MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

TIZEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1901

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

TIZEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Második füzet.

Harmadik és negyedik füzet.

Ötödik füzet.

Hatodik füzet.

Hetedik füzet.

Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Physikai Laboratorium.

---

* Részletes tartalomjegyzékét lásd a VII. lapon.
** Részletes tartalomjegyzékét lásd a VIII. lapon.

Megoldott feladatok.

Társulati ügyek.

Nekrolog.

ADALÉK
AZ ALGEBRAI REZOLVENSEK ELMÉLETÉHEZ.

(Első közlemény.)

Algebrai kérdésekkel való huzamosabb foglalkozásom alatt mindinkább arra a meggyőződésre jutottam, hogy az m-edfokú algebrai egyenletek tárgyalása szimmetrikusabb és átnézetesebb, ha vizsgálódásainkat nem magukra az egyenletnek gyökeire, hanem bizonyos velük szoros kapcsolatban álló m-elemű értékrendszerekre vonatkoztatjuk, tehát egy-egy egyszerű számértéket egy nála sokkal komplikáltabb alakzattal, m számból álló értékrendszerrel pótoljuk. E sajátságos jelenség oka tüstént világossá lesz előttünk, mihelyt a fenforgó viszonyokat geometriailag értelmezzük. Midőn ugyanis magukat a gyököket vizsgáljuk, akkor ezek geometriailag egy és ugyanazon egyenesnek pontjaival ábrázolandók s igy az egész vizsgálatnak — úgyszólván — szinhelye erre az egyenesre szorítkozik; ha ellenben a gyököket m-elemű értékrendszerekkel pótoljuk, akkor ezeknek geometriai ábrázolása az m dimenziós tér pontjaival történik s ebben a mozgás szabadsága tetemesen nagyobb. Ennek köszönhető a tárgyalás nagyobb áttekinthetősége és szimmetrikusabb alakulása is.

Ha

$$f(\lambda) \equiv A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_{m-1}\lambda+A_m=0$$

az alapul szolgáló m-edfokú algebrai egyenlet, és ennek gyökei:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m,$$

akkor mindig található oly

$$x'_\alpha = a_{\alpha 1}x_1 + a_{\alpha 2}x_2 + \cdots + a_{\alpha m}x_m$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

lineár helyettesítés, a melynek charakteristikus egyenlete

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

épen a megadott

$$f(\lambda) = 0$$

egyenlet.*

E lineár helyettesités kettős elemei

$$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)})$$

és az

$$f(\lambda) = 0$$

egyenlet gyökei között a

$$\begin{aligned} \lambda_i x_1^{(i)} &= a_{11}\,x_1^{(i)} + a_{12}\,x_2^{(i)} + \cdots + a_{1m}\,x_m^{(i)} \\ \lambda_i x_2^{(i)} &= a_{21}\,x_1^{(i)} + a_{22}\,x_2^{(i)} + \cdots + a_{2m}\,x_m^{(i)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_i x_m^{(i)} &= a_{m1}x_1^{(i)} + a_{m2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{mm}x_m^{(i)} \end{aligned}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

egyenletrendszerek kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesítenek oly módon, hogy minden λ_i gyöknek egy és csak egy kettős elem felel meg és megfordítva.** E kettős elemek szolgáltatják most már amaz értékrendszereket, a melyekkel az egyenletnek gyökei czélszerűen pótolhatók.

A jelen dolgozatomban felállitott problema tárgyalása is igazolni fogja az imént felállitott elvet.

E problema a következő;

---

[*] L. «Az adjungált lineár helyettesítések elméletéről» czimű dolgozatomat. Math. és Phys. Lapok III. k. 19. l.

[**] E tárgyalások folyamában kizárjuk azokat a kivételes eseteket, a melyekben az $f(\lambda) = 0$ egyenletnek többszörös gyökei vannak. Hogy e megszorítás nem lényeges, azt a további kifejtés fogja megmutatni.

Adva vannak az

$$f(\lambda)\equiv A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_{m-1}\lambda+A_m=0$$

és a

$$g(\mu)\equiv B_0\mu^n+B_1\mu^{n-1}+\cdots+B_{n-1}\mu+B_n=0$$

algebrai egyenletek, kérdés miképen állítható elő explicit alakjában ama

$$\Phi(z)=0$$

egyenlet, a melynek gyökei a

$$z=\lambda+\mu$$

kifejezésből akként keletkeznek, hogy benne a λ *helyére az*

$$f(\lambda)=0,$$

μ *helyébe pedig a*

$$g(\mu)=0$$

egyenlet összes gyökeit helyettesítjük.

Első tekintetre e probléma megoldása igen egyszerűnek látszik; hiszen megoldása czéljából nem kell egyebet tennünk, mint az

$$f(\lambda)=0$$
$$g(\mu)=0$$
$$\lambda+\mu=z$$

egyenletekből a λ-t és μ-t kiküszöbölnünk. Elvileg ez igen egyszerű dolog, mert az igazi nehézségek csak akkor mutatkoznak, mikor ezt az elvi kiküszöbölést gyakorlatilag meg is akarjuk valósitani. Tehát fennmarad a kérdés, *hogyan hajtható végre e kiküszöbölés valóban?* Ez a kérdés épen az, a melyet a jelen dolgozatban óhajtok megoldani.

Legyen ismét

$$x'_\alpha=a_{\alpha1}x_1+a_{\alpha2}x_2+\cdots+a_{\alpha m} \qquad (S)$$
$$(\alpha=1,2,\ldots,m)$$

az $f(\lambda)=0$ egyenletnek megfelelő egyik lineár helyettesités, a melynek charakteristikus egyenlete tehát az

$$f(\lambda)=0$$

egyenlettel megegyezik; legyen továbbá

$$y'_\beta = b_{\beta 1}y_1 + b_{\beta 2}y_2 + \cdots + b_{\beta n}y_n \qquad (T)$$
$$(\beta = 1, 2, \ldots, n)$$

egyike ama lineár helyettesítéseknek, a melyek a

$$g(\mu) = 0$$

egyenletnek felelnek meg.

Hozzuk most be a következő rövidített jelöléseket: Az

$$\begin{pmatrix} a_{ik} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{ik} & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{ik} \end{pmatrix}$$

n sorból és n oszlopból álló matrixot jelöljük A_{ik}-val; a

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

matrixot B-vel; a

$$\begin{pmatrix} -z & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -z & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & -z \end{pmatrix}$$

n sorból és n oszlopból álló matrixot $-z$-vel, akkor a matrixok összeadásának ismeretes definicziója szerint a

$$\begin{pmatrix} b_{11}+a_{ii}-z & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}+a_{ii}-z & \ldots & b_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn}+a_{ii}-z \end{pmatrix}$$

matrix jelölésére az

$$A_{ii} + B - z$$

jelet kell használnunk.

E jelölésekkel élve, a keresett

$$\Phi(z) = 0$$

egyenlet explicite most már a következő alakban adódott:*

$$\varPhi(z) \equiv \begin{vmatrix} A_{11}+B-z & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}+B-z & \dots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm}+B-z \end{vmatrix} = 0.$$

Ezen az alapon a $\varPhi(z)=0$ egyenlet speczializálása révén különböző rezolvenseket sikerül explicit alakban előállitanom, egyebek között azt is, a melyet Lagrange a gyökkülönbségek négyzetére vonatkozólag felállitott.

Hogy a bevezetésben felállitott elv nemcsak ily speczialis természetű rezolvensek képezésekor használható czélszerűen, hanem az általános elmélet kifejtésében is termékenynek bizonyul, az még jobban kifog tünni e dolgozatom folytatásából, a melyben az elv segitségével bármely rezolvens-egyenlet felállitására oly módszert fogok kifejteni, a melynél az eredeti egyenlet gyökeiből alkotott szimmetrikus függvényeknek még átmeneti használata is teljesen elkerülhető és a mely a rezolvens egyenletet, a dolog természeténél fogva bár komplikált, de mégis teljesen explicit alakban szolgáltatja.

I. A $\varPhi(z) = 0$ egyenlet tényleges felállítása.

Legyenek az

$$f(\lambda) = 0$$

gyökei

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

és feleljen meg a λ_i gyöknek az (S) helyettesités

$$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$$

---

* Ez egyenletben kifejezett tételt Kőnig Gyula mélyen tisztelt barátommal már 1898 szeptember havában közöltem. Ezt azért emelem ki külön, mert a Comptes Rendus 1899. évi márczius 6-án kiadott füzetében Stephanos Cyparissos előleges jelentésben egy hasonló targyú értekezésnek közzétételét helyezi kilátásba, a mely saját vizsgálatáimmal épen ebben a tételben érintkezik.

kettős eleme, úgy hogy

$$\begin{array}{l} \lambda_i\, x_1^{(i)} = a_{11}\, x_1^{(i)} + a_{12}\, x_2^{(i)} + \cdots + a_{1m}\, x_m^{(i)} \\ \lambda_2\, x_2^{(i)} = a_{21}\, x_1^{(i)} + a_{22}\, x_2^{(i)} + \cdots + a_{2m}\, x_m^{(i)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_m x_m^{(i)} = a_{m1} x_1^{(i)} + a_{m2} x_2^{(i)} + \cdots + a_{mm} x_m^{(i)}; \\ \qquad\qquad (i=1, 2, \ldots, m) \end{array} \tag{1}$$

legyenek továbbá

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$$

a

$$g(\mu) = 0$$

egyenletnek gyökei és feleljen meg a λ_k gyöknek a (T) helyettesítés

$$(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})$$

kettős eleme, úgy hogy

$$\begin{array}{l} \mu_k y_1^{(k)} = b_{11}\, y_1^{(k)} + b_{12}\, y_2^{(k)} + \cdots + b_{1n} y_n^{(k)} \\ \mu_k y_2^{(k)} = b_{21}\, y_1^{(k)} + b_{22}\, y_2^{(k)} + \cdots + b_{2n} y_n^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_k y_n^{(k)} = b_{n1} y_1^{(k)} + b_{n2} y_2^{(k)} + \cdots + b_{nn} y_n^{(k)}. \\ \qquad\qquad (k=1, 2, \ldots, n) \end{array} \tag{2}$$

Ha most (1) alatti egyenlőségek közül a α-dikat $y_\beta^{(k)}$-val, a (2) alattiakból a β-dikat x_α^i-vel szorozzuk és e két egyenlőséget azután összeadjuk, és végül α-nak az

$$\alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

β-nak pedig a

$$\beta = 1, 2, \ldots, n$$

értékeket adjuk, az egyenlőségeknek következő rendszerét kapjuk:

$$\begin{aligned}(\lambda_i+\mu_k)x_\alpha^{(i)}y_\beta^{(k)}=&\,0\,.\,x_1^{(i)}y_1^{(k)}+0\,.\,x_1^{(i)}y_2^{(k)}+\cdots+a_{\alpha 1}x_1^{(i)}y_\beta^{(k)}+\cdots+0\,.\,x_1^{(i)}y_n^{(k)}+\\ &+0\,.\,x_2^{(i)}y_1^{(k)}+0\,.\,x_2^{(i)}y_2^{(k)}+\cdots+a_{\alpha 2}x_2^{(i)}y_\beta^{(k)}+\cdots+0\,.\,x_2^{(i)}y_n^{(k)}+\\ &+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &+0\,.\,x_{\alpha-1}^{(i)}y_1^{(k)}+0\,.\,x_{\alpha-1}^{(i)}y_2^{(k)}+\cdots+a_{\alpha\alpha-1}x_{\alpha-1}^{(i)}y_\beta^{(k)}+\cdots+0\,.\,x_{\alpha-1}^{(i)}y_n^{(k)}+\\ &+b_{\beta 1}x_\alpha^{(i)}y_1^{(k)}+b_{\beta 2}x_\alpha^{(i)}y_2^{(k)}+\cdots+(b_{\beta\beta}+a_{\alpha\alpha})\,a_\alpha^{(i)}y_\beta^{(k)}+\cdots+0\,.\,b_{\beta n}x_\alpha^{(i)}y_n^{(k)}+\\ &+0\,.\,x_{\alpha+1}^{(i)}y_2^{(k)}+0\,.\,x_{\alpha+1}^{(i)}y_2^{(k)}+\cdots+a_{\alpha\alpha+1}x_{\alpha+1}^{(i)}y_\beta^{(k)}+\cdots+0\,.\,x_{\alpha+1}^{(i)}y_n^{(k)}+\\ &+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &+0\,.\,x_m^{(i)}y_1^{(k)}+0\,.\,x_m^{(i)}y_2^{(k)}+\cdots++a_{\alpha m}x_m^{(i)}y_\beta^{(k)}+\cdots+0\,.\,x_m^{(i)}y_n^{(k)}.\end{aligned}\qquad(3)$$

$$(i,\ \alpha=1,2,\ldots,m;\quad k,\beta=1,2,\ldots,n)$$

Adott *i* és *k* értékhez *mn* számú ily egyenlőség tartozik a mely az *mn* számban lévő

$$x_\alpha^{(i)}y_\beta^{(k)}$$

$$(\alpha=1,2,\ldots,m;\quad \beta=1,2,\ldots,n)$$

szorzatra nézve homogén lineár egyenletrendszert alkot. E szorzatok mindannyia nem tünhetik el.

Ha ugyanis felteszszük, hogy

$$x_\alpha^{(i)}y_\beta^{(k)}=0$$

$$(\alpha=1,2,\ldots,m;\quad \beta=1,2,\ldots,n)$$

akkor, mivel az

$$(x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ \ldots,\ x_m^{(i)})$$

kettős elemet képviselő értékrendszernek legalább egyik értéke, pl. $x_g^{(i)}$ a zérustól különböző, az

$$x_g^{(i)}y_1^{(k)}=0,\quad x_g^{(i)}y_2^{(k)}=0,\ \ldots,\ x_g^{(i)}y_n^{(k)}=0,\quad x_g^{(i)}\gtreqless 0$$

relácziókból következnék, hogy

$$y_1^{(k)}=0,\quad y_2^{(k)}=0,\ \ldots,\ y_n^{(k)}=0,$$

de ez lehetetlen, mert az

$$(y_1^{(k)},\ y_2^{(k)},\ \ldots,\ y_n^{(k)})$$

kettős elemet képvisel és így legalább egy $y^{(k)}$ értéknek a zérustól különbözőnek kell lennie.

Minthogy a (3) alatt felírt homogén lineár egyenletrendszernek tehát minden (ik) értékpár mellett oly megoldása is van, a melyben nem minden ismeretlennek értéke zérus (hiszen ilyennek létezését épen az imént konstatáltuk), kell hogy az egyenletrendszer determinánsa minden (ik) értékpár mellett eltűnjék. Ha e determinánst a bevezetésben felsorolt rövidített jelek segítségével kiirjuk, a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$\begin{vmatrix} A_{11}+B-(\lambda_i+\mu_k) & A_{12} & \dots A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}+B-(\lambda_i+\mu_k) & \dots A_{1m} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots A_{mm}+B-(\lambda_i+\mu_k) \end{vmatrix} = 0;$$
$$(l=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n)$$

de ez egyenlőségek már világosan mutatják, hogy a

$$z=\lambda_i-\mu_k$$
$$(i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n)$$

összegek mindannyian a

$$\Psi_1(z)\equiv\begin{vmatrix} A_{11}+B'-z & A_{12} & \dots A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}+B'-z & \dots A_{2m} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots A_{mm}+B'-z \end{vmatrix}=0$$

egyenletet kielégítik. Minthogy ennek az egyenletnek fokszáma mn az egymástól különbözőknek feltett $(\lambda_i+\mu_k)$ összegek számával megegyező, ezzel az egyenletnek már összes gyökeit kaptuk.

Tételünk természetesen akkor is érvényes, ha a levezetés folyamában behozott megszorító feltevéseket elejtjük. E megszorító feltevések először abban állottak, hogy az

$$f(\lambda)=0$$
$$g(\mu)=0$$

egyenleteknek többszörös gyökei nincsenek és hogy továbbá a

$$\lambda_i+\mu_k$$
$$(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$$

összegek mindannyian különbözők. Ha tehát az

$$f(\lambda)=0$$
$$g(\mu)=0$$

egyenletek diszkriminánsai rendre

$$\Delta_1=\Delta_1(a_{11},\ldots,a_{mm},b_{11},\ldots,b_{nn})$$
$$\Delta_2=\Delta_2(a_{11},\ldots,a_{mm},b_{11},\ldots,b_{nn})$$

és

$$\Delta_3=\Delta_3(a_{11},\ldots,a_{mm},b_{11},\ldots,b_{nn})$$

a $(\lambda_i+\mu_k)$-kból alkotható különbségek szorzata, a hol a Δ függvényjelek raczionális egész függvényeket határoznak meg, akkor megszorító feltevéseink ebben az egy egyenlőtlenségben foglalhatók össze:

$$\Delta_1\Delta_2\Delta_3=\Delta(a_{11},\ldots,a_{nm},b_{11},\ldots,b_{nn})\gtrless 0.$$

Ha most már a $\Phi(z)$ részletesen kiírva a következő:

$$\Phi(z)\equiv z^{mn}-C_1z^{mn-1}+\cdots+(-1)^{mn}C_{mn},$$

a hol a

$$C_k=C_k(a_{11},\ldots,a_{nn},b_{11},\ldots,b_{nn})$$
$$(k=1,2,\ldots,mn)$$

együtthatók az a_{ik} és b_{ik} bizonyos raczionális egész kifejezései, ha továbbá a

$$z=\lambda_i+\mu_k$$
$$(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$$

mennyiségeknek az a_{ik} és b_{ik} együtthatók segitségével raczionálisan kifejezett elemi szimetrikus függvényei

$$C'_k=C'_k(a_{11},\ldots,a_{mm};\ b_{11},\ldots,b_{nn}),$$
$$(k=1,2,\ldots,mn)$$

akkor a fentebbieken bebizonyitott tétel pontos fogalmazása a következő:

Valahányszor

$$\Delta(a_{11},\ldots,a_{mm},b_{11},\ldots,b_{nn})\gtrless 0,$$

mindannyiszor fennállanak az összes

$$C_k(a_{11}, \ldots, a_{mm}, b_{11}, \ldots, b_{nn}) = C'_k(a_{11}, \ldots, a_{mm}, b_n, \ldots, b_{mm})$$
$$(k=1, 2, \ldots, mn)$$

egyenlőségek; de akkor ezeknek ismeretes algebrai tétel értelmében azonosan kell fennállaniok; fenn kell állaniok még akkor is, midőn

$$\Delta(a_{11}, \ldots, a_{mm}, b_{11}, \ldots, b_{nn}) = 0,$$

vagy a mikor a fentebbi levezetés megszorító korlátait elejtettük. Ezzel azonban tételünk is minden kivételt kizáró módon be van bizonyítva.

II. A $\Phi = 0$ egyenletből levezethető rezolvensek.

1. Ha felteszszük, hogy az

$$f(\lambda) = 0$$

és

$$g(\mu) = 0$$

egyenletek azonosak, akkor a (T) helyettesités is az (S)-sel azonosan választható, úgy hogy

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta},$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$$

ekkor azonban a

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z)}{f(2z)} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} A_{11}+A-z & A_{12} & \ldots A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}+A-z & \ldots A_{2m} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots A_{mm1}+A-z \end{vmatrix}}{f(2z)} =$$

$$= \Pi\{z-(\lambda_i+\lambda_k)\}$$
$$(i \gtrless k;\ i, k=1, 2, \ldots m)$$

$m(m$ — 1)-edfokú egész függvény teljes négyzet és ha

$$\Psi(z) = [\psi(z)]^2,$$

akkor a

$$\psi(z)=0$$

$\frac{m(m-1)}{2}$-edfokú egyenlet az

$$f(\lambda)=0$$

egyenletnek ama rezolvense, a melynek gyökei a

$$z=\lambda_i+\lambda_k$$

kifejezésből az összes $m!$ számban levő permutatig alkalmazása alapján keletkeznek.

2. Ha a

$$g(\mu)=0$$

egyenletet a

$$g(-\mu)=0$$

negativ egyenletével felcseréljük, akkor ez úgy történhetik, hogy a b_{ik} együtthatókat a

$$\underset{(i,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n)}{b'_{ik}=-b_{ik}}$$

együtthatókkal pótoljuk. Ennek következtében a

$$\Psi_1(z)\equiv\begin{vmatrix} A_{11}+B'-z & A_{12} & \ldots A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}+B'-z & \ldots A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots A_{mm}+B'-z \end{vmatrix}=0$$

egyenletnek gyökei

$$\underset{(i=1,\,2,\,\ldots,\,m;\;k=1,\,2,\,\ldots,\,n)}{z=\lambda_i-\mu_k}$$

tehát nem egyebek mint az

$$f(\lambda)=0$$

és

$$g(\mu)=0$$

egyenletek gyökeiből alkotható összes különbségek. Mint érdekes mellékeredményt felemlítjük, hogy a

$$\Psi_1(0) = \begin{vmatrix} A_{11}-B & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}-B & \dots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm}-B \end{vmatrix} = 0,$$

a hol

$$B' = -B$$

-t írtunk, az

$$f(\lambda) = 0$$

$$g(\mu) = 0$$

egyenleteknek rezultánsától csak az előjelben különbözhetik, úgy hogy ezzel a rezultánsnak figyelemre méltó új alakjára jutottunk, a melyből BÉZOUT theoremája egyszerűen levezethető.

3. Ha ismét felteszszük, hogy az

$$f(\lambda) = 0$$

és

$$g(\mu) = 0$$

egyenletek azonosak, akkor a

$$\Psi_2(z) \equiv \begin{vmatrix} A_{11}-A-z & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}-A-z & \dots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{vmatrix}$$

m^2-foku egész függvény z^m-mel osztható. A

$$\frac{\Psi_2(z)}{z^m} \equiv X(z) = 0$$

$m(m$ — 1-fokú egyenlet most az

$$f(x) = 0$$

egyenletnek ama rezolvensét adja, a melynek gyökei a

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

gyökökből alakítható összes különbségek; a

$$X(0)$$

kifejezés az alapul fektetett

$$f(\lambda) = 0$$

egyenletnek discriminansától csak az előjelben különbözhetik.

4. Ha a $\Psi_2(z)$ részletesen kiírva a következő

$$\Psi_2(z) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-z & a_{12} & \dots a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22}-z & \dots a_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu} & \dots a_{\nu\nu}-z \end{vmatrix}$$

$$(\nu = m^2)$$

és

$$\beta_{ik} = a_{i1}a_{1k} + a_{i2}a_{2k} + \cdots + a_{i\nu}a_{\nu k},$$
$$(i, k = 1, 2, \dots, \nu; \nu \quad = m^2)$$

akkor az

$$\Omega(z) = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{11}-z & \beta_{12} & \dots \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22}-z & \dots \beta_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \dots \beta_{\nu\nu} \end{vmatrix}}{z^m}$$

$m(m-1)$-edfokú raczionális egész függvény teljes négyzet, és ha

$$\Omega(z) = \{\omega(z)\}^2,$$

akkor a

$$\omega(z) = 0$$

$\frac{m(m-1)}{2}$-edfokú egyenlet explicit alakan adja ama Lagrange-tól eredő rezolvens egyenletet, a melynek gyökei az

$$f(\lambda) = 0$$

egyenlet gyökkülönbségeinek négyzetei.

5. Végül legyen szabad az elemezett viszonyokat példával is felvilágosítanom. Legyenek

$$f(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

és

$$g(\mu) \equiv \begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\mu & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\mu \end{vmatrix} = 0$$

a megadott egyenletek, akkor

$$\Phi(z)\equiv$$

$$\equiv\begin{vmatrix} b_{11}+a_{11}-z & b_{12} & b_{13} & a_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22}+a_{11}-z & b_{23} & 0 & a_{12} & 0 \\ b_{32} & b_{32} & b_{33}+a_{11}-z & 0 & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & 0 & b_{11}+a_{22}-z & b_{12} & b_{13} \\ 0 & a_{21} & 0 & b_{21} & b_{22}+a_{22}-z & b_{23} \\ 0 & 0 & a_{21} & b_{31} & b_{32} & b_{33}+a_{22}-z \end{vmatrix}=0$$

egyenlet gyökei

$$\lambda_1+\mu_1,\quad \lambda_1+\mu_2,\quad \lambda_1+\mu_3,\quad \lambda_2+\mu_1,\quad \lambda_2+\mu_2,\quad \lambda_2+\mu_3.$$

Ha az $f(\lambda)=0$ egyenletre vonatkozólag megalkotjuk $\Psi_2(z)$-t, akkor ennek általános fejtegetéseink értelmében z^2-tel oszthatónak kell lennie. Valóban

$$\Psi_2(z)\equiv\begin{vmatrix} -z & a_{21} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22}-a_{11}-z & 0 & -a_{12} \\ -a_{21} & 0 & a_{11}-a_{22}-z & a_{21} \\ 0 & -a_{21} & a_{12} & -z \end{vmatrix}=$$

$$=z^2[z^2-(a_{11}-a_{22})^2-4a_{12}a_{21}],$$

úgy hogy

$$X(z)=\frac{\Psi_2(z)}{z^2}=z^2-(a_{11}-a_{22})^2-4a_{12}a_{21}$$

és ebből

$$X(0)=-(a_{11}-a_{22})^2-4a_{12}a_{21}=4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2-(a_{11}+a_{22})^2$$

valóban nem más, mint az

$$f(\lambda)=0$$

egyenletnek diszkriminansa.

Rados Gusztáv.

A LINEÁR DIFFERENCZIÁLEGYENLETRENDSZER EGYIK REZOLVENSE.[*]

1. E sorokban azt a lineár differencziálegyenletrendszert alkotjuk meg, melynek integálrendszere két, állandó együtthatókkal biró, homogen lineár differencziálegyenletrendszer integrálrendszeréből alakul oly módon, hogy az egyik rendszer egyes tagjait a másik rendszer egyes tagjaival megszorozzuk. Ezzel egy oly homogen lineár differencziálegyenletrendszerre jutunk, a melynek karakterisztikus egyenletének gyökei a két adott differencziálegyenletrendszer karakterisztikus egyenleteinek gyökeinek összegei. Vagyis: explicit alakban nyerjük két algebrai egyenlet gyökeinek összegére szolgáló rezolvens egyenletet, ugyanabban az alakban, melyben legelőször Rados úr e rezolvenst előállította. Úgy vélem e közleménynek némi érdekességet kölcsönöz az a körülmény, hogy újból igen egyszerű példáját látjuk a lineáris transzformácziók körébe tartozó problemáknak a lineár differencziálegyenletekkel kapcsolatos tárgyalásának.

2. Ha adva van a következő, homogén lineár differencziálegyenlet:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_ny=0, \tag{1}$$

melynek együtthatói állandó számértékek, akkor, miként ismeretes, ezen egyenlet n független partikuláris integrálja:

$$e^{\alpha_1x},\ e^{\alpha_2x},\ldots,\ e^{\alpha_nx} \tag{2}$$

ha az n számú α az

---

[*] L. e kötet 1. lapjain.

$$f(a)=a^n+a_1a^{n-1}+a_2a^{n-2}+\cdots+a_n=0 \qquad 3)$$

karakterisztikus egyenlet különböző gyökei.

Ha továbbá adva van a következő:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n \\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 4) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n
\end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer, a melynek együtthatói szintén állandók, akkor e rendszer n partikuláris integrálja éppen olyan alakú, mint a 2) alatti rendszer, ha az a számértékek a 4) alatti rendszer karakterisztikus egyenletének, a

$$\varphi(a)=\begin{vmatrix} a_{11}-a, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-a, & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn}-a \end{vmatrix}=0 \qquad 5)$$

egyenletnek különböző gyökei.

3. A homogen lineár differencziál egyenletet mindig átalakíthatjuk homogen lineár differencziálegyenletrendszerré. Ha ugyanis

$$y_1=y,\ y_2=y',\ y_3=y'',\ldots,\ y_n=y^{(n-1)}$$

teszszük, akkor az 1) alatti differencziálegyenlet a következő alakban írható:

$$\frac{dy}{dx}=y';\quad \frac{dy'}{dx}=y'';\ldots,\quad \frac{dy^{(n-2)}}{dx}=y^{(n-1)}$$

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx}=-(a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_ny). \qquad 6)$$

Ha az 1) alatti differencziálegyenlet partikuláris megoldása e^{ax}, akkor a neki megfelelő 6) alatti rendszernek partikuláris megoldás rendszer:

$$y=e^{ax},\ y'=ae^{ax}, \ldots, y^{(n-1)}=a^{n-1}e^{ax};$$

vagyis a 6) alatti rendszer *karakterisztikus egyenleteinek gyökei megegyeznek az* 1) *alatti differencziálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökeivel.*

A 6) alatti rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$f(a)=\begin{vmatrix} -a, & 1, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & -a, & 1, & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ -a_n, & -a_{n-1}, & -a_{n-2}, & \ldots & -a_1-a \end{vmatrix}=0 \qquad 7)$$

és ezen egyenlet megegyezik a 2) alattival. *Ezzel egyúttal képesek vagyunk minden algebrai egyenletnek karakterisztikus egyenlet alakjában való előállítására.**

Igy pl. az

$$f(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$$

egyenlet a következő alakban írható:

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix} x, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & x, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & x, & -1 \\ a_4, & a_3, & a_2, & a_1+x \end{vmatrix}=0$$

4. Legyen adva két, állandó együtthatókkal biró, homogén lineár differenczial-egyenletrendszer.

Az egyik n-edrendű:

---

* L. RADOS G. Az adjungált helyettesítések elméletéről cz. értekezését. M. Ph. L. III. k. p. 19.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n \\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n \\
&\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
&\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n
\end{aligned} \tag{8)}$$

a másik pedig m-edrendű:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_n}{dx} &= b_{11}z_1+b_{12}z_2+\cdots+b_{1m}z_m \\
\frac{dz_2}{dx} &= b_{21}z_1+b_{22}z_2+\cdots+b_{2m}z_m \\
&\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
&\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
\frac{dz_m}{dx} &= b_{m1}z_1+b_{m2}z_2+\cdots+b_{mm}z_m.
\end{aligned} \tag{9)}$$

Feladatul tüzzük ki azon mn-edrendű differencziálegyenletrendszer megalkotását, melyet az összes:

$$\underset{(i=1,\ldots,n,\;k=1,\ldots,m)}{v_{ik}=y_iz_k} \tag{10)}$$

megoldások kielégítsenek.

Ezen egyenletrendszer azonnal fölírható. Ugyanis

$$v'_{ik}=y_iz'_k+y'_iz_k=\sum_1^n{}^r\, a_{ir}(y_rz_k)+\sum_1^m{}^s\, b_{ks}(y_iz_s)$$

azaz

$$\frac{dv_{ik}}{dx}=\sum_1^m{}^r\, a_{ir}v_{rk}+\sum_1^m{}^s\, b_{ks}v_{is}. \tag{11)}$$

$$\binom{i=1,2,\ldots n}{\varkappa=1,2,\ldots m}$$

Ha a 8) alatti rendszer valamely megoldásának rendszere:

$$y_1=A_1e^{\alpha x},\; y_2=A_2e^{\alpha x},\;\ldots,\; y_n=A_ne^{\alpha x}$$

és a 9) alatti:

$$z_1=B_1e^{\beta x},\ z_2=B_2e^{\beta x},\ \ldots,\ z_m=B_me^{\beta x},$$

akkor a 11) alatti resolvens differencziálegyenletrendszer egyik megoldási rendszere:

$$v_{ik}=C_{ik}e^{(\alpha+\beta)x}.\quad \binom{i=1,\,2,\ldots n}{\varkappa=1,\,2,\ldots m}$$

E szerint tehát, ha a 8) alatti rendszer karakterisztikus egyenletének $f(\alpha)=0$ egyenletnek gyökei:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$$

és a 9) alatti rendszer karakterisztikus egyenletének, $\varphi(\beta)=0$-nak gyökei:

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m,$$

akkor a 11) alatti rendszer karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\gamma_{ik}=\alpha_i+\beta_k.\quad (i-1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,m)$$

Ez a rezolvens karakterisztikus egyenlet közvetlenül felírható. Ha ugyanis az (i, k) variacziókat a következő sorrendben alkotjuk meg:

$$11,\ 12,\ \ldots,\ 1m;\ 21,\ 22,\ \ldots,\ 2m;\ \ldots,\ n1,\ n2,\ \ldots,\ nm$$

és e sorrendben mindeniknek a neki megfelelő sorszámot feleltetjük meg, akkor a karakterisztikus egyenlet baloldalán levő determinánsban az

$$i1,\ i2,\ \ldots,\ im$$

sorszámoknak megfelelő horizontális sorok a következő schemába illeszthetők:

$$\begin{array}{c|cccc|ccc|c}
 & (11), & (12), & 13, \ldots, & (1m) & (21), & (22), \ldots, & (2m) & \\
\hline
(i1) & a_{i1}, & 0, & 0, & \ldots, 0 & a_{i2}, & 0, & \ldots, 0 & \ldots \\
(i2) & 0, & a_{i1}, & 0, & \ldots, 0 & 0, & a_{i2}, & \ldots, 0 & \ldots \\
(i3) & 0, & 0, & a_{i1}, & \ldots, 0 & 0, & 0, & \ldots, 0 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots, \cdot & \cdot & \cdot & \ldots, \cdot & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots, \cdot & \cdot & \cdot & \ldots, \cdot & \ldots \\
(im) & 0, & 0, & 0, & \ldots, a_{i1} & 0, & 0, & \ldots, a_{i2} & \ldots \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|llll|l}
 & (i1), & (i2), & \ldots, & (im) & \\
\hline
(i1) & b_{11}+a_{ii}-\gamma, & b_{12}, & \ldots, & b_{1m} & \ldots \\
(i2) & b_{21}, & b_{22}+a_{ii}-\gamma, & \ldots, & b_{2m} & \ldots \\
(i3) & b_{31}, & b_{32}, & \ldots, & b_{3m} & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot & \ldots \\
(im) & b_{m1}, & b_{m2}, & \ldots, & b_{mm}+a_{ii}-\gamma & \ldots \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{|llll|}
(n1), & (n2), & \ldots, & (2m) \\
\hline
a_{in}, & 0, & \ldots, & 0 \\
0, & a_{in}, & \ldots, & 0 \\
0, & 0, & \ldots, & 0 \\
\cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\
\cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\
0, & 0, & \ldots, & a_{in} \\
\hline
\end{array}$$

Ezen schemában a felső számpároknak megfelelő sorszám az oszlopok rendszámát, a szélső számpároknak megfelelő sorszámok pedig a determináns vízszintes sorainak rendszámait jelentik. *Az így nyert egyenlet:*

$$\Phi(\gamma)=0$$

az $f(\alpha)=0$ *és* $\varphi(\beta)=0$ *egyenletek gyökpárainak összegére vonatkozó rezolvens egyenlet*, mely teljesen megegyezik azzal az egyenlettel, melyet RADOS úr említett értekezésében megállapított.

Ha pl.: $n=2$, $m=2$, akkor a rezolvens egyenlet a következő negyedfokú egyenlet:

$$\begin{vmatrix}
b_{11}+a_{11}-\gamma, & b_{12}, & a_{12}, & 0 \\
b_{21}, & b_{22}+a_{11}-\gamma & 0, & a_{12} \\
a_{21}, & 0, & b_{11}+a_{22}-\gamma & b_{12} \\
0, & a_{21}, & b_{21} & b_{22}+a_{22}-\gamma
\end{vmatrix}=0$$

Ha pedig $n=2$, $m=3$, akkor a resolvens egyenlet a következő hatodfokú egyenlet:

$$\Phi(\gamma)=\begin{vmatrix} b_{11}+a_{11}-\gamma, & b_{12}, & b_{13}, & a_{12}, & 0, & 0 \\ b_{21}, & b_{22}+a_{11}-\gamma, & b_{23}, & 0, & a_{12}, & 0 \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33}+a_{11}-\gamma, & 0, & 0, & a_{12} \\ a_{21}, & 0, & 0, & b_{11}+a_{22}-\gamma, & b_{12}, & b_{13} \\ 0 & a_{21}, & 0, & b_{21}, & b_{22}+a_{22}-\gamma, & b_{23} \\ 0, & 0, & a_{21}, & b_{31}, & b_{32}, & b_{33}+a_{22}-\gamma \end{vmatrix}=0.$$

Beke Manó.

AZ ELMÉLETI PHYSIKA MÓDSZEREINEK FEJLŐDÉSE NAPJAINKBAN*

(Első közlemény.)

A korábbi évszázadokban a tudományt a legkiválóbb elmék munkája úgy vitte folytonosan de lassan előre, mint a hogyan a szorgalmas és vállalkozó szellemű polgárok építkezései egy régi várost folytonos gyarapodásban tartanak. Ezzel szemben a gőznek és a távirónak százada a tudomány fejlődésére is rásütötte ideges és hirtelen tevékenységének bélyegét. Különösen a természettudományok ujabb fejlődése hasonlit a legmodernebb amerikai városéra, mely egy pár évtized alatt faluból milliós várossá alakult.

Bizonyára joggal mondják Leibnitzról, hogy ő volt az utolsó, a ki képes volt korának összes tudományát egy fejben egyesiteni. Ujabb időben is akadtak férfiak, kik ismereteik rengeteg terjedelmével csodálatra méltók. Csupán Helmholtzot emlitem föl, a ki négy tudományt, a bölcseletet, mennyiségtant, physikát és physiologiát egyenlően mesterileg kezelte. Csakhogy ezek az emberi tudásnak mégis csak egyes, egymással többé-kevésbbé rokon ágai voltak; amaz sokkalta messzebbre terjed.

Positiv ismereteinknek ily rengeteg és rohamos kiterjedése maga után vonta a tudományban a munkafelosztásnak a legapróbb részletekig való terjedését, olyannyira, hogy ez talán már egy modern gyárral hasonlítható össze, melyben az egyik egyebet sem tesz, mint csupán leméri, a másik levagdalja, a harmadik beolvasztja a részfonalakat stb. Az ilyen munkafelosztás a tudomány gyors hala-

---

* Boltzmann Lajos előadása, melyet 1899. szept. 22-én a müncheni természettudományi társulat közgyűlésén tartott.

dását bizonyára rendkívül előmozdítja, sőt ezen szempontból az egyenesen mellőzhetetlen; de épen oly bizonyosak a benne rejlő nagy veszedelmek is. Mellette elvész az egész fölötti áttekintés, mely minden ideális és a régi gondolatoknak lényegesen új és csupán lényegesen új kapcsolatára irányuló törekvésnél mellőzhetetlen. Ezen hátrányt lehetőség szerint gyöngitendő szükséges, hogy egy az ilyen tudományos detailmunkával foglalkozó időközönkint valamely nagyobb, tudományosan képzett közönségnek áttekintést törekedjék nyujtani azon tudományág fejlődéséről, a melylyel foglalkozik·

Ezzel nem csekély nehézségek járnak. A meghatározott eredményt czélzó egyes következtetések és kisérletek majdnem végnélküli sora fölött az áttekintés csak annak nem okoz nehézséget, a ki épen ezen képzetsorok beutazását tüzte ki élete czéljául. Ehhez járul még az is, hogy a beszéd rövidsége és az áttekintés megkönynyitése érdekében mindenütt nagyszámú új jelölés és tudományos elnevezés használata bizonyult hasznosnak. Az előadó egyrészt hallgatóinak türelmét nem merítheti ki ezen új fogalmak részletes megmagyarázásával, mielőtt tulajdonképeni tárgyára rátérhetne; másrészt azok nélkül csak nehezen és ügyetlenül értetheti meg magát. Azonkivül a magyarázat népszerűségét sem tekintettük soha a fődolognak. Ez a következtetések szigorúságának ellaposodására és azon exaktság föladására vezetne, a mely a természettudományoknak méltó büszkeséggel viselt epithetonjává vált. Ha tehát mostani előadásom tárgyául az elméleti physikának napjainkban való fejlődésmenetének népszerű jellemzését választottam, akkor jól tudtam, hogy czélomat azon tökéletességgel, mint az lelkem előtt lebeg, nem leszek képes elérni, s hogy csupán az általában legfontosabbat durva körvonalaiban tüntethetem föl; másrészt pedig imitt-amott a teljesség kedvéért szükséges általánosan ismert dolgok fölemlitésével fogok megütközést kelteni.

*

A természettudomány legujabb gyors haladásának fő oka kétségtelenül egy különösen alkalmas kutatási mód feltalálásában és tökéletesitésében rejlik. A kísérletek terén az néha épenséggel automatikusan dolgozik s a kutatásnak gyakran egyéb dolga sincs, mint az, hogy folytonosan új anyagot szerezzen, mint a takács, a ki a szövőszékre új fonalat rak föl. Igy a physikus újabb és újabb anyagok szivósságát, elektromos ellenállását stb. vizsgálja, majd ugyanezen vizsgálatokat a folyékony hydrogénnek, majd a Moissan-féle kályhának hőmérsékleteinél ismétli, s ugyanigy folyik a munka a chemia bizonyos feladatainál. Természetesen az ilyesmihez is még mindig elég elmeélre van szükség, mert ki kell találni épen azon kisérleti kapcsolatokat, a melyek mellett a dolgok sikerülnek.

Nem ilyen egyszerűek a körülmények az elméleti physika módszereinél; de itt is, egy bizonyos értelemben beszélhetünk az automatikus továbbdolgozásról.

A helyes módszernek ezen nagy jelentősége okozta azt, hogy csakhamar nem csupán a tények fölött töprenkedtek, hanem gondolkodásunk módszere fölött is; így állott elő az u. n. megismerés-elmélet, mely a régi és rosszhirű metaphysikai mellékize mellett is a tudományra nézve kiváló fontosságú.

A tudományos módszer továbbfejlesztése úgyszólván azon váz, mely az összes tudományok haladását hordozza; azért a következőkben a módszerek fejlődését akarom előtérbe helyezni, s az elért tudományos eredményeket csupán magyarázatképen fogom közbefonni. Az utóbbiak természetüknél fogva könnyebben érthetők és általánosan ösmertebbek, míg épen módszeres összefüggésük szorul legbehatóbb magyarázatra.

Különös inger rejlik abban, hogy a történeti fejlődés kapcsán a tudomány haladásának jövőjére vessünk pillantást, a melyet megérnünk az emberi lét rövidsége miatt nekünk nincsen megadva. E tekintetben, már előre jelezhetem, csupán negativot nyújthatok. Nem merészkedem a jövőt elboritó fátyolt meglebbenteni; ellenben okokat fogok felhozni, melyek alkalmasok lesznek arra, hogy bizonyos, a tudomány fejlődésére vonatkozó túlságosan könnyelmű következtetésektől megóvjanak.

*

Ha az elmélet fejlődésmenetét kissé közelebbről tekintjük, legközelebb az tűnik föl, hogy ez korántsem oly egyenletes, mint a milyennek remélhettük; sőt tele van discontinuitásokkal és látszólag épen nem a legegyszerűbb, logikailag megadott úton haladt. Bizonyos módszerek gyakran épen most még a legszebb eredményekre vezettek, s némelyek talán már azt hitték, hogy a tudománynak határ nélküli fejlődése csupán ezen módszerek folytonos alkalmazását kivánja. Ezzel ellentétben azok hirtelen kimerülteknek mutatkoznak, s kénytelenek vagyunk egészen új, teljesen eltérő módszereket keresni. Erre a régi és új módszerek követői közt küzdelem keletkezik. Az elsők álláspontját ellenfeleik elavultnak, túlhaladottnak jelentik ki; míg azok az újítókat a valódi, klassikus tudomány elrontóiként bélyegzik meg.

Ez különben oly folyamat, mely nem szorítkozik csupán az elméleti physikára, hanem az emberi szellem munkásságának minden ágánál a fejlődésmenet nélkülözhetetlen jellemvonása. Igy talán Lessing, Schiller és Göthe idejében némelyek azt hitték, hogy az ezen mesterek ápolta ideális költészet továbbfejlesztése a drámairodalom szükségleteit mindenkorra födözni fogja; holott ma a dráma-költészetnek teljességgel más módjait keresik, s a valódit talán még meg sem találták.

Ugyanigy a régi festészeti iskolával szemben állanak az impressionisták, secessionisták, plein-airesek; a klassikus zenével szemben áll a jövőnek zenéje. Az utóbbi talán még nem avult el? Ennélfogva nem ütközhetünk meg azon, hogy az elméleti physika sem tesz kivételt ezen általános fejlődési törvény alól.

Számos geniális természetbölcselő munkálataira támaszkodva Galilei és Newton oly tant állítottak föl, melyet az elméleti physika tulajdonképeni kezdeteként kell elismernünk. Newton ehhez különös eredménynyel az égitestek mozgásának elméletét csatolta. E mellett minden égitestet mennyiségtani pontnak tekintett, épen úgy, mint a hogyan az állócsillagokat első közelítéssel a megfigyelő pontoknak tekintheti. Kettőjük között egy az összekötő egyenes irányába eső, s a távolságuk négyzetével fordított arányban álló vonzóerőnek kellene hatnia. Amennyiben azt hitte, hogy bármely két tömegrészecske között ugyanilyen erő hat, s egyebekben a mozgásnak földi testek megfigyeléséből levezetett törvényeit alkalmazta, sikerült neki az összes égitestek mozgásait, az árapályt és minden idetartozó tüneményt ugyanazon törvényből megmagyaráznia.

Ezen nagy eredmények NEWTON követőit arra serkentették, hogy a többi természeti tüneményeket is egészen NEWTON módszere szerint csupán alkalmas módosítások és tágítások segítségével magyaráznák. Egy régi, még DEMOKRITOStól eredő föltevés alapján a testeket számtalan anyagi pontból, atomokból álló aggregatumoknak tekintették. Két atom közt a NEWTON-féle tömegvonzáson kivül még egy erőt vettek föl, melyet bizonyos távolságokban taszítónak, egy más távolságban vonzónak gondoltak, úgy, a mint az a tünemények magyarázata szempontjából épen legczélszerűbbnek mutatkozott.

A számítás eredménye az eleven erő megmaradásának elve volt. Valahányszor bizonyos munka végeztetik, vagyis, a mikor az erő támadáspontja az erőhatás irányában bizonyos utat ír le, a mozgásnak oly mennyisége áll elő, melyet az eleven erőnek nevezett mennyiségtani kifejezéssel kell mérni. Pontosan ugyanezen mozgásmennyiség áll elő akkor is, ha az erő a test minden részecskéjét egyenlőképen támadja, mint pl. a szabad esésnél; de mindig annál kevesebb mutatkozik, ha az erők csak néhány részecskére hatnak, másokra pedig nincsenek hatással, mint pl. a surlódásnál, az ütközésnél. Minden ilyen utóbbi fajta folyamatnál ennek a hiánynak fejében hő keletkezik. Ennélfogva azt a föltevést állították föl, hogy a hő, melyet azelőtt valami anyagnak tartottak, semmi egyéb, mint a test legkisebb részecskéinek egymás iránt való relativ mozgása, melyet közvetlenül észlelni nem lehet, mert hiszen magukat ezen részecskéket sem láthatjuk. De mozgásuk hatásai idegeink részecskéivel közölhetők s így a meleg-érzetet létesitik.

Az elméletnek azon következtetése, hogy a létesített hő mindenkor pontosan arányos az elveszett eleven erővel, a mit az eleven erő és hő æquivalentiájának nevezünk, beigazolódott. Föltételezték továbbá, hogy a szilárd testekben minden részecske egy bizonyos nyugalmi helyzet körül rezeg s hogy ezen nyugalmi helyzetek configuratiója épen az, a mely a test meghatározott alakját megadja. Folyós testekben a molekuláris mozgások oly élénkek, hogy a részecskék egymás mellett elcsuszamlanak; a párolgást a részecskéknek a test felületétől való teljes elszakadása létesíti, úgy, hogy a gázokban s gőzökben a részecskék túlnyomóan egyenes vonalú mozgásban vannak s elrepülnek, mint a kilőtt puskagolyó. Igy voltak a testeknek a három halmazállapotban való előfordulása s a physika és chemia egyéb tényei erőltetés nélkül megmagyarázhatók. A gázok számos tulajdonságaiból azonban az következik, hogy molekuláik nem lehetnek anyagi pontok. Ennélfogva föltételezték, hogy azok anyagi pontok complexuma, melyek talán még egy ætherburkolattal vannak körülvéve.

Ugyanis azon ponderabilis atomokon kivül, melyekből a testek össze vannak téve, egy második, sokkal finomabb atomokból álló anyagot, a fény-æthert tételezték föl, s annak harántrezgéseiből majdnem mindazon fénytüneményeket sikerült megmagyarázni, a melyeket azelőtt Newton külön fényrészecskék emanatiójára vezetett vissza. Még némely nehézségek fenmaradtak, mint pl. a ponderabilis anyagoknál nemcsak előforduló, de azoknál főszerepet játszó longitudinális rezgéseknek a fényæthernél való teljes hiánya.

Az elektromosság és mágnesség terén a tények ismeretét Galvani, Volta, Oerstedt, Ampère és mások rengeteg módon tágitották, Faraday pedig azokat bizonyos tekintetben lezárta. Az utóbbi aránylag csekély eszközökkel az új tények oly bőségét deritette ki, hogy sokáig úgy látszott, mintha a jövő már csak mindezen fölfedezések magyarázatára és gyakorlati alkalmazására fog szoritkozni.

Az elektromágneses tünemények okául már régen bizonyos elektromos és mágneses folyadékok vétettek föl. Ampèrenek sikerült a mágnességet molekuláris áramokkal megmagyaráznia s ezzel külön mágneses folyadékok fölvétele fölöslegessé vált, Weber Vilmos pedig az elektromos folyadékok elméletét annyiban fejezte be, amennyiben azt úgy kiegészítette, hogy vele az elektromagnetizmusnak minden ismert tüneménye egyszerű módon megmagyarázhatóvá vált. E czélból föltételezte, hogy az elektromos folyadékok épen úgy felbonthatók legkisebb részecskékre, mint a ponderabilis testek meg a fényæther, s hogy az elektromos részecskék közt a többi anyagok részecskéi közt ható erőkhöz hasonló erők hatnak, egyedül azt a különben lényegtelen módositást tette, hogy a két elektromos részecske közt ható erők a részecskék relativ sebességeitől és gyorsulásaitól is függenek.

Míg tehát korábban a megtapintható anyagon kivül még egy hőanyagot, fényanyagot, két mágneses és két elektromos folyadékot stb. föltételeztek, most beérték a ponderabilis anyaggal, a fényætherrel és az elektromos folyadékokkal. Mindezen folyadékokat atomokból állóknak képzeltek s a physika föladata az egész jövőre nézve abból látszott állani, hogy a két atom közötti távolhatás törvényét megállapitsa, s az ezen kölcsönhatásokból folyó összes egyenleteket a megfelelő kezdetföltételek alapján integrálja.

*

A fejlődésnek ezen a fokán állott az elméleti physika tanulmányaimnak kezdetén. Mennyire megváltozott azóta minden! Tényleg, ha mindezen kialakulásokra, felfordulásokra visszatekintek, akkor a tudományos téren tapasztalatokban megaggottnak tűnöm föl magam előtt! Sőt, azt merném mondani, hogy azok közül, a kik a régit a maga egészében lelkükbe foglalták, egyedül én maradtam fenn, legalább is én vagyok az egyedüli, a ki, a mennyire még birja, a régiért ki áll a harczmezőre.

Életem feladatának tekintem azt, hogy a régi klassikus elmélet eredményeit lehetőleg tisztán, logice rendezetten feldolgozván, a mennyiben erőmtől telik, hozzájáruljak ahhoz, hogy a sok jó és örökre használható, a mi meggyőződésem szerint benne foglaltatik, valamikor ne legyen másodszor fölfedezendő, a mi különben a tudományok terén nem volna épen az első eset.

Igy magamat önöknek mint reaktionáriust mutatom be, mint hátramaradottat, a ki az újabbal szemben a régiért, a klassikusért rajong; de azt hiszem, hogy az újnak előnyeivel szemben nem vagyok elzárkózott, nem vagyok vak. Ennek, a mennyiben tehetem, előadásom további folyamán fogok igazságot szolgáltatni; mert jól tudom, hogy én is, mint mindenki, a dolgokat szemüvegem subjectiv szinezésében látom.

*

A jellemzett tudományos rendszer ellen az első támadás leggyöngébb oldalára, a Weber-féle elektrodynamikus elmélet ellen irányult. Ez úgyszólván virága a geniális kutató szellemi munkájának, ki az elektrodynamikus mértékrendszerek körül és számos más munkálatokba helyezett eszméi és kisérleti eredményei alapján az elektromosság tanában halhatatlan érdemeket szerzett. De elmélete éleselméjűsége és mathematikai finomsága daczára annyira magán hordozza a mesterkéltség látszatát, hogy mindenkor csak kevés lelkes hive hitt föltétlenül igazságában. Ezek ellen fordult Maxwell a Weber érdemeinek föltétlen elismerése mellett.

Maxwell munkálatai ránk nézve két szempontból veendők tekintetbe:

1. a megismerés elmélete és 2. a physika szempontjából. Az elsőt illetőleg Maxwell az ellen óv, hogy egy a természetről alkotott nézetet csupán azért tartsunk egyedül helyesnek, mert következményeinek egy egész sorát a tapasztalat igazolta. Számos példán kimutatja, hogy a tüneménye k egy csoportja gyakran két, teljesen eltérő módon magyarázható. A magyarázat mindkét módja egyenlően jól képviseli a tüneménycsoportot. Az egyiknek a másik fölötti előnye csak akkor mutatkozik, ha a csoporthoz új, eddig ismeretlen tüneményeket csatolunk; de e mellett is, újabb tények megismerése után a jobbnak bizonyult magyarázat egy harmadiknak engedi majd át a teret.

Mig talán a régi klassikus physikának nem annyira a megalkotói, hanem inkább a későbbi képviselői azt prætendálták, hogy annak segítségével a dolgok valódi természetét fölismerték, addig Maxwell a saját elméletét a természet oly képének, oly mechanikai analogiának kivánja tekinteni, mely jelenleg a tünemények összeségét a legegységesebb alakban képes egybefoglalni. Majd meglátjuk, hogy Maxwell-nek ezen állásfoglalása az elmélet további fejlődésében milyen hatásosnak bizonyult. Maxwell elméleti eszméit gyakorlati sikereivel azonnal diadalra vezette.

Láttuk, hogy annak idején az összes elektromágneses tüneményeket a Weber-féle elmélettel magyarázták, mely szerint az elektromosság oly részecskékből áll, a melyek minden közvetítés nélkül egymásra tetszésszerinti távolságokból közvetlenül hatni képesek. Faraday eszméinek hatása alatt Maxwell egy épen az ellenkező nézetből kiinduló elméletet állított föl. E szerint minden elektromos vagy mágneses test csak egy az egész teret betöltő közegnek közvetlenül szomszédos részecskéire hat, ezek a közegnek ismét közvetlenül szomszédos részecskéire hatnak s így tovább, míg a hatás így a legközelebbi testig tovább terjed.

Az eddig ismert tüneményeket mindkét elmélet egyenlően jól megmagyarázta; de a Maxwell-féle elmélet a régit túlhaladta. Az első szerint, ha egyáltalán sikerül elegendő gyorsasággal lefolyó elektromos mozgásokat létesíteni, ezek a közegben oly hullámmozgásokat létesítenek, melyek a fényæther mozgásának törvényeit pontosan követik.

Maxwell ennélfogva sejtette, hogy a fénylő test részecskéiben állandóan rapid elektromos mozgások mennek végbe, és hogy a közegben ezek gerjesztik azon hullámmozgásokat, melyek a fényt alkotják. Így az elektromagnetikus hatásokat közvetítő közeg a korábban szükségelt fényætherrel válik azonossá, s így azt a nevet kaphatja, bár sok tekintetben más tulajdonságokkal kell azt felruháznunk, hogy az elektromagnetizmus közvetítésére alkalmassá váljék.

Hogy az eddigi elektromos kísérleteknél ily nemű mozgások mért nem voltak észrevehetők, azt talán a következőképen tehetjük beláthatóvá. Támaszszuk lapos tenyerünket lassan merőlegesen egy nyugvó inga rúdjára, emeljük vele az ingát, a kezet arra felé mozgatván, a merre az inga kölöncze fekszik, majd mozgassuk kezünket ugyanigy vissza, s távolítsuk el az ellenkező irányban. Az inga, követvén a kéz mozgását, egy fél lengést végez, de nem leng tovább; mert a vele közölt sebesség igen csekély volt. Más példa! Az elmélet azt teszi föl, hogy a kifeszített húr csipkedésénél a húr egy pontja kimozdul egyensúlyi helyzetéből, majd hirtelen az egész húr magára hagyatik. Én ezt tanulókoromban nem hittem el, s úgy vélekedtem, hogy a húrt csipkedő a húrnak még külön lökést is ad; mert ha a húrt ujjammal kitérítettem, s ujjamat hirtelen abban az irányban távolítottam el, a melyben a húrnak rezegnie kellett, a húr néma maradt. Nem jöttem rá arra, hogy ujjamat a húr rezgésének gyorsaságához képest sokkal lassabban távolítottam el, semhogy a húr mozgását föl ne tartóztattam volna.

Igy az eddigi kisérleteknél az elektromos állapotok az elektromosság rengeteg nagyságu terjedési sebességéhez képest mindig aránylag igen lassan vitettek át másokba. Fáradságos előzetes kisérletek után, melyeknek vezéreszméit a legelfogulatlanabbul maga ismerteti, végre HERTZ bizonyos kisérleti föltételekre akadt, melyeknél az elektromos állapotok periodikusan oly gyorsan változnak, hogy megfigyelhető hullámok keletkeznek. Mint minden, a mi geniális, ezen körülmények is rendkivül egyszerűek. Ennek daczára itt ezen kisérleti részletekre nem terjeszkedhetek ki. A HERTZ-féle, és kétségtelenül elektromos kisülések alkalmával keletkező hullámok, mint azt MAXWELL előre jelezte, qualitative semmiben sem különböznek a fényhullámoktól. De mekkora a quantitativ különbség!

Miként a hang magasságát, úgy a fény szinét a rezgésszám állapitja meg. A látható fényben a legszélső vörös 400 billió, a legszélső ibolyaszin 800 billió rezgésszámmal az extremákat adják. Már régen találtak hasonló ætherhullámokat, melyeknél a rezgésszám körülbelül 20-ad része volt a legszélső vörös rezgésszámának, illetőleg 3-szorosa a legszélső ibolyaszin rezgésszámának. Ezek a szemre nézve láthatatlanok; de az elsők, az u. n. ultravörös sugarak hőhatásaik, az utóbbiak, az u. n. ultraibolya sugarak chemiai és foszforeszkáló hatásaik folytán ismerhetők föl. A tényleges kisülésekkel HERTZ oly rezgéseket állitott elő, melyek másodperczenkint csak 1000 milliószor ismétlődtek és HERTZ követői ezen számnak csupán 100-szorosáig vitték.

Közvetlenül belátható, hogy az ilyen, a fényrezgésekhez képest aránylag lassu lefolyásu rezgések a szemre hatással nem lehetnek. HERTZ azokat mikroskopikus kicsinységű szikrácskákkal mutatta ki, melyek ezen rezgések folytán nagy távolságokban álló, alkalmas alaku vezetőkben is létesittetnek. Ily eszközökkel HERTZ a MAXWELL elméletét legkisebb részleteiben is igazolta és bár megkisérlették a távolbahatás elmélete alapján rezgéseket előállitani, mégis, Maxwell elméletének túlsúlya csakhamar senki előtt sem volt már kétséges, sőt, valamint az ingák a nyugalmi helyzeten túl a másik oldalra is kitérnek, végre az ultrák a régi klassikus physika elméleteinek összes nézeteit elvetették. De erről később! Egyelőre még ezen fényes fölfedezéseknél akarunk időzni.

A Hertz vizsgálatait megelőző időkben ismert ætherhullámok némely faja ezen, más faja más testekben megy át könnyebben. Igy pl. a timsónak vizoldata az ultravörös sugarak kivételével az összes látható fényt átbocsátja; ellenben a látható fény tekintetében teljesen átlátszatlan szénkéneges jodoldat azokat könnyen átbocsátja.

A Hertz-féle hullámok majdnem minden testen áthatolnak, a fémek és elektrolytek kivételével. Ha tehát Marconi az egyik helyen igen rövid Hertz-féle hullámokat létesít, és egy sok kilométernyire fekvő másik helyen egy a Hertz-féle hullámok szemének nevezett készülék alkalmas módositásával azokat Morse-féle jegyekké alakítja át, akkor ő pusztán optikai távírót létesített; csakhogy a másodperczenkint körülbelől 500 billió rezgést tevő hullámokat $^1/_{10}$ billió rezgésszámu hullámokkal helyettesítette. Ennek az az előnye, hogy azon hullámok ködön, sőt kőzeteken is képesek áthatolni.

Egy fémből álló hegyen, vagy higanycsöppecskékből álló ködön épen oly kevéssé hatolnának át, mint a látható fénysugarak a közönséges hegyen, a közönséges ködön.

Az ismeretes sugarak sokaságát még Röntgen-nek joggal ünnepelt fölfedezése, a röntgensugarak is szaporitották. Ezek minden testen áthatolnak, még fémeken is; az utóbbiakon, valamint fémtartalmú anyagokon, s így a calciumtartalmú csontokon is csak tetemes gyöngitéssel mennek keresztül. Az eddig ismert összes sugárfajokat jellemző tüneményeket, a polarisatió, interferentia és diffractió rajtuk mind eddig még nem voltak észlelhetők. Ha a polarisatióra egyáltalán nem volnának képesek, akkor, ha egyáltalán tényleg hullámok, csakis longitudinálisok lehetnek; de fenn kell tartani annak lehetőségét is, hogy interferálni is képtelenek, tehát egyáltalán nem is hullámok, a miért is óvatosságból csak röntgen*sugarakról* szólunk, nem pedig röntgen*hullámokról*. Ha egyszer oly testre akadnak, mely ezen sugarakat polarisálja, akkor ez a mellett bizonyítana, hogy qualitative egyenlők a fénysugarakkal; de e mellett sokkalta rövidebb rezgéstartamúaknak kellene lenniök, mint a legszélső ultraibolya sugaraké; vagy, mint néhány physikus hiszi, gyorsan egymásra következő lökésszerű hullámokból kellene állaniok.

A sugarak ily túlságos sokfélesége mellett majdnem hogy szemrehányással szeretnök a teremtőt illetni, mert szemeinket azoknak oly csekély körére tette érzékenyekké. Ez itt is, mint általában igazságtalanság lenne; mert az embernek mindenben a természet egészéből csak egy igen kis tartomány adatott közvetlen kinyilatkoztatással, de viszont elméje felruháztatott azzal a képességgel, hogy a birodalom többi részeit a saját megerőltetésével hódítsa meg.

Ha a röntgensugarak, mint azt felfedezőjük mindjárt kezdetben elhinni igen hajlandó volt, s a mi ellen még most sem szól egyetlenegy tény sem, tényleg fényæthernek longitudinális hullámaiból állanak, akkor ebben egy sajátságos, s a tudomány körében nem épen elszigetelten álló esettel volna dolgunk. A klassikus elméleti physikának a fényæther alkatáról meg volt a maga kész nézete. Igazságának megdönthetetlenségéhez, mint azt hitték, még csak egy hiányzott, t. i. a longitudinális ætherhullámok. Most, mikor már bebizonyult, hogy a fényæthernek egészen eltérő alkattal kell bírnia, mert hiszen elektromos és mágneses hatásokat is kell közvetítenie, most, mikor a fényætherről alkotott régi felfogás már letárgyalt dolog, eljutottunk post festum a longitudinális ætherhullámok fölfedezésével az oly nagyon óhajtott beigazolásához.

Hasonló sors érte az elektrodynamikának Weber-féle elméletét. Ez — mint már láttuk — azon alapszik, hogy az elektromos tömegek hatása függ azok relativ mozgásától, s épen akkor, a mikor a Weber-féle elmélet elégtelensége véglegesen bebizonyíttatott, bukkant Rowland a Helmholtz laboratoriumában direct kisérletek alapján arra, hogy mozgó elektromosságok másként hatnak, mint nyugalomban levők. Korábbi időkben valóban hajlandók lettek volna ezt a Weber-féle elmélet közvetlen bizonyitékának tekinteni. Ma azt tutjuk, hogy ez nem ú. n. experimentum crucis, sőt, hogy az a Maxwell-féle elméletnek épen olyan következménye. A Weber-féle elmélet egy módositásából továbbá következik, hogy nemcsak az áramot szállitó vezetők, hanem ezekben maguk az áramok is a mágnestől eltéríttetnek. Ezt a sokáig hiába keresett tüneményt is Hall amerikai physikus akkor fedezte föl, a mikor már a Weber-féle elmélet hivei megelőzőleg szenvedett sok és sokkal nagyobb vereségek miatt már régóta semmiféle diadalnak sem örülhettek.

Az ilyen jelenségek bizonyitják, hogy mily óvatosaknak kell lennünk, a mikor egy következmény beigazolásának az elmélet föltétlen helyessége mellett bizonyitó körülménynek akarjuk tekinteni. Maxwell nézete szerint oly képek, melyek sok esetben a természetre alkalmaztattak, automatikusan még más esetekben is födik egymást, a nélkül, hogy abból a teljes megegyezésre lehetne következtetni. Másrészt ezen jelenségek azt bizonyitják, hogy hamis elméletek is hasznosak lehetnek, hacsak új jellegű kisérletekre ösztönöznek.

Hertz, Röntgen, Rowland és Hall felemlitett fölfedezései bebizonyitották, hogy Faraday mégis hagyott valami fölfedezni valót az utókor számára. Ezekhez csatlakoznak a legközelebbi multnak még egyéb más fölfedezései, melyek közül csupán a Zemann-éra akarok utalni, mely a mágnességnek a kibocsátott fényre és ezzel párhuzamosan a fényabsorptióra való hatására vonatkozik. Mind ezen tünemények, melyek közül sokat már maga Faraday is keresett, az akkori eszközökkel nem voltak megfigyelhetők. Ha tehát a lángész gyakran a legcsekélyebb eszközökkel a legnagyobb eredményeket is érte el, úgy most azt látjuk, hogy viszont, az emberi elme sok eredményhez csak napjaink rendkívüli módon tökéletesitett megfigyelő eszközeivel és kisérletezési technikájával juthat el.

Az imént jellemzett, egészen új fajta tünemények legtöbbje most még csak első alapvonalaiban ösmeretes. Részleteik kikutatása, egymáshoz és minden más tüneményhez való viszonyuk, némi túlzással azt mondanám, hogy a mathematikai-physikai szövőszékbe való beillesztésük a jövő számára a tevékenységnek beláthatatlan mezejét tárja föl. A már kezdetben elért gazdag alkalmazások (Röntgen-fotografálás, sodrony nélkül való táviratozás, radiotherapia) sejtetni engedik, hogy a mindig csak gyakorlati alkalmazásaiban termékeny részletes kutatás milyen eredményekre fog majd vezetni. Ellenben az elmélet fölriasztatott nyugalmából, melybe a mindenek megismerésének hite ringatta, s még mai napig sem sikerült az új tüneményeket egy oly egységes tanná egyesíteni, mint a milyen a régi volt, sőt ma inkább minden ingadozik, forrásban leledzik.

*

Ezen zavart az említetteken kívül még egyéb körülmények találkozása is előmozdította. Itt első sorban bizonyos a mechanika alapjai ellen irányuló kétségek említendők, melyeket a legtisztábban Kirchhoff fejezett ki. A régi mechanikában minden aggodalom nélkül bevezettetett az erő és anyag dualistikus fölfogása. Az erőt egy az anyag mellett fönnálló különleges hatónak (agens) tekintették, mely minden mozgásnak oka; sőt néha-néha arról is vitatkoztak, vajjon az erő épen úgy létezik-e mint az anyag, avagy csak az utóbbinak egy tulajdonsága-e, vagy talán megfordítva, az anyag az erőnek valamely productuma-e?

Kirchhoff-nak eszeágában sem volt az, hogy ezen kérdésekre megfeleljen, sőt a kérdés fölvetésének módját czélszerűtlennek és semmitmondónak tartotta. Hogy azonban az ilyen metaphysikus megfontolások értékéről ne kelljen itélkeznünk, kijelentette, hogy mind ezen homályos fogalmakat mellőznünk kell, s a mechanika feladatát a testek mozgásának legegyszerűbb és minden kétértelműséget kizáró leírására kell szorítanunk, a nélkül, hogy metaphysikus okaival törődnénk. Ezért mechanikájában csupán anyagi pontokról és azon mathematikai kifejezésekről van szó, melyek ezek mozgásának törvényei alapján formulázhatók; az erő fogalma teljesen hiányzik. Ha Napoleon egykor a bécsi kapuczinusok sírboltjában így kiáltott föl: «Minden hiúság, csupán az erő nem», akkor Kirchhoff a természet kefelevonatának egyik oldaláról az erőt kihúzta, megszégyenítvén azt a német professort, a kiről Karl Moor beszéli, hogy gyöngeségének daczára kathedráján az erő lényegét merészelte feszegetni; de azért Kirchhoff azt nem semmisítette meg.

Később az «erő» szót újra bevezette, de nem mint metaphysikai fogalmat, hanem mint bizonyos, a mozgások leírásánál folytonosan szereplő algebrai kifejezések rövidebb megjelölésére szánt nevet. Igaz, hogy később, az emberre nézve oly könnyen érthető izomerőltetéssel való analogiája miatt e szónak gyakran fokozottabb jelentőséget akartak tulajdonítani; de a régi, homályos kérdések és fogalmak bizonyára a természettudományokba soha többé visszatérni nem fognak.

Ford. *Bozóky Endre.*

A REFRACTIÓRÓL.

A csillagászati kézikönyvek, pl. BRÜNNOW, Sphærische Astronomie és a refractióval foglalkozó szakmunkák, pl. BRUHNS, Die astronomische Strahlenbrechung (1861 Leipzig) és RADAU, Essai sur les réfractions astronomiques (1889 Paris) tanulmányozása azon meggyőződésre vezet, hogy észlelet útján nyert zenittávolok reductiójánál a SIMPSON-BRADLEY-féle formula semmit sem veszitett értékéből, kivált ha a benne előforduló állandók értéke minden észleleti sor feldolgozása alkalmával a kérdéses mennyiségekkel együtt meghatároztatik.

HELMERT (Höhere Geodæsie II.) mondja, hogy a refractióra vonatkozó újabb, a légköri állapotok alapos ismeretét nagy mértékben előmozdító finomabb vizsgálatok, a csillagászatra ez ideig nem voltak befolyással.

A következőkben a SIMPSON-BRADLEY-féle formulának egy levézetését közlöm, mely talán kielégítőbb lesz a HOLTZWART-féle ismeretes munkában (Elemente der sphærischen Astronomie, Wiesbaden) előforduló tárgyalásnál.

Képzeljük, hogy — a mint az a refractió tárgyalásánál szokásos — a légkör végtelen kicsiny dr vastagságú concentrikus rétegekből áll, a melyeken belül a levegő sűrűsége állandónak tekinthető. Az S-ből jövő fénysugár minden egyes réteg határán törést szenvedvén, útját egy görbe vonal NM — a fényvonal — ábrázolja, melynek MS' érintője adja azon irányt, a melyben az észlelő a csillagot látja. $SPZ = z$ a valódi zenittávol, mert a refractió csekély értéke (35') és az égi testek nagy távolsága miatt még a horizonton a Holdra nézve sem lehet észrevehető különbség SMZ és SPZ között.

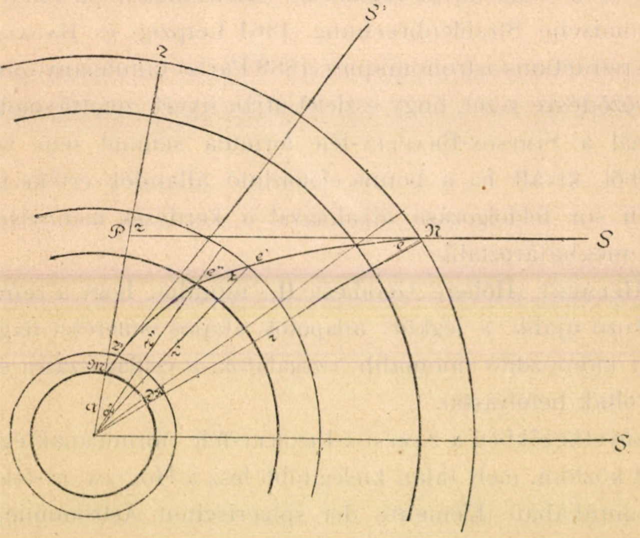
Ismeretes, hogy

$$\frac{\sin e'}{\sin t} = \frac{n''}{n'}$$

és az ábrából világos, hogy

$$\frac{\sin t}{\sin e''} = \frac{r''}{r'},$$

ha n' és n'' a két egymást követő légrétegben érvényes absolut törési együtthatók, r' és r'' a gömbi légrétegek sugarai.



Ezen két egyenletből következik:

$$r'n' \sin e' = r''n'' \sin \;'',$$

azaz a légkör bármely pontjában

$$rn \sin e = \text{const.} \tag{1}$$

dx értelme az ábrából világos lévén,

$$\operatorname{tg} e = \frac{rdx}{dr} \tag{a}$$

másrészt $z = x + e$, mert a légkör határán a törési szög a beeső szöggel egyenlőnek vehető; ebből

$$dz = dx + de. \qquad (\beta)$$

Az (1) alatti egyenletből logarithmusos differentiálás útján nyerjük:

$$\frac{dr}{r} + \frac{dn}{n} + \frac{de}{\operatorname{tg} e} = 0,$$

tehát tekintettel (β)-ra

$$\frac{dr}{r} + \frac{dn}{n} + \frac{dz - dx}{\operatorname{tg} e} = 0,$$

miből

$$dz = dx - \left(\frac{dr}{r} + \frac{dn}{n}\right) . \operatorname{tg} e$$

következik.

Ily módon a refractio számára nyertünk egy differentialegyenletet, a melyet integratióra alkalmasabbá teszünk, ha (α) segélyével dx-t elimináljuk és $\operatorname{tg} e$ helyébe $\frac{\sin e}{\sqrt{1 - \sin^2 e}}$-t irunk.

$$dz = -\frac{dn}{n} \cdot \frac{\sin e}{\sqrt{1 - \sin^2 e}} \cdot \qquad (\gamma)$$

A Földdel érintkező légrétegben $e = z'$, $n = n_0$, $r = A + dr$, ha A a Föld radiusa, tehát

$$rn \sin e = (A + dr)\, n_0 \sin z'$$

egyenletből, ha dr-t azaz a csekély MP magasságot A mellett elhanyagoljuk:

$$\sin e = \frac{n_0}{n} \cdot \frac{A}{r} \cdot \sin z'.$$

Legyen

$$\frac{A}{r} = \rho, \qquad \frac{n_0}{n} = \mu,$$

tehát

$$dn = -\frac{n_0 \,.\, d\mu}{\mu^2},$$

akkor (γ) átmegy a következő alakba:

$$dz = \frac{\rho \,.\, \sin z'}{\sqrt{1 - \mu^2 \rho^2 \sin^2 z'}} \cdot d\mu, \tag{2}$$

mely differentiálegyenlet integratiójának lehetősége azon relatió felállításától függ, mely μ és ρ között fennáll. Ismeretes azonban, hogy a különböző magasságú légrétegekben uralkodó légnyomások és hőmérsékletek iránt nem vagyunk annyira tájékozottak, hogy képesek lennénk μ-t a ρ függvényeként előállítani. Cassini D. a refractió kiszámításánál azon föltevésből indult ki, hogy a fénysugár állandó sűrűségű légkörön megy keresztül és ezen alapon oly táblát állított össze, a mely 45°-ú zenittávolokig a ma használatban lévő táblázatoktól legfeljebb 1″-czel tér el. Ma már tudjuk, hogy a refractió a levegő sűrűségével növekedik, emez pedig — állandó hőmérsékletet tételezve fel — a magasság növekedésével geometriai haladvány szerint kisebbedik, úgy hogy a szóban forgó integratiót

$$\rho = \frac{1}{\mu^{p+1}} \tag{3}$$

hypothesissel teszszük lehetővé, hol p egy ismeretlen állandót jelöl. Helyettesítve ρ értékét, nyerjük (2)-ből

$$dz = \frac{\sin z' d\mu}{\mu^{p+1} \sqrt{1 - (\mu^{-p} \sin z')^2}} \tag{4}$$

egyenletet, melynek integrálja a refractió értékét, azaz a valódi zenittávolnak fénytörés okozta változását adja. Ha az integratiót a légkör azon határáig terjesztjük ki, a mely már számításba vehető fénytörést okoz, a csillagászati, kisebb magasságig terjedő integratió mellett a földi refractiót nyerjük.

A refractió értéke $\frac{n_0}{n} = 1$, $\frac{n_0}{n} = \mu$ határok között:

$$R = \sin z' \int_1^{\mu} \frac{\mu^{-p-1}}{\sqrt{1 - (\mu^{-p} \sin z')^2}} d\mu = -\frac{1}{p} \arcsin(\mu^{-p} \sin z') + \frac{z'}{p}$$

miből először

$$\arcsin(\mu^{-p}\sin z') = z' - pR,$$

és azután

$$\sin(z'-pR) = \mu^{-p}\sin z'$$

következik. μ^{-p} eliminálható, ha R_{90}-t, a horizontalis refractiót vezetjük be; ha $z'=90°$, $\cos pR_{90}=\mu^{-p}$, úgy hogy

$$\sin(z'-pR) = \cos pR_{90} \,.\, \sin z'.$$

Ezen egyenlet további átalakítása czéljából mindkét oldalhoz először $\sin z'$-t adnak hozzá, továbbá mindkét oldalából $\sin z'$-t kivonva és a két egyenletet egymással elosztva, nyerjük a Sipmson-Bradley-féle formulát:

$$R = \alpha \,.\, \mathrm{tg}(z'-\beta R), \tag{5}$$

ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\mathrm{tg}\frac{p}{2}R = \frac{p}{2}R \,.\, \sin 1''; \quad \alpha = \frac{2}{p\sin 1''}\cdot\frac{1-\cos pR_{90}}{1+\cos pR_{00}}, \quad \beta = \frac{p}{2}.$$

Hogy a változó légnyomás és hőmérséklet is tekintetbe vétessék, jelöljük R' és R''-vel a b_0 és b barometerállásoknak megfelelő refractiókat. Állandó hőmérséklet mellett

$$R'' : R' = b : b_0.$$

Ha R'' és R' t_0, R pedig t hőmérsékletnek felel meg, akkor

$$R'' : R = \left(1 + \frac{t-t_0}{273}\right) : 1$$

ugyanazon b légnyomás mellett. R'' eliminatiója után

$$R = \frac{R'.b}{b_0\left(1 + \frac{t-t_0}{273}\right)}. \tag{6}$$

A «Nautisches Jahrbuch» (Berlin) a $t_0=10$ C° és $b_0=760$ mmnek megfelelő refractiót középrefractiónak nevezi; ha ezt R_0-val jelöljük, akkor a t és b-nek megfelel

$$R = R_0 \cdot \frac{273b}{760(263+t)},$$

mely képlet végre ily alakban írható

$$R = R_0BT = \alpha \operatorname{tg}(z' - \beta R_0)\, BT, \tag{7}$$

hol

$$B = \frac{b}{760}, \quad T = \frac{273}{263 + t} \tag{8}$$

a légnyomásnak és hőmérsékletnek megfelelő correctiók.

A refractió α és β állandói az észleletek egy sorozatához a «legkisebb négyzetek elvé»-nek alkalmazásával esetről-esetre meghatározhatók, és ekkor a B és T correctiókról természetesen nincsen szó. A szokásos középértékeket ú. m. $\alpha = 57{\cdot}8''$, $\beta = 2{\cdot}7$ alkalmazva, és

$$R_0' = 57{\cdot}8''.\operatorname{tg} z', \quad R_0 = 57{\cdot}8''.\operatorname{tg}(z' - 2{\cdot}7R_0'), \quad R = R_0BT$$

formulákat használva, a refractió számára 80°-ú zenittávolokig oly értékeket nyertem, a melyek a «Nautisches Jahrbuch» Bessel és Argelander formulái szerint kiszámított refractióitól alig 1″-czel térnek el.

Fross Károly.

AZ ELEKTROMOS KIÁRAMLÁS ÉS ANNAK HATÁSA A FOTOGRÁF-LEMEZRE.

A Kathód és Röntgen-sugarak felfedezése óta az elektro-mágneses térben történő sugárzások mind bővebb és bővebb vizsgálatokban részesülnek. Cook, angol fizikus a közönséges elektromos kiáramlásokat tette kutatásainak tárgyává és e közben igen meglepő eredményekre jutott.* Ismeretes, hogy a vezetők felületéről az elektromosság kisugárzik a dielektrikumba. Ezen áramlás különösen ott intensiv, hol a vezető csúcsban végződik. A vezetővel érintkező levegőrészecskék elektromossá lesznek és a sűrűség négyzetével arányos erővel ellöketnek. Így keletkezik a jól ismert elektromos szél jelensége, mely a gyertya lángját is kiolthatja. Cook ezen jelenségekre fordította figyelmét. Az elektromos áramlásokat többféle módon állította elő: használta a közönséges dörzsölve elektromozó gépet, továbbá az influentia gépet és végül a Ruhmkorffot. Ez utóbbi két gépnél az elektródokat olyan távolságnyira kell szét húzni, hogy szikra már ne üthessen át.

Ha a hegyes vezetőn a negativ elektromosság áramlik ki, akkor az elektród vége kékes szinben fénylik, ha azonban a positiv, akkor a csúcs végén kékes ibolyaszínű bojt jelenik meg, melynek hossza, erőssége s szélső sugarai által bezárt szöge a feszültségtől, az elektród s a levegő természetétől és még egyéb, számba sem vehető körülményektől függ.

Cook mindenekelőtt közönséges mérlegeléssel meghatározta

---

* Philosophical Magazine 1899 jan.

azon erő nagyságát, melynek hatása következtében a levegőrészecskék az elektródról visszapattanak. Ezen erő a kisérleti feltételek mellett és 43,000 volt esetében 0·24 gr-ot tett ki, ha a mérleg csészéjét közvetlenül az elektród alá helyezte. A mérleg a positiv elektromosság hatását 0·6 m., a negativét 0.48 m. távolságban még megérezte.

A leydeni palaczk vagy az elektroszkop a kiáramlások közelében a positiv elektromosságtól positiv, a negativ elektromosságtól negativ töltést kap. Elektroszkóp esetében a töltés annál nagyobb, minél nagyobb annak gyűjtő lapja. Az egyik elektroszkóp 43,000 volt feszültségtől még 4 m. távolságban is kapott töltést. A hatás teljesen független az elektroszkop helyzetétől és csak a távolságtól függ. Mindenesetre meglepő eredmény, mert azt vártuk volna, hogy csak az áramlások irányában lehet hatás. Ezzel szemben Cook kisérletileg meggyőződött, hogy elektroszkopja majdnem ugyanakkora töltést kapott, akár az elektróddal szembe, akár alája, mögéje vagy oldalvást állitotta. Ebből az következik, hogy az elektród végső pontjából minden irányban van áramlás. Ezen jelenség tehát a sugárzással erős analógiában áll.

Ha az elektródot dróthálóval vesszük körül, a hatás egészen elmarad, ha azonban a háló egyik oldalán nyilás van, a továbbterjedés ismét minden irányban történik. Az elektród vagy az elektroszkop közvetlen közelébe helyezett fém vagy falap a hatást csak kisebbiti, de meg nem semmisiti; nagyobb távolságban pedig semmi észrevehető különbséget sem okoz.

Ismeretes, hogy az elektromos kisülés ozont fejleszt; ugyanez történik a kiáramlásoknál. Van azonban egyébb chémiai hatás is pl. a natriumjodid-ből kiválik a jód. A negativ elektromosság ugyanazon időben 5—8-szor többet választ ki mint a positiv.

A kiáramlások az elektródokról nem szakitanak le apró fémrészecskéket. Cook az elektród végéhez igen közel savval megtöltött csészét tett és az áramlásokat hosszú időn át fejlesztette, de a savban a legkisebb változás sem volt észlelhető. Az elektródokat használat előtt és több havi használat után mikroszkoppal vizsgálta meg, de semmi változást sem birt észrevenni.

Az elektromos kiáramlások legmeglepőbb tulajdonsága az, hogy fotográf-lemezre hatást gyakorolnak. Az influentia-gépből eredő áramlások hatása nagyobb mint az induktoriumból eredőké; ott is a positiv elektromosság a hatásosabb. Az érzékeny lemez az áramlásokat nagyobb távolságban is megérzi. Az elektród s a lemez közé helyezett szilárd test árnyékot vet, melynek széle csak akkor elég éles, ha a tárgy közvetlenül a papirosba burkolt lemezen nyugszik.

Az áramlások siklapról a visszaverődés törvényei szerint verődnek vissza, s ezután is megtartják fotografáló hatásukat. Üveg és fémlap egyaránt ver vissza. Ha az áramlások tisztán csak megelektromozott levegőrészecskékből állanának, akkor a visszaverő lapnak adnák át töltésüket, a mely ezt levezetné a földbe. Ily körülmények között a visszaverő lap sem mutathat töltést s visszaverődés sem léphet fel. Cook az ellenkezőről győződött meg.

A legérdekesebb kérdés már most az, van-e ezen sugaraknak oly áthatoló erejük, mint a Röntgen-féléknek? E kérdésre igen egyszerű kisérlettel lehetett feleletet adni. Az érzékeny lemezt barna, fény át nem bocsátó papirosba csavarta s kis tárgyakat helyezett reá; mintegy 30 percznyi expositio után a képet előhivta s igen szép éles képet kapott. A vulkanizált kaucsuk azonban épúgy, mint a Röntgen-sugarakat, emez áramlásokat sem bocsátja át.

Kisérlet közben a lemezre véletlenségből közönséges irópapir esett, előhivás után ennek viznyomata szépen és élesen előtünt. Most már szántszándékkal rajzot, irást, nyomtatást helyezett rá, hosszabb ideig tartó expositio után a papiroson lévő minden jel élesen feltünt. Ezen meglepő eredmények után egy telenyomtatott kártyalapot boritékba tett s így helyezte az érzékeny lemezre. Az áramlások áthatoltak a boritékon s a nyomtatást a lemezre le másolták. A nyert kép igen éles volt, a papiros rostjai is meglátszottak, de a nyomtatást jól lehetett olvasni. Ime, mód arra, hogyan lehet boritékba zárt levelet elolvasni!

Eme jelenségek és a közönséges fénysugarak közötti hasonlóság igen szembeszökő. A mely testek emezekre nézve átlátszatlanok amazokra is azok, így pl.: a korom, nyomdafesték. Semmiképen sem lehet azonban azt állítani, hogy a fotografáló hatás a kiáramlásokkal megjelenő, gyenge, kékes fényből származik. Hiszen ezen fény ereje oly csekély, hogy a tárgyakat absolut sötét helyen nem tudja megvilágítani.

Csak további kisérletek után lehet majd eldönteni, mi ezen jelenségek igaz természete, s a fotográf-lemezre való hatás hogyan jön létre.

(A Philosophical Magazine 1899 nyomán).

Mikola Sándor.

MEGOLDOTT FELADATOK.

30. *Adott derékszögű parallepipedonba adott nagyságú szabályos oktaéder irandó be, azaz úgy helyezendő el, hogy mindegyik szögpontja a parallelepipedon egy-egy síkjában feküdjék. Megvizsgálandó, hogy e problemának mikor van megoldása és hogy a megoldások száma tekintetében minő eshetőségek foroghatnak fenn.* (Kürschák.)

*

Első megoldás dr. Szabó Péter áll. felsőbb leányiskolai tanár úrtól Budapesten.

1. Ha adott parallelepipedonba szabályos oktaédert írunk, előbb meg kell állapítanunk, hogy az oktaéder minden egyes csúcsa a parallelepipedon melyik oldallapjára essék. Külömböző megállapodások a kitűzött feladatnak más-más megoldását kivánják. A következőkben az oktaéder két-két átellenes csúcsát a parallelepipedonnak két párhuzamos lapjára helyezem, mert ekkor és csak ekkor esik össze a két poliéder középpontja.

Még így is két lényegesen külömböző esetet kell tárgyalnom. Ugyanis bocsássuk a parallelepipedon három egymásra merőleges — de egyébiránt tetszés szerint választott — lapjára a két poliéder közös O középpontjából az $n_1 n_2 n_3$ merőlegeseket. Továbbá kössük össze O-t a parallelepipedon kiválasztott három lapjára eső oktaéder-csúcsokkal. Az oktaédernek így nyert fél átlói legyenek rendre $e_1 e_2 e_3$. A megkülömböztetendő két eset egyikében az $e_1 e_2 e_3$ és $n_1 n_2 n_3$ triéderek egyenlő értelműek, a másikban ellenkező értelműek.

Továbbá a *beirás* is kétféleképen értelmezhető. Az elemibb felfogás szerint az oktaéder egészen a parallelepipedon *belsejébe* essék, tehát a beírt poliéder csúcsai nem helyezhetők a körülírt poliéder lapjainak *folytatására.* Magasabb álásponton ellenben e megszorítást elengedjük. Részemről ez utóbbi felfogást fogom követni, tehát nem bocsátkozom azon egyenlőtlenségek vizsgálatába, melyeket a szűkebb értelmezés a, b, c és R-re ró.

2. Az analitikus tárgyalásra válaszszunk oly derékszögű rendszert, a

melynek kezdőpontja a parallelepipedon középpontja. A tengelyeket irányítsuk úgy, hogy az oldallapok egyenletei

$$\begin{array}{lll} x=a & y=b & z=c \\ x=-a & y=-b & z=-c \end{array}$$

legyenek ; $2a$, $2b$, $2c$ az élek fél hosszúságai.

A jelölést úgy választjuk, hogy

$$a \geqq b \geqq c.$$

Az *oktaéder* nagyságát a körülírt gömb R sugara jellemzi. Hogy e poliéder helyzetét meghatározzuk, pusztán az

$$x=a \qquad y=b \qquad z=c$$

síkokba eső csúcsaihoz vont $e_1 e_2 e_3$ fél átlóknak

$$\alpha_i \quad \beta_i \quad \gamma_i$$
$$(i=1, 2, 3)$$

iránycosinusait kell kiszámítanunk.

E kilencz ismeretlen meghatározására két rendbeli feltételünk van. Tudjuk, hogy

$$\alpha_1 = \frac{a}{R}, \quad \beta_2 = \frac{b}{R}, \quad \gamma_3 = \frac{c}{R}; \tag{1}$$

továbbá megilletik őket azok az összefüggések, a melyek minden orthogonális rendszerre helyesek :

$$\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2=1 \qquad \alpha_i\alpha_k+\beta_i\beta_k+\gamma_i\gamma_k=0. \tag{2}$$
$$(i \gtrless k, \qquad i, k=1, 2, 3)$$

Feladatunk első sorban az (1) és (2) alatti egyenletek megoldását követeli. Azután megvizsgálandó, hogy e megoldások mikor valósak.

A tárgyalásnál az (1) alatt mondottak szerint két esetet kell megkülömböztetnünk. Az első esetben az

$$x=a \qquad y=b \qquad z=c$$

síkokra oly oktaéder-csúcsokat helyezünk, hogy az $e_1 e_2 e_3$ triéder egyenlő értelmű azzal, melyet a koordináta-tengelyek határoznak meg ; vagyis ekkor

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

értéke +1. A második esetben az említett triéderek ellenkező értelműek, tehát $\Delta = -1$. A két esetet mint két külön feladatot tárgyalom.

3. Tárgyaljuk először

$$\Delta = 1$$

esetét.

Ekkor a (2) alatti egyenletek közül azok, melyek e_3 iránycosinusait tartalmazzák, a következőkkel pótolhatók:

$$\alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, \quad \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\gamma_2. \tag{3}$$

Tehát ekkor feladatunk követeléseit az (1) és (3) alatti egyenletek és

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

fejezi ki.

Az (1) alatti egyenletek meghatározzák α_1, β_2, γ_3-t. Ha ezek értékét (3) és (4) alatt behelyettesítjük, a többi hat ismeretlen meghatározására a következő egyenletrendszert nyerjük:

$$\begin{aligned} a^2 + R^2\beta_1^2 + R^2\gamma_1^2 &= R^2 \\ R^2\alpha_1^2 + b^2 + R^2\gamma_2^2 &= R^2 \\ a\alpha_2 + b\beta_1 + R\gamma_1\gamma_2 &= 0 \\ R\alpha_3 &= R\beta_1\gamma_2 - b\gamma_1 \\ R\beta_3 &= R\gamma_1\alpha_2 - a\gamma_2 \\ Rc &= ab - R^2\beta_1\alpha_2. \end{aligned} \tag{5}$$

4. Határozzuk meg először β_1-et.

Az (5) alatti első három egyenletből:

$$\begin{aligned} R^2(\beta_1^2 - 1) + a^2 &= -R^2\gamma_1^2 \\ R^2(\alpha_2^2 - 1) + b^2 &= -R^2\gamma_2^2 \\ a\alpha_2 + b\beta_1 &= -R\gamma_1\gamma_2. \end{aligned}$$

Innen

$$\left(R^2(\beta_1^2 - 1) + a^2\right)\left(R^2(\alpha_2^2 - 1) + b^2\right) - R^2(a\alpha_2 + b\beta_1)^2 = 0,$$

vagy kifejtve és R hatványai szerint rendezve:

$$R^4(\beta_1^2 - 1)(\alpha_2^2 - 1) - R^2(a^2 + 2ab\alpha_2\beta_1 + b^2) + a^2b^2 = 0.$$

Ugyanezt még így is írhatjuk:

$$R^4(1 - \beta_1^2 - \alpha_2^2) - R^2(a^2 + b^2) + (ab - R^2\beta_1\alpha_2)^2 = 0.$$

Itt az utolsó tag az (5) alatti hatodik egyenlet értelmében Rc négyzetével egyenlő. Ezt tekintetbe vévén, β_1 és α_2 közt a következő kapcsolatot találjuk:

$$R^2(1-\beta_1^2-\alpha_2^2)-a^2-b^2+c^2=0,$$

vagy másképp rendezve

$$R^2\beta_1^2-(R^2-a^2-b^2+c^2)+R^2\alpha_2^2=0. \tag{6}$$

Ha innen α_2-t az (5) alatti utolsó egyenlet segítségével elimináljuk, úgy β_1 számára e negyedfokú egyenletet nyerjük:

$$R^4\beta_1^4-(R^2-a^2-b^2+c^2)\,R^2\beta_1^2+(Rc-ab)^2=0. \tag{7}$$

Belőle:

$$R^2\beta_1^2=\tfrac{1}{2}\left(R^2-a^2-b^2+c^2+\sqrt{(R^2-a^2-b^2+c^2)^2-4(Rc-ab)^2}\right). \tag{8}$$

Egyszerű átalakítások után:

$$\begin{aligned}R^2\beta_1^2&=\tfrac{1}{2}\left(R^2-a^2-b^2+c^2+\sqrt{(R-c)^2-(a-b)^2}\sqrt{(R+c)^2-(a+b)^2}\right)\\&=\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(R-c)^2-(a-b)^2}+\sqrt{(R+c)^2-(a+b)^2}\right)^2\\&=\tfrac{1}{4}(\sqrt{A}\sqrt{B}+\sqrt{C}\sqrt{D})^2,\end{aligned}$$

hol

$$\begin{aligned}A&=R+a-b-c\\B&=R-a+b-c\\C&=R-a-b+c\\D&=R+a+b+c.\end{aligned} \tag{9}$$

Tehát

$$R\beta_1=\tfrac{1}{2}(\sqrt{A}\sqrt{B}+\sqrt{C}\sqrt{D}). \tag{10}$$

E képlet jobb oldalán mindegyik tag két — egymástól csak előjelben külömböző — értéket vehet fel. Az előjeleket minden lehető módon választván, megkapjuk a (7) alatti egyenletnek négy gyökét.

5. Az (5) alatti első egyenletből

$$R^2\gamma_1^2=R^2-a^2-b^2\beta_1^2,$$

és ha β_1^2 helyébe annak értékét behelyettesítjük, úgy

$$\begin{aligned}R^4\gamma_1^2&=\tfrac{1}{2}\left(R^2-a^2+b^2-c^2-\sqrt{(R^2-a^2-b^2+c^2)^2-4(Rc-ab)^2}\right)\\&=\tfrac{1}{4}(\sqrt{A}\sqrt{C}-\sqrt{B}\sqrt{D})^2.\end{aligned}$$

Tehát β_1 minden értékének két γ_1 felel meg. Az egyiket

$$R\gamma_1=\tfrac{1}{2}(\sqrt{A}\sqrt{C}-\sqrt{B}\sqrt{D}) \tag{11}$$

képlet adja meg, ha a négyzetgyököknek ugyanazon értékeket tulajdonítjuk, mint β_1 képletében. A γ_1 másik értékét ugyanez a kifejezés adja meg, csakhogy előbb β_1 egyik tagjában a két tényező előjelét ellenkezőre kell változtatnunk.

E szerint β_1 és γ_1 általában nyolcz értékpárt vehet fel. Ezeket a (11) és (12) alatti képletek segítségével úgy kapjuk, hogy

$$\sqrt{A} \quad \sqrt{B} \quad \sqrt{C} \quad \sqrt{D}$$

közül az egyiknek, pl. $\sqrt{D}$-nek, mindig ugyanazt az előjelet tulajdonítjuk, ellenben a többi háromnak előjelét minden lehető módon választjuk. Hogy az egyik négyzetgyöknek mindig ugyanazt az előjelet tulajdonítjuk, az onnan van, mert valahányszor mind a négy négyzetgyök előjelét ellenkezőre változtatjuk, β_1 és γ_1 változatlan marad.

6. Miután e_1 iránycosinusait kiszámítottuk, a többi ismeretlent elsőfokú egyenletekből nyerjük.

Az (5) alatti utolsó egyenletet α_2 szerint megoldván és β_1 helyébe annak ismeretes értékét helyettesítvén:

$$\begin{aligned}R\alpha_2 &= \frac{ab-Rc}{R\beta_1} = 2\,\frac{ab-Rc}{\sqrt{A}\sqrt{B}+\sqrt{C}\sqrt{D}} = \\ &= 2\,\frac{ab-Rc}{AB-CD}(\sqrt{A}\sqrt{B}-\sqrt{C}\sqrt{D}).\end{aligned}$$

Az utolsó kifejezés nevezője:

$$\begin{aligned}AB-CD &= (R-c)^2-(a-b)^2-(R+c)^2+(a+b)^2= \\ &= 4(ab-Rc).\end{aligned}$$

Ennélfogva

$$R\alpha_2=\tfrac{1}{2}(\sqrt{A}\sqrt{B}-\sqrt{C}\sqrt{D}). \tag{12}$$

Továbbá az (5) alatti harmadik egyenletből:

$$\begin{aligned}R\gamma_2 &= -\frac{a\alpha_2+a\beta_1}{\gamma_1} = \frac{(a-b)\sqrt{C}\sqrt{D}-(a+b)\sqrt{A}\sqrt{B}}{\sqrt{A}\sqrt{C}-\sqrt{B}\sqrt{D}} = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(A-B)\sqrt{C}\sqrt{D}+(C-D)\sqrt{A}\sqrt{B}}{\sqrt{A}\sqrt{C}-\sqrt{B}\sqrt{D}}\end{aligned}$$

és az osztás után

$$R\gamma_2=\tfrac{1}{2}(\sqrt{B}\sqrt{C}+\sqrt{A}\sqrt{D}). \tag{13}$$

A β_1 és γ_2-re talált képletekből:

$$\begin{aligned}R^2\beta_1\gamma_2 &= \tfrac{1}{4}((B+D)\sqrt{A}\sqrt{C}+(A+C)\sqrt{B}\sqrt{D}) = \\ &= \tfrac{1}{2}((R+b)\sqrt{A}\sqrt{C}+(R-b)\sqrt{B}\sqrt{D})\end{aligned}$$

és

$$R\beta_1\gamma_2=\tfrac{1}{2}(\sqrt{A}\sqrt{C}+\sqrt{B}\sqrt{D})+b\gamma_1.$$

Tehát

$$R\alpha_3=R\beta_1\gamma_2-b\gamma_1=\tfrac{1}{2}(\sqrt{A}\sqrt{C}+\sqrt{B}\sqrt{D}). \tag{14}$$

Hasonlóképen:

$$R\beta_3=\tfrac{1}{2}(\sqrt{B}\sqrt{C}-\sqrt{A}\sqrt{D}). \qquad (15)$$

7. Számításainkat összefoglalva:

$$\begin{aligned}
R\alpha_1&=a\\
R\alpha_2&=\tfrac{1}{2}(\sqrt{A}\sqrt{B}-\sqrt{C}\sqrt{D})\\
R\alpha_3&=\tfrac{1}{2}(\sqrt{A}\sqrt{C}+\sqrt{B}\sqrt{D})\\
R\beta_1&=\tfrac{1}{2}(\sqrt{A}\sqrt{B}+\sqrt{C}\sqrt{D})\\
R\beta_2&=b \qquad\qquad\qquad\qquad (16)\\
R\beta_3&=\tfrac{1}{2}(\sqrt{B}\sqrt{C}-\sqrt{A}\sqrt{D})\\
R\gamma_1&=\tfrac{1}{2}(\sqrt{A}\sqrt{C}-\sqrt{B}\sqrt{D})\\
R\gamma_2&=\tfrac{1}{2}(\sqrt{B}\sqrt{C}+\sqrt{A}\sqrt{D})\\
R\gamma_3&=c.
\end{aligned}$$

E képletek általában nyolcz értékrendszert adnak, melyeket úgy nyerünk, hogy a négyzetgyökök előjeleit minden lehető módon választjuk, csak az egyik gyöknek — pl. $\sqrt{D}$-nek — tulajdonítjuk állandóan ugyanazt az előjelet.

A talált megoldások akkor és csak akkor valósak, ha A, B, C és D egyenlő előjelűek. Minthogy pedig D mindig pozitiv, azért A, B és C legkisebbikének, C-nek, sem szabad negátivnak lennie. Szóval

$$C=R-a-b+c\geqq 0 \qquad (17)$$

fejezi ki szükséges és elégséges feltételét annak, hogy a (16) alatti kifejezések valósak legyenek.

Ha $C>0$, akkor feladatunknak *nyolcz* külömböző megoldása van. Ezek két osztályba sorozhatók. Az első osztályba az a négy oktaéder tartozik, melyekre nézve

$$\sqrt{A},\ \sqrt{B},\ \sqrt{C},\ \sqrt{D}$$

vagy mind egyenlő előjelű, vagy pedig kettő pozitiv és kettő negátiv. A második osztályba tartozó négy oktaéderre nézve az említett négyzetgyökök közül egy pozitiv és három negátiv vagy fordítva.

Az első esetben

$$\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}\sqrt{D}=(ABCD)^{\frac{1}{2}},$$

a másodikban

$$\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}\sqrt{D}=-(ABCD)^{\frac{1}{2}},$$

hol a feledik hatvány a pozitiv négyzetgyököt jelenti.

Könnyű meggyőződni arról, hogy az ugyanegy osztályba tartozó oktaéderek egymás tükörképei egy-egy koordinátasíkra nézve.

A két osztály azonos egymással, ha $C=0$. E kivételes esetben a következő aleseteket kell megkülömböztetnünk. Ha $C=0$, de $B>0$, vagyis $b>c$, akkor *négy* megoldás van. Ha $C=0$ és $a>b=c$, akkor *két* megoldás van. Végre $a=b=c=R$ esetében csak *egy* megoldás van.

8. Térjünk most át második feladatunkra, vagyis annak az esetnek tárgyalására, midőn az $e_1e_2e_3$ és $n_1n_2n_3$ triéderek ellenkező értelműek. Ekkor

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 & -\gamma_1 \\ -\alpha_2 & -\beta_2 & -\gamma_2 \\ -\alpha_3 & -\beta_3 & -\gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Feladatunkat tehát úgy oldhatjuk meg, hogy (16) alatt úgy az iránycosinusoknak, valamint a, b és c-nek előjelét ellenkezőre változtatjuk. Leszen:

$$\begin{aligned}
R\alpha_1 &= a \\
R\alpha_2 &= -\tfrac{1}{2}(\sqrt{A'}\sqrt{B'}-\sqrt{C'}\sqrt{D'}) \\
R\alpha_3 &= -\tfrac{1}{2}(\sqrt{A'}\sqrt{C'}+\sqrt{B'}\sqrt{D'}) \\
R\beta_1 &= -\tfrac{1}{2}(\sqrt{A'}\sqrt{B'}+\sqrt{C'}\sqrt{D'}) \\
R\beta_1 &= b \\
R\beta_3 &= -\tfrac{1}{2}(\sqrt{B'}\sqrt{C'}-\sqrt{A'}\sqrt{D'}) \\
R\gamma_1 &= -\tfrac{1}{2}(\sqrt{A'}\sqrt{C'}-\sqrt{B'}\sqrt{D'}) \\
R\gamma_2 &= -\tfrac{1}{2}(\sqrt{B'}\sqrt{C'}+\sqrt{A'}\sqrt{D'}) \\
R\gamma_3 &= c,
\end{aligned}$$

hol

$$\begin{aligned}
A' &= R-a+b+c \\
B' &= R+a-b+c \\
C' &= R+a+b-c \\
D' &= R-a-b-c.
\end{aligned} \qquad (19)$$

E képletek általában nyolcz értékrendszert adnak, melyeket úgy nyerünk, hogy a négyzetgyökök előjeleit minden lehető módon választjuk, csak az egyik gyöknek — pl. $\sqrt{D'}$-nek — tulajdonítjuk állandóan ugyanazt az előjelet.

A talált megoldások akkor és csak akkor valósak, ha A', B', C' és D' egyenlő előjelüek.

Minthogy pedig

$$A'+B'+C'+D'=4R$$

pozitiv, e négy kifejezés közül még a legkisebbnek, D'-nek, sem szabad negátivnak lennie. Szóval

$$D'=R-a-b-c\geq 0 \qquad (20)$$

fejezi ki szükséges és elégséges feltételét annak, hogy a (24) alatti kifejezések valósak legyenek.

Ha $D' > 0$, akkor mind a *nyolcz* megoldás egymástól különböző. Ha azonban $D' = 0$, akkor a megoldások száma négyre redukálódik.

Érdekes, hogy a most talált oktaéderek közül egy sem eshetik egészen a parallelepipedon belsejébe, mert az

$$R \geqq a + b + c > (a^2 + b^2 + c)^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

egyenlőtlenség értelmében az oktaéder csúcsai távolabb vannak O-tól, mint a parallelepipedonnak csúcsai.

9. Mind a (16) mind pedig a (18) alatti képletek a négy alapműveleten kívül csak négyzetgyökvonásokat tartalmaznak. A beírt oktaéderek tehát mind a két esetben az elemi geometria segédeszközeivel megszerkeszthetők.

10. Végül említésre méltónak tartom, hogy $R = 1$ esetében problémánk lényegében nem egyéb, mint az orthogonális helyettesítés együtthatóinak Monge-tól* eredő parameteres előállítása, melylyel Hunyady** is foglalkozott.

---

* Mémoires de l'academie des sciences de Paris, anné 1784, p. 154.

** Az orthogonális substitutió együtthatóinak parameteres értékei. (Értek. a math. tud. köréből, XIV. köt. 1889.)

Math. és Phys. Társ.

Kimutatás

az 1900 decz. 16-tól decz. 31-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek :

1898. évre : Söpkéz Sándor ... ... 10 kor.

1899. évre : Cholnoky Jenő ... ... 10 kor.

1900. évre : Berecz Antal 10 k, Demetzky Mihály dr. 10 k, Juckel Gyula dr. 10 k, Kleiszner Rezső 10 k, Klupathy Jenő dr. 10 k, Scholtz Ágost dr. 10 k, Süss Nándor 10 k, Székely László 10 k, Szirtes Ignácz 5 k, Vater József 10 k, Zettner Ede 10 k. Összesen ... ... 100 kor.

1901. évre : Bláthy Ottó 10 k, Fábry Emil dr. 10 k, Kőszeghy Winkler Antal 10 k, Magdics Gáspár 6 k, Pethő Menyhért 6 k, Riegl Sándor 6 k. Összesen ... ... 48 kor.

1902. évre : Magdics Gáspár ... ... 6 kor.

Előfizetési díjat fizettek :

1900. évre : a kolozsvári kegy. r. Kalazantinum ... ... 10 kor.

1901. évre : a deési főgymn., a jászói prem. rend könyvtára, a Székely Mikó kollégium. Összesen ... ... 30 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból 20 kor. 1900 jan 1-től ... ... 1428 kor.
Folyó, 1901. és 1902. évi tags. díjakból
154 kor. 1900 jan. 1-től ... ... 2020 kor.
Előfizetési díjakból 40 kor. 1900 jan. 1-től ... ... 783 kor.

Fölkérem Tisztelt Tagtársainkat, kik tagdíjaikat postautalványon küldik be, sziveskedjenek azt a következőleg czimezni :

«A Mathematikai és Physikai Társulatnak 5997 sz. cheque számlájára»

Budapest, 1901 január 1-én

Feichtinger Győző
pénztárnok.

NÉHÁNY TÉNYRŐL A TIZENKILENCZEDIK SZÁZÉV MATHEMATIKAI KUTATÁSÁBAN.*

Nagytekintélyű Gyülekezet! Nagyrabecsült Társaim!

Egyetemünk e mai napon felséges alapitójának, III. Frigyes Vilmos porosz királynak emlékét ünnepli. Ez az évenként ismétlődő ünnep nekünk, kiknek feladatunk az egyetemen a tudomány művelése, első sorban felette örvendetes alkalmat nyújt arra, hogy az alapitó máneseinek mindig újból és újból áldozzunk hódolatunkkal és kegyeletteljes hálánk kifejezésével azoknak a tudományos termőhelyeknek a teremtéséért, melyekről mindenki elismeri, hogy nagy a részük a porosz állam újjászületésében, valamint abban, hogy mostani nagyságára felemelkedve, az öszszes Németország körül való missióját teljesíthette.

De ez ünnep mindig áldásteljes visszahatást fog gyakorolni szellemi életünkre is. Ha mélyen beletekintünk azon kor történetébe, melyben egyetemünk alapitása végbement, akkor nemcsak csodálattal telünk el ama férfiak iránt, kik III. Frigyes Vilmos királylyal élükön szorongatott helyzetben az állam felébredését bátran polgárai ideális lelkületének ápolásában, a tudomány előbbrevitelében keresték; hanem az ideális törekvésnek az öszszeségre háramló következményeiből azt a tanuságot vonjuk, hogy az emberiség jólétének valóságos oszlopai az ideálok; megerősödünk a tudományért való tántoríthatatlan törekvésünkben,

---

* E beszédet, melyet FUCHS IMMANUEL LAZARUS a berlini egyetem alapitójának, III. Frigyes Vilmos porosz királynak emlékünnepén 1900 augusztus 8-án, mint akkori rektor tartott, a kiváló berlini mathematikus hálára lekötelező beleegyezésével közöljük.

és e törekvés mindennemű akadálya ellen való küzdelmünkben. Ez is lesz mindenkor mindegyikünk számára az a nap, a melyen kiki a neki hozzáférhető téren indittatva fogja magát érezni arra, hogy a tudomány haladására visszatekintve, azokat a feladatokat teljesen megismerje, melyeket elődeink munkái számunkra előkészitettek.

Ha én ma ilyen a tizenkilenczedik százévre szoritkozó feladatra vállalkozom abban a tudományban, melynek törekvésemet szentelém, vakmerőség volna még e helyen való kivihetőség esetén is, ha a mathematikai tudomány egész birodalmát akarnám felölelni. Ez a tudomány a XIX-ik százév folyamán olyan óriási kiterjedést nyert, és annyi különböző disciplinára ágazott szét, hogy az egyesnek már lehetetlen tudományunk különböző részeit egyenletesen mélyre ható értelemmel átkutatni.

De még ha egyes ágakat akarnék is kimeritő ismertetés tárgyává tenni, egy ilyen ismertetés nem volna mai előadásom keretébe illeszthető.

Azért legyen szabad itten két, ismerettani tekintetben fontos tényről megemlékeznem, melyek a XIX. százév mathematikusainak munkáira rányomták sajátszerű bélyegüket.

Az első tény az addig imaginärnek nevezett mennyiségek reálizálása és feltétlen alkalmazása. Ezekkel a mennyiségekkel már régóta találkoztak a mathematikusok, ha arról volt szó, hogy bizonyos egyenleteket megoldjanak. De fellépésüket csak oda magyarázták, hogy ez egyenletekben kitűzött követelmények nem teljesithetők. Hogy azonban az «imaginär mennyiség» elnevezés helytelen, azt példakép már az a körülmény is mutatja, hogy abban az időben, a midőn a törteket még nem vették fel a számok körébe, bizonyos egyenletek gyökei gyanánt fellépő megoldásokat ép úgy kellett volna imaginäreknek nevezni. Azért már a XVIII. százévben sem hiányoztak oly kisérletek, a melyek az úgynevezett imaginär mennyiségeknek reális jelentést törekedtek tulajdonitani. De Gaussnak sikerült csak ezen mennyiségeknek a mathematikában ugyanazt a polgárjogot megszerezni, a melyet addig csupán az úgynevezett valós számok élveztek. A különbség a kétféle mennyiség között, miként Gauss kiemeli, csak abban áll, hogy míg a valós mennyiségek csakis egy egyenes pontjainak jellemzik a helyét, addig az úgynevezett imaginär mennyiségek az egész sík pontjainak helyét képesek meghatározni. A valós mennyiségekről az úgynevezett imaginärekre való átlépés nem tűnt fel merészebbnek, mint az átlépés egész számokról törtekre, raczionális számokról irraczionálisokra stb. Miután maga a név «imaginär mennyiségek» sokat járult hozzá a fogalmak összezavarásához, e mennyiségek számára általánosan elfogadtatott a *komplex* mennyiségek elnevezése.

Habár Gauss irataiban számos bizonyítékát látjuk annak, hogy a mathematika elveire nézve mély bölcseleti kutatásokba bocsátkozott — így pl. a komplex mennyiségek igazolása alkalmával nem állotta meg, hogy állást ne foglaljon Kantnak, felfogását igazoló, ama bizonyítása ellenében, hogy a tér a mi külső szemléletünknek csak formája — mégis mint valódi mathematikus és természettudós a komplex mennyiségek jogaiért csak azon tényleges észrevétel után lépett fel, hogy e mennyiségek ép oly nélkülözhetetlenek, mint az úgynevezett valósak, és hogy az arithmetika bizonyos törvényei csak az ő alkalmazásukkal öltenek általános jelleget. Jellemző, hogy Gauss épen olyan téren vitte a komplex mennyiséget győzelemre, mely, ha szabad ugy mondanom, a legeslegreálisabb a mathematikában, tudniillik a számelmélet terén. A quadratikus maradékokról szóló szép recziprocitási törvények nem érvényesek többé a biquadratikus maradékokra, a meddig egyoldalúan csak valós számot engedünk meg; de miként Gauss felfedezé, egész kiterjedésükben állanak, mihelyt a komplex egész számokat is bevonjuk az egész számok körébe.

Helyén való itt megemlékeznem arról a haladásról, mely a számelmélet terén a közelmultban Gauss azon eljárásának a mintája szerint történt, melyet a biquadratikus maradékok elméletében követett. A komplex egész számok az egység negyedik gyökének egész egészszámú függvényei. Míg eme számok tartománya egyenjogú a valós egész számok tartományával annyiban, a mennyiben úgy ott, mint itt a számok maguk és a törzsszorzóik ugyanabból a tartományból valók, addig egy tetszőleges egységgyöknek analogia szerint alakított egész egészszámú függvényei már azt az eltérést mutaták, hogy ezen általános számtartomány elemeinek a törzsszorzói nem találhatók meg mindég ugyanabban a számtartományban. E fogyatkozás KUMMERt, a ki hosszú éveken át egyetemünk disze volt, arra a zseniális gondolatra vezette, hogy az imént jellemezett számtartományhoz az úgynevezett ideális számokat csatolja; az így kibővített számtartomány ismét visszanyeri azt a tulajdonságát, hogy a számok maguk és törzsszámaik egyugyanazon számtartományban találhatók fel. A komplex számokról az ideálisokra való ezen átlépés már mostan benső lényegére nézve egészen más ugyan, mint a valós számokról a komplexekre való átmenetel. Míg ugyanis egyrészt a komplex számok ugyanazokat a számolási műveleteket engedik meg mint a valós számok, addig másrészt — miként már GAUSS kiemelé — a komplex számokkal egyáltalában be is van fejezve az a számtartomány, mely e tulajdonságnak örvend. Ha mégis élek azzal a kifejezéssel, hogy az ideális számok GAUSS eljárása szerint alakíttattak, igazolhatom ezt ama feladatokra való utalással, melyeket az ideális számok teremtője, a híres FERMAT-féle egyenletek megoldhatatlanságának bizonyításán kívül maga elé kitűzött, hogy ugyanis az egységgyökökből alakított egész számok hatványmaradékaira nézve megtalálja azokat a törvényeket, a melyek a quadratikus és biquadratikus recziproczitási törvényeknek a magasabb hatványmaradékoknál megfelelnek. Készséggel ragadom meg ezt az alkalmat KUMMER e felfedezésének megemlítésére, miután ennek a számelméletben és a XIX. százév algebrájában messze kiható következményei voltak.

Midőn GAUSS 1831-ben a «Göttinger gelehrte Anzeiger»-ben az úgynevezett imaginär mennyiségek polgárjogáért egész határozottsággal nyilvánosan szót emelt, már évek hosszú sora óta volt alkalma észrevenni, hogy az úgynevezett imaginär mennyiségekkel való számolás többet jelent puszta jelekkel való játéknál. Elég legyen itt két ilyen jelenségről említést tennem.

Egy «Disquisitiones arithmeticæ» czimű munkájában, melyet

1801-ben az akkor még csak huszonnégy éves Gauss kiadott, egy munka, mely a számelméletben és az algebrában új utakat nyitott meg, az utolsó fejezetben egy vizsgálat olvasható a körosztásról. Már Euclides idejében fel tudták a körkerületet körző és vonalzó segítségével három, négy, öt, tizenöt egyenlő részre osztani, és ép úgy olyan részekre, melyek száma az előbbiekből kettővel történő ismételt szorzással nyerhető. Azóta kétezer év folyamán nem haladt a körosztás problémája, míglen Gauss a nevezett helyen végkép eldöntötte a kérdést, hogy milyen számok adta részekre osztható fel egyáltalában a körkerület körző és vonalzó segítségével. És milyen út vezette őt e fölfedezésre? Az *egység imaginär gyökeinek* a tanulmányozása vezette rá, egy vizsgálat, mely a XIX. százév algebrájára és számelméletére hatalmas befolyást gyakorolt, és melynek közvetetlen gyümölcse a körosztás nevezett problemájának megoldása vala. Vajjon ez a nyereség, melyet az úgynevezett imaginär mennyiségek alkalmazása a geometria reális birodalmában hozott, nem volt-e elég erős ösztönzés e mennyiségeket körülövedző fátyol széttépésére?

De egy másik alkalom nem kevésbbé ösztönzött az imaginär mennyiségek lényegéről való gondolkodásra. A kopenhágai kir. tudományos társaság a XIX. százév huszas éveiben a térképrajzolásra és a felső geodäziára nézve alapvető e következő pályakérdést tűzte ki: «egy adott terület részei lerajzolandók egy másik adott terület részeire úgy, hogy a rajz a lerajzolthoz legkisebb részeiben hasonló legyen».

E feladat megoldására szentelt értekezésében megmutatá Gauss, hogy szükségképen a komplex változó azon függvényeinek alkalmazására vezet, melyeket manapság monogén vagy analytikai függvényeknek nevezünk. Itt újból mutatkozott az úgynevezett imaginär mennyiségek hatása e való világra, és nyilvánvalóvá lett, hogy e mennyiségek realitását kétségbe vonni méltánytalan dolog. Tényleg Gauss 1831-ben kiadott fentnevezett munkájában maga felhozza, hogy az imént megjelölt lerajzolási feladat amaz impulzusoknak egyike volt, melyek őt a komplex mennyiség igazolására ösztönözték.

Ki lehet mondani, hogy az analizis a XIX. százévben hatalmas haladását lényegesen annak a körülménynek köszönheti, hogy eltérőleg a régibb kor spekuláczióitól a változó mennyiségek kölcsönös összefüggésének vizsgálatánál nem szorítkozott az úgynevezett valós értékekre, hanem tekintetbe vette az általános komplex értékeket is. Lépésről-lépésre ki lehet ez állítás igazságát mutatni e kor analizisében. De e helyen az analizis elemeiből vett néhány példán való beigazolásra kell csak szorítkoznom.

Ha két változó mennyiség egymástól algebrai módon függ, és azt kivánjuk, hogy egyikük a másiktól való függőség folyamán minden tetszőleges valós értéket érjen el, akkor ez általánosan nem lehetséges, a míg e másik változó értékkészlete a valós számok tartományára szorítkozik; de igenis lehetségessé válik, mihelyt megengedjük, hogy e változó elhagyva a valós tengelyt, szabadon mozogjon az egész síkon. Ugyanazt veszszük észre, hogy az elemi függvényeknél maradjunk, a sinus és cosinus trigonometriai függvényeknél is. A meddig a független változó csak a valós értékeken megy végig, addig számukra csak olyan valós értékeket nyerünk, melyek előjeltől eltekintve, az egységnél nem nagyobbak, míg az összes többi valós értékeket csak akkor érik el e függvények, ha a független változónak komplex értékek fölvétele is meg van engedve.

Ki kell azonban e helyen emelni, hogy hasonló jelenséggel találkozunk még akkor is, ha a két változó közötti függvényi összefüggésnél a komplex értékek összeségét engedjük is meg. Az analizis fejlődése a XIX. században a komplex változó olyan függvényeire vezetett, a melyeknél a független változó komplex értékeinek összességéhez a függő változónak csak korlátolt komplex értékköre tartozik. Sőt lehet állítani, hogy e differencziál-egyenletekkel definiált függvények nagyobb részének meg van ez a tulajdonsága. Az a gondolat támadhatna az emberben, hogy e hiányon új általánosabb mennyiségek behozatalával segítsen, melyeknek a komplex mennyiség csak speczialesete volna; mert talán remélhetné az ember, hogy a függvény az egész síkon szabadon mozoghatna, mihelyt a független változó számára ama új mennyiségek tartománya is megnyilnék. De miután, miként már említém, nem létezhetnek általánosabb mennyiségek, melyek ugyanazon műveleti törvényeknek volnának alávetve, mint a komplex mennyiségek, e kisérletről eleve le kell mondanunk. Meg kell nyugodni mindenkép abban a tényben, hogy a függvények értékkészletének korlátoltsága a mennyiség fogalmának természetes folyománya.

Abel és Jacobi ugyanabban a korban fedezik fel az elliptikus függvények elméletét, a melyben Gauss a komplex mennyiségekről való reflexióinak eredményét összefoglalá. A XIX. századév analizisének új perspektivákat megnyitó és a geometria s mechanikában azóta számtalan alkalmazásban részesülő eme függvények, a komplex változó felhasználása nélkül legbelsőbb magvukban érthetetlenek és fejlődésképtelenek maradtak volna. Míg ugyanis a trigonometriai függvényeknek csak *egy* valós periodusok van — mely tulajdonságukra a legszebb alkalmazásaik épülnek — addig az elliptikus függvényekkel olyan függvénykör nyilt meg és fejeződött be egyszersmind, mely két periódussal van felruházva. De e két periódusra nézve lényeges, hogy viszonyuk úgynevezett imaginär mennyiséggel van meghatározva. Ép ez utóbbi tulajdonság vált az elliptikus függvények analitikai előállításának alapjává, azé az előállításé, a melyen e függvényeknek e való világra lehetséges alkalmazása nyugszik.

Míg Gauss nevéhez fűződik az érdem, hogy a komplex mennyiségnek polgárjogot biztositott a mennyiségek birodalmában, addig a nagy franczia mathematikusnak, Cauchynak volt fentartva, hogy az addig csak tűrt komplex mennyiséget az analizisben uralkodóvá emelje föl. Cauchy, az analizisben mindnyájunk tanítómestere, a kinek vállain állánk valamennyien, a kik eddig utána ennek a tárgynak szenteltük erőnket, a XIX. százév huszas éveiben munkák hosszú sorát kezdé meg, melyekben először a komplex mennyiség alapján újból felépité az analizisnek addig csak valós értékekre szoritkozó elemi részeit, hogy azután a differencziál és integrál számolásban alkalmazott fogalmaknak a komplex változókra való kiterjesztését keresztül vigye. Ez úton rendületlen alapokat sikerült neki teremteni az egész analizis számára. És a komplex mennyiség hatalmának egész teljességét így kifejtve megteremté korunk függvényelméletének alapjait. E helyen lehetetlen még csak körvonaloznom is e mester csodálatos sikereit és azt a szép architektonikát, a melylyel ő és tanítványai a függvényelmélet épületét felemelék és kidomboríták. E sikerekről közelítő fogalmat nyerünk, ha az elliptikus függvények tanának épületét régi alakjában összehasonlítjuk azzal, melyet e százév közepe felé felvett, a midőn Cauchy tanait az ő tanítványai, Briot és Bouquet e függvények elméletében értékesíték; ha az Abel-féle függvények elméletének Weierstrass és Riemann megvetette alapjait szemügyre veszszük; ha azzal az alappal megismerkedünk, a melyre a differencziálegyenletek észszerű elmélete épülhetett föl, egy elméleté, a mely ép úgy mint a nevezett disczíplinák fontos következményeket mutathat fel a mechanika és a physika problémáira való alkalmazásokban.

Minél tovább haladt a függvények új elmélete, annál több fényt árasztott az úgynevezett imaginär mennyiségnek a valóshoz való viszonyára. Csak példaképen akarom felemliteni az egy komplex változós függvénynek síkbeli akármilyen pályák mentén való integrálását, mely haladást Cauchynak köszönhetjük. Ez nemcsak új forrásokat nyitott meg valós változók határozott integráljainak értékmeghatározására, hanem a való mathematikai világ eddigelé homályban maradt jelenségeinek megvilágítására nélkülözhetetlen egyetlen segédeszköznek bizonyult. Hadd mutassam ezt be egy egyszerű példán. Az integrálszámolás elemeiben a valós változó háromszögtani függvényei bizonyos határozott integrálok megfordításai gyanánt jelentkeznek. Ha ebből mint definiczióból akarnók e függvények periodikus voltát levonni, akkor törekvésünk egyszerűen sikertelen volna mindaddig, a míg a határozott integrál útját a valós tengelyre korlátozzuk. Csak ha akármilyen pálya mentén való komplex integrálás is meg van engedve, csak akkor mutatkozik függvényünk *valós* periódusa. Megint egy a számos eset közül, a midőn Gauss előrelátó kijelentése beteljesedik, hogy a komplex mennyiségek nemcsak nélkülözhetetlenek a legtöbb disciplina logikus kiépítésénél, de egyszermind a mennyiségek birodalmában lényesen valós jelentéssel rendelkeznek.

A második tény, a melyről fennebb mondottuk, hogy a XIX. százév munkáira charakteristikus bélyeget nyom, az a módszer, a melylyel változó mennyiségek közötti függvényi vonatkozást *fogalmilag* annyira meghatározunk, hogy egymástól való függésük egész lefolyásukban teljesen és egyértékűleg van meghatározva, és attól egészen függetlenül, hogy ez a függvényi vonatkozás jellemezhető-e alkalmas analitikai kifejezésekkel vagy sem.

Bizonyos esetekben ilyen fogalmi megállapodásokhoz úgy jutunk, hogy a függvényosztálynak olyan alaptulajdonságait fedezzük fel, a melyekből minden más tulajdonságaik mint logikus következmények folynak. Ilyen alaptulajdonságok többen lehetnek. Miután fogalmilag egymás folyományai, azért közülük olyant fogunk kiválaszthatni, a mely vagy a fogalmilag legegyszerűbb, vagy a különös vizsgálat czéljainak a legmegfelelőbb. Így például a háromszögtani függvények számára ilyen tulajdonság a mathematika elemeiből ismeretes addicziotheorema. Valóban, ha függvénytől azt követeljük meg, hogy olyan addicziotheoremának hódoljon, a milyen a háromszögtani függvényeké, akkor arra az eredményre jövünk,* hogy e függvény a háromszögtani függvények tartományából való. Egy másik ilyen alaptulajdonsága a háromszögtani függvényeknek az ő periodiczitásuk, miután minden ilyen tulajdonsággal biró függvény a háromszögtani függvények tartományának tagja. Igaz, hogy a háromszögtani függvények számára egyszerű analitikai kifejezéseink vannak végtelen sorok vagy szorzatok alakjában. De a midőn a következtetések valamely lánczolatából az adódik ki, hogy egy függvény az egyik vagy a másik alaptulajdonsággal van felruházva, akkor ebből közvetetlenül felismerjük a háromszögtani függvények köréhez való tartozandóságát, míg az analitikai kifejezés segédeszközével való felismerése csak nagy nehezen és gyakran csak hosszadalmas számítások révén adódik ki.

---

* Cauchy, Analyse algébrique Chap. V.

Hasonlókép áll a dolog a két periodusos (elliptikus) függvényekkel is. Ezeknek is van addicziotheoremájuk, mely e függvények alaptulajdonsága abban az értelemben, hogy belőle e függvények minden egyéb tulajdonsága levezethető. Ez tette lehetővé Weierstrassnak, az analizis e felejthetetlen mesterének, hogy ez egyetemen tartott későbbi előadásaiban, az addiczio-theoremából kiindulva, az elliptikus függvények egész elméletét felépitse.

A legtanulságosabb és következményekben leggazdagabb példa egy függvénynek különös ismertető jelekkel való meghatározására a potencziál elméletében észlelhető, azon függvényében, mely a physikában mindenütt, a hol a Newtoni törvény érvényes, jelesül a mágnesség és elektromosság tanában, oly nagy fontosságúvá lett. A potencziál értéke függ ama tömegek geometriai alakjától, a melyekre vonatkozik, továbbá azok sűrűségétől, és kifejezhető egy egyszerű vagy többszörös határozott integrállal. De ennek valóságos pontos kiszámitása csak a legritkább esetekben eszközölhető, ha e kiszámitás alatt ismeretes függvényekkel való kifejezését értjük. A nagy mathematikus gondolkodó, Lejeune-Dirichlet, egyik legszebb gondolata volt, hogy elleste a potencziálnak ama függvényi tulajdonságait, a melyek az ő értékének a Newtoni-erőkkel egymásra ható tömegek helyzetétől való függőségét teljesen és egyértékűleg meghatározzák. Ezzel a tényleges kiszámitás kérdése háttérbe szorult, sőt a legfontosabb következtetéseknél nélkülözhetővé is vált.

Dirichletnek a potencziálon kifejtett gondolata azóta a mathematikai physika minden fejezetében, jelesül az elektromosság, a mágnesség, a hő és a rugalmasság okozta mozgások tanában alapvető elvvé fejlődött; és maga Dirichlet szerencsés volt vezérgondolatát nagy példákon megvalósíthatni. Mindenütt bizonyos differencziálegyenletekkel találkozunk itt, melyek a physikai folyamatokat definiálják. De az ilyen differencziálegyenletek természetéből folyó dolog, hogy a megoldások végtelen sokasága rejlik bennök. E végtelen sokaságból ki kell hámozni azokat a megoldásokat, melyek egy meghatározott physikai problémában a természet adta mellékfeltételeket is kielégitik, milyenek a kezdő-állapot, a határfeltételek és a megszakadás helyei. De annak felismerésére, hogy a differencziálegyenletnek e mellékfeltételekhez illő megoldásai a valódi természeti törvényt adják-e meg, még azt is szükséges bebizonyitani, hogy e megoldásokon kivül nincs más megoldás is, mely a mellékfeltételeket kielégitse. Erre nézve irányadók Dirichletnek a potencziálon kifejtett elvei, melyek sok fontos esetben már czélhoz is vezettek.

A mathematika történetében gyakran találkozunk azzal a ténynyel, hogy az exakt természettudományok terén mutatkozó problémák ébresztette gondolatok gazdag aratásra vezettek a mathematikai vizsgálódások mezején. De soha se volt az aratás rövid pár év mulva már gazdagabb, mint épen ezen Dirichlet-féle elvek esetén. Hogy a gazdag termés oly gyorsan megért, azt Riemann géniuszának köszönhetjük, Riemann-énak, a kit a mathematikai világ fájdalmára oly ifjan ragadott el a halál s a ki rövid életében mégis a mathematikai megismerés tágitása révén örök helyet biztositott magának a százév legnagyobb mathematikusai sorában. Azon ismeretes tényre támaszkodva, hogy a komplex változó minden függvényének alkatrészei egyugyanazon parcziális differencziálegyenletnek tesznek eleget, letevé Dirichlet módszereinek alkalmazásával a komplex változó függvényei elméletének egész felfogásában új alapjait. E felfogásban a függvényeket azok a határfeltételek és folytonossságbeli megszakadások jellemzik, melyeknek alá vannak vetve. A függvények e jellemzésénél nevezetes az ő fogalmi meghatározásuk, analitikai formulákkal való előállithatóságuk megemlitése nélkül. Riemann ez úton nyert eredményei közül itt csak az ő csodálatra méltó elméletét akarom megemliteni az általános Abel-féle függvényekről. Módszere megengedé neki ez elméletnek néhány nyomtatott iven való kifejtését, míg annak az algebrai fügvények analitikai alakja segélyével való felépitése rengetegül hosszadalmas. Nem kisebbiti Riemann dicsőségét az sem, hogy alkalmazott elveinek megállapitásában hézagok maradtak, melyeket csak később pótoltak ki más mathematikusok.

Ha változó mennyiségek függvényi vonatkozásban állanak, akkor e vonatkozásoknak analitikai kifejezésekkel való előállításától megköveteljük, hogy érvényes legyen a változónak, a vonatkozások természetéből folyó, egész tartományában.

Analitikai tekintetben még azt a további követelést is fűzzük ez előállitáshoz, hogy belőle a változónak függőségi törvénye, tehát a függőség fundamentális tulajdonsága, közvetetlenül leolvasható legyen.

Az ilyen előállitás megtalálásával járó csak nagy fáradsággal legyőzhető nehézségekről nem is szólva, ki kell emelnem, hogy ez előállitás csak akkor eszközölhető, ha a függvényi vonatkozás fogalmilag egész terjedelmében meg van már állapitva elannyira, hogy maga az előállitás az előállitott függvénynek megismerésére nézve lényegesen újat már nem nyújt.

Értékesebbek a függvényi vonatkozásokat megadó analitikai formulák a gyakorlati alkalmazásokban, a midőn ugyanis kisérleteknél vagy észleleteknél fellépő mennyiségek számbeli meghatározásáról van szó; mint pl. a csillagászatban valamely égitest pályaelemeinek bizonyos észleleti adatokból való meghatározásánál. De az alkalmazásokban még egy harmadik követelést is támasztunk az analitikai előállitás ellenében, azt, hogy gyorsan összetartó legyen.

Ha a természetben együtt fellépő mennyiségeknek egymástól való függése mathematikai módon, például differencziálegyenletekkel van meghatározva, akkor e kölcsönös összefüggés törvénye a differencziálegyenleteknek megfelelő mennyiségek fogalmilag meghatározott összefüggésében tükröződik, miként a mathematikai physika számos problémája, különösen a potencziálelmélet alkalmazása mutatja. Legyen megengedve az imént kimondott gondolatot egy példán kifejtenem. Egy függélyes körön mozgó súlyos anyagi pont helye és sebessége (az úgynevezett ingamozgás) az időtől való függésében differencziálegyenlettel van meghatározva. Az ezen differencziálegyenletnek eleget tévő függvények fogalmi vizsgálata után rögtön tisztába jövünk, hogy a kezdő sebesség nagysága szerint háromféle mozgás lehetséges, és hogy ezek egyike az ide-oda menő mozgás, a tulajdonképeni ingamozgás. Ez a mozgás annak az esetnek felel meg, hogy a differencziálegyenlet megoldása periodikus. Így felismerjük e periodusban a lengési időt, hasonlóképen meghatározzuk az elevatió nagyságát, és igy a fogalmi vizsgálat révén tiszta képet nyerünk a mozgás legfontosabb momentumairól. Másrészről e mozgásnak az időtől való pontos függését meghatározó függvények az úgynevezett elliptikus függvények, melyek számára az elmélet két igen gyorsan összetartó sor hányadosai segélyével való előállítást szolgáltatott. Ez előállítások a mozgásnak módjára nézve nem nyujtanak semmiféle új felvilágositást, de az ingahossz, a nehézségi gyorsulás és a kezdősebesség közötti kisérletileg meghatározandó összefüggés numerikus megmagyarázásánál előnyösen használhatók fel.

A XIX. százévben különösen kimagasló jelentőségűvé vált a függvények fogalmi meghatározása a differencziálegyenletek integrácziójánál. Ha egy differencziálegyenletet kellett megoldani, akkor azelőtt tervtelen próbálgatásokkal igyekeztek azt oly módon átalakitani, hogy typusa az idők folyamán integrált egyenletek typusával birjon. Vagy ha ez nem sikerült, akkor igyekeztek a differencziálegyenletet úgynevezett quadraturára visszavezetni; és ha ez a kisérlet sem sikerült, akkor sorokhoz folyamodtak, melyek a differencziálegyenleteket kielégiték. De e tervtelen próbálgatások, miként már világosan látjuk, csak a legritkább esetben vezethettek czélhoz. Azok az esetek, a midőn az előttünk fekvő differencziálegyenlet arra a néhány typusra vagy quadraturára visszavezethető, csak kivételes eseteknek tekinthetők; a mellett rendesen nem is áll módunkban a visszavezetés lehetőségét vagy lehetetlenségét előre felismerni. De még ha sikerül is a quadraturára való visszavitel, azzal még keveset nyertünk a differencziálegyenlet megoldásának természetére nézve, miként a legegyszerűbb differencziálegyenletek példája mutatja, melyekben a quadratura alakja eleve adva van. Ilyen quadraturára visszavihető differencziálegyenlet a fentiekben példaként említett ama elliptikus függvényekkel megoldott differencziálegyenlet, és mégis e függvények elmélete kivántatott meg ahhoz, hogy a differenczi álegyenletek megoldásainak természetébe betekintést nyerjünk.

És a mi az utolsó menedéket, a sorokkal való megoldást illeti, e kisérletnek hajótörést kellett szenvedni abból az okból, mert e sorok a függvényt a független változónak nem egész megengedett tartományában állitják elő.

Ezen a téren is megtörték Cauchynak és tanitványainak a munkái azt az utat, a melyen a XIX. százévben a differencziálegyenletek tudományos tárgyalásában teljes átalakulás ment végbe. Miként Gauss adá az első szigorú bizonyitását annak a tételnek, hogy minden algebrai egyenletnek van gyöke, úgy Cauchy szilárd alapot teremtett a differencziálegyenlet számára annak a bebizonyitásával, hogy mindig vannak a differencziálegyenleteknek olyan megoldásai, melyek bizonyos előirt feltételeknek eleget tesznek. Ilyen megoldások létezését Cauchy először a változónak csak korlátolt tartományaiban, azután folytatási elvével a függvények egész érvényességi birodalmában állapitja meg. Cauchy elveit tanitványai, Briot és Bouquet sikerrel alkalmazák az elsőrendű differencziálegyenletek elméletében 1856-ban megjelent munkájukban, mely határkőnek nevezendő azon az uton, melyre a differencziálegyenletek elmélete azóta rátért.

Természetesen nem helyén való itten e disciplina fejlődésének mind e mai napig haladó történetét előadnom. De legyen megengedve rámutatnom azokra a gondolatokra, a melyek a differencziálegyenletek meghatározta függvények fogalmi meghatározásában az irányadók. Ha a geografus le akarja irni egy ország alakzatát, akkor az egyenletes és folytonosan összefüggő alkatú részek, a sikságok nem nyujtanak támpontokat az ország jellemzéséhez. Csak úgy sikerül az ország teljes képének áttekinthető rajza, ha kiemeli a siknak folyók és tavak által való tagolását, a föld emelkedéseit, a hegységeket, a sikságok e rendetlenségeit és szakadásait. Így jár el a differencziálegyenletek megoldásait jellemezni akaró analitikus is.

A változó mennyiségek tartományában azok a helyek, a melyekben a differencziálegyenletek megoldásai egyenletes egyhangú magaviseletet tanusitanak, nem nyujtanak kellő támpontokat a megoldások természetének a megitélésében. Csak azok a helyek, a hol a megoldások egyhangúsága megszűnik, legyenek bár e helyek pontok, vonalak vagy területek, csak ezek nyújtják azokat az elemeket, a melyekből a megoldások egyénisége kidomborodik. Az egyhangúság e megszakadásait szinguláris helyeknek nevezzük. Felkeresésük az analitikus első, igaz gyakran fáradságos munkája. A megoldásnak a szinguláris helyek környékén való magaviseletét tanulmányozni a legközelebbi lépés. A harmadik döntő feladat azután annak a befolyásnak a meghatározása, melyet a megoldásoknak a szinguláris helyek környezetében való magaviselete a megoldások értékkészletére a független változó tartományának bármelyik pontjában gyakorol. Ez ismeret megszerzésénél ne resteljük a mathematikának látszólag akármilyen távoleső részeit is előrántani.

A differencziálegyenletek e megoldásának az az előnye van a régebbi időkben dívó tervtelen alakítgatásával szemben, hogy a megoldások természetét észszerű módon abból ismerjük fel, a mit róluk maguk a differencziálegyenletek kivallanak. De a feladat nehézségét már abból is megitélhetni, hogy csak úgy találomra véve elő egy differencziálegyenletet, az valószinűleg teljesen új függvényosztályt fog jellemezni, melynek kimerítő tanulmányozása egészen új disciplinát teremtend. Azért ép oly kevéssé lehet törekvésünk a differencziálegyenletek megoldására általános módszert keresni, mint a milyen észszerűtlen volna az orvosi tudományok terén az összes betegségek gyógyitására universális szer után fáradozni. De ismerettani szempontból már az is nagy nyereségnek nevezhető, hogy meg van mutatva a helyes út, a melyen haladva az egyes feladatok megoldása mindenesetre sikerülni fog, még ha esetleg ideig-óráig legyőzhetetlennek látszó nehézségekre bukkanunk is.

Az e téren kifejtett fáradság azonban megérdemli a nemesek verejtékét. Gondoljuk csak meg, hogy magának az analizisnek, valamint a mechanikának és physikának feladatai is csaknem valamennyien differencziálegyenletekre vezetnek, hogy tehát e feladatok sorsa a differencziálegyenletek elméletének észszerű fejlesztésétől függ.

Emberi erőnk gyengeségének és korlátoltságának tudatában bizonyos önérzettel tekinthetünk ugyan vissza arra, a mi a differencziálegyenletek elméletének terén a XIX. százévben történt. De nyilt szemmel előre tekintve el kell ismernünk, hogy a tudomány e nagy birodalmába való belépést vívtuk csak ki, hogy a végzett munka elenyésző kicsiny ahhoz a munkához képest, a melyet nekünk és a jövő nemzedékeknek ezután kell végezni.

A mathematikai tudomány egy különálló részére való visszatekintésből kiadódó e végeredmény ismétlődni fog bármelyik tudományos disciplinára való visszatekintés eredményeképen: ugyanis arra a megismerésre jutunk, hogy a tudomány végtelen nagy, és arra a tudatra ébredünk, hogy a megoldandó feladatok végtelen sokaságához képest a már megoldottakat csak szerény mérték illeti meg. Nagyrabecsült társaim, kiknek hivatástok a jövő nemzedéket a tudományos munkában vezérelni, ne vegye el ez a bátorságtokat legkevésbbé sem. Ha az igazság megismerése egyrészről elegendő a szerénység ébren tartására, másrészről elegendő lesz arra is, hogy örökké kegyelettel legyenek azon férfiak iránt, kik önök előtt szolgáltak a tudománynak minden erejükkel. Ez a kegyelet pedig mindig arra fogja önöket sarkalni, hogy soha el ne fáradjanak abban a törekvésükben, hogy az emberi tudást lépésről-lépésre minden erejükkel gyarapítsák.

Fuchs Lázár.

*

E beszédet magyarrá fordítván, a nagy szerző engedelmével e helyen közzéteszi *dr. Réthy Mór.*

AZ HERMITE-FÉLE ALAKOKRÓL.

I. Legyen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ egy (A) homogén lineár differencziálegyenlet alaprendszere és tegyük fel, hogy az (A) egyenlet együtthatói az $x=\xi+\eta\sqrt{-1}$ független változó egyértékű függvényei, és hogy az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ alaprendszer determinánsa

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 1,$$

hol

$$\frac{d^\lambda y_k}{dx^\lambda} = y_k^{(\lambda)}.$$

Jelölje $\bar{a}$ valamely a complex szám konjugált értékét és tekintsük a

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \bar{y}_k$$

Hermite-féle alakot, a hol $c_1, c_2, \ldots, c_n$ valós állandók. Differencziáljuk a φ logarithmusát x és $\bar{x}=\xi-\eta\sqrt{-1}$ szerint, akkor

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial x} = \frac{\sum_k c_k y_k' \bar{y}_k}{\sum_k c_k y_k \bar{y}_k},$$

$$\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \, \partial \bar{x}} = \frac{1}{\varphi^2} \begin{vmatrix} \sum_k c_k y_k \bar{y}_k & \sum_k c_k y_k \bar{y}_k' \\ \sum_k c_k y_k' \bar{y}_k & \sum_k c_k y_k' \bar{y}_k' \end{vmatrix},$$

a hol

$$\bar{y}_k' = \frac{d\bar{y}_k}{d\bar{x}}.$$

Ismeretes determináns-tételek szerint[*] lesz továbbá:

$$\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x\, \partial \bar{x}} = \frac{1}{\varphi^2} \sum_{i<k}\sum c_i\, c_k (y_i\, y_k' - y_k\, y_i')\,(\bar{y}_i\, \bar{y}_k' - \bar{z}_k\, \bar{y}_i'), \qquad (1)$$

a φ^{-2} tényezője az egyenlet jobb oldalán tehát nem egyéb, mint egy az $\binom{n}{2}$ számban lévő

$$w_{ik} = y_i\, y_k' - y_k\, y_i'$$
$$(i,\, k=1, 2, \ldots, n;\; i<k)$$

mennyiséggel képzett HERMITE-féle alak, a mely mennyiségek az (A) differencziálegyenlet $(n-2)$-ik associált egyenletének[**] alaprendszerét alkotják.

II. Legyen először $n = 2$. Akkor az (1) egyenlet jobb oldalán szereplő HERMITE-féle alak, a

$$y_1\, y_2' - y_2\, y_1' = 1 \qquad (2)$$

egyenlet következtében, egyszerűen a $c_1\, c_2$ szorzattá alakul.

A

$$\varphi = c_1\, y_1\, \bar{y}_1 + c_2\, y_2\, \bar{y}_2$$

alak tehát a

$$\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x\, \partial \bar{x}} = \frac{c_1\, c_2}{\varphi^2}$$

parcziális differencziálegyenletnek tesz eleget, mely, ha

$$u = \log \frac{4}{\varphi^2}$$

-ot bevezetünk, és tekintettel arra, hogy

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Delta u, \qquad (2a)$$

az újabban sokat tárgyalt[***]

---

[*] V. ö. pld. BÁLTZER, Determinanten (1881), 49. l.

[**] V. ö. pld. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II, 1, (1897), 127. l.

[***] PICARD, Liouville-Journal 1890, 1893; POINCARÉ, ugyanott 1898.

$$\Delta u = -2c_1 c_2 e^u \tag{3}$$

egyenletté alakul.

Ha az (A) differencziálegyenlet avval a tulajdonsággal bír, hogy az y_1, y_2 alaprendszerre vonatkozó monodromia-csoportja a φ alakot önönmagába transzformálja,* akkor φ és tehát u is a ξ, η valós változók egyértékű függvénye, az ilynemű (A) differencziálegyenlet tehát a (3) parcziális differencziálegyenletnek egy egyértékű megoldására vezet.

Legyen megfordítva u a (3) parcziális differencziálegyenletnek egyértékű megoldása. Képezzük

$$\varphi = 2e^{-\frac{u}{2}}\text{-t},$$

akkor, tekintettel a (2)-ből differencziálással adódó

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = 0$$

egyenletre, világos, hogy a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{c_1 y_1'' \bar{y}_1 + c_2 y_2'' \bar{y}_2}{c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2} = \frac{y_1''}{y_1} = \frac{y_2''}{y_2}$$

hányados pusztán csak az x-nek függvénye $q(x)$, és pedig mivel u-val φ is egyértékű a ξ, η-ban, az x-nek egyértékű függvénye. Az y_1, y_2 tehát a

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = q(x) y$$

differencziálegyenletnek tesz eleget, a melynek együtthatói egyértéküek és melynek monodromia csoportja a φ Hermite-féle alakot önönmagába transzformálja.

A (3) parcziális differencziálegyenlet igen egyszerű módon mutatja azt a vonatkozást is, a mely a szóban levő fajhoz tartozó másodrendű homogén lineár differencziálegyenletek és a bizo-

---

* Ilyen például minden Gauss-féle differencziálegyenlet, melyben az exponensek recziprok egész számok, általánosabban minden másodrendű lineár differencziálegyenlet, melyben két integrál hányadosának inverz függvénye Fuchs-féle függvény; v. ö. Poincaré az i. h.

nyos állandó görbületű felületeken érvényes geometria között fennáll.

Tekintsünk ugyanis az

$$ds^2 = 4\frac{d\xi^2+d\eta^2}{\varphi^2}$$

egyenlettel értelmezett ds-t valamely felület vonalelemének, akkor a Gauss-féle alapmennyiségek értékei ezek:

$$E = G = \frac{4}{\varphi^2}, \quad F = 0.$$

A görbület mértékének ismert kifejezése:

$$K = -\frac{1}{2E}\left\{\frac{\partial^2 \log E}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 \log E}{\partial\eta^2}\right\},$$

a (3) parcziális differencziálegyenletre való tekintettel, a görbület mértékének

$$K = c_1 c_2$$

állandó értékét szolgáltatja.

III. Legyen továbbá $n=3$. Ebben az esetben a második associált egyenlet megoldásai

$$\begin{aligned} z_1 &= y_2 y_3' - y_3 y_2', \\ z_2 &= y_3 y_1' - y_1 y_3', \\ z_3 &= y_1 y_2' - y_2 y_1', \end{aligned}$$

az

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3p\frac{dy}{dx} + qy = 0 \qquad (A)$$

differencziálegyenlet y_1, y_2, y_3 alaprendszeréhez adjungált alaprendszerét alkotják, az (A)-hoz adjungált

$$\frac{d^3z}{dx^3} + 3p\frac{dz}{dx} - \left(q - 3\frac{dp}{dx}\right)z = 0 \qquad (B)$$

differencziálegyenletnek,* az (1) egyenlet jobb oldalán szereplő

---

* Az adjungált differencziálegyenletek elméletére nézve lásd például Schlesinger Handbuch, Bd. I (1895), II. Abschnitt, 3. Kapitel.

HERMITE-féle alak, tehát egyszerűen

$$\sum_{i<k}\sum c_i c_k (y_i y'_k - y_k y'_i)(\bar{y}_i \bar{y}'_k - \bar{y}_k \bar{y}'_i) = c_1 c_2 c_3 . \psi,$$

a miben

$$\psi = \frac{1}{c_1} z_1 \bar{z}_1 + \frac{1}{c_2} z_2 \bar{z}_2 + \frac{1}{c_3} z_3 \bar{z}_3$$

a

$$\varphi = c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2 + c_3 y_3 \bar{z}_3$$

alak adjungált alakját jelenti. Nyilvánvaló, hogy ψ-ra nézve egy az (1)-hez egészen hasonló parcziális differencziálegyenlet létezik; és mivel a φ és ψ közt fennálló vonatkozás kölcsönös természetű, ($2a$)-ra való tekintettel,

$$\Delta \log \varphi = 4 c_1 c_2 c_3 \frac{\psi}{\varphi^2},$$

$$\Delta \log \psi = 4 c_1 c_2 c_3 \frac{\varphi}{\psi^2},$$

adódik vagy bevezetve a

$$\log \varphi = u, \ \log \psi = v$$

mennyiségeket, az

$$\Delta u = 4 c_1 c_2 c_3 e^{-2u+v},$$
$$\Delta v = 4 c_1 c_2 c_3 e^{-2v+u} \qquad (5)$$

parcziális differencziálegyenletek rendszere.

Ha az (A) differencziálegyenletnek y_1, y_2, y_3 alaprendszerhez tartozó monodromia-csoportja a φ HERMITE-féle alakot önönmagába transzformálja,* akkor a (B) egyenletnek az adjungált z_1, z_2, z_3 alaprendszerhez tartozó monodromia-csoportja a (B) egyenletnek a φ-hez adjungált ψ alakot fogja önönmagába transzformálni; ez esetben tehát φ, ψ a ξ, η-nak egyértékű függvényei, ugyanez áll u, v-re nézve, úgy hogy az (5) differencziálegyenletrendszernek egyértékű megoldás rendszerét találtuk.

IV. Hogy kimutassuk, miszerint, ép úgy mint $n = 2$ esetén,

---

* Az ilyen differencziálegyenletekről lásd általános n esetén, FUCHS, Berliner Sitzungsberichte, 1896, pag. 753, $n = 3$ esetén, PICARD, Acta Mathematica T. I, pag. 298.

megfordítva az (5) parcziális differencziálegyenletrendszer valamely ξ, η-ban egyértékű megoldás rendszere u, v, oly egyértékű együtthatókkal biró, (A) alakú differencziálegyenletet szolgáltat, melynek monodromia-csoportja a φ HERMITE-féle alakot nem változtatja, előbb nehány képletet kell levezetnünk.

A

$$z_1 = y_2 y_3' - y_3 y_2' \tag{6}$$

ből adódik

$$z_1' = y_2 y_3'' - y_3 y_2'', \tag{7}$$

$$z_1'' = y_2 y_3^{(3)} - y_3 y_2^{(3)} + y_2' y_3'' - y_3' y_2'',$$

mely utóbbi egyenletet (A)-ra való tekintettel és a

$$\zeta_1 = y_2' y_3'' - y_3' y_2'' \tag{8}$$

jelölést bevezetve ekkép irjuk, hogy

$$z_1'' = -3p z_1 + \zeta_1. \tag{9}$$

A (6)—(9) egyenletekhez azokat képzeljük hozzácsatolva, a melyek az 1, 2, 3 indexek cziklikus permutálásaival adódnak.

Legyen y az (A), z a (B) differencziálegyenlet valamely megoldása; szorozzuk meg (A)-t z-vel, (B)-t pedig y-nal és vonjuk ki, illetőleg adjuk össze, akkor lesz

$$y^{(3)} z - z^{(3)} y + 3p (y'z - z'y) + 2\vartheta_3 yz = 0, \tag{10}$$

$$y^{(3)} z + z^{(3)} y + 3p (y'z + z'y) + 3 \frac{dp}{dx} yz = 0, \tag{10a}$$

a hol

$$\vartheta_3 = q - \frac{3}{2} \frac{dp}{dx}$$

az (A) egyenletnek 3 súlyú LAGUERRE-féle differencziál invariánsa.*

A (10a) egyenlet még igy is irható:

$$\frac{d}{dx} [yz'' + zy'' - z'y' + 3p\, yz] = 0,$$

---

* V. ö. például SCHLESINGER Handbuch, Bd. II, 1, 190. l.

mely alakban a Lagrange-féle identitásból[*] is közvetetlenül kiadódik. A

$$yz''+zy''-z'y'+3p\,zy \qquad (C)$$

kifejezés értéke tehát x-tól független, ha y, z az (A), (B) differencziálegyenletek valamely tetszőleges integrálpárja.

Alkossuk meg e kifejezést $y=y_k$, $z=z_i$ integrálpárra nézve, akkor, (9)-re való tekintettel, adódik:

$$y_k z_i'' + y_k'' z_i - y_k' z_i' + 3p\,zy = y_k \zeta_i - y_k' z_i' + y_k'' z_i,$$
$$(i, k=1, 2, 3)$$

de a jobboldal értéke itt nem egyéb, mint δ_{ik},[**] a mi az

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \\ y_3 & y_2' & y_3'' \end{vmatrix} = 1$$

egyenletből rögtön felismerhető.

V. Ha x-et és $\bar{x}$-t egymástól független változóknak tekintjük, akkor mint az x függvénye a φ eleget tesz az (A), a ψ pedig eleget tesz a (B) egyenletnek; ha tehát (C)-ben $y=\varphi$, $z=\psi$ irunk, akkor e kifejezésnek x-től független értéket kell felvennie. Ezt az értéket rögtön ki is számíthatjuk. Jelöljük ugyanis a φ, ψ alakok x szerinti parcziális deriváltjait felső akczentusokkal, akkor

$$\varphi\psi''+\psi\varphi''-\varphi'\psi'+3p\,\varphi\psi =$$
$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} c_k c_i^{-1} \bar{y}_k \bar{y}_i [y_k z_i'' + y_k'' z_i - y_k' z_i' + 3p\, y_k z_i],$$

de a jobb oldal értéke tekintettel a IV. art. eredményére:

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} c_k c_i^{-1} \bar{y}_k \bar{y}_i \delta_{ki} = \bar{y}_1 \bar{z}_1 + \bar{y}_2 \bar{z}_2 + \bar{y}_3 \bar{z}_4 = 0.$$

Adódik tehát

$$3p = -\frac{\varphi\psi''+\psi\varphi''-\varphi'\psi'}{\varphi\psi}, \qquad (11)$$

---

[*] Lásd például Handbuch, Bd. I, 54. l.

[**] δ_{ik} Kronecker módjára 0-t, illetőleg 1-et jelent, a szerint, hogy $i+k$, illetőleg $i=k$.

és ha (10)-ben y helyére φ-t, z helyére ψ-t és $3p$ helyére a (11) alatti értékét írjuk, azt találjuk, hogy

$$\vartheta_3 = \frac{[\varphi\psi''+\psi\varphi''-\varphi'\psi'][\varphi'\psi-\psi'\varphi]-\varphi\psi[\varphi^{(3)}\psi-\psi^{(3)}\varphi]}{2\varphi^2\psi^2}. \quad (12)$$

Ha már most az (5) parcziális differencziálegyenletrendszer valamely ξ, η-ban egyértékű megoldásrendszere u, v ismeretes, és

$$\varphi = e^u, \quad \psi = e^v$$

segítségével megalakitjuk a (11), (12) kifejezéseket, akkor ezek pusztán csak az x-nek és pedig ennek egyértékű függvényei és az így nyert p, ϑ_3 mennyiségekkel megalkotott

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3p\frac{dy}{dx} + \left(\vartheta_3 + \frac{3}{2}\frac{dp}{dx}\right)y = 0$$

differencziálegyenlet olyan, hogy y_1, y_2, y_3 alaprendszerhez tartozó monodromia-csoportja önönmagába transzformálja a

$$\varphi = c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2 + c_3 y_3 \bar{y}_3$$

Hermite-féle alakot.

Az itt $n = 2, 3$ esetekben kifejtett elmélkedés általánosítása tetszőleges n esetére, semmi elvi nehézségbe nem ütközik, ha tekintettel vagyunk amaz algebrai vonatkozásokra, melyek Forsyth * szerint valamely lineár differencziálegyenlet, annak associált egyenletei és ezeknek successiv associált egyenleteinek integráljai közt fennállanak. De mivel eddig még nem sikerült az általános n esetén felmerülő igen komplikált számításokat jól áttekinthető alakban előállítanom, a jelen alkalommal az $n=2, 3$ esetek tárgyalására szorítkoztam.

Schlesinger Lajos.

---

* Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 179, pag. 454 squ.

DIFFERENCZIÁLALAKOK INTERPOLÁCZIÓJA.

1. Ha valamely

$$f(x, y, y', y'', \ldots)$$

differencziálalak, mint az x független változó függvénye — akár tapasztalatból — ismeretes, ha a határozatlan y függvény helyébe rendre a meghatározott

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

függvényeket helyettesítjük, azaz, ha:

$$\begin{aligned} f(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots) &= f_1(x), \\ f(x, y_2, y_2', y_2'', \ldots) &= f_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x, y_n, y_n', y_n'', \ldots) &= f_n(x), \end{aligned}$$

a hol $f_1, f_2, \ldots, f_n$ az x független változó megadott függvényei, akkor felmerülhet az a kérdés, hogy miképpen határozható meg az az $n-1$-edrendű homogén lineáris differencziálalak, mely átmegy az

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$$

függvényekbe, ha a benne előforduló határozatlannak tekinthető y helyébe az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények tétetnek. A meghatározandó F $(n-1)$-edrendű homogén lineár differencziálalakot *közelítő differencziálalaknak* nevezhetjük.

2. A fölvetett kérdés legspeciálisabb esete, midőn:

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_{i-1}(x) = f_{i+2}(x) = \cdots = f_n(x) = 0.$$
$$f_i(x) = 1.$$

Ebben az esetben a megoldás közvetlenül kinálkozik. Ilyen alak a következő:

$$F_i = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{i-1} & y & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{i-1}' & y' & y_{i+1}' & \cdots & y_n' \\ . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & y^{(n-1)} & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & & y_i & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & & y_i' & y_{i+1}' & \cdots & y_n' \\ . & . & \cdots & & . & . & \cdots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & & y_2^{(n-1)} & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}$$

vagy, az itt szereplő determinánsokat rövidebben jelölve:

$$F_i = \frac{(y_1, \ldots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)},$$

melyről közvetetlenül látjuk, hogy a

$$F_i(y_i) = 1, \quad F_i(y_k) = 0.$$

Ebből következik, hogy a feladat általános megoldása:

$$F = f_1 F_1 + f_2 F_2 + \cdots + f_n F_n.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a keresett

$$F = A_0 y^{(n-1)} + A_1 y^{(n-2)} + \cdots + A_n y$$

lineár differencziálalak együtthatóit úgy határozzuk meg, hogy fönnálljanak az

$$f_i = A_0 y_i^{(n-1)} + A_1 y_i^{(n-2)} + \cdots + A_n y_i$$
$$(i=1, \ldots, n-1)$$

egyenletek. E rendszer az A_0, A_1, ..., A_n-re mindig egyértelműen oldható meg, ha a rendszer determinánsa a 0-tól különböző. Ez a determináns azonban nem más, mint az y_1, y_2, ..., y_n WRONSKY-féle determinánsa, tehát a feladatnak mindig teljesen meghatározott egyetlen megoldása van, ha az adott y_1, y_2, ..., y_n

egymástól lineárisan függetlenek. Ebből egyúttal az is következik, hogy az előbb talált F alak az *egyetlen* lehető alak.

3. A közelítő függvény e meghatározása abban a hibában leledzik, hogy fokozatos interpoláczióra nem igen alkalmas, mert minden tag kiszámítására az összes adott függvényekre — az összes kisérleti görbékre — szükségünk van. Kivánatos tehát, hogy itt is, a Newton-féle interpoláczió mintájára, egy, a fokozatos interpoláczióra alkalmas alakot találjunk.

Jelöljük e végből az

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_k \\ y_1^{(k-2)} & y_2^{(k-2)} & \dots & y_k^{(k-2)} \end{vmatrix}$$

determinánst röviden: $(f_1 f_2 \dots f_k)$-val és az

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \dots & y_{k+1} \\ y' & y'_1 & y'_2 & \dots & y'_{k-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ y^{(k-1)} & y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \dots & y_{k-1}^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

determinánst $(y, y_1 y_2 \dots y_{k-1})$-gyel, akkor a közelitő függvény a következő alakban állitható elő:

$$F = g_1 y + g_2 (y y_1) + g_3 (y y_1 y_2) + \dots + g_n (y, y_1, \dots, y_{n-1}) \qquad \text{(A)}$$

a hol

$$g_k = \frac{(f_1 f_2 \dots f_k)}{(y_1 y_2 \dots y_{k-1})(y_1 y_2 \dots y_k)}.$$

Tegyük fel ugyanis, hogy ez a tétel már $n-1$-re bebizonyittatott, azaz, hogy

$$\Phi = g_1 y + g_2 (y y_1) + g_3 (y y_1 y_2) + \dots + g_{n-1} (y, y_1 \dots y_{n-2})$$

valóban átmegy $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$-be, ha y helyébe rendre $y_1, y_2, \dots, y^{n-1}$ tétetik.

Ekkor tehát a 2. pont értelmében:

$$\Phi = f_1 F_1 + f_2 F_2 + \dots + f_{n-1} F_{n-1}, \qquad (1)$$

a hol

$$F_k=\frac{(y_1\,y_2\cdots y_{k+1}\,y,\,y_{k+1}\cdots y_n}{(y_1\,y_2\cdots y_k\cdots y_{n-1})}.$$

Kimutatjuk, hogy a keresett F ilyen alakú

$$F=\Phi+g_n(y,\,y_1,\,y_2,\ldots,\,y_{n-1}) \tag{2}$$

Ha ugyanis y helyébe y_i tétetik, a hol $i<n$, akkor a jobboldalon álló kifejezés első tagja föltevésünk f_i-be megy át; második tagja pedig eltünik, mert a determináns két oszlopa megegyezik.

Ha pedig y helyébe y_n-et teszünk, akkor f_n-et kapjuk. A második tag ugyanis ekkor

$$g_n\cdot(y_n,\,y_1y_2\cdots y_{n-1})=(-1)^{n-1}\frac{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}}{(y_1\,y_2\cdots y_{n-1})}$$

$$=-(f_1\,F_{1n}+f_2\,F_{2n}+\cdots+f_{n-1}\,F_{n-1})+f_n,$$

a hol

$$F_{in}=\frac{(y_1\cdots y_{i-1}y_n,\,y_{i+1}\cdots y_{n-1})}{(y_1\cdots y_i\cdots y_{n-1})},$$

tehát azt a függvényt jelöli, a melybe az F_i átmegy, ha a határozatlan y helyébe y_i-t teszünk. Az első tag pedig, a Φ, az (1) alatti egyenlet értelmében átmegy

$$f_1\,F_{1n}+f_2\,F_{2n}+\cdots+f_{n-1}\,F_{n-1}\text{-}$$

-be, ha y helyébe y_n tétetik; tehát a (2) alatti kifejezésből éppen f_n lesz, $y=y_n$ esetében.

Minthogy pedig $n=1$ esetében:

$$g_1=\frac{f_1}{y_1},$$

tehát

$$F=g_1\,y$$

valóban f_1-gyé válik $y=y_1$ esetében, tehát az (A) alatti közelítő függvény $y=y_1,\,y_2,\ldots,\,y_n$ esetében sorban $f_1,\,f_2,\ldots,\,f_n$ függvényekbe megy át.

Beke Manó.

AZ ELMÉLETI PHYSIKA MÓDSZEREINEK FEJLŐDÉSE NAPJAINKBAN.

(Második és befejező közlemény.)

Kirchhoff a régi klassikus mechanikát anyagában változatlanul hagyta; újjáalakítása tisztán formális volt. Sokkal messzebbre ment Hertz; s míg a későbbi szerzők majdnem kivétel nélkül utánozták Kirchhoff tárgyalási módját, itt-ott néha inkább csak némely Kirchhoff-nál található kifejezésmódokat, mintha a dolog lényegéhez tartoznának, addig Hertz mechanikáját már sokaktól hallottam dicsérni, de a Hertz mutatta uton még senkit sem láttam haladni.

Tudomásom szerint eddig még nem utaltak arra, hogy van Kirchhoff mechanikájában egy gondolat, mely végső következményeiben közvetlenül a Hertz-féle eszmékre vezet. Kirchhoff ugyanis a mechanika legfontosabb fogalmát, az anyagét csak arra az esetre értelmezi, melyben az anyagi pontok közt tetszés szerinti föltételi egyenletek állanak fenn. Ebben az esetben világosan belátható azon tényezőnek szükségessége, melyet Kirchhoff anyagnak nevez. A többi esetekben, a melyekben az anyagi pontok föltételi egyenletek nélkül úgy mozognak, a mint az a régi erőhatásoknak megfelel, pl. a rugalmasság tanában, az alsó mechanikában stb. Kirchhoff-nak anyag-fogalma mintegy a légből kapott, s az ebből eredő homályosság csak akkor enyészik el teljesen, ha ezen eseteket egyáltalában kizárjuk.

Ezt tette meg Hertz. A régi mechanikában a legnevezetesebb erők azon távolhatásu erők voltak, melyek két anyagi pont közt lépnek föl. Kirchhoff azon távolbahatás metaphysikai okának kérdését a mechanikából kiküszöbölte; de oly mozgásokat, melyek pontosan ugyanazon törvényeket követik, mintha az ilyen erők léteznének, megenged. Ma már, mint azt láttuk, általános azon meggyőződés, hogy az elektromos és mágneses hatásokat egy közeg közvetíti. Még csak a gravitatió, melyről már fölfedezője, Newton is azt tételezte föl, hogy okát valószinűleg valamely közegben kell keresnünk, és a molekuláris erők maradnak hátra. Az utóbbiakat szilárd testeknél az alak változatlanságának föltétele, folyadékoknál a térfogat változatlanságának föltétele közelítőleg pótolhatja.

A rugalmasság, az összenyomható folyadékok expansiója, a kristályosodás és a chemia erői hasonló alakú föltételekkel napjainkig sem voltak helyettesithetők. Hertz ellentétben Kirchhoff-al bizonyára a helyettesités sikerének reményében elvet minden olyan mozgást, mely úgy megy végbe, a mint azt a régi távolhatású erők kivánják, és csak oly mozgásokat enged meg, melyek számára a mathematikailag közelebbről értelmezett föltételek fönnállanak. Ezen kivül az egész mechanika rendszerének fölépitésében még csupán egy mozgási törvényt használ föl, mely a Gauss-féle legkisebb kényszer elvének speciális esete.

Ha Kirchhoff csupán a mozgások okainak kérdését, melyet azelőtt a távolba ható erőkben találtak meg, tiltotta el, akkor Hertz magukat ezen mozgásokat is kiküszöböli, s az erőket föltételi egyenletekkel törekszik helyettesiteni, míg különben rendszerint a mozgás föltételeit az erők hatásaiból vezették le. Hertz tehát sokkal inkább, mint azt Kirchhoff tette, vállalkozik magának az erőnek leküzdésére. Igy meglepően egyszerű, csak igen kevés, logikailag úgyszólván önmaguktól kinálkozó elvekre épiti föl a mechanika rendszerét. Sajnos, hogy egyidejűleg szája is örökre elnémult, s nem felelhet a magyarázatokat kivánó azon számtalan kérdésekre, melyek bizonyára nem csupán az én ajkaimon lebegnek.

Az eddig elmondottakból érthető, hogy bizonyos tünemények, mint a merev rendszerek szabad mozgásai, Hertz elmélete alapján könnyen tárgyalhatók. A többi tüneményeknél Hertz kényszerül bizonyos sejtett és mozgásban levő tömegeket föltételezni, melyeknek a látható tömegekre való hatásaiból magyarázhatók meg ezek mozgásainak törvényei, melyek tehát az elektromagnetikus és gravitatiós tüneményeket létesítő, szintén sejtett közegeknek felelnek meg. De hogyan képzeljük el ezen ismeretlen tömegeket a különböző esetekben? Vajjon egyáltalán lehetséges-e bármely körülmények között segítségükkel czélt érni? A korábbi közegeknek és a Maxwell-féle fényæthernek strukturáival nem ruházhatók fel, mert mindezen közegekben oly erők hatnak, a melyeket Hertz épenséggel kizár.

Ha már most aránylag egyszerű mechanikai feladatoknál a sejtett tömegeknek aránytalanul bonyolódott rendszereire bukkanunk, melyek a feladatot a Hertz-féle elméletnek megfelelőleg megoldják, az utóbbiak értéke mégis pusztán csak akadémikus.

A Hertz-féle mechanikát inkább a távol jövő programmjának tekintem. Ha majdan sikerülni fog minden természeti tüneményt a Hertz-féle modorban ilyen sejtett mozgásokkal természetes módon megmagyarázni, akkor a Hertz-féle mechanikának a régi fölötti diadala teljes leszen. Addig is a régi mechanika az egyedüli, mely minden tüneményt valóban képes érthető modorban tárgyalni, a nélkül, hogy oly dolgokra szorulna, melyek nemcsak sejtettek, hanem a melyekről homályos sejtelmünk sincs hogy miként gondolandók el?

Hertz a mechanikáról irott könyvében nemcsak Kirchhoff-nak mathematika-physikai eszméit, hanem Maxwell-nek megismeréselméleti gondolatait is bizonyos tökéletességig fejlesztette.

Maxwell a Weber föltevését reális physikai elméletnek nevezte, a mivel azt akarta mondani, hogy szerzője az objectiv igazságot vette számára igénybe; ellenben a saját fejtegetéseit csupán a tünemények képeinek mondotta. Ezzel kapcsolatban Hertz oly világosan tudomásukra hozza a physikusoknak azt, a mit a philosophusok bizonyára már régen kijelentettek, hogy t. i. semmiféle elmélet objectiv, a tényleges természettel valóban egybevágó nem lehet, sőt, hogy mindegyik a tüneményeknek csupán észbeli képe, mely ezekhez oly viszonyban áll, mint a milyenben a jel a jelzetthez.

Ebből következik, hogy nem lehet feladatunk absolut helyességű elméletet, hanem csupán egy lehetőleg egyszerű, a tüneményeket lehetőleg jól ábrázoló képét találnunk. Sőt elképzelhető két egészen különböző elméletnek a lehetősége is, melyek mindketten egyaránt egyszerűek, s a tüneményekkel egyaránt jó összhangzásban vannak, melyek tehát, bár homlokegyenest ellenkeznek, mégis egyenlően helyesek. Annak kijelentése, hogy valamely elmélet az egyedüli helyes, csak subjectiv meggyőződésünk kifejezése lehet az iránt, hogy más hasonló egyszerűségű, hasonló hűségű kép nem létezhet.

Számos, azelőtt felfoghatatlan kérdés így önként elesik. Korábban azt kérdezték, hogyan indulhat ki az erő egy anyagi pontból, mely maga is csak gondolatunkban létezik; hogyan adhat a pontok összesége valamit, a minek kiterjedése is van? stb. Most már tudjuk, hogy mind az anyagi pontok, mind az erők pusztán eszményi képek. Az elsők valamivel, aminek van kiterjedése, egyenlőek nem lehetnek, de annak tetszésszerinti pontosságú ábrázolatai lehetnek. Az a kérdés, vajjon az anyag atomistikus összetételű, avagy continuum-e, most arra a sokkal világosabb kérdésre van visszavezetve, vajjon rengeteg sok egyednek, vagy egy continuumnak elképzelése adhatja-e a tüneményeknek jobb képét?

*

Legutóbb főleg a mechanikáról beszéltünk. Egy az egész physikára kiható felforgatás az energia-elv jelentőségének rohamos fokozódásával kapcsolatban kiséreltetett meg. Ezen elvet már egyszer úgy mellesleg mint a mechanikai természetfelfogásnak a tapasztalattól igazolt következményét felemlítettük. Ezen felfogás szerint az energia mint valami ismeretes, már korábban bevezetett menynyiségekből (tömeg, sebesség, erő stb.) adott módon összetett mathematikai kifejezés tünik fel, mely minden titokzatosságot nélkülöz, és minthogy a hőt, az elektromosságot stb mint a mozgásnak persze részben teljesen ismeretlen alakjait tekinti, azért az az energia elvében következtetéseinek fontos igazolását látja.

Ezen elv méltatásával különben már a mechanika zsenge gyermekkorában találkozunk. Leibnitz az erő substantialitásáról, mi alatt az energiát értette, majdnem ugyanazon szavakkal szólt, mint a legmodernebb energetikusok; de ő a rugalmatlan testek ütközésénél az eleven erőből deformatiót a cohaesio és alkat megszakadását, rúgók megfeszülését stb. keletkezteti; arról, hogy a hő az energiának egyik alakja, sejtelme sincsen. Ennélfogva Dubois-Reymond-nak teljességgel nincs igaza, hogy ha Helmholtz fölött tartott emlékbeszédében Mayer Róbertet még egyszer kisebbíteni törekszik és tőle a hő és mechanikai munka egyenértékűségére vonatkozólag a prioritást megtagadja. Az utóbbi különben egyáltalán nem vallotta azon nézetet, hogy a hő molekuláris mozgás, sőt azt az energia új alakjának tartotta és csupán a hőnek a mechanikai energiával való egyenértékűségét vitatta.

Az első felfogásnak hódoló physikusok, mindenek fölött Clausius is szorosan megkülönböztetik az egyedül belőle folyó tételeket, a különös thermodynamika tételeit azoktól, melyek a hő természetére vonatkozó minden föltevéstől függetlenek, és kétségtelen tapasztalati tényekből vezethetők le, t. i. az általános thermodynamika tételeitől.

Míg a különös thermodynamika a fényes eredmények egy sora után a molekuláris mozgások mennyiségtani tárgyalásánál föllépő nehézségek miatt fennakadt, addig az általános thermodynamika ez után is az eredmények bőségével dicsekszik. Azt találták, hogy arra, mikor és mekkora mennyiségben alakulhat egymásba át a hő és a munka, a hőmérséklet az irányadó. A hozzávezetett hőmennyiség növekedése oly szorzatnak mutatkozott, melynek egyik tényezője az ú. n. absolut hőmérséklet, másik tényezője pedig egy oly függvénynek növekedése, melyet Clausius nyomán entropiának szoktunk nevezni. Ebből már most Gibbs szerkesztett új függvényeket, melyek közül az állandó hőmérséklet melletti, az állandó nyomás melletti thermodynamikai potentiált stb. említjük, s melyek segítségével a legkülönfélébb tekintetben, mint a chemiában, a capillaritás tanában stb. a legmeglepőbb eredményeket érte el.

Azt találták továbbá, hogy más energia-fajok átalakulásainál mint pl. az elektromos, mágneses, a sugárzó energiáknál stb. hasonló alakú egyenletek állanak fön és különösen, hogy minden esetben a két tényezőre való felbontás hasonló sikerrel eszközölhető. Ez a kutatók egy sorát, kik magukat energetikusoknak nevezték, oly lelkesedésre gerjesztette, hogy minden eddigi nézettel készek voltak szakítani, azt hozván fel ellenök, hogy a hő és az eleven energia egyenértékűségétől azonosságukra következtetni hibás, mintha az azonosság mellett csupán csak az egyenértékűség tétele szólna, s annak sok egyéb bizonyítéka egyáltalán nem léteznék.

Az új felfogás szerint a természet kutatásának egyedüli helyes kiinduláspontja az energia fogalma. Annak két tényezőre való felbontása és egy ehhez csatlakozó variatiós tétel pedig az egész természetnek alaptörvénye. Annak mechanikai magyarázatát, hogy miért veszi föl az energia épen azokat a furcsa alakokat és miért követ minden alakjában hasonló, de lényegileg mégis más törvényeket, az energetikusok fölöslegesnek, sőt károsnak tartják, s a physika, sőt az összes természettudomány szemeikben az energia viselkedésének összes lehetséges alakulásaiban való leirásában áll; ez az energia természettudománya, a mely elnevezés, ha energia alatt értünk mindent, a minek hatása lehet, pleonasmussá válik.

A különböző energia-alakok viselkedéseinek analogiái kétségtelenül oly fontosak és érdekesek, hogy azoknak minden irányban való felkutatása a physika legszebb feladatai közé tartozik; másrészt az energia-fogalom fontossága bizonyára igazolja azt a törekvést, mely az energiát akarja első kiindulásponttá tenni. Meg kell engednünk azt is, hogy az a kutatási irány, melyet én klassikus elméleti physikának neveztem, helylyel-közzel oly torzalkotásokra vezetett, melyekkel szemben a reactióra tényleg szükség volt. Minden jött-ment hivatást érzett magában arra, hogy atomokból, forgatagokból s ezek lánczolataiból valami alakitmányt eszeljen ki, s azt hitte, hogy ezzel a Teremtőnek tervét végérvényesen kiszimatolta.

Nagyon jól tudom, mennyire előnyös, ha a problemákat a legkülönbözőbb oldalokról támadjuk meg és szivem minden eredeti, lelkes tudományos munkálatra melegen feldobog. Ennélfogva a secessióval élénken kezet szorítok. De azt vettem észre, hogy az energetika gyakran felületes, pusztán alaki analogiáktól félrevezettette magát, hogy törvényei nélkülözik azt a világos és kétségtelen fogalmazást, mely a klassikus physika törvényeit jellemzi, következtetései hiányával vannak az ott kidolgozott szigorúságnak, hogy a régiből sok jót, sőt a tudományra nézve nélkülözhetetlent kiküszöbölt. Az a vita is, mely el akarja dönteni azt, vajjon az anyag avagy az energia-e a valóban létező, a régi, túlhaladottnak tekintett metaphysikába való visszaesésnek látszik, s vét annak megismerése ellen, hogy az összes elméleti fogalmak csupán képzeleti képeknek tekintendők.

Ha mindenről tartózkodás nélkül nyilatkoztam, akkor azt azon hiszemben tettem, hogy az energia-tan továbbfejlődése iránti érdeklődésemet hasznosabb módon nyilvánitottam, mint azt puszta dicsérettel tehettem volna. Épen úgy mint a Hertz-féle mechanikát, az összes physikának a két energia-tényezőre és a fölhozott variatio-tételre vonatkozó törvényből való levezethetőségét a messze jövő eszméjének kell tartanom. Csak az adhat feleletet arra a ma még egészen eldöntetlen kérdésre, vajjon a természetnek egy ilyen képe jobb-e a réginél, vagy épenséggel a legjobb-e?

*

Az energetikusokról áttérhetünk a phænomenologusokra, kiket mérsékelt secessionistáknak szeretnek elnevezni. Az ő tanuk reactio azon felfogás ellen, mely szerint a régi kutatási módszer az atomok alkatáról szóló hypothesiseket tekinti a tudomány tulajdonképeni czéljának, s az ebből a látható folyamatokra kiadódó törvények ezen föltevések puszta ellenőrzői.

Ez természetesen csupán a legszélsőségesebb irányzatra áll. Láttuk már, hogy Clausius szigorú megkülönböztetést tett az általános, tehát a molekuláris hypothesisektől független és a specialis thermodynamika között. Sok más physikus is, mint pl. Ampère, Neumann Ferencz, Kirchhoff levezetéseiket nem alapitották a molekulákra vonatkozó felfogásokra, még ha az anyag molekuláris szerkezetét nem is tagadták.

Igen gyakran találkozunk a levezetésnek egy bizonyos módjával, melyet *euklidikus*nak nevezhetnék, mert utánozza azt, a melyet Euklides a geometriában alkalmazott. Néhány vagy önmaguktól világos, vagy kétségtelenül tapasztalati jellegű axioma felállitása után ezekből először is bizonyos egyszerű elemi törvények vezettetnek le, mint azok logikai következményei, s végül ezekből szerkesztetnek meg az általános (integrális) törvények.

Ezzel és a molekulár-elméleti levezetésmódokkal eddig úgy nagyjából beérték; nem úgy MAXWELLnek elektromagnetikus elméleténél. MAXWELL első dolgozataiban azt hitte, hogy az elektromágnességet továbbító közeg szintén nagy számú molekulából vagy legalább is mechanikai individuumokból áll, annak szerkezetét azonban oly bonyolódottnak hitte, hogy azok pusztán oly egyenletek felállításának segédeszközei, melyek egy a ténylegeshez bizonyos tekintetben hasonló hatás schemáját adják, de mint a természetben létezők végleges képei sohasem tekinthetők. Később kimutatta, hogy nemcsak ezek a mechanismusok, de számos másféle is czélhoz vezetnének, hacsak bizonyos általános föltételeknek megfelelőek; de összes fáradozásai, melyekkel egy tényleg egyszerű mechanismust akart találni, a mely mindezen feltételeket kielégitené, hajótörést szenvedtek. Ez a körülmény útját egyengette egy oly tannak, melyet legélesebben úgy vélek jellemezhetőnek, ha immár harmadszor visszatérek HERTZhez, ki az elektrodynamika alapegyenleteiről szóló értekezéseinek bevezetésében fejtette ki az ezen tanra nézve typikus eszméket.

Ezen alapegyenletek kielégitő mechanikai magyarázatát HERTZ nem kereste, vagy legalább is nem találta meg; de az euklidesi evezetésmódot is mellőzte. Joggal utal arra, hogy a mechanikában nem azon néhány kisérlet, a melyből annak alapegyenleteit rendszerint levezetni szokták, az elektrodynamikában nem AMPÈREnek öt vagy hat alapkisérlete azok, melyek alapján azon alapegyenletek helyességéről oly szilárdul meggyőződünk, hanem az alapegyenletek következményeinek az összes további tapasztalati tényekkel való megegyezése. Ő ezért azt a salamoni itéletet mondja ki, hogy ha ezen alapegyenletekre egyszer már szert tettünk, akkor a legjobb azokat minden levezetés nélkül elfogadnunk, a tüneményekkel folytonosan összehasonlitanunk és állandó megegyezéseikből helyességük bizonyitékát meritenünk.

A nézet, mely itt legextremebb alakjában fejeztetett ki, a legkülönfélébb fogadtatásra talált. Míg némelyek hajlandók voltak azt rossz élcznek tekinteni, mások ezentúl benne látták a physika egyedüli czélját; minden hypothesis mellőzésével, minden szemléltetés vagy mechanikai magyarázat hijával a tünemények minden sorozata számára egyenleteket állitván föl, melyekből azok lefolyása quantitative meghatározható; úgy, hogy a physikának egyedüli feladata volna: próbálgatással lehetőleg egyszerű egyenletekhez jutni, melyek az isotropiának s egyebeknek bizonyos formális föltételeit kielégitik, s azokat utólag a tapasztalattal egybevetni. Ez a phænomenologiának legszélsőbb irányzata, melyet mathematikus phænomenologiának nevezhetnénk, míg az általános phænomenologia a tények minden csoportját az összes beletartozó tünemények felsorolásával és természettudományi jellemzésével törekszik leirni, az erre szolgáló eszközökben való válogatás nélkül, de lemondván minden egységes természet-felfogásról, minden mechanikai vagy másnemű magyarázatról. Az utóbbit jellemzi egy állitás, melyet MACH idéz, s mely szerint az elektromosság pusztán összesége mindazon tapasztalatoknak, melyeket e téren eddig tettünk, s ezentúl szerezni fogunk. Mindkettő czélul tűzi ki a tünemények ábrázolását anélkül, hogy a tapasztalatok terét elhagyná.

A mathematikai phænomenologia első sorban gyakorlati szükséget elégit ki. Azon föltevések, a melyek alapján az egyenletek származtak, bizonytalanoknak és változékonyaknak mutatkoztak; maguk az egyenletek pedig, ha már elegendő esetben kipróbáltattak, legalább bizonyos pontossági határok közt megállottak; ezen határokon túl ismét kiegészitésre, tökéletesitésre szorultak. A gyakorlati alkalmazások érdekében tehát szükséges volt a szilárdul állót, a biztositottat az ingadozótól lehetőleg tisztán szétválasztani.

Meg kell engednünk azt is, hogy minden tudománynak s így a physikának is czélja a lehető legtökéletesebben akkor éretnék el, ha oly képleteket lehetne találni, melyek segitségével az előrelátott tüneményeket minden különös esetben egyértelműleg, biztosan és tökéletes pontossággal kiszámithatnók; de ez épen oly kevéssé elérhető eszmény, mint az összes atomok kezdetleges állapotának és hatástörvényének ismerete.

Ha a phænomenologia azt hitte, hogy a természetet a tapasztalat korlátainak túllépése nélkül ábrázolhatja, akkor ezt illusiónak kell tartanom. Semmiféle egyenlet sem fejezhet ki bizonyos változásokat absolut pontossággal; mindegyik azokat idealizálja, a közöset kiemeli és sok körülményt mellőz, tehát a tapasztalat korlátait túllépi. Hogy ez szükséges, valahányszor oly képzetre akarunk szert tenni, melynek alapján valamely bekövetkezendőt előre jelezni képesek lehessünk, az magából a gondolkodás folyamatából következik, mely abban áll, hogy a tapasztalathoz valamit hozzátéve, szellemi képet alkotunk, mely nem levén maga a tapasztalat, ezért számos tapasztalatot ábrázolni képes.

A tapasztalat, mint azt Goethe mondja, mindig csak felerészben tapasztalat. Mennél merészebben teszszük magunkat a tapasztalaton túl, annál általánosabb áttekintésre teszünk szert, annál meglepőbb tényekre bukkanhatunk, de annál könnyebben tévedhetünk is. Ezért a phænomenologia ne igen dicsekedjék azzal, hogy a tapasztalat körét nem lépi át, csak intsen, nehogy azt túlságosan megtegyük.

Abban is téved, ha azt hiszi, hogy a természetet ábrázoló képre szükség nincsen. A számok, vonatkozásaik és csoportosításaik épen úgy képei bizonyos eseményeknek, mint a mechanikának geometriai képzetei. Az elsők csupán józanabbak, a quantitativ ábrázolásra alkalmasabbak, de azért lényegesen újabb perspektivák nyitására annál kevésbbé alkalmasak; rossz heuristikus utmutatók; az általános phænomenologia összes képzetei épen így a tünemények képeinek mutatkoznak. Ezért bizonyára akkor biztositjuk a sikert legjobban, ha szükség szerint mindig az ábrázolás összes eszközeit felhasználjuk s lépten-nyomon nem mulasztjuk el a nyert képeknek új tapasztalatokkal való ellenőrzését.

Akkor nem eshet meg velünk az, a mit az atomistáknak lobbantottak szemükre, hogy a képek elvakitanak és tényeket még sem látunk. Ide jutunk minden elmélettel, ha ezt tulságos egyoldalusággal műveljük. Ennek oka kevésbbé az atomistikának specifikus sajátságaiban keresendő, mint inkább abban a körülményben, hogy még nagyon kevés intelem óvott a képekben való bizalomtól. A mathematikusnak épen oly kevéssé szabad képleteit az igazsággal összetévesztenie, mert akkor hasonló módon elvakittatnék. Ezt tapasztalhatjuk a phænomenologusokon, ha azt a sok tényt, melyek csak a speciális thermodynamika szempontjából érthetők meg, nem veszik észre; az atomisztika ellenfelein, ha minden mellette szóló érvet elhanyagolnak, sőt magán Kirchhoff-on is, ha ő, hydrodynamikai egyenleteiben bizva, a hőt vezető gáz különböző helyein a nyomás egyenlőtlenségeit nem tartja lehetségeseknek.

A mathematikai phænomenologia természetesen visszatért az anyag folytonosságának a látszat szerint megfelelőbb felfogásához. Ezzel szemben arra hívtam fel a figyelmet, hogy azon differentiálegyenletek, melyeket felhasznál, az értelmezés szerint puszta határátmeneteket adnak meg, s ezek az egyedek nagy számának fölvétele nélkül egyszerűen értelmetlenek. Csupán mennyiségtani jelvények megfontolás nélküli használatánál hihetjük azt, hogy a differentiál-egyenleteket el lehet az atomistikus képzetektől különíteni. Ha tisztába jövünk azzal, hogy a phænomenologusok a differentiál-egyenletek mezébe burkoltan szintén atomszerű egyedek fölvételéből indulnak ki, melyeket a tünemények minden csoportjánál más és más tulajdonságokkal kell a legbonyolódottabb módon felruházniok, akkor csakhamar felül kerekedik bennünk az egyszerű és egységes atomistika után való vágyakodás.

Az energetikusok és phænomenologusok a molekulár-elmélet jelenlegi csekély termékenységéből annak elpusztulására következtettek. Mig az némelyek véleménye szerint csak károkat okozott, addig mások megengedték, hogy korábban haszna is lehetett; mert majdnem valamennyi egyenlet, mely a mathematikai phænomenologusok szerint most a physika összeségét teszi, a molekulárelmélet alapján nyeretett; de az utóbbiak azt állitják, hogy most, mikor már ezen egyenleteknek birtokában vagyunk, fölöslegessé vált. Valamennyien megsemmisitésére esküdtek össze. Rámutattak arra a történeti elvre, hogy sokszor a legnagyobb tekintélynek örvendő nézeteket aránylag rövid idő alatt teljesen másnemű nézetek váltották föl, sőt úgy, mint sz. Remigius a pogányokat, arra intették az elméleti physikusokat, hogy mindazt, a mit még az imént imádtak, menten égessék el.

De a történeti elvek néha kétélüek. Az bizonyos, hogy a történelem gazdag a váratlan fölfordulások példáiban; bizonyára hasznos lesz annak lehetőségét szem előtt tartanunk, hogy azt, a mit most a legbiztosabban hiszünk, valaha valami teljesen különböző fogja kiszorítani; de épen úgy annak lehetőségét is, hogy bizonyos vivmányok, talán kiegészitett és változott alakban, de mindörökké megmaradnak a tudományban. Sőt ugyanazon történeti elv szerint az energetikusoknak és phænomenologusoknak nem volna szabad véglegesen diadalmaskodniok, mert ebből rögtön hamaros bukásukra lehetne következtetnünk.

★

Clausius példájára a speciális thermodynamika barátjai sohasem vonták kétségbe az általános thermodynamikának nagy jelentőségét; az utóbbinak sikerei tehát az elsővel szemben nem bizonyitanak semmit. Még csak az a kérdés, vajjon ezen sikerek mellett vannak-e olyanok is, melyeket csakis az atomistika érhetett el? Már pedig ilyeneket az atomistika a régi fénykorát követő időből is sokat és nevezeteseket mutathat föl. Pusztán molekulár-elméleti elvekből vezetett le van der Waals oly képletet, mely a folyadékok, gázok és gőzök viselkedését és ezen halmazállapotok számos átmeneti állapotait bár nem tökéletes pontossággal, de csudálatra méltó megközelítéssel irja le és sok új eredményre, pl. a megfelelkező állapotok elméletére vezetett. Ugyancsak molekulár-elméleti megfontolások mutatták meg legujabban a képlet megjavitásának útját s nincs kizárva annak reménysége, hogy legközelebb a vegyileg legegyszerübb anyagok, nevezetesen az argon, helium stb. viselkedését teljes pontossággal képesek leszünk leirni, úgy, hogy épen az atomistika közelitette meg leginkább a testek összes állapotait jellemző képletben a phænomenologusok eszményképét. Ehhez csatlakozott a cseppfolyós folyadékoknak egy kinetikai élmélete.

Az atomistika továbbá épen úgy, mint ahogyan korábban jó világitásba helyezte az Avogadro-féle törvényt, az ozon természetét stb., újabban a Gibbs-féle dissociatió-elmélet érzékitésénél és kidolgozásánál nyújtott segédkezet, bár azt Gibbs más, de mégis oly uton találta, mely általános molekulár-elméleti alapképzeteket föltételez. Nemcsak újra megalapitotta a hydrodynamika egyenleteit, hanem megmutatta azt, hogy azokat, valamint a hővezetés egyenleteit hol kell megjavítanunk? Bár ha a phænomenológia a maga részéről is bizonyára kivánatosnak tartja azt, hogy mindig új meg új kisérleteket végezzünk, melyekkel egyenleteinek esetleg szükséges kiigazításait eszközöljük, azért e téren még is az atomistika végez sokkal többet, mert bizonyos olyan kisérletekre enged következtetni, a melyek első sorban nyújtanak kilátást az ily kiigazítások megtalálására.

A gázok kétféle hőfoghatóságának viszonyára vonatkozó, specifikusan molekuláris-elméleti tan is épen most ismét fontos szerepet játszik. Clausius ezen viszonyt azon legegyszerübb gázokra, melyeknek molekulái úgy viselkednek, mint a rugalmas golyók, $1\,^{2}/_{3}$-ban állapította meg, mely érték az akkor ismeretes gázok egyikére sem illett, miből azt következtette, hogy ilyen egyszerű gázok egyáltalán nincsenek.

Maxwell ezen viszonyt azon esetben, mikor a molakulák ütközés közben mint nem gömbalakú rugalmas testek viselkednek, $1^{1}/_{3}$-ban állapította meg. Minthogy a viszony értéke a legismertebb gázok esetében 1·4, ennélfogva Maxwell a maga elméletét szintén elvetette. Az ő figyelmét elkerülte azon eshetőség, hogy a molekulák egy tengely körül symmetrikusok lehetnek; ez esetben az elmélet a kérdéses viszonyt pontosan 1·4-ben állapítja meg.

A régi Clausius-féle $1\,^{2}/_{3}$-os értéket már Kundt és Warburg higany-gőzökre megállapították; kisérletük a föllépő nagy nehézségek miatt azóta nem ismételtetett és majdnem feledésbe ment. Most a hőfoghatóságok e viszonyának $1\,^{2}/_{3}$-os értéke minden a Lord Rayleigh és Ramsay fölfedezte új gázoknál ismét föllép s az összes többi körülmények is, mint ez már a higanygáznál történt, molekuláiknak az elmélet követelte egyszerű alkatára látszanak mutatni. Milyen befolyással lett volna az a gázelmélet történetére, ha Maxwell nem esett volna ebbe a csekélyke tévedésbe, vagy ha az új gázok már Clausius számításainak idejében ismeretesek lettek volna? Akkor mindjárt kezdetben a hőfoghatóságok viszonyának az elmélet követelte összes értékeit a legegyszerübb gázoknál már megtalálták volna.

Végül még azon vonatkozásokat említem föl, melyek a molekuláris elmélet tanusága szerint az entropia-tétel és a valószinüségszámitás közt fennállanak s melyeknek reális jelentősége fölött lehet ugyan vitatkozni, de a melyekről az elfogulatlanok egyike sem veszi tagadásba azt, hogy képesek eszmekörünket kitágítani, új eszmekapcsolatokra, sőt kisérletekre is utalni.

Az atom-elméletnek mindezen eredményeit és számos további vívmányait sem a phænomenologia, sem az energetika nem adhatja s én azt állítom, hogy az olyan elmélet, mely más úton el nem érhető önálló eredményekre vezet, s mely mellett ugyancsak sok más physikai, chemiai és kristallographiai tény tanuskodik, nem rombolandó le, hanem tovább fejlesztendő. De a molekulák természetére vonatkozó felfogásoknak a legtágabb tér engedendő. Így a hőfoghatóságok viszonyának elmélete nem ejthető el azért, mert még általánosságban nem alkalmazható; mert a molekulák csak a legegyszerübb gázoknál, s ezeknél sem a legmagasabb hőmérsékleteken s itt is csak ütközéseiknél viselkednek úgy, mint rugalmas testek; közelebbi és bizonyára rendkivül bonyolódott alkatukra még egyáltalán nincsenek adataink, sőt ilyenek fölkeresésében kell fáradoznunk. Az atomistika mellett haladhat az egyenleteknek minden föltevéstől elkülönitett, ugyancsak szükséges kiélesitése és taglalása, anélkül, hogy az utóbbi a maga mennyiségtani apparatusát, az előbbi pedig a maga materiális pontjait dogmákká emelnék.

*

A mai napig azonban még a véleményeknek leghevesebb küzdelme folyik; mindenki a magáét tartja a valódinak és tegye is, ha szándéka, annak erejét a többiekéhez mérni. A gyors haladás a várakozást arra, hogy mindennek mi lesz a vége, a legmagasabb fokra felcsigázta.

Megáll-e majd a régi mechanika a maga régi erőivel, ha azokat metaphysikai vonatkozásaiktól meg is tisztitotta, vagy csak egykor a történetben fog-e még tovább élni, kiszorittatván Hertz-nek sejtett tömegeitől vagy egészen másnemű képzetektől? Vajjon minden kiegészítés és módositás daczára a mai molekuláris elméletből csak a lényeges marad-e majd fenn; vajjon a jövőben egy a maitól teljesen eltérő atomistika fog-e uralkodni, vagy talán épenséggel az én bizonyitásaim ellenére a tiszta continuum képzete fog-e a legjobb képnek bizonyulni? Vajjon megnyeri-e a mechanikai természet-fölfogás majdan a fényæther számára talált egyszerű mechanikai képpel a döntő ütközetet; vajjon örökké fenn maradnak-e legalább a mechanikai modellek, vagy újak, nem mechanikai eredetüek jobbaknak fognak-e bizonyulni; vajjon a két energia-tényezőt egykor minden uralni fogja-e, vagy végűl megelégszenek-e azzal, hogy minden hatót mint különböző tünemények összeségét jellemzenek, avagy talán az elmélet épenséggel puszta képlet-gyűjteménynyé és az egyenleteknek ezekkel kapcsolatos taglalásává válik-e? Vajjon egyáltalán megalakul-e azon meggyőződés, hogy bizonyos képek már újabb, egyszerűbb és általánosabb képekkel többé nem szorithatók ki, hogy azok igazak, avagy talán a jövőről úgy alkotjuk meg a legjobb képzetet, ha azt képzeljük el, a miről egyáltalán fogalmunk sincsen?

Mindezek bizonyára érdekes kérdések! Majdnem sajnáljuk, hogy eldőntésük előtt meg kell halnunk. Ó te igényekkel eltelt halandó! A te sorsod a hullámzó csatának szemlélése közben érzett öröm! Különben inkább a közelfekvő feldolgozásával foglalkozzunk s ez oly messzire esők fölött ne törjük fejünket. A század már eleget nyújtott! A jövő századnak a positiv tények reményen felüli bőségét és a kutatási módszerek megbecsülhetetlen rendezését és tisztázását hagyja örökségül. Egy spártai harczoskar az ifjaknak ezt kiáltotta oda: Váljatok vitézebbekké mint mi vagyunk!

Ha régi szokást követvén, az új századot áldással akarjuk fogadni, akkor bizonyára büszkeségben a spartaiakhoz hasonlóan csak azt kivánhatjuk neki, hogy nagyobbá, jelentőségesebbé váljék mint a milyen az elmuló század.

Πατρὸς ἀμείνων.

Ford. *Bozókg Endre.*

A KINETIKAI GÁZELMÉLET ALAPHIPOTÉZISEIRŐL.

(Első közlemény.)

A gázokon megfigyelhető jelenségek leirásához két különböző hipotézis alapján juthatunk el. Az egyik hipotézis így fogalmazható:

Valamely gáz belsejében szerkesztett bármily kicsiny térfogatú zárt felület egy oly testet tartalmaz, a melynek összes lényeges tulajdonságai a vizsgált gázzal közösek.

Egy test *lényeges* tulajdonságain itt ama tulajdonságait értem, a melyek kizárólag a test anyagától és halmazállapotától függenek: ily tulajdonságokat jellemeznek pl. a nyomás, térfogat és hőmérséklet közti összefüggés, a belső surlódási, hővezetési együttható, a törésmutató, dielektromos állandó stb.

Ezt az első hipotézist röviden így szokás kimondani: a gáz az általa elfoglalt teret *folytonosan* tölti be. Ugyanezt szoktuk feltenni a cseppfolyós testekre vonatkozólag is, a miért is a gázoknak e feltevés mellett kifejtett elméletét a gázok *hidrodinamikai* elméletének nevezhetjük. A hidrodinamikai elmélet igen szorosan simul a tapasztalathoz, minthogy eddig még nem sikerült a gázokban folytonossági hiányokat észrevenni s ezért minden más elmélettől megkövetelhetjük, hogy eredményei a hidrodinamikai elmélet eredményeivel megegyezésben legyenek.

Ilyennek kell lenni tehát a másik elméletnek is, a melynek alapföltevéseiről a következőkben szó lesz, az ú. n. *kinetikai gázelméletnek* is, a mely szerint minden gáz apró egymástól különálló testecskékből, az ú. n. *molekulákból* áll.

Alapjában véve tehát a két elmélet egymásnak homlokegyenest ellenmond, eredményeik azonban mégis összeegyeztethetők, hacsak a molekuláknak oly mozgásokat tudunk tulajdonítani s a jelenségeket a molekulák mozgása segitségével úgy tudjuk értelmezni, hogy e láthatatlan molekuláris mozgás összes külső megnyilatkozásai a hidrodinamikai elméletnek megfeleljenek.

Hogy ez megtörténhessék, első sorban a molekulák méreteit a kisérletileg megfigyelhető méretekhez képest igen kicsinyeknek s számukat szertelen nagynak kell felvennünk, mert csak ebben az esetben bírhat a molekulák összesége egy folytonos tömeg látszatával. Az energia megmaradásának elve felvilágositást ád arról, hogy átlag mily sebességet kell a molekuláknak tulajdonitanunk:* ez az átlagos sebesség több száz, sőt ezer $\frac{m}{sec}$, gondolható tehát, mily bonyolúlt mozgás keletkezik így a molekulák tömkelegében, úgy, hogy kezdettől fogva le kell mondanunk arról, hogy az egész mozgást teljesen szigorú analitikai tárgyalásnak vessük alá. Az egyes molekulák mozgásának részletei azonban nem is érdekelnek bennünket, csak az egész mozgás ama jellemzői, a melyek a mozgás külső megnyilatkozásait határozzák meg: pl. az a mozgásmennyiség, a mely bizonyos idő alatt egy adott síkfelületen áthalad (ez határozza meg az illető felületre ható nyomó erőt), a molekuláris mozgás összes eleven ereje (ez a gáz hőtartalmával ekvivalens), az a mozgásmennyiség, a mely adott idő alatt egy gázréteg egy másik gázrétegnek átad (ettől függ a két réteg közt fellépő belső surlódás) s. i. t.

Mind e mennyiségek a gáz valamennyi molekulájának mozgásától, a molekulák mozgási állapota jellemzőinek bizonyos módon vett *középértékeitől* függenek, s ezért elegendő a kinetikai gázelmélet felépitésére, ha egyes molekulák mozgási állapotának csupán a *valószinűségét* határozzuk meg, a miből azután az említett középértékeket, tekintettel a molekulák óriási számára úgyszólván egész pontosan megkaphatjuk.

A főprobléma tehát meghatározni annak valószinűségét, hogy

---

* Egy molekula sebességén itt s a következőkben is a molekula tömegközéppontjának sebessége értendő.

bizonyos molekulák bizonyos mozgási állapotban legyenek; ha e problémának szigorú megoldása sikerül, akkor a molekuláris mozgásnak összes külső megnyilatkozásai szigorúan leírhatók.

E probléma megoldását épen az segíti elő, a mi egyes molekulák mozgásának pontos megvizsgálását meghiúsítja, a molekulák *összeütközései*. Hogy ugyanis a tapasztalati jelenségeket leírhassuk, fel kell tennünk, hogy a molekulák egymásra bizonyos erőket gyakorolnak, hogy tehát kellő közel jutva egymáshoz, egymás sebességében észrevehető változást idéznek elő; ha két molekula egymás sebességét észrevehető módon megváltoztatta, azt mondjuk, hogy a két molekula *összeütődött*. Az összeütközések által egy molekulának sebessége igen sűrűn változik (másodperczenkint több ezer milliószor) s ez teszi lehetővé problémánknak egy bár önkényes, de eléggé plausibilis feltevés alapján való megoldását. Egy molekula ugyanis rövid idő alatt felveszi úgyszólván az összes lehetséges nagyságú és irányú sebességeket, úgy, hogy eléggé jogosultnak látszik ama feltevés, hogy egy molekulánál bizonyos sebesség fellépése *tisztán a véletlentől függ s az összeütközésektől, jelesen ama sebességektől, a melylyel a szomszédos molekulák bírnak, teljesen független* . . . . (*A*)

Ezen a hipotézisen épül fel a mai kinetikai gázelmélet: hallgatagon használta már Maxwell, a szigorú analitikai alapon nyugvó gázelméletnek megalapítója is, s utána többé-kevésbé öntudatosan mindazok, kik a gázelmélet továbbfejlesztésén munkálkodtak, pontosan azonban csak utolsó időben körvonalozták Samuel Hawkesley Burbury és Ludwig Boltzmann, az előbbi néhány a *Nature* 1894-diki évfolyamában megjelent czikkében, ez utóbbi pedig *Vorlesungen über Gastheorie* czimű művének I. részében (21. l.).

Boltzmann itt világosan rámutat arra, hol lép be a molekulák mozgási állapota valószinűségének meghatározásánál az *A)* alatti feltevés s a Maxwell-féle gázelmélet felépitésénél e feltevés nélkülözhetetlenségéről meggyőz bennünket, végre nevet is ád a molekulák oly mozgási állapotának, a melynél az (*A*) alatti feltevés ki van elégítve, *molekulárisan rendezetlennek* nevezve az ily állapotot s összes fejtegetéseire nézve egyszer s mindenkorra felteszi, hogy a gáz állapota molekulárisan rendezetlen s az idők folyamán is ilyen marad. Megmutatja azután, miként fejthető ki ezen alaphipotézis mellett egész szigorúan a kinetikai gázelmélet, még pedig úgy, hogy magában foglalja a hidrodinamikai elmélet összes eredményeit s még néhány oly a tapasztalattal megegyező eredményt, a melyek a hidrodinamikai elméletből nem adódnak ki (a gázokon észlelhető jelenségeknek a hőmérséklettől való függése).

Az első, a ki a kinetikai gázelméletet az (A) alatti feltevéstől meg akarta szabadítani s egy új általánosabb gázelmélet alapjait vetette meg S. H. Burbury volt, a ki erre vonatkozó vizsgálatait *A Treatise on the kinetic theory of gases* czímű 1899-ben a cambridgei egyetemi nyomda kiadásában megjelent művében tette közzé. Burbury itt elejti az (A) alatti hipotézist s a gázelméletet ama feltevés mellett tárgyalja, hogy minden molekula sebessége a gáz többi molekulájának sebességétől függ, leginkább természetesen a szomszédos molekulák sebességétől.

Ugyanitt Burbury egy új kinetikai gázelmélet *szükséges* voltát is be akarja bizonyítani s azt állítja, hogy az (A) alatti feltevés ellenmondásokra vezet, és két ily ellenmondást be is mutat. Ezek az ellenmondások azonban, úgy hiszem, nem elegendők a régi gázelmélet megdöntésére, minthogy, úgy találtam, hogy ezek az ellenmondások csak látszólagosak s így habár egy új, általánosabb gázelmélet felépítése teljesen jogosult s talán kívánatos is, szükségesnek azonban nem mondható, minthogy a régi minden belső ellenmondás nélkül építhető fel s a tapasztalattal is kielégítő módon megegyezik.

Erre vonatkozó vizsgálataimat közöltem magával Burburyval, a ki kész volt velem vitába bocsátkozni, a mely vita levélben indult meg s később az *Annalen der Physik* hasábjain folytatódott. E vitát szándékozom a következőkben ismertetni.

Mielőtt a Burbury bemutatta ellenmondások részletes tárgyalásába bocsátkoznám, Burburynek néhány magában véve is érdekes ujítását kell ismertetnem, a melyek a gázelmélet rendszeres felépítésénél igen hasznosaknak mutatkoznak s a sűrűség s az áramlási sebesség kinetikai értelmezésére vonatkoznak: mindezek fontos szerepet játszanak a **Burbury**-féle ellenmondásokban, azért tartom szükségesnek a következők előrebocsátását.

Valamely testnek σ sűrűségét az x, y, z pontban t időpillanatban a következőképen szokás definiálni:

$$\sigma = \lim_{\Delta\omega=0} \frac{\Delta m}{\Delta\omega}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

a hol $\Delta\omega$ egy térfogat, a mely az x, y, z pontot magában foglalja, Δm pedig a t időpillanatban $\Delta\omega$-ban foglalt tömeget jelenti. Ha ezt a definicziót egy oly diszkrét részekből álló testre alkalmazzuk, mint a milyen a kinetikai gázelméletben egy gáz, σ a *molekulák anyagának sűrűségét* fogja megadni az x, y, z pontban t időpillanatban s nem fog felvilágosítást adhatni *az egész test anyagának az x, y, z pont környezetében való eloszlásáról,* pedig ez az, a mit a gáz *sűrűségével* jellemezni akarunk; σ továbbá a molekulák határfelületén nem is lesz egyértelműen meghatározva az 1. alatti határérték által. Régebben (**Boltzmann** is*) e bajon úgy segítettek, hogy föltették, hogy egy térfogatelem még végtelen sok molekulát tartalmaz, a mi tulajdonképen nem egyéb, mint ama feltevés, hogy a gáz a teret folytonosan tölti be, tehát ellenmondásban van a kinetikai gázelmélet alapföltevésével, a mely szerint a gáz véges kiterjedésű különálló részecskékből áll.** **Burbury** a sűrűség kinetikai értelmezésénél fellépő eme nehézségeket igen ügyesen megszünteti, a sűrűségnek egy új definicziójával, a mely igen szépen megfelel a sűrűséghez fűzött ama követelésünknek, hogy jellemezze az anyagnak egy adott pont *környezetében* való eloszlását.

Legyen $\varphi(r)$ r-nek egy oly függvénye, a mely a következő feltételeknek eleget tesz:

---

* Vorlesungen über Gastheorie I, 46, 100 l.

** Ama feltevés, hogy a molekulák «összeütköznek» teljesen ekvivalens azzal, hogy véges kiterjedésűek.

I. $\varphi(r)=1$ ha $r \leq a$, a hol a ama gömbnek sugara, a mely átlag egy molekulát tartalmaz; ha tehát V a vizsgált gáztömeg térfogata, N a benne foglalt molekulák száma, akkor

$$a=\left(\frac{3V}{4\pi N}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

II. $\varphi(r)$ folytonos és differencziálható pozitiv függvénye r-nek, ha $r>a$.

III. $\frac{d\varphi}{dr}<0$ ha $r>a$.

IV. $\int\limits_0^\infty r^2\varphi(r)dr$ véges és meghatározott szám.

Ennek a függvénynek segítségével definiálja BURBURY a sűrűségét a gáznak egy x, y, z pontjában, illetőleg a térfogategységre eső molekulák n számát, még pedig:[*]

$$n(x, y, z, t)=\sum_{'}\varphi(r), \tag{2}$$

a hol

$$r=\left\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

és $\sum\limits_{'}$ egy oly x', y', z' szerinti összegezést jelent, a mely a gáz összes molekuláinak tömegközéppontjára terjesztendő ki.

Könnyen belátható, hogy ha φ-t az I—IV. feltételeknek megfelelően választjuk, n mindig véges és meghatározott szám. Legyen ugyanis m a molekulák közös tömege és

$$\sigma(x, y, z, t)=mk\mu(x, y, z, t)$$

a molekulák anyagának közönséges értelemben vett sűrűsége,[**] k pedig egy úgy választott állandó számérték, hogy μ x, y, z és t bármely értékénél kisebb az egységnél.

---

[*] L. az idézett mű 5. és 56. lapját.

[**] Ha a molekulák véges kiterjedésűek, σ x, y, z-nek mindenütt véges és egyértékű függvénye, kivéve a molekulák határfelületét, a hol véges ugrás mutatkozik, világos azonban, hogy mindamellett σ x, y, z-nek integrálható függvénye.

Akkor a (2) alatti összegezést térbeli polárkoordináták szerinti integráczióval helyettesítve:

$$n = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\mu r^2\varphi\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi dr <$$

$$< k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^2\varphi\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi dr = 4k\pi\int_0^{\infty} r^2\varphi\, dr$$

ez pedig a IV. alatti feltétel szerint véges, véges tehát n is. n-nel az x, y, z pontbeli ρ sűrüség következőképen függ össze:

$$\rho(x, y, z, t) = mn(x, y, z, t).$$

A Burbury-féle definiczió arra az esetre is alkalmazható, midőn a gáz molekulái nem mind egyenlő tömegűek, akkor ugyanis egyszerűen

$$\rho = \sum_{'} m'\varphi(r),$$

a hol m' az x', y', z' koordinátás tömegközépponttal biró molekula tömege.

A Burbury-féle definiczió szerint tehát a sűrűség tulajdonképen az egész gáz tömegéből adódik, úgy hogy minden molekula saját tömegének annál kisebb részével járul hozzá a sűrűség képezéséhez, minél távolabb van attól a ponttól, a melyben a gáz sűrűségét elő akarjuk állitani, ez a *sűrűség* tehát valóban a gáz anyagának az illető pont környezetében való eloszlását jellemzi.

Egészen hasonló hibában sinylik a gáz egy pontjában fellépő *áramlási sebesség*nek kinetikai értelmezése is; ezt eddig mindig mint egy oly térfogatelem tömegközéppontjának sebességét definiálták, a mely az illető pontot magában foglalja; tehát, ha α, β, γ jelentik egy molekula sebességi komponenseit és $\Sigma_{\Delta\omega}$ egy a $\Delta\omega$ térfogat összes molekuláira kiterjesztett összegezést jelent, a gáz áramlási sebességének A, B, C komponensei az x, y, z pontban a régi definiczió szerint:

$$A = \lim_{\Delta\omega=0}\frac{\Sigma_{\Delta\omega} m\alpha}{\Sigma_{\Delta\omega} m},\quad B = \lim_{\Delta\omega=0}\frac{\Sigma_{\Delta\omega} m\beta}{\Sigma_{\Delta\omega} m},\quad C = \lim_{\Delta\omega=0}\frac{\Sigma_{\Delta\omega} m\gamma}{\Sigma_{\Delta\omega} m}. \quad (3)$$

Azonban hacsak nem használjuk ama, a kinetikai gázelmélet alapgondolatával összeférhetetlen feltevést, hogy egy térfogatelem végtelen sok molekulát tartalmaz A, B, C nem a gáz áramlási sebességét fogja megadni az x, y, z pontban, hanem a molekulák pontjainak sebességét, a mely zérus lesz minden oly pontban, a melyben nincs molekula. Az áramlási sebességnek 3) alatti definicziójával tehát ismét nem értünk czélt, látható azonban már az előbbiekből, miképen lehet e bajon segíteni a BURBURY-féle φ függvény segitségével;* ξ, η, ζ-val jelölve ezeket az új áramlási komponenseket:

$$\xi = \frac{\sum_{'} m'\alpha'\varphi}{\sum_{'} m'\varphi}, \quad \eta = \frac{\sum_{'} m'\beta'\varphi}{\sum_{'} m'\varphi}, \quad \zeta = \frac{\sum_{'} m'\gamma'\varphi}{\sum_{'} m'\varphi}, \tag{4}$$

vagy ha a molekulák mind egyenlő m tömegűek:

$$\xi = \frac{\sum_{'} \alpha'\varphi}{\sum_{'} \varphi}, \quad \eta = \frac{\sum_{'} \beta'\varphi}{\sum_{'} \varphi}, \quad \zeta = \frac{\sum_{'} \gamma'\varphi}{\sum_{'} \varphi}. \tag{5}$$

Még van egy harmadik mennyiség, a melynek definiczióját egészen úgy kell módositanunk, mint a hogy BURBURY a sűrűség és az áramlási sebesség definiczióját módositotta: ez a mennyiség az ú. n. MAXWELL-féle függvény, a mely a molekuláris sebességek eloszlását egy pont környezetében meghatározza, minthogy megadja a *térfogategységre eső számát az x, y, z pontban és t időpillanatban ama molekuláknak, a melyeknek sebességi komponensei az*

$$\alpha \ldots \alpha + d\alpha, \quad \beta \ldots \beta + d\beta, \quad \gamma \ldots \gamma + d\gamma$$

határok közé esnek, vagy röviden *a melyek az* (α, β, γ) *osztályba tartoznak*. A kinetikai gázelmélet összes problémái ennek az $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma$-val jelölendő függvénynek meghatározására vezethetők vissza; minthogy *meghatározása* a valószinűségszámitás segitségével történik a

---

* L. az idézett mű 5, 6, 56, 122. lapjait.

$$\frac{f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{n(x, y, z)}$$

kifejezést rendesen mint valószinűséget értelmezzük, még pedig mint annak valószinűségét, hogy az x, y, z pontba a t időpillanatban egy az (α, β, γ) osztályba tartozó molekula tömegközéppontja essék; az f definicziója azonban minden valószinűségi fogalomtól függetlenül történhetik meg. Minthogy, ha e molekulák mind egyenlő m tömegűek $mf d\alpha d\beta d\gamma$ nem egyéb, mint *az* (α, β, γ) *osztályba tartozó molekulák sűrűsége az* x, y, z *pontban,* t *időpillanatban,* definicziója teljesen az n előrebocsátott definicziójának analógiájára történhetik meg s az eddigi definiczió ellen ugyanaz a kifogás emelhető mint n eddigi definicziója ellen; ugyanis a

$$\lim_{\Delta\omega=0} \frac{\Sigma_{\Delta\omega}(\alpha, \beta, \gamma)}{\Delta\omega} \tag{6}$$

kifejezés, a hol $\Sigma_{\Delta\omega}(\alpha, \beta, \gamma)$ az (α, β, γ) osztályba tartozó molekulák számát jelenti az x, y, z pontot magában foglaló $\Delta\omega$ térfogatelemben, ép úgy nem ád véges méretű molekulák esetén felvilágosítást az (α, β, γ) osztályba tartozó molekuláknak az x, y, z pont környezetében való eloszlásáról, mint a hogy az 1) alatti képlettel definiált σ az összes molekulák eloszlását egy pont környezetében nem jellemezheti. A Burbury-féle definiczióknak következetes továbbvitele lesz tehát $f d\alpha d\beta d\gamma$-nak következő definicziója:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma = \Sigma_{\alpha\beta\gamma}\, \varphi(r), \tag{7}$$

a hol $\Sigma_{\alpha\beta\gamma}$ oly összegezést jelent, a mely a gáznak összes az (α, β, γ) osztályba tartozó molekuláira terjesztendő ki. A (6) alatti határértékkel $f d\alpha d\beta d\gamma$ ugyanoly összefüggésben van, mint n $\frac{\sigma}{m}$-mel, ugyanis:

$$n(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{1}{m} \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+a, y+b, z+c)\, \sigma(x+a, y+b, z+c, t)\, da\, db\, dc \tag{8}$$

és $g(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma$-val jelölve a (6) alatti határértékel

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int \{\varphi(x+a, y+b, z+c)$$

$$g(x+a, y+b, z+c, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma\}\, da db dc. \qquad (9)$$

$mg d\alpha d\beta d\gamma$ az (α, β, γ) osztályba tartozó molekulák anyagának sűrűsége az x, y, z pontban t időpillanatban, tehát csak az (α, β, γ) osztályba tartozó molekulák pontjaiban lesz zérustól különböző s határfelületükön ép oly véges szakadást szenved (mely azonban az integrálhatóságot nem befolyásolja), mint σ az összes molekulák határfelületén.

Zemplén Győző.

Math. és Phys. Társ.

Utalvány czím: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque számlájára.

Kimutatás

az 1901 január havában befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1899. évre: Perényi Vilmos ... 6 kor.

1900. évre: Benda Jenő 10 k, Bobita Endre 6 k, Képessy Imre 10 k, Pallagi Gyula dr. 6 k, Perényi Vilmos 4 k, Tasch Antal 6 k, Szőke Béla 6 k. Összesen ... 48 kor.

1901. évre: Bodor Domokos 6 k, Ferenczy István 6 k, Frank István 6 k, Gruber Nándor 10 k, Hortobágyi Zsigmond 6 k, Ilosvay Lajos 10 k, Képessy Imre 10 k, Korda Dezső 6 k, Orbán Antal 10 k, Pallos Kajetán 6 k, Pilcz Ottó 10 k, Tangl Károly 10 k, Szőke Béla 10 k, Zilahy László 6 k. Összesen 7 à 6 k, 7 à 10 k. ... 112 kor.

1902. évre: Orbán Antal ... 10 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1901. évre: a bártfai áll. gymn. 10 k, a dévai áll. főreálisk. 10 k, az egri áll. főreálisk. 10 k, a fogarasi áll. gymn. 6 k, a pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 k, a kaposvári áll. főgymn. 10 k, a körmöczbányai áll. főreálisk. 6 k, a lőcsei áll. főreálisk. 10 k, a nagyenyedi Bethlen főisk. 10 k, a privigyei kath. gymn. 10 k, a pozsonyi kir. kath. főgymn. 10 k, a selmeczbányai kir. kath. nagygymn. 10 k, a soproni áll. főreálisk. 6 k, a soproni ev. lyc. 10 k, a szamosújvári áll. főgymn. 10 k, a szarvasi főgymn. 10 k, a szegzárdi áll. főgymn. 10 k, a székelyudvarhelyi áll. főreálisk. 10 k, a temesvári áll. főgymn. 10 k, a temesvári áll. főreálisk. 10 k, az ungvári kir. kath. főgymn. 10 k, az ungvári áll. reálisk. 10 k, a zilahi ev. ref. főgymn. 10 k. 20 à 10 k, 3 à 6 k. ... 218 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból	54 kor.
1901. és 1902. évi díjból	122 kor.
Előfizetési díjakból	218 kor.

Budapest, 1901 február 1-én.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

Math. és Phys. Társ.

[illegible] Math. és Phys. Társ. 1896 [illegible]

Kimutatás

a 1901 [illegible]

[illegible]

1899. évre: [illegible] 8 kor.

1900. évre: [illegible] 18 kor.

1901. évre: [illegible] 112 kor.

1902. évre: [illegible] 10 kor.

[illegible]

1901. évre: [illegible] 218 kor.

Összesen befolyt

Hátralékokból [illegible] 38 kor.

1901—1902 évre [illegible] 128 kor.

[illegible] 216 kor.

Budapest, 1901 február 1-én.

[illegible]

[illegible]

AZ ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ FELÜLETEKEN ÉRVÉNYES GEOMETRIÁRÓL.

Valamely felülethez tartozó ívelem, az általánosság megszorítása nélkül, ily alakban írható:

$$ds = E^{\frac{1}{2}} \sqrt{dx^2+dy^2},$$

hol tehát x, y isothermikus koordináták. Ennélfogva a felületen egymást metsző,

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

egyenletekkel megadott görbék alkotta szög (ϑ) cosinusa Gauss képlete szerint:

$$\cos\vartheta = \frac{1+k_1 k_2}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}},$$

hol k_1, k_2 $\frac{dy}{dx}$-nek az (1) egyenletekből kiszámított értékei a metszéspontban.

Tekintsük mindama felületeket, a melyeken az (1) görbék rajta vannak; $\cos\vartheta$ független lévén az E függvénytől, tetszés szerinti felületen adja azt a szöget, mely alatt a két (1) egyenlettel adott görbe egymást metszi; pl. $E=1$ esetén a síkban is.

Legyen

$$f(x, y) = 0$$

valamely felület geodætikus vonalainak egyenlete; kérdezzük, melyek azon felületek, melyeknél a geodætikus vonalakat ugyanaz az $f=0$ egyenlet adja meg.

A geodætikus vonalak differencziálegyenletét meghatározza az E; de nyilvánvaló ugyanarra az egyenletre jutunk, ha E helyett CE-t (C állandó) veszszük. Ennélfogva ugyanaz az $f=0$ lesz a geodætikus vonalak egyenlete nemcsak az egymásra lefejthető felületeknél, hanem azoknál is, a melyeknél

$$ds = C^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Az egymásra lefejthető felületeknél a görbület Gauss-féle mértéke (k) ugyanaz, míg a felületek ez utóbbi csoportjánál még a C-től függ, a mint ez a görbület

$$k = \frac{-1}{2E} \Delta \log E \qquad (2)$$

ismeretes kifejezéséből következik, a hol szokott módon

$$\Delta \log E = \frac{\partial^2 \log E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log E}{\partial y^2}.$$

Tehát mindama felületeknél, a melyek a

$$Ck = \frac{-1}{2E} \Delta \log E \qquad (2a)$$

parcziális differencziálegyenlettel adva vannak, a geodætikus vonalak egyenlete ugyanaz.

Tekintsük az

$$f(x, y) = 0$$

egyenlet által adott síkbeli görbéket (melyekhez nyilvánvalóan hozzá tartoznak az $x=0$, $y=0$ ponton átmenő egyenesek) és állítsunk fel e görbékre való tekintettel egy geometriát síkbeli interpretálással; az előbbiek szerint világos, hogy e geometria a (2a) egyenlet egy bizonyos k melletti minden megoldására vonatkozik.

A geometria kifejtésénél az E függvény felvilágosít mindama helyekről, a melyeken az ívelem végtelen; a sík e helyei képviselik a felület végtelen távoli pontjait.

Az

$$f(x, y) = 0$$

görbék az egyenes vonalak lesznek és az

$$\frac{1+k_1 k_2}{\sqrt{1+k_1^2}\,\sqrt{1+k_2^2}}$$

kifejezés adja két egymást metszésvonal alkotta szög cosinusát.

A távolságot a

$$C^{\frac{1}{2}}\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} E^{\frac{1}{2}}\sqrt{dx^2+dy^2}$$

integrál értelmezi, hol y az $f(x,y)=0$ egyenletből helyettesitendő.

Schlesinger úr a kolozsvári egyetemen 1899/900. II. felében tartott előadásain azt mutatta, hogy állandó k esetén a (2) differencziálegyenlet minden megoldása, mely valós és az x, y változók egyértékű függvénye, az $x+iy$ komplex változó bizonyos függvényét szolgáltatja, negativ k esetén különösen Fuchs-féle függvényt (v. ö. Poincaré, *Liouville Journal*, 1898. 1370. és köv.). Megfordítva azt mondhatjuk, hogy minden Fuchs-féle függvény a (2) differencziál egyenlet egyértékű megoldását szolgáltatja negativ állandó k esetén és igy egy bizonyos negativ állandó görbületű felület ivelemét, valamint az ilyen felületen érvényes geometriát is. Annak a kérdésnek vizsgálatát, hogy vannak-e függvények, melyek hasonló módon a fent jellemzett felületek ivelemét meghatározzák, ha k az x, y valamely adott függvénye, más alkalomra halasztjuk; a jelen dolgozatban csak az állandó k esetével fogunk foglalkozni.

Egy ismeretes tétel * szerint a geometria egy állandó görbületű felületen megegyezik a Riemann, Euklides, Bolyai-Lobatsefszky-geometriával a szerint, a mint k pozitiv, zérus, vagy negativ.

Schlesinger úr egyik értekezésében** az állandó Gauss-féle görbülettel biró felületeknél az ivelem következő alakjából indul ki:

---

* Beltrami: Saggio d'interpretazione della geometria non-euklidea. Giornale di Matematiche. 6. k. 1868. V. ö. Bianchi-Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie. 434. o.

** Crelle Journal, 121. K. 171. o.

$$ds = 2\,\frac{\sqrt{dp^2+dq^2}}{(p-m)^2+(q-n)^2-c}, \tag{3}$$

hol $-c$ a görbületi mérték, m, n állandók és azt mutatja, hogy a geodætikus vonalak egyenlete ez:

$$w_0[(p-m)^2+(q-n)^2+c]+2w_1(p-m)+2w_2(q-n)=0. \tag{4}$$

Czélunk lesz a (3) és (4) alatti képletek alapján az állandó görbületű felületek trigonometriai képleteit felállitani és ezekből következtetéseket levonni, különösen sikerül a derékszögű háromszögre vonatkozó képletekből az oldalak trigonometriai függvényeit teljesen kiküszöbölni (II.); továbbá mutatjuk (VII.), hogy valamely derékszögű háromszög alkotórészeivel a felület görbületének mértéke és ezzel, a mint egyébként ismeretes, a felületi geometria meg van határozva.

I.

Az általánosság megszoritása nélkül m-t és n-t zérussal egyenlővé tehetjük. Ezenkivül czélszerűnek látszik az ivelem kifejezésébe és a geodætikus vonalak egyenletébe a

$$p=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad q=\frac{y}{x^2+y^2}$$

relácziókkal új változókat behozni; ily módon, ha még

$$-c=\varepsilon k^2, \quad (\varepsilon=\pm 1),$$

az ivelem alakja:

$$ds=2\,\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{1+\varepsilon k^2(x^2+y^2)},^*$$

a geodætikus vonalak egyenlete pedig:

$$w_0[1+\varepsilon k^2(x^2+y^2)]+2w_1 x+2w_2 y=0.$$

Ha

$$w_0 \neq 0,$$

u és v jelentsék rendre a $\frac{w_1}{w_0}$ és $\frac{w_2}{w_0}$ állandókat.

---

* V. ö. RIEMANN, Werke (1892), 282. o.

Határozzuk meg először valamely geodætikus vonalakból alkotott AOB derékszögű háromszög átfogójának, AB-nek hosszát, ha a befogók ismeretesek. Vegyük O-t koordinata-kezdőpontnak és legyenek A, B pontok koordinátái $(a, 0)$ illetőleg $(0, b)$. Akkor az átfogónak, vagyis az A és B pontokat összekötő geodætikus vonal egyenletének u és v állandói ezek:

$$u = -\frac{1-\varepsilon k^2 a^2}{2a}, \quad v = -\frac{1-\varepsilon k^2 b^2}{2b}.$$

Az AB átfogó hosszát az

$$s = 2\int_{(a,\,0)}^{(0,\,b)} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{1+\varepsilon k^2(x^2+y^2)}$$

határozott integrál adja, ha y-t az átfogóhoz tartozó geodætikus vonal egyenletéből helyettesitjük. A számitás igazolja, hogy

$$s = \frac{2}{k\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} k\sqrt{\varepsilon}\left[\frac{a^2+b^2}{1+k^4 a^2 b^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

hol $\sqrt{\varepsilon}$ legyen $+1$, vagy $+i$ $(=+\sqrt{-1})$.

Hozzuk be a következő jelölést:

$$\frac{a^2+b^2}{1+k^4 a^2 b^2} = c^2,$$

tehát

$$s = \frac{2}{k\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} k\sqrt{\varepsilon}\, c. \tag{1}$$

A háromszög befogói ($OA=s_1$, $OB=s_2$) s kifejezéséből adódnak ha ebbe először a, azután b helyett irunk zérust. Ennélfogva:

$$s_1 = \frac{2}{k\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} k\sqrt{\varepsilon}\, a$$

$$s_2 = \frac{2}{k\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} k\sqrt{\varepsilon}\, b.$$

Midőn

$$\varepsilon = +i,$$

az arcustangenst logarithmussal helyettesitjük.

II.

Hozzuk be a következő jelöléseket:

$$E_w^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1+\varepsilon k^2 w^2},$$

$$H_w = \frac{1-\varepsilon k^2 w^2}{1+\varepsilon k^2 w^2}$$

és legyenek α, β az s_1 és s_2 oldalakkal szemben levő szögek.

A felületek elméletének tételei szerint

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} E_a^{\frac{1}{2}} E_c^{-\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} E_b^{\frac{1}{2}} E_c^{-\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} E_b^{\frac{1}{2}} E_c^{-\frac{1}{2}} H_a, \tag{3}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} E_a^{\frac{1}{2}} E_c^{-\frac{1}{2}} H_b. \tag{4}$$

Az (1) és (4), (2) és (3) alatti képletekből:

$$\sin\beta\, H_a = \cos\alpha, \tag{5}$$

$$\sin\alpha\, H_b = \cos\beta. \tag{6}$$

De I. (1) alatti képlete szerint

$$H_w = \cos k \sqrt{\varepsilon}\, s',$$

a miben

$$s' = \frac{2}{k\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} k \sqrt{\varepsilon}\, w;$$

ennélfogva az (5) és (6) egyenletek ily alakot öltenek:*

$$\sin\beta \cos k \sqrt{\varepsilon}\, s_1 = \cos\alpha$$

$$\sin\alpha \cos k \sqrt{\varepsilon}\, s_2 = \cos\beta.$$

Mivel

$$k \sqrt{\varepsilon}\, w E_w^{\frac{1}{2}} = \sin k \sqrt{\varepsilon}\, s',$$

---

* V. ö. HOPPE: Principien der Flächentheorie, 1890, 58. o.

lesz * az (1) és (2) egyenletekből:

$$\sin k \sqrt{\varepsilon}\, s_1 : \sin k \sqrt{\varepsilon}\, s = \sin \alpha : 1,$$
$$\sin k \sqrt{\varepsilon}\, s_2 : \sin k \sqrt{\varepsilon}\, s = \sin \beta : 1.$$

Az (1)—(4) képletekből

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} E_a^{\frac{1}{2}} E_b^{-\frac{1}{2}} H_a^{-1},$$
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} E_b^{\frac{1}{2}} E_a^{-\frac{1}{2}} H_b^{-1};$$

innen:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = H_a^{-1} H_b^{-1}.$$

De

$$H_c = H_a H_b, \tag{7}$$

tehát *

$$\cos k \sqrt{\varepsilon}\, s = \cos k \sqrt{\varepsilon}\, s_1 \cos k \sqrt{\varepsilon}\, s_2.$$

Ennélfogva (7) szerint

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = H_c^{-1}.$$

A derékszögű háromszög szögei és az oldalokat meghatározó *a, b, c* értékek közt tehát ezen egyenletek állanak fenn:

$$aE_a^{\frac{1}{2}} = cE_c^{\frac{1}{2}} \sin \alpha,$$
$$bE_b^{\frac{1}{2}} = cE_c^{\frac{1}{2}} \sin \beta,$$
$$aE_a^{\frac{1}{2}} H_b = cE_c^{\frac{1}{2}} \cos \beta,$$
$$bE_b^{\frac{1}{2}} H_a = cE_c^{\frac{1}{2}} \cos \alpha,$$
$$aE_a^{\frac{1}{2}} H_a^{-1} = bE_b^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \alpha,$$
$$bE_b^{\frac{1}{2}} H_b^{-1} = aE_a^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta,$$
$$H_a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta},$$
$$H_b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},$$
$$H_c = \cot \alpha \cot \beta,$$
$$H_c = H_a H_b.$$

---

* V. ö. Hoppe, az i. h.

E képletsorozatban az s_1, s_2 és s transcendens függvényei helyébe a, b, c másodfokú raczionalis függvényei léptek. Az a, b, c mennyiségek a képletekből mint az ismeretes adatok algebrai függvényei adódnak, melyekben csakis négyzetgyök szerepel.

Ha

$$\varepsilon = +1$$

és a meghatározandó a, b, c kisebb $\frac{1}{k}$-nál, a gyök negativ előjellel veendő, különben a pozitiv előjel érvényes és az eredmény valós, ha

$$\sin\alpha \leqq \frac{1}{kc\,E_c^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sin\beta \leqq \frac{1}{kc\,E_c^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \leqq k\,b\,E_b^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \leqq ka\,E_a^{\frac{1}{2}}.$$

Ha

$$\varepsilon = -1,$$

a gyökjel pozitiv előjele érvényes.

Ha

$$k = 0,$$

az a, b, c mennyiségek geometriai jelentését ismerjük; czélszerű azon esetben is, midőn k^2 nem zérus, az a, b, c Euklides-síkgeometriai jelentőségét felkeresni.

III.

Legyen

$$\varepsilon = -1.$$

Ekkor az ívelem

$$2\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{1-k^2(x^2+y^2)}$$

végtelen mindamaz (x, y) értékpárok mellett, a melyekre nézve

$$1-k^2(x^2+y^2) = 0.$$

Ha x-t és y-t síkbeli DESCARTES-féle derékszögű koordinátáknak tekintjük, akkor az ívelemnek singularitása van mindama pontokban, a melyek az

$$x^2+y^2-\frac{1}{k^2}=0$$

kör kerületén vannak. Ezért ezen kört *singularis kör*nek nevezzük (KLEIN [*] szerint: Absolutes Gebilde).

A singularis kör a síkot, melyet végtelen nagy sugarú gömbnek képzeljünk, két részre osztja. Az (I.) (1) egyenlete szerint a felület minden pontjának a singularis kör belsejében egy és csakis egy pont felel meg; megfordítva a singularis kör belsejében minden ponthoz a felületen egy pont tartozik; a felületnek ez EUKLIDES-síkbeli leképezése nyilvánvalóan conform is.[**]

A geodætikus vonalak egyenlete,

$$w_0[1+k^2(x^2+y^2)]+2w_1x+2w_2y=0, \tag{1}$$

mindazon köröket adja, melyek az

$$1+k^2(x^2+y^2)=0$$

kör és a

$$w_1x+w_2y=0$$

sugársor metszéspontjain mennek át; e körök valósak, ha

$$w_1^2+w_2^2-k^2w_0^2\geqq 0.$$

Kimutatható, hogy az (1) egyenlettel képviselt minden kör orthogonalisan metszi a singularis kört;[***] ennélfogva minden kör a singularis kört két pontban metszi és a singularis körön belül minden kör egy másikat vagy nem metsz, vagy ha metsz, akkor egy és csakis egy pontban fog metszeni.

Ennélfogva a singularis kör belsejéről (*egyenesek*nek nevezve az (1) egyenlettel adott köröknek a singularis kör belsejében levő részét) a következőket állítjuk:

---

[*] Math. Ann. IV. k. 573. o.

[**] V. ö. SCHLESINGER, az i. h. 273. o.

[***] V. ö. SCHLESINGER az i. h.

1. Minden egyenes egy másikat vagy nem metsz, vagy ha metsz, akkor egy és csak egy pontban fog metszeni.

2. Minden egyenesnek a singularis körrel két közös pontja van, tehát az egyenes két pontjában lesz az ivelem végtelen.

3. Tekintsünk egy egyenest, melynek a singularis körrel két közös pontja A és B. Egy kivüle fekvő C ponton át (mely azonban a singularis körön belűl fekszik), képzeljük meghúzva az összes egyeneseket és emeljük ki a (CA), (CB) egyeneseket. A C-n átmenő egyenesek egy serege metszi az (AB) egyenest, a másik serege nem. A (CA) és (CB) egyenesek nyilvánvalóan az (AB) egyenesen nem mennek át, tehát nem metszik és így a nem metsző egyenesek közé tartoznak. De az is világos, hogy a nem metszők közt a legelsők. A (CA) és (CB) egyenesek (AB)-hez való ezen helyzetét, Bolyai János* szerint, így jelöljük:

$$CA \parallel\!| AB,$$
$$CB \parallel\!| AB,$$

4. Két tetszőleges (x_0, y_0), (x, y) pont távolságát a

$$2\int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{1-k^2(x^2+y^2)}$$

határozott integrál adja, a hova y-nak azon egyenes egyenletéből kiszámitott kifejezése irandó, mely átmegy az (x_0, y_0), (x, y) pontokon. Az integrált kiszámitván az

$$\left[\frac{1}{k}\log\frac{1+h\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-a)}{1-h\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-a)}\right]_{\theta_0}^{\theta}$$

függvényt találjuk, a hol

$$h = \sqrt{k^2R^2+1}-kR,$$

$$\sin a = \frac{v}{k\sqrt{k^2R^2+1}},$$

$$\cos a = \frac{u}{k\sqrt{k^2R^2+1}},$$

---

* Bolyai János: Scientiam spatii absolute veram etc. 1. §.

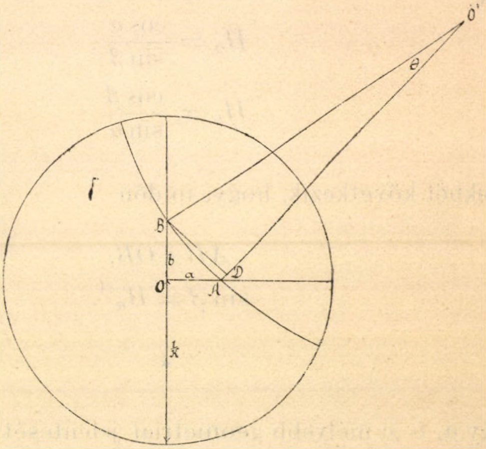
$$\sin\theta = \frac{x + \frac{u}{k^2}}{R},$$

$$\cos\theta = \frac{y + \frac{v}{k^2}}{R},$$

$$R = \frac{1}{k^2} \sqrt{u^2 + v^2 - k^2}$$

és θ_0 a θ értéke az $x = x_0$, $y = y_0$ pontban.

Két egyenes hajlásszöge a közös metsző pontból kiinduló végtelen kis részüknek hajlásszöge.



1. ábra.

Ha az érintő oly egyenes, mely valamely görbe két végtelen közel fekvő pontján átmegy, akkor nyilvánvalóan két egymást metsző görbe hajlásszöge helyettesithető a metszési ponton átmenő érintők hajlásszögével.

5. Minden a felületen levő geodætikus vonalnak megfelel egy és csak egy egyenes; s minden egyenesnek egy és csakis egy geodætikus vonal.

6. Ennélfogva minden a felületen levő háromszögnek a síkban megfelel egy és csak egy háromszög; s minden síkbeli háromszögnek egy és csak egy felületi háromszög.

7. Az I.-ben vizsgált felületi derékszögű háromszögnek a síkban megfelel az AOB háromszög (1. ábra), melynek OA és OB befogói meghatározzák az s_1, s_2 felületi oldalakat, tehát

$$OA=a, \quad OB=b.$$

E síkbeli háromszög szögekben megegyezik a felületi háromszöggel s mivel a síkban

$$\alpha+\beta\leq\frac{\pi}{2},$$

a felületi háromszög szögeire is érvényes ezen egyenlőtlenség.

8. A

$$H_a=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta},$$

$$H_b=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$$

képletekből következik, hogy, midőn

$$AB \mathbin{|||} OB,$$

$$\sin\beta=H_a^{-1}.$$

*

Hogy a, b ,c mélyebb geometriai jelentését lássuk, számitsuk ki az Euklides-síkbeli geometria módszereivel az (AB) ívhez tartozó központi szöget, θ-t (1. ábra). Egyszerű számítás igazolja, hogy

$$\theta=\arcsin\frac{2k^2ab}{1+k^4a^2b^2}.$$

Innen

$$\theta=\arccos\frac{1-k^4a^2b^2}{1+k^4a^2b^2}.$$

Tehát

$$\theta=2\operatorname{arctg}k^2ab. \tag{2}$$

Irjunk a (2) képletbe először a helyett, azután b helyett $\frac{1}{k}$-t és jelöljük θ-nak megfelelő értékeit θ_1-, illetőleg θ_2-vel. Nyerjük:

$$\theta_1 = 2 \operatorname{arctg} ka,$$

$$\theta_2 = 2 \operatorname{arctg} kb.$$

Tehát

$$ka = \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}, \tag{3}$$

$$kb = \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}. \tag{4}$$

Ezeknél fogva (2) szerint adódik a következő, egyúttal EUKLIDES-síkgeometriai tétel:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}.$$

A (3) és (4) alattiak miatt

$$s_1 = \frac{1}{k} \log \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}},$$

$$s_2 = \frac{1}{k} \log \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}.$$

A

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{1 + k^4 a^2 b^2}$$

relációz miatt

$$k^2 c^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_1}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_2}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Mindenesetre tudunk oly θ_0 szöget találni, hogy

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = kc = \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_1}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_2}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

tehát

$$s = \frac{1}{k}\log\frac{1+\mathrm{tg}\frac{\theta_0}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\theta_0}{2}}.$$

Egyszerű számítással adódik, hogy minden egyenesre nézve, mely átmegy két $(a, 0)$ és $(0, b)$ ponton,

$$R = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(1+k^4a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}{2k^2ab}.$$

Innen pedig

$$c = R\sin\theta, \qquad (6)$$

tehát s kifejezhető θ segítségével is. (6) szerint c a síkbeli leképezésben nem más, mint a B pontból az A-n átmenő sugárra merőleges (BD) egyenes hossza.

ka, kb, kc (3), (4), (5) alatti kifejezéseit írjuk be a derékszögű háromszög alkatrészei közt fennálló képletekbe, így nyerünk az

$$x^2+y^2-\frac{1}{k^2}=0$$

kört orthoganalisan metsző körökre nézve tételeket az EUKLIDES-síkbeli geometriában:

$$\mathrm{tg}\,\theta_1 = \mathrm{tg}\,\theta_0 \sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\,\theta_2 = \mathrm{tg}\,\theta_0 \sin\beta,$$

$$\frac{\mathrm{tg}\,\theta_1}{\cos\theta_2} = \mathrm{tg}\,\theta_0 \cos\beta,$$

$$\frac{\mathrm{tg}\,\theta_2}{\cos\theta_1} = \mathrm{tg}\,\theta_0 \cos\alpha,$$

$$\sin\theta_1 = \mathrm{tg}\,\theta_2\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$\sin\theta_2 = \mathrm{tg}\,\theta_1\,\mathrm{tg}\,\beta,$$

$$\cos\theta_0 = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta,$$

$$\cos^{-1}\theta_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta},$$

$$\cos^{-1}\theta_2 = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha},$$

$$\cos\theta_1\cos\theta_2 = \cos\theta_0.$$

A θ szögek bevezetésével Euklides síkbeli és Bolyai-Lobatsefszky síkbeli geometriája közt igen szoros összefüggést állítottunk fel, a mennyiben az utóbbi geometria derékszögű háromszögének alkatrészei közt fennálló relaczióknak jelentését az Euklides-síkgeometriában feltüntettük.

Végtelen kis k^2 esetén a negativ állandó görbületű felület keveset különbözik a síktól, úgy hogy e felület ekkor helyettesíthető az

$$x^2+y^2-\frac{1}{k^2}=0$$

kör belsejével.

IV.

Legyen

$$\varepsilon=+1;$$

ekkor a

$$2\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{1+k^2(x^2+y^2)}$$

ivelemnek az

$$1+k^2(x^2+y^2)$$

függvény révén singularis pontja nincs; a singularis kör képzetes. Az ívelem nem szorítja meg az x, y értéktartományát.

Tekintsük megint x-t és y-t síkbeli derékszögű Descartes-féle koordinátáknak. A függési viszony a (I) (1) szerint a felület és sík közt egyértékű; a felület minden pontjának a síkban megfelel egy pont; megfordítva is áll a tétel.

A geodætikus vonalak egyenlete:

$$w_0\left[1-k^2(x^2+y^2)\right]+2w_1x+2w_2y=0$$

mindazon köröket adja, melyek az

$$x^2+y^2-\frac{1}{k^2}=0$$

kör és a

$$w_1x+w_2y=0$$

sugársor metszéspontjain áthaladnak. E körök közül bármely kettő két pontban metszi egymást, melyek közül csak az egyik van az

$$x^2+y^2-\frac{1}{k^2}=0$$

körön belül.

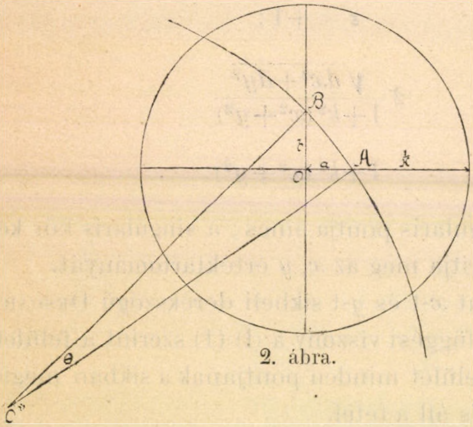
E síkról (*egyeneseknek* nevezve az említett köröket) a következőket állitjuk:

1. Minden egyenes egy másikat két pontban metsz.

2. Érvényes a III 5. és 6. alatti tétele.

3. Az I-ben vizsgált felületi derékszögű háromszöghöz tartozik a síkban az AOB derékszögű háromszög (2. ábra), melynek OA és OB befogói az s_1, s_2 felületi befogókat határozzák meg, tehát

$$OA=a, \quad OB=b.$$



2. ábra.

E síkbeli háromszög szögekben megegyezik a felületi háromszöggel s mivel a síkbeli háromszögben

$$\alpha+\beta\geqq\frac{\pi}{2},$$

ezért e tétel a felületi háromszögre is áll.

4. Két tetszőleges (x_0, y_0) és (x, y) pont távolságát a

$$\left[\frac{2}{k}\operatorname{arctg} h \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\theta-\alpha)\right]_{\theta_0}^{\theta}$$

függvény adja, hol

$$h = \sqrt{k^2R^2-1}+kR,$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{k\sqrt{k^2R^2-1}},$$

$$\cos\alpha = \frac{u}{k\sqrt{k^2R^2-1}},$$

$$\sin\theta = \frac{x-\frac{u}{k^2}}{R},$$

$$\cos\theta = \frac{y-\frac{v}{k^2}}{R},$$

$$R = \frac{1}{k^2}\sqrt{u^2+v^2+k^2}$$

és θ_0 θ értéke az $x=x_0$, $y=y_0$ pontban.

Két egyenes és két görbe hajlásszögére nézve a (III) 4. alatti definicziója évrvényes.

*

Czélszerűnek tartjuk itt is az a, b, c mennyiségeket mint Euklides-sikbeli geometriában értelmezett szögek függvényét előállítani. Az AB körívhez tartozó középponti szög (2. ábra)

$$\theta = \arcsin\frac{2k^2ab}{1+k^4a^2b^2}.$$

Innen, miként előbb:

$$\theta = 2\,\mathrm{arctg}\,k^2ab$$

és

$$ka = \mathrm{tg}\frac{\theta_1}{2},$$

$$kb = \mathrm{tg}\frac{\theta_2}{2},$$

$$kc = \mathrm{tg}\frac{\theta_0}{2}.$$

Ennélfogva a felületi háromszög oldalai:

$$s_1 = \frac{\theta_1}{k},\quad s_2 = \frac{\theta_2}{k},\quad s = \frac{\theta_0}{k}.$$

Ha különösen a pozitiv állandó görbületű felületet gömbnek képzeljük, akkor θ_1, θ_2, θ_0 az s_1, s_2, s oldalakhoz tartozó középponti szögek.

A θ szögek bevezetésével, a derékszögű háromszög ismeretlen alkatrészeinek meghatározására szolgáló képletek ezek:

$$\begin{aligned}
\sin\theta_1 &= \sin\theta_0 \sin\alpha,\\
\sin\theta_2 &= \sin\theta_0 \sin\beta,\\
\sin\theta_1 \cos\theta_2 &= \sin\theta_0 \cos\beta,\\
\sin\theta_2 \cos\theta_1 &= \sin\theta_0 \cos\alpha,\\
\operatorname{tg}\theta_1 &= \sin\theta_2 \operatorname{tg}\alpha,\\
\operatorname{tg}\theta_2 &= \sin\theta_1 \operatorname{tg}\beta,\\
\cos^{-1}\theta_0 &= \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta,\\
\cos\theta_1 &= \frac{\cos\alpha}{\sin\beta},\\
\cos\theta_2 &= \frac{\cos\beta}{\sin\alpha},\\
\cos\theta_1 \cos\theta_2 &= \cos\theta_0.
\end{aligned}$$

A gömb-háromszögtan ez ismeretes tételei az θ-k értelmezése szerint mint euklidesi síkgeometriai tételek jelennek meg.

Nyilvánvaló itt is, hogy végtelen kis k^2 esetén a pozitiv állandó görbületű felület helyettesíhető a síkkal.

V.

Legyen szabad a háromszögre nézve néhány tételt összeállitani. Vegyük AOB háromszög szomszédos háromszögét, OAC-t, melynek C szögpontja OB meghosszabitásán fekszik; befogóit a és b_1, átfogóját határozza meg c'; a befogókkal szemben levő szögeket jelölje α_1, β_1. A BC oldalt végre határozza meg b'.

A sinustétel szerint:

$$\begin{aligned}
b'E_{b'}^{\frac{1}{2}} : cE_c^{\frac{1}{2}} &= \sin(\beta+\beta_1) : \sin\alpha_1,\\
aE_a^{\frac{1}{2}} : c'E_{c'}^{\frac{1}{2}} &= \sin\alpha_1 : 1.
\end{aligned}$$

E két relaczióból:

$$\sin(\beta+\beta_1) = \frac{ab'}{cc'} E_a^{\frac{1}{2}} E_{b'}^{\frac{1}{2}} E_c^{-\frac{1}{2}} E_{c'}^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

1. Ha

$$\beta+\beta_1 = \frac{\pi}{2},$$

az (1) relaczió így irható:

$$aE_a^{\frac{1}{2}} : cE_c^{\frac{1}{2}} = c'E_{c'}^{\frac{1}{2}} : b'E_{b'}^{\frac{1}{2}}.$$

S ha a derékszögű háromszög egyenlőszárú:

$$c^2 E_c = ab' E_a^{\frac{1}{2}} E_{b'}^{\frac{1}{2}}.$$

2. Egyenlő-oldalú háromszögnél

$$c = c' = b',$$

ennélfogva

$$\sin(\beta+\beta_1) = \frac{a}{c} E_a^{\frac{1}{2}} E_c^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{c'} E_a^{\frac{1}{2}} E_{c'}^{-\frac{1}{2}},$$

vagy

$$\sin(\beta+\beta_1) = \sin\alpha_1 = \sin\alpha.$$

Az egyenlő-oldalú háromszögben a három szög egyenlő.

3. Az (1) relacziót írjuk ezen alakban:

$$cc'E_c^{\frac{1}{2}} E_{c'}^{\frac{1}{2}} \sin(\beta+\beta_1) = ab'E_a^{\frac{1}{2}} E_{b'}^{\frac{1}{2}}.$$

Ha (BC) egyenes vonal mentén az a-val meghatározott hosszat eltoljuk úgy, hogy mindig merőlegesen álljon a (BC) egyenesre, akkor az A pont által leirt vonal* minden pontjában az

$$ab'E_a^{\frac{1}{2}} E_{b'}^{\frac{1}{2}}$$

szorzat állandó, ennélfogva az említett feltételek mellett

$$cc'E_c^{\frac{1}{2}} E_{c'}^{\frac{1}{2}} \sin(\beta+\beta_1)$$

szintén állandó.

4. Az (1) relaczióból következik, hogy

$$\sin(\beta+\beta_1) = E_{b'}^{\frac{1}{2}} [E_b^{-\frac{1}{2}} \sin\alpha_1 \sin\beta + E_{b_1}^{-\frac{1}{2}} \sin\alpha \sin\beta_1].$$

---

* BOLYAI J. az i. h. 27. §.

Innen, ha

$$\beta+\beta_1=\frac{\pi}{2},$$

$$E_{b'}^{-\frac{1}{2}}=E_b^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha_1\sin\beta+E_{b_1}^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha\sin\beta_1.$$

S ha még

$$b=b_1,$$

mivel ekkor $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$,

$$2\sin\alpha\sin\beta=E_b^{\frac{1}{2}}E_{2b}^{-\frac{1}{2}}.$$

Egyenlő-oldalú háromszög esetén

$$2\sin\beta=E_b^{\frac{1}{2}}E_{2b}^{-\frac{1}{2}}.$$

Ha a háromszög egyenlőszárú ($b=b_1$),

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}=E_b^{\frac{1}{2}}E_{2b}^{-\frac{1}{2}}.$$

5. A cosinus összeadási tétele alapján

$$\beta+\beta_1=\frac{\pi}{2}$$

feltétel mellett

$$bE_b^{\frac{1}{2}}H_b^{-1}:aE_a^{\frac{1}{2}}=aE_a^{\frac{1}{2}}:b_1E_{b_1}^{\frac{1}{2}}H_{b_1}^{-1}.$$

VI.

A

$$H_aH_b=H_c$$

relaczióból következik, hogy

$$k^2[k^4a^2b^2c^2-(a^2+b^2-c^2)]=0.$$

Két eset lehetséges:

$$k^4a^2b^2c^2-(a^2+b^2-c^2)=0, \tag{a}$$

$$k^2=0. \tag{b}$$

Foglalkozzunk az (a) esettel.

Következik, hogy

$$k^2 = \pm \frac{(a^2+b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{abc}. \tag{1}$$

Mivel k^2 reális,

$$a^2+b^2-c^2 \geqq 0.$$

De egyszersmind k^2 állandó, ezért a

$$\pm \frac{(a^2+b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{abc}$$

kifejezés, mint a, b, c függvénye invariáns, minden derékszögű háromszög oldalaira nézve ugyanazon értékünek kell lenni. Az a, b, c ismerete mellett még tetszőleges marad az előjel; és ez határozott lesz, mihelyt kikötjük, hogy a szögösszeg a háromszögben π-nél nagyobb legyen vagy kisebb.

Egy specziális eset az, midőn

$$a^2+b^2-c^2=0,$$

vagyis midőn **Pythagoras** tételét juttatjuk érvényre. **Pythagoras** tételének érvényes volta egy értékű azzal, hogy a görbület **Gauss**-féle mértéke a síknál zérus.

Ha

$$a^2+b^2-c^2<0,$$

k^2 tiszta képzetes szám. A felületnek valós pontjai nincsenek. Ha a derékszögű háromszög alkatrészei közt fennálló képletekbe εk^2 helyett $\varepsilon i k^2$-t irunk, akkor ily felületekre a trigonometriai képleteket nyerjük.

Legyen

$$a^2+b^2-c^2=w$$

Tehát valós w esetén, midőn:

$$\left.\begin{array}{lll} 1.\ w>0, & \text{adódik} & \text{Riemann} \\ 2.\ w=0, & « & \text{Euklides} \\ 3.\ w<0, & « & \text{Bolyai-Lobatsefszky} \end{array}\right\} \text{geometriája.}$$

Képzetes w mellett a geometria is képzetes.

Az (1) alatti képlet értelmében a (b) eset az (a)-ban benn van.

Ide írjuk még k^2 más kifejezését.

A

$$H_a H_b = H_c$$

relacziót így is írhatjnk:

$$(1-\varepsilon k^2 a^2 E_a^{\frac{1}{2}})\,(1-\varepsilon k^2 b^2 E_b^{\frac{1}{2}}) = (1-\varepsilon k^2 c^2 E_c^{\frac{1}{2}}).$$

Innen egyszerű számítás rendén nyerjük, hogy

$$k^2 = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{a \sin \alpha + b \sin \beta - c}{a \sin \alpha\, b \sin \beta\, c}.$$

*

Most keressük fel a

$$k^4 = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2b^2c^2}$$

jelentését az Euklides-geometriában.

Világos, hogy (1. ábra)

$$a^2+b^2-c^2=(OA)^2+(OB)^2-(BD)^2=(AD)^2,$$

tehát

$$|\,k^2\,| = \frac{AD}{abc}.$$

Innen látható, hogy a görbület Gauss-féle mértéke, ha abc egész szám, (AD) aliquot része.

Az (1) szerint

$$abck^2 = \sqrt{a^2+b^2-c^2},$$

más alakban írva:

$$(OA).\,(OB).\,(BD).\,k^2 = (AD).$$

Ezen relaczió mutatja, hogyan kell szerkeszteni négy hossznak (melyek közül három a negyediknél kisebb vagy ezzel egyenlő) a szorzatát.

VII.

A

$$k^2 = \frac{w}{abc} \tag{1}$$

eredmény alkalmat ad arra, hogy az összes képleteinkben szereplő mennyiségeket mint az oldalak algebrai függvényeit állitsuk elő. Itt csak a szögek függvényeire fogunk szoritkozni. Ha most

$$w=(a^2+b^2-c^2)^{\frac{1}{2}},$$

akkor adódik:

$$\sin\alpha=\frac{ab+\varepsilon cw}{cb+\varepsilon aw},$$

$$\sin\beta=\frac{ba+\varepsilon cw}{ca+\varepsilon bw},$$

$$\cos\alpha=\frac{ab+\varepsilon cw}{ca+\varepsilon bw}\,\frac{bc-\varepsilon aw}{bc+\varepsilon aw},$$

$$\cos\beta=\frac{ab+\varepsilon cw}{cb+\varepsilon aw}\,\frac{ca-\varepsilon bw}{ca+\varepsilon bw},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{ca+\varepsilon bw}{cb-\varepsilon aw},$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{cb+\varepsilon aw}{ca-\varepsilon bw}.$$

A következőkben k^2 helyett ennek (1) alatti kifejezését használhatjuk; de egyszerűség kedvéért mindig k^2-t irunk, képzelve, hogy ezt az (1) jobb oldalával helyettesitettük; akkor az összes képleteinkben csak az oldalak algebrai függvényei szerepelnek.

VIII.

A

$$H_a H_b = H_c$$

relaczióból adódik, hogy

$$a^2=\frac{c^2-b^2}{1-k^4c^2b^2},$$

$$b^2=\frac{c^2-a^2}{1-k^4c^2a^2}, \qquad (1)$$

$$c^2=\frac{a^2+b^2}{1+k^4a^2b^2}.$$

Az (1) relacziók függetlenek k^2 előjelétől; tehát ugyanazon $|k^2|$ mellett $\left(\text{ha az oldalak kisebbek, mint } \frac{1}{k}\right)$ a két geometriában mindig van egy-egy derékszögű háromszög, melyek oldalait ugyanazon a, b, c határozza meg.

A Riemann-geometria AOB háromszögének s_1, s_2, s oldalaihoz tartozzék a Bolyai-Lobatsefszky geometria AOB derékszögű háromszögének s'_1, s'_2, s' oldala (mindkét háromszög oldalait ugyanazon a, b, c határozza meg) és amaz α, β szögeihez ennek α', β' szögei.

1. A H függvény értelmezése szerint

$$\cos ks_1 \cos \mathrm{h}ks'_1 = 1,$$
$$\cos ks_2 \cos \mathrm{h}ks'_2 = 1,$$
$$\cos ks \cos \mathrm{h}ks' = 1.$$

2. A szögek közt szintén találunk összefüggést.

A

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} E_a^{\frac{1}{2}} E_c^{-\frac{1}{2}} \left(= \frac{a}{c} \frac{1+k^2c^2}{1+k^2a^2} \right), \tag{2}$$

$$\sin \alpha' = \frac{a}{c} E_a^{\frac{1}{2}} E_c^{-\frac{1}{2}} \left(= \frac{a}{c} \frac{1-k^2c^2}{1-k^2a^2} \right) \tag{3}$$

relacziókból

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = H_b^{-1} \left(= \frac{1+k^2b^2}{1-k^2b^2} \right).$$

De pl. $\varepsilon = +1$ esetén

$$H_b^{-1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}.$$

Ennélfogva

$$\sin \alpha' = \cos \beta,$$

$$\alpha' + \beta = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Hasonló módon

$$\alpha + \beta' = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Adódik tehát a tétel, hogy

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = \pi.$$

3. A (2) és (3) képletekből nyerjük:

a) c kiküszöbölésével:

$$(1+k^2a^2)^2 \sin^2 \alpha - (1-k^2a^2)^2 \sin \alpha' = 4k^2a^2.$$

Hasonló módon:

$$(1+k^2b^2)^2 \sin^2\beta - (1-k^2b^2)^2 \sin^2\beta' = 4k^2b^2.$$

b) k^2ac kiküszöbölésével:

$$(1+k^2c^2)^2 \sin^2\alpha' - (1-k^2c^2)^2 \sin^2\alpha = 4k^2c^2 \sin^2\alpha' \sin^2\alpha.$$

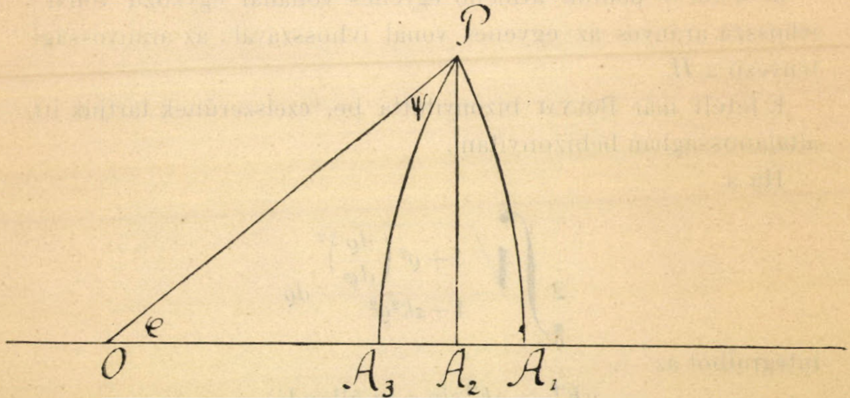
Ugyanily eljárással:

$$(1+k^2c^2)^2 \sin^2\beta' - (1-k^2c^2)^2 \sin^2\beta = 4k^2c^2 \sin^2\beta' \sin^2\beta.$$

A legutóbbi négy egyenletből a (4), (5) tekintetbe vételével, és két-két egyenletből k^2 eliminálásával nyerhetünk új relatiókat.

IX.

1. Az $x=o$, $y=o$ ponton áthaladó egyenesre nézve a sík egy pontja P (mely negativ ε esetén a singularis körön belül vagy azon van) egyértékűleg van meghatározva következőképen (3. ábra):



3. ábra.

a) $\varepsilon=+1$ mellett az (OA_1) és $(PA_1)(\perp OA_1)$,
$k^2=0$ esetén (OA_2) és $(PA_2)(\perp OA_2)$
és $\varepsilon=-1$ mellett (OA_3) és $(PA_3)(\perp OA_3)$
egyenes darabok által.

b) Az

$$(OP) \text{ egyenes darab és } POA_k=\varphi, \atop {\scriptstyle (k=1,\,2,\,3)}$$

$$(OP) \text{ egyenes darab és } OPA_k=\psi \atop {\scriptstyle (k=1,\,2,\,3)}$$

szög által.

Az (OP)-t a P pont radius-vektorának, a φ, ψ szögeket argumentumainak nevezzük.

2. Az egyenes egyenlete:

$$w_0\,[1+\varepsilon k^2(x^2+y^2)]+2w_1x+2w_2y=0.$$

Ha p meghatározza azon egyenes darabot, mely az egyenesre a $(0, 0)$ pontból merőleges és ez a pozitiv x tengelylyel φ szöget zár be, az egyenes egyenlete így is írható:

$$xE_x^{\frac{1}{2}}H_x^{-1}\cos\varphi+yE_y^{\frac{1}{2}}H_y^{-1}H_x^{-1}\sin\varphi-pE_p^{\frac{1}{2}}H_p^{-1}=0.$$

3. A $(0, 0)$ ponton átmenő egyenes vonallal egyközű vonal* ívhossza arányos az egyenes vonal ívhosszával; az arányossági tényező a H.

E tételt már Bolyai bizonyította be, czélszerűnek tartjuk itt általánosságban bebizonyitani.

Ha a

$$2\int_0^{\varrho}\frac{\sqrt{1+\varrho^2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}}{1+\varepsilon k^2\varrho^2}\,d\varrho$$

integrálból az

$$yE_y^{\frac{1}{2}}=\varrho E_\varrho^{\frac{1}{2}}\sin\varphi \quad (y \text{ állandó})$$

egyenletet (mely nyilván az egyközű vonal egyenlete) segélyével a φ-t kiküszöböljük és az integrálást elvégezzük, nyerjük, hogy az egyközű vonal ívhossza (s_y)

$$s_y=\frac{2}{k\sqrt{\varepsilon}}\operatorname{arctg} k\sqrt{\varepsilon}\,.\,x\,.\,H_y.$$

---

* Bolyai János az i. h. 27. §.

Innen következik:

a) Pozitiv ε esetén:

$$\frac{s_{y+}}{s_{1+}} = H_y\left(= \frac{1-k^2y^2}{1+k^2y^2}\right) < 1.$$

b) Ha $k^2=0$

$$\frac{s_y}{s_1} = 1.$$

c) Negativ ε mellett:

$$\frac{s_{y-}}{s_{1-}} = H_y\left(= \frac{1+k^2y^2}{1-k^2y^2}\right) > 1.$$

Ha *a)* esetben ψ jelöli azon derékszögű háromszögben az x-szel szemben levő szöget, melynek másik két oldala $\frac{1}{k}$-val van meghatározva, akkor

$$2\,\mathrm{arctg}\,kx = \psi,$$

tehát

$$s_{y+} = \frac{\psi}{k} H_y;$$

és így az egész egyközű vonal hossza:

$$\frac{2\pi}{k} H_y;$$

y e függvénye mindig véges.

Midőn $\varepsilon = -1$, az egyközű vonal ívhossza akár $x = \frac{1}{k}$, akár $y = \frac{1}{k}$ értékeknél végtelen.

Kikötve, hogy

$$y \leq \frac{1}{k}$$

az *a)* és *c)* szerint szorzással adódik:

$$s_{y+} \cdot s_{y-} = s_{1+} \cdot s_{1-}.$$

A jobb oldal y-ra nézve állandó; ennélfogva a feltétel alá eső y értékeknél állandó x értékek mellett a baloldal állandó.

4. Az ívelem kifejezése, a mint láttuk,

$$2\,\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{1+\varepsilon k^2(x^2+y^2)}.$$

Bolyai-nak * eljárása szerint az ivelem számára adódik:

$$\sqrt{E_x H_y^2 dx^2 + E_y dy^2}$$

és

$$\sqrt{E_x dx^2 + E_y H_x^2 dy^2}.$$

A területelem Gauss formulája szerint:

$$4\frac{dx\,dy}{[1+\varepsilon k^2(x^2+y^2)]^2}.$$

A legutóbbi kifejezés könnyen ily alakra hozható:

$$\varrho E_\varrho \, d\varrho \, d\varphi,$$

hol ϱ egy pont radiusvektora és φ ennek hajlása az x tengely positiv irányához.

Bolyai** módszere alapján a terület elem számára adódik:

$$y E_y^{\frac{1}{2}} E_x^{\frac{1}{2}} dx,$$

hol y-t x függvényének tekintjük.

5. Határozzuk meg egy

$$y = f(x)$$

görbe $A(x, y)$ pontjához tartozó érintőt (midőn $\varepsilon - +1$ az $y = \frac{1}{k}$ értéket kizárjuk).

Bolyai szerint* vegyük a görbe szomszédos pontját, B-t $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ és az A ponton átmenő, x tengelylyel egyközű vonalat, mely B pont ordinatáját C pontban metszi. Továbbá vegyük az A és B pontokon átmenő egyenest. Végtelen kis oldalú ABC háromszögnél

$$\frac{CB}{CA}$$

hányados adja az AB egyenes és AC vonal hajlásszögének (ω_+) tangensét $\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm}\right]$.

---

* Bolyai János, az i. h. 32. §. II.

** Bolyai János, az i. h. 32. §. III.

*** Bolyai János, az i. h. 32. §. I.

Az egyközű vonalra érvényes tétel alapján egyszerű számítás igazolja, hogy

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = E_x^{-\frac{1}{2}}\, E_y^{\frac{1}{2}}\, H_y^{-1}\, \frac{dy}{dx},$$

hol

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ha az Euklides geometriájában értelmezett $y=f(x)$ görbe (x, y) pontjához tartozó érintőnek hajlásszöge az x tengely positiv irányához ω, akkor

$$\operatorname{tg} \omega_{\pm} = E_x^{-\frac{1}{3}}\, E_y^{\frac{1}{2}}\, H_y^{-1} \operatorname{tg} \omega,$$

tehát $\operatorname{tg} \omega_{\pm}$ meghatározása vissza van vezetve $\operatorname{tg} \omega$ meghatározására, mely utóbbi már el van intézve.

(**1**) szerint, midőn

$$y = 0,$$

$$\operatorname{tg} \omega_{\pm} = 2 E_x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \omega.$$

És így, ha

$$x = \frac{1}{k},$$

$$\operatorname{tg} \omega_{+} = 2 \operatorname{tg} \omega$$

és

$$\operatorname{tg} \omega_{-} = 0.$$

A legutóbbi képlet szerint minden görbe a singularis kört orthogonálisan metszi. Az $x = \frac{1}{k}$ pontban érintő egyenesek az asymptoták.

Nyilvánvaló, hogy (x, y) és $\operatorname{tg} \omega_{\pm}$ megadásával felállítható érintő egyenlete.

Tekintsük azon esetet, midőn

$$x = a,\ y = 0.$$

Ekkor

$$p E_p^{\frac{1}{2}} = a E_a^{\frac{1}{2}} \sin \omega_{\pm}$$

és

$$\operatorname{tg} \varphi_{\pm} = \tfrac{1}{2}\, E_a^{\frac{1}{2}}\, H_a^{-1} \cot \omega$$

relacziók megadják az érintő egyenletének állandóit.

6. Az

$$x^2-k^4x^2y^2\varrho^2+y^2-\varrho^2=0$$

egyenlet állandó ϱ mellett azt a kört határozza meg, melynek sugara ϱ és középpontja a (0, 0) pont.

Ugyanazon kör elő van állítva:

$$\begin{aligned} xE_x^{\frac{1}{2}}H &= \varrho E_\varrho^{\frac{1}{2}}\cos\varphi, \\ yE_y^{\frac{1}{2}} &= \varrho E_\varrho^{\frac{1}{2}}\sin\varphi, \\ xE_x^{\frac{1}{2}} &= \varrho E_\varrho^{\frac{1}{2}}\sin\psi, \\ yE_y^{\frac{1}{2}}H_x &= \varrho E_\varrho^{\frac{1}{2}}\cos\psi, \\ xE_x^{\frac{1}{2}} &= \varrho E_\varrho^{\frac{1}{2}}\sin\psi, \\ yE_y^{\frac{1}{2}} &= \varrho E_\varrho^{\frac{1}{2}}\sin\varphi \end{aligned}$$

relaczió párak által állandó ϱ mellett.

A ϱ sugarú kör φ központi szögéhez tartozó ívhossza

$$P_{\varphi,\varrho}=\varphi\varrho E_\varrho^{\frac{1}{2}}$$

és ezen ívhosszhoz tartozó körczikk területe:

$$T_{\varphi,\varrho}=\varphi\varrho^2E_\varrho^{\frac{1}{2}}.$$

Ezeknél fogva a kör kerülete:

$$P_\varrho=2\pi\varrho E_\varrho^{\frac{1}{2}}$$

és területe

$$T_\varrho=2\pi\varrho^2E_\varrho^{\frac{1}{2}}.$$

Ugyanannál a körnél a φ és φ' középponti szögekhez tartozó ívek (körczikkek területének) aránya a szögek arányával egyenlő:

$$\begin{aligned} P_{\varphi',\varrho}:P_{\varphi,\varrho} &= \varphi':\varphi \\ T_{\varphi',\varrho}:T_{\varphi,\varrho} &= \varphi':\varphi. \end{aligned}$$

Két kör φ középponti szögéhez tartozó ívhosszainak aránya a sugaraktól függ:

$$P_{\varphi,\varrho'}:P_{\varphi,\varrho}=\varrho'E_{\varrho'}^{\frac{1}{2}}:\varrho E_\varrho^{\frac{1}{2}},$$

valamint a sugaraktól függ az ezen ívhosszakhoz tartozó kerületek aránya:

$$T_{\varphi,\varrho'} : T_{\varphi,\varrho} = \varrho'^2 E_{\varrho'}^{\frac{1}{2}} : \varrho^2 E_{\varrho}^{\frac{1}{2}}.$$

A kör geodætikus görbülése

$$\frac{\varphi}{P_{\varrho\varphi}} = \frac{1}{\varrho} E_{\varrho}^{-\frac{1}{2}},$$

tehát állandó.*

Fel lehet állítani az ellipsis, hyperbola, parabola egyenletét, melyek most nem lesznek x és y-ban másod, hanem magasabb fokúak. Itt ezen görbékkel nem foglalkozunk, hanem áttérünk a háromszög területére és a kör geometriai quadraturájára.

X.

A derékszögű háromszög területe ($T_\varDelta$) az

$$\frac{1}{2}\int_0^\varphi d\varphi \int_0^\varrho E_\varrho d\varrho^2$$

integrál alapján a

$$H_\varrho = \cot\varphi \cot\psi$$

képlet tekintetbe vételével lesz:

$$T_\varDelta = \frac{1}{\varepsilon k^2}\,[\varphi - \arcsin H_x \sin\varphi]$$
$$= \frac{1}{\varepsilon k^2}\,[\psi - \arcsin H_y \sin\psi],^{**}$$

a miben φ és ψ a derékszögű háromszög két szöge, x, y az ezen szögekkel szemben levő oldalakat határozzák meg.

Ezen formulákból egyszerű számítás rendén adódik a GAUSS-féle képlet, melynek most jelentését akarjuk felkeresni a síkbeli leképezésben.

Nyilvánvaló, hogy (a 4. ábrában) positiv ε mellett

$$\alpha = BO''G', \; \beta = AO''H';$$

---

* BIANCHI-LUKAT az i. h. 426. o.

** SERRET-HARNACK-BOHLMANN: Integral-Rechnung 426. o.

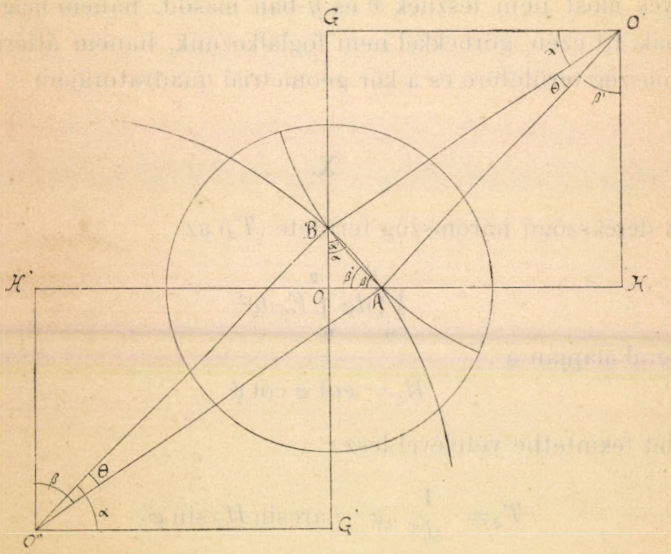
de

$$A'O''G' = \frac{\pi}{2}$$

és így

$$\alpha + \beta - \theta = \frac{\pi}{2};$$

ez pedig Gauss tétele a Riemann geometriában.



4. ábra.

Midőn ε negativ,

$$\alpha' = BO'G$$

$$\beta' = AO'H,$$

s mivel megint

$$GO'H = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha' + \beta' + \theta = \frac{\pi}{2},$$

tehát adódik Gauss tétele a Bolyai-Lobatsefszky-geometriában. És ezzel nyilván felkerestük a Gauss-tétel jelentését.

Végül, ha adva a és b, a derékszögű háromszög területét

$$T_\Delta = \frac{1}{k^2} \arcsin \frac{2k^2ab}{1+k^4a^2b^2}$$

formula adja. De a IV.- és V.-ben láttuk, hogy

$$\arcsin \frac{2k^2ab}{1+k^4a^2b^2} = \theta,$$

hol θ az AB ívhez (1., 2. ábra) tartozó középponti szög; így

$$T_\Delta = \frac{\theta}{k^2}.$$

Ezen eredmény alkalmat nyújt arra, hogy derékszögű háromszöget szerkeszszünk, melyre nézve adva van θ.

A következőkben ε-t elhagyjuk; a hol megkülönböztetés szükséges, kettős jelt használunk.

Legyen k^2 az egység.

Ha θ adva van graphikailag, akkor legyen egy y, mely szerkeszthető az Euklides síkbeli geometriában és kisebb, mint egy; szerkeszszük az x-t az

$$x = \frac{1}{y} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

egyenlet szerint az Euklides geometriában. Mivel x szerkesztése lehetséges, az AOB derékszögű háromszög is szerkeszthető.

Ha θ ívmértékben van adva, akkor kell, hogy θ szerkeszthető legyen. Ez azonban Gauss* szerint csak akkor lehet, ha θ a π oly aliquot része, melynek

$$n = a_1 a_2 \ldots a_h$$

osztójában mindenik a

$$2^m + 1$$

alakú törzsszám és mindenik egyszer jön elő, kivéve a 2-t, mely akárhányszor léphet föl. Egy ily háromszög területét

$$T_\Delta = \frac{\pi}{n}$$

formula adja.

---

* Gauss: Disqu. ar. S. VII.

Azon kör sugarát (ρ), melynek területe a derékszögű háromszög területének λ-szorosa (λ raczionális szám) meghatározza a

$$2\varrho^2 E_\varrho^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{n}$$

egyenlet. Innen:

$$\varrho = \frac{\sqrt{4\lambda n \mp \lambda^2}}{4n \mp \lambda}, \tag{1}$$

hol a negativ jel a Riemann-, a positiv a Bolyai-Lobatsefvszky-geometriában érvényes.

A síkbeli leképezésben az (1) szerint szerkesztett ρ-val a (0, 0) pont körül rajzolt kör fogja képviselni a derékszögű háromszög területének λ-szorosát.

Ha k^2 végtelen kicsiny, a felületek helyettesíthetők a síkkal és ekkor magasabb rangú végtelen kis mennyiségek elhanyagolásával a síkban lehetséges a körnek geometriai quadraturája. Véges k^2 esetén a pozitiv állandó görbületű felületen lehetséges a derékszögű háromszög megalkotása a IV. szerint.

Király Henrik.

A FERMAT-FÉLE KONGRUENCZIATÉTEL ELMÉLETÉHEZ.

A számelmélet elemeiből ismeretes, hogyha n valamely egész szám, akkor az n-hez relativ prim számok és csak ezek, tesznek eleget az

$$x^{\varphi(n)}-1 \equiv 0 \pmod{n} \tag{1}$$

kongruencziának. Ha a relativ prim számokat az

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)} \pmod{n}$$

betűkkel jelöljük, akkor világos, hogy ezek eleget tesznek a

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \equiv 0 \pmod{n} \tag{2}$$

kongruencziának is, mely az (1)-gyel egyenlő fokú. Ismeretes továbbá, hogy törzsszám esetében:

$$x^{p-1}-1 \equiv \prod_{i=1}^{p-1} (x-i) \pmod{p}$$

kérdés, hogy általánosságban, mely n modulusok esetében áll be az:

$$x^{\varphi(n)}-1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \pmod{n}$$

azonos kongruenczia? Ezt a kérdést vizsgálta meg Gruber * úr. A jelen dolgozatban a

---

* E lapok V. k. p. 232. V. ö. még Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn XIII. k., a hol a tárgyalás egyszerűsitve van.

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \quad (\text{mod.}\, n)$$

kifejezés számára *explicit* alakot állitok fel és ebből fogok következtetéseket vonni. Az eredmények a következők lesznek.

A) *Ha p páratlan törzsszám és*

$$n = p^{\pi} m, \quad (m, p) = 1,$$

akkor helyes a következő azonos kongruenczia:

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \equiv (x^{p-1}-1)^{\frac{\varphi(n)}{p-1}} \quad (\text{mod.}\, p^{\pi}). \tag{I}$$

B) *Ha $\beta > 1$ és*

$$n = 2^{\beta} m, \quad m \equiv 1 \ (\text{mod.}\, 2),$$

akkor helyes a következő azonos kongruenczia:

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \equiv (x^2-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \quad (\text{mod.}\, 2^{\beta}). \tag{IIa}$$

Ezt az utóbbit kiegésziti a *minden páros n*-re helyes

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \equiv (x-1)^{\varphi(n)} \quad (\text{mod.}\, 2) \tag{IIb}$$

kongruenczia, a mely közvetetlenűl világos.

Az előbbi azonosságok alkalmazását adja azután ama kérdés vizsgálata, *hogyha d az n-nek osztója, mely esetben helyes az*

$$x^{\varphi(n)}-1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \quad (\text{mod.}\, d)$$

azonos kongruenczia? A választ a következő táblázat adja, a melyben p páratlan, q pedig 2^k+1 alakú törzsszámot jelent:

d	n
p	p^{α}, $2p^{\alpha}$
2	2^{α}, $2^{\alpha} \prod_s q_s$, a q_s tényezők különbözők
4	4
$2q$	$2q$

I.

1. Legyenek:

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{\varphi(n)}$$

az n-nél kisebb és vele relativ prim számok, és vezessük be a

$$F_n(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-t_i)$$

kifejezést, akkor mindenekelőtt világos, hogy:

$$\begin{aligned} &F_n(x) \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \pmod{n} \\ &F_p(x) = x^{p-1}-1+p\Phi(x) \qquad\qquad (3) \\ &F_2(x) = x-1 \\ &F_4(x) = (x-1)(x-3), \quad F_4(x) \equiv x^2-1) \pmod{4} \\ &F_n(x) \equiv (x-1)^{\varphi(n)} \pmod{2}, \quad n \equiv 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

2. Be fogjuk bizonyitani, hogy:

$$F_{p^\alpha}(x) \equiv (x^{p-1}-1)^{p^{\alpha-1}} \quad (\text{mod.}\, p^\alpha). \tag{4}$$

E végből először is kimutatjuk a következő azonosságot:

$$F_{p^{\beta+1}}(x) \equiv (F_{p^\beta}(x))^p \quad (\text{mod.}\, p^{\beta+1}). \tag{5}$$

Legyenek ugyanis a p^β-nál kisebb és vele relativ prim számok

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_{\varphi(p^\beta)},$$

akkor

$$F_{p^{\beta+1}}(x) = \prod_{m=0}^{p-1} (x-\tau_1-mp^\beta)(x-\tau_2-mp^\beta)\ldots(x-\tau_{\varphi(p^\beta)}-mp^\beta).$$

Azonban

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\varphi(p^\beta)} (x-\tau_i-mp^\beta) &\equiv F_{p^\beta}(x)-mp^\beta \sum_i \frac{F_{p^\beta}(x)}{x-\tau_i} \equiv \\ &\equiv F_{p^\beta}(x)-mp^\beta G(x) \quad (\text{mod.}\, p^{\beta+1}) \end{aligned}$$

és igy

$$\begin{aligned} F_{p^{\beta+1}}(x) &\equiv \prod_{m=0}^{p-1} \left\{F_{p^\beta}(x)-mp^\beta G(x)\right\} \equiv \\ &\equiv (F_{p^\beta}(x))^p-p^\beta(F_{p^\beta}(x))^{p-1} G(x) \sum_{m=0}^{p-1} m \quad (\text{mod.}\, p^{\beta+1}) \end{aligned}$$

de mivel

$$\sum_{m=0}^{p-1} m = \frac{p(p-1)}{2}$$

lesz:

$$F_{p^{\beta+1}}(x) \equiv (F_{p^\beta}(x))^p \quad (\mathrm{mod.}\, p^{\beta+1}). \qquad (5)$$

Ez az azonosság először is azt adja, hogy:

$$F_{p^2}(x) \equiv (F_p(x))^p \equiv [(x^{p-1}-1)+p\Phi(x)]^p \equiv (x^{p-1}-1)^p \ (\mathrm{mod.}\, p^2).$$

Tegyük már most fel, hogy:

$$F_{p^{\alpha-1}}(x) \equiv (x^{p-1}-1)^{p^{\alpha-2}} \quad (\mathrm{mod.}\, p^{\alpha-1}):$$

vagyis

$$F_{p^{\alpha-1}}(x) = (x^{p-1}-1)^{p^{\alpha-2}} + p^{\alpha-1}\Phi_{\alpha-1}(x),$$

akkor lesz:

$$F_{p^\alpha}(x) \equiv (F_{p^{\alpha-1}}(x))^p \quad (\mathrm{mod.}\, p^\alpha)$$

és így a mint bebizonyítandó volt:

$$F_{p^\alpha}(x) \equiv (x^{p-1}-1)^{p^{\alpha-1}} \quad (\mathrm{mod.}\, p^\alpha). \qquad (4)$$

3. Ha $\beta > 1$, akkor:

$$F_{2^\beta}(x) \equiv (x^2-1)^{2^{\beta-2}} \quad (\mathrm{mod.}\, 2^\beta). \qquad (6)$$

Ugyanis a $2^{\beta+1}$-hez relativ prim számok:

$$\left.\begin{array}{l} 1, \quad 3, \quad 5, \ldots, \quad (2^\beta-1) \\ -1, \ -3, \ -5, \ldots, -(2^\beta-1) \end{array}\right\} (\mathrm{mod.}\, 2^{\beta+1}).$$

Ebből a megjegyzésből rögtön adódik:

$$F_{2^{\beta+1}}(x) \equiv F_{2^\beta}(x)\, F_{2^\beta}(-x) \quad (\mathrm{mod.}\, 2^{\beta+1}) \qquad (7)$$

Azonban

$$F_4(x) \equiv x^2-1 \quad (\mathrm{mod.}\, 4),$$

tehát

$$F_{2^3}(x) \equiv (x^2-1+4\Psi_3(x))\,(x^2-1+4\Psi_3(-x)) \quad (\mathrm{mod.}\, 2^3)$$

és így

$$F_{2^3}(x) \equiv (x^2-1)^2 \quad (\mathrm{mod.}\, 2^3).$$

Ugyanígy látnivaló, hogy

$$F_{2^\beta}(x) \equiv (x^2-1)^{2^{\beta-2}} \quad (\mathrm{mod.}\, 2^\beta). \qquad (6)$$

4. Ha d, az n-nek osztója, akkor:

$$F_n(x) \equiv (F_d(x))^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}} \quad (\text{mod. } d). \qquad (8)$$

Ennek a bebizonyitására elég azt idéznünk,* hogy az n-hez relativ prim számok a

$$dz + v_i$$

sorozatokban vannak elhelyezve, a hol

$$v_1, v_2, \ldots, v_{\varphi(d)}$$

a d-hez relativ prim és nála kisebb számok. Minden ily sorozatban $\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}$ számmal van az n-hez relativ prim szám (mod. n). A (8) azonosság az előzőkkel együtt megadja a (I), (IIa), (IIb) képleteket.

II.

1. Legyen d az n-nek osztója, vizsgáljuk meg, hogy mikor helyes az

$$x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \quad (\text{mod. } d) \qquad (a)$$

kongruenczia? Ha az (a) kongruenczia valamely d modulusra helyes, akkor érvényes annak minden osztójára is. És így először a $d = p$ esetét vizsgáljuk, vagyis az

$$x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \quad (\text{mod. } p) \qquad (b)$$

azonos kongruenczia érvényességi feltételeit. Amde a (b) æquivalens (I) szerint a következővel:

$$(x^{p-1} - 1)^{\frac{\varphi(n)}{p-1}} \equiv x^{\varphi(n)} - 1 \quad (\text{mod. } p) \qquad (b^*)$$

s igy kell, hogy legyen

$$(-1)^{\frac{\varphi(n)}{p-1}} \equiv -1 \quad (\text{mod. } p),$$

---

* E lapok V. k. p. 151.

a miből

$$n = \begin{cases} p^{\alpha} \\ 2p^{\alpha}. \end{cases}$$

Fordítva, ha n ezeket az értékeket veszi fel, a (b) kongruenczia, mint az közvetlenül látható, csakugyan ki van elégítve.

2. Sohasem lehet helyes az

$$x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \quad (\text{mod.}\, p^2) \qquad (c)$$

azonos kongruenczia. Ugyanis a megvizsgálandó értékek

$$n = \begin{cases} p^{\alpha} \\ 2p^{\alpha}, \end{cases}$$

és ez esetekben lesz:

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \equiv (x^{p-1} - 1)^{p^{\alpha-1}} \quad (\text{mod.}\, p^{\alpha}).$$

Ámde $\alpha > 1$ és így

$$(x^{p-1} - 1)^{p^{\alpha-2}} = (x^{p^{\alpha-2}(p-1)} - 1 + pf(x)$$

vagyis

$$(x^{p-1} - 1)^{p^{\alpha-1}} \equiv x^{p^{\alpha-2}(p--1)} - 1)^{p} \quad (\text{mod.}\, p^2),$$

tehát *nem* kongruens az

$$x^{p^{\alpha-1}(p-1)} - 1 \quad (\text{mod.}\, p^2)$$

kifejezéssel.

3. Térjünk át $d = 2$ esetére, vagyis az

$$x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \equiv (x - 1)^{\varphi(n)} \quad (\text{mod.}\, 2) \qquad (e)$$

kongruencziára. Legyen

$$\varphi(n) = 2^h l, \quad l \equiv 1 \quad (\text{mod.}\, 2)$$

ki fogjuk mutatni, hogy az (e) kongruenczia akkor és csak akkor helyes, ha $l = 1$. Ugyanis, a mint teljes indukczió által meggyőződhetünk:

$$(x-1)^{2^h} \equiv x^{2^h}-1 \pmod{2}$$

és ha most az

$$x^{2^h} = y$$

rövidítéssel élünk, az (*e*) kongruenczia átmegy a következőbe:

$$(y-1)^l \equiv y^l-1 \pmod{2}, \quad l \equiv 1 \pmod{2},$$

a mely csak $l = 1$ esetére igaz. Így tehát csakugyan $\varphi(n) = 2^h$, a miből:

$$n = \begin{cases} 2^\alpha \\ 2^\alpha \prod\limits_s q_s. \end{cases}$$

4. Az

$$x^{\varphi(n)}-1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \pmod{4} \qquad (f)$$

azonos kongruenczia csak $n = 4$ esetében igaz. A tekintetbe jövő n értékeket ugyanis így osztályozhatjuk:

$$n = \begin{cases} 4 \\ 2^\beta, \ \beta > 2 \\ 2^\beta \prod\limits_s q_s, \ \beta \geqq 2. \end{cases}$$

Az első esetben

$$x^2-1 \equiv (x-1)(x-3) \pmod{4}.$$

A második és harmadik esetben:

$$\varphi(n) = 2^h, \quad h > 1$$

és így

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \equiv (x^2-1)^{2^{h-1}} \pmod{4}, \quad h-1 > 0.$$

Ámde

$$(x^2-1)^{2^{h-2}} = x^{2^{h-1}}-1+2g(x)$$

és így

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \equiv (x^{2^{h-1}}-1)^2 \pmod{4},$$

tehát *nem* kongruens az

$$x^{2^h}-1 \quad (\text{mod.}\, 4)$$

kifejezéssel.

5. Hátra van még a $d=2p$ esete. Az előzőkből látnivaló, hogy az

$$x^{\varphi(n)}-1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x-r_i) \quad (\text{mod.}\, 2p)$$

azonos kongruenczia csakis a $p=q$, $n=2q$ esetben lehet helyes és hogy ekkor tényleg érvényes is a kongruenczia.

Bauer Mihály.

AZ ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓKKAL BIRÓ LINEÁR DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK ELMÉLETÉHEZ.

1. Ha az

$$F(y)=A_0 y^{(n)}+A_1 y^{(n-1)}+\cdots+A_n y=0 \tag{1}$$

állandó együtthatókkal biró, homogén lineár differencziálegyenlethez tartozó:

$$F(\alpha)=A_0 \alpha^n+A_1 \alpha^{n-1}+\cdots+A_n=0 \tag{2}$$

karakterisztikus egyenletnek α_1 az n_1-szeres, α_2 az n_2-szeres és végül α_r az n_r-szeres gyöke, a hol

$$n_1+n_2+\cdots+n_r=n,$$

akkor, miként ismeretes, a differencziálegyenletnek

$$e^{\alpha_1 x},\ xe^{\alpha_1 x},\ \ldots,\ x^{n_1-1} e^{\alpha_1 x},\ \ldots,\ e^{\alpha_r x},\ xe^{\alpha_r x},\ \ldots,\ xe^{n_r-1} e^{\alpha_r x} \tag{3}$$

n partikuláris megoldása. Fölmerül a kérdés, hogy e megoldások lineárisan függetlenek-e.

Kézikönyveink, melyek e kérdéssel foglalkoznak, egyszerűen azt mutatják meg, hogy e rendszer Wronsky-féle determinánsa nem azonosan 0; pl. oly módon, hogy kimutatják, hogy e determináns az $x=0$ helyen a 0-tól különbözik. Az $x=0$ helyettesítéssel keletkező determináns megegyezik azzal, mely a M. Ph. L.-ban már többször, legutóbb Zemplén Győző úr értekezésében* is szerepelt.

---

* M. Ph. L. IX. k. 386. l.

A következő sorokban igen egyszerű eljárással a (3) alatti rendszer Wronsky-féle determinánsát fogjuk meghatározni és ezzel természetesen az említett specziális determináns értéke is közvetlenül kiadódik.

2. A kérdéses determináns a következő:

$$W=\left|\begin{array}{llllllllll} e^{\alpha_1x}, & xe^{\alpha_1x}, & \ldots, & x^{n_1-1}e^{\alpha_1x}, & \ldots, & e^{\alpha_rx}, & xe^{\alpha_rx}, & \ldots, & x^{n_r-1}e^{\alpha_rx} \\ (e^{\alpha_1x})', & (xe^{\alpha_1x})', & \ldots, & (x^{n_1-1}e^{\alpha_1x})', & \ldots, & (e^{\alpha_rx})', & (xe^{\alpha_rx})', & \ldots, & (x^{n_r-1}e^{\alpha_rx})' \\ (e^{\alpha_1x})'', & (xe^{\alpha_1x})'', & \ldots, & (x^{\alpha_1-1}e^{\alpha_1x})'', & \ldots, & (e^{\alpha_rx})'', & (xe^{\alpha_rx})'', & \ldots, & (x^{n_r-1}e^{\alpha_rx})'' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (e^{\alpha_1x})^{(n-1)}, & (xe^{\alpha_1x})^{(n-1)}, & \ldots, & (x^{x_1-1}e^{\alpha_1x})^{(n-1)}, & \ldots, & (e^{\alpha_rx})^{(n-1)}, & (xe^{\alpha_rx})^{(n-1)}, & \ldots, & (x^{n_r-1}c^{\alpha_rx})^{(n-1)} \end{array}\right| \qquad (4)$$

E determináns átalakítása végett megalkotjuk az

$$F_1(a)=\frac{F(a)}{a-a_r}=B_0a^{n-1}+B_1a^{n-2}+\cdots+B_{n-1}=0 \qquad (5)$$

egyenletet, mely karakterisztikus egyenlete az

$$F_1(y)=B_0y^{(n-1)}+B_1y^{(n-2)}+\cdots+B_{n-1}y=0 \qquad (6)$$

$n-1$-edrendű homogén lineár differencziálegyenletnek.

Ennek az $F_1(y)=0$ differencziálegyenletnek, mint azonnal látható az előbbi (3) alatti rendszer — az utolsó, $x^{n_r-1}e^{\alpha_rx}$ elhagyásával — partikuláris megoldásait szolgáltatja; mert hiszen a karakterisztikus egyenlete csak abban különbözik az adott differencziálegyenlet karakterisztikus egyenletétől, hogy a_r nem n_r-szeres, hanem csak n_r-1-szeres gyöke.

Ha már most a W determináns sorait rendre

$$B_{n-1},\ B_{n-2},\ldots, B_0\text{-}$$

al szorozzuk és az utolsó sorhoz adjuk, akkor az utolsó sor elemei, e sor utolsó elemén kívül, valamennyien eltünnek; az n-ik sor n-ik eleme pedig:

$$z=F_1(x^{nr-1}e^{a_rx}) \tag{7}$$

lesz. Ezt a z függvényt kell kiszámitanunk.

3. E z függvény kiszámítása végett állítsuk elő az $F_1(a)$ egész függvényt a következő alakban:

$$F_1(a)=A_0(a-a_1)^{n_1}(a-a_2)^{n_2}\ldots(a-a_r)^{nr-1}$$

és ennek megfelelően az $F_1(y)$ $n-1$-edrendű homogén lineár differencziálalakot a következő szimbolikus alakban*

$$F_1(y)=A_0(D-a_1)^{n_1}(D-a_2)^{n_2}\ldots(D-a_r)^{nr-1}.$$

A z kiszámítása végett az $x^{n_1-1}e^{a_rx}$ függvényen legelőször a

$$(D-a_r)^{nr-1}$$

operácziót végezzük, azután sorban a $(D-a_1)^{n_1}$, $(D-a_2)^{n_2}$, ... operacziókat.**

$$(D-a_r)^{nr-1}(x^{nr-1}e^{a_rx})=(n_r-1)!\,e^{a_rx}$$

és

$$(D-a_1)\,e^{a_rx}=a_r\,e^{a_rx}-a_1\,e^{a_rx}=(a_r-a_1)\,e^{a_rx}$$

$$(D-a_1)^2\,e^{a_rx}=(a_r-a_1)^2\,e^{a_rx}$$

s i. t.

$$(D-a_1)^{n_1}e^{a_rx}=(a_r-a_1)^{n_1}e^{a_rx}.$$

Ebből következik, hogy:

$$\begin{aligned}z&=F_1(x^{nr-1}e^{a_rx})=\\&=(n_r-1)!\,(a_r-a_1)^{n_1}(a_r-a_2)^{n_2}\ldots(a_r-a_{r-1})^{nr-1}e^{a_rx}.\end{aligned} \tag{8}$$

---

* L. JORDAN Cours d'Analyse III. p. 157. ** u. o.

4. A W determináns tehát egyszerűen a következőre redukálódik:

$$W=(n_r-1)!\,(\alpha_r-\alpha_1)^{n_1}(\alpha_r-\alpha_2)^{n_2}\ldots(\alpha_r-\alpha_{r-1})^{nr-1}W_1\,e^{\alpha rx}$$

a hol W_1 az

$$e^{\alpha_1 x},\ xe^{\alpha_1 x},\ldots,\ x^{n_1}e^{\alpha_1 x},\ldots,\ e^{\alpha rx},\ xe^{\alpha rx},\ldots,\ x^{nr-1}e^{\alpha rx}$$

$n-1$ partikuláris megoldás Wronsky-féle determinánsa.

A W_1 ugyanilyen eljárással redukálható a

$$W_1=(n_r-2)!\,(\alpha_r-\alpha_1)^{n_1}(\alpha_r-\alpha_2)^{n_2}\ldots(\alpha_r-\alpha_{r-1})_{\text{a}}^{nr-1}W_2\,e^{\alpha rx}$$

alakra; tehát:

$$W=(n_r-1)!\,(n_r-2)!\\ [(\alpha_r-\alpha_1)^{x_1}(\alpha_r-\alpha_2)^{n_2}\ldots(\alpha_r-\alpha_{r-1})^{nr-1}]^2\,e^{2\alpha rx}\,.\,W_3$$

s ezt az eljárást folytatva:

$$W=(n_r-1)!\,(n_r-2)!\ldots2!\,1\,.\\ [(\alpha_r-\alpha_1)^{n_1}(\alpha_r-\alpha_1)^{n_1}\ldots(\alpha_r-\alpha_{r-1})^{nr-1}]^{nr}\,\overline{W}\,.\,e^{nr\alpha rx},$$

a hol $\overline{W}$ a (3) alatti rendszer első $n-n_r$ függvényének Wronsky-féle determinánsa.

Ha a $\overline{W}$-t ugyanigy alakítjuk át s ezt az eljárást folytatjuk, végül a következő eredményre jutunk:

$$W=(n_1-1)!\,(n_1-2)!\ldots2!\,1\ldots.(n_r-1)!\,(n_r-2)!\ldots2\,.\,1\,.\\ \mathop{\Pi}_{\substack{k<i,\quad k=1,2,\ldots,r\\ i=1,2,\ldots,r}}(\alpha_k-\alpha_i)^{n_k n_i}\,e^{x\Sigma n_i\alpha_i}$$

Ezen alakon azonnal látjuk, hogy a keresett Wronsky-féle determináns minden véges x-re nézve a 0-tól különböző, tehát a (3) alatti rendszer valóban alaprendszert alkot.

Ha e determinánsban $x=0$ teszszük, az említett determinánsrelácziót kapjuk.

Beke Manó.

AZ ATOMOKNÁL KISEBB RÉSZECSKÉKRE VONATKOZÓ KISÉRLETI VIZSGÁLATOKRÓL.

(Zeeman P. székfoglaló beszéde. Amsterdam, 1900 márcz. 12.)

Az a kérdés, vajjon az anyag, melyből a minket környező világ felépült, határtalanul osztható-e, avagy, hogy léteznek-e utolsó, oszthatatlan részecskék, atomok, tekintélyes része volt az időszámításunk előtti V. évszázad tudományosságának, s épen ilyen tekintélyes része a mostani, a XIX. évszázad tudományosságának is. Az atomistikus iskola szerint a vízcsepp osztásának folytatásánál végre oly részecskékig érünk, melyekre az eljárás tovább nem alkalmazható.

Ez a Demokritus, Epicurus és Lucretius atomistikus felfogása, s bátran hozzátehetjük, hogy főbb vonásaiban a Clausius-é, Maxwell-é és van der Waals-é is. De míg a régi atomfogalom csak arra volt jó, hogy a dialektika áradatát megindítsa, addig az újabbi, a természetről való ismereteink szaporításában a legfontosabb segédeszközök egyikévé vált.

Atomoknak nevezzük azokat az igen kicsiny, önálló épitőköveket, a melyekből az anyagi világ felépül. A physikának különböző disciplinái az atomok nagyságát illetőleg egybehangzó becsléseket szolgáltatnak. Nagyon pontosan ismerjük az atomok súlyainak egymáshoz való arányait, s tudjuk, hogy méreteik a mm-nek milliomod és tízmilliomod részei közt fekszenek. Tudjuk azt is, hogy az atomok csak annyiban nevezhetők oszthatatlanoknak, a mennyiben azokat egyelőre felosztani még képesek nem vagyunk. De a legegyszerűbb gázoknak bonyolódott színképei szükségképen ránk kényszerítik azt a föltevést, hogy az atomok alkata nagyon bonyolódott, s így majdan kell, hogy azokban még részeket megkülönböztethessünk. A legeslegújabb időkben végzett vizsgálatok azonban az atomoknál kisebb részecskék önálló létezését minden kétségen felül igazolták, sőt még annak a lehetőségét is kilátásba helyezték, hogy az alchymistáknak az elemek átalakítására vonatkozó álma megvalósul. Szabadjon nekem e következőkben azokat a kisérletileg megállapitott okokat kifejtenem, a melyek az atomoknál is kisebb részecskék fölvétele mellett állanak.

A physikusok jelenleg általában azt vélik, hogy az elektromosságnak folyadékokon, különösen sók és savak oldatain az elektrolyteken való keresztülvezetése, különleges módon történik. Az ilyen elektrolytek egyike sem vezetheti az áramot a nélkül, hogy meg ne bontatnék. Az elektromosság nem az atomokon keresztül, hanem az anyag mozgásba jövő atomjaival együtt áramlik. Minden fématomnak megvan a maga meghatározott elektromos töltése, mely független a vizsgált fémvegyület minőségétől. Ha már most egyazon áram egymásután két oldaton, pl. egy rézsó és egy ezüstsó oldatán megy keresztül, akkor e mellett a réz- és ezüstatomoknak egyenlő töltésük volna. Minthogy azonban a réz- és ezüstatomok nem egyenlő súlyúak, ennélfogva a töltés az anyagok egyenlő súlyú részeire nézve nem lenne egyenlő. A súlyegységnek, vagy jobban mondva a tömegegységnek megfelelő töltés a nagyobb atomsúlyú anyagra nézve természetesen kisebb. Nemcsak fémekre, hanem minden anyagra vonatkozólag megadhatjuk a tömegegység töltésének értékét s így a hydrogennek töltését grammonként 10,000 (elektro-magnetikus) egységnyinek találjuk. A többi elemek mindegyikének atomjai nagyobb tömegüek, mint a hydrogenatomok, s így arányszámunk azokra nézve kisebbedik. Ha egyszer oly anyagra akadnánk, melynek arányszáma a hydrogenénál nagyobb, akkor bizonyosak lehetnénk a felől, hogy atomjai kisebbek a hydrogenatomoknál.

Az elektrolytban az atomok töltése részint positiv, részint negativ, s így magyarázható meg az, hogy az áram hatása folytán a positiv töltésü atomok az árammal haladnak, s a negativ töltésüek az ellenkező irányban mozdulnak el. Így magyarázható meg, hogy azon a helyen, hol az áram a folyadékból kilép, a negativ elektrodon a fém, a positiv elektrodon az elektrolytnek másik alkatrésze válhatik le. Az elektrochemiának ezen és a thermoelektricitásnak más tüneményei a positiv és negativ elektromosság között fennálló különbséget derítik föl. De ez a különböző viselkedés sehol sem lép föl világosabban, mint az elektromosságnak szikra-, csillag- és fénypamatalakú kisülései következtében előálló szép tüneményeknél, melyek egy közönséges elektromozó gép csúcsaiból indulnak ki és egy légszivattyúnak üresre szivattyúzott tartójában, az elektromos tojásban mutatkoznak.

Faraday, a jelen század legnagyobb kutatója és kisérletezője az elektromosságnak szikra-, csillag- és fénypamatalakú kisülésmódjait sajátságaikat illetőleg már korábban pontosan megvizsgálta és *Experimental Researches*einek 13. sorozatában így szól: «Azok az eredmények, melyek a positiv és negativ kisülések eltérő viselkedéseire vonatkoznak, az elektromosság elméletére sokkal nagyobb befolyással lesznek, mint azt jelenleg föltehetjük.» Csak épen legújabban s minden országok kutatóinak a kisülési tünemények vizsgálata körüli egyetértő összeműködése bírt a theoria számára oly gyümölcsöket megérlelni, a melyek Faraday jövendölését fényesen igazolják. Miben állanak tehát ezek a fontos kisülési tünemények?

Gondoljunk egy üvegcsővet, mely össze van kötve a légszivattyúval, úgy, hogy belőle a levegőt részben vagy egészben eltávolíthatjuk, s mely az üvegfalba forrasztott fémdrótokkal van ellátva: ezen drótok egyik vége befelé, a másik kifelé áll. Ezek a drótok az elektrodok, arra szolgálnak, hogy az elektromosságot segítségükkel a cső belsejébe vezethessük. E czélból összeköttetnek egy közönséges elektromozó géppel vagy egy inductiós készülékkel, vagy végre az elemek egy batteriájával. A mutatkozó kisülési tünemények egyrészt a cső bőségétől, másrészt az elektrodok távolságától, s végre az elektromos töltés sűrűségétől függenek. Más tekintetben azonban a kisülés jellege minden csőre nézve ugyanaz, s egyedül a csőben foglalt levegő sűrűségétől, vagy a benne foglalt gáznak természetétől függ.*

---

* Zeemann nagyrészt laikus közönség előtt beszélt s így magyarázhat meg az előadás mentén több helyt mutatkozó túlságos részletesség.

A fordító.

Ha a csőben uralkodó nyomás a légköri nyomással egyenlő, akkor a kisülés a szikrának ismeretes zeg-zugos, czikkázó alakját mutatja, mely a villámra emlékeztet, s a mely levegőben fehér, hydrogenben pedig vöröses szinű. Ha a csőben a levegőt megritkitjuk, akkor a szikra nem lép fel többé, hanem a világító pamat abban a mértékben szélesbedik, a mely mértékben a levegő megritkul. Az inductorium positiv sarkával összekötött elektrod közelében szabályszerű fény-maximumokat és minimumokat veszünk észre. A negativ sarkkal összekötött másik elektrodon, a kathodon, a kisülésnek másik része, a negativ- vagy kathod-fény tünik fel. Ezt a positiv fénytől egy gyöngén világított vagy egészen sötét rész választja el.

A kathod-fény rendszerint egy a csúcson mutatkozó kicsiny fényfoltocskából áll. Ha a teret még tovább ritkítjuk, akkor a fényfoltocska mind nagyobbá válik, s az egész kathodot egy fényes hártyácska alakjában borítja be. Mennél kisebbé válik a csőben a nyomás, annál vastagabbá lesz a fényhártyácska, s egy mm.-nyi higanyoszlop magasságú nyomásnál a kékes szinű kathod-fény több deciméternyi hosszúságú csövet is betölthet. Növekvő ritkulásnál a positiv elektrod fénye mindinkább veszít intensitásban, s a positiv elektrod alkalmas elhelyezése mellett a physikus abba a helyzetbe jöhet, hogy csupán a kathod-fény kerül szemei elé.

Ebben a legsajátosabb tünemények játszódnak le. Ha a kékes kathod-fény a szemköztes üvegfalig terjed, s a nyomás már csak a mm.-nek törtrésze, akkor egy különös tünemény mutatkozik. Az üvegfal maga is kezd fényt árasztani, phosphoreskál. Thüringiai üveg esetében ez a phosphoreskáló fény zöldes szinű. Még továbbra menő ritkításnál a phosphoreskálás erősbödik, a teret kitöltő kékes fény intensitása pedig csökken, s végül a kékes fény majdnem teljesen elenyészik, a mi egy a phosphoreskáló fény tanulmányozása tekintetéből rendkívül kivánatos körülmény.

A be nem avatott szemlélő ezeket az alig látható tüneményeket nagyon is könnyen figyelmen kívül hagyja; egyes kiválasztottaknak azonban épen ezek mutatták meg azt az utat, a melyen a természet titkaiba mélyebbre hatolhattak. Ezen zöld phosphoreskáló fény behatóbb vizsgálatai a kathod-sugarak fölfedezésére vezettek, melyek a későbbi Röntgen-sugarak szüleivé lettek.

Az első physikus, a ki a zöld phosphoreskáló fényt 1859-ben leirta, Plücker volt. Ő Bonnban élt, s így alkalma volt Geisslernek, a hires üvegfuvónak segítségét igénybe venni, azét, a ki a róla elnevezett kisülési csöveket és légszivattyúkat bonni műhelyében készitette. Plücker tanítványa Hittorf ezen a téren ismereteinket rendkívüli módon szaporította. Így pl. kisérleteiből azt következtette, hogy a kathod-fény pont végződésü elektrodokról egyenes vonalokban terjed szét. Goldstein továbbá 1876-ban kimutatta, hogy korongalakú kathodok is a kisülési csőben a kathod és az üvegfal közé helyezett tárgyaknak jól határolt árnyékait szolgáltatják, sőt, ha a tárgyak kicsinyek is és közvetetlenül e kathod közelében állanak is, árnyékaik még elég jól körvonalazottak. Úgy tünik föl, mintha a kathod világító test lenne, s így a Goldstein használta «kathod-sugár» elnevezést mindenki elfogadta. Azért ezek a sugarak mégis másfélék, mint a fénysugarak; mert ha a kathodot egy vele egyenlő nagyságú fényes korongocskával helyettesitenők, akkor egy a közelébe állított kicsiny tárgy a távolabb álló falra árnyékot nem vetne. Goldstein-nak az az egyszerű megfigyelése tehát rendkívüli fontosságú; azt bizonyítja, hogy a kathod-sugarak egy bizonyos, majdnem merőleges irányban indulnak ki a kathodról.

Goldstein észleletei után néhány évvel Crookes a világot, és pedig nem csupán a tudományosat, a kathodsugarakra, vagy a mint ő nevezi, a *sugárzó materiára* vonatkozó szép kisérletek egész sorával lepte meg. Erre a tárgyra azon nehézségek vezették, melyekkel a thallium atomsúlyának meghatározása közben találkozott, a mennyiben zavarok mutatkoztak mindannyiszor, valahányszor mérlegét légüres térbe hozta; a látszólagos hőokozta taszítást és vonzást a levegő sűrűsége szerint változónak találta. Kisérleteinek folytatása közben találta föl az ő radiométerét, azt a fénymalmocskát, melyet a látszerészek kirakataiban gyakran szemlélhetünk. Ő vizsgálta ezt meg először, elektromozás nélkül, majd elektromozással. Maxwell és Stokes hathatós támogatása mellett eredményeit a gázok kinetikai elméletével hozta kapcsolatba, s így a legszélsőbb vacuumok és a kathod-sugarak birodalmának kellő közepére s oly föltevéshez jutott, mely finomított alakban most is megmagyaráz minden tüneményt, bár azóta újabb tények derittettek ki.

Mik azok a kathod-sugarak tulajdonképen? Legközelebb még sokan, különösen német physikusok azt hitték, hogy a kathod-sugarak az ætherben előálló tünemények. Ellenben mások azt a nézetet védelmezték, melyet legelőször Crookes hangoztatott, hogy a kathod-sugarak negativ töltésü részecskék pályái, a mely részecskék a kathodról az elektromos taszitás következtében nagy sebességgel elröpittetnek. Ez az utóbbi nézet, az ú. n. emissióelmélet tényleg legjobban megközelíti az igazságot. Azonnal megmagyarázza többek közt azt, hogy a kathod-sugarak pályái miért görbülnek el egy homogen mágneses mezőben, úgy, hogy átlátszatlan tárgyak árnyékai a mágnessel való közelítéskor vándorolni kezdenek. Tényleg, a mágneses mezőben a mozgó, negativ töltésü részecskék oly erőhatásnak vannak kitéve, a mely mozgásuk irányára és a mágneses erőére merőleges, és a mely (ha a sebesség és a mágneses erő irányai egymásra merőlegesek) egyenlő a sebességnek és a mágneses erő intensitásának szorzatával. Ebből magyarázható meg az, miért köralakú a kathod-sugarak pályája (mely kör egészen a csövön belül is fekhet), ha a mágneses mező eléggé erős? Most már világos lesz az is, miért kell a kathod-sugarak pályáinak positiv és negativ töltésű testek közelében elgörbülniök?

De ha tényleg tovarepülő testecskékkel van dolgunk, akkor sikerülnie kell annak is, hogy azokat valami alkalmas csapdában megfogjuk és töltésük természetét kipuhatoljuk. Kisérleteivel Perrin bizonyította be azt, hogy ez lehetséges, s így azt is, hogy a kathodról egy negativ töltésű valami ellökődik. Goldstein-nek más kisérletei is, különösen az egyidejüleg használt több kathodokra vonatkozók, ezzel a hypothesissel megmagyarázhatók. Így pl. az a tetemes fölmelegedés is, melyet a kathodról kiinduló bombázás okoz, ha a gyujtópontba üveget vagy fémet helyezünk és talán némileg azok a fényes szinek is megmagyarázhatók, melyeket a rohanó részeskék áramába helyezett szintelen anyagok, világos kristályok mutatnak. Bár ezen qualitativ eredmények erőszakolatlan magyarázatai az emissióelméletet eléggé támogatják, a quantitativ kutatás eredményei bennünket mégis jobban kielégíthetnek. Ebben az irányban a kathod-sugarakra vonatkozó ismereteinket főleg J. J. Thomson-nak Cambridgeben és W. Kaufmann-nak Berlinben végzett vizsgálatai bővítették. A kathod-sugarak mentén föllépő töltésekre, a részecskék ütközéseinél keletkező hőre és a sugarak pályáinak a homogen mágneses térben előálló elgörbüléseire vonatkozó mérések eredményeit logikusan combinálva sikerült rendkívül fontos számbeli adatokat levezetni.

Ezen az uton a töltéssel ellátott részecskék, vagy, hogy megszokottabb kifejezéssel éljünk: a jonok repülésének sebességére vonatkozólag sikerült számadatot találni. Az eredmény egészen meglepő volt; mert míg a közönséges gázok molekuláira vonatkozólag tudjuk azt, hogy normális viszonyok közt legföljebb 2000 m.-nyi sebességgel haladnak, itt az sült ki, hogy a kathod-sugarakban haladó jonok sebessége nagyobb mint a fény sebességének 1/10 része, és kisebb, mint annak 1/3 része, s hogy ez a sebesség közepes értékben 30000-szerese a molekulák sebességének. A mérések továbbá megállapították azt a töltést is, a melylyel a jonok tömegükhöz képest birnak. Erre vonatkozólag azt találták, hogy az grammonkint — nem úgy mint a hydrogennél, az elektromágneses egységnek 10,000-szerese — hanem 10-milliószorosa. Ezeket az eredményeket még az is igazolta, hogy a kathod-sugaraknak nemcsak a mágneses mező okozta eltérítése, hanem az elektrostatikus mező okozta eltérítése is ugyanezen eredményekre vezetett. Rendkívül fontos volt az a bizonyíték is, melyet E. Wichert göttingai tanár nyujtott azzal, hogy közvetetlen mérések útján a kathodsugarak sebességének egyező értékét állapította meg.

Kitünt továbbá, hogy az eredmények változatlanok maradnak, ha a kisülési csőben akármilyen gáz, pl. levegő, hydrogen vagy szénsav foglaltatik, s akkor is, ha az elektromosságot akármilyen elektrodok, pl. platina, vas, vagy aluminium szolgáltatták. Úgy látszik, hogy a kathod-sugarak sebessége csupán az elektrodok potentiálkülönbségétől függ. A kathod-sugaraknak ezen a gáz- és az elektrodok természetétől való függetlensége valószinüvé teszi azt, hogy szerkezetüknek nagyon sajátságosnak kell lennie.

Arra a föltevésre, hogy a kathod-sugarak mentén mozgó részecskék nem közönséges gáz- vagy fématomok, első sorban a kathod-sugarak rendkívüli sebessége és a repülő részecskék meglepően magas töltése kényszerít bennünket. Azt a körülményt, hogy a kathod-sugarakat alkotó jonok töltésének a tömegükhöz való aránya ezerszer akkora, mint az elektrolytikusan leválasztott hydrogen-jonok hasonló aránya, vagy a kathod-sugarakban mozgó jonok kicsiny tömegének, vagy töltésük nagyságának, vagy mindkét körülménynek tulajdoníthatjuk.

Lenárd kisérletei valószinüvé teszik azt a föltevést, hogy a töltések hordozói a kathod-sugarakban a molekulákhoz képest tényleg igen aprók.

Lenárd Fülöp, Hertz-nek egyik tanítványa, most kieli tanár, a kathod-sugaraknak vékony lemezeken való áthaladását illetőleg az igen figyelemreméltó kisérleteknek egy egész sorát végezte.*

A Lenárd-féle kisérletekben s mindazokban, a melyeket eddig fölemlítettem, a kathod-sugarak a kisülési csövekben ott érnek véget, a hol a szemköztes üvegfalat érik. Ebben különböznek a fénysugaraktól, melyek számos szilárd testen képesek áthatolni. Mi történik azonban akkor, ha a kisülési cső falát sikerül a kathod-sugarak számára áthatolhatóvá tenni? Miután már Hertz azt találta, hogy a kathod-sugarak képesek igen vékony fémlemezeken áthatolni, ennélfogva erre a kérdésre feleletet adni Lenárd-ra nézve nem látszott lehetetlenségnek. A különböző vastagságú aluminiumlemezkék nagy sokaságában sikerült neki egyre ráakad-

---

* Ez a külföldön élő magyar származású tudós hazájával az összeköttetést még most is fentartja. Szünidejét rendszerint Pozsonyban tölti, hol a reáliskola jeles physikusával, Klatt Virgil-lel az utóbbi években a phosphorescentiára vonatkozó kutatásokat végeztek. Egy ilyen alkalommal volt szerencsém a frappans szerénységű tudóssal találkozhatni.

A fordító.

nia, mely épen elegendően erős volt arra, hogy kicsiny felületen az egyoldalú légköri nyomásnak képes volt ellenállani, s mely likacsok nélküli, s a kereskedésben szokásos aluminium foliánál csak 8-szorta volt vastagabb. Ez a lemezke alkalmas volt arra, hogy a kisülési csövet légmentesen elzárva, a kathod-sugarakat átereszsze vagy a szabad légkörbe, vagy pedig a majdnem tökéletes vacuumba, melyben azokat közvetetlenül nem sikerül létesíteni. Phosphoreskáló ernyővel végzett kísérletek azt mutatták, hogy a kathod-sugarak légritkított térben nehány centiméternyire, a vacuumban néhány meternyire hatolnak. Még emlékszem arra a benyomásra, melyet ezek a kisérletek rám tettek, mikor azokat 1893-ban Lenárd-nál szerencsém volt láthatni.

A fődolog, a mi bennünket itt érdekel, az a körülmény, hogy gázokban a kathod-sugarak nem egyenes vonalulag, hanem szétszóródva terjednek. A kathod-sugarakkal szemben a gázok mínt áttetsző közegek viselkednek. Úgy látszik, mintha minden molekula külön akadályként szerepelne. Nagyon figyelemreméltó, hogy e mellett csupán a molekulák mennyisége játszik szerepet, és semmi más tulajdonságuk nem jő tekintetbe. Ez arra látszik utalni, hogy a kathod-sugarakban haladó részecskék az atomokhoz képest rendkívül kicsinyek, s hogy ez a körülmény magyarázza meg a többször említett aránynak magas értékét.

Egy egészen más tünemény ezt az állítást teljesen igazolja. Hertz, a ki épen úgy képesítve volt a legélesebb elméjű bizonyításokra, mint a majdnem észrevehetetlen tünemények megfigyelésére, híres vizsgálatainak legelején, 1887-ben azt vette észre, hogy az elektromos szikra könnyebben csap át, ha ultraviola fénynyel világíttatik meg, mintha ez a fény teljesen hiányzik. Hallwachs, Righi, Elster és Geitel ezt a tüneményt meglehetősen egyszerű kisérleti föltételek mellett sikeresen megvizsgálták.

Azt találták, hogy egy frissen fényezett zinklemez negativ töltését (már megint a negativ töltés mutat sajátságos viselkedést!) gyorsan elveszíti, ha a lemezre ultraviola fény esik; a positiv elektromossággal töltött felület azonos körülmények közt nem szenved változást; a töltésnélküli lemez positiv töltést vesz föl. Az ultraviola fény forrásául vagy az ívfény, vagy égő magnezium, vagy az inductoriumnak zink és cadmium polusok közt előálló szikrája, sőt maga az ultraviola sugarakban nem nagyon bővelkedő napfény is szolgálhat.

Elster és Geitel Wolfenbüttelben különösen nagy eredményességgel folytatták ezeket a vizsgálatokat. A mágnesnek a tüneményre való befolyását illetőleg végzett kisérleteikből az derült ki, hogy alacsony nyomásnál az elektromosság elenyésztének sebessége csökken, ha mágneses mező létesíttetik. Ennek fölismerésével a tünemény mechanismusába való behatolásra új útmutatásra tettünk szert. A korábbi kutatók munkálatai már arra a sejtelemre vezettek, hogy úgy, mint a kathodsugaraknál, itt is a negativ elektromosságot megtöltött testecskék, a jonok vezetik el. A mágneses mezőnek befolyása talán most is, úgy mint előbb a kathodsugaraknál, ezt a sejtelmet megerősíthette.

Úgy mint előbb a kathodsugaraknál, a részecskék pályái a mágneses erő behatása folytán itt is módosulnak.

Vegyünk két egyenlőtlen nagyságu párhuzamos fémlemezt, lyukasszuk át a nagyobbiknak közepét, hogy rajta ultraviola fényt ejthessünk keresztül. Ha a kisebbik lemezt negativ töltéssel látjuk el, akkor az ultraviola fény behatásánál fogva a negativ töltésü részecskék a lemezről merőlegesen fognak eltávozni, s az elektromos erő hatása következtében a két lemez között mozogni fognak. Ha az elektromos erő irányára merőleges mágneses erőt gerjesztünk, akkor a részecskék folytonosan ezen két erő hatása alatt fognak mozogni. Így a részecskék pályái is másokká lesznek, mint a kathodsugaraknál, a melyeknél a mágneses erő a constans sebességre szert tett jonokra hat. Ha a tárgyalt esetben ezeket a pályákat sikerülne láthatókká tenni, akkor a lemezekre merőlegesen szerte terjedő félköröket vennénk észre, pontosabban szólva olyan görbe pályákat, a melyeket a tudomány *cykloís*-oknak nevez. Ha a lemezek nem állanak egymáshoz tulságosan közel, akkor a részecskék a töltött lemezt elhagyva, pályájukat leirván, arra ismét visszatérhetnek. Ekkor a lemez töltése, daczára annak, hogy rá ultraviola fény esik, az alkalmasan megválasztott mágneses erő következtében nem fog megváltozni. De ha a lemezek egymáshoz igen közel állanak, akkor a jonok a mágneses mező jelenléte daczára képesek lesznek a szemköztes lemezre átröpülni, de most görbevonalu pályákban fognak haladni. Megmérvén a lemezek távolságát, abban az esetben, a melyben adott elektromos és mágneses erőknél az elektromosság épen még visszatér arra a lemezre, a melyről elindult, a melyben tehát a második lemez a jonok pályáinak csúcsait már nem érinti, igen fontos eredményre juthatunk. Ennek a kisérletnek alapján egy könnyű számítás segítségével, föltéve, hogy a tekintetbe jövő többi mennyiségek is megmérettek, levezethető ismét annak az aránynak az értéke, a melyben a töltés áll a részecskék tömegéhez. Csak épen az imént közölte J. J. Thomson a vázolt vizsgálatok eredményeit. Az ultraviola fény behatása alatt a negativ elektromosságot elszállító jonok töltésének a tömegükhöz való viszonya csudálatosképen ismét annak a nagy számértéknek bizonyult, a melyet a kathodsugarak esetében megállapitottak.

Ismét felmerül tehát az a kérdés, hogy ezt az eredményt miképen kelljen megmagyarázni? A nagy töltéssel-e, vagy a kicsiny tömeggel?

J. J. Thomson-nak jutott a szerencse, hogy erre a kérdésre meglehetősen biztos feleletet adhatott. Módszerének elve rendkívül egyszerű volt.

Azok a jonok, melyek az ultraviola fénynyel megvilágitva a negativ elektromosság hatása folytán mozognak tovább, adott időben könnyen megmérhető elektromosságot szállitanak el. Az elektromosság mennyisége a részecskék töltésétől, számuktól és sebességétől függ. Az utóbbit már régebben Rutherford megállapitotta, úgy hogy még csak oly módszerre kellett szert tenni, a melylyel egyrészt a jonok számát, másrészt töltésüket megállapitani lehessen.

Épen a kellő időben, körülbelül 1898-ban talált Thomson laboratoriumában C. T. R. Wilson egy ilyen módot abban a fölfedezésében, hogy bizonyos kedvező körülmények között ezek a jonok ködképzőleg hatnak. Pormentes levegőben, a gőzzel való túltelitettség bizonyos fokánál minden jon a köd egy-egy vízcseppecskéjének magjává válhatik, s a vízcseppecskék száma könnyen megállapitható. J. J. Thomson mérései szerint ezeknek a jonoknak körülbelül ugyanakkora a töltésük, mint a hydrogénatomoké az elektrolytben. Ebből közvetlenül következik, hogy azok a jonok, melyek a töltést az ultraviola fényben álló zinklemezről alacsony nyomás mellett elszállítják, körülbelül ezerszerte kisebb tömegűek, mint az oxygenatomok.

A jonok egy harmadik fajára nézve is, a melyek Elster és Geitel szerint egy negativ töltésű izzó szénfonálról indulnak a vacuumba, J. J. Thomson azt állapította meg, hogy a kérdéses arányszámnak ugyanaz a nagy értéke van.

Így a kathodsugarak, az ultraviola fényben álló negativ töltésű zinklemez, a negativ töltésű izzó szénfonál esetében előálló tünemények arra a meggyőződésre vezetnek minket, hogy a chemia atomjain kívül még másnemű (negativ töltésű) atomok is léteznek, melyeknek tömegük sokszorta, talán ezerszerte kisebb, mint a hydrogenatomoké.

Bátran állíthatjuk tehát, hogy Faraday jövendölése, mely szerint a kisülések vizsgálata nagy jelentőségre fog szert tenni, megvalósulásához közeledik.

De már nehány évvel azon kisérletek előtt, melyek ezen kicsiny jonok tulajdonságainak ismeretére vezettek, kijelölte helyüket az elméletben H. A. Lorentz. Az elektromos és fénytünemények Lorentz-féle elmélete abból a föltevésből indul ki, hogy minden testben vannak jonok, s hogy az összes elektromos és fénytüneméynek az ilyen jonok helyzetén és mozgásán alapszanak. Ezt a felfogást az elektrolytekre nézve már régen általánosan elfogadták; különböző természettudósok e mellett foglaltak állást, hogy az elektromosságnak gázokban való vezetését magyarázhassák. A Lorentz-féle elméletnek természetesen további kisérleti vizsgálatokra kellett biznia annak eldöntését, vajjon az elektrolytikus vagy másnemű jonok szerepelnek-e a fénytüneméynek esetében? Hogy a láng kisugárzásánál nem az elektrolytikus, hanem más jonok rezegnek, azt a Lorentz-féle elmélet szellemében nekem sikerült kisérletileg igazolnom, azokkal a kisérletekkel, melyeket 1896-ban Kamerlingh Onnes tanár laboratoriumában végeztem.

Közönséges körülmények közt a natriumgőz színképe főleg két fényes sárga vonalból áll. Rowland szép fölfedezésének köszönhetjük, hogy jelenleg a konkavrácsban oly spectroskopot birunk, mely az emittált fény rendkívül csekély változásait is a spectralvonalak módosulásai folytán felismerhetőkké teszi. Ha egy erős elektromágnes polusai közé natriumlángot helyezünk, akkor addig, mig a huzaltekercsben áram kering, a nátriumvonalok nem finomak és élesek többé, hanem a színképnek mind a vörös, mind a viola oldala felé széthuzódnak. A mágneses mezőben tehát, mint azt ez és más ellenőrző kisérletek bizonyitják, az eredeti rezgéseken kívül még más, valamicskével nagyobb és valamicskével kisebb rezgésidejüek is emittáltatnak. Ezt a tüneményt Lorentz elmélete nemcsak hogy könnyen megmagyarázza, hanem annak alapján egyes, rendkívül fontos részletek előre is megállapíthatók voltak, föltéve, hogy a kisugárzó atomokra vonatkozólag egy egyszerű fölvétel történik. Oly anyagra nézve, a melynek csak egy spectrálvonala van, elégséges az a fölvétel, hogy a láng minden atomjában csakis egy mozgékony jon van, mely bár nem annyira mozgékony, mint a szabad jonok, melyeket a kathodsugarakban megismertünk, melyet azonban egy minden irányban egyenletesen ható erő az egyensúlyi helyzetből a távolsággal arányosan képes kimozdítani, ha ezt a helyzetet a jon egyáltalában elhagyja. Ennélfogva a jon az egyensúlyi helyzet körül ide-oda rezeghet, s minthogy van elektromos töltése, tehát elegendő képessége van az æther fölötti uralkodásra, a mennyiben ezzel mozgását közölheti s benne rezgéseket létesíthet, melyek, ha eléggé gyorsak, bennünk a fény érzetét keltik.

A mágneses mezőben most már a jonra egy új erő hat, és pedig az, mely a mágneses mezőben levő kathodsugarakat meggörbíti, s a mely, mint azt már megjegyeztük, egyszerű függésben van a mozgó jon sebességével és a mágneses erő intensitásával. Számítás útján könnyen megállapítható, hogy ennek az erőnek hatása folytán a jon mozgása milyen lesz, s hogy milyen fénymozgásnak kell most észrevehetővé lennie?

Az az elméleti eredmény, hogy minden spectrálvonal három vonallal helyettesítendő, melyeknek bizonyos módon polarizáltaknak kell lenniök, kisérletileg először a cadmiumnál igazoltatott teljesen; a natriumnál a vonalak nem voltak eléggé finomak. További részletekben is az elmélettel való megegyezés tökéletes volt. Így annak az állításnak, hogy elektromosság található ezer meg ezer oly helyen, a melyeken jelenlétét nem is sejtettük, új támasztéka akadt. Minden lángban, minden fényforrásban látjuk most az elektromos részecskék rezgését, s így szemünk tényleg elektromos mozgások megfigyelője. A spectrálvonalak megváltozásának nagyságából a Lorentz-féle elmélet segítségével azon vonalakra nézve, a melyekre a vázolt elméletet alkalmazni lehetett, a töltésnek a tömeghez való arányát ujra meg lehetett határozni. 1896-ban bizonyára meglepő volt, hogy erre nézve (legalább rendjét illetőleg) ugyanazt a nagy számértéket kapták, mely később más tünemények kapcsán állott elő.

A vizsgálatból azt is lehetett következtetni, hogy a rezgő részecskék töltése negativ volt.

Ezek után bizonyára nem kételkedhetünk tovább abban, hogy ez a negativ jon minden elektromos elméletben alapvető fontosságu lesz. Talán épen ez maga az a fundamentális nagyság, a melynek segítségével az összes elektromos folyamatok kifejezhetők; mert tömege és töltése, a mint látszik, állandóak, s egyúttal függetlenek mind az elektromos módosulásoktól, mind pedig az anyagtól, a melyből keletkezik. A fölött sem csudálkozhatunk, hogy a physikusok megkisérlették a fény- és kathodsugarak ezen kicsiny jonjai és a physika más részeinek, meg a chemiának régebbi atomjai közt az összefüggést megtalálni. E szerint a chemia atomjai a most ismertetett kicsiny jonokból épülnek föl, s azon folyamatnál, a mely kathodsugarakat létesít, minden atomból egy-két jon elválik. Az atomok tömege ezentúl nem tekinthető többé állandónak. De így már túlságosan belekeveredünk a sejtelmek országába, mely sejtelmek bár többé-kevésbbé valószinűek, de végre mégis csak sejtelmek. A kutató ne időzzék sokáig az ilyenfajta álmoknál, hanem az elért eredménytől felbátorítva, kezdjen bele ujabb vizsgálatokba.

A legkülönbözőbb körülmények közt beálló sugárzás tüneményeinek kisérleti vizsgálata a természet megismeréséhez bizonyára több mint egy irányban becses anyagot fog szolgáltatni. A physikai laboratoriumban főtörekvésem az lesz, hogy az ilyen vizsgálatokra serkentsek; mert ezek közel rokonságban állanak azokkal az utolsó fundamentumokkal, a melyekre a világ fel van építve.

Szerző úrnak szivesen adott beleegyezésével fordította:

Bozóky Endre.

A KINETIKAI GÁZELMÉLET ALAPHIPOTÉZISEIRŐL.

(Második és befejező közlemény.)

Végre még azon egyszerű, de igen fontos összefüggéseket kell megemlítenem, a mely a 2) alatt definiált n és az f, továbbá az 5) alatt definiált ξ, η, ζ és az f között fennállanak.

Ugyanis, minthogy a mint közvetlenül világos

$$\sigma(x, y, z, t) = m \underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\int\int\int}} g(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma$$

a (8) és (9) alapján:

$$n(x, y, z, t) = \underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\int_a\int_b\int_c\int_\alpha\int_\beta\int_\gamma}} \varphi(x+a, y+b, z+c)$$

$$g(x+a, y+b, z+c, \alpha, \beta, \gamma, t)\, dadbdc\, d\alpha d\beta d\gamma =$$

$$= \underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\int\int\int}} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma. \qquad (10)$$

Hasonlóképen

$$n\xi = \sum_{,} \alpha'\varphi =$$

$$= \underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\int_a\int_b\int_c\int_\alpha\int_\beta\int_\gamma}} \alpha\varphi(x+a, y+b, z+c)$$

$$g(x+a, y+b, z+c, \alpha, \beta, \gamma, t)\, dadbdc\, d\alpha d\beta d\gamma =$$

$$= \underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\int\int\int}} \alpha f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma, \qquad (11)$$

tehát

$$\xi = \frac{\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\int\int\int}} \alpha f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma}{\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\int\int\int}} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma}. \qquad (12)$$

Ha a sebességek valamely $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ függvényének a t időpillanatban x, y, z pontban képezett $\overline{Q}(x, y, z, t)$ *középértékén* a

$$\overline{Q}(x, y, z, t) = \frac{\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} Q(\alpha, \beta, \gamma) f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma}{\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma} \qquad (13)$$

kifejezést értjük, a 11) alatti képlet tartalmát a következő fontos tételben foglalhatjuk össze.

Az áramlási sebesség komponenseit az x, y, z pontban t időpillanatban a megfelelő molekuláris sebesség komponenseinek az illető pontban és időpillanatban képezett középértékei adják.

Képletben:

$$\xi = \overline{\alpha}, \quad \eta = \overline{\beta}, \quad \zeta = \overline{\gamma}. \qquad (14)$$

E tétel a gázelméletnek egyik alaptétele volt abban az esetben is, midőn n-t, ξ, η, ζ-t és f-et mint határértékeket definiálták, úgy, hogy az által, hogy a (14) alatti képleteket az n és a többi mennyiség új definicziójánál is bebizonyítottuk, lehetővé tettük a régi gázelmélet összes eredményeinek átvételét. A mint látni fogjuk e képleteken fordúl meg az is, hogy Burbury második ellenmondása csak látszólagos, s épen ezért Burbury nem is hajlandó e képleteknek helyességét elismerni, azt kifogásolván levezetésükben,* hogy a (11) képletben fellépő integrálok nem szolgáltatják $n\xi$-nek valódi értékét mindenütt és minden pillanatban, csupán bizonyos átlagos értékét, minthogy szerinte $f d\alpha d\beta d\gamma$ csak valószínűséget jelent. A mint azonban már kiemeltem s a mint f és g definicziójából közvetlenül látni, e függvények *definiczió*-jánál semmiféle valószínűségszámításbeli elem nem szerepel: más kérdés az, vajjon meg lehet-e f-et és g-t az itt adott definiczióknak megfelelően *határozni:* a *meghatározás* valóban csak valószínűségszámítás segítségével történhetik meg s így f-nek tényleg csak valószínű értékét tudjuk megadni, a (14)

---

* L. S. H. Burbury, Annalen der Physik 3. kötet, 358. l.

alatti képletek azonban közvetlenül f és g definicziójából folynak s fennállanak, akár meg tudjuk határozni f-et vagy g-t, akár nem. Ezek után áttérhetünk a Burbry-féle ellenmondások megvizsgálására.

Első ellenmondás.*

Burbury be akarja bizonyítani, hogy az A) alatti alaphipotézis mellett a molekulák mozgása nem lehet *stacionárius*, minthogy stacionáriusnak tételezve fel a mozgást, az A) alatti feltevés mellett ellenmondáshoz jutunk, az A) alatti feltevés tehát elvetendő. Stacionáriusnak nevezzük a molekuláris mozgást, ha e mozgás összes külső megnyilatkozásai az idő folyamán változatlanok maradnak: a mozgásnak ily külső megnyilatkozásait jellemzik mindama mennyiségek, a melyek a gáznak nem egyes, hanem valamennyi molekulájától függenek, pl. a gáz valamennyi molekulájára vonatkozó összegek, középértékek s. i. t.; mindezeknek tehát (pl. sürűség, áramlási sebesség, nyomás stb.) staczionárius mozgásnál az időtől függetleneknek kell lenniök.

Burbury a bemutatandó ellenmondás levezetésénél még ama teljesen önkényes feltevéssel is él, hogy a molekulák elhelyezkedése a térben egészen a véletlentől függ, a mit könyvében következőképen fejez ki analitikailag:

Legyenek x, y, z és x', y', z' két tetszőleges molekula tömegközéppontjának koordinátái, r legyen a két tömegközéppont egymástól való távolsága és

$$\lambda = \frac{x'-x}{r}, \quad \mu = \frac{y'-y}{r}, \quad \nu = \frac{z'-z}{r},$$

akkor *átlag véve* («on average»)**

$$\mu\nu = \nu\lambda = \lambda\mu = 0$$
$$\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2 = \tfrac{1}{3}.$$

---

[*] L. Burbury idézett könyvének IV. fejezetét.

[**] L. Burbury könyvének 48. lapját.

A feltétel ez által még nincs elég pontosan fogalmazva, minthogy nincs pontosan körvonalozva, mi a tulajdonképeni jelentése az «átlag véve» kifejezésnek.

Pontosan fogalmazza e feltevését BURBURY az Annalen der Physik harmadik kötetében,* még pedig a következő módon:

Ha Σ_r egy az x, y, z pont körül r sugárral leírt gömbre kiterjesztett összeg, a véletlen szerinti eloszlás feltétele az, hogy $\Sigma_r\lambda$-nak egy véges t időtartamra vonatkozó középértéke, azaz

$$\frac{1}{t}\int_0^t (\Sigma_r\lambda)\,dt,$$

a mit röviden $\widehat{\Sigma_r\lambda}$-val jelölhetünk, bármely x, y, z pontban bármely r-nél zérussal egyenlő.

E feltevés mellett vezeti le BURBURY a CLAUSIUS-féle viriál tételből a mozgást staczionáriusnak és molekulárisan rendezetlennek véve fel a következő egyenletet:**

$$\sum X\Big\{\sum_{\prime}(x'-x)\,\varphi(r)\Big\}+\sum Y\Big\{\sum_{\prime}(y'-y)\,\varphi(r)\Big\}+$$
$$+\sum Z\Big\{\sum_{\prime}(z'-z)\,\varphi(r)\Big\}=0. \qquad (15)$$

X, Y, Z itt az x, y, z pontra ható összes (külső és intramolekuláris) erők komponensei a $\sum$ x, y, z, $\sum_{\prime}$ pedig x', y', z' szerint végzendő s mindkét összegezés a gáz valamennyi molekulájának tömegközéppontjára terjesztendő ki. Ennek az egyenletnek baloldaláról akarja BURBURY bebizonyítani, hogy sohasem lehet zérus, hanem ha pl. külső erők nem hatnak és a molekulák egymásra taszító erőket gyakorolnak, mindig negativ.

Az előbbiek alapján azonban könnyen belátható, hogy a 15) bal oldala ugyanazon feltételek mellett, a melyeket levezetésénél felhasználtunk zérus, s így az A) alatti alaphipotézis nem vezetett ellenmondásra.

Ha ugyanis külső erők a gázra nem hatnak és $R(r)$ az az erő,

---

* 356. l.

** L. BURBURY könyvének 49. és 50. lapját.

a melyet egy molekula egy tőle r távolságra lévő molekulára gyakorol:

$$X = -\sum_{r=0\ldots\infty}\{R(r)\,\Sigma_r\lambda\}$$

és

$$\sum_{\prime}(x'-x)\,\varphi(r) = \sum_{r_1=0\ldots\infty}\{r_1\,\varphi(r_1)\,\Sigma_{r_1}\lambda\}.$$

Úgy X mint $\sum_{\prime}(x'-x)\,\varphi(r)$ a gáz valamennyi molekulájára vonatkozó összegek, tehát, minthogy a mozgás staczionárius, az idő folyamán nem változnak s így időbeli középértékükkel egyenlők: mindkét összeg a gáz valamennyi molekulájára vonatkozik, tehát véges számú tagból áll, minthogy egy véges gáztömeg (csak ilyenek képezhetik vizsgálataink tárgyát) bármily óriási, de mindig véges számú molekulákat tartalmaz. Az X és $\sum_{\prime}(x'-x)\,\varphi(r)$ összegek középértéke tehát tagjaik középértékének összegével lesz egyenlő, azaz:

$$X = \widehat{X} = -\sum_{r=0\ldots\infty}\{R(r)\,\widehat{\Sigma_r\lambda}\}.$$

Azonban a véletlen szerinti eloszlás feltételénél fogva

$$\widehat{\Sigma_r\lambda} = 0,$$

s így

$$X = 0,$$

ép így még

$$\sum_{\prime}(x'-x)\,\varphi(r) = 0,$$

s ugyanez áll 15) baloldalának másik két tagjára is, úgy hogy a 15) alatti egyenlet valóban ki van elégítve.

Burbury tévedése abban állott, hogy az X és $\sum_{\prime}(x'-x)\,\varphi(r)$ kifejezések összeszorzásánál a középérték képezését a szorzással felcserélte, a mi nyilván nincs megengedve és $(\Sigma_r\lambda)^2$-t átlag véve $\Sigma_r\lambda^2$-tel tette egyenlővé. X és $\sum_{\prime}(x'-x)\,\varphi(r)$ szorzatának képezésénél így csak azok a tagok lesznek zérustól különbözők, a melyekben $r=r_1$ s így csakugyan a (15) baloldala számára egy zérustól különböző kifejezést kapunk. De természetesen a

$$\widehat{(\Sigma_r\lambda)^2} = \Sigma_r\widehat{\lambda^2} \tag{16}$$

egyenlőség általában nem áll fenn; hiába kisérli meg Burbury az Annalen der Physik 3-dik kötetében[*] a (16) alatti egyenlőség bebizonyítását; a bizonyításnál ugyanabba a tévedésbe esik, ugyanis ismét egy szorzat középértékét a tényezők középértékének szorzatával teszi egyenlővé.

Ez az első ellenmondás tehát nem győz meg bennünket arról, hogy az *A)* alatti feltevés ellenmondásra vezet.

Második ellenmondás.

Bdrbury művének ötödik fejezetében a következő problémát tűzi ki:

Állíttassék elő staczionárius mozgás esetén s az *A*) alatti hipotézis felhasználásával a következő mennyiség idő szerinti differencziálhányadosa:

$$M = \int\!\!\int\!\!\int \left\{ \alpha^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \beta\gamma \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \right.$$
$$\left. + \gamma\alpha \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \alpha\beta \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right\} dxdydz.$$

α, β, γ ama molekulának sebességi komponensei, a melynek tömegközéppontja t időpillanatban az x, y, z pont körül szerkesztett $dxdydz$ térfogatelembe esik; ha e térfogatelembe egy molekula tömegközéppontja sem esik a t időpillanatban, akkor

$$\alpha (x, y, z, t) = \beta (x, y, z, t) = \gamma (x, y, z, t) = 0.$$

Az integráczió az egész gázra kiterjesztendő; ξ, η, ζ a föntebb értelmezett áramlási komponensek.

$\frac{dM}{dt}$-t Burbury teljesen kiszámítja arra az esetre, midőn a molekulák c átmérőjű rugalmas golyók; számításainak eredménye[*]:

$$\frac{dM}{dt} = 2\pi c^3 \int\!\!\int\!\!\int \left\{ \frac{\rho}{2h} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dxdydz.$$

---

[*] 356. l.

[**] L. könyvének 77. és 157. lapjait.

ϱ jelenti a gáz sűrűségét, $\frac{1}{h}$ pedig egy a gáz hőmérsékletével arányos, mindig pozitiv mennyiség. Burbury a következőkben lát ellenmondást:

$\frac{dM}{dt}$ csupa pozitiv számokkal szorzott négyzetek összege, tehát — így okoskodik Burbury — pozitiv, M azonban egy a gáz összes molekuláira kiterjesztett összeg, staczionárius mozgásnál tehát változatlannak kellene maradnia; ime azonban az (A) alatti hipotézis mellett számítva ki idő szerinti differencziálhányadosát pozitiv számot kaptunk, nem pedig zérust, az (A) alatti hipotézis tehát ellenmondásra vezetett.

Könnyen kimutatható azonban, hogy M s így a Burbury által kiszámított $\frac{dM}{dt}$ is t bármely értékénél eltünnek, minthogy bebizonyítható, hogy

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (17)$$

staczionárius mozgásnál x, y, z és t bármely értékénél eltünnek.

Boltzmann ugyanis bebizonyította,* hogy ha a gáz állapota molekulárisan rendezetlen, a mozgás stacionárius voltának szükséges és elegendő feltétele az, hogy a sebesség eloszlását meghatározó f függvény ily alakú legyen:

$$f = f_0 e^{-h[(\alpha-u)^2+(\beta-v)^2+(\gamma-w)^2]}, \qquad (18)$$

a hol f_0, h, u, v, w x, y, z-nek oly t-től független függvényei, hogy az

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial \xi} + Y \frac{\partial f}{\partial \eta} + Z \frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0 \qquad (19)$$

differencziálegyenlet x, y, z és α, β, γ bármely értékénél fennálljon.

---

* Vorlesungen über Gastheorie 133. lap.

X, Y, Z itt az x, y, z pontban lévő tömegegységre ható külső erők komponensei.

Kimutatjuk mindenekelőtt, hogy

$$\xi=\bar{\alpha}=u, \quad \eta=\bar{\beta}=v, \quad \zeta=\bar{\gamma}=w; \tag{20}$$

ugyanis:

$$\xi=\bar{\alpha}=\frac{f_0\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{-h[(\alpha-u)^2+(\beta-v)^2+(\gamma-w)^2]}\,d\alpha d\beta d\gamma}{f_0\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h[(\alpha-u)^2+(\beta-v)^2+(\gamma-w)^2]}\,d\alpha d\beta d\gamma}=$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-hA^2}dA}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hA^2}\,dA}+u, \quad (\text{ha } \alpha=A+u);$$

de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-hA^2}dA=-\int_{0}^{-\infty} Ae^{-hA^2}dA+\int_{0}^{\infty} Ae^{-hA^2}dA=0,$$

míg

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hA^2}da \text{ véges } \left(=\sqrt{\frac{\pi}{h}}\right)^{*}$$

s így valóban

$$\xi=u.$$

Egészen hasonlóan győződhetünk meg a 20) többi egyenlőségének helyességéről is.

Tegyük be most f-nek 18) alatti alakját a 19) alatti differencziálegyenletbe: írjuk fel e czélból f-et a következő alakban:

$$f=e^{\ln f},$$

a hol

$$\ln f=-h\left\{(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2+(\gamma-\zeta)^2\right\}+\ln f_0=$$

$$=-h(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-k\alpha-l\beta-m\gamma+n=\psi; \tag{21}$$

itt:

$$k=-2h\xi, \quad l=-2h\eta, \quad m=-2h\zeta \tag{22}$$

és

$$n=\ln f_0-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2).$$

---

[*] L. **Fröhlich**, Mathematikai repertórium 152. l., 120. §., 6.)

Ha f kielégíti a (19) alatti differencziálegyenletet, akkor:

$$\left(\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial\psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial\psi}{\partial z} + X \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + Y \frac{\partial\psi}{\partial\beta} + Z \frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right) e^{\psi} = 0$$

de e^{ψ} ψ véges értékeinél nem zérus, tehát:

$$\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial\psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial\psi}{\partial z} + X \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + Y \frac{\partial\psi}{\partial\beta} + Z \frac{\partial\psi}{\partial\gamma} = 0.$$

Betéve ebbe az egyenletbe ψ részletes alakját (21)-ből:

$$\begin{aligned}
&-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left(\alpha \frac{\partial h}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} + \gamma \frac{\partial h}{\partial z}\right) - \\
&-\alpha^2 \frac{\partial k}{\partial x} - \beta^2 \frac{\partial l}{\partial y} - \gamma^2 \frac{\partial m}{\partial z} - \\
&-\beta\gamma\left(\frac{\partial l}{\partial z} + \frac{\partial m}{\partial y}\right) - \gamma\alpha\left(\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial z}\right) - \alpha\beta\left(\frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial x}\right) + \\
&+\alpha\left(\frac{\partial n}{\partial x} - 2hX\right) + \beta\left(\frac{\partial n}{\partial y} - 2hY\right) + \gamma\left(\frac{\partial n}{\partial z} - 2hZ\right) - \\
&-kX - lY - mZ = 0.
\end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek staczionárius mozgásnál α, β, γ és x, y, z bármely értéke mellett fenn kell állania, tehát α, β és γ különböző hatványszorzatainak együtthatói x, y, z bármely értékénél zérusok lesznek; tehát:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{\partial m}{\partial z} = \frac{\partial l}{\partial z} + \frac{\partial m}{\partial y} = \\
= \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

A (24)-ből azonban a (22) és (23) tekintetbe vételével, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0$$ [*]

x, y, z bármely értékénél.

M tehát mindig 0 s így $\frac{dM}{dt}$ is feltételeinknek megfelelően zérussal egyenlő.

Különben arról, hogy staczionárius mozgásnál a 17) alatti mennyiségek x, y, z bármely értékénél mind eltünnek, meggyőződhetünk teljesen függetlenül a kinetikai elmélettől, pusztán a hidrodinamikai elmélet alapján is.

A gáz valamely x, y, z pontjában fellépő feszültség az illető pont környezetének ú. n. *tiszta deformácziójától* s annak időbeli lefolyásától függ; tiszta deformácziónak nevezzük valamely pont környezetének oly deformáczióját, a mely a gáz pontjai egymáshoz viszonyított helyzetének megváltozásával jár. E tiszta deformáczió folytán az x, y, z pont környezetének egy oly pontja, a melynek x, y, z-hez viszonyított relativ koordinátái a, b, c oly eltolódást szenved bizonyos rövid t idő alatt, a melynek komponensei: [**]

$$\begin{aligned}
U &= a\frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{1}{2}b\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \tfrac{1}{2}c\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
V &= \tfrac{1}{2}a\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + b\frac{\partial v}{\partial y} + \tfrac{1}{2}c\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
W &= \tfrac{1}{2}a\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \tfrac{1}{2}b\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + c\frac{\partial w}{\partial z}\cdot \qquad (25)
\end{aligned}$$

u, v, w itt ama teljes (nem csupán a tiszta deformácziótól származó) eltolódásnak komponensei, a melyet az $x+a$, $y+b$, $z+c$ pont t idő alatt szenved. A (25)-ben szereplő összes differencziálhányadosok az x, y, z pontra vonatkoznak.

A tiszta deformáczió az x, y, z pontban tehát teljesen jelle-

---

[*] A molekulák staczionárius mozgásának eme szükséges feltételeit legelőször BOLTZMANN állította fel (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, (Math. naturw. Classe) Band LXXVI, Abtheil. II, 526—532.).

[*] L. VOIGT. Kompendium der theoretischen Physik. I, 213. l.

mezve van a következő hat differencziálhányados, az ú. n. *deformáczió mennyiségek által:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (26)$$

Ezeknek s idő szerinti differencziálhányadosaiknak homogén lineár függvényei az x, y, z pontban fellépő feszültség komponensei; hogy tehát az x, y, z pontbeli feszültségi állapot ne változzék, a deformáczió mennyiségek idő szerinti differencziálhányadosainak el kell tünniök; de mivel

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\xi, \frac{\partial v}{\partial t}=\eta, \frac{\partial w}{\partial t}=\zeta$$

a (26) alatti mennyiségek idő szerinti differencziálhányadosai az M-ben szereplő (17) alatti mennyiségek.

Két különböző elmélet összhangzó eredménye szerint tehát a Burbury-féle második ellenmondás is csak látszólagos.

Zemplén Győző.

A FÖLDALKALISZULFIDOK FOSZFORESZCZENCZIÁJA.

(Első közlemény.)

Arról a fényemisszióról, melyet némely anyag előzetes megvilágítás után sötétben mutat, igen keveset tudunk. Legerősebben mutatják ezt a jelenséget a földalkaliszulfidok (kálczium-, stronczium- és báriumszulfid), melyek száraz uton és magas hőmérsékletnél készülnek. Ilyen világító szulfidok («foszforok») előállításával részletesebben foglalkoztak Becquerel E.[1] (1866) és Forster[2] (1868) és előbbi tulajdonságaikat is tanulmányozta. Kimutatta, hogy a foszforeszczenczia fénye a testek által elnyelt fénynek egy része, melyet a testek átalakitva ismét kiadnak. Egyéb törvényszerűségeket nem igen talált. Később Lommel E.[3] a foszforeszczenczia-fény spektroszkopiai elemzése által bizonyos törvényszerűséget fedezett fel a kálcziumszulfidok foszforeszczenczia-szinképeiben, de a fényemisszió más tulajdonságait neki sem sikerült megállapitania. Ujabban Wiedemann E. és Schmidt G. C.[4] foglalkoztak e tárgygyal, de kutatásaikat főleg szulfátokon és karbonátokon végezték, melyeknek luminiszkálása ugy látszik más törvényeket követ, mint a szulfidoké.

Hogy az eddigi kutatások oly kevés törvényszerűség felismerésére vezettek, annak oka valószínűleg abban keresendő, hogy nem voltak tekintettel a foszforok kémiai szerkezetére. Becquerel E. szerint a szulfidok foszforeszczencziája egyedül a test

---

[1] La lumière etc. Paris, 1866. I. kötet.

[2] Pogg. Ann. 133. 94. és 288, 1868.

[3] Wied. Ann. 20. 847, 1883 és 30. 473, 1887.

[4] Wied. Ann. 54. 604. 1895, 56. 235, 1895 és 60 745. 1897.

fizikai szerkezetétől függ és különösen hangsúlyozza, hogy idegen anyagok jelenléte semmiképen sem befolyásolja a luminiszczenczia természetét.[1]

Lenard F. és Klatt V. 1889-ben megjelent értekezésükben[2] kimutatták, hogy a földalkaliszulfidok foszforeszczencziája bizonyos fémnyomok jelenlétéhez van kötve, melyek nélkül — nagy valószinűséggel — egyáltalában nem világitanak. Leghatásosabb fémeknek bizonyultak a kálcziumszulfidban a mangán, réz, bizmuth és egy, még eddig fel nem ismert, negyedik fém, melyet egyelőre «ζ»-val jelöltek meg. A foszforeszczencziafény elemzése kiderítette, hogy minden fémnek egy állandó maximummal biró, jellemző sáv felel meg a foszforeszczenczia-szinképben. A mangán sárga-, a réz zöld-, a bizmuth kék- és a «ζ» ibolyaszinű foszforeszczencziát adott a kálcziumszulfidban. A foszforok készitésénél gondosan tisztitott kálcziumszulfidból indultak ki,[3] melyhez azután a fémeket igen kis mennyiségekben (oldott állapotban) hozzá adták.[4]

A Becquerel és Forster eljárásai szerint készitett foszforok fényének színképei rendesen két, sőt némelykor több sávot tartalmaznak, melyeknek helyét Lommel E. meghatározta[5] és melyek ugyanazon helyen feküsznek mint a mangán-, réz- és bizmuthsávok (a «ζ» a Lommel-féle megfigyelési módnál nem volt látható). Ezeket a foszforokat, mivel rendesen több fém világit bennük, *keverékfoszforoknak*, a Lenard-Klatt-féle foszforokat pedig *tiszta foszforoknak* lehetne nevezni, melyekben csak egy fém világit.

Jelölésükre a Wiedemann E. által behozott jelölést fogjuk használni, mely kifejezi, hogy milyen szulfidból és milyen fémből áll az illető foszfor. Így pl. a bizmuth-tal készült kálcziumszulfidot

---

[1] La lumière etc. I. k. 243. o.

[2] Wied. Ann. 38. 90. 1889.

[3] fémeitől megszabaditott

[4] Az 1 rész CaO-ra eső $^{8}/_{100,000}$ rész CuO-adta a hatás maximumát.
« « « « « $^{13}/_{10,000}$ « Bi_2O_3 « « « «
« « « « « $^{3}/_{100}$ « MnO « « « «

[5] Wied. Ann. 30. 473. 1887.

igy jelöljük: $CaS+Bi$, a rézzel, mangánnal stb. készült foszfort: $CaS+Cu$, $CaS+Mn$ stb.

Ha a kálczium- (avagy más) szulfid több fémet tertalmaz, vagyis keverékfoszfor, akkor pl. így: $CaS+Mn+Cu+Bi$ jelöljük.

Világos, hogy a midőn a fényemisszió törvényszerűségeit kivánjuk megállapítani, csak tiszta foszforokat szabad használni. A keverékfoszforok fényének szine keverékszín, mely több egyszerű vagy tiszta foszfor színének keverékéből áll. Ha a foszfort bizonyos hatásoknak alávetjük, akkor, mivel az egyes alkatrészek nem egyformán viselkednek, a foszforeszczenczia szine változni fog a szerint, mint az egyik vagy másik alkatrész erősbödik, gyengül vagy egészen háttérbe szorul. Innen van az a zűr-zavar, melyet a keverékfoszforokkal végzett kisérletek mutatnak és mely annyira jellemző Becquerel kisérleteire nézve.

Becquerel természetesen minderről nem tudott semmit és abból a feltevésből indult ki, hogy a fényemisszió magától a szulfidtól származik és csak annak fizikai strukturájától függ, mely feltevés — igaz egy szilárd támaszpontot sem nyujtott a fényemisszió megmagyarázására.

Az alább leirandó kisérleteket és megfigyeléseket részint tiszta foszforokon, részint olyan keverékfoszforokon végeztem, melyeknek legalább az összetétele ismeretes volt.

Az összes foszforokat Klatt V. tanár szivességének köszönhetem.

A kisérletek gondolatmenete a Lenard és Klatt-féle értekezés egy megjegyzéséhez fűződik, hogy t. i. «a kálcziumfoszforok világitása ép oly kevéssé tulajdonitható a CaS-nak, mint pl. az eosinoldat fluoreszczencziája az oldó alkoholnak.»[1] A foszforok tehát a következőkben mint oly szilárd oldatok tekintetnek, melyekben a tisztitott szulfid a szilárd oldóanyag, az illető fém pedig az oldott anyag.[2]

---

[1] Wied. Ann. 38. 94. 1889.

[2] Ujabban Wiedemann E. és Schmidt G. C. dolgozataikban szintén szilárd oldatoknak tekintik a foszforokat. Ez a felfogás van 't Hoff-tól származik (Zeitschr. f. physik. Chemie. 5. 322. 1890).

A kisérleteknél használt foszforok.

A kisérleteknél csak oly szulfidok használtattak, melyeknek kémiai összetétele vagy teljesen, vagy legalább részben ismeretes volt. Az előbbiekhez tartoznak a kálcziumszulfidok, melyeknek foszforeszkálását már Lenard és Klatt V. meghatározták. Leirattak a Mn, Cu, Bi és ζ foszforeszczencziái a CaS-ben. Ezeknek készitését illetőleg a fent említett értekezésre kell utalnom. Míg ez a négy foszfor igen erős és így spektroszkópiai vizsgálatra alkalmas fényt ad és az utánvilágitás tartama is elég hosszú, addig a fémek igen nagy részével csak gyenge, vagy épenséggel semmi foszforeszkálást sem sikerült előidézni.

Igen gyengén világitó foszforokat adtak: Cr, Zn, Sb, Cd, U, Mo, Pb. Egyáltalában nem világitottak: Ni, Co, Fe, Ag, Au, Hg. A magas hőmérsékletnél illékony fém természetesen nem adhat foszfort, mert az égetésnél[1] (kb. 1000° C) eltávozik. A Ni, Co és Fe még az esetleg más fémtől származó foszforeszkálást is megrontja.

Ezzel azonban nincs mondva, hogy ezek a fémek egyáltalában nem adhatnak foszfort, mert még a leghatásosabb fémek foszforeszkálása is aránylag gyenge, ha nem adunk hozzájuk bizonyos sókat, melyek az intenzitást nagy mértékben növelik, a nélkül, hogy a foszforeszkálás természetét megváltoztatnák.[2] Igen hatásos sóknak bizonyultak: Na_2SO_4, K_2SO_4, CaF_2 stb. Lehet, hogy az igen kevéssé hatásos fémeknél még nem alkalmaztatott a megfelelő só. Ezeknek az anyagoknak szerepe különben is még nincs egészen megmagyarázva.

A fémek foszforeszczencziái a stronczziumszulfidban még nincsenek meghatározva. Lenard és Klatt V. csak a Cu foszforeszczencziáját állapitották meg benne.

A következőkben azokat a kisérleteket irom le, melyek a többi fémek foszforeszczencziáinak megállapitására irányúltak.[3]

---

[1] Hempel-féle kályhában.

[2] a foszforeszczenczia-szinkép (sáv) maximuma nem változik meg.

[3] A Cu-val uj kisérletek végeztettek, mivel a foszforeszczenczia szinében eltérés látszott.

Kiindulási anyagúl tisztitott (hasonló módon mint a $CaCO_3$ a kálcziumszulfidoknál) $SrCO_3$ használtatott. Az így tisztitott karbonát különböző sókkal égetve (erősbítő hozzátételek) gyenge foszforeszczencziát adott, jeléül annak, hogy a tisztitás nem volt tökéletes. A stronczium és báriumkarbonátok tisztitása különben is körülményesebbnek látszik mint a kálczium karbonáté. A következő (I) tabella magában foglalja ennek a karbonátnak foszforeszczencziáit kénnel és erősbitő sóval való égetése után (15 percz).

I. táblázat.

Szám	sz. oldóanyag	erősbítő só	foszforeszkálás színe	foszforeszkálás intenzitása
1	3g $SrCO_3$+1g S	—	sárgásvörös (?)	igen gyenge
2	« «	0·2g Na_2SO_4	zöldes	erősebb
3	« «	0·2g Na_2HPO_4	zöldessárga	gyengébb
4	« «	0·2g $ClNH_4$	kékes	gyenge
5	« «	0·2g K_2SO_4	zöldes	erősebb
6	3g $SrCO_3$ S nélkül	0·2g Na_2SO_4	zöldessárga	erősebb
7	3g $SrCO_3$+1g S	0·2g CaF_2	zöldessárga	erősebb
8	« «	0·1 *Borax*	zöldes	gyenge
9	« «	0·1 $K(NO_3)$	zöldessárga	erősebb
10	« «	0·1 Na_2CO_3	zöldessárga	erősebb

Ha nem dolgozunk teljesen tiszta szulfidokkal, akkor ezekre a foszforeszczencziákra tekintettel kell lennünk, hogy eldönthessük, hogy az illető hozzá tett fémnek tulajdonitható-e a foszforeszczenczia vagy pedig nem.

1. Kisérletek $SrS+Cu$-val.

Egy csepp $CuONO_5$ oldat 1/20 milligramm CuO-t tartalmazott. Az égetés Hempel-féle égető kályhában történt. Hőfok: kb. 1000° C. Tartama: 15 percz.

II. táblázat.

Szám	oldószer	oldott fém Cu	hozzátétel (sók)	foszforeszkálás intenzitása és színe
1	3g $SrCO_3$+1g S	2 csepp	0·1g $Na_2S_2O_3$	meglehetős sárgászöld
2	« «	2 «	0·1g CaF_2	közepes kékeszöld
3	« «	2 «	0·1g K_2SO_4	élénk világoskék
4	« «	2 «	0·15g $K(NO_3)$	közepes világoskék
5	« «	2 «	0·15 $K_2(CO_3)$	közepes világoskék
6	« «	3 «	0·1 Na_2SO_4	gyenge világoszöld
7	« «	3 «	0·1 Na_3PO_4	gyenge sárgászöld
8	« «	3 «	0·1 *Borax*	gyenge sárgászöld
9	« «	3 «	0·1 $KClO_3$	közepes kékeszöld
10	« «	3 «	0·1 $SrCl$	gyengén kékes
11	« «	3 «	0·1 $ClNH_4$	gyengén kékes
12	« «	4 «	0·1 K_2SO_4	élénk világoskék
13	« «	5 «	0·1 K_2SO_4	gyengébb kék
14	« «	5 «	0·1 K_2SO_4+ +0·1 $K(NO_3)$	élénk kék

A réz tehát a SrS-ben látszólag két foszforeszcencziát ad, egy sárgászöld és egy kék foszforeszczencziát. Feltünő azonban, hogy csak a kálisók és kloridok adnak kék foszforeszczencziát, míg ez minden más sónál zöldes. A foszforeszczencziafény spektroszkópiai elemzése igen nevezetes eredményt ad. Míg ugyanis a sárgászöld foszforeszczenczia fénynek csak egy sáv felel meg a színképben, addig a kékeszöld és vil. kék fény két sávot ad, egy zöldeset és egy kéket. Az utóbbi sáv nélkül ez a foszforeszczenczia is sárgászöld volna. Összehasonlítás kedveért még egy $SrS+Cu$ készíttetett nem tisztitott karbonatból, szintén K_2SO_4 sóval. A háromféle $SrS+Cu$ fényének elemzése a következő eredményt szolgáltatta:

III. táblázat.

Foszfor	foszf. színe	sáv (sávok) kiterjedése hullámhosszakban	sáv fény-maximuma
$SrS+Cu+Na_2SO_4$	sárgászöld	604.10^{-6} mm—476.10^{-6} mm	530.10^{-6} mm
$SrS+Cu+K_2SO_4$	vil. kék	618.10^{-6} mm—476.10^{-6} mm és 464.10^{-6} mm—425.10^{-6} mm	530.10^{-6} mm 447.10^{-6} mm
SrS (nem tiszta)$+Cu+K_2SO_4$	sárgászöld	618.10^{-6} mm—464.10^{-6} mm	530.10^{-6} mm

miből láthatni, hogy a sárgászöld sáv a $\lambda=530.10^{-6}$ mm. fénymaximummal jellemző a réz foszforeszkálására a SrS-ban. A kék sáv eredetét még nem sikerült megállapitani; mivel azonban csak némely SrS-ok (Cu-val) mutatják, azért a réz foszforeszczencziájára nézve nem lehet jellemző. Valószínűleg oly fém okozza, melynek foszforeszkálását a kálisók erősítik és melynek kloridja meglehetősen állandó, mert ha a szulfidot (kék $SrS+Cu$) kloridokkal tartósan égetjük, akkor elveszti sárgászöld foszforeszczencziáját (a mi a rézklorid illékonyságával magyarázható) és vissza marad a kék foszforeszczenczia. Fel lehetne még tenni, hogy az az ismeretlen fém talán a kalisókkal együtt jutott a SrS-ba. De ennek ellentmond az a körülmény, hogy a SrS fémek nélkül is csak $ClNH_4$-el égetve szintén kékes foszforeszczencziát adott (Lásd I. tab. 4. sz.).

A kékes fénynyel világitó $SrS+Cu$-ot tehát keverékfoszfornak kell tartanunk.

Megjegyzendő még, hogy Lenard és Klatt V. régibb megfigyelései szerint szintén a sárgászöld foszforeszczenczia jellemző a rézre nézve. A sáv maximumát pedig $\lambda=537.10^{-6}$ mm. helyen állapitották meg, a mi a fenti megfigyelésekkel elég jól egyezik meg.[1]

---

[1] Ez az eltérés is megmagyarázható, ha tekintetbe veszszük Lenard és Klatt eltérő eljárását a maximum meghatározásánál. Lásd Wied. Ann. 38. pag. 105.

2. Kisérletek $SrS+Bi$-tal.

A használt fémoldat egy cseppje 1/4 mgr. Bi_2O_3-t tartalmazott. Az égetés hőfoka és tartama ugyanaz volt mint a $SrS+Cu$-nál. Ez a foszfor az összes használt sókkal kékeszöldszínű igen intenziv foszforeszczencziát adott. A legjobb összetételnek bizonyult: a 3 gr. $SrCO_3$-mal és 1 gr. S-ral előállitott szulfid, melyhez egy csepp bizmutholdat = 1/4 mgr. Bi_2O_3 és 0·15 gr. Na_2SO_4 adatott. A $SrS+Bi$ a legélénkebb foszforeszczencziát adta valamennyi szulfid között. Fénye oly intenziv, hogy mellette sötétben egy ideig olvasni lehet. Egy 2×5 cm.²-nyi ernyőcske bevonva a $SrS+Bi$ porával oly erősen világitott, hogy vele közvetlenűl a megvilágitás után 85 cm.-nyi távolságról le lehetett olvasni a zsebórát.

3. Kisérletek $SrS+Mn$.-nal Mint oldat használtatott 1·2 gr. mangánkarbonát oldata 15 gr. higitott NO_5-ban.

IV. táblázat.

Szám	oldóanyag	fémoldat	hozzátétel (só)	foszf. fény intenzitása
1	3g $SrCo_3$+ 1g S	3 csepp	0·1 g K_2SO_4	nem világít
2	« «	2 «	0·1 $Na_2S_2O_3$	nem világít
3	« «	1 «	0·1 *Borax*	nem világít
4	« «	1 «	0·1 CaF_2	igen gyengén sárgás
5	« «	1 «	0·1 $ClNH_4$	nem világít

Ha összehasonlitjuk a IV. tab. 4. sz. præparatumát az I. tab. 7. sz. præparatumával, láthatjuk, hogy az a gyenge foszforeszczenczia, melyet az előbbi mutat, nem igen tulajdonitható a Mn-nak. A Mn tehát úgy látszik nem ad foszforeszczencziát a SrS-ban.

4. Kisérletek $SrS+Sb$-al.

A különböző sókkal állandóan szép és elég intenziv aranysárga foszforeszczencziát adott. Egyes részecskék világoszöld fényt sugároztak ki, melynek eredetét még nem kutattam.

5. Zink és ón csak igen gyenge foszforeszczencziákat adtak.

Egy igen érdekes jelenségről kell itt még megemlékeznem, melyet eddig vagy nem vettek észre, vagy nem méltattak figyelemre és melyet a megvizsgált stroncziumszulfidok legnagyobb része mutatott. Ha a stroncziumszulfidokat porczellán (vagy platin) tégelyben égetjük és az égetés befejezése után pl. üvegcsészébe öntjük, akkor a massza szilárd lepényt képez. *Ha ezt a tömeget üvegpálczikával még forró állapotban szétnyomjuk, akkor az egész tömeg élénken felvillan.* Ez a fény igen jól különböztethető meg a még kissé izzó tömeg piroforikus világításától, melynek megszünte után is mutatkozik. Egyelőre csak annyit lehetett megállapitani erről a sajátságos luminiszczencziáról, hogy a nyomás nagysága nincs befolyással rá, tehát nem azonos az ú. n. triboluminiszczencziával; továbbá, hogy szine úgy látszik megegyezik a foszforeszczenczia szinével.

Foszforeszczenczia vagy fluoreszczenczia (a rá eső fény hatása alatt) nem lehet, mert ily magas hőfoknál (mindenesetre 500° C-on felül) nem mutatnak a szulfidok fotoluminiszczencziát. Érdekes még, hogy ennek a luminiszczencziának intenzitásából következtetni lehet a foszforeszczenczia erősségére. Ha a felvillanás csak igen gyenge volt, vagy egészen elmaradt, akkor a foszforeszkálás is csak gyenge volt. A kálcziumszulfidok nem mutatták ezt a felvillanást, úgyszíntén az eddig — igaz csak kevés számmal — megvizsgált báriumszulfidok sem.

Eredmények.

1. *A stroncziumszulfidok általában intenzivebb foszforok mint a kálcziumszulfidok,* melyek közül csak a $CaS+Bi$ (Balmain-féle anyag) világít erősebben és hosszabb ideig.

2. *Legnagyobb részük igen élénk felvillanást mutat, midőn forró állapotban szétnyomatnak.*

3. *A következő fémek foszforeszczencziái állapíttattak meg a SrS-ban:* (azt az ismeretlen fémet, mely a SrS-ban kék foszforeszczencziát idéz elő, egyelőre «η»-val jelölöm.)

V. táblázat.

Feloldott fém	foszfor színe	a sáv maximuma hullámhosszakban
Mn	—	—
Cu	sárgászöld	$\lambda=530.10^{-6}$ mm
Bi	kékeszöld	$\lambda=487.10^{-6}$ mm
η	kékesibolya	$\lambda=447.10^{-6}$ mm

Ezekből a kisérletekből kitetszik, hogy mennyire képesek a karbonátban — tisztitás daczára — visszamaradt fémnyomok megneheziteni a vizsgálódást. Ez különben érthető, ha tekintetbe vesszük azokat a kis mennyiségeket, melyekben a fémek már hatásosak (milligramm törtrészei).

Mindezek a kisérletek gondosabban fémeitől megszabaditott karbonáttal fognak ismételtetni. Ezek után áttérünk a báriumszulfidok foszforeszczenicziájára.

1. $BaS+Cu$. A réz foszforeszczencziáját a BaS-ban már LENARD és KLATT állapitották meg. Ez a foszfor parázsvörös fényt sugároz ki; a sáv maximuma $\lambda=654.10^{-6}$ mm.-nek felelt meg. Már akkor is észrevették, hogy a foszforeszczenczia annál sötétebb vörös szint ölt, minél több Cu-ot tartalmaz a foszfor (természetesen bizonyos határokon belül). Kloridokkal izzitva eltünt a vörös foszforeszczenczia — a rézklorid illékony lévén — és visszamaradt egy sárgás szinű foszforeszczenczia, melynek eredete még ismeretlen. Innen van az, hogy a foszforeszczenczia annál sötétebb vörösszinű, minél több a Cu a foszforban, mert ekkor annál jobban jut érvényre a másik fém foszforeszczencziájával szemben. Érdekes továbbá, hogy annak az ismeretlen fémnek sárga foszforeszczencziája különösen erős, sőt túlnyomó, ha a foszfor készitésénél K_2SO_4-ot használunk mint erősbitő sót, mely, mint fentebb láttuk, a $SrS+Cu$-ban a kék foszforeszczencziát erősbitette. Hogy a többi kálisók is idézik-e elő a sárga foszforeszczencziát, még nem képezte vizsgálat tárgyát.

2. Kisérletek $BaS+Bi$-tal (ujabb kisérletek). Mindenekelőtt a tisztitott $Ba(CO_3)$ fémek nélkül, kénnel és erősbitő sókkal (CaF_2, Na_2SO_4 stb.) égettetett. A foszforeszczenczia igen gyenge és állandóan vöröses sárga volt. Sók nélkül, csak kénnel égetve, egyáltalában nem adott fényt.

A $BaS+Bi$ foszforok a különböző sókkal készitve állandóan közepes erősségű sárgászöld fényt adtak. Kémiai összetétele és készitése a következő:

a 4 gr. $BaCO_3$ és 1 gr. S-ből készitett szulfidhoz 1 csepp bizmutholdat (= 1/4 mgr. Bi_2O_3) és 0·1 gr. K_2SO_4-ot adva, az egész tömeg 15 perczig égettetett.

3. Kisérletek $BaS+Mn$-nal.

VI. táblázat.

Szám	oldóanyag	fémoldat	erősb. só	foszforeszczenczia erőssége és színe
1	4gr $BaCO_3+$1gr S	4 csepp	0·2 gr. K_2SO_4	rendkivül gyenge
2	« «	2 «	0·2 K_2SO_4	rendkivül gyenge
3	« «	1 «	0·1 Na_2SO_4	gyengén vörösessárga

A 3. sz. præparatum foszforeszczencziája alig tulajdonitható a Mn-nak, ha tekintetbe vesszük, hogy a BaS fémek nélkül is adott vörösessárga fényt.

4. Kisérletek más fémekkel.

$BaS+Fe$, $BaS+Ni$ és $BaS+Zn$ igen gyenge fényt adtak, mely valószinűleg nem a hozzátett fémektől ered: $BaS+Pb$ és $BaS+Sb$ gyenge sárgás fénynyel világitottak.

Eredmények:

I. *Az eddig megvizsgált báriumszulfidok a földalkaliszulfidok között a leggyengébben világítanak és a fény szine kevéssé törékeny.* (A legtörékenyebb szint a $BaS+Bi$ sárgászöld fénye adta.)

II. *A megvizsgált báriumszulfidok nem mutattak felvillanást a még forró tömeg szétnyomásánál.*

III. *A fémek megállapított foszforeszczencziái* (a $BaS+Cu$

sárgás foszforeszczencziáját okozó és még ismeretlen fémet egyelőre «ξ»-vel jelöljük):

VII. táblázat.

Fém	foszfor színe	sáv maximuma
Mn	—	—
Cu	parázsvörös	$\lambda=647.10^{-6}$ mm
Bi	zöldessárga	$\lambda=590.10^{-6}$ mm
ξ	világossárga	$\lambda=576.10^{-6}$ mm

Hogy a réz-sáv maximuma nem felel meg egészen a LENARD és KLATT V. megállapitotta maximumnak, annak az az oka, hogy a két foszfor réztartalma nem volt egyforma.

A földalkaliszulfidok foszforeszczencziáinak összefoglalása.

A különböző szulfidok foszforeszczenczia-szinképeinek felületes vizsgálata és összehasonlitása mutatja már, hogy a kálcziumszulfidok foszforeszczencziája sokkal egyszerűbb és áttekinthetőbb mint a stroncziumszulfidoké és báriumszulfidoké, mely utóbbié úgy látszik, valamennyi között a legkomplikáltabb.

Míg ugyanis az egyes fémek sávjai a kálcziumszulfidoknál egymástól távol feküsznek (sárga, zöld, kék és ibolya) és így könnyen megkülönböztethetők, addig a stroncziumszulfidoknál csak egy esetben volt két egymástól minimum által elválasztott sáv látható, a bariumszulfidoknál pedig egyáltalában nem. A két utóbbi szulfidnál a sávok részben fedik egymást, a szem mindig csak hoszszabb-rövidebb folytonos sávot lát, mely a stroncziumszulfidoknál rendesen a sárgászöld részben (kivéve a kék $SrS+Cu$-ot), a báriumszulfidoknál pedig a sárgásvörösben bir maximummal, vagy maximumokkal, melyeket a szem csak nehezen választ el egymástól — ha egyáltalában képes erre.

A sávoknak ez az összetorlódása hozza magával, hogy a stronczium- és báriumszulfidoknál keverékfoszforokat nem igen használhatni a foszforeszczencziák megállapitására, a mi a kálcziumfoszforoknál lehetséges (melyekben már Lommel — ki csak keverékfoszforokat vizsgált meg — elég jól állapitotta meg a maximumokat, a nélkül, hogy ismerte volna jelentésüket). A stronczium- és báriumszulfidoknál megállapitott maximumok tehát még nem tekinthetők — mint az illető fémekre nézve jellemzők — végleg megállapitottaknak.

Az összes kisérleteket — a fémeiktől lehetőleg megszabadított — karbonátokkal ujra kell végezni. Mindamellett a megállapitott maximumok közelitőleg megfelelőknek tekinthetők.[1]

Arra a kérdésre, hogy miért mutatkoznak a különböző szulfidok foszforeszczenczia-szinképeiben ily különbözőségek, talán az alábbi vizsgálatok adhatnak felvilágositást.[2]

Ezek a kutatások pedig — bizonyos tökéletesitések után — oly eszközt adnak kezünkbe, *melylyel némely esetekben — a hol épen előnyös — optikailag az anyag belső szerkezetére, jelesen fémtartalmára, következtetést lehet vonni.*

A foszforfény elemzése.

A foszforeszczenczia fénye tudvalevőleg folytonosan gyengül a kisugárzás közben, — úgy hogy csak kevés erősen és elég hosszú ideig világitó foszfor[3] fénye elemezhető közvetlenűl minden segédeszköz nélkül. Gyorsan gyengülő foszforeszczencziák megfigyelésére rendesen a Becquerel-féle foszforoszkopot szokás használni, avagy a Wiedemann E.-félét, mely nem más, mint a Becquerel-féle foszforoszkop javitott és tökéletesitett alakban.

Megfigyeléseimnél egy igen megfelelő és könnyen kezelhető

---

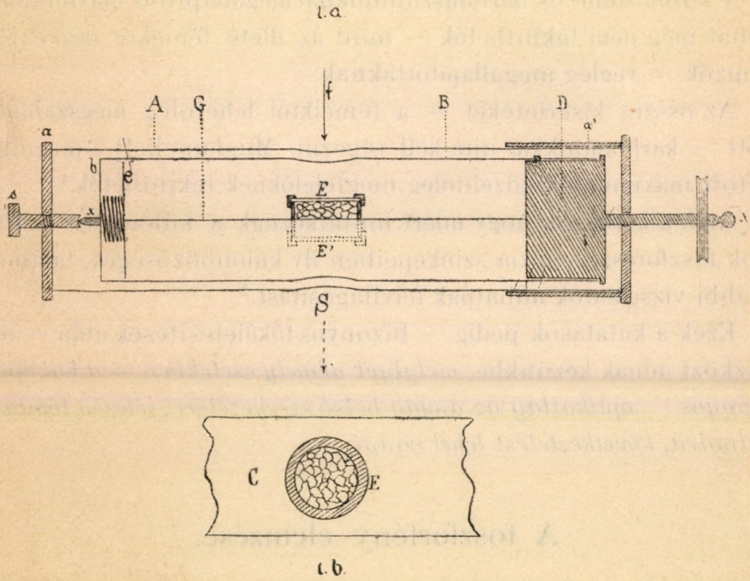
[1] Későbbi — a foszforok thermoluminiszczencziájára vonatkozó — kisérletek szintén valószinűvé teszik, hogy a megállapitott maximumok tényleg a megvizsgált fémeknek felelnek meg.

[2] Lásd oldószer befolyása.

[3] Igen jól elemezhető igy a $CaS+Bi$ és $SrS+Bi$ erős fénye.

foszforoszkopot használtam, melyet Lenard gondolt ki. Mivel tudtommal még nincs közölve, a következőkben adom leirását abban az alakban, melyben Klatt V. tanár készitette (1. ábra, 1a).

Az *A* üres fémhenger *a* végén egy a közepén átlukasztott köralakú fémlemezzel van elzárva, melybe egy kis csavar *s* van illesztve (hegye kúpalakúan van kimélyítve), melybe az *x* tengely



1. ábra.

hegye ér. E körül az *x* tengely körül foroghat egy másik üres fémhenger: *B*, mely az *A*-ban van elhelyezve.

Ha a *B*-t el akarjuk helyezni, vagy ki akarjuk venni az *A*-ból, akkor az utóbbiról le kell huzni a szorosan járó *a'* hüvelyt, mellyel együtt a *B* is kihúzható az *A*-ból. A *B* hengerben egy *C* fémlemez van elhelyezve (mely az ábrán keresztmetszetben csak mint egyenes mutatkozik), mely egy a *B*-be illő *D* fémdugasz által a *B* henger másik végén (*b*) rugóra forrasztott *e* fémlapocskákhoz van szorítva, úgy hogy a henger forgása közben nem mozdulhat el. A *C* fémlemez a közepén egy köralakú tartót: *E* (kosárkát) hord, mely az 1b) ábrán felülnézetben látható. Ennek a kosárkának a fedele erősen zár (bajonette-zárlat). Mindkét henger át van lukasztva, a mint az ábra mutatja.

A készülék működése a következő:

Az E-ben elhelyezzük a megvizsgálandó anyagot pl. foszforeszkáló port. A készülék felrajzolt helyzeténél az f fénysugarak — a hengereknek kivágott nyilásain átmenve—ráesnek a kosárka fedelére, mely oly átlátszó anyagból való, mely maga nem foszforeszkál, (pl. kvarcz- vagy vékony csillámlemez) és foszforeszczencziára gerjesztik az ott lévő anyagot. Képzeljük most, hogy a B henger az xx tengely körül 180°-al elforog és az E kosárka az E' helyzetbe jut (mely az ábrában pontozottan van rajzolva). Ekkor a foszforeszkáló anyagra nem esik fény, hanem maga sugározza ki fényét, mely az S nyiláson át észlelhető. A készülék lassú forgásánál természetesen intermittáló fénybenyomást kapunk, mely azonban annál folytonosabbnak fog látszani, minnél nagyobb a forgási sebesség. A készülék belső részei fekete mázzal vannak bevonva, hogy a gerjesztő fénynyel bejutó diffus fény ne zavarjon.

Ennek a készüléknek nagy előnyei, hogy igen kis helyet foglal el (az ábra nagysága a valódi nagyságnak fele) és könnyü előállíthatósága mellett ugyanazt a szolgálatot teszi, mint a Wiedemann E. féle korongos foszforoszkop, mely jóval komplikáltabb. A korongos foszforoszkopoknak azonkívűl még az a hátránya, hogy az illető anyag hátulról van megvilágítva, minek következtében a foszforeszczencziafény magán a testen halad át, míg az észlelő szemébe jut, vagyis elnyeletést szenved. A készüléknek ezt a hátrányát Wiedemann E. külön kisérleti berendezéssel (ferde megfigyeléssel) igyekezte kiküszöbölni. *A Lenard-féle foszforoszkop nem leledzik ebben a hibában.* Másrészt azonban meg kell említeni, hogy a Lenard-féle foszforoszkopnál nem lehet annyira megröviditeni a megvilágítás és megfigyelés közti időt, mint a sok kivágással biró Becquerel-féle foszforoszkopnál, tehát igen gyors lefolyású foszforeszczencziák megfigyelésére nem olyan alkalmas, de a szóban forgó megfigyelések czéljainak teljesen megfelel és még oly rövid tartamú foszforeszczencziák észlelésére is alkalmas, mint a milyen az üvegé, melynek fényemissziója kb. $^{33}/_{1000}$ másodpercz alatt folyik le.

A foszforeszczenczia gerjesztésére rendesen napfény használtatott, melyet heliosztat küldött az elsötétített szobába, ritkábban szerepelt elektromos ívfény.

A párhuzamos fénynyaláb lencsével gyűjtetett össze, melynek gyujtópontja a foszforoszkop belsejében lévő kosárkára esett.

Ha a foszforeszczenczia fényét elemezni akarjuk, akkor nem kell egyebet tenni, mint a spektrálkészüléket az *S* nyilás elé állitani. Spektrálkészülék gyanánt közönséges BUNSEN-STEINHEIL-féle és kis egyeneslátású spektroskop használtatott, mindkettő skálával. A jelzett spektroszkopiai vizsgálatoknál nem ajánlatos nagy feloldó képességgel biró készülékeket használni, egyrészt mert a foszforeszczencziafény aránylag mégis gyengébb, mint például a lángok fénye, és másrészt a szinképben felmerülő viszonyok jobb áttekínthetősége miatt (több sáv).

A mi pedig a sávok maximumának meghatározását illeti, azt hiszem, hogy valamely sáv azon helyének meghatározása, mely a kisugárzott energia maximumának felel meg, legalább is nehéz feladat.

A szem aránylag könnyen állapitja meg a legnagyobb intenzitás helyét valamely világos sávban, de ez a hely általában nem esik össze a kisugárzott energia maximumával. Csak akkor esik össze vele, ha a sáv maximuma azon a helyen fekszik, melyre nézve a szem a legérzékenyebb. Minden más esetben a szem a maximumot a szinkép közepe felé eltolva látja, hol érzékenyebb a szem, mint a színkép végei felé.

A maximum meghatározása igen czélszerűen történhetik a foszforeszczencziaszinkép megfigyelése által az emisszió lefolyása közben, mert akkor a sáv mindkét oldalról összezsugorodik a legintenzivebb hely felé.

Némely esetekben a LOMMEL-féle megfigyelési mód is használtatott, melynél a foszforeszczencziafény (vagyis tulajdonképen a fluoreszszencziafény) a megvilágítás alatt észleltetik.

Kathodsugarak nem használtattak a foszforeszczenczia gerjesztésére, mert ez már más luminiszczenczia körébe vág, a kathodoluminiszczencziáéba, melynél a viszonyok úgy látszik nem egészen ugyanazok mint a fotoluminiszczencziánál.

Az oldóanyag befolyása a foszforeszczencziára.

Ha a földalkaliszulfidokat szilárd oldatoknak tekintjük, közel fekszik az a gondolat, hogy nem úgy viselkednek-e mint a fluoreszkáló oldatok?

A viszonyok teljesen ugyanazok. A különbség mindössze abban áll, hogy a fluoreszkáló folyadékoknál szerves, a szilárd oldatoknál pedig szervetlen (fémek) testek legkisebb részecskéi végeznek fénymozgást, és hogy az egyik esetben az oldószer cseppfolyós, a másikban szilárd.

Az oldószer halmazállapota nincs befolyással a fluoreszkálásra, mert a folyadékok fluoreszkálása nem változik, ha pl. zselatin hozzákeverése által szilárd állapotba jutnak, csakhogy ekkor foszforeszczencziát is mutatnak.[1] Ugyancsak a zselatinok mutatják, hogy a testek szerves vagy szervetlen volta lényegtelen a foszforeszczencziára.

Stenger[2] kimutatta, hogy az az összefüggés, melyet Kundt a folyadékok abszorpcziójára és az elnyelő anyag törési mutatójára nézve talált, a fluoreszkáló folyadékokra is áll és következőleg fejezhető ki: a fluoreszczenczia-szinkép maximumai annál közelebb feküsznek a színkép vörös végéhez, minél nagyobb az illető oldószer törési mutatója.

A foszforeszkáló szulfidoknál a törési kitevő helyett az illető szulfid sűrűségét vettem, melyet — mivel a kén úgyis mindegyiknél fordul elő — az illető földalkalifém (*Ca*, *Sr*, *Ba*) molekulasúlya által helyettesítettem.

A következő tabellákban össze vannak állítva az egyes fémek foszforeszczencziái a kálczium-, stronczium- és báriumszulfidban mint oldószerben.

---

[1] Wiedemann E. Wied. Ann. 34. 448. 1888. [2] Wied. Ann. 28. 201. 1886.

1. A *Bi* foszforeszczencziái.

VIII. táblázat.

Oldószer	föld alkali fém mol. súlya	foszfor-színe	sáv maximuma
CaS	(*Ca*) 79·80	kékesibolya	$\lambda=447.10^{-6}$ mm
SrS	(*Sr*) 174·40	kékeszöld	$\lambda=487.10^{-6}$ mm
BaS	(*Ba*) 273·72	sárgászöld	$\lambda=590\ 10^{-6}$ mm

2. A *Cu* foszforeszczencziái.

IX. táblázat.

Oldószer	föld alkali fém mol. súlya	foszfor-színe	sáv maximuma
CaS	(*Ca*) 79·80	kékeszöld	$\lambda=511.10^{-6}$ mm
SrS	(*Sr*) 174·40	sárgászöld	$\lambda=530.10^{-6}$ mm
BaS	(*Ba*) 273·72	sárgásvörös	$\lambda=647.10^{-6}$ mm

3. A *Mn* foszforeszczencziái.

X. táblázat.

Oldószer	föld alkali fém mol. súlya	foszf. színe	sáv maximuma
CaS	(*Ca*) 79·80	sárga	$\lambda=611\cdot10^{-6}$ mm
SrS	(*Sr*) 174·40	—	—
BaS	(*Ba*) 273·72	—	—

Ezekből láthatjuk, hogy a megvizsgált testeknél:

I. *Az oldóanyagnak lényeges befolyása van a foszforeszczencziára.*

II. *A fémsávok maximuma annál közelebb fekszik a színkép vörös végéhez, minél nagyobb az illető oldóanyag molekulasúlya, vagyis minél sűrűbb.*

Az utóbbi tételt úgy is fejezhetjük ki, hogy a fénymozgás annál lassúbb, minél sűrűbb az oldószer (közeg), melyben történik, a mi a foszforeszczenczia szinének és az oldószer molekulasúlyának összehasonlitásából látható.

Hogy ez az összefüggés általános érvényességgel biró törvényszerűsége-e, vagy pedig csak szabály — úgy mint a fluoreszkáló anyagoknál — mely alól kivételek léteznek, azt csak nagyobb számú foszforokon végzett kisérletek fogják eldönthetni. Megjegyzendő azonban, hogy csak tiszta foszforokon végzett megfigyelések folyhatnak be a kérdés eldöntésére, a mi a dolog természetéből következik. Az eddig még bővebben meg nem vizsgált gyengébb foszforok szintén mutatják ezt a szabályszerűséget. Így pl. a *Pb* a *CaS*-ben kékeszöld fényben, a sokkal sűrűbb *BaS*-ban csak sárga fényben világit; a *Zn* a *CaS*-ban zöld-, a *SrS*-ben sárgászöld- és a *BaS*-ben narancssárga fényben világit stb.

Ezzel a törvényszerűséggel magyarázható az a sajátszerű tény — melyet már a báriumszulfidok foszforeszczencziájánál említettünk — hogy t. i. a *BaS*-ok általában igen kevéssé törékeny fényt adnak, a mit már Becquerel is észrevett és különösen hangsúlyoz.[1] A legtörékenyebb fényt adta a *BaS*+*Bi* zöldessárga fénye (Becquerelnél szintén ez volt a legtörékenyebb fény). Az előbbiek szerint ezt úgy magyarázhatjuk, hogy a *BaS a legsűrűbb oldószer lévén, a fénymozgás a leglassúbb benne.*

Klatt Román.

---

[1] La lumière stb. I. k. 236. o.

†

Schmidt Ferencz.

A Mathematikai és physikai Társulatnak f. évi márczius hó 21-én tartott ülésén az ülést vezető alelnök jelentette, hogy *Schmidt Ferencz* építész úr márczius hó 7-én élete 75-ik évében elhunyt. Benne Társaságunk tán legidősb, de mindenesetre egyik buzgó és lelkes tagját vesztette el. Bizonyítá ezt nemcsak a Társulatunk ülésein szokásos előadások szorgalmas látogatásával, hanem a hazai tudomány mozgalmai iránti élénk s tettekben is nyilvánuló érdeklődésével, mennyiben majd négy évtizeden át a hazai és külföldi tudósok figyelmét a kiváló magyar mathematikus *Bolyai Farkas* és János műveire irányozta s folyvást ébren tartotta; a legközelebb mult évszáznak már hatvanas éveiben *Grunert Archiv*-jában a Bolyaiak életrajzát s levelezésök nyomán Gauss és *Bolyai Farkas* között fennállott benső baráti viszonyát ismertette, sőt ujabban is *Bolyai János* Geometria absoluta-jának, valamint a Gauss-szal folytatott levelezés a Bolyaiakra vonatkozó részének kiadása körül is egyhamar el nem múló érdemeket szerzett. — Különösnek látszhatik, hogy boldogult tagtársunk, ki a régenten német szellemű és műveltségű Temesvár városában született és növelkedett, szakműveltségét pedig a bécsi műegyetemen és Münchenben szerezte, mégis megtartotta — úgylátszik — veleszületett erős magyar fajösztönét, a mely kivált a két székely mathematikus iránti — bátran mondhatjuk — benső, szinte szenvedélyes vonzalmában nyilatkozott. Ennek az érdekes jelenségnek magyarázatául szolgálhat az az adat, hogy elhunyt tagtársunk nagyatyja a székely földön még Kováts néven mint iskolamester működött, míg egyszerre II. József császár idejében egy éjszak-nyugatról berontott zord politikai vihar tősgyökeres magyar nevét elsodorta s a megfelelő német Schmidt névvel fölcserélte.

A jelenlevő tagok az elhunyt tagtárs emléke iránti tiszteletöket ülőhelyökről való felállással nyilvánították s egyhangulag elhatározták, hogy e tiszteletadás a Math. és phys. Társulat közlönyében is kifejezésre jusson.

MEGOLDOTT FELADATOK.

30. *Adott derékszögű parallelepipedonba adott nagyságú szabályos oktaéder irandó be, azaz úgy helyezendő el, hogy mindegyik szögpontja a parallelepipedon egy-egy síkjában feküdjék. Megvizsgálandó, hogy a problemának mikor van megoldása és hogy e megoldások száma tekintetében minő eshetőségek foroghatnak fenn.* (KÜRSCHÁK.)

Második megoldás Riesz Frigyes műegyetemi hallgató úrtól Budapesten.

A következőkben az oktaédernek csak oly beirásával foglalkozom, melynél két-két átellenes csúcs a parallelepipedon két-két átellenes lapjára esik.

Minthogy az oktaéder középpontja felezi az oktaéder átlóit, a parallelepipedon szimmetriasíkjaiban fekszik vagyis összeesik ezen síkok metszéspontjával. Válaszszuk ezen síkokat koordinátasíkokul. A parallelepipedon éleinek hoszsza $2a$, $2b$, $2c$; legyen továbbá az oktaéder $2d$ átlója által adva.

Az oktaéder három egy laphoz tartozó szögpontjának koordinátái: a, y_1, z_1; x_2, b, z_2; x_3, y_3, c. Az ezen szögpontokhoz tartozó radius vectorok egyenlősége és merőlegessége a következő relácziókra vezet:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + y_1^2 + z_1^2 &= d^2 \\ x_2^2 + b^2 + z_2^2 &= d^2 \\ x_3^2 + y_3^2 + c^2 &= d^2 \\ x_2x_2 + by_3 + z_2 c &= 0 \\ ax_3 + y_1y_3 + z_1 c &= 0 \\ ax_2 + y_1b + z_1z_2 &= 0 \end{aligned}\right\} A)$$

Ha ezen egyenleteket d^2-vel osztjuk, a térbeli orthogonális szubsztituczió együtthatói közt fennálló relácziók rendszerére ismerünk. Ezen együtthatók közül három ismeretes és a többi hat együtthatót meghatározza.

A megoldások két osztályba oszthatók, melyek egyikénél

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{a}{d} & \frac{y_1}{d} & \frac{z_1}{d} \\ \frac{x_2}{d} & \frac{b}{d} & \frac{z_2}{d} \\ \frac{x_3}{d} & \frac{y_3}{d} & \frac{c}{d} \end{vmatrix}$$

a pozitiv egységgel egyenlő, míg a másiknál $\Delta=-1$. Lássuk először az első esetet.

Fejezzük ki az együtthatókat három parameterrel; válaszszuk Euler módszere szerint a koordináták transzformáczióját jellemző φ, ψ és δ szögeket parameterekül.

$$\frac{a}{d}=\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\cos\delta \tag{1}$$

$$\frac{y_1}{d}=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\delta \tag{2}$$

$$\frac{z_1}{d}=\sin\varphi\sin\delta \tag{3}$$

$$\frac{x_2}{d}=-\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\delta \tag{4}$$

$$\frac{b}{d}=-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\delta \tag{5}$$

$$\frac{z_2}{d}=\cos\varphi\sin\delta \tag{6}$$

$$\frac{x_3}{d}=\sin\psi\sin\delta \tag{7}$$

$$\frac{y_3}{d}=-\cos\psi\sin\delta \tag{8}$$

$$\frac{c}{d}=\cos\delta. \tag{9}$$

A $\cos\delta$ értékét (9)-ből (1)-be és (5)-be helyettesítvén, összeadás, illetve kivonás utján következő relácziókat nyerjük:

$$\frac{a+b}{d}=\left(1+\frac{c}{d}\right)\cos(\varphi+\psi) \tag{10}$$

$$\frac{a-b}{d}=\left(1+\frac{c}{d}\right)\cos(\varphi-\psi). \tag{11}$$

Hasonló uton találjuk (2)-ből és (4)-ből a következő relácziókat:

$$\frac{y_1+x_2}{d} = \left(-1+\frac{c}{d}\right)\sin(\varphi-\psi) \tag{12}$$

$$\frac{y_1-x_2}{d} = \left(1+\frac{c}{d}\right)\sin(\varphi+\psi) \tag{13}$$

(11)-ből és (12)-ből, illetve (10) és (13)-ból a szögfüggvényeket kiküszöbölvén,

$$y_1+x_2 = \frac{d-c}{d}\sqrt{(d-c)^2-(a-b)^2}$$

$$y_1-x_2 - \frac{d+c}{d}\sqrt{(d+c)^2-(a+b)^2}.$$

Innen

$$x_2 = \frac{1}{2d}\left[(d-c)\sqrt{(d-c)^2-(a-b)^2}-(d+c)\sqrt{(d+c)^2-(a+b)^2}\right]$$

$$y_1 = \frac{1}{2d}\left[(d-c)\sqrt{(d-c)^2-(a-b)^2}+(d+c)\sqrt{(d+c)^2-(a+b)^2}\right].$$

Az *A)* alatti egyenletrendszer szimmetriájából következik, hogy a többi koordináta értékei x_2 és y_1 kifejezéseiből a, b, c cziklikus felcserélésével nyerhetők. E kifejezésekben szereplő gyökmennyiségek kétértékűsége anynyiban szenved megszorítást, a mennyiben az *A)* alatti reláczióknak érvényben kell maradniok. A legáltalánosabb esetben, mialatt pl. y_1 a lehető 4 értéket felveszi, z_1 minden egyes esetben csak 2, csupán előjelre különböző értéket vehet föl; y_1 és z_1 által a többi koordináta egyértelműleg van meghatározva. Általánosságban tehát 8 megoldás van.

Az oktaéder minden egyes csúcsa 8 helyzetet vehet föl; ezek a parallelepipedon illető lapján fekvő két-két oly téglalapnak szögpontjai, a melyeknek oldalai ama lap oldalaival párhuzamosak.

Rendezzük a parallelepipedon éleit nagyság szerint és legyen $a \geqq b \geqq c$, úgy a megoldhatóság föltétele:

$$d \geqq a + b - c.$$

Midőn $d > a+b-c$, a feladatnak 8 megoldása van.

Ha $d = a+b-c$, bizonyos megoldások összeesnek és pedig a szerint, a mint 1) $a > b > c$, 2) $a = b$ vagy $b = c$, 3) $a = b = c$, a feladatnak 4, 2 vagy 1 megoldása van.

Midőn $\Delta = -1$, az előbbi számításokban d helyébe $-d$ teendő. A megoldhatóság föltétele:

$$d \geqq a + b + c.$$

Midőn $d > a+b+c$, a feladatnak 8 megoldása van. Ha $d = a+b+c$, akkor 4 megoldás van.

Math. és Phys. Társ.

Utalvány czím: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. chequè számlájára.

Kimutatás

az 1901 február havában befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1896. évre: Schlesinger Lajos dr. 6 kor.

1897. évre: Schlesinger Lajos dr. 6 kor.

1898. évre: Bozzay Zoltán 10 kor.

1899. évre: Bartoniek Géza 10 k., Kovács János dr. 10 k., Mialovich Mór 10 k., Nesnera Aladár 6 k. 36 kor.

1900. évre: Bartoniek Géza 10 k., Fabinyi Rudolf dr. 6 k., Fertig Vilmos 10 k., Fölser István 10 k., Hausszmann Alajos 10 k., Kovács János dr. 10 k., Kukla István 6 k., Kunfalvi Rezső 2 k., Mialovich Mór 10 k., Polereczky Jolán 10 k., Tóth József 6 k. 7 à 10 k. 3 à 6 k. 1 à 2 k. 90 kor.

1901. évre: Antolik Károly 6 k., Barányi Balázs 6 k., Bodola Lajos 10 k., Csajkás Mihály 6 k., Czekelius Aurél 10 k., Dischka Győző 6 k., Eberhardt Béla 6 k., Fejér Lipót 6 k., Frank Dezső 6 k., Gothard Jenő 6 k., Habán Mihály 6 k., Halmi János 6 k., Harkányi Béla br. 6 k., Harsányi Andor 10 k., Jurányi Henrik 10 k., Kalecsinszky Sándor 10 k., Károly Lajos 10 k., Károly Irén dr. 6 k., Keresztély Lajos 6 k., Klein Pál 6 k., Koschovitz Gyula 10 k., Kunfalvi Rezső 6 k., Lévay Ede 10 k., Markoss Imre 6 k., Mialovich Mór 10 k., Miller Gyula 6 k., Módly Krizsó 4 k., Petry Gyula 6 k., Rados Ignácz 10 k., Ráth Arnold 10 k., Rátz László 10 k., Rucsinszky Lajos 10 k., Schenek István dr. 10 k., Schwarcz Ottó dr. 6 k., Simon Tádé 6 k., Stauber József 6 k., Steiner Miklós 6 k., Szabó János 6 k., Székely Károly 6 k., Széky István 6 k., Takáts Gyula 6 k., Terlanday Emil 10 k., Thanhoffer Lajos dr. 10 k., Vámos Dezső 10 k., Vörös Cyrill 6 k., Weisz Margit 6 k., Zorkóczy Samu 6 k. 17 à 10 k. 29 à 6 k. 1 à 4 k. 348 kor.

1902. évre: Módly Krizsó 2 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1901. évre: a Magy. Mérnök Ép. Egylet, a bpesti VI. k. áll. főgymn. és főreálisk., a csiksomlói r. kath. főgymn., a debreczeni áll. főreálisk., a győri áll. főreálisk., a gyulafehérvári r. k. főgymn., a hajdúböszörményi ref. gymn., a kecskeméti áll. főreálisk., a pozsonyi áll. főreálisk., a szakolczai gymn., a szászvárosi ev. ref. Kún koll., az újvidéki kir. kath. magy. főgymn.

Összesen 13 à 10 k. 130 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból	148 kor.
1901. és 1902. évi díjból	350 kor.
Előfizetési díjakból	130 kor.

Budapest, 1901 márczius 1-én.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

EGY KÜLÖNÖS KETTŐS PROJEKCZIÓ ALKALMAZÁSA A GÖMB FELÜLETÉNEK ÁBRÁZOLÁSÁRA.

Föltünő jelenség, hogy a gömbfelület területtartó ábrázolásában szereplő fokhálózat görbéi mindeddig kellő méltatásban nem részesültek, noha Lambert[1] és Eulernek[2] ez ábrázolásra vonatkozó alapvető értekezései immár ötnegyed század óta ismeretesek. A legtöbb közkézen forgó kartografiai kézikönyv meg sem emlékszik róluk, némelyik «igen komplikált trigonometriai görbéknek»[3] minősiti őket és csak Tissot[4] emliti Lambert nyomán, hogy ezek negyedrendű síkgörbék.

Minthogy Lambert[5] említett értekezésének e görbékre vonatkozó fejtegetése csak speciális esetre vonatkozik, kisérletet tettem, nem lehetne-e a kérdéses görberendszer általános tulajdonságait a szerkesztő geometria módszereivel megállapitani.

I.

Legyen CO az ábrázolandó F gömbfelület egyik átmérője, O pontjában lévő érintősíkja pedig a képsík, melyen az F felület pontjait Lambert æquivalens és Hipparch stereografikus vetítése elveinek megfelelően ábrázoljuk. Ha a Lambert ábrázolásából eredő síkrendszert rövidség kedveért Σ_1-gyel, a stereografikus

---

[1] Lambert, Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelskarten (Ostwald's Klassiker 54. sz.).

[2] Euler, Drei Abhandlungen über Kartenprojection (Ostwald's Klassiker 93. sz.).

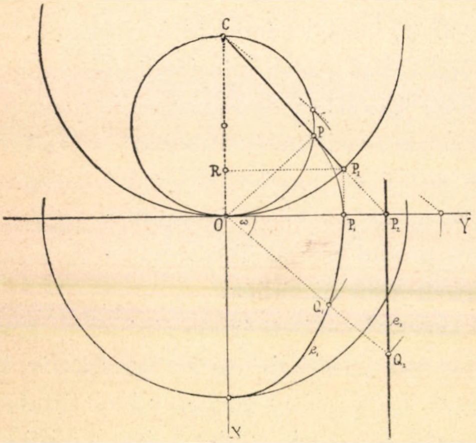
[3] Kövesligethy, A math. és csillagászati földrajz kézikönyve 827. lap.

[4] Tissot-Hammer, Die Netzentwürfe geographischer Karten 53. lap.

[5] Lambert említett értekezése § 105, 106.

vetitésből eredőt pedig Σ_2-vel jelöljük, a képsikon két egyesitett sikrendszert nyerünk, a melyben, mindkét ábrázolás azimuthális voltánál fogva, az O ponton átmenő sugársor közös alakzatképen szerepel. Az F felület bármely P pontjának megfelelő P_1, P_2 pontpár összekötő egyenese e szerint az ábrázolás O középpontján megyen át.

Bármely ilyen megfelelő pontpár között fennálló metrikus vonatkozás könnyen állapitható meg.



1. ábra.

Ha

$$OP_1 = \varrho_1, \quad OP_2 = \varrho_2, \quad OC = d,$$

akkor, minthogy az OPP_2 és COP háromszögek hasonlók, következik, hogy

$$OP_2 : OP = OC : CP,$$

vagy minthogy

$$OP_1 = OP$$

$$\varrho_2 : \varrho_1 = d : \sqrt{d^2 - \varrho_1^2},$$

$$\varrho_2^2 d^2 - \varrho_1^2 \varrho_2^2 = \varrho_1^2 d^2$$

és innen

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{d^2}. \qquad 1)$$

E képlet segítségével megállapíthatjuk a Σ_1 rendszernek azt a görbe vonalát, a mely a Σ_2 rendszer e_2 egyenesének felel meg.

Legyen O valamely koordinátarendszer sarkpontja (1. ábra), $OY \perp e_2$-re a sarktengely, ρ_2 és ω az adott egyenes valamely tetszőleges Q_2 pontjának koordinátái és jelöljük a-val a sarkpontnak e_2-től való távolságát, akkor

$$a = \varrho_2 \cos \omega$$

vagy

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{\cos \omega}{a}, \quad \frac{1}{\varrho_2^2} = \frac{\cos^2 \omega}{a^2}$$

értékének 1) alatti egyenletünkbe való helyettesítése

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{\cos^2 \omega}{a^2} + \frac{1}{d^2}\text{-ban}$$

a Σ_1 rendszer ama görbe vonalának sarkegyenletét, a mely a Σ_2 rendszer e_2 egyenesének megfelel.

Hogy az így talált görbe vonal tulajdonságait felismerhessük, czélszerű lesz ezt oly O-ba helyezett derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatni, a melynek ordináta tengelye az imént választott sarktengelylyel egybeesik.

Q_2 pont koordinátáit x és y-nal jelölve,

$$\varrho_1^2 = x^2 + y^2 \quad \text{és} \quad \cos \omega = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

összefüggésekre való tekintettel, talált egyenletünk a következő alakot ölti:

$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{a^2(x^2+y^2)} + \frac{1}{d^2}$$

vagy

$$a^2 x^2 + (a^2+d^2) y^2 = a^2 d^2,$$

a miből végre

$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2 d^2}{a^2+d^2}} = 1 \qquad 2)$$

a Σ_1 rendszer ama görbe vonalának derékszögű koordinátákban kifejezett egyenlete, a mely a Σ_2 rendszer e_2 egyenesének felel meg. Ez, a mint látjuk oly ellipszisnek az egyenlete, melynek főtengelye az adott e_2 vel parallel. Főtengelyének hossza $\alpha = d$ független az e_2 helyzetétől, a melléktengely hossza

$$\beta = \frac{ad}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

pedig a-nak függvénye.

β értéke legnagyobb, ha $a = \infty$, vagyis, ha e_2 a Σ_2 rendszer ∞-ben fekvő egyenese.

Minthogy ekkor $\alpha = \beta = d$, a Σ_2 rendszer ∞-ben fekvő egyenesének a Σ_1 rendszer az a d sugarú köre felel meg, a melynek középpontja O-ban van. E kör *közös főköre* mindamaz ellipsziseknek, a melyek a Σ_2 rendszer egyeneseinek megfelelnek.

Ha a Σ_2 rendszer valamely egyenes sorozatában a állandó, a neki megfelelő ellipszissorozat egybevágó ellipszisekből áll. De eme sorozat minden ellipszise tulajdonképen két párhuzamos és O-hoz szimmetrikus fekvésű egyenes megfelelő alakzata. Hogy a megfelelkezésnek e kétértelműségét kizárjuk, abban akarunk megállapodni, hogy minden egyenes megfelelő görbéje csak félellipszis, olyformán, hogy az O pont minden megfelelő pontpár által határolt közre nézve külső osztási pont legyen.

A szereplő síkrendszere és az F gömbfelületen levő originális pontrendszer közötti kapcsolat sokkal szorosabbá válik, ha a Σ_1 rendszert oly Φ gömbfelületre írt pontrendszer orthogonális projekcziójának tekintjük, melynek középpontja C-ben van, sugara pedig az F gömb átmérőjével egyenlő.

Minthogy az előbb megállapitott ellipszissorozat minden e_1 eleme a Φ felület egy-egy diametrálmetszetének projekcziója, a Σ_2 rendszer egyenesei és a Φ felület átmérősíkjai között lineár megfelelkezés létesül, a melyre nézve még csak a megfelelő elemeknek viszonylagos fekvése állapítandó meg.

Induljunk ki újra (1-ső ábra) az F felület valamely tetszésszerinti P pontjának megfelelő P_1P_2 pontpárjából és legyen P_I ama pontok egyike, melyeket a P_1-ben a projekczió lapra emelt merőleges a Φ gömbfelületen kimetsz. Kössük össze P_I-et C-vel, és legyen $P_1R \parallel P_1O$-val, akkor P_1CR és PCO háromszögek egybevágók lévén,

$$OCP\measuredangle = RCP_1\measuredangle\text{-gel.}$$

Minthogy az így nyert szögek egy ugyanazon normál síkban feküsznek, nyilvánvaló, hogy CP és CP_1 összeeső sugarak, a miből következik, hogy a P, P_1 és P_2 pontok csoportja C-re nézve perspektiv fekvésű. Ezt kiterjesztve a Σ_2 rendszer bármely egyenesének összes pontjaira, látjuk, hogy a Φ gömb átmérősíkjai a Σ_2 rendszer megfelelő egyeneseivel perspektivek.

E megfelelkezés megmutatja, miképen lehet a Σ_1 síkrendszert *kétszeres vetítés segítségével* közvetetlenül az F felület pontjaiból megszerkeszteni. A Σ_1 síkrendszer ugyanis *a Φ felület ama pontrendszerének orthogonális projekcziója,* melyet nyerünk, *ha az eredeti F felület pontrendszerét C-ből a Φ felületre vetítjük.*

A gömbfelület azimuthális területtartó projekcziója tehát *kettős projekczió,* mely fogalom a kartografiában nem egészen ismeretlen. TISSOT* könyvében is találunk egy ilyfajta módszert, melyben a közvetítő felület szerepe burkoló kúpfelületnek jutott. De az ott emlitett módszer teljesen jelentéktelen, minthogy ez kartografiai szempontból semmiféle előnyt nem biztosit.

Ezek után az F felület bármely gömbkörének a Σ_1 rendszerben való ábrázolása közvetlenül megállapitható. A C vetítés középpontjából az adott k gömbkör pontjaiba vont vetítősugarak ugyanis másodrendű kúpfelületet alkotnak, mely a Φ felülettel sphærikus kúpszelet hosszában metszéshez jut; e sphærikus kúpszelet orthogonális projekcziója a kör keresett ábrázolása.

Nyilvánvaló tehát, hogy *a Lambert-féle azimuthális területtartó ábrázolás fokhálózata oly negyedrendű síkgörbéből áll, melyek mindegyike egy-egy sphaerikus kúpszelet orthogonális projekcziójának tekinthető.*

E fokhálózat bármely görbéjének meghatározása két másodrendű felület áthatási problemájának megoldása, mely a szer-

---

* TISSOT-HAMMER.

kesztő geometria elveinek megfelelően tetszőleges pontossággal megoldható.

Az a körülmény, hogy a sphærikus kúpszelet tulajdonképen két különvált egybevágó ikergörbéből áll, némi kétértelműséget okoz az ábrázolásban. Ez azonban könnyen eltüntethető, ha az áthatási görbe ama részére szorítkozunk, mely a Φ felület alsó — a projekcziólap felé fordított — felén származik, minthogy a szereplő kúpfelületek különleges helyzeténél fogva az egyik ág mindenkor egész terjedelmében a felület alsó felén terül el, míg a másik ág összes pontjai, az áthatás szimmetrikus voltánál fogva, a felső felén vannak.

A gömbkörök különös fekvéseinek megfelelően egyszerűbb görbék is szerepelhetnek a fokhálózatban. Ha a gömbkörök síkjai a projekcziólappal párhuzamosak, vetítő kúpjaik egyenes körkúpok; az áthatás sphærikus kúpszeletei ekkor a projekcziólappal párhuzamos körökké fajulnak el, melyek orthogonális projekcziói ismét *körök*.

Ha a gömbkörök síkjai a vetítés középpontján haladnak át, a vetítő kúpoknak síkokká való elfajulása következtében sphærikus kúpszeletek helyett diametrálmetszeteket nyerünk, melyek projekcziói általában *ellipszisek;* ha eme gömbkörök síkjai még a projekciólapra merőlegesek, a diametrálmetszetek projekcziói az ábrázolás középpontján áthaladó *egyenesek.*

II.

Mellékletünk I. és II. alatti táblája mutatja az előbbiekben kifejtett általános módszer alkalmazását a fokhálózat konstruktiv meghatározására. Az I. alatti szerkesztés képsíkja Π_1 párhuzamos az F gömbfelület egyik meridián síkjával, a II. alatti szerkesztés Π_1-je a gömb egy tetszőleges O pontjának horizontsíkja, úgy hogy I. a területtartó meridián projekczió, II. pedig a területtartó horizontális projekczió fokhálózatát ábrázolja.

A szerkesztés grafikus kivitelének könnyítésére czélszerű mind a két esetben egy második projekczió-lapot (Π_2) is segítségül venni, a gömbfelület ama meridián síkjában, mely az első projekcziólapra merőleges.

Minthogy Π_2 úgy az F és Φ gömbfelületeknek, valamint a párhuzamos körök vetítő kúpjainak közös szimmetrális síkja, a Φ felületen származó és a párhuzamos körök rendszerének megfelelő áthatási görbék második projekcziói mindannyian kúpszeletek, illetőleg kúpszeleteknek véges darabjai. Könnyen juthatunk arra a kapcsolatra, mely e kúpszeletek között fennáll, ha kiegészítő — parasitikus — részeinek tulajdonságait vizsgáljuk.

Vessük alá Φ felületünket és a párhuzamos körök vetítőkúpjainak sorozatát «WIENER imaginárius projekcziójának»* és legyen a Π_2-re merőleges egyeneseknek ∞-ben fekvő pontja — mint pólus — ezen imaginárius projekczió vagy konjunkczió középpontja, a neki megfelelő poláris sík Π_2 pedig a kollineáczió síkja. A Φ gömbfelületnek megfelelően nyerünk ekkor egy egyenlő oldalú egyágú forgási hiperboloidot, melynek torokköre Φ-nek Π_2-ben fekvő legnagyobb köre, a párhuzamos körök vetítő kúpjainak megfelelően pedig oly másodrendű kúpsorozatot, a melynek első nyomrendszere nem más, mint a párhuzamos körök stereografikus projekcziójában szereplő körsorozat imaginárius projekcziója. Minthogy ez esetben a sorozat minden körének imaginárius projekcziója egyenlő oldalú hiperbola, konjugált kúprendszerünk nyomvonalai egyenlő oldalú hiperbolákból álló kúpszeletsort alkotnak, mely a körsor czentrálisát közös szimmetrálisul birja. E kúpszeletsornak négy valós alappontja van; kettő a Π_1 lap ∞-ben fekvő egyenesén, megadva a hiperbolák aszimptota irányai által, kettő pedig a körsor hatványvonalának ama pontpárjában, mely a körsor által rajta indikált harmonikus pólusok involutiójának szimmetrikus pontpárja. E négy alappontnak megfelelően bir konjugált kúpsorozatunk négy közös alkotóval, melyek — könnyen látható okoknál fogva — Π_2-vel 45°-nyi szöge-

---

* WIENER, Lehrbuch der darst. Geometrie I. köt. 316. lap és II. köt. 90 lap.

ket alkotnak, s igy a Φ-hez konjugált hiperboloid aszimptotikus kúpjának is alkotói.

Minthogy ezen alkotók a konjunkczióban szereplő felületek ∞-ben fekvő közös pontjainak helyzetét jelzik, maguk az alkotók azonban a jelzett ∞-ben fekvő pontok érintő síkjainak metszésvonalai, nyilvánvaló, hogy ezek a származó áthatási görbék aszimptotái.

De ezen aszimptoták páronkint szimmetrikusok Π_2-höz, második projekcziói tehát összeeső egyenesek. Ezek szolgáltatják azon kúpszeletsor közös aszimptotáit, mely áthatási görberendszerünk második projekczióját alkotja. A kúpszeletsor elemei hasonló és hasonló fekvésű konczentrikus hiperbolák, az aszimptotapár pedig a sor egyik elemének egyenes párrá való elfajulása. Ez utóbbi körülményre való tekintettel a Φ felületen származtatott sphærikus kúpszeletsor elfajult elemének tekinthető azon legnagyobb körök párja is, melynek projekcziója az aszimptotákkal egybeesik.

Minthogy az egyik kör síkja Π_1-vel, a másiknak síkja az F gömbfelület párhuzamos köreinek síkjaival párhuzamos, eme síkok pedig a vetitő kúpok sorozatának cziklikus síkjai, látjuk, hogy a Φ felületre irt sphærikus kúpszeletek sora két közös cziklikus ívvel bir.

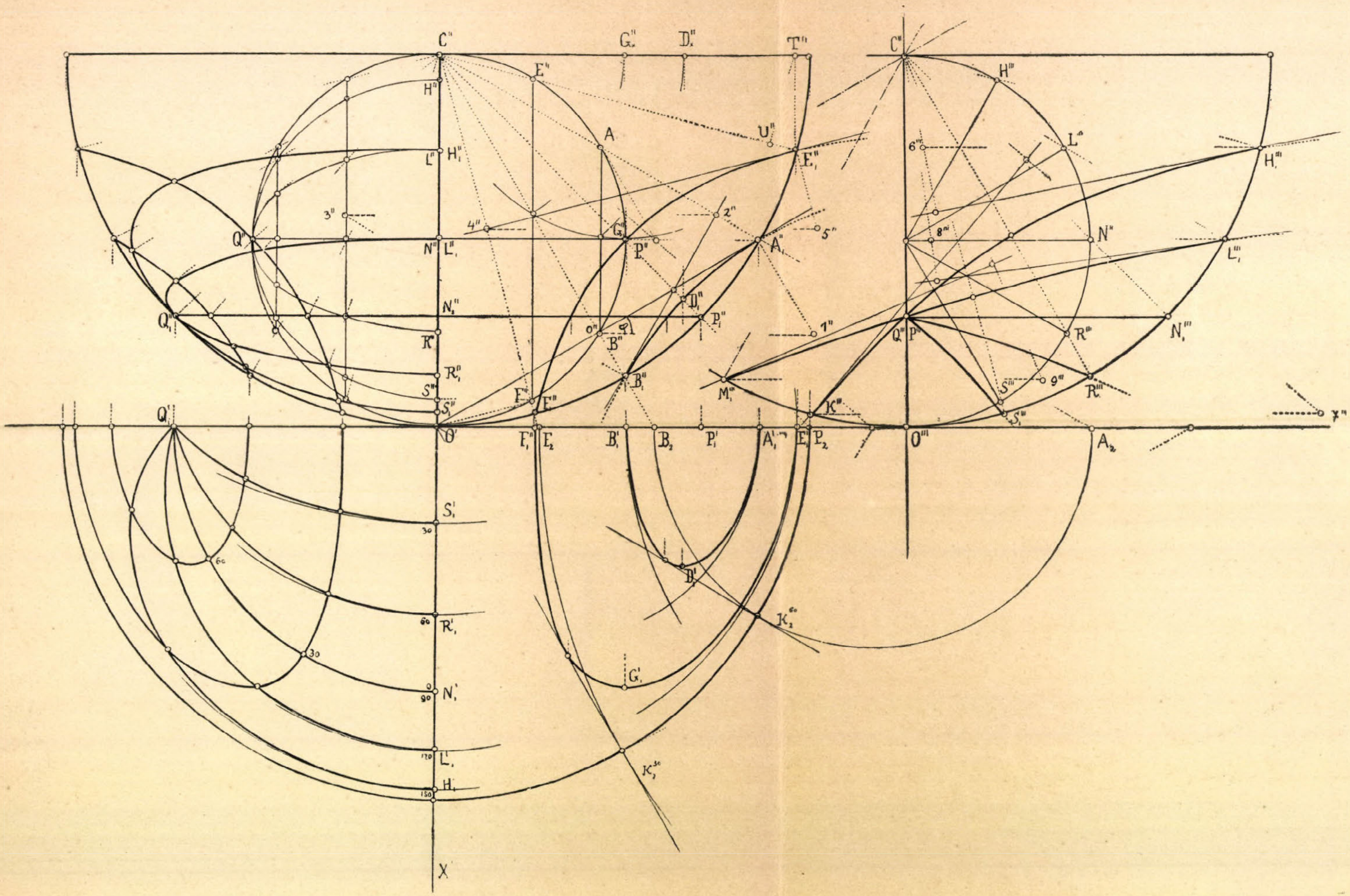
Mellékletünk mind két tábláján látjuk eme kúpszeletsorokat, melyeknek elemei, a sor egyik tetszőleges elemének pontos rajza után, a hasonlóság elveinek megfelelően szerkeszthetők.

Az I. tábla kúpszeletsorának elemei, a cziklikus ívek síkjainak merőleges volta következtében, egyenlő oldalú hiperbolák. A mint a szerkesztésből látható, ezen esetben, a hiperbolák bármelyikének csúcspontja, a neki megfelelő párhuzamos kör helyzetéből, közvetlenül is szerkeszthető.

Ha ugyanis az egyik, pl. az $E_1''F_1''$ elem E_1'' pontjának, az aszimptotákra vonatkoztatott coordinátáit $C''T''$ és $E_1''T''$-vel jelöljük, akkor a

$$\overline{C''G_+''}^2 = \overline{C''T''} \,.\, \overline{E_1''T''} = \text{const.}$$

I. tábla.


C''
G''
D''
T''
E''
H''
A
U''
L''
H''
E''
3''
4''
2''
5''
Q''
N''
L''
G''
P''
A''
N''
D''
Q''
P''
K''
0''
B''
1''
R''
S''
B''
S''
F''
E''
M''
K'''
Q'
O'
F''
F
B'
B
P'
A'
E'
P
S'
30
60
R'
30
N'
90
L'
120
H'
150
X'
G'
K
D'
K
60
30
C''
H'''
L''
6'''
8'''
N''
H'''
L'''
Q'''
P'''
R'''
N'''
S'''
9'''
R'''
S'''
O'''
A
Y''

összefüggés adja a csúcspont egyenlő nagyságú koordinátáit. Minthogy

$$\overline{C''T''}\,.\,\overline{E_1''T''} = \overline{C''E_1''}\,.\,\overline{T''U''}$$

és

$$C''E_1''T''\triangle \cong C''O'F''\triangle,$$

azért

$$\overline{C''G_+''}^2 = \overline{F''S''}\,.\,\overline{C''O'}$$

s így $C''G_+''$ a Φ gömb sugarának és az illető párhuzamos kör síkjának C-től való merőleges távolságának geometriai középarányosa.

A sphærikus kúpszeletsor első projekcziójának, vagyis a fokhálózat párhuzamos köreit ábrázoló görbe rendszer pontonkinti szerkesztésének most már semmi akadálya nincs. Ez közös szimmetrálissal biró negyedrendű síkgörbe sorozat, melyben a cziklikus íveknek megfelelően egy kör és egy vele konczentrikus ellipszis is bennfoglaltatik, mely utóbbi azonban egyenessé is elfajulhat (I. tábla).

A szimmetrálison fekvő pontok görbületi sugarai is szerkeszthetők, ha tekintetbe vesszük, hogy e pontok a második projekczió konturpontjainak felelnek meg és hogy eme konturpontok érintői a görbületi sík helyzetét is jelzik.

Az $A_1''B_1''$ görbe A_1'' pontjában vont érintő vetítő síkja metszi a Φ gömbfelületet egy körvonal mentén, a mely görbénkkel, a görbületi sík stationárius volta következtében, harmadrendű érintkezésben van. E kör ellipszis alakú első projekcziója ugyanoly érintkezésben van görbénk első projekcziójával és ennek görbületi sugara adja görbénk görbületi sugarát is.

Ha φ a kör síkjának hajlását jelzi (I. tábla), A_1' oly ellipszis melléktengelyének végpontja, melynek főtengelye $a = O''A_1''$, melléktengelye $b = O''A_1''.\cos\varphi$; az A_1' pont görbületi sugarát megadja tehát az

$$\frac{a^2}{b} = \frac{O''A_1''}{\cos\varphi} = 0''\,1''$$

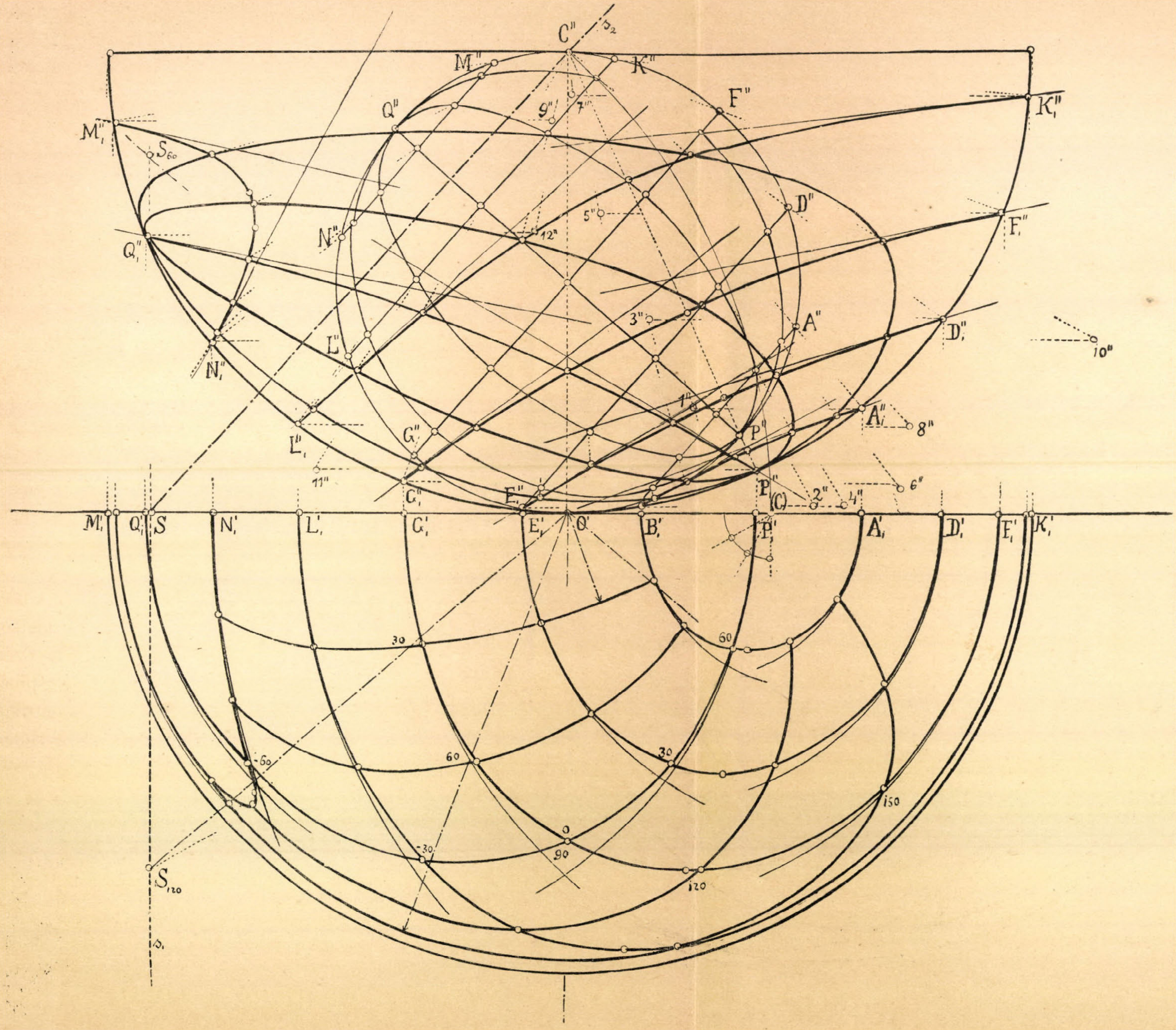
értéknek megfelelően, az $0''1''A_1''$ háromszög átfogója. Nehány görbületi kör ismerete megkönnyiti a görbe vonal pontos szerkesztését és így czélszerű ezen eljárás a görbe sorozat összes elemeire nézve ismételni.

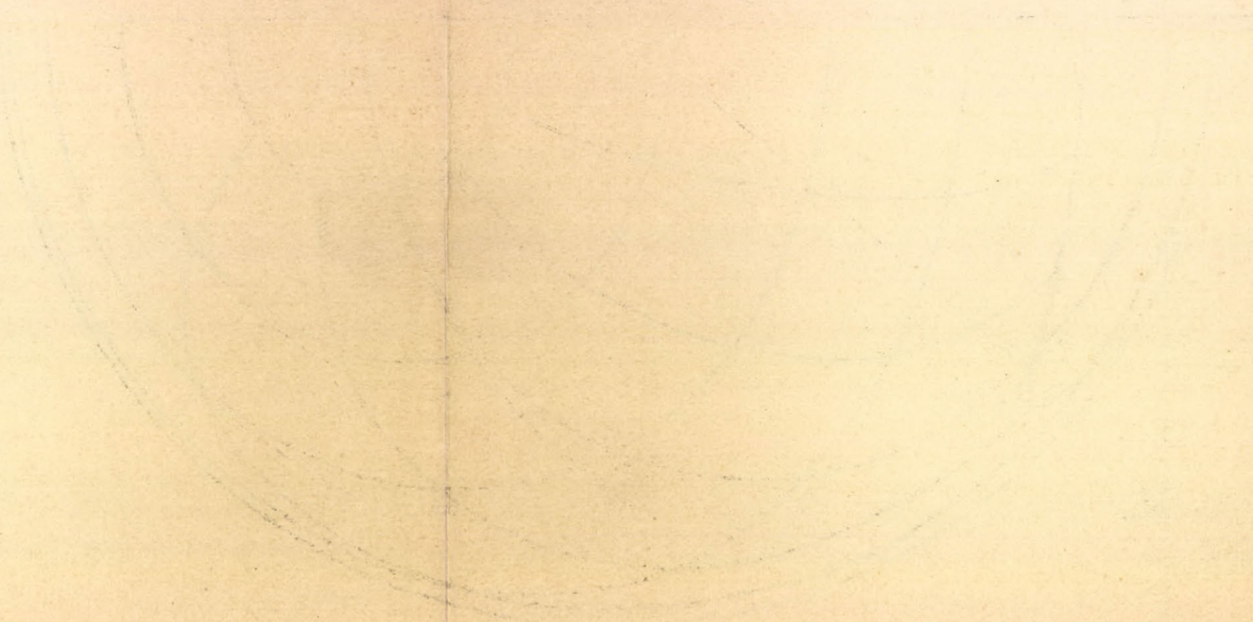
A fokhálózat meridiánjainak szerkesztésénél két esetet kell megkülönböztetnünk, a szerint, a mint a meridiánok vetitő kúpsorozatának közös szimmetrális sikja van, vagy nincs. Ha a kúpsorozatnak szimmetrális sikja van, ez a C különleges helyzeténél fogva csak Π_1-re merőleges lehet. Egy vele párhuzamos fekvésű sikot harmadik projekczió lapnak választva (I. tábla), a meridiánoknak megfelelő sphærikus kúpszeletsor harmadik projekcziója oly konczentrikus hiperbolákból álló kúpszeletsor, melynek két közös pontja és egy közös aszimptotája van. E sor egyenes párokká elfajult elempárjának megfelel a Φ felület két legnagyobb köre — a közös cziklikus ív és a közös pontokon át vezetett diametrálmetszet — és két mellékköre, mely utóbbiak Π_1 sikkal párhuzamosak.

A párhuzamos köröknek megfelelő görberendszer szerkesztésére adott módszer alkalmazása szolgáltatja e görbe sorozat első projekczióit és a projekczió közös szimmetrálisán fekvő pontok görbületi sugarait.

Ha a vetitő kúpok sorozatának közös szimmetrális sikja nincsen (II. tábla), legczélszerűbb az F gömbfelület meridiánjainak második projekczióit megszerkeszteni és ezeknek, a párhuzamos körrendszerrel való metszéspontjait C-ből az előbb nyert kúpszeletsor második projekcziójára vetiteni. Az igy nyert pontsorozatok megfelelő pontjainak folytonos görbékkel való összeköttetése adja a meridiánoknak megfelelő sphærikus kúpszeletsor második projekczióját, mely negyedrendű görbékből áll. Ezen sorozatban van — az elfajult elemtől eltekintve — egy oly sphærikus kúpszelet, mélynek pontjai a Π_2 sikra nézve szimmetrikusak és ennek második projekcziója a $P_1''Q_1''$ hiperbola. A meridián görbék első projekcziója pontonkinti szerkesztésének mi sem állja útját, de a $P_1'Q_1'$ közös pontpár görbületi sugarai csakis a Π_2-höz szimmetrikus fekvésű görbére nyerhetők. Ezen negyedrendű sikgörbékből álló görbe sorozat bármely elemének orth. szimmentrálisát ($O'S_{60}$, $O'S_{120}$) adja azon sugár, mely az O' pontot, az elemnek megfelelő stereografikus projekczió középpontjával összeköti. *Széprétthy Béla.*

II. tábla.


C''
s₂
M''
K''
F''
K₁''
Q''
9''
7''
M₁''
S₆₀
D''
5''
N''
12''
F₁''
Q₁''
3''
A''
D₁''
10''
L''
N₁''
1''
P''
A₁''
8''
L₁''
G''
11''
G₁''
P₁''
6''
E''
2''
4''
(C)
M₁'
Q₁'
S
N₁'
L₁'
G₁'
E₁'
O'
B₁'
P₁'
A₁'
D₁'
F₁'
K₁'
30
60
-60
60
30
150
0
90
-30
120
S₁₂₀
s₁



AZ IDEÁLELMÉLETHEZ.

1. *Értelmezések.* Legyen Ω valamely n-edfokú algebrai számtest. A számtest fogalmát, valamint a Dedekind-féle moduluselmélet alaptételeit itt ismereteseknek teszem fel. A számoknak valamely $\mathfrak{o}$ rendszere *rendet* alkot, ha:

a) $\mathfrak{o}$ oly modulus, melynek bázisa egyszersmind Ω-nak is bázisa;

b) $\mathfrak{o}$ tartalmazza 1-et;

c) az $\mathfrak{o}$ rendszer két számának szorzata ismét a rendszerbe tartozik.

Valamely $\mathfrak{a}$ rendszer *ideált* alkot, ha:

A) $\mathfrak{o}$ tartalmazza $\mathfrak{a}$ összes számait;

B) $\mathfrak{a}$ modulust alkot;

C) Az $\mathfrak{a}$ valamely számának és egy tetszőleges $\mathfrak{o}$-beli számnak szorzata ismét a rendszerbe tartozik.

Az itt adott fogalom különbözik a Dedekind-féle rendbeli ideáltól. (V. ö. Über die Anzahl der Idealclassen etc. § 4). Mindkettő azonban a közönséges ideál általánositása; a melyre visszatérünk, ha az alapul vett rend a számtest összes egész számaiból áll.

Az *A)* és *C)* feltételeket a modulus-elmélet jelzéseivel így irhatjuk:

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{o} \quad (A), \qquad \mathfrak{o}\mathfrak{a} > \mathfrak{a} \quad (C).$$

2. *Segédtételek.* I. *Ha* $\mathfrak{a}$ *valamely ideál, akkor:*

$$\mathfrak{o}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Ugyanis *C)* és *b)* szerint

$$\mathfrak{o}\mathfrak{a} > \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} > \mathfrak{o}\mathfrak{a}$$

és így

$$\mathfrak{o}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Mivel $\mathfrak{o}$ maga is ideál, lesz:

$$\mathfrak{o}^2 = \mathfrak{o}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{o}^3 = \mathfrak{o}\mathfrak{o}^2 = \mathfrak{o}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}, \ldots$$

és általában, ha t pozitiv egész szám

$$\mathfrak{o}^t = \mathfrak{o}.$$

II. *Ha* $\mathfrak{a}$ *és* $\mathfrak{b}$ *ideálok, akkor szorzatuk is ideál és*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{b}.$$

Először is két modulus szorzata ismét modulus, továbbá

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{o}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{o}\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

tehát $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ideál. De még $\mathfrak{b} > \mathfrak{o}$ és így *C)* szerint

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$$

hasonlóképen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{b}.$$

III. *Ha* $\mathfrak{a}$ *és* $\mathfrak{b}$ *ideálok, akkor az*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$$

egyenletből következik

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{o}.$$

Ugyanis II. szerint

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{o} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{b}$$

azonban

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{o}$$

a miből a tétel következik.

IV. *Ha* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *tetszőleges modulusok, akkor*

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

A modulus-elmélet ismeretes tétele. Az $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ modulus az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ modulusok legnagyobb közös osztója. Specziális esetben, ha $\mathfrak{a}>\mathfrak{b}$, lesz

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}.$$

V. *Ha* $\mathfrak{a}$ *és* $\mathfrak{b}$ *ideálok, akkor legnagyobb közös osztójuk is ideál.* Ugyanis $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ eleget tesz az $A)$, $B)$, $C)$ feltételeknek. Két ideál egymáshoz képest relativ prim, ha legnagyobb közös osztójuk $\mathfrak{o}$. Valamely ideál primideál, ha $\mathfrak{o}$-tól különbözik és összes ideálosztói $\mathfrak{o}$ és önmaga. Mivel

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$$

kimondhatjuk, hogy valamely ideál egy primideállal vagy osztható, vagy pedig relativ prim hozzá képest.

VI. *Minden ideál oly modulus, melynek bazisa Ω-nak is basisa.* Ugyanis minden ideál tartalmaz $C)$ szerint n egymástól lineárisan független számot.

3. Valamely $\mathfrak{o}$ rendben az ideálok sajátságos viselkedést tanusitanak. Nevezetesen Dedekind* kimutatta, hogy ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ ideálok, továbbá $\mathfrak{a}>\mathfrak{b}$, akkor általában *nincs* oly $\mathfrak{c}$ ideál, a melyre nézve

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

A következő czikkben tüzetesebben foglalkozom ezekkel az ideálokkal. A levezetendő tételek közül kettőt itt is ki akarok emelni.

a) *Ha valamely ideál primideálok szorzatára bontható fel, akkor ez lényegében csak egyféleképp történhetik.*

b) *Valamely ideál általában nem bontható fel primideálok szorzatára.*

4. I. *Ha* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *ideálok, akkor az*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

egyenlőtlenségből következik:

$$\mathfrak{b}^n > \mathfrak{c}.$$

Legyenek az ideálok bázisai:

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n], \quad \mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n], \quad \mathfrak{c} = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]$$

---

* Dedekind: Sur la théorie des nombres entiers alg. § 23. Über die Anzahl der Idealclassen etc. § 4.

és legyenek $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_n$ a $\mathfrak{b}$ ideál tetszőleges számai. Ekkor

$$\bar{\beta}_i a_i = (a_1 x_{i1} + \cdots + a_n x_{in})(\gamma_1 y_{i1} + \cdots + \gamma_n \gamma_{in}) \atop (i=1, 2, \ldots, n)$$

vagy rendezve

$$\bar{\beta}_i a_i = a_1 \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_{ik} x_{i1} + \cdots + a_n \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_{ik} x_{in}$$

a hol az x_{ik}, y_{ik} számok raczionális egész számok, tehát

$$\bar{\beta}_i a_i = a_1 \gamma_{i1} + a_2 \gamma_{i2} + \cdots + a_n \gamma_{in} \atop (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

a hol a γ_{ik} számok a $\mathfrak{c}$ ideál számai. Az (1) egyenletrendszerből elimináczió által lesz:

$$\underset{(i, k=1, 2, \ldots, n)}{|\delta_{ik} \bar{\beta}_i - \gamma_{ik}| = 0}, \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \gtreqless k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

A determináns kifejtése oly polynomot ad, a melynek első tagja a $\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \ldots \bar{\beta}_n$ szorzat, míg a többi tagok az 1. alattiak szerint úgy foghatók fel, hogy azok valamely γ_{ik} számnak szorzatai $\mathfrak{o}$-beli számokkal. S így ugyancsak az 1. alattiak szerint a $\mathfrak{c}$ ideál tartalmazza a $\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \ldots \bar{\beta}_n$ szorzatot. Ámde $\mathfrak{b}^n$ ilyen szorzatokból és ezek összegéből áll, tehát

$$\mathfrak{b}^n > \mathfrak{c}.$$

Corollarium.[*] *Az* $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ *egyenletből következik* $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$.

Ugyanis

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

és így

$$\mathfrak{o}^n = \mathfrak{o} > \mathfrak{b}$$

azonban

$$\mathfrak{b} > \mathfrak{o},$$

tehát

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{o}.$$

II. *Ha* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *relativ primideálok és* $\mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{c}$, *akkor* $\mathfrak{a} > \mathfrak{c}$.

A bebizonyításnál a 2. alatti tételeket használjuk fel. Először is

---

[*] HURWITZ: Zur Theorie der alg. Zahlen. Göttinger Nachr. 1895, p. 328.

$$\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{o}$$

és így

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}=\mathfrak{o}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}.$$

Azonban

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}>\mathfrak{c},\quad \mathfrak{a}\mathfrak{c}>\mathfrak{c}$$

és így

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}>\mathfrak{c}.$$

III. *Ha* $\mathfrak{a}$ *tetszőleges ideál és* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots; \mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \dots$ *primideálok, akkor az*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\dots\mathfrak{p}_r=\mathfrak{a}\mathfrak{p}'_1\mathfrak{p}'_2\dots\mathfrak{p}'_s \tag{2}$$

egyenletből következik $r=s$ *és (hacsak a jelölést alkalmasan választottuk):* $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{p}'_i$.

A (2) egyenletből I. szerint

$$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\dots\mathfrak{p}_r)^n=\mathfrak{p}_1^n\mathfrak{p}_2^n\dots\mathfrak{p}_r^n>\mathfrak{p}'_1\mathfrak{p}'_2\dots\mathfrak{p}'_s$$

és így a 2. alattiak szerint

$$\mathfrak{p}_1^n\mathfrak{p}_2^n\dots\mathfrak{p}_r^n>\mathfrak{p}'_1$$

de ebből a 2. alattiak és II. szerint pl.

$$\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}'_1.$$

Mivel most már a (2) egyenletben $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1=\mathfrak{a}\mathfrak{p}'_1$, hasonló módon következtethetünk tovább. Még csak azt kell kimutatni, hogy $r=s$. Tegyük fel, hogy $r<s$, akkor lenne

$$\mathfrak{p}_i=\mathfrak{p}'_i \atop {\scriptstyle (i=1,\,2,\,\dots,\,r)}$$

és az

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\dots\mathfrak{p}_r=(\mathfrak{a}\mathfrak{p}'_1\mathfrak{p}'_2\dots\mathfrak{p}'_r)\mathfrak{p}'_{r+1}\dots\mathfrak{p}'_s$$

egyenletből az I. corollariuma szerint lenne

$$\mathfrak{p}'_{r+1}\dots\mathfrak{p}'_s=\mathfrak{o}$$

vagyis a 2. alattiak szerint

$$\mathfrak{p}'_{r+1}=\dots=\mathfrak{p}'_s=\mathfrak{o}$$

a mi ki van zárva. Így tehát $r\geqq s$, hasonlókép $s\geqq r$, vagyis $r=s$.

Speczialis eset. Ha $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$, akkor a 3*a*. tételt kapjuk.

IV. *Ha az* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *ideálok primideálok szorzatára bonthatók és* $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, *akkor egy és csak egy oly* $\mathfrak{c}$ *ideált találni lehet, a mely kielégíti az* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *egyenletet.*

Az előzőkkel analog módon találjuk, hogy:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_2 \ldots \mathfrak{y}_r \mathfrak{y}_{r+1} \ldots \mathfrak{y}_s$$
$$\mathfrak{b} = \mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_2 \ldots \mathfrak{y}_r$$

és mivel a 2. alattiak szerint

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{y}_{r+1} \mathfrak{y}_{r+2} \ldots y_s$$

ideál, lesz $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$. Ha e tételt a 3. alattiakkal egybevetjük, kapjuk a 3*b*. tételt.

V. *Ha* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ *tetszés szerinti ideálok, akkor az*

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o}$$

egyenletekből következik:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o}.$$

A 2. alatti tételeket használjuk fel. A præmissákból

$$\mathfrak{b}_2(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_2\mathfrak{o} = \mathfrak{b}_2.$$

Adjuk ezen egyenlet mindkét oldalához $\mathfrak{a}$-t, lesz

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o}$$

vagy még tovább

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}_2+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{o}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}_2+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 =$$
$$= \mathfrak{a}(\mathfrak{o}+\mathfrak{b}_2)+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{o}+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o}.$$

VI. *Ha* $\mathfrak{a}$ *tetszőleges ideál és* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r$ *az* $\mathfrak{o}$*-tól különböző relativ primideálok, akkor az*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^{e_1}\mathfrak{a}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{a}_r^{e_r} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^{e'_1}\mathfrak{a}_2^{e'_2} \ldots \mathfrak{a}_r^{e'_r} \tag{3}$$

egyenletből következik:

$$e_i = e'_i$$
$$(i=1, 2, \ldots, r)$$

Tegyük fel, hogy pl.

$$e'_1 = e_1 + t, \quad t > 0$$

volna, akkor

$$\mathfrak{a}_1^{e_1'} = \mathfrak{a}_1^{e_1}\mathfrak{a}_1^{t}$$

és így a (3) egyenletből következnék I. szerint

$$\mathfrak{a}_2^{ne_2}\mathfrak{a}_3^{ne_3}\dots\mathfrak{a}_r^{ne_r} > \mathfrak{a}_1^{t}\mathfrak{a}_2^{e_2'}\dots\mathfrak{a}_r^{e_r'} > \mathfrak{a}_1,$$

tehát a 2. alattiak szerint lenne

$$\mathfrak{a}_2^{ne_2}\mathfrak{a}_3^{ne_3}\dots\mathfrak{a}_r^{ne_r} + \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1.$$

Azonban V. szerint

$$\mathfrak{a}_2^{ne_2}\mathfrak{a}_3^{ne_3}\dots\mathfrak{a}_r^{ne_r} + \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}$$

a miből

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}$$

a mit kizártunk. Tehát $e_i = e_i'$.

VII. *Ha az* $\mathfrak{a}$ *ideál primtényezőkre bontott alakja*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{y}_1^{e_1}\mathfrak{y}_2^{e_2}\dots\mathfrak{y}_r^{e_r}$$

akkor a $\mathfrak{y}_i$ *primideálnak legmagasabb hatványa, melylyel* $\mathfrak{a}$ *osztható, az* e_i*-dik.*

Először is a 2. alattiak szerint

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{y}_i^{d_i}, \quad d_i \leqq e_i.$$

Tegyük fel már most, hogy

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{y}_i^{e_i'}, \quad e_i' = e_i + t, \quad t > 0,$$

akkor V. és II.-ből következnék

$$\mathfrak{y}_i^{e_i} > \mathfrak{y}_i^{e_i+t}$$

azonban

$$\mathfrak{y}_i^{e_i+t} > \mathfrak{y}_i^{e_i}$$

és így lenne

$$\mathfrak{y}_i^{e_i} = \mathfrak{y}_i^{e_i}\mathfrak{y}_i^{t}$$

a miből I. corollariuma szerint

$$\mathfrak{y}_i^{t} = \mathfrak{o},$$

tehát a 2. alattiak szerint

$$\mathfrak{y}_i = \mathfrak{o},$$

a mi helytelen. E tételből is következik, hogy egy ideál többféleképp nem bontható fel primideálok szorzatára. A tétel megtartja érvényességét, ha a $\mathfrak{y}_i$ ideálokról csak azt teszszük fel, hogy $\mathfrak{o}$-tól különböző relativ primideálok.

6. Ha az alapul vett $\mathfrak{o}$ rend összeesik a számtest összes egész számaival, akkor tudjuk, hogy:

a) «*Minden ideál primideálok szorzatára bontható*».

b) «*Egy ideál nem bontható fel többféleképp primideálok szorzatára*».

Az előzők után kimondhatjuk, hogy míg az *a)* tétel függ attól, hogy $\mathfrak{o}$ az összes egész számokat tartalmazza, addig a *b)* tétel attól független; ki akarjuk azonban emelni, hogy itt a primideálnak Dedekind-féle definiczióját használtuk.

Bauer Mihály.

A GÖRBE FELÜLETEK ELMÉLETÉHEZ.

«A térbeli görbék elméletéhez» czím alatt közöltem e lapok hasábjain annak a tételnek az analitikai bebizonyítását, mely szerint valamely térbeli görbe simuló síkjaitól beburkolt kifejthető felületnek visszatérő éle maga a megadott térbeli görbe.* A bebizonyítás alapvonásait — mint az jelezve is volt — Rados Gusztáv tanár úr a műegyetemen annak idején tartott mathematikai gyakorlatokban közölte. Minthogy bizonyos tekintetben analog tétellel a felületek elméletében is találkozunk, legyen szabad annak analitikai bebizonyítását az előbbi tétel bebizonyításában követett eljárás szerint az alábbiakban közölnöm.

A görbe felületekre vonatkozó tétel a következő:

Valamely görbe felület érintősíkjaitól beburkolt görbe felület maga a megadott görbe felület.

A

$$\Phi(u,v) \equiv A(u,v)\,\xi + B(u,v)\,\eta + C(u,v)\,\zeta + D(u,v) = 0$$

egyenlet, melyben A, B és C az u, v parameterek függvényei és ξ, η, ζ valamely pont három koordinátáját képviseli, az u és v minden értékénél egy-egy síkot határoz meg. E síkok összesége görbe felületet burkol be, a mely a következő egyenletekből nyerhető:

$$\begin{aligned}\Phi\,(u,v) &\equiv A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0\\ \Phi_1(u,v) &\equiv A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 = 0\\ \Phi_2(u,v) &\equiv A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 = 0.\end{aligned}$$

hol 1 index-szel az u szerint vett, 2 indexszel a v szerint vett parcziális differencziálhányadost jelöljük. A később előforduló

---

* Math. és Phys. lapok IV. évfolyam 193. old.

második differencziálhányadosokat a megfelelő két index-szel jelöljük.

Ebből az egyenletrendszerből a ξ, η, ζ koordinátákat mint két parameternek, u-nak és v-nek függvényeit kapjuk, azaz

$$\xi = \varphi(u,v), \quad \eta = \varphi'(u,v), \quad \zeta = \varphi'(u,v)$$

s ezek a görbe felület pontjainak koordinátái.

Ennek előrebocsátása után áttérhetünk a kimondott tétel bebizonyítására.

Legyenek a felület parameteres egyenletrendszere:

$$x = f(u,v), \quad y = f'(u,v), \quad z = f''(u,v). \qquad (1)$$

E felület (x, y, z) pontjában a görbület mértéke Gauss [*] szerint:

$$G = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^3 + C^2)^2},$$

hol

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & y_{11} & z_{11} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \quad D' = \begin{vmatrix} x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \quad D'' = \begin{vmatrix} x_{22} & y_{22} & z_{22} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix};$$

és

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Látni való, hogy görbe felület esetében, midőn ugyanis a görbület nem lehet azonosan zérus, a

$$\Delta = \begin{vmatrix} D & D' \\ D' & D'' \end{vmatrix}$$

determinâns sem lehet azonosan zérus.

A felület valamely pontjához tartozó érintősík egyenlete:

$$\Phi(u,v) \equiv A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)\,0,^{**}$$

---

[*] GAUSS-SZIJÁRTÓ: A felületek általános elmélete. 22. oldal.

[**] JOACHIMSTHAL: Anwendungen der Diff.- und Integralrechnung stb. 76. §. 147. l.

hol A, B, C-nek a görbület kifejezésében előforduló értékei vannak. Ezektől az érintősikoktól beburkolt görbe felület pontjainak koordinátáit pedig a

$$\Phi = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0 \tag{2}$$

egyenletrendszer ξ, η, ζ szerinti megoldása szolgáltatja.

Képezzük tehát a Φ_1 és Φ_2 kifejezéseket:

$$\Phi_1 = A_1(\xi - x) + B_1(\eta - y) + C_1(\zeta - z) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1),$$

s minthogy

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

azért

$$\Phi_1 \equiv A_1(\xi - x) + B_1(\eta - y) + C_1(\zeta - z)$$

és hasonlóképen

$$\Phi_2 \equiv A_2(\xi - x) + B_2(\eta - y) + C_2(\zeta - z).$$

A (2) alatti egyenletrendszer tehát a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} A\,(\xi - x) + B\,(\eta - y) + C\,(\zeta - z) &= 0 \\ A_1(\xi - x) + B_1(\eta - y) + C_1(\zeta - z) &= 0 \\ A_2(\xi - x) + B_2(\eta - y) + C_3(\zeta - z) &= 0 \end{aligned} \tag{2a}$$

hol

$$A_1 = \begin{vmatrix} y_{11} & z_{11} \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{12} & z_{12} \end{vmatrix}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} y_{12} & z_{12} \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{22} & z_{22} \end{vmatrix};$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} z_{11} & x_{11} \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_{12} & x_{12} \end{vmatrix}; \quad B_2 = \begin{vmatrix} z_{12} & x_{12} \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_{22} & x_{22} \end{vmatrix};$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} x_{11} & y_{11} \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_{12} & y_{12} \end{vmatrix}; \quad C_2 = \begin{vmatrix} x_{12} & y_{12} \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_{22} & y_{22} \end{vmatrix}.$$

Ha már most sikerül kimutatni, hogy a (2a) alatti $(\xi - x)$, $(\eta - y)$, $(\zeta - z)$ ismeretlenekre nézve homogén lineár egyenletrendszer

$$R = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

determinánsa nem azonosan zérus, úgy annak egyetlen megoldása

$$\xi - x = 0, \quad \eta - y = 0, \quad \zeta - z = 0,$$

vagyis az érintő síkoktól beburkolt görbe felület pontjai az adott görbe felület pontjaival azonosak.

De a legnagyobb könnyűséggel kimutathatjuk, hogy

$$R = \Delta.^{*}$$

Ugyanis

$$R = \frac{1}{xA+yB+zC}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{x}A+yB+zC}\begin{vmatrix} xA\ +yB\ +zC & x_1A\ +y_1B\ +z_1C & x_2A\ +y_2B\ +z_2C \\ xA_1+yB_1+zC_1 & x_1A_1+y_1B_1+z_1C_1 & x_2A_1+y_2B_1+z_2C_1 \\ xA_2+yB_2+zC_2 & x_1A_2+y_1B_2+z_1C_2 & x_2A_2+y_2B_2+z_2C_2 \end{vmatrix}.$$

Minthogy az első sor második és harmadik eleme azonosan zérus, az első sor $(xA+yB+zC)$-vel osztható és így:

$$R = \begin{vmatrix} x_1A_1+y_1B_1+z_1C_1 & x_2A_1+y_2B_1+z_2C_1 \\ x_1A_2+y_1B_2+z_1C_2 & x_2A_2+y_2B_2+z_2C_2 \end{vmatrix}.$$

Már most

$$x_1A_1+y_1B_1+z_1C_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} \end{vmatrix} = -D + 0,$$

$$x_2A_1+y_2B_1+z_2C_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} \end{vmatrix} = 0 - D',$$

$$x_2A_2+y_1B_2+z_1C_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} \end{vmatrix} = -D' + 0,$$

$$x_2A_2+y_2B_2+z_2C_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} \end{vmatrix} = 0 - D'',$$

---

* Baltzer: Theorie und Anwendung der Determinanten 12. §. 142. old.

minek következtében

$$R = \begin{vmatrix} -D & -D' \\ -D' & -D'' \end{vmatrix} = \Delta.$$

És minthogy görbe felületeknél Δ nem lehet azonosan zérus a $(2a)$ alatti egyenletrendszer egyetlen megoldása a

$$\xi = x = f(u, v)\,; \quad \eta = y = f'(u, v)\,; \quad \zeta = z f''(u, v)$$

és így csakugyan, a mint bebizonyitandó volt, az érintősikoktól beburkolt görbe felület azonos az adott görbe felülettel.

Privorszky Alajos.

AZ ELEKTROMOS HULLÁMOK TERJEDÉSE ÉS ELNYELETÉSE.

Ha az elektromos hullámok terjedéséről és elnyeletéséről akarunk szólani, oly kérdések tárulnak elénk, melyekre a határozott feleletet csakis a kisérletezéssel adhatjuk meg.

Ily kérdések: Vajjon azokon a testeken, melyeknek nagy az áramvezető képességük, úgy halad-e a hullám, mint a szigetelőkön; vajjon az áramot és az elektromos hullámokat vezető testek átbocsátják-e magukon az elektromos hullámokat, mint a szigetelők, vagy pedig elnyelik; és elnyelő képességük függ-e, más tényezőkön kívül, a hullámok hosszától is.

Általában azt tartják, minél nagyobb valamely test áramvezető képessége, annál nagyobb hullámelnyelő képessége is; így a fémeken, elektrolytiken, mint jó áramvezetőkön, nem halad át az elektromos hullám, a szigetelő anyagokon igen. A tiszta víznek azonban — bár áramvezető képessége igen kicsiny: $7 . 9.10^{-15} [cm^{-1} sec]$, — hullámelnyelő képessége igen nagy; a víz és kívüle még más folyadék is, nagyobb mértékben nyeli el a kisebb, mint a hosszabb elektromos hullámokat. Azt is állítják, hogy két, egymástól nem nagy távolságban fekvő pont közt, az áramvezető testek felületén haladó hullámok intenzivebbek, mint a szigetelőkön pl. a levegőn, petroleumon keresztülmenők.

A testek ilynemű tulajdonságainak a kimutatására, szóval a felvetett kérdéseknek kisérlettel való eldöntésére szerkesztettem egy érzékeny, demonstráló készüléket, melylyel ezenkívül még a Hertz-féle kisérletet is be lehet mutatni.

A hullámadó egy Righi-féle oszczillátor. A hullámfelfogó készülék 10 cm. átmérőjű, s 3 cm. magasságú horgany-henger; e henger alapjába 3 ólomkábel megy, e kábelek közül a két szélső érzékeny koherert tart a hengerben; a harmadik kábel pedig a koherer végeire, vagy közepére kapcsolható. A koherert tartó két kábel rézmagva a fémmel beburkolt tükrös galvanométerbe, innen pedig egy fémmel födött — Dániell — elem áramkörébe megy. A harmadik kábel, hogy rézmagva a jeladótól jövő elektromos hullámokat a kohererbe vezesse, a koherer egyik végével áll összeköttetésben; maga a koherert tartó horganyhenger állandóan egy reáillő — 3 cm. magasságú — horgany-födővel van befödve. Hogy a hullám bármely halmazállapotú testen, illetve felületén keresztül menve, a harmadik, a középső kábel belső vezetőjét érje, e középső kábelre 30 cm. hosszú és 0·8 cm. széles üvegcsövet tettem a következő berendezéssel. Az üvegcsőbe 4 cm.-nyi magasságban platina-sodronynyal ellátott platina-lemezt forrasztattam, a platina-sodronyt összeforrasztottam a kábel belső magvával, e kábelt aztán gummidugóval a platina-lemez alá dugtam; e részét az üvegcsőnek pedig vastag staniollemezzel vettem szorosan körül. E staniollemez a platinalemezzel majdnem egy magasságú, legfeljebb $^1/_2$ mm.-rel magasabb. Ugyanez a staniollemez az üvegcső alját és e kábel külső borítékát oly jól fedi, hogy az elektromos hullám ily berendezés mellett a különben is fémmel fedett koherer ellenállását nem képes megváltoztatni, még akkor sem, ha a hullámokat az üvegcső, vagy a koherer tőszomszédságában keltjük. De, ha e csőbe drótot, elektrolytet, vagy tiszta vizet teszünk, a hullám hatására a fémmel födött koherer ellenállása megkisebbedik, a galvanométer tűje kitér. A fémnél, elektrolytnél, a koherer a nagy távolságból jövő hullámok iránt is érzékeny, míg a tiszta víznél e távolság ugyanazon körülmények közt csak néhány méter lehet.

E készülékkel kimutatható:

1. A áramvezető testek: fémek, elektrolytek az elektromos hullámokat is elvezetik a kohererhez, mert ha e testeket a kábel útján a kohererrel érintkező üvegcsőbe tesszük, a fémfödővel zárt koherer ellenállása megkisebbedik, a galvanométer tűje kitér; míg e testek nélkül a hullámkeltéskor a tű meg se mozdul.

Ugyanezt a tulajdonságot mutatja a tiszta viz is, de a kitérés ugyanazon távolság mellett már kisebb; a kitérést általában nagyobbíthatjuk a betett fém hosszával és a folyadékoszlop magasságának a nagyobbításával.

2. A rossz vezetők, szigetelők, pl. a száraz levegő, az üveg, a petroleum, a tiszta alkohol, az æther, a benzol, az anilin, a szénkéneg, a parafinolaj, a glycerin az üvegcsőben nem vezetik az elektromos hullámokat a kábelen keresztül a kohererhez, mert a tű nem tér ki a hullámkeltéskor; valami kis kitérés csak akkor mutatkozik, ha a kisütő a szigetelőtől 1—2 cm.-nyi távolságban van.

3. Ha ez üvegcsövet egy másik üvegcsövel vesszük körül — a kettő közt a távolság 0·6 cm. — és a belső csőbe is, meg a külső csőbe is jó vezető folyadékot öntünk, elektrolytet, a tű a hullámra nem tér ki; ezt észleljük a tiszta vízzel is. Nem tér ki a tű a hullámra akkor sem, ha a belső csőbe fémdrótot, külső felületére pedig staniollemezt teszünk. De ha a külső csőbe elszigetelő folyadékot, a belsőbe pedig áramvezető testet teszünk, a tű a hullámra kitér. Azok a testek tehát, melyek az áramot és az elektromos hullámokat vezetik, önmagukon nem bocsátják át a hullámokat; a szigetelők nem vezetnek, de átbocsátják a hullámokat.

A kitérést fokozhatjuk azzal, ha a kohererrel érintkező belső üvegcső külső felületére ráillő staniol-hengert teszünk s a platinalemez és e fémboríték közt 1 mm.-nyi szabad helyet hagyunk.

*

A fémreszelék a vezetés és elnyelés tekintetében is eltér a jó vezetőtestek tulajdonságaitól. Ha ugyanis a kohererrel érintkező üvegcsőbe aluminium, vagy nickel reszeléket teszünk, a koherer ellenállása a hullámkeltéskor megkisebbedik, a tű kitér; de ha a külső üvegcsőbe is — mely a belső üvegcsőtől 2 cm.-nyi távolságban áll — szintén e fémek reszelékeit tesszük, a tű a hullám hatására még erősebben tér ki; a fémreszelék tehát vezeti is, át is bocsátja a hullámokat. Minél erősebben szorítjuk össze a reszelékeket, a kitérés annál nagyobb. Megjegyzem, hogy ugyanazon körülmények közt, a nickelreszeléknél a kitérés mindig nagyobb, mint az aluminiumnál.

A különböző hosszúságú hullámokra vonatkozó kisérletezésem — a tiszta vizet kivéve — folyamatban van.

A koherer ellenállásváltozása a folyékony levegőben.

Ugyanazon készülékkel, melylyel a különböző anyagok elnyelőképességét ki lehet mutatni, a folyékony levegőre is tettem kisérletet.

A folyékony levegőt a belső csőbe öntöttük; az elektromos hullámok nem idéztek elő ellenállás-kisebbedést, a tű nem tért ki; tehát a levegő folyékony állapotban is megtartja szigetelő természetét.

Ugyanekkor az elektromos hullámok hatása alatt az ellenállásában már megkisebbedett koherert óvatosan a folyékony levegőbe tettük, hogy meggyőződjem arról az igazságról, mit Aschkinass kétségbe vont, hogy a nagy hideg, ép úgy, mint a nagy meleg, vagy mechanikai ütés visszaadja a kohererneк eredeti nagy ellenállását.

Alig, hogy a koherer a folyékony levegővel érintkezett, már is visszatért a galvanométer tűje, a koherer ellenállása megnagyobbodott. E kisérletet aczél-, nickel, réz- és ezüst reszelékkel többször ismételtem, a kisérlet mindig ugyanazt a jelenséget mutatta.

Ezután a még ellenállásában meg nem változott koherert tettem a folyékony levegőbe és csak néhány percz múlva keltettem az elektromos hullámokat, a tű azonnal kitért, a koherer ellenállása csak úgy megkisebbedett, mint a szoba hőmérsékleténél; de önmagától, jobban mondva rázás nélkül most már nem tért vissza, mert olyan volt hőmérséklete, mint a folyékony levegőé; egy kis rázás azonban elegendő volt, hogy a tű visszatérjen. Állandó hőmérséklet mellett tehát a koherer egyformán viselkedik, legyen az a hőmérséklet bármilyen nagy, vagy bármilyen alacsony.

*

E helyütt is hálás köszönetemet nyilvánítom ngys. Schuller Alajos műegyetemi tanár úrnak szivességeért és jó tanácsaiért, ő is tette lehetővé, hogy folyékony levegővel kisérletezhettem.

Károly Irén.

A FÖLDALKALISZULFIDOK FOSZFORESZCZENCZIÁJA.

(Második közlemény.)

De ezzel megmagyarázhatjuk azt is, hogy miért nem ad a *Mn* foszforeszczencziát a *SrS*-ban és *BaS*-ban? Nézzük előbb, hogy mennyivel tolódik el egy sáv maximuma a vörös felé, ha a legritkább *CaS* helyett a sűrűbb *SrS*-t veszszük. A VIII. és IX. tab. első két sorának összehasonlításából kiderül, hogy kb. 30.10^{-6} mm.-rel. E szerint a $SrS+Mn$ maximumának a 611.10^{-6} mm. (a $CaS+Mn$ sávja) $+$ 30.10^{-6} mm. helyen, azaz a 641.10^{-6} mm. helyen kellene feküdnie, holott a *SrS*-oknál a sáv rendesen csak 617.10^{-6} mm. és 604.10^{-6} mm.-nél kezdődik. Épen úgy kiadódik, hogy a $BaS+Mn$ sáv maximumának kb. a 741.10^{-6} mm. helyen kellene feküdnie, mely már a vörös és infravörös határán van, a meddig a foszforeszczencziaszínképek sohasem terjednek.

De a fenti törvényszerűség még arról is ad felvilágosítást, hogy miért foszforeszkálnak épen a szulfidok a legerősebben és nem a szelenidok és telluridok, holott a szelén és tellur ugyanabba a csoportba tartozik mint a kén? Hogy némely szelenidok — habár sokkal gyengébb mértékben — szintén foszforeszkálnak, az kitünik Becquerel[1] és újabban Arnold W.[2] kisérleteiből. Az utóbbinak csak igen gyengén világitó szelenidokat és telluridokat sikerült előállítania, melyek főkép csak kathodoluminiszczencziát mutattak.

Hasonlítsuk össze a kén, szelen és tellur molekulasúlyát:

kén m. s = 63·96, szelén m. s = 158·00, tellur m. s = 250·00,

---

[1] La lumière stb. I. k. 242. l.-on egy stroncziumszelenidről van szó.

[2] Wied. Án. 61. 313. 1897.

a kénnek a sűrűsége a legkisebb lévén, a szulfidok sűrűsége is kisebb mint a szelenidoké és telluridoké és így sokkal jobb oldószerek, mint az utóbbiak.

A sávok összetorlódása a stroncziumszulfidban és még erősebben a bariumszulfidban, valószínűleg szintén abban találja magyarázatát, hogy ugyanazon fémek sávjainak maximumai a sűrűbb oldószerben *közelebb feküsznek egymáshoz.*

Az oldott anyag befolyása a foszforeszczencziára.

A következőkben összehasonlítjuk több fém foszforeszczencziáját egy és ugyanabban az oldószerben, annak kiderítésére, hogy létezik-e valamilyen összefüggés a foszforeszczencziafény törékenysége és az illető fém molekulasulya között:

XI. táblázat.

Oldó-szer	*Bi* (m. s. = 415·00)		*Cu* (m. s. = 126·36)		*Mn* (m. s. = 109·60)	
	foszf. színe	sáv max.	foszf. színe	sáv max.	foszf. színe	sáv max.
CaS	kékesibolya	$\lambda=447.10^{-6}$ mm	kékeszöld	$\lambda=511.10^{-6}$ mm	sárga	$\lambda=611.10^{-6}$ mm
SrS	kékeszöld	$\lambda=487.10^{-6}$ mm	sárgászöld	$\lambda=530.10^{-6}$ mm	—	—
BaS	sárgászöld	$\lambda=590.10^{-6}$ mm	sárgásvörös	$\lambda=647.10^{-6}$ mm	—	—

Az itt felsorolt és összehasonlított szulfidoknál a foszforeszczencziafény annál törékenyebb (és a sávok maximuma annál távolabb fekszik a színkép vörös végétől), minél nagyobb az illető fém molekulasulya. Ez az összefüggés azonban alig tekinthető törvényszerűségnek, mert a gyengébb — és még bővebben meg nem vizsgált — foszforok egynémelyike ellentmond ennek az összefüggésnek.

Így pl. a *SrS*+*Sb* csak sárga fényt ad, jóllehet molekulasúlya nagyobb a rézénél, mely utóbbi sárgászöld fényt sugároz ki.

Itt is természetesen nagyobbszámú kisérlet végzendő, melyekből majd kitűnik, valjon ez az összefüggés talán mint szabály megállhat, mely alól bizonyos kivételek léteznek, vagy hogy véletlenül csak arra a néhány megvizsgált szulfidra érvényes.

Minden ilyen vagy hasonló összefüggés nem volna érvényes azokra a fémekre, melyek egyáltalában nem okoznak foszforeszczencziát és még a meglévő (más fémtől eredő) foszforeszczencziát megrontják.

Biztosabban csak akkor lehet majd következtetni az oldott anyag befolyására, ha tudjuk, hogy milyen alakban végzik legkisebb részecskéi a fénymozgást.[1]

Ha sikerül majd összefüggést megállapitani az oldott anyag molekulasulya és az általa kisugárzott fény törékenysége között, akkor azután segítségül véve az oldószer befolyását kifejező összefüggést, *össze lehet majd válogatni elméleti uton alkalmas oldószereket és fémeket, melyek erősen foszforeszkálnak, előre megállapítván a foszforeszczenczia szinét.*

A foszforeszczenczia tartama.

Becquerel megvizsgálta keverékfoszforjait utánvilágításuk tartamára nézve, a nélkül hogy sikerült volna valami törvényszerűséget megállapitani. A foszforeszkálás intenzitása és tartama között nem mutatkozott összefüggés.[2]

A következő kisérletek tiszta foszforokkal végeztettek.

Ha *több* foszfor utánvilágitása tartamát és intenzitását hasonlitjuk össze, akkor tényleg nem mutatkozik összefüggés a foszforeszczenczia tartama és intenzitása között. Másképp áll a dolog egy és ugyanannál a foszfornál. Mivel a foszforeszczenczia tartama a fényintenzitás csökkenésének tartama, következik, hogy a kettő között valamilyen — habár nem is egyszerű — összefüggésnek kell lennie. Az intenzitás befolyása különösen hosszabb tartamú foszforeszczencziáknál érezhető, ha azokat különböző erősséggel ger-

---

[1] Wiedemann E. és Schmidt G. C. szerint mint szulfid. Wied. An. 56. 203. Jegyzet.

[2] La lumière stb. I. k. 244. o.

jesztjük. Ugyanaz áll az olyan foszforokra is, melyek kémiai összetétele egyforma, de erősségük a készítés folytán különböző.

Mivel rendszerint a tiszta foszforok fényemissziója annál intenzívebb, minél magasabb hőfoknál égettettek, következik, hogy az utánvilágitás tartama is annál hosszabb, minél magasabb hőfoknál (természetesen bizonyos határok közt) történt az égetés. Ugyanazt tapasztalták WIEDEMANN és SCHMIDT G. C. a szulfátok és karbonátok foszforeszczencziájára nézve.[1]

BECQUEREL a foszforok fényemissziójának lefolyására nézve a következő, empirikusan talált képletet adja, mely közelitőleg képet nyujt az intenzitás és tartam összefüggéséről:

$$i^m(c+t)=c,$$

hol i az intenzitás, t a tartam, c pedig állandó.

Ebből a képletből is látni, hogy mind az, a mi az intenzitást befolyásolja, egyszersmind a tartamot is változtatja.[2] Ilyen befolyásokról lesz még szó a hő hatásának tárgyalásánál.

Ha több tiszta foszfor utánvilágitása tartamát hasonlitjuk össze, akkor azt tapasztaljuk, hogy az intenzitás igen alárendelt szerepet játszik és azon esetben, ha mindegyik foszfor jól (ha különböző intenzitással is) világit, akkor egyáltalában nem is jő tekintetbe.

A következőkben táblázatba van hozva a foszforeszczenczia szine, tartama és az illető fém molekulasulya (a második rovatban lévő számok a $SrS+Bi$-ra vonatkoztatott relativ intenzitásokat jelentik, úgy hogy az utána következő 2-vel, az azután következő 3-mal s. i. t. van jelölve.)

---

[1] WIED. An. 56. 214. 1895.

[2] Az utánvilágitás tartama mindenesetre összefügg a megvilágitás tartamával is (bizonyos határon alul, mert néhány másodperczen túl nem látszik befolyással lenni), de ez szintén kapcsolatos az intenzitással.

1. Kálcziumszulfidok:

XII. táblázat.

Foszfor	int.	fém m. s.	foszfor. színe	foszfor. tartama
$CaS+Bi$	2	415·00	kékesibolya	6 hét
$CaS+Cu$	4	126·36	kékeszöld	40 óra
$CaS+Mn$	3	109·60	sárga	1 ó. 20 p.

2. Stroncziumszulfidok:

XIII. táblázat.

Foszfor	int.	fém m. s.	foszfor. színe	foszfor. tartama
$SrS+Bi$	1	415·00	kékeszöld	5 hét
$SrS+Cu$	3	126·36	zöld	36 óra
$SrS+Mn$	—	109·60	—	—

3. Báriumszulfidok:

XIV. táblázat.

Foszfor	int.	fém m. s.	foszfor. színe	foszfor. tartama
$BaS+Bi$	4	415·00	sárgászöld	14 óra
$BaS+Cu$	3	126·36	parázsvörös	13 óra
$BaS+Mn$	—	109·60	—	—

Ezekből látható, hogy a megvizsgált foszforoknál:

I. *az intenzitásnak nincs befolyása az utánvilágítás tartamára,*[1]

---

[1] t. i. több foszfor utánvilágitástartamának összehasonlításánál.

II. *az utánvilágítás tartama függ az illető feloldott fémtől és pedig annál nagyobb, minél nagyobb a molekulasúlya,*

III. *az utánvilágítás tartama függ az oldószer sűrűségétől és pedig annál hosszabb, minél ritkább az oldószer.*

Ezen tételeknek általános érvényességére vonatkozólag természetesen nagyobbszámú kisérletek végzendők.

A foszforeszczenczia színe és tartama között mutatkozó szabályszerűség csak azon esetben volna összefüggésnek mondható, ha a foszforeszczencziafény törékenysége és az illető fém molekulasúlya között olyatén összefüggés léteznе, mint a milyent a megvizsgált foszforoknak legnagyobb része mutat, ha az alul már kivételek nem konstatáltattak volna.

A III. megegyezésben van azzal, a mit a báriumszulfidokról fentebb mondottunk, hogy t. i. az összes szulfidok között a leggyengébben világítanak. Úgy látszik, hogy a báriumszulfid nagy sűrűségénél fogva a benne véghez menő fénymozgást a legerősebben akadályozza.

A II. és III-ból következik, hogy a $SrS+Mn$-nak rövidebb ideig kellene világitania, mint a $CaS+Mn$-nak (mely maga is csak rövid ideig világít) és a $BaS+Mn$-nak még rövidebb ideig mint a $SrS+Mn$-nak. Ha az oldószer befolyását tekintjük az utánvilágítás tartamára, valószínű, hogy a $SrS+Mn$-nak csak igen kis tartamu, a $BaS+Mn$-nak pedig egyátalában nem felel meg foszforeszczenczia.[1]

A foszforok különböző utánvilágitástartamával néhány érdekes színjelenség függ össze, melyet a Becquerel-féle — és általában a keverék — foszforok mutatnak. A keverékfoszforok legnagyobb része utánvilágitásuk közben más színt mutat, mint közvetlenül a megvilágitás után; sőt vannak, melyek utánvilágitásuk közben is megváltoztatják szinüket. Ez a jelenség a fentiek szerint igen egyszerűen magyarázható. A keverékfoszforok több egyszerű foszfor keverékei, melyekben minden egyes foszfor különböző utánvilági-

---

[1] Ez megegyezésben van azzal, a mit a $SrS+Mn$-ra és $BaS+Mn$-ra fentebb találtunk.

tástartammal bír. A mint az egyik vagy másik megszűnik világítani és így színe a keverékszínből kiesik, megváltozik a foszforeszczenczia színe. Lommel pl. leír négy kálcziumszulfidot: egy Balmain-félét (sötétkék), 2 világosabb és egy zöldeskék foszfort, melyek mind a megvilágítás alatt és közvetlenül utána elemezve, a foszforeszczenczia-színképben egy zöld és egy kék sávot mutattak, melyek elseje azonban csakhamar eltünt és a foszforeszczenczia színe sötétkékké vált.[1] Ezek a foszforok mind $CaS+Cu+Bi$ foszforok voltak, melyekben — mint azt a tiszta foszforokkal végzett kisérletek is mutatják — a $CaS+Cu$ fénye sokkal rövidebb tartamú, mint a $CaS+Bi$-é. Az ilyen színváltozást igen rövidtartamú — és foszforoszkopban észlelt — foszforeszczencziák is mutatnak. Becquerel pl. felemlíti, hogy egy általa megvizsgált gyémánt és némely fluorpátok a foszforoszkop különböző gyors forgatásánál különböző színű fényt sugároztak ki.[2] A foszforeszczencziaszínkép ennek megfelelően tényleg több sávot tartalmazott. Becquerel ezt a jelenséget úgy magyarázza, hogy a testek közönséges hőmérsékletnél is többféle fényt képesek egyszerre kisugározni.

A megvizsgált tiszta foszforok egyike sem mutatott ilyen színváltozást.

Árnyalatbeli színváltozást azonban a tiszta foszforok is mutattak, de bizonyos törvényszerűség szerint (a keverékfoszforoknál minden törvényszerűség nélkül történik a színváltozás) és ennek — mint a későbbi spektroszkopiai vizsgálat kiderítette — igen egyszerű oka van.

Ez az árnyalatbeli színváltozás a következő volt:

---

[1] Wied. An. 30. 473. 1887.

[2] La lumière stb. I. k. 349. A megvizsgált gyémánt a foszforoszkop lassú forgásánál sárgás, gyorsabb forgásánál pedig kék fényt sugárzott ki.

Foszfor	foszf. színe közvetlenül a megvilágítás után	színváltozás az utánvilágítás közben	a sáv maximuma fekszik a
$CaS+Bi$	ibolyáskék	sötétkék, világoskék, fehéres*	világoskék részben
$CaS+Cu$	kékeszöld	sötétzöld, világoszöld, fehéres	világoszöld részben
$CaS+Mn$	szalmasárga	narancssárga, fehéres	narancssárga részben
$SrS+Bi$	kékeszöld	világoszöld, fehéres	világoszöld részben
$SrS+Cu$	sárgászöld	zöldessárga, fehéres	zöldessárga részben
$SrS+Mn$	—	—	—
$BaS+Bi$	zöldessárga	sárga, fehéres	sárga részben
$BaS+Cu$	parázsvörös	sárgásvörös, fehéres	sárgásvörös részben
$BaS+Mn$	—	—	—

Az utolsó előttit kivéve, az összes foszforok fénye az utánvilágítás alatt kevésbbé törékenyre változott.

A foszforeszczencziafény elemzése az utánvilágítás tartama alatt csak erősebben világító foszforoknál lehetséges. E czélra igen előnyös a foszforokat világító ernyő alakjában használni, melyet teljesen elsötétített szobában egy spektrálkészülék hasadékjához közel felállítunk. A foszforeszczenczia gerjesztése magnesiumfénynyel történik, melynek megszünte után a megfigyelő — ki a fénytől kellőképen védve már a spektroszkop előtt ül — figyelemmel kisérheti azokat a változásokat a foszforeszczencziaszínképben, melyek a fényemisszió lefolyása közben végbe mennek.

A sávoly a színképben mindjárt a megvilágítás után (vagy alatt, mint azt már Lommel is tapasztalta,[2] a leghosszabb és azután fokozatosan és mindkét oldalról megrövidül, míg végre a legvilágosabb helynek megfelelő vékony sávra összehúzódik. *Az utolsó szín tehát, melyet a foszfor mutat, a sáv maximumának megfelelő szín,* a mint ez a megvizsgált foszforoknál látható. A sáv

---

[1] Bármilyen szinű is legyen a foszforeszczenczia fénye, ha gyenge, fehéresnek (szürkésnek) látszik, minek fiziologiai magyarázata van.

[2] Wied. An. 20. 857. 1883.

megrövidülése nem történik egyformán gyorsan mindkét oldalról. A maximumnál törékenyebb sugarak előbb tünnek el mint a kevésbbé törékenyek.

A megfigyelésnek ez a módja különben igen alkalmas valamely világítósáv *legerősebben világító helyének meghatározására*, feltéve, hogy a törékenyebb sugarak gyorsabb eltünésével a maximum helye nem változik meg észrevehetően.

Ez az eljárás némelykor keverékfoszforok felismerésére igen jól használható. Példaképen a következő esetet irom le. Egy *Cu*-val készitett *CaS* mindjárt a megvilágitás után zöld fényt sugárzott ki, mely azután mindinkább kékké vált. Ez a szinváltozás arra mutatott, hogy a szulfid keverékfoszfor. Milyen fém juthatott belé?

Foszforoszkopban megvizsgálva és fényét elemezve, meglehetősen hosszú és majdnem egyforma intenziv sávot adott $\lambda=550.10^{-6}$ mm.-től $\lambda=422.10^{-6}$ mm.-ig. Ebből azt lehetett következtetni, hogy a sávok részint fedik egymást. Utánvilágitás közben — a fenti eljárás szerint — elemezve a fényt, rövid idő mulva minimum keletkezett a sáv közepén a $\lambda=457.10^{-6}$ mm. helyen; két sáv volt látható, melyek elseje csakhamar eltünt és visszamaradt egy kék-ibolya sáv. A két sáv maximuma a $\lambda=511.10^{-6}$ mm., illetőleg $\lambda=447.10^{-6}$ mm. helyen feküdt. Az első maximum a réztől, a másik a bizmuthtól ered. A mint azután kiderült, a második sáv tényleg a bizmuthtól származott, melyet a szulfid az égetésnél használt porczellántégelytől vett át, melyben valamikor *Bi* foszfor égettetett. Jóllehet a tégely gondosan tisztittatott, mégis visszamaradtak benne a *Bi* nyomai, melyek elégségesek voltak arra, hogy a *Cu* foszforeszczencziáját háttérbe szoritsák.

A szinváltozást illetőleg a következőket lehetett megállapitani:

I. *A tiszta foszforok rendes körülmények között nem mutatnak szinváltozást* (eltekintve az egészen más természetű árnyalatbeli szinváltozástól és attól, melyet igen erős gerjesztésnél, pl. kathodsugarakkal, mutatnak a tiszta foszforok és melynek az az oka, hogy még a leggondosabban tisztitott szulfid is tartalmazza több fém nyomait — talán kémiailag ki sem mutatható mennyiségekben — melyeknek foszforeszczencziája ekkor előtünik).

II. *Az összes tiszta foszforok árnyalatbeli színváltozást mutatnak, mely a fényemisszió természetéből következik* (csillapitott fénymozgás.

III. *A megvilágítás közben kisugárzott* (*fluoreszczenczia-*) *fény színképe sokkal erősebb és hosszabb, mint a foszforeszczenczia-fényé.*

Az utóbbi tételt illetőleg megjegyzendő, hogy WIEDEMANN E. és SCHMIDT G. C.[1] LOMMEL észleléseire támaszkodva, épen az ellenkezőjét találták.

LOMMEL t. i., mint fentebb láttuk, azt tapasztalta, hogy a foszforeszkáló szulfidok fluoreszczencziaszinképe rendszerint más összetételű mint a foszforeszczencziaszínkép, a mennyiben a megvilágitás alatt több sávot tartalmaz mint azután. Ennek magyarázata a fentiekből önként folyik.

A kétféle luminiszczenczia színképei közötti valódi különbséget csak egy sáv esetében (tiszta foszfor) lehet megállapitani és ez mindössze abban áll, hogy a fluoreszczencziaszínkép erősebb és hosszabb. (Hogy hosszabb, mint később látni fogjuk, szintén az erősséggel függ össze.)

WIEDEMANN E. és SCHMIDT G. C. LOMMEL észlelései nyomán kimondják, hogy a fiuoreszczenczia és foszforeszczenczia rokon, de nem azonos tünemények.

A hőnek befolyása a foszforeszczenciára.

A hőnek kétféle hatása van a foszforeszczenciára. Az egyik hatás állandó és az égetési hőfoktól függ, a másik mulékony és előáll, ha a szulfidok foszforeszczencziáját különböző hőmérsékletnél gerjesztjük.

---

[1] WIED. An. 56. 249. 1895.

BECQUEREL szerint mindkét esetben megváltozik a foszforeszczenczia intenzitása és szine.[1]

Tekintsük előbb az égetés hőfokának hatását a foszforeszczenczia szinére. Egy BECQUEREL készitette SrS 500° C-nál égetve sárga, magasabb hőfoknál égetve ibolyaszinű fényt sugárzott ki. A tiszta foszforok fényének szine független az égetés hőfokától, melynek csak az intenzitásra van hatása. Hogy miben áll az égetés hatása tulajdonképen, még nem igen tudni. A LENARD-KLATT-féle foszforok kb. 1000° C-nál égettetnek a HEMPEL-féle kályhában és igen tetemes intenzitást mutatnak (pl. a $SrS+Bi$, melynek fényénél a sötétben egy ideig olvasni lehet). De a tiszta szulfidokból készitett foszforok intenzitása minden hozzátétel nélkül égetve, igen gyenge.

Ha azonban bizonyos sókat[2] teszünk hozzájuk és ezekkel együtt égetjük, akkor ezáltal az intenzitás nagyban növeltetik.

Az erősen világitó foszforokat már külsejük után lehet felismerni, mert ezeknél midőn széjjel nyomjuk, rendesen apróbb darabocskákra törik az erősen összeégetett anyag, míg a rosszul vagy gyengén világitó foszforok poralakúak. A jól világitó foszfor részecskéi azonkívül a megolvadt só által mázszerűleg körül vannak véve, a mi gyenge és a foszforeszczenczíára jellemző szinezetet ad nekik. Ez a szinezet mindenesetre az illető fémoldattól származik.

A hozzátételek lehetővé teszik, hogy a szulfidot magas hőfoknál égessük, mert azok a sók megolvadnak, áthatják a szulfid egész tömegét és bevonják azzal a mázzal, mely megakadályozza, hogy az erős égetésnél a kénnek egyrésze mint kéndioxid eltávozzék. Igy könnyen magyarázható, hogy ezek a hozzátételek nem gyakorolnak hatást a foszforeszczenczia szinére, hanem csak az intenzitásra. *Ha tehát a szulfidhoz a megfelelő hozzátételt adjuk, akkor erősen égethetjük a nélkül, hogy kémiai szerkezete meg-*

---

[1] La lumière stb. I. k. 385. o.

[2] A használt sók szintelenek voltak és az égetési hőfoknál megolvadtak.

változnék,[1] de épen az erős égetés folytán megváltozik a *fizikai szerkezete,* mely olyanná válik, mely a fénymozgásra nézve rendkívül kedvező.

Tehát a szulfid fizikai szerkezetének szintén van befolyása a foszforeszczencziára, mint azt már Becquerel is felismerte, de ez a befolyás nem lényeges, mert a foszforeszczenczia szinét nem változtatja meg, mint Becquerel hitte, hanem csak az intenzitást befolyásolja.[2]

Hogy a fizikai strukturának hatása van az intenzitásra, mutatja az a körülmény, hogy a porrá dörzsölt szulfid sokkal gyengébben világít, mint apró darabocskákban.

A hőnek hatása az égetésnél épen annak a bizonyos fizikai strukturának létesítésében áll.

Térjünk most át a foszforeszczencziára különböző hőmérsékleteknél.

Becquerel szerint a foszforok által kisugárzott fény szine és intenzitása a hőmérséklet szerint változó. Ennek illusztrálására szolgáljon a következő példa. Egy (Becquerel készítette) SrS, mely közönséges hőmérsékletnél ibolyaszinű fényt sugárzott, — 20° C-nál sötét ibolya-, + 40°-nál világoskék-, + 70°-nál kékeszöld-, 100°-nál sárgászöld-, 200°-nál sárgás fényt adott, és intenzitása a hőfok növekedésével folyton fogyott. Becquerel azonban maga megjegyzi, hogy a foszforeszczenczia szinének ez a változása csak véletlenség, mert a foszforeszczenczia fénynek elemzése változása közben kiderítette, hogy a hőfok növekedésével a foszforeszczencziaszinkép különböző részei erősbülnek, mások meg gyengülnek és nem történik vándorlás vagy eltolódás benne, mint az esetleg várható volna.

E szerint látható, hogy a megvizsgált foszfor keverékfoszfor volt (a mi a szinkép hosszából és tagoltságából következik). Egy

---

[1] ha már szulfiddá vált.

[2] A Wiedemann és Schmidt G. C. által megvizsgált szulfátok, karbonátok stb. luminisczenczia-szine az égetés hőfoka szerint különböző volt és ezért felveszik, hogy az égetésnél a testek kémiai szerkezete is megváltozik. Ez az eset a szulfidoknál nem forog fenn.

CaS épen a fordított sorrendben változtatta szinét, más foszforok pedig egészen szabálytalanúl. Becquerel ebben a jelenségben felfogásának megerősítését látta, hogy t. i. a foszforeszkálás egyedül a testek fizikai szerkezetétől, a szulfid (idegen alkatrészek nélkül) molekulai állapotától függ.[1]

Az eddigiekből következtetve, várható, hogy a tiszta foszforok nem fognak ilyen szinváltozást mutatni a hőmérséklet változtatásával.

A következő kisérleteknél a foszforok olyan állapotba hozattak, hogy a sötétben nem világitottak, a mi bizonyos fokig való hevitéssel érhető el.

Azután elsötétitett szobában különböző hőmérsékleteknek tétettek ki. A hőmérséklet —10° C-tól 0° C-ig æthylæther elpárolgása, 0° C-tól 100° C-ig forró vízbe való mártás, és 100° C-tól kb. 300° C-ig izzitott fémlemezre való helyezés által[2] állíttatott elő. A foszforeszczenczia gerjesztése magnesium fénynyel történt.

Minthogy a foszforok mind egyformán viselkedtek, a hőmérséklet befolyásának bemutatására csak egy példát közlünk. A megvizsgált foszfor az erősen világító *CaS+Bi* volt.

Hőfok C°	foszforeszczenczia színe	foszfor. intenzitása
— 10°	ibolyáskék	igen erős
0°	ibolyáskék	igen erős
+ 30°	kék, ibolyás árnyalat nélkül	erős
+ 60°	kék, ibolyás árnyalat nélkül	erős
+100°	kék, egy árnyalattal világosabb	gyengébb
+150°	kék, még valamivel világosabb	gyengébb
+180°	kék, még valamivel világosabb	gyenge
+200°	kék, még valamivel világosabb	gyenge
+250°	kék, még valamivel világosabb	igen gyenge
+300°	kék, még valamivel világosabb	nem világít

---

[1] La lumière stb. I. k. 385. o.

[2] Az izzítás megelőzőleg történt, az izzításra használt gázláng fényének kikerülése végett.

Az intenzitás tehát folyton csökkent, a foszforeszczenczia szine pedig csak árnyalatbeli változásokat mutat és pedig ugyanazokat mint az utánvilágitás közben. Úgy látszik tehát, hogy ezek az árnyalatbeli változások az intenzitás változásával szoros összefüggésben állanak. Erre még visszatérünk a foszforeszczenczia és a gerjesztő fény összefüggésének tanulmányozásánál.

Pictet R. és Altschul M.[1] megvizsgálták a szulfidok foszforeszczenczjáját igen alacsony hőmérsékletnél és azt tapasztalták, hogy a testek — megelőző megvilágitás után — kb. —140° C-nál megszünnek világitani, de a mint megint felmelegednek, visszanyerik világitó képességüket. Ebből azt következtetik, hogy a fénymozgás a szulfidokban molekuláris mozgás.

Az utánvilágitás tartama növekedő hőfokkal és csökkenő intenzitással mind rövidebb lesz. Wiedemann E. és Schmidt G. C.-nek alacsony hőfoknál végzett kisérletei mutatják, hogy az utánvilágitás tartama alacsony hőfoknál hosszabb mint magasabb hőfoknál és sok esetben hosszabb mint közönséges hőfoknál. Ez különben megegyezésben áll a magas hőmérsékletnél végzett kisérletekkel.[2]

A hőnek befolyására vonatkozólag a következők állapittattak meg (a tiszta foszforoknál):

I. *Az égetés hőfokával — bizonyos határig — a foszforok intenzitása is nő.*

II. *Az égetés befolyása egy a fénymozgásra kedvező fizikai struktura létesitésében áll.*

III. *Az égetés hőfoka nincs befolyással a foszforeszczenczia szinére.*

IV. *A foszforeszczenczia intenzitása a különböző hőmérsékleteknél különböző, és pedig növekvő hőfokkal gyengül.* A tiszta szulfidok körülbelül 300° C körül megszünnek világitani.

V. *A tiszta foszforok a növekvő hőmérsékletnél ugyanazt az árnyalatbeli szinváltozást mutatják, mint utánvilágitásuk köz-*

---

[1] Zeitschr. f. phys. Chemie. 15. k.

[2] Wied. An. 56. 216—223-ig.

ben. De olyan értelemben nem változtatják meg szinüket, mint azt Becquerel *figyelte meg.*

VI. *Az utánvilágítás tartama először annál hosszabb, minél magasabb hőfoknál égettetett a szulfid és másodszor annál rövidebb, minél magasabb hőmérsékletnél történik a fénykisugárzás.*

Klatt Román.

A Mathematikai és Physikai Társulat nyolczadik rendes közgyűlése.

A márczius végén szétküldött közgyűlési meghívó szokatlan számban egyesítette f. é. április 30-án d. u. 5 órakor az egyetemi physikai intézetben tagtársainkat, a kik közül sok vidéki tagot is üdvözölhettünk. A közgyűlés idejét és helyét a f. é. február 21-iki választmányi ülés jelölte volt ki. A körözött aláírási ív szerint jelen voltak :

Anderkó Aurél, Arany Dániel, Balog Mór, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Beke Manó, Bodola Lajos, Bozóky Endre, Bruck Ferencz, Cholnoky Jenő, Csemez József, Csillag Vilmos, Csopey László, Dietz Lajos, Egan Lujza, br. Eötvös Loránd, Erdődy Imre, Feichtinger Győző, Fejér Lipót, Fekete Jenő, Fényes Dezső (Arad), Fischer Albert, Fraunhoffer Lajos, Fröhlich Izidor, Glücklich Vilma, Gruber Nándor, Heller Ágost, Horti Henrik, Juckel Gyula, Jurányi Henrik, Kados Aladár, Kalecsinszky Sándor, Károly Irén (Nagyvárad), Képessy Imre, Kiss Károly, Klatt Román, Klupathy Jenő, Kopp Lajos, Koschowitz Gyula, Kőnig Gyula, Kovács István (Lőcse), Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz, Lengyel István, Lóczy Lajos, Mikola Sándor, Molnár Etelka (Makó), Müller József, Nesnera Aladár (Arad), Oberle Károly, Pekár Dezső, Petry Gyula (Nagyvárad), Pilcz Ottó, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Rátz László, Riesz Frigyes, Rucsinszky Lajos, Söpkéz Sándor, Steiner Lajos, Strausz Ármin, Szabó József (Vácz), Szabó Péter, Szekeres Kálmán, Széky István (Gyöngyös), Szirtes Ignácz, Szőke Béla, Szuppán Vilmos, Tangl Károly, Tordai Imre, Vámos Dezső, Wagner Alajos, Winter József, Wittmann Ferencz, összesen 74. Vendégekül résztvettek Büky Aurél, Breznyik János, Fischer Albert, Galló Paula, Greck Lajos, özv. Kovács Árpádné, Szkotniczky Géza, összesen 7.

A közgyűlés szokásos napirendje volt :

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárvizsgáló bizottság jelentése.
4. Költségelőirányzat 1901-re.

5. Választmányi tagok választása.

6. Indítványok.

Letárgyalása alig fél órát vett igénybe és — mint várható volt — teljesen simán folyt le.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

A közgyűlést Kőnig Gyula alelnök nyitotta meg. Rövid, de eszmékben dús beszédjében felemlíti, hogy nincs magyar Társulat, melynek tagjai úgy társadalmi állás, mint törekvés szerint annyira közel állanának egymáshoz, mint a Mathematikai és Physikai Társulat tagjai. E ritka homogeneitás teszi a Társulat erkölcsi súlyát, de érvényre jutását anyagi eszközök is mozdítják elő. Kifejezi tehát azt az óhajt, hogy a magyar mathematikusok és physikusok hozzájárulásukkal minél hatalmasabb tényezővé tegyék Társulatunkat.

A mult évi közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítésére Nesnera Aladár és Fényes Dezső tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés, Kövesligethy Radótól.

Tisztelt közgyűlés!

Szűk családi körben félreértés nincs, gyanúsíttatlanul még jubileumról is szólhatunk. Tizedik éve, hogy Társulatunk fennáll, és még egy lustrummal tovább nyúlik vissza ama magánjellegű Társaság keletkezése, mely br. Eötvös Loránd, Hunyady Jenő, Kőnig Gyula, Scholtz Ágoston és Szily Kálmán buzgalmát dicséri.

Társulati jubileumnak kellemetlen kisérője van: ez az elmaradhatatlan statisztika. Nagy előny-e, hogy erről nem kell szólanom? Életünk kiemelkedőbb eseményei — és örömmel mondhatjuk — voltak olyanok, mindenkinek élénk emlékében vannak még; a statisztikába való adatokat pedig egyszerűen megkapjuk, ha bármely titkári jelentés — a mainak is — számait tízzel szorozzuk. Nevezetes sajátsága ez Társulatunknak, a mely — mintha csak a társulati életbe is át akarná vinni a physikai törvényeket — buzgó pénztárnokunk nem nagy örömére már életének első pár évében staczionaer állapotú lett.

Az elmult társulati évben 9 rendes ülésen 5 előadótól 8 mathematikai, 7 előadótól 9 physikai tárgyú előadást hallottunk. Az ülések látogatottságával teljesen meg lehetünk elégedve, de hogy az érdeklődést fokozni is lehet, azt mutatta fényesen vezetőink egy-egy előadása.

Folyóiratunk IX. kötete 26 ívnyi terjedelemben rendes időben megjelent. Apróbb közleményektől eltekintve 20 szerző benne 12 mathematikai és 10 physikai, ezúttal kissé terjedelmesebb tárgyú értekezést ad. Ha igen tisztelt pénztárnokunk nem emlegetné folytonosan Lapunk 24 ívnyi minimum terjedelmét, azt i. t. dolgozótársaink szorgalma alapján messze túlhaladhatnók.

A Társulat VII. tanulóversenyét a mult évi október hó 13-ikán rendezte. Lefolyásáról beszámol a mult évi novemberi füzet, úgy, hogy e helyt annak ismétlésére szorítkozhatom, hogy Juvántz Irén és Smodics Kázmér egy-egy második br. Eötvös díjat nyert összesen 58 jelentkező közül, a kik mindössze 30 dolgozatot adtak be. Úgy számarány, mint eredmény szerint a verseny kissé gyengébb volt, mint a megelőző, de tragikussá csak azon szomorú véletlen tette, hogy Elnök úr a díjak kiosztásakor a VI. verseny első jutalmazottjának ép akkor történt elhunytát volt kénytelen bejelenteni.

A kis számban tartott választmányi ülések tárgyai a tanulóverseny előkészítése és eredményének elbirálása, közgyűlésünk előkészítése és új tagok választása volt. A februáriusi választmányi ülés foglalkozott Fényes Dezső tagtársunk beadványával is, a mely a mai közgyűlésnek Aradon való megtartását indítványozta. A választmány már több ízben kimondotta volt, hogy elvileg nem ellenzi a vidéki közgyűlést, de ezúttal félve, hogy a mit a közgyűlésen nyujtani tudnánk, semmi arányban nem áll azon szives vendégszeretet tényével, a melyeket Aradon tapasztalnánk, egyhangulag Budapest mellett szavazott.

A Társulat, a miként már a mult évi titkári jelentés mondotta, nem vett részt a párisi világkiállításon, de egyes tagjai szép számban mint kiállítók és mint a kongresszusokon résztvevők szerepeltek. Nem volt nehéz megjósolni, hogy ebből a Társulatra is fog háramolni dicsőség. Hogy a számos kitüntetés közül csak egyet említsek, melynek mindnyájunk a legjobban örvendtünk, és melyről úgy érezzük mind, hogy ez mi ránk is vet egy sugarat, az a műszer és módszer, mely szinte a Társulat szemeláttára nőtt nagyra és alakult ki, elnyerte a grand prix-t. Ezen vizsgálati módszer iránt, mint legkompetensebb forrásból hallottam, azt a reményt táplálják, hogy nemsokára oda jut, a hová való, a nemzetközi fokmérés munkálatai közé. Az első előadás, mely e Társulatban elhangzott, sőt mondhatjuk, a mely Társulatunkat megindította a Föld nehézségére vonatkozott, az utolsó évfolyamot is a párisi physikus kongresszus elé ugyan-e tárgyról terjesztett jelentés rekeszti be. Ugyancsak a kiállításon szerepeltek az itt megtekintésre szánt ügyes készülékek is.

Társulatunknak jelenleg 409 tagja van, kettővel több, mint a mult évben. Ezek között 15 pártoló és örökítő és 5 hölgytag. Az előfizetők száma némi emelkedést mutat. a tavalyi 58 helyett most 63 járatja folyóiratunkat.

Anyagi jólétről a tagsági kötelezettségek leglelkiismeretesebb teljesítése mellett sem lehet még szó, és így most is a Magyar Tudományos Akadémia nagylelkűen adományozott 2000 koronányi segélye életünk alapja. Bizonyára kifejezhetem az egész igen tisztelt közgyűlés nevében a Társulat háláját a M. T. Akadémia III. osztályának és Math. és Természettudományi Bizottságának támogatásáért és hozzáfűzöm ama kérést, hogy e hathatós támogatásban a jövőben is kegyeskedjék részesíteni Társulatunkat.

Reménykedve fordultunk a mult évi junius hóban emlékirattal a vallás- és közoktatásügyi miniszter úr Ő Nagyméltóságához, de kérvényünk — remélhetőleg kedvező elintézéséről még nem adhatok hírt. Egy buzgó tagtársunk bár szerényebb, de biztos és anyagi helyzetünk mellett nagyon is figyelemre méltó forrás felé mutatott, a mely az ipari szakiskolákban fakad, és remélem, hogy a jövő közgyűlés pénztárnoki jelentésében ennek már nyoma lesz.

A halál az elmult évben is szedett áldozatokat; Boros Sándor kolozsvári, Inczédy Dénes pécsi főgymnasiumi igazgató és Potomcsik Ignácz debreczeni tanár tagtársaink elhunytát siratjuk. Bár a jelen évbe esik ugyan, hallgatással nem mellőzhetem Schmidt Ferencz műépítész elhunytát, a kinek neve a Bolyai névvel annyira összeforrt.

Belépés és elhalálozás szinte törvényszerűségig emelkedő szabályossággal tart egyensúlyt.

Igen tisztelt munkatársaink részéről a titkárság annyi szeretetreméltó támogatásban részesült, hogy őszinte hálaadással rekeszthetem be jelentésemet és azon — a mult tapasztalatai szerint bizonyára most is szives meghallgatásra találó kéréssel, — hogy e jóindulatot számunkra megtartani a jövőben is kegyeskedjenek.

Budapest, 1901 április 30.

3—4. Péztárnok jelentése.

A 254. és 255. oldalon kitüntetett jelentés meghallgatása és az egyes tételek egyenként való mérlegelése után a közgyűlés megadja a pénztárnoknak a felmentvényt, és költségelőirányzatát 1901-re egyhangúlag elfogadja.

BEVÉTEL

1900. évi zárszámadás.

KIADÁS

	Előirányzat		Eredmény			Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fil.	Kor.	fil.		Kor.	fil.	Kor.	fil.
1899. évi zárszámadási maradvány	1609	94	1609	94	Nyomdai költségek	5900	10	3814	37
Folyó évi tagdijak	2639	—	2020	—	Irói tiszteletdijak	2820	—	2148	90
Hátralékos tagdijak	2054	—	1428	—	Expeditió	400	—	249	34
M. Tud. Akademia segélye	2000	—	2000	—	Irodai költségek	400	—	542	14
Hirdetési dijak	320	—	160	—	Középisk. math. tanulóverseny költs.	160	—	110	—
Kamatok	557	16	603	46	Vegyes kiadások			8	—
Előfizetési dijak	500	—	783	—	Pénztári maradvány *a)* készpénzben			58	54
Vegyes s átmeneti bevételek			73	72	*b)* tak. p. betétben			1746	83
	9680	10	8678	12		9680	10	8678	12

VAGYON

Vagyon-mérleg.

TEHER

Készpénz	30	34	58	34	Nyomdai tartozások	3379	22	2656	88
Forgó tőke :					Ki nem fizetett irói tiszteletdijak	420	—	88	—
Leszámitoló és pénzváltó bankban	148	80	148	80	Jövő évi számlára átviendő összeg	40	72		
M. kir. postatakarékpénztárban	1430	80	1598	03	Tiszta vagyon	12470	—	12230	49
Alaptőke :					A tiszta vagyon 239.51 koronával apadt				
Első hazai takarékp.	2370	—	2370	—					
1 drb koronajáradék-kötvény	100	—	100	—					
Majthényi Ottó-féle alap	10000	—	10000	—					
Tagdijhátralékok	2054	—	600	—					
Föl nem vett hirdet. dij	160	—	100	—					
	16293	94	14975	37		16293	94	14975	37

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk. Budapesten, 1901 ápril 14.

A választmány megbizásából : *Rados Gusztáv* s. k. titkár. A közgyülés megbizásából :

Gruber Nándor s. k. *Kürschák József* s. k. *Bogyó Samu* s. k. *Balog Mór* s. k.

1901. évi költségelőirányzat.

BEVÉTEL

	kor.	fill.	kor.	fill.
1900. évi zárszámadási maradvány			1805	37
Folyó évi tagdijak			2000	—
Hátralékos tagdijakból			600	—
M. Tud. Akadémia segélye			2000	—
Hirdetési dijak			100	—
Kamatok			550	—
Előfizetési dijak			500	—
Hiány			1701	89
			9257	26

KIADÁS

	kor.	fill.	kor.	fill.
Nyomdai tartozások	2656	88		
Folyó évi nyomdai költségek	3140	38	5797	26
Irói tiszteletdijak:				
a) a mult évre	88	—		
b) a folyó évre	2212	—	2400	—
Expeditió			400	—
Irodai költségek			500	—
Középisk. math. tanulóverseny			160	—
			9257	26

5. Választmányi tagok választása.

Alapszabályaink 20. §-ának rendelkezése értelmében a választmányból kilépett Fröhlich Izidor, Klupathy Jenő, Mauritz Rezső és Tötössy Béla. A közgyűlés felfüggesztetvén megejtettek a választások, melyek eredményeül Károly Irén mint a Bozóky Endre, Petry Gyula és Széky István tagtársakból állott szavatszedő bizottság elnöke a következőket jelenthette: 51 beadott szavazat közül esett Fröhlich Izidorra 51, Klupathy Jenőre 51, Mauritz Rezsőre 48, Tötössy Bélára 51 szavazat. Ezenkívül Rátz László 2, Horti Henrik 1 szavazatot kapott. A lelépett választmányi tagok tehát egyhangúlag, illetve nagy szótöbbséggel újból választattak.

6. Indítványok.

Indítvány egyáltalán nem adatott be, a napirend ezen pontja tehát elesett.

*

Ezzel a közgyűlés hivatalos része befejeződött, s miután alelnök a pénztár vizsgálására a közgyűlés részéről ismét Balog Mór és Bogyó Samu tagtárs urakat kérte fel, a gyűlést berekeszti.

*

Báró Eötvös Loránt elnök úr az este második részét nem tölthetvén a Társulatban, «Megfigyelések a Balaton jegén» czímű előadását a közgyűlés hivatalos része előtt tartotta meg. Vonzó módon ecsetelte a balatoni nehézségmérő téli expediczió létrejöttét, élményeit és teendőit és a mérések lefolyását, a mikről számos vetített kép útján elég tiszta fogalmat szerzett a közgyűlés. Majd beszámolt a megejtett mérések eredményéről. Röviden összefoglalva mondhatni, hogy sikerült a Balaton *NE* medenczéjében teljesen megállapítani a nehézségi niveaufelület alakját (lapultságot) és lehető volt kimutatni, hogy a Balaton hosztengelye mentén nagy mélységben hegygerincz emelkedik, melynek magassága, ha lehetőleg sűrű közetből — bazaltból — állana, mintegy 100 méterig emelkedik. Kevésbé sűrű kőzet esetén e magasság a 200 métert is elérheti.

Majd Fényes Dezső mutatta be rövid magyarázattal a Dumesnil-féle számoló léczet. «A tavalyi párisi kiállítás «Enseignement sécondaire» osztályának juryje, a melyben magyar részről Erődi Béla főigazgató is részt vett, kiállítási éremmel tüntette ki Camille Dumesnil párisi tanárnak egy kényelmes és elegendő pontosságot nyujtó számoló léczét, a melynek egy példányát van szerencsém itt bemutatni.

A lécz tulajdonképen nem egyéb, mint négyjegyű grafikus logaritmus táblázat, miért is mindazon czélokra és ugyanazon pontossággal használható, mint az általánosan használtatni szokott könyvalakú négyjegyű táblázatok az 1-től 1000-ig terjedő egész számok körében.

Azáltal, hogy egyenes vonal két oldalára egyrészről az egész számokat, másrészről a nekik megfelelő logaritmusokat visszük fel, rendkívül nagy könnyüséggel olvashatjuk le az összetartozó értékeket. Először a logaritmusok értékeit visszük fel, arányos távolságokban, az egyenes felső oldalára (az itt bemutatott léczen a 4-jegyű mantissa minden oly számjegyének, mely az egyesek helyén áll, 0.2-szer annyi milliméter felel meg, vagyis az egyenes összes hossza 2 méter), s ezután minden logaritmus-érték alá a megfelelő «numerust» jelző osztályvonalat tesszük.

A két méteres egyenest azután nyolcz részre törjük és az így nyert 25 centiméteres szalagokat egy vonalzónak két felére ragasztjuk, mi által a táblázatnak igen kényelmesen kezelhető formát adtunk

Szellemdús jelzés teszi lehetővé azt, hogy az egyes numerusokhoz tartozó mantissák negyedik számjegye is pontosan legyen leolvasható. Dumesnil ugyanis a numerusokat jelző osztályvonalak alsó végére bizonyos jeleket alkalmaz, melyek a mantissa harmadik számjegyét ábrázoló köz félértékét jelző vonalkának baloldalán 0, 1, 2, 3, 4; jobboldalán 5, 6, 7, 8, 9 értéket jeleznek. E jelek:

0, 1, 2, 3, 4,
5, 6, 7, 8, 9.

A jelzés ily módja csak háromjegyű numerusok mantissáira pontos; 4 és több jegyű numerusok mantissáinak negyedik és esetleg még 5. számjegye is, a Partes Proportionales segédtáblácska mintájára rövid, esetleg fejből is végezhető arányszámítás által válik pontosan meghatározhatóvá.

Megemlítendőnek tartom, hogy az itt bemutatott számolóléczné! a legkisebb osztályzatközök mindig jóval nagyobbak, mint csakis becslés útján hasonló pontosságot nyujtó Tavernier-féle, 35 centiméteres léczné!, míg az egyenlő hosszú, azaz 25 cméteres Tavernier-lécz adatainál a Dumesnil-féle 10-szerte pontosabb adatokat szolgáltat. A számolás biztonsága és gyorsasága nézetem szerint a Dumesnil-léczné! emelhető volna még az által, hogy a léczre csuszó indexet alkalmazunk, mely a keresett számérték fixálását és szükség esetén akárhányszori könnyű újra megtalálását tenné lehetővé.

Ár tekintetében úgy áll a dolog, hogy

a 25 cméteres Tavernier-lécz ára 14 korona,
a 35 « « « 24 «
a 25 « Dumesnil-lécz « 2 « (2 francs).

Azt hiszem, hogy az alőadottaknál fogva a Dumesnil-lécz használatát az igen tisztelt tagtárs urak, korlátolt pontosságú számításoknál előnyösnek fogják találni, s épen ezért voltam bátor annak bemutatásával b. figyelmüket pár pillanatra igénybe venni.» *Fényes Dezső.*

Ezután Wittmann Ferencz tartotta káprázatos előadását az éneklő Voltaívről és a telephonographról. A Voltaív «éneke» a nagy terem minden sarkában tisztán volt érthető és a telephonograph szinte azt a benyomást tette a közgyűlésre, hogy az elektromágnes sarkai közt sikló aczéllemez és ennek beszédokozta futólagos harántmágnesezése az agy és az agyba vésődött benyomások képe, melyeket itt és ott is akaratunk szerint bármikor visszaidézhetünk.

Végül még Balog Mór mutatta be az érdeklődőknek néhány geometriai szemléltető készülékét, a mely a párisi világkiállításon is szerepelt.

Utalvány czím: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque számlájára.

Kimutatás

az 1901 márczius és április havában befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1894. évre: Bulyovszky Sándor ... ... 6 kor.

1895. évre: Göllner Károly, Makay István. Összesen 2 à 6 k. ... ... 12 kor.

1896. évre: Frosch Károly 6 k., Kados Aladár 10 k., Strobach Géza 6 k. ... ... 22 kor.

1897. évre: Felix János 6 k., Fogarassi Béla 6 k., Frosch Károly 6 k., Hassák Vidor 6 k., Kados Aladár 10 k., Klatt Virgil 6 k., Steiner Simon 6 k., Széchy Ákos 6 k., Szerényi Géza 10 k. Összesen 7 à 6 k., 2 à 10 k. ... ... 62 kor.

1898. évre: Bartha Zsigmond 6 k., Dohnányi Frigyes 6 k., Fodor László 6 k., Frosch Károly 6 k., Kados Aladár 10 k., Schlesinger Lajos 6 k. Összesen 5 à 6 k., 1 à 10 k. ... ... 40 kor.

1899. évre: Angheben Albin 6 k., Dózsa Jakab 6 k., Fodor László 6 k., Kados Aladár 10 k., Konkoly Thege Miklós dr. 10 k., Pfeiffer Péter dr. 6 k., Schlesinger Lajos dr. 6 k., Simon Ferencz 6 k., Söpkéz Sándor 10 k. Összesen 6 à 6 k., 3 à 10 k. 66 kor.

1900. évre: Arany Dániel 10 k., Bein Károly 10 k., Benkó Imre 6 k., Bielek Miksa 10 k., Bogyó Samu 10 k., Bozóky Endre dr. 10 k., Danch Ferencz 6 k., Darvai Mór 10 k., Groó Vilmos 6 k., Kármán Ferencz 8 k., Kados Aladár 10 k., Korbuly Emil 6 k., Kuthy József dr. 6 k., Lakits Ferencz dr. 10 k., Medvigy János 6 k., Molnár Evelin dr. 6 k., Morotz Kálmán 6 k., Osztrogonácz János 6 k., Pap Lajos 6 k., Perjessy László 6 k., Pizetti Rókus 6 k., Ratkovszky Pál 6 kr., Schlesinger Lajos dr. 6 k., Szarvassy Margit 10 k., Szépréthy Béla 6 k., Szijártó Miklós 10 k. Összesen 10 à 10 k., 15 à 6 k., 1 à 8 k. ... ... 198 kor.

1901. évre: Antony Rezső 10 k., Arany Dániel 10 k., Bauer Mihály 10 k., Bielek Miksa 10 k., Bozóky Endre dr. 10 k., Beke Manó dr. 10 k., Bodola László 6 k., Bretz Berta 6 k., Bukovszky János 6 k., Butorka Száva 6 k., Csopey László 10 k., Czakó Adolf 10 k., Czigler Győző 10 k., Demeter István 6 k., Dirner Gusztáv 10 k., Dombay Narczisz 6 k., Eltscher Simon 6 k., Farbaky István dr. 10 k., Félegyházy Antal 6 k., Füzy Rezső Vilmos 10 k., Glücklich Vilma 10 k., Heller Richárd 6 k., Heuer Ede 10 k., Högyes Endre dr. 10 k., Janell József 6 k., Jónás Ödön 10 k., Kármán Ferencz 10 k., Király Henrik 6 k., Király László 6 k., Kherndl Antal 10 k., Kirchknopf András 6 k., Kiss Gábor 6 k., Klúg Nándor 10 k., Klatt Román 6 k., Kmetty János 6 k., Kovács Ferencz 6 k., Kovács István 6 k., Kőnig Gyula 10 k., Krenkó Géza 6 k., Lendvay Hugó 6 k., Lengyel Béla 10 k., Lengyel Endre 6 k., Lengyel Imre 6 k., Lengyel István 10 k., Lipthay Sándor 10 k., Mátray Rudolf 6 k., Mihálovich Alajos 6 k., Mikola Sándor 10 k., Müller József 10 k., Nagy Dezső 10 k., Neumann Jenő 6 k., Neustadt Lipót 10 k., Nikolits Lázár 10 k., Novothny Endre 6 k., Pecz Samú 10 k., Pékár Dezső 10 k., Plósz Pál 10 k., Rados Gusztáv 10 k., Ratkovszky Pál 6 k., Rejtő Sándor 10 k., Prokesch Ignácz 6 k., Récsey Lajos Farkas 6 k., Riegler Sándor 6 k., Sárkány Lajos dr. 6 k., Schimanek Emil 10 k., Schlesinger Lajos dr. 6 k., Schmidt Sándor 10 k., Schuller Alajos 10 k., Stanics Fulgent 6 k., Steindl Imre 10 k., Straub L. Gyula 6 k., Straub Sándor 10 k., Strausz Ármin 10 k., Suták József dr. 10 k., Szabó Ádám 6 k., Szabó József (Vácz) 6 k., Szalay István 6 k., Szemethy Béla 10 k., Szenessy Mihály 10 k., Szokol Pál 6 k., Szuppán Vilmos 10 k., Thán Károly 10 k., Tötössy Béla 10 k., Wágner Alajos dr. 10 k., Waldapfel János dr. 10 k., Wartha Vincze dr. 10 k., Willim Ferencz 6 k., Závodszky Adolf 10 k., Zemplén Győző 10 k., Zipernovszky Károly 10 k. Összesen 51 à 10 k., 39 à 6 k. ... ... 744 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1901. évre: az aradi áll. főgymn., főreálisk., tanítóképző, a beregszászi fg., a brassói áll. főreálisk., a bpesti II. ker. áll. főreálisk., a jászberényi k. kath. fg., a m.-szigeti ref. lyceum (6 k.), a nyitrai fels. leányisk., a szepesiglói áll. tanítónőképző. Összesen 9 à 10 k., 1 à 6 k. ... ... 96 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból	406 kor.
f. évi díjakból	744 kor.
Előfizetési díjakból	96 kor.

Budapest, 1901 május 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

A LINEÁR DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK ELMÉLETÉNEK EGY ÁLTALÁNOS TÉTELÉRŐL.

A következőkben legyen szabad egy tételt közölnöm (a II. fejezet I. és II. theoremája), a melynek a CRELLE-féle Journal-ban * közzétett dolgozatom folytatásában hasznát akarom venni. A külön publikálás talán azzal igazolható, hogy egyrészről maga a tétel a lineár differencziálegyenletek FUCHS-féle osztályának jelentését, a raczionális együtthatókkal biró lineár differencziálegyenletek általános elméletének keretében új világításban mutatja, míg másfelől a bebizonyitás, a melyet az említett tételről adok, példát szolgáltat a RIEMANN-féle problemának alkalmazására a lineár differencziálegyenletek általános elméletében. Az a körülmény, hogy bebizonyitásom a RIEMANN-féle probléma megoldhatóságára támaszkodik, magával hozza, hogy ama megszorító feltételek, a melyek a RIEMANN-féle probléma tőlem adott megoldásában szükségesek, a szóban álló tétel általános érvényességét látszólagosan korlátozzák. Csak elsőrendű differencziálegyenletek esetében, a hol a tétel közvetetlenül világos, szabadul fel e megszorító feltételektől.

Az első fejezetben egyes általános segédvizsgálatokat állítottam össze. A jelen dolgozatnak rövid kivonata a párisi tudományos akadémia «Comptes Rendus»-iben ** jelent meg.

---

* CRELLE-Journal, 123. köt. 138—173. l.

** Tome 132, 27. l. jan. 7.

I.*

Az

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_0y=0, \qquad (A)$$

$$\frac{d^nz}{dx^n}+q_{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\cdots+q_0z=0, \qquad (B)$$

homogen lineár differencziálegyenletek, melyeknek $p_0, \ldots, p_{n-1}$, $q_0 \ldots q_{n-1}$ együtthatóiról azt teszszük fel, hogy az x komplex változónak mindenütt egyértékű függvényei, olyanok legyenek, hogy általános megoldásaik (y, z) közt

$$y=r_{00}z+r_{10}z'+\cdots+r_{n-1,\,0}z^{(n-1)} \qquad (C)$$

alakú relaczió álljon fenn, hol az r-ek szintén egyértékű függvényei az x-nek és a vesszős betűk, miként a következőkben mindig, az x szerinti differencziálhányadosokat jelentik, akkor az (A) és (B) differencziálegyenletekről azt mondjuk, hogy *kogrediensek.*** Ha $z_1 \ldots z_n$ (B)-nek egy alaprendszere, úgy az (A)-nak

$$y_k=r_{00}z_k+r_{10}z'_k+\cdots+r_{n-1,\,0}z_k^{(n-1)} \qquad (C')$$

egyenletekkel értelmezett alaprendszerére is azt mondjuk, hogy a $z_1 \ldots z_n$ rendszerrel kogrediens.

Ha x oly zárt útat ír le, a mely (B) általános integráljának z-nek értékváltozását okozza, akkor nyilvánvalóan a $z_1, \ldots, z_n$, $y_1, \ldots, y_n$ kogrediens alaprendszerek ugyanannak a homogen lineár substitutiónak lesznek alávetve. Ha megfordítva az (A) és (B) differencziálegyenletek két oly alaprendszere létezik, a mely x minden tetszőleges zárt útjánál ugyanannak a homogen lineár substitutiónak vannak alávetve vagy a melynek, a mint ezt röviden kifejezzük, ugyanaz a monodromia-csoportja van, úgy az (A) és (B) differencziálegyenletek és ezeknek ezen két alaprendszere

---

[*] V. ö. az egész fejezetet: Fuchs, Berliner Sitzungsberichte, 1888, 1273. l. s köv.

[**] V. ö. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, II, 1. k. (1897 Lipcse), Nr. 163.

kogrediens. Mert ha az említett két alaprendszerre a (C') egyenleteket felállítjuk, az $r_{00}, r_{01}, \ldots$ együtthatókat mint determinánsok hányadosait állíthatjuk elő és e determinánsok x minden zárt útjánál ugyanazzal a tényezővel (t. i. a zárt úthoz tartozó lineár substitutio determinánsával) szorzódik.

Differencziáljuk a (C) egyenletet $n-1$-szer x szerint és z-nek mindenkor előforduló n-edik differencziálhányadosát a (B) differencziálegyenlet segítségével fejezzük ki z $n-1$ első differencziálhányadosával, úgy a következő egyenletek adódnak:

$$y^{(\nu)} = r_{0\nu} z + r_{1\nu} z' + \cdots + r_{n-1,\,\nu} z^{(n-1)}, \qquad (C_\nu)$$
$$(\nu=1, 2, \ldots, n-1)$$

hol

$$\left.\begin{aligned} r_{0\nu} &= r'_{0,\,\nu-1} - r_{n-1,\,\nu-1} \cdot q_0 \\ r_{\lambda\nu} &= r'_{\lambda,\,\nu-1} + r_{\lambda-1,\,\nu-1} - r_{n-1,\,\nu-1} \cdot q_\lambda \cdot \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$
$$(\lambda=1, 2, \ldots, n-1)$$

Az

$$r_{\lambda\nu}$$

együtthatók ezért mindenütt egyértékű függvényei x-nek.

Az n-dik differencziálással adódik végre

$$\begin{aligned} y^{(n)} = {} & (r'_{0,\,n-1} - r_{n-1,\,n-1} q_0) z + (r'_{1,\,n-1} + r_{0,\,n-1} - r_{n-1,\,n-1} q_1) z' \\ & + \cdots + (r'_{n-1,\,n-1} + r_{n-2,\,n-1} - r_{n-1,\,n-1} q_{n-1}) z^{(n-1)}. \end{aligned} \qquad (C_n)$$

Ha a (C), $(C_1), \ldots, (C_n)$ egyenleteket rendre szorozzuk p_0, $p_1, \ldots, p_{n-1}$, 1-gyel és ezután összeadjuk azokat, a jobb oldalon z-ben homogén lineár $(n-1)$-edrendű differencziálkifejezés jelenik meg, x-ben egyértékű együtthatókkal, a mely tekintettel (A) egyenletre eltűnnik, ha z számára a (B) bármely megoldását helyettesítjük.

De innen következik, hogy ebben az $(n-1)$-edrendű differencziálkifejezésben $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$ együtthatói egyenkint eltűnni tartoznak. Tehát

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n-1} p_i r_{0i} + r'_{0,\,n-1} - r_{n-1,\,n-1} q_0 = 0 \\ &\sum_{i=0}^{n-1} p_i r_{\lambda i} + r'_{\lambda,\,n-1} + r_{\lambda-1,\,n-1} - r_{n-1,\,n-1} q_\lambda = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$
$$(\lambda=1, 2, \ldots, n-1)$$

Az (1) egyenletekből ν-nek adva 1, 2, ..., $n-1$ értékeket és a (2) egyenletekből adódik az

$$\underset{(\lambda,\nu=0,1,\ldots,n-1)}{r_{\lambda\nu}}$$

függvényekre, melyek száma n^2, a homogén lineár elsőrendű differencziálegyenleteknek következő rendszere, x-ben egyértékü együtthatókkal,

$$\begin{aligned} \frac{dr_{0\lambda}}{dx} &= r_{n-1,\nu}q_0 + r_{0,\nu+1}, \qquad (\nu=0,1,\ldots,n-2) \\ \frac{dr_{\lambda\nu}}{dx} &= r_{\lambda-1,\nu} + r_{n-1,\nu}q_\lambda + r_{\lambda,\nu+1}, \\ & \binom{\lambda=1,2,\ldots,n-1}{\nu=0,1,\ldots,n-2} \end{aligned} \qquad (D_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr_{0,n-1}}{dx} &= r_{n-1,n-1}q_0 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i r_{0i}, \\ \frac{dr_{\lambda,n-1}}{dx} &= -r_{\lambda-1,n-1} + r_{n-1,n-1}q_\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} p_i r_{\lambda i}. \\ & (\lambda=1,2,\ldots,n-1) \end{aligned} \qquad (D_2)$$

Ha e differencziálrendszert* tisztán formailag tekintjük, azaz a differencziálegyenletek együtthatóinak természetére semmiféle speciális feltevést nem teszünk, állanak a következők:

Legyen:

$$\underset{(\lambda,\nu=0,1,\ldots,n-1)}{\rho_{\lambda,\nu}}$$

a (D_1) és (D_2) differencziálrendszer megoldásainak tetszőleges rendszere, z a (B)-nek tetszőleges integrálja és képezzük az

$$\eta = \rho_{00}z + \rho_{10}z' + \cdots + \rho_{n-1,0}z^{(n-1)} \qquad (3)$$

kifejezést, akkor a (D_1) és (B) egyenletekre való tekintettel

$$\underset{(\nu=1,2,\ldots,n-1)}{\eta^{(\nu)} = \rho_{0\nu}z + \rho_{1\nu}z' + \cdots + \rho_{n-1,\nu}z^{(n-1)}}$$

és ha még $\eta^{(n)}$-t is kiszámítjuk, akkor a (D_2) egyenletekből adódik,

---

* STAECKEL szerint «differencziálegyenletek rendszere» helyett differencziál-rendszert mondunk.

hogy η az (A) differencziálegyenlet megoldása. Ha (3)-ba z számára a (B)-nek $z_1 \ldots z_n$ alaprendszerét helyettesitjük, akkor

$$\eta_k = \rho_{00} z_k + \rho_{10} z_k' + \cdots + \rho_{n-1,\,0}\, z_k^{(n-1)} \qquad (4)$$
$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

(A)-nak alaprendszere.

Tekintsük most megint (A) és (B) differencziálegyenletek együtthatóit x egyértékű függvényeinek, akkor a két egyenlet kogredienczíájára nézve a szükséges és elegendő feltétel az, hogy a (D_1), (D_2) homogén lineár egyértékű együtthatókkal biró differencziálrendszernek oly $r_{\lambda\nu}$ partikularis megoldásainak rendszere legyen, a melynek összes n^2 eleme a független változó egyértékű függvénye. Ha a (4)-be a (D_1), (D_2) differencziálrendszer valamely tetszőleges $\rho_{\lambda\nu}$ megoldási rendszeréből vett $\rho_{\lambda 0}$-ok helyébe az $r_{\lambda\nu}$ partikularis egyértékű megoldási rendszer megfelelő $r_{\lambda 0}$-t teszszük, úgy a (4) kifejezések az (A)-nak a $z_1 \ldots z_n$-nel kogrediens alaprendszerét alkotják. De általánosan nem is létezhetne a (D_1), (D_2) differencziálrendszernek $r_{\lambda,\nu}$-től lényegesen különböző megoldási rendszere, a melynek összes tagjai x egyértékű függvényei. Valóban a (D_1), (D_2) egyenletrendszer alakjából következik, hogy ha a $\rho_{\lambda\nu}$ megoldási rendszerből vett $\rho_{\lambda 0}$ ($\lambda = 1, \ldots, n$) elemek egyértékű függvények, ugyanez érvényes az $n^2 - n$ többi $\rho_{\lambda\nu}$ függvényre nézve is. Tegyük fel most már, hogy (3)-ban a $\rho_{\lambda 0}$-k x oly egyértékű függvényei, melyek az $r_{\lambda 0}$ egyértékű függvényektől nem csak állandó faktorban különböznek; és képzeljük ebből az n egyenletből

$$y^{(\nu)} = r_{0\nu} z + r_{1\nu} z' + \cdots + r_{n-1,\,\nu} z^{(n-1)} \qquad (5)$$
$$(\nu=0, 1, \ldots, n-1)$$

a $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$ függvényeket kiszámitva. E számítás mindig elvégezhető, ha y nem tesz eleget egy n-nél alacsonyabbrendű lineár egyértékű együtthatójú differencziálegyenletnek. Innen

$$z^{(\nu)} = s_{0\nu} y + s_{1\nu} y' + \cdots + s_{n-1,\,\nu} y^{(n-1)}, \qquad (6)$$
$$(\nu=0, 1, \ldots, n-1)$$

adódik, a hol az n^2 számú $s_{\lambda\nu}$ mennyiség, a melynek rendszere az $r_{\lambda\nu}$ mennyiségekből alkotott rendszernek recziprokja, egyértékü függvényei az x-nek és egy differencziálrendszert elégitenek ki, mely (D_1) és (D_2)-ből áll elő, ha ezekben a $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ és $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ együtthatókat felcseréljük. Tegyük be (6)-ból $z^{(\nu)}$ értékeit a (3) egyenletbe, nyerjük, hogy

$$\eta = A_0 y + A_0 y' + \cdots + A_{n-1} y^{(n-1)},$$

hol $A_0, \ldots, A_{n-1}$ x egyértékű függvényei. Az (A) differencziálegyenlet nem csak állandó faktorokban különböző két megoldásának ilyen vonatkozásából következik FROBENIUS-nak* egyik tétele szerint, hogy az (A) differencziálegyenlet oly értelemben reduktibilis, hogy egy alacsonyabbrendű egyértékű együtthatókkal biró differencziálegyenlettel közös integrálja nincsen. FUCHS-nak** egy tételéből következik még, hogy kogrediens differencziálegyenletek mindig egyidejűleg irreduktibilisek.

Az eddigi vizsgálatok eredményét a következőkben foglaljuk össze:

Ha (A) és (B) két homogén lineár differencziálegyenlet, a melynek együtthatói x-nek egyértékű függvényei, akkor arra, hogy e differencziálegyenletek kogrediensek legyenek a szükséges és elegendő feltétel az, hogy a (D_1), (D_2) homogén, lineár és egyértékű együtthatójú differencziálrendszernek oly partikularis integrálrendszere legyen, a melynek összes elemei x egyértékű függvényei legyenek. Ha az (A) differencziálegyenlet, következőleg (B) is, azon értelemben irreduktibilis, hogy alacsonyabbrendű és egyértékű együtthatókkal biró lineár homogén differencziálegyenlettel közös megoldása nincs, akkor a (D_1), (D_2) differencziálrendszernek csak egy egyértékű partikularis integrálrendszere van.

A (D_1), (D_2) differencziálrendszer olyan, hogy minden $\rho_{\lambda\nu}$ megoldási rendszere az n számú $\rho_{\lambda 0}$ elemével egyértékűleg van meghatározva; egy ilyen megoldási rendszer elemeiből alkotott

---

* CRELLE-Journal 76. k. 268. l.

** Berliner Sitzungsberichte 1888, 1276. l.

$$|\rho_{\lambda\nu}|_{(\lambda,\nu=0,1,\ldots,n-1)}$$

determináns nem tünik el azonosan; az n^2 számú $\rho_{\lambda\nu}$ mennyiség rendszerének recziprok rendszere ép oly alakú differencziálrendszert elégít ki és e differencziálrendszer (D_1) és (D_2)-ből oly módon áll elő, hogy a $p_0, \ldots, p_{n-1}$, $q_0, \ldots, q_{n-1}$ együtthatókat felcseréljük.

II.

Az egyértékü együtthatós (A) differencziálegyenlet olyan legyen, hogy integráljainak véges számú

$$a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$$

elágazó pontjai legyenek és hogy az alap-egyenletek, a melyek azon substitutiókhoz tartoznak, a melyeket egy elágazó pont egyszerű pozitiv körüljárásánál egy alap-rendszer szenved, gyökeinek abszolut értéke az egységgel egyenlő. Ez utóbbi feltevést csakis abból a czélból teszszük, hogy a CRELLE-féle Journalban[*] közzétett dolgozatom eredményei alkalmazhatók legyenek.

Képzeljük most a végesben levő $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ elágazó pontokat a végtelen távoli ponttal $l_1, l_2, \ldots, l_\sigma$ metszések segítségével összekötve és $A_1, \ldots, A_\sigma$ jelölje ama substitutiókat, a melyeket az (A)-nak $y_1, \ldots, y_n$ alaprendszere szenved, ha x független változó az $l_1, l_2, \ldots, l_\sigma$ metszéseket egyszer pozitiv értelemben átlépi. Mivel az (A) differencziálegyenletre nézve tett feltevések miatt az $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$ substitutiók az idézett dolgozatban[**] úgynevezett konvergenczia-feltételeket kielégítik, e dolgozat eredményei szerint egy $z_1, z_2, \ldots, z_n$ függvényrendszer létezését biztosítottnak tekinthetjük, a mely az $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ szingularis pontok és az ezekhez tartozó $A_1, \ldots, A_\sigma$ alapsubstitutiókkal meghatározott RIEMANN-féle[***] problémát oldja meg, azaz az egész

---

[*] 123. k. 138. l.

[**] U. o. 147. l.

[***] (C) probléma, u. o. 160. l.

$l_1 \dots l_\sigma$ metszésekkel szétmetszett x síkban egyértékű véges és folytonos, e metszések pozitiv átlépésénél az $A_1 \dots A_\sigma$ substitutiókat szenvedi és az $a_1, a_2, \dots, a_\sigma$ pontokban valamint a végtelen távoli pontban sem határozatlan. E függvényrendszer egy homogén lineár n-edrendű, raczionális együtthatókkal biró és a Fuchs-féle osztályhoz tartozó differencziálegyenletet elégít ki, melynek az $a_1, \dots a_\sigma, \infty$ lényegesen szingularis pontjai mellett csak még nem lényegesen szingularis pontjai vannak és mely nyilvánvalóan az (A) differencziálegyenlettel kogrediens. Ha ezt a Fuchs-féle osztályhoz tartozó differencziálegyenletet a (B) differencziálegyenlettel azonossá teszszük, akkor a kogrediens $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$ alaprendszerek a (C') egyenletek, az y és z általános integrálok pedig a (C) relaczióval lesznek összekapcsolva, míg az $r_{\lambda 0}$ egyértékű függvények és az ezekkel meghatározott (I. fejezet (1) egyenletei) $r_{\lambda\nu}$ függvények a (D_1), (D_2) differencziálrendszernek tesznek eleget, hol most $q_0, \dots, q_{n-1}$ x-nek raczionális függvényei.

Tehát a következő tételt találtuk:

I. *Az egyértékű együtthatójú* (A) *differencziálegyenletre nézve, a melynek még az e fejezet elején felírt tulajdonságai megvannak, lehet a* $q_0, \dots, q_{n-1}$ *raczionális függvényeket egy a* Fuchs-*féle osztályhoz tartozó differencziálegyenlet együtthatóit jellemző alakban mindig úgy meghatározni, hogy* (D_1), (D_2) *differencziálrendszer oly* $r_{\lambda\nu}$ *partikuláris megoldással bírjon, a melynek összes elemei egyértékű függvények és az* (A) *általános integrálja* (y) *ily alakban írható*

$$y = r_{00}z + r_{10}z' + \dots + r_{n-1,0}\, z^{(n-1)}, \qquad (C)$$

hol az $q_0 \dots q_{n-1}$ *együtthatókkal biró és a* Fuchs-*féle osztályhoz tartozó* (B) *lineár differencziálegyenlet általános integrálja.*

Legyenek most az (A) differencziálegyenlet $p_0, \dots, p_{n-1}$ együtthatói x raczionális függvényei.

Ekkor $a_1, a_2, \dots, a_\sigma$ a $p_0, \dots, p_{n-1}$ ama polusai, a melyeknek környezetében (A) integráljai nem egyértékűek, az együtthatók többi polusai, a melyeknek környezetében, az integrálok mindenesetre az incrementum egész hatványai szerint sorba fejthetők, figyelmen kívül maradnak. A (D_1), (D_2) differencziálrendszerek együtthatói ekkor x raczionális függvényei és így az I. tétel különös esetéül nyerjük a következő theorémát:

II. *Ha* (A) *valamely raczionális együtthatókkal biró differencziálegyenletet jelent, mely nem tartozik a* Fuchs-*féle osztályhoz és ha ezen egyenlet elágazó pontjaihoz tartozó alapegyenletek gyökei abszolut értékre nézve mind az egységgel egyenlők, akkor létezik olyan* (A)-*val kogrediens differencziálegyenlet* (B), *a mely a* Fuchs-*féle osztályhoz tartozik, és melynek z általános integráljával* (A)-*nak általános integrálja* (y) *a* (C) *alakban állítható elő és a* (C) $r_{\lambda 0}$ *együtthatói egyértékű függvényei* x-*nek, melyek az általuk egyértékűleg meghatározott* $r_{\lambda\nu}$ *mennyiségekkel a* (D_1), (D_2) *raczionális együtthatójú homogén lineár differencziálrendszert elégítik ki.*

Más szavakkal: ha

$$p_0, \ldots, p_{n-1}$$

az adott (A) differencziálegyenlet raczionális együtthatói, a $q_0, \ldots, q_{n-1}$ függvényeket lehet úgy meghatározni, hogy x raczionális függvényei legyenek és alakjuk mindig a Fuchs-féle osztályhoz tartozó differencziálegyenletek együtthatóit jellemző alak legyen (és pedig végtelen sok módon, mivel (B) helyére minden (B)-vel ugyanazon osztályba tartozó differencziálegyenlet léphet), és hogy a (D_1), (D_2) differencziálrendszerek egy, és ha (A) abban az értelemben irreduktibilis, hogy alacsonyabbrendű, lineár és egyértékű együtthatójú differencziálegyenlettel közös integrálja nincs, csakis egy partikuláris integrálrendszerrel bír, melynek összes tagjai x egyértékü függvényei.

Mivel adott (A) differencziálegyenlet esetén a lényeges feladat abban áll, hogy az (A)-val kogrediens és a Fuchs-féle osztályhoz tartozó (B) egyenletet felállítsuk, czélszerűnek látszik a (D_1), (D_2) differencziálegyenletek helyett az azokból a $q_0, \ldots, q_{n-1}$-nek a $p_0 \ldots p_{n-1}$-gyel való felcserélés által adódó

$$\begin{aligned} \frac{ds_{0\nu}}{dx} &= s_{n-1,\nu}\cdot p_0 + s_{0,\nu+1}, \\ \frac{ds_{\lambda\nu}}{dx} &= -s_{\lambda-1,\nu} + s_{n-1,\nu}p_\lambda + s_{\lambda,\nu+1}, \\ & \binom{\lambda=1,2,\ldots,n-1}{\nu=0,1,\ldots,n-2} \end{aligned} \tag{E_1}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds_{0,n-1}}{dx} &= s_{n-1,n-1}\cdot p_0 - \sum_{i=0}^{n-1} q_i s_{0i}, \\ \frac{ds_{\lambda,n-1}}{dx} &= -s_{\lambda-1,n-1} + s_{n-1,n-1}\cdot p_\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} q_i s_{\lambda i} \\ & (\lambda=1,2,\ldots,n-1) \end{aligned} \tag{E_2}$$

differencziálegyenleteket tenni. Tehát adott $p_0, \ldots, p_{n-1}$ raczionális függvényekhez lehet a $q_0, \ldots, q_{n-1}$ függvényeket meghatározni, melyek x raczionális függvényei és alakjuk a Fuchs-féle osztályhoz tartozó differencziálegyenletek együtthatóit jellemző alak, hogy e differencziálrendszernek egy egyértékű partikuláris $s_{\lambda\nu}$ integrálrendszere van és ha e meghatározás el van végezve,

$$z = s_{00}y + s_{10}y' + \cdots + s_{n-1,0}\,y^{(n-1)}$$

állítja elő az (A)-val kogrediens és a Fuchs-féle osztályhoz tartozó (B) differencziálegyenlet általános megoldását.

Ama lineár és raczionális együtthatójú differencziálegyenletek elméletében, melyek nem tartoznak a Fuchs-féle osztályhoz, ha egy határozatlansági hely környezetében van szó az integrálok vizsgálatáról, két egymástól lényegében különböző feladat oldandó meg. Először amaz alapegyenlet gyökei határozandók meg, a mely az ily szinguláris ponthoz tartozik, másodszor az integrálok viselkedése keresendő, ha a független változó egy jól meghatározott úton e határozatlansági helyek egyikéhez közeledik. Az első feladat a II. tétel révén legalább abban az esetben, midőn az összes alapegyenleteknek egységnyi abszolut értékkel biró gyökei vannak, elméletileg az analog kérdésre a Fuchs-féle osztályhoz tartozó differencziálegyenletek elméletében van visszavezetve, míg a másik feladat, melynek megoldására Poincaré-nak divergens hatványsorokkal való asymptotikus előállítási módja vonatkozik, az n-edrendű differencziálegyenletről az (E_1), (E_2) raczionális együtthatójú homogén, lineár differencziálrendszer $s_{\lambda\nu}$ egyértékü megoldására vihető át.

Az, hogy valamely raczionális együtthatójú a FUCHS-féle osztályhoz nem tartozó lineár differencziálegyenlet vizsgálata egy az említett osztályhoz tartozó differencziálegyenletre és bizonyos egyértékű függvényekre vezethető vissza, a transformatió-csoportnak PICARD-VESSIOT-féle elmélete segítségével következő módon is fejthető ki:

Legyen G az (A) differencziálegyenletnek az $y_1, \ldots, y_n$ alaprendszerre vonatkozó transformatió-csoportja, H az (A)-val kogrediens és a FUCHS-féle osztályhoz tartozó (B) differencziálegyenletnek $z_1, \ldots, z_n$ alaprendszerre vonatkozó transformatió-csoportja, θ az $A_1, \ldots, A_\sigma$ substitutiókból mint alap-substitutiókkal komponált csoport, azaz (A) és (B) differencziálegyenletek közös monodromia-csoportja. A megszámlálható θ csoportot természetesen magukban foglalják a G és H algebrai csoportok. PICARD és VESSIOT alaptétele szerint raczionális együtthatójú lineár differencziálegyenlet transformatió-csoportjának oly tulajdonságai vannak, hogy az alaprendszer elemeinek minden raczionális differencziál függvénye, mely ezen csoport transformatióinak alkalmazásánál változatlan marad, x raczionális függvénye és hogy megfordítva is minden raczionális differencziálfüggvény, mely az x raczionális függvénye, a transformatió-csoport transformatióinak alkalmazásánál változatlan marad.

Mivel a (B) differencziálegyenlet a FUCHS-féle osztályhoz tartozik, tehát integráljainak határozatlansági helyei sincsenek, a $z_1 \ldots z_n$ minden raczionális differencziálfüggvénye, mely a θ monodromia-csoport alkalmazásánál változatlan marad, azaz egyértékű az x-ben, x-nek is raczionális függvénye, és következőleg az H transformatió-csoport transformatióinak alkalmazásánál is változatlan. Ezért H-nak nincs oly algebrai alcsoportja, mely a megszámlálható θ csoport substitutióit magában foglalná; vagy más szavakkal: H a legszűkebb algebrai csoport, mely a θ monodromia-csoportot mint alcsoportot magában foglalja. E tulajdonság a Fuchs-féle osztályba tartozó differencziálegyenletekre jellemző.*

Ha (A) nem tartozik a Fuchs-féle osztályhoz, akkor G a H csoportot magában foglalja mint alcsoportot a nélkül, hogy H-val identikus lenne.

Legyen most $R(t_1, \ldots, t_n)$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ oly raczionális differencziálfüggvénye, hol $t_1, \ldots, t_n$ az x határozatlan analytikai függvényei, mely H-nak és csakis ennek transformatióinak alkalmazásánál változatlan marad. Ha most a t_k-k helyébe a z_k-kat írjuk, akkor ezen kifejezés x raczionális kifejezése lesz:

$$R(z_1, \ldots, z_n) = \psi(x),$$

ha pedig a t_k-k helyébe az y_k-kat írjuk, akkor

$$R(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(x)$$

nem raczionális, hanem x egyértékű függvénye. Vessiot-nak ** egy tétele szerint ez az egyértékű $\varphi(x)$ függvény algebrai differencziálegyenletnek tesz eleget, melynek együtthatói x raczionális függvényei és mely Vessiot *** jelölésében integrálok alaprendszerével bír. Ha most az

$$R(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(x)$$

üggvényt az (A) differencziálegyenlet raczionálitási tartományához adjungáljuk, akkor a mint Vessiot † kimutatta, az (A) differencziálegyenlet G transformatió-csoportja azon alcsoportjára redukálódik, melynek transzformaczióinak alkalmazásánál az R változatlan marad, tehát H-ra. Ezen adjunctio után az $y_1 \ldots y_n$ minden raczionális differencziálfüggvénye, mely a θ monodromiacsoport substitutióinak alkalmazásánál változatlan marad, raczionálisan ismeretes, azaz az (A) differencziálegyenlet úgy visel-

---

* E szerint helyesbítendő Fano Gino-nak egy megjegyzése, Rendiconti, Accademia dei Lincei, Tomo IV^1, 294. l., fennt.

** Thèses (Paris, 1892) Deuxieme partie, Chap. II. 2.

*** U. o. Chap. III. 6.

† U. o. Chap. V. 1.

kedik, mint egy a Fuchs-féle osztályhoz tartozó differencziálegyenlet.

Áll tehát a következő theorema:

III. *Ha raczionális együtthatójú homogen lineár* (*A*) *differencziálegyenlet, melynél az egyes elágazó pontokhoz tartozó alapegyenletek gyökei egységnyi abszolut értékkel bírnak, raczionálitási tartományához egy egyértékű függvényt adjungálunk, mely raczionális együtthatójú és integrálok alaprendszerével bíró algebrai differencziálegyenletnek tesz eleget, akkor ezen lineár differencziálegyenlet transformatió-csoportja a legszűkebb algebrai csoportra redukálódik, melyben e differentiál-egyenlet monodromia-csoportja benn van és egy alaprendszer elemeinek minden oly raczionális differencziálfüggvénye, mely egyértékű, raczionálisan ismeretes; az* (*A*) *differencziálegyenlet tehát az adjunctio által a* Fuchs-*féle osztályhoz tartozó differencziálegyenletek jellegét nyeri.*

Schlesinger Lajos.

A BINOM KONGRUENCZIÁK ELMÉLETÉHEZ.

A jelen közleményemben a következő kérdéssel szándékozom foglalkozni. Legyenek n, N pozitiv egész számok, *mely esetekben lesz az*

$$x^n-1 \text{ (mod. } N) \tag{I}$$

kifejezés lineár tényezőkre felbontható? Ez a kérdéstétel annak a kérdésnek általánosítása, a melylyel egy előbbi czikkben, mint az ott levezetett azonosságok alkalmazásával foglalkoztam.* A tárgyalás mindjárt arra az esetre szorítható, hogy N törzsszám hatványa legyen. Ugyanis a számelméletből ismeretes, hogy (I) akkor és csak akkor bontható lineár tényezőkre, ha az

$$\underset{(i=1,2,\ldots,r)}{x^n-1 \text{ (mod. } p_i^{\alpha_i})} \tag{II}$$

$$N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$$

kifejezések lineár tényezőkre bonthatók. A vizsgálat eredménye a következő:

Az x^n-1 (mod. p^α) *kifejezés akkor és csak akkor bontható lineár tényezőkre, ha:*

A) $p-1\equiv 0$ (mod. n), α *tetszőleges.*

B) $n=p^\pi m$, $\alpha=1$, $p-1\equiv 0$ (mod. m).

Az x^n-1 (mod. 2^α) *kifejezés pedig akkor és csak akkor bontható lineár tényezőkre, ha*

$\bar{A}$) $n=2^\beta$, $\alpha=1$.

$\bar{B}$) $n=2$, α *tetszőleges.*

---

* V. ö. X. kötet 145. l.

Megjegyzem még, hogy problemánkat abban a speciális esetben, a midőn n törzsszám, már Perott, de teljesen más módszerekkel megvizsgálta.*

*

1\. *Segédtétel. Ha p páratlan törszszám és*

$$p-1\equiv 0 \, (\text{mod.}\, a),$$

akkor létezik oly R szám, a mely a p és p^ν és így az összes

$$p, p^2, \ldots, p^\alpha \tag{1}$$

modulusokra nézve az a kitevőhöz tartozik.

Ismeretes tétel értelmében vannak oly számok, a melyek egyidőben primitiv gyökök a p és p^α modulusokra.

Legyen Γ ilyen szám, akkor:

$$R=\Gamma^{p^{\alpha-1}b} \tag{I}$$

az (1) modulusokra az a-adik kitevőhöz tartozik, ha csak

$$(p-1, b)=\frac{p-1}{a}. \tag{II}$$

Ugyanis:

Γ tartozik (mod. p) a $p-1$-dik kitevőhöz

Γ tartozik (mod. p^α) a $p^{\alpha-1}(p-1)$-dik kitevőhöz

és így a véges csoportok elmélete szerint:

R tartozik (mod. p) a $\dfrac{p-1}{(p-1, p^{\alpha-1}b)}=\dfrac{p-1}{(p-1, b)}=a$ kitevőhöz

R tartozik (mod. p^α) a $\dfrac{p^{\alpha-1}(p-1)}{(p^{\alpha-1}(p-1), p^{\alpha-1}b)}=\dfrac{p-1}{(p-1, b)}=a$ kitevőhöz.

2\. *Ha*

$$p-1\equiv 0 \, (\text{mod.}\, a)$$

---

* Remarque au sujet du théoréme d'Euclide etc. American Journal of. Math. XI., XIII. k. A dolgozat 26. §-a.

akkor az

$$x^a-1 \pmod{p^\alpha} \tag{2}$$

kifejezés lineár tényezőkre bontható.

Legyen R oly szám, a mely a p és p^a modulusokra az a kitevőhöz tartozik. Akkor:

$$x^a-1 \equiv (x-R)f_2(x) \pmod{p^\alpha}.$$

Mivel

$$R^2-R \equiv 0 \pmod{p},$$

kell, hogy

$$f_2(R^2) \equiv 0,\quad f_2(x) \equiv (x-R^2)f_3(x) \pmod{p^\alpha}$$

legyen. Igy folytatva, kapjuk:

$$x^\alpha-1 \equiv \prod_{k=1}^{a}(x-R^k) \pmod{p^\alpha} \tag{3}$$

3. *Ha*

$$(a,p)=1,\quad p-1 \equiv 0 \pmod{a},$$

akkor már az

$$x^{p^\pi a}-1 \pmod{p} \tag{4}$$

kifejezés sem bontható lineár tényezőkre.

Ugyanis

$$x^{p^\pi a}-1 \equiv (x^a-1)^{p^\pi} \pmod{p}$$

és igy kellene, hogy $x^a-1 \pmod{p}$ lineár tényezőkre legyen bontható. Ez pedig nincs így, mivel $p-1 \equiv 0 \pmod{a}$.

4. *Ha*

$$p-1 \equiv 0 \pmod{a},$$

akkor

$$x^{p^\pi a}-1 \pmod{p}$$

lineár tényezőkre bontható.

5. *Ha*

$$p-1 \equiv 0 \pmod{a},$$

akkor az

$$x^{p^\pi a}-1 \pmod{p^2} \tag{5}$$

kifejezés nem bontható lineár tényezőkre.

Legyen R oly szám, mely a p és p^2 modulusokra az a kitevőhöz tartozik. Akkor mindenek előtt:

$$x^a-1\equiv\prod_{k=1}^{a}(x-R^k)\ (\text{mod.}\,p^2)$$

és

$$x^{p^\pi a}-1\equiv\left\{\prod_{k=1}^{a}(x-R^k)\right\}^{p^\pi}(\text{mod.}\,p). \tag{6}$$

Ha (5) lineár tényezőkre bontható, akkor e felbontás alakja csak a következő lehet:

$$x^{p^\pi a}-1\equiv\prod_{k=1}^{a}\prod_{i=1}^{p^\pi}(x-R^k-h_{ki}\,p)\ (\text{mod.}\,p^2). \tag{7}$$

Ugyanis a (7) felbontásnak a p modulusra is érvényesnek kell lenni. Azonban a törzsszámmodulusra vonatkozó felbontások egyértelműek és így (7)-nek (mod. p) össze kell esnie (6)-tal. Ámde:

$$\prod_{i=1}^{p^\pi}(x-R^k-h_{ki}\,p)\equiv(x-R^k)^{p^\pi}-p\,(x-R^k)^{p^\pi-1}\sum_i h_{ki}\ (\text{mod.}\,p^2)$$

és így lesz:

$$x^{p^\pi a}-1\equiv(x^a-1)^{p^\pi-1}\left\{x^a-1-p\sum_{k,\,i}\frac{x^a-1}{x-R^k}\,h_{ki}\right\}(\text{mod.}\,p^2)$$

vagy rövidebb alakban:

$$x^{p^\pi a}-1\equiv(x^a-1)^{p^\pi-1}\left\{x^a+f_1\,x^{a-1}+\cdots+f_a\right\}(\text{mod.}\,p^2). \tag{8}$$

Ez a reláczió azonban helytelen. Ugyanis mindenekelőtt volna;

$$f_a\equiv-1,\ f_1\equiv f_2\equiv\cdots\equiv f_{a-1}\equiv0\ (\text{mod.}\,p^2),$$

tehát lenne:

$$x^{p^\pi a}-1\equiv(x^a-1)^{p^\pi}\ (\text{mod.}\,p^2).$$

Azonban

$$(x^a-1)^{p^\pi}\equiv(x^{p^{\pi-1}a}-1)^p\ (\text{mod.}\,p^2)$$

és így (8) csakugyan helytelen.

6. *Az*

$$x^a-1\ (\text{mod.}\ 2)$$

kifejezés akkor és csak akkor bontható lineár tényezőkre, ha $a=2^\beta$.

Ugyanis a felbontás a következő alakú:

$$(x^{a}-1)\equiv(x-1)^{a}\ (\text{mod. } 2),$$

a miből $a=2^{\beta}$.*

7. *Ha* $\beta>1$, *akkor az*

$$x^{2^{\beta}}-1\ (\text{mod. } 4)$$

kifejezés nem bontható fel lineár tényezőkre.

Tegyük fel az ellenkezőt. Akkor lenne:

$$x^{2^{\beta}}-1\equiv(x-1)^{A}(x+1)^{B}\ (\text{mod. } 4), \tag{9}$$

a miből

$$A+B\equiv0\ (\text{mod. } 4)$$

$$-1\equiv(-1)^{A}\ (\text{mod. } 4),\quad A\equiv B\equiv1\ (\text{mod. } 2)$$

$$A\gtrless B.$$

A (9)-ből származik:

$$x^{2^{\beta}}-1\equiv(x^{A}-Ax^{A-1}+\cdots)(x^{B}+Bx^{B-1}+\cdots)\ (\text{mod. } 4). \tag{10}$$

Itt A és B nem egyenlők, legyen pl. $A>B$, akkor (10)-ből származik

$$-A\equiv0\ (\text{mod. } 4),$$

a mi azonban a megelőzőkkel ellenkezik. Igy tehát (9) csakugyan helytelen.

Bauer Mihály.

---

* V. ö. már idézett czikkemet.

A SZABÁLYOS TIZENKÉTSZÖG TERÜLETÉNEK MEGHATÁROZÁSA SZEMLÉLETI ÚTON.*

A körbe írt szabályos tizenkétszög területe egyenlő a sugár fölött emelt négyzet háromszorosával.

Ezt az ismeretes tételt KÜRSCHÁK tanár úr számítás nélkül bizonyította be folyóiratunk 1898 februáriusi füzetében (VII. évf. 53. oldal).

KÜRSCHÁK úr a legközvetetlenebb útat választotta, mert azokat a háromszögeket darabolta fel, a melyek akként származnak, hogy a szabályos tizenkétszög két-két *szomszédos* szögpontját kötjük össze a középponttal.

Ha azonban még úgy járunk el, hogy minden *második,* azután minden *harmadik,* vagy végre minden *negyedik* szögpontot kötünk össze egymással, akkor mindenek előtt megjegyzendő, hogy ezzel valamennyi tekintetbe vehető összekapcsolást kimerítettük, mert itt a dolog természeténél fogva, konvex idomokra kell szoritkoznunk.

Az első esetben a körbe írt szabályos hatszög adódik ki a középen és körülötte hat csatlakozó háromszög. (L. a II. ábrát.) A második esetben beírt négyzetet és négy csatlakozó trapézt nyerünk. (L. az I. ábrát.) A harmadik esetben a körbe írt szabályos háromszög keletkezik a középen, mely szabályos hatszöggé kiegészítve lényegben első esetünkre vezet vissza.

E meggondolások után *két eljárást* mutatok be, a melynek segítségével a körbe írt szabályos tizenkétszög területét szintén szemléleti úton, tisztán geometriailag, határozom meg.

---

* Előadva a «Math. és phys. társulat» 1901 január 10-én tartott rendes ülésén.

Az I. és II. ábrákban a P-k a körbe írt szabályos tizenkétszögnek szögpontjai továbbá az I_a ill. II_a ábrákban $AEBCGD$ ill. $ABCD$ a sugár fölött emelt négyzet háromszorosa. Hogy tételünk bebizonyításának menete is jellemezve legyen, ezt a következőképen fogalmazzuk:

A

$$P_1 P_2 \ldots P_{12} \quad \textit{és} \quad AEBCGD,$$

illetőleg

$$P_1 P_2 \ldots P_{12} \quad \textit{és} \quad ABCD$$

területek «végszerűen egyenlők»,* vagyis *véges számú* kölcsönösen egybevágó darabokra oszthatók.

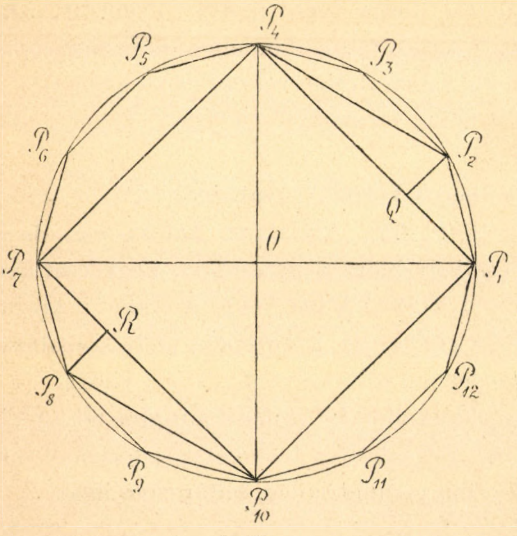
Arra szorítkozhatunk most, hogy az

$$\mathrm{I} \quad \text{és} \quad \mathrm{I}_a,$$

illetőleg a

$$\mathrm{II} \quad \text{és} \quad \mathrm{II}_a$$

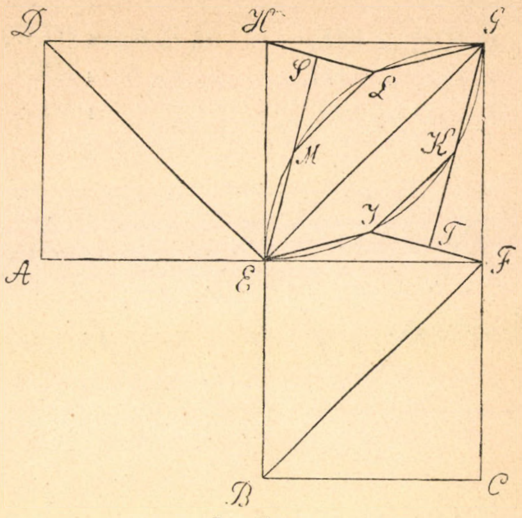
ábrákból a kölcsönösen egybevágó területdarabokat párosával kiírjuk, míg az egyes egybevágóságok részletes bebizonyítását — rendkivüli egyszerűségénél fogva — legyen szabad az olvasóra bíznunk.



1. ábra.

---

* BOLYAI szerint.



I*a*. ábra.

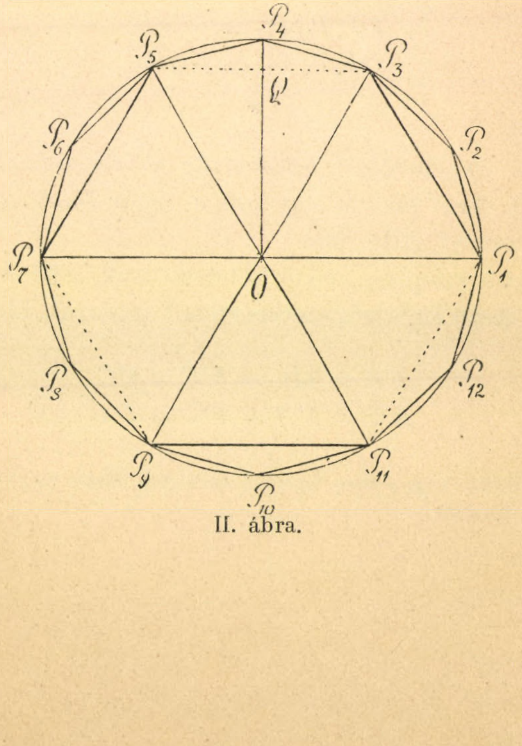
Első eljárás. Az I és I$_a$ ábrákban

$$OP_1 P_4 \cong AED, \qquad OP_1 P_{10} \cong EFB,$$

$$OP_7 P_{10} \cong HDE, \qquad OP_7 P_4 \cong CBF;$$

azután

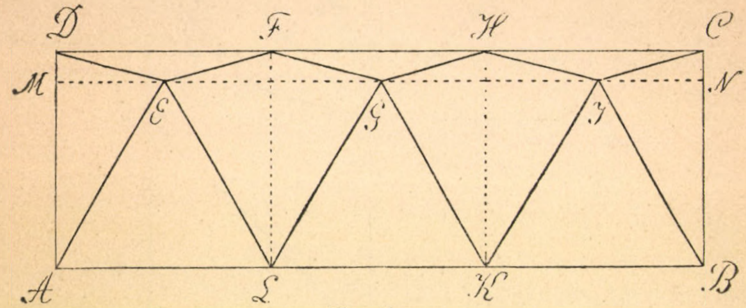
$$P_{10} P_{11} P_{12} P_1 \cong EIKG \quad \text{és} \quad P_4 P_5 P_6 P_7 \cong GLME;$$



II. ábra.

továbbá

$$\begin{array}{ll} P_2 P_3 P_4 \cong FIE, & P_9 P_8 P_{10} \cong HLG, \\ P_2 P_4 Q \cong FGT, & P_8 P_{10} R \cong HES, \\ P_1 P_2 Q \cong KIT. & P_7 P_8 R \cong MLS. \end{array}$$



IIa. ábra.

Második eljárás. A II és II$_a$ ábrákban

$$\begin{array}{ll} P_7 P_5 O \cong AEL, & P_1 P_2 P_3 \cong DEF, \\ O P_3 P_1 \cong LKG, & P_5 P_6 P_7 \cong FGH, \\ P_9 P_{11} O \cong KIB; & P_9 P_{10} P_{11} \cong HIC; \end{array}$$

továbbá

$$P_3 P_4 O \cong EDA \text{ és } P_4 P_5 O \cong CIB;$$

végre

$$\begin{array}{l} OP_1 P_{12} P_{11} \cong LEFG, \\ OP_9 P_8 P_7 \cong KGHI. \end{array}$$

*

Függelék.

A körbe írt szabályos háromszög oldalhossza fölött emelt négyzet (III. ábra) *szintén egyenlő a sugár fölött emelt négyzet háromszorosával.* (III$_a$. ábra.)

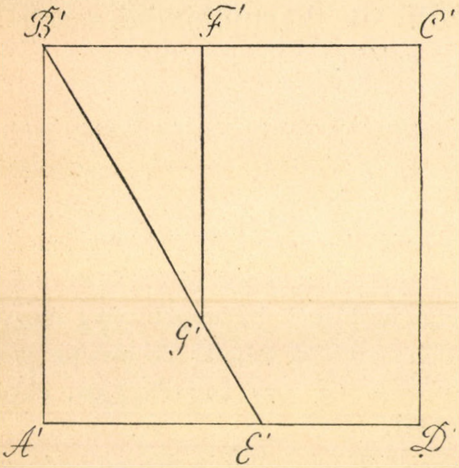
Hogy ezt is számitás nélkül bebizonyítsuk, a III. és III$_a$. ábrákon a következő egyszerű szerkesztést * végezzük. Először ráméрjük az

$$\begin{array}{l} A'E' = AD = F'C' = BC, \\ AE = A'B' = FC = D'C' \end{array}$$

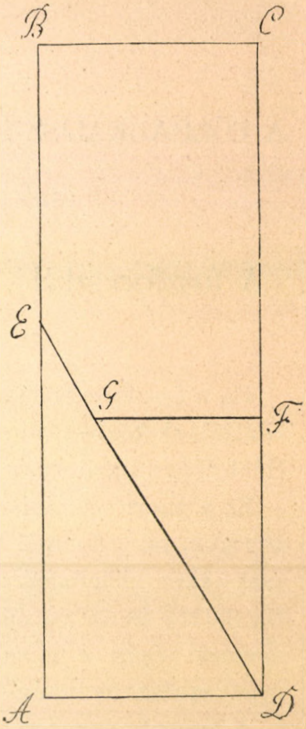
---

* V. ö. RÉTHY. Végszerűen egyenlő területek. Math. és phys. lapok. II. k. (1893) 4 és. 5. oldal.

hosszúságokat; azután B'-t összekötjük E'-vel, E-t pedig D-vel; végre meghúzzuk az $F'G'$-t párhuzamosan $C'D'$-vel és az FG-t



III. ábra.



III*a*. ábra.

párhuzamosan CB-vel. Ezzel a feldarabolás, mely a két terület egyenlőségének szemléleti bebizonyításához szükséges, megtörtént, mert könnyű látni, hogy

$$A'B'E' \cong AED$$
$$B'F'G' \cong GFD,$$
$$C'D'E'G'F' \cong CFGEB.$$

Csillag Vilmos.

A FÖLDALKALISZULFIDOK FOSZFORESZCZENCZIÁJA.

(Harmadik és befejező közlemény.)

A foszforeszkáló szulfidok thermoluminiszczencziája.

Ha a foszforeszkáló szulfidokat megvilágítjuk és azután utánvilágításuk közben vagy azután melegítjük, akkor ujra meglehetős élénk fényt sugároznak ki.

Ez a thermoluminiszczenczia lényegesen különbözik másféle anyagok, pl. a fluorpát thermoluminiszczencziájától. A szulfidok csak akkor világítanak a felmelegítésnél, ha megelőzőleg megvilágíttattak és az anyagban észrevehető kémiai változások nem mennek végbe a felmelegítésnél. Ha ujra megvilágítjuk, akkor ismét mutatnak luminiszkálást.

A fluorpát megelőző megvilágítás nélkül[1] is thermoluminiszkál, mi közben azonban a kékeszöld színű kristályok elszíntelenednek jeléül annak, hogy az anyagban kémiai változások mennek végbe.

A következő szulfidok vizsgáltattak meg thermoluminiszczencziára.

I. Kálcziumszulfidok. Ezek a foszforok konczentrált napfénynyel gerjesztve, a szinképben csak egy — legfeljebb még egy második igen gyenge — sávot mutattak és így tiszta foszforoknak tekinthetők.

---

[1] Különben nehezen konstatálható. Annyi bizonyos, hogy megelőzőleg nem kell megvilágítani.

Foszfor	foszforesz-czenczia színe	thermoluminiszczenczia színe vagy színei, ha színváltozás van
$CaS+Bi$	ibolyáskék	élénk kék, később zöld
$CaS+Cu$	kékeszöld	zöld
$CaS+Cu+Bi$	kékeszöld	élénk kék, később zöld
$CaS+Mn$	sárga	sárga

Egyedül a $CaS+Bi$ mutatott színváltozást, melynek természete azonban igen könnyen meg volt állapitható. A thermoluminiszczencziafény spektroszkopiai elemzéséből ugyanis kiderült, hogy a Bi sáv mellett a Cu sáv is jelentkezik. Ennek megállapitását igen megkönnyitette egy $CaS+Cu+Bi$ szinképének az előbbivel való összehasonlítása, valamint a $CaS+Cu$ szinképe is.

Hogy a Cu foszforeszczenczia a $CaS+Bi$-ban jelentkezett, az természetes, mert már napfénynyel való gerjesztésnél is — habár igen gyengén — de előtűnt. A thermoluminiszczenczia fénye pedig — mindjárt a szulfid megvilágítása után — sokkal erősebb, mint a fotoluminiszczenczia fénye, tehát a Cu sávja is erősebben látható. Ennek tulajdonítható, hogy a thermoluminiszczenczia fénye, mindjárt kezdetben is inkább világoskék mint sötétkék, s egyébként az összes foszforok thermoluminiszczencziafénye mindig egy árnyalattal világosabb mint a foszforeszczenczia fénye. De ennek fiziologiai magyarázata is lehet, mert az előbbi luminiszczenczia sokkal erősebb, mint az utóbbi (ha ugyan mindjárt a megvilágitás után melegitjük fel a foszforokat).

Térjünk most át a

II. Stroncziumszulfidok thermoluminiszczenczíájára.

Foszfor	foszfor. színe	thermoluminiszczenczia színe vagy színei
$SrS+Bi$	kékeszöld	kékeszöld, azután sárgászöld
$SrS+Cu(K_2SO_4$-al)	világoskék	világoskék,[1] azután sárga
$SrS+Sb$ tisztátalan	sárga	sárga, azután kékeszöld
$SrS+Bi$ tisztátalan	zöld	sárgászöld, azután kékeszöld
$SrS+Cu$ tiszta	sárgászöld	sárgászöld, azután sárga
$SrS+Cu(Na_2S_2O_3$-al)	sárgászöld	sárgászöld, azután sárga

---

[1] Erős zöldes árnyalattal.

Az összes tisztított stroncziumszulfidok thermoluminiszczencziája előbb-utóbb kékeszöld színt mutatott. A nem tisztított SrS-ból készített foszforok pedig mind sárgászöld színben világítottak eleinte. Ezek a színváltozások mutatják, hogy a stronciumszulfidok még mindig keverékfoszforok. Mivel azonkívül a tisztított $SrS+Bi$ rövid idő mulva elveszti kékesszinét, továbbá a tisztitatlan $SrS+Bi$ főfoszforeszczencziája szintén zöldesszínű (a később előtünő és igen gyenge kékeszöld thermoluminiszczenczia nem származhat a megfelelő mennyiségben hozzáadott Bi-tól, annál kevésbbé, mivel magában a tisztítatlan $SrCO_3$-ban főleg bizmuth volt kémiailag kimutatható), tekintetbe véve továbbá, hogy a sáv maximuma szintén a zöldben fekszik (közel F-hez; $\lambda=487.10^{-6}$ mm.) és hogy a hosszan tartó (tehát Bi-tól származó, lásd utánvilágítás tartama) luminiszczenczia szine mindvégig zöldes szinű, valószínű, hogy a bizmuth foszforeszczencziája a stronciumszulfidban zöld színű és hogy a kékes szín[1] egy idegen fémtől származik, melynek jelenlétére már több körülmény mutat. Ha pedig a rézfoszforokat tekintjük, észreveszszük, hogy valamennyi (tisztított és nem tisztított szulfidból, K_2SO_4-al vagy $Na_2S_2O_3$-al készitett) szulfidnál a thermoluminiszczenczia szine sárgává válik. Mivel a sáv maximuma a sárgában fekszik (közel E-hez; $\lambda=530.10^{-6}$ mm.) és a tisztitatlan $SrS+Cu$ zöldes szine a kémiailag kimutatott Bi-tól származik, a tisztított és K_2SO_4-el készített $SrS+Cu$-nál pedig a (η-tól származó) kékes-ibolya sáv egészen különválva fekszik a sárgászöld sávtól a szinképben, valószínű, hogy a Cu foszforeszczencziája a SrS-ban sárga szinű.

Ezekből láthatni, hogy ha a fémsávok (úgy mint pl. a stronciumszulfidoknál) részben fedik egymást és szétválasztásuk és felismerésük egyszerűen a foszforeszczenczia szinkép megfigyelése által nem sikerül, *a thermoluminiszczenczia-fénynek elemzése a szín-*

---

[1] Valamivel erősebb feloldó képességgel biró spektrálkészülékkel tényleg igen gyenge minimumot lehetett látni a szinképben a sárgászöld és a kék között, annak jeléül, hogy a kék szín egy más fémtől eredő sáv következménye.

változások közben igen jól ad felvilágosítást a színkép összetételére nézve.

A fémek nélkül, csak hozzátételekkel (sókkal) készitett szulfidok színváltozása felmelegités közben valószínűvé teszi, hogy a kiindulási anyagul használt $SrCO_3$ kevés bizmuthot és kevés rezet tartalmaz azon a bizonyos («η») ismeretlen fémen kívül.

III. Báriumszulfidok thermoluminiszkálása.

Foszfor	foszfor. színe	thermolum. színe vagy színei
$BaS+Bi$	zöldessárga	zöldessárga
$BaS+Cu+Na_2SO_4$	parázsvörös	parázsvörös
$BaS+Cu+K_2SO_4$	szalmasárga	sárga

A BaS-ok nem mutattak észrevehető színváltozást. A sárga foszforeszczenczia eredete, melyet a báriumszulfidok K_2SO_4-el égetve mutatnak — még nincs bővebben kutatva.

Nézzük most, változik-e, és ha változik, milyen módon változik a thermoluminiszczenczia, ha a foszfort megvilágitása után rövidebb vagy hosszabb idő mulva melegitjük fel. E czélra a $CaS+Bi$ foszfort használtam, mely leghosszabb ideig világít.

A megvilágitás után hány óra mulva?	foszfor. intenzitása	thermoluminiszcenczia int.
0	igen erős	sokkal erősebb, mint a foszfor.-nál
5	igen erős, de valamivel gyengébb	sokkal erősebb, mint a foszfor.-nál, de valamivel gyengébb, mint előbb
24	gyenge	már jóval gyengébb
7×24	gyenge	még gyengébb
2×7×24	gyenge	még gyengébb
6×7×24	gyenge	még gyengébb
12×7×24	már nem világított	még gyengébb

Látnivaló, hogy a thermoluminiszczenczia intenzitása függ az utánvilágítás tartamától, vagyis a foszforeszczenczia erősségétől. Ha a fénymozgás csak gyengén gerjesztettett (avagy már csillapult), akkor a thermoluminiszkálás is gyenge és fordítva. Mindjárt a megvilágítás után rendkívül erős a thermoluminiszkálás. A gyorsan, de igen élénken lefolyó fényjelenség valóban pompás látványt nyujt. Ha lassabban melegítjük a szulfidot, akkor sokkal hosszabb a thermoluminiszkálás, de egyszersmind gyengébb is. Már BECQUEREL is megjegyzi nagy munkájában, hogy a szulfid által bizonyos mennyiségben elnyelt fényt tetszőleges intenzitással és időtartammal lehet vele kisugároztatni.[1] A foszforok thermoluminiszczenczián alapszik a foszforogrammok ujra előidézése, ha már bizonyos idő leteltével eltüntek. Hogy milyen hosszú időig képes némely foszfor a fénybenyomást megtartani, mutatja a következő példa. LENARD és WOLF[2] 1887 julius 15-én «exponáltak» egy BALMAIN-lemezt, mely még szeptember 2-án az előidézésnél (melegítés által) igen jól mutatta a vidéket. Ezután 1888 augusztus 10-éig előidézetlenül feküdt. A mondott napon még diffus fény volt észrevehető.

A foszforok thermoluminiszczenczióját illetőleg következők állapíttattak meg:

I. *A thermoluminiszczenczia színe megegyezik a foszforeszczenczia színével.*

II. *A tiszta foszforok csak árnyalatbeli színváltozást mutatnak* (ugyanazt, mint az utánvilágításnál).

III. *A keverékfoszforok mind színváltozást mutatnak, melyből* (spektroszkópiai elemzéssel) *a foszforeszczenczia-színkép összetételére lehet következtetni.*

IV. *A thermoluminiszczenczia minden tekintetben függ a megelőzőleg létesített fénymozgástól* (erősségétől és csillapult voltától).

---

[1] La lumière, I. k. 52. l.

[2] EDER's Jahrb. der Photographie. 1889.

A gerjesztő- és a foszforeszczencziafény összefüggése.

A gerjesztő fénynek intenzitásával és színével együtt megváltozik a foszforeszczencziafény intenzitása és szine is.

Tekintsük előbb a foszforeszczencziafény változásait, ha a gerjesztő fény erőssége változik. Minél erősebb fényt használunk a foszforeszczenczia gerjesztésére, annál erősebb a foszforeszczenczia és fordítva. *De nemcsak intenzitása változik meg a gerjesztő fény intenzitásának megváltozásával, hanem szine is.* Ezek a változások ugyanazok az árnyalatbeli változások, melyeket már több helyen említettünk és melyek mindig az intenzitás változásával karöltve járnak.

Ha a $CaS+Bi$ foszforeszczencziáját összegyűjtött napfénynyel gerjesztjük, akkor szine ibolyáskék, ha indirekt fénynek tesszük ki (pl. világos napon délben), akkor már hiányzik az ibolyás árnyalat, este felé, vagy borús időben gerjesztve már csak világos kék fényt sugároz ki. Ugyanezt az árnyalatbeli szinváltozást mutatja a $CaS+Bi$ utánvilágítása közben, a mint erőssége folytonosan csökken. Leghosszabb a színkép a megvilágítás közben, a mikor egyszersmind a legintenzivebb is. Hogy miképen változik azután a színkép, leirtuk már az utánvilágítás tartamának tárgyalásánál. Az ott mondottak megmagyarázzák egyszersmind az itt fellépő szinváltozásokat. Ha most nem az intenzitás csökkenését vesszük, hanem fokozatos növekedését, a mit úgy érhetünk el, hogy fokozatosan erősebb fénynyel gerjesztjük a foszforeszczencziát, akkor a színváltozás fordított sorrendben megy végbe, de egyébként ugyanaz.

Minden tiszta foszfor, úgy látszik, csak egy bizonyos hullámhossznak megfelelő fénymozgásra van «hangolva», mely a maximum helyének felel meg a szinképben, de a gerjesztésnél a szomszédos helyeknek megfelelő fénymozgások is állnak elő és így sáv keletkezik a szinképben, mely annál hosszabb, minél erősebb a gerjesztés. Ilyen módon megváltozik a foszforeszczencziafény összetétele, mely azonban csak árnyalatbeli változásokban állhat.

A gerjesztő és a gerjesztett (foszforeszczenczia-) fény törékenysége között is van összefüggés. *Ez az ú. n. Stokesféle szabály.* Ezen szabály értelmében a gerjesztett fény nem tartalmazhat törékenyebb sugarakat, mint a gerjesztő fény. Ezt a szabályt — mint törvényt — Stokes[1] állította fel a fluoreszkáló testekre nézve, melyeknek legnagyobb része követi ezt a szabályt. De Lommel,[2] Stenger,[3] Wesendonck[4] és mások épen a legerősebben fluoreszkáló oldatoknál, a milyenek a magdalavörös, eosin és fluorescïn oldatai, észleltek — és pedig igen tetemes — eltérést e törvény alól, mely e szerint csak szabálynak tekinthető.

Becquerel szerint a foszforeszczencziára is érvényes a Stokes-féle szabály. Megfigyeléseit egyszerűen úgy végezte, hogy a foszforokat különböző szines üvegeken áthaladott fénynyel világította meg és azután megállapította, hogy milyen szinű fénynél képesek világitani. Ezek a kisérletek azonban nem tekinthetők döntőknek, mert az egy bizonyos fénynyel gerjesztett foszforeszczencziafény még mindig tartalmazhat kis mennyiségben törékenyebb sugarakat, a mit csak spektroszkopiai vizsgálat deríthet ki.

A Balmain-féle anyagot Lenard és Wolf vizsgálták meg a Stokes-féle szabályra.[5] Egy fotografiai lemezre rétegjével a lemeznek fordítva, ráerősítettek egy darab meg nem világított Balmain-lemezt,[6] és így lefotografáltak egy színképet, melyet a Balmain-lemeznek széle hosszában felezett. Ilyen módon két érintkező szinkép keletkezett a lemezen egymás fölött, melyek egyike közvetetlenül, másika a Balmain-lemezen áthaladva rajzolódott le. Az utóbbi azt mutatta, hogya Balmain-féle anyag a napszínkép sugarait a *G* vonaltól kezdve nyeli el, a *G*-től a vörösig

---

[1] Pogg. An. Ergänzungsband IV. 1852.

[2] Pogg. An. 143. 26, 1871; 159, 514, 1876; Wied. An. 3, 113, 1878.

[3] Wied. An. 28, 201, 1886.

[4] Wied. An. 26, 526, 1885.

[5] Eder's Jahrb. d. Photographie. 1889-iki kötet.

[6] Foszforogrammok előállítására szolgál, a kereskedelemben fordul elő.

terjedőket pedig átereszti. A Balmain-lemezen előállított napszínképből látható volt, hogy a foszforeszkálás tényleg a *G* vonal körül kezdődik és az ibolyántúli részbe húzódik. A lemeztől kisugárzott (foszforeszczenczia-) fény főleg az *F* és *G* közti sugarakat tartalmazta, tehát kisebb törékenységű sugarakat, mint a gerjesztők (*G*-től ibolyántúlig) voltak.

Kivánatosnak látszott a Stokes-féle szabály érvényességére vonatkozólag néhány, erre alkalmas tiszta foszforon, spektroszkopiai vizsgálatokat tenni.

Ha azt akarjuk eldönteni, hogy a gerjesztett fény tartalmaz-e törékenyebb sugarakat mint a gerjesztő fény, legczélszerübb mindkét fény színképét előállítani és ezek törékenyebbik határát összehasonlítani. Olyan gerjesztő fény, melynek színképében a felső határ pontosan meghatározható és mely azonkívül homogén is, csak a színképből nyerhető. Igaz, hogy ennek a fénynek intenzitása aránylag gyenge, mert az amúgy is keskeny hasadékon átment fénynek ismét csak egy kis része használható fel, de ezek a kisérletek oly kényes természetűek, hogy más erősebb pl. szines közegeken áthaladott fényt azért nem használhatunk, mert ezeknek színképe sohasem bír éles és pontosan meghatározható határokkal, hanem ezek mindig többé-kevésbbé elmosódottak.

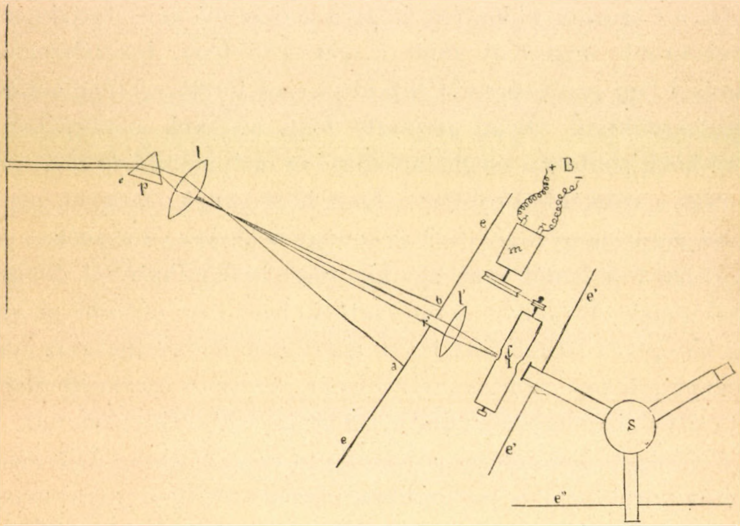
A kisérleti berendezés a következő volt. (2. ábra.) Az *r* résen (heliosztatról) bejövő párhuzamos napfénynyaláb a *p* prismával szétszóratott. Az *l* lencse az *e* ernyőn tiszta színképet állított elő (*a*, *b*), melyből az elmozdítható *r'* rés segítségével bármilyen rész volt kivágható. Az ezen a hasadékon átbocsátott homogen sugárnyaláb az *l'* lencsével összegyűjtetett és a fénykúp fokusza az *f* foszforoszkop belsejében lévő kosárkára ejtetett. A foszforoszkopból kilépő fénynek elemzése az *s* spektroszkoppal történik. A foszforoszkop hajtására szolgál az *m* elektromos motor, a melyhez való áramot a *B* battéria szolgáltatja. Az *e'* és *e''* fényfelfogó ernyők.[1]

A kisérletek előtt mindig meghatároztuk, hogy a nap-

---

[1] Az észlelést zavaró fény felfogására.

színkép mely részei gerjesztik legerősebben az illető szulfid foszforeszczencziáját. Az összes megvizsgált szulfidoknál a kék, ibolya és gyengébb mértékben az ibolyántúli sugarak bizonyultak hatásosaknak. Azután az *r'* hasadékon áthaladott fény felső (törékenyebbik) határát állapítottuk meg. A foszforeszczencziaszínkép felső határának megállapítása és az előbbivel való összehasonlítása azután megmutatta, hogy érvényes-e a Stokes-féle szabály az illető szulfid foszforeszczencziájára nézve, vagy pedig nem.



2. ábra.

Mivel csak a kék, ibolya és ibolyántúli sugarak képesek foszforeszczencziát előidézni, természetes, hogy a vörös, sárga és zöld fénynyel világitó szulfidokra érvényes a Stokes-féle szabály. A kérdés eldöntésére csakis olyan szulfidok folyhatnak be, melyek maguk is legalább kék sugarakat küldenek ki. Ilyenek a $CaS+Cu$ (kékeszöld), $SrS+Bi$ (kékeszöld), $SrS+Cu$ (világos kék) és $CaS+Bi$. Ezek közül azonban csak a három utóbbi bír oly intenzitással, hogy a kísérletre használható.

Azok a szulfidok, melyekre kevéssé törékeny foszforeszczenciafényüknél fogva érvényes a szabály, a következők: $BaS+Cu$

(parázsvörös), *CaS*+*Mn* (sárga), *BaS*+*Bi* és azok a *SrS*+*Cu*-ok, melyek nem tartalmazzák a kék sávot és melyek ennélfogva zöldszinű fényt sugároznak ki.

Az adatok egy Bunsen-Steinheil-féle spektroszkop skálaadatai, melyek — mivel itt nem szükséges — nem redukáltattak hullámhosszakra.

1. *SrS*+*Bi*. Kékeszöld foszforeszczenczia. A sáv hossza skálaadatokban 35—115.

Gerjesztő fény felső határa	foszf. fény felső határa	a foszf. fény intenzitása
144	115	igen erős
137	115	erős
121	115	gyengébb
115	115	gyenge, a határ elmosódott
110	105 (?)	igen gyenge
100	?	igen gyenge

2. *SrS*+*Cu*+η. Világos kék foszforeszczenczia. Itt csak a kék sáv jön tekintetbe, mely 86-tól 140-ig terjed.

Gerjesztő fény felső határa	foszf. fény felső határa	a foszf. fény intenzitása
151	140	nem igen erős
144	135	gyenge
140	135	gyenge
135	135 (?)	igen gyenge
130	?	igen gyenge

Itt épen a kék sáv gyengébb, melyre ennél a kísérletnél szükségünk van.

3. *CaS*+*Bi*. Ibolyáskék foszforeszczenczia. A kék sáv kiterjedése 95—135.

Gerjesztő fény felső határa	foszf. fény felső határa	a foszf. fény intenzitása
165	135	igen erős
144	135	erős
140	135	erős
135	135	gyengébb
130	133 (?)	gyengébb
125	130 (?)	gyenge
120	?	igen gyenge

A megvizsgált három szulfid között ($SrS+Bi$, $SrS+Cu+\eta$ és $CaS+Bi$) egyedül az utóbbinál látszott csekély eltérés, mely azonban a foszforeszczencziafény gyengesége miatt teljes biztonsággal nem volt megállapitható. Az a körülmény, hogy a foszforeszczencziafény épen akkor oly gyenge, midőn a gerjesztő fény felső határa vele összeesik, épen a STOKES-féle szabálynak kifejezése.

Kimondhatjuk tehát, hogy a Stokes-féle szabály a foszforeszkáló testekre is érvényes és pedig sokkal pontosabban, mint a fluoreszkáló oldatokra.

Úgy látszik, mintha a szilárd oldatokban végbemenő fényemisszió e tekintetben is több törvényszerűséget mutatna mint a cseppfolyós oldatoknál. Erre mutat az a körülmény is, hogy a fluoreszczencziafény szinképében nem találunk törvényszerűségeket.

Elméleti vonatkozások.

A földalkaliszulfidok fotoluminiszczencziájára vonatkozó kisérleti adatok még csekély számúak, úgy hogy belőlük a jelenség lényegére nézve még nem igen vonhatunk következtetést.

A szulfátok és karbonátok luminiszczencziája már sokkal behatóbban van megvizsgálva. Ezen testek luminiszczencziájának magyarázatát WIEDEMANN E. és SCHMIDT G. C. kisérlették megadni.

Értekezéseikben[1] kiterjeszkednek a földalkaliszulfidokra is, ámbátor ezeknek fotoluminiszkálását csak igen kevés esetben vizsgálták meg.

Hogy azonban a kathodsugarak hatása a megvizsgált testekre ugyanaz mint a fényé, még bizonyitásra vár. Az eddig tapasztaltakból ép az ellenkezőjét kell feltennünk. Ugyanazok a szulfátok és karbonátok, melyek a kathodsugarak hatása után élénk thermoluminiszczencziát mutattak, napfénynyel való megvilágitás után fölmelegitve nem világitottak.[2]

Másrészt úgy látszik, hogy a szulfátok és karbonátok luminiszczencziája a szulfidokétől eltér, úgy hogy az azokra érvényes vonatkozásokat nem lehet egyszerűen kiterjeszteni emezekre.

WIEDEMANN E. és SCHMIDT G. C. a hosszú utánvilágitás tartammal biró foszforeszczencziát kémiluminiszczencziának tartja. Az okok közül,[3] melyeket itt teljesen nem sorolhatunk fel — csak egyet emelünk ki. Szerzők valószinűtlennek tartják, hogy a test energiatartalmának megfelelő osczillatorius fénymozgás, perczekig, órákig, sőt napokig megmaradna és még valószinütlenebbnek, hogy ez a fénymozgás mintegy latens módon azontúl is fennálljon és melegitésnél a thermoluminiszkálást okozná.

De föl kell-e tennünk, hogy ez a fénymozgás latens állapotban van meg? Ha a $CaS+Bi$ részecskének fénymozgása hat hétig szemmel észrevehető volt, föl kell tennünk, hogy még jó ideig tovább is tart és hogy folyton csillapodik. Tényleg, ha azután időnkint erősbitjük e fénymozgást hőenergia hozzávezetése által, a thermoluminiszczenczia mind gyengébb lesz, míg végre teljesen megszünik, annak jeléül, hogy a test részecskéi ismét normális állapotba jutottak. Ha egyáltalában elfogadjuk, hogy egy test legkisebb részecskéi képesek fénymozgásra — és szerzők elfogadják[4] — akkor ép ugy el kell fogadnunk, hogy ezek a fénymozgá-

---

[1] WIED. An. 54, 604. 1895 és 56, 201. 1895.

[2] WIED. An. 56, 234. 1895. [3] Lásd WIED. An. 54, 605.

[4] WIED. 56, 241. A fluoreszkálást és a gőzök elektroluminiszkálását molekuláris mozgásokkal magyarázzák, valamint némely testek foszforeszczencziáját is.

sok a különböző testekben a különböző viszonyok (oldóközeg sűrűsége, oldott anyag legkisebb részecskéinek súlya) szerint rövidebb-hosszabb tartammal bírhatnak. E mellett szólnak azok az összefüggések is, melyeket az utánvilágítás tartama és az oldóanyag sűrűsége, valamint az oldott anyag molekulasúlya között találtunk.

Ha pedig feltesszük — mint a szerzők — hogy csak földalkaliszulfidok[1] legkisebb részecskéi nem végeznek fénymozgást (ellenben az igen rövid utánvilágítási tartammal biró természetes foszforok igen[2], *akkor ezekre a testekre nem lehet érvényes a Stokes-féle törvény, mely épen annak kifejezése, hogy miképen történik valamely fénymozgás átvitele testrészecskékre.* Hogy kémiluminiszkálásnál ennek a törvénynek nincs értelme, szerzők is hangsúlyozzák[3] és mégis LENARD és WOLF[4] és saját kisérleteim mutatják, *hogy a Stokes-féle szabály igen pontosan áll a foszforeszkáló szulfidokra* — sokkal pontosabban, mint a fluoreszkáló oldatokra. Ezen törvény alól a foszforeszkáló testeknél egyáltalában még nincs kivétel konstatálva. Sőt mindazok a fluoreszkáló oldatok, melyek igen tetemes eltérést mutatnak a szabálytól, szilárd állapotba hozva, pl. mint az eosin-zselatin, a STOKES-féle törvényt követik. (LENARD és WOLF).

Nézzük már most, hogy mennyiben érvényesek a WIEDEMANN E. és SCHMIDT G. C. által megvizsgált szilárd oldatok kémiluminiszkálására vonatkozó magyarázatok a földalkaliszulfidok foszforeszczencziájára.

Szerzők felfogása szerint — melyet itt nem részletezhetek — *a fluoreszczenczia- és foszforeszczenczia fény nem mutathatja ugyanazt a színképet,* mert az előbbi kényszerített rezgéseknek felel meg, melyeket a gerjesztő rezgések befolyásolnak, míg a foszforeszczencziánál csak a molekulákon belül lefolyó rezgő

---

[1] Azaz általában minden hosszabb tartamú foszforeszkáló anyag.

[2] WIED. An. 54, 605. l. §. 2. *a).*

[3] WIED. An. 54, 604. l. §. 1.

[4] EDER's Jahrbuch d. Photographie. 1889.

mozgások jönnek tekintetbe.[1] *Ebből azt következtetik, hogy a foszforeszkáló testeknél a fluoreszczenczia és foszforeszczenczia lényegileg rokon, de nem azonos folyamatok.* *A tiszta foszforoknál a két luminiszczencziaszínkép között csak intenzitásbeli különbség van.* (Mint fentebb láttuk, szerzők Lommel-nek keverékfoszforokon végzett megfigyeléseire hivatkoznak, melyek itt egyáltalában nem jöhetnek tekintetbe.) Szerzők szerint ezenkivül napfénynyel való gerjesztés esetében erős foszforeszczencziának, de csak gyenge (vagy egyáltalában nem) thermoluminiszczencziának szabad mutatkoznia. Kisérleteimből kiderül, hogy a thermoluminiszczenczia a szulfidoknál minden tekintetben függ a foszforeszczenczia erősségétől és hogy még hónapok mulva is észrevehető.

Azt a körülményt, hogy az erősebben égetett foszforok utánvilágitástartama nagyobb, következőleg magyarázzák. A gerjesztő sugarak hatása alatt az illető feloldott test ionjaira esik szét, melyek a gerjesztő sugaraktól az oldószerbe taszittatnak. A gerjesztő erők meglehetős hatásosak lévén, az a távolság, melyben az ionok megmaradnak, nem függ nagyon az illető oldóanyag állapotától; a visszavándorlás azonban aránylag gyenge erők hatása alatt történvén, már nagyon függ az illető oldószer sűrűségétől. Az égetés által sűrűbb lesz a tömeg és igy nagyobb ellentállást fejt ki az ionok vándorlása ellenében, mi által a lassú visszavándorlással összefüggő utánvilágitás tartama is meghosszabbodik.

Szóval, minél sűrűbb az oldószer, annál hosszab az utánvilágitás. *A tiszta foszforok ép az ellenkezőjét mutatják: minél sűrűbb az oldószer, annál rövidebb az utánvilágítás,* a mi a sűrűbb közegben végbemenő fénymozgás nagyobb csillapodásával magyarázható.

Mindezekből látható, hogy a földalkaliszulfidok luminiszczencziája avval a föltevéssel, hogy a fényemissziót kémiai változások

---

[1] Wied. An. 56, 249. l. *β*.) Különben is az intramolekuláris mozgásoknak összefüggése a kémiluminiszczencziánál feltételezett ionizálással nem egészen világos.

okozzák, nem igen magyarázható. Egyáltalában minden kémiai alapon álló magyarázatnak első nehézsége a Stokes-féle törvény megmagyarázása volna.

Az a kérdés, milyen képet alkossunk tehát magunknak erről a fényemisszióról?

Nézzük e czélra a tiszta foszforok luminiszczencziájára megállapított főbb tételeket.

I. A fénymozgás annál lassúbb (a foszforeszkálás színe annál kevésbbé törékeny), minél sűrűbb az oldóanyag.

II. Az utánvilágítás annál rövidebb, minél sűrűbb az oldóanyag.

III. Az utánvilágítás annál hosszabb, minél nagyobb az oldott fém molekulasúlya.

IV. Az égetés hőfoka (a készítésnél) nincs befolyással a foszforeszkálás színére.

V. A thermoluminiszczenczia színe mindig megegyezik a foszforeszkálás színével.

VI. A thermoluminiszczenczia minden tekintetben függ a megelőzőleg létesített fénymozgástól.

VII. A kibocsátott fény nem tartalmaz törékenyebb sugarakat, mint a gerjesztő fény.

VIII. A tiszta foszforok semmi körülmények között sem mutatnak színváltozást.

Mindezen tételek könnyen magyarázhatók azzal a föltevéssel, hogy a fénymozgás a földalkaliszulfidoknál intermolekuláris mozgásokból áll.

Akkor az I. és II. egyszerűen azzal a csillapítással magyarázható, melyet a közeg gyakorol a benne feloldott fém molekuláinak rezgő mozgására (úgy szintén érthető az a tény, hogy alacsony hőmérsékletnél megszünik a világítás, de a felmelegedésnél ismét előtünik). A III. a rezgő molekulák tehetetlenségével magyarázható, mely annál nagyobb, minél nagyobb a molekula súlya. Az V. és VI. világos, mihelyt fölvesszük, hogy a thermoluminiszczenczia nem egyéb, mint a hőenergia hozzávezetése által ismét erősbödött csillapitott fénymozgás, minek föltevése — szem előtt tartva az idevágó kisérleteket — semmi nehézséggel nem jár. A IV., VII. és VIII. önként következnek abból a föltevésből, hogy a fénymozgás intermolekuláris, mert minden szulfid a benne feloldott fém természete szerint bizonyos rezgésre van hangolva, mely a sáv maximumának felel meg, és természetszerűen a szomszédos rezgésekre is átterjed; ezekre a rezgésekre a külső befolyások csak gyengítőleg, vagy erősbitőleg hathatnak, természetét nem változtathatják meg. Ezt csak kémiai hatások tehetik, melyek a szulfid kémiai szerkezetét megváltoztatnák.

Megjegyzendő azonban, hogy a földalkaliszulfidok foszforeszczencziája *intramolekuláris* mozgásokkal is magyarázható, mert mind azok az összefüggések, melyek a molekulasúlyra állnak, egyszersmind az atomsúlyra is érvényesek.

Ámde az oldószernek befolyását a molekula belsejében végbemenő atomrezgésekre igen nehéz elképzelni. Továbbá már az a tény is, hogy utánvilágítás csak szilárd testeknél lép fel, molekuláris rezgésekre látszik mutatni. Igen szépen mutatják ezt a fluoreszkáló oldatok, melyek cseppfolyós állapotban nem birnak utánvilágítással, de foszforeszkálókká lesznek, ha molekuláik szabad mozgását korlátozzuk pl. az által, hogy zselatint keverünk hozzájuk. Ezek a fluoreszkáló zselatinok szilárd állapotban rövid (1 mp), de jól észrevehető utánvilágítással bírnak.

Végre nincs kizárva, hogy a fényemissziót inter- és intramolekuláris rezgésekkel együttesen magyarázhatni.

Végül kedves kötelességet teljesitek, midőn atyámnak Klatt Virgil áll. főrealiskolai tanárnak a megvizsgált anyagok készítéseért, dr. Klupathy Jenő egyetemi magántanár úrnak laboratoriumának szíves átengedéseért és Romsauer Lajos tanárjelölt úrnak az ábrák készítéseért, hálás köszönetet mondok.

Klatt Román.

PRÓBAMÉRÉSEK A GÁZOK BELSŐ SÚRLÓDÁSÁNAK EGY ÚJ KISÉRLETI MÓDSZERREL VALÓ MEGVIZSGÁLÁSÁHOZ.

(Első közlemény).

1. §. A gázok belső surlódási együtthatójának definicziója s a meghatározására szolgáló eddig ismeretes módszerek rövid jellemzése.

Akár folytonosnak, akár diszkrét testecskékből (molekulákból) állóknak tekintjük a gázokat, nehány mellékhipotézis bevezetésével eljuthatunk a következő differencziálegyenletekhez, a melyek a gázoknak hővezetés nélkül történő mozgásait írják le:

$$\begin{aligned}
\varrho\frac{du}{dt} &= \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + S\left\{\nabla^2 u + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}^{\star} \\
\varrho\frac{dv}{dt} &= \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + S\left\{\nabla^2 v + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \qquad (1) \\
\varrho\frac{dw}{dt} &= \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + S\left\{\nabla^2 w + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \\
0 &= \frac{d\varrho}{dt} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

ϱ jelenti itt a gáz sürűségét, p a gáz nyomását, u, v, w a gáz áramlási sebességének, X, Y, Z a gáz tömegegységére ható erőnek komponenseit az $x, y. z$ pontban t időpillanatban, $S(p, T)$ pedig a gáz természetétől és hőállapotától (nyomásától és T hőmérsékletétől) függő együttható, az ú. n. *belső surlódás* együtthatója, a mely az elmélet szerint a mozgás minőségétől teljesen független. Fizikai jelentése az (I) alatti egyenletekből kiolvasható:

$\star$ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ és $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$.

Ha a gáz mozgása az x tengely irányában történő egyenesvonalú áramlás, a melynek u sebessége kizárólag a z koordináta mentén változik, akkor S az az erő, a melyet egy az xy síkkal párhuzamos egységnyi felületű gázréteg a közvetlen alatta lévő gázrétegre gyakorol, feltéve, hogy a z koordináta hosszegységnyi megváltozásánál a gáz áramlási sebessége a sebesség egységével változik meg.

Innen kiadódik a surlódási együttható dimenziója is.

$$[S] = ML^{-1}T^{-1} (= \text{gr. cm.}^{-1} \text{ sec.}^{-1}).$$

Megjegyzendő, hogy az (I) alatti differencziálegyenletek érvényessége a levezetésüknél használt ama föltevéshez van kötve, hogy a gáz mozgása oly lassú, hogy a deformáczió mennyiségek és deformáczió sebességek

$$\left(\text{tehát } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \text{ s i. t.}\right)$$

másodrendű kifejezései elsőrendű kifejezéseikhez képest elhanyagolható kicsinyek.

A kisérlet feladata az $S(p, T)$ függvény értékének s alakjának meghatározása különböző gázokra vonatkozólag, a mi az S-t definiáló (I) alatti egyenletek segítségével történhetik meg; e mozgásegyenletek segítségével ugyanis összefüggéseket állapíthatunk meg a mozgásnak kisérletileg mérhető jellemzői és az S között, a miből azután S az illető gáznak arra az állapotára nézve, a melynél a kisérletek történtek, meghatározható.

Ha ilyenformán meghatározva az S-t, különböző mozgások S számára ugyanazon gáznak ugyanazon állapotára nézve ugyanazt az értéket szolgáltatják, ez a mellett fog szólni, hogy az (I) alatti egyenletek valóban helyesen írják le a gázoknak hővezetés nélkül történő mozgásait, még pedig annál nagyobb bizonyító erővel, minél többféle mozgás szolgáltat S számára megegyező értékeket.

Mindeddig azonban még csak igen kevés mozgást lehetett hasonló vizsgálatnak alávetni, a minek oka egyrészt az (I) alatti differencziálegyenletek bonyolult voltában, másrészt ama nehézségekben keresendő, a melyekkel gázok mozgásának megfigyelése jár. Azonkivül majdnem az összes eddig alkalmazott módszerek ellen oly kifogások tehetők, a melyek a módszerek megbizhatóságát többé-kevésbbé kétségbe vonják, úgy, hogy valóban szükségesnek látszik egy oly módszer kipróbálása, a mely e kifogásoktól lehetőleg ment s így a surlódási együtthatónak pontos meghatározására vezet.

A surlódási együtthatót eddig két lényegesen különböző úton határozták meg: lengési kisérletekből s a gázoknak kapilláris csöveken való átáramlásából. Ezek közül csak a lengési kisérletek abszolut mérések, minthogy a második, az ú. n. transpiráczió módszere már felhasználja a lengési kisérletekből kiolvasható amaz eredményt, hogy S ugyanazon hőmérséklet mellett a gáz nyomásától független.

A lengési kisérletek ismét kétfélék: olyanok, a melyeknél egy a gázban mozgó szilárd test mozgása közben gázt szorit ki helyéből s olyanok, a melyeknél a mozgó test egy forgási tengelye körül forgásokat végző forgási test, a mely tehát mozgása közben gázt nem szorit ki helyéből. Mindkét esetben a szilárd test mozgását észleljük s ennek mozgásából következtetünk a gázban végbemenő mozgásokra. Sokkal egyszerűbbek a forgási testekkel végzett kisérletek, minthogy ezeknél az (I) alatti egyenletek közvetlen alkalmazást nyerhetnek, míg pl. az ingakisérletek elmélete csak igen bonyolúlt úton fejthető ki többé-kevésbbé jogosult mellékhipotézisek igénybe vételével: nem is szolgáltattak az ingakisérletek kielégitő eredményt, minthogy pl. ugyanoly állapotú (körülbelül 760 cm nyomású 15° C. hőmérsékletű) levegőnél oly adatokat szolgáltattak S számára, a melyek

0·000104 (Stokes) és 0·000384 (O. E. Meyer)

között ingadoztak, míg a más módszerekkel végzett mérések eléggé összhangzó eredménye szerint az említett állapotú levegőre nézve S

0·00017 és 0·00019

közé esik.

E szerint csupán a forgási testekkel végzett mérésektől várhatunk megbízható eredményt: az ilynemű kisérleteket úgy rendezték be, hogy egy szilárd forgási testet felfüggesztettek egy drótra úgy, hogy a drót a forgási tengely folytatása legyen s észlelték ama lengéseket, a melyeket az illető test az illető gázban a drót torziójának behatása alatt végez: az (I) alatti egyenletek segítségével azután megállapítottak egy összefüggést S s a lengések jellemzői, a lengési idő s a logaritmikus dekrementum között, a miből S kisérleti adatok alapján kiadódott.

A szilárd testek által gázokban előidézett mozgásoknál az eddigi kisérletek alapján igen jogosultnak látszik az a föltevés, hogy a szilárd test mozgását a vele érintkező gázréteggel együtt végzi s így a szilárd test kisérletileg megfigyelhető mozgása határfeltételeket szab meg az (I) alatti differencziálegyenletek integráljaira vonatkozólag. E határfeltételek analitikai alakja általában a következő:

Ha

$$f(x, y, z) = 0,$$

akkor

$$u\,(x, y, z, t) = u_0\,(x, y, z, t)$$
$$v\,(x, y, z, t) = v_0\,(x, y, z, t)$$
$$w\,(x, y, z, t) = w_0\,(x, y, z, t),$$

a hol $f(x, y, z, t) = 0$ a szilárd test gázzal érintkező felületének egyenlete, a mely a jelen esetben (forgási test forog forgási tengelye körül) az időtől független; $u_0\,(x, y, z, t)$, $v_0\,(x, y, z, t)$, $w_0(x, y, z, t)$ pedig a szilárd test x, y, z felületi pontjának sebességi komponensei a t időben.

A $f(x, y, z) = 0$ felülettől azt követeljük, hogy:

a) kellő pontossággal előállítható legyen;

b) az (I) alatti differencziálegyenlet ϱ, u, v, w integráljai az $f=0$ felületre vonatkozó határfeltételek mellett a koordinátáknak és az időnek mindenütt folytonos és differencziálható függvényei legyenek, máskülönben nem szolgáltatják egy a valóságban végbemenő mozgás leirását.

Az eddigi kisérleteknél mindig inkább az *a)* alatti követelményre fektették a fősúlyt, míg a *b)* alatti feltétel egyiknél sem volt egész szigorúan kielégítve: O. E. MEYER és MAXWELL korongokat (síkdarabokat), TOMLINSON hengereket lengetett: a sík is, a henger is oly felületek, a melyeknek a kisérleteknél csak egy véges darabját lehetett felhasználni, holott az (I) egyenletek integrácziója csak a végtelen sík és hengerfelületek által megszabott határfeltételek mellett lehetséges oly módon, hogy az integrálok és differencziáljaik ne mutassanak szakadást: hiszen a véges korong és véges henger már egynél több felület darabjaiból vannak összerakva s e felületek metszésvonala óriási nehézségeket gördít az analitikai tárgyalás szigorú keresztülvitele elé. Oly forgási testtel kell tehát kisérletet tenni, a mely egyenletének összes valós megoldásai a végesben vannak: ezek között pedig, ha az algebrai felületek körében maradunk, különösen a forgási ellipszoidok felelnek meg czélunknak s ezek között a legegyszerűbb a *gömb*.

Cseppfolyós testek belső surlódásának megvizsgálására tényleg már kisérletet is tett HELMHOLTZ egy lengő gömbbel, a melynek belsejébe zárta a megvizsgálandó folyadékot: ugyanezt a módszert szándékozom most gázokra alkalmazni, természetesen a szükséges módosításokkal, minthogy a gázok belső surlódása a cseppfolyós testekénél sokkal kisebb.

2. §. A módszer elve.

Ha valamely szilárd forgási test leng forgási tengelye körül egy drót csavarodásának behatása alatt gázban, tapasztalat szerint az egymásután következő szögamplitudók viszonya állandó: ez az állandó viszony, a melynek természetes logaritmusa az ú. n. *logaritmusos dekrementum* igen egyszerű összefüggésben van ama fékező erők forgató nyomatékával, a melyek az amplitudók fogyását létrehozzák.

Ha ugyanis K-val jelöljük a lengő rendszernek a forgási tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát, ϑ-val a szögkilengést, $-\tau\vartheta$-val a drót rugalmasságától származó forgató nyomatékot s a fékező erőket a szögsebesség első hatványával arányosaknak vesszük fel, akkor ezen erők forgató nyomatéka is $\frac{d\vartheta}{dt}$-vel arányos lesz, úgy, hogy a rendszer mozgásegyenlete a következő lesz:

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = F\frac{d\vartheta}{dt} - \tau\vartheta. \tag{1}$$

Ismeretes azonban, hogy:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vartheta}{dt} + \omega^2\vartheta = 0 \tag{2}$$

az egyszerű csillapitott harmonikus mozgás differencziálegyenlete, a melyben β és ω meghatározzák a lengési időt és a logaritmusos dekrementumot. Ugyanis, ha λ a logaritmusos dekrementum és T a lengési idő (az az időköz, a mely egy fordulóponttól az utána következőig eltelik):

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \tag{3}$$

és

$$\lambda = \beta T. \tag{4}$$

Az (1) és (2) egyenletekből tehát azt kapjuk, hogy:

$$- F = 2\beta K. \tag{5}$$

β és K kisérletileg meghatározhatók, úgy, hogy ez által közvetlenül lemérhetjük azt a forgató nyomatékot, a melyet a fékező erők a lengő szerkezetre gyakorolnak. Annál pontosabban határozható meg F, minél nagyobb, azért kisérleteimnél lengő szerkezetül egy gömbhéjat választottam, a melyet kivülről is belülről is a megvizsgálandó gáz határolt, minthogy pedig a surlódás két gázréteg közt ceteris paribus a rétegek közt fellépő sebességkülönbséggel arányos, a lengő gömbhéjat egy vele konczentrikus nyugvó gömbhéjba helyeztem, a mely nyugvó gümbhéjnak szerepe e szerint teljesen analóg a lengő korongok alá és fölé helyezett nyugvó korongok szerepével Maxwell kisérleteinél.

Ha tehát F-et a gáz surlódási együtthatójával az (I) alatti egyenletek útján összefüggésbe tudjuk hozni, az (5) alatti képlet segitségével a surlódási együtthatót kisérleti adatok alapján kiszámithatjuk.

Egy fontos körülményre kell azonban még tekintettel lennünk: a kisérletileg meghatározott β nem kizárólag a gáz belső surlódásától származik, $F\frac{d\vartheta}{dt}$ nem csupán a gáz jelenléte folytán fellépő fékező erők forgató nyomatéka, minthogy a lengések a drót belső surlódása s más oly surlódások folytán is csillapodnak, a melyeket a lengések megfigyelése tesz szükségessé: a gáz pl. a tükrön is surlódik, a melynek segitségével az amplitudókat leolvassuk. Mind e zavaró körülmények kiküszöbölésére a következő eljáráshoz folyamodtam: meghatároztam β-t az egész lengő rendszerre vonatkozólag, azután levettem a lengő gömbhéjat s a gömbhéj nélkül történő lengések logaritmusos dekrementumát határoztam meg: hogy pedig még a gömbhéj eltávolitása után is egy kényelmesen megfigyelhető rendszerrel legyen dolgom, a gömbhéjon kivüli rész tehetetlenségi nyomatékát mesterségesen megnagyobbitottam, úgy, hogy a gömb fölé egy a forgási tengelyre merőleges szárakkal biró keresztet helyeztem, a melynek szárain eltolható súlyocskák nyugodtak; minthogy pedig a drót belső surlódása s a felfüggesztésnél fellépő surlódás nagy mértékben függ a megterheléstől, gondoskodtam arról, hogy a gömb levétele után egy a gömb fölé helyezett sárgarézhengerben annyi ólomtara találhasson helyet, a mennyi a gömb eltávolitása folytán fellépő megterhelés-veszteséget kárpótolja (l. az 1. és 2. ábrát a következő közleményekben).

Az (5) alatti képletben szereplő F e szerint két részből áll, az egyik rész a gáznak a gömbhéjon való surlódásától származik, ezt a részt jelöljük F_g-vel, a másik rész a többi fékező erőtől származik, ez a rész legyen F_k; akkor, ha az ólomtarának igen csekély surlódásától eltekintünk, a gömb eltávolitása után a rendszer mozgásegyenlete a következő lesz:

$$K'\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - F_k\frac{d\vartheta}{dt} + \tau\vartheta = 0 \qquad (6)$$

s ha β' az észlelt logarithmusos dekrementum osztva a T' lengési idővel:

$$-F_k=2\beta'K';$$

minthogy pedig

$$-F=2\beta K=-F_g-F_k=-F_g+2\beta'K',$$

a gáz belső surlódásának a gömbhéjra gyakorolt forgató nyomatékát jellemző $-F_g$ számára a következő relácziót kapjuk:

$$-F_g=2\beta K-2\beta'K'. \qquad \text{(II)}$$

F_g-t számítás útján összefüggésbe hozzuk az S-sel, a β, K, β', K' mennyiségeket pedig kisérletileg meghatározzuk s ezzel meg vannak az összes adataink S meghatározására.

A gömb fölé helyezett kereszt még egy igen kényelmes eljárást is nyújt a rendszer tehetetlenségi nyomatékának meghatározására: elég ugyanis a lengési időket a súlyoknak a kereszt szárain való két különböző elhelyezése mellett meghatározni, ebből már meghatározható a rendszer tehetetlenségi nyomatéka, úgy, hogy ismerve az eszköz méreteit, a surlódási együttható meghatározásához a következő négy kisérlet szükséges:

Meg kell figyelni az amplitudók fogyását és a lengési időt (a mi egy időben történhetik);

1. midőn a gömbhéj a kereszttel együtt leng és a súlyok a kereszt szárainak a végén vannak (λ_1, T_1);

2. midőn a gömbhéj a kereszttel együtt leng és a súlyok a kereszt szárainak metszéspontjához közel vannak (λ_2, T_2);

1'. midőn a kereszt a gömbhéj nélkül ólomtarával leng és a súlyok ugyanúgy vannak elhelyezve mint az 1. esetben (λ_1', T_1');

2'. midőn a kereszt a gömbhéj nélkül ólomtarával leng és a súlyok ugyanúgy vannak elhelyezve mint a 2. esetben (λ_2', T_2').

Az 1. és 2. megfigyelések a gömbhéjjal együtt lengő szerkezetek K_1 és K_2 tehetetlenségi nyomatékát szolgáltatják, míg 1'. és 2'. a gömbhéj nélküli szerkezetek megfelelő K_1' és K_2' tehetetlenségi nyomatékát. A berendezésnek nagy előnyére szolgál az, hogy folytonos ellenőrzést nyújt a meghatározott értékekre vonatkozólag: ugyanis fenn kell állani a következő egyenlőségeknek:

$$K_1 - K_1' = K_2 - K_2' \tag{8}$$

$$\beta_1 K_1 - \beta_1' K_1' = \beta_2 K_2 - \beta_2' K_2', \tag{9}$$

továbbá a

$$-F_g(\beta_1, S) = 2(\beta_1 K_1 - \beta_1' K_1') \tag{II$_1$}$$

és

$$-F_g(\beta_2, S) = 2(\beta_2 K_2 - \beta_2' K_2') \tag{II$_2$}$$

egyenletekből kiszámított S-eknek meg kell egyezniök egymás közt.

Hogy most már a (II$_1$) és (II$_2$) egyenletekből a kisérlet szolgáltatta adatok alapján valóban meg tudjuk határozni S-t, az F_g függvény alakját kell elméleti úton az (I) alatti differencziálegyenletek segítségével előállítani.

Zemplén Győző.

A TALPPONTI HÁROMSZÖGEKRŐL.

Legyenek az ABC háromszög oldalait mérő számok a, b, c és a szögeit ívmérték szerint mérő számok α, β, γ. Legyenek továbbá az A, B, C szögpontokból az átellenes oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai A_1, B_1, C_1. Az $A_1B_1C_1$ háromszöget ABC *talpponti háromszögé*nek mondjuk. Legyenek szögei α_1, β_1, γ_1.

Minthogy

$$AB\,.\,AC_1 = AB_1\,.\,AC = bc\cos\alpha$$
$$BC\,.\,BA_1 = BC_1\,.\,BA = ca\cos\beta$$
$$CA\,.\,CB_1 = CA_1\,.\,CB = ab\cos\gamma,$$

azért

$$ABC \sim AB_1C_1 \sim A_1BC_1 \sim A_1B_1C,$$

miből az következik, hogy ha ABC háromszög hegyesszögű:

$$\alpha_1 = \pi - 2\alpha, \quad \beta_1 = \pi - 2\beta, \quad \gamma_1 = \pi - 2\gamma,$$

ha pedig ABC háromszög A-nál tompaszögű:

$$\alpha_1 = 2\alpha - \pi, \quad \beta_1 = 2\beta, \quad \gamma_1 = 2\gamma.$$

Ha ABC háromszög derékszögű, talpponti háromszöge nem igazi háromszög, mert két szögpontja egybeesik. Ezért a derékszögű háromszögeket mellőzzük:

Hozzuk be a következő jelölést:

$$\lambda \equiv \mu$$

jelentse azt, hogy $(\lambda - \mu)$ egész számú többszöröse π-nek. Két ilyen számot mondjunk kongruensnek a π modulusra nézve. Egy számmal kongruens számok közül válaszszunk ki főértékül azt, a mely π-nél kisebb és nem negativ. Igazi háromszög szögmérő számainak főértékei 0-tól különbözők.

Ezt a jelölést használva, ha ABC háromszög tompaszögű

$$\alpha_1 \equiv 2\alpha, \quad \beta_1 \equiv 2\beta, \quad \gamma_1 \equiv 2\gamma,$$

ha pedig ABC háromszög hegyesszögű:

$$\alpha_1 \equiv -2\alpha, \quad \beta_1 \equiv -2\beta, \quad \gamma_1 \equiv -2\gamma.$$

Legyen

$A_1B_1C_1$ talpponti háromszöge $A_2B_2C_2$

$A_2B_2C_2$ « « $A_3B_3C_3$

és így tovább $A_nB_nC_n$ háromszöget ABC *n-dik talpponti háromszögének* mondjuk. Legyenek ennek szögei α_n, β_n, γ_n.

$$\alpha_n \equiv 2^n\alpha \quad \beta_n \equiv 2^n\beta \quad \gamma_n \equiv 2^n\gamma$$

vagy

$$\alpha_n \equiv -2^n\alpha \quad \beta_n \equiv -2^n\beta \quad \gamma_n \equiv -2^n\gamma$$

a szerint, a mint az $A_kB_kC_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$ háromszögek között a hegyesszögű háromszögek száma páros vagy páratlan.

Keressük fel és számláljuk meg mindazokat a háromszögeket, a melyek n-edik talpponti háromszögeikhez hasonlók. A megszámlálást úgy értjük, hogy az összes háromszögeket, a melyekre nézve szögeiknek mérő számai ugyanazok, egynek számítjuk.

Ha a szögpontok jelölését jól választjuk, akkor a feltételek arra nézve, hogy a háromszög n-dik talpponti háromszögéhez hasonló legyen:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \pm 2^n\alpha \\ \beta &\equiv \pm 2^n\beta \\ \gamma &\equiv \pm 2^n\gamma \end{aligned} \qquad (1)$$

vagy

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \pm 2^n\beta \\ \beta &\equiv \pm 2^n\alpha \\ \gamma &\equiv \pm 2^n\gamma \end{aligned} \qquad (2)$$

vagy

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \pm 2^n\beta \\ \beta &\equiv \pm 2^n\gamma \\ \gamma &\equiv \pm 2^n\alpha, \end{aligned} \qquad (3)$$

a mely kongruencziákhoz jön még az

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \qquad (4)$$

egyenlet.

Az ilyen háromszöget pozitiv vagy negativ jellegűnek fogjuk nevezni a szerint, a mint a reá vonatkozó kongruencziák jobboldalán + vagy — jegy áll. Oszszuk be továbbá ezeket a háromszögeket első, második és harmadik osztályba a szerint, a mint szögeik az (1) és (4), (2) és (4), vagy (3) és (4) feltételeket elégitik ki.

Ha valamelyik első osztályú háromszög egyenlő szárú ($\alpha=\beta$), akkor az egyszersmind második osztályú is, ha pedig egyenlő oldalú ($\alpha=\beta=\gamma$), akkor az egyszersmind második és harmadik osztályú is.

Hogy mindenik háromszög csak egyszer kerüljön megszámlálás alá, azért az ilyen egyenlő oldalú vagy egyenlő szárú háromszögeket csak az első osztályhoz fogjuk számítani.

I.

A pozitiv jellegű, első osztályú háromszögek szögeit

$$\alpha \equiv 2^n\alpha$$

$$\beta \equiv 2^n\beta \qquad (1)$$

$$\gamma \equiv 2^n\gamma$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \qquad (4)$$

feltételek határozzák meg, ezek pedig a következő egyenletekkel egyenlő értékűek:

$$\alpha = 2^n\alpha - \lambda\pi$$

$$\beta = 2^n\beta - \mu\pi$$

$$\gamma = 2^n\gamma - \nu\pi$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi,$$

a melyekben λ, μ, ν egész számokat jelentenek. Ha közülök az első hármat összeadjuk, lesz és π-vel elosztunk, lesz

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\pi} = 2^n\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\pi} - (\lambda+\mu+\nu),$$

a honnan a negyedik egyenletre való tekintettel

$$\lambda+\mu+\nu = 2^n - 1 \qquad (5)$$

α, β, γ-ra pedig a következőket találjuk

$$\alpha=\lambda\frac{\pi}{2^n-1}, \quad \beta=\mu\frac{\pi}{2^n-1}, \quad \gamma=\nu\frac{\pi}{2^n-1}.$$

Tehát az összes idetartozó háromszögeket megkapjuk, ha (2^n-1) számot minden lehetséges módon három pozitiv egész szám összegére bontjuk.

Hogy az (5) egyenlet mindenik megoldása csak egyszer kerüljön megszámlásás alá, tegyük fel, hogy

$$\lambda \leqq \mu \leqq \nu$$

és a megoldásokat rendezzük első sorban λ, másodsorban μ nagysága szerint.

A $\lambda=1$-hez tartozó megoldások elseje

$$1, \quad 1, \quad 2^n-3,$$

utolsója

$$1, \quad 2^{n-1}-1, \quad 2^{n-1}-1,$$

tehát számuk

$$2^{n-1}-1.$$

A $\lambda=2$-höz tartozó megoldások elseje (feltéve, hogy $n>2$)

$$2, \quad 2, \quad 2^n-5,$$

utolsója

$$2, \quad 2^{n-1}-2, \quad 2^{n-1}-1,$$

tehát számuk

$$2^{n-1}-3.$$

Tehát a $\lambda=1$ és $\lambda=2$-höz együtt tartozó megoldások száma:

$$2^n-4.$$

A $\lambda=3$ és $\lambda=4$-hez együtt tartozó megoldások száma ennél 6-tal kisebb, a $\lambda=5$ és $\lambda=6$-hoz együtt tartozó megoldások száma ennél megint 6-tal kisebb és így tovább.

Ha n páros, akkor

$$2^n-4\equiv 0 \text{ (mod. 6)}$$

és az utolsó megoldás

$$\frac{2^n-1}{3}, \quad \frac{2^n-1}{3}, \quad \frac{2^n-1}{3},$$

a melynél λ páratlan.

Így ebben az esetben a megoldások száma

$$1+6\left(1+2+3+\dots+\frac{2^n-4}{6}\right)=\frac{2^{2n-2}-2^{n-1}+1}{3}. \tag{6}$$

Ha pedig n páratlan, akkor

$$2^n-4\equiv 4\,(\text{mod. } 6)$$

és az utolsó megoldás

$$\frac{2^n-2}{3},\quad \frac{2^n-2}{3},\quad \frac{2^n+1}{3},$$

a melynél λ páros. Az összes megoldások száma ebben az esetben olyan arithmetikai haladvány összege, melynek kezdőtagja 4, különbsége 6, utolsó tagja

$$2^n-4=4+6\,\frac{2^n-8}{6}$$

és a tagok száma $\frac{2^n-2}{6}\cdot$ Igy a pozitiv jellegü első osztályú háromszögek száma páratlan n esetében

$$\frac{2^{2n-2}-2^{n-1}}{3}. \tag{7}$$

Megjegyzendő, hogy a talált formulák $n=1$ és $n=2$ esetében is helyesek.

A negativ jellegű első osztályú háromszögek szögeit

$$\begin{aligned}\alpha&\equiv-2^n\alpha\\ \beta&\equiv-2^n\beta \qquad (1)\\ \gamma&\equiv-2^n\gamma\end{aligned}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi. \tag{4}$$

Ezekből

$$\alpha=\lambda\frac{\pi}{2^n+1}$$

$$\beta=\mu\frac{\pi}{2^n+1}$$

$$\gamma=\nu\frac{\pi}{2^n+1},$$

a hol

$$\lambda+\mu+\nu=2^n+1.$$

A megoldások száma épen úgy határozható meg, mint elébb. Az eredmény az, hogy ez a szám páros n esetében

$$\frac{2^{2n-2}+2^{n-1}}{3}. \tag{8}$$

Páratlan n esetében pedig

$$\frac{2^{2n-2}+2^{n-1}+1}{3}. \tag{9}$$

II.

A pozitiv jellegű második osztályú háromszögek szögeit

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv 2^n\beta \\ \beta &\equiv 2^n\alpha \\ \gamma &\equiv 2^n\gamma \end{aligned} \tag{2}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \tag{4}$$

határozzák meg.

Ha a (4) egyenlet helyett

$$\alpha+\beta+\gamma\equiv 0 \tag{10}$$

kongruentiát vezetjük be, akkor a (2) és (10) kongrucncziák azon inkongruens megoldásainak száma, a melyekben α, β, γ egyike sem $\equiv 0$, kétakkora, mint a (2) és (4) feltételeket kielégítő igazi háromszögek száma.

Mert ha α, β, γ a (2) és (10) kongruencziák megoldása, megoldás $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ is. Ha most α, β, γ főértéke α', β', γ', úgy, hogy

$$\begin{aligned} 0&<\alpha'<\pi \\ 0&<\beta'<\pi \\ 0&<\gamma'<\pi. \end{aligned}$$

a (10) kongruenczia értelmében

$$\alpha'+\beta'+\gamma'=\pi \quad \text{vagy} \quad =2\pi,$$

míg $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ főértékeinek összege

$$(\pi-\alpha')+(\pi-\beta')+(\pi-\gamma')=2\pi \quad \text{vagy} \quad =\pi.$$

Tehát a két megoldás közül csak egyik tesz eleget a (4) egyenletnek.

A (2) kongruencziákkal æquivalensek

$$\alpha \equiv 2^{2n}\alpha$$
$$\beta \equiv 2^{n}\alpha$$
$$\gamma \equiv 2^{n}\gamma,$$

a melyekből

$$\alpha \equiv \lambda \frac{\pi}{2^{2n}-1}$$

$$\beta \equiv 2^{n}\lambda \frac{\pi}{2^{2n}-1}$$

$$\gamma \equiv \nu \frac{\pi}{2^{n}-1},$$

a hol a (10) kongruenczia értelmében

$$(2^{n}+1)\lambda+(2^{n}+1)\nu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2^{2n}-1)$$

vagyis

$$\lambda+\nu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2^{n}-1). \tag{11}$$

A (2) és (10) kongrueneziák összes 0-tól különböző inkongruens megoldásait megkapjuk, ha λ helyett $(2^{2n}-1)$-nél kisebb, ν helyett $(2^{n}-1)$-nél kisebb, a (11) kongruencziát kielégítő pozitiv egész számokat választunk minden lehetséges módon.

A ν helyett választható számok

$$1, 2, 3, \ldots 2^{n}-2.$$

Ha ezek egyike ν_1 és λ_1 jelöli azt a legkisebb pozitiv egész számot, a mely mellett

$$\lambda_1+\nu_1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2^{n}-1),$$

akkor a ν_1-hez tartozó összes λ-ákat

$$\lambda_1+\lambda'(2^{n}-1) \tag{12}$$
$$(\lambda'=0, 1, 2, \ldots, 2^{n})$$

adják.

De ezek közül megállapodásunk szerint ki kell zárnunk azt, a mely mellett

$$\alpha \equiv \beta$$

volna, a mi akkor áll be, ha

$$\lambda \equiv 2^{n}\lambda \ (\mathrm{mod.}\ 2^{2n}-1),$$

vagyis

$$\lambda \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2^{n}+1).$$

Ennek a feltételnek pedig a (12) számok közül csak egy felel meg. Igy a ν_1-hez tartozó λ értékek száma 2^n.

Igy a (2) és (10) kongruencziák nulltól különböző inkongruens megoldásainak száma

$$2^n(2^n-2).$$

De ezeknek csak fele ad igazi háromszöget s megjegyzendő az is, hogy λ és $\lambda \,.\, 2^n$ értékek ugyanazon háromszöghez vezetnek a két első szögpont felcserélésével. Igy a fentebbi számot 4-gyel kell osztanunk, hogy a pozitiv jellegű második osztályú háromszögek számát megkapjuk. Ezek száma tehát

$$2^{n-1}(2^{n-1}-1). \qquad (13)$$

A negativ jellegű második osztályú háromszögek szögeit

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv -2^n\beta \\ \beta &\equiv -2^n\alpha \qquad (2) \\ \gamma &\equiv -2^n\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma &= \pi \qquad (4) \end{aligned}$$

feltételek határozzák meg. Ezekből

$$\alpha \equiv \lambda\frac{\pi}{2^{2n}-1}$$

$$\beta \equiv -2^n\lambda\frac{\pi}{2^{2n}-1}$$

$$\gamma \equiv \nu\frac{\pi}{2^n+1},$$

a hol

$$\lambda-\nu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2^n+1).$$

A háromszögek száma épen úgy határozható meg, mint elébb és számláló számnak megint

$$2^{n-1}(2^{n-1}-1) \qquad 13)$$

jön ki.

III.

A pozitiv jellegű harmadik osztályú háromszögek szögeit

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv 2^n\beta \\ \beta &\equiv 2^n\gamma \qquad (3) \end{aligned}$$

$$\gamma \equiv 2^n \alpha$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \tag{4}$$

határozzák meg.

A (4) egyenlet helyett vegyük megint az

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \tag{10}$$

kongruencziát. A (3) kongruencziákkal æquivalensek

$$\alpha \equiv 2^{2n}\gamma$$
$$\beta \equiv 2^n\gamma$$
$$\gamma \equiv 2^{3n}\gamma.$$

Ezekből

$$\alpha \equiv 2^{2n}\nu \frac{\pi}{2^{3n}-1}, \quad \beta \equiv 2^n\nu \frac{\pi}{2^{3n}-1}, \quad \gamma \equiv \nu \frac{\pi}{2^{3n}-1}.$$

A (10) kongruenczia szerint kell, hogy

$$(2^{2n}+2^n+1)\nu = (2^{3n}-1)\nu_1$$

legyen, a hol ν_1 egész szám. Tehát

$$\frac{\nu}{2^{3n}-1} = \frac{\nu_1}{2^{2n}+2^n+1}$$

és így

$$\alpha \equiv 2^{2n}\gamma$$
$$\beta \equiv 2^n\gamma$$
$$\gamma \equiv \nu_1 \frac{\pi}{2^{2n}+2^n+1}.$$

A (3) és (10) kongruencziák összes nulltól különböző inkongruens megoldásait megkapjuk, ha ν_1 helyett

$$1, 2, 3, \ldots, 2^{2n}+2^n$$

számokat teszszük.

De ezek közül páros n esetében ki kell hagynunk a

$$\nu' . \frac{2^{2n}+2^n+1}{3}$$
$$(\nu' = 1, 2)$$

számokat, mert ezek mellett

$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma$$

volna.

Igy a megoldások száma páros n esetében

$$2^{2n}+2^{n}-2,$$

páratlan n esetében pedig

$$2^{2n}+2^{n}.$$

De ezeknek csak fele ad igazi háromszöget s tekintetbe veendő az is, hogy ν_1, $2^n\nu_1$, $2^{2n}\nu_1$ ugyanazon háromszöghöz vezetnek a szögpontok cziklikus felcserélésével.

Igy a fennebbi számok 6-tal osztva adják a pozitiv jellegű harmadik osztályú háromszögek számát. Tehát ez a szám páros n esetében

$$\frac{2^{2n-1}+2^{n-1}-1}{3}, \tag{14}$$

páratlan n esetében pedig

$$\frac{2^{2n-1}+2^{n-1}}{3}. \tag{15}$$

A negativ jellegű harmadik osztályú háromszögek szögeit

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv -2^n\beta \\ \beta &\equiv -2^n\gamma \\ \gamma &\equiv -2^n\alpha \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \tag{4}$$

határozzák meg. Ezekből

$$\alpha\equiv 2^{2n}\gamma$$

$$\beta\equiv -2^{n}\gamma$$

$$\gamma\equiv \nu\,\frac{\pi}{2^{2n}-2^{n}+1}.$$

A háromszögek száma páros n esetében

$$\frac{2^{2n-1}-2^{n-1}}{3}. \tag{16}$$

Páratlan n esetében pedig

$$\frac{2^{2n-1}-2^{n-1}-1}{3}. \tag{17}$$

Ha most a (6), (13), (14), — (7), (13), (15), — (8), (13), (16), — (9), (13), (17) formulákkal adott számokat összeadjuk, azt találjuk, hogy úgy a pozitiv, mint a negativ jellegű háromszögek száma

$$2^{n-1}(2^{n}-1)$$

és így, ha $\psi(n)$ jelöli az összes háromszögek számát, melyek n-edik talpponti háromszögeikhez hasonlók, akkor

$$\psi(n) = 2^n(2^n-1).$$

De e háromszögek között azok a háromszögek is mind előjönnek, a melyek már d-edik talpponti háromszögeikhez hasonlók, feltéve, hogy d osztója n-nek.

Azon háromszögeket kell most még megszámlálnunk, a melyek talpponti háromszögei között az n-dik az első, mely az eredeti háromszöghez hasonló. Legyen ezek száma $\chi(n)$.

Ugyanazzal a gondolatmenettel, mint a melylyel az n-nél nem nagyobb pozitiv egész számok között az n-hez relativ primszámokat szoktuk megszámlálni, következik, hogy ha n különböző törzstényezői:

$$p_1, p_2, \ldots, p_k,$$

akkor

$$\chi(n) = \psi(n) - \sum\left(\frac{n}{p_1}\right) + \sum\psi\left(\frac{n}{p_1 p_2}\right) - \cdots,$$

a hol az első összeg mindenik p-re, a második ezek minden ismétlés nélkül való másodrendű kombinácziójára és így tovább vonatkozik.

Példák:

$$\chi(1) = \psi(1) = 2$$
$$\chi(2) = \psi(2) - \psi(1) = 10$$
$$\chi(3) = \psi(3) - \psi(1) = 54$$
$$\chi(4) = \psi(4) - \psi(2) = 228$$
$$\chi(5) = \psi(5) - \psi(1) = 990$$
$$\chi(6) = \psi(6) - \psi(2) - \psi(3) + \psi(1) = 3966.$$

Megjegyzendő, hogy $\chi(n)$ osztható n-nel, mert ha ABC talpponti háromszögei között az n-edik az első, mely hozzá hasonló, ugyanaz a tulajdonsága van meg az

$$A_k B_k C_k$$
$$(k=1, 2, 3, \ldots, n-1)$$

háromszögek mindegyikének. Igy a $\chi(n)$ számú háromszög n-ként olyan csoportokat alkot, hogy a csoport bármelyik tagjához a többi tag tartozik mint talpponti háromszög.

*

Álljanak itt végül mindazon háromszögek szögmérő számai, a melyek első, második, vagy harmadik talpponti háromszögeikhez hasonlók. A táblázat egy-egy sorában álló három szám, a három szám összegével osztva és π-val szorozva, adja a szögmérő számokat. Az első, második és harmadik oszlopban az első, második és harmadik osztályú háromszögek vannak csoportonkint felsorolva.

	$n = 1$	
1, 1, 1	—	1, 2, 4
	$n = 2$	
1, 1, 3	1, 4, 10	1, 4, 16
2, 2, 1	2, 8, 5	2, 8, 11
	1, 11, 3	1, 9, 3
	2, 7, 6	2, 5, 6

$n = 3$

1, 1, 5	1, 8, 12	1, 8, 64
2, 2, 3	2, 16, 3	2, 16, 55
3, 3, 1	4, 11, 6	4, 32, 37
1, 1, 7	1, 8, 54	3, 24, 46
2, 2, 5	2, 16, 45	6, 48, 19
4, 4, 1	4, 32, 27	12, 23, 38
1, 3, 5	13, 41, 9	5, 40, 28
2, 6, 1	26, 19, 18	10, 7, 56
4, 3, 2	11, 25, 27	20, 14, 39
	20, 34, 9	11, 15, 47
	40, 5, 18	22, 30, 21
	17, 10, 36	29, 13, 31
	1, 13, 7	1, 11, 7
	2, 5, 14	2, 3, 14
	4, 10, 7	4, 6, 9
	1, 55, 7	1, 49, 7
	2, 47, 14	2, 41, 14
	4, 31, 28	4, 25, 28
	5, 23, 35	5, 17, 35
	10, 46, 7	10, 34, 13
	20, 29, 14	20, 11, 26
	19, 37, 7	
	38, 11, 14	
	13, 22, 28	

Vályi Gyula.

EGY BIZONYOS HATÁRÁTMENETRE VONATKOZÓ KRITÉRIUM.

Legyen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

összetartó sor és $f(\alpha)$ az α valós változó minden véges értékére értelmezett valós és egyértékű véges függvény, a melyre nézve

$$\lim_{\alpha=+0} . f(\alpha) = 1 \tag{1}$$

és

$$\lim_{\alpha=+\infty} . f(\alpha) = 0; \tag{2}$$

legyen továbbá

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(n\alpha) \tag{3}$$

az $\alpha=0$ hely bizonyos környezetében összetartó sor. Kérdés: milyen *további megszorításnak* vetendő alá az $f(\alpha)$ függvény, mely az eddigiekhez csatolva ezekkel együtt a

$$\lim_{\alpha=+0} . \varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{4}$$

egyenletet vonja maga után?

A következőkben erre nézve oly *elegendő* feltételt adunk, a melyet mint kritériumot kényelmesen lehet használni.

Legyenek

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu, p_{\nu+1}, \ldots$$

nagyságuk rendjében az α argumentum ama pozitiv értékei, a melyekre nézve az $f(\alpha)$ függvénynek szélső értéke van. [Tehát $p_{\nu+1} > p_\nu$, a p_ν, $p_{\nu+1}$ számközön belül $f(\alpha)$ monoton változik, ha a

p_ν helyen maximum van, akkor a $p_{\nu+1}$ helyen minimum stb.]. Akkor tételünk a következőképen hangzik:

Ha a $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |f(p_\nu)-f(p_{\nu+1})|$ *sor összetartó, akkor a* (4)*-ben kifejezett határátmenet jogosult.*

Legyen ugyanis

$$a_0+a_1+\cdots+a_n=s_n,$$

akkor [ha a egyszersmindenkorra a (3) alatti sor összetartási tartományának egy 0-tól különböző pozitiv helye]

$$\varphi(a)=s_0+(s_1-s_0)f(a)+(s_2-s_1)f(2a)+\cdots+(s_n-s_{n-1})f(na)+\cdots$$

vagy

$$\varphi(a)=\sum_{n=0}^{\infty} S_n[f(na)-f(n+1)a)].$$

De mivel

$$s_n=S+\varepsilon_n,$$

hol

$$|\varepsilon_n|<\delta,$$

ha csak $n>m$, bármilyen kicsiny pozitiv szám is a δ, tehát

$$\varphi(a)=\sum_{0}^{m} S_n[f(na)-f(n+1)a)]+\sum_{m+1}^{\infty}\varepsilon_n[f(na)-f(n+1)a)]+$$
$$+S\sum_{m+1}^{\infty}[f(na)-f(n+1)a)]. \qquad (5)$$

De a (2) egyenlet következtében az (5) jobboldalának harmadik része:

$$Sf[(n+1)a]$$

és így *ha a elegendő kicsiny*

$$|\varphi(a)-S|<\delta+\delta\sum_{n=0}^{\infty}|f(na)-f(n+1)a)|,$$

ha csak a jobboldalon álló sor összetartó.

De ez valóban összetartó; ha ugyanis n_ν az n amaz értéke, a melyre nézve

$$(n_\nu-1)a<p_\nu\leq n_\nu a,$$

akkor, ha a szóban forgó pozitiv-tagú sorban az

$$|f[(n_\nu-1)\alpha]-f(n_\nu\,\alpha)|$$

tagokat az

$$|f[(n_\nu-1)\alpha]-f(p_\nu)|+|f(p_\nu)-f(n_\nu\,\alpha)|$$

kéttagú összegekkel pótoljuk, általában nagyobbitunk, de azért még mindig az

$$M=|1-f(p_1)|+|f(p_1)-f(p_2)|+\cdots+|f(p_\nu)-f(p_{\nu+1})|+\cdots$$

sorhoz, tehát — a föltétel szerint — összetartó sorhoz jutunk.

Ha tehát α elegendő kicsiny

$$|\varphi(\alpha)-S|<2\delta+\delta M,$$

a mivel a tétel bizonyitva van.

Hasonló módon vizsgálandó $\lim\limits_{\alpha=-0}.\ \varphi(\alpha)$.

Különös esetek.

Ha a p_ν helyek száma *véges*, akkor a (4) alatti határátmenet elvégezhető; úgyszintén ha

$$\sum_1^\infty |f(p_\nu)|$$

összetartó.

Alkalmazás a Riemann-féle tételre.

Legyen

$$\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n$$

oly trigonometrikus sor, melyre nézve

$$\lim_{n=\infty}.\ a_n=0,\quad \lim_{n=\infty}.\ b_n=0$$

és a mely egy bizonyos x helyen összetartó.

A tagonként való kétszeri integráczió utján nyert sor

$$F(x)=A_0\frac{x^2}{2}-A_1-\frac{A_2}{2^2}-\frac{A_3}{3^2}-\cdots-\frac{A_n}{n^2}-\cdots$$

mindenütt összetartó és

$$\frac{F(x+2a)-2F(x)+F(x-2a)}{4a^2}=A_0+A_1\left(\frac{\sin a}{a}\right)^2+\cdots+A_n\left(\frac{\sin na}{na}\right)^2+\cdots$$

De minthogy az

$$f(a)=\left(\frac{\sin a}{a}\right)^2$$

függvényre nézve

$$\sum_1^\infty |f(p_\nu)|$$

összetartó, azért

$$\lim_{a=0}.\frac{F(x+2a)-2F(x)+F(x-2a)}{4a^2}=\sum_{n=0}^\infty A_n.$$

Fejér Lipót.

A BUDAI KIR. EGYETEM FIZIKAI MUZEUMA

1777-BEN.

Ismeretes, hogy Mária Terézia királyné 1777-ben a nagyszombati kir. tudomány-egyetemet Budára helyezte át. Ez alkalommal az egyetem fizikai és mechanikai gyűjteményének értékesebb részét is átszállították a királyi palotába. Az országos levéltár udvari kanczelláriai osztályának 1777. évi 1756. számú ügyirata (melylyel a 2305. számút is egybe kell vetnünk) megőrizte e tárgyak jegyzékét, mely tanügyi és művelődéstörténeti szempontból nem érdektelen. A természettudományok hazai történetének vélek szolgálatot tehetni, midőn e jegyzéket közlöm:

Elenchus Instrumentorum, quae e Musaeo Physico Tyrnaviensi Budam transferenda videntur:

1. Cochlea Archimedis cum adnexo plano inclinato.
2. Tres coni cum suo plano inclinato, in quo unus eorum contra nativam suam gravitatem ascendere videtur, alter descendit, tertius immotus consistit.
3. Cyclois ex ligno efformata, cum duobus globis ex orichalco.
4. Fornacula chemica ex ferro.
5. Duo specula concava, alterum majus, minus alterum.

Azoknak az eszközöknek jegyzéke, a melyeknek a nagyszombati fizikai intézetből Budára való átvitele kivánatosnak látszik.

1. Archimedes csigája (vízemelő csavar) a hozzá való lejtővel.
2. Három lejtőjén — természetes nehézsége ellenében — fölfelé szaladó, leereszkedő és mozdulatlanul álló kúp.
3. Fából kifaragott cyclois két sárgaréz gömbbel.
4. Chemiai kohó vasból.
5. Egy nagyobb és egy kisebb vájt tükör.

6. Machinula motuum duorum compositionem exhibens.

7. Machina, quæ ostendit, corpora oblique projecta parabolam describere.

8. Polyspastus minor cum trochleis ex orichalco et zonis sericeis.

9. Antlia pneumatica cum 3 recipientibus vitreis.

10. Tabula cum sex eburneis globis, pro exhibendis corporum collisionibus.

11. Aeolipila ex cupro.

12. Instrumentum ex lamina, quod infusa aqua circumagitur.

13. Vectis ferreus cum suo fulcro itidem ferreo.

14. Duo fontes intermittentes e lamina, diversi generis.

15. Duo microscopia solaria, unum cum apparatu orichalcino, alterum cum ligneo.

16. Tria ampla vitra cylindrica, tabulæ ligneæ affixa, tubosque communicantes referentia.

17. Duo alia inæqualium diametrorum vitra, basi ligneæ affixa tubosque communicantes efficientia.

18. Cylindrulus vitreus, spiritum vini et bullas vitreas continens, ac quandam thermometri speciem exhibens.

6. Két mozgás összetételét kimutató gépecske.

7. Gép, annak kimutatására, hogy a ferdén elhajított testek parabolát írnak le.

8. Kisebb csigasor sárgaréz csigákkal és selyemfonállal.

9. Légszivattyú 3 üvegharanggal.

10. Tábla hat elefántcsontgolyóval, a testek ütközésének kimutatására.

11. Heron gőzpörgettyűje.

12. Segner kereke.

13. Vasemelő vasállványnyal.

14. Időszaki forrás két különböző fajtájú mintája bádogból.

15. Két napmikroszkop ; egyik sárgaréz, másik faszereléssel.

16. Három — fatáblához erősített — bő üveghenger, mint közlekedő csövek.

17. Két más, egyenlőtlen átmérőjű — faalapzathoz erősített — üveg, a melyek közlekedő edényt képeznek.

18. Kis üveghenger borszeszszel és üveggömbökkel. Ez a hőmérőnek egy bizonyos fajtáját tünteti elő.

19. Pyrometrum Muschenbrockianum.

20. Alia item machinula, corporum volumen calore augeri ostendens.

21. Unum par cylindrorum Muschenbrockianorum ex orichalco.

22. Hemisphæria Magdeburgica.

23. Tubus e duobus cylindris vitreis compositus, 5 circiter pedes longus.

24. Cylindrulus cum diversis liquoribus inclusis, 4 elementa [exhibens.

25. Follis hydrostaticus cum tubo lamineo.

26. Ferrea pertica, tabulæ e ligno efformatæ innixa, pro sustentanda bilance.

27. Stateræ Romanæ duæ, sortis diversæ.

28. Fons ordinarius e lamina.

29. Lucerna magica parva.

30. Camera obscura manualis.

31. Microscopium simplex cum theca.

32. Machina virium centralium.

33. Machina optica, in qua globus contra nativam gravitatem sursum repere videtur.

19. Musschenbroek-féle tűzmérő.

20. Egy más ily fajtájú eszköz, a mely a testek térfogatának hő által való nagyobbodását mutatja ki.

21. Egy pár Musschenbroek-féle henger sárgarézből.

22. Magdeburgi félteke.

23. Két üveghengerből összetett cső, kb. 5 láb hosszú.

24. Kis henger különféle folyadékokkal, a mely a 4 elemet tünteti fel.

25. Hidrosztatikai fujtató bádogcsövel.

26. Vasrúd kifaragott fatáblára erősítve, mérleg tartására.

27. Két különféle fajtájú római (gyors) mérleg.

28. Közönséges kút bádogból.

29. Kicsiny bűvös lámpa.

30. Kézi sötét kamara.

31. Egyszerű mikroszkop tokkal.

32. Középponti erőknek gépe.

33. Fénytani gép, a melyben a gömb természetes nehézkedése ellenére fölfelé gurulni látszik.

34. Laterna ex lamina, cujus ope innotescit, quanam ratione aer ad alendam flammam sit necessarius.

35. Machina electrica, in qua loco sphæræ vitreæ orbis vitreus adhibetur, cum 5 fortificatoriis, duobus orbibus vitreis, reliquoque apparatu.

36. Alia machina electrica cum sphæra vitrea.

37. Mensa instar armarii, cui machinæ hæ electricæ insistunt.

38. Camera optica.

39. Thermometra Reaumuriana 3.

40. Barometrum cum tubo recurvo.

41. Microscopium compositum ex orichalco. Alia duo cum apparatu ligneo.

42. Quatuor cistulæ microscopicæ. Duo polyedra vitra.

43. Bilanx cum scutelis ex cupro. Aliæ duæ cum scutelis ex orichalco. Denique una major bilanx, pro majoribus corporibus ponderandis.

44. Mortarium orichalcinum cum pistillo.

45. Electrica machina, quæ solo attactu, sine ulla frictione scintillat.

34. Bádoglámpa, a melylyel megmutathatni, miért szükséges a levegő a láng táplálásához.

35. Elektromos gép, az üveggömb helyett üvegkoronggal, 5 erősítővel, két üvegkoronggal és más szükséges eszközökkel.

36. Más elektromos gép üveggömbbel.

37. Szekrény-féle asztal, a melyhez ezeket az elektromos gépeket erősíthetjük.

38. Fénytani kamara.

39. 3 db Réaumur hőmérő.

40. Légnyomásmérő visszahajlított csővel. (Szivornyás barometer.)

41. Összetett mikroszkop sárgarézből. Más kettő fából való szereléssel.

42. Négy mikroszkopos szekrény. Két üveg polyæder.

43. Kalmármérleg rézcsészékkel. Más kettő sárgarézcsészékkel. Végre egy nagyobb mérleg nagyobb testek mérésére.

44. Sárgarézmozsár törőjével.

45. Elektromos gép, a mely puszta érintésre minden dörzsölés nélkül szikrázik.

46. Sphæra armillaris ex orichalco tota.

47. 14 pondera plumbea minora, diversæ sortis.

48. 2 Magnetes artificiales.

49. Speculum cylindricum cum 4 imaginibus.

50. Tubus vitreus 3 circiter pedes longus, cuidam experimento serviens.

51. Fontes salientes vitrei tres, diversæ sortis.

52. Tubus vitreus, cui inclusa aqua instar corporis solidi sonat.

53. Cartesianus dæmunculus.

54. Prismata vitrea tria.

55. Varii tubi vitrei.

56. Tria hydrometra.

57. Mensa una instar armarii, cui machinæ electricæ innituntur.

58. Fulcrum e duro ligno pro sustentandis bilancibus etc.

59. Libellæ duæ parvæ aquaticæ.

60. Duo coni vitrei pro iride in muro producenda servientes.

61. Specula minora tria.

46. Armilláris gömb sárgarézből (az éggömb körei).

47. 14 kisebb különféle fajtájú ólomsúly.

48. Két mesterséges mágnestű.

49. Hengeres tükör 4 képpel.

50. Üvegcső, kb. 3 láb hosszú, egy bizonyos kisérletre.

51. Három — különféle fajtájú — szökőkút üvegből.

52. Üvegcső, a melyben a beleöntött víz úgy hangzik, mintha csak szilárd test volna.

53. Cartesius ördögöcskéje (búvárja).

54. Három üveghasáb.

55. Különféle üvegcsövek.

56. Három areometer.

57. Egy szekrény-féle asztal, a melyen az elektromos gépek állnak.

58. Állvány kemény fából mérlegek stb. tartására.

59. Két kis vízlibella.

60. Két üvegkúp, a melyek arra szolgálnak, hogy a falon szivárványt idézhessünk elő.

61. Három kisebb tükör.

62. Machinula, in qua speculum immutare videtur colorem objecti ante speculum siti.

Elenchus Machinarum quae e Musaeo Mechanico Tyrnaviensi Budam transponi deberent.

1. Axis in peritrochio verticalis.
2. Axis in peritrochio horizontalis.
3. Axis in peritrochio cum rota connexus, ad corpora in altum attollenda destinatus.
4. Grus major.
5. Grus minor.
6. Machina pro incutiendis palis in ripis fluminum.
7. « « « « pontium.
8. Alia a priore diversa ejusdem usus.
9. Alia a prioribus diversa ejusdem usus.
10. Machina pro palis oblique in terram incutiendis destinata.
11. Cochlea Archimedis, pro aqua e fluvio in hortos derivanda.
12. Machina, vulgo rosarium, pro aqua in altum attollenda.

62. Gépecske tükörrel, a mely megváltoztatja a tükör előtt elhelyezett tárgy szinét.

A nagyszombati mechanikai intézetből Budára átszállitandó gépek jegyzéke.

1. Függőleges hengerkerék (köznyelven : gugora).
2. Vízszintes hengerkerék (köznyelven : járgány).
3. Kerekes gerendely testek emelésére.
4. Nagyobb (emelő) daru.
5. Kisebb daru.
6. Gép part-czölöpök beverésére.
7. Gép a híd-czölöpök beverésére.
8. Más az előbbitől különböző ugyanoly használatra.
9. Más az előbbiektől különböző ugyanoly használatra.
10. Gép a czölöpök rézsút beverésére.
11. Archimedes csigája folyóból vizbevitelre a kertbe.
12. Gép, köznyelven paternostergép, vizemelésre.

13. Cochlea ordinaria, pro explicanda cochleæ simplicis theoria serviens.

14. Cochlea infinita, pro ponderibus facile in altum attollendis.

15. Machina pro trabibus, columnis lapideis etc. erigendis serviens.

16. Machinula duobus cilindris et cochlea infinita constans, pro variis seminibus aliisque rebus comminuendis.

17. Machina, in qua masculus, extremitate pedis dratæ horizontaliter extensæ insistens, funambulum repræsentat, variosque motus citra lapsus periculum facit.

18. Mola communis, quam aqua impellit.

19. Mola, quam homines facile impellunt.

20. Mola, quam equi in gyrum eundo impellunt.

21. Mola, quam boves calcando impellunt.

22. Mola contusoria rerum variarum o. g. minerarum.

23. Mola, quam ventus impellit.

24. Mola pro charta conficienda.

25. Mola pro asseribus efformandis.

13. Közönséges csiga, az egyszerű csiga elméletének megmagyarázására.

14. Végtelen csiga, a melylyel testeket könnyen lehet magasba emelni.

15. Gép, gerendák, kőoszlopok stb. fölegyenesítésére.

16. Két hengerből és végtelen csigából álló gép különféle magok és más tárgyak örlésére.

17. Egyensúlyozó báb. (Gép, melyben egy emberke lábújjhegyével vízszintesen kifeszített dróton állva, kötéltánczost mutat s mindenféle mozdulatokat végez a lebukás veszedelme nélkül.)

18. Közönséges vizi malom.

19. Malom, melyet emberek könnyű szerrel hajtanak (száraz malom).

20. Malom, melyet körben járó lovak hajtanak.

21. Malom, melyet ökrök hajtanak (taposó malom).

22. Zúzó malom.

23. Szélmalom.

24. Papirosmalom.

25. Léczfaragó fűrészmalom.

26. Machina exhibens modum, quo fabri folles suos facilius agitare queant.

27. Machina pro exponenda cochleæ mobilis theoria serviens.

28. Rotæ dentatæ pro attollendis in altum corporibus.

29. Bilanx cum ponderibus orichalcinis, unius libræ, mediæ libræ et quadrantis.

30. Machina malleus dicta, cujus ope metalla cuduntur.

31. Machina, quæ folles agitat, ubi metalla liquantur.

32. Follis ex asseribus compactus et egregium effectum præstans.

33. Fons saliens intra recipiens vitreum; ex interni æris rarefactione ortum ducens.

34. Machina pro theoria fontium explicanda serviens.

35. Machina theoriam aquæ, ob pressionem in altum salientis, exhibens.

36. Fons Heronis saliens.

37. Sipho anatomicus.

38. Scalæ, trianguli formam referentes, pro deponendis apponendisque machinis.

39. Polyspastus trochleis ligneis constans, cæteroquin ferreus.

26. A kovács-fujtató könnyebb hajtására szolgáló gép.

27. Gép a mozgó csiga elméletének megmagyarázására.

28. Fogas kerekek a testek emelésére.

29. Mérleg — egész-, fél- és negyedfontos sárgaréz súlyokkal.

30. Fémzúzó gépkalapács.

31. Fémolvasztóműhely fujtató gépe.

32. Léczekből összeállított nagyhatasú fujtató.

33. Szökőkút üvegharangban, a mely a benne levő levegőnek megritkulása folytán megered.

34. Gép, a kutak elméletének megmagyarázásához.

35. Gép, a mely bemutatja a nyomás folytán magasba szökkenő víz elméletét.

36. Heron ugró kútja.

37. Anatómiai fecskendő.

38. Háromszögalakú lépcső a gépek kellő elhelyezésére.

39. Csigasor; csigája fából, többi része vasból.

40. Alter polyspastus ligneus 4 trochlearum.

41. Machinula, serviens pro exponenda theoria baculi unius, vel duorum, ope quorum pondus a pluribus portatur.

42. Plana inclinata; cunei.

43. Machinula ostendens, quomodo culter Pistorum, aliaque similia ad theoriam vectis revocentur.

44. Lapis unius centenarii, ferreo unco instructus, pro ostendenda variarum machinarum efficacitate.

Közli *Fináczy Ernő.*

40. Más facsigasor 4 csigával.

41. Gépecske, a mely annak az elméletnek megmutatására szolgál, hogyan szállíthatnak többen terhet egy vagy két rúdon.

42. Lejtők, ékek.

43. Kis gép, mely megmutatja, miképen vezethető vissza a kenyérvágó kés és más hasonló eszköz az emelő elméletére.

44. Egy db. mázsás kő vaskampóval fölszerelve, hogy a különféle gépek hatásképességét kimutathassuk.

Ford. *Szekeres Kálmán.*

PRÓBAMÉRÉSEK A GÁZOK BELSŐ SURLÓDÁSÁNAK EGY ÚJ KISÉRLETI MÓDSZERREL VALÓ MEGVIZSGÁLÁSÁHOZ.

(Második közlemény.)

3. §. A módszer mathematikai elmélete.

Legyenek $\Xi_s df$, $H_s df$, $Z_s df$ annak az erőnek derékszögű komponensei, a melyet a gáz belső surlódása a gömbnek egy x, y, z koordinátákkal biró df nagyságú felületelemére gyakorol, a melynek a gáz belseje felé mutató normálisa s irányitással bír, akkor, ha a koordinátarendszer úgy van választva, hogy minden koordinátának pozitiv iránya pozitiv normálisa a másik két koordináta pozitiv iránya által meghatározott síknak, akkor a gáznak a gömbhéjra gyakorolt surlódási erejének forgató nyomatéka a következő:

$$\Phi = \int_1 (x_1 H_{s_1} - y_1 \Xi_{s_1})\, df_1 + \int_2 (x_2 H_{s_2} - y_2 \Xi_{s_2})\, df_2. \qquad (11)$$

Az 1 indexű mennyiségek a gömbhéjnak belső, a 2 indexűek külső felületére vonatkoznak s az integrácziók az egész gömbfelületre terjesztendők ki. Φ tulajdonképen csak a z menti komponense a gáz belső surlódása forgató nyomatékának, de nekünk csak erre van szükségünk, hacsak a lengő gömbhéj czentrumát választva koordinátakezdőpontnak a z tengelyt a lengő szerkezet forgási tengelyével ejtjük össze, minthogy így a rendszernek a z tengely körüli mozgását vizsgáljuk: különben is a forgató nyomatéknak e másik két komponense zérus.

Ha λ, μ, ν az s irány koszinusai és

$$A_x,\ B_y,\ C_z,\ B_z = C_y,\ C_x = A_z,\ A_y = B_x$$

a belső surlódásnak ú. n. feszültségi komponensei az x, y, z pontban, akkor, mint ismeretes, a gáz által a df felületre gyakorolt surlódási erőt meghatározzák a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} -\Xi_s &= A_x\lambda + A_y\mu + A_z\nu \\ -H_s &= B_x\lambda + B_y\mu + B_z\nu \\ -Z_s &= C_x\lambda + C_y\mu + C_z\nu. \end{aligned} \tag{12}$$

A belső surlódás feszültségi komponensei pedig a gáznak az illető pont környezetében végbemenő mozgásával következő összefüggésben vannak:

$$\begin{aligned} -A_x &= 2S\left\{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \\ -B_y &= 2S\left\{\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \\ -C_z &= 2S\left\{\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \\ -B_z &= S\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -C_x &= S\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ -A_y &= S\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

A most tárgyalt mozgásnál a (13) alatti egyenletek tetemesen egyszerűsödnek: ugyanis, minthogy a gázban forgási test mozog forgási tengelye körül, sehol a gázt helyéből nem szoríthatja ki s így minden egyes pontjában a ϱ sürűség az idő folyamán változatlan marad, azaz

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0,$$

s így az (I) alatti rendszer utolsó egyenlete értelmében az egész gázban mindenütt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Minthogy pedig a szilárd test bármely pontjának sebessége az xy síkba esik, a gázban sem keletkeznek oly mozgások, a melyeknek z-menti sebessége a zérustól különböző volna, úgy, hogy a gáz bármely pontjára nézve bármely időben

$$w = 0.$$

A (13) alatti egyenletek tehát a mi esetünkben a következők:

$$\begin{aligned} -A_x &= 2S\frac{\partial u}{\partial x} \\ -B_y &= 2S\frac{\partial v}{\partial y} \\ -C_z &= 0 \\ -B_z &= S\frac{\partial v}{\partial z} \\ -C_x &= S\frac{\partial u}{\partial z} \\ -A_y &= S\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Vezessük be végre a derékszögű sebességi komponensek helyébe a szögsebességet, a mely az egész gömbhéjra nézve ugyanabban az időpillanatban ugyanaz, azaz legyen:

$$u = -y\psi(r,t) \qquad v = x\psi(r,t),^{*}$$

a hol $$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -y\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{x}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -y\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{y}{r}-\psi \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -y\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{z}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= x\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{x}{r}+\psi \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= x\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{y}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= x\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{z}{r}. \end{aligned} \tag{15}$$

---

[*] Hogy ψ az egész gázban is csak r és t függvénye, azt később pontosan be fogjuk bizonyítani.

A (12), (14) és (15) alatti egyenletekből most már a következő összefüggéseket kapjuk a gáz valamely pontjában uralkodó surlódásbeli feszültség s a mozgás jellemzői közt:

$$\begin{aligned}\Xi_s &= S\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\left\{-2yx\lambda+(x^2-y^2)\mu-yz\nu\right\}\\ H_s &= S\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\left\{(x^2-y^2)\lambda+2xy\mu+xz\nu\right\}\qquad(16)\\ Z_s &= S\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\left\{-yz\lambda+xz\mu\right\}.\end{aligned}$$

Mivel pedig a gömb belső felületének valamely x_1, y_1, z_1 pontjában a gáz belseje felé mutató irány koszinusai:

$$-\frac{x_1}{r_1},\quad -\frac{y_1}{r_1},\quad -\frac{z_1}{r_1},$$

s a megfelelő mennyiségek a gömbhéj külső felületének valamely x_2, y_2, z_2 pontjában

$$\frac{x_2}{r_2},\quad \frac{y_2}{r_2},\quad \frac{z_2}{r_2},$$

a hol r_1 a gömbhéj belső r_2 a külső felületének sugara, a gömbhéj felületén:

$$\begin{aligned}\Xi_{s_1} &= Sy_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=r_1} & \Xi_{s_2} &= -Sy_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=r_2}\\ H_{s_1} &= -Sx_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=r_1} & H_{s_2} &= Sx_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=r_2}\\ Z_{s_1} &= 0. & Z_{s_2} &= 0.\end{aligned}$$

Betéve ezeket az értékeket a (11) alatti egyenletbe, azt kapjuk, hogy:

$$\Phi = -S\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_1\int_1(x_1^2+y_1^2)\,df_1-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_2\int_2(x_2^2+y_2^2)\,df_2\right\}.$$

Az itt fellépő integrálok az egyenletes egységnyi felületi sürűséggel beborított 1 és 2 gömbfelületeknek a forgási tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai: elvégezve az egyszerű számítást, a következő alakban kapjuk meg Φ-t, a melyből a számításainkban szereplő F_g is egyszerűen kiadódik:

$$-\Phi = \frac{8}{3}\pi S\left\{r_1^4\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_1-r_2^4\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_2\right\}.\qquad\text{(III)}$$

Hogy tehát Φ-t kisérletileg mérhető mennyiségekkel kifejezhessük, meg kell határoznunk az (I) alatti egyenletekből ψ-t mint r és t függvényét, tekintettel a tapasztalat nyujtotta határföltételekre.

Legközelebbi feladatunk tehát a következő: meg kell integrálnunk az (I) alatti differencziálegyenleteket, a melyek a jelen esetben nagy mértékben egyszerűsbödnek ama határföltételek mellett, hogy az r_1 és r_2 sugarú gömbfelületeken fekvő gázrészek szögkilengései, vagy a mi ugyanarra megy ki, szögsebességei a csillapitott harmonikus mozgás törvényeit követik.

Úgy az általános gondolatmenet, mint a részletekre vonatkozólag útmutatással szolgáltak a már kidolgozott analog problémák megoldásai (Helmholtz,* Maxwell,** Stokes ***); leghamarabb czélhoz vezetett az az út, a melyet Helmholtz követett, épen a módszerek rokon természete folytán.

Emlitettük már, hogy az (I) alatti differencziálegyenletek érvényessége ama föltevéshez van kötve, hogy a deformácziók és deformáczió-sebességek másodrendű kifejezései a lineáris kifejezésekhez képest elhanyagolható kicsinyek: a jelen probléma tárgyalásánál még azt is fel akarjuk tenni, hogy maguk a sebességek is olyan rendű mennyiségek, mint a deformáczió-sebességek és tehetjük ezt, minthogy különösen ha a lengési idő nem kicsiny (ezen kisérleteknél 43 és 93 s. voltak a lengési idők határai a különböző berendezéseknél), az amplitudók előbb-utóbb annyira csillapodnak, hogy a sebességek valóban kielégitik a föntebbi föltevést. Az (I) alatti egyenletekben tehát a következő egyszerűsitéseket vezethetjük be:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{17}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial t} \tag{18}$$

és

$$\frac{dw}{dt}=0, \tag{19}$$

---

* Wissenschaftliche Abhandlungen I, 172.

** Scient. Papers II, 1.

*** Cambridge Phil. Trans. VIII és London Phil. Trans. 177.

minthogy, a mint már említettük, az egész gázban mindenütt

$$w=0. \tag{20}$$

A

$$\frac{d\varrho}{dt}=0 \tag{21}$$

reláczió folytán, a melyről már szintén szó volt, a folytonossági egyenlet (az (I) rendszer utolsó egyenlete) a következőre redukálódik:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{22}$$

A külső erőkre vonatkozólag pedig az áll, hogy

$$X=0 \qquad Y=0 \qquad Z=-g, \tag{23}$$

a hol g a földnehézség gyorsulása, a melyet az egész gázban állandónak tekintünk.

Végre minthogy az x, y tengelyek irányában semmiféle változása p-nek nem következik be

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0. \tag{24}$$

p-nek pontos definicziója ugyanis a következő: p a középértéke ama nyomásoknak, a melyek a koordinátatengelyek irányában egy-egy a nyomás irányára merőleges felületelemen uralkodnak: e nyomások pedig két részből állanak: egy p_0 mind a három koordináta tengelyre nézve közös részből, a mely a gáznak a deformáczió előtti állapotától s csupán a deformáczió létrehozta térfogatváltozástól függ, s a belső surlódás megfelelő komponenséből: úgy, hogy:

$$p=\frac{3p_0+A_x+B_y+C_z}{3}.$$

A mint azonban a (13) alatti relácziókból látható, minden körülmények közt:

$$A_x+B_y+C_z=0,$$

úgy, hogy

$$p=p_0,$$

s így csakis akkor változhatik valamely irányban, ha valamely külső erő, vagy hőmérsékváltozás abban az irányban a gázban térfogat- illetőleg sürűségváltozást idézne elő. Az x és y tengely mentén azonban ily okok nem szerepelnek s így a (24) alatti egyenletek helyesek.

Ennek a körülménynek részletezését azért tartottam szükségesnek, hogy azt az esetleg fellépő aggodalmat eloszlassam, hogy nem okoznak-e a belső surlódásnak x és y-menti komponensei oly változásokat, a melyek a p mennyiség megváltozását hozzák magukkal.

A most tárgyalt problémánál e szerint az (I) alatti differencziálegyenletek a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned}
\varrho\frac{\partial u}{\partial t} &= S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
\varrho\frac{\partial v}{\partial t} &= S\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
\varrho\, g &= -\frac{\partial p}{\partial z} \qquad\qquad (\mathrm{I}^\star)\\
0 &= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Ezekből a differencziálegyenletekből kell meghatároznunk az u, v sebességi komponenseket a következő határfeltételeknek megfelelően:

a) Ha

$$x^2+y^2+z^2=r_1^2,$$

akkor

$$\psi=-\frac{u}{y}=\frac{v}{x}=De^{-\beta t}\cos\gamma t=\Psi.$$

b) Ha

$$x^2+y^2+z^2=r_2^2,$$

ismét

$$\psi=\Psi.$$

c) Ha

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

akkor

$$u=v=\psi=0,$$

a hol R jelenti a nyugvó gömb sugarát.

Zemplén Győző.

A Mathematikai és Physikai Társulat VIII. tanulóversenye.

A Társulat meghivójára f. évi október hó 12-ikén Budapesten 63, Kolozsvárt 9 középiskolai érettségi vizsgálatot tett tanuló jelentkezett, összesen 14-gyel több, mint a mult évben.

A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a Társulat igen nagyszámú érdeklődő tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett folyt le és Kolozsvártt e. 6^h 15^m, Budapesten 6^h 39^m-kor ért véget. Lefolyásában a két helyen gondosan vezetett jegyzőkönyv tanusága szerint semminemű szabálytalanság nem fordult elő, és a tételek kidolgozására engedélyezett négy órai idő alatt Budapesten 36, Kolozsvártt 2 dolgozat adatott be, tehát 8-czal több, mint a mult évben.

A tanulóverseny tételei a következők voltak:

1. Bebizonyítandó, hogy az

$$1^n+2^n+3^n+4^n$$

hatványösszeg, a melyben n pozitiv egész számot jelent, akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha az n kitevő nem osztható 4-gyel.

2. Bebizonyítandó, hogy

$$u = \operatorname{cotg.}\frac{R}{4}$$

oly másodfokú egyenletnek, és

$$v = \frac{1}{\sin.\frac{R}{4}}$$

oly negyedfokú egyenletnek tesz eleget, a melyben az együtthatók mindannyian egész számok és a legmagasabb fokú tag együtthatója *egygyel* egyenlő (itt $R=90°$-t jelent).

3. Bebizonyítandó, hogy az a és b egész számokból alakított

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ ba$$

sorozatban foglalt számok közül a b-vel oszthatóknak száma egyenlő a és b legnagyobb közös osztójával.

A dolgozatok az ellenőrző tagok jelenlétében lepecsételtettek s az elnökség elbirálásukra bizottságot küldött ki, melynek jelentése a következő:

Tisztelt választmány!

A Mathematikai és Physikai Társulat az alulirott bizottságot küldötte ki, hogy a VIII. mathematikai tanulóversenyen beadott dolgozatokat megbirálja s véleményét a t. választmány elé terjessze.

A bizottság a dolgozatokat pontosan átvizsgálta s örömmel konstatálta az idei verseny szép sikerét. A beadott dolgozatok minősége és mennyisége szép bizonyságát adja a versenyző ifjak mathematikai tudásának. A kitüzött tételeket két versenyző hibátlanul oldotta meg. A bizottság egyhangulag elhatározza, hogy az első díjat Póka Gyulának, a losonczi állami főgimnázium volt növendékének itéli oda, ki mind a három tételt szépen, röviden oldotta meg. A második díjra a bizottság Baranyó Ernőt, a szolnoki állami főgimnázium volt növendékét tartja legérdemesebbnek, ki a három tételt, a másodikba becsuszott kis hibától eltekintve, ugyancsak helyesen fejtette meg, de megoldásai kevésbbé egyszerüek s fogalmazása is gyengébb. Az első díj nyertesét Winter József és Ondrus Pál tanították, a második díj győztesét pedig Zoltán Leo.

A jutalmazásra ajánlott dolgozatokon kívül még két dolgozat érdemel dicséretet. Az egyiket Bayer Béla, ugyancsak a losonczi főgimnázium volt növendéke készítette, a ki az első és harmadik feladatot igen szépen és röviden oldotta meg s csak a második tétel második részét hibázta el. A másik, dicséretet érdemlő dolgozat Messik Gézáé, ki ugyancsak két feladatot hibátlanul fejtett meg s csak a második feladat megoldásában követett el kisebb hibákat. Messik Géza a budapesti VIII. kerületi községi főreált látogatta s Éberling József tanítványa volt.

Budapest, 1901 november hó 1-én.

Bartoniek Géza, *Rados Gusztáv,*
Éberling József, *Rátz László,*
Kőnig Gyula, *Szekeres Kálmán,*
Kövesligethy Radó, *Szijártó Miklós,*

a biráló bizottság tagjai.

E jelentést a választmány egyhangulag magáévá tette s elhatározta, hogy az I. br. Eötvös-díjat Póka Gyula a losonczi főgimnázium és Winter József és Ondrus Pál tanárok növendékének, a II. br. Eötvös-díjat Baranyó Ernő a szolnoki főgimnázium és Zoltán Leo tanár növendékének itéli oda. Dicsérőleg kiemeli továbbá Bayer Béla losonczi főgimnáziumi és Messik Géza a VIII. kerületi főreáliskola és Éberling József tanár növendékének dolgozatát.

A díjakat báró Eötvös Loránd elnök a november 7-iki ülésen a Társulat tíz évi fennállásáról is megemlékező szép beszéd kiséretében osztotta ki.

A Mathematikai és Physikai Társulat VIII. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.[*]

1. Póka Gyula dolgozata.

1. Tételünk bebizonyítására helyettesítsünk n helyébe $(4k+l)$ t, a hol k tetszőleges, l pedig 5-nél kisebb pos. egész szám, ekkor az adott kifejezést A-val jelölve

$$A=1^{4k+l}+2^{4k+l}+3^{4k+l}+4^{4k+l},$$

vagy

$$A=1^l 1^k+2^l.16^k+3^l.81^k+4^l.216^k.$$

Vizsgáljuk eme kifejezést l különböző értékei mellett. Legyen

1) $l=0$, akkor

$$A_0=1^k+16^k+81^k+216^k$$

vagy

$$A_0=[(1^k-1)+(16^k-1)+(81^k-1)+(216^k-1)+4]$$

2) $l=1$, ekkor

$$A_1=1^k+2.16^k+3.81^k+4.216^k$$

vagy

$$A_1=[(1^k-1)+2(16^k-1)+3(81^k-1)+4(216^k-1)+10]$$

3) $l=2$, ez esetben

$$A_2=1^k+4.16^k+9.81^k+16.216^k$$

vagy

$$A_2=[1^k-1)+4(2^k-1)+9(3^k-1)+16(216^k-1)+40],\text{(sic !)}$$

végre

4) $l=3$, a mikor

$$A_3=1^k+8.16^k+27.81^k+64.216^k,$$

vagy

$$A_3=[(1^k-1)+8(16^k-1)+27(81^k-1)+64(216^k-1)+100].$$

Miután két mennyiség n-dik hatványának különbsége mindig osztható az alapok különbségével, azért A_1, A_2, A_3 minden tagja, s így maga A_1,

---

[*] A dolgozatok változtatás és javitás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

A_2, A_3 is osztható 5-tel. Ellenben A_0-nek utolsó tagja nem, többi tagja pedig osztható 5-tel, s így A_0 soha nem osztható 5-tel.

2. *a)*

$$u = \text{ctg.}\frac{R}{4} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{R}{2}}{1-\cos\frac{R}{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = 1+\sqrt{2}$$

$$= \frac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2-4(-1).1}}{2.1}.$$

Összehasonlítva ezt az eredményt a másodfokú egyenlet ált. megoldásával

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

azt találjuk, hogy a-nak megfelel $+1$; b-nek -2, c-nek -1, tehát u csakugyan eleget tesz az

$$x^2-2x-1=0$$

egyenletnek.

β) $$v = \frac{1}{\sin\frac{R}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{R}{2}}{2}}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

De $4+2\sqrt{2}$ még így is írható:

$$\frac{-(-8)+\sqrt{(-8)^2-4.8.1}}{2.1}.$$

Látjuk, hogy ez a tört ismét egy másodfokú egyenlet ált. megoldásának az alakjával bír, a hol

$$a=1;\quad b=-8;\quad \text{és}\quad c=+8$$

s így v^2 megoldása az

$$x^2-8x+8=0$$

egyenletnek, maga v pedig kielégíti az

$$x^4-8x^2+8=0$$

negyedfokú egyenletet, hol a ismét 1, s a többi coefficiensek is egész számok.

3. Legyen a és b legnagyobb közös osztója l, ekkor

$$a=l.n$$

és

$$b=l.m,$$

a hol m és n pos. egész számok.

Miután m és n rel. prímszámok, azért ka általános tag akkor osztható b-vel, ha k m-nek többszöröse. De k 1-től $b=l.m$-ig vehet fel értékeket, világos tehát, hogy ezen értékek közül l értéknek kell m-mel oszthatónak lennie.

2. Baranyó Ernő dolgozata.

I) $$1^n+2^n+3^n+4^n$$

ha n nem osztható 4-el, akkor ilyen alakot vesz fel

$$n=4l+s,$$

hol «l» lehet 0 is és «s» mindig kisebb, mint «4».

Tehát «s» lehet, 1, 2 vagy 3.

1) eset. $s=1$, tehát $n=4l+1$.

I°) $$1^n+2^n+3^n+4^n=1+2.16^l+3.81^l+4.256^l=$$
$$=1+2(3.5+1)^l+3(16.5+1)^l+4(51.5+1)^l$$

innen a

$$(3.5+1)^l=(3.5)^l+\binom{l}{1}(3.5)^{l-1}+\cdots+\binom{l}{l-1}3.5+1$$

$$(16.5+1)^l=(16.5)^l+\binom{l}{1}(16.5)^{l-1}+\cdots+\binom{l}{l-1}16.5+1$$

és

$$(51.5+1)^l=(51.5)^l+\binom{l}{1}(51.5)^{l-1}+\cdots+\binom{l}{l-1}51.5+1$$

e három sor minden egyes tagja az utolsón kívül osztható «5»-tel, tehát így is jelölhetem, első sor

$$(3.5+1)^l=5.k_1+1$$
$$(16.5+1)^l=5.k_2+1$$
$$(51.5+1)^l=5.k_3+1,$$

hol k_1, k_2, k_3 mind positiv egész szám, ezeket betéve I°)-be

$$1+2.5.k_1+2+3.5k_2+3+4.5.k_3+4=10k_1+15k_2+20k_3+10$$

mely «5»-tel osztható.

2) és 3) $n=4l+2$ és $n=4l+3$

2) $$1^n+2^n+3^n+4^n=1+4(5.k_1+1)+9(5.k_2+1)+16(5k_3+1)=$$
$$=20k_1+45k_2+80k_3+30.$$

3) $$1^n+2^n+3^n+4^n=1+8(5k_1+1)+27(5k_2+1)+64(5k_3+1)=$$
$$=40k_1+135k_2+320k_3+100$$

ezek szintén oszthatók «5»-tel.

Ha ellenben «n» osztható 4-el, vagyis

$$n=4l+4,$$

akkor a sor $1^n+2^n+3^n+4^n$ így is írható

$$=1+16(5.k_1+1)+81(5.k_2+1)+256(5k_3+1)=$$
$$=80.k_1+405.k_2+1280.k_3+354,$$

tehát akkor ez nem osztható «5»-tel, mert 354 «5»-tel el nem osztható.

3) $$a,\ 2a,\ 3a,\ldots,\ ba$$

az a és b legnagyobb közös osztója legyen m, tehát

$$a:m=r$$

és

$$b:m=s,$$

hol r és s kölcsönösen prímszámok, ebből

$$a=r\,.\,m$$
$$b=s\,.\,m$$

ha ez értékeket a

$$a,\ 2a,\ 3a,\ldots,\ ba$$

sorba behelyettesítjük és «b»-vel osztunk, lesz:

$$\frac{r}{s},\ 2\frac{r}{s},\ 3\frac{r}{s},\ m.s\frac{r}{s},$$

mivel r és s kölcsönösen prímszámok, azért e tört alakok közül csak az lesz egész szám, melynek együtthatója «s»-nek valamelyik egész számú többszöröse; de ilyen az 1, 2, 3, . . ., $m.s$, sorban csak «m» van, tehát az osztás csak «m» esetben hajtható végre, mely «m» az «a» és «b»-nek legnagyobb közös többszöröse (sic!).

2) Annak a másodfokú egyenletnek általános alakja az

$$u^2+au+b=0,$$

miből

$$u=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}=\frac{-a}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

de

$$u=\text{cotg}\,\frac{R}{4}=1\pm\sqrt{2},\quad\text{(sic!)}$$

tehát

$$-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2-4b}{2}}=1\pm\sqrt{2},\quad\text{(sic!)}$$

a mi csak akkor állhat fent, ha a rationális mennyiségek is és az irrationális mennyiségek is egyenlők külön-külön egymással.

Tehát

$$-\frac{a}{2}=1$$

és

$$\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}=\pm\sqrt{2}$$

$$a=-2$$
$$a^2-4b=8$$
$$a=-2$$
$$-4b=8-4$$
$$b=-1,$$

tehát az egyenlet

$$u^2-2u-1=0$$

s valóban gyöke

$$u=1\pm\sqrt{2}.$$

Ezt bebizonyíthatjuk másképen is, legyen az egyenlet az

$$au^2+bu+c=0$$

az $u=\sqrt{2}+1$ ezt betéve, lesz

$$2.a\sqrt{2}+3a+\sqrt{2}b+b+c=0$$
$$3a+2.\sqrt{2}a=-\sqrt{2}b-b-c,$$

ebből

$$3a=-b-c$$

és

$$2.\sqrt{2}.a=-\sqrt{2}b$$
$$a=-c$$
$$b=+2c$$
$$c=c$$
$$-cu^2+2cu+c=0$$

$-c$-vel osztva

$$u^2-2u-1=0.$$

$$v=\frac{1}{\sin\frac{R}{4}}$$

az egyenlet lesz

$$av^4+bv^3+cv^2+dv+e=0 \quad \text{a} \quad v=\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$$

$$4a(6+4\sqrt{2})+2(2+\sqrt{2})\sqrt{2(2+\sqrt{2}}b+2(2+\sqrt{2})c+$$
$$+\sqrt{2(2+\sqrt{2})}d+e=0$$

$$24a+16\sqrt{2}a+2\,(2+\sqrt{2})\,\sqrt{2\,(2+\sqrt{2}}b+4c+2\sqrt{2}c+$$
$$+\sqrt{2\,(2+\sqrt{2})}\,d+e=0,$$

ebből

$$24a=-4c-e$$

és

$$16\sqrt{2}a+2\,(2+\sqrt{2})\,\sqrt{2\,(2+\sqrt{2})}\,b=-2\sqrt{2}c-\sqrt{2\,(2+\sqrt{2})}\,d$$

$\sqrt{2}$-vel osztva

$$16a+2\,(2+\sqrt{2})\,\sqrt{2+\sqrt{2}}b=-2c-\sqrt{2+\sqrt{2}}d$$

Itt ismét arra a tételre hivatkozunk, mikor a bal oldal rationális, illetve irrationális számok összege egyenlő a jobboldali rat. ill. irr. összeggel, ebből

$$16a=-2c$$

és

$$8a=-c$$
$$a=-\tfrac{1}{8}c$$

és

$$2\,(2+\sqrt{2})\,\sqrt{2+\sqrt{2}}b=-\sqrt{2+\sqrt{2}}.d$$

$\sqrt{2+\sqrt{2}}$-vel osztva

$$2\,(2+\sqrt{2})\,b=-d$$
$$4b+2\sqrt{2}b=-d$$
$$4b=-d$$

és

$$2\sqrt{2}b=0,$$

tehát

$$b=0$$
$$d=0$$
$$a=-\tfrac{1}{8}c,$$

s mivel

$$24a=-4c-e$$
$$-3c=-4c-e$$
$$c=-e$$
$$e=-c,$$

tehát az egyenlet lesz

$$-\tfrac{1}{8}cv^4+cv^2-c=0$$

c-vel osztva, —8-czal szorozva

$$v^4-8v^2+8=0,$$

minek gyöke valóban

$$v=\sqrt{2\,(2+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sin\frac{R}{4}}.$$

MEGOLDOTT FELADATOK.

31. *Az A, B, C, P, Q pontok megadatván, szerkesztessék három kúpszelet úgy, hogy az első a B, C, P, Q, a második a C, A, P, Q, a harmadik az A, B, P, Q pontokon menjen át és egyszersmind kettenként érintsék egymást az A, B, illetőleg C pontban.* (Vályi.)

*

Első megoldás dr. Szabó Péter főgimnáziumi tanár úrtól Budapesten.

Előbb segédtételt bizonyítunk be. Jelöljék a P, Q, B, C; P, Q, C, A és a P, Q, A, B pontokon átmenő kúpszeletek egyenleteit rendre

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0.$$

A $\overline{PQ}$ húr egyenlete legyen

$$l = 0,$$

a kúpszeletek érintőinek egyenletei az A, B, C pontokban:

$$t_a = 0, \quad t_b = 0, \quad t_c = 0.$$

A feladat szerint a kúpszeletek egyenletei ilyen alakúak:

$$\begin{aligned} K_2 &\equiv K_1 + \rho l t_c = 0 \\ K_3 &\equiv K_2 + \mu l t_a = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Másfelől, minthogy K_3 a K_1-gyel is érintkezik:

$$K_3 \equiv K_1 + r l t_b = 0, \tag{2}$$

a hol μ, r, ρ állandó számok. Ha az 1) egyenletek másodikába K_2-t az elsőből beírjuk, még lesz:

$$K_3 \equiv K_1 + l(\mu t_a + \rho t_c) = 0. \tag{3}$$

A 2) és 3) összehasonlításából:

$$\mu t_a + \rho t_c \equiv r t_b,$$

vagy

$$\mu t_a - \nu t_b + \rho t_c \equiv 0.$$

Ebből következik, hogy a *három érintő egyugyanazon ponton megy át.*

(Ez a tétel különben egy általánosabbnak specziális esete.*) Az előbbi eredmény még így is fogalmazható: az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ húroknak a K_3, K_1 ill. K_2 kúpszeletekhez tartozó pólusaik összeesnek.

Ha ez a pont (O) ismeretes, a feladat meg van oldva, mert ezt az A, B, C pontokkal összekötvén; a kúpszeletek közös érintőit kapjuk. A kúpszeleteken evvel 2 pont és 2 érintőn az érintési pontok ismeretesek lévén: mindegyikök meg van határozva.

Az O pont szerkesztésére megjegyezzük, hogy mivel az

$$(\overline{AB}, \overline{PQ}) \equiv S, \quad (\overline{CB}, \overline{PQ}) \equiv R$$

pontok $\overline{AB}$, illetve $\overline{CB}$ egyenesen rajta vannak, tehát K_3, illetve K_1-hez tartozó polárisaik (s, r) átmennek ez egyenesek pólusain. Minthogy a két pólus összeesik: *s és r metszéspontja a keresett O pont.*

Az s és r polárisok az $ABPQ$, illetve a $CBPQ$ teljes négyszögekből ismert módon szerkeszthetők, mivel S ill. R egy-egy diagonális pont.

Azonban innen még az is következik, hogy az O pont a *PQ húr pólusa az A, B, C, P, Q pontok meghatározta kúpszeletre vonatkozólag.* Ugyanis S és R a PQ-nak pontjai; az s, r egyenesek erre a kúpszeletre nézve is polárisaik.

A szerkesztés (az említendő specziális esetekre való tekintettel) még így is kimondható:

Keressük fel az ABC háromszög körül írt és a P, Q pontokon átmenő kúpszeletre vonatkozólag a PQ húr pólusát. Ezt a pontot a háromszög szögpontjaival összekötő egyenesek a kúpszeletek érintői.

Abban az esetben, ha P, Q valós pontok, a kúpszeleteknek legalább egyike hiperbola. Mert, ha mind a két pont, vagy egyikük kívül esik az $\overline{AO}$, $\overline{OB}$ alkotta szögön, K_3-nak nem minden pontja esik az érintők szögterébe: tehát hiperbola. Ha pl. az AOC (COB) szögtérben van legalább egyik pont, akkor K_1 (K_2) hiperbola. Ha P és Q összeesnek, O is abban a pontban lesz: a kúpszeletek egyenespárokká fajulnak. Az előbbi szerkesztés, a pólus és poláris harmonikus összefüggése miatt, akkor is alkalmazható, a mikor P, Q kapcsolt imaginarius pár. A $\overline{P, Q}$ húr ekkor valós, épenúgy S-nek a P, Q-hoz tartozó harmonikus társa. Ebből s, azután hasonló eljárással r, szerkeszthetők.

---

* L. Salmon-Fiedler: Kegelschnitte V. kiadás 455. l.

A feladat amaz ismert elemi feladatnak általánosítása: Szerkesztessék három kör, a melyek az adott A, B, C pontokban egymást érintik.

Erre visszatérünk, ha P, Q a síknak *végtelen távoli imaginarius körpontjai.* Az általános esetből következik, hogy ekkor az O pont az ABC háromszög körülírt körének a középpontja, a mint annak lenni kell.

*

Második megoldás Fejér Lipót tanárjelölt úrtól Budapesten.

Előre bocsátjuk a következő ismeretes tételt:

Jelölje k_1, k_2, k_3 a sík három oly kúpszeletét, a mely az M, N pontokon átmegy; e kúpszeletek közül bármilyen kettő — pl. k_i, k_j — az M, N pontokon kívül még két pontban metszi egymást és legyen e metszéspontokat összekötő egyenes e_{ij}, akkor kimutatható, hogy az e_{12}, e_{23}, e_{31} egyenesek egy pontban találkoznak.

Ezután nevezzük rendre k_1, k_2 illetőleg k_3-nak a

$$P,\ Q,\ B,\ C;\quad P,\ Q,\ C,\ A\quad \text{illetőleg}\quad P,\ Q,\ A,\ B$$

pontokon átmenő és a feladat követelményeinek kielégítő kúpszeleteket; és ha most az A pontban érintkező k_2, k_3 kúpszeleteknek az A ponton átvont közös érintője t_{23}, továbbá a B pontban érintkező k_3, k_1 kúpszeleteknek B ponton átmenő közös érintője t_{31}, és végre a C pontban érintkező k_1, k_2 kúpszeleteknek C-n keresztül vonható közös érintője t_{12}, akkor az előbb idézett segédtétel értelmében a t_{12}, t_{23}, t_{31} érintők egy pontban találkoznak; ezt a következőkben X-szel fogjuk jelölni. Itt ugyanis valóban három kúpszelettel van dolgunk, mely ugyanazon két ponton — a P, Q pontokon — megy át; csak az e_{12}, e_{23}, e_{31} szelők, melyek a segédtételben szerepelnek, fajulnak el érintőkké és ennek megfelelően a t_{12}, t_{23}, t_{31} jelzést kapják.

Törekvésünk most az X pont meghatározására fog irányulni, a melynek ismerete a keresendő k_1, k_2, k_3 kúpszeletek meghatározása szempontjából teljesen elegendő. Az X pont ugyanis az A, B, C pontokkal összekötve a t_{12}, t_{23}, t_{31} egyeneseket adja, és akkor mindegyik kúpszeletre vonatkozólag ismerünk négy pontot és ezek egyikében az érintőt — oly öt adat, mely valamely kúpszelet egyértelmű meghatározására elegendő.

Az X pont szerkesztéssel való meghatározására a következő meggondolások vezetnek:

Legyen A_1 a PQ és BC egyenesek metszéspontja, akkor ismeretes tétel alapján az A_1 pontnak — mint a P, Q, B, C pontok meghatározta teljes négyszög egyik diagonálpontjának — a P, Q, B, C alappontokkal biró kúpszeletsor minden elemére nézve ugyanazon egyenes a polárisa, mely a_1-gyel jelölendő egyenes az említett teljes négyszög másik két diagonális pontján átmegy. E könnyen szerkeszthető egyenes azonban az X ponton is átmegy. Az X pont ugyanis a BC — a k_1 kúpszeletben húrként szereplő — egyenes két végpontjában a k_1 kúpszelethez vont t_{31}, t_{12} érintők metszéspontja, és így egyszerűen a BC egyenesnek a k_1 kúpszelethez tartozó polusa. Mint ilyen azonban az a_1 egyenesen kell lennie, lévén a_1 épen egy a BC-n fekvő A_1 pont polárisa.

A most jellemzett a_1 tehát az X pontnak már egyik geometriai helyét adja.

Hasonló meggondolás vezet az X pont másik geometriai helyére, a b_1 egyenesre, a mely a P, Q, C, A pontok meghatározta teljes négyszög ama diagonálisa, mely a PQ, CA egyenesek metszéspontjával fekszik szemközt.

Az a_1, b_1 egyenesek metszéspontja már megadja a közvetetlenül keresett X pontot, melynek ismerete után a k_1, k_2, k_3 kúpszeletek a már jellemzett módon meg vannak határozva.

Világos, hogy a c_1 egyenes, mely a $PQAB$ teljes négyszögnek diagonálisa, szintén átmegy az X ponton és így mintegy szerkesztési próba gyanánt használható.

A feladatnak nagyon egyszerűen megoldható speciális esete áll elő, midőn a P, Q pontok a sík képzetes középpontjaiba esnek. Ekkor ugyanis a feladat megoldását képező *körök* középpontjait ama háromszög szögpontjai adják, melynek oldalai az ABC háromszög egy-egy szögpontján mennek át és érintik az ABC háromszög köré írható kört.

*

Harmadik megoldás Riesz Frigyes tanárjelölt úrtól Budapesten.

A $PQAB$, $PQAC$, $PQBC$ kúpszeletek A, B, illetőleg C pontokhoz tartozó közös érintői egy pontban, R-ben találkoznak, a mi legegyszerűbben úgy látható be, ha a kúpszeleteket kollineáczió útján körökké, illetve P és Q pontokat az új rendszer körpontjaivá transzformáljuk, mely esetben R pontnak a körök hatványpontja felel meg.

R pontnak a $PQAB$, $PQAC$ és $PQBC$ négyszögek ama diagonálisain kell feküdnie, a melyek a PQ-n fekvő diagonálpontokat nem tartalmazzák. R, mint e diagonálisok metszéspontja, PQ egyenesnek a $PQABC$ kúpszeletre konjugált pólusa. Mint ilyen R többféle módon szerkeszthető; legegyszerűbb csupán vonalzó használatát igénylő szerkesztéssel, mint amaz átlók metszéspontja, mivel még, minthogy a három diagonálisnak egy pontban kell találkozniok, a szerkesztés pontossága ellenőriztetik.

Ha az R pontot ismerjük, a keresett kúpszeletek elemi alkotó részekkel vannak meghatározva.

Ha a feladatot, illetve megoldását a polár-recziproczitás elvei szerint transzformáljuk, a duál megfelelő feladatot nyerjük, melynek megoldása a következő tételben adható:

Ha a pqab, pqac és pqbc kúpszeletek a, b, c érintői a kúpszeleteket ugyanazon A, B és C pontokban érintik, e pontok egy egyenesben, (pq) pontnak a pqabc kúpszeletre konjugált polárisában feküsznek.

*

Negyedik megoldás Grünwald Miksa főreáliskolai tanár úrtól Losonczon.

Legyen a koordinátarendszer kezdőpontja a $PQ = 2k$ távolság felező pontjában és PQ az X tengely. Az A, B, C pontok az $x_i y_i$ koordinátái helyébe más hat állandót hozunk be akként, hogy a PA, BB, PC egyeneseket

$$x + k + p_i y = 0 \qquad 1)$$

a QA, QB, QC egyeneseket pedig

$$x - k + q_i y = 0 \qquad 2)$$

alakban veszszük föl. E két egyenletből a szerint, a mint $i = 1, 2, 3$, az A, B, C pontok koordinátái számíthatók ki, még pedig

$$x_i = \frac{p_i + q_i}{p_i - q_i} k \quad y_i = \frac{-2k}{p_i - q_i}.$$

Az adott öt pont egy K kúpszeletet határoz meg, melynek egyenletét, minthogy az X tengelyt P-ben és Q-ban metszi

$$x^2 - k^2 + y(2ax + by + 2ck) = 0 \qquad 3)$$

alakban vehetjük föl. Minthogy pedig ez az egyenletet x_i és y_i kielégítik, lesz

$$[(p_i + q_i)^2 - (p_i - q_i)^2] k^2 - 2k [2a(p_i + q_i) - 2kb + 2kc(p_i - q_i)] = 0$$

vagy

$$(p_i + q_i) a - b + (p_i - q_i) c = p_i q_i.$$

Az a, b, c értékei tehát

$$(p_1 + q_1) a - b + (p_1 - q_1) c = p_1 q_1 \qquad 4)$$
$$(p_2 + q_2) a - b + (p_2 - q_2) c = p_2 q_2 \qquad 5)$$
$$(p_3 + q_3) a - b + (p_3 - q_3) c = p_3 q_3 \qquad 6)$$

egyenletrendszerből következnek. Ennek determinánsa:

$$\begin{vmatrix} p_1 + q_1 & -1 & p_1 - q_1 \\ p_2 + q_2 & -1 & p_2 - q_2 \\ p_3 + q_3 & -1 & p_3 - q_3 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix} = -2T,$$

tehát

$$-2Ta = \begin{vmatrix} p_1q_1 & -1 & p_1-q_1 \\ p_2q_2 & -1 & p_2-q_2 \\ p_3q_3 & -1 & p_3-q_3 \end{vmatrix} = \Sigma p_1q_1\delta_{23},$$

$$-2Tb = \begin{vmatrix} p_1+q_1 & p_1q_1 & p_1-q_1 \\ p_2+q_2 & p_2q_2 & p_2-q_2 \\ p_3+q_3 & p_3q_3 & p_3-q_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & p_1q_1 \\ p_2 & q_2 & p_2q_2 \\ p_3 & q_3 & p_3q_3 \end{vmatrix} = 2\Sigma p_1q_1d_{23},$$

$$-2Te = \begin{vmatrix} p_1+q_1 & -1 & p_1q_1 \\ p_2+q_2 & -1 & p_2q_2 \\ p_3+q_3 & -1 & p_3q_3 \end{vmatrix} = -\Sigma p_1q_1\sigma_{23},$$

a hol a következő jelzéseket hoztuk be:

$$\delta_{ij} = p_i-q_i-(p_j-q_j)$$
$$d_{ij} = p_iq_j-q_iq_j$$
$$\sigma_{ij} = p_iq_i-(p_j+q_j).$$

Ezek után a K kúpszelet egyenlete:

$$T(x^2-k^2)-(\Sigma p_1q_1\delta_{23})xy-(\Sigma p_1q_1d_{23})y^2+(\Sigma p_1q_1\sigma_{23})ky = 0. \qquad 7)$$

A $PQBC = K_1$, $PQCA = K_2$, $PQAB = K_3$ kúpszeletek egyenleteit

$$K_i = x^2-q^2+y(2a_ix+b_iy+2c_ik) = 0 \qquad 8)$$

alakban veszszük föl. De ezekre nézve a 4), 5), 6) egyenletek közül csak kettő érvényes. Így p. o. K_1-re nézve érvényes 5) és 6), melyekből

$$\sigma_{23}a_1+\delta_{23}c_1 = p_2q_2-p_3q_3 \qquad 9)$$

következik.

K_1 és K_2 metszéspontjai az

$$y[2(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+2(c_1-c_2)k] = 0$$

egyenes páron feküsznek, még pedig kettő, t. i. P és Q az $y = 0$ egyenesen, a másik kettő a

$$2(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+2(c_1-c_2)k = 0 \qquad 10)$$

egyenesen. De minthogy K_1 és K_2 C-ben érintkezik, e pontban közös érintőjük van, melynek egyenlete épen a föntebbi egyenlet. Épen így K_2 és K_3 A-ban, K_3 és K_1 B-ben van közös érintője, melyek egyenletei 10)-ből a mutatók cziklikus felcserélése útján nyerhetők. Látnivaló, hogy a három közös érintő egy E ponton (ξ, η) megy át. Ha pedig ezt megtaláltuk, feladatunk meg lesz fejtve, mert akkor p. o. K_1-re nézve nemcsak a P, Q, B, C pontok, hanem az EB, EC érintők is ismeretesek lesznek.

Az E pont polárisa K_1-re nézve a BC egyenes. Ennek egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ (p_2+q_2)\,k & -2k & p_2-q_2 \\ (p_3+q_3)\,k & -2k & p_3-q_3 \end{vmatrix} = 0$$

vagy

$$\delta_{23}x + d_{23}y = \sigma_{23}k. \qquad 11)$$

De ugyane poláris egyenlete 8)-ból

$$(\xi+a_1\eta)\,x+(a_1\xi+b_1\eta+c_1k)\,y+c_1k\eta-k^2=0 \qquad 12)$$

11) és 12) összehasonlításából

$$\delta_{23}\,(c_1k\eta-k^2)+\sigma_{23}k\,(\xi+a_1\eta)=0$$

vagy

$$\sigma_{23}\xi+(\sigma_{23}a_1+\delta_{23}c_1)\,\eta=\delta_{23}k$$

vagy végre 9) tekintetbe vételével:

$$\sigma_{23}\xi+(p_2q_2-p_3q_3)\,\eta=\delta_{23}k$$

és ugyanígy

$$\sigma_{31}\xi+(p_3q_3-p_1q_1)\,\eta=\delta_{31}k,$$

mely egyenletből könnyű szerrel következik:

$$\xi=\frac{\Sigma p_1q_1\delta_{23}}{\Sigma p_1q_1\sigma_{23}}\,k \quad \eta=\frac{2Tk}{\xi p_1q_1\sigma_{23}}. \qquad 13)$$

A $\xi\eta$ pont geometriai jelentősége kitűnik, ha a K kúpszeletre vonatkozó polarisát keressük. Ezt 7)-ből

$$\begin{gathered}[T\xi-\tfrac{1}{2}\,(\Sigma p_1q_1\delta_{23})\,\eta]\,x+ \\ +[-\tfrac{1}{2}\,(\Sigma p_1q_1\delta_{23})\,\xi-(\Sigma p_1q_1d_{23})\,\eta+\tfrac{1}{2}\,(\Sigma p_1q_1\sigma_{23})\,k]\,y+ \\ +\tfrac{1}{2}\,(\Sigma p_1q_1\sigma_{23})\,k\eta-Tk^2=0\end{gathered}$$

alakban találjuk és ebből 13) tekintetbe vételével lesz $y=0$, vagyis az E pont nem egyéb, mint a PQ pólusa a $PQABC$ kúpszeletre nézve. Ezzel a feladat meg van fejtve.

Utalvány czim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque számlájára.

Kimutatás

az 1901 május—október havában befolyt díjakról.

Alapító dijat fizetett:

Karczag István 200 kor.

Tagsági díjat fizettek:

1895. évre: Szerémi Alajos 10 k. 10 kor.

1896. évre: Bujk Béla 6 k., Kappel György 6 k. 12 kor.

1897. évre: Bujk Béla 6 k., Stahl Géza 6 k. 12 kor.

1898. évre: Aranyossi Miksa 10 k., Dobay Sándor 6 k., Felix János 6 k., Fogarassy Béla 6 k., Kiss Károly dr. 10 k., Klatt Virgil 6 k., Molnár Aladár 6 k., Széchy Ákos 6 k., Tatár Balázs 6 k. Összesen 62 kor.

1899. évre: Azary Miklós 6 k., Bartha Zsigmond 6 k., Frosch Károly 6 k., Hassák Vidor 6 k., Schmidt János dr. 4 k. Összesen 28 kor.

1900. évre: Angheben Albin 6 k., Bruck Ferencz 10 k., Dózsa Jakab 6 k., Hajnal Márton 10 k., Konkoly Thege Miklós dr. 10 k., Kövesligethy Radó dr. 10 k., Layer Antal dr. 6 k., Magyar László 10 k., Muraközy Károly 10 k., Nesnera Aladár 6 k., Niedermayer Gyula 6 k., Pfeiffer Péter 6 k., Riesz Frigyes 6 k., Simon Ferencz 6 k., Somogyi István 6 k., Söpkéz Sándor 10 k., Szabó Péter dr. 10 k. Összesen 134 kor.

1901. évre: Bóbita Endre 6 k., Bozmánszky Gyárfás 6 k., Bruckner Károly 6 k., Edelman Sebő dr. 6 k., Goldziher Károly 2 k., Kisgyörgy János 6 k., Lakner Gáspár 6 k., Lukácsi György 6 k., Lutter János 10 k., Magyar László 10 k., Mauritz Rezső 10 k., Medveczky Lajos 10 k., Oszlaczky Szilárd 10 k., Palatin Gergely 6 k., Pék János 6 k., Schöndorfer Gyula 6 k. Összesen 112 kor.

1902. évre: Bozmánszky Gyárfás 6 k., Goldziher Károly 6 k., Pap János 10 k. Összesen 22 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1901. évre: Kilián Frigyes 20 k., Pfeiffer Ferdinánd 10 k., a bpesti tanárképző int. gy. főgymn. 10 k., a bpesti VIII. k. áll. főgymn. 10 k., a brassói r. k. főgymn. 10 k., a késmárki ág. ev. lyc. 10 k., a kolozsvári kegy.-r. kalarantinum 10 k., a miskolczi ev. ref. főgymn. 10 k., a nagyváradi főreáliskola 10 k., a szabadkai községi gymn. 10 k., a székes-fehérvári főreáliskola 10 k. Összesen 120 kor.

1902. évre: a podolini kegy.-r. gymn. 10 kor.

Összesen befolyt:

Alapító dijból	200 kor.
Hátralékokból	258 kor.
f. év 1902. évi díjból	134 kor.
Előfizetési díjakból	130 kor.

Budapest, 1901 november 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

Franklin-Társulat nyomdája

A GAUSS-FÉLE DIFFERENCZIÁLEGYENLET

AMAZ ESETEIRŐL, A MELYEKBEN A FÜGGETLEN VÁLTOZÓ AZ INTEGRÁLHÁNYADOSNAK EGYÉRTÉKŰ ÉS BIPERIODIKUS FÜGGVÉNYE.*

(Első közlemény.)

A Gauss-féle differencziálegyenlet független változója (x) két, alaprendszert alkotó integrálhányadosának egyértékű és biperiodikus függvénye azokban az esetekben, a melyekben az ú. n. másodfajú háromszögfüggvényekre vezetnek; ide pedig azok az esetek tartoznak, a melyeknél a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei: δ_1, δ_2, δ_3 recziprok egész számok s kielégítik a következő egyenletet:**

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3=1. \tag{I}$$

---

[*] E dolgozat a kolozsvári tud. egyetem 1900/1. tanévben kitűzött volt felsőbb mennyiségtani pályatétele folytán készült. E Schlesinger Lajos tanár úrtól kitűzött pályatétel így szólott: «Azon esetekben, a mikor a Gauss-féle differencziálegyenlet független változója az integrálhányados egyértékű biperiodikus függvénye (lásd pld. Schlesinger, Handbuch etc. II, 2 (1898), pag. 114.), előállitandók egy alaprendszer elemei, valamint a differencziálegyenlet független változója az integrálhányadossal képzett olynemű végtelen sorok vagy szorzatokkal, melyekből az előállított mennyiségek analitikai jellege közvetetlenül fölismerhető, és melyek mint a Poincaré-tól bevezetett, tőle Fuchs-féle Zeta-, illetőleg Thetafüggvényeknek nevezett függvényosztályok speczialis esetei foghatók fel. Különös figyelembe ajánlhatók az Eisenstein-tól az elliptikus függvények előállítására adott kettős sorok és szorzatok (Crelle Journal, 35, Werke (1847), 213. l. s kv.)

[**] V. ö. pld. Schlesinger, Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen, Bd. II, 2 (1898) pag. 114.

E dolgozat czélja: a differencziálegyenlet alapján e speciális biperiodikus függvényeket meghatározni s felállítani azoknak ama függvénytani tulajdonságait, melyek szerint e biperiodikus függvények nemcsak akkor maradnak változatlanul, midőn a változó a periodusok egész számú sokszorosaival szaporodik, hanem akkor is, midőn bizonyos másféle lineár substitutiokat szenved. E vizsgálat folyamán ki fog derülni, hogy e függvényeknek ilynemű speciális viselkedése a reájuk érvényes komplex multiplicationak — melyet a differencziálegyenlet alapján nyerünk — közvetetlen folyománya.

Az (I) egyenletnek — permutatioktól eltekintve — csak a következő négy megoldása lehetséges:*

$$\begin{array}{lll} \delta_1 = \frac{1}{2}, & \delta_2 = \frac{1}{2}, & \delta_3 = 0 \\ \delta_1 = \frac{1}{2}, & \delta_2 = \frac{1}{4}, & \delta_3 = \frac{1}{4} \\ \delta_1 = \frac{1}{2}, & \delta_2 = \frac{1}{3}, & \delta_3 = \frac{1}{6} \\ \delta_1 = \frac{1}{3}, & \delta_2 = \frac{1}{3}, & \delta_3 = \frac{1}{3}. \end{array}$$

A δ_1, δ_2, δ_3 mennyiségeknek a GAUSS-féle differencziálegyenletben

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{du}{dx} - \alpha\beta u = 0$$

szereplő α, β, γ állandókkal való összefüggéséből, mely szerint

$$1-\gamma = \delta_1; \quad \gamma-\alpha-\beta = \delta_2; \quad \alpha-\beta = \delta_3$$

a differencziálegyenlet megalkotható.

Mivel a fenti négy eset közül az első egyszerűen szakaszos függvényt szolgáltat, biperiodikus függvényt csak a három utóbbi esetben kapunk, a melyeket a fentírt sorrendben tárgyaljunk.

I.

$$\begin{array}{lll} \delta_1 = \frac{1}{2}, & \delta_2 = \frac{1}{4}, & \delta_3 = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{1}{4}, & \beta = 0, & \gamma = \frac{1}{2}. \end{array}$$

---

* V. ö. pld. SCHLESINGER az i. h.

A GAUSS-féle differencziálegyenlet tehát

$$x(1-x)u''+\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}x\right)u'=0,$$

a miből

$$\frac{u''}{u'}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}x}{x(x-1)}.$$

Ez kétszer integrálva, adja az általános integrált:

$$u=c\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{3}{4}}}+c',$$

hol c és c' integrácziós állandók, úgy hogy

$$u_1=1,\quad u_2=c\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{3}{4}}}$$

alaprendszert alkot. Az u_2-ben a c állandót, valamint az integrál alsó határát később fogjuk czélszerűen megválasztani.

Az

$$\eta=\frac{u_2}{u_1}=c\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{3}{4}}} \qquad 1)$$

integrálhányados elsőfajú elliptikus integrál, mely az

$$(x-1)^{\frac{1}{2}}=i(z^2-1) \qquad 2)$$

substitutioval az

$$\eta=4\sqrt{\frac{2}{i}}c.\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{1}{2}z^2)}}$$

JACOBI-féle normálalakba megy át. A modulus $k^2=\frac{1}{2}$; ez tehát egy *lemniscaticus integrál*. Az állandók kellő választásával

$$\eta=\int\limits_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{1}{2}z^2)}}, \qquad 3)$$

tehát GUDERMANN jelöléseit használva

$$z=sn\,\eta$$

és így tekintettel 2)-re:

$$x=2\,sn^2\eta\,dn^2\eta. \qquad 4)$$

Az x tehát η-nak egyértékű biperiodikus függvénye; a periodusok $2K$ és $2K'i$, és mivel

$$K = K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{1}{2}z^2)}}$$

hányadosuk

$$\frac{2K'i}{2K} = i,$$

azaz a szakaszparallelogramma négyzet.

A 4)-ből látható, hogy x az η-nak negyedfokú biperiodikus függvénye. Az oly tartományhoz, melyen belül x minden értéket csak egyszer vesz fel, a lineár differencziálegyenletek elméletében szokásos eljárás alkalmazásával a következő módon jutunk el.[*] A differencziálegyenlet szinguláris pontjai $x=0$, 1, ∞; ha tehát a 0 és 1 pontokat l_1 és l_2 metszések segítségével a végtelen távoli ponttal összekötjük, oly területet nyerünk, a melyen belül η az x-nek egyértékű függvénye. Az ily módon szétmetszett x síknak az 1) relaczió alapján az η síkra való leképezése lesz a keresett tartomány. Ez oly négyszög, a melynek oldalai a szétmetszett x sík határát képező l_1 és l_2 metszések két-két partjának, szögpontjai pedig az említett határvonal szögpontjainak, azaz az $x=0$, 1 és ∞ pontoknak felelnek meg és melyben a szögek összege az (I) relaczió következtében 2π. Az l_1 és l_2 metszések alakját kellőképen választva el tudjuk tehát érni azt, hogy az η síkbeli négyszög oldalai egyenes vonalak; a szögpontokat pedig ama substitutiok kettőspontjai szolgáltatják, a melyeket η szenved, ha x az l_1 és l_2 metszéseket pozitiv értelemben átlépvén, a szinguláris pontokat megkerüli.[**] Határozzuk meg e substitutiokat; ezek x-et természetesen változatlanul hagyják.

a) Az $x = 0$ pont környezetében az η így állítható elő

$$\eta = 2cx^{\frac{1}{2}}(\delta_0+\delta_1 x+\cdots), \quad c = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{i}{2}},$$

---

[*] Lásd: Schlesinger, Handbuch etc., Bd. II, 1, Nr. 208., 209.

[**] V. ö. Schlesinger az i. h. és u. o. Bd. II, 2, Nr. 289.

hogyha tehát x az l_1 metszést pozitiv értelemben átlépi, η átmegy $-\eta$-ba, azaz szenvedi az

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

substitutiot, melynek kettőspontja $\eta = 0$; ez felel meg az $x = 0$ pontnak, mi a 4) alatti egyenletből is közvetetlenül látható.

b) Az $x = 1$ pont környezetében czélszerű η-t ezen alakban irni:

$$\eta = c \int\limits_1^x \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{3}{4}}} + c \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{3}{4}}}.$$

Minthogy 2) szerint $x=0$-nak, illetőleg $x=1$-nek $z=0$, illetőleg $z=1$ felel meg, a második integrál nem egyéb, mint K.

Ha x az l_2 metszést pozitiv értelemben átlépi, az első integrál i-vel szorzódik, ennélfogva η átmegy $i\eta + (1-i)K$ kifejezésbe, vagyis az

$$S_2 = \begin{pmatrix} i & (1-i)K \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

substitutiot szenvedi, melynek kettőspontja $\eta = K$.

c) A végtelen távoli pont pozitiv irányban való megkerülésénél az l_1 és l_2 metszéseket negativ irányban lépjük át, ennélfogva η az S_1 és S_2 megforditásainak komponálásából származó substitutiot szenvedi, vagyis az

$$S_3 = S_2^{-1} S_1^{-1} = \begin{pmatrix} -i & (1-i)Ki \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & (1-i)Ki \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

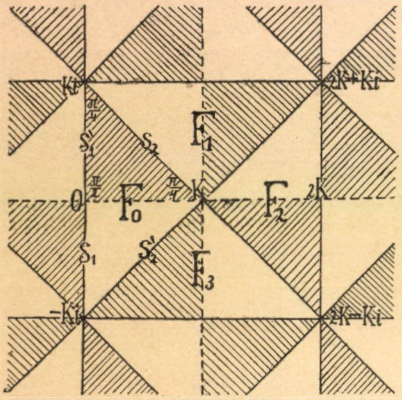
substitutiot, melynek kettőspontja $\eta = Ki$.

Ez az egyik, még pedig az l_1 pozitiv és l_2 negativ partjának metszéspontját képező végtelen távoli pontnak megfelelő η pont; a másik végtelen távoli ponthoz, mely az l_1 metszés negativ és az l_2 pozitiv partján van, az előbbeniből a 0 pont negativ vagy az 1 pont pozitiv irányban való megkerülésével juthatunk, ennek megfelelő η pont tehát $S_1^{-1} Ki = S_2 Ki = -Ki$.

A szögpontokat megkapván, a keresett egyenesvonalú négyszöget, mely a szétmetszett x sik egyértékű leképezése, felrajzolhatjuk; ez az 1. ábrán látható F_0 négyszög, melynek szögei az általános elméletnek megfelelőleg: 0-nál $\pi = 2\pi\delta_1$, K pontnál $\frac{\pi}{2} = 2\pi\delta_2$; s a két végtelen távoli pontnak megfelelő Ki és $-Ki$ szögpontoknál $\frac{\pi}{4}$, ezen szögpontok egy cyklust alkotván, szögeinek összege $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 2\pi\delta_3$.

Az oldalak, mint említettük, a metszeteknek felelnek meg, és pedig s_1' és s_1 az l_1, az s_2' és s_2 az l_2 pozitiv, illetőleg negativ partjának megfelelő oldalak, ennélfogva megfelelő pontjaik között ezen relacziók állanak fenn:

$$s_1' = S_1 s_1, \quad s_2' = S_2 s_2.$$



1. ábra.

Látjuk továbbá, hogy az F_0-nak nem srafozott része a srafozottnak tükörképe a 0 és K pontokat összekapcsoló egyenesre nézve.

Az F_0-on belül x minden értéket felvesz azonban csak egyszer; ha x valamelyik metszést átlépve kiindulási pontjához visszatér, η az F_0-ból kilép, a mennyiben az S_1, S_2 substitutiokat, illetőleg ezek megforditását szenvedi, melyeknek η-ra való alkalmazásánál F_0 a szomszédos, vele teljesen kongruens négyszögekbe megy át, tehát az ily módon keletkező négyszögek megfelelő pontjaiban az x értékei ugyanazok. Ha x a szinguláris pontokat minden lehetséges módon megkerüli, az egész η sík F_0-al kongruens négyszögekkel lesz egyszerűen és hézag nélkül befödve. Így pl. F_0-ra az s_2^{-1} substitutiokat alkalmazva, keletkezik az F_1, a mennyiben e substitutio η át $-i\eta + (1+i)K$ kifejezésbe viszi át s így F_0-nak $-90°$-al való elforgatását és $(K+Ki)$-vel való eltolását eredményezi. Hasonlóképen F_0-ból S_2 substitutioval keletkezik az F_3, F_1-ből S_2^{-1} substitutioval az F_2, etc. Könnyű belátni, hogy az új négyszögek az eredetiből az oldalakra való folytonos tükrözés útján származnak.

Az 1. ábrában e négyszögek srafozott részei az F_0 srafozott részének felelnek meg és pedig oly módon, hogy F_0-at az illető négyszöggel fedésbe hozva, a srafozás iránya is egyezni fog.

Az F_0, F_1, F_2 és F_3-ból alkotott négyzet a szakaszparallelogramma s itt ismét meggyőződhetünk arról, hogy a periodusok $2K$ és $2K'i$, a mennyiben az $s_3 s_2^{-1}$, illetőleg $S_2^{-1} S_3$ substitutiok η-át $\eta+2K$, illetőleg $\eta+2K'i$-be viszik át.

Hogy ezen substitutiok η-nak 4) alatti függvényét tényleg változatlanul hagyják, arról közvetlenül is meggyőződhetünk. Az S_1 substitutio, valamint annak megfordítása is η-on át $-\eta$-ba vivén át, x-nek értékét természetesen nem változtatja.

Ha 3) alatti integrálunkba z helyébe $z^2=2-\xi^2$ egyenlettel új változót vezetünk be, lesz

$$\eta = i \, . \int\limits_{\sqrt{2}}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\frac{1}{2}\xi^2)}} - i \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\frac{1}{2}\xi^2)}}$$

és tekintetbe vévén, hogy $\sqrt{2}=\frac{1}{k}$,

$$\eta = i \int\limits_{0}^{\sqrt{2-z^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{1}{2}z^2)}} - K - Ki$$

vagy

$$-i\eta+K+Ki = \int\limits_{0}^{\sqrt{2-z^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{1}{2}z^2)}},$$

tehát

$$\sqrt{2-z^2} = sn(-i\eta+K+Ki).$$

De

$$\sqrt{2-z^2} = \sqrt{2}\,\sqrt{1-\tfrac{1}{2}z^2} = \pm\sqrt{2}\,dn\,\eta$$

és így

$$sn^2(-i\eta+K+Ki) = 2dn^2\eta$$

η helyett $-\eta$-át írva s tekintetbe véve, hogy $sn^2\eta$-nak $2Ki$ periodusa, írhatjuk:

$$sn^2(i\eta+K-Ki) = 2dn^2\eta.$$

Ennek alapján:

$$dn^2(i\eta+K-Ki) = \tfrac{1}{2}sn^2\eta,$$

tehát

$$sn^2(i\eta+K-Ki)\,dn^2(i\eta+K-Ki)=sn^2\eta\,.\,dn^2\eta\,;$$

ez az egyenlet mutatja, hogy x az S_2 substitutio alkalmazásánál nem változik. Ebben η helyébe $(-i\eta+K+Ki)$-t téve, kapjuk, hogy S_2^{-1} sem változtat az x értékén.

Ugyanez a módszer vezet czélhoz a következő két esetben is s a mit itt a vizsgált függvényre általánosságban mondtunk, az az ott fellépő biperiodikus függvényekre is áll.

II.

$$\delta_1=\tfrac{1}{2},\qquad \delta_2=\tfrac{1}{3},\qquad \delta_3=\tfrac{1}{6}$$
$$\alpha\;=\tfrac{1}{6},\qquad \beta\;=0,\qquad \gamma\;=\tfrac{1}{2}.$$

A Gauss-féle differencziálegyenlet

$$x(1-x)u''+\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{6}x\right)u'=0$$

vagy

$$\frac{u''}{u'}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{6}x}{x(x-1)}.$$

A differencziálegyenlet általános integrálja tehát

$$u=c\,.\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}+c'.$$

Két alaprendszert alkotó integrál

$$u_1=1\,;\quad u_2=c\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{2}{3}}},$$

mely utóbbinál a c állandót és az integrál alsó határát később fogjuk czélszerűen megválasztani.

Az integrálhányados

$$\eta=\frac{u_2}{u_1}=c\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}\qquad 1)$$

itt is elliptikus integrál, mely az

$$(x-1)^{\frac{1}{3}}=(1-\varepsilon^2)z^2-1, \quad \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}} \tag{2}$$

substitutioval az

$$\eta=\frac{6}{\sqrt{1-\varepsilon}}\,.\,c\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}}$$

normálalakba megy át, hol a modulus $k^2=\varepsilon i$.

Az állandókat akkép választjuk, hogy

$$\eta=\int\limits_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}}, \tag{3}$$

akkor

$$z^2=sn^2\eta, \quad 1-z^2=cn^2\eta, \quad 1+\varepsilon^2 z^2=dn^2\eta$$

és tekintettel 2)-re:

$$x=3(1-\varepsilon^2)\,sn^2\eta\,cn^2\eta\,dn^2\eta. \tag{4}$$

A periodusok itt is $2K$ és $2K'i$; x pedig az η-nak hatodfokú biperiodikus függvénye.

K és K'-nek ismert előállításai:

$$K=\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$K'=i\,.\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\int\limits_0^\infty\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

a jelen esetben, hol

$$k^2=-\varepsilon^2, \quad k'^2=1-k^2=1+\varepsilon^2=-\varepsilon$$

következőképen alakíthatók át. A

$$K'i=i\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon z^2)}}$$

integrálra alkalmazva a $z=\frac{1}{\xi}$ substitutiot, lesz

$$K'i = \varepsilon\int\limits_{\infty}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1+\varepsilon^2\xi^2)}}$$

$$= \varepsilon\int\limits_{\infty}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1+\varepsilon^2\xi^2)}} + \varepsilon\int\limits_{0}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1+\varepsilon^2\xi^2)}},$$

tehát

$$K'i = -\,\varepsilon K'i + \varepsilon K$$

és ebből

$$\frac{K'i}{K} = -\varepsilon^2 = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + e\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Látjuk, hogy $|K'i| = |K|$, a szakaszparallelogramma egy rhombus, melynek két oldala egymással $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ szöget zár be.

Keressük ismét a szétmetszett x síknak egyértékű leképezését az η síkra, mindenekelőtt meghatározván azon substitutiokat, melyeket η szenved, ha x az l_1, l_2 metszeteket pozitiv értelemben átlépve kiindulási pontjához visszatér. Vegyük tekintetbe, hogy a 2) egyenlet szerint

$$x = 0,\ 1,\ \infty\text{-nek rendre } z = 0,\ \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},\ \infty$$

felel meg.

a) Az 1) alakból, tekintetbe vévén, hogy az integrál alsó határa 0, látható, hogy épúgy, mint az I. esetben, ha x az l_1 metszést pozitiv értelemben átlépi, η az

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

substitutiot szenvedi, melynek kettőspontja $\eta = 0$.

b) Az $x=1$ pont környezetében az 1) alatti integrált ekkép írjuk

$$\eta = c\int\limits_{1}^{x} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{2}{3}}} + c\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad c = \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{6},$$

azonban

$$c\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}}.$$

Ebbe az integrálba $z^2 = \varepsilon(\xi^2 - 1)$ egyenlettel új változót vezetve be, kapjuk, hogy

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}} = \varepsilon \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1+\varepsilon^2\xi^2)}} - \varepsilon K,$$

a miből

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}} = \frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon} K = \frac{1}{1-\varepsilon^2} K. \tag{5}$$

Az első integrál pedig az $x=1$ pont környezetében így írható:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \{\varepsilon_0 + \varepsilon_1(x-1) + \cdots\} = (x-1)^{\frac{1}{3}} \{\delta_0 + \delta_1(x-1) + \cdots\},$$

honnan látható, hogyha x az l_2 metszést pozitiv értelemben átlépi, ezen integrál ε-al szorzódik, tehát η átmegy $\varepsilon\eta - \varepsilon K$ kifejezésbe, vagyis az

$$S_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon K \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

substitutiot szenvedi, melynek kettőspontja

$$\eta = \frac{1}{1-\varepsilon^2} K,$$

mely pontot a $K'i$ vektorára merőleges egyenesen a $K'i$-ből a K vektorára merőleges egyenes metsz ki (l. 2. ábra).

c) Ha x a végtelen távoli pontot pozitiv irányban megkerüli, η az

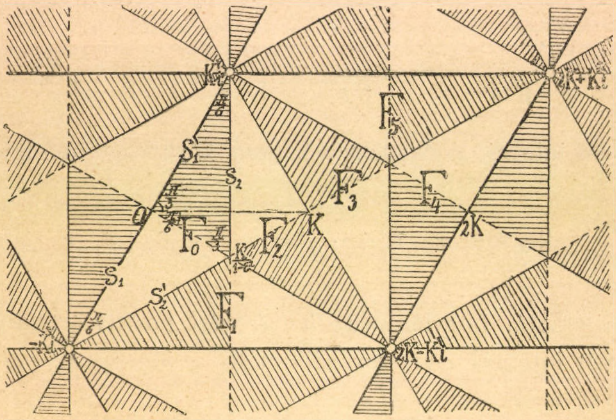
$$S_3 = S_2^{-1} S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & K \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 & K \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

substitutiot szenvedi, melynek kettőspontja az

$$\eta = \frac{K}{1+\varepsilon^2} = K'i$$

pont.

Ha a szétmetszett x sík határvonalát befutjuk, η egy négyszög oldalain halad végig, melynek szögpontjai: az $x=0$-nak megfelelő $\eta=0$, az $x=1$-nek megfelelő $\eta=\frac{K}{1+\varepsilon^2}$ és a két végtelen távoli pontnak megfelelő $K'i$ és $S_2K'i = S_1^{-1}K'i = - K'i$ pontok, szögei pedig: π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ és $\frac{\pi}{6}$. E négyszög, a melyet tehát ismét egyenes oldalúnak lehet választani, a 2. ábrán látható F_0 négyszög, a melyben az l_1 metszésnek megfelelő s_1 és s_1', illetőleg az l_2 metszésnek megfelelő s_2 és s_1' oldalakat az



2. ábra.

$$s_1' = S_1 s_1\,; \qquad s_2' = S_2 s_2$$

relacziók kapcsolják össze.

Az S_1, S_2 substitutiok s azok megfordításaiból alkotott csoport substitutionak F_0-ra való alkalmazásával keletkeznek a többi F_0-sal kongruens négyszögek; így az S_2 és S_2^{-1} alkalmazásával keletkezik az F_1 és F_2, az S_3-nak F_0, F_1 és F_2-re való alkalmazásával pedig az F_3, F_4 és F_5. Ezen hat négyszög alkotja a szakaszparallelogrammát, mi ismét mutatja, hogy vizsgált függvényünk hatodfokú. Ha η-ra az $S_3S_2S_1$ és $S_3^2S_2^{-1}$ substitutiokat alkalmazzuk, nyerjük, hogy a periodusok $2K$ és $2K'i$.

Győződjünk még meg közvetlenül is arról, hogy az S_1, S_2 és azok inversei, s ezzel együtt a belőlük alkotható csoport substitutioi a 4) alatti biperiodikus függvényt változatlanul hagyják. Ismét csak az S_2-re kell figyelmünket fordítani. A 3) alatti integrálba vezessünk be új változót a már egyszer használt

$$z^2 = \varepsilon(\xi^2 - 1)$$

substitutioval. Lesz.

$$\eta = \varepsilon \int_0^{\sqrt{1+\varepsilon^2 z^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}} - \varepsilon K,$$

a miből

$$\varepsilon^2 \eta + K = \int_0^{\sqrt{1+\varepsilon^2 z^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}},$$

tehát

$$\sqrt{1+\varepsilon^2 z^2} = sn(\varepsilon^2 \eta + K),$$

de

$$\sqrt{1+\varepsilon^2 z^2} = \pm\, dn\eta,$$

ennélfogva

$$sn^2(\varepsilon^2\eta + K) = dn^2\eta.$$

Ennek alapján

$$cn^2(\varepsilon^2\eta + K) = -\varepsilon^2 sn^2\eta$$
$$dn^2(\varepsilon^2\eta + K) = -\varepsilon\, cn^2\eta$$

és így

$$sn^2(\varepsilon^2\eta + K)\, cn^2(\varepsilon^2\eta + K)\, dn^2(\varepsilon^2\eta + K) = sn^2\eta\, cn^2\eta\, dn^2\eta. \qquad 6)$$

Ez mutatja, hogy x az S_2^{-1} substitutionak η-ra való alkalmazásánál változatlanul marad s ha legutóbbi egyenletünkben η helyébe $(\varepsilon\eta - \varepsilon K)$-t írunk, kapjuk, hogy az S_2 sem változtatja biperiodikus függvényünk értékét.

III.

$$\delta_1 = \tfrac{1}{3}, \quad \delta_2 = \tfrac{1}{3}, \quad \delta_3 = \tfrac{1}{3}$$
$$\alpha = \tfrac{1}{3}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \tfrac{2}{3}.$$

A Gauss-féle differencziálegyenlet

$$x(1-x)u'' + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}x\right)u' = 0,$$

tehát

$$\frac{u''}{u'} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}x}{x(x-1)},$$

az általános integrál pedig

$$u = c\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}} + c'.$$

Alaprendszert alkotó integrálok lesznek

$$u_1 = 1, \quad u_2 = c\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}},$$

mely utóbbinál az állandó és az alsó határ az előbbeni esetekhez hasonló módon fog meghatároztatni.

Az integrálhányados

$$\eta = \frac{u_2}{u_1} = c\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}. \tag{1}$$

Ezen elliptikus integrálon az

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} z\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)} \tag{2}$$

helyettesítést végezve, lesz

$$\eta = \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\, c\,.\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}}$$

és az állandók kellő választásával:

$$\eta = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}}, \tag{3}$$

úgy hogy:

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}\, sn\,\eta\, cn\,\eta\, dn\,\eta. \tag{4}$$

A periodusok ismét $2K$ és $2K'i$, hányadosuk épúgy, mint az előbbeni esetben $e^{\frac{\pi i}{3}} = -\varepsilon^2$, a szakaszparallelogramma ismét rhombus. Az x η-nak harmadfokú biperiodikus függvénye.

E biperiodikus függvény értékét nem változtató substitutiok meghatározása végett vegyük tekintetbe, hogy 2) szerint $x=0$, 1, ∞ mellett rendre $z=\frac{-1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, ∞ és $z=0$ mellett $x=\frac{1}{2}$.

a) $x=0$ környezetében tehát az 1) alatti integrált, melynek alsó határa $\frac{1}{2}$, így bontjuk két tagra

$$\eta=c.\int_0^x \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}=-\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

De a II. eset 5) alatti képletének tekintetbe vételével

$$c\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}=-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}}=-\frac{1}{1-\varepsilon^2}K.$$

Az első integrál, ha x az l_1 metszést pozitiv értelemben átlépi, $e^{\frac{2\pi i}{3}}=\varepsilon$-al szorzódik és így η átmegy $\varepsilon\eta+\varepsilon K$ kifejezésbe, vagyis az

$$S_1=\begin{pmatrix}\varepsilon & \varepsilon K\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

substitutiot szenvedi, melynek kettőspontja

$$\eta=-\frac{1}{1-\varepsilon^2}K.$$

b) Az $x=1$ pont környezetében η-t írjuk ekkép

$$\eta=c\int_1^x \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}+c\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

és mivel

$$c\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\varepsilon^2 z^2)}}=\frac{1}{1-\varepsilon^2}K$$

könnyen belátható, hogy az l_1 metszés pozitiv átlépésével η átmegy $\varepsilon\eta-\varepsilon K$ kifejezésbe, tehát az

$$S_2=\begin{pmatrix}\varepsilon & -\varepsilon K\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

substitutiot szenvedi, melynek kettőspontja, azaz az $x=1$ pontnak megfelelő pont

$$\eta=\frac{1}{1-\varepsilon^2}K.$$

c) A végtelen távoli pontnak pozitiv irányban való megkerülésénél η az

$$S_3=S_2^{-1}S_1^{-1}=\begin{pmatrix}\varepsilon^2 & K\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon^2 & -K\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon & (1-\varepsilon^2)K\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

substitutiot szenvedi. Ennek kettőspontja az $\eta=K'i$ pont, mely az egyik végtelen távoli pontnak felel meg, míg a másiknak az $\eta=S_1^{-1}K'i=S_2K'i=-K'i$ pont.

A szétmetszett x sík határvonalának megfelelő, egyenesvonalúnak feltételezhető négyszöget, melynek szögpontjait most meghatároztuk a 3. ábrán látható F_0 rhombus adja, hol is az s_1 és s_1' oldalak az l_1, az s_2 és s_2' oldalak az l_2 metszés negativ és pozitiv partjának felelvén meg, az

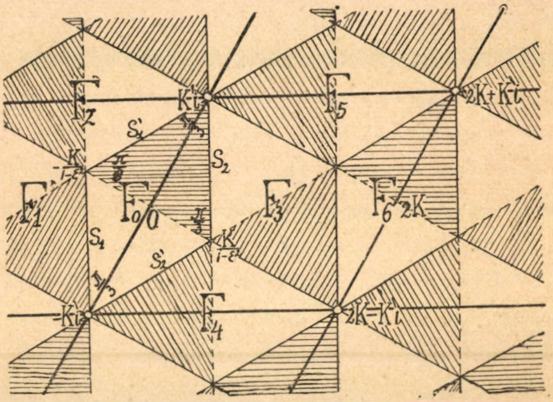
$$s_1'=S_1s_1,\qquad s_2'=S_2s_2$$

relacziókkal vannak összekapcsolva. A rhombus szögei: az $x=0$-nak megfelelő $-\frac{1}{1-\varepsilon^2}K$ szögpontnál $\frac{2\pi}{3}=2\pi\delta_1$, az $x=1$-nek megfelelő $\frac{K}{1-\varepsilon^2}$ szögpontnál szintén $\frac{2\pi}{3}=2\pi\delta_2$, s a két végtelen távoli pontnak megfelelő $K'i$ és $-K'i$ szögpontok mindegyikénél $\frac{\pi}{3}$, összegük tehát $\frac{2\pi}{3}=2\pi\delta_3$.

Az S_1, S_2 és azok inverseinek ismételt alkalmazásával az egész η sík ily négyszögekkel lesz befödve; így az S_1, S_1^{-1}; S_2, S_2^{-1} substitutiok alkalmazásával az F_1, F_2; F_3, F_4 rhombusokat nyerjük. Az $S_2^{-1}S_1$ és $S_3S_2^{-1}$ substitutiok η-nak $2K$, illetőleg $2K'i$-vel való szaporodását hozván létre, mutatják, hogy tényleg $2K$ és $2K'i$ a periodusok. A 3. ábrán látható, hogy egy ily szakaszparallelogramma három oly négyszöget tartalmaz, melyeken belül x minden értéket csak egyszer vesz fel; jelen esetben ugyan nem három teljes négyszög van egy ily periodusparallelogrammában, a menynyiben a periodusparallelogramma oldalai átszelik a négyszögeket.

A szakaszparallelogrammát, melynek szögpontjai $-K'i$, $2K-K'i$, $2K+K'i$, $K'i$, alkotó három rhombus az F_3, az F_0 egyik és F_6 másik fele, melyek együtt egy teljes rhombust adnak s a harmadik négyszöget, az F_4 és F_5 egyik fele képezi.

Végül könnyű lesz itt is közvetlenül meggyőződni arról, hogy az S_1, S_2 substitutiok és azok inversei a 4) alatti biperiodikus függvényt, illetőleg a $sn\,\eta\, cn\,\eta\, dn\,\eta$ szorzatot nem változtatják.



3. ábra.

A II.-nek 6) alatti képletéből már következik, hogy

$$sn(\varepsilon^2\eta+K)\, cn(\varepsilon^2\eta+K)\, dn(\varepsilon^2\eta+K) = \pm\, sn\,\eta\, cn\,\eta\, dn\,\eta$$

de könnyű belátni, hogy csak a pozitiv jegy lehetséges. Ha t. i. felteszszük, hogy a negativ jegy helyes s azután fenti egyenletünkbe η helyett kétszer egymásután $(\varepsilon^2\eta+K)$-t teszünk, azon eredményhez jutunk, hogy

$$sn\,\eta\, cn\,\eta\, dn\,\eta = -\, sn\,\eta\, cn\,\eta\, dn\,\eta$$

mi természetesen lehetetlenség. Ennélfogva

$$sn(\varepsilon^2\eta+K)\, cn(\varepsilon^2\eta+K)\, dn(\varepsilon^2\eta+K) = sn\,\eta\, cn\,\eta\, dn\,\eta,$$

mi mutatja, hogy x nem változik S_2^{-1} s ezzel együtt az S_2 substitutionak η-ra való alkalmazásánál sem. Tekintetbe vévén továbbá, hogy a fenti szorzatnak $2K$ perodusa, rögtön szembeötlik, hogy értékét az S_1^{-1} és igy az S_1 substitutio sem változtatja, a mennyiben az S_1^{-1} η helyébe $\varepsilon^2\eta - K$ kifejezést hozza.

Mint az előbbeni esetekben, úgy itt is biperiodikus függvényünk az ezen egyszerű substitutiok komponálásából származó összes substitutiok alkalmazásánál változatlan marad.

*

Láttuk tehát, hogy a Gauss-féle differencziálegyenletnek független változója az integrálhányadosnak az itt tárgyalt három esetben egyértékű, biperiodikus és pedig az I. esetben negyed-, a II-ikban hatod-, a III-ikban harmadfokú függvénye; a fokszám tehát a δ_1, δ_2, δ_3 mennyiségek legkisebb közös nevezője. A független változót a közönséges biperiodikus függvényekkel állitottuk elő és pedig ezekkel egész raczionális módon, ugyanigy lehet kapni oly előállitást, melynél x a *sn*, *cn*, *dn* tört raczionális függvényeként jelentkezik; ehhez csak az szükséges, hogy az elsőfajú elliptikus integrál normálalakra való hozatalánál az összes lehetséges (24) substitutio közül egy tört lineár substitutiot válaszszunk. A független változó ekkor is negyed-, hatod-, illetőleg harmadfokú biperiodikus függvény lesz. Meghatároztuk továbbá ama substitutiokat, a melyeknek alkalmazásánál e biperiodikus függvények változatlanul maradnak s találtuk, hogy e substitutiok lényegökben η-nak csak egy bizonyos komplex mennyiséggel (i, ε, ε^2) való szorzását kivánják s ezzel nyertük, hogy e függvényeknek van komplex multiplikacziójuk. A mint egyébként ismeretes,[*] ez a három eset az egyedüli, a melyben a komplex multiplikaczió olyan, hogy a-val jelölve a multiplikatort *sn*. $a\eta$ a *sn*. η-tól csak egy állandó faktorban különbözik.
Habán Mihály.

V. ö. Burkhardt, Elliptische Funktionen, pag. 292.

PRÓBAMÉRÉSEK A GÁZOK BELSŐ SURLÓDÁSÁNAK EGY ÚJ KISÉRLETI MÓDSZERREL VALÓ MEGVIZSGÁLÁSÁHOZ.

(Harmadik és befejező közlemény.)

Tulajdonképen két különálló gáztömeg mozgását kell tárgyalnunk, a gömbhéjba zárt s a gömbhéjon kívül lévő gáztömeg mozgását; az elsőre vonatkozik az *a)* alatti határfeltétel, a másodikra a *b)* és a *c)* alatti: a tárgyalást azonban majd csak akkor kell különválasztani, ha az integráczióbeli állandóknak a határfeltételekkel való meghatározására kerül a sor.

A mathematikai probléma megoldásánál nagy segítségünkre szolgál a fellépő mennyiségek fizikai jelentésének tekintetbe vétele: ennek alapján azonnal tanácsosnak látszik az áttérés szögsebességekre, még pedig, mivel tekintettel a belső surlódás természetére, előreláthatólag a szilárd gömbökkel konczentrikus összes gázrétegek, mint merev rendszerek fognak lengeni a forgási tengely körül, keressük, van-e a (I*) alatti egyenletrendszernek egy ily alakú megoldásrendszere:

$$u(x, y, z, t) = -y\psi(r, t) \qquad v(x, y, z, t) = x\psi(r, t), \tag{25}$$

a hol a $\psi(r, t)$ szögsebesség csupán r-nek, az x, y, z pont vezérsugarának és a t időnek függvénye.

Tudjuk előre, hogy ily alakú megoldásnak kell lennie, minthogy a gáznak egy a lengő gömbökkel konczentrikus gömbi rétegén egy pont sincs a szögsebességre nézve valamely más pont előtt kitüntetve.

A folytonossági egyenlet ψ bármely alakjánál ki van elégítve s így már csak az (I*) rendszer első és második egyenletével kell foglalkoznunk (a harmadik egyenlet egyszerűen a barometerrel való magasságmérés formuláját szolgáltatja, a mire itt nem kell tekintettel lennünk, mivel az eszköz méretei aránylag kicsinyek ahhoz, hogy a nehézség okozta sürűségváltozást figyelembe kellene vennünk).

Transzformáljuk tehát az (I*) említett egyenleteit az (5) alatti egyenletek segítségével s törekedjünk arra, hogy x, y, és z csak az $x^2+y^2+z^2=r^2$ kombináczióban forduljanak elő, explicite azonban nem.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -y\,\frac{\partial \psi}{\partial t}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -y\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\,\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\right)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -y\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\,\frac{y^2}{r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{3}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)\right)\\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -y\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\,\frac{z^2}{r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)\right)\\
\frac{\partial v}{\partial t} &= x\,\frac{\partial \psi}{\partial t}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= x\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\,\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{3}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\right)\\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= x\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\,\frac{y^2}{r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)\right)\\
\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= x\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\,\frac{z^2}{r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Elég e differencziálhányadosok értékét az (I*) első és második egyenletébe behelyettesíteni és máris czélt értünk; ugyanis:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{S}{\rho}\nabla^2 u =$$

$$-y\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{S}{\varrho}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\,\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{5}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right)\right\}\right)=$$

$$-y\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{S}{\varrho}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\right\}\right)=0, \tag{26}$$

hasonlóképen:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{S}{\varrho}\nabla^2 v = x\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{S}{\varrho}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\right\}\right)=0. \tag{27}$$

Ugy a (25) mint a (26) egyenletek ki vannak elégítve, ha ψ eleget tesz a következő differencziálegyenletnek:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{S}{\varrho}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0. \qquad \text{(IV)}$$

Ennek az egyenletnek megoldására nézve ismét a probléma fizikai oldala szolgál útmutatással:

A lengő gömbhéj csillapított harmonikus mozgást végez, a melynek szögsebessége:

$$\psi=De^{-\beta t}\cos\gamma t. \qquad (28)$$

Előreláthatólag az összes a gömbhéjjal konczentrikus gázrétegek hasonló csillapított harmonikus mozgásokat fognak végezni, mint merev rendszerek, a hol a csillapodás (a β) ugyanaz, a kezdőamplitudók azonban r-nek függvényei. Vizsgáljuk meg tehát, van-e a (IV) alatti differencziálegyenletnek egy ily alakú megoldása:

$$\psi=\varphi(r)\,e^{-\beta t}\cos\gamma t. \qquad (29)$$

Betéve ψ-nek (29) alatti alakját a (IV)-be, mivel:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\varphi e^{-\beta t}(\beta\cos\gamma t+\gamma\sin\gamma t)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=e^{-\beta t}\cos\gamma t\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=e^{-\beta t}\cos\gamma t\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$$

azt kapjuk, hogy:

$$-\varphi e^{-\beta t}(\beta\cos\gamma t+\gamma\sin\gamma t)-\frac{S}{\varrho}e^{-\beta t}\cos\gamma t\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0.$$

Ez az egyenlet fennáll minden időpillanatban, akkor is, midőn $t=0$, tehát a φ-re vonatkozó differencziálegyenlet a következő:

$$\beta\varphi+\frac{S}{\varrho}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0. \qquad \text{(V)}$$

Ennek a differencziálegyenletnek általános megoldását HELMHOLTZ szerint* a következő alakban állítom elő:

Az (V)-nek partikuláris megoldása:

$$\varphi = \left(\frac{n}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right) e^{nr},$$

a hol

$$n = \pm i \frac{\beta^{\frac{1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}}}{\varphi^{\frac{1}{2}}} \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Ha tehát $\frac{\beta^{\frac{1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}}}{\varphi^{\frac{1}{2}}} = m$, az (V) általános megoldása

$$\varphi = A\left(\frac{im}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right) e^{imr} + B\left(\frac{im}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right) e^{-imr}. \tag{30}$$

A és B itt tetszőleges komplex állandók; nekünk a (30) alatti φ valós részére van szükségünk, a melyet akként választunk ki a (30)-ból, hogy e^{imr}-t szögfüggvények segítségével fejezzük ki s a kijelölt müveleteket elvégezzük; ha

$$A = a_1 + ia_2$$
$$B = \beta_1 + i\beta_2$$

φ valós része:

$$(\beta_1 - a_1)\left(\frac{1}{r^3}\cos mr + \frac{m}{r^2}\sin mr\right) -$$

$$-(a_2 + \beta_2)\left(\frac{1}{r^2}\cos mr - \frac{1}{r^3}\sin mr\right) =$$

$$= A_1 \quad \left(\frac{1}{r^3}\cos mr + \frac{m}{r^2}\sin mr\right) +$$

$$+ B_1 \quad \left(\frac{m}{r^2}\cos mr - \frac{1}{r^3}\sin mr\right). \tag{31}$$

A_1 és B_1 itt tetszőleges valós állandók, a melyek a határfeltételeknek megfelelően határozandók meg s értékeik a lengő gömbhéj belsejében mások lesznek, mint a nyugvó és lengő gömb közti gázrétegben.

---

* Wissenschaftliche Abhandlungen I, 199. l.

I. $r = 0$-tól $r = r_1$-ig. Erre a térrészre vonatkozólag csak egy határfeltételünk van, az *a)* alatti, pedig két állandót kellene meghatároznunk: az egyik állandót azonban zérussal kell egyenlővé tennünk máskülönben φ $r=0$-nál végtelen nagy lenne, a mit φ fizikai jelentésénél fogva ki kell zárnunk; ugyanis sorba fejtve a φ-ben szereplő szögfüggvényeket, azt kapjuk, hogy:

$$\varphi(0) = A_1 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{m^2}{2r} \right)_{r=0} - B_1 \frac{m^2}{3}.$$

Hogy $\varphi(0)$ ne legyen végtelen A_1-et szükségképen 0-sal kell egyenlővé tennünk, az *a)* alatti határfeltétel alapján pedig, minthogy, ha $r=r_1$

$$\varphi = D,$$

$$B_1 = \frac{D}{\frac{m}{r_1^2} \cos mr_1 - \frac{1}{r_1^3} \sin mr_1},$$

a belső térrészben tehát:

$$\varphi = \frac{\frac{m}{r^2} \cos mr - \frac{1}{r^3} \sin mr}{\frac{m}{r_1^2} \cos mr_1 - \frac{1}{r_1^3} \sin mr_1} - De^{-\beta t} \cos \gamma t. \qquad (32)$$

II. $r=r_2$-től $r=R$-ig.

A *c)* alatti határfeltételből, minthogy $\varphi(R) = 0$

$$B_1 = -A_1 \frac{\frac{1}{R^3} \cos mR + \frac{m}{R^2} \sin mR}{\frac{m}{R^2} \cos mR - \frac{1}{R^3} \sin mR} =$$

$$= -A_1 \frac{\cos mR + mR \sin mR}{mR \cos mR - \sin mR},$$

tehát

$$\varphi(r) = A_1 \left(\frac{1}{r^3} \cos mr + \frac{m}{r^2} \sin mr - \frac{\cos mR + mR \sin mR}{mR \cos mR - \sin mR} \left(\frac{m}{r^2} \cos mr - \frac{1}{r^3} \sin mr \right) \right);$$

minthogy pedig a *b)* határfeltétel alapján $\varphi(r_2) = D$,

$$A_1 = \frac{D}{\frac{1}{r_2^3} \cos mr + \frac{m}{r_2^2} \sin mr - \frac{mR \sin mR + \cos mR}{mR \cos mR - \sin mR} \left(\frac{m}{r_2^2} \cos mr_2 - \frac{1}{r_2^3} \sin mr_2 \right)},$$

s innen ψ végleges alakja a külső térrészre vonatkozólag:

$$\psi = \frac{\left(\frac{mR}{r^3} - \frac{m}{r^2} \right) \cos m(R-r) - \left(\frac{m^2R}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin m(R-r)}{\left(\frac{mR}{r_2^3} - \frac{m}{r_2^2} \right) \cos m(R-r_2) - \left(\frac{m^2R}{r_2^2} + \frac{1}{r_2^3} \right) \sin m(R-r_2)} De^{-\beta t} \cos \gamma t. \tag{33}$$

A (32) és (33) alatti képletekből most közönséges differencziálás útján megkapjuk a Φ előállításához szükséges

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_1 \text{ és } \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_2$$

mennyiségeket:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_1 = \left(\frac{m^2 r_1 \sin mr_1}{\sin mr_1 - mr_1 \cos mr_1} - \frac{3}{r_1} \right) De^{-\beta t} \cos \gamma t, \tag{34}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_2 = \left(\frac{mR \cos m(R-r_2) - \sin m(R-r_2)}{m(R-r_2) \cos m(R-r_2) - (m^2 R r^2 + 1) \sin m(R-r_2)} m^2 r_2 - \frac{3}{r_2} \right) De^{-\beta t} \cos \gamma t, \tag{35}$$

s minthogy a (III) alatti Φ és a (II)-ben szereplő F_g között a következő összefüggés áll fenn:

$$\Phi = F_g \frac{d\vartheta}{dt} = F_g De^{-\beta t} \cos \gamma t,$$

a (II) alatti képletekből a következő relácziót kapjuk S-nek kisérleti adatokból való kiszámítására:

$$\beta K - \beta' K' = \tag{VI}$$

$$= \frac{4}{3} \pi S \left(r_1^4 \left\{ \frac{m^2 r_1 \sin mr_1}{\sin mr_1 - \cos mr_1 \cos mr_1} m^2 r_1 - \frac{3}{r_1} \right\} - \right.$$

$$\left. - r_2^4 \left\{ \frac{mR \cos m(R-r_2) - \sin m(R-r_2)}{m(R-r_2) \cos m(R-r_2) - (m^2 R r_2^2 + 1) \sin m(R-r_2)} m^2 r_2 - \frac{3}{r_2} \right\} \right).$$

Hogy ebből a reláczióból S-t tényleg kiszámíthassuk, sorba kell fejtenünk a

$$\chi_1 = \frac{m^2 r_1 \sin mr_1}{\sin mr_1 - mr_1 \cos mr_1}$$

és

$$\chi_2 = \frac{mR \cos m(R-r_2) - \sin m(R-r_2)}{m(R-r_2) \cos m(R-r_2) - (m^2 R r_2^2 + 1) \sin m(R-r_2)} m^2 r_2$$

mennyiségeket, a melyekben S szintén előfordul s S kiszámítását a szokásos módon akként eszközölnünk, hogy előbb a sor magasabbrendű tagjainak elhanyagolásával egy közelítő értéket határozunk meg S számára, s az így nyert közelítő értéket felhasználjuk a magasabbrendű tagok kiszámítására, a mivel azután már egy pontosabb S értéket kapunk s í. t.

A χ_1 és χ_2 mennyiségek sorbafejtését következőképen eszközöljük:

I. χ_1 sorbafejtése.

Legyen $mr_1 = x$, akkor

$$\chi_1 = \frac{\mathrm{m}^2 r_1 \sin mr_1}{\sin mr_1 - mr_1 \cos mr_1} =$$

$$= \frac{x^2}{r_1} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right) - \left(x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \cdots \right)} =$$

$$=\frac{1}{r_1}\frac{1-\frac{x^2}{3\,!}+\frac{x^4}{5\,!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots}{\frac{2}{3\,!}-\frac{4}{5\,!}x^2+\frac{6}{7\,!}x^4-\frac{8}{9\,!}x^6}=$$

$$=\frac{3}{r_1}\frac{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7\,!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)\,!}+\cdots}{1-\frac{2.3!}{5\,!}x^2+\frac{3.3!}{7\,!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{(n+1)\,3\,!}{(2n+3)\,!}x^{2n}+\cdots}.$$

Ha a számlálóban és a nevezőben lévő sorokkal a közönséges algebrai osztást elvégezve oly sort kapunk, a mely a kisérletek szolgáltatta x értéknél konvergens, akkor ez a sor lesz x ezen értéke mellett a két adott sor hányadosa.

A hányadossor együtthatói kényelmesen számíthatók a következő rekursiv képletek segítségével:

Legyen:

$$1+a_1x^2+a_2x^4+\cdots+a_nx^{2n}+\cdots$$

az elosztandó sor,

$$1+b_1x^2+b_2x^4+\cdots+b_nx^{2n}+\cdots$$

az osztó sor, akkor az

$$1+c_1x^2+c_2x^4+\cdots+c_nx^{2n}+\cdots$$

hányados sor együtthatói az elosztandó és osztó sor együtthatóival a következő összefüggésben vannak:

$$a_n=c_n+b_1c_{n-1}+b_2c_{n-2}+\cdots+b_{n-1}c_1+b_n.$$

Ha tehát c_1, c_2, . . ., c_{n-1}-et ismerjük, a következő képlet szolgáltatja c_n-t:

$$c_n=a_n-b_1c_{n-1}-b_2c_{n-2}-\cdots-b_{n-1}c_{n-1}-b_n.$$

Ezen az úton kiszámítottam nehány első c-t s a következő eredményre jutottam:

$$1+c_1x^2+c_2x^4+\cdots=$$

$$=1-\frac{x^2}{15}-\frac{x^4}{525}-\frac{17x^6}{189{,}000}-\frac{878x^8}{191{,}008{,}125}-\cdots \tag{36}$$

$x^2=\frac{\varrho\beta r_1^2}{S}$; levegőnél normális nyomás és szobahőmérséklet mellett

$$\varrho<0{\cdot}0015$$
$$S>0{\cdot}0001,$$

λ, a logaritmusos dekrementum a jelen kisérleteknél kisebb volt 0·05-nél, a lengési idő pedig nagyobb volt 50 sec-nál, míg $r_1^2 < 50$, úgy, hogy x^2 mindenesetre kisebb $\frac{3}{4}$-nél, pedig, ha csak $x^2 < 1$ a (36) alatti sor, a mint közvetlen látható föltétlenül s igen gyorsan konvergál; e sor tehát valóban a szóban forgó két sor hányadosa a jelen kisérletnél fellépő x értékeknél, s így:

$$\chi_1 = \frac{3}{r_1}\left(1 - \frac{1}{15}\frac{\varrho\beta r_1^2}{S} - \frac{1}{525}\left(\frac{\varrho\beta r_1^2}{S}\right)^2 - \frac{17}{189{,}000}\left(\frac{\varrho\beta r_1^2}{S}\right)^3 - \frac{878}{191{,}008{,}125}\left(\frac{\varrho\beta r_1^2}{S}\right)^4 - \dots\right). \tag{37}$$

II. χ_2 sorbafejtése.

Legyen $mR = x$ és $mr_2 = y$

$$\frac{\chi_2}{m^2 r_2} = \frac{x\cos(x-y) - \sin(x-y)}{(x-y)\cos(x-y) - (xy+1)\sin(x-y)} = \frac{x\cos z - \sin z}{z\cos z - (x^2 - xz + 1)\sin z} =$$

(a hol $x - y = z$)

$$= \frac{x - z - \frac{xz^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{xz^4}{4!} - \frac{z^5}{5!} - \frac{xz^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{xz^8}{8!} - \dots}{-x^2z + xz^2 - \frac{2-x^2}{3!}z^3 - \frac{xz^4}{3!} + \frac{4-x^2}{5!}z^5 + \frac{xz^6}{5!} - \frac{6-x^2}{7!}z^7 - \frac{xz^8}{7!} + \dots} =$$

$$= -\frac{1}{zx}\,\frac{1 - \frac{z}{x} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!x} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^5}{5!x} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!x} + \frac{z^8}{8!} - \dots}{1 - \frac{z}{x} + \frac{2-x^2}{3!x^2}z^2 + \frac{z^3}{3!x} - \frac{4-x^2}{5!x^2}z^4 - \frac{z^5}{5!x} + \frac{6-x^2}{7!x^2}z^6 + \frac{z^7}{7!x} - \frac{8-x^2}{9!x^2}z^8 - \frac{z^9}{9!x} + \dots} =$$

$$= -\frac{1}{m^2R(R-r_2)}\left(1 - \frac{x^2+1}{3x^2}z^2 - \frac{x^2+1}{3x^3}z^3 - \frac{(x^2+1)(x^2+10)}{45x^4}z^4 - \frac{(x^2+1)(x^2+5)}{45x^5}z^5 - \right.$$

$$\left. - \frac{(x^2+1)(2x^4+7x^2+35)}{105x^6}z^6 - \frac{(x^2+1)(18x^4+49x^2+280)}{945x^7}z^7 - \frac{(x^2+1)(5539x^6+38784x^4+134400x^2+336000)}{1{,}814{,}400x^8}z^8 - \dots\right),$$

mivel pedig $\frac{z}{x} = \frac{R-r_2}{R} < 1$ ez a sor is konvergens x-nek a kisérletekből kiadódó értékeinél s valóban $\frac{x_2}{m^2 r_2}$-t szolgáltatja, minthogy $\frac{R-r_2}{R}$ különböző hatványainak együtthatóiban a számlálókban fellépő egész együtthatók összege, legalább az eddig kiszámitott tagokban kisebb a nevezőnél, a mely tulajdonságot valószínűleg a későbbi tagok sem vesztik el s így még ha $x^2=1$ volna is, még akkor is konvergens volna e sor; tehát, minthogy $x^2 = \frac{\varrho\beta R^2}{S}$,

$$\begin{aligned}\chi_2 = -\frac{r_2}{R(R-r_2)}\Bigg\{1 &- \frac{\frac{\varrho\beta R^2}{S}+1}{3}\left(\frac{R-r_2}{R}\right)^2 - \frac{\frac{\varrho\beta R^2}{S}+1}{3}\left(\frac{R-r_2}{R}\right)^3 - \\ &- \frac{\left(\frac{\varrho\beta R^2}{S}+1\right)\left(\frac{\varrho\beta R^2}{S}+10\right)}{45}\left(\frac{R-r_2}{R}\right)^4 - \frac{\left(\frac{\varrho\beta R^2}{S}+1\right)\left(\frac{\varrho\beta R^2}{S}+5\right)}{45}\left(\frac{R-r_2}{R}\right)^5 - \\ &- \frac{\left(\frac{\varrho\beta R^2}{S}+1\right)\left(2\left[\frac{\varrho\beta R^2}{S}\right]^2+7\,\frac{\varrho\beta R^2}{S}+35\right)}{105}\left(\frac{R-r_2}{R}\right)^6 - \\ &- \frac{\left(\frac{\varrho\beta R^2}{S}+1\right)\left(18\left[\frac{\varrho\beta R^2}{S}\right]^2+49\,\frac{\varrho\beta R^2}{S}+280\right)}{945}\left(\frac{R-r_2}{R}\right)^7 - \\ &- \frac{\left(\frac{\varrho\beta R^2}{S}+1\right)\left(5539\left[\frac{\varrho\beta R^2}{S}\right]^3+38784\left[\frac{\varrho\beta R^2}{S}\right]^2+134400\,\frac{\varrho\beta R^2}{S}+336000\right)}{1{,}814{,}400}\left(\frac{R-r_2}{R}\right)^8 - \dots\Bigg\}\end{aligned} \quad (38)$$

Meg vannak most már az összes eszközök, a melyek segítségével a kisérlet nyújtotta számadatok alapján S-t ki tudjuk számitani.

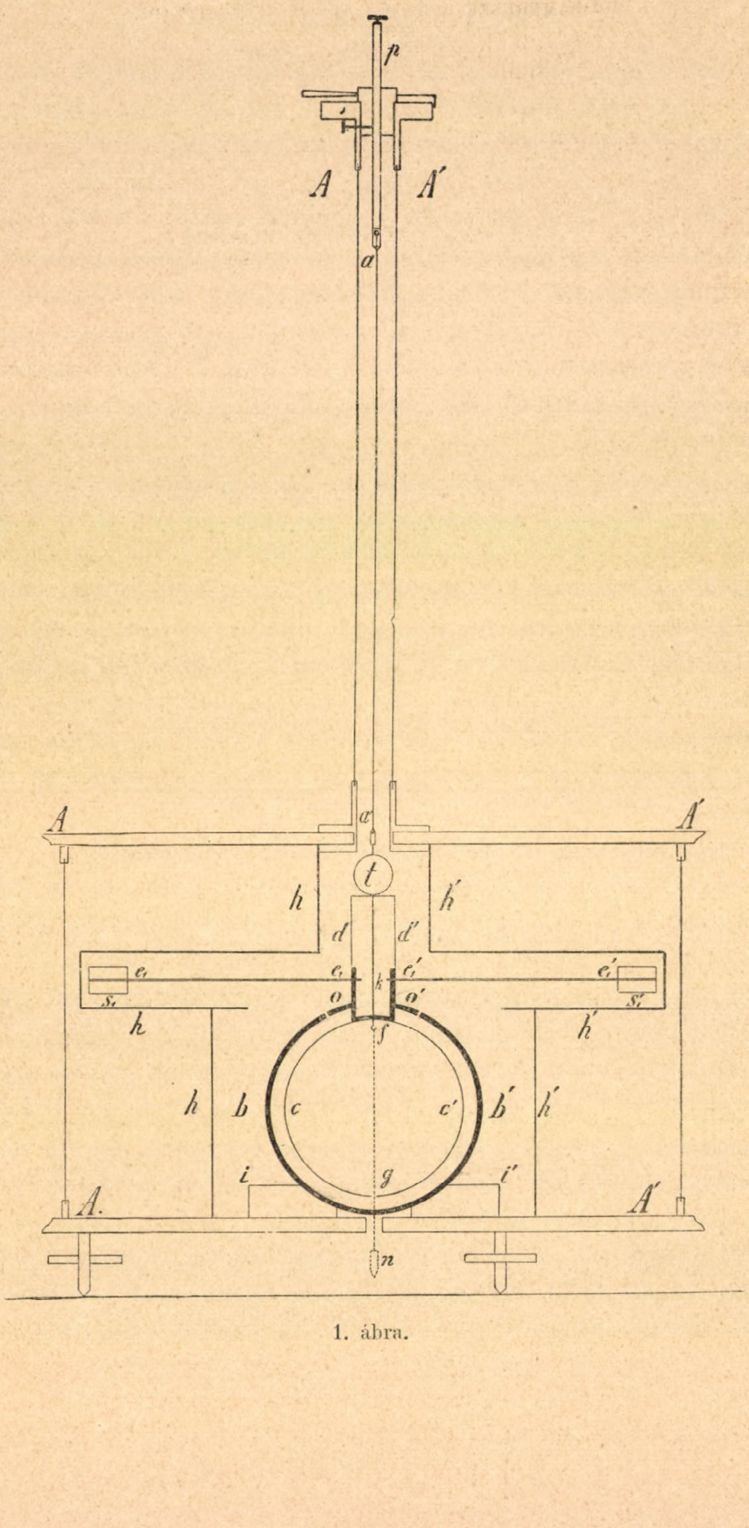
4. §. A kisérletek leírása.

Az S meghatározására szolgáló eszköz (l. 1. ábrát) leglényegesebb része a cc' lengő gömbhéj : minthogy épen a gáznak e gömbhéjra gyakorolt belső surlódásából számitjuk ki a S-t, e gömbhéj határfelületeinek lehetőleg pontos gömböknek kellett lenni, a mi szinte lehetetlenné tette a gömbhéjnak közönséges esztergályozás útján való előállitását, minthogy, ha a gömbhéj két darabból készül, a két darab összeillesztése nehezen történhetnék meg a nélkül, hogy a külső vagy a belső felületen oly nyomok ne maradjanak hátra, a melyek a gömbfelületek pontosságának nagy hátrányára vannak. Dr. M. Th. Edelmann, a híres müncheni mechanikai műintézet igazgatója, a kihez ez ügyben tanácsért folyamodtam, szintén lehetetlennek tartja a gömbhéjnak mechanikai úton való elkészitését, azonban egy igen jó tanácsot adott, a melynek alapján aránylag könnyen sikerült egy igen pontos gömbhéjnak előállitása.

Edelmann tanácsát követve következőképen jártam el :

Jó kemény paraffinból esztergályoztattam egy körülbelül 5 cm átmérővel biró gömböt : ez volt a gömbhéj elkészitésének legnehezebb része s nagyon dicséri Süss Nándor úr ügyességét, a kinek mechanikai intézetében az egész eszköz készült, hogy a katetométerrel történt mérések azt mutatták, hogy a paraffingömb különböző átmérői közt észrevehető legnagyobb eltérés 0·04 millimeter, a mi tulajdonképen annyit tesz, hogy az eltérés a katetometerrel pontosan megmérhető mennyiségeknél kisebb volt, minthogy ugyanekkora eltérés ugyanazon átmérő többszöri megmérésénél is mutatkozott.

A paraffingömböt finom bronzporral bevontam s egy vele lehetőleg czentrálisan elhelyezett vörösréz gömbhéjjal együtt rézgáliczoldatba tettem s egy termoelem segitségével a paraffingömb



1. ábra.

felületét egy körülbelül másfél mm vastag rézréteggel elektrolitikus úton bevontam. A két elektród felület egymástól való távolsága körülbelül 5 cm volt, az áramsürűség pedig négyzetdeciméterenkint 0·4—0·5 Ampère, úgy, hogy a gömbnek másfél mm rézzel való beborítása körülbelül egy hétig tartott. A paraffingömbre lerakódott réz, igen egyenletes, kompakt tömeget képezett, úgy hogy külső felületét újból pontosan gömbalakúra lehetett esztergályozni, ezután egyik átmérőjének két végpontja körül egy-egy körülbelül $1^1/_2$ cm sugarú környilást metszettek ki, a melyen keresztül a kissé felmelegitett gömbhéjból a paraffin egyszerűen kifolyt s megmaradt a gömbhéj, a melynek külső felülete ép oly pontosnak mutatkozott, mint a paraffingömb, illetőleg a belső felület, a mely pontosan a paraffingömb alakját vette fel. A gömbhéjon keletkezett két nyilás megfelelő fedőcskékkel gondosan el lett zárva, és azok egyikére egy csavaranya, a másikra pedig egy kis környilás (az 1. ábrán g) alkalmaztatott, úgy, hogy a csavaranya tengelye egy a környilás középpontján átmenő átmérő legyen. A g környilást az eszköz beállitása tette szükségessé, a mint arról legközelebb szó lesz.

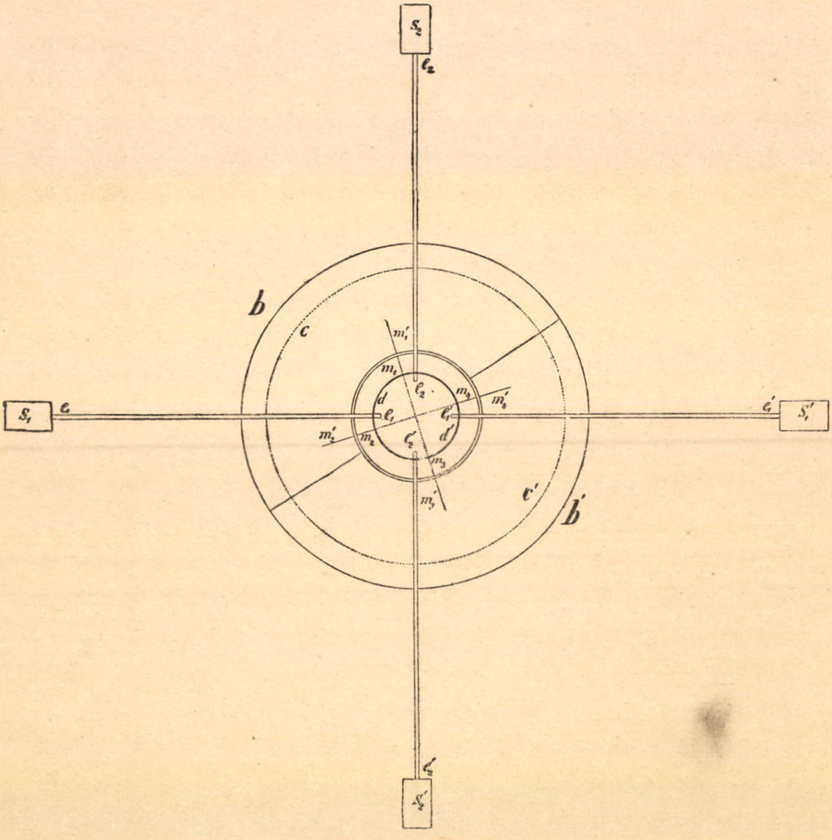
Az eszköz többi részeinek előállítása már minden nehézség nélkül történhetett meg: a bb' külső gömbhéj két darabból készült, a melyek ú. n. «Bayonette-Verschluss»-szal voltak egymáshoz illeszthetők. E külső gömbhéjnak már korántsem kellett oly pontosnak lenni mint a belsőnek, minthogy a két gömbhéj közti gázréteg vastagságának befolyása a belső surlódásra egy bizonyos vastagságon túl már alig változik. Igy pl. kiszámitottam a surlódási együttható eddig ismert értékéből, hogy 5 cm-nek véve a lengő gömbhéj külső sugarát (r_2)-t, $^3/_4$ mm-nek a vastagságát ($r_2—r_1$)-t s 5·5 cm-ről 6 cm-re változtatva a külső gömbhéj belső sugarát (R_2)-t, tehát a surlódó gázréteg vastagságát megkétszerezve az amplitudok állandó viszonya csupán $\frac{1}{400}$-adrészével változik meg. A jelen kisérleteknél $R_2—r_2$ körülbelül 1 cm volt, ily vastagságnál tehát a külső gömbhéj apróbb pontatlanságai nem idézhetnek elő észrevehető hibákat.

Maga az eszköz következőképen volt összeállítva: (l. az 1. ábrát).

Egy AA' torziószekrényben az aa' 0·2 mm átmérőjű 45 cm hosszú újezüst drótra volt függesztve az $a'f$ tengely közvetítésével a cc' gömbhéj, még pedig úgy, hogy a csavarmenetekkel ellátott tengely a k csavaranyába bele volt szorítva; az $a'f$ tengelyhez volt erősítve a t tükör, a melynek segítségével a lengések megfigyelése történt; ugyancsak az $a'f$ tengelyhez volt erősítve a dd' sárgarézhenger, a melybe annyi ólomtara volt helyezhető, mint a mennyit a lengő gömb nyom; a sárgarézhenger falaiba voltak becsavarva az e_1e_1, $e_1'e_1'$, e_2e_2, $e_2'e_2'$ csavarmenetekkel ellátott rudacskák (l. a 2. ábrát), a melyeken az eltolható s_1, s_1', s_2, s_2' sárgarézhengerkék nyugodtak. A dd' sárgarézhengerhez azonfelül egy R külső sugárral bíró 7—8 mm széles oo' gömbhéjgyűrű volt erősítve, a cc' gömbbel konczentrikusan úgy, hogy külső felületének távolsága a lengő gömbhéj külső felületétől lehetőleg pontosan $R-r_2$ legyen: az oo' gömbhéjgyűrű tehát mondhatnám folytatása volt a bb' külső gömbhéjnak, a mely az ii' faállványon nyugodott. Az egész lengő szerkezet a nyugvó gömbhéjjal együtt egy hh' czinkbádogból készült burokkal volt megvédve zavaró lég- és hőáramlatoktól; e bádogházikó két szimmetrikus darabból állott, a melyek két oldalt az eszközre rátolhatók s egymásba illeszthetők voltak; az egyik darabon egy akkora nyilás volt kimetszve, hogy a t tükör mozgása kivülről megfigyelhető legyen.

Az eszköz pontos beállítása következőképen történt:

Mindenekelőtt gondoskodni kellett arról, hogy a lengő gömbhéj lengés közben valóban egy átmérője körül lengjen, azaz, hogy az aa' drót iránya keresztül megy-e a gömbhéj középpontján. E végből következőképen jártam el: az $a'f$ tengely alsó végére egy finom kampót csináltattam, úgy, hogy egy a kampóra függesztett hajszálon lógó függőón mutatta a drót irányának a folytatását; a hajszál a lengő gömbhéj g nyilásán ment keresztül s így, ha a függélyes forgási tengely valóban átmérője a gömbhéjnak, a hajszál épen a g környilás középpontján megy át. Ha tehát két egymásra merőleges vízszintes irányból nézve (a külső gömbhéj akkor még nem volt felállítva) a hajszál a környilás projekczióját közepén metszette, bizonyos lehettem abban, hogy a gömbhéj valóban egyik átmérője körül fog lengeni. Ha a hajszál nem ment át a környilás czentrumán, a kereszten lévő súlyokat addig csavargattam ide-oda, a míg ez tényleg bekövetkezett, azután a hajszálat elégettem s áttértem a beállítás második részére, a gömbhéjak konczentrikus beállítására.



2. ábra.

Erre szolgált a *dd'* sárgarézhengerre erősitett *oo'* perem, a melyen két egymásra merőleges legnagyobb körive a külső gömbhéj külső felületének volt megjelölve (m_1, m_2, m_3, m_4 a 2. ábrán): a külső gömbhéjból egy oly környilás volt kimetszve, a melynek sugara az *oo'* perem külső sugaránál alig $^1/_2$ mm-rel volt nagyobb: a gömbhéj külső felületén szintén meg volt jelölve két egymásra merőleges legnagyobb kör (az ábrán m'_1, m'_2, m'_3, m'_4). A konczentrikus beállítás most már következőképen történt:

Először is a p rudat a torziófejen addig emelgettem és sülyesztettem, a míg vízszintes irányban tekintve, a perem külső felülete folytatását képezte a külső gömbhéj külső felületének; azután pedig az ii' állványnyal együtt a külső gömbhéjt addig tologattam jobbra balra, a míg az m_1 ív folytatása nem vott az m'_1-nek az m_2 az m'_2-nek s i. t. Ezután ismét pontosabban beállítottam a p rúddal a peremet úgy, hogy a külső gömbhéj folytatását képezte s i. t. egészen addig, a míg oldalt nézve egy gömbfelületnek látszott a perem és a gömbhéj és az m_i vonal is folytatása volt az m'_i-nek ($i = 1, 2, 3, 4$).

Ezek után ráborítottam az egész szerkezetre a hh' bádogházikót, felraktam a torziószekrény ablakait s megkezdődhetett a tényleges kisérlet.

Miután a skála képét a távcsővel megtaláltam, a torziófejet vagy 5 fokkal elforgattam s a legelső fordulópont után visszacsavartam abba a helyzetbe, a melynél az egyensúlyi helyzet körülbelül a skála közepére esett. A megfigyelés mindig $1^1/_2$—2 óra mulva a megindítás után történt, ugyanis ennyi idő mulva már a skálán belül voltak a fordulópontok s az oldallengések, a melyek a megindításnál keletkeztek, már annyira csillapodtak, hogy nem zavarták semmiben a torziólengések szabályos lefolyását. Különben is már maga az a körülmény, hogy, bár a perem és a külső gömbhéj közt alig $^1/_2$ mm széles szabad tér volt, az egész szerkezet szabadon lengett, eléggé mutatja, hogy amaz ingaszerű lengések, a melyeket kezdetben mindenesetre végzett a lengő szerkezet, igen kicsinyek voltak s így, tekintettel még eme lengések kicsiny lengési idejére (1 mp-nél kevesebb) $1^1/_2$—2 óra mulva teljesen elenyésztek.

E következtetések a tényleges mérések által igazolást nyertek, minthogy a lengések igen szépen követték a csillapított harmonikus mozgás törvényeit, úgy, hogy még eme igen sok tekintetben tökéletlen eszköznél is, az amplitudók viszonya annyira állandó volt, hogy a dekrementumok $\frac{1}{10,000}$-ednyi pontossággal való meghatározása volt lehetséges, míg MAXWELL hasonló lengő korongokkal történt méréseinél, a mint adataiból kitünik, a dekrementum meghatározásánál a középértéktől való legnagyobb eltérés $\frac{2}{10,000}$. Remélhető, hogy pontosabb eszközökkel végezve e kisérleteket s kedvezőbb körülmények közt (hőmérséklet változása) a dekrementum ötödik számjegye is még pontosan megkapható.

Maguk az észlelések egészen a szokásos módon történtek: néhány észlelt fordulópontból meghatároztam az egyensúlyi helyzetet, megjelöltem, s azután észleltem a fordulópontokat és azon időpontokat, a melyekben az egyensúlyi helyzet a fonálkereszt előtt elhalad: így megfigyeltem rendesen 30—40 lengést; többet nem lehetett, mert a hőmérséklet nem maradt eléggé állandó. A fordulópontokból és az átmenetek időpontjaiból meg lehetett határozni a logaritmusos dekrementumot és a lengési időt, másra pedig az S kiszámításánál nincs szükségünk, hacsak az eszköz méreteit ismerjük.

Mind a négy a 2. §-ban megemlitett berendezésnél két-két lengéssorozatot figyeltem meg, lehetőleg különböző hőmérsékleteknél, hogy a hőmérséklet befolyását számításba vehessem: több megfigyelésre már nem jutott időm, pedig S pontos meghatározásához sokkal több megfigyelésre lett volna szükség, de hiszen egyelőre nem is volt czélom S pontos meghatározása, pusztán a módszer előzetes kipróbálása.

5. §. A kisérletek eredményei.

1. berendezés. Lengenek a gömb és a kereszt: súlyok a kereszt rúdjainak szélén.

A skála távolsága a tükörtől: 2633 mm.

a) Átlagos hőmérséklet: 19·6.

1 skálarész = 1 mm.

Hőmérséklet C.	Forduló pont száma	Leolvasott fölső forduló pontok p_{2n+1}	Az ívekkel arányos, kijavított fölső forduló pontok p'_{2n+1}	Az ívekkel arányos, kijavított alsó forduló pontok p'_{2n}	Leolvasott alsó forduló pontok p_{2n}	Forduló pont száma
19·1	1	753·2	752·24	227·24	226·4	2
	3	739·7	738·84	240·42	239·7	4
	5	726·8	726·13	252·72	252·1	6
	7	714·5	713·85	264·53	264·0	8
19·4	9	703·0	702·55	275·67	275·2	10
	11	691·9	691·48	286·29	285·9	12
	13	681·5	681·14	296·33	296·0	14
	15	671·6	671·29	305·98	305·7	16
19·8	17	662·3	662·04	315·24	315·0	18
	19	653·1	652·88	323·71	323·5	20
	21	644·8	644·61			
20·1						

Egyensúlyi helyzet a kisérlet elején:

$$e' = 486{\cdot}39 \left(= \frac{1}{2}\left[\frac{p_1+p_3}{2} + p_2\right]\right),$$

a kisérlet végén

$$e'' = 486{\cdot}22 \left(= \frac{1}{2}\left[\frac{p_{19}+p_{21}}{2} + p_{20}\right]\right).$$

A kisérlet alatt az eltolódás 0·17 skálarész = 6·3 másodpercz.

Ha a lengések a csillapított harmonikus mozgás törvényei szerint történnek, akkor ha

$$a_i = (-1)^{i+1}(p_i - e),$$

a hol e az egyensúlyi helyzet, azaz ha a_i az i-edik amplitudó, akkor

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = k = \sqrt[m-n]{\frac{a_n}{a_m}}$$

ugyanaz i, m és n bármely értékénél; k-t azonban magukból a fordulópontokból is megkaphatjuk, ugyanis:

$$a_i + a_{i+1} = (-1)^{i+1}(p_i - p_{i+1}) = a_{i+1}(1+k),$$

tehát

$$k = \frac{a_{i+1}(1+k)}{a_{i+2}(1+k)} = \frac{p_i - p_{i+1}}{p_{i+2} - p_{i+1}} = \sqrt[m-n]{\frac{p_n - p_{n+1}}{(-1)^{m-n}(p_m - p_{m+1})}}$$

és

$$\log k = \frac{1}{m-n}\Big(\log(-1)^{n+1}[p_n - p_{n+1}] -$$

$$- \log(-1)^{m+1}[p_m - p_{m+1}]\Big).$$

Az 1. berendezés *a)* megfigyelésénél, ha

$$(-1)^{i+1}(p_i - p_{i+1}) = b_i.$$

n	b_n	m	b_m	$\log b_n$	$\log b_m$	$\log b_n - \log b_m$
1	525·00	11	405·19	2·7201593	2·6076587	0·1125006
2	511·60	12	394·85	2·7089305	2·5964321	24984
3	498·42	13	384·81	2·6975955	2·5852463	23492
4	485·71	14	374·96	2·6863770	2·5739849	23921
5	473·41	15	365·31	2·6752374	2·5626616	25758
6	461·13	16	356·06	2·6638234	2·5515232	23002
7	449·32	17	346·80	2·6525558	2·5400791	24767
8	438·02	18	337·64	2·6414939	2·5284539	30400
9	426·88	19	329·17	2·6303058	2·5174202	28856
10	415·81	20	320·90	2·6188949	2·5063697	25252

A 10 adat középértékéből: $\log k = 0{\cdot}01125544$

$$k = 1{\cdot}02626.$$

Míg a középértéktől legjobban eltérő adat:

$$\log b_8 - \log b_{18} = 0{\cdot}1130400$$

s innen

$$k = 1{\cdot}02636,$$

a maximális hiba tehát: 0·00010.

E kisérlet eredménye gyanánt tehát:

$$\lambda_1 = \operatorname{lognat} k = 0{\cdot}0259131 \quad (t = 19{\cdot}6°\ \mathrm{C}).$$

A lengési idő meghatározása: t_i azon időpont, melyben a megjelölt egyensúlyi helyzet i-edszer vonul el a fonálkereszt előtt.

i	t_i		t_i	t_{i+12}		t_{i+12}	i	t_{i+12}	t_i	$t_{i+12}-t_i$
	m	sec	sec	m	sec	sec				
1	0	16·5	16·5	18	53·5	1133·5	1	1133·5	16·5	1117·0
2	1	49·3	109·3	20	26·7	1226·7	3	1320·0	202·8	7·2
3	3	22·8	202·8	22	00·0	1320·0	5	1506·2	389·2	7·0
4	4	56·0	296·0	23	32·9	1412·9	7	1692·6	575·3	7·3
5	6	29·2	389·2	25	6·2	1506·2	9	1878·5	761·3	7·2
6	8	1·9	481·9	kimaradt			11	2064·6	947·6	7·0
7	9	35·3	575·3	28	12·6	1692·6		középérték :		1117·12
8	11	8·5	668·5	29	45·5	1785·5	2	1226·7	109·3	1117·4
9	12	41·3	761·3	31	18·5	1878·5	4	1412·9	296·0	6·9
10	14	14·5	854·5	32	51·6	1971·5	8	1785·5	668·5	7·0
11	15	47·6	947·6	34	24·6	2064·6	10	1971·6	854·5	7·1
12	17	20·6	1040·6	35	57·7	2157·7	12	2157·7	1040·6	7·1
								középérték :		1117·10

$T_1=93{\cdot}093$; a legjobban eltérő adatból:

$$t_{14}-t_2=1117{\cdot}4$$

$$T_1=93{\cdot}118.$$

A maximális hiba 0·025 sec; T_1 tehát 0·04 százalékig pontos. Hasonló módon jártam el a többi berendezésnél is (l. 12. lap); a kisérletek végeredményét a 41. lapon lévő táblázat mutatja.

6. §. A surlódási együttható kiszámítása a kisérlet szolgáltatta adatok alapján.

A (VI) alatti képletben, a melynek segítségével S kiszámítható, az eszköz méreteit jellemző r_1, r_2, R mennyiségeken kívül a K, K' tehetetlenségi nyomatékok és a β, β' időegységre eső logaritmusos dekrementumok szerepelnek $\left(\beta=\frac{\lambda}{T}\right)$; a vessző nélküli mennyiségek ama berendezésre vonatkoznak, midőn a kereszt a gömbhéjjal együtt lengett, a vesszős mennyiségek pedig arra a berendezésre, midőn a kereszt gömbhéj nélkül lengett.

Hogy tehát S-t kiszámíthassuk, ki kell számítanunk a kisérleti adatokból K, K'-t, β-t és β'-t.

Legyen a kereszten lévő $s_1 s_1'$ súlypár összes tömege: m_1

az $s_2 s_2'$ « « « m_2,

az s_1 és s_1' súlyok tömegközéppontjainak a forgási tengelytől való középtávolsága

az 1. 1'. berendezésnél: d_{11} a 2. 2'.-nél d_{12},

az s_2 és s_2' súlyokra nézve pedig legyenek a megfelelő távolságok d_{21} és d_{22}, akkor $\overline{K}$ illetőleg $\overline{K}'$ az egész lengő szerkezet tehetetlenségi nyomatéka a súlyok tömegközéppontjának tehetetlenségi nyomatéka kivételével a következő egyenletekből adódik ki:

$$\frac{T_1^2}{\pi} = \frac{1}{\tau}(\overline{K}+m_1 d_{11}^2+m_2 d_{21}^2),$$

$$\frac{T_2^2}{\pi^2} = \frac{1}{\tau}(\overline{K}+m_1 d_{12}^2+m_2 d_{22}^2),$$

a hol τ jelenti a drót csavarodási momentumát abban az esetben, midőn az elcsavarás szöge $=1$. E két egyenletből τ kiküszöbölésével megkapjuk $\overline{K}$-t:

$$\overline{K}=\frac{T_2^2(m_1 d_{11}^2+m_2 d_{21}^2)-T_1^2(m_1 d_{12}^2+m_2 d_{22}^2)}{T_1^2-T_2^2}.$$

Egy hasonló képlet szolgáltatja $\overline{K}'$-t.

$\overline{K}$ és $\overline{K}'$-ból a számításainkban szereplő tehetetlenségi nyomatékok következőképen adódnak:

$$K_1=\overline{K}+m_1 d_{11}^2+m_2 d_{21}^2$$

$$K_2=\overline{K}+m_1 d_{12}^2+m_2 d_{22}^2$$

$$K_1'=\overline{K}'+m_1 d_{11}^2+m_2 d_{21}^2$$

$$K_2'=\overline{K}'+m_1 d_{12}^2+m_2 d_{22}^2.$$

A jelen kisérleti berendezésnél:

$m_1 = 47{\cdot}019$ gr $\quad m_2 = 46{\cdot}890$ gr

$d_{11} = 15{\cdot}054$ cm $\quad d_{21} = 14{\cdot}928$ cm

$d_{12} = 5{\cdot}509$ cm $\quad d_{22} = 5{\cdot}364$ cm.

Berendezés	k		λ = lognat k	T*		$\beta = \frac{\lambda}{T}$	Tehetetlenségi nyomaték az *a)* és *b)* kisérletek középlengési idejéből	Átlagos hőmérséklet	A hőmérséklet változása a kisérlet közben	Az egyensúlyi helyzet eltolódása a kisérlet közben skálarészekben
	számérték	maximális hiba		számérték (sec.)	maximális hiba (sec.)					
1. *a)*	1·02626	0·00010	0·0259131	93·093	0·025	0·000278357	28775·77	19·6	1·0	0·17
1. *b)*	1·02245	0·00008	0·0222077	93·045	0·055	238672	28775·77	15·2	0·2	0·86
2. *a)*	1·02927	0·00087	0·0288474	56·108	0·042	516997	10447·09	20·67	1·05	0·27
2. *b)*	1·02435	0·00012	0·0240643	56·050	0·030	429336	10447·09	17·7	0·2	1·45
1'. *a)*	1·02221	0·00010	0·0219708	85·918	0·028	255718	24612·17	13·9	0·2	0·27
1'. *b)*	1·02250	0·00022	0·0222442	85·919	0·029	258897	24612·17	16·2	1·5	1·00
2'. *a)*	1·02903	0·00013	0·0286170	43·405	0·033	659302	6283·49	17·52	0·35	0·005
2'. *b)*	1·03100	0·00013	0·0305272	43·419	0·019	702922	6283·49	15·1	0·2	0·35

Skálatávolság 1., 2.-nél 2633, 1'., 2'.-nél 2637 skálarész : 1 skálarész = 39 másodpercz.

* Az amplitudók fogyása miatt bevezetendő korrekció λ kicsiny volta miatt nem volt akkora, hogy számitásba kelljen venni.

Az előbbi táblázat adja ezek s a megelőző kisérleti adatok alapján az összes mennyiségek számértékét, a melyek S kiszámításánál szükségesek. Megjegyzem még, hogy:

$r_1 = 4{\cdot}885$ cm 0·002 maximális hibával
$r_2 = 5{\cdot}007$ « 0·002 « «
$R = 6{\cdot}084$ « 0·005 « «

A (VI) alatti egyenletből a χ_1 és χ_2 sorok magasabbrendű tagjainak elhagyásával a következő lineáris egyenletet kapjuk S számára:

$$\frac{3}{4\pi}(\beta K-\beta' K') = S\Big\{\Big[\frac{3}{r_1}\Big(1-\frac{1}{15}\,\frac{\varrho\beta r_1^2}{S}\Big)-\frac{3}{r_1}\Big]r_1^4+$$

$$+\frac{r_2^5}{R(R-r_2)}\Big[1-\frac{\varrho\beta R^2+S}{3S}\Big(\frac{R-r_2}{R}\Big)^2\Big(1+\frac{R-r_2}{R}\Big)\Big]+3r_2^3\Big\}$$

vagy rendezve:

$$3r_2^3+\frac{r_2^5}{R(R-r_2)}\Big[1-\frac{1}{3}\Big(\frac{R-r_2}{R}\Big)^2\Big(1+\frac{R-r_2}{R}\Big)\Big]\Big\}S=$$

$$=\frac{3}{4\pi}(\beta K-\beta' K')+\Big[\frac{1}{5}\,r_1^5+\frac{r_2^5(R-r_2)}{3R}\Big(1+\frac{R-r_2}{R}\Big)\Big]\varrho\beta. \quad \text{(VII)}$$

S együtthatója, úgyszintén $\varrho\beta$ együtthatója a jobboldalon pusztán a gömbhéjak méreteitől függnek s így egy és ugyanazzal az eszközzel végzett kisérleteknél egyszer s mindenkorra kiszámíthatók: a jelen kisérleteknél a (VII) eme kiszámitott alakja a következő:

$$850{\cdot}397\,S = \frac{3}{4\pi}(\beta K-\beta' K') + 775{\cdot}260\,\varrho\beta. \quad \text{(VII*)}$$

A $\varrho\beta$-val szorzott tag igen kicsiny (körülbelül 0·0005) s így ϱ-t vehetjük átlagban az összes kisérletekre vonatkozólag 0·00122-nek, a mi a levegő sürűsége 15° C hőmérsékletnél és 755 cm nyomás körül (a surlódó levegő nyomását ezen előzetes méréseknél nem mértem pontosan, minthogy az eddigi kisérletek eredménye szerint a normális nyomás körül S a nyomástól teljesen független), akkor a (VII*) képlet így irható:

$$850{\cdot}397\,S = 0{\cdot}238734(\beta K-\beta' K') + 0{\cdot}9348\,\beta. \quad \text{(VII**)}$$

Tegyük be most a 41. lapon lévő táblázatból β, β', K és K'

összetartozó értékeit a (VII**) egyenletbe. Figyelemmel kell lennünk azonban arra, hogy az egymásnak megfelelő β-kat nem határoztuk meg ugyanannál a hőmérsékletnél s így redukálnunk kell az észlelt β-kat ugyanarra a hőmérsékletre: itt mutatkozik mindjárt e próbaméréseknek egy nagy tökéletlensége: minden egyes berendezésnél csupán két β-t figyeltem meg (többet idő hiánya miatt nem észlelhettem), úgy, hogy nem igen lehet szó arról, hogy β-nak a hőmérséklettől való függését még csak közelítőleg is megkapjam, annál is inkább, mert a jelen kisérleti berendezésnél csupán egy az eszközön kívül felállított hőmérőt figyelhettem meg s az így észlelt hőmérséklet nagy mértékben különbözhetett a surlódó gázréteg tényleges hőmérsékletétől. A 41. lapon lévő táblázat megtekintése is meggyőz arról, hogy a β-kban előforduló változások nem származhatnak kizárólag a hőmérséklet változásától, mert míg β_1, β_2, β'_1 a hőmérséklet emelkedésénél nagyobbodnak, β'_2 fogy; a β-k változását még sok más ily előzetes próbaméréseknél ki nem küszöbölhető körülmény okozhatta, főleg pedig az, hogy méréseimet kémiailag nem tiszta, nedves világító gázzal, széndioxiddal kevert levegővel végeztem, mint a milyen egy laboratóriumi helyiség levegője. Nem várhatunk tehát S számára egész pontos számadatot, csupán arról van szó, hogy nagyságrendje megegyezik-e az eddig ismert surlódási együttható számértékével, a mi tekintettel arra, hogy mily pontossággal történhetik az amplitudók fogyásának észlelése, a mellett bizonyítana, hogy az ismertetett módszer megfelelő módon keresztülvive S-nek pontos meghatározásához vezethet.

S e közelítő értékének meghatározása czéljából következőképen választottam ki a megfelelő β-kat.

Az 1. *b)* alatti β_1-t, a melynek megfigyelésénél a hőmérséklet 15·2 C volt, összekapcsoltam ama β'_1-val, a mely az 1'. alatti *a)* és *b)* kisérletekből mint középérték kiadódik; az 1'. *a)* és 1'. *b)* kisérletek átlagos hőmérsékletének középértéke épen 15·01 C, tehát igen közel van 1. *b)* átlagos hőmérsékletéhez:

$$\beta_{1b} = 0{\cdot}000238672$$

$$\tfrac{1}{2}(\beta'_{1a}+\beta'_{1b}) = 0{\cdot}000257307$$

innen

$$\beta_1K_1-\beta'_1K'_1=0{\cdot}53366 \qquad 15{\cdot}1^\circ \text{ C körül.}$$

Egy másik adatot kaphatunk $\beta_1K_1-\beta'_1K'_1$ számára, ha az 1. *a)* és 1. *b)* kisérletekből, feltéve, hogy közben a hőmérséklet egyenletesen változott, meghatározzuk azt a β_1-t, a mely az egyik 1'. alatti β' átlagos hőmérsékletének megfelel:

$$\beta_{1a}=\beta_{1b}+x(19{\cdot}6-15{\cdot}2)$$

19·6 β_{1a} 15·2 β_{1b} átlagos hőmérséklete; innen

$$x=0{\cdot}000009019$$

s így β_1 16·2 foknál, a melynél β'_1-t ismerjük:

$$=0{\cdot}000247691$$

$$\beta'_{1b}=0{\cdot}000258897$$

innen

$$\beta_1K_1-\beta'_1K'_1=0{\cdot}75547 \qquad 16{\cdot}2 \text{ C körül.}$$

Középértéket véve azt kapjuk, hogy:

$$\beta_1K_1-\beta'_1K'_1=0{\cdot}644565 \qquad 15{\cdot}6 \text{ C körül}$$

és

$$\beta_1=0{\cdot}000243181$$

a (VII**) képletből most már megkapjuk S közelítő értékét:

Azt kapjuk, hogy:

$$S=0{\cdot}0001807\frac{\text{cm}}{\text{gr sec}} \qquad 15{\cdot}6^\circ \text{ C-nál.}$$

Ez az érték igen közel áll amaz értékekhez, a mely az eddigi meghatározásokból S számára kiadódott: a mint ezeket az adatokat O. E. Meyer* összeállítja, 15·6° C-nál S 0·000178 volna.

Valamivel jobban eltérő adatot kapunk a 2., 2'. berendezésekből, a melyek azonban nem oly sikerültek, mint az 1., 1'. berendezések. A 2. *a)* például, a leolvasott amplitudók kicsiny volta miatt szinte egészen hasznavehetetlen; a 2. *b)*-nél az egyensúlyi helyzet eltolódása az összes kisérleteknél bekövetkezett eltolódások közt a legnagyobb, a 2'. berendezésnél pedig a β' a hőmérséklet növekedésével fogyott, a mi legalább is valószinűtlen.

---

* Kinetische Theorie der Gase II. Auflage 190. p.

Azért ezeket nem redukálom megfelelő hőmérsékletekre, egyszerűen középértéket veszek a β_2-kből és a β_2'-k középértékével kombinálom.

$$\tfrac{1}{2}(\beta_{2a}+\beta_{2b})=0{\cdot}000473166 \qquad 19{\cdot}2^\circ \text{ C körül,}$$

$$\tfrac{1}{2}(\beta_{2a}'+\beta_b'\ )=0{\cdot}000681112 \qquad 16{\cdot}3^\circ \text{ C körül,}$$

$$\beta_2 K_2-\beta_2' K_2'=0{\cdot}66355 \qquad 17{\cdot}8^\circ \text{ C körül.}$$

A (VII**) képlet S számára a következő értéket szolgáltatja:

$$S=0{\cdot}0001873\,\frac{\text{cm}}{\text{gr sec}} \qquad 17{\cdot}8^\circ \text{ C körül.}$$

Illuzórius dolog volna S emez értékeit pontosabban kiszámítani a (37) és (38) alatti sorok magasabbrendű tagjainak tekintetbe vételével; hiszen tudjuk, hogy csak egy hozzávetőleges értékről van szó, a melyben már a harmadik számjegy sem igen biztos.

Ha azonban e próbaméréseket a surlódási együtthatónak eddigi meghatározásaival összehasonlítjuk, láthatjuk, hogy e módszer megbizhatóság tekintetében a régebbi módszereket mindenesetre fölülmulja, minthogy azok, különösen kezdetben, mikor mondhatnám ugyanabban a stádiumban voltak mint most ez a módszer, a valóditól igen eltérő adatokat szolgáltattak: igen érdekes e tekintetben az a táblázat, a melyet Herbert Tomlinson közöl a Phil. Trans. 1887-diki évfolyamában; ugyanis

Stokes	Bailly	ingakisérleteiből	15°	C körül	0·000104-et
Meyer	Bessel	«	«	«	275-öt
Meyer	Girault	«	«	«	384-et
Meyer	lengő korongokkal		18·3°	C-nál	360-at
«	«		8·3°	«	333-at
«	transpiráczióval		21·5°	«	323-at
«	«		34·4°	«	366-ot
Maxwell	lengő korongokkal		18°	«	200-at

kapott S számára. Különösen tanulságos a Meyer és Maxwell-féle lengő korongokkal történt mérések összehasonlítása: Meyer a korongok szélén végbemenő jelenséget másképen vette számításba mint Maxwel, s ime mily óriási eltérést kapott; ugyanazon kisérleteit a Maxwell-féle formulák szerint újra kiszámította s

0·000185-t kapott 17·6° C-ra (l. Meyer: Kinetische Theorie der Gase, II. Auflage 182. l. 2. lábjegyzék). Látható tehát, hogy mennyire lényeges a korongok szélén végbemenő jelenség befolyása, úgy, hogy két úgyszólván egész egyenlően jogosult korrekczió majdnem megkétszerezi a surlódási együttható értékét.

E módszer épen e sarkalatos fogyatkozásától az eddigi összes lengési kisérleteknek teljesen ment, s így érthető, hogy még ily tökéletlen formában is eléggé megegyező eredményeket ád ama igen gondos és fáradságos mérésekkel, a melyek utolsó időben különösen transpiráczió segítségével történtek s a mely mérésekből legnagyobb valószinűséggel

0·000178-

nak vehetjük S értékét 15° C körül.

A mint a körülmények megengedik, azonnal hozzálátok, hogy lehetőleg tökéletesítve a kisérleti berendezést, a gázok belső surlódásának e módszerrel való megvizsgálását folytassam s remélem, hogy mélyen tisztelt tanáraim munkálataim folytatásában is oly szivességgel fognak támogatni, mint eddig.

Fogadják e jóakaratukért őszinte köszönetemet!

Zemplén Győző.

PHYSIKAI LABORATÓRIUM.

tschr. f. phy
chm Un
0. p. 91

Kisülési kisérletek. A *Tesla-* és *Thomson*-féle kisérletek szapora váltakozású és nagy feszültségű áramokat követelnek. Ezekhez sajátságos berendezés és különös eszközök kellenek, a melyek nem találhatók fel mindenik középiskolai szertárban. Néhány ily kisérletet — bizonyos megközelítéssel — magas feszültségű, de lassan váltakozó árammal is meg lehet ejteni. Az utóbbi áramot egy jó Ruhmkorff vagy egy elektromos megosztó gép (a melyekkel a legtöbb középiskola rendelkezhetik) szolgáltatja, ha vezetékük kapaczitását növeljük.

A szikraindító primär tekercsét néhány akkumulator árama táplálhatja. A sekundär két sarkának kapaczitását az által nagyobbítjuk, hogy azokat jól elszigetelt állványra helyezett két — 30—60 cm átmérőjű — sárgaréz gyűrűvel kötjük össze. A gyűrűk távolsága néhány méter. E gyűrűk közt levő tér elektromos mezőt alkot, a melyben a Geissler-csövek, elektromos lámpák, elektród nélküli csövek kezünkben tartva szépen világítanak. A világítás gyöngébb, ha a csövek nincsenek kezünkben, hanem pl. a közeli asztalon feküsznek. A csövekben levő fény réteges s majdnem úgy tetszik, mintha kezünkből indulna ki valamely fényáradat. E fénytünemények úgy is jelentkeznek, ha a Ruhmkorffnak csak egyik sarkát kötjük össze a fémgyűrűvel és a másikat a víz- vagy gázvezetékkel. Ha a gyűrű és a cső közé üveg, fa vagy ebonit lapot teszünk, a fény erőssége mit sem változik, mert hiszen az elektromos hullámok dielektrumon keresztül haladnak; de elegendő nagyságú fémlemez vagy sodronyháló közbetétele a tüneményt megszünteti. A szikraindító kapaczitását az által is növelhetjük, ha sík-, henger- vagy kupalakú jól szigetelt konduktorokat helyezünk egymástól csekély távolságra s elsejét a szikraindító egyik sarkával vezetőleg összekötjük. Légüres-, ritkított gázzal megtöltött csövek bármelyik konduktor közelében világítanak, még akkor is, ha a konduktorok közé szigetelő lapot teszünk. Itt is megszünik a jelenség, ha bármelyik konduktort vezetőleg érintjük. A légüres cső helyett telefont is alkalmazhatunk, ha annak egyik szorítóját valamelyik szabad konduktorral kötjük össze. Ez esetben a tüneményt fülünkkel figyeljük meg. A Ruhmkorff sekundär sarkának másik végét a földdel is összeköthetjük, de e körülménynek a fény erősbítésére nincs befolyása.

A Tesla-féle fényteret úgy is létesíthetjük, ha az induktor egyik sarkát pl. a gáz- vagy vízvezetékkel, a másikat pedig czink-ruddal vezetőleg kötjük össze, mely utóbbi konyhasóoldattal megtöltött kémlőcsőbe merül. Ha még e kémlőcsövet tágabb. sósvízzel telt pléhedénybe teszszük s ezt az induktortól nehány meter távolságban egy asztalra helyezzük: úgy-e pléhedény kondenzátor gyanánt szerepel s a fényteret maga körül megnagyobbítja (*Travnicek.* Ztsch. f. phys. u. chem. Unterr. 12. p. 279). E térben az izzólámpáknak egész belseje kékeszöld színnel világít. A Geissler-csövek fénylenek a nélkül, hogy a kondenzátorral közvetlenül össze lennének kötve. A világítás erőssége a kondenzátortól való távolságtól függ; legnagyobb, ha a csövek annak pléhfalával vagy a benne levő vízzel érintkeznek. A Röntgen-csövek nem világítanak. E kisérleteket 2—3 cm-es szikrahosszú induktorral végezhetni; de nagyobb szabásúvá tehetjük azokat, ha hosszabb pl. 20 cm-es szikratávolságú konduktort használunk. Ez utóbbi esetben a csövek erősebben világítanak, a fénytér megnagyobbodik; ha pedig a faasztalra néhány csepp vizet öntünk, úgy az egyes vízrészecskék között szikrák ugranak át s az asztal fája egyidejüleg velük csillog.

Ugyancsak előállíthatók e tünemények az elektromos megosztó gép segítségével, ha a gép egyik sarkának kapaczitását úgy növeljük (*Witting.* Ztsch. f. phys. u. chem. Unterr. 10. p. 192.), hogy annak egyik elektródját oly sodronynyal kötjük össze, a melynek másik vége vízzel telt edénybe ért. A légüres csövek ez edény közelében szépen világítanak, mialatt a gép kisütő sarkai között a szikraáram észrevehetőleg megkisebbedik. A szikraáram is különböző, a szerint mint az edénynyel a positiv vagy a negativ sarkot kötjük össze: első esetben hosszú keskeny kisüléseket kapunk, a másodikban pompás nagy aureolát. Ha az edénybe üvegpoharat állítunk, s azt hasonló magasságban vízzel megtöltjük, úgy szigetelt leydeni palaczkot kapunk, a melylyel szintén érdekes kisérleteket végezhetünk.

Elektromos hajcsövesség. E sajátságos tüneményt A. Chassy a következő kisérlettel mutatta be. Csészében kéneső felett savanyított víz van, a melybe platinadarab nyúlik positiv elektród gyanánt, míg a kéneső negativ elektródul szolgál. A positiv elektródtól némi távolságra egy üvegcső oly módon merül a folyadékba, hogy alsó vége kissé a kénesőbe érjen. Gyönge áram mellett, még ha az már elektrolysist is létesít, a tünemény még nem mutatkozik. De ha az áram mind erősebbé válik, úgy bizonyos erősség mellett azt találjuk, hogy a savanyított víz a kéneső és az üvegcsőfala között az üvegcsőbe áramlik, s mindaddig emelkedik, míg nyomása akkora nem lesz, hogy a csőből a kénesőt kiszorítja. Az emelkedés természetesen a körülmények szerint változik; sebessége növekszik a folyadék ellenállásával s arányos az üvegcső kerületével. Ha a csövet lopóalakulag hajtjuk meg s a folyadék felszínét állandóan tartjuk, úgy folytonos «átszürődés»-re (filtratióra) tehetünk szert. Egy ily kísérletnél 4 cm átmérőjű csővel 700 cm^3 savanyított víz szürődött át. Chassy e tünemény okául az érintő erőt adja, a mely Lippmann szerint akkor keletkezik, ha a felületi feszültség a kéneső különböző pontjain változik. Ez erő hajtja a savanyított vizet az üvegcsőbe. (Journal de Physique. Ser. 3, Tome 6. p. 14.)

Az üveg átfurása. Üvegbe lyukat furni általában véve gyémántfuróval szoktak. Közönséges furóval is megtehetjük a furást, ha az üvegnek átfurandó helyére 25 rész oxalsav és 12 rész terpentin keverékből néhány cseppet öntünk. Az így nyert lyukak ép oly tiszták, mint a gyémánttal furottak, sőt a széleken előforduló törés is ritkább, mint a gyémánttal való furás esetében. *Sz. K.*

Eszrevett sajtóhibák a X. kötetben.

A 276. old.	8.	sorban	$R^2-R\equiv0$ (mod. p)	helyett	olv.	$R^2-R\not\equiv0$ (mod. p)
« 276.	« 14.	«	$p-1\equiv0$ (mod. a)	«	«	$p-1\not\equiv0$ (mod. a)
« 276.	« 21.	«	$p-1\equiv0$)mod. a)	«	«	$p-1\not\equiv0$ (mod, a)
« 278.	« 15.	«	«akkor»	«	«	«de akárhogy»
« 278.	« 17.	«	$-A\equiv0$ (mod. 4)	«	«	$B-A\equiv0$ (mod. 4)

Utalvány czím: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque számlájára.

Kimutatás

az 1901 május havában befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1896. évre: Grünwald Miksa 2 k., össz.	2 kor.
1897. évre: Grünwald Miksa 6 k.	6 kor.
1898. évre: Grünwald Miksa 6 k., Horti Henrik dr. 10 k.	16 kor.
1899. évre: Erdődy Imre 10 k., Grünwald Miksa 6 k.	16 kor.
1900. évre: Bánki Donát	10 kor.
1901. évre: Anderkó Aurél 10 k., Buchböck Gusztáv dr. 10 k., Blau Ármin 6 k., Barabás Jenő 6 k., Csillag Vilmos 10 k., Eötvös Loránd b. 10 k., Egan Lujza 10 k., Fraunhoffer Lajos 10 k., Hirschmann Nándor 6 k., Hlatky Miklós 6 k., Klupathy Jenő dr. 10 k., Kopp Lajos dr. 10 k., Kleiszer Rezső 10 k., Kiss József 6 k., Karai Sándor 6 k., Lóky Béla dr. 6 k., Lóczy Lajos 10 k., Matyasovszky Kászon 6 k., Scholtz Ágost dr. 10 k., Schmidt Ágost dr. 10 k., Szily Kálmán 10 k., Serédy Marczell 6 k., Simkó József 6 k. Összesen	190 kor.

Összesen befolyt: hátrálékokból	50 kor.
f. évi díjból	190 kor.

Ezen kimutatásban felsorolt összegek még f. é. május hóban folytak be s a *bevételi napló 7. tétele* alatt vannak elkönyvelve. Közlése tévedésből a Math. és Phys. Lapok (7.) novemberi számából kimaradt.

Budapest, 1901 deczember 10.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

Utalvány czim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque számlájára.

Kimutatás

az 1901 nov. 1.—decz. 15-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1896. évre: Göllner Károly 6 k., Makay István 6 k. — — 12 kor.

1897. évre:

1898. évre: Kacsoh Pongrácz dr. 6 k., Steiner Simon dr. 6 k. Összesen — — — — — — — — — — — — — — 12 kor.

1899. évre: Dohnányi Frigyes 6 k., Héjas Endre 6 k., Kacsoh Pongrácz dr. 4 k. Összesen — — — — — — — — — 16 kor.

1900. évre: Balog Mór 10 k., Erdődy Imre 10 k., Riesz Frigyes 6 k. Összesen — — — — — — — — — — — — 26 kor.

1901. évre: Abt Antal dr. 6 k., Arató Frigyes 6 k., Asbóth Emil 10 k., Baló Gyula 6 k., Bein Károly 10 k., Benkó Imre 6 k., Berecz Antal 10 k., Bihary Ferencz 6 k., Bogyó Samu 10 k., Burkovits Lajos 6 k., Csehély Adolf 6 k., Csorba György 6 k., K. Danch Ferencz 6 k., Demetzky Mihály 10 k., Dózsa János 6 k., Ellend József 6 k., Fabinyi Rezső 6 k., Farkas Gyula dr. 6 k., Feichtinger Győző 10 k., Gerevich Emil 6 k., Gidro Bonifácz 6 k., Groszbauer József 6 k., Hahóthy Sándor 10 k., Hauser Ignácz 6 k., Homor István 6 k., Javorik János 6 k., Juckel Gyula dr. 10 k., Kerekes Dezső 6 k., Kiss Dénes 6 k., Klimkó Mihály 6 k., Kont Gyula dr. 10 k., Korbuly Emil 6 k., Kosztolányi Árpád 6 k., Krüger Viktor 6 k., Kuthy József 6 k., Marcsiss János 6 k., Medvigy János 6 k., Nagy Vazul 6 k., Németh Zsigmondné 6 k., Ondrus Pál 6 k., Osztrogonácz János 6 k., Pap Lajos 6 k, Payer Jenő 10 k., Péch Aladár 6 k., Perényi Kandid 6 k., Perjessy László 6 k., Pizetti Rókus 6 k., Plischka Norbert 6 k., Privorszky Alajos 6 k., Renner János 6 k., Róna Zsigmond 10 k., Rózsa István 6 k., Steécz György dr. 6 k., Steiner Lajos dr. 10 k., Strompf László 6 k., Süss Nándor 10 k., Szakmáry József 6 k., Szentmiklóssy Jenő 6 k., Szépréthy Béla 6 k., Szijártó Miklós 10 k., Tasch Antal 6 k., Vater József 10 k., Walther Béla 6 k., Wittmann Ferencz 10 k., Wodeczky József 6 k. Összesen 454 kor.

1902. évre: Szőke Béla 10 k. — — — — — — — 10 kor.

Összesen befolyt: hátrálékokból — — — — 66 kor.
f. és 1901. évi dijból — — — — — — 464 kor.

Budapest, 1901 deczember 16.

Feichtinger Győző
pénztárnok.