn. tanár, Békés-Csaba.
Gruber Nándor, tanár, p. t. (200 K.) Budapest, VIII., Rökk Szilárd-u. 39. *Vál. tag.*
Grünwald Miksa, főgymn. tanár, Losoncz.
115 Habán Mihály dr., tanár, Erzsébetváros.
Hahóthy Sándor, felső-leányiskolai igazg., Budapest, IV., Váczi-u.
Hajnal Márton, felső-keresk. isk. tanár, Budapest, II., fels. keresk. isk.
Halász Ernő, gépészmérnök, Budapest, I., Várfok-u. 14.
Halmi János, főgymn. tanár, Hódmező-Vásárhely.
120 **Harkányi Béla b. dr.,** p. t. (200 K.) Budapest, IV., Váczi-u. 12. II. *Vál tag.*
Harkay István, tanárjelölt, Tiszacsege.
Har-ányi Dezső, mértékhit. bizotts. igazgató, Budapest, VIII. József-körút 10.
Harsányi Lajos, tanárjelölt, Kolozsv.
Hassák Vidor, gymn. igazg., Kézdi-Vásárhely.
125 Hausbrunner Vilmos, tanár, Budapest, VIII., Rökk Szilárd-utcza 28.
Hauser Ignácz, tanár, N.-Kikinda.
Hauszmann Alajos, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Hatvani Ede, kegy. r. tanár, Nagykároly.
Havas Miksa, keresk. akad. tanár, Budapest, V., Váczi-u. 78.
130 Héjas Endre, met. int. adj., Budapest, II., Fő-u. 6.
Heller Richárd, polg. isk. igazg., Baja.
Heuer Ede, tanár, Budapest, VIII., József-körút 15.
Hilbert Stefánia, Budapest, VII., Damjanich-u. 28/b. I. 14.
Hill József, tanár, Jászó.
135 Hirschmann Nándor, ev. lyc. igazg. Pozsony.
Hlatky Miklós, főreálisk. tanár, Székely-Udvarhely.
Hogyor József k. r. tanár, Szeged.
Homor Ernő, tanár, Szeged.
Homor István, főreálisk. igazgató, Szeged.
140 Hoór Mór dr., műegyetemi magántanár, gépész-mérnök, Budapest, II., Zsigmond-u. 9.
Hopp Ferencz, a Ferencz József-rend lov., p. t., (200 K.) Budapest, IV., Kishid-u. 4.
Hornig Károly br. dr., val. b. titkos tan., megyés püspök, p. t., (200 K.) Veszprém.
Hortobágyi Zsigmond, főgymn. tanár, Pancsova.
Horváth József dr., akad. tanár, Pápa.
145 Horváth Kálmán, tanár, Csurgó.
Hronyecz György, tanárjelölt, Kolozsvár.
Hubatsek Alajos, keresk. isk. tanár, VI., Epreskert-u. 10.
Ilosvay Lajos dr. udv. tan., műegyet. tanár, Budapest, I. Gellért tér 4.
Jakucs István, tanár, Debreczen.
150 Janell József, főreálisk. tanár, Versecz.
Javorik János, főgymn. tanár, Pancsova.
Jeney Pál, tanár, Kecskemét.
Jónás Ödön, udv. tan. műegyet. tanár, Budapest, IX., Lónyay-u. 12.
Jordán Károly dr., Bpest, I., Lisznyai-út 15.
155 Juckel Gyula dr., tanár, Budapest, VIII., Horánszky-u. 27.
Jurányi Henrik, Budapest, IV., Kishid-u. 4.
Juvancz Irén, tanár, Bpest. VI., Bulyovszky-utcza 22.
Kacsoh Pongrácz dr., főgymn. tanár, Budapest, VII., Murányi-u. 57.
Kados Aladár, főreálisk. tanár, Budapest, VII., István-ut 24. III. 24.
160 Kalecsinszky Sándor, m. k. földt.-int. fővegyész, Budapest, VIII., Rökk Szilárd-u. 39.
Kanitz Aristid, ö. t. † (120 K.)
Karai Sándor, főreálisk. tanár, Debreczen.
Karczag István, bérlő, p. t., (200 K.) Bécs, IV., Paulanergasse 8. I. 25.
Karlovitz László, tanár, Budapest, VIII., Tavaszmező-u. 15.

★

165 Kármán Ferencz, tanár, Budapest, II., Bimbó-u. 10.
Károly J. Irén, pr. r. k. jogakadémiai magántanár, Nagyvárad. *Alelnök.*
Kegyes Tanitórend, p. t.,(200 K.) Bpest., IV., Városház-tér.
Kemény Ferencz dr., főreálisk tanár, Budapest, II., Lánczhid-tér 2.
Képessy Imre, tanár, Budapest, VII., Kazinczy-u. 21.
170 Kerekes Dezső, főgymn. tanár, Rimaszombat.
Ketterer Károly érs. tanitóképezdei tanár, Kalocsa.
Kherndl Antal, udv. tan., műegyetemi tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Király Henrik, tanár, Csiksomlyó.
Király László, főgymn. tanár, Szentes.
175 Kirchknopf András, gépészisk. tanár, Kassa.
Kiss Dénes, polg. isk. igazg., Alsó-Lendva.
Kiss E. János, főreálisk. tanár, Budapest, IV., Reáltanoda-u. 7.
Kiss Gábor, főgymn. tanár, Nagy-Bánya.
K. Kiss József, főgymn. tanár, Debreczen.
180 Fr. Kiss Károly, főgymn. tanár, Budapest, IX., Lónyay-u. 4/c.
Kisgyörgy János, tanár, Marmaros-sziget.
Kiss Zoltán, tanárjelölt, Kolozsvár.
Klatt Román, tanár, Pozsony, Szilágyi Dezső-u. 29.
Klatt Virgil, főreálisk. tanár, Pozsony.
185 Klein Pál, főgymn. tanár, Késmárk.
Kleiszner Rezső, főreálisk. tanár, Budapest, VIII., Horánszky-u. 9.
Klimkó Mihály, felsőbb leányiskolai igazg., Lőcse.
Klúg Lipót dr., egy. tanár, Kolozsvár.
Klúg Nándor dr., egyet. tanár, Budapest, VIII., Eszterházy-u. 5.
190 Klupathy Jenő dr., egyet. m.-tanár, *vál. tag*, Budapest, VIII., Luther-utcza 3.
Konkoly Thege Miklós ifj., calculat., Ó-Gyalla, Komárommegye.
Konkoly Thege Miklós dr., min. tan., met. int. ig., Budapest, II., Fő-u. 6.
Kopp Lajos dr., főreálisk. tanár, *jegyző*, Budapest, VIII., Üllői-út 46. III. 25.
Korbuly Emil, tanár, Nagy-Szeben, Állami főgymnasium.
195 Korda Dezső, Paris, 64 Rue Caumartin.
Koschovitz Gyula, honv. százados Budapest. IX., Üllői-út 95. III. 70.
Kosztolányi Árpád, főgymn. igazg., Szabadka.
Kovács Adolf, sz. B. r. tanár, Kőszeg.
Kovács Béla, tanitónőképezdei tanár, Kolozsvár.
200 Kovács Ferencz, főgymn. tanár, Nagy-Kőrös.
Kovács István, főgymn. tanár, Lőcse.
Kovács János dr., tanár, Budapest, I., (Németvölgy), Hantos-út.
König Dénes, egyet. hallg., Göttingen Wendesstrasse 62.
König Gyula dr., min. tan., műegyet. tanár, *alelnök*, Budapest, IX., Vámház-körut.
205 Kötse István, tanár, Sárospatak.
Kövesi Ferencz dr., akadémiai tanár, Selmeczbánya.
Kövesligethy Radó dr., egyet. tanár, Bpest, VII., Csömöri-út 62. *Titkár.*
Kronich Lénárd, met. int. adjunktus, Budapest, II., Fő-u. 6.
Kuncz Adolf dr.,† p. t., (200 K.)
210 Kunszt János, vasgyári mérnök Zólyombrező.
Kurländer Ignácz, kir. aligazgató, Budapest, V., Akadémia-u. 13.
Kúthy József dr., főigazg., Székes-fehérvár.
Kürschák József dr., műegy. rk. tanár, ö. t., (120 K.) *jegyző*, Budapest, II., Albrecht-út 14.
Laczó Endre, tanító, Békéscsaba.
215 Lakits Ferencz dr., tanár, Budapest, VIII., József-u. 58. II.
Lakner József, gymn. tanár, Petrozsény.
Layer Antal dr., főgymn. tanár, Losoncz.
Leber Gyula ifj., tanárjelölt, Kolozsvár.
Lendvay Hugó, szent Benedekrendi főgymn. tanár, Győr.
220 Lengyel Béla dr., egyet. tanár, min. tan., Bpest, VIII., Muzeum-körut 4.
Lengyel Endre tanár, Hajdúnánás.
Lengyel Imre, főgymn. tanár, Félegyháza.
bozóki Lengyel Sándor, felső keresk. isk. igazgató, Budapest, VI., Nagymező-u. 1.
Lévay Ede dr., tanár, Budapest, VII., Dembinszky-u. 49.
225 Ratkovszky Pál, főgymn. igazgató, Szatmár.

Lieblich Áron, tanárjelölt, Kolozsvár.
Lóky Béla dr., kegy. r. tanár, Kolozsvár.
Luckenhaub Gyula, tanár, Székely-Udvarhely.
Lutter János, főgymn. igazgató, Budapest, I., Krisztina-körut 63.
230 Magdics Gáspár, cziszt. r. tanár, Pécs.
Malatin Gotthárd, szent B. r. tanár, Pannonhalma.
Marcsiss János, főgymn. tanár, Beszterczebánya.
Marczell György, met. int. assistens, Rákospalota, Erzsébet-u. 13.
Margittai Antal, tanár, Znióváralja.
235 Markoss Imre, ev. ref. főgymn. tanár, Szatmár.
Martin Lajos, † p. t. (200 K.)
Mátray Rudolf, cziszt. r. főgymn. tanár, Eger.
Mattyasovszky Kássián, Sz. B. r. tanár, Pannonhalma.
Mayer Irén, tanárnő, Kolozsvár, (fels. leányisk.)
240 Melczer Gusztáv dr., egy. m. tanár, Budapest, II., Fő-u. 51.
Mialovich Mór, főgymn. tanár, Budapest, II., Albrecht-út 8. III. 7.
Miháloviclı Alajos, főgymn. tanár, Félegyháza.
Mikola Sándor, tanár, Budapest, VII., Városligeti fasor.
Miller Gyula, felső leányisk. tanár, Mármaros-Sziget.
245 Módly Krizsó, pr. r. k. Turje. Zalamegye.
Molnár Aladár, igazgató, Fiume.
Molnár Sándor, tanár, Szeged.
Molnár Szaniszló, tanár, Keszthely.
Morotz Kálmán, műegyet. adjunktus, Budapest, VIII., Szentkirályi-u. 22.
250 Muraközy Károly, műegyet. tanár, Budapest, X., Szabóky-u. 22.
Müller József, főreálisk. tanár, cz. igazg., Budapest, V., Markó-u.
Nagy Balázs, sz. B. r. tanár, Kőszeg.
Nagy Dezső, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Nemes Endre k. r. tanár, Budapest, IV. Városház-tér 4.
255 Neumann Jenő, főgymn. tanár, Szarvas.
Neustadt Lipót, gépész-mérnök, Budapest, V., Báthory-u. 5.
Novobatzky Károly, tanárj., Temesvár. Erzsébet v. Kereszt-tér 1.
Nuricsán József dr., akad. tanár. Magyaróvár.

Oberle Károly, főreálisk. tanár, Budapest, VI., Bulyovszky-u. 22.
260 Obláth Richard, tanár, Rozsnyó.
Ondrus Pál, főgymn. tanár, Losoncz.
Orbán Antal, főreálisk. tanár, Budapest, VIII., Zerge-u.
Oszlaczky Szilárd, p. és t. főtiszt, Budapest, VII., Dembinszky-u. 36.
Osztrogonácz János, főgymn. tanár, Szabadka.
265 Osztroszky Sándor, k. r. tanárjelölt, Kolozsvár.
Palatin Gergely, szt. B. r. tanár, Pannonhalma.
Pallos Béla Kajetán, szt. B. r. tanár, központi számvevő, Pannonhalma.
Pantea Jenő, tanár, Balázsfalva.
Pap János, kegyesr. kormánysegéd, Budapest, IV., Városház-tér 4.
270 Pap Lajos, igazg., Sepsi-Szt-György.
Papp István, tanárjelölt, Kolozsvár, egyetem.
Payer Jenő, m. k. posta- és távirdatisztv., Bpest, VII., Dembinszky-u. 23.
Pech Aladár, tanár, Budapest, VI., Szív-u. 16.
Pecz Samu műegyet. tanár, Budapest, VIII., József-körút 17.
275 Pécsi Albert dr., Budapest, I., Budafoki-út 13.
Pék János, keresk. isk. tanár, Székesfehérvár.
Pekár Dezső dr., Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3/b.
Perényi Candid, cziszt.-rendi tanár, Eger.
Perjessy László felső-keresk. iskolai igazg., Szeged.
280 Petry Gyula, főreálisk. tanár, Nagy-Várad, Nagyfürdő-u. 671.
Pfeifer Péter dr., egyet. tanár, Kolozsvár.
Plischka Norbert, főgymn. tanár, Gyöngyös.
Privorszky Alajos dr., tanár, Budapest, II., Toldy Ferencz-u.
Prokess Ignácz, főgymn. tanár, Szabadka.
285 Radó Simon, tanár, Sz.-Udvarhely.
Rados Gusztáv, műegyet. tan., *titkár*, Budapest, IX., Ferencz-kőrút 38.
Rados Ignácz, főreálisk. tanár, Budapest, VI., Szabó József-u. 21.
Raffmann Jákó dr., első m. ált. bizt. társ. mathemat., Budapest, I., Vigadó-tér.
Ráth Arnold Lajos, főgymn. tanár, Budapest, VII., Városligeti fasor.

290 Rátz László, főgymn. tanár, Budapest, VI., Hunyady-tér 11.
Rejtő Sándor, udv. tan., műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Renner János, ág. ev. főgymn. tanár, Sopron.
Réthy Mór, műegyet. tanár, ö. t., (120 K.) *vál. tag.* Budapest, VIII., Műegyetem.
Richter Rezső, tanár, Budapest, VIII., áll. főgymn.
295 Riegl Sándor, főgymn. tanár, Kalocsa.
Riesz Frigyes dr., tanár, Lőcse.
Rigó Ferencz, tanár Budapest, II., Zsigmond-u. 44.
Rombauer Emil, főigazg., ö. t. (120 K.) Budapest, V., Markó-u. 20.
Róna Árpád, mérnök, Budapest, VII., Király-u. 53.
300 Róna Zsigmond, met. int. aligazg., Budapest, II., Fő-u. 6.
Roth Ágoston, tanár, Szászváros.
Rucsinszky Lajos, tanár, Budapest, I., Táltos-u. 13.
Scheiber Ottó, tanár, Verespatak, Alsófehérm.
Schenek István dr., akad. tag, főbányatanácsos, Budapest, V., Akadémia.
305 Schimanek Emil, műegyet. tanár, Budapest, IV., Kigyó-u. 1.
Schlesinger Lajos dr., egyet. tanár, Kolozsvár.
Scholtz Ágost dr., egyet. tanár, Budapest, VI., Rózsa-u. 46.
Schöndorfer Gyula, kat. s. mérnök, Nyitra 10.
Schuller Alajos, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
310 Schwartz Ottó dr., főbánya-tanácsos, akad. igazgató, Selmeczbánya.
Simon Ferencz, gymn. igazgató, Szászváros.
Simon Tádé, plebános, Nyalka, u. p Győr, Pázmánd.
Sinkó József, főgymn. tanár, Nagy-Szombat.
Skopal István, fögymn. tanár, Budapest, VII., Barcsay-u. 5.
315 Somogyi István, k. r. tanár, S.-A.-Ujhely.
Sós Ernő, tanár, Budapest, VI., Eötvös-u. 17.
Söpkéz Sándor, min. o. tan. Budapest, V., Sas-u. 14.
Stáhl Géza, főmérnök, Debreczen.
Stauber József, főreálisk. igazgató, Nagyvárad.
320 Steécz György dr., apátkanonok pléb., Apatin.
Steiner Lajos dr., met. int. assist., Budapest, II., Fő-u. 6.
Steiner Miklós, pr. r. tanár, Szombathely.
Strasser Nándor, tanár, Kassa.
Straub L. Gyula, tanár, Budapest, VI., Andrássy-út 65.
325 Straub Sándor, tanár, a techn. iparmuzeumban, Budapest, VIII., József-körút 6.
Strausz Armin, műegyet. adjunktus, Budapest, VIII., Műegyetem.
Streitmann András, tanár, Jászberény.
Strompf László, gymn. tanár, Aszód.
Suták József dr., főgymn. tanár, Budapest, IV., Városház-tér.
330 Süss Nándor, mech. t., m. igazgató, Budapest, II., Alkotás-u. 16.
Szabó Gábor, tanár, Budapest, VIII., Sándor-u. 7.
Szabó János, kegy. r. tanár, Tata.
Szabó József, kegy. r. tanár, Vácz.
Szabó Lajos, tanár, Aszód.
335 Szabó Péter, dr., tanár, Budapest, I., Győri-u. 1. I. 15.
Szakmáry József, főgymn. ny. igazg., Beszterczebánya.
Szavkay Ede, főgymn. tanár, Budapest, V., Kálmán-u. 24.
Székely Károly, főgymn. tanár, Baja.
Székely László, tanár, Budapest, VIII., Pál-u. 6.
340 Szekeres Kálmán, dr., főreálisk. igazg. VI., Nagy-János-u. 22. II.
Széky István, főgymn. tanár, Gyöngyös.
Széll Kálmán, tanárjelölt, Kolozsvár, Szentegyházi-u. 32.
Szemethy Béla, tanár, Budapest, VII., Dohány-u. 82. II.
Szentmiklósy Jenő, főgymn. tanár, Gyulafehérvár.
345 Szépréthy Béla, főreáliskolai tanár, Brassó.
Szerényi Géza, főreálisk. tanár, Budapest, VII., Wesselényi-u. 49.
Szijártó Miklós, tanár, Budapest, VIII., József-körút 4.
Szily Kálmán, akadémia főkönyvtárnok, Budapest, V., Akadémia.
Szily Kálmán dr., műegyetemi r. k. tanár, p. t., (200 K.) Budapest, VIII., Baross utcza 79.
350 Szokol Pál dr., kir. bányaisk. igazg., Felsőbánya.

Szombathy Kálmán, tanár, Miskolcz.
Szontágh Gusztáv, főreálisk. tanár, Brassó.
Szőke Béla, tanár, Budapest, VI., Kmetty-u. 9.
Szuppan Vilmos, kir. tan., keresk. akad. igazg., Budapest, V., Széchenyi-u. 1.
355 Takáts Gyula, áll. reálisk. tanár, Sümeg.
Tangl Károly dr., egyetemi tanár, Kolozsvár.
Tass Antal, csillagdai observator Ó-Gyalla, Komáromm.
Tatár Balázs, gymnasiumi tanár, Nagy-Szalonta.
Terkán Lajos dr., adjunktus, Ó-Gyalla.
360 Terlanday Emil, szt. B. r. tanár, Esztergom.
Thán Károly dr., min. tan., egyet. tanár, *vál. tag*, Budapest, VIII. ker., Muzeumkörut 4.
Thanhoffer Lajos dr., udv. tan. egyet. tanár, Budapest, V., Ferencz József-rakpart 13.
Tihanyi Miklós, sz. B. r. tanár, Sopron.
Tolnay Lajos, min. tan., Budapest, IX., Üllői-út 19.
365 Tordai Imre, ipari szakisk. igazg., Budapest, II., Lánczhid-u. 1—3.
Tőtössy Béla műegyet. tanár, *vál. tag*, Budapest, VIII., Műegyetem.
Tresztyánszky Sándor, tanár, Brassó.
Ulreich Ede, ev. lyc. tanár, Pozsony.
Uzoni Imre, tanárjelölt, Kolozsvár, Kossuth Lajos-u. 29.
370 Vajnóczky István, kegy. rendi tanár, Budapest, IV., Városház-tér 4.
Vályi Gyula dr., egyet. tanár, ö. t. (120 K.) Kolozsvár.
Vámos Dezső, felső-iparisk. tanár, VIII., Népszinház-u. 8.
Vater József, műsz. tanácsos, Budapest, VII., Nagymező-u. 54/56.
Velics Lajos, tanárjelölt, Budapest, VII., Erzsébet-körút 37.
375 Vidovich Béla, tanár, Nagyvárad.
Visnya Aladár dr., tanár, Nagyvárad.
Vörös Cyrill, k. r. tanár, Budapest, IV., Városház-tér 4.
Wagner Alajos dr., főgymn. igazg., *vál. tag*, Budapest, V., Markó-u.
Waldapfel János dr., főgymn. tanár, Budapest, VII., Csömöri-út 65.
380 Walther Béla, reálisk. igazg., Lőcse.
Wartha Vincze dr. min. tan., műegy. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Wéber Márton, cziszt. r. főgymn. tanár, Zircz.
Winkler Lajos dr., egyet. rk.-tanár, Budapest, VIII., Vegytani intézet.
Winter József, főgymn. tanár, Budapest, VII., Dembinszky-u. 34.
385 Wittmann Ferencz, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Wodeczky József, nevelő, Szentegát, (Szigetvár mellett).
Závodszky Adolf, főreálisk. tanár, Budapest, V., Markó-u.
Zemplén Győző dr., egyet m. tanár, Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3.
Zettner Ede, polg. isk. igazg., Budapest.
390 Zilahy László, tanárjelölt, Orosháza.
Zipernovszky Károly, műegyet. tanár, Budapest, II., Fő-u. 73.

III. A Math. és Phys. Lapok előfizetői:

Aradi áll. főreáliskola.
Aradi áll. tanitónőképző.
Aradi kir. főgymnasium.
Bártfai áll. főgymnasium.
5 Békés-Csabai ev. ref. Rudolf főgymn.
Beregszászi állami főgymnasium.
Brassói áll. főreáliskola.
Brassói r. kath. főgymnasium.
Budapesti áll. polg. iskolai tanitóképző, I., Győri-u. 9. Pædagogium.
10 Budapesti II. k. áll. főreáliskola, II., Toldi Ferencz-u.
Budapesti V. k. áll. főgymn., V., Markó-utcza 20.
Budapesti V. k. áll. főreáliskola, V., Markó-u.
Budapesti VI. k. áll. főreáliskola, VI., Bulyovszky-u. 22.
Budapesti VI. k. áll. főgymnasium, VI., Lovag-u. 16.
15 Budapesti VI. k. áll. felsőbb leányiskola, VI., Andrássy-út 65.
Budapesti VIII. k. áll. főgymnasium, VIII., Tavaszmező-u.
Budapesti Premontrei tanárképző, «Norbertinum», VIII., Mária-u. 20.
Budapesti ciszt. r. tanárképző, VIII., Horánszky N.-u.

Budapesti m. k. tud. egyet. könyvtára.
20 Budapesti Tanárképző int. gyakorló főgymn., VIII., Trefort-u. 8.
Budapesti orsz. meteorologiai int. II., Fő-u. 13.
Csiksomlyói r. kath. főgymnasium.
Debreczeni állami főreáliskola.
Deési állami főgymnasium.
25 Dévai áll. főreáliskola.
Egri állami főreáliskola.
Eötvös Kollegium, Budapest, IX., Csillag-u. 8.
Érsekujvári közs. kath. főgymn.
Fogarasi áll. főgymnasium.
30 Győri áll. főreáliskola
Gyulai róm. kath. főgymn.
Gyulafehérvári róm. kath. főgymn.
Hajdúnánási ev. ref. főgymn.
Hajdú-Böszörményi ev. ref. főgymn.
35 Jászberényi kir. kath. főgymn.
Jászói prépostság könyvtára, Jászóváralja.
Kaposvári áll. főgymnasium.
Karczagi ev. ref. főgymnasium.
Kecskeméti áll. főreáliskola.
40 Késmárki ág. hitv. ev. lyceum.
Kilian Frigyes utóda, Budapest IV., Váczi-u. 1.
Kisujszállási ev. ref. főgymn.
Kolozsvári ev. ref. theol. ifj. egyl.
Kolozsvári kegy. rendi Kalazantinum.
45 Körmöczbányai áll. főreáliskola.
Lőcsei áll. főreáliskola.
Makói áll. főgymnasium.
Mármarosszigeti áll. tanitóképezde.
Mármarosszigeti ev. ref. főgymn.
50 Marosvásárhelyi róm. kath. főgymn.
Mérnök-épitész-egylet, Budapest IV., Ujvilág-u. 2.
Miskolczi ev. ref. főgymn.
Nagyenyedi Bethlen főiskola.
Nagyváradi áll. főreáliskola.
55 Nyitrai felsőbb leányiskola.
Pannonhalmi főapátsági könyvtár.
Podolini kegy. rendi gymnasium.
Privigyei kegy. rendi gymnasium.
Pozsonyi áll. főreáliskola.
60 Pozsonyi kir. kath. főgymnasium.
Salgótarjáni polg. iskola.
Sepsi-szt-györgyi ev. ref. főgymn.
Soproni ág. hitv. ev. lyceum.
Soproni áll. főreáliskola.
65 Szabadkai közs. főgymn.
Szakolczai főgymn.
Szamosujvári áll. főgymn.
Szarvasi ág. h. ev. főgymn.
Szászvárosi ev. ref. Kun-kollegium.
70 Szegzárdi áll. főgymn.
Székely-udvarhelyi áll. főreáliskola.
Székely-udvarhelyi r. kath. főgymnasium.
Székelyudvarhelyi ref. főgymn.
Székesfehérvári áll. főreáliskola.
75 Szepesiglói áll. tanitóképző.
Temesvári áll. főgymn.
Temesvári áll. főreáliskola.
Temesvári felső leányiskola.
Ujpest köz. gymn.
80 Ujvidéki kir. kath. főgymn.
Ungvári áll. főreáliskola.
Ungvári kir. kath. főgymn.
Zilahi ev. ref. főgymn.

IV. Tiszteletpéldányban részesülnek:

A Magyar Tudományos Akadémia könyvtára.
A Kir. Természettudományi Társulat.
A Műegyetemi kör.
A Ferencz József Tanítókháza.
5 A budapesti napilapok.