Duplum

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

BÁRÓ EÖTVÖS LORÁND, HELLER ÁGOST, KŐNIG GYULA,
SCHMIDT ÁGOSTON, WAGNER ALAJOS KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

ELSŐ ÉVFOLYAM

1. ÉS 2. FÜZET. 1891 JUNIUS



BUDAPEST

KIADJÁK A BUDAPESTI MATHEMATIKUSOK ÉS PHYSIKUSOK

1891

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenkint 8 füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, minden hónap közepén egy-egy legalább 3 ívnyi füzet. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. Az alakitandó Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

**Kérjük t. szaktársainkat, sziveskedjenek a mellékelt nyilatkozatot névaláirásukkal mennél előbb visszaküldeni.**

**Budapest, 1891. junius 10-én.**

***A szerkesztők.***

---

Folyóiratunk szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, megoldások, kérdések) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár (Budapest, kir. József-műegyetem), a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* (Budapest, VI. Bajza-utcza 20) czíme alatt.

Az előfizetési pénzeket s a lap szétküldésére vonatkozó felszólalásokat dr. *Wagner Alajos* tanár czíme alatt (VIII. Tréfort-utcza 8) kérjük.

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

ELSŐ KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST, 1892

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

KIADÁSA

# A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

## ELSŐ KÖTETÉNEK TARTALMA

### Első és második füzet.



### Harmadik füzet.



*

### Negyedik füzet.



### Ötödik füzet.



### Hatodik füzet.

## Hetedik és nyolczadik füzet.

# NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ

## Ismertető és önálló dolgozatok.

## Physikai Szemle.



## Irodalom.

## Ismertetett művek.

## Kitűzött feladatok.



## Megoldott feladatok.

## Kitüzött feladatok.



## Megoldott feladatok.

Az 1., 2., 3.t 4., 5., 6., 7. és 8. feladat megoldása a 169., 233., 238., 287., 289., 368., 457., 463. és 464 lapokon.

## Physikai laboratorium.

## Előadások.

## Vegyesek.



## Kérdések, feleletek.



## Társulati ügyek.

## *Szaktársainkhoz.*

*Új folyóirattal, a „Mathematikai és Physikai Lapok“-kal lépünk nem a nagy közönség, hanem hazánk mathematikusai és physikusai elé — avval a kéréssel, hogy olvassák s azt megírni segítsenek.*

*Folyóiratot akarunk teremteni, mely a mi kedves hazánkban is terjeszsze tudományszakainknak napról-napra gyarapodó vívmányait s a mely mathematikusaink és physikusaink tudományos érdeklődését ébren tartva, kedvessé tegye nekik tudományunknak nemcsak művelését, de tanítását is. Azért, ha e lapokat csak magunknak írjuk is, olyan formában, a mint szakember a szakembernek ír, mégis fontos szolgálatot vélünk vele tenni közművelődésünknek, mert kétségtelen, hogy a tanítás sikere úgy a felsőbb, mint a középfokú iskolában mindenek előtt a tanár tudományos képzettségétől függ.*

*Czélunk nem a tudomány népszerűsítése s nem is önálló tudományos dolgozatok közlése: mások sikerrel vállalkoztak már e feladatok teljesítésére. Mi tudományosan ismertető czikkek alakjában fogjuk megadni a szakembernek azt a szellemi táplálékot, melyre szüksége van, ha haladni akar, mert jól tudjuk, hogy különösen a tudományban a nem haladás csak annyit jelent, mint az elmaradás.*

*Mi budapesti mathematikusok és physikusok érezve, mily buzdító a támogatás, melyet az egyesnek társai nyujtanak, tudományos eszmecsere és ismeretközlés czéljából már a múlt évben összeállottunk s az összejöveteleink alkalmával tartott referáló előadások által bizonyára mindnyájunk ismeretköre szélesbedett.*

*Azt szeretnők, hogy még többen, különösen pedig vidéki tár-saink is lépjenek körünkbe; s ha már személyökkel nem lehetnek közöttünk, fogadják szivesen e lapokat, olvassák el bennök azt, a mit mi tudunk nekik mondani s viszont mondják el bennök azt, a mit tapasztalataik alapján ők közölhetnek velünk.*

*De bármily szoros legyen is az az eszményi kapocs, melyet a közös czél képez, czélszerű, sőt szükséges, hogy külső formája is legyen. Ezért elhatároztuk, hogy a magyar mathematikusokat és physikusokat tudományos ismeretterjesztés czéljából társulat alakítására felszólítjuk.*

*A létesítendő társulat alapszabályainak kidolgozásával 24 tagból álló bizottság van megbizva s mint annak egyik tagja, annak nevében intézi alulirott szaktársaihoz azt a kérést, hogy lépjenek körünkbe s fejezzék ki e kívánságukat a mellékelt nyilatkozat aláírásával, úgy hogy a* ***Mathematikai és Physikai Társaságnak*** *velünk együtt megalapítói legyenek.*

*B. Eötvös Loránd.*

---

A «*Mathematikai és Physikai Társulat*» alakitásának előkészítésére kiküldött bizottság legsürgősebb teendőjének tartotta a szakfolyóirat megindítását. Véleményét a budapesti mathematikusok és physikusok teljes gyülése magáévá téve, szerkesztő bizottságot alakított s a folyóirat szerkesztésével az alulirottakat bízta meg.

Kötelességünknek tartjuk a folyóirat programmját, úgy a mint azt a szerkesztő bizottság elfogadta, röviden kifejteni.

A folyóirat évenkint 8 füzetben fog megjelenni, még pedig a nyári hónapok kivételével minden hónap közepén egy-egy legalább 3 ívnyi füzet. Az egész évfolyam 24—30 ívre fog terjedni.

A *Mathematikai és Physikai Lapok* füzeteit nem véletlenül öszszekerülő czikkekkel akarjuk kitölteni; ellenkezőleg, a folyóirat minden egyes füzetét pontosan előre megállapitott terv szerint kívánjuk összeállitani.

Tervünk főbb vonásaiban a következő:

A füzetek első lapjait *önálló* czikkek foglalják el. Ezekben a tudomány haladását ismertető — hosszabb vagy rövidebb dolgozatokat kivánunk közölni, valamint olyan közleményeket, melyek a mathematikának és physikának, mint iskolai tantárgyaknak egyes részleteit a tanitást előmozditó új alakban fejtik ki.

Az «*Irodalom*» rovatában állandóan közöljük a legjelentékenyebb szaklapok tartalmát, a fontosabb czikkeket rövidre fogott kivonatokban ismertetjük, vagy ha kívánatosnak mutatkoznék, bővebben is megbeszéljük, még pedig oly formában, hogy összes olvasóinkat, ha az illető czikk tárgyával még nem is foglalkozhattak, tüzetesen tájékoztassuk a kérdés mibenlétéről. — Ebben a rovatban az ujonnan megjelent jelesebb szakmunkákról, s általában minden nevezetesebb irodalmi jelenségről is fogunk referálni.

Harmadik rovatunk *mathematikai és physikai feladatoknak* van szánva. Ebben önálló megoldást feltételező problémák lesznek kitűzve, főképen azért, hogy a beérkezett helyes megoldások közlésével szaktársainkat közelebb hozzuk egymáshoz.

A «*physikai laboratorium*» czimű rovatban a középfokú iskolák tanárainak szükségletéhez mérten ismertetni fogunk minden fontosabb haladást, mely a physikai kisérletek berendezésére, új készülékekre, anyagokra s a velök való bánásmódra vonatkozik.

Az erre következő rovat a mathematikusok és physikusok összejövetelein tartott előadásokról s az ott megbeszéltekről fog értesiteni. Ez lesz az alakulóban levő *Mathematikai és Physikai Társulat* működésének tolmácsa.

Külön rovatot nyitunk szakbavágó *kérdések* számára; gondoskodni fogunk róla, hogy minden kérdésre ugyanezen rovatban lehetőleg jól tájékoztató felelet adassék. Reméljük, hogy t. szaktársaink kisebb-nagyobb kérdésekkel élénkiteni fogják e rovatunkat.

Ha pedig akad rövid, de érdekességénél fogva figyelemre méltó tárgy, mely a felsorolt rovatok egyikébe sem illeszthető, az a füzetet befejező *vegyes közlemények* rovatába kerül.

Ez az a terv, melynek végrehajtására helybeli szaktársaink bizalma kötelezett. Érezzük a felelősség s a teher nagyságát, melyet a szerkesztés elvállalásával magunkra vettünk, s mégis teljes bizalommal nézünk a jövő elé! De bizalmunkat nem a magunk erejébe vetjük: a feladat nagyságával szemben egy két ember ereje, bármekkora lenne is, magában elenyészik. Bízunk számos szaktársunkban, kik hazánk egész nagy területén elszórva, sokszor egymástól és tőlünk teljesen elszigetelve ismereteik- és tehetségöknél fogva folyóiratunk hivatott munkatársai.

Erős meggyőződésünk, hogy tisztelt szaktársaink folyóiratunkat pártfogásukba veszik: «olvassák s megírni segítik.»

Budapest, 1891 junius 1.

*Bartoniek Géza,* *Rados Gusztáv*

mint a Math. és Phys. Lapok szerkesztői.

# A GAMMAFÜGGVÉNYEK ELEMI TÁRGYALÁSA.

A gammafüggvények elmélete vagy végtelen szorzat alakjukból indúl ki GAUSS szerint vagy pedig LEGENDRE tárgyalását követve a határozott integrált tekinti e függvények első értelmezésének. Ha ugyanis $u$ pozitiv, akkor a részletes tárgyalásból kitünik, hogy

$$\int_0^\infty e^{-z} z^{u-1}\, dz$$

véges meghatározott érték, mely természetesen $u$-tól függ; az integrál e paraméternek úgynevezett gammafüggvénye, a szokásos jelöléssel: $\Gamma(u)$.

Bár függvénytani szempontból az első értelmezés a természetesebb és általánosabb, mégis tekintettel a gammafüggvények számos alkalmazására a geometriában, mechanikában s ú. t. előforduló alakokra, melyek miatt leginkább szükséges őket a kézikönyvek rendes anyagába besorozni, a második értelmezés ajánlkozik leginkább didaktikai szempontból. A többszörös integrálok egyik nagy osztályának kiszámítása gammafüggvények segitségével történik, és e szempontból ezek ép oly alapfüggvényeknek tekintendők, mint a logarithmus vagy a cyclometria függvényei. Kivánatos tehát, hogy ama határozott integráltól minél elemibb úton jussunk el mindazon tételekhez, melyek a gammafüggvények táblájának elkészitéséhez szükségesek. Ez történik a következő lapokon, nemcsak minden a függvénytanból vagy a többszörös integrálok elméletéből vett meggondolás teljes mellőzésével, de a mellett magában is igen egyszerű úton.*

---

* Ugyane szempontból dolgozta föl PRINGSHEIM a «Mathematische Annalen» 31. kötetében (475—481. l.) a gammafüggvények elméletét; tárgyalása

1. Ha $u$ pozitiv, akkor az integrálszámitás első elemei szerint:

$$\int_0^1 x^{u-1}\,dx = \frac{1}{u};$$

és ebből ismét:

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)\,dx = \int_0^1 x^{u-1}\,dx - \int_0^1 x^u\,dx =$$
$$= \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} = \frac{1}{u(u+1)}.$$

Ugyanigy tovább menve:

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)(1-x)\,dx = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)\,dx - \int_0^1 x^u(1-x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{u(u+1)} - \frac{1}{(u+1)(u+2)} = \frac{2}{u(u+1)(u+2)}.$$

Az integrálandó kifejezéshez újból és újból hozzácsatolva az $1-x$ szorzót, minden nehézség nélkül fölismerjük képletünk általános alkatát, mely szerint:

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^n\,dx = \frac{n!}{u(u+1)\ldots\ldots(u+n)} \qquad \text{(I.)}$$

$(u > 0;\ n$ poz. eg. szám$)$

Az $n$ ről $n+1$-re való következtetés e képletet minden pozitiv egész $n$-re érvényesnek bizonyitja; mert

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{n+1}\,dx = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^n\,dx - \int_0^1 x^u(1-x)^n\,dx =$$
$$= \frac{n!}{u(u+1)\ldots(u+n)} - \frac{n!}{(u+1)\ldots(u+n+1)} =$$
$$= \frac{n!}{(u+1)\ldots(u+n)}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+n+1}\right) = \frac{(n+1)!}{u(u+1)\ldots(u+n+1)}.$$

---

elemi jellegű, de még mindig elég bonyolódott, melylyel szemben az itt bemutatandó, előadásaim számára régebben kidolgozott, különben egészen eltérő módszerek lényeges egyszerűsítést adnak.

2. Az (I.) alatt álló képlet további átalakítására az $e^{-nx}$ és $(1-x)^n$ kifejezések értékkülönbségét kell tanulmányoznunk, ha, mint amaz integrálokban

$$0 \leqq x \leqq 1.$$

Ekkor először is

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

oly sor lévén, melyben a tagok absolut értéke folyton kisebbedik, míg az előjelek váltakoznak, mindenesetre:

$$e^{-x} \geqq 1 - x,$$

és ebből, $n$-ik hatványra emelve:

$$e^{-nx} \geqq (1-x)^n.$$

Lássuk most már, hogy a

$$D = e^{-nx} - (1-x)^n$$

különbségnek, mely soha sem negativ, a 0 és 1 közt fekvő $x$ helyekre nézve mi a legnagyobb értéke? Ezt csak oly helyen érheti el, hol differencziálhányadosa eltünik, tehát ott, hol

$$-ne^{-nx} + n(1-x)^{n-1} = 0,$$

vagyis a hol

$$e^{-nx} = (1-x)^{n-1}.$$

Ilyen hely a kérdéses számközben csakugyan van; mert a differencziálhányados értéke az $x=1$ helyen $-ne^{-n}$, negativ, tehát ott a függvény fogy: de nem fogyhatott mindig, mert $D$-nek értéke az $x=1$ helyen, $e^{-n}$ nagyobb, mint az $x=0$ helyen, a hol t. i. zérus; tehát van oly $x$, hol a függvény növekedésből fogyásba megy át, azaz hol maximuma van. A hol maximum van, ott

$$e^{-nx} = (1-x)^{n-1}$$

és így ugyanott:

$$e^{-nx} - (1-x)^n = (1-x)^{n-1} - (1-x)^n.$$

De ebből következik, hogy $e^{-nx}-(1-x)^n$ legnagyobb értéke semmi esetre sem nagyobb az $(1-x)^{n-1}-(1-x)^n$ legnagyobb értékénél, melyet könnyű meghatározni.

Lesz ugyanis, ha $n \geqq 2$, mint a jegyzetből látni: *

$$\left[(1-x)^{n-1}-(1-x)^n\right]_{\max.}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1},$$
$$(0 \leqq x \leqq 1.)$$

és így végre:

$$0 \leqq e^{-nx}-(1-x)^n \leqq \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
$$(0 \leqq x \leqq 1.)$$

Vagy rövidebben:

$$e^{-nx}-(1-x)^n=\frac{\vartheta_n}{n} \tag{II.}$$
$$(0 \leqq x \leqq 1)\,;\ n \text{ poz. eg. szám})$$

ha $\vartheta_n$ az $n$ től ugyan függő, de 0-nál nem kisebb, 1-nél nem nagyobb értéket jelent. (Az $e^{-x}$ sora mutatja, hogy a (II) $n=1$ esetében is érvényes.)

3. Ha most már az (I.) alatt felállított integrálképletbe $(1-x)^n$-nek II. alatt álló értékét bevezetjük, lesz

---

* Az $(1-x)^{n-1}-(1-x)^n$ maximuma csak ott lehet, hol

$$-(n-1)(1-x)^{n-2}+n(1-x)^{n-1}=(1-x)^{n-2}(1-nx)=0$$

tehát csak az $\frac{1}{n}$ és 1 helyeken. De az utóbbi nem felelhet meg; a függvény megfelelő értéke 0; és a 0-tól 1-ig terjedő számközben nem is lévén negativ értéke, ez csak mininum lehetne.

Ellenben a második differencziálhányadosnak

$$-(n-2)(1-x)^{n-3}(1-nx)-n(1-x)^{n-2}$$

értéke az $\frac{1}{n}$ helyen

$$-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2}$$

negativ, a mi csakugyan maximumnak felel meg. Ha $n=2$, akkor az $x=1$ megoldás egészen kiesik, de $x=\frac{1}{2}$ megtartja maximum jellegét.

$$\int_0^1 x^{u-1}\left(e^{-nx} - \frac{\vartheta_n}{n}\right)dx = \frac{n!}{u(u+1)\ldots(u+n)}$$

vagyis

$$\int_0^1 x^{u-1} e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \vartheta_n x^{u-1}\,dx + \frac{n!}{u(u+1)\ldots(u+n)}$$

vagy még a baloldali integrálban az $nx=z$ helyettesitést végezve, a jobboldaliban pedig a középérték tételét alkalmazva az $x$-től is függő $\vartheta_n$ helyett egy szintén 0-nál nem kisebb, 1-nél nem nagyobb $\theta_n$ értéket téve az integrál jele elé:

$$\frac{1}{n^u}\int_0^n z^{u-1} e^{-z}\,dz = \frac{\theta_n}{n}\frac{1}{u} + \frac{n!}{u(u+1)\ldots(u+n)}.$$

vagy még:

$$\int_0^n z^{u-1} e^{-z}\,dz = \frac{\theta_n n^{u-1}}{u} + \frac{n!}{u(u+1)\ldots(u+n)} n^u. \qquad \text{(III.)}$$

$(u > 0,\ n$ poz. eg. szám$)$

Ha e képletben most $n$-et a pozitiv egész számok sorában minden határon túl növesztjük, akkor — egyelőre az $u < 1$ megszorítással, mely később azonban teljesen elejthetőnek bizonyúl — ebből lesz:

$$\int_0^\infty e^{-z} z^{u-1}\,dz = \lim.\left(\frac{n!}{u(u+1)\ldots(u+n)} n^u\right), \qquad u > 0 \quad \text{(IV.)}$$

Ha ugyanis $0 < u < 1$, az első tagnak a jobb oldalon határértéke 0.

Ugyanezen föltétel mellett a bal oldalon álló integrál véges és meghatározott volta is rögtön belátható. Az integrál ugyanis

$$\int_0^1 e^{-z} z^{u-1}\,dz + \int_1^\infty e^{-z} z^{u-1}\,dz$$

alakban írható; az első ezek közűl nem más, mint:

$$\int_0^1 d\left(\frac{e^{-z} z^u}{u}\right) + \frac{1}{u}\int_0^1 e^{-z} z^u\,du,$$

tehát véges és meghatározott, a második pontosabb írásban

$$\lim_{\omega=\infty} \int_1^{\omega} e^{-z} z^{u-1}\, dz$$

és ennek összetartási föltétele:

$$\lim_{\omega_1, \omega_1=\infty} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z} z^{u-1}\, dz = 0$$

de, ha $0 < u < 1$, és így $z^{u-1} < 1$, akkor:

$$0 < \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z} z^{u-1}\, dz < \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z}\, dz = e^{-\omega_1} - e^{-\omega_2}$$

és a határérték csakugyan 0.

Ebből azután következik, hogy a IV. jobb oldalán álló kifejezés határértéke is véges és meghatározott, még mindig megtartva az $0 < u < 1$ megszorítást.

4. Hogy végre a (IV.) alatt álló képletben elég, ha mint ott jelöltük, $u > 0$, és nem szükséges, hogy $u$ pozitiv valódi tört legyen, a mely esetre egyedűl érvényes az eddigi bizonyítás, azt következőképen mutatjuk ki.

Ha először is $u = 1$, akkor a (IV.)-ből lesz:

$$\int_0^{\infty} e^{-z}\, dz = \lim.\left(\frac{n!}{(n+1)!}\, n\right) = 1,$$

a mi ismeretes helyes eredmény.

Legyen most röviden a (IV.) baloldala $\Gamma(u)$, jobboldala $P(u)$, azaz:

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{u-1}\, dz,$$

$$P(u) = \lim.\left(\frac{n!}{u(u+1)\ldots(u+n)}\, n^u\right).$$

akkor a már előbb használt parcziális integrálás képlete szerint:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} z^{u-1}\, dz = \left[\frac{e^{-z} z^u}{u}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{u}\int_0^{\infty} e^{-z} z^u\, dz.$$

itt a jobboldal első tagja mindkét határon zérus, tehát

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u}\,\Gamma(u+1); \qquad \text{(V.)}$$

hasonlókép:

$$P(u) = \lim.\left(\frac{n!}{u(u+1)\ldots(u+n)}\,n^u\right) = \frac{1}{u}\lim.\left(\frac{n!}{(u+1)\ldots(u+n)}\,n^u\right)$$

a mely értéken nem változtatunk, ha

$$\lim.\left(\frac{n}{u+n+1}\right) = 1$$

kifejezéssel szorzunk. Ekkor:

$$P(u) = \frac{1}{u}\lim.\left(\frac{n!}{(u+1)\ldots(u+n+1)}\,n^{u+1}\right) = \frac{1}{u}\,P(u+1). \qquad \text{(VI.)}$$

Azaz, ha $\Gamma(u) = P(u)$ volt, akkor egyszersmind $\Gamma(u+1) = P(u+1)$. Ha tehát a (IV.) két oldalán álló kifejezés azonos minden $u$-ra, mely 0-nál nagyobb és 1-nél nem nagyobb, akkor azonosak egyszersmind minden $u$-ra, mely 1-nél nem kisebb és 2-nél nem nagyobb. Ez alapon átmehetünk ép úgy a 2-től 3-ig terjedő számközre és úgy tovább; szóval $\Gamma(u)$ és $P(u)$ azonosnak bizonyúl az $u$ minden pozitiv értékénél.

5. Ismerve a gammafüggvény, $\Gamma(u)$-nak ezen $P(u)$ alakját, igen rövid úton jutunk azon hatványsorhoz, melyet Legendre a l. $\Gamma(1+u)$ számára fölállitott és, mely a gammafüggvény számára szerkesztett táblák * számításának alapja. Hogy e tárgyalás teljes egészet adjon, szükségesnek tartom e részleteknek is fölvételét, ámbár itt csekélyebb rövidítések kivételével csak ismeretes módszerekről referálok:

Ha ugyanis újból a

$$\Gamma(u) = \lim.\left(\frac{n!}{u(u+1)\ldots(u+n)}\,n^u\right), \qquad (u > 0)$$

* LEGENDRE. Exercices de calcul intégral. I. köt. 1811. 302. l. az $u$-nak 1-től 2-ig ezred részekben haladó értékére log. $\Gamma(u)$ 7 deczimálisra van adva. A II. kötet (1817). 86. és következő lapjain ugyane táblát 12 tizedeshelyre terjesztette ki LEGENDRE. GAUSS-nál («Disquisitiones circa seriem etc. 1812) századrészekben haladó tábla található, mely 18 tizedeshelyre terjed. Rövid kivonat FRÖHLICH repertoriumának 189. lapján.

értelmezésből indulunk ki, és a két oldalon

$$u = u \lim. \frac{u+n}{n}$$

-nel szorzunk, lesz

$$u\Gamma(u) = \Gamma(u+1) = \lim. \left(\frac{(n-1)!}{(u+1)\ldots(u+n-1)}\, n^u\right), \quad (u>0)$$

vagy még:

$$\Gamma(1+u) = \lim. \frac{n^u}{\left(1+\frac{u}{1}\right)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)}, \quad (u>0)$$

de $n^u$ így is irható:

$$n^u = \left(\frac{2}{1}\right)^u\left(\frac{3}{2}\right)^u\ldots\left(\frac{n}{n-1}\right)^u = \left(1+\frac{1}{1}\right)^u\left(1+\frac{1}{2}\right)^u\ldots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^u,$$

tehát:

$$\Gamma(1+u) = \lim. \left(\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^u}{1+\frac{u}{1}}\;\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^u}{1+\frac{u}{2}}\ldots\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^u}{1+\frac{u}{n-1}}\right). \quad (u>0)$$

Áttérve a természetes logarithmusokra:

$$\mathrm{l.}\,\Gamma(1+u) = \lim. \Big(u\,\mathrm{l.}\left(1+\frac{1}{1}\right) - \mathrm{l.}\,1+\frac{u}{1}) + u\,\mathrm{l.}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \mathrm{l.}\left(1+\frac{u}{2}\right) +$$

$$+ \ldots + u\,\mathrm{l.}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) - \mathrm{l.}\left(1+\frac{u}{n-1}\right)\Big),$$

de az ily $n-1$ tagú sor határértéke, midőn a tagszám, $n-1$, a végtelenbe növekszik, nem más, mint a megfelelő végtelen sor, úgy hogy ezt az eredményt a közönséges jelzésben így is írhatjuk:

$$\mathrm{l.}\,\Gamma(1+u) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(u\,\mathrm{l.}\left(1+\frac{1}{m}\right) - \mathrm{l.}\left(1+\frac{u}{m}\right)\right), \quad (u>0) \quad \text{(VII.)}$$

Ha a pozitiv $u$-t az 1-nél nem nagyobb értékekre szorítjuk, akkor használható a logarithmus sora,

$$\mathrm{l.}\,(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \quad (1 < z \leq 1)$$

és lesz:

$$\text{l.}\,\Gamma(1+u)=u\,\text{l.}\,2-\text{l.}\,(1+u)+$$
$$\sum_{m=2}^{\infty}\left(u\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\frac{1}{m^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{m^3}-\ldots\right)\left(\frac{u}{m}-\frac{1}{2}\frac{u^2}{m^2}+\frac{1}{3}\frac{u^3}{m^3}-\ldots\right)\right)\quad(0\leqq u\leqq 1)$$

vagyis

$$\text{l.}\,\Gamma(1+u)=u\,.\,\text{l.}\,2-\text{l.}\,(1+u)+$$
$$\sum_{m=2}^{\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{m^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{m^3}+\ldots\right)u+\frac{1}{2}\frac{u^2}{m^2}-\frac{1}{3}\frac{u^3}{m^3}-\ldots\right),\quad(0\leqq u\leqq 1)\quad\text{(VIII.)}$$

Szabad-e itt a sorban az $u$ egyenlő hatványait tartalmazó tagokat összevonni és ily módon sorunkat hatványsorrá átalakítani? Ezen átrendezés ismeretes tételek alapján helyes eredményhez vezet, ha minden tag helyébe absolut értékét téve, még mindig összetartó sort kapunk, azaz ha összetartó a következő sor:

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\frac{1}{m^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{m^3}+\frac{1}{4}\frac{1}{m^4}\right)u+\frac{1}{2}\frac{u^2}{m^2}+\frac{1}{3}\frac{u^3}{m^3}+\frac{1}{4}\frac{u^4}{m^4}\quad+\ldots\right)$$
$$(0\leqq u\leqq 1)$$

Itt végre minden tagot nagyobbítunk, ha $u$ helyébe legnagyobb értékét, egyet írunk, és így a (VIII.) átrendezése mindenesetre meg-van engedve, ha összetartó a következő sor, melynek az $u=1$ helyettesítésnél kétszerese lép föl:

$$S=\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{m^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{m^3}+\frac{1}{4}\frac{1}{m^4}\quad+\ldots\right)$$

Azonban itt, hol $m\leqq 2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{1}{m^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{m^3}+\frac{1}{4}\frac{1}{m^4}+\ldots\quad&<\frac{1}{2}\frac{1}{m^2}\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}\quad+\ldots\right)\\&<\frac{1}{2}\frac{1}{m^2}\frac{m}{m-1}\\&<\frac{1}{2}\frac{1}{(m-1)m}\end{aligned}$$

Tehát:

$$S<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}\;+\ldots\right),$$
$$S<\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\;+\ldots\right)=\frac{1}{2}$$

azaz $S$ csakugyan összetartó.

A (VIII.) ily átrendezése akkor is meg van engedve, ha l. $(1+u)$ helyett is soralakját

$$\text{l.}\,(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\dots \qquad (-1<u\leqq 1)$$

irjuk, mert ez is összetartó, ha minden előjelt pozitivra változtatunk, csakhogy ekkor $u$- értékét egynél kisebbre kell szorítanunk. Az átrendezés eredménye * a következő Legendre-tól származó sor:

$$\text{l.}\,\Gamma(1+u)=-Cu+\frac{1}{2}S_2u^2-\frac{1}{3}S_3u^3+\frac{1}{4}S_4u^4-\dots, \qquad \text{(IX.)}$$
$$(|u|<1)$$

hol az együtthatókra már a szokásos rövid jelzést vezettük be. Az első tagban előforduló $C$ nem más mint az Euler vagy Mascheroni után nevezett állandó, míg $S_k$ az egész számok $(-k)$-edik hatványainak összegeit jelenti, t. i.

$$S_k=1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\dots,$$

melyeket Legendre a «Traité des fonctions elliptiques» cz. munkájában (2. köt. 432. l.) $k=2$-től 35-ig 16 tizedes helyre közölt. Az $S_k$ jelzés segítségével $C$ kifejezése is rövidűl, t. i. közvetetlenűl látni, hogy ez:

$$C=1-\text{l.}\,2+\frac{1}{2}(S_2-1)-\frac{1}{3}(S_3-1)+\frac{1}{4}(S_4-1)-\dots,$$

vagy még tekintetbe véve, hogy l. $(1+u)$ sorából

$$\text{l.}\,2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots,$$

végre:

$$C=\frac{1}{2}S_2-\frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4-\frac{1}{5}S_5+\dots$$
$$=0{\cdot}577\,215\,664\,901\,533$$

A (IX.) alatti sort Legendre még a következő gyorsabb számításra alkalmas alakba írja át. Ha benne $-u$ helyébe $u$-t teszünk, lesz

* Minthogy itt hatványsorral van dolgunk, az $0\leqq u<1$ összetartási föltétel helyett $|u|<1$ írható.

$$\text{l.}\,\Gamma(1-u) = Cu + \frac{1}{2} S_2 u^2 + \frac{1}{3} S_3 u^3 + \frac{1}{4} S_4 u^4 + \dots \qquad |u| < 1 \qquad \text{(X.)}$$

és így

$$\text{l.}\,\Gamma(1+u) + \text{l.}\,\Gamma(1-u) = S_2 u^2 + \frac{1}{2} S_4 u^4 + \frac{1}{3} S_6 u^6 + \dots \quad (|u| < 1)$$

De ismeretes tétel szerint (lásd p. SCHLÖMILCH, Compendium der höheren Analysis, I. köt. 240. l.)

$$\text{l.}\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\frac{S_2 z^2}{\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{S_4 z^4}{\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{S_6 z^6}{\pi^6} - \dots \qquad (|z| < 1)$$

azaz, ha $z$ helyett $\pi . u$-t írunk és —1-gyel szorzunk:

$$\text{l.}\,\frac{\pi u}{\sin \pi u} = S_2 u^2 + \frac{1}{2} S_4 u^4 + \frac{1}{3} S_6 u^6 + \dots \qquad (|u| < 1)$$

tehát a fönt kifejtett egyenlet:

$$\text{l.}\,\Gamma(1+u) + \text{l.}\,\Gamma(1-u) = \text{l.}\,\frac{\pi u}{\sin \pi u} \qquad \text{(XI.)}$$

Most még a (IX.) és (X.)-ben:

$$\text{l.}\,(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots \qquad (|u| < 1)$$

illetőleg

$$\text{l.}\,(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots \qquad (|u| < 1)$$

értéket zárt alakban levonva és soralakban hozzáadva lesz:

$$\text{l.}\,\Gamma(1+u) = -\text{l.}\,(1+u) + (1-C)u + \frac{1}{2}(S_2 - 1)u^2 - \\ - \frac{1}{3}(S_3 - 1)u^3 + \dots \qquad (|u| < 1) \qquad \text{(XII.)}$$

$$\text{l.}\,\Gamma(1-u) = \text{l.}\,(1-u) - (1-C)u + \frac{1}{2}(S_2 - 1)u^2 + \\ + \frac{1}{3}(S_3 - 1)u^3 + \dots \qquad (|u| < 1) \qquad \text{(XIII.)}$$

A (XII.)-ből levonva a (XIII.)-at:

$$\frac{1}{2}(\text{l.}\,\Gamma(1+u) - \text{l.}\,\Gamma(1-u)) = -\frac{1}{2}\,\text{l.}\,\frac{1+u}{1-u} + (1-C)u - \frac{1}{3}(S_3 - 1)u^3 - \\ - \frac{1}{5}(S_5 - 1)u^5 - \dots$$

hol végre l. $\Gamma(1-u)$ értékét a (XI)-ből véve lesz:

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(1+u)=\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\frac{\pi u}{\sin \pi u}-\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\frac{1+u}{1-u}+(1-C)u$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(S_3-1)u^3+\frac{1}{5}(S_5-1)u^5+\ldots\right) \quad (|u|<1)$$

Ez a közönségesen Legendre sorának nevezett alakzat, melylyel most már a gammafüggvény logarithmusainak tábláját bármely pontossággal aránylag igen gyorsan számíthatjuk.

*Kőnig Gyula.*

# ÁLLÓ FÉNYHULLÁMOK.

A physikai optika rendkívül gazdag az elméleti úton fölfedezett jelenségekben. A hullámzási elmélet első évtizedeiben FRESNEL tisztán a fényjelenségek természetéről alkotott feltevéseiből a legfontosabb kisérletek egész sorát gondolta ki, melyeket az ő utasitásai szerint, tőle távol mások hajtottak végre. A kisérletek a legtöbb esetben mathematikai pontossággal igazolták az elméletet, a mi az undulatio elmélet általános elterjedéséhez nem kis mértékben járult hozzá.

A legújabb időben WIENER * strassburgi physikusnak ugyancsak elméleti úton sikerült eddig ismeretlen optikai jelenséget fölfedeznie. Ez az *álló fényhullámok* jelensége.

Az álló hullámokat a mechanikából jól ismerjük s az akustikában lépten-nyomon találkozunk velök. Az álló fényhullámok jelenségének megértését lényegesen megkönnyitjük magunknak, ha valamely megfelelő akustikai jelenségre gondolunk.

Legyen egy erősen szóló síp vagy hangvilla a faltól egynéhány méternyire felállítva. A falról visszaverődő hanghullámok a beesőkkel álló hullámokat hoznak létre. A csomók, vagyis a legnagyobb nyomásváltozások helyei szabad vagy resonátorral fölfegyverzett füllel kereshetők fel, a leghevesebb légmozgás helyei pedig keskeny rámára kifeszített vékony hártyával, melyhez selyemszálon függő könnyű ingácska támaszkodik. Az első eljárást SAVART, az utóbbit pedig SEEBECK követte. A csomókban a hang igen erősen hallik, az ingácska pedig nyugton marad; a hullámhegyeken ellenben az ingácska mozog hevesen s a hang

* Ann. d. Ph. XL. 201—243. l.

gyengén, vagy alig hallható. Ha a csomókat csakis a falon merőlegesen beeső és visszaverődő hullámban keressük, az első csomó magán a falon van s a többiek $2n\frac{\lambda}{4}$ távolságban, vagyis $\frac{\lambda}{2}$ közökben következnek egymásra; a hullámhegyek két-két csomó közé, vagyis $(2n+1)\frac{\lambda}{4}$ távolságra esnek a faltól.

Gondoljuk már most, hogy sík ezüst tükörre párhuzamos sugárnyaláb esik merőlegesen. Legyen a fény homogén. Minthogy a jó ezüst tükrön a visszaverődés igen tökéletes, a fény jóformán ugyanakkora intenzitással fog visszaverődni. E szerint a tükör előtti térben *két közel egyenlő intenzitású sugárnyaláb halad egymással szemben, a tükör normálisa irányában.*

Ha a fény természetéről alkotott nézeteink egyáltalában helyesek, azaz ha a fénysugarakban egyenlő szakaszokat tudunk megkülömböztetni s ha ezek egymással interferálhatnak, a mit pedig az összes interferentia- és diffractio-jelenségekből bebizonyitottnak kell tekintenünk: akkor az egymással szemben haladó sugárnyalábokban az álló hanghullámoknak megfelelő jelenségnek kell létre jönnie. Vagyis várható, hogy a tükör normálisa mentén $\frac{\lambda}{2}$ közökben fényminimumok, ezek között pedig fénymaximumok támadnak. A maximumok nyilván ott keletkeznek, a hol a két ellentett irányú sugár útkülömbsége $2n\frac{\lambda}{2}$; azokban a pontokban, a melyeken az útkölömbség $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$, minimum jön létre. Az útkülömbségbe természetesen a visszaverődésnél esetleg bekövetkező phasis-változásnak megfelelő úthossz is van beleértve. — Ez az álló fényhullámok jelenségének elméleti alapja.

## I. Alapkisérletek.

*Ellentett irányú fénysugarak álló hullámai.* — Az előbbi okoskodásból arra következtethetünk, hogy a merőlegesen beeső és visszaverődő fény álló hullámaiban a tükörrel párhuzamos maximum- és minimum-síkok támadnak. Vagyis a normális mentén maximumok minimumokkal váltakoznak; s minthogy a visszavert fény alig gyengébb a beesőnél, a minimumok teljesek. A maximumokban a fény erőssége 4-szeres, a minimumokban pedig zérus. Ez tehát a bevezető sorokban említett akustikai kisérletnek optikai analogonja. De míg az álló hanghullámok csomóit és hullámhegyeit aránylag könnyen megkereshetjük, addig az álló fényhullámok fölkeresésére — noha létezésükben elméleti okoknál fogva kételkedni eddig sem lehetett — mindeddig semmiféle módot nem ismertünk. A kisérleti nehézségek nyomban szembetűnnek, mihelyt meggondoljuk, hogy a tükör előtt 1 mm-nyi téren, a hullámhossz értékeül $\frac{1}{2000}$ mm-t véve, nem kevesebb mint 4000 egymással párhuzamos minimum-sík s közeikben ugyanannyi maximum-sík helyezkedik el.

Ebből kitűnik az is, hogy az álló fényhullámok jelensége minden eddig ismert interferentia-jelenségtől lényegesen külömbözik. Ugyanis a legtöbb interferentiával járó jelenségben a fény maximumai és minimumai a fény terjedése irányában, mintegy egymás mellett vonuló síkok vagy görbe lapok mentén lépnek fel; az álló hullámokban épen ellenkezőleg, a fény útjára merőleges, rendkívül sűrűen egymásra következő síkokban képződnek. Ebben a sajátságukban rejlik a nehézség, mely közvetlen meglátásukat bármily tökéletes és leleményes optikai készülékekkel egyelőre lehetetlenné teszi.

Wiener a fény fotografiai hatását használta fel az álló fényhullámok maximumai és minimumai fölkeresésére. Gondoljuk, hogy az álló hullámokat a tükörrel szigorúan párhuzamos sík metszi; ez nyilván igen erősen lesz megvilágítva, ha épen maximumot talál és teljesen sötét lesz, ha minimumba esik. De ha ez a sík ebből az állásból igen kis szöggel kihajlik, a maximum- és minimum-síkok egész seregén megy át s egyenlő közű, egymással párhuzamosan haladó egyenesekben találja őket. A síkot tehát sötét és világos vonalak szelik át, melyek annál sűrűbbekké lesznek, mennél nagyobb szöget zár be a metsző sík a tükörrel. Könnyű a síknak oly helyzetet adni, hogy e világos és sötét vonalak 1 milliméter, vagy még ennél is nagyobb közökben következzenek egymásra s így szabad szem is meg tudná egymástól külömböztetni, ha t. i. szemünk végtelen vékony és hozzá még átlátszó volna. Az ilyen szem körülbelül olyan helyzetbe hozna bennünket, mint a minőben vagyunk a SAVART-SEEBECK-féle kisérletben a hanghullámokkal szemben: fejünk a beeső hanghullámnak csak igen csekély részét fogja fel s átmérője a hanghullám hosszához képest — ha csak valami igen magas hanggal nem experimentálunk — kicsinek tekinthető.

WIENER igen vékony fény iránt érzékeny lemezeket készitett, melyek a föltételeknek teljesen megfeleltek: rendkívül vékonyak és átlátszók voltak. Vékonynak a fényérzékeny lemeznek azért kell lennie, mert ha vastagsága pl. csak $\frac{1}{100}$ mm volna, akkor is mintegy 50 fénymaximum és minimum férne el benne s a lemez mindezek együttes hatását tüntetné fel. Hogy az egymásra következő maximum és minimum hatását különválva megmutathassa, kell, hogy vastagsága ezek távolságának csak kis részével legyen egyenlő.

A fényérzékeny lemezek a következőkép készültek: A közönséges fotografiai czélokra használt lemezek bevonására készitett collodium-emulsiót (czüstchlorid oldata collodiumban) alkohol-æther keverékkel mintegy 20-szorosan higította. A keverékből egy-két cseppet gondosan letisztitott sik üveglemezre ejtve, a folyadék az üvegen gyorsan szétterül és elég egyenletes réteggel vonja be az üveg felületét. A folyadék gyorsan elpárolog s az üvegen vékony collodiumrétegben visszamarad a fény iránt érzékeny ezüstsó. Természetes, hogy mindezeket a míveleteket sötét helyiségben, gyenge vegyi hatású sárga vagy piros fénynél kell végezni.

Az így készült lemezke azonban nem mindig elég vékony arra, hogy az álló hullámok kisérletében teljes sikerrel legyen alkalmazható. E végett két egyforma sik lemezkét kell venni s az egyikre annyi higitott collodium-emulsiót csepegtetni, hogy 70 $cm^2$ felületre 3 csepp, mintegy $\frac{1}{10}$ $cm^3$ oldat jusson. Ezt a lemezkét vízszintes alapra fektetve, a másik lemezkével leborítjuk: a folyadék a két lemez között hamar széthúzódik s ekkor a felső lemezkét leemelve, szintén vízszintes alapra fektetjük. A lemezkék megszáradván, az álló hullámok kisérletére alkalmasak.

Az így készült fényérzékeny collodium-réteg vastagsága könnyen megbecsülhető. Karczoljunk le fával vagy körömmel egy keveset a collodiumos rétegből s borítsuk le sík üveglappal. Ezt a másik üveglaphoz erősen hozzászorítva, vékony levegő-réteg marad a két üveglap között, mely homogén fényben (pl. konyhasóval sárgára festett láng fényében) a vékony lemezek interferentia-csíkjait mutatja. Ha a két lemez úgy van egymáshoz nyomva, hogy a csíkok a lekarczolt felületi részre merőlegesek, az interferentia-csíkok a karczolat határán kissé el vannak tolódva. A hanyadrészét teszi az eltolódás az egymásra következő csíkok közének, annyiadrésze a collodiumlemez vastagsága a fél hullámhossznak. — A leírt módon készült collodium-lemezek vastagsága átlag $\frac{1}{30}\lambda$.

Ámbár a lemezke igen vékony s a benne levő fényérzékeny ezüstsó mennyisége parányi, a fény behatása iránt mégis eléggé érzékeny. Jó fotografiai negativ kép alatt 1—2 perczre a napfény hatásának kitéve, jó positiv másolatot ad. A képet azonban elő kell idézni. Az előidézéshez a következő két oldat használható: *a)* 2%-os ezüstnitrát-oldat és *b)* pyrogallol-oldat, mely 300 gr vízben 1 gr pyrogallolt és 1·3—1·5 gr czitromsavat tartalmaz. Ez oldatokat egyenlő térrészekben az előidézés előtt összeöntjük.

Az álló hullámok kisérlete következőképen hajtható végre: Az érzékenyített üveglemezkét collodiumos oldalával jól tükröző, sík ezüst tükörre fektetjük s egyik szélén hozzányomjuk. Ezáltal az érzékeny ezüstsós collodium-réteg a tükörhöz igen csekély hajlást kap. Hogy ebben az állásban biztosan megmaradjon, a tükörhöz hozzá kell ragasztani, vagy rásrófolni.

Wiener legtöbb kisérletében elektromos ívlámpát használt. Ennek fénye ugyanis az ily módon készített fényérzékeny ezüstréteggel szemben meglehetősen homogénnek mutatkozott. A lámpa fényét lencsével párhuzamossá téve, a tükörhöz erősített lemezkét 1—2 m távolságban a sugárnyalábra merőlegesen felállította. Az érzékeny hártya nyilván az ezüsttükör előtt támadó álló hullámok maximumait és minimumait párhuzamos egyenesekben metszette. Néhány percznyi megvilágítás után a lemezkét a tükörről levéve és az előidéző folyadékkal leöntve, várakozásának megfelelően párhuzamosan haladó sötét vonalak jelentek meg rajta.

További kisérleteit prismával elbontott fényben tette: ebben a csikok sokkal élesebben mutatkoztak s különösen szembetűnő volt, hogy a minimumok valóban tökéletesek voltak, a mennyiben a fény hatásának nyomát is alig lehetett bennök felfedezni.

A kisérletek e szerint az elméletből vont következtetéseket teljesen igazolták.

Ámde a kisérlet új és fontos lévén, interpretálásánál fontosságával arányos szigorúsággal kell eljárni. Az emelhető kifogásokat maga WIENER megtette s a kisérletek többféle módositásával elhárítani igyekezett.

A valószinűség némi látszatával a fényérzékeny rétegben keletkező csikokat a régen ismeretes «vékony lemezek» csikjainak lehetne tekinteni. Ugyanis WIENER a collodium-lemeznek a tükörhöz való hajlását azon interferentia-csikok megfigyelésével itélte meg, melyek az üveg (ill. collodium) és a tükör közé fogott vékony levegő-rétegben támadtak. A beeső fény a levegő-réteg mindkét határfelületén visszaverődést szenved. Az első visszaverődést a collodium-levegőt, a második pedig a levegő-ezüsttükör határfelületén történik. A két visszavert sugárnyaláb a levegő-lemez vastagságával arányos útkülömbséggel interferál és az ismeretes interferentia-csikok jönnek benne létre. Ezeknek a csikoknak egymástól való távolsága körülbelül akkorának mutatkozott, mint az «álló hullámok» csikjai között. — Ez ellenvetés megdöntésére WIENER több kisérletet tett; mi csak a legerősebb, legdöntőbb kisérletet ismertetjük. — Az üveg (ill. collodium) és a tükör közé eső hézagot benzollal töltötte ki. A benzol szintelen folyadék, melynek törésmutatója az üveg s a rajta levő collodium-lemez törésmutatójával közel egyenlő. Ezáltal az ezüstsós collodium-lemez mintegy optikailag homogén közegben volt beágyazva s így az első visszaverődés oka megszűnvén, az jóformán teljesen kizáratott. Az így előkészitett lemezkét konyhasó fényében szemlélve, az interferentia-csikok többé nem látszottak. Az álló hullámok kisérlete azonban ebben az összeállitásban is teljesen sikerült: vagyis ez esetben a collodium-rétegben csakis a rajta átmenő s az ezüst-tükörről visszaverődő fény együttes hatása, az *álló fényhullám* hatása érvényesülhetett.

## II. Alkalmazás elméleti kérdésekben.

*A maximumok és minimumok fekvése a tükröző felülethez képest.* — Az eddigiekben az álló hullámok maximumainak és minimumainak csak egymáshoz viszonyitott fekvését vettük figyelembe s teljesen figyelmen kívül hagytuk a tükörhöz való elhelyezkedésöket. Vagyis nem döntöttük el, hogy magán a tükröző felületen az álló hullám maximuma vagy minimuma jön-e létre? Pedig e kérdés a fényelmélet szempontjából fontos.

Ismeretes, hogy a fényelmélet a legclassikusabb interferentia-kisérletet: a NEWTON-féle színgyűrűk jelenségét csak úgy bírja kielégitően megmagyarázni, ha feltételezi, hogy a fénymozgás vagy az üveg-levegő, vagy pedig a levegő-üveg határfelületen ellentett phasissal verődik vissza, azaz, hogy az egyik visszaverődés $\frac{\lambda}{2}$ útkülömbséget hoz be a fénysugárba.

A fény közegének, az æthernek természetéről alkotott feltevéseikből FRESNEL és NEUMANN ebben a kérdésben ellentétes következtetésre jutnak. FRESNEL szerint a phasis az optikailag sűrűbb közegen, NEUMANN szerint pedig az optikailag ritkább közegen változik ellenkezőre. A színgyűrűk jelenségénél, s általában a vékony lemezek interferentiájánál a visszaverődésnek mindkét esete szerepel s így egészen mindegy, hogy melyik felületnek tulajdonitjuk a phasis megváltozását: mindkét föltevés egy eredményre vezet s így nem dönthető el, hogy melyik felel meg a valóságnak.

Az *álló fényhullámok jelenségénél csakis egy visszaverődés van* s ez alapon WIENER kisérletét a phasis-változás kérdésében kritikus kisérletnek tekintette.

A kérdés tisztázása végett a NEWTON-féle színgyűrűk kisérletét hajtotta végre oly módositással, hogy a fényérzékeny ezüst-collodium-réteggel bevont üveglapot gyengén görbülő üveglencsére szorította, még pedig addig, míg a középen teljesen sötét folt nem jelentkezett. Az így előkészített lemezt egészen úgy, mint az előbbi kisérletben, prismával egyneművé tett fény — többnyire az erős vegyi hatású ibolyaszín — hatásának tette ki. A rendes módon előidézett kép arról tanuskodott, hogy *a vegyi hatás minimuma a gyűrű-rendszer közepén van*, vagyis ott, a hol előbb a szem minimumot látott. Hogy a vegyi hatás minimuma tényleg a gyűrű-rendszer közepére esik, a többi gyűrűk átmérőinek pontos felméréséből is be lett bizonyítva.

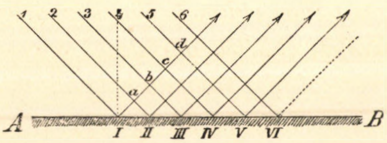
Feltéve már most, hogy az álló fényhullámok legnagyobb fényhatása a hullámhegyeken, a legkisebb pedig a csomókban van, a kisérletből következik, hogy *az optikailag sűrűbb közegen történő visszaverődésnél az álló hullámok csomói* $n\frac{\lambda}{2}$ *távolságban vannak a tükröző felülettől; a hullámhegyek ezek között, vagyis* $(2n+1)\frac{\lambda}{4}$ *távolságokban jönnek létre.*

Minthogy ezen föltevés értelmében magán a tükröző felületen csomó van, ebből az következik, hogy az üvegen vagyis *az optikailag sűrűbb közeg határfelületén változik ellenkezőre a rezgés phasisa, a mint ezt a* Fresnel-*féle elmélet föltételezi.*

*Merőlegesen kereszteződő fénynyalábok álló hullámai s a rezgési sík fekvése.* — A fényelméletnek egy másik, sokat vitatott kérdése a rezgési sík fekvésére vonatkozik. Fresnel szerint az æther rezgései a polarisatio-síkra merőlegesek, Neumann pedig ép ellenkezőleg azt tételezi fel, hogy a fényrezgések a polarisatio-síkjába esnek. Számos kisérletet gondoltak ki a kérdés eldöntésére, de mindeddig siker nélkül.

Wiener ennek a kérdésnek megoldására is vállalkozott s e végett egymásra merőleges sugárnyalábokat hozott interferentiába: oly kisérlet ez, melyhez hasonló az optikában mindeddig nem volt ismeretes. Tegyük fel, hogy jó ezüsttükörre 45° szög alatt párhuzamos homogén sugárnyaláb esik s tegyük fel azt is, hogy a fényrezgések a beesési síkra merőlegesek, tehát a tükör felületéhez párhuzamosak. A rezgések a visszaverődés után is párhuzamosak maradnak a tükörhöz. Kövessük figyelemmel pl. az *AB* tükörre beeső *1* fénysugarat. Ez I-ben visszaverődvén, egymásután *2, 3, 4* . . . sugarakkal *a, b, c* . . . pontokban találkozik s valamennyit derékszög alatt metszi. Minthogy a rezgések valamennyi sugárban egymással párhuzamosak, interferálnak, azaz maximumok és minimumok támadnak, a szerint, a mint az *Ia, Ib, Ic, Id* . . . útkülömbségek a visszaverődés által esetleg támadt késedelemmel együtt $2n\frac{\lambda}{2}$ vagy pedig $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$-del egyenlők. A fénymaximumok s minimumok nyilván ismét a tükörhöz párhuzamos síkokban vannak s helyhez lévén kötve, valóságos álló hullámokat alkotnak.

«De másként áll a dolog, ha a 45° alatt beeső fényrezgések magában a beesési síkban vannak. Ekkor a visszavert fény rezgései is ebbe a síkba esnek. S minthogy a visszavert fény a beesőre merőleges, a rezgések is merőlegesek egymásra. Az egymást keresztező beeső és visszavert sugarak rezgései most is egyetlen egy mozgássá tevődnek össze, de olynemű interferentia, hogy a rezgések egymást erősithetnék vagy gyengíthetnék, ez esetben ki van zárva.




Bármilyen legyen is az útkülömbség, az eredő fényintenzitás az egymásra merőleges összetevők intenzitásának összegével egyenlő. Ez esetben az eredő intenzitás a tükörtől való távolsággal nem változik, hanem mindenütt ugyanaz.»

Tegyük fel, hogy a tükörhöz, épen úgy mint a megelőző kisérletekben, igen kis hajlásszög alatt ezüst-collodiummal bevont üveglap van illesztve. Ha az okoskodás helyes, a collodium-hártya az első esetben álló hullámokon megy keresztül s így 45° alatt beeső fényben is fognak rajta maximumok és minimumok támadhatni. Ellenben maximumok és minimumok nem várhatók akkor, ha a rezgések a beesési síkban vannak, a mint ez a második esetben van föltételezve. Ekkor a fényintenzitás az egész hártyán ugyanaz, tehát hatása egyenletes lesz.

Wiener okoskodásának helyességét a következő berendezésű kisérleten próbálta ki. A keskeny résen beeső fény mészpát-prismán és lencsén keresztül üvegprismára esett s innét kilépve egy másik lencse egy derékszögű prismának egyik befogó lapjára vetette, úgy hogy a fény a lapot merőlegesen találja. A rést kellőleg rövidítve, egymás felett két spektrum támadt; a spektrumok fénye egyenes vonalban polározott fény volt, az egyik a beesési síkban, a másik pedig erre merőlegesen polározva.

A derékszögű prisma voltaképen csak a collodium-lemezzel fölszerelt tükör tartójaként szerepelt, mely az átfogó laphoz volt hozzá erősítve. Ugyanis így lehetett a fényt legkönnyebben 45° alatt a tükörre vetni.

A totalis reflexio elhárítása végett az üveglemez és a prisma között támadt hézag, valamint az ezüsttükör s a collodiumhártya köze is benzollal lett kitöltve s így *a fényérzékeny hártya ezúttal is optikailag homogén közegben derékszög alatt kereszteződő sugárnyalábok útjába volt beágyazva.*

A kisérlet eredménye a következő volt: A fény hatása mindkét spektrumban érvényesült. *A beesési síkban polározott fényben igen éles maximumok és minimumok képződtek, az erre merőlegesen polározott fény hatása ellenben egészen egyenletes volt.*

Az eredményt a kisérlet kiinduló pontjául szolgáló okoskodással összevetve, WIENER arra a következtetésre jut, hogy *a rezgési sík a polarisatio síkjára merőleges* s így ezt a kérdést is a FRESNEL-féle felfogás értelmében látja eldöntöttnek.

*Elméleti eredmények.* — Az itt röviden ismertetett kisérletek nagy feltűnést keltettek. CORNU * elég fontosaknak tartotta arra, hogy külön jelentést tegyen róluk a párisi Akadémiának. Igaz, az Akadémiát egész közelről illető kérdést pendített meg evvel, mert emlékezetbe hozhatta, hogy WIENER kisérletei oly kérdéssel foglalkoznak, melynek sikeres megoldására a franczia Akadémia már több ízben jelentékeny díjakat tűzött volt ki. Meglepő, hogy az egyetlen dolgozat, mely a siker kilátásával kecsegtetett, a WIENER-féle eljáráshoz hasonlót hozott javaslatba, mely azonban mindekkoráig csak tervezetben maradt meg, mígnem WIENER egész más úton ugyanarra a kisérletre jutott és sikerrel végre is hajtotta.

* C. R. CXII. 186. l.

Ez a tervezet Zenker berlini physikustól ered, mely 1867-ben a párisi Akadémia jutalmát tényleg elnyerte.

Cornu a Wiener-féle kisérleteket a fényelméletre nézve epochalis jelentőségűeknek tekinti, mert véleménye szerint a phasis-változás és a rezgési sík fekvésének kérdése el van döntve, még pedig véglegesen a Fresnel-féle felfogás értelmében. Lehet magasztaló ítéletében része az elfogultságnak is, mely azonban nagyon is érthető: hiszen a franczia physikusok mostani generatiója egészen a Fresnel-féle elmélet szellemében nevelkedett s így természetes, hogy sympathiájukkal találkozik minden adat, mely a német Neumann s az angol Mac Cullagh feltevései ellen Fresnel elmélete javára felhasználható.

Vajjon csakugyan feljogosítanak minket az álló fényhullámokkal tett kisérletekben szerzett tapasztalatok arra, hogy úgy a phasis-változás, mint a rezgési sík fekvésének kérdését véglegesen eldöntöttnek tekintsük?

Hogy a phasis-változás a Fresnel-féle felfogás szerint legyen magyarázható, Wiener föltételezni kénytelen, hogy *a vegyi hatás minimumai az álló fényhullámok csomóiba esnek.* A rezgésisík fekvését illetőleg pedig azzal teszi lehetővé a Fresnel elméletével való megegyezést, hogy a physiologiai és a vegyi hatást az æther ugyanazon functiójának tulajdonítja; azaz a milyen rezgései az æthernek a szemben a világosság érzetét keltik, ugyanazok a rezgések a vegyi hatásokat is létrehozzák. Mindezek ellenkezőjét tételezvén föl, az álló hullámok kisérletei a Neumann-féle felfogás helyessége mellett bizonyítanak.

A döntés tehát új feltevésektől van függővé téve, melyek jogosultságát ismét új kisérletekkel kell megvizsgálni.

Addig is, míg ezek az új kisérletek egyik vagy másik irányban nem döntenek, Wiener a Fresnel-féle felfogáshoz áll, mert véleménye szerint ez a fényjelenségek lefolyásáról egyszerűbben, szemléltetőbben ad számot.

Bármint dőljön is el a jövőben az elméletek vitája, annyi kétségtelen, hogy Wiener kisérletei rendkívül érdekesek. Érdekesek, mert eddig ismeretlen jelenségek tanulmányozására vitték az optikát; s érdekesek, mert a vizsgálatok új sorára utalnak, melyek talán többet is fognak kideríteni, mint a mennyi tudtunkkal ez idő szerint homályban van.

## III. A színek fotografálása.

Alig vált ismeretessé, már is igen érdekes alkalmazást talált az álló fényhullámok kisérlete: Lippmann a napfény teljes spektrumának lefotografálására használta fel. Lippmann kisérlete annyival érdekesebb, mert ugyanazokkal a készülékekkel, vegyi szerekkel és fogásokkal hajtható végre, a melyek a fotografiában általános használatban vannak. Csak az érzékeny lemezeknek kell két feltételnek megfelelniök. Kell, hogy a bennök levő jod- vagy bromezüst rendkívül finom, a fény hullámhosszához képest kicsiny szemcsékben legyen feloldva s az egész lemeznek átlátszónak kell lennie.

E szerint a kereskedésben elterjedt közönséges száraz lemezek e czélra nem alkalmasak, mert átlátszatlanok s «durva szemcséjűek». Különben az ezüstsó akár gelatinban, akár collodiumban vagy albuminban lehet feloldva. Az ilyen oldattal bevont üveglemez, miután az emulsio megszáradt, üres keretbe lesz foglalva és mögéje higany öntve, úgy hogy a higany az érzékenyitett hártyán tükröt alkosson. Az így fölszerelt lemez a sötét kamrába jut s a napfénynek lehetőleg intensiv spektruma lesz rávetve. Mivel azonban az ezüstsó a piros és sárga színek iránt kevésbbé érzékeny, gondoskodni kell róla, hogy ezek tovább hassanak, mint a nagyobb vegyi hatású kék és ibolyaszín. E végett a színkép eleinte piros, azután narancssárga, sárga, sárgászöld folyadékokon keresztül lesz a lemezre bocsátva. Lippmann az objectiv elé egymásután helianthin, tömény s azután híg káliumbichromat-oldattal telt edényt helyezett; a piros színt 1 óránál tovább engedte egymagában hatni, a többieket rövidebb ideig s a teljes napfényt néhány másodperczig. — Erre a lemez közönséges módon előidézve és állandósítva (fixálva) lett s miután megszáradt, a nap teljes színképe látszott rajta, mely a legerősebb fény hatása alatt sem változott meg. A színkép átmenő fényben negativ, azaz minden szín helyén a complementär szín mutatkozik, visszavert fényben pedig positiv.

A kisérlet magyarázata igen egyszerű. A lemezen átmenő fény a higanytükrön visszaverődő fénynyel az érzékeny rétegben álló fényhullámokat alkot: ennek folytán a rétegben egymással párhuzamos síkok mentén maximumok és minimumok támadnak. Minthogy a fény csakis a maximumok helyén hat az ezüstsóra, az előidézés alatt az ezüst rendkívül vékony, átlátszó lemezekben rakódik le, melyek fél hullámhossznyi közökben következnek egymásután. A réteg az előidézés műveletében mintegy leveles szerkezetűvé válik; ezek a levelek annál sűrűbbek, mennél kisebb a hullámhossz. Physikailag tekintve ezek az egymásra következő párhuzamos lemezek «vékony» lemezeket adnak, olyanokat, melyekben fényinterferentia támadhat. A színek létrejötte visszavert fényben így magyarázódik: A beeső fény egy része minden ezüstrétegen visszaverődik, a többi pedig tovább hatol; az egymásra következő lemezekről visszavert fénysugarak között egy hullámhossznyi útkülömbség van, tehát interferentiájuk maximumot ad. Az egy helyen visszavert összes fényben tehát túlnyomó lesz az a szín, melynek fél hullámhosszával egyenlő az illető «vékony lemez». Ebből az is következik, hogy ugyanazon a helyen az átmenő fényben az előbbinek complementär színe lesz a túlnyomó. Természetes, hogy a színek annál élénkebbek, mennél több ilyen vékony lemez támad az érzékeny rétegben. Ha a gelatin- vagy collodium-réteg vastagsága csak $\frac{1}{20}$ mm, akkor is mintegy 200 ilyen vékony lemez keletkezhetik.

Lippmann meglepő kisérletéről ez évi február hó 2-án tett jelentést a párisi Akadémia előtt, mely alkalommal a jelenlevő Becquerel* nyomban rámutatott a külömbségre, mely Lippmann s az ő kisérlete között van. Ő t. i. már 1849-ben állította volt elő a nap spektrumának teljes fotografiáját. Ezüst tükrön vékony ezüst subchlorid-réteget idézett elő s a nap színképét ezen sikerült rögzítenie. A kép minden színben rendkívül élénk és sötétségben teljesen állandó, de a világosság hatásának csak rövid időre tehető ki. Ugyan evvel a vegyü-

* C. R. CXII. 275. l.

lettel 1865-ben Poitevin-nak papiroson is sikerült a nap színképét lefotografálnia; de természetesen, ez is csak sötétségben állandó.

Lippmann kisérleteiről egyelőre több nem került nyilvánosságra. Rávezetnek-e a «színes» photographiák készítésének mesterségére, arról ez idő szerint véleményt legföllebb koczkáztatni lehet. Mert nem szabad szem elől téveszteni, hogy Lippmann csak a spektrum homogén színeit fotografálta, holott a természetben legtöbbször kevert színekkel van dolgunk. Egy másik, még nagyobbnak látszó nehézség az ezüstvegyületeknek a külömböző színek iránt való nagyon is különböző fokú érzékenységében van. De hány lehetetlennek tartott dolog bámulatos egyszerűséggel oldatott meg. Mind a mellett Lippmann kisérletét rendkívül fontos, talán döntő lépésnek kell tekintenünk a czél megközelítésében: hiszen míg az eddigi ez irányú kisérletek csak tapogatózások, úgy ez a kisérlet jól megmagyarázható és megérthető jelenségen alapul.

*Bartoniek Géza.*

# A KÖRMÉRÉS TÖRTENETE ÉS ELMÉLETE.

(Első közlemény.)

Sok száz esztendő mult el, mialatt
Sok miljom kéz bevégezé e munkát.
*Petőfi.*

A mathematikának alig volt népszerűbb problemája, mint a «quadratura circuli». Évezredeken át nem egy tudós foglalkozott vele, a merőben hivatlan elméknek pedig egész legiója szerette volna nevét e probléma megoldásával a feledéstől megóvni. Ma tudjuk, hogy képtelenségen fáradoztak.

A történet lapjain szívesebben jegyezzük fel a felfedezők és feltalálók sikereit, melyekkel századukat meglepték: de tanulságos a kutató elmét akkor is figyelemmel kisérni, midőn valamely fel-felvillanó bolygó tűz csalóka ösvényekre ragadta. Kalandorok durva tévedéseinek ugyan szánó szempillantásnál több nem juthat; ámde annál érdekesebb látni, mint tisztázódtak a fogalmak a komolyabb elmékben, míg a probléma lehetetlen volta teljesen kétségtelenné vált.

A lehetséges és a lehetetlen egy-egy határkövének kijelölése a tudomány legnevezetesebb haladásaival szokott karöltve járni. Így pl. az algebrában lehetetlennek bizonyúlt az általános $n$-ed fokú egyenletet gyökjelek segítségével megoldani; de ugyanez a tudomány nemcsak hogy minden egyes algebrai egyenletről el tudja dönteni, vajjon gyökjelekkel lehet-e megoldani, nemcsak hogy minden ilyen egyenletnek valóságos megoldására módszert nyújt: hanem még azonfelűl mindazon gyökjelekkel megoldható egyenletek képezése is sikerűlt, melyekben az együtthatók egész számok. Hasonlóképen a körosztás elméletében nemcsak azt tudjuk, mely szabályos sokszögek szerkeszthetők, melyek nem: hanem a szerkeszthetőknél egyszersmind a szerkesztés menetét is ismerjük.

Mindezeknél semmivel sem érdektelenebb a «quadratura circuli», melynek lényegére és multjára most visszatekintendők vagyunk. E probléma keletkezésére nézve egykorú magával a mathematikával, de e tudomány igen különböző ágainak mai magas fokú fejlettsége volt szükséges, hogy a megoldás lehetetlen voltát be lehessen látni. Midőn végre ennek bebizonyítása sikerült, ugyanazon módszerek jóval általánosabb kérdésekre is megadták a feleletet.

A jelen értekezésben hű képet akarunk nyújtani amaz évezredekre terjedő munkásságról, mely az első közelítő körnégyszögitéstől a Ludolfi számra vonatkozó jelen ismereteinkig vezetett.*

## I. A probléma népszerűségéről.

A magyar tud. akadémia ügyrendjében a «*nyomtatás végett beadott kéziratok megvizsgálása és kiadása*» ügyéről szóló rész így végződik:

«*A kör négyszögítését, a szögnek három egyenlő részre való metszését és az örök-mozgó* feltalálását tárgyazó értekezések vizsgálatlanúl visszautasíttatnak.»

Hasonló bánásmódban részesülnek e problémáknak vélt megoldásai a külföld tudományos testületeinél is; legrégebben — 1775 óta — a párisi akadémiánál. Ámde ez időpontig az akadémiák folyvást el voltak halmozva a beérkező és mindenkor hamis megoldásokkal.

Igen találóan jellemzi Lambert, a mult század kiváló német geometere, 1776-ban megjelent «Vorläufige Kenntnisse, für die so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen« czímű értekezésében e problemák eddigi munkásait.

Szavai könnyen általánosíthatók, de tulajdonképen a kör négyszögítőinek szólanak.

---

* V. ö. Schubert Die Quadratur des Zirkels in berufenen Köpfen. Hamburg 1889. — Rudio Das Problem von der Quadratur des Zirkels. Vierteljahrschrift der Naturf. Ges. in Zürich. 35. évf. 1890.

Kételkedik, vajon megértik-e értekezését azok, kiknek leginkább szánta, kik idejüket és fáradságukat a kör négyszögitésére fordítják. «Ilyenek bizonyára mindenkor elegen lesznek, s ha a jövendő időkben vele foglalkozókat azok után kell megitélnünk, kik vele eddig foglalkoztak, leginkább olyanok, kik nemcsak a geometriához keveset értenek, de még saját képességeiket sem birják megitélni. Ámde a mi a legtöbbnek belátásban és értelemben hiányzik, s mit helyes és összefüggő következtetésekkel el nem érnek, azt a hir- és pénzvágy sophismákkal pótolja, melyek többnyire sem nem finomak, sem nagyon rejtettek. Voltak esetek, hogy ilyenek állhatatosan azt hitték, vélt bizonyitásaiktól a tetszést csak irigységből és kajánságból tagadják meg. Az a mende-monda is kering köztük, hogy Angolországban és Hollandiában épen olyan nagy díjakat és jutalmakat tűztek ki a kör négyszögitésére, mint a földrajzi hosszúságnak a tengeren való meghatározására.»

«A mathematikában más mennyiségek is fordulnak elő, — írja alább —, melyekre nézve ép oly érdemes volna kutatni, vajon raczionális törttel, vagy más tetszetősb módon fejezhetők-e ki, semmint az tizedes törtekkel történik. Ide számitandó különösen ez a szám: 2,71828182845904523536028 . . ., melynek hyperbolikus logarithmusa 1. Ez a szám a logarithmusokra nézve ugyanaz, a mi a Ludolfi szám a körre nézve, s azért trigonometriai és egyéb számitások czéljából hasonló jelentőségű. Ha már most azt kérdezzük, ugyan miért csapnak csak a Ludolfi számmal ily sok hűhót, akkor e kérdésre részben csak a mathematika történetéből, részben pedig azzal is felelhetni, hogy e fogalmak kör, négyszög, mennyiség, mindenki előtt ismeretesek, a mi a hyperbolikus logarithmusról nem mondható; ez a fogalom csak az infinitezimálszámítás által lévén ismeretessé, e számitás megtanulása nélkül nem igen érthető meg. Ha a kör négyszögitését keresők közül a legtöbbnek nem állaná ez a korlát útját, akkor — úgy látszik — ép annyi hasztalan és sikertelen kisérlet merűlne fel erre a számra nézve 2,71828182845904523536028 —, mint a mennyi felmerűlt a Ludolfi számánál.»

Lambert aggodalma nem volt alaptalan. Avagy megérthetik-e komoly tudós szavait az oly hályogos elmék, mint pl. LIGER vagy CLERGET? Az előbbi a részt nagyobbnak állítván az egésznél, a lehetetlent is könnyen valósíthatta; az utóbbinak megoldása pedig azon alapszik, hogy a kör bizonyos oldalszámú sokszög. Egyebek közt ő azt is meghatározta, hogy mekkora pontban érintkezik két kör. De minek ilyeneket említenünk, midőn sokkal élesebb elméket sem lehetett tévedésükről meggyőzni. HOBBES angol bölcsészt korának első mathematikusai hiába akarták felvilágositani az iránt, hogy szerkesztése hamis, inkább kétségbe vonta a geometria alapelveit és a Pythagoras-féle tétel helyességét.*

## II. A probléma lényegéről.

Bár a kört és a négyzetet mindenki ismeri és területük összehasonlítása sem jár nagyobb nehézségekkel: problémánk lényegéről csak kevésnek van szabatos ismerete. Mert egészen más pl. szöget felezni, sokszöget négyszögíteni s szabályos ötszöget rajzolni és e szerkesztéseket meg is érteni, és ismét más tudni azt, mikor lesz valami *körzővel és vonalzóval* megszerkeszthető.

Ha valamely mathematikai problémát kell megoldani, azt rendszerint egyszerűbbekre vezetjük vissza, melyeknek megoldása ismeretes és esetleg még egyszerűbbekétől függ. Azonban az elemzésnek valahol meg kell szűnnie, s oly alapműveleteknél kell megállapodnunk, a melyeknek megoldását a tudomány egyszerüen feltételezi. Ezeknek megoldását nem nyujtja, hanem követeli, mint *postulatumokat.* Az imént példaként emlitett szerkesztésekhez a következő postulátumok elegendők:

1. Adott két ponton át egyenest húzni.

2. Adott középpont körül adott sugarú kört rajzolni.

3. Két egyenes vonalnak, vagy egy egyenes és kör metszését felkeresni.

A metszéspontokat puszta szemmel keressük fel, a kör és

* Számos hamis megoldással foglalkozik: *A. De Morgan.* A budget of paradoxes. London 1872.

egyenes rajzolására pedig kinematikai szerkezetet, illetőleg modellt használunk; a kört körzővel, az egyenes vonalat pedig vonalzóval huzzuk meg.

Nem minden idom nyerhető ezen alapszerkesztések végesszámú ismétléséből, pl. a szabályos hétszög, ha az oldala van adva. Van azonban számos feladat, melynek megoldására egyéb postulátum nem szükséges. Ezekről mondjuk, és csakis róluk, hogy *körzővel és vonalzóval* oldhatók meg, és a szó szorosabb értelmében *szerkesztésnek* csak az ő megoldásukat hívjuk. Egyébiránt a geometria szempontjából nagyon mellékes, hogy szerkesztéseinek felsorolt postulátumait mily mechanikai eszközökkel végezzük és közömbös, hogy ezen eszközök hiányaiból mily pontatlanságok erednek.

Ha a szerkesztéseket az elemző geometria számításaival pótoljuk, a négy alapműveleten kívül csakis négyzetgyökvonásokat fogunk végezni. Ugyanis 1. és 2. alapszerkesztések helyett az illető vonalak egyenleteit fogjuk képezni, melyeknek együtthatói az adott pontok ismeretes koordinátáiból s az adott sugárból a 4 alapművelettel adódnak ki. Az utolsó alapszerkesztések helyett a metszéspontok koordinátái számitandók ki, a mire, ha az egyik vonal kör már általánosságban gyökvonás is szükséges. Minthogy az adott vagy szerkesztett pontok távolsága is érdekel, esetleg ezt is kell kiszámitanunk. Erre sem szükséges bonyolódottabb müvelet, mint a négyzetgyökvonás.

Ezen az alapon eldönthetjük, mikor lesz egy mérőszámával megadott egyenes vonaldarab a hosszegységből megszerkeszthető. A hosszegységet úgy gondoljuk megadva, hogy azt a derékszögű koordináták kezdőpontjából az abscissák tengelyének pozitiv részére felrakva képzeljük. Akkor végpontjainak koordinátái (0,0) és (1,0). E két ponton kívül mit sem szabad ismeretesnek feltennünk. Ha már most az $a$ mérőszámmal biró vonaldarab megszerkeszthető s e szerkesztést az elemző geometria számitásaival pótoljuk, továbbá e számitásnál minden egyes arithmetikai müvelet eredményét sorban feljegyezzük: akkor egy oly számsorozatot nyerünk, melyben minden egyes elem az előbbiekből a négy alapművelet valamelyikével vagy négyzetgyökvonással adódott ki, s mely sorozat $a$-val végződik. Mesterkéltnek látszhatik amaz eljárásunk, hogy ha valamely elem az előbbiekből a négy alapművelettel adódott ki, annak úgy adunk kifejezést, hogy ez az elem oly első fokú egyenlet gyöke, melynek együtthatói a megelőző elemekből a négy alapművelet segítségével találhatók. De aligha fölösleges kiemelnünk, hogy ha valamely elemet egy megelőzőből négyzetgyökvonással nyertünk, akkor ez oly (tiszta) másodfokú egyenletnek egyik gyöke, melynek együtthatói az előbbi elemekből pusztán a négy alapművelettel keletkeznek.

Az imént mondottakat akként foglalhatjuk össze: *Hogy valamely vonaldarab, melynek mérőszáma $a$, megszerkeszthető legyen, arra szükséges, hogy $a$ oly*

$$1, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a$$

*véges számsorozat utolsó eleme legyen, melyben mindegyik elem oly első vagy másodfokú egyenlet gyöke, a melynek együtthatói az előbbi elemekből a négy alapművelettel nyerhetők.*

E szükséges feltétel egyszersmind elegendő; ugyanis az első és másodfokú egyenletek konstruktiv megoldása — mint a geometria elemeiből ismeretes — az alapszerkesztésekre vezethető vissza.

Mely vonaldarab szerkesztését követeli most már a quadratura circuli? Ama négyzet oldalának szerkesztését, melynek területe a kör területével megegyezik. Ha a sugarat választjuk hosszegységűl, akkor a kérdéses terület $\pi$, a keresett négyzet oldala tehát $\sqrt{\pi}$. A megszerkesztendő vonaldarab mérőszáma e szerint $\sqrt{\pi}$.

Problémánk szoros kapcsolatba lép a kör rektifikácziójának kérdésével is, mely a kör kerületével egyenlő vonaldarab szerkesztését kivánja. E vonaldarab felének mérőszáma $\pi$.

Ha $\sqrt{\pi}$ ismeretes, akkor $\pi$ szerkesztése az

$$1 : \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} : x$$

proporczióból adódik ki (melyben $x = \pi$), s viszont $\sqrt{\pi}$ az egységből és $\pi$-ből mint ezeknek mértani közepe szerkeszthető. Tehát a kérdéses két vonaldarab bármelyike a másikból könnyen állitható elő. Tehát vagy mind a két probléma — a quadratura és rektifikálás — oldható meg, vagy egyikök sem.

E feladatok megoldására oly számsorozatot kellene találnunk, mely a $\pi$-n végződik és a melyben — az egységen kezdve — minden elem az előbbiekből oly *első* vagy *másodfokú* egyenlet megoldásával adódik ki, melynek együtthatói a megelőző elemekből a négy alapművelet segítségével előállithatók. *Egy ily számsorozat felállítása épen az, a mi lehetetlennek bizonyult.*

De még mielőtt ez kétségtelenné vált volna, a mathematikának régóta módjában volt minden egyes hamis megoldást megczáfolni. Csak össze kellett hasonlítani a szerkesztett négyzet területének mérőszámát $\pi$-nek már ismeretes számértékével; ha valamely tizedesben eltérés mutatkozott, a szerkesztés meg volt czáfolva. Azért problémánk története a Ludolfi szám közelitő meghatározására vonatkozó számítások tárgyalásával kezdődik.

## III. Az elemi körmérésről.

A quadratura circuli problémájával már a legrégibb reánk maradt mathematikai mű is foglalkozik: a British Museumtól őrzött Rhind-féle papyrus. Majdnem két évezreddel időszámításunk előtt irta Ra-a-us hiksos királynak (görögül *Apophis*) irnoka: *Ahmes*, tartalmát oly régi iratokból merítvén, melyek Rænmat (III. Amenemhat?) idejében készültek, tehát még évszázadokkal a papyrus előtt.

Ez a mű nem tankönyv, hanem számos feladat gyüjteménye, melyekből a megoldásuk alapjáúl szolgáló elmélet felismerhető ugyan, azonban kifejtve magában a könyvben nincsen. A feladatok leginkább a gyakorlatias életből valók, mint a következő * is:

«Szabály 9 öles (átmérőjű) kerek föld számítására. Mekkora területbeli kiterjedése? Vond ki $\frac{1}{9}$-ét, azaz 1-et, a maradék 8; sokszorozd e számot 8-czal, ez ád már most 64-et. A területbeli kiterjedés 64.

---

* Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum), übersetzt und erklärt von Aug. Eisenlohr, Leipzig, 1877. Nr. 50.

Végezd úgy a hogyan történik.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | • 9 | • | 8 |
| $\frac{1}{9}$ rész | 1 | •• | 16 |
| kivonva a maradék | 8 | 4 | 32 |
| | | 8 | 64 |

A területbeli kiterjedés 64.»

E számítás így értendő. Az átmérőből kivonandó annak 9-ed része és a megmaradt $\frac{8}{9}$ rész a négyzetre emelendő, hogy a kör területét kiszámítsuk.

| | | 8 négyzetre emelése. |
|---|---|---|
| Az egész átmérő | 9 | $1 \times 8 = 8$ |
| $\frac{1}{9}$ « | 1 | $2 \times 8 = 16$ |
| Maradék | 8 | $4 \times 8 = 32$ |
| | | $8 \times 8 = 64$ |

A végeredmény 64.

E szerint a körrel egyenlő területű négyzet oldalának viszonya az átmérőhöz $\frac{8}{9}$. Ez nem más, mint a pontos értéknek harmadik közelitő törtje, mert a keresett viszony valóban

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

és ennek közelitő törtjei 1, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$ stb,

A babyloniak korántsem haladtak ennyire. Nem is a quadraturát végezték, hanem a rektifikálás igen durva megközelitését. Helyesen felismerve, hogy a sugár hatszor rakható körül a körben mint húr, a körnek kerületét az átmérő háromszorosának számitották. E felfogás tükröződik a szent irás ama helyein is, melyek az «öntött tenger»-ről szólnak, azaz arról a katlanról, mely a templomot diszitette.

A királyok könyve igy irja le:

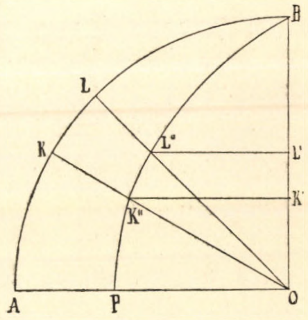
«Csinála annak felette egy öntött tengert is, mely egyik szélétől fogva a másik széléig tíz singnyi vala, köröskörül kerekded vala, és a magassága öt sing vala, és a kerületit harmincz sing sinór éri vala bé.» (1. Kir. 7. 23. Károly G. fordítása.)

A görög tudósok közül Periklesnek nevelője, ANAXAGORAS, a legrégibb, kiről fel van jegyezve, hogy a kör négyszögösítésén fáradozott.

Az elemi körmérés későbbi elméletének alapgondolatai Sokratesnek két kortársára vezethetők vissza, a mennyiben egyikök ANTIPHON a beírt, a másik pedig BRYSON azonfelül körülirt sokszögekkel is megközelitette a kört. Hogy azonban Archimedes alapvető munkásságától mily távol állhattak, mutatja Bryson tévedése, ki szerint a kör területe egy beirt s egy körülirt sokszög számtani közepe.

HIPPOKRATES az 5. században Kr. e. a maga *holdacskáiban* (lunulæ) oly területekre találván, melyek könnyen négyszögithetők, noha körívek határolják, e holdacskákat törekedett a kör négyszögitésére használni. Fáradozásával czélt nem érhetett.

A következő században DINOSTRATUS valóban talált módot $\pi$ mechanikus rajzolására, melynek kivitele azonban nem történhetik körzővel és vonalzóval, hanem más eszközt kiván. E czélra azt a görbét használta fel, melyet már előtte HIPPIAS abból a czélból feltalált, hogy segítségével a szöget három egyenlő részre oszsza s mely görbe most a kör négyszögítésére való alkalmazásáról *quadratrix* nevet visel. Keletkezése ez: (1. ábra) $AOB$ negyedkörben az $r = OA$ sugár egyenletesen forog $OA$ helyzetből $OB$ helyzetbe. Ugyanekkor $e$ egyenes egyenletesen halad $OA$ helyzetből a $B$ pontban vont érintőig, közben folyvást párhuzamosan maradva kezdeti helyzetével. A két mozgás egyszerre kezdődik és egy időben ér véget. Legyenek $OK$ és $K'K''$ az $r$ és $e$ valamely egyidejű helyzetei. Görbénk e két vonal $K''$ metszőpontjának mértani helye. A vonal két külömböző pontjára nézve, $K''$ és $L''$ re:



1. ábra.

$$\frac{OK'}{\text{arc. } AK} = \frac{OL'}{\text{arc. } AL}$$

Ha a kör sugara az egység, $AK$ és $AL$ ivek mérőszámai pedig $\varphi$ illetőleg $\psi$, akkor proporcziónk így is irható:

$$OK'' \frac{\sin\varphi}{\varphi} = OL'' \frac{\sin\psi}{\psi}$$

Ha a $K$ és $L$ pontok most már $A$ illetőleg $B$-be mennek át, akkor

$$\lim OK'' = OP, \ \lim \varphi = 0, \ \lim_{\varphi=0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1,$$

továbbá az $L''$ pont $B$-be esik, és a $\psi$ ív a $\frac{\pi}{2}$ értéket veszi fel. Végre egyenletünk átmegy a következőbe:

$$OP = \frac{2}{\pi}, \text{ vagyis } OP : 1 = 2 : \pi.$$

E proporczió szerint $\pi$ könnyen állítható elő, ha a quadratrixnek, vagy legalább e görbe $P$ pontjának szerkesztésére van eszközünk.

Ezen primitiv kezdeményezések után mindjárt ARCHIMEDES jő tekintetbe, a legelső, ki tudományosan fogta fel a kérdést (szül. 287 körül, mgh. 212. Kr. e.) és szabatos értekezést írt a «Körmérésről». Ennek tartalma a következő három tétel s bebizonyitása:

1. *A kör egyenlő oly derékszögű háromszöggel, melynek egyik befogója egyenlő a sugárral, másik befogója pedig a kerülettel.*

2. *A kör a maga átmérőjének négyzetéhez igen közel úgy viszonylik, mint 11 : 14.*

3. *A kör kerülete az átmérő háromszorosát kevesebbel, mint az átmérő $\frac{1}{7}$ részével, de többel mint annak $\frac{10}{71}$-edével mulja felül.*

Az első tételnek indirekt bebizonyitása a következő meggondoláson alapszik. Ha ugyanis a háromszög területe nem volna egyenlő a körével, akkor az $n$ egész számot eléggé nagynak választva, vagy a körülírt vagy pedig a beirt $2^n$-szög területe nagyságára nézve a háromszög és a kör közé esnék. De ez ellenmondásra vezet.

A második tételben szereplő szám oly egyszerűen adódik ki az 1. és 3. tételek segítségével, hogy ez e helyen megbeszélésre nem szorul.

A harmadik tétel hosszabb számitáson alapszik, melynek ismertetését, rövidség kedveért, trigonometriailag fogalmazzuk, miáltal e levezetés lényegén voltaképen mit sem változtatunk. Ismeretes ugyanis, hogy

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = \operatorname{cotg}^2 \alpha + 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

és

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Már most

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2$$

s ha az átmérő mérőszámát $d$-vel, a beirt szabályos $n$ szög oldaláét $a_n$-nel, a körülirt oldaláét $A_n$-nel jelöljük, akkor

$$\left(\frac{d}{A_6}\right)^2 = \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{6} = \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{6} - 1 = 3 = \frac{3.153^2}{153^2}$$

$$= \frac{70227}{153^2} = \frac{265^2 + 2}{153^2}$$

Innen

$$\frac{d}{A_6} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} > \frac{265}{153}$$

Továbbá

$$\frac{d}{A_{12}} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} > \frac{571}{153}$$

Nem külömben

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{12} = \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{12} + 1 > \frac{571^2}{153^2} + 1 = \frac{349450}{153^2}$$

tehát innen

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{12} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

és

$$\frac{d}{A_{24}} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{24} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{12} + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{12} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

Épen igy folytatva:

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{24} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{d}{A_{48}} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{48} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

hasonlóképen

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{48} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{d}{A_{96}} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{96} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

Innen végül

$$\frac{96\,.\,A_{96}}{d} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\tfrac{1}{7}.$$

Ámde a kör kerülete kisebb a körülirt 96 szögnek kerületénél, azaz 96. $A_{96}$-nál, minélfogva a kör kerületének, s átmérőjének viszonya valóban kisebb $3^1/_7$-nél.

Hátra van még egy hasonló számítás az alsó határ megállapítására.

Ismét kiindulunk a

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{6} = 3 = \frac{3.780^2}{780^2}$$

egyenletből, melyből a

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} < \frac{1351}{780}$$

egyenlőtlenség következik, továbbá a

$$\frac{d}{a_6} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} = 2$$

egyenlőségből; már most *b)* képlet szerint

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{12} < \frac{2911}{780}$$

*a)*-ból pedig következik

$$\frac{d}{a_{12}} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{12} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Hasonlóképen

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{24} < \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$$

és

$$\frac{d}{a_{24}} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{24} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}.$$

Nem különben

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{48} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66},$$

$$\frac{d}{a_{48}} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{48} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

valamint

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{96} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

$$\frac{d}{a_{96}} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{96} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}.$$

Ezekből végre következik:

$$\frac{96\,a_{96}}{d} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\tfrac{10}{71}.$$

A keresett viszony $\frac{96\,a_{96}}{d}$ -nél is nagyobb lévén, semmiesetre sem lehet kisebb, mint $3\frac{10}{71}$.

Evvel a $\pi$ számára, úgy felső mint pedig alsó határt nyertünk. Az a módszer, hogy a kört szabályos sokszögekkel közelítjük meg, majdnem két évezreden át maradt iránytadó, egészen a differencziál- és integrál-számítás keletkezéséig. De magán a módszeren kívül Archimedesnek számítása is sok tekintetben figyelemre méltó. Részletei kifogásolhatatlanok, a négyzet-gyökvonásnál elkerülhetetlen elhanyagolások irányát mindig czéltudatosan választja. Hogy pedig mennyi fáradságot okozott a gyökvonás a számok akkori irásmódja mellett, azt mi, kik az ind-arab irásmódot megszoktuk, alig tudjuk elképzelni. A végeredmények igen pontosak. A felső és alsó határ külömbsége $\frac{1}{497}$, tehát mintegy 0·002.

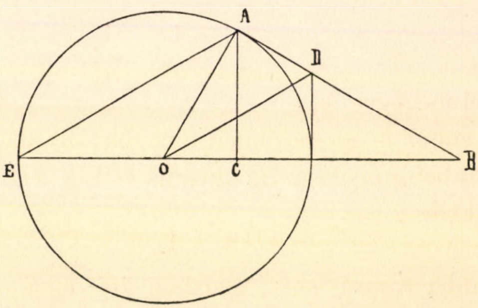
A láncztörteket használva a pontosság megitélésére a nyert határok a

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10 + \cdots}}$$

láncztört közelítő törtjei. A felső határ tehát, épúgy mint Ahmes viszonya, a keresett érték egyik közelítő törtje, mert valóban

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cdots}}$$

Az se kerülje el figyelmünket, hogy ARCHIMEDES az átmérőnek az oldalakhoz való viszonyát, tehát — ha hosszegységűl az átmérőt választjuk — nem magukat az oldalakat, hanem *reciprok* értéküket határozza meg. Ugyanis e reciprok értékek között egyszerűbb összefüggések állanak fön, mint a milyenek középiskolai tankönyveinkben magukra az oldalakra vonatkozólag foglaltatnak. Valóban a fentebbi trigonometrikus képletek az $\alpha = \frac{\pi}{n}$ helyettesítésénél a következőkbe mennek át:




2. ábra.

$$1) \qquad \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{d^2} + \frac{1}{A_n^2} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{A_{2n}} = \frac{1}{A_n} + \frac{1}{a_n}, \qquad 2)$$

a hol $d$ az átmérő, $a_n$ és $A_n$ a beírt illetőleg, a körülírt szabályos $n$ szög oldalait jelenti.* E fontos képletek a trigonometria igénybe vétele nélkül is nyerhetők, a mint azt a következőkben megmutatjuk.

* A tankönyvek formulái nem nagyon különböznek a következőktől:

$$A_n = \frac{a_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{d}\right)^2}} \qquad a_{2n} = d\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{d}\right)^2}}{2}}.$$

Legyen (2. ábra) az $AOB$ szög mérőszáma $\frac{1}{n}\pi$, úgy hogy

$$AB = \tfrac{1}{2}A_n \qquad AC = \tfrac{1}{2}a_n.$$

Az 1) alatti képlet levezetése czéljából a következő megjegyzésből indulunk ki. Pythagoras tétele szerint

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

vagy

$$\frac{OB^2}{OA^2} = 1 + \frac{AB^2}{OA^2}$$

Másrészt $OAB$ és $ACB$ háromszögek hasonló volta miatt

$$OB : OA = AB : AC.$$

Ezt előbbi egyenletünkben tekintetbe véve és $4 \,.\, AB^2$-tel osztva

$$\frac{1}{4 \,.\, AC^2} = \frac{1}{4 \,.\, AB^2} + \frac{1}{4 \,.\, OA^2}$$

a már is lényegében véve a levezetendő

$$\frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{d^2} + \frac{1}{A_n^2} \qquad 1)$$

képlettel megegyezik.

Még ennél is egyszerűbben történik a 2) alatti képletben kifejezett tétel bebizonyítása. Ha ugyanis $OD$ az $AOB$ középponti szöget felezi, akkor

$$AD = \tfrac{1}{2}A_{2n}\,;$$

ha továbbá $E$ azon pont, melyben $BO$ meghosszabbítása a kört metszi, akkor

$$AB : AD = BE : OE$$

s minthogy

$$BE = OA + OB$$

azért

$$AB : AD = (OA + OB) : OA,$$

vagyis

$$\frac{AB}{AD} = 1 + \frac{OB}{OA}.$$

Ha most $OB : OA$ helyett ismét $AB : AC$ viszonyt irjuk és $2 \,.\, AB$-vel osztunk

$$\frac{1}{2 \,.\, AD} = \frac{1}{2 \,.\, AB} + \frac{1}{2 \,.\, AC},$$

azaz valóban

$$\frac{1}{A_{2n}}=\frac{1}{A_n}+\frac{1}{a_n}\text{*} \tag{2}$$

* Bármely szempontból itéljük meg az imént levezetett egyenleteket, mindenképen előnyt fogunk nekik adni a tankönyvek formuláival szemben. Nem említve a szöveg képleteinek tetszetősb voltát, mely a megjegyzést megkönnyíti, azt az észrevételt tartjuk legfontosabbnak, hogy az $a_n$ és $A_n$ értékéből a $2n$ szögek oldalai *egyetlen egy* gyökvonással nyerhetők, holott tankönyveink ugyanezen czélra két gyökvonást irnak elő. A tankönyvek formulái hosszabb átalakítás nélkül csak azon egy mennyiség keresésére alkalmasak, mely szerint épen meg vannak oldva. Ezzel ellentétben szövegünk egyenletei bármelyik bennök előforduló mennyiség szerint könnyen oldhatók meg. Igy pl. az első képlet egyaránt röviden adja $a_n$ értékét $A_n$-ből és fordítva a körülirt sokszög oldalát a beirtéból. Pl. tudva, hogy

$$A_4=2r,$$

képletünk szerint

$$\frac{1}{a_4^2}=\frac{1}{4r^2}+\frac{1}{4r^2},\quad \text{tehát}\quad a_4=r\sqrt{2};$$

s fordítva, ha ismeretes, hogy

$$a_6=r,$$

akkor ugyanezen képlet értelmében

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{4r^2}+\frac{1}{A_6^2}\quad \text{azaz}\quad A_6=\frac{2r}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}r\sqrt{3}.$$

E két számítás menete közt alig volt eltérés.

A két egyenlet együtt igen alkalmas arra, hogy a $2n$ szögek oldalaiból visszakövetkeztessünk az $n$ szögek oldalaira. Pl. a szabályos hatszög oldalából könnyen meghatározhatjuk a szabályos háromszögét, ugyanis

$$\frac{1}{a_3^2}-\frac{1}{A_3^2}=\frac{1}{d^2}=\frac{1}{3A_6^2}$$

$$\frac{1}{a_3}+\frac{1}{A_3}=\frac{1}{A_6}.$$

Hogy az első egyenlet helyett szintén első fokút nyerjünk, osszuk el a másodikkal. Leszen

$$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{A_3}=\frac{1}{3A_6}$$

Ime lineár egyenletrendszert nyertünk, $a_3$ és $A_3$ reciprok értékeinek meghatározására, a melyből

$$a_3=\frac{3}{2}A_6=r\sqrt{3}\qquad A_3=3A_6=2r\sqrt{3}.$$

Ahmes és Archimedes számaiban láncztörtek közelítő törtjeit ismertük fel. Ezzel ellentétben az első megközelítés, mely egy számrendszerben bizonyos számú jegyet nyujt, PTOLEMÆUStól ered (130 körül Kr. u.) a kinek eredményét ma így fejezhetnők ki, hogy $\pi$ egyenlő *3* egészszel, *8* perczczel (partes *minutae* primæ) és *30* másodperczczel (partes minutæ *secundae*). Azaz

$$\pi = 3 + 8 \,.\, 60^{-1} + 30 \,.\, 60^{-2} \left(= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{17}} = 3{\cdot}14166.\right)$$

A görögök számításainál nagyobb pontosságot évszázadokon át csak ARYABHATTA ért el Indiában (sz. 476 Kr. u.). Archimedesnek módszerét a 384 szögig folytatva, azt találta, hogy

$$\pi = \frac{62832}{20000} (= 3{\cdot}1416).$$

Ez az érték a tizezred részekig pontos, mig Ptolemæus számánál — mint megközelítésének módjából következik — a hiba felső határa

$$\frac{1}{2} \,.\, 60^{-2} = \frac{1}{720}.$$

A középkor mitsem lendített problémánkon, és jobb megközelítéssel csak a 16-ik század végén találkozunk. Ez METIUS * száma:

$$\pi = \frac{355}{133} (= 3{\cdot}1415929\,\ldots)$$

mely $\pi$ közelítő törtjeinek sorában két helylyel következik az Archi-

---

Hogy oly példánk is legyen, melyben a második egyenlet tulajdonképeni czéljára, $A_{2n}$ meghatározására, használtatik: álljon itt végűl $A_{12}$ kiszámítása. Képletünk szerint.

$$\frac{1}{A_{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2r} + \frac{1}{r} = \frac{2+\sqrt{3}}{2r},$$

tehát

$$A_{12} = 2r \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2r(2-\sqrt{3}).$$

* Igazi neve: ADRIAN ANTHONISZOON, foglalkozására nézve várépítész volt.

medes-i $3\frac{1}{7}$ után.* Metius ezen értéket úgy nyerte, hogy Archimedes módja szerint $\pi$ értékére a következő határokat számította ki:

$$\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120},$$

s azután úgy a számlálónak valamint a nevezőknek számtani közepét vette.

A syrakusai tudóstól a 16. századig nemcsak a feljegyzésre méltó eredmények gyérek, hanem magát Archimedes számítását sem méltatták kellően. Vitruvius szerint, ki Augustus idejében élt, a 4 láb átmérőjű kör kerülete $12\frac{1}{2}$ láb. Szerinte tehát $\pi = 3\frac{1}{8}$, mely érték nem esik az Archimedes megállapította határok közé. Nem látszik érdektelennek megjegyezni, hogy a 2-es számrendszerben

$$\pi = 1.2 + 1 + 1.2^{-3} + \ldots$$

tehát $2^{-3}$ együtthatójánál megállva épen Vitruvius számát kapjuk. Ugyanezen értéknek felel meg jóval később Dürer szerkesztése,**

---

* A Ludolfi szám értékét közönséges láncztörtbe fejtve a nevezők és a közelitő törtek:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nevezők: | | 7 | 15 | 1 | 292 | 1 | 1 |
| közelítők: | 3 | $\frac{22}{7}$ | $\frac{333}{106}$ | $\frac{355}{113}$ | $\frac{103993}{33102}$ | $\frac{104348}{33215}$ | $\frac{208341}{66317}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| nevezők: | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| közelitők: | $\frac{312689}{99532}$ | $\frac{833719}{265381}$ | $\frac{1146408}{3649193}$ | $\frac{4272943}{1306120}$ | $\frac{5419351}{1725033}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| $\frac{80143857}{25510582}$ | $\frac{165707065}{52746197}$ | $\frac{245850922}{78256779}$ | $\frac{411557987}{131002976}$ | $\frac{1068966896}{340262731}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 1 | 84 |
| $\frac{2549491779}{811528438}$ | $\frac{6167950454}{1963319607}$ | $\frac{14885392687}{4738167652}$ | $\frac{21053343141}{6701487259}$ | $\frac{1783366216531}{567663097408}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 37 | 3 |
| $\frac{3587785776203}{1142027682075}$ | $\frac{5371151992734}{1709690779483}$ | $\frac{8958937768937}{2851718461558}$ | $\frac{336851849433403}{107223273857129}$ | $\frac{1019514486099146}{324521540032945}$ |

stb. *Lambert* számitása. (Vorl. Kennt.)

** Underweysung der messung mit dem zirckel und rechtscheyt. (1525.)

mely szerint a körrel egyenlő négyzetnek fél diagonálisa 5 oly részt tartalmaz, mint a milyent a sugár 4-et, tehát közelítőleg

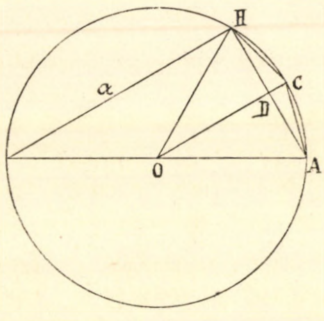
$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1 + \tfrac{1}{4}.$$

(A pontos érték láncztörtbe fejtve szintén így kezdődik.)

De hagyjuk e meddő kort és forduljunk a geometria gyors haladásához, melylyel ez VIETA idejében ujabb virágzásnak indult. A hugenotta FRANÇOIS VIÈTE-nek (szül. 1540, megh. 1603) talán legkisebb érdeme problémánk körül, hogy Archimedes módjára a következő értékeket számította ki:

$$3{\cdot}14159\ 26535 < \pi < 3{\cdot}14159\ 26537.$$

Pedig e két határ közötti különbség kisebb, mint $2 . 10^{-10}$ s oly körnél, mely Budapest körül, mint középpont körül, Fiumén keresztül van rajzolva, a kerület tizedmilliméterekig terjedő pontossággal nyerhető, ha az átmérőt Vieta számaival szorozzuk.




3. ábra.

Elméleti szempontból azonban sokkal érdekesebb az az új út, melyen a $\pi$ számot többé nem sokszögek kerületével, hanem *területével* határozta meg, s melyen az *első végtelen szorzatra* jutott.*

Meglepő eredményének forrása a következő tétel: *A beírt szabályos n-szög és 2n-szög területei úgy viszonylanak* ($t_n : t_{2n}$), *mint*

* Fr. Vietae Opera mathematica (ed Schooten, Lugduni Batavorum, 1646) pag. 398—400, hol azonban tévedésből a szorzat tényezőiben a belső gyökjelek mellől az $^1/_2$ együttható hiányzik.

*az előbbi oldalának kiegészítő húrja* ($a$ = *apotome*) *az átmérőhöz* ($d$).

A 3. ábrában $AB$ ív a kör $n$-ed része, melyet $C$ pont felez, míg a megfelelő húr közepe $D$. Valóban

$$n\,.\,OAB : n\,.\,OACB = 2\,.\,OD : 2\;OC$$

azaz

$$t_n : t_{2n} = a : d.$$

Már most ($r = 1$) $\frac{1}{2} t_4 = 1$, és a beírt 4, 8, 16 . . szögnek megfelelő apotome-k:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}}$$

tehát

$$\frac{1}{2} t_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2} t_{16} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}}$$

$$\frac{1}{2} t_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}}}$$

és e sorozat határértéke

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}} \ldots \text{ in inf.}}$$

Vieta-nak problémánkra vonatkozó alkotásai egy irányban sem maradtak hosszú ideig felülmúlatlanul. Végtelen szorzata helyett a következő század második felében az infinitezimal számítás oly analitikai kifejezéseket nyujtott, melyekben gyökjel többé nem fordul elő. A sokszögek területeinek számítására Willibrord Snell (Snellius) VAN ROIJEN (élt 1591—1626) és JAMES GREGORY (élt 1638—1675) oly tételeket találtak, melyek az imént közlöttnél jelentősebbeknek bizonyultak. Különösen rövid ideig élvezte Vieta azt a dicsőséget, hogy ő volt $\pi$ legpontosabb számítója, mert ADRIANUS ROMANUS (mh. 1616) hollandiai mathematikus e számot csakhamar 15 tizedesre határozta meg.

*Kürschák József.*

# A PARABOLA PROJEKTIV ELŐÁLLÍTASARÓL.

A parabola azon tulajdonságát, hogy mint projektiv hasonló pontsorok képződménye előállitható, egészen elementáris uton, csakis a parabola gyujtóponti tulajdonságainak segélyével lehet bebizonyitani.

A parabola ezen projektiv előállitását megadja a következő tétel.

*Az MN, illetőleg M'N' segmentumok, melyeket a parabolának két tetszőleges érintője m és n, két szilárd érintőn t- illetőleg t'-n meghatároz,*

$$\frac{MN}{M'N'}=a,$$

*állandó viszonyt képeznek.*

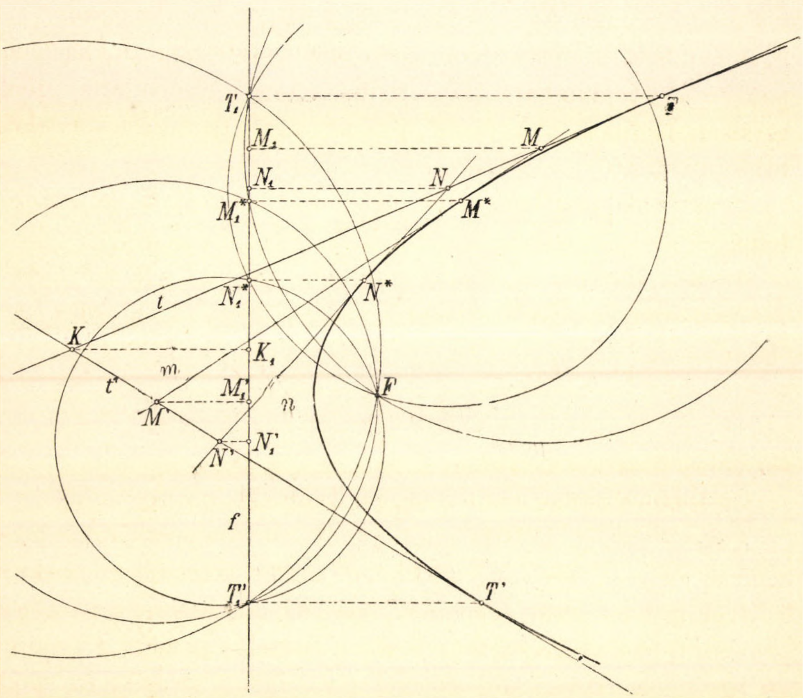
Ezt a tételt kell az említett segédeszközökkel bebizonyitani.

A parabola definiálható mint azon körök középpontjainak geometriai helye, a melyek egy adott $F$ ponton keresztül mennek és egy adott $f$ egyenest érintenek. Más fogalmazásban: a parabola mindazon pontok geometriai helye, a melyek egy adott $F$ ponttól és egy adott $f$ egyenestől egyenlő távolságban vannak. Az adott $F$ pont a gyujtópont, focus; az adott $f$ egyenes a vezérvonal, directrix.

Legyen a parabolának két szilárd érintője $t$, érintési pontja $T$ és $t'$, érintési pontja $T'$. Tudjuk, hogy a gyujtópontnak tükörképe egy tetszőleges érintőre nézve a vezérvonalon fekszik és hogy ez a tükörkép egyszersmind az érintési pontnak orthogonális projekcziója a vezérvonalon. Legyenek az $F$ tükörképei a $t$-, illetőleg $t'$-re nézve $T_1$, illetőleg $T'_1$. A két érintő metszéspontját $K$-val jelölve, $K$ lesz a $T_1FT'_1$ pontokon keresztül fektetett kör középpontja. Ha ezen középpontból az $f$-re merőlegest bocsátunk, akkor ennek talppontja $K_1$ felezi a $T_1 T_1'$ körhúrt, tehát

$$T_1 K_1 = K_1 T_1' = \tfrac{1}{2} T_1 T_1' = \rho.$$

Legyen továbbá $m$ és $n$ a parabolának két tetszőleges érintője, érintési pontjuk $M^*$ illetőleg $N^*$. Az $m$ és $n$ érintők a $t$ érintőben




az $M$ illetőleg $N$ pontokat-, a $t'$ érintőben a $M'$, illetőleg $N'$ pontokat határozzák meg. Ha az $M$, $M'$, $M^*$, $N$, $N'$ és $N^*$ pontok orthogonális projekczióit a vezérvonalra $M_1$, $M_1'$, $M_1^*$, $N_1$, $N_1'$ illetőleg $N_1^*$-el jelöljük, akkor tudjuk, hogy $M_1^*$ illetőleg $N_1^*$ az $F$ tükörképe az $m$, illetőleg $n$ érintőre nézve; továbbá, hogy az $M$, $N$, $M'$, illetőleg $N'$ középpontjai azon köröknek, melyeket az $FM_1^*T_1$, $FN_1^*T_1$ $FM_1^*T_1'$, illetőleg $FN_1^*T_1'$ pontok meghatároznak, következőleg:

$$T_1M_1=M_1M_1^*=\tfrac{1}{2}T_1M_1^*$$
$$T_1N_1=N_1N_1^*=\tfrac{1}{2}T_1N_1^*$$
$$M_1^*M_1'=M_1'T_1'=\tfrac{1}{2}M_1^*T_1'$$
$$N_1^*N_1'=N_1'T_1'=\tfrac{1}{2}N_1^*T_1'.$$

Ennélfogva:

$$M_1M_1'=M_1M_1^*+M_1^*M_1'=\tfrac{1}{2}T_1M_1^*+\tfrac{1}{2}M_1^*T_1'=\tfrac{1}{2}T_1T_1'=\rho$$
$$N_1N_1'=N_1N_1^*+N_1^*N_1'=\tfrac{1}{2}T_1N_1^*+\tfrac{1}{2}N_1^*T_1'=\tfrac{1}{2}T_1T_1'=\rho.$$

vagyis

$$M_1M_1'=N_1N_1'=\text{állandó}.$$

Minthogy

$$M_1M_1'=M_1N_1+N_1M_1'$$

és

$$N_1N_1'=N_1M_1'+M_1'N_1',$$

következik, hogy

$$M_1N_1+N_1M_1'=N_1M_1'+M_1'N_1'$$

vagyis

$$M_1N_1=M_1'N_1'.$$

Ezen relácziók összeállítása után áttérhetünk az $MN$ és $M'N'$ segmentumok viszonyának vizsgálatára.

Szükséges átalakítások végett czélszerű lesz, ha az $\frac{MN}{M'N'}$ viszonyt a $\frac{TK}{KT'}$ állandó viszonynyal elosztjuk, lesz tehát $\frac{MN}{M'N'}:\frac{TK}{KT'}$ a mit így is írhatunk:

$$\frac{MN}{M'N'}:\frac{TK}{KT'}=\frac{MN}{TK}\cdot\frac{KT'}{M'N'}$$

Két egy és ugyanazon egyenesen fekvő segmentum viszonya — mint pl. $MN$ és $TK$ a $t$ érintőben, vagy $KT'$ és $M'N'$ a $t'$ érintőben, — bármilyen parallel projekczióban ugyanaz marad, tehát ugyanaz marad ha ezen segmentumokat a vezérvonalra projicziáljuk.

Lesz tehát:

$$\frac{MN}{TK}=\frac{M_1N_1}{T_1K_1}\text{ és }\frac{KT'}{M'N'}=\frac{K_1T_1'}{M_1'N_1'}$$

és így:

$$\frac{MN}{M'N'}:\frac{TK}{KT'}=\frac{M_1N_1}{T_1K_1}\cdot\frac{K_1T_1'}{M_1'N_1'}=\frac{M_1N_1}{M_1'N_1'}\cdot\frac{K_1T_1'}{T_1K_1}=1,$$

mert

$$M_1N_1 = M_1'N_1' \text{ és } T_1K_1 = K_1T_1'$$

tehát

$$\frac{MN}{M'N'} : \frac{TK}{KT'} = 1$$

vagyis

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{TK}{KT'} = \text{ állandó.}$$

Evvel a tétel be van bizonyítva.

*Tőtössy Béla.*

# SZÁMELMÉLETI PROBLEMA A GEOMETRIÁBAN.

*Határoztassanak meg az összes háromszögek, a melyeknek oldalait egész számok mérik, területét és kerületét pedig ugyanaz az egész szám méri.**

Legyenek az oldalak pozitiv egész mérőszámai $a$, $b$, $c$. Akkor a feladat szerint

$$\frac{(a+b+c)\ (-a+b+c)\ (a-b+c)\ (a+b-c)}{16} = (a+b+c)^2$$

Hogy a baloldalon egész szám álljon, kell hogy $a+b+c$ páros legyen, mert ha $a+b+c$ páratlan, a számláló többi tényezői is ilyenek, és így ezeknek szorzata nem volna osztható 16-tal.

Tegyük $a+b+c=2s$, akkor

$$(s-a)\ (s-b)\ (s-c) = 4s.$$

Tegyük még

$$\left.\begin{aligned} s-a&=\alpha \\ s-b&=\beta \\ s-c&=\gamma \end{aligned}\right\}$$

akkor

$$s=\alpha+\beta+\gamma$$

és

$$\alpha\beta\gamma=4\ (\alpha+\beta+\gamma).$$

A háromszög reális, ha $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ pozitivok.

1. Kimutatom, hogy $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ különbözők.

Mert ha $\gamma=\beta$ volna, következnék, hogy

$$\alpha\beta^2=4\alpha+8\beta$$

---

* Ezen különben ismeretes probléma teljes megoldása tudtunkkal ez ideig még nincsen közzétéve.

tehát

$$(\alpha\beta-4)^2=4(\alpha^2+4)$$

holott $\alpha^2+4$ pozitiv egész $\alpha$ mellett nem lehet négyzetszám.

Legyen

$$\alpha>\beta>\gamma.$$

2. Kimutatom, hogy $\gamma>2$ nem lehet.

Mert ha $\gamma\geqq 3$ volna, abból

$$3\alpha\beta\leqq 4(\alpha+\beta+\gamma)<4\alpha+8\beta$$

következnék, azaz

$$(3\alpha-8)\,(3\alpha-4)<32$$

volna, a mi

$$\alpha>\beta>\gamma\geqq 3$$

mellett lehetetlen.

Tehát $\gamma$ vagy 1, vagy 2.

I. Ha $\gamma=1$, akkor

$$\alpha\beta=4\,(\alpha+\beta+1)$$
$$(\alpha-4)\,(\beta-4)=20.$$

Ez adja az

$$\left.\begin{matrix}\alpha=24\\ \beta=\ 5\end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix}\alpha=14\\ \beta=\ 6\end{matrix}\right\}\quad \text{és}\quad \left.\begin{matrix}\alpha=9\\ \beta=8\end{matrix}\right\}$$

megoldásokat.

II. Ha $\gamma=2$, akkor

$$\alpha\beta=2\,(\alpha+\beta+2)$$
$$(\alpha-2)\,(\beta-2)=8.$$

Ez adja

$$\left.\begin{matrix}\alpha=10\\ \beta=\ 3\end{matrix}\right\}\quad \text{és}\quad \left.\begin{matrix}\alpha=6\\ \beta=5\end{matrix}\right\}$$

megoldásokat.

Tehát az öt megoldásban $a\ b\ c$ értékei:

6, 25, 29,
7, 15, 20,
9, 10, 17,
5, 12, 13,
6, 8, 10.

*Vályi Gyula.*

# GALVÁN ELEMEK ÖSSZEKAPCSOLÁSÁNAK GRAPHIKAI ÁBRÁZOLÁSA.

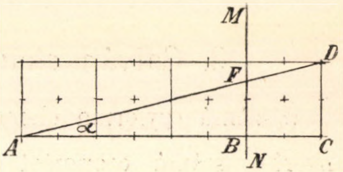
A mathematikai alakban kifejezett különböző physikai törvényekből az egyes mennyiségek kölcsönösen okozott változásának módját a képletből magából megismerni sokszor a mathematikailag gyakorlottabb elmének is nagyobb fáradtságot okoz, vagy legalább több időbe kerül, holott czélszerűen eszközölt graphikai ábrázolása azzal az előnynyel bír, hogy ha nem is mond többet magánál a mathematikai kifejezésnél, még bonyolódottabb kérdésekre is világosan és gyorsan megadja a kivánt feleletet, a mennyiségek összefüggését és változását áttekinthetővé teszi és az emlékezetben könynyen reconstruálható.

Ez okból nem meddő dolgot vélek művelni, ha a következőkben néhány az áramló elektromosság törvényeire vonatkozó graphikai ábrázolást közlök. A kifejtés logikai összefüggésének érdekében oly viszonyoknak graphikai ábrázolásától sem tekintettem el, melyek egyszerűségöknél fogva anélkül is könnyen áttekinthetők, ábrázolásuk tehát fölöslegesnek látszik, vagy általánosan ismeretesnek tekinthető. Épen ezen egyszerű viszonyokból kiindulva jutottam a kevésbbé egyszerű esetekre vonatkozó graphikai szerkesztésekhez, melyek tudtommal eddig még közölve nincsenek.

## 1. Oszlopszerűen és elemszerűen kapcsolt galván elemek.

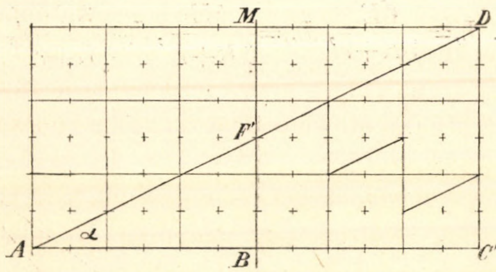
Az elektromindító erőt mint ordinatát, a vezeték ellenállását mint abscissát jegyezzük fel és pedig olyformán, hogy az összes öszszehasonlítandó esetekben az elemek ellenállása az $MN$ függélyesnek jobb oldalára, a vezeték ellenállása pedig annak bal oldalára essék.

1. ábra. Egy elemnek elektromindító ereje $E$ legyen egyenlő $CD$-vel, ellenállása $R$ $BC$-vel, a vezetékellenállás $r$ pedig $AB$-vel; akkor a létrejövő áram ereje $J = \frac{CD}{AC} = \frac{E}{R+r} = \operatorname{tg} \alpha$, az elem sarkain mutatkozó potentialkülömbség pedig $e = BF$. Ezt az elektrotechnikában sarkfeszültségnek nevezik.



1. ábra.

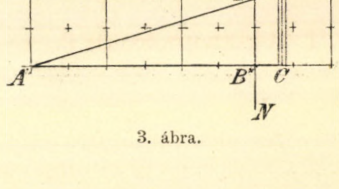
2. ábra. Három az előbbivel egyforma elem oszlopszerűen van kapcsolva. A létrejövő áram ereje



2. ábra.

$$J = \frac{CD}{AC} = \frac{3E}{3R+R} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ sarkfeszültsége } BF.$$

3. ábra. Ugyanazon három elem elemszerűen van kapcsolva. Ezáltal háromszor akkora felületű elem támad, melyben az ellenállás harmadrésze az egyszerű elem ellenállásának.



3. ábra.

Az összetétel által létrejövő áram ennélfogva

$$\frac{CD}{BC'+AB}=\frac{E}{\frac{R}{3}+r}$$ a sarkfeszültség pedig $e=BF$.

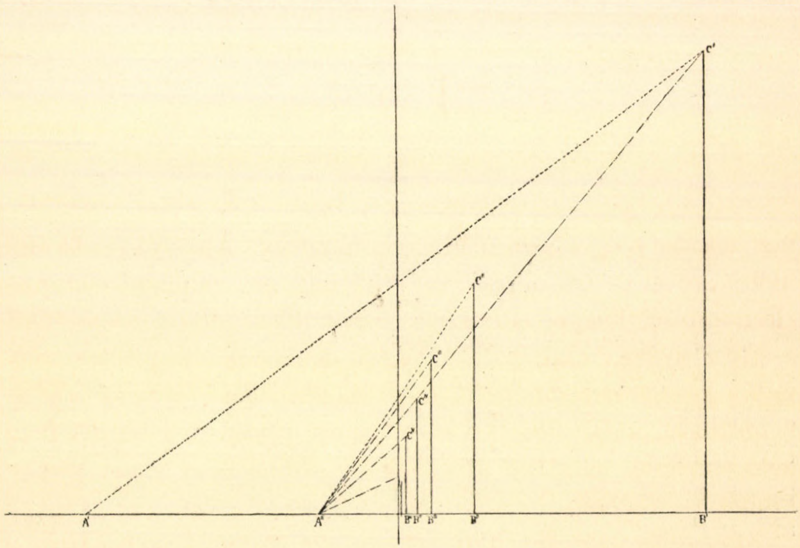
## 2. Galván elemek vegyes kapcsolása.

$n$ számú egyforma elemet $m$-enként egymás mellé és az úgy nyert $\frac{n}{m}$ számú csoportot egymásután kapcsolva, az összetétel áramereje:

$$i=\frac{\frac{n}{m}E}{\frac{n}{m^2}R+r}$$

Ha pl. $n=12$, akkor a lehetséges összeállitások:

$$J_{,}=\frac{12E}{12R+r},\ J_{,,}=\frac{6E}{3R+r},\ J_{,,,}=\frac{4E}{\frac{4}{3}R+r},\ J_{IV}\frac{3E}{\frac{3}{4}R+r}\ J_{V}=\frac{2E}{\frac{1}{3}R+r}$$



4. ábra.

$$\text{és } J_{VI}=\frac{E}{\frac{1}{12}R+r}.$$

Szerkesztésünk (4. ábra) feltünteti az 1. fejezetben tárgyalt módon a hatféle összetétett. A rajzból látható, hogy pl. $A''O$ vezetékbeli ellenállásban az az összetétel szolgáltatja a legerősebb áramot, melynél a telep ellenállása $OB''$ egyenlő a vezeték ellenállásával $A''O$-val. Ugyanis $C'A''B''$, $C''A''B''$, $C'''A''B''$ stb. szögek között a $C''A''B''$ szög a legnagyobb s ennélfogva a tangense s vele az áramintenzitás s a legnagyobb.

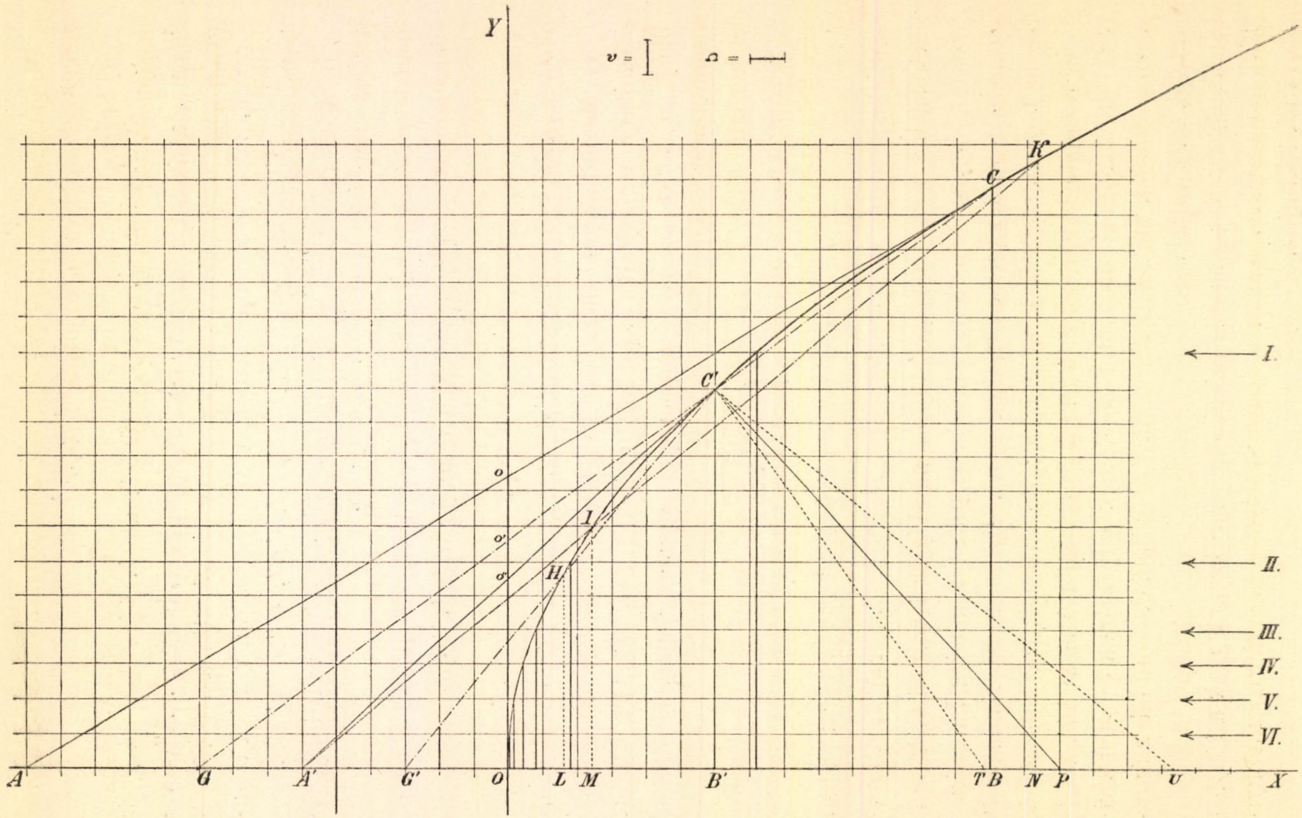
## 3. A vegyes kapcsolás görbéje.

Ha az $J=\dfrac{\frac{n}{m}E}{\frac{n}{m^2}R+r}$ egyenletből az egymástól függő elektromindító erőt és belső ellenállást mint ordinátát és abscissát feltüntetjük, akkor $\frac{n}{m}E=y$- és $\frac{n}{m^2}R=x$-ből $m$-et kiküszöbölvén

$$y=\sqrt{\frac{nE^2}{R}\cdot x}$$

egyenletet nyerjük. Az ordináták csúcsai tehát egy parabolában feküsznek, melynek parametere $\frac{nE^2}{R}$. Rajzunk (5. ábra) azon eseteknek felelne meg, melyben 12 elem, mindegyik 1 voltnyi elektromindító erővel és 0·6 ohmnyi belső ellenállással minden lehetséges elrendezéssel teleppé állíttatnék össze. Ilyen elrendezés az adott esetben nyilván csak hatféle lehet; de mennél nagyobb számú, minél kisebb elektromindító erejű és ellenállású elem áll rendelkezésünkre, annál sűrűbben következnek egymásra a tényleg kivihető eseteknek megfelelő abscissák és ordináták és annál számosabbak ezen esetek.

Könnyebb tárgyalás kedvéért nem szorítkozunk csak a tényleg kivihető esetekre, hanem $x$-et és $y$-t folytonosan változó mennyiségeknek tekintjük.




5. ábra.

Mindazt, a mire nézve ezen parabola felvilágosítást nyujt, a következő pontokban foglalhatjuk össze.

*a)* Bármely pontjának ordinátája adja valamely összeállításnak megfelelő elektromindító erőt, abscissája a hozzátartozó telep-ellenállást (a szerkesztés alapja). Szerkesztésünkben pl. az I, II, III . . . VI-tal jelölt ordináták és az ezekhez tartozó abcissák kivihető eseteknek felelnek meg, $C'B'$, $OB'$ és $CB$, $OB$ pl. gyakorlatilag kivihetlen eseteket jelentenek.

*b)* A parabola bármely pontjának érintője és az $X$-tengely által befogott szög tangense adja azt az áramerőt, mely az ezen pontnak megfelelő összetételben létrejön, ha a vezeték ellenállása a telep ellenállásával egyenlővé tétetik, miután a parabola subtangense — ez esetben az összes ellenállás — a parabola csúcspontjában feleztetik. Úgy pl. tg $(C'A'X)$ a $C'B'$-nek, tg $(CAX)$ a $CB$-nek megfelelő összetétel esetében létrejövő áramerő.

*c)* Meghatározott ellenállású vezetékben csak egy összetétel szolgáltatja a maximalis áramerőt és ez épen az, a melynek ellenállása az adott vezeték ellenállásával egyenlő. Valamely ennél kisebb áramerő ugyanaban a vezetékben mindig kétféle összetétellel hozható létre. Pl. az $A'O$ ellenálláshoz tg $(C'A'X)$ a legnagyobb áramerő. A tg $KA'X$ áramerő a $KN$-nek és $IM$-nek megfelelő összetétel útján hozható létre.

*d)* Ha a parabolában a tényleg kivihető eseteknek megfelelő ordinátákat megszerkesztjük, akkor egy tetszés szerint felvett külső ellenálláshoz húzott tangensnek megfelelő ordinátájának helyzete mutatja, melyik kivihető összetétel adná ezen ellenálláshoz a maximumhoz legközelebb eső áramerőt. Úgy pl. az $A'O$ ellenálláshoz az I. összetétel felelne meg legjobban.

*e)* A tangens által az $Y$-tengelyen lemetszett részek $oO$, $o'O$, $o''O$ stb. adják az összetétel által keletkezett áramnak megfelelő sarkfeszültséget. Ha valamely esetben pl. meghatározott feszültség és áram kívántatik, akkor a rajz felvilágosít, hogy az adott elemekkel a kivánt czél egyáltalán elérhető-e vagy nem? Úgy pl. tg $OAo$ áram $oO$ feszültség mellett az adott elemekkel nem hozható létre, mert $CB$ összetétel már kivihetetlen.

*f)* Ha az ábrázolásnál a volt és ohm egységek egyforma hosszaságú vonalakkal jelöltetnek, akkor az áramerőt meghatározó szögnek az $X$-tengelybe eső szárán a csúcstól egységnyi távolságban állított merőlegesnek a szárak közé eső része ugyanoly hosszegységgel mérve adja az áramerőt ampérekben. Úgy pl. a mi ábránkban tg $(HG'X)=i=1{\cdot}2$ ampér. Ha a volt és ohm egységek külömböző hosszúságu vonalakkal ábrázoltatnak, a mi a rajz czélszerű kivitele miatt szükségessé válhatik, akkor az ampért jelentő hosszegység az egy voltot és egy ohmot ábrázoló egyenesekből mint befogókból szerkesztett derékszögű háromszög segítségével külön meghatározható.

*g)* Ha arra az esetre, melyben a vezeték s a telep ellenállása egymással egyenlő, a parabolának ama pontjához, mely a kérdéses összetételhez tartozik a normalist megszerkesztjük, akkor a subnormalis adja az illető összetételnek megfelelő effektust, minthogy

$$\frac{y^2}{2x}=\frac{\left(\frac{n}{m}E\right)^2}{2\frac{n}{m^2}R}.$$

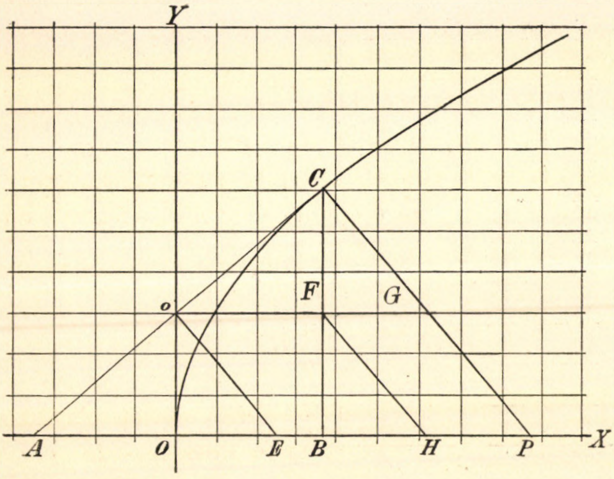
Úgy pl. a $C'B'$ összetételben (5. ábra), a telep effektusát $B'P$ vonal ábrázolják. (Az effektust mérő hosszegységre nézve az *f* pont alatt mondottak érvényesek; a mi szerkesztésünkben a voltot és ohmot jelentő hosszegység a voltampért is jelenti.)

De a subnormalis a parabolánál állandó és a fél parameterrel egyenlő. Ennélfogva minden összetételnél a telep ugyanazt az effektust adja, ha a vezeték ellenállása a telepével egyenlő; ezen effectussal $\frac{\left(\frac{n}{m}E\right)^2}{2\frac{n}{m^2},R_i}=\frac{nE^2}{2R_i}$-vel a parabola fél parametere egyenlő.

*h)* Ha a telep és a vezeték ellenállása nem egyenlő, mint pl. $C'GB'$ és $C'G'C'$-nek megfelelő esetekben (5. ábra), akkor $C'G$-re és $C'G'$-re $C'$ pontban merőlegeseket állitván, az effektust a $B'T$ és $B'U$ vonalak hosszai adják, miután $B'T=\frac{B'C'^2}{B'G}$ és $B'U=$

$\frac{B'C'^2}{B'G'}$. Látjuk, hogy ha a vezeték ellenállása $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{nagyobb}}{\text{kisebb}}$ a telepénél, az effektus $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kisebb}}{\text{nagyobb}}$ azon effektusnál, mely a telep s a vezeték egyenlő ellenállása mellett elérhető.

*i)* Miután egy áramkörnek bármely részében, ha végein a potentiálkülömbség $=(V'-V)$ és ellenállása $=r$, az effektus egyenlő $\frac{(V'-V)^2}{r}$, ennélfogva a 6. ábrában feltűntetett esetben a külső



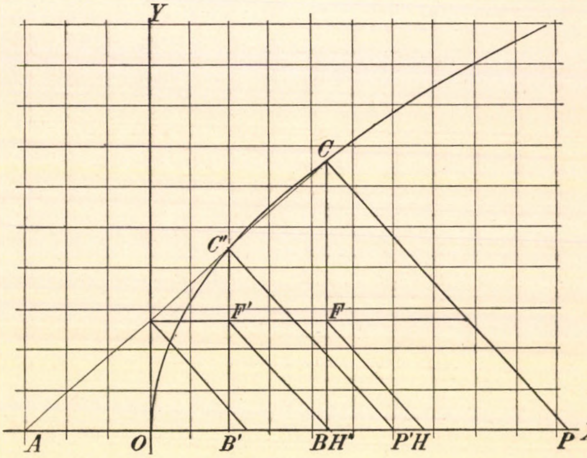

6. ábra.

effektus $OE$, a belső $FG$. Ha $o$ ponton át párhuzamost húzunk az $X$ tengelyhez és $F$ pontból párhuzamost az $CP$-hez, akkor $BH=OE$ és $HP=FG$, az $FH$ egyenes tehát az összes effektust külsőre és belsőre osztja. A jelen esetben $HP=BH$-val, azaz külső és belső effektus egymással egyenlő.

*k)* A 7. ábrában az $AO$ ellenálláshoz egyszer a $C'B'$ elektromindító erő szolgáltatja az áramot az $OB'$ telep-ellenállással másodszor a $CB$ elektromindító erő az $OB$ ellenállással. Az első esetben $B'P'$ az összes effektus, melyet $F'H'$ egyenes oszt külsőre és belsőre, a második esetben $BP'$ az összes effektus, $BH$ és $HP$ annak külső és belső része. A bebizonyítás ugyanaz, mint az előbbi pontban. Ezenkívül a rajzból könnyen kimutatható, hogy:

$\frac{B'H'}{B'P'}=\frac{AO}{AB'}$ és $\frac{BH}{BP}=\frac{AO}{AB}$, azaz hogy a külső effektus viszonya az összes effektushoz (a kihasználás viszonya, Güteverhältniss) egyenlő a vezetékbeli ellenállás viszonyával az összes ellenálláshoz, miből a kihasználandó telep czélszerű összeállítására következtethetünk. Az ábránk által feltüntetett esetben kétségkívül $C'B'$ az előnyösebb összeállítás.

*l)* Ha az eddig mondottakat akkumulátorokra alkalmazva egy töltött akkumulátor elektromotoros erejét $E$-vel, ellenállását $R$-rel,




7. ábra.

az időt pedig, mely alatt ugyanakkora ellenállásu vezetéken keresztül (a praktikus szabályok értelmében) kisüthetjük, $t$-vel jelöljük, akkor az akkumulátorban felhalmozott energia $=\frac{E^2}{2R}t$. Ha $n$ töltött akkumulátor áll rendelkezésünkre, akkor az összes energia $=\frac{nE^2}{2R}t$. Ezen energia mennyisége bármilyen összeállításnál ugyanaz; ha tehát az $n$ akkumulátor $m$-enként egymásmellé és az így keletkezett $\frac{n}{m}$ számú csoport egymásután van kapcsolva s ezen összetételben $r$ ellenállású vezetékben a kisütés $t'$ ideig tart, akkor:

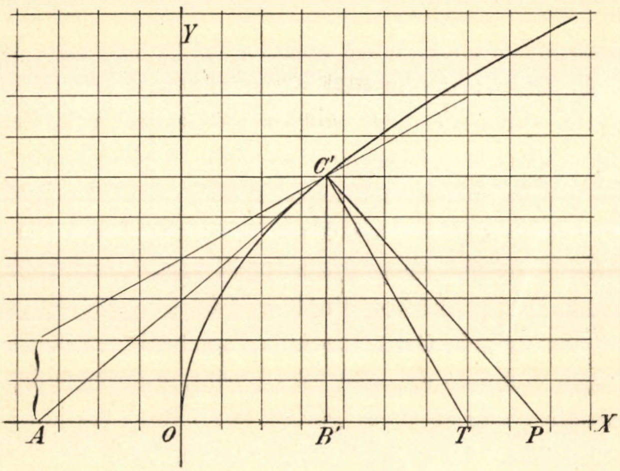
$$\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2 E^2 t'}{\frac{n}{m^2}R+r}=\frac{nE^2 t}{2R},$$

vagy, ha az összetételben a vezeték ellenállásának viszonyát a telepéhez $x$-szel jelöljük:

$$\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2 E^2 t'}{\frac{n}{m^2} R(1+x)} = \frac{nE^2 t}{2R},$$

miből: $t' = \frac{1+x}{2} \cdot t.$

Az egész telep kisütésének időtartama e szerint, bárhány elemből álljon a telep és bármiképen legyenek összekapcsolva, egye-




8. ábra.

dül a vezeték ellenállásának a telep ellenállásához viszonyától való függ, és ha ezen viszony egy elemnél ugyanaz mint a telepnél, a kisütési idők is egyenlők. Ha a telep összes effektusát egyenlő külső és belső ellenállás mellett $(VA)$-val, más viszony mellett $(VA)'$-tel jelöljük, akkor $\frac{(VA)}{(VA)'} = \frac{B'P}{B'T}$ (8. ábra); miután pedig $(VA)t = (VA)'t'$, következik, hogy $t' : t = B'P : B'T$, azaz az effektust jelentő egyenesek hosszai fordított viszonyban állanak a kisütési időtartamokkal, hol az elébb mondottak alapján $t$ időt az egyetlen egy elemnek egyenlő külső és belső ellenállásnak megfelelő kisütési időnek vehetjük.

*Mialovich M.*

# AZ INVARIÁNSOK ELMÉLETÉNEK ALAPJAIRÓL.*

(Első közlemény.)

Az invariánsok elméletének keletkezését geometriai kutatásokra vezethetjük vissza; midőn tehát szándékunk a következőkben az algebra ezen uj ágának legfontosabb módszereit és tételeit bemutatni, talán nem lesz felesleges, ha előbb futó pillantást vetünk a modern geometria történeti fejlődésére.

A míg Euklidesnek és követőinek geometriája csak lazán összefüggő, némileg ötletszerűen egymás mellé került tételeknek gyűjteménye, addig Descartes a koordinátarendszer bevezetésével módszert hozott a geometriába. Osztályozván az algebrai görbéket és felületeket az őket definiáló egyenlet foka szerint, ezen egyenlet fejtegetésére vezette vissza az illető görbék és felületek tulajdonságainak tanulmányozását. Ezen lépés, valamint Leibniz és Newton az infinitezimal-számítás bevezetésére és alkalmazására vonatkozó lángeszü felfedezései korszakot alkotnak a geometria történetében és egészen a múlt század végeig a geometerek jóformán kizárólag csak is ezen nagy vívmányoknak kiaknázásával foglalkoztak.

Mindamellett a további kutatások előtérbe hozták a koordinátamódszerek gyenge oldalait is, melyek különösen két mozzanatban foglalhatók össze. Egyrészt az által, hogy az illető görbét vagy felületet egy tőle egészen idegen geometriai alakkal, a koordinatarendszerrel hozzuk kapcsolatba és erre vonatkozó tulajdonságait vizs-

* Előadva a mathematikai és physikai társaság 1891. évi február hó 19-én tartott szakülésén.

gáljuk, idegen elemet viszünk a tárgyalásba, minek következtében ez egyszerűségéből és szimmetriájából veszit; másrészt pedig ily módon sokszor a geométria egész algebrai példatárrá fajult, a melyben a rendesen hosszadalmas algebrai számítások mellett a geometriai szubsztrátum egészen eltűnik.

Minden nagyobb akczió a tudományban reakcziót is szül; így a geometriának egészen algebrai úton való analitikai tárgyalása is megteremtette az éppen ellenkező törekvést: geometriai tételeknek lehetőleg minden analitikai segédeszköz nélkül való előállítását, a mivel a múlt század végén és a jelen század első felében különösen MONGE, PONCELET, STEINER, MÖBIUS, V. STAUDT és CHASLES foglalkoztak. Két külömböző geometriai módszer állott így elő, az analitikai és a szinthetikai módszer, melyek a geometriai alakzatoknak ugyanazon tulajdonságait kétféle úton vezetik le.

Egy idő múlva azonban az analitikusok is belátták, hogy azon algebrai nyelv, melyet ők a geometriai kutatásoknál alkalmaznak, fogyatékossága miatt javulásra szorúl és kezdték kutatni a görbék és felületek azon tulajdonságait, melyek a koordinátarendszer választásától függetlenek, tehát ennek változtatásával, azaz a görbék egyenletében előforduló változók lineár transzformácziójánál változatlanul maradnak. Igy állapitották meg SYLVESTER, CAYLEY, HESSE, ARONHOLD, CLEBSCH, GORDAN és mások a projektiv geometria analitikai tárgyalását és jutottak az invariánsok elméletére.

Az elemi és projektiv geometria közötti külömbség a következőképen jellemezhető legjobban.* Az *elemi geometria* az alakoknak csak azon tulajdonságait kutatja, melyek azok *helyzetétől, nagyságától* és *értelmétől* függetlenek, a melyek tehát *mozgási, hasonlósági* és *tükrözési* transzformácziók alkalmazása mellett változatlanúl maradnak. Így pl. közös tulajdonságaik vannak a kongruens idomoknak, melyek elmozditás segitségével ugyanazon helyre hozhatók; a hasonló idomoknak, melyek azáltal mennek át egymásba, hogy a hosszegységet $n$ szer nagyobbitjuk vagy kiseb-

---

* V. ö. FELIX KLEIN, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen, 1872.

bitjük és a szimmetrikus idomoknak, pl. az ember két kezének, a melyek közül az egyik a másiknak tükörképe.

Evvel szemben a *projektiv geometria* az alakzatoknak azon tulajdonságait fejtegeti, melyek *projekczіónál* maradnak változatlanúl és továbbá mindazon alakzatokat tekinti azonosaknak, melyek projekczióval vihetők át egymásba. Amig tehát pl. az elemi geometriában a kör, ellipszis, hiperbola és parabola négy külömböző individuum, a projektiv geométria ezeket egynek tekinti, mert projekczió által egymásba átvihetők. Kibővitvén ezen módszert még a dualitás elvével és az imaginárius elemek bevezetésével is, a rokonságok köre terjed és a mérték geometriája is subsummálható a projektiv geometria alá.

A projekczió analitikai æquivalense a lineár helyettesités és az alakok projektiv tulajdonságainak analitikai megállapítása képezi az invariánsok elméletének tárgyát.

Ezen elmélet foglalkozik két vagy több határozatlan mennyiséget tartalmazó homogen alakokkal, alkalmaz az ezekben előfordúló határozatlanokra lineár helyettesítéseket és keresi az egy alaknak, vagy a több alakból alló szimultán rendszer alakjainak együtthatóiból összeállitott azon homogen raczionális egész kifejezéseket, a melyek akár az eredeti, akár a transzformált alakok együtthatóiból képezve csak bizonyos állandó szorzóban különböznek egymástól. E kifejezések azok, melyeket *invariánsoknak* nevezünk. Ugyanilyen kifejezés, mely azonban magukat a határozatlanokat is tartalmazza, *covariánsnak* neveztetik.

A három határozatlan mennyiséggel biró, u. n. ternär alak fejtegetése adja az algebrai sik görbék projektiv elméletét. A négy határozatlannal biró u. n. quaternär alakok fejtegetése vezet az algebrai felületek elméletére. Bevezetésül a két határozatlannal biró vagy binär alak elmélete adja az egy dimenziós geometriát, tehát a pontsor, síksor vagy sugársor geometriáját.

Így pl. az

$$f = a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2$$

binär quadratikus alak az

$$x_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2$$
$$x_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2$$

szubstituczió alkalmazása mellett átmegy az

$$F = A_0 x_1^2 + 2A_1 x_1 x_2 + A_2 x_2^2$$

alakba, a hol

$$A_0 = a_0 a_{11}^2 + 2a_1 a_{11} a_{21} + a_2 a_{21}^2$$
$$A_1 = a_0 a_{11} a_{12} + a_1 (a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) + a_2 a_{21} a_{22}$$
$$A_2 = a_0 a_{12}^2 + 2a_1 a_{12} a_{22} + a_2 a_{22}^2$$

Ezen alak invariánsa az együtthatóiból képezett következő raczionális egész homogen kifejezés

$$I = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

mert,

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

amint az a determinánsok szorzási tételének segítségével könnyen kimutatható. Az $I = o$ egyenlet geometriai jelentése abban áll, hogy az $f = o$ egyenlet meghatározta két pont összeesik.

Hasonlóképen az

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1$$

quadratikus ternär alakra nézve

$$I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

invariáns, mert mint könnyen meggyőződhetünk ismét

$$I' = c\,.\,I.$$

$I = o$ egyenlet geometriai értelme ismét elég egyszerü, t. i. azt jelenti, hogy az $f = o$ egyenlet meghatározta kúpszelet egyenes párrá fajúl el, tehát ismét oly tulajdonság fellépését jelzi, mely projekczió alkalmazásánál változatlanúl fönmarad.

## I.

Az invariáns definicziójánál említettük, hogy az invariáns oly homogen raczionális egész függvény, amely akár az eredeti, akár a transzformált alak megfelelő együtthatóiból képezve, csak állandó szorzóban különbözik. E definicziót most egy tétel segítségével kiegészithetjük, ugyanis ki fogjuk mutatni, hogy ezen állandó szorzó csakis az alkalmazott szubstituczió determinansának bizonyos hatványa lehet. E tételt először ARONHOLD bizonyította be a Crelle-féle Journal 62. kötetében; az itt közölt bizonyítás lényegében véve GRAMtól ered (Math. Annalen, 7. kötet.)

Legyenek $a, b, c \ldots$ valamely $q$ határozatlannal biró $n$-ed fokú alaknak együtthatói, melyek az

$$\begin{aligned} X &= lx + my + \ldots \\ Y &= l'x + m'y + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

általános lineár helyettesités alkalmazása által $A, B, C \ldots$ együtthatókba menjenek át, a melyek, mint könnyen meggyőződhetünk, a szubstituczió együtthatóinak $n$-edfokú homogen függvényei. A szubsztituczió determinánsa

$$\varDelta = \begin{vmatrix} l, & m, & \ldots \\ l', & m', & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}.$$

$\varphi(a, b, c, \ldots)$ legyen valamely $p$-edfoku invariánsa, azaz $\varphi(a, b, \ldots c)$ az $a, b, c, \ldots$ együtthatóknak oly homogen $p$-edfoku egész kifejezése legyen, mely a

$$\varphi(A, B, C, \ldots) = \psi(l, m, \ldots; l', m', \ldots)\, \varphi(a, b, c, \ldots). \tag{1}$$

egyenletnek tesz eleget, melyben $\psi$ egyedűl az alkalmazott lineár helyettesités együtthatóitól függ. A tétel, mely bebizonyitandó, abban áll, hogy $\psi$ a $\varDelta$ determinåns valamely hatványával egyenlő. E czélból mindenekelőtt kimutatjuk, hogy $\psi$ a benne előforduló argumentumok homogen függvénye. Arra pedig, hogy valamely

$g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ a benne előforduló argumentumok $k$-adfokú homogen egész függvénye legyen, szükséges és elegendő, hogy a

$$kg = x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + \ldots . + x_n \frac{\partial g}{\partial x_n}$$

Euler-féle egyenletet kielégítse. A $\psi$-ről tehát ki kell mutatnunk, hogy ezen feltételnek eleget tesz. E czélból képezzük az (1) alatti egyenlőségből differencziálás utján a következőket:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial l} + \frac{\partial \varphi}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial l} + \frac{\partial \varphi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial l} + \ldots = \frac{\partial \psi}{\partial l}\varphi(a, b, c, \ldots)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial m} + \frac{\partial \varphi}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial m} + \frac{\partial \varphi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial m} + \ldots = \frac{\partial \psi}{\partial m}\varphi(a, b, c, \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial l'} + \frac{\partial \varphi}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial l'} + \frac{\partial \varphi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial l'} + \ldots = \frac{\partial \psi}{\partial l'}\varphi(a, b, c, \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

továbbá szorozzuk meg ezeket rendre az $l, m, \ldots .$ együtthatókkal és az akként szorzott egyenlőségeket adjuk össze, akkor ez által a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A}\left(l\frac{\partial A}{\partial l} + m\frac{\partial A}{\partial m} + \ldots\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial B}\left(l\frac{\partial B}{\partial l} + m\frac{\partial B}{\partial m} + \ldots\right) + \ldots .$$
$$= \varphi(a, b, c, \ldots .) \,.\, \Sigma\, l \frac{\partial \psi}{\partial l}$$

egyenlőséghez jutunk, mely tekintettel arra, hogy $A, B, C \ldots$ együtthatók az $l, m, \ldots$ argumentumok $n$-edfokú homogen kifejezései, az éppen említett Euler-féle tétel alapján ekként is írható:

$$n\left(\frac{\partial \varphi}{\partial A}A + \frac{\partial \varphi}{\partial B}B + \ldots\right) = \varphi(a, b, c, \ldots .)\, \Sigma\, l \frac{\partial \psi}{\partial l};$$

de minthogy $\psi(A, B, C, \ldots)$ az $A, B, C, \ldots$ együtthatók $p$-edfokú homogén kifejezése, az utoljára nyert egyenlőség ismét az Euler-féle tétel alapján a következő alakra hozható

$$np \,.\, \varphi(A, B, \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots) \,.\, \Sigma\, l \frac{\partial \psi}{\partial l},$$

amely végül az 1. alatti reláczió tekintetbe vételével az $np\psi = \Sigma l \frac{\partial\psi}{\partial l}$ egyenlőségbe megy át, a melyből a $\psi$ homogeneitása már is evidencziába lép.

Ezen segédtétel előrebocsátása után térjünk vissza a tulajdonképeni tételünk bebizonyítására. E czélból mindenekelőtt megjegyezzük, hogy az inverz szubstituczió:

$$X = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial l}x + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial l}y + \dots$$

$$Y = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial m}x + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial m'}y + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

alkalmazása a transzformált alak invariansát megint az eredeti alakra hozza vissza.

Hogyha tehát

$$\varphi(A, B, C\dots) = \psi(l, m, \dots l', m', \dots) \,.\, \varphi(a, b, c\dots)\dots \qquad (1)$$

akkor egyszersmind

$$\varphi(a, b, c\dots) = \psi\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial l}, \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial l}, \dots \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial m}, \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial m}, \dots\right)\varphi(A, B, C, \dots)$$

vagy, mivel $\psi$ homogen $np$-edfokú függvény

$$\varphi(a, b, c, \dots) = \frac{1}{\Delta^{np}} \,.\, \psi\left(\frac{\partial\Delta}{\partial l'}, \frac{\partial\Delta}{\partial l'}, \dots\right) . \, \varphi(A, B, C\dots) \,. \qquad (2)$$

Ha az (1) és (2) alatti egyenletekből $\varphi(a, b, \dots)$ és $\varphi(A, B, \dots)$-t kiküszöböljük, a következőt nyerjük

$$\psi(l, m, \dots) \,.\, \psi\left(\frac{\partial\Delta}{\partial l'}, \frac{\partial\Delta}{\partial l'}, \dots\right) = \Delta^{np} \,.$$

Ezen egyenlet jobb oldala az irreduktibilis $\Delta$-nak hatványa, tehát nincsen oly tényezője, mely nem volna $\Delta$ hatványa.

Viszont $\varphi$ a feltételnél fogva raczionális egész függvény, tehát $\psi$ is az; kell tehát, hogy a baloldal tényezői $\Delta$ szubstituczió determinansának hatványai legyenek; amivel tételünk teljesen be van bizonyítva.

Egészen analog módon történik a tétel bebizonyítása azon esetben, midőn az invariáns nem egyes alakra, hanem az alakoknak szimultán rendszerére vonatkozik. A dolog lényegére nézve ezen esetben az előbbi tárgyalásoktól eltérés nem mutatkozik, úgy hogy ennek az esetnek külön áttekintését itt mellőzhetjük.

*Kopp Lajos.*

# A RACZIONÁLIS EGÉSZ SZÁMOK OSZTHATÓSÁGÁRÓL.

## I.

Feladatunk lesz megvizsgálni, hogy bármely a tizes számrendszerben felírt

$$A = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_n 10^n$$

egész szám minő feltételek mellett osztható valamely adott $p$ törzsszámmal. A 2 és 5 törzsszámokat kizárjuk. Különben is világos, hogy e számokra nézve a feltételek: $A \equiv a_0$ (mod. 2), $A \equiv a_0$ (mod. 5). E feladatot a hatvány-maradékok elméletének segitségével könnyen megoldhatjuk. Legyen $d$ az a kitevő, melyhez 10 tartozik a $p$ modulusra nézve. *Azaz $d$ a legkisebb egész szám, melyre nézve a*

$$10^d \equiv 1 \ (\text{mod.}\, p)$$

*kongruenczia fönnáll.*

Az összes $p$ törzsszámokat sorozzuk most két osztályba: az első osztályba tartozzanak azok, a melyekre nézve $d$ páros szám; a második osztályba pedig azok, a melyekre nézve $d$ páratlan szám.

1. Legyen $p$ az első osztályba tartozó törzsszám, ekkor

$$10^d - 1 \equiv (10^{\frac{d}{2}} + 1)(10^{\frac{d}{2}} - 1) \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p) \qquad (1)$$

Minthogy $p$ törzsszám és 10 a $p$-re nézve a $d$ kitevőhöz tartozik, az 1) alatti kongruencziából következik, hogy

$$10^{\frac{d}{2}} + 1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p)$$

azaz

$$10^{\frac{d}{2}} \equiv -1 \ (\text{mod.}\, p).$$

Legyen rövidség okáért

$$\frac{d}{2}=c$$

akkor

$$10^c \equiv -1 \pmod{p};$$

és így

$$10^{ic} \equiv (-1)^i \pmod{p}.$$

Legyen $h = ic + h'$, a hol $i$ nem negativ egész szám és $h'$ a $0, 1, 2, \ldots (c-1)$ számok egyike, akkor:

$$a_h 10^h \equiv a_h 10^{ic} 10^{h'} \equiv (-1)^i a_h 10^{h'},$$

és ezekből már világos, hogy

$$\begin{aligned} A \equiv & (a_0 + a_1\, 10 + a_2\, 10^2 + \ldots + a_{c-1}\, 10^{c-1}) \\ + & (a_c + a_{c+1}\, 10 + a_{c+2}\, 10^2 + \ldots + a_{2c+1}\, 10^{c-1}) \\ + & \ldots \\ + & (-1)^i (a_{ic} + a_{ic+1} 10 + a_{ic+2} 10^2 + \ldots + a_{ic+c-1} 10^{c-1}) \\ + & \ldots \\ + & (-1)^j (a_{jc} + a_{jc+1} 10 + a_{jc+2} 10^2 + \ldots + a_{jc+n'}\, 10^{n'}) \pmod{p} \end{aligned}$$

a hol $n=jc+n'$, és pedig $j$ nem negativ egész szám, $n'$ pedig a $0, 1, 2, \ldots c-1$ számok egyike.

*Ha tehát az adott A számot az egyesektől kezdve komplexekbe osztjuk be oly módon, hogy minden egyes komplexbe $\frac{d}{2}$ számjegyet teszünk, (az utolsóba juthat kevesebb is), ha továbbá a páratlan helyen* álló komplexek összege M, a páros helyeken állóké N, akkor $A \equiv (M-N) \pmod{p}$.*

E tétel elemi úton már be volt bizonyítva a 11, 7, 13 törzsszámokra. A 11 törzsszám esetében $d=2$; a 7, 13 törzsszámok esetében $d=6$.

2. Áttérve most a második osztályba tartozó törzsszám-osztókra,

* Páratlan helyen álló komplexek azok, a melyek jobbról számítva az első, harmadik, ötödik s í. t. helyeken vannak; párosak pedig azok, a melyek jobbról számítva a második, negyedik, hatodik s í. t. helyen vannak.

legyen ezekre nézve ismét $d$-vel jelölve az a legkisebb *páratlan* szám, melyre nézve

$$10^d \equiv 1 \pmod{p},$$

legyen továbbá $h = id + h'$, a hol $i$ nem negativ egész szám és $h'$ a $0, 1, 2, 3, \ldots (d-1)$ számok egyike, akkor

$$a_h 10^h \equiv a_h 10^{id} 10^{h'} \equiv a_p 10^{h'} \pmod{p}.$$

Ebből már világos, hogy

$$\begin{aligned} A \equiv & (a_0 + a_1 10 + \ldots + a_{d-1} 10^{d-1}) \\ & + (a_d + a_{d+1} 10 + \ldots + a_{2d-1} 10^{d-1}) \\ & + \ldots \\ & + (a_{id} + a_{id+1} 10 + \ldots + a_{id+d-1} 10^{d-1}) \\ & + \ldots \\ & + (a_{jd} + a_{jd+1} + \ldots + a_{jd+n'} 10^{n'}) \pmod{p} \end{aligned}$$

*Ha tehát az adott $A$ számot az egyesektől kezdve $d$ tagú komplexekre beosztjuk (az utolsóba juthat kevescbb is), és e komplexek összege $S$, akkor $A \equiv S \pmod{p}$.*

E tétel szintén elemi úton lett bebizonyitva és ismeretes volt e két törzsszámra: 3, 37. A 3 törzsszámnál $d=1$. A 37-nél $d=3$. Mert $10^1 \equiv 1 \pmod{3}$ és $10^3 \equiv 1 \pmod{37}$.

## II.

Feladatunk lesz most már megvizsgálni, hogy bármely a 10-es számrendszerben felírt

$$A = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_n 10^n$$

egész szám minő feltételek mellett osztható valamely adott $k$ öszszetett számmal.

Oly $k$ számokat veszünk csak, melyek sem 2, sem 5-tel nem oszthatók. Különben is világos, hogy $A \equiv (a_0 + a_1 10 + \ldots + a_{r-1} 10^{r-1}) \pmod{2^r}$ és $A \equiv (a_0 + a_1 10 + \ldots + a_{r-1} 10^{r-1}) \pmod{5^r}$. Itt is két esetet különböztetünk meg. Jelöljük $d$-vel azt a legkisebb nem negativ egész számot, a melyhez, mint kitevőhöz 10 tartozik, akkor a $k$ számra nézve $10^d \equiv 1 \pmod{k}$. Ha a $d$ páros és egyszersmind

$10^{\frac{d}{2}} \equiv -1 \pmod{k}$, akkor a $k$ számot első osztályúnak nevezzük; minden más esetben másodosztályúnak.

Épen úgy, mint a törzsszámoknál, a következő két tételt nyerjük:

1. Az első osztályú $k$ számokra nézve:

*Az adott A számot az egyesektől kezdve komplexekbe osztjuk be. Minden komplexbe* $\frac{d}{2}$ *számot teszünk, az utolsóba juthat kevesebb is. Legyen a páratlan komplexek összege M, a párosaké N, akkor* $A \equiv (M-N) \pmod{k}$.

2. A másodosztályú $k$ számokra nézve.

«*Az adott A számot az egyesektől kezdve komplexekbe osztjuk be. Minden komplexbe d számot teszünk, az utolsóba juthat kevesebb is. Legyen e komplexek összege S, ekkor* $A \equiv S \pmod{k}$».

Legyen szabad egy-két példát is adnunk.

$$24205 \mid 37642 \mid 93827 \mid 98571 \equiv 18182 \equiv 0 \pmod{9091}.$$

A 17 törzsszámra nézve $d=16$, $\frac{d}{2}=8$

$$95347128 \mid 52345678 \mid 34567293 \mid 77568743 \equiv$$
$$129914421-129914421 \equiv 0 \pmod{17}.$$

Ilyen szám, mint 17, ez is: 5882353. Itt is $d=16$, $\frac{d}{2}=8$.

Azaz a felirt szám osztható 17-tel is, 5882353-mal is.

A 17-nél $M-N$ lehet 8 jegyű is. Ámde ilyenkor:

$$(b_0+b_1 10)+b_2 10^2+b_3 10^3+b_4 10^4+b_5 10^5+b_6 10^6+b_7 10^7)$$
$$\equiv (b_0+b_1 10)-2(b_2+b_3 10)+4(b_4+b_5 10)+8(b_6+b_7 10) \bmod 17.$$
$$9785 \mid 5964 \mid 8128 \mid 5982 \mid 1437 \mid 5289 \mid 1357 \mid 3472 \mid \equiv$$
$$\equiv 20707-20707 \equiv 0 \bmod 137.$$

A felirt számról egyúttal látjuk, hogy osztható 73-mal is, 10001-gyel is.

*Demeczky Mihály.*

# IRODALOM.*

## MATHEMATIKA.

## Acta Mathematica.

14. kötet.

H. SCHRÖTER. «Ueber die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung». (207. l.)

A. HURWITZ. «Ueber beständig convergirende Potenzreihen mit rationalen Zahlen-Cœfficienten und vorgeschriebenen Nullstellen». (211. l.) *(Bővebben ismertetjük.)*

D. HILBERT u. A. HURWITZ. «Ueber die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null». (217. l.)

E. PHRAGMÉN. «Remarques sur la théorie de la représentation conforme». (225. l.)

F. BRIOSCHI. «Les invariants des équations differentielles linéaires». (233. l.)

A. BERGER. «Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli». (249. l.)

---

* Idézeteknél a következő röviditésekkel élünk: *C. R.*: *Comptes Rendus* hebdomadaires des séances de l'Academie des sciences, par M. M. les secrétaires perpétuels. Paris GAUTHIER VILLARS. — *J. für Math.* Journal für die reine und angewandte Mathematik gegründet von A. L. Crelle. Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren WEIERSTRASS, v. HELMHOLTZ, SCHROETER, FUCHS und KRONECKER, Berlin, G. Reimer. — *Math. Ann.:* Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch A. CLEBSCH unter Mitwirkung der Herren Prof. P. GORDAN (Erlangen), C. NEUMANN (Leipzig), VON DER MÜHL (Leipzig) gegenwärtig herausgegeben von Prf. FELIX KLEIN (Göttingen), A. MAYER (Leipzig),, W. DYCK (München). Leipzig (B. G. TEUBNER). — *Acta Mathematica:* Acta Mathematica. Zeitschrift, herausgegeben von G. MITTAG-LEFFLER: Stockholm. F. und G. BEIJER. — PHIL. MAG.: The London, Edinburg, and Dublin *Philosophical Magazine* and Journal of Science. Conducted by Sir W. THOMSON, G. FR. FITZGERALD and W. FRANCIS. London. — *Ann. d. Ph.:* Annalen der Physik und Chemie. Begründet und fortgeführt durch F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, I. C. POGGENDORF. Unter Mitwirkung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. v. HELMHOLTZ herausgegeben von G. WIEDEMANN. Leipzig (JOH. AMBR. BARTH).

## Journal für die reine und angewandte Mathematik.

107. kötet.

F. Schottky. «Das Interpolationsproblem für elliptische Functionen». (189. l.)

K. Schwering. «Multiplication der lemniscatischen Function sin.am.u.» (196. l.)

K. Hensel. «Zur Theorie der linearen Formen». (241. l.) *(Bővebben ismertetjük.)*

L. Pochhammer. «Ueber ein vielfaches, auf Euler'sche Integrale reducirbares Integral». (246. l.)

L. Kronecker. «Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie». (254. l.)

A. Cayley. «On some problems of ortomorphosis». (262. l.)

H. Minkowski. «Ueber die positiven quadratischen Formen und über Kettenbruchähnliche Algorithmen». (278. l.)

P. Günther. «Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen». (298. l.)

P. Stäckel. «Ueber die Differentialgleichungen der Dynamie und den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme». (319. l.)

L. Kronecker. Ueber eine Stelle in Jacobi's Aufsatz. «Observatiunculæ ad theoriam æquationum pertinentes». (Auszug aus einem Schreiben an Herrn Weierstrass.) (349. l.)

108. kötet.

H. Rosenow. «Ueber Invariantensysteme, welche zur Charakterisirung der verschiedenen Classen bilinearer Formen dienen». (1. l.)

G. Hauck. «Theorie der trilinearen Verwandschaft ebener Systeme». IV. Artikel. «Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden». Hierzu Tafel I. (25. l.)

L. Pochhammer. «Ueber eine lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte». (50 l.)

L. Kronecker. «Sophie von Kowalewsky». (88. l.)

## Comptes Rendus

Tome CXII.

P. Appell. «Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles mêmes par un changement de fonction et de variable.» (No 1.) (34. lap.)

E. Picard. «Sur la représentation approchée des fonctions.» (No 4.) (183. l.)
H. Minkowski. «Théoremes arithmetiques.» (No 4.) (209. l.)
E. Amigues. Démonstration purement algèbrique du théorème fondamental de la théorie des équations.» (No 4.) (212. l.)

Az algebra alaptételének ezen bebizonyítása sem tisztán algebrai sem nem új; nem algebrai, mert függvénytani megfontolásokat használ fel, újnak pedig azért nem mondható, mert lényegében véve ugyanez a bebizonyítás már Kőnig Gyula Analizis-ében is benfoglaltatik. (582. lapon.)

H. Poincaré. «Sur le développement approché de la fonction perturbatrice.» (No 5.) (269. l.)
A. Mannheim. «Remarques sur le déplacement d'une figure de forme invariable, dont tous les plans passent par des points fixes.» (No 5.) (283. l.)
d'Ocagne. «Sur la représentation plane des équations à quatre variable.» (No 8.) (421. l.)
L. Raffy. «Sur une classe de surfaces harmoniques.» (No 8.) (424. l.)
A. Schönflies. «Sur les surfaces minima limitées par quatre arrètes d'un quadrilatère gauche.» (No 9.) (478. l.)
A. Schönflies. «Sur les équations de deux surfaces minima périodiques possédant la symétrie de l'octaèdre.» (No 10.) (515. l.)
L. Raffy. «Sur les spirales harmoniques.» (No 10.) (518. l.)
L. Autonne. «Sur une application des groupes de M. Lie.» (No 11.) (570. l.)
J. Weingarten. «Sur la théorie des surfaces applicables.» (No 12.) (607. l.)
P. Painlevé. «Sur la théorie de la représentation conforme.» (No 13.) (653. l.)
É. Picard. «Sur un système d'équations aux derivées partielles.» (No 14.) (683. l.)
J. Weingarten. «Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée.» (No 14.) (706. l.)
E. Goursat. «Sur la théorie des surfaces applicables.» (No 14.) (707. l.)
R. Liouville. «Sur un problème d'Analyse qui se rattache aux équations de la Dynamique.» (No 14.) (710. l.)
H. Padé. «Sur les fractions continues régulières relatives à *e*.» (No 14.) (712. l.)
H. Poincaré. «Sur l'intégration algèbrique des équations differentielles.» (No 15.) (761. l.)
E. Vessiot. «Sur les équations differentielles linéaires». (No 15.) (778. l.) *(Bővebben ismertetjük.)*
A. Markoff. «Sur une classe de nombres complexes.» (No 15.) (780. l.)
L. Raffy. «Sur la déformation des surfaces spirales.» (No 16.) (850. l.)

## Mathematische Annalen.

38. kötet.

E. Wiltheiss. «Die partiellen Differentialgleichungen der Abel'schen Thetafunctionen dreier Argumente». (1. l.)

M. Pasch. «Ueber bilineare Formen und deren geometrische Anwendung.» (24. l.)

A. Fricke. «Ueber eine besondere Classe discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen». (50. l.)

A. Nekrassoff. «Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis.» (82. l.)

F. Junker. «Die Relationen, welche zwischen den elementaren symmetrischen Functionen bestehen». (91. l.)

D. Hilbert. «Ueber die reellen Züge algebraischer Curven». (115. l.)

G. Pick. «Ueber eine Normalform gewisser Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung». (139. l.)

F. Klein. «Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung». (144. l.)

A. Pringsheim. «Ueber analytische Darstellung unendlicher Reihen, die durch Gliederinversion aus einer gegebenen hervorgehen». (153. l.)

H. Burkhardt. «Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen». Zweiter Theil. (161. l.)

L. Pochhammer. «Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Cœfficienten». (225. l.)

F. Schur. «Zur Theorie ber endlichen Transformationsgruppen». (263. l.)

E. Kötter. «Einige Haupsätze aus der Lehre von den Curven dritter Ordnung». (287. l.)

R. Schumacher. «Zur Eintheilung der Strahlencongruenzen zweiter Ordnung mit Brenn- oder singulären Linien; Ebenenbüschel zweiter Ordnung in perspectiver Lage zu rationalen Curven». (298. l.)

O. Hölder. «Ueber den Casus Irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades». (307. l.)

## Onálló művek.

Fermat. «Oeuvres, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry.» Tome I. Oeuvres mathématiques diverses. Paris. Gauthier-Villars. 1891. (Ára 22 fr.)

E. Roché et Ch. Comberousse. «Traité de Géometrie». Sixième édition revue et augmenté. I. et II. Partie. Paris. Gauthiers-Villars. 1891. (Ára 15·5 fr.)

G. Darboux. «Leçons sur la théorie générale des surfaces». III. partie. II. fascicule. (Lignes géodésiques et courbure géodésiques. Paramètris differentielles. Déformations des surfaces.) Paris. Gauthiers-Villars. 1891. (Ára 15 fr.) *(Ismertetni fogjuk.)*

H. Weber. «Elliptische Functionen und algebraische Zahlen». Braunschweig. F. Vieweg. 1891. (Ára 13 m.) *(Részletesebben ismertetjük.)*

W. Heymann. «Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Integralgleichungen nebst einem Anhang verwandter Aufgaben». Leipzig. B. G. Teubner. 1891. (Ára 10 m.)

H. Rudio. «Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes». Leipzig. B. G. Teubner. 1891. (Ára 2·4 m.)

H. Cranz. «Das appolonische Berührungsproblem.» Stuttgart. J. Maier. 1891. (Ára 6 m.)

A. Hanner. «Analytische Geometrie des Punktes der Geraden und der Kegelschnitte». Prag. H. Dominicus. 1891. (Ára 5 frt.)

J. Bobek. «Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung». Stuttgart. J. Maier. 1891. (Ára 6 m.)

S. Gundelfinger u. A. Nell. «Tafeln zur Berechnung neunstelliger Logarithmen». Darmstadt. A. Bergsträsser. 1891. (Ára 2 m.)

Clebsch-Lindemann. «Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch, bearbeitet von dr. Ferdinand Lindemann.» II. Band. I. Theil. (Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Complex.) Leipzig. B. G. Teubner. 1891. (Ára 12 m.) *(Ismertetését közöljük.)*

---

## PHYSIKA.

# Comptes Rendus.

Tome CXII.

M. Berthelot. «Sur l'onde explosive, sur les données caractéristiques de la detonation et sa vitesse de propagation dans les corps solides et liquides, et spécialement dans le nitrate de methyle.» 16. l.

Th. Moureaux. «Sur la valeur absolue des éléments magnétiques au 1-er janvier 1891.» 37. l.

H. Rigollot. «Sur les spectres d'absorption des solutions d'iode.» 38. l.

H. le Chatelier. «Influence de la trempe sur la résistance électrique de l'acier.» 40. l.

VIEILLE. «Influence du covolume des gaz sur la vitesse de propagation des phénomènes explosifs.» 43. l.

BERTHELOT (DANIEL). «Sur les conductibilités des acides organiques isomères et de leurs sels.» 46. l.

LÉAUTÉ. «Sur les poulies-volants.» 75. l.

E. VICAIRE. «Sur les petites oscillations d'un systéme soumis à des forces perturbatrices périodiques.» 82. l.

E. MATHIAS. «Remarques sur le théorème des états correspondants.» 85. l.

CH. ED. GUILLAUME. «Solution pratique du problème de la colonne émergente d'un thermomètre, par l'emploi d'une tige correctrice.» 87. l.

ÉD. BRANLY. «Variations de conductibilité des substances isolantes.» 90. l.

P. JOUBIN. «Propriétés physiques et constitution moléculaire des corps simples métalliques.» 93. l.

A DULONG és PETIT törvényét követő egyszerű testekre nézve a térfogat-egységben foglalt molekulák száma $n^3$ arányosnak vehető a fajmeleg és a sűrűség szorzatával. A molekulák átlagos távolságát, $\frac{1}{n}$-et abscissának, a fajlagos ellenállást pedig ordinátának véve, kiderül, hogy az így meghatározott pontok nem köthetők össze folytonos görbével, két egyszerű görbe ellenben két csoportra osztja az összes fémes testeket: az egyikben a *mágneses*, a másikban a *diamágneses*, testek vannak összefoglalva. A szerkesztésből még kiderül, hogy a diamágneses testek elektromos vezetőképessége a molekulák számának 6-dik hatványával arányos, a mágneses testeké pedig ugyan-e hatványnyal fordítva arányos.

E. MERCADIER. «Sur l'intensité des effets téléphoniques.» 96. l.

A. COLLOT. «Appareil de projection lumineuse, applicable aux balances de précision, à l'effet d'obtenir des pesées rapides.» 99. l.

G. A. DAUBRÉE. «Experiences sur les actions mécaniques exercées sur les roches par des gaz à hautes températures, doués de très fortes pressions et animés de mouvements très rapides.» 125. l.

G. SIRE. «Nouvel appareil gyratoire, le gyroscope alternatif.» 155. l.

E. MERCADIER. «Sur la reproduction téléphonique de la parole.» 158. l.

CORNU. «Sur une expérience récente, déterminant la direction de la vibration dans la lumière polarisée.» 186. l. *(Ismertetve.)*

A. DE SAINT-GERMAIN. «Sur le mouvement d'un double cône qui roule sur deux droites.» 215. l.

G. DEFFORGES. «Sur la résistance opposée par l'air au mouvement d'un pendule.» 217. l.

A. POTIER. «Sur le principe d'Huygens.» 220. l.

CH. ED. GUILLAUME. «Théorème relatif au calcul de la résistance d'une dérivation.» 223. l.

H. POINCARÉ. «Sur le développement approché de la fonction perturbatrice.» 269. l.

G. LIPPMANN. «La photographie des couleurs.» 274. l. *(Ismertetve.)*

EDM. BECQUEREL. «Observation relatives à la Communication de M. LIPPMANN.» 275. l. *(Ismertetve.)*

CH. ANTOINE. «Note complémentaire sur l'équation caractéristique des gaz et de vapeurs.» 284. l.

H. POINCARÉ. «Sur l'expérience de M. WIENER.» 325. l. *(Bővebben ismertetjük.)*

M. BERTHELOT. «Remarques relatives à la Communication de M. POINCARÉ.» 329. l.

A. CORNU. «Sur les objections faites à l'interprétation des expériences de M. WIENER.» 365. l.

G. DEFFORGES. «Sur la résistance des divers gaz au mouvement d'un pendule.» 381. l.

A. POTIER. «Remarque à l'occasion de la Note de M. POINCARÉ sur l'expérience de M. WIENER.» 383. l.

MÜLTZER. «Variabilité du nombre de vibrations des notes musicales, selon leurs fonctions.» 386. l.

É. MASCART. «Sur les anneaux colorés.» 407. l.

U. LALA. «Sur la compressibilité des mélanges d'air et d'hydrogène.» 426. l.

MONNORY. «Sur la compression du quartz.» 429. l.

E. CARVALLO. «Position de la vibration lumineuse; système de FRESNEL.» 431. l.

H. POINCARÉ. «Sur la réflexion metallique.» 456. l.

A. IMBERT. «Sur les anches métalliques doubles en dehors.» 483. l.

E. CARVALLO. «Compatibilité des lois de la dispersion et de double réfraction.» 521. l.

G. DECHARME. «Aimantations longitudinales et transversales superposées.» 523. l.

H. POINCARÉ. «Sur l'équilibre des diélectriques fluides dans un champ électrique.» 555. l.

H. BECQUEREL. «Sur les différentes manifestations de la phosphorescence des minéraux sous l'influence de la lumière ou de la chaleur.» 557. l.

L. CAILLETET et E. COLARDEAU. «Sur une nouvelle méthode de détermination des températures et pressions critiques et, en particulier, de celles de l'eau.» 563. l. *(Ismertetjük.)*

A. BERGET. «Méthode graphique pour déterminer les valeurs rélatives de la gravité en différents lieux.» 573. l.

Különböző helyeken egy változatlan, 19·8 kgr. tömegű ingát lenget s lengéseit fotografiai úton számlálja meg. E végett az ingához kis lencse van erősítve, mely egy fénylő pontnak képét fényérzékeny (EASTMANN-féle) papirossal bevont, tengelye körül forgó hengerre veti. Az inga meginditva, 52 órán keresztül képes lengeni; a hengeren egy csillagnap alatt végzett lengései jegyeztetnek fel s ekként a különböző helyekre nézve a *g* relativ értékei meghatározhatók.

MARCEL BRILLOUIN. «Sur le degré de complexité des molecules gazeuses.» 575. l.

J. WERSCHAFFELT. «Des déformations que présente après l'imbibition un système formé par la superposition de deux lames hygroscopiques, minces et homogènes, à proprietés différentes.» 610. l.

G. SIRE. «Nouvel appareil gyroscopique.» 638. l.

A. GAILLOT. «Sur les variations observées de la latitude d'un même lieu.» 651. l.

P. DUHEM. «Sur les pressions à l'intérieur des milieux magnétiques ou diélectriques.» 657. l.

E. SARASIN et L. DE LA RIVE. «Propagation de l'ondulation électrique hertzienne dans l'air.» 658. l. *(Ismertetjük.)*

L. CAILLETET. «Description du manomètre à air libre de 300$^{m}$ établi à la tour Eiffel.» 764. l. *(Ismertetjük.)*

H. PELLAT. «Rapport entre l'unité électromagnétique et l'unité électrostatique d'électricité.» 783. l.

B. C. DAMIEN. «Sur la variation du point de fusion avec la pression.» 785. l.

## Philosophical Magazine.

Vol. 31.

J. H. GLADSTONE. «The refraction and dispersion of fluorbenzene and allied compounds». (1—9. l.)

W. ELLIS. «On the diurnal variation of magnetic elements, as depending on the Method of Tabulation». (36. l.)

J. H. GLADSTONE and W. HIBBERT. «Notes on secondary batteries». (42. l.)

C. W. BOYS, A. BRISCOE and W. WATSON. «On the measurement of electromagnetic radiation». (44. l.) *(A HERTZ-féle kisérletekkel kapcsolatban ismertetjük.)*

FRED. SMITH. «The measurement of the time of the fall of magnetization in a magnetized iron cylinder». (64. l.)

ARTH. SCHUSTER. «The Elementary treatment of problems on the Diffraction of light». (77. l.)

LORD RAYLEIGH. «On pin-hole photography». (87. l.)

TOLVER PRESTON. «The problem of the behaviour of the magnetic field about revolving magnet». (100. l.)

J. SWINBURNE. «Alternate current-condensers». (102. l.)

SILVANUS THOMPSON. «On the use of fluorspar in optical instruments». (120. l.)

A színtelen fluórpát kis törésmutatója (1,435) és gyenge fényszóró képessége folytán $n_F - n_C = 0{,}00455$) igen alkalmasnak bizonyult achromatikus objectiv lencsék készítésére. A híres Zeiss-féle objectivekben crownüveg helyett fluórpát lencse van. Gyenge lévén a hőnyelése, a sugárzó hőre vonatkozó kisérletekben kősó helyett használható.

NICHOLS. «On the alternating electric arc between a ball and point». (123. l.)

J. J. THOMSON. «Conductivity of hot gases». (135. l.)

SHELFORD BIDWELL. «A lecture experiment illustrating the effect of heat upon the magnetic surceptibility of nickel». (136. l.)

J. J. THOMSON. «On the illustration of the properties of the electric field by means of tubes of electrostatic induction». (149. l.)

H. LAMB. On the flexure of a flat elastic spring». (182. l.)

EDW. ROSA. «Specific inductive capacity of electrolytes.» (188. l.)

G. MINCHIN. «Experiments in photoelectricity.» (207. l.)

CAREY LEA. «On gold-coloured allotropic silver.» (238. l.)

SHELFORD BIDWELL. «Some experiment with seleniuim-cell.» (250. l.)

MICHELSON. «Visibility of interference-fringes in the focus of a telescope.» (256. l.)

MC COVAN. «On the heating of conductors by electric currents, and on the electric distribution in conductors so heated.» (259.)

ARTH. SCHUSTER. «The influence of the bending of magnetic needles on the apparent magnetic dip.» (275. l.)

T. H. BLAKESLEY. «The solution of a geometrical problem in magnetism.» (281. l.)

R. SISSINGH. «On Karr's magneto-optic phenomenon in the case of equatorial magnetization of iron.» (293. l.)

J. CONROY. «On the change in the absorptionspectrum of cobalt glass produced by heat.» (317. l.)

C. LEA. «On altotropic silver.» (320. l.)

A. ANDERSON. «On Cœfficients of induction.» (329. l.)

A. MICHELSON. «On the application of interference-methods to spectroscopic measurements.» (338. l.)

T. H. BLAKESLEY. «Further Contributions to dynamometry, or the measurement of power.» (346. l.)

W. E. AYRTON and J. F. TAYLOR. «Proof of generality of certain formulae published for a special case by Mr. BLAKESLEY.» (**346**. l.)

W. N. HARTLEY. «On relations between the lines of various spectra.» (359. l.)

# Annalen der Physik und Chemie.

XLII (1891).

## I. FÜZET.

G. Hüfner u. E. Albrecht. «Ueber die Durchlässigkeit des Wassers für Licht verschiedener Wellenlänge.» 1. l.

S. Arrhenius. «Ueber die Leitung der Electricität durch heisse Salzdämpfe.» 18. l.

K. R. Koch. «Ueber eine Veränderung, welche die Oberflächen der Elektroden durch die Polarisation erfahren und über die Occlusion der Gase.» 77. l.

J. Bergmann. «Die Inductionswage in Verbindung mit Disjunctor und Galvanometer.» 90. l.

J. Lévay. «Verhältniss der Stromarbeit zur chemischen Energie bei galvanischen Elementen.» 103. l. *(Több ugyanerre a tárgyra vonatkozó dolgozattal együtt ismertetésre kerül.)*

R. Sissingh. «Ueber das Kerr'sche magneto-optische Phänomen bei æquatorialer Magnetisirung an Eisen.» 115. l.

E. Lecher. «Ueber die Messung der Dielectricitätsconstante mittelst Hertz'scher Schwingungen.» 142. l. *(Ismertetjük.)*

H. Rubens. «Ueber stehende electrische Wellen in Drähten und deren Messung.» 154. l. *(Ismertetjük.)*

A. Elsass. «Ueber Widerstandsmessungen mit dem Differentialinductor.» 165. l.

L. Natanson. «Thermodynamische Bemerkungen.» 178. l.

P. Drude. «Bestimmung der optischen Constanten des Kobalts.» 186. l.

K. Prytz. «Intermittirende Quecksilberfallluftpumpe.» 191. l.

## II. FÜZET.

A. Oberbeck. «Ueber das Verhalten dünner Niederschlagsschichten gegen den electrischen Strom.» 193. l.

A. Oberbeck u. J. Edler. «Ueber die electromotorischen Kräfte galvanischer Ketten.» 209. l.

G. Wiedemann. «Ueber die Bestimmung des Ohm.» 227. l. *(A kérdést bővebben ismertetjük.)*

W. v. Siemens. «Ueber das allgemeine Windsystem der Erde.» 257. l.

J. Stefan. «Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere.» 269. l.

H. Brückner. «Ueber innere Reibung von Salzlösungen.» 287. l.

H. Kayser. «Ueber den Ursprung des Banden- und Linienspectrums.» 310. l.

S. Czapski. «Ueber die Doppelbrechung schnell gekühlter Glasplatten.» 319. l.

S. Czapski. «Zur Frage nach der Richtung der Brennlinien in unendlich dünnen optischen Büscheln.» 332. l.

A. Appunn. «Ueber Combinationstöne und Summationstöne.» 338. l.

Carlo Del Lungo. «Ueber den Druck und das specifische Volumen der gesättigten Dämpfe.» 344. l.

M. Margules. «Bemerkungen zu Herrn Galitzine's Abhandlung ‚Ueber das Dalton'sche Gesetz'.» 348. l.

Gg. H. Zahn. «Ueber die Widerstandsmessung des Wismuths mit constantem und oscillirendem Strom.» 351. l.

III. FÜZET.

W. König. «Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen.» 353. l.

J. L. Acworth. «Beziehung zwischen Absorption und Empfindlichkeit sensibilisirter Platten.» 371. l.

H. Hertz. «Ueber die mechanischen Wirkungen electrischer Drahtwellen.» 407. l. *(Ismertetjük.)*

J. Klemenčič. «Ueber die Untersuchung electrischer Schwingungen mit Thermoelementen.» 416. l. *(Ismertetjük.)*

G. Wiedumann. «Ueber die Bestimmung des Ohm.» 425. l.

F. Braun. «Beobachtungen über Electrolyse.» 450. l.

E. Riecke. «Ueber electrische Ladung durch gleitende Reibung.» 465. l.

E. Riecke. «Das thermische Potential für verdünnte Lösungen.» 483. l.

A. Oberbeck. «Ueber die Messung starker Ströme mit Hilfe des Spiegelgalvanometers.» 502. l.

B. Walter. «Eine charakteristische Absorptionserscheinung des Diamanten.» 505. l.

B. Walter. «Ueber das $\alpha$-Bromnaphtalin.» 511. l.

C. Dietrici. «Calorimetrische Untersuchungen.» 513. l.

P. Drude u. W. Voigt. «Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger dichter Mineralien.» 537. l.

W. König. «Hydrodynamisch-Akustische Untersuchungen.» 549. l.

P. Drude u. W. Nernst. «Einfluss der Temperatur und des Aggregatzustandes auf das Verhalten des Wismuths im Magnetfelde.» 568. l.

L. Arons u. H. Rubens. «Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit electrischer Wellen in isolirenden Flüssigkeiten.» 583. l. *(Ismertetjük.)*

M. Wien. «Das Telephon als optischer Apparat zur Strommessung.» 593. l.

G. Stern. «Ueber mikrophonische Tonstärkemessung.»

J. Mooser. «Ueber die durch Zerstäuben der Kathode erhaltenen Metallschichten.» 639. l.

K. Olszewski. «Ueber das Absorptionsspectrum und über die Farbe des flüssigen Sauerstoffs.» 663. l.

Folyósított oxygén, mintegy —180° hőmérsékleten tartva, hosszabb időn keresztül folyós állapotban marad meg, nyitott edényben. Absorptio-vonalai nagyjában megegyeznek az erősen összenyomott gázalakú oxygén vonalaival. Színe határozottan *kékes*. Olszewski az ég kék színét a atmosphærában levő oxygénnek tulajdonítja.

P. Drude. «Ueber die Brechung des Lichtes durch Metallprismen.» 666. l. *(A fémek fénytörését bővebben ismertetjük.)*

G. J. Michaëlis. «Ueber die Moleculartheorie der Electricität fester Körper.» 674. l.

## Könyvismertetés.

**Dr. A. Winkelmann, Handbuch der Physik.** I. Band, Breslau, Trewendt 1891 (II és 878 oldal), ára 23 márka.

Számos mű jelenik meg évről-évre a könyvpiaczon, mely a physika egyik vagy másik ágával foglalkozik. Az egész tudomány fejlődésmenete úgy hozza magával, hogy az elektromosságnak jut ki az oroszlánrész a sajtó alól kikerülő új physikai művek sorában. Ezen számos speciális munka mellett feltünő csekély a teljes kézikönyvek száma, oly könyveké, melyek a physika jelenlegi állapotának teljes képét adják.

A Winkelmann-tól szerkesztett physikai kézikönyv a *Trewendt*-nél Boroszlóban megjelenő «Encyclopædie der Naturwissenschaften» czímű műnek képezi egyik osztályát. Eredettől fogva a fejezeteknek betű-rendben való egybeállítása volt tervben, de ettől a kiadó eltért, minthogy szerfelett sok czikk kivántatott volna, hogy az egyes fogalmakat mind külön és könynyen felkereshető módon a műbe beillleszthesse, továbbá azért is, minthogy számos helyen ismétlés, és a rokon tárgyaknak széthányatása el nem kerülhető lett volna, miről meggyőződünk, ha a Gehler-féle — ha megjelenés idejét tekintetbe veszszük — sok tekintetben igen érdemes physikai encyclopædiát megnézzük.

Az eddig megjelent, előttünk fekvő első kötet két főfejezetből áll: az első az általános és különleges mechanikát foglalja magában, a második az akustikát. Az első fejezetben levő czikkek írója — csekély kivétellel — Auerbach, az akustikai fejezetek mind Melde tollából származnak.

A kötet első fejezetében a következő czikkek foglaltatnak: A physikai alapfogalmak és a szükséges mérések, azután következik az absolut mértékrendszer. A tulajdonképeni mechanika a merev testek mechanikájával kezdődik, mely fejezetben a szerző (Auerbach) a mechanikának következő 16 alapelvét sorolja fel: A tehetetlenség-, az erő-, a tömeg- és a függetlenség principiuma, mely az erőparallelogramm tételével szoros kapcsolatban áll, az actio és reactio, az emeltyű, a virtuális elmozdulások, az eleven erő, a súlypont mozgásának, a felületek, a legkisebb actio (Maupertius), a legkisebb kényszer (Gauss), a d'Alembert-féle, a Hamilton-féle és az energia megmaradásának principiuma. Ezek után következik a statika, a dynamika és néhány külön problema, ú. m. az egyszerű gépek, az esés és hajítás, a mérleg és mérlegelés, a sűrűségmeghatározás módjai, az inga, a gyrotrop és a præcessionális mozgás, az általános gravitatio.

Az általános mechanikára vonatkozó eme fejezetek után következik a különleges mechanika s erre vonatkozólag a következő fejezeteket találjuk: a halmazállapotokról, a rugalmasságról, ütközésről, szilárdságról és keménységről. Azután következik a hydrostatika és hydrodynamika, a capillaritás tanának Braun-tól való meglehetős beható tárgyalása. Ezt követi a Boyle-Mariotte-féle törvény, az aëromechanika, a surlódás, diffusio és absorptio. A Melde-től dolgozott akustika az általános hullámtannal veszi kezdetét, ezt követi a hangzó testek haránt- és hosszrezgése és a hangok együtthangzása.

Ebben a czikkben szerző a combinatiohangokra vonatkozó, mintaszerű kutatást tárgyalja, melyben a hangtani készülékek hires párisi készítője König Rudolf kimutatja, hogy Helmholtz-nak ezen hangokra nézve felállított elmélete tarthatatlan. Ugyanebben az alfejezetben Melde a hangok együtthangzására vonatkozó főbb tényeket és nézeteket pontozatok szerint rendezve összeállítja. Eme pontok között kiemelendőnek csupán csak a consonantiára és dissonantiára vonatkozó nézetét tartjuk, mely a Helmholtz-féle ismeretes összhangzási elmélettel ellenkezik, a mennyiben Melde meggyőződése szerint a consonantia vagy dissonantia esetében csak a két hang maga jön tekintetbe, nem pedig valamely harmadik hang, legyen ez felhang vagy combinatióhang vagy lökések összeolvadásából keletkezett hang.

Az akustika fejezetének végén a hangterjedés sebessége, a vibroskopia és vibrographia következik.

Egészben véve az akustika a könyvnek gyengébb részét képezi. Melde az akustika egyik irányának szorgalmas művelője, de egész kutatásának iránya mindig csak bizonyos csapáson mozog. Nézetünk szerint nem engedhető meg, hogy egy physikai kézikönyvből a szigorú physikai akustika mellett a physiologiai és a zenei része az akustikának teljesen hiányozzék: az a rész t. i., mely a hangérzetekkel foglalkozik.

A mi a könyv tárgyalás modorát illeti, az egyes tételeknek mathematikai levezetése szigorú alakban és a mellett rendesen még elemi módon is található, a kisérleti eredmények csak röviden adatnak elő, a kisérleti vizsgálatok és a bennök használt eszközök bővebb leirása szintén mellőzve van. Ekképen a mű a közkézen forgó physikai kézikönyvektől és encyclopædiáktól lényegesen különbözik, minthogy ezekben az elméleti rész rendesen háttérbe szorul, vagy teljesen hasznavehetetlen. Annyiban jelen mű az annyira elterjedt, számos átdolgozó kézen átment Pouillet-féle és Jamin-féle könyvtől előnyösen különbözik.

Véleményünket a Winkelmann-tól szerkesztett physikai kézikönyv első kötetéről összefoglalva, mindenesetre oly műnek tartjuk, mely physikai kézikönyvek gyűjteményéből nem hiányozhatik, mivel az elterjedt hasonló irányú könyvekhez képest sok tekintetben tetemes haladást jelent. A mű berendezése, mely a rokon fejezeteknek egymás mellé sorolásából áll, s ekként úgy a lexicologicus valamint a systematicus alak között mintegy a közepet foglalja el, legfeljebb a mű architekturájának árt, mely végre is nagy részben csakis izlés dolga. Az egész mű becséről természetesen most még nem is mondhatunk biztos véleményt; az előttünk fekvő első kötet azonban mégis bizonyos reményekre jogosít, noha még nem tudhatjuk, hogy a többi munkatársak miként fognak feladatuknak megfelelni. Ezek után a szóban forgó művet szaktársaink figyelmébe ajánljuk, minthogy sok olyant találnak benne jól érthető módon előadva, a mi a különböző folyóiratokban, vagy egyes művekben szétszórva, még pedig gyakran nem is oly könnyen olvasható módon előfordul.

*Heller Ágost.*

*

**H. Poincaré, Théorie mathematique de la Lumière.** Leçons professées pendant le premier semestre 1887—1888 par H. Poincaré, Membre de l'Institut. Redigées par J. Blondin, licencié ès sciences. — Paris 1889. 8°, IV + 408 l. Ára 16 frc. 50 c.

A franczia tudományos physikai irodalom fejlődése az utolsó két évtized alatt érdekes képet mutat. Míg 1870-ig még a legelső franczia tudósok és és írók búvárlataiknál és irodalmi munkásságuknál majdnem kizárólagosan a franczia földön termett eredményeket vették csak figyelembe, most azon komoly törekvés félreismerhetetlen jeleit látjuk, melynek czélja az angol és német búvárok nagyfontosságú vívmányait franczia talajba ültetni s az ottani rendszeres, de némi tekintetben egyoldalú tudományos fejlődéssel összeforrasztani. Elegendő annak felemlítése, hogy a potentiál-elmélet újabb részleteinek s az elektromos egységek ismerete Németországban s különösen Angolhonban már általános volt, mikor a franczia könyvirodalomba felvenni kezdték. De a franczia nemzet, kifogyhatatlan szellemi rugékonyságával, csakhamar sietett e mulasztást pótolni; a legjelentékenyebb angol és német ily irányú munkáknak franczia nyelvre fordítása, valamint az elsőrangú idegen physikusok nagyobb szabású elméleteinek s a velük kapcsolatos kísérletsorozatoknak önálló feldolgozása e tudományos assimiláló folyamatnak kétségtelen nyilvánulásai.

De nemcsak az irodalomban : a felső oktatásban is jelentkezik e törekvés, sőt itt, különösen a párisi egyetem mathematikai-természettudományi karánál (Faculté des Sciences) még az a szerencsés, sőt irígylendőnek mondható körülmény járúl hozzá, hogy tanárai oly magas készültségű hallgatóság előtt tarthatják előadásaikat, miszerint bátran bocsátkozhatnak a legnehezebb problémák tárgyalásába s hogy e hallgatók a hallott előadásoknak a kiadás czéljára való szerkesztésére képesek.

Így keletkezett a párisi «Faculté des Sciences» «tanítványainak és volt tanítványainak baráti szövetkezete», mely az e karon hallgatott előadásokat tanáraik beleegyezésével és közreműködésével kiadja.

Egyik vállalata a «Cours de physique mathématique», melynek első kötete a czímben nevezett fényelmélet.

Poincaré a modern mathematikusok egyik legtevékenyebbike és legtehetségesebbike; kísérleti vizsgálódásokkal ugyan nem foglalkozott s az elméleti physika felé, úgy látszik, csak az utolsó években fordúlt; annyival érdekesebb a physikusra nézve, hogyan fogja fel a jeles mathematikus az elméleti optika rendszerét fejlődésének jelen stádiumában s mily eszközökkel véli e rendszert megállapítandónak.

Legjobb felvilágosítást nyújt erre nézve a szerző maga könyvének előszavában, melyet itt értelemhíven közlünk:

«Az optika a physika legelőrehaladottabb része; az undulatió-elmélet oly egészet képez, mely az emberi elmét valóban kielégíti, de nem szabad tőle olyat is kívánni, mit meg nem adhat. A mathematikai elméleteknek nem feladatuk a jelenségek valódi okának a leleplezése; ez helytelen követelés volna. Egyedüli czéljuk a kísérletből nyert azon physikai törvények egymáshoz fűzése, melyeket a mathematika segítsége nélkül alig bírnánk kifejezni.

Csekély fontosságot tulajdonítunk annak, vajjon az æther tényleg létezik-e, vagy nem; ez a metaphysikusok dolga. Lényeges reánk nézve az, hogy minden aképen történik, mintha létezne és hogy ezen hypothesis a jelenségek magyarázatára alkalmas. Hiszen, van-e egyéb okunk az anyagi tárgyak létezését hinni? Ez sem más, mint kényelmes hypothesis, csakhogy ez mindig fog fennállani, míg kétségtelenül eljő majd a nap, melyen az æther hypothesisét mint hasznavehetetlent el fogjuk vetni. De ekkor az optika törvényei s az azokat kifejező egyenletek még mindig helyesek maradnak, legalább mint első közelítés; ezért mindig hasznos leend oly tan, mely ezen tapasztalati törvények között mindezeket az egyenleteket állapítja meg.

A fényjelenségeknek rezgések alapján való magyarázatára szolgáló elméletek igen számosak és egyformán plausibilisek (valószínűk). Veszedelmes volna ezeknek csak egyikére szorítkoznunk, mert így saját kárunkra egy vak s azért téves meggyőződés érlelésének vagyunk kitéve. Kívánatos valamennyit tanulmányozni és mindenek felett az összehasonlításuk tanulságos. Ámde sajnos, hogy megismerésük csak számos eredeti, gyakran nehezen hozzáférhető s nagy fáradsággal olvasható értekezések révén lehetséges. Átmenve az egyikről a másikra, minden változik: a jelölés, a gondolkodás- és a kifejezés módja s a közvetlen összehasonlítás majdnem lehetetlen.

Ezért nem tartottam fölösleges dolognak, e különböző tanokat egy kisebb kötetben s egy általános táblázatban egyesíteni s azokat az előadásokat, melyeket az 1887—88. tanévben a Sorbonne-on tartottam, közrebocsátani. Nagy köszönettel tartozom Blondin úrnak, ki feladatomat ezen előadások összeállítása és szerkesztése által lehetővé tette.

A ki e könyvet haszonnal akarja olvasni, az legalább nagyjában ismerje a physikai optika kísérleti törvényeit. Nem karolhattam volna fel egyetlen egy félévben ily nagy anyaghalmazt s jövőben sem tehetném, ha nem tudnám, hogy hallgatóim (nagyobbrészt a physikai tudományokból képesített tanárjelöltek) ezeket a törvényeket ismerik. Az undulatiók elmélete egy molekuláris hypothesisen alapszik; ez azokra nézve, kik a törvény alatt még a jelenségek okát is vélik felfedezhetni, előnynek látszik, másokra nézve pedig ok a bizalmatlanságra; de e bizalmatlanság ép oly kevéssé jogosult, mint az elsők illusiói. Ily hypothesisek csak másodrendű szereppel bírnak; az egyedüli ok, mely ezek feláldozásától visszatartott, az volt, hogy ez által a tárgyalás átlátszósága szenvedett volna.

A molekuláris hypothesisekkel csak két feltevést kapcsolok össze: az erély megmaradása elvét és a kicsiny mozgások (mint minden kicsiny változások) általános törvényét kifejező egyenletek *linearis* alakját.

Ez magyarázza meg azt a körülményt is, hogy Fresnel következtetéseinek legnagyobb része még közvetetlenül érvényben marad, ha Maxwell elektromágnesi fényelméletét elfogadjuk. E kötetben ezen elméletről nem szólok, hanem fentartom részletes kifejtését egy műben, melyben e tanév második felében tartandó előadásaimat fogom közrebocsátani.

Czélszerűnek találtam, hogy e jelen kötetben Fresnel eszméinek alapos kifejtését adjam; ez látszott a legalkalmasabb előkészülésnek J. C. Maxwell gondolatának tanulmányozására.

Végre még egy szót. A diffractióra vonatkozó fejezetben oly eszméket fejtettem ki, melyeket újaknak tartok. Nem neveztem Kirchhoff-ot, kinek nevét minden sorban kellett volna idéznem. De van még idő ezen akaratlan mulasztás pótlására; sietek ezt itt avval jóvá tenni, hogy Kirchhoff-nak erre vonatkozó értekezésére utalok (*Sitzungsberichte der k. pr. Akad. d. W. zu Berlin*, 1882, II, 641 l.).»

Legyen szabad itt az utóbbi észrevételre nézve egy megjegyzést közbeszúrnom. A diffractió elméletének elemeiből ismeretes, hogy FRESNEL és SCHWERD elméleti eljárásai az elhajlott fény *intensitását helyesen*, de *phasisát helytelenül* adják meg. Az elmélet tökéletesítésén többek között KIRCHHOFF is fáradozott, s ő volt az első, kinek törekvéseit teljes siker koronázta (v. ö. az i. h.). E sorok írója, ki az 1875/76. tanév téli szakában KIRCHHOFF-tól az elméleti optikáról tartott nagyobb szabású collegiumot hallgatott, a részletesen kidolgozott (vaskos kötetté növekedett) előadási füzetében a diffractió általános elméletét igen hosszadalmasnak és nehézkesnek találta s egy, az 1884. év tavaszán KIRCHHOFF-fal folytatott beszélgetés közben e körülményt szóba is hozta, hangsúlyozva, mennyivel rövidebb és átlátszóbb a tárgyalás és bizonyítás menete az idézett értekezésben. Erre KIRCHHOFF mosolyogva így felelt: «Igaz, sok esztendőn keresztül kínoztam magamat és tanítványaimat e hosszadalmas kifejtéssel; de akkor jobbat nem ismertem s a legjobbat adtam; most már sikerült a szigorúságot a rövidséggel egyesítenem.»

A könyv czélját elötüntető ezen bevezetés után tartalmának rövid vázát adjuk:

Bevezetés. — I. Fejezet: Kis mozgások rugalmas közegekben. — II. Fejezet: Sík hullám tovább terjedése. Interferentiák. — III. Fejezet: HUYGHENS elve. — IV. Fejezet: Diffractió (fényelhajlás). — V. Fejezet: Forgató (rotátiós) polározás. — Színszóródás. — VI. Fejezet: Kettős törés (FRESNEL elmélete, CAUCHY elmélete, NEUMANN elmélete, SARRAU elmélete, BOUSSINESQ elmélete.) Hullámfelület. — A fény egyenes vonalú terjedése isotrop és anisotrop közegekben. — Kettős törés a hemiedrikus kristályokban. — VII. Fejezet: Reflexió. — Visszaverődés átlátszó isotrop-közegekről (FRESNEL, NEUMANN és MAC-CULLAGH, CAUCHY elméletei). — Visszaverődés jegeczes testekről (MAC-CULLAGH, SARRAU elméletei). — Fémes reflexió, CAUCHY elmélete. — VIII. Fejezet: A csillagászati aberrátió.

Valóban nagy terjedelmű anyag rövid 400 oldalon! Könnyen érthető ebből, a mit a szakférfiú egyébiránt azonnal észrevesz, hogy a felölelt anyag nem tükrözi vissza teljesen a fényelmélet jelen állását; itt elegendő talán KIRCHHOFF-nak a kristályos visszaverődésre vonatkozó 1876-ban megjelent, általános elvi szempontokból is igen fontos értekezésének, valamint az utolsó 15 évben az elhajlott fény polározására vonatkozó vizsgálatoknak tekinteten kívül hagyására utalni.

Kissé ósdiasnak látszik továbbá az első fejezetben a rugalmas közegek rezgési egyenleteinek CAUCHY eljárása szerinti leszármaztatása; a modern rugalmassági elmélet épen oly szigorú, de sokkal átlátszóbb és elegánsabb módszerekkel rendelkezik.

De ne bírálgassuk tovább a könyvet; már úgyis túlléptük a könyvismertetés szokásos határait. Fejezzük be e sorokat azon megjegyzéssel, hogy a tapasztalt szakférfiú a könyvet haszonnal és élvezettel fogja olvasni s vele sok utánjárást fog megkímélni; de a kezdő, ki a fényelmélet elemeivel még nem ismerkedett meg, csak nagy fáradozások árán fog e könyv értelmébe behatolhatni.

Sokkal jobb szolgálatot fog neki tenni MASCART derék franczia physikusnak most, de még nem teljesen megjelent két kötetes optikája, melynek ismertetését talán e lapok egyik következő száma fogja hozhatni s talán POINCARÉ-nek az «optika és elektromosság» czímű, épen most megjelent két kötetes munkájáét is, mely az itt ismertetett munka folytatását képezi.

*Fröhlich I.*

## FELADATOK.

1. Bebizonyítandó, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\binom{\alpha}{n} = 1 - \frac{1}{2}\binom{\alpha}{1} + \frac{1}{3}\binom{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\binom{\alpha}{3} + \dots$$

sor összetartó, ha $\alpha > -1$, és hogy összege ekkor $\frac{1}{1+\alpha}$

(Kőnig.)

2. Mekkora ingadozást létesíthet a függőn irányulásában egy nagy folyónak, pl. a Dunának áradása és apadása?

(b. Eötvös.)

3. Változtassuk 31-nek reciprok értékét tizedes törtté s az egymásra következő maradékok sorát, mely a következő 15 tagból áll:

1, 10, 7, 8, 18, 25, 2, 20, 14, 16, 5, 19, 4, 9, 28

írjuk hármával öt sorba, vagy ötével három sorba

| | | |
|---|---|---|
| 1, | 10, | 7 |
| 8, | 18, | 25 |
| 2, | 20, | 14 |
| 16, | 5, | 19 |
| 4, | 9, | 28 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1, | 10, | 7, | 8, | 18 |
| 25, | 2, | 20, | 14, | 16 |
| 5, | 19, | 4, | 9, | 8 |

azt találjuk, hogy az egyes oszlopokban álló számok összege mindig osztható 31-gyel.

Bizonyítassék be általában, hogy ha az

$$\frac{a^0}{p}, \frac{a^1}{p}, \frac{a^2}{p}, \frac{a^3}{p}, \dots$$

osztásokból származó maradékok sora (hol $p$ törzsszám, $a$ pedig $p$-vel viszonylagos törzsszám) $mn$ tagból áll s $m$-ével $n$ sorba, vagy pedig $n$-ével $m$

sorba iratik, az egyes oszlopokban álló számok összege mindig osztható $p$-vel.

(SZILY.)

4. Bizonyítassék be, hogy az

$$\frac{5^0}{p}, \frac{5^1}{p}, \frac{5^2}{p}, \frac{5^3}{p}, \ldots$$

osztásokból származó maradékok sora (hol $p$ törzsszámot jelent) csak is akkor állhat számra nézve $(p-1)$ különböző tagból, ha $p = 10n \pm 3$ alakú.

(SZILY.)

5. Adva van az $A_1A_2A_3$ háromszög és a háromszög síkjában a $P$ pont. Az $A_1P$ metszéspontja az $A_2A_3$ oldallal legyen $B_1$, az $A_2P$-é az $A_3A_1$ oldallal $B_2$, az $A_3P$-é az $A_1A_2$ oldallal $B_3$.

Megvizsgálandó azon $P$ pontok geometria helye, a melyekre nézve a $B_1B_2B_3$ háromszög területe állandó.

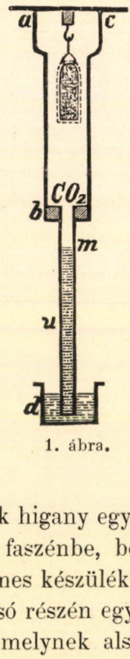
(TŐTÖSSY.)

6. Valahol a síkon rajzban meg van adva egy kör és annak a középpontja. Egy második körnek meg van adva három pontja. Tisztán vonalzó segítségével döntendő el vajon e második körnek egy adott egyenessel vannak-e valós metszéspontjai, és ha igen, ezek ismét tisztán vonalzó segítségével meg is szerkesztendők.

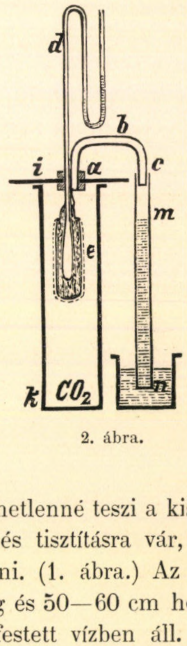
(RADOS.)

# PHYSIKAI LABORATORIUM.

**1. A szénsav elnyeletése faszén által.** Eltekintve a Bunsen-féle absorptio metertől, melynek értéke 80—100 frt, a szénsavnak faszén által való elnyeletését úgy a vegytanban, mint a physikában a higany segítségével eszközöljük, mely kisérlethez legalább is 5—6 kgr. higany szükséges. Mint-




1. ábra.




2. ábra.

hogy pedig a sok higany egyrészt kényelmetlenné teszi a kisérletet és másrészt behatol a faszénbe, bepiszkolódik és tisztításra vár, igyekeztem egy olcsó és kényelmes készüléket összeállítani. (1. ábra.) Az **ab** üveghenger (lámpaüveg) alsó részén egy újjnyi vastag és 50—60 cm hosszú **u** üvegcső van beillesztve, melynek alsó vége megfestett vízben áll. Az üveghenger felső karimáját faggyúval vastagon bekenjük és megtöltvén szénsavval, abba az ezen czélra előkészített faszenet, mely az **ac** üveglemezre pecsétviaszszal odaragasztott parafadugón drótkosárkában függ, egyszerűen besülyesztjük. Ha most az **ac** üveglemezt lenyomjuk és gondoskodunk arról, hogy a készülékbe kívülről levegő be ne hatoljon, akkor a **d** edényből a megfestett folyadék gyorsan emelkedni fog, jeléül annak, hogy az üveghengerben légritkított tér keletkezett, azaz a szénsavnak nagy része elnyeletett. Ha a megfestett folyadék **m** pontig fölemelkedett, akkor az üveglemeznek fölemelésével kevés levegőt kell bocsátani a készülékbe, különben megesik, hogy a megfestett víz egészen a faszénig hatol fel és fölösleges tisztítási munkát okoz.

A drótkosárkát egy darabka fémszitarostból könnyen előállíthajuk, ha ez utóbbit a kellő vastagsagú üvegcsőre göngyölítjük, aztán sárgaréz dróttal nehányszor körülkötve, alsó karimáját úgy hajtjuk befelé, hogy a kosárkának fenekét képezze. Végül a kosárkára dróthorgot illesztünk és megtöltjük annyi faszénnel (darabokban), a mennyi csak belefér. A faszén aztán állandóan a kosárkában maradhat, de minden kisérlet előtt egy órával gyönge izzásba hozandó. Azonban a készüléknek nagy érzékenysége a fris faszénnek izzítását fölöslegessé teszi.

**2. A szénsav elnyeletésénél kifejlődő hőnek kimutatása.** Hogy kimutassuk, miszerint a szénsavnak a faszén által való elnyeletésénél tetemes hő is fejlődik, az előbbi fejezetben leírt készüléket módosítanunk kell. (5. ábra.) Mindenek előtt szükségünk van olyan üveg- vagy fémkorongra, mely közepén át van lyukasztva. Ha ilyen korong nem áll rendelkezésünkre, akkor úgy járunk el legczélszerűbben, hogy gipszből mintát csinálunk s abba ólmot öntünk. Az így elkészített korongnak alsó részét azután kissé lecsiszoljuk és a közepébe oly parafadugót illesztünk be légmentesen, melyen keresztül a legalább is egy újjnyi vastag **abc** szivornya és **de** léghőmérő vezet. A parafadugó alsó részén van még egy kis horog a szénnel telt kosárka számára, mely utóbbiban a hőmérő gömbje egyszerűen a széndarabok közé van téve. Az egész készülék magassága 50 centiméter és így nagy hallgatóság is könnyen észlelheti.

Különösen kiemelendő, hogy a készülék, bár kissé összetett, rendkívül kényelmes és szemléltető.

A kisérletezésnél ugyan az az eljárás követendő, mely az előbbi kisérletnél le volt írva. *Antolik.*

*

**Hangtani kisérletek.** 1. Annak megmutatására, hogy a hang az üres térben nem terjed vagy a légszivattyú alá helyezett csengető művet, vagy egyszerűbben üveggolyóban hangszigetelően felfüggesztett csengetyűt szoktunk használni. A csengető műhöz tudvalevőleg légzáró fémtolókával ellátott külön harang szükséges, melynek rendesen az a baja, hogy légzárása nem tökéletes. A szükség megtanított arra, hogyan lehet ezt a kisérletet külön e czélra készített készülék nélkül is végrehajtani: csak légszivattyú, közönséges elektromos csengő és kevés vékony stanniol-lemez kell hozzá. Berendezése a következő: Az elektromos csengőt, lehetőleg hangszigetelően (azaz lágy, posztó vagy kaucsuk lábakon) a légszivattyú tányérjára állítjuk. A felállítás módja a harang és a csengő alakjától és nagyságától függ; ha a harang lapos, akkor a csengő lefektethető, ha pedig magas, függőlegesen állítható, vagy rámában felfüggeszthető. Kiki tudja, hogy a kisérlet annál gyorsabb lefolyású, mennél kevesebb levegőt kell kiszivattyúzni, azaz mentől kisebb a harang. Az áram a csengő elektromágnesébe a következő módon vezethető be: A légszivattyú üvegtányérját síma stanniol-lemezzel borítjuk le s a lemezt a tányér nyílása fölött szélesen kivágjuk; a csengő drótszorítóiba vékony stanniol-szalagocskákat erősítve, az egyiket a tányért borító lemezzel, a másikat pedig a tányér nyílásán keresztül a légszivattyú fémtestével hozzuk vezető érintkezésbe, jól vigyázva arra, hogy a fémfelület a rajta levő piszoktól megszabadíttassék, különben nem biztos a vezetés. A telepből jövő áramvezetők egyikét a tányért borító lemezzel, a másikat pedig a tányérral érintkeztetve, a csengő megszólal. A kisérletnél fontos, hogy a tányér s a harang jól meg legyenek faggyúzva. Egyszerűbben vezetheti az áramot a harang alá az, a ki a légszivattyú tányérját lágy kaucsuk-lappal szokta leborítani. Ez esetben a csengő drótszorítóiba hosszabb, mintegy araszinyi stanniol-szalagokat lehet befogni s ezeket a kaucsuk-lapra ráfektetve a haranggal leborítani. (Stanniol-lemez híján igen vékony fémdrót is használható e czélra.) A míg a kisérletet meg nem tettem, attól tartottam, hogy a stanniol-szalag mellett kis üres csatornák támadnak, melyeken keresztül a levegő állandóan beáramolhat. A tapasztalat eloszlatta aggályaimat: a harang kitünően, légzáróan feküdt rá a kaucsuk-lapra, kivált ha alja ez esetben is jól be lett faggyúzva. — Legegyszerűbb az áram bevezetése a fúrattal ellátott harang alá. Ilyen harang különben is hasznos fölszerelési tárgy: sok más kisérletnél is kitünően hasznavehető. A fúratba légzárón illő dugón keresztül két drótot tolunk át s a csengő drótszorítóitól jövő stanniol-szalagokat vagy vékony drótokat ezekkel érintkeztetjük. — A kisérlet legczélszerűbben úgy hajtható végre, hogy az elektromos csengőt hangzásba hozzuk s csak azután indítjuk meg a szivattyúzást: a csengő hangja folyton gyengül s teljesen elnémul, ha az üres tér tökéletes. A levegőt bebocsátva, a hang fokozatoson erősödik. A jó hangszigetelő felállítás — épen úgy mint a kisérlet minden alakjánál — elengedhetetlen. — A kisérlettel kapcsolatban nem kellene elmulasztani annak megmutatását, hogy a hang erőssége a harangot kitöltő gáz sűrűségétől függ. Az üres harang alá levegő helyett hydrogént vagy világító gázt bocsátva, a hang jóval gyengébb, mint a levegőben. Könnyen belátható, hogy a csengő hangja még tökéletesebben némul el, ha a hydrogén vagy a világító gáz ugyanarra minimális nyomásra van kiszivattyuzva, mint a levegő, mert ekkor kisebb a tömeg, mely a hangmozgást átveszi s tovább adja. Az üres harangot szénsavval vagy æthergőzzel megtöltve, a hang erősebb, mint a levegőben.

Alig szükséges tán megjegyeznem, hogy a csengetyű felállításánál arra is ügyeljünk, hogy ütőjének mozgása látható legyen: annál meglepőbb a csengő elnémulása.

2. A ráhangzás egyik legegyszerűbb és legszebb kisérlete kétségtelenül az, a midőn egy levegő-oszlopot rezgésben levő hangvilla segélyével hangzásra bírunk. A 435 rezgésű hangvilla hangjára közel 20 cm hosszaságú levegő-oszlop hangzik rá. A kisérlethez vízzel telt edény és egy közönséges lámpaüveg — öblös vagy hengeralakú — teljesen elegendő. Külön e czélra vett készülék semmivel sem ad jobb eredményt. A hangvillát az üveghenger felső nyílása fölé tartva, az alsó végét a víz alá merítjük s addig rövidítjük, míg a hengerben megmaradó levegő-oszlop saját hangja a hangvilláéval meg nem egyezik. Ekkor a ráhangzás a legerősebb. Ez a kisérlet könnyen kibővíthető az által, hogy akkor, a midőn a legjobban ráhangzó oszlop el van találva, szénsavat öntünk a hengerüvegbe: a ráhangzás el van rontva. a hang tetemesen meggyengül. De az oszlopot mintegy 15 cm-re rövidítve, a ráhangzás újra tökéletes; sőt a hang észrevehetően erősebbé is lesz, mint a levegővel. Ha 25—30° C. hőmérsékletű víz van az edényben s a ráhangzó levegő-oszlop megfelelő hosszát eltaláltuk, egynéhány csepp æther rövid idő alatt a ráhangzást elrontja. Így lehet a hangterjedés sebességét a különböző gázokban összehasonlítani. *B.*

*

**Bunsen-féle elembe való folyadék.** Az igen elterjedt kálium-bichromátos elem folyadékát Trouvé következőkép készíti: 4 liter vízbe 1 liter tömény angol kénsavat önt s a keveredéstől felmelegedett folyadékban 250 gr kálium-bichromátot old fel. Ez az oldat tapasztalásom szerint sokkal jobb a leginkább elterjedt, régibb reczeptek szerint készített, többnyire nagyon hig oldatoknál. Emeli az elem elektromindító erejét, mely átlag 2 volt és kisebbíti az ellenállását. Lényeges azonban, hogy a czink lehetőleg jól legyen amalgamálva, különben az erős sav csakhamar elpusztítja. — A két folyadékú Bunsen-elem légenysavában is szoktak egy-két kávéskanálnyi porrá tört kálium-bichromátot feloldani: ez megakadályozza az egészségre ártalmas gázok fejlődését s lehetővé teszi, hogy az elem szobában is legyen tartható.

*

**Aszfalt kaucsuk.** Az ezen néven újabban forgalomba jött kaucsukcsövek nem egy tekintetben jobbak a régibb szürke, piros vagy fekete gázvezető csöveknél. Nevezetesen nem száradnak össze, nem törnek, igen nagy nyomást bírnak ki s áruk jóval kisebb; körülbelül $^1/_3$-da a lágy kaucsuknak. Egyedüli bajuk — de ez legtöbb esetben alig jön számba — az, hogy kissé merevek. Az újabb gyártmányok azonban már ebben a tekintetben is javulást mutatnak.

# A MATH. ÉS PHYS. TÁRSULAT ALAKULÁSA.

A budapesti mathematikusok 1885 őszén értekezletet tartottak, melyen b. Eötvös Loránd, Hunyady Jenő, Kőnig Gyula, Scholz Ágoston és Szily Kálmán is részt vettek s elhatározták, hogy magánjellegű társasággá egyesülnek. Az egyesülés czélja az volt, hogy a megállapított időközökben tartandó összejövetelek alkalmával előadások, referatumok alapján alkalmuk legyen a helyben tartózkodó szaktársaknak a mathematika fontosabb haladásairól tudomást szerezni, s hogy a személyes érintkezés a tanár és tanítvány között, mely az egyetemi évek elvégzése után rendesen megszakad, mint nem megvetendő tényezője a tudományos életnek, állandóan fentartassék.

A társaság tagjai sűrűn vállalkoztak ismertető előadások tartására s így olvasmányuk s tanulmányaik többi szaktársaikra nézve is hasznossá váltak.

Előadásokat tartottak névszerint: Bein Károly, Beke Manó, Bodola Lajos, b. Eötvös Loránd, Fröhlich Izidor, Gruber Nándor, Hunyady Jenő, Kőnig Gyula, Kopp Lajos, Kruspér István, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Réthy Mór, Schlesinger Lajos, Szily Kálmán, Tőtössy Béla, Wittmann Ferencz és mások.

Látva az állandó érdeklődést, a mozgalom kezdeményezői — fő- és középiskolai tanárok — elérkezettnek látták az időt arra, hogy a társaság működésének körét kibővítsék. E végből a physikusokat, kik közül igen sokan már kezdettől fogva buzgó tagjai voltak a társaságnak s előadókul is szerepeltek, csatlakozásra szólították fel s velök egyesülve a legközelebbi hónapok teendőit, a tartandó előadások sorozatát megállapították.

Az első előadásra b. Eötvös Loránd egyetemi tanár és a M. T. Akademia elnöke vállalkozott, a ki november 29-én a következő meghivót küldte az összes fővárosi szaktársaknak: Tisztelt Uram! A «Mathematikai Társaság» felszólítására deczember hó 4-én és 18-án esti 6 órakor a tudomány-egyetem physikai intézetében a földi gravitátióról két előadást fogok tartani, melyekben az arra vonatkozó vizsgálódásaim módszereit és eredményeit bemutatni szándékozom. — Szeretném e tárgy iránt a physikával foglalkozó t. Collegáim érdeklődését is fölkelteni, mert meg vagyok győződve arról, hogy a tudományos eszmecsere az egyes kutatónak úgy, mint a tudománynak nagy hasznára válik, s azért kérem, vegyen részt ez összejöveteleinkben. Megvallom, az a remény is kecsegtet, hogy ezzel az első lépést fogjuk megtenni arra, hogy hasonló czélból még többször egybegyűljünk és szorosabb érintkezésbe lépjünk. Igaz tisztelettel maradok hive b. Eötvös Loránd.

A meghívottak, mintegy 100-an, csekély kivétellel, mind megjelentek. A második előadás végeztével b. Eötvös L. megköszönve a figyelmet, melylyel mindkét előadása találkozott, a jelenvoltakhoz körülbelől a következő szavakat intézte:

Legbensőbb óhajtásom, hogy e két összejövetelünk a jelenlevők mindegyikében ugyanazt a vágyat ébresztette volna, mint bennem, s ha mindegyikök ugyanarra a meggyőződésre jutott volna, mint magam. Vágyam az, hogy ezentúl is többször, mentül gyakrabban jöjjünk össze s közöljük egymással, fesztelen előadásban tapasztalataink, szakszerű olvasmányaink érdekesebb eredményeit: így kiki egyéni munkáját másokra nézve is hasznossá teszi, s azonfelül megtaláljuk az annyira szükséges és kivánatos személyes érintkezésre az alkalmat. Meggyőződésem pedig a következő: vagyunk már elegen s munkakedvünk is elegendő arra, hogy a remélhetőleg létrejövő összejöveteleink eredményeit irásba is foglaljuk s ez által vidéki szaktársainkhoz, kiknek megjelenésére, őszinte sajnálatunkra nem számíthatunk, szintén közelebb jutunk, a mi épen úgy az ő és a mi érdekünk, mint pedig a tanügyé is, melynek szolgálatában valamennyien állunk. Értem ez alatt egy szakfolyóiratnak a létesítését, mely az előadottakat nyomtatásban közölné s általában mindazt, a mi a szakembert a tudomány haladásáról értesítené. Gondolkozzunk, kérem, a közelgő karácsonyi napok alatt e thémáról valamennyien, s mondjuk el majd a legközelebbi összejövetelünkön őszintén róla alkotott nézeteinket. Megvallom, előadásaim legszebb sikerének azt tartanám, ha az itt kifejtett egyéni nézeteim t. szaktársaim helyeslésével találkoznának s minket közös munkára egyesítenének.

Az elmondottak a jelenlevők általános tetszésével találkoztak, a mint ez a rákövetkező összejövetel alkalmával szembetünően látható volt. A szaktársak ezuttal is tömegesen jelentek meg az összejövetelen, melyet b. Eötvös L. és Kőnig Gy. hivtak össze.

Ez összejövetel egyik tárgy a a decz. 18-án felvetett eszme megvitatása volt. A tárgyalás azzal indúl meg, hogy b. Eötvös, mint az értekezlet egyik összehívója, azzal a kérdéssel nyitja meg a tárgyalást, hogy kívánják-e jelenlevők, hogy mi, budapesti mathematikusok és physikusok, egyesüljünk? Felelet egyhangúlag igenlő lévén, a jelenvoltak egyhangúlag elnökül b. Eötvös Loránd egyetemi tanárt kérik fel, kinek indítványára a jegyzői tiszt viselésére Rados Gusztáv műegyet. tanár választatott meg.

B. Eötvös röviden ismételvén a megelőző összejövetelen mondottakat, kifejti, hogy valósitásuk több úton eszközölhető. Nézete szerint fő czélnak egy folyóirat megindítását kell tartanunk, mely középútat tartva az Akadémia tisztán *tudományos* s a Természettudományi Társulat tisztán *népszerűsítő* kiadványai között, a mathematika és a physika tanításával foglalkozókat szakszerű, de mégis könnyen érthető alakban a tudomány haladásáról értesítse s egyúttal oly közleményeket hozzon, melyek e tárgyak tanítását általában előmozdíthatják.

A folyóirat többféleképen indítható meg. Egyik módja az volna, hogy közülünk egy vagy egynehányan vállalkoznának a folyóirat megindítására és szerkesztésére s mi többiek mint munkatársak állanánk melléjök. Egy másik mód abban állana, hogy egy meglévő társulat, pl. a Természettudományi Társulat pártfogása alatt törekednénk a lapot megindítani. Végre egy harmadik úton: önálló társulat alakítása útján törekszünk czélunk után. A jelenlevők akaratától függ, hogy a megoldás melyik módját válaszszuk czélunk elérésére.

A kérdéshez többen hozzászóltak. A folyóiratot valamennyien óhajtják, de létesítésének módjára nézve eltérők a vélemények. A túlnyomó többség önálló társulat alakítása mellett nyilatkozott. Végül előkészítő bizottság küldetett ki, melynek feladata javaslatot tenni a következő kérdésekre vonatkozólag:

1. Magánjellegű társaság alakítandó-e vagy pedig nyilvános társulat, kormányilag megerősített alapszabályokkal?

2. Milyenek legyenek az esetleg megalakítandó társulat alapszabályai?

3. Milyen legyen a folyóirat terjedelme, tartalma, beosztása és mily időben jelenjen meg?

Az előkészítő bizottságba az értekezlet a következőket választotta meg: Bartoniek Géza, Bein Károly, dr. Beke Manó, Berecz Antal, dr. Bozóky Endre, dr. Demeczky Mihály, Éberling József, b. Eötvös Loránd, dr. Fröhlich Izidor, Heller Ágost, dr. Klupathy Jenő, dr. König Gyula, dr. Kopp Lajos, Rados Gusztáv, Rucsinszky Lajos, dr. Schmidt Ágoston, dr. Scholz Ágost, Straub Sándor, Suppan Vilmos, Szily Kálmán, Tötössy Béla és dr. Wagner Alajos.

A tovább történtekről legjobb képet ad az előkészítő bizottság első ülésének jegyzőkönyve, melynek bő kivonata itt következik.

*A math. és phys. társaság kebeléből kiküldött előkészítő bizottság 1891 jan. 29 én tartott ülésének jegyzőkönyve.*

Elnök: b. Eötvös L. Jegyző: Rados G.

Jelen vannak: BERECZ A. és ÉBERLING J. kivételével, kik távolmaradásusukat az elnökhöz intézett levélben kimentették, az összes előkészítő bizottsági tagok.

*Elnök:* A mathematikai és physikai társaság f. hó 15-én tartott ülésén elhatároztuk, hogy tudományos eszmecsere élesztése, különösen pedig egy szak-folyóirat létesítése végett egyesülünk. Az egyesülés formájának s a folyóirat programmjának közelebbi megállapítására kiküldetvén, napirendre tűzöm az elénk tett kérdések tárgyalását.

T. bizottság! Én azt gondolom, hogy feladatunknak úgy fogunk legjobban megfelelni, ha mindenekelőtt a folyóirat kérdését tisztázzuk, mert hiszen a folyóirat létesítése a fő czél. Legyen szabad röviden előadnom, milyennek képzelem magamnak a folyóiratot.

Ha folyóirat létesítéséről van szó, az első és fődolog tisztába jönni azzal, hogy kinek szól. Azt hiszem, valamennyien egy véleményen vagyunk az iránt, hogy a folyóirat legelső sorban és legfőképen a középfokú iskolákon működő tanároknak lesz rendeltetve s czélja az lesz, hogy a tanárokat tisztán tudományos tartalmú közleményeivel a mathematikában és physikában a haladó tudomány szinvonalán tartsa és e mellett oly ismereteket is terjeszszen, melyeknek a tanár az iskolában is közvetlenűl hasznát vehesse. Erre a czélra való tekintetből a folyóiratot három részből állónak képzelem.

Az első részben helyt foglalnának oly ismertető czikkek, melyek első sorban a társulati összejöveteleken tartott referáló előadásokat magokba foglalják, és egyes tudományos fejezeteket összefüggő és érthető alakban közölnek; ugyancsak ebben a részben foglalhatnának helyet azok az értekezések is, melyek didaktikai vagy methodikai fontossággal és érdekkel bírnak. Ezekre vonatkozólag az a személyes nézetem, hogy az egyes tárgyaknak a középiskola modorában való tárgyalása helyet találhat, de teljesen kizárandónak vélem, hogy e részben egyes tárgyak methodikai előadása vita tárgyává tétessék. Pl. hogyha az ingamozgás tárgyalása alkalmas, tudományosan helyes és középiskolákban előadható alakban közöltetik, azt felveendőnek vélem.

A folyóirat második része, mely fontosságánál fogva tulajdonképen elsőnek tekintendő, az a rész volna, mely a mathematika- és physikában elért tudományos haladásokról rendszeres ismertetéseket közöl; itt nem szabadna kimaradnia egy fontosabb könyv, fontosabb haladást jelző értekezés ismertetésének sem, és hogy ez valóban rendszeresen történhessen, legjobbnak tartom, hogy ha a tudományos folyóiratokban foglalt legkiválóbb értekezések tartalmát közölnők oly alakban és terjedelemben, a mely a lap közönségének legjobban megfelel. S hogy semmi fontos mozzanat ne kerülje ki figyelmünket, megállapíthatjuk, hogy a legfőbb tudományos folyóiratok tartalomjegyzéke állandóan közöltessék. Ilyen folyóiratok a mathematikában:

*Acta Mathematica, Crelle-Journal, Comptes Rendus, Mathematische Annalen*, a physikában pedig *Analen d. Physik u. Chemie, Comptes Rendus* és *Philosophical Magazin.* Ezenkívül ismertetendők másféle folyóiratok fontos czikkei is. Ezekből a közleményekből állandóan értesülhetnek szaktársaink a tudomány haladásáról s a tudományos világot foglalkoztató kérdésekről.

A mi a folyóirat harmadik részét illeti, annak rendeltetését abban látom, hogy bizonyos kapcsolatot létesítsen helybeli és a vidéki mathematikusok és physikusok között; ebben a harmadik részben helyet foglalnának a társulati összejövetelekről szóló értesítések. Azonkívül helyet kellene adni kérdéseknek és az ezekre megfelelő válaszoknak, feladatoknak és azok megoldásának. A kérdések különösen physikus társainkra lehetnek hasznosak, a mennyiben új kisérletekre vagy készülékekre vonatkozó kérdéseikre a folyóiratban kielégítő felvilágosítást nyerhetnének.

Így összeállítva gondolom ezt a folyóiratot.

A mi a folyóirat megjelenését és terjedelmét illeti, azt gondolom, hogy a mi viszonyaink között a szünnapok alatt bajos volna a kiadása; azért nyolcz, havonként megjelenő füzetekre osztanók be az évfolyamot (október—május). Terjedelmére nézve 24—30 ív kezdetben elégséges lenne.

Végre tisztába kell jönnünk egy igen fontos kérdéssel, t. i. a vállalat fináncziális oldalával. Ivenkint 30 frt irói tiszteletdíjat számítva, az összes évi költségek 2000—2500 frtra rugnának. A mi ezen költségek fedezetét illeti, úgy arra nézve döntő lesz, hogy a feladatunk másik részének hogyan fogunk megfelelni, hogy mily módon, mily alakban fogunk társulattá egyesülni. De akárhogyan történjék is ez — én azt hiszem — hogy az emlegetett 200—300 tag vagy előfizető, ha azokat 2—3 frttal terheljük csak, legföllebb 800 frtot fog szolgáltatni, úgy, hogy magunk a vállalat költségeinek fedezésére képesek nem vagyunk. Ha azon reményünknek, hogy talán más oldalról támogatást nyerünk, helyt adhatunk s ha a vállalatot egy-két számmal a magunk koczkázatára életbe léptetjük, nem kétlem, hogy a vallás- és közoktatásügyi miniszter úr ő nagyméltósága tekintettel azokra a szolgálatokra, melyeket a lap a hazai tudományosságnak és iskoláinknak tehet, vállalkozásunkat anyagilag is fogja támogatni. Reménylem azt is, hogy a tudományos akadémia, mely sok feladata és igénybevétele mellett, meggyőződvén arról, hogy mi itt a tudomány terjesztésében nagy feladatot törekedünk teljesíteni, szintén részesít támogatásában. Engem az a remény kecsegtet, hogy a financziális részen a vállalat nem fog meghiusulni.

Ezen néhány szavammal akartam körvonalozni saját személyes álláspontomat, csak azért, mert a kérdés engem különösen érdekelvén, nézetet alkottam magamnak a dologról és a tárgyalást ennek előterjesztésével folyamatba akartam hozni.

Heller teljesen csatlakozik E. kifejtéseihez, csak a harmadik részben még oly rovat felvételét is óhajtja, mely az iskolai kisérletekre és az új készülékekre vonatkozó haladásokat figyelemmel kisérné.

Bozóky azt a kérdést intézi, hogy az ábrázoló geometria helyet találna-e a folyóirat keretében.

Kőnig ezt kétségtelennek tartja s nagyon örülne, ha az ábrázoló geometria felvétele által ez közelebb hozatnék a mathematikához, mert eléggé sajátságos, hogy ezek nálunk kissé távoztak egymástól. Az elnök úr felszólalását illetőleg, azt hiszi, hogy oly világosan és teljesen lett benne a folyóirat programmja megállapítva, hogy azt egyhangúlag elfogadhatjuk. Lényegesnek tartja, hogy az igazán fontos értekezések ismertetését történeti bevezetéssel és megértésükre szükséges teljes apparátussal lássuk el. Minden oly egész fejezetet tárgyaljon, a melyet használni, de egyszersmind kényelmesen olvasni is lehessen.

Szily Kálmán. A folyóirat berendezését illetőleg teljesen csatlakozik ama programmhoz, melyet az elnök úr adott. Részletes útat nem tart czélszerűnek kijelölni, ezt megtalálni a szerkesztők feladata. A folyóirat költségvetését helyesnek találja, és azt hiszi, hogy a folyóirat megindításához szükséges nem igen nagy költséget mi budapestiek összeadhatjuk. Társulat alakítását a folyóirat megindítása előtt már azért sem tartja czélszerűnek, minthogy az alapszabályok kidolgozása és egyéb, az alakulással járó munkálatokkal az idei félesztendőt teljesen elveszítenők, pedig kivánatos, hogy a folyóirat mennél előbb meginduljon.

Kőnig. Nem lát nehézséget abban, hogy társulat a lap megindítása után alakíttassék.

Klupáthy azon egyéni óhajának akar kifejezést adni, hogy a folyóiratban a *vegytannak* is helye legyen.

Kőnig. A mennyiben chemiai physikáról volna szó, az amúgy is a physikához tartozván, annak helye biztosítva van; de a vegytannak mint külön szaktárgynak felvételét nem tartja czélszerűnek.

Suppan is azt hiszi, hogyha a tudományok igen nagy körére terjedne ki a folyóirat, ez csak tartalmának alapossága rovására történhetne. A vegytan a math. tudományoktól tényleg oly távol esik, hogy azok, kik főleg mathematikával foglalkoznak, a chemia iránt nem igen érdeklődnek s viszont a mathematikai rész a chemikusok érdeklődését nem igen volna képes lekötni.

*Elnök:* A hallottakból konstatálom, hogy a bizottság nem kiván előterjesztésemen lényeges változtatást eszközölni. A mi a folyóirat keretébe felveendő tudományok körét illeti, úgy veszem ki, hogy a bizottság legnagyobb része a mathematikán és physikán túl nem akar kiterjeszkedni, s a rokon tudományokat csak annyiban akarja felölelni, a mennyiben a mathematika és physikával valóban rokonok. Az előterjesztett programmot tehát a bizottság határozataként kijelenthetem.

Már most áttérhetünk feladatunk másik részére. Van egy dolog, a mi felett discussio nem szükséges, t. i. az, hogy egyesülni kivánunk, mint mathematikusok és physikusok és olyan összejöveteleket, mint a minőket a mathematikusok már régebben tartottak, tovább is föntartani. Csak azt kivánom kiemelni, hogy törekedjünk ezen összejövetelek programmját lehetőleg úgy megállapítani, hogy minden alkalommal mathematikai és physikai előadás tartassék s hogy ily összejövetel ezentúl gyakrabban, pl. minden két hétben egyszer legyen.

Megbizatásunkhoz tartozik még az egyesülés formája felett tanácskozni, hogy a folyóiratot tényleg létesíthessük. Háromféle egyesülésről lehetne szó:

1. Vagy önálló mathematikai és physikai társaságot létesítünk, melynek külön szentesített alapszabályai vannak; ennek tagokat iparkodunk szerezni, a kik a folyóirat és társulat költségeihez hozzájárulnak.

2. Vagy folyóiratot indítunk meg társulat alakítása nélkül és valamelyik társunkat a szerkesztésre felkérve, mi támogatjuk, s összes szaktársaink támogatását is kérjük.

3. Végül egy harmadik mód volna egy más társulat, pl. a Természettudományi Társulat védszárnya alá helyezkedni.

Kérem, méltóztassék nyilatkozni, hogy ezen módok közül melyiket tartják czélunk szempontjából arra nézve a legmegfelelőbbnek.

Suppan azt hiszi, hogy a harmadik mód már eleve kizárandó, mert a Természettudományi Társulat czéljai egészen mások, a kapcsolat is nehezen volna létesíthető. Ő czélszerűnek találja, hogy folyóirat indíttassék meg, és ha ez beválik és terjed, és csoportosulnak körülötte az emberek, akkor lesz idején társulatot alakítani.

Többek felszólalása után, kik önálló társulat alakítása mellet nyilatkoznak,

Szily kijelenti, hogy aggályai voltak a társulat alakítását illetőleg, de látva azt, hogy általános az a vélemény, hogy csak társulattal érhető el az elénk tüzött czél, maga részéről is kivánatosnak tartja, hogy társulat alakíttassék. Kivánatosnak tartja azonban, hogy a folyóirat mennél előbb megindíttassék; az alatt elkészülhetnek az alapszabályok és az alakulás az őszszel megtörténhetik.

Demeczky azt hiszi, hogy nem lehet lap társulat nélkül, indítványozza: oly társulatot alakítsunk, melybe a tagok tudományos tevékenységük mértéke szerint szavazás útján választassanak.

Kőnig szerint az ilyen kérdések csak az alapszabályok szerkesztésénél dönthetők el. Különben a választásnak ily megszorítását nem pártolja. Azt hiszi, hogy ezt a kérdést könnyen megoldhatjuk az által, hogy oly társaságot alakítunk, mely nem ugyan mindenkit, de a mathematika és physika minden mivelőjét és terjesztőjét tagul választhatja.

Több felszólalás után

*Elnök:* Az eddig hallottakból kivehetjük, hogy mindannyian a mellett vagyunk, hogy rendes társulattá alakuljunk; kivehettük azt is, hogy kik lehessenek ennek tagjai. Úgy látom, hogy abban mindnyájan megegyeztünk, hogy a tagokat qualifikácziójuk latolásával választani akarjuk. Demeczky úr azt kivánja, hogy a tudományos szakirodalom terén való működés szolgáltassa a qualifikácziót a tagságra; a többség nyilatkozatából kivehettem, hogy inkább a tudománynyal való szakszerű foglalkozás legyen az, a mi a tagságra qualifikál, úgy hogy egyes tanárjelöltek, mérnökök és egyéb tudományainkkal foglalkozó nem tanárok is lehessenek tagok.

Fölteszem a kérdést: A jelenlevők kivánják-e, hogy a taggá választás irodalmi működéshez kötött legyen? (Egy hang ellenében a többi: *Nem.*) Kivánják-e, hogy csak az lehessen a társulat tagja, a ki a mathematikával és physikával szakszerűen foglalkozik? (Túlnyomó többség: *Igen.*)

*Elnök:* Tisztába jöttünk az iránt, hogy társulatot óhajtunk és hogy kik lesznek tagjai. Már most az a kérdés, hogy társulatunknak milyen alapszabályokat adjunk, hogy a követendő iránytól el ne térjünk. De elhatároztuk azt is, hogy a folyóirat még a társulat megalakítása előtt indíttassék meg. Indítványozom, hogy az alapszabályok tervezetének kidolgozására, valamint a folyóirat ez ülésen megállapított programm szellemében való megindítására egy szűkebb bizottságot küldjünk ki.

Az indítvány elfogadtatván, a szűkebb bizottságba b. Eötvös elnöklete alatt megválasztnak: Bartoniek Géza, Demeczky Mihály, Heller Ágost, Kőnig Gyula, Rados Gusztáv, Szily Kálmán és Wagner Alajos.

Az ezután történteket igen röviden adhatjuk elő. A kiküldött bizottság több ülést tartván, kidolgozta az alapszabályok tervezetét, mely f. é. április hó 30-án a bizottsági és a szakülésen megjelentek részéről megvitatva, elfogadtatott.

A szűkebb bizottság feladatának másik részét is megoldotta. Hogyan, arról folyóiratunk első füzetét megnyitó felszólítás s a füzet tartalma tesz tanuságot.

A szerkesztő-bizottságot s a szerkesztőket a társaság f. é. febr. 5-én tartott összejövetelén választotta meg.

Társulat alakító-mozgalmunkban s üléseinken részt vettek a következők: Altenburger Gyula, Antolik Károly, Bacsa József, Balogh Mór, Bártfay József, Bartoniek Géza, Baumgartner Károly, Bein Károly, Beke Manó dr., Bellaagh Kálmán, Berecz Antal, Berkes Imre, Bodola Lajos, Bogyó Samu, Bozóky Endre dr., Chudy Hugo, Corzan A. Gábor dr., Császár Károly dr., Csopey László, Czeiner József, Deme László, Demeczky Mihály dr., Eberling

József, Edelmann Sebő dr., Ekkert Antal, Eötvös Loránd br., Erdélyi Jenő, Erdődy Imre, Farkas Gyula dr., Feichtinger Győző dr., Fertig Vilmos, Földesi Joákim, Fölser István, Frauenhoffer, Fröhlich Izidor dr., Ghyczy Géza, Gotthard Jenő, Gruber Nándor, Grünwald István, Hahóthy Sándor, Hajnal Márton, Hegedüs Károly, Held Károly, Heller Ágost, Hornischek Henrik, Hubatsek Alajos, Ilosvay Lajos dr., Jendrassik Jenő dr., Juckel Gyula dr., Kemény Ferencz dr., Képessy Imre, Kiss Ernő János, F. Kiss Károly, Klamarik János dr., Kleiszner Rezső, Klupathy Jenő dr., Kondor Gusztáv dr., Kőnig Gyula dr., Konkoly Miklós dr., Kont Gyula, Kopp Lajos dr., Kovács János dr., Kövesligethy Radó dr., Kruspér István, Kurländer Ignácz, Kürschák József dr., Lakits Ferencz dr., Lehner Vilmos, Lengyel Béla dr., Lengyel István, Lengyel Sándor, Lukács Lajos, Lutter János, Mandák Dezső, Mátis Lajos, Mendlik Ferencz, Mialovich Mór, Müller József, Nagy Dezső, Nemecskey Lajos, Novák Sándor, Oláh Gyula, Orbán Antal, Palatin Gergely, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Ráth A. Lajos, Ratkovszky Pál, Rátz László, Reif Jakab, Réthy Mór dr., Roller Mátyás, Rombauer Emil, Róna József, Rucsinszky Lajos, Schmidt Ágoston dr., Schmidt Fer., Scholtz Ágoston dr., Schuller Alajos Seltenreich Kornél, Somogyi Rudolf, Söpkéz Sándor, Suppan Vilmos, Straub Sándor, Szabó József, Szabó Péter, Szalkay Gyula dr., Szavkay Ede, Szemethy Béla, Szenessy Mihály, Szerényi Géza, Szily Kálmán dr., Szüts István, Tangl Károly, Than Károly dr., Thanhoffer Lajos dr., Tőtössy Béla, Trübswetter Ferencz dr., Vajdaffy Ernő, Vályi Gyula dr. Vámos Dezső, Vidovich Bonaventura, Wagner Alajos dr., Wartha Vincze dr., Weitzenfeld Lipót, Wohlrab Flóris dr., Wittinger János, Závodszky Alajos, Zettner Ede.

Örvendetes, hogy a felsoroltak legtöbbje munkatársunk is.

# ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI TÁRSASÁG

1890/91. ÉVBELI

# ELŐADÁSAIRÓL.

1890. deczember 4-én és 18-án br. Eötvös Loránd: *A földi gravitátióról.* Előadó a gravitatióra vonatkozó vizsgálatairól referált. Első előadásában azokról az eljárásokról szólt, melyeket a gravitatio állandójának meghatározására alkalmazott. Eljárását az eddigi ez irányban tett kisérletekkel szemben leginkább az jellemzi, hogy a vonzó erők mérésére a Coulomb-féle ingának nem csupán kitéréseit, hanem különösen lengési időinek változását használta. A rúd lengéseinek szabályos lefolyásáról a róluk felvett fotografiák tanuskodnak. Előadó bemutatta a többi között azt a készüléket is, melylyel a vonzó erők okozta kitéréseket multiplikálni tudta s ezáltal hatásukat váratlan mértékben növelte.

A második előadás a nehézség térbeli változásainak kisérleti vizsgálásával foglalkozott. Előadó megmutatja, hogyan lehet a Coulomb-féle mérleggel a nehézség nagyságának különbségét lemérni egymástól néhány centimeter vízszintes távolságra fekvő pontokban és meghatározta a szöget, melylyel a nehézség iránya függőleges mentében változik. *(Bővebben ismertetjük.)*

1891. január 15-én Rados Gusztáv: *Möbius kritériumairól.* Előadó néhai Hunyady Jenő dr. halálának évfordulója alkalmából kegyeletes szavakkal emlékezik meg e kiváló tudós nagy érdemeiről, melyeket ez a mathematikai tudományok fejlesztése körül általában és különösen hazánkban szerzett s kiben társulatunk is egyik alapítóját és buzgó pártfogóját veszítette. Hunyady egyik régibb dolgozata fejtegetésének kapcsán előadó új módszert mutat be, melynek alapján nem csak a Möbius-tól eredő és kúpszeletekre vonatkozó kriteriumoknak, hanem még azoknak is adja bebizonyítását, melyeknek segítségével a 9 pont meghatározta másodrendű felület faja megállapítható.

1891. február 5-én Demeczky Mihály: *A quadratikus alakok elméletéről.* Előadó terjedelmesebb előadásban ismerteti ezen elmélet legfontosabb kérdéstételeit valamint azokat az elveket, melyek Lagrange és Gauss erre vonatkozó classikus munkáinak alapját teszik; végül röviden utal KRONECKER ide vonatkozó régibb dolgozataira is, melyekben ezen elmélet kifejtése egészen új szempontokból történik.

GRUBER NÁNDOR: *Stöhrer vetítő készülékéről.* (I. előadás.)

1891. február 19-én KOPP LAJOS: *Az invariánsok elméletének alapjairól.* (L. 68. l.)

GRUBER NÁNDOR: *Stöhrer vetitő készülékéről* (II. előadás). STÖHRER vetitő készüléke gondosan készített *Laterna magica,* mely ez alakjában *skioptikon* néven ismeretes. A készülék lámpaháza vastag aczélpléhből készül, kettős világító lencsével — barbár neve *condensor!* — s jó fajta achromatikus és aplanatikus vetitő lencsével van ellátva. — A vetitésnél igen lényeges dolog a jó lámpa. Legjobb természetesen az elektromos ívfény; de kevés iskola szerezheti be, hanem kénytelen gyengébb fényforrással beérni. Ezek közül kétségtelenül az oxygénnel táplált hydrogén vagy gázlángban izzó mészfény a legmegfelelőbb. Az ehhez való lámpákat és mészhengereket, kivált újabban, kitünő minőségben, aránylag olcsón állítják elő. Fényerősségök mintegy 150—200 gyertyányi, a mi a legtöbb iskolai kisérletnél untig elég. Az oxygén fejlesztésére igen czélszerü és egyszerüen kezelhető vasretortákat készítenek, melyekkel 20—30 percz alatt mintegy 150 liter oxygén fejleszthető s ez 4—5 órai világításra elegendő. Hydrogén helyett közönséges világító-gáz is használható. Ha ilyen nem áll rendelkezésre, benzin-gáz kitünően helyettesíti. Ennek fejlesztésére külön készüléket: a saturatort hozzák újabban forgalomba. — Mészfény hiján még külön e czélra készült öt-belü petroleum- vagy gázlámpa is használható; mindegyiknek fényerőssége 50—70 gyertyányi, de közös bajuk, hogy túlerősen melegítik fel a lámpaházat és a világító lencsét s a petroleumlámpa azonfelül kellemetlen szagú.

Mint előadási készülék minden oly kisérletnél, mely csakis közvetlen közelből látható s részletei is csak úgy vehetők észre, ha a figyelem reájuk irányíttatik, igen hasznavehető, mint objectiv nagyító készülék pedig egyenesen nélkülözhetetlen. Külön e czélra mikroskop lencsével van ellátva, melylyel igen finom természetrajzi præparatumok is kitünően vetíthetők. — Előadó többi között megmutatta, mint lehet a fény hullámhosszát aránylag igen egyszerüen előadás közben meghatározni. Újabban némileg túlhajtják a vetités alkalmazását s még az oly jelenségeket is külön e czélra gyártott apró készülékek segélyével az ernyőre vetve mutogatják, melyek közvetlenül is láthatók s így tanulságosabbak is. Mire való pl. a szivattyús kutak, a tüzi fecskendő, a diffusio stb. effélenek a vetitése, a mi szabad szemmel szemléltethető? — Mind a mellett a skioptikonhoz készített kis apparátusok között sok hasznavehető is van. — A vetitő készülék minden hozzávalóval kimerítően le van írva Calderoni (Budapest, kishid-u. 4.) kiadásában megjelent füzetben. A kiadó minden szakembernek szivesen megküldi.

1891. márczius 5-én Tőtössy Béla: *Elemi projekczió módszerekről.* (I. előadás; közölni fogjuk.)

Bartoniek Géza: *Álló fényhullámokról.* (Közöljük.)

1891. márczius 19-én Kopp Lajos: *Az invariánsok elméletének alapjairól.* (II. előadás; közölni fogjuk.)

Dr. Réthy Mór: A Wiener-féle kisérletek magyarázata, Poincaré szerint.

Wiener kisérletei kiválóan alkalmasok a fényrezgés valódi természetének földerítésére. Míg eddigelé kicsiny szög alatt találkozó fénysugarak interferentiáját ismertük csak, addig e kisérletek derékszög és közel 180°-os szög alatt találkozókra vonatkoznak. Ha az interferentia tünemények azon magyarázatát alkalmazzuk ezen megfigyelésekre, melyeket az eddigieknél *megszoktunk*, akkor tény, hogy teljesen eldöntik azt a kérdést, hogy a Fresnel vagy a Neumann-Mac-Coullagh fényelmélete-e a helyes. De már most az a kérdés, hogy ez a magyarázat az *egyedüli-e?* Feleletül Cornu fejtegetéseire, melyek szerint a Fresnel és Neumann-féle elméletek vitája a Wiener-féle kisérletek után eldöntöttnek tekintendő, Poincaré a párisi Akadémia rákövetkező ülésén hozzászólt a kérdéshez s felszólalásával ezt a kérdést mintegy napirendre tűzte. Czélom bemutatni ezen észleleteknek Poincaré szerint való tárgyalását, melyből kitünik, hogy a megszokott magyarázat nem az egyedül lehetséges és ennél fogva ez idő szerint még lehetetlen a két elmélet között döntést eszközölni.

Az eddig észlelt fénytüneményeknél a hatás mértékéül a tér illető pontjában *azt az átlagos eleven erőt* tekintettük, mely az éther rezgésében ama pontban az időegység alatt nyilvánul. Ámde «Wiener szóban lévő kisérleteinél, így szól Poincaré, a sugarak *photochemiai* képességét méri, vagyis azt az erőt, mely az anyag atomjait *szétválasztani* törekszik. Ha két atom közös haladó mozgásban van, oly módon, hogy sebességük nagyságra és irányra nézve ugyanaz, akkor nem igen lehet belátni, hogy az ilyen mozgás miképen törekednék őket egymástól elválasztani. Természetesebbnek látszik föltenni, hogy az elválásra való hajlandóság ama periodikus változásoktól függ, melyeknek a két atom távolsága alá van vetve; ám ezen változások nagyságáról könnyű számot adni.» E változások bizonyára arányosak az őket környező éther atomjainak távolságváltozásaival. Számítsuk ki ezeket.

Legyenek $x$, $y$, $z$ az éther $M$ pontjának koordinátái az egyensúlyi helyzetben, $x+u$, $y+v$, $z+w$ az ő coordinátái $t$ időben, $M'$ legyen egy közel levő pont és $x'$, $y'$, $z'$, $u'$, $v'$, $w'$ vonatkozzanak erre a pontra.

Ez annyit jelent, hogy

$$x'-x=h, \qquad y'-y=k, \qquad z'-z=l$$

igen kicsiny mennyiségek és hogy felsőbb rangú kicsinyek elhanyagolásával

$$u'-u=\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k+\frac{\partial u}{\partial z}l,$$
$$v'-v=\frac{\partial v}{\partial x}h+\frac{\partial v}{\partial y}k+\frac{\partial v}{\partial z}l,$$
$$w'-w=\frac{\partial w}{\partial x}h+\frac{\partial w}{\partial y}k+\frac{\partial w}{\partial z}l.$$

Legyen az $MM'$ távolság $=\rho$, akkor $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ iránycosinusai sorban $\frac{h}{\rho}$, $\frac{k}{\rho}$, $\frac{l}{\rho}$. Más részről az $MM'$ távolság változásának $\Delta\rho$-nak a projectiója a koordináta tengelyekre sor szerint $u'-u$, $v'-v$, $w'-w$. Minélfogva

$$\Delta\varrho=\frac{h}{\varrho}(u'-u)+\frac{k}{\varrho}(v'-v)+\frac{l}{\varrho}(w'-w),$$

mely egyenlet az előző egyenletrendszer felhasználásával a következő alakot veszi föl:

$$\Delta\varrho=\frac{1}{\varrho}\left[h^2\frac{\partial u}{\partial x}+k^2\frac{\partial v}{\partial y}+l^2\frac{\partial w}{\partial z}+kl\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+lh\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+hk\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right].$$

E szerint $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ vonalos dilatátió az $xyz$ pontban az $\alpha\beta\gamma$ irányban

$$\begin{aligned} W=\alpha^2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta^2\frac{\partial v}{\partial y}+\gamma^2\frac{\partial v}{\partial z}+\beta\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ +\gamma\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\alpha\beta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Evvel arányos tehát a vegyileg egyesült atomokat az $\alpha\beta\gamma$ irányban szétválasztó erő, úgy hogy e szerint a chemiai erő azokon a helyeken és azokban az irányokban legnagyobb és legkisebb, a hol a $W$ értéke az.

Ime ez ama hypothezis, melyet POINCARÉ mint egyenjogút állít szembe amaz eddig megszokottal, mely szerint a világító és chemiai hatás az illető helyen levő tömegegységre vonatkozó éther-rezgés átlagos eleven erejével, $T$-vel arányos, melynek értéke

$$T=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right] \tag{2}$$

Állítsuk már mostan egymás mellé az interferentia főbb eseteire vonatkozólag a $W$ és $T$ értékeit.

1. Az interferáló síkhullámok legyenek parallelek és az æther rezgései a két síkhullámban szintén parallelek. A síkhullám normálisa — a fénysugár — választassék $z$ tengelyül, a rezgés iránya $y$ tengelyül. Akkor az interferáló hullámok egyikében

$$u_1=0,\ v_1=\sin a\,(x-Vt),\ w=0,$$

míg a másikban

$$u_2=0,\ v_2=\sin a\,(\varepsilon+x-Vt),\ w_2=0,$$

hol $V$ a fény terjedési sebessége, $\lambda$ a fény hullám hossza és végre $a=\frac{2\pi}{\lambda}$. A rezgés amplitudja egyszerűség kedvéért az egységgel egyenlőnek vétetett föl.

Ennélfogva az eredő mozgás komponensei

$$u=u_1+u_2,\quad v=v_1+v_2,\quad w=w_1+w_2$$

vagyis,

$$u=0,\ v=\sin a\,(x-Vt)+\sin a\,(\varepsilon+x-Vt),\ w=0.$$

Ezekből folyólag (1) és (2) alatti képletek értelmében a vonalas dilatatio és az eleven erő értékei a következők:

$$W_1=a\alpha\beta\Big[\cos a\,(x-Vt)+\cos a\,(\varepsilon+x-Vt)\Big]$$

$$T_1=\frac{a^2V^2}{2}\Big[\cos a\,(x-Vt)+\cos a\,(\varepsilon+x-Vt)\Big]^2,$$

mely képletek így is irhatók:

$$W_1=2a\alpha\beta\cos\frac{a\varepsilon}{2}\cos a\left(\frac{\varepsilon}{2}+x-Vt\right)$$

$$T_1=2a^2V^2\cos^2\frac{a\varepsilon}{2}\cos^2 a\left(\frac{\varepsilon}{2}+x-Vt\right),$$

Látni való, hogy $T_1$ *arányos a* $W_1$ *négyzetével.* Mind a kettő zérus, ha a két interferáló hullám útkülömbsége $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$ és maximum, ha az útkülömbség $2n\frac{\lambda}{2}$.

2. Legyenek az interferáló *parallel síkhullámokban az aether rezgései* egymásra *merőlegesek.* A koordináta rendszer kellő választásával mint előbb

$$u_1=0,\ v_1=\sin a\,(x-Vt),\ w_1=0,$$

ellenben

$$u_2=0,\ v_2=0,\ w_2=\sin a\,(\varepsilon+x-Vt).$$

Az interferálás után eredő rezgésben ezekből folyólag

$$u=0,\ v=\sin a\,(x-Vt),\ w=\sin a\,(\varepsilon+x-Vt).$$

Ezek alapján az (1) és (2) képletekből a vonalas dilatatio és az eleven erő következő értékeire jutunk:

$$W_2=a\gamma\left[\beta\cos a\,(x-Vt)+\alpha\cos a\,(\varepsilon+x-Vt)\right]$$

$$T_2=\frac{a^2V^2}{2}\left[\cos^2 a\,(x-Vt)+\cos^2 a\,(\varepsilon+x-Vt)\right]$$

A $T_2$, mint két a zérustól (egyes időpontoktól eltekintve) különböző *positiv* mennyiségek összege, az $\varepsilon$ útkülömbségnek semmiféle értékénél sem zérus, sőt átlagos értéke minden pontban $a^2V^2$, tehát állandó. De a $W_2$ viselkedése is hasonló. a mennyiben az $\varepsilon$ útkülönbség egyetlen egy értékénél sem lesz *az $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ iránytól függetlenül minimum* vagy *maximum*. *Mindezek megegyeznek az interferentia-jelenségeken tett összes eddigi megfigyelésekkel, még pedig függetlenül attól, hogy a fény- és a chemiai hatás mértékeül a lineáris dilatatiók négyzetének, vagy pedig az eleven erőnek átlagos értékét választjuk-e.**

* Magától érthető, hogy a midőn valamely pontban való chemiai hatás mértékéül azon pontbeli lineáris dilatatiók négyzetének átlagos értékét tekintjük, *egyik $\alpha\beta\gamma$ dilatatio-irány se tüntethető ki a többiekkel szemben*, hanem valamennyi egyenletesen veendő tekintetbe, mely tekintetbe vétel az illető pont körűl való integratió ismert módszerével eszközlendő.

Így pl. az imént (2. alatt) volt

$$W=a\gamma\left[\beta\cos a\,(x-Vt)+\alpha\cos a\,(\varepsilon+x-Vt)\right]$$

tehát

$$W^2=\alpha^2\gamma^2\left[\beta^2\cos^2 a\,(x-Vt)+\alpha^2\cos a\,(\varepsilon+x-Vt)\right.$$
$$\left.+2\alpha\beta\cos a\,(x-Vt)\cos(\varepsilon+x-Vt)\,a\right]$$

Legyen az $x$, $y$, $z$ pont körül egységsugárral leírt gömbfelület eleme $df$, kiszámítandó $\int W^2 df$. Akkor a kiszámításnál fellépő coefficiensek közül kettő t. i.

$$\int\alpha^2\gamma^2\,.\,\beta^2\,df \quad \text{és} \quad \int\alpha^2\gamma^2\,.\,\alpha^2\,df$$

egymással egyenlő azon oknál fogva, mert az $\alpha^2$ és $\beta^2$ értékei a gömbfelületen egyenlő módon vannak fölosztva; a harmadik coefficiens pedig

$$\int\alpha^2\gamma^2\,.\,\alpha\beta\,df=0,$$

3. Legyenek az interferáló síkhullámok egymásra merőlegesek, az æther rezgés irányai a külömböző hullámokban egymáshoz parallelek.

Az első síkhullám normálisa legyen az $y$-tengely, a másodiké a $z$ tengely és így a rezgés iránya azonos az $x$-tengelyével. Akkor az eredő rezgés komponensei ezek:

$$u = \sin a\,(y - Vt) + \sin a\,(z - Vt),\ v = w = 0.$$

Ezeket betéve az (1) és (2) képletekbe lészen

$$W = a\alpha\left[\beta \cos a\,(y - Vt) + \gamma \cos a\,(z - Vt)\right]$$

$$T = \frac{a^2 V^2}{2}\left[\cos a\,(y - Vt) + \cos a\,(z - Vt)\right]^2$$

$W$ ezen értéke egyenlő jellegű a $W_2$-vel, a $T$ értéke pedig a $T_1$-gyel. Ha tehát a chémiai hatás az éther rezgés *eleven erejével* arányos, akkor az egymásra merőleges fényhullámokra vonatkozó WIENER-féle észlelet a FRESNEL-féle fényelmélet mellett dönt. WIENER ugyanis kimutatta, hogy két egymásra merőleges síkhullám csakis az esetben hoz létre sötét és világos csíkokat, ha a fény polározás síkja a két hullámban *azonos;* az éther rezgés irányai tehát akkor és csakis akkor azonosak bennük, ha FRESNEL-lel fölteszszük, hogy az éther rezgése a polározás síkjára merőleges.

4. Legyenek úgy az interferáló síkhullámok, mint az ætherrezgések irányai egymásra merőlegesek, és pedig az utóbbiak iránya a fénysugarakéval *kölcsönösen* egybeeső. A 3. alattiakkal azonos jelölés mellett az eredő rezgés komponensei most ezek:

$$u = 0,\quad v = \sin a\,(z - Vt),\quad w = \sin a\,(y - Vt);$$

ugyanis föltevés szerint a rezgések iránya az egyik hullámban azonos a sugáréval a másikban, ámde a sugarak iránya az $y$, illetve $z$ tengelylyel összeesik.

Ezeket betéve az (1) és (2) képletekbe lészen:

---

miután mindegyik $\alpha$, $\beta$ érték által jellemzett ponthoz tartozik a gömbfelületen egy $\alpha$, $-\beta$ által jellemzett pont.

Lészen tehát

$$\int W^2 df = C\,.\left[\cos^2 a\,(x - Vt) + \cos^2 a\,(\varepsilon + x - Vt)\right]$$

hol

$$C = \int \alpha^2\beta^2\gamma^2\,df.$$

Ez az $\int W^2\,df$ érték arányos a $T_2$-vel.

$$W = \alpha\beta\gamma\left[\cos a\,(y - Vt) + \cos a\,(z - Vt)\right]$$

$$T = \frac{a^2 V^2}{2}\left[\cos^2 a\,(y - Vt) + \cos^2 a\,(z - Vt)\right].$$

A $W$ ezen kifejezése összehasonlítva a 3. pont alatti $T$ kifejezésével, látnivaló, hogy négyzete evvel arányos. Ebből erre a következtetésre vagyunk följogosítva: Ha a fény chémiai hatása az æther *lineáris dilatátiója négyzetének* közepes értékével arányos, akkor ugyanazok a WIENER-féle észleletek csakis a NEUMANN-féle fényelmélettel egyeztethetők meg.

Ezekben áll POINCARÉ ama vázlatos közleményének lényeges része, melyet a párisi Akadémia a f. é. február hó 9-ki ülésén * fölolvasott és melyet avval rekesztett be, hogy miután a chemiai hatás mechanismusáról épen semmit sem tudunk, lehetetlen véleményt alkotni az iránt, hogy a chemiai hatás a rezgés eleven erejétől avagy lineáris dilatatiójától függ-e; a fölvetett kérdés felől ennélfogva WIENER észlelései után is teljesen kétségben maradunk.

Azóta CORNU és POTIER a párisi Akadémia február 16-iki ülésén tartott fölolvasásukban a fölvetett kérdést eldöntöttnek bizonyítják WIENER ama kisérlet-sorozata alapján, melyeket a reflectáló lapra közel merőlegesen beeső fénynek az optikailag sűrűbb közeg határlapjától reflectált fénynyel való interferálásával nyert; e tapasztalatok szerint a chemiai hatás a reflectáló lap közvetlen közelében minimális. POINCARÉ válaszát be nem várva az előző számítások folytatásaképen megmutathatom, hogy WIENER-nek ez a, — mondjuk második — kisérletsorozata alapján sem dönthető el a szóban levő kérdés.

5. Legyen ugyanis a két interferáló fényhullám parallel és pedig *ellenkező irányokban haladó;* akkor külömböztessünk meg két esetet:

*a)* Legyenek az æther rezgések a két interferáló síkhullámban parallelek.

A beeső sugár irányát $z$ tengelyül, a reflectáló lapot $z=0$ síkul választva, legyen a merőlegesen *beeső* fényben

$$u_1 = A \sin a\,(z - Vt),\quad v_1 = 0,\quad w_2 = 0.$$

és így az *egyenesen visszavert* fényben

$$u_2 = Ar \sin a\,(\varepsilon - z - Vt),\quad v_2 = 0,\quad w_2 = 0.$$

Itten $A$ és $Ar$ a rezgés amplitudja a beeső illetve visszavert fényben; az $\varepsilon$ nem egyéb a phasisbeli változásnál a $z=0$ reflectáló lapon.

* Compt. rendus 1891. Nr. 7.

Az eredő rezgésben nyilván

$$u = A \sin a\,(z - Vt) + Ar \sin a\,(\varepsilon - z - Vt), \quad v = w = 0.$$

Ezek alapján az (1) és (2) alatti képletek a $W_1$ és $T_1$-hez analog emez eredményekre vezetnek:

$$W = a\alpha\gamma\,\left[A \cos a\,(z - Vt) - Ar \cos a\,(\varepsilon - z - Vt)\right]$$

$$T = \frac{a^2 V^2}{2}\left[A \cos a\,(z - Vt) + Ar \cos a\,(\varepsilon - z - Vt)\right]^2$$

Ezekből folyólag a $z=0$ reflectáló lapon

$$W = a\alpha\gamma\,\left[A \cos aVt - Ar \cos a\,(Vt - \varepsilon)\right]$$

$$T = \frac{a^2 V^2}{2}\left[A \cos aVt + Ar \cos a\,(Vt - \varepsilon)\right]^2.$$

A $W$ absolut értéke minimális, ha $\varepsilon = 0$; ekkor ugyanis

$$W = a\alpha\gamma\,(A - Ar) \cos aVt.$$

A $T$ értéke minimális, ha $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$; ekkor ugyanis

$$T = a\alpha\gamma\,(A - Ar)^2 \cos^2 aVt.$$

Ámde láttuk, hogy FRESNEL elméletét fogadva alapul a chemiai hatás ott minimum, a hol $T$ átlagos értéke minimum; a FRESNEL-féle elméletben tehát a reflektáló lapon a phasisnak lényegileg ellenkezőre kell változnia; tényleg ezt teszi fel FRESNEL.

Ellenben a NEUMANN-féle elméletben, hol a chemiai hatás szélső értékei a $W^2$ átlagos értékeivel összeesnek, a fázisnak a határlapon lényegileg zérussal kell változnia. A NEUMANN-féle összes reflexió elméletben tényleg ez taníttatik.

*b)* Legyenek az interferáló ellenkező irányú sík hullámokban a rezgések egymásra merőlegesek.

Ebben az esetben, miként a 2. alattihoz hasonló számítás mutatja, nincsenek szélső értékei se $W^2$ se $T$ átlagos értékeinek.

Végül jegyezzük meg, hogy a közeg lineáris dilatatióinak négyzete arányos a dilatatiók által fölidézett rugalmas erők deformáló munkájával. Ugyanis a nevezett $W$ dilatatió által fölidézett rugalmas erő $= CW$, hol $C$ állandót jelent; és ha a dilatatió végtelen kis növekedése $\delta W$, akkor amaz erő ezt kisérő munkája $= CW\delta W$, vagyis $= \frac{C}{2}\,\delta W^2$. Ebből folyólag az *összes* $W$ dilatátió létrehozását kisérő eme erők munkája

$$= \int_0^{W^2} \frac{C}{2}\,\delta W^2 = \frac{C}{2}\,W^2.$$

*Mindent összefoglalva kimondhatjuk, hogy a* WIENER*-féle összes kisérletek megegyeznek a* FRESNEL*-féle fényelmélettel, ha a fény fotografiai hatása a közeg átlagos eleven erejével arányos; — ellenben a* NEUMANN*-félével akkor, ha ama hatás a közeg lineáris deformátióját kisérő belső munka átlagos értékével arányos.*

FRÖHLICH IZIDOR POINCARÉ-nek a megelőző referátumban körvonalozott értekezésére és a WIENER-féle jelenségre nézve a következő észrevételeket teszi:

1. POINCARÉ csak kivonatban közölt értekezése első részében azt a kérdést veti fel, vajjon a fény intensitásának mértéke gyanánt nem lehetne *a)* az eddig szokásos eleven erő (kinetikus energia) középértékén kívül *b)* a rezgő közeg helyzeti erélyét (potentiális energiáját) vagy *c)* mind a kettőnek összegét tekinteni?

Ha WIENER kisérleteiben fölveszszük, hogy az ezüst molekulák kiválasztása azokban a helyekben történik, hol az ætherrezgések interferentiájának fénymaximumai keletkeznek, akkor POINCARÉ szerint az *a)* definitio megegyezik FRESNEL fölvételével (a rezgés a polározás síkjára merőleges); a *b)* definitio megegyezik F. NEUMANN fölvételével (a rezgés a polározás síkjában történik); végre a *c)* definitio megegyeztethető FRESNEL fölvételével, ha a homogen és isotrop közegnek (itt az æthernek) CAUCHY szerint felvett három rugalmassági állandója közül az egyik zérus; de ez az eredmény a fény elektromágnesi elméletével áll ellentétben.

Felszólaló nem találja indokoltnak, hogy POINCARÉ a nála *b)* alatt «*lokalisált potentiális energiá*»-nak nevezett mennyiségben (melyet angol és német szerzők már néhány évtized óta *rugalmassági potentiál*nak neveznek) CAUCHY elméletéből kifolyólag a homogén és isotrop közegeknél *három* rugalmassági állandót vesz fel, melyek egyike elesik, ha a közegre ható külső nyomás megszünik; ugyanis nincs tapasztalatunk, mely szerint az ily testeknél (a rugalmassági modulus és a harántösszehúzódás által kifejezhető) két rugalmassági állandón kívül még más állandó is lépne fel.

2. POINCARÉ értekezése második részében, melyről RÉTHY MÓR referált szerző felveszi, hogy a fénynek az anyagi molekulákat vegyületeikből kiválasztó hatása *(a fény fotografiai intenzitása) a dilatatio* négyzetével arányos.*

Ezen fölvételre nézve a felszólaló azt jegyzi meg, hogy ez úgy, a mint az POINCARÉ közleményében van, nem fogadható el, mivel a dilatatio értéke

* Dilatatio alatt értve: a közeg két pontja egymástól való távolsága — a rezgés (rugalmas alakváltozás, deformatio) folytán bekövetkező — változásának viszonyát az eredeti távolsághoz.

lényegesen függ a két pontot egybekapcsoló eredeti távolság irányától s mivel a közeg minden pontján át számtalan irányt fektethetünk, mely irányok mindegyikére nézve a dilatatio különböző, ez annyit mondana, hogy a közeg minden egyes pontjában ezen fotografiai intenzitás végtelen sok (határozatlan) értékű mennyiség, a mi semmi esetre sem engedhető meg.

Poincaré ezen fölvételének helyes értelmezését felszólaló abban találja, hogy a közeg valamely pontjára nézve fotografiai intenzitás alatt a dilatatio négyzetének az e ponton átmenő valamennyi irányra (a pont körül szerkesztve képzett végtelen kicsiny gömbre) vonatkozólag képezett középértékét kell értenünk.

E középértéket felszólaló a rugalmasság elméletének szigorú eljárása szerint számította s azon eredményhez jut, hogy mind a transversális, mind a longitudinális rezgésekre nézve a két rugalmassági állandóval biró közegeknél e középérték a rugalmas erők ú. n. rugalmassági potentiáljával (azaz rugalmassági helyzeti energiájával) egyenesen arányos.

3. Áttérve végre a Wiener kisérleteire, felszólaló kiemeli, hogy ezeket már csak azért is tartja igen fontosaknak, mivel az eddig ismert valamennyi fény-interferentia jelenség az egymáshoz párhuzamos vagy az egymással igen hegyes szög alatt találkozó fénysugarak (illetve nyalábok) interferentiájából keletkezik; itt pedig oly tapasztalással állunk szemben, melynél egymást véges nagyságú, sőt derék- s ennél nagyobb szög alatt metsző fénynyalábok létesítenek interferentia-tüneményt. Ez pedig, a menynyire felszólaló tájékozva van, *teljesen novum;* igaz, hogy ennek az interferentiának nem egyenesen a fényhatását, hanem csak fotografiai hatását adja meg a kisérlet; igen kivánatosnak tartja a kisérletezésnek oly irányban való folytatását, melyben ezen interferentiának közvetetlen fényhatása egyenesen észlelhető lenne.

A mi végre illeti a Wiener-féle kisérleteknek a rezgés síkja és a polározás síkja egymáshoz való viszonya felderítésére vonatkozó felhasználását, felszólaló a rendelkezésre álló még igen kevés tapasztalati adatokkal szemben e kérdés fölvetését korainak tartja. Ugyanis a nevezett két sík az étherben végbemenő fényrezgésekre vonatkozik, itt pedig a vegyületeikből kiválasztott anyagi molekulákból alkotott csíkokat figyelünk meg s mindaddig, míg nem tudjuk, miképen hatnak a rezgő éther-atomok az anyagi molekulákra (mert Poincaré-nak 2. alatt említett feltevése szintén csak hypothetikus), e kérdést ily abstract alakban fölvetni nem lehet.

Br. Eötvös a hallottakhoz s általában az egész kérdéshez a következő megjegyzéseket fűzi:

Tisztán a physikus szempontjából kivánok a szóban forgó tárgyhoz hozzá szólani. Azt hiszem, hogy az itt fölmerült kérdésben a vélemény alkotását igen megkönnyítjük magunknak, ha egy bár egészen más természetü, de mégis analog jelenségre gondolunk. Az álló hanghullámokat értem, a milyenek pl. a sípokban vagy pedig a longitudinálisan rezgő pálczákban támadnak. A hullámhegyeken a levegő mozgása oly heves, hogy a könnyű port kifeszített vékony hártyán mozgásba bírja hozni, a König-féle érzékeny lángok pedig ugyanott alig lobognak. A csomókban, a legnagyobb nyomásváltozások helyein ellenben ezek a lángocskák erősen rezegnek, de a por és a hártya mozgásba nem jő. A csomókban ezenkívül a hő és a physiologiai hatások a legerősebbek. Ezért akár a König-féle lángokat, akár a rezgő port vagy más érzékeny akustikai szerkezeteket csak annyiban használhatjuk fel a csomók felkeresésére, a mennyiben tudjuk, hogy e csomókban miképen viselkednek.

A fénynek ugyancsak többféle, ú. m. physiologiai, chemiai, hő hatásai képezik észleléseink tárgyát: a fényhullámok csomóit is csak akkor keressük fel ezek valamelyikével biztosan, ha úgy mint a hangnál tudjuk, hogy e hatások ezeken a helyeken mi módon érvényesülnek.

Erre vonatkozólag mindeddig ismereteink nem voltak — a Wiener kisérletei sem adnak útbaigazítást s így az azokból a fenálló elméletekre vont következtetések sem lehetnek döntő értéküek.

1891. április 2-án Wittmann Ferencz: *A telefon alkalmazása az elektromosság tanában.* Előadó a periodikus elektromos áramok időbeli lefolyást feltüntető áramgörbék objectiv bemutatásával és magyarázatával foglalkozott.

Elihu Thomson-nak és dr. Frölich-nek hasonló czélú, kisérleti vizsgálatait tárgyalván, megmagyarázta az általa használt kisérleti berendezést, melynek lényege a következő:

A vizsgálandó periodikus áramot Siemens-féle telefon tekercsén vezetjük keresztül; az áramperiodussal egyidejű rezgésbe hozott telefonlemeznek az áramerősséggel aránylagos kitérése tükörfelszerelés útján nagy skálára vitetik át; még pedig oly módon, hogy sugárnyalábot vetünk a telefon tükrére; a visszavert fénynyaláb függélyes tengely körül forgó sokszögű tükörre, innét pedig ernyőre jut. Ha a sokszögű tükör forgássebességét úgy szabályozzuk, hogy azon idő, mely alatt egy tükörfelület a megelőzőnek helyére jut, a telefon tekercsén átvezetett áram periodusának egész számú sokszorosa, a telefonlemez rezgéséből és a sokszögű tükör forgásából eredő, mozdulatlanúl egy helyen maradó görbe, a periodikus áram időfüggvényét adja.

Két periodikus elektromos áram *egyidejű* előállításaira előadó tükörrel fölszerelt két egyenlő érzékenységű telefont használt; egyébként a fentebb vázolt módszert alkalmazva, a váltakozó áramok, nevezetesen pedig a transformátorok elméletében nagyfontosságú phasiskülönbségeket is bemutathatta.

Ezen optikai módszerrel objective előállított áramgörbék a következők voltak:

A szakgatott áram görbéje. Az induktorium primär és secundär áramának görbéi külön-külön és egyidőben, nevezetesen ha a primär tekercs vasmagnélküli volt, továbbá midőn tömör vasmagvat és vaspálczákból képzett nyalábot tartalmazott. A condensator töltési és kisütési áramgörbéje. Akkumulátorr batteria töltési és kisütési áramgörbéje. A Ganz-féle önmagát mágnesező váltakozó áramú 6 sarkú gép áramgörbéje; a Zipernovszky-féle transformátor secundär vezetékében az elektromindító erőnek és intenzitásnak görbéje külön-külön és egyidőben, mely utóbbi esetben az áramgörbének az elektromindító erő görbéjétől való phasisbeli elmaradása látható. Transformátor secundär vezetékében egyidőben az elektromindító erő és intenzitás görbéje, ha az áramkörben Volta-ívet állítunk elő. Váltakozó árammal condensator töltési és kisütési áramgörbéje.

A bemutatott kisérletek a módszer termékenységéről tanuskodnak; tágas teret nyit elméleti és kisérleti tanulmányokra, melyeket részletesen fogunk közölni.

1891. április 16 án Bein Károly: *A logika-kalkulusról.* (Közölni fogjuk.)

Kont Gyula: *Előadási kisérletek.* Több igen egyszerü előadási kisérletet mutatott be a hőtan köréből. Hőmérőül Schuller példájára kisebb-nagyobb, levegővel telt üveggolyókat használt, melyek kaucsuk-cső útján 3—5 mm nyilású üvegcsővel közlekedtek. A cső vízszintesen állványba volt befogva s néhány centiméternyi festett vízoszlop volt benne: ennek eltolódása mutatta a hőmérséklet megváltozását. Az ilyen előadási hőmérő rendkívül érzékeny a hőmérsékleti változások feltüntetésében. Evvel a hőmérővel bemutatta előadó az olvadást és a párolgást kisérő hőcsökkenést, a túlhütött víz hirtelen fagyását kísérő hőmérséklet emelkedést, a forrás hőmérsékletének függését a nyomástól stb.

1891. április 30-án Tőtössy Béla: *Elemi projekczió módszerekről.* (II. előadás; közölni fogjuk.)

Bartoniek Géza bemutatja az alapszabályok készítése végett kiküldött bizottságtól ajánlott alapszabály-tervezetet.

# VEGYESEK.

**Óriási manométer.** Ismeretes dolog, hogy a gázok és folyadékok nyomása csakis szabad levegőn végződő manométerrel mérhető pontosan. DULONG, később pedig REGNAULT mintegy 26 méter magasságú manométert használtak hires kisérleteiknél. CAILLETET ennél jóval nagyobb manométerrel mérte volt az összesürített gázok feszítő erejét. Egyik manométere egy hegy oldalán emelkedett, a másik pedig egy artézi kútba merült. Ámde mindkét manométer kényelmetlen s nehezen leolvasható volt.

Ez évben CAILLETET az EIFFEL-féle toronyban állitott fel egy valóban óriási manométert, a minőhöz hasonló eddig még nem létezett. A manométer higany-oszlopa, függőleges irányban mérve, 300 méter. Minden része magához a toronyhoz van erősítve, úgy hogy a megfigyelő minden pontjához hozzáférhessen s a leolvasást kényelmesen elvégezhesse.

Mivel a higany-oszlopnak mintegy 400 atmoszférás nyomását üvegcső nem igen bírná meg, a manométer 4·5 mm belső átmérőjű lágy aczélcsőből van készítve. Ez a cső a torony tövében levő laboratoriumban elhelyezett higanytartóban végződik; a tartó higanyát a vele közlekedő vízsajtó hajtja a manométer-csőbe. Hogy a higany-oszlop állása meghatározható legyen, az aczélcső 3 méternyi függőleges közökben elágazik s minden elágazásába 3 méternél valamivel hosszabb üvegcső van beillesztve. Az elágazást erős kúpos csap zárja el a főcsőtől. A csapot megnyitva, a higany az üvegcsőbe hatol s ugyan oly magasságra emelkedik mint a főcsőben; állása a mellette levő skálán leolvasható. — Ennek a skálának kezdő pontja a laboratoriumban, a higanytartó higanyának felszínén van. Ettől kezdődik a beosztása s az egymásután következő elágazó csövek mellé erősített 3 m-nyi skáladarabokon folytatódik. Az aczélcső a toronynak görbén emelkedő oldaloszlopaihoz lévén erősítve, a belőle kiágazó oldalcsövek nem esnek egy függélyesbe s így a melléjök erősített skáladarabok is lépcsőzetekben következnek egymásután. Kezdő vonalaik a laboratoriumbeli kezdő ponthoz úgy lettek igazítva, hogy mindegyiknek kezdő vonala a megelőzőnek végső vonalával egy vízszintesbe hozatott. Erre a czélra igen egyszerű nivelláló készülék szolgált: kaucsukcső útján egymással közlekedő két üvegcső; az egyik cső az egyik skála végső vonalához, a másik pedig a rákövetkező skála kezdő vonalához állíttatván, ez utóbbi addig lett fel-alá tologatva, míg a két vonás a közlekedő csövekben levő viz szinével egybe nem esett.

A manométer használata a következő: A nyomásnak megfelelő csap megnyittatván, a vízsajtó működésbe hozatik mindaddig, míg a higany a kijelölt magasságig föl nem emelkedett. A vízsajtó nagyméretű fém-manométerrel közlekedik, mely két beosztással van ellátva. Az egyik a nyomást adja atmoszférákban, közelítőleg, a másik pedig a megfelelő csapok számaira mutat: így a kisérletező a laboratoriumból is figyelemmel kisérheti a higany-oszlop emelkedését s tudja, mikor kell a víz sajtolását lassítania. Ezalatt segédje a kijelölt ponton lesi a pillanatot, a mikor a kivánt nyomás pontosan el lett érve s ezt telefon útján jelzi.

A manométer közvetlen leolvasása több correctiót tesz szükségessé. A hőmérséklet a higany sűrűségét megváltoztatja s megváltoztatja a skála s a torony hosszát is. Az átlagos hőmérsékletet az aczélcső mellett haladó telefondrot elektromos ellenállásából, azonfelül az aczélcső mentén felállított sok hőmérő adataiból határozzák meg: ezekből számítják ki az említett correctiók nagyságát.

A manométert sokféle kisérleten kívül a nagy nyomások mérésére szolgáló rugalmas manométerek hitelesítésére is fogják felhasználni s ezáltal hasznosságát nagy körre kiterjeszteni.

## Dr. CSÁSZÁR KÁROLY.

Meg sem alakult még Társulatunk s már is veszteség sújtja. Dr. Császár Károly meghalt április 30-án. Született Budapesten 1842-ben, középiskolai tanulmányait elvégezve a piarista-rendbe lépett s mint ennek tagja, Nagy-Becskereken, Selmeczbányán, Kolozsvárott mint a mathematika és physika tanára működött. 1870-ben kilépett a rendből s 1871-ben a fővárosi IV. kerületi községi főreáliskolához választatott meg a mathematika rendes tanárává s ezen állását egész haláláig viselte. Alig van szakférfiaink között egy is, ki — főleg a középiskolai irányban — hazánk mathematikai irodalmában annyit termelt volna, mint ő. Tanítványaival szemben a véghetetlen jóság és elnézés jellemzé. Munkássága oly hangya szorgalmat árul el, hogy valóban sajnálnunk kell, hogy anyagi körülmények parancsolta helyzeténél fogva erejét nem állíthatta teljesen a mathematika magasabb művelésének szolgálatába. Mindnyájunk őszinte részvéte kiséri a megboldogultat sírjába.

Dr. Császár Károly rendkívül tevékeny irodalmi működést fejtett ki; munkái közül csak a legkiválóbb és legelterjedtebbeket soroljuk fel a következőkben: *A számvetés végtelen tizedes számokkal. Betűszámtan*, a középiskolák számára. *Csillagos ég*, népszerü csillagászati munka. *A hajcsöresség mennyiségtani elmélete*, Doctori dissertatio. *Számtan*, a középiskolák alsóbb osztályai számára. *Geometria*, a középiskolák felsőbb osztályai számára. *Carnot és Monge* életrajza. *Geometriai alaktan*, a középiskolák alsóbb osztályai számára. *Szerkesztő planimetria*, a középiskolák alsóbb osztályai számára. *Számtani példatár*, az alsóbb ipartanodák használatára. *Számvetés*, a népiskolák számára. *Természettan*, a népiskolák számára. *Pénzügyi értekezések*, a «M. Nemzetgazda» czímű folyóiratban. *Korlátolt pontosságú számvetés.* Kéziratban maradt a «*Kereskedelmi tudomány*» czímű nagy munkája.

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

ELSŐ ÉVFOLYAM

HARMADIK FÜZET. 1892 JANUÁR

BUDAPEST

KIADJA A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1892

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenkint 8, legalább 3 ívnyi füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó 20-dik napján. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A társulati év a választmány határozata szerint 1892. január 1-én kezdődik. Ennek folytán a M. Ph. Lapokból a folyó évben 6 füzet jelenik meg, mely a mult évben megjelent kettős füzetet 24—30 ívnyi kötetre fogja kiegészíteni. A hátralevő füzeteket február, márczius, április, október és november hónapok 20-ik napján küldjük szét.

A tagsági díj az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük tiszt. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czimére — legczélszerűbben postautalványnyal — beküldeni. Legyen szabad egyúttal a választmánynak a jelen füzet 187. lapján közölt kérelmét t. Tagtársaink becses figyelmébe ajánlanunk.

A befizetett tagdíjakat a M. Ph. Lapok borítékán fogjuk nyugtáztatni.

Ha valamelyik jelentkezett tagtársunk neve a 182—185. lapokon közölt névsorból hiányzik, vagy ha neve hibásan van írva: Kérjük a helyreigazítást, még pedig a legrövidebb idő alatt, hogy a munka alatt levő tagsági oklevelek kiállításánál az esetleges hibát kiigazíthassuk.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére (VI. Bajza-u. 20.) intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár (VI., akáczfa-u. 49.), a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a reklamácziók is.

---

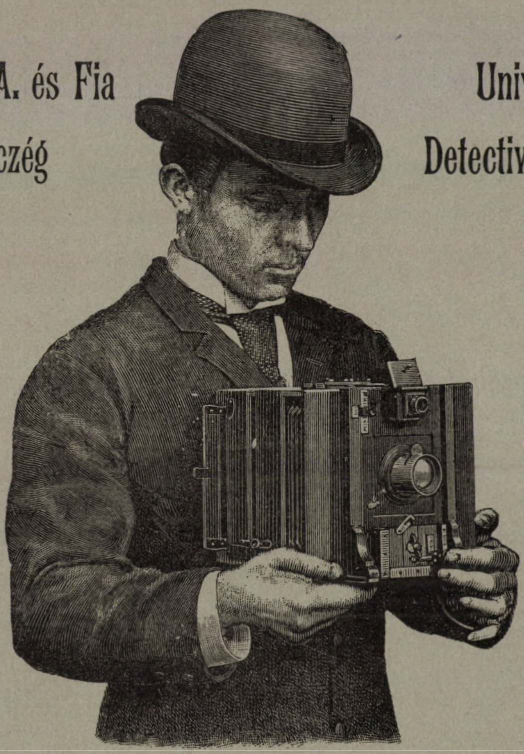
# FÉNYKÉPÉSZETI KÉSZÜLÉKEK

**minden nagyságban és kivitelben nagy választékban.**

Mint különösen kedvelt és nagyon elterjedt készüléket ajánljuk

## Goldmann A. és Fia bécsi czég Universalis Detectiv-kamaráját.

Részletes, dúsan illustrált árjegyzékek bérmentve küldetnek.



Részletes, dúsan illustrált árjegyzékek bérmentve küldetnek.

Czélszerü szerkezete folytán kitünően alkalmas ezen műszer szabadkézből való pillanatfelvételek, ugymint (egy állványra csavarva) személy-, csoport-, tájkép-, épitmény-, interieur-, söt reproductió felvételek eszközlésére. Különböző gyutávolságok beállithatása végett kihuzható szerkezettel és hajtócsavarral bir, és el van látva távmutatóval, mely egy csavar forgatása által a becslés által meghatározott méterek távolságának megfelelő számra állittatik be, hogy az emlitett távolságban levő tárgy élesen jelenjék meg a lemezen. Az objectivum egy különös szerkezetü Steinheil-féle antiplanetikus lencse, a mögötte levő pillanatzár pedig kényelmesen beállitható $^{1}/_{100}$—1 másodperczynyi gyorsaságra, vagy hatályon kivül helyezhető. A kamara továbbá egy keresővel van ellátva és hossz- ugymint függőleges felvételekre egyaránt használható.

A kamara bővebb leirása és használati utasitása az érdeklődőknek rendelkezésére áll.

| Nagyság | Lencse | Ára 6 kettős kassetával és böröndddel |
|---|---|---|
| 9×12 | Antiplanet 25 m/m | 110.— |
| 12×16½ | « 33 « | 152.— |
| 13×18 | « 43 « | 190.— |
| 16×21 | « 43 « | 215.— |
| 16×21 | « 48 « | 230.— |

## Calderoni és Társa, Budapest, IV. kis hid-utcza 8.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

## *Olvasóinkhoz.*

Folyóiratunk némi változáson ment át. A czímlapon látható változást az időközben megalakult *Mathematikai és Physikai Társulat* választmányának ama határozata vonta maga után, mely a folyóirat szerkesztését alulírottakra, mint a Társulat titkáraira bizza. A Math. Phys. Lapok programmja ez által nem módosult, csak a mi felelősségünk fokozódott, de vele együtt kötelességérzetünk is.

Lapunk tartalma csak annyiban szenved változást, hogy a tudományos folyóiratokban megjelenő fontosabb dolgozatok ismertetését egy új rovatban: a *Physikai Szemle* rovatában egyesítjük, a folyóiratok tartalomjegyzékeinek rendszeres közlését pedig — helykimélés czéljából — beszüntetjük.

A *Physikai Szemle* közleményei arra vannak hivatva, hogy a tudományos munka folyamáról s annak figyelemre méltóbb eredményeiről lehetőleg hű képet adjanak.

Nagyobb fontosságú dolgozatokról, mint igértük, időnkint terjedelmesebb czikkeket közlünk az *önálló* czikkek sorában.

Az új rovat mintegy az *Irodalom* első felének helyébe lép s így az utóbbi rovat egészen az új munkák s általában a fontosabb irodalmi események ismertetésére lesz felhasználható.

Hiszszük, hogy ezen változások t. Olvasóink helyeslésével találkoznak.

Budapest, 1892. január 20.

*Bartoniek Géza.* *Rados Gusztáv.*

# A KÖRMÉRÉS TÖRTÉNETE ÉS ELMÉLETE.

(Második közlemény.)

Páratlan buzgalommal számítgatta $\pi$-nek több és több tizedesjegyét LUDOLF (sz. 1539 Hildesheimban, mh. 1610 Leydenben hol a genie-iskola tanára volt). Nehány kevésbbé pontos megközelítés után «*Van de Circkel*» (Delft 1596) czímű értekezésében a következő értéket közölte:

$$\pi = 3{\cdot}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ \ldots$$

s egyszersmind ama terjedelmes számítást is, mely őt erre az eredményre vezette. Lényegben ARCHIMEDES nyomdokain járt s csak abban tért el tőle, hogy a 60-szögből indult ki s az oldalszámot 29 izben megkettőzvén a

$$60.2^{29} = 32212\ 254729$$

oldalú sokszögig haladt. «Die lust heeft, can naerder comen», igy végzi sorait, s kinek lehetett volna több kedve a számítás folytatására, mint neki, saját magának? Valóban hátrahagyott munkái még pontosabb megközelítéseket tartalmaztak. Sirkövére állítólag *harminczöt* tizedest vésetett, melyeket a $2^{65}$-szöggel határozott meg.*

E fáradságos, ámde eredetiség és elmésség nélkül való számítások a maguk idejében oly feltünést keltettek, hogy a keresett szám

* Az első 30 tizedes a következő vers segítségével úgy irható fel, hogy feljegyezzük az egyes szók betűinek számát:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste ingénieux,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

még ma is LUDOLF nevét viseli. Bámulatos türelemmel és kitartással szerzett dicsőség ez; e fáradozásoknak gyakorlati vagy tudományos becse azonban nincsen. Azért más fontosabb eredmények ismertetéséhez sietek. SNELLIUS illetőleg GREGORY-nak már egy alkalommal felemlített következő tételeit értem:

*A beirt szabályos 2n-szögnek területe egyenlő a beirt és a körülirt szabályos n-szögek területeinek ($t_n$, $T_n$) mértani közepével.**

*A körülirt szabályos 2n-szögnek területe pedig akkora, mint a beírt 2n-szög és a körülirt n-szög területeinek harmonikus közepe.***

Képletekben:

$$t_{2n}^2 = t_n \cdot T_n$$

és

$$\frac{1}{T_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_{2n}} + \frac{1}{T_n}\right).$$

Az utóbbi képlet az ismeretes

$$\frac{1}{A_{2n}} = \frac{1}{A_n} + \frac{1}{a_n}$$

egyenletből

$$T_{2n} = nrA_{2n}, \quad T_n = \tfrac{1}{2}nrA_n, \quad t_{2n} = \tfrac{1}{2}nra_n$$

egyenlőségek segítségével könnyen levezethető.

SNELLIUS képlete szintén igen egyszerűen igazolható. Ugyanis a 4. ábrában $BC$ ív az $O$ középponttal biró körnek $2n$-ed része, $AB$ merőleges az $OC$ sugárra, a $D$ pontot pedig az $OB$ sugár meghosszabbitásában úgy választottuk, hogy $CD$ egyenes a kört a $C$ pontban érintse. Tehát

$$AOB = \frac{t_n}{2n}, \quad BOC = \frac{t_{2n}}{2n}, \quad COD = \frac{T_n}{2n}.$$

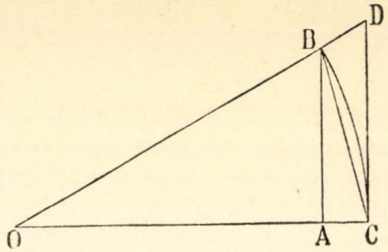
Minthogy $AB$ az $AOB$ és $BOC$ háromszögeknek közös magassága,

$$AOB : BOC = OA : OC;$$

---

* SNELLIUS Cyclom. Prop. 9.

** GREGORY Vera circuli et hyp. quadratura (1667). Prop. 1. et 12.




4. ábra.

másrészt $BOC$ és $COD$ szintén közös magasságú háromszögek, tehát

$$BOC : COD = OB : OD.$$

Most már e két proporczióban a jobb oldalok egyenlők s azért egyszersmind

$$AOB : BOC = BOC : COD$$

azaz valóban

$$t_n : t_{2n} = t_{2n} : T_n,$$

mint azt be akartuk bizonyítani.

Különösen egyszerűen alakul a számítás, ha a területek reciprok értékeit keressük, mert ekkor

$$\frac{1}{t_{2n}^2} = \frac{1}{t_n} \cdot \frac{1}{T_n}$$

$$\frac{1}{T_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_{2n}} + \frac{1}{T_n}\right)$$

egyenlőségek értelmében csakis mértani illetőleg számtani közepet kell képeznünk.

Ezzel egyszersmind módszert nyertünk a kör területének meghatározására. Ugyanis az

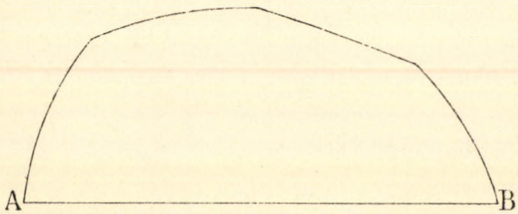
$$\frac{1}{t_4}, \frac{1}{T_4}, \frac{1}{t_8}, \frac{1}{T_8}, \ldots, \frac{1}{t_{2^k}}, \frac{1}{T_{2^k}}, \ldots$$

számsorozatban (ha $r = 1$) az első két elem

$$\frac{1}{2} \text{ illetőleg } \frac{1}{4},$$

a többiek pedig e kettőből sorjában az imént levezetett képletek szerint számithatók ki. E sorozatnak határértéke $\frac{1}{\pi}$, s a sorozat elemei felváltva nagyobbak és kisebbek mint $\frac{1}{\pi}$. Ha tehát a sorozatot bárhol megszakitjuk, az utolsó két elem reciprok értéke $\pi$ számára alsó illetve felső határt nyujt.

A $\pi$ számnak e meghatározása a mathematika mai rendszerében alapvető jelentőségű. Hogy ennek mélyebben fekvő okait megérthessük, ujból vissza kell térnünk Archimedes vizsgálatainak megbeszélésére. A «*Körmérés*»-ről írt értekezésének ismertetésénél mellőztük azon *elvek* fejtegetését, melyeken tételei alapulnak, hogy őket e helyen a terület- és kerületszámítás mai alapjaival együtt tárgyalhassuk. Ily módon a legrégibb és a legújabb tárgyalásmód sajátságai különösen szembeszökők.




5. ábra.

Területek összehasonlítására elegendő az az elv, mely szerint *az egész nagyobb mint annak bármely része.*

Korántsem ily egyszerű azonban a vonalak ivhosszának összehasonlítása. Archimedes-nek erre vonatkozó elvei: «*A gömbről és a hengerről*» írt első könyvének következő magyarázataiban és feltevéseiben vannak letéve.

**Magyarázatok.** 1. *A síkban léteznek oly (végpontjaikkal) határolt vonalak, hogy vagy minden pontjuk a végpontokat összekötő egyenesnek ugyanegy oldalán van, vagy legalább egy pont sem esik az ellenkező oldalra.* (5. ábra.)

2. *Egy oldalról folyvást concavnak nevezzük a vonalat, ha vagy minden húrja egész hosszában a vonalnak ugyanazon oldalára*

*esik, vagy legalább egy húr sem bir oly pontokkal, melyek a vonal másik oldalán vannak.* (Az 5. ábrában ilyen vonal az $A$ és $B$ pontoknak nem egyenes összeköttetése.)

**Feltevések.** 1. *Az ugyanazon két pontot összekötő vonalak közül legrövidebb az egyenes;*

2. *a többi vonalak közül két olyan, mely egy oldalról folyvást concav, nem birhat egyenlő ívhosszszal, mihelyt az egyiknek összes pontjai ama síkrésznek belsejében vagy határán vannak, melyet a másik vonal s a két pontot összekötő egyenes bezárnak. Még pedig a bezárt a rövidebbik.*

Nem látszik szükségesnek elmondanunk miként hasonlítja össze Archimedes ezen az alapon a körnek és a beirt illetve körülirt sokszögnek kerületét, avagy részleteznünk, hogyan bizonyítja be a kör kerülete és területe közt fennálló összefüggést. Egyedül az érdekel, vajon az ívhosszra vonatkozó feltevései valóban szükségesek-e.

A mai mathematika e feltevéseket az által kerüli el, hogy az ívhosszat mint azt a határértéket értelmezi, melyhez a *beírt* sokszög kerülete közeledik, ha oldalai minden határon túl kisebbednek s azoknak száma minden határon túl nő.

Ha már az elemi tárgyalásnál ez állásponthoz alkalmazkodunk, akkor a körmérést a kör területének imént ismertetett meghatározásával kell kezdenünk. A kör kerületét ($k$) azután pusztán a *beírt* szabályos $n$-szögek kerületének ($k_n$) segítségével kell értelmeznünk, úgy hogy

$$k = \lim k_n$$

Innen már most

$$k = \lim \frac{2t_{2n}}{r} = \frac{2t}{r} = 2r\pi,$$

hol $t_{2n}$ és $t$ a beirt szabályos $2n$-szögnek illetőleg a körnek területei. Csak most lehet a körnek és a sokszögeknek kerületét összehasonlítani.

Legyenek ugyanis

$$k, \quad k_n, \quad K_n$$

és

$$t, \quad t_n, \quad T_n$$

a körnek a beirt illetőleg a körülirt szabályos $n$-szögeknek kerületei és területei.

Ismeretes, hogy

$$t_{2n} < t < T_n.$$

Innen a

$$t_{2n} = \frac{r}{2} k_n, \quad t = \frac{r}{2} k, \quad T_n = \frac{r}{2} K_n$$

helyettesítések segítségével következik, hogy

$$\frac{r}{2} k_n < \frac{r}{2} k < \frac{r}{2} K_n,$$

azaz hogy valóban

$$k_n < k < K_n *$$

Visszatérvén SNELLIUS-ra megjegyezzük, hogy ő nemcsak az imént ismertetett számítási módszerek egyik előkészítője, hanem egyszersmind a kör-*kerület* kiszámitásának lényeges tökéletesítője is, a mennyiben e kerület $n$-ed részének számára szükebb határokat állapitott meg, mint a milyeneket a szabályos $n$-szögek oldalai nyujtanak. Egyenlőtlenségeinek szigorú bebizonyitását azonban csak HUYGENS adta, ki még számos más tétel felállításával is iparkodott $\pi$ kiszámitását lehetőleg megröviditeni. Mindkét tudósnak idevonatkozó vizsgálódásai ma már csak történeti érdekűek, de a maguk korában nagy gyakorlati jelentőséggel birtak. Ez okoknál fogva nem terjeszkedhetünk ki minden részlet ismertetésére, de szükségesnek tartjuk HUYGENS (sz. 1629 Haagában, mh. 1695) «*De circuli magnitudine inventa*» czímű értekezésének néhány részletével tiszta fogalmat nyujtani e vizsgálatok természetéről.

---

* A trigonometriában is ép úgy bizonyítandó be, hogy az első negyedben

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha.$$

Ugyanis a 4. ábrában

$$BOC \text{ háromsz.} < BOC \text{ sect.} < COD \text{ háromsz.}$$

tehát

$$\frac{r^2}{2} \sin \alpha < \frac{r^2}{2} \alpha < \frac{r^2}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

ha t. i. a $BOC$ szög mérőszámát $\alpha$-val jelöljük. A bebizonyitandó egyenlőtlenség innen rögtön kiadódik, ha $r^2$ felével osztunk.

Kiinduló pontul szolgál bizonyos beirt illetőleg körülirt egyenszárú háromszögek területének összehasonlitása, melynek eredménye az alanti 1. és 2. theorémában foglaltatik.

**1. theorema.** *Ha adva van* (6. ábra.) *oly beirt $ABC$ egyenszárú háromszög, melynek magassága kisebb a kör sugaránál, és szárai felett, mint alapok felett az $AEB$ és $BFC$ beirt egyenszárú háromszögeket emeljük: akkor az adott háromszögnek területe kisebb mint a többi kettő összegének négyszerese.*

$ABC$ és $AEB$ háromszögek magasságai

$$BD = AB^2 : 2r$$
$$BG = EB^2 : 2r,$$

tehát ezeknek viszonya

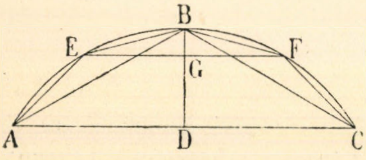
$$BD : BG = AB^2 : EB^2$$

Ámde

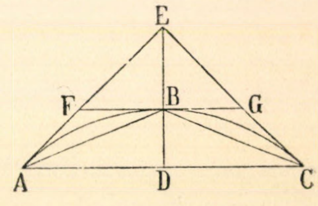
$$AB < 2 \,.\, EB$$

és azért

$$BD : BG < 4 : 1.$$




6. ábra.




7. ábra.

Ugyanazon háromszögek alapjainak viszonya

$$AC : AB < 2 : 1.$$

Az utolsó két egyenlőtlenségnél fogva

$$ABC : AEB < 8 : 1$$

és végre valóban

$$ABC : (AEB + BFC) < 4 : 1.$$

**2. theorema.** (7. ábra.) *$FEG$ egyenszárú háromszögnek $FG$ alapját az $ABC$ körív $B$-ben érinti, szárainak meghosszabbításait* *pedig az A és C pontokban. Az adott egyenszárú háromszög területe kisebb az AC húr felett emelhető ABC egyenszárú háromszög felénél.*

Ugyanis

$$FE > FB = AF,$$

azaz $F$ pont úgy osztja fel az $AE$ vonaldarabot, hogy

$$FE > \frac{1}{2} AE > AF.$$

Tehát

$$FEG : AEC = FE^2 : AE^2 > 1 : 4.$$

Továbbá $AEC$ és $ABC$ közös alapú háromszögek magasságainak viszonya, akkora, mint

$$AE : AF > 2 : 1,$$

tehát egyszersmind

$$AEC : ABC > 2 : 1,$$

úgy hogy a keresett viszony

$$FEG : ABC > 1 : 2.$$

Ezek után áttérhetünk a félkörnél kisebb karéjok (segmentumok) megbecsülésére.

**3. theorema.** *A félkörnél kisebb karéj területe nagyobb, mint az alapját képező húr felett emelt beírt egyenszárú háromszögnek* $\frac{4}{3}$*-a.*

A 6. ábrában az $ABC$ egyenszárú háromszög szárai felett emelt $AEB$ és $BFC$ egyenszárú háromszögek összege az 1. theorema értelmében nagyobb $ABC$ háromszög negyed részénél

$$AEB + BFC > \frac{1}{4} ABC.$$

Az $AE$, $EB$, $BF$ és $FC$ húrok felett ismét egyenszárú háromszögeket emelhetünk. Ezeknek területe nagyobb mint

$$\frac{1}{4}(AEB + BFC),$$

tehát még inkább nagyobb mint

$$\frac{1}{4^2} ABC.$$

Ez az eljárás határtalanul folytatható. Ily módon a karéjt végtelen sok háromszögre bontjuk, melyeknek összege nagyobb mint

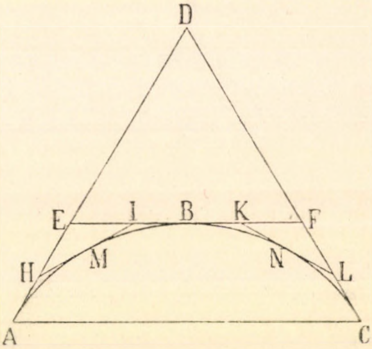
$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right) ABC$$

azaz valóban nagyobb mint

$$\frac{4}{3} ABC.$$

A körkaréj területére ezzel alsó határt nyertünk. Felső határt a 4. theorema szab meg.

**4. theorema.** *A félkörnél kisebb segmentum területe kisebb ama háromszög két harmadánál, melyeknek alapja a karéj alapja, míg szárai a segmentumot határoló körívet két szélső pontjában érintik.*




8. ábra.

A 8. ábrában az $AC$ ivnek felező pontja $B$, $AB$ és $BC$ ivek felező pontjai $M$ illetőleg $N$; a nyert íveket ujra tetszőlegesen sokszor felezhetjük.

A felező pontokban vont érintők

| | | |
|---|---|---|
| $B$ pontban | $EF$, | |
| $M$ és $N$ pontokban | $HI$ és $KL$ | stb. |

A második theorema értelmében

$$EDF > \frac{1}{2} ABC \text{ háromsz.}$$

$$HEI + KFL > \frac{1}{2}(AMB + BNC) \text{ stb.}$$

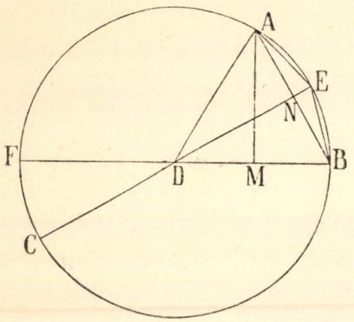
Az egyenlőtlenségek e végtelen, sorozatát összeadván lesz

$$ADC \text{ háromsz.} - ABC \text{ segm.} > \frac{1}{2} ABC \text{ segm.}$$

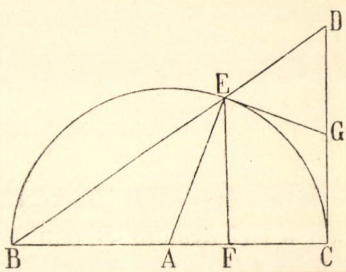
és innen valóban

$$ADC \text{ háromsz.} > \frac{3}{2} ABC \text{ segm.}$$

Alkalmazzuk most már a 3. és 4. theoremát azon karéjokra, melyek a beirt szabályos $n$-szög körül keletkeznek.




9. ábra.




10. ábra.

Ha $t_n$ illetőleg $T_n$ a beirt illetőleg a körülirt szabályos $n$-szög területe, akkor a kérdéses segmentumok mindegyikének területe a

$$\frac{4}{3}(t_{2n} - t_n) : n, \quad \frac{2}{3}(T_n - t_n) : n$$

számok közt fekszik.

Valamennyi $n$ karéjt a beirt $n$ szög területéhez adva, a kör területe ($t$) számára a következő határokat nyerjük:

(5. és 6. theorema.)

$$t_{2n} + \frac{1}{3}(t_{2n} - t_n) < t < \frac{2}{3} T_n + \frac{1}{3} t_n.$$

A segmentumok területéről könnyen következtethetünk a megfelelő ívek hosszára is.

A 9. ábrában a 3. theorema szerint

$$\frac{4}{3} AEB \text{ háromsz.} < AEB \text{ segm.}$$

Mindkét területhez $ADB$ háromszöget csatolván lesz

$$\frac{4}{3}\, AEBD \text{ négysz.} - \frac{1}{3}\, ADB \text{ háromsz.} < ADB \text{ sect.}$$

$ADB$ szöget $2\alpha$-val jelölve a szóban forgó területek következőképen fejezhetők ki:

$$AEBD \text{ négysz.} = r^2 \sin\alpha$$

$$ADB \text{ háromsz.} = r^2 \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$ADB \text{ sect.} \quad = r^2\alpha.$$

Egyenlőtlenségünk értelmében tehát

$$\frac{4}{3}\sin\alpha - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\alpha < \alpha$$

vagy

$$\sin\alpha + \frac{1}{3}\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) < \alpha.$$

Hasonlóan nyerhetünk a körív számára felső határt. A 10. ábrában a $BC$ átmérő $B$ pontján át huzott $BE$ szelő a $C$-ben vont érintőt $D$-ben metszi.

A körnek $C$ és $E$ pontjaiban vont érintők $G$ pontban találkoznak. $GEC$ és $ECG$ kerületi szögek ugyanazon köríven állanak, tehát

$$GEC = ECG,$$

és így pótszögeik szintén egyenlők, tehát

$$DEG = EDG.$$

Ezeknél fogva

$$CG = EG, \quad GD = EG.$$

Az utóbbi egyenlet mindkét oldalához $CG$-t adva

$$CD = CG + EG.$$

Már most a 4. theorema szerint

$$\frac{2}{3}\, EGC \text{ háromsz.} > CE \text{ segm.}$$

Mind a két területhez $CAE$ háromszöget csatolva

$$\frac{2}{3}\, CGEA \text{ négysz.} + \frac{1}{3}\, CAE \text{ háromsz.} > CAE \text{ sect.}$$

Amde

$$CGEA \text{ négysz.} = \frac{r}{2}(CG + EG) = \frac{r}{2} CD$$

$$CAE \text{ háromsz.} = \frac{r}{2} EF$$

és

$$CAE \text{ sect.} = \frac{r}{2} \text{ arc. } CE.$$

Egyenlőtlenségünk tehát így is írható:

$$\frac{2}{3} CD + \frac{1}{3} EF > \text{arc. } CE$$

avagy

$$\frac{4}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} \sin \alpha > \alpha$$

a hol $CAE$ szöget rövidség kedveért $\alpha$-val jelöltük.

Ezen egyenlőtlenségből még egy másik nyerhető, melyben többé csakis $\alpha$ trigonometrikus függvényei szerepelnek, s nem egyszersmind $\frac{\alpha}{2}$ függvényei is. Ismeretes ugyanis, hogy

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha.$$

Innen

$$\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

s ha összevonunk

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha}{2 \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \alpha \, . \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

A jobboldali nevező nagyobb lévén a baloldalinál, tehát egyszersmind

$$2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha < \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

azaz

$$\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha > 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Tehát az imént nyert egyenlőtlenségből még az is következik, hogy

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha + \frac{2}{3}\sin\alpha > \alpha,$$

avagy

$$\operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{3}(\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha) > \alpha.$$

A levezetett

$$\sin\alpha + \frac{1}{3}(\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha) < \alpha$$

és

$$\operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{3}(\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha) > \alpha$$

egyenlőtlenségek $\alpha$-t jóval szűkebb határok közé szorítják, mint az általánosan ismeretes

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha.$$

*Kürschák József.*

---

# KUPSZELETEN FEKVŐ PROJEKTÍV PONTSOROK KÉPZŐDMÉNYÉRŐL.

A tétel, melynek bebizonyítását az eddig ismereteseknél egyszerűbb és elemibb módon adjuk a következő:

*Adott kúpszeleten fekvő két projektív pontsor megfelelelő pontjait kötvén össze, az összekötő egyenesek oly kúpszeletet burkolnak be, mely az adottat két pontban érinti.*

E különben ismeretes tétel* oly módon bizonyítható be, hogy kimutatjuk, miszerint a projektív pontsorokat összekötő egyenesek bármely párja, a többiektől projektív pontsorokban metszetik.

Legyenek az egyik pontsor elemei $(A, B, C, \ldots)$, a másikéi $(A_1, B_1, C_1, \ldots)$, akkor ismeretes elemi tétel alapján tudjuk, hogy az

---

* SCHRÖTER Theorie der Kegelschnitte II. Auflage §. 52, STAUDT Beiträge zur Geometrie der Lage §. 1. 23.

$$(AB_1,\ A_1B),\ (AX_1,\ A_1X_1),\ (BX_1,\ B_1X),\ \ldots$$

egyenespárok metszéspontjai ugyanazon egyenesen feküdnek; legyen ez $p$ s ennek a kúpszeletre vett pólusa $P$. Jelöljük végül az

$$(AA_1,\ XX_1),\ (BB_1,\ XX_1),\ (AX_1,\ A_1X),\ (BX_1,\ B_1X)$$

metszéspontokat rendre $X'$, $X''$, $X_a$, $X_b$-vel.

Most már, ha $X_1$ leirja az adott kúpszeletet, akkor az $AX_1$ és $BX_1$ sugarak $A$ illetőleg $B$ körűl leírnak két projektív sugársort, melyek a $p$ egyenest két projektív pontsorban, $(X_a, \ldots)$ és $(X_b, \ldots)$-ben, metszik át. $X_a$ és $X_b$ pontoktól leírt pontsor egyes pontjainak polárisai az adott kúpszeletre nézve a $PX'$ illetőleg $PX''$ sugarak, $P$ körül szintén projektiv sorokat írnak le és ezért az $AA_1$ és $BB_1$ egyeneseken mozgó $X', \ldots$ és $X'' \ldots$ pontok projektív pontsorokat írnak le. De a megfelelő $X'$ és $X''$ pontok összekötő egyenese

$$(X'X'') \equiv (XX_1),$$

úgy hogy a változó $(XX_1)$ az állandó $(AA_1)$ és $(BB_1)$ egyeneseket projektiv pontsorokban metszi.

Az $AA_1XX_1$ és $BB_1X_1X$ négyszögek harmonikus tulajdonsága folytán a $(PX')$ és $(PX'')$ egyenesek az $X_a$ és $X_b$ pontoknak polárisai az adott kúpszeletre és egyszersmind azon kúpszeletre vonatkozólag is, melynek az

$$X'AA_1,\ X'XX_1;\ X''BB_1,\ X''XX_1$$

egyenesek érintői: tehát mind két kúpszelet a $p$ egyenesen valamint a $P$ pont körül ugyanazt az involucziós pontsort illetve sugársort indikálja.

*Klug Lipót.*

# PHYSIKAI SZEMLE.

**Az inga alkalmazása a Föld alakjának meghatározására.** Az «American Journal of Science» XLI. (1891. évf.) köt. 445—460. lapjain az inga geographiai és geodæsai alkalmazásairól E. D. PRESTON tollából igen érdekes czikket közöl, melynek lényegét ismertetni a következő soroknak feladata.

ANAXIMANDER korától (600. Kr. e.) kezdve, a mikor a Föld alakját hengernek gondolták, melynek magassága az átmérő háromszorosa, CLARKE és BESSEL háromtengelyű sphæroidjáig, a Föld alakját illetőleg különféle theoriák merültek fel, melyeket a tökéletesített physikai módszerek alapján megfigyelt tények a valószinűség kisebb-nagyobb fokával ruháztak fel. Hét generatio kellett hozzá, hogy a Föld hengeralakját elejtsék s helyébe a — koczkát léptessék. ARISTOTELES (300. Kr. e.) a Földet gömbalakunak tartotta s ERATOSTHENES (100. Kr. e.) már a földgömb méreteit is iparkodott annak árnyékából meghatározni. E kérdés tisztázására az egész középkoron át mi sem történt, míg végre a tudományok ujjáébredése korszakában (1525) FERNEL lényegében ugyanazon a módon, melyen még ma is dívik: két pont távolságának és földr. szélességeik különbségének megmérésével igyekezett a földgömb dimensióit megállapítani. Ez időtől általában elfogadták a nézetet, hogy a Föld gömbded; de most már az lett a kérdés, mennyiben tér el a gömbtől s mi a valódi alakja? PICARD (1669) triangulatio útján mérte meg a földmeridián fokát s ezúttal először alkalmazott pókszál-keresztet a teleszkop optikai tengelyének szabatosabb megjelölésére. NEWTON PICARD eredményét már felhasználta a Holdnak a Föld felé esésének kiszámítására. CASSINI nagykiterjedésű méréseiből levont, és NEWTON eredményeinek némileg ellentmondó következtetései, valamint az a tapasztalat, hogy az inga az æquatoron lassabban leng, mint a közepes és magasabb szélességek alatt, tudományos vitát szült, mely a franczia akademiát a lapplandi és perui fokmérési expeditio kiküldésére indította. Ennek munkálatai a Föld alakjának kérdését az egyenlítői és sarki átmérők hosszaságainak mentül pontosabb meghatározására szorították s azóta mindjobban közeledünk az egyébként még mindig ismeretlen valósághoz. A mindinkább finomuló megfigyelési módszerek új, bár nem keresett ismeretekre vezettek, mint például, hogy nem annyira a sphæroid mint inkább a (háromtengelyű) ellipsoid alkalmazkodik a megfigyelés adataihoz, továbbá hogy bizonyos állandó, eddigelé ki nem derített physikai okoknak kell létezniök, a miért az éjszaki és déli hemisphaerák nem teljesen egyenlők.

Miután a fokmérések kimutatták, hogy az æquator átmérője és a Föld tengelye közti különbség körülbelül $^1/_{300}$-ada az æquator átmérőjének, egyelőre ennek a mennyiségnek, t. i. a Föld lapultságának lehető pontos megállapítására törekedtek. Ez ügyben, úgy látszik, kapóra jött az a fölfedezés, hogy a Párisban pontosan járó óra ingáját Cayenne-ben körülbelül 0,1 vonallal meg kellett a napokinti 2 m.-nyi késedelem kiegyenlítése végett rövidíteni, jeléül annak, hogy a kisebb földr. szélesség alatti Cayenneben a nehézségerő kisebb. Ezt az eredményt az egyebütt is tett megfigyelések jobbára igazolták, ámbár a nehézségerő változása még tetemes földr. szélességi különbség mellett is igen csekélynek mondható: így a másodperczinga hossza az egyenlítőtől a sarkokig körülbelül $^1/_{200}$-ával változik. Befolyással van a nehézségerőre továbbá a Föld középpontjától való távolság is, bár a legmagasabb (amerikai) hegyek tetején e változás a lengésidőnek alig $^1/_{1500}$-ad résznyi különbségében nyilatkozik, mely különbség még inkább csökken, ha a távolságon kívül a hegynek saját vonzását is veszszük tekintetbe. Általában az inga lengésidejének megfigyelése mindaddig elegendő, míg a nehézségerőnek csak relativ változásairól van szó. De ha a nehézségerő viszonylagos változásai helyett a változás absolut értékét akarjuk megtudni, az időn kívül még egy hosszmennyiség meghatározására is van szükségünk; ez utóbbi az idő mérését szabatosságra messze túlhaladja, mert hisz nemcsak jóval könnyebb a méternek, mint a másodperczenek $^1/_{100000}$-ed részét mérnünk, hanem a lengésidőben elkövetett hiba meg is kétszereződik, ha azt az inga hosszára vonatkoztatjuk. Látnivaló ebből, hogy az ingavizsgálatok leggyengébb része, a lengésidő megfigyelése.

Fokmérésen, inga s a Hold parallaxisának megfigyelésén alapulnak a módszerek, melyeket eddig a Föld alakja és méreteinek megállapítására ajánlottak, nevezetesen Harkness, ki a Föld lapultságát az inga hosszából és a Hold parallaxisából, tényleges alakját pedig fokmérés útján javasolta meghatározni. Az ingavizsgálatokat illetőleg a németek, oroszok és svájcziak mindenik állomáson a nehézségerő absolut értékét mérik, mi a lengésidő, ingahossz, sőt még az ingaállvány oscillatióinak pontos ismeretét követeli, míg az angolok és az Egyesült-Államokban működő Coast and Geodetic Survey állomásról állomásra a nehézségerőbeli különbség mérésével érik be és a nehézségerő absolut értékét csak egy, a mérésnek mintegy básisául szolgáló állomáson határozzák meg; ez a különbségi módszer nemcsak idő és fáradság dolgában gazdaságosabb, hanem az a jó oldala is van, hogy benne az összes állomásokra nézve azonos hibaforrások egymást kiküszöbölik.

Most az a kérdés, mily határig hajtsuk az ingamérések szabatosságát? Bizonyára nem addig a határig, melyet a nehézségerő helyi eltérései jóval túlhaladnak; mert mi sem bizonyosabb, mint az a tény, hogy a nehézségerő helyről helyre oly sokféleképp és meglepő módon változik, hogy e változások minden tudományos rendszerezéssel daczolnak s legfeljebb azt az általános eredményt látszanak igazolni, hogy a hegyek könnyűek, a szigetek pedig nehezek. Így a majdnem elsőknek mondható ilynemű ingamegfigyelések szerint az ecuadori Andes-hegység átlagos sűrűsége a vizénél kevéssel nagyobb; FOSTER megfigyelési sorozatai szerint a Zöld-hegység vulkanikus formatiója kétszer oly sűrű mint a parafa; a Szenthegység Japánban jóval könnyebbnek mutatkozik, mint térfogata és sűrűségéhez képest várnók. A Havai-szigeteken a Heleakala középsűrűsége úgy látszik, megegyezik a felszíni kőzet sűrűségével: a pennsylvaniai Alleghany hegység a semminél is könnyebb, mi azt jelenti, hogy ha a hegység gerinczén megfigyelt nehézségerőn a magasság miatti igazítást teszszük, a nehézség nem nagyobb mint a hegy tövénél, vagyis a hegy tömegének semmi vonzása nincs. — A szigetek közől Fernando, Helena, Ascension, Minecoy, Isle of France, Bonin, Mani és Carolina említendők, melyek nagyobb szárazföldi tőmegektől messze eső, mélyen az oczeánba nyúló szigetek; rajtok a nehézségerő akkora, hogy feltünően magas értékét csakis a mélyebben fekvő rétegek sűrűségéből magyarázhatjuk. E szerint az ingától még a Föld belső szerkezetére nézve is várhatunk okulást, melynek már is egyik eredményeül tekinthetjük, hogy a Föld tömegközéppontja nem a geometriai alak közepébe, hanem a Csendes-oczeán alatti hemisphærán belül esik; a mint egyáltalában tapasztaljuk, hogy a Csendes- és Ind-oczeán felé nagyobb a nehézség vonzása mint a környező fenföldek felé. Dehrában, a Himalayától 50 ang. mfldnyi távolságban és 2000′ magas ponton az ólomfüggély attractiója $^1/_{5000}$-ed része a Föld szinén uralkodó nehézségnek, míg a hegy csúcsán a nehézség fogyása a teljes erő $^1/_{2000}$-ed része, mi csakis úgy magyarázható, hogy a dehrai kitérést a Dehra és Himalaya orma közt elterülő, átlag 15000′ magas, nagy tibeti fensík okozza, és hogy az inga-állomás alatti rétegek sűrűsége csekély, a mit mind az azimut, mind a szélesség szerinti eltérés igazol.

Miután az értekező elméleti és gyakorlati okokra támaszkodva a tetrædront állítja oda ama geometriai alaknak, melyre a Föld összehúzódásánál fogva, mint maximalis felületű alakra törekszik, az ingának a Föld középsűrűsége meghatározására való alkalmazását fejtegeti. Lényegében Hutton módszerét alkalmazták 1887-ben a Sandwich-szigetek egyikén emelkedő Haleakala nevű kráterre, mint a mely alakja- és alkatánál fogva anyaga átlagos sűrűségének megállapítására kiválóan alkalmasnak mutatkozott. E gyakorlatilag meghatározott sűrűség a megfelelő egyenletbe téve, a hegynek éjszaki és déli lejtője előtt csüngő ólomfüggélyek iránykülönbségeül 28″-et eredményezett, míg a tényleges megfigyelés 29″-et mutatott.

A nehézségerő változásaival szorosan összefüggnek a földr. szélességnek tényleg megfigyelt változásai, melyek, hogy a szilárd földkéregnek a folyós vagy félig folyós mag fölött való uszása- vagy eltorlódásból, vagy a földtengely elmozdulásából erednek-e, még eddig eldöntve nincsen; tény az, hogy a Nap és Hold a Föld szine $^1/_{10}$-ét borító, 0·1 m. vastag vizrétegben támasztott árapály a Föld tengelyét 0·16″-el ki birja mozdítani, mi a szélességméréseknél könnyű szerrel mérhető mennyiség. Minthogy pedig ama vízréteg nyomása a 0·007 m. levegőnyomásnak felel meg, könnyen belátható, hogy a légkör sűrűségében beálló nagykiterjedésű változások a földtengely helyzetében is némi észrevehető változást okozhatnak. Ez oknál fogva ajánlatos, ugyanazon a helyen ugyanazzal az ingával minél többször megfigyelni a nehézségerő változásait, mint olyanokat, melyek minden valószinűség szerint a földr. szélesség változásaiból erednek.

Befejezésül az értekező az ingával való bánás régibb és újabb gyakorlati módszereit: t. i. a coincidentiák módszerét (igen csinos és tanulságos a Mendenhall javított módszere), a chronografikus módszert ismerteti végül pedig egy újabb, kevésbbé ismert módszert fejteget, mely csak egy, félmásodperczeket jelző ingát tesz szükségessé; ennek coincidentiái egy másodperczeket jelző chronometerrel, valamely mellékkészülék közbenjárásával optikailag feljegyzendők. E czélra a chronometer úgy van készítve, hogy másodperczenkint egy relais fegyverzetét nyitja meg, melyhez egy vékony réssel ellátott fémlemezke van erősítve; szemben a fegyverzet mozgó résével van egy álló fényrés, melyen egy alkalmasan elhelyezett fényforrás mindannyiszor egy fénynyalábot bocsát keresztül, valahányszor a chronometer az elektromos áramot megszakítja. A készülék kőrülbelül 10′-nyira van az ingától akkép elhelyezve, hogy a résen átmenő fénysugár két tükörre esik, melyek egyike az ingára van erősítve, a másik pedig közel hozzá és mozdulatlan. E tükrökről a fénysugár a megfigyelő teleszkopjába verődik vissza. Ha az inga nyugszik, a figyelő másodperczenkint két fénycsikot lát, míg ellenben az inga lengése alatt az inga tükréről érkező fénysugár csak akkor látható, ha az inga nyugalmi helyzetén megy keresztül. E szerint másodperczenkint a fénysugár kétszeri felvillanása lesz látható, míg ha az inga lengésideje a félmásodpercztől némileg különböző, az inga tükrének képe az állóéhoz képest némileg eltolódik. Az inga-tükör képének felvillanásahoz két feltétel szükséges: egy az, hogy a chronometer megnyissa a rést, a második az, hogy az inga e pillanatban, melynek tartama körülbelül 1/100 mpercz, oly helyzetbe jusson, hogy a rés képe a teleszkópba verődjék vissza. Így pl. ha az inga lengésideje a félmásodperczet 0·0066 mperczczel meghaladja, a coincidentia időköze 6 m. 15 s.

Minthogy végre a légnyomásnak és hőmérséknek is nagy a befolyása, az inga lengéseknek zárt szekrényben kell végbemenniök, a melyben a levegő nyomását állandóan egy bizonyos átlagon tartható. Itt aztán megint az kérdés, mily távolban szűnik meg az ingára ható szekrény falának zavaró befolyása? A Coast and Geodetic Survey gondos kisérletei szerint e hatás csak akkor vált érezhetővé, ha az inga körülbelül egy hüvelyknyire volt a szekrény falától, továbbá, hogy a fal közelsége az inga oldalaihoz, nagyobb befolyással van az ingára, mint az inga lengése irányában eső falaknak. Fontos tényező a levegő felhajtó ereje és nyulóssága is, melynél fogva az inga a hozzátapadó levegőt magával kénytelen vonszolni. A levegőnek ezt a hatását Stokes, Green, Peirce behatóan tanulmányozták s ezzel nemcsak finom kisérleti módszereiknek, hanem a subtilis mathematikai elemzésnek is fényes tanuságait adták. *Schmidt A.*

*

**Az üveg oldhatósága a vízben.** E. Pfeiffer: «Ueber den Angriff von Glas durch Wasser und eine electrische Methode zur Bestimmung desselben». *Ann. d. Ph.* LXIV. 239—264. l.

Az üveg a tudományos praxisban legelterjedtebb anyagok közé tartozik s mint ilyennek sok mindenféle követelménynek kell megfelelnie. Ezek közül a leglényegesebbek egyike az, hogy a vele érintkező anyagok hatásának ellentálljon, hogy lehetőleg állandó legyen. Ha valamilyen optikai műszernek alkotó része, megköveteli tőle, hogy felülete meg ne homályosodjon (ne vakuljon meg) s ha edényül szolgál, ne változtassa meg a benne lévő folyadékokat, azaz ne olvadjon.

Már rég észrevették, hogy az üveg csak tökéletlenül felel meg eme követelményeknek s azért is az üvegeket alkalmazásuk előtt próbáknak szokták alávetni. Igy pl. az optikai czélokra használandó üveget már rég óta apróra zuzva több órán át forro vízbe tették s a leoldott mennyiséget azután vagy az üveg súlyveszteségéből, vagy a víz chemiai megelemzéséből állapították meg. Mentől kevesebb olvadt le, annál jobbnak minősítették az üveget. Ámde ez az eljárás hiányos. Egyrészt azért, mert nem veszi figyelembe, hogy a forró víz az üveget jelentékenyen megtámadhatja, ellenben a hideg víz azt alig vagy épen nem teszi; másrészt pedig azért, mert az üveget nem a rendeltetésének megfelelő alakjában vizsgálja.

A szerző az üveggel érintkező víznek elektromos ellenállásából következtetett az üveg oldhatóságára. A módszer előnye, hogy rendkívül érzékeny és így alacsony hőmérsékletű víznél is használható s azonfelül nem követeli azt, hogy az üveg rendeltetésének megfelelő formájából kivetköztessék. A módszer azon alapszik, hogy a vegyileg tiszta víznek elektromos vezető képessége — mindaddig, míg csekély mennyiségekről van szó — a benne föloldott elektrolitikus természetű anyag mennyiségével arányosan változik. Egységül azt az elektrolitikus természetű anyag-mennyiséget ($\Delta_0$) fogadja el, melylyel 1 $cm^3$ víz tartalma óránkint megszaporodnék, ha 1 $cm^2$ üvegfölülettel érintkeznék s azt a szaporulatot veszi egyszersmind az üveg oldhatóságának mértékeül.

Behatóbb vizsgálatból a szerző ahhoz az eredményhez jut, hogy bár több elektrolitikus természetű anyag van az üvegben, a jelen körülmények között azok közül csak is a káli és a nátron érdemel figyelmet, mert a többi üvegalkotó anyag a vegyileg tiszta vízben elenyésző csekély mennyiségben oldódik. Kedvező körülmény az is, hogy a káli és a nátronnak molekuláris vezető-képessége között igen csekély a különbség; u. i. KOHLRAUSCH szerint:

$$KOH\text{-ra nézve}\quad \frac{\Delta_0}{m} = 220 \cdot 10^{-7}$$

$$NaOH\text{-ra nézve}\quad \frac{\Delta_0}{m} = 200 \cdot 10^{-7},$$

a hol «$m$» jelenti azt a számot, melyet nyerünk, ha az egy literben foglalt elektrolitikus anyagnak grammokban kifejezett súlyát ugyanazon anyagnak aequivalens súlyával elosztjuk.

Méréseit a SIEMENS-féle hidon elektrodinamometer segélyével hajtotta végre.

Nagy gondot okozott a víztartó edény anyagának a megválasztása, nehogy annak fertőzményei az egész kisérletet bizonytalanná tegyék; a czélnak legjobban megfelelt a porczellán-edény, a mennyiben annak mázza vagy épen nem, vagy csak oly csekély mértékben olvadt a vízben, hogy ennek befolyását kétszeri méréssel könnyen ki lehetett küszöbölni.

A kisérlet részletei a következők: a megvizsgálandó üvegből szerző kb. 8 cm. magas csövet a vegyileg tiszta vízzel megtöltött porczellán edénybe állított. Az 1—2 óra alatt leoldott üvegmennyiséget a víz elektromos ellenállásának meghatározása által állapította meg.

A kisérletek főbb eredményei a következők:

A föntemlített módon meghatározott $\Delta_0$ valóban az illető üveg oldhatóságának jellemző kriteriuma. A kisérlet elején $\Delta_0$ meglehetős nagy, de csakhamar alábbszáll, azonhan bem éri el egyszerre az állandó értékét, hanem egy ideig ingadozik s csak azután mutatkozott állandónak.

Szerző a $\Delta_0$-nak azt az állandó értékét, mely véleménye szerint nem függ az időtől, hanem csak is az üveg minőségétől és a vizfürdő hőmérsékletétől, ezentúl $\Delta_0^{(t)}$-vel jeleli s egyszersmind a vízben való oldhatóság mértékeül fogadja el.

20°C mellett $\Delta_0^{(20)} = 100$; e számadatból következik, hogy óránkint 1 $cm^2$ fölületről 1—2 milliomod milligramm olvadt le.

Magasabb hőmérsékletnél a víz nagyobb mértékben támadja meg az üveget, mint alacsonyabb hőmérsékletnél és pedig, míg a hőmérséklet számtani arányban emelkedik, addig az üveg oldhatósága még a mértaninál is nagyobb arányban nő.

*

J. Kohlrausch: «Ueber die Löslichkeit einiger Gläser in kaltem Wasser. Ann. d. Ph. LXIV. 577—623. l.

Kohlrausch az üveg oldhatóságával már régebben foglalkozott. Tapasztalatai arra birták, hogy a kérdést rendszeres tanulmány tárgyává tegye.

Mindenek előtt a tárgyra vonatkozó s még megoldásra váró kérdéseket sorolja elő, nevezetesen:

1. Mennyiben függ az üveg oldhatósága attól, hogy minő alkatrészekből áll. — 2. Mennyiben függ az üveg-készítés módozataitól. (Milyen hőmérséklet s mennyi ideig történt az olvasztás, hűtés stb.) — 3. Tesz-e különbséget az, hogy az üveg felülete fújva, köszörülve vagy étetve van. — 4. Hogyan oldják a különböző folyadékok. — 5. Micsoda alkatrészei oldódnak; melyek könnyebben, melyek nehezebben. — 6. Vajjon az oldatban található mennyiség valóban a folyadéknak az üvegre való összes hatását tünteti-e fel. — 7. Mennyire terjed befelé a hatás. — 8. Változik-e és hogyan az üveg oldhatósága, ha hosszabb vagy rövidebb ideig érintkezik a folyadékkal. — 9. Mennyire lehet az esetleg kéznél levő üveg oldhatóságát csökkenteni. — 10. Nevezetesen, lehet-e az üveget ily módon annyira kilugozni, hogy többé ne oldódjék. — 11. Szükséges-e, hogy a folyadék e végből többször megújíttassék. — 12. Milyen befolyása van a hőmérsékletnek. — 13. Mennyire változott meg az üvegből való tárgynak az alakja azután, hogy a folyadék megtámadta; mennyire nedvesedik meg a fölülete s milyen rajta a folyadék mozgékonysága. — 14. Van-e valami összefüggés az üveg nedvszívó természete és oldhatósága között. — 15. Lehet-e könnyű szerrel megtudni azt, hogy valami üveg jó-e vagy sem.

Kohlrausch főleg a hideg vízben való oldhatóságot tanulmányozta. Az oldhatóság mérésére az elektromos ellenállás változásán alapuló módszert megbizhatónak tartja.

Terjedelmes dolgozatának főbb eredményei a következők:

Ha annyi vizet használt, hogy minden $cm^2$ területre 1 $cm^3$ víz jutott, akkor a 18° hőmérsékletű tiszta víz az addig még használatlan üveget eleinte rohamosan, később mindinkább gyöngébben oldotta fel, úgy hogy pl. a thüringiai üveg 1 $cm^2$-ről kezdetben naponta körülbelül $\frac{1}{6000}$ mg., néhány hónap mulva már csak $\frac{1}{15000}$ mg. oldódott le, 100 nap alatt pedig öszszesen 0·01 mg.; 80° hőmérsékletű víz már rövidebb idő (20 óra) alatt majdnem hatszor annyit oldott le. Rosszabb minőségű üvegnél az a menynyiség majdnem tizszerte akkora, úgy hogy 20 órán át körülbelül 500 mg. jutott 1 liter vízbe; de akadt szerző olyan üvegre is, melyről naponta nem több, mint $\frac{1}{100000}$ mg. olvadt le.

Megjavul az üveg, ha hosszabb időn át hideg, de még inkább ha meleg vízzel érintkezik; előnyös az is, ha a vizet időnkint frissel pótoljuk; a savakban fürösztött üveg szintén megjavul. Rossz üveg fürösztés után is csak rossz marad. Finom por alakban áztatott üveg nagyon is rohamosan olvad a vízben, de az olvadás később alábbhagy és pedig annál előbb, mennél kevésbbé olvad maga az üveg.

A víznek felfrissítése rendesen növeli az üveg oldhatóságát, de a hatás nem tartós, mert csakhamar beáll ilyenkor is a dolognak rendes lassubb lefolyása; végkép azonban nem szünik meg, még jobb minőségű üvegnél sem, ha a kilúgozás féléven át is tart.

A hőmérsékletnek aránytalanul nagy a befolyása, úgyannyira, hogy 10°-kal való fölhevítés mellett négyszerte jobban oldódik az üveg.

Abból, hogy mennyi ideig áll el az üveg a szabad levegőn, általában nem lehet következtetni arra, hogy miként viseli majd magát a vízben; mert megtörtént, hogy bár erősen támadta meg a víz az üveget, annak fölülete a látszat szerint alig változott; ellenben abból, hogy a porrá zúzott üveg mily mértékben hygroskopikus, igen is lehet következtetni az üveg oldhatóságára. A kisérletek azt is mutatják, hogy mennél több alkaliás anyag van az üvegben, annál könnyebben támadja meg a víz s valószinű, hogy azok közül a káli az, mely az oldást legjobban elősegíti. Ugyanazt teszi a kovasav is, ellenben csökkentheti a víz hatását a Calciumnak és hasonló kötő anyagnak a hiánya.

Kohlrausch a különböző üvegnemeket egyenkint beható vizsgálatnak vetette alá, s amennyire lehet, pontos számadatokban foglalta össze kisérletei eredményeit.

*

Az üvegnek hideg vízben való olvadását Makarow finom areometereken vette észre. Egyik areometere 700 mérés alatt összesen 0·61 mgr-ot vesztett súlyából. Minthogy 1 mg. súlyvesztés 0·00001-nél kisebb hibát okoz a sürűség adatában, csak kivételes esetben kell az areometereket ebből a szempontból megvizsgálni. (Journal d. russ. chem. phys. Ges. XXIII. 224.)

*Palatin G.*

*

**Az önműködő árammegszakító elméletéhez.** V. Dvořák: Zur Theorie selbstthätiger Stromunterbrecher. *Ann. d. Ph.* XLIV. 244—377. l.

A WAGNER-féle kalapács elmélete, úgy a mint azt NEEF 1839-ben felállította, teljesen téves. Rámutatott erre RAYLEYGH (1877-ben), a ki a megszakító működése okát az áramzárás (contact) késésében és az elektromágnes tekercsének önínductiójában találta meg. DVOŘÁK e tárgyról 1889-ben értekezvén, a működés okát főképen az önínductióban keresi. A régi elmélet szerint az árammegszakítót az a vonzás tartja mozgásban, mely az elektromágnes és a rugón ülő vasmag (fegyverzet v. horgony) között fellép, miközben ez a kirezgés határától az egyensúlyi helyzet felé mozog *(kedvező periodus)* és nem veszi tekintetbe azt a hatást, melyet az elektromágnes akkor fejt ki, midőn a horgony az egyensúlyi helyzetből a mágnestől távolodik *(kedvezőtlen periodus)*; pedig ez a két hatás egymást kiegyenlíti s a rezgés föntartására befolyással nincs. Az önműködő árammegszakító rezgésének okát tehát *más körülményekben* kell keresni, s DVOŘÁK értekezésében éppen ezt a czélt tűzi maga elé. E végből megvizsgálván a contactkésés, az önínductió, az elektromágnes magjának, az elektromágnes méreteinek, a mágnesezés késésének befolyását az önműködő árammegszakító rezgésére, a következő eredményre jut: Egyszerűség okából tegyük fel, hogy a horgony egyensúlyi helyzetében a contactrugó a contactcsavart éppen csak érinti s hogy az a horgony rezgését csaknem semmit sem akadályozza. (A higany-contactnál a horgony jóformán egészen szabadon mozog.) Az áramkör zárása után a horgony rezgésbe jön s csakhamar állandó rezgéstávolságba jő. Midőn a horgony a mágnestől a contactcsavar (vagy higany felülete) felé mozogva az áramot zárja, akkor az érintkezés pillanatától kezdve a vasmaggal ellátott tekercs önínductio együtthatója $L'$ mindig kisebbedik, míg a horgony el nem éri a kirezgés határát és növekszik, midőn ez az egyensúlyi helyzet felé mozog. $L'$ értékének változása az áramintenzitás változását vonja maga után s ennek görbéje kezdetben gyorsabban, utóbb (a visszafelé mozgásnál) lassabban emelkedik. Az elektromágnesnek a horgonyra gyakorolt vonzása az áramintenzitás négyzetével arányos és nagyban függ a horgony távolságától. A $T$ rezgési időt, mint abscissát s a horgonyra ható $P$ vonzóerőt mint ordinátát véve, a vonzás görbéje oly vonal lesz, mely közel $\frac{T}{4}$-ig emelkedik, itt egy kis darabon (a kirezgés határán) az abscissával párhuzamos, azután mérsékeltebben emelkedik $\frac{T}{2}$-ig, a midőn az áram megszakadván, rohamosan esik. E görbe vonal DVOŘÁK szerint szétbontható két nem teljes sinusvonalra, melyek között $\frac{T}{4}$ fáziskülömbség van. A vonal első része által feltüntetett erő a rezgésre semmiféle befolyással nincsen, csak a rezgési időt szállítja le felére; *a rezgést a második rész tartja fenn.* Hogy a rezgés lehetőleg tágas legyen, arra kell törekedni, hogy ezen második rész lehetőleg kifejlődjék, a mi úgy érhető el, ha a megszakitási különáramot (mely a főárammal egyirányú) lehetőleg kifejlődni hagyjuk. Ez többféleképp érhető el:

1. Ha a mágnes sodronyának két végét egy *inductiomentes zárlaton át* állandóan összekapcsoljuk. E mellékzárlatban elvész az áram egy része, de kárpótlásul nyerjük, hogy a kirezgés nagyobb lesz s az ártalmas megszakítási szikra gyengül.

2. Emelkedik a kirezgés nagysága az elektromágnes *önműködő zárásával;* a midőn t. i. *két* contact alkalmazásával abban a pillanatban, a melyben az elsőnél a főáram megszakad, a második contact a tekercset önmagába zárja.

3. Alkalmazhatunk az elektromágnes tekercsére még egy második (secundär) tekercset, mely önmagában van zárva. Midőn a főáram megszakad, ezen secundär tekercsben egyenlő irányú áramot indít, a mely áram még egy ideig fenntartja a mágnességet s éppen úgy működik mintha a megszakítási különáram érvényesült volna.

4. Önműködő megszakítóval. A galvántelep sarkai az elektromágnes sodronyának két végével közvetetlenűl vannak összekötve, másrészt e végek a contacton át közlekedhetnek. Ha az áramot zárjuk s a mágnes vonzza a horgonyt, akkor contact jön létre s a nyitási különáram ezen rövid úton át kifejlődik.

5. Emelkedik a rezgés tágassága, ha az áramkörbe egy üres tekercset csatolunk be s így az öninductio $L'$ együtthatóját erősítjük, különösen ha ez utóbbiba vaspálczákat teszünk.

6. Ha a contact vége az egyensúlyi helyzetben egy kissé a higanyba merül.

7. Az áramkör ellenállásának növekedése a kirezgésre hátrányos.

A rezgés fenntartására szükséges energia igen csekély,* azért az árammegszakító működésbe jön, ha nagyon rosszul van is konstruálva. Ez az eset az elektromos csengetyűknél, melyeknek elektromágnese kicsiny, ellenállása pedig nagy. Azonkívül nagy az elem (Leclanché) ellenállása is. Tanácsos volna kisebb ellenállású elem és mágnestekercs. Igaz, hogy az elem gyorsabban kimerül; de csengetyűknél, hol az elem rövid ideig működik, alig jöhet számításba ezen veszteség azzal szemben, a mit más lokális működések létesítenek. *Edelmann.*

* A főáram elektromos energiája D. egyik kisérletében 0·2475 Watt volt, a melyből a rezgés fönntartására 0·0022 W. használtatott fel.

# IRODALOM.

**Fizikai egységek.** A kir. magyar Természettudományi Társulat megbizásából írta Czógler Alajos főreáliskolai tanár. Két ábrával. Budapest. Kiadja a kir. magyar Természettudományi Társulat. 1891. Kis nyolczadrét, VII+194 l.

E század elejéig, egyes esetekben még annak közepéig is, majdnem általános volt a physikai disciplinák azon osztályozása, mely ezek egyik részét a *ponderabilis (súlyos)* testek természettanának, másik részét az *imponderabilisek* (súlytalanok) tanának nevezte.

Az elsőhöz a tágabb értelemben vett mechanikai tanokat, a szilárd testek statikáját és dynamikáját, a rugalmasság tanát, a cseppfolyós és a légnemű testek statikáját és dynamikáját, a gravitationális vonzás és a capillaritás jelenségeit s í. t. számították, míg az utóbbiak közé az elektromosság és mágnesség, a fény és a hő tüneményeit sorozták s súlytalanoknak (tömegnélkülieknek) tekintették azokat a substrátumokat, melyek közvetítésével e jelenségek a súlyos testeken vagy testekben lejátszódnak.

De a század második és harmadik negyede folyamában annyira megváltozott e felfogás, oly annyira más lett a jelenségek lényeges elbirálásának és csoportosításának álláspontja, hogy jelenleg még a legelemiebb physikai vezérfonál sem mutatja tárgyának ily kettéválasztását s az «imponderabilis» szó már csak elvétve fordul elő.

Mi okozta e fordulatot? Ki hangoztatta először azokat az elveket, melyek a physikai tüneményekre vonatkozó felfogásunk alapjellegét oly gyökeresen megváltoztatták?

Igaz ugyan, hogy mennyileges mérő vizsgálatok a physikai törvények legnagyobb részét már e század második negyede közepéig derítették volt fel, de hiányzott oly közös kapocs, mely a jelenségek tömkelegében változatlan és megbizható mértéket szolgáltatott volna, ama fonál, mely biztosan végig vezetne e tünemények oly különböző és változatlan csoportjain.

A kapcsot Gauss a minden physikai jelenséggel elválaszthatatlanúl járo mechanikai jelenségben vélte feltalálni s a quantitativ mérő vizsgálatokra nézve azt az elvet ajánlotta, hogy a physikai tüneményekkel mindig kapcsolatosan fellépő mechanikai erő- és munkanyilvánulások vétessenek e tünemények összehasonlításának (mérésének) alapjaúl.

Elvének alkalmazásával Gauss maga kitünő példával járt elő az ő «Intensitas vis magneticæ terrestris ad mensuram absolutam revocata» czímű klasszikus értekezésével, melyben a mágnesek és a földmágnesség mechanikai nyilvánulásait s ezekből folyólag a mágnességeket és a mágnesség tanához tartozó physikai mennyiségeket közönséges mechanikai egységekben fejezte ki, illetve ezekre vezette vissza.

Ettől fogva arra törekedtek, hogy bármily physikai hatótól származó erők és hatások egyenes mérő kisérletek segélyével hasonlíttassanak össze a közönséges mechanikai erőkkel és hatásokkal s e törekvést majdnem teljes siker koronázta. Csak egy csoportját a jelenségeknek nem sikerült még egészen a többiek összefüggő lánczolatába beilleszteni, a fényjelenségekét, melynek mechanikai nyilvánulásai oly csekély mérvűek, hogy ezek mérésének csak a kezdetén vagyunk még.

A mechanikai álláspontnak ily szigorú és általános érvényre juttatása és uralkodóvá tétele hatotta át és alakította át annyira egész physikai gondolkozásunkat; ez adta meg a modern physikának a jellemző mechanikai jelleget.

E felfogás tényleges alkalmazásával annak a szüksége állott be, hogy a jelenségek erő- és erélynyilvánulásait *ugyanazon* mennyiségekkel mérjük, mint a melyek a közönséges mechanikai mennyiségek mérésére szolgálnak, azaz *hosszúsággal, tömeggel, idővel.* Ennek folytán valamennyi physikai mennyiség egysége, a jelenségek mechanikai sajátságait kifejező physikai egyenletek közvetítésével, a nevezett alapmennyiségek egységeivel *(az alapegységekkel)* voltak kifejezendők.

Az előbbi egységeknek így keletkező kifejezéseit a mennyiségek *dimensióinak (méreteinek)*, magukat az így előállított egységeket *leszármaztatott egységeknek* nevezzük, mely utóbbiak az alapegységekkel együtt egy *absolut* (a helytől és az időtől független) mértékrendszert alkotnak.

Gauss elvének ezen általános alkalmazása érdekében e század közepe táján és második fele elején Francziaországban semmi sem történt, Németországban csak Gauss kisérleti dolgozó társa, W. Weber, követte a fonalat, míg Angliában különösen W. Thomson, J. C. Maxwell és F. Jenkin fáradoztak nagy következetességgel az elektromos és a mágnességi elméleti és gyakorlati egységek rendszerének előállításán. (V. ö. a «British Association for the Advancement of Science»-nek az elektromos egységek dolgában 1861-ben kiküldött bizottsága 1862, 1863, 1864, 1865, 1867, 1869. évi jelentéseit.)

1875-ben a londoni physikai társaság szükségesnek látta J. D. Everett-nek «Illustrations of the C. G. S. System of Units» (Felvilágosító példák az egysége kcentimeter-gramm-secunda rendszeréhez) czímű kis könyvecskéjét kiadni, melynek második kiadása «Units and physical constants» (Egységek és physikai állandók) czím alatt 1879-ben látott napvilágot és azóta a legtöbb európai kulturnyelvre lefordíttatott. Bátran kimondhatjuk, hogy az egységekről az utolsó két évtized alatt megjelent külföldi irodalmi árban e könyvecske még mindig a legegyszerűbb és legjobb vezérfonál, melynek előnyei a világosságon és áttekinthetőségen kívül különösen még a physikai állandók számbeli értékeinek kényelmes és használható táblázatos összeállításában rejlik.

E könyv megjelenésétől kezdve az egységek és méretek ismeretét nemcsak kisebb-nagyobb terjedelmű könyvekkel terjesztették, hanem, a mi még helyesebb eljárás, ezeknek úgy a tisztán tudományos, mint a gyakorlati kézi-, tan- és segédkönyvekbe való felvételével s ott az egyes physikai mennyiségek általános ismertetésével kapcsolatos tárgyalásával, az egységeket és méreteket közkeletűekké tették.

Magyar középiskolai physikai tankönyveink közül többen követik ezt az eljárást, de a felkarolt tárgy korlátozottságánál és a tanítás czélja minőségénél fogva csak az egyszerűbb physikai fogalmak egységeivel és méreteivel foglalkozhattak; azonban irodalmunk nagyobb szabású physikai kézikönyv nélkül még mindig szűkölködik és így mindinkább érezhetővé vált egy oly magyar könyv szüksége, mely az egységek és a méretek teljes rendszerét érthető és áttekinthető módon tárgyalná.

Felismervén e téren a cselekvés elodázhatatlan voltát, a K. M. Természettudományi Társulat 1888-ban egy «Fizikai zsebkönyv» kiadását határozta el, melynek czélja az összes physikai ismeretek eredményeinek rövid, áttekinthető s könnyen kezelhető összeállítása lett volna. Első része, a physikai egységek és méretek kidolgozásával Czógler Alajos lett megbizva; s miután felmerült akadályok e zsebkönyvnek egész terjedelmében való létrejöttét meghiusították, ezen első része most a nevezett Társulat külön kiadványaként a fent idézett czímen látott napvilágot.

E helyen felemlíthetjük, hogy a szerző munkáját először németül «Dimensionen und absolute Maasse der physikalischen Grössen. Zugleich ein Uebungsbuch im C. G. S. System» czímmel a lipcsei Quandt & Händel czégnél 1889-ben adta ki (kis nyolczadrét, VI és 156 ll.), s munkája kedvező fogadtatásban részesült.

Ne várjanak e lapok olvasói tőlem, ki a nevezett Társulat részéről 1890-ben e munka kéziratának revisiójával voltam megbizva, s kire a tartalmáért való felelősségnek egy része is háramlik, e helyen kritikát; beérem itt az ismertetéssel.

A kir. magyar Természettudományi Társulat oly munkát kivánt, «mely az absolut mértékrendszert és ennek egységeit rövid és áttekinthető módon tárgyalná, megbizható vezérfonalul szolgáljon a physikai mennyiségek eme kiváló jelentőségű tárgyalási és előállítási módjában és egyúttal útmutatást nyújtson az egységek alkalmazásában és a velük való bánásban».

Czógler ezen elvállalt feladatának a legnagyobb szorgalommal és lelkiismeretességgel törekedett megfelelni. A gondosan kidolgozott eredeti kéziraton a munka önálló kiadása és egyéb körülményeknél fogva szükségesekké lett változtatásokat, folytonos javításokat és kiegészítéseket lankadatlan kitartással végezvén, munkájának teljes átdolgozását létesítette, melynek mérvét legjobban a munka német és magyar kiadásának az összehasonlítása tünteti elő; a különbség a tárgybeosztásban, a tartalombőségben, de különösen a definitiók szabatosságában és pedig mindenütt, minden egyes esetben a magyar kiadás előnyére mutatkozik.

A munka fejezetei a következők: I. Az egységek és méretek általános elmélete. 1—10. l. — II. Geometria és kinematika. 11—17. l. — III. Statika és dinamika. 18—57. l. — IV. Rezgő mozgás és hang. 58—62. l. — V. Fény. 63—67. l. — VI. Hő. 68—90. l. — VII. Mágnesség. 91—97. l. — VIII. Elektrostatikai mértékrendszer. 98—108. l. — IX. Elektrokinetika. 109—113. l. — X. Elektromágnesi mértékrendszer. 114—123. lap. — XI. Elektromágnesi gyakorlati egységek. 124—153. l. — XII. Elektrodinamikai mértékrendszer. 154—156. l. — XIII. Függelék. 157—178. l. — XIV. Irodalmi tájékoztató. 179—182. l. — XV. Táblák. 183—189. l. — Betűsoros név- és tárgymutató. 190—194. l.

E kis könyvben az olvasó az egységeknek és méreteknek az összes physikai mennyiségekre kiterjedő oly teljes rendszerét találja, milyet a legtöbb nagyobb terjedelmű külföldi munkában hiába keres. Minden fejezetben a hozzátartozó physikai fogalmak definitiója, physikai egyenleteik felállítása és egységeik s méreteik meghatározása összefüggőleg és egymással a legszigorúbb megegyezésben van adva; a minden fejezetbe felvett s kidolgozott példák a megelőző kifejtéseket megvilágosítják és kiegészítik, míg az azokat követő, megoldásuk eredményét is tartalmazó feladatok az olvasónak az öngyakorlásra is nyújtanak sokoldalú alkalmat. A XIII. fejezet kiegészítő fejtegetéseit és a XIV. fejezet történeti átpillantását s irodalmi tájékoztatóját az olvasó kellemes ráadás gyanánt szivesen fogja venni; a XV. fejezet táblái pedig, melyek a megelőző fejezetek egységeit és méreteit igen áttekinthető s a felkeresést nagyon könnyítő módon foglalják össze, végre pedig a részletes betűsoros név- és tárgymutató a könyv tartalmának kezelhetőségét és használhatóságát nagy mértékben emelik.

E kis munka nemcsak a physika elemeivel alaposan megismerkedett kezdőt vezeti be a physika modern egységeinek és mértékrendszereinek ismeretébe, hanem annak is, ki az utóbbiakkal már megbarátkozott, biztos és rögtön kész kalauzul kinálkozik; de még az elektromosság és mágnesség gyakorlati emberei is fogják hasznát vehetni.

A könyv kiállítása, miként az a K. M. Természettudományi Társulattól és a Franklin-társulat nyomdájától várható, csinos, szedése tiszta és ritka; kár, hogy ezen előreláthatólag sokat forgatott könyv példányait nem kötve adták ki.

Czógler e szerint kis könyvével tudományos irodalmunknak jelentékeny szolgálatot tett; munkája, mely bármely nemzet irodalmában megállaná helyét, a fent jelzett irodalmi hézag betöltésére van hivatva. Szerzőjét a könyv megirása körül végzett munkájáért, a Természettudományi Társulatot pedig a kezdeményezés- és a kiadásért méltán illeti meg az elismerés.

Befejezzük ez ismertetést azon kivánság kifejezésével, hogy a Természettudományi Társulat, melynek tudományos irodalmunk már oly sok hasznos munka kiadását köszönheti, mielőbb egészítené ki Czógler könyvét az oly munka kiadásával, mely a *physikai állandók* számbeli értékeinek táblázatos egybeállításával a hazai mathematikai, physikai és chemiai irodalomnak régóta érzett hiányát hivatva volna pótolni; talán nem csalódunk, ha úgy vélekedünk, hogy ebbeli reményünk a közel jövőben teljesülni fog! *Fröhlich Izidor.*

*

**Vorlesungen über Geometrie** unter besonderer Benützung der Vorträge von Alfred Clebsch. Bearbeitet von Dr. Ferdinand Lindemann, ord. Prof. an der Universität zu Königsberg. Zweiten Bandes erster Theil. Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Complex. Leipzig. Teubner. 1891. (650 lap. Ára 12 márka.)

Clebsch Alfred híres tanári működésének fénypontját geometriai előadásai képezték, melyeket épen két évtizeddel ezelőtt Göttingában az egyetemen tartott. E nagyfontosságú előadásainak mindjárt halála után kezdték érezni hiányát. Ez a körülmény indította tanítványait arra az elhatározásra, hogy ez előadásokat rendszerbe szedve kézikönyv alakjában kiadják, főképen azért, hogy a geometriai tudomány újabb irányaival és módszereivel megismerkedhessenek olyanok is, a kik nem voltak abban a szerencsés helyzetben, hogy Clebsch tanítványai lehettek volna.

A nagy mesternek egyik jeles tanítványa, Lindemann F. vállalkozott arra a nehéz feladatra, hogy a tudományos hagyatékban talált kéziratok, továbbá saját és mások jegyzetei alapján Clebsch geometriai előadásait feldolgozza.

Így keletkezett 1876-ban a «Vorlesungen über Geometrie» czímű munkának első terjedelmes kötete,* mely a síkgeometriát tárgyalja.

* E kötet ismertetését l. a Műegyetemi Lapok I. kötetében 57. l.

Lindemann már akkor is igérte volt, hogy az első kötetet nemsokára egy második fogja követni, melyben a *térgeometriát* óhajtja tárgyalni. Azóta hosszú idő telt el és már alig remélhettük, hogy Lindemann tanár igéretét beváltja, illetőleg tervét megvalósítja. Annál kellemesebben lepett meg a Teubner-czég tavali katalogusával, melyben egy nagyszabású második kötetnek megjelenését hirdette. De még mindig egy évig kellett várnunk, mert a szerző a könyv harmadik szakaszával nem készülhetett el. Most végül mégis megjelent. Lindemann a késés okait előszavában felsorolja. Azt mondja, egyrészt hivatalos elfoglaltsága gátolta a munka befejezésében, másrészt pedig — és ezen nem csodálkozhatunk — munkakedvét tetemesen csökkentette az a kissé túlszigorú birálat, melylyel a szakkörök az első kötetet fogadták, és a melyben szemére vetették, hogy messze túlment a Clebsch-től előadásaiban kiszabott határokon.

Mint az első kötetben, úgy a most megjelent második kötet első részében is szerző nem nyujtja Clebsch geometriai előadásait tiszta eredetiségökben; noha megóvja benne a vezérlő egységes gondolatmenetet, e kézikönyvet mégis csak azon feltétel mellett vélte folytathatni, hogy ha ragaszkodván régi álláspontjához, azt önálló és sok helyütt saját legújabb kutatásainak eredményeivel bővíti.

Legyen szabad e könyvnek főirányait nehány nagyobb vonással ecsetelnünk.

A könyv három főszakaszból áll.

Az első szakasz szól a *pont-*, *sik-* és *egyenesről*; a második szakasz tartalmazza a *másodrendű*, illetőleg *másodosztályú felületekre* vonatkozó kutatásokat; az utolsó végre a projektiv és a metrikus geometria alapfogalmait.

Az első részben mindenek előtt szembeötlő, hogy az egyenes vonal a térben a pont- és síkkal szemben azt a különleges helyet foglalja el, mely őt a dualitás elvénél fogva megilleti. A dualitás elve szerint ugyanis az egyenes a térgeometriában önmagával áll szemben, de e mellett nemcsak pont és sík tekinthető a geometriai alakzatok alkotó elemének, hanem mint ezekkel teljesen egyenlő jogú elem szerepelhet az egyenes vonal is. Példaképen felemlíti szerző, hogy valamely felület összes érintőinek enveloppe-ja gyanánt tekinthető, legyen az akár általános jellegű, akár kifejthető felület. Egy általános felületet u. i. háromszorosan végtelen sok érintő alkot, mert egy érintő síkban egyszerűen végtelen sok érintő van (sugársor), a felület pedig kétszeresen végtelen sok érintősíkkal bir.

A dualitás elve, mely a síkgeometriában csak pontra és egyenes vonalra vonatkozik, a térben a következő szembeállításra jogosít:

| | |
|---|---|
| *Pont.* | *Sík.* |
| *Egyenes vonal.* | *Egyenes vonal.* |
| *Sugár* (mint pontsor tartója). | *Tengely* (mint síksor tartója). |
| *Pontsík* (sík pontjainak totalitása). | *Sík pont* (pont síkjainak totalitasa). |
| *Sugársor* (egy síkban fekvő közös ponttal biró egyenesek összessége). | *Sugársor* (egy ponton átmenő közös síkkal biró egyenesek összessége). |
| *Sugárpont* (egy pont egyeneseinek összessége). | *Sugársík* (egy sík egyeneseinek öszszessége). |
| *Kúp.* | *Síkgörbe.* |
| *Kúp érintősíkja.* | *Síkgörbe pontja.* |
| *Kúp pontja.* | *Síkgörbe érintősíkja* (érintőn átmenő sík). |
| *Felület* mint *pontok* helye. | *Felület mint síkok* enveloppe-ja. |
| *Felület érintője.* | *Felület érintője.* |
| *Felület érintősíkja.* | *Felület pontja.* |
| *Térgörbe* (nem síkban fekvő görbe). | *Kifejthető felület.* |
| *Térgörbe érintősíkja* (érintőn átmenő sík). | *Kifejthető felület pontja.* |
| *Térgörbe érintője.* | *Kifejthető felület alkotója.* |
| *Térgörbe pontja.* | *Kifejthető felület érintősíkja.* |
| *Térgörbe secansa* (egy pontján átmenő egyenes). | *Kifejthető felület érintője* (egy síkján fekvő egyenes). |

Különösen érdekes és jellemző az egész könyvre nézve ama gondolat következetes szemmel tartása, mely a projektiv geometriának alapja, s melynek segítségével a tárgyalás számára oly szempontokat nyerünk, a melyekből egészen különböző jelleműnek látszó fejtegetések egy és ugyanazon közös alapon egységesen foglalhatók össze. Fel kell említenünk, hogy noha a könyv első főszakasza (pont, sík, egyenes), majdnem tisztán Clebsch előadásai nyomán készült, Lindemann az itt-ott közbeszőtt kiegészítő fejtegetésekkel a munkának egységes voltát tetemesen előmozdította s csak ezek révén tudta a könyv színvonalát a jelenkor magaslatára emelni. Ilyenek pl. a lineár komplexek elméletében a síknak parameteres előállítása, a lineár komplex és végtelenben fekvő sík viszonyának fejtegetése, a képzetes elemek bevezetése a geometriában stb.

A második szakaszban már sokkal számosabbak a nem Clebsch-től eredő részek és ezekben Lindemann egyénisége mind jobban lép előtérbe. E szakasz tárgyát szerző a másodrendű- és másodosztályú felületek elméletéből merítette. Az I. fejezetben, mely a polárok elvéről szól, szerző megmutatja amaz összefüggést, mely másodrendű felületek segítségével térbeli elemek között létesíthető, melynek alapja ama tételben áll, hogy ha a polus két konjugált egyenes egyikén mozog, akkor a hozzá tartozó polár-sík a másik egyenes körül forog. A II. fejezetben, mely az érintőket és felületalkotókat tárgyalja, folytatja az előbbi vizsgálódásokat vonalkoordináták segítségével a duális viszonyok leírása czéljából.

Következnek az eltünő determinánssal biró másodrendű felületek. Az I. fejezetben láttuk, hogy a pólus és polársíkja közötti rokonság csak speczialis esete azon általános lineár rokonságnak, mely pont és sík között létesíthető. Ugyanott láttuk továbbá, hogy ha minden $z$ ponthoz tartozik is egy $u$ polársík, ebből még nem lehet föltétlenül a fordított esetre következtetni, mert az csak akkor fog beállani, ha az $u_i$ sík koordinátáinak meghatározására szolgaló egyenlet-rendszer determinánsa nem egyenlő $0$-sal, t. i. ha $a_x^2=0$ a felület egyenlete, akkor a

$$\varrho u_i = a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{xx}}{\partial x_i} a_x a_i,$$

$$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

és ez egyenletrendszer csak akkor oldható meg egyértelműen, ha az $A= \mid a_{ik} \mid$ determinansa a zerustól különböző.*

A III. fejezetben, mely ezen determináns eltünéséről szól, szerző először azt vizsgálja, hogy mi történik a felülettel, ha $A=0$; de ennek első aldeterminánsai *még nem* tünnek el. Tudjuk, hogy a síkgeometriában egy ehhez hasonló feltétel elegendő arra, hogy a kúpszelet két egymást metsző egyenessé fajuljon el. A térben azonban az említett feltétel folytán a felület még nem esik szét, csak speczialisabb alakot ölt, t. i. singuláris pontja támad, vagyis kúpfelületté válik, melynek singularis pontja a kúp csúcsa. Ha $A$-nak első aldeterminánsai is eltünnek, akkor a másodrendű felület két síkká fajul el; ha $A$-nak összes második aldeterminánsai is eltünnek, akkor a felületből kettős sík lesz és ha végre $A$-nak összes harmadik aldeterminansai, t. i. az $A_{ik}$ együtthatók is eltünnek, akkor felületről már egyáltalában nem lehet szó, mert a térnek minden pontja eleget tesz ezen egyenletnek:

$$\Sigma\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k=0.$$

A IV. fejezet a felületeknek a végtelenben fekvő síkhoz való viszonyát fejtegeti és a konjugált átmérőkről szól. A sík geometriában a kúpszeletek osztályozása azon helyzet szerint történik, melyet csak a végtelenben fekvő egyenessel szemben elfoglalnak. A térben — Poncelet szerint — a végtelenben fekvő sík, illetőleg ennek átmetszése a felülettel mérvadó, mely ennek végtelenben fekvő kúpszelete.

---

* V. ö. König Gyula: Analizis 319. l.

E szerint a felületeket e fejezetben külön főcsoportokba osztva találjuk, melyek a következők:

I. *Végtelenben fekvő nem degeneráló kúpszelettel biró felületek.*

A) *Végtelenben fekvő képzetes kúpszelettel biró felületek.*
1. *Képzetes felületek* (valós pont nélkül).
2. *Ellipsoid* (valós pontjai zárt felületen fekvők).
3. *Képzetes kúpfelület* (valós csúcsponttal, mely a végesben fekszik).

B) *Valós végtelenben fekvő kúpszelettel biró felületek.*
4. *Egyágú hyperboloid* (valós és egyenes vonalú felület).
5. *Kétágú hyperboloid* (valós és nem egyenes vonalú).
6. *Valós kúpfelület* (végesben fekvő csúcsponttal).

II. *Végtelenben fekvő széteső kúpszelettel biró felületek.*

A) *Végtelenben fekvő képzetes egyenes párral biró felületek.*
7. *Elliptikus paraboloid* (nem egyenes vonalú és a végtelenben fekvő síkot valós pontban érinti).
8. *Elliptikus henger* (ide tartozik a körhenger is).
9. *Képzetes sikpár* (valós és végesben fekvő kettős egyenessel).

B) *Valós végtelenben fekvő egyenes párral biró felületek.*
10. *Hyperbolikus paraboloid* (egyenes vonalú és a végtelenben síkot valós pontban érinti).
11. *Hyperbolikus henger* (alkotói egy hyperbolán adott irányú secansai).
12. *Valós sikpár* (végesben fekvő kettős egyenessel).

C) *Végtelenben fekvő kettős egyenessel biró felületek.*
13. *Parabolikus henger* (alkotói parabolának adott irányú secansai).
14. *Két való párhuzamos síkból álló sikpár.*
15. *Két konjugált képzetes síkból álló sikpár.*
16. *A kettős sik.*

A következő fejezetben szerző a középponti felületeknek a főtengelyekre való transformáczióját tárgyalja, továbbá részletesebben a végtelenben fekvő széteső kúpszelettel biró felületeket, a gömb- és forgási felületeket, nemkülönben az általános felületeknek kör szerinti metszéseit.

Itt felemlíthetjük, hogy a síkgeometriában a kört mint olyan másodrendű görbét definiálhatjuk, mely két állandó képzetes ponton halad keresztül, melyek a végtelenben fekvő egyenesen feküsznek. (Imaginarius körpontok. Staudt szerint.) A térben pedig a gömbről lehet kimutatni, hogy az a végtelenben fekvő síkot egy állandó kúpszeletben (képzetes körben) metszi. Ebből folyólag az érdekes tulajdonságoknak egész halmaza van e kézi-könyvben feltüntetve, és itt különös figyelmet érdemelnek azon feltételek, melyek alatt a fontosabb forgási felületek kör szerint metszhetők.

A IX. fejezetben két másodrendű felületnek kölcsönös viszonyát fejtegeti. Itt látjuk világosan, hogy két másodrendű felület végtelen sok (valós vagy imaginárius) közös ponttal bir; és ezek együttvéve alkotják a felületek átmetszését, mely általánosságban térgörbe. E görbe negyedrendű. A X. fejezet szól két másodrendű felületnek kölcsönös helyzetéről, a XI. pedig a harmadrendű térgörbét tárgyalja. Szerző itt bemutatja a Seydewitz-, Schröter-, Staudt-Cremona-féle előállítási módokat és a harmadrendű görbét úgy keletkezteti, mint három megfelelő sík közös pontjának geometriai helyét, mely síkok három projektiv síksorhoz tartoznak. Mivel továbbá két-két síksor egy másodrendű felületet alkot, azért a harmadrendű térgörbe egyidejűleg három másodrendű felületen fekszik.

A XII. fejezetben szerző a másodosztályú felületek kölcsönös viszonyait tárgyalja részletesebben; a XIII.-ban pedig a másodrendű és másodosztályú konfokális felületeket. Itt megmutatja, hogy általánosságban a forgási felületeknél nem lehet mindig gyujtó pontokról szó, hanem léteznek úgynevezett fokálgörbék, melyek nem egyebek, mint az illető rendszerhez tartozó elfajult felületek.

A XIV. fejezet szól az elliptikus koordináták általánosításáról és a geodätikus vonalakról, továbbá a görbületi görbékről.

Most ama fejezetek következnek, melyek szerzőtől vannak közbeiktatva, az illető források pontos felemlítése mellett. Ezek a fejezetek a következők: XV. Másodrendű kúp és henger görbületi görbéi és geodätikus vonalai. XVI. Lineár komplexek, vonatkozással a masodrendű felületekre. XVII. Egy másodrendű felületnek önmagába való transformácziója. XVIII. A térnek azon lineáris transformácziói, melyek egy kúpszeletet önmagába visznek át. XIX. A lineár komplexnek önmagába való lineár transformácziói. XX. Egy lineár komplexnek önmagába való dualistikus lineár transformácziói és az általános reciprók rokonság. Végre XXI. A másodrendű felületnek a síkra való egyértelmű leképezése. — Helyszűke miatt csak ezen legutolsóra akarunk itt röviden reflektálni. Szerző ezen érdekes fejezetben megmutatja, miképen lehet a felületen lévő geometriát egy síkon feltüntetni, vagyis mily módon lehet a felületnek minden egyes pontját a síknak egy-egy bizonyos pontjával összefüggésbe hozni. Szerző lényegben a czentrális projekczió elveit hangoztatva, többek között megmutatja, hogy az $n$-nedrendű térgörbének képe, egy $n$-nedrendű síkgörbe, de csak azon esetben, hogyha a térgörbe a projekczió czentrumán nem megy keresztül. E fejezet végét a stereografikus projekcziónak elvei képezik.

Ha a könyvnek most megbeszélt II. szakaszára röviden visszapillantunk azon czélból, hogy hasonló könyvekkel összehasonlítsuk, akkor, különösen

SALMON FIEDLER-rel szemben azt látjuk, hogy a szakasz nagyon kevés új dolgot tartalmaz. Újításokat többnyire a tárgyalás menetében találunk.

Ilyen szempontból tekintvén e könyvet, legérdekesebbnek mutatkozik kétségtelenül a harmadik főszakasz, mely a projekczió- és mértékgeometria alapfogalmait tartalmazza. Ezen 228 lapra terjedő szakasz, egyéb szakaszaival csak lazán függ össze s CLEBSCH előadásában sem fordul elő, úgy hogy inkább mint appendix szerepel, a mi önálló értékéből mitsem von el, mert a benne tárgyalt nem-euclidesi geometria egyáltalában nagy elvi fontossággal bir s e szakasz teljes képét nyujtja mindama feltevéseknek és elméleteknek, melyek minden geometriai rendszernek tudományos alapját teszik.*

Messze vinne, ha e könyvben felhalmozott érdekes fejtegetések mindegyikére csak hozzávetőleg is reflektálni akarnánk. Legyen tehát elég ennyi is. Midőn pedig most e munkát, mely az utolsó idők megjelenései közt kétségtelenül a legérdekesebb, a t. szaktárs urak figyelmébe legmelegebben ajánlom, legyen szabad avval az óhajjal befejeznem, hogy nemsokára alkalmam legyen e munka második és utolsó részét is ismertetni.

*Hornischek Henrik.*

---

## Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften.

Általánosan el van ismerve, hogy a természettudományok újabb időbeli nagyszerű föllendülése nem csekély mértékben a tanítás eszközeinek nagyfokú tökéletességének és elterjedésének, a demonstratiókkal kisért előadásoknak, a laboratoriumi foglalkozásoknak tulajdonítható. De míg ezek segélyével a tudomány jelenlegi tartalmának ismerete a legnagyobb sikerrel közvetíthető, hírneves és élesen látó férfiak véleménye szerint a fiatalabb erők tudományos kiképzésén nagyon is gyakran egy sajátságos fogyatkozás mutatkozik. Jól ismerik tudományszakuk jelenlegi tartalmát, nagy generatiók működésének eredményét, de magát a munkásságot, annak útjait és eszközeit nem. Hiányzik bennök a históriai érzék s ama nagy munkák ismerete, melyeken a tudomány nagy épülete emelkedett. Ezeket felismervén több jó hírnevű német főiskolai tanár, élükön W. OSTWALD, a chemiának tanára a lipcsei egyetemen, az exact tudományok klaszszikusainak kiadását indították meg.

A vállalat czélja a *mathematika, astronomia, physika, chemiai* (beleértve a *kristálytant)* és *physiologia* körében a legkülönbözőbb időkben, helye-

---

* A munka eme harmadik főszakaszára, kiváló elvi fontosságánál fogva, nemkülönben azon vonatkozásoknál fogva, melylyel ez hazánkfiának BÓLYAI-nak alkotásaira van, még visszatérünk külön értekezésben is. *Szerk.*

ken és nyelveken megjelent alapvető dolgozatoknak tanulságos jegyzetekkel kisért német kiadása által hathatós tanítási, de egyszersmind buvárkodási eszközt nyújtani s a tudomány nagyjainak sokszor oly nehezen, sőt egyes esetekben teljesen hozzáférhetetlen munkáit lehetőleg olcsó áron közkincscsé tenni.

A vállalatot ENGELMANN lipcsei kiadó adja ki, kis nyolczadrétü, igen csinosan vászonba kötött s egyenként megszerezhető füzetekben, melyek úgy a tudományoknak emelt palotákba, mint a legszerényebb tanuló hajlékába fogják útjukat találni. Mi is örömmel üdvözöljük őket s ajánljuk tagtársaink figyelmébe. Sorban valamennyit fogjuk ismertetni.

A klasszikusok sorozatát megnyitja:

**1. Ueber die Erhaltung der Kraft.** Eine physikalische Abhandlung, vorgetragen in der Sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin den 23. Juli 1847. von Dr. H. HELMHOLTZ, Berlin, Druck und Verlag von G. REINER 1847. Új kiadás, szerző jegyzeteivel. 60 lap, 1889. Ára 80 pfennig.

A modern terminologiával «*az erély megmaradása elvének*» nevezett tapasztalati tételnek az ideje a jelen század negyvenes és ötvenes éveiben megérkezett; az észlelés és megfigyelés nyújtotta adatok a physikai disciplinák külömböző részeiben annyira felszaporodtak, hogy e tétel már-már a levegőben lebegett s nem csoda, hogy majdnem egy időben, de egymástól függetlenül több tudós törekedett e tételt részben philosophiai érveléssel, részben elméleti physikai megfontolásokkal, részben egyenesen a kisérleti tapasztalat alapján megállapítani.

J. R. MAYER 1842 leginkább az első úton, H. HELMHOLTZ főleg a második úton, JOULE ellenben a harmadik úton haladt. Követőik, W. THOMSON, R. CLAUSIUS, W. RANKINE s í. t. az utóbbi két eljárást választották.

HELMHOLTZ eme nevezetes és részben sokat vitatott értekezése a bevezetésen kívül hat fejezetre oszlik.

A bevezetésben a szerző philosophiai-physikai érveléssel törekszik kimutatni, hogy az értekezésben megállapított tételek kétféle eljárással, kétféle alapból fejthetők ki. Az egyik alap az a tapasztalat, hogy a természeti testek bármily combinatiójának egymásra való hatásából lehetetlen végtelen mennyiségű «munkaerőt» nyerni, a mi a perpetuum mobile lehetetlenségével egyenértékű tapasztalat; * a másik az a feltevés, hogy a természet összes

---

* HELMHOLTZ előadásaiban fel szokta említeni, hogy mióta e kis könyvecskéjét írta, évenkint átlag két levelet vagy nyomtatványt szokott kapni oly emberektől, «kik vagy már tökéletes bolondok vagy közel vannak hozzá, hogy azokká legyenek» s kik a perpetuum mobile lehetetlenségét megczáfolni törekednek.

hatásai középponti (centrális) pont-erőkre, vagyis pontok között, az öszszekapcsoló egyenes mentén működő erőkre vezethetők viszsza, illetőleg ilyenekre bonthatók szét. Nem érdektelen azonban szerzőnek egy megjegyzés alakjában 1881-ben tett azon önvallomása, hogy e bevezetés nagyobb mértékben áll Kant ismeretelméleti nézeteinek befolyása alatt, mint a menynyire szerző azt most helyesnek tekinthetné. A causalitás törvényét most (1881) szerző úgy definiálja, mint az öszszes természeti jelenségek törvényszerűségének feltevését.

Az I. fejezet: «Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft» (7—11. l.); benne az eleven erő (a modern terminologiában a mozgásbeli erély) közönséges tétele *szabadon* mozgó pontokra és testekre nézve a közönséges eljárással bizonyíttatik be, ha a működő erők a sebességtől és a gyorsulástól függetlenek.

A II. fejezet: «Das Princip von der Erhaltung der Kraft» (11—16. l.), melyben szerző a jelenleg az «erély megmaradása elvé»-nek nevezett tételt csak a helyzettől függő, de a sebességektől és az időtől független centrális erőkre nézve a szokásos módon bizonyítja be és tartja érvényesnek, formulázása a következő: «Az «eleven és a feszültségi erők» összege állandó: a nyerhető munka-mennyiség meghatározott és véges». Az elvnek ily megszorítása a 70-es években Helmholtz, W. Weber, F. Zöllner, R. Clausius, L. Boltzmann stb. között nevezetes és érdekes tudományos vitára adott alkalmat, melyben az ú. n. elektrodynamikai ponttörvények (W. Weber, B. Riemann és R. Clausius-éi) az erély megmaradása szempontjából vizsgáltattak meg. E törvények ugyanis a mozgó (statikai) elektromosságoknak egymásra való kölcsönös hatásának hypothetikus szabályait fejezik ki, melyek a Coulomb-féle törvényen kívül még a sebességektől függő tagokat is foglalnak magukban. E vita azzal az eredménynyel fejeződött be, hogy az energia elve még a sebességektől és a gyorsulásoktól függő erők bizonyos eseteiben is fennáll.

A III. fejezet: «Anwendung des Principes in den mechanischen Theoremen» (17—20 l.). Szerző alkalmazza és értelmezi itt ez elvet 1. az általános gravitatió és a földnehézség jelenségeire; 2. a mozgásoknak a mereven szilárd és a cseppfolyós testek közvetítésével való átvitelére, 3. a teljesen rugalmas szilárd és cseppfolyós testek mozgására.

A IV. fejezet: «Kraftäquivalent der Wärme» (20—28). A szerző hangsúlyozza, hogy a chemiai folyamatok kizárásával csak két physikai eljárást ismerünk meleg létesítésére 1. rugalmatlan testek ütközését, 2. a testek surlódását. Felsorolja az akkor már ismert Joule-féle, a surlódás folytán és az elektromos áram által keletkezett hőmenynyiségek lemérésére szolgáló kisérleteket, valamint a gázok kiömlésénél és átömlésénél felmerülő hőváltozásokat. Részletezi a Clapeyron-Holtzmann-féle formulát, melyet

$$C=V\frac{\partial Q}{\partial V}-P\frac{\partial Q}{\partial P}=\frac{RT}{A}.$$

alakban ír, hol $P, V, Q, T$ a gáz nyomása, térfogata, hőmenynyisége, absolut hőmérseke, $R$ a MARIOTTE-GAY-LUSSAC-féle törvény állandója és $A$ a hőegység munkaegyenértéke. Megjegyzi, hogy $1:C$-nek Clapeyrontól számított s e formula jobb tagjával szerző által számított értékei egymással elég tűrhetőleg egyeznek.

Szerző egy 1881-ik évi megjegyzésben védi ROBERT MAYER «Über die Kräfte der unbelebten Natur» (1842) czimű értekezése kapcsán ez utóbbit az angol szerzők szándékos ignorálása ellen, de helyesen hozzáteszi, hogy: «a mit a metaphysikai speculátió követői MAYER legfőbb érdemének tekintenek, t. i. a hőäquivalens törvényének a priori szükséges voltának kimutatására felhozott metaphysikai álbizonyitásait, az a szigorú tudományos módszertanhoz szokott természettudós előtt MAYER fejtegetéseinek épen leggyengébb oldalának fog látszani és ez volt kétségtelenül oka annak, hogy MAYER dolgozatai a természettudományi körökben oly soká ismeretlenek maradtak».

Az V. fejezet: «Kraftäquivalent der electrischen Vorgänge» (29—44 l.); itt megvizsgálja a szerző 1. a statikai elektromosságok (elektromos töltések) potentiálját, munka-készletét és a kisülés erélyét, a mint az a melegedésben nyilvánul; 2. a galvanismus czíme alatt a galván elemek chemiai folyamataiból keletkező energiát, a LENZ-JOULE-féle törvényét az áramot vivő vezető melegedésének, az elektro-chemiai szétbontás és a polározással járó lánczok erélyét. Belevonja még a thermo-elektromos áramokat s a velük kapcsolatos PELTIER-féle jelenséget.

A VI. fejezet: Kraftäquivalent des Magnetismus und des Electromagnetismus». (44—51 l.), melyben a magnetostatikai és a magneto-inductiv potential és munkakészlet van meghatározva. Kifejti az elektromágnesi hatásnak s az elektrodynamikai ponderomotórius (tömeget mozgató) erőknek potentiálját és munka-készletét.

Végre levezeti az energia elvéből a magneto-mágnesi inductió, a magneto-elektromos inductió, az egyidejű magneto-elektromos és magneto-mágnesi inductió, az elektro-mágnesi és az elektrodynamikai inductió általános törvényeit, s mindezeket az addig (1847) ismert tapasztalattal, AMPÈRE, LENZ, F. NEUMANN erre vonatkozó törvényeivel megegyezőknek találja. Ez az eljárás az elméleti physika nagy horderejű vívmányának bizonyult.*

* Legyen szabad itt megjegyeznünk, hogy az eképen nyert törvények a fentnevezett inductió-jelenségek egyikét sem tüntetik elő teljesen, mert csak az ú. n. *kölcsönös inductióra* vonatkoznak s mind a változó mágnesezésű mág-

Az értekezés végét: «Organische Wesen» (51—53 l.) kis rész képezi, melyben a szerző főleg MATTEUCCI ellen polemizál. Ezután következnek az 1881. évből való e sorokban is felhasznált megjegyzések.

Dolgozatát következő nevezetes mondattal zárja be:

«Ezen vizsgálat czélja, mely egyszersmind hypothetikus részei miatt mentségeül szolgáljon, az volt, hogy a physikusoknak ezen törvény elméleti, gyakorlati és felfedező-képességű fontosságát lehető teljességében kivántam előtüntetni, mely törvénynek teljes igazolását kétségkívül a physika legközelebbi jövője egyik főfeladatának kell tekinteni».

*Fröhlich.*

---

nesek, mind a változó elektromos áramok *önindluctióját* nem foglalják magukban. Későbbi szabatos vizsgálatok, különösen J. C. MAXWELL és C. NEUMANN kutatásai kideritették, hogy az *energia elve magában véve nem elegendő* az inductió-jelenségek törvényeinek kifogástalan leszármaztatására. Így pl. már az elektrodynamikai inductió egyenleteinek szabatos kifejtésére még egy másik tapasztalati törvény (elv), az F. NEUMANN-tól ú. n. *potentiál-törvény* szükséges, mely a ponderikus (közönséges mechanikai) mozgási erély növekedését kifejezi mint a külső pondoromotorius (tömeget mozgató) erők munkája és az elektrodynamikai-ponderomotorius erők munkája öszszegét.

## FELADATOK.

7. Bizonyíttassék be, hogy azoknál az ovális harmadrendű görbéknél, a melyek a sík két végtelen távolfekvő körpontján átmennek, a reális asymptotával párhuzamos négy érintő érintési pontjai közül akármelyik a más háromtól alkotott háromszög magasságainak metszéspontja. (VÁLYI.)

8. Bizonyíttassék be a következő tétel: Ha az $ABC$ háromszög $A$ csúcsából a $BC$ oldalára bocsátott merőleges talppontja $D$; továbbá $E$ azon pont, mely a $D$-t a $B$ és $C$ csúcsoktól harmonikusan elválasztja; végül $F$ a $BC$ oldal felezőpontja: akkor az $ABC$ és $AEF$ háromszögeknek egy és ugyanazon magassági pontja van. (KLUG.)

---

## MEGOLDOTT FELADATOK.

1. Bebizonyítandó, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\binom{\alpha}{n} = 1 - \frac{1}{2}\binom{\alpha}{1} + \frac{1}{3}\binom{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\binom{\alpha}{3} + \dots$$

összetartó, ha $\alpha > -1$ és hogy összege ekkor $\frac{1}{1+\alpha}$. (KŐNIG.)

---

*Első megoldás Bauer Mihály műegyetemi hallgató úrtól.*

a

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\binom{\alpha}{n} = A_n$$

rövidített jelzéssel élünk, akkor egyszerű átalakítás mutatja, hogy

$$a) \qquad \frac{A_n}{A_{n-1}} = 1 - \frac{\alpha+2}{n+1},$$

a honnan a

$$-(n+1)\,A_n+n\,A_{n-1}=(1+\alpha)\,A_{n-1}\,.$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ m,\ m+1,\ldots)$$

rekurzív képletsorozatot nyerjük, melynek felhasználásával a sor első $m$ tagjának összegét a következőképen állíthatjuk elő:

$$\text{I.}\qquad \sum_{n=0}^{m-1} A_m=\frac{1-(m+1)\,A_m}{1+\alpha}\,.$$

Ha $\alpha$ pozitív egész szám, a sor véges, minthogy ekkor

$$A_{\alpha+1}=A_{\alpha+2}=\ldots=0\,;$$

ebben az esetben tehát a sor összegét az I. képletből akként nyerjük meg, hogy ebben $m=\alpha+1$ teszünk és így lesz

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n=\sum_{n=0}^{\alpha} A_n=\frac{1}{1+\alpha}\,.$$

Ha $\alpha$ nem pozitív egész szám, akkor ismét I-ből lesz

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n=\lim_{m=\infty}\sum_{n=0}^{m-1} A_n=\frac{1-\lim.\,(m+1)\,A_m}{1+\alpha}\,.$$

A sorunk összegezése evvel vissza van vezetve a lim. $[(m+1)\,A_m]$ határérték meghatározására.

E czélból átalakitjuk $(m+1)\,A_m$-et; ugyanis

$$(m+1)\,A_m=A_0\,.\frac{2}{1}\,\frac{A_1}{A_0}\,.\,\frac{3}{2}\,\frac{A_2}{A_1}\cdots\frac{n+1}{n}\,\frac{A_n}{A_{n-1}}\cdots\frac{m}{m-1}\,\frac{A_{m-1}}{A_{m-2}}\,.\,\frac{m+1}{m}\,\frac{A_m}{A_{m-1}}$$

$$=\prod_{n=1}^{m}\frac{n+1}{n}\,\frac{A_n}{A_{n-1}}\,;$$

vagy ha az $a$) alatti összefüggést tekintetbe veszszük lesz

$$(m+1)\,A_m=\prod_{n=1}^{m}\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{\alpha+2}{n+1}\right)=\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right);$$

innen pedig

$$\lim_{m=\infty}.\,[(m+1)\,A_m]=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right);$$

de ha $\alpha>-1$ akkor az itt álló végtelen szorzat értéke zérussal lesz egyenlő (L. Kőnig Gyula Analizisét 255. l.), úgy hogy végül

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n=\frac{1}{1+\alpha}\,.\qquad q.\ e.\ d.$$

Bauer úr ezen megoldására Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF műegyetemi m. tanár úr a következő kiegészítő megjegyzéseket közli a szerkesztőséggel.

Ha $\alpha \leqq -1$, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{\alpha}{n} = 1 - \frac{1}{2}\binom{\alpha}{1} + \frac{1}{3}\binom{\alpha}{2} - \ldots$$

sor széttartó, mert tagjai nem kisebbek a *harmonikus* sor megfelelő tagjainál.

Valóban

$$(-1)^n \binom{\alpha}{n} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2 \ldots n}$$

$$= \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\ldots(-\alpha+n-1)}{1 \,.\, 2 \ldots n},$$

s minthogy esetünkben

$$-\alpha \geqq 1, \qquad -\alpha+1 \geqq 2, \qquad \ldots, \qquad -\alpha+n-1 \geqq n,$$

azért

$$(-1)^n \binom{\alpha}{n} \geqq 1.$$

Ennélfogva csakugyan

$$\frac{(-1)^n}{n+1} \binom{\alpha}{n} \geqq \frac{1}{n+1}.$$

---

*Második megoldás Szabó Péter okl. tanárjelölt úrtól.*

Az adott sor képezése czéljából induljunk ki a következő identitásból:

$$1 = 1 + \alpha - \alpha(1-\alpha_1) - \alpha\alpha_1(1-\alpha_2) - \alpha\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_3) - \ldots;$$

ezt elosztván mindkét oldalán $(1+\alpha)$-val lesz:

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\left[1 - \alpha_1 + \alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(1-\alpha_3) + \ldots\right].$$

Ha ebben az

$$\alpha_1 = \frac{1-\alpha}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{2-\alpha}{3}, \quad \ldots, \quad \alpha_k = \frac{k-\alpha}{k+1}, \ldots,$$

helyettesítéseket végezzük az adott sort nyerjük:

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\binom{\alpha}{1} + \frac{1}{3}\binom{\alpha}{2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{\alpha}{n} + \ldots$$

E sor összetartásának kérdését eldönti az $(n+1)$-ső és $n$-dik tag hányadosának viselkedése; e hányados

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}=1-\frac{\alpha+2}{n}+\frac{E_n}{n^2}.$$

$$(\lim. E_n = 0)$$

A Gauss-Weierstrass-féle feltételek * értelmében e sor akkor és csak akkor összetartó ha

$$-(\alpha+2)<-1$$

vagy

$$\alpha>-1$$

---

*Harmadik megoldás Szabó Péter okl. tanárjelölt úrtól.*

A szóban levő sor kifejezhető oly Gauss-féle hypergeometrikus függvénynyel, melyben az utolsó elem a pozitiv egység. Ugyanis:

$$(1)\qquad F(-\alpha, 1, 2, 1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{\alpha}{n}.$$

Ez a sor összetartó, a meddig a két első elem összege a harmadiknál kisebb: **

$$-\alpha+1<2;$$

vagyis

$$(2)\qquad \alpha>-1$$

sorunk összetartásának szükséges és elegendő feltétele.

Az összegezés, azon megjegyzés alapján végezhető, hogy az ismert általános képletet alkalmazzuk:

$$F(a, b, c, 1)=\frac{\Gamma(c)\ \Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-b)},$$

mely jelen esetünkben következőképen alakul:

$$F(-\alpha, 1, 2, 1)=\frac{\Gamma(2)\ \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)\ \Gamma(\alpha+2)}.$$

De mivel

$$\Gamma(k)=(k-1)\ \Gamma(k-1)$$

az összevonások végzése után végre:

$$(3)\qquad F(-\alpha, 1, 2, 1)=\frac{1}{1+\alpha},$$

a mint bebizonyítandó volt.

---

* Lásd König Analizisét 279. l.

** Gauss. Ges. Werke III. Disqu. generale, circa seriem inf. 15. §.

Megjegyzem még, hogy az összegezés direkt uton is végezhető, ha az

$$(4)\qquad \int_0^1 (1-x)^\alpha\, dx = \int_0^1 \left(1-\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2\ldots\right)dx$$

integrált veszszük segítségül. Az integráczió elvégezte után a baloldalon $\frac{1}{1+\alpha}$, a jobb oldalon pedig összegezendő sorunk tünik elő. Ez az integrál csak speciális esete az Eulertől származó következőnek:*

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n\, dx = \frac{1}{e+1}-\binom{n}{1}\frac{1}{e+2}+\binom{n}{2}\frac{1}{e+3}$$

honnan $e=0$, $n=\alpha$ irtával nyerjük az előbbit.

A (4) intágrál alak azért fontos, mert következő általánosabb fajhoz tartozik

$$(5)\qquad \int_0^1 (1-ux)^\alpha\, dx$$

melyből $\alpha$ speciális értékei mellett $u$-ra kellő helyettesítéseket alkalmazván, az összegezhető sorok egész csoportját nyerjük. Mint tudomásom szerint ujakat említhetem a következőket:

$$\frac{1}{1+\alpha}\left[\cos.\varphi-2^{\alpha+1}\sin.^{\alpha+1}\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\alpha-1}{2}\varphi-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]$$

$$=1-\frac{\alpha}{1.2}\cos\varphi+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2.3}\cos 2\varphi-\ldots+(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{\alpha}{k}\cos k\varphi+\ldots$$

$$(0\leqq\varphi\leqq\pi;\qquad \alpha>-1)$$

és

$$\frac{1}{1+\alpha}\left[\sin\varphi-2^{\alpha+1}\sin^{\alpha+1}\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{\alpha-1}{2}\varphi-\frac{\alpha\pi}{1}\right)\right]$$

$$=\frac{\alpha}{1.2}\sin\varphi-\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\sin 2\varphi+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1}\binom{\alpha}{k}\sin k\varphi+\ldots$$

$$(0\leqq\varphi\leqq\pi;\qquad \alpha>-1),$$

a melyeket (5)-ből nyerjük, ha benne

$$u=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

---

* EULER. De progressionibus transcendentibus. Comm. Petrop. V. 1730. 31. V. ö. REIFF Geschichte der Unendlichen Reihen. 90 és 91. l.

teszünk és ezután az integrácziót egyszer az egész kifejezésen, másodszor ennek sorfejtésén végezzük és végül a valós és képzetes részeket egyenlítjük.

---

*Negyedik megoldás Klimkó Mihály felsőbb leányiskolai tanár úrtól Lőcsén.*

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ pozitivtagú sor Raabe kriteriuma szerint összetartó vagy széttartó a szerint a mint

$$\lim.\left[n\left(1-\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)\right]$$

az egységnél nagyobb vagy kisebb. Alkalmazván ezt az adott sorra, lesz

$$\lim.\left[n\left(1-\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)\right]=\lim.\left[n\left(1+\frac{\alpha+n}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim\left(\frac{(2+\alpha)n}{n+1}\right)=2+\alpha$$

úgy hogy a sor összetartó, ha

$$2+\alpha>1,$$

azaz

$$\alpha>-1$$

és széttartó, ha

$$2+\alpha<1$$

azaz

$$\alpha<-1$$

A kérdésben forgó sor összegét a következő átalakítás alapján nyerjük:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{\alpha}{n}&=\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{\alpha}{n}\\&=\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\frac{\alpha+1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\binom{\alpha+1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha+1}{n}\\&=\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}(1-1)^{\alpha+1}\\&=\frac{1}{1+\alpha}.\end{aligned}$$

---

A megelőző megoldástól kevéssé tér el az a hatodik megoldás, melyet Dr. BEKE MANÓ főreáliskolai tanár úrtól vettünk.

Végül beérkezett még egy hetedik megoldás is MAKSAY ZSIGMOND főreáliskolai tanár úrtól (Pécs), ki a problémában szereplő sort kombinatorikus módszerek alkalmazásával összegezi. *Szerk.*

---

## Kérdések, feleletek.

*1. kérdés.* Hogyan készülnek az újabban gyakran emlegetett kvarczfonalak?

*Felelet.* Egészen úgy, mint a vékony üvegszálak, csak hogy jóval magasabb hőmérsékletű láng — hidrogén-oxigénláng — szükséges a készítésükhöz.

Az első feladat abban áll, hogy apró, 1—2 mm. vastagságú kvarcz-rudacskákat készítsünk. E végett két vékony kvarczkristályt magas hőmérsékletű lángban, pl. oxigénlángban óvatosan melegítünk mindaddig, míg hevített végükön meg nem olvadtak; az olvadt végeket a lángban összeillesztvén, addig hevítjük, mig a két kristály össze nem forradt: ekkor széthúzzuk őket s a rudacska meg van. A rudacskából fonál így készül: A rudacskát középen olvadásig hevítjük, s ekkor már csak arról kell gondoskodnunk, hogy a középen megolvadt rudacskát lehetőleg gyorsan széthúzzuk. Tehetjük ezt szabad kézzel is, de akkor a fonál nem egyenletes vastagságú. A rudacska gyors széthúzására a következő szerkezet használható: Egy 3—4 m. hosszú rúdon egy igen könnyen futó tolóka van; a tolókához a rúd egyik végétől rugalmas fonál pl. kaucsuk cső vezet oly módon, hogy ha a tolóka a rúd másik végén van, a fonál erősen meg legyen feszülve. A kvarcz rudacska egyik végét a tolókához erősítvén, másik végét akár kézben is tarthatjuk; a mint a rudacska megolvadt, a tolókát eleresztjük: a megfeszített fonál vagy cső nagy sebességgel magával rántja és meg van a kvarczfonál.

Az így készült fonál vastagsága $\frac{1}{20}$—$\frac{1}{30}$ mm. mintegy 80—100 gr. terhet bír el.

BOYS a rudacskát nyílhoz erősíti s miután közepén megolvasztotta, a nyílat ellövi. Ily úton állítólag $\frac{1}{1000}$ mm. átmérőjű kvarczszálakat kapott.

*Tangl.*

*2. kérdés.* Kis dinamogépemmel mindenféle kisérlet (drótízzítás, mágnesezés) jól megy, de vizet nem birok vele bontani. Mi lehet ennek az oka?

(A kérdésre a Phys. Lab. 1. közleménye felel).

---

## PHYSIKAI LABORATORIUM.

**Előadási kisérlet az elektromágnesség köréből.** Kis kézi dinamo-elektromos géppel vizet akartak bontani, de bármily sebesen hajtották is a gépet, gáz nem fejlődött. Kisérletezés közben a voltameterhez vezető drótok véletlenül összeértek, mellékzárlat keletkezett, és ime a gázfejlődés a voltameterben azonnal megindult. Ismételt kisérletezésből kitűnt, hogy valahányszor a gép csavarszorítóit néhány Ohm ellentállású mellékzárlat hidalta át, a vízbontás mindenkor megindúlt, mellékzárlat nélkül soha. — A tünemény magyarázata igen egyszerű volt. A dinamogép Gramme-gyűrűjének és elektromágnesének dróttekercsei egymás után voltak kapcsolva s az áramkör a voltameteren keresztül volt zárva. A megindított gép Gramme-gyűrűje az elektromágnes remanens mágnességének gyenge mágneses terében (mezőjében) forogván, a voltameter elektródjain a forgás sebességétől függő potentiálkülönbséget származtat. A meddig azonban ez a potentiálkülönbség 1,4 voltnál kisebb, elektromos áram a voltameteren nem mehet át, következőleg az elektromágnes dróttekercsein sem; ennek folytán az elektromágnes mágnesi mezejének intenzítása állandóan ugyanaz marad. Ha már most a forgatás gyorsasága annyira fokozható, hogy a potentiálkülönbség az 1,4 voltot eléri, akkor megindúl az áram a voltameteren át, hol vizet bont és egyúttal az elektromágnest erősíti és a gépet tulajdonképen dinamogéppé minősíti. Azt a gépet, melyen a fönt leírt kisérlet történt, ennyire gyorsan forgatni lehetetlen volt.

Ha azonban a gépnek szorító csavarjait a voltameteren kivül még egy fémvezető is összekapcsolja, más eset áll elő. Ugyanis a kettős kapcsolás mellett az a csekély potentiálkülönbség, mely a voltameter nagy ellenállásával nem volt képes megküzdeni, a kisebb ellenállású mellékvezetőn át az áramot azonnal megindítja, mely az elektromágnes tekercsén áthaladván, annak mágneserejét fokozza és ezáltal a gyűrűben indított áram intenzitását is. Ennek folytán a potentiálkülönbség a forgás gyorsaságával rohamosabban nő, mint az előbbi esetben. Amint a potentiálkülönbség 1,4 voltra emelkedik, az áram két ágra oszlik. Az egyik ág a voltameteren megy keresztül és vizet bont, a másik pedig a mellékzárlaton halad át s azt melegíti. Ekkor a két ág áramerősségei vezetőik ellenállásával fordított viszonyban vannak. (Ebből következik, hogy a mellékzárlatot tulságos kicsiny ellenállásúnak választani nem szabad, mert különben a voltameteren átmenő áram s ennek folytán a gázfejlődés is igen gyenge lesz.)

Ez az elemi kisérlet főleg azért érdemel figyelmet, mert igen alkalmas annak megmutatására, hogy a lágy vasban indukált mágnesség az áram megszakadása után is egy ideig fenmarad. Legyen a mellékzárlat igen csekély ellenállásu vastag rézdrót. Ennek következménye az, hogy gáz a lehető leggyorsabb forgatás mellett sem fejlődik. Tehát az elektródokon föllépő potentiálkülönség, a beiktatott csekély ellenállás miatt vagy kisebb maradt 1,4 voltnál, vagy ha annál egy kissé magasabbra nőtt is, a voltameteren átmenő áram fölötte gyenge. A Gramme-gyűrű ellenben igen erős mágneses mezőben forgott, mert a gép hajtására nagy munkát kellett fordítani. Feltéve már most, hogy a mágnesség a mellékzárlat megszakadása után is fenmarad egy pillanatig, úgy a Gramme-gyűrű a rövid zárlat megszakítása után is rövid ideig erős mágneses térben forog, az áramkörben megmaradt voltameter nagy ellenállása miatt az elektródokon a potentiálkülönbség 1,4 voltra és ennél magasabbra is emelkedik s így a vízbomlás megindul; minthogy pedig ekkor az áram az elektromágnes tekercsét is átjárja, az elektromágnes erősségét bizonyos fokon megtartván, a gáz tovább fejlődik, ha csak a gyűrű elég gyors forgásban van.

E feltevés helyességét a kisérlet tökéletesen igazolta. Ugyanis míg a rövid zárlat tartama alatt a gépnek leggyorsabb forgatására sem indult meg a gázfejlődés, addig a mellékzárlat megszakítására azonnal megeredt és tovább tartott, míg csak a gép forgásban volt. Ha azonban a gép egy pillanatra megállott, akkor az újra-forgatásra a gázfejlődés mindaddig nem indult meg, míg — mint előbb — rövid időre mellékzárlat nem kapcsoltatott az áramkörbe. A kisérletet úgy módosítván, hogy két voltameter van egymásután kapcsolva az áramkörbe, az eredmény lényegében ugyanaz. Változás csak annyiban történt, hogy a gázfejlődést (a rendelkezésre állott géppel) állandóan fentartani nem sikerült; a gázfejlődés fokozatosan lassúdott és végre teljesen megszűnt. Ilyen módon lehet az indukált mágnesség enyészetét meglassítani és kisérletileg igen feltűnővé tenni. Természetes, hogy a gép hajtására szükséges munka a gázfejlődés gyengülésével fokozatosan kevesbedik, mit a gépet forgató egyén feltünően megérez.

Ezeket a sorokat J. W. Giltay után irom le, feleletül a hozzám intézett kérdésre. Teszem azt annál szivesebben, mert magamnak is ehhez hasonló tapasztalatom van, melyet im itt közlök.

A rendelkezésemre álló kézi dinamogépnek ilyes czélokra igen alkalmasan berendezett rheostatja van, melylyel a mellékzárlat ellenállása szükség szerint módosítható. Egy kis izzólámpát kapcsolok mellékzárlat nélkül az áramkörbe. A gépet ekkor rendkivül gyorsan kell hajtani, hogy a lámpa szénfonala a gyenge vörös izzásig fölmelegedjék. Egymásután kapcsolt két lámpa egészen sötét marad. A mint azonban a rheostattal kellő mellékzárlatot kapcsolok be, egy lámpa fehéren izzóvá, két egymásután kapcsolt lámpa vörösen izzóvá lesz. A mellékzárlat kikapcsolása után egy lámpa fehéren izzó marad, az egymásután kapcsolt két lámpa elalszik. Az ú. n. mellékzárlatú gépek az itt említett jelenséget nem mutatják.

*Székely Károly.*

*

**A levegőtartalom befolyása a forrásra.** — Közönséges főzőpohárban vizet huzamosan, és pedig mindaddig forralunk, mígnem a kifőzött víz forrását jellemző, nagyobb időközökben felvetődő nagy buborékok keletkeznek. Ekkor a vizbe egyszerűen egy drótra erősített lyukacsos testet, péld. parafadarabot mártunk; a víz a parafa körül a nélkül, hogy a vizet tovább melegítenők, igen hosszú időn át heves, pezsgés-szerű forrásban marad. *Cz.*

*

**Sárgaréz tisztítása.** Sárgaréz csavarok, szorítócsavarok stb. megtisztulnak és szép aranysága színt nyernek, ha rövid időre (míg jó pezsgés következik be) salétromsavba mártjuk, azután ismételve jól leöblítjük és végre fűrészpor között megszárítjuk. A sárgaréz tárgyak tisztítása rendesen oxalsavval történik, ha azonban a füst és meleg folytán annyira piszkosak lettek, hogy oxalsav nem használ, akkor (Mittheil. d. Mähr. Gewerbe-Museum szerint) a kérdéses tárgyat előbb meleg nátronlúggal jól megsuroljuk, azután salétromsav, kénsav és víz egyenlő arányú keverékébe mártjuk, vízben gondosan leöblítjük, megszárítjuk és kifényesítjük. *E.*

*

**Fába berozsdásodott csavart** a legkönnyebben és legbiztosabban úgy indítjuk meg, hogy a csavar fejét $\frac{1}{2}$—1 perczig izzó vassal érintjük. A csavar átmelegszik, kitágul s mire lehül, meglazul és könnyen kivehető. A rozsdásodás megakadályozására tanácsos a csavarokat, támcsavarokat és anyacsavarokat grafitos kenőcscsel bevonni az alkalmazás előtt. *E.*

*

**A gipsz szilárdságának fokozása.** A gipsz megkeményedésének késleltetésére régi szokás szerint csekély mennyiségű mályvagyökeret (3%) adnak hozzá. Ha a porrátört mályvagyökér mennyiségét 8%-ra emeljük, akkor a megkeményedés még jobban van késleltetve, de egyszersmind jelentékenyen emelkedik a gipsz szilárdsága is. Az így preparált gipsz, a míg puha, hengerelhető, csövekköré tekerhető, lemezekké mángorolható. Festék hozzáadásával márvány, homokkő stb. tartós szép utánzata készíthető belőle. *E.*

# A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGALAKULÁSA.

Folyóiratunk 104—112. lapjain részletesen voltak ismertetve a Mathematikai és Physikai Társulat alakítása végett megindult mozgalom egyes eseményei. A mozgalom további fejleményeiről a következő sorok adnak számot.

*

*A Mathematikai és Physikai Társulat 1891. évi november hó 5-én a tud. egyetemi physikai intézetben megtartott alakuló közgyűlésének jegyzőkönyve.*

Elnök: br. Eötvös Loránd. Jegyző: Rados Gusztáv. Jelen van az alakuló társulat mintegy 70 tagja.

*Elnök:* «Uraim! A végből jöttünk össze, hogy a Mathematikai és Physikai Társulatot megalakítsuk. Csendesen, hangzatos szavak kerülésével és pedig a siker kilátásával tehetjük ezt, mert oly helyzetben vagyunk, mint régi szövetségesek, kik baráti szövetségöket később törvényesítik. Közös czél s annak eléréseért végezett közös munkálkodás hozta létre szövetkezésünket és azért nem is szükséges, hogy újra előadjuk az okokat, melyek bennünket a frigy megkötésére bírtak s most annak törvényesítésére indítanak. De egy dolgot szem előtt kell tartanunk most, mikor úgy szólván a nyilványosság elé lépünk. Azt t. i., hogy most még nagyobb buzgalommal és kitartással kell önként elvállalt kötelességeink teljesítésére törekednünk. A tudomány haladását rendes összejöveteleinken élő szóban előadni és mindazt, a mi a szakember figyelmére méltó, szakfolyóiratunkban megírni: ez a mi feladatunk. E feladat nem látszik nagynak, alig többnek egy önképzőkör feladatánál; és mégis, ha híven teljesítjük, érdemes munkát végzünk és nagy szolgálatot teszünk vele. Hiszen ha elérjük azt, hogy mindenki, a ki hazánkban physikát és mathematikát tanít, igazán physikus és mathematikus legyen: akkor nagy szolgálatot tettünk nemcsak az iskolának, hanem hazánk tudományosságának is. Hogyha ezen önképzés feladatát híven és komolyan teljesítjük, annak az is lesz az eredménye, hogy a mi körünkből fognak majd kiválni a tudomány önálló mívelői és fejlesztői.

Kivánom, hogy az elénk tűzött czél állandóan szemünk előtt lebegjen s minket munkálkodásunkban lelkesítsen. Ebben az értelemben üdvözlöm a nagy számmal megjelent t. szaktárs urakat, különösen pedig a mi kedves vidéki collegáinkat, kik az utazás fáradalmainak vetették alá magukat, hogy gyűlésünkön részt vehessenek.

Ezzel a Mathematikai és Physikai Társulat alakuló közgyűlését megnyitottnak jelentem ki.

Szerencsém van jelenteni, hogy a budapesti mathematikusok és physikusok f. é. junius hó 18-án tartott összejövetelén véglegesen elfogadott alapszabálytervezetet a vett megbizásnak megfelelőleg a fővárosi hatósághoz beterjesztettem s hogy az alapszabálytervezetünket a nmélt. m. kir. belügyminiszterium 1891. aug. 21. 62229. sz. a. kelt rendeletével jóváhagyta és megerősítette. Eszerint az a keret, melyen belül megalakulhatunk, törvényesítve és elfogadva van. (Tudomásul van.)

Méltóztatnak tudni, hogy a tervbe vett folyóirat Mathematikai és Physikai Lapok czíme alatt már ez év juniusában egy kettős füzettel megindult. A füzetet helybeli szaktársainknak nyomban kézbesítettük, de vidékre a tanév végén már nem küldhettük szét. Mozgalmunkról vidéki szaktársainkat a Tanár-Egyesület jubiláris közgyűlése alkalmával értesítettük, a mikor is Berecz Antal szaktársunk, engem távollétemben helyettesítvén, szíves volt a fővárosba jött szaktársakat az egyet. physikai intézetbe meghívni s előttük mozgalmunk czélját ismertetni. Törekvésünket helyeselték s támogatásukat megigérték. — Folyóiratunk első füzetét f. é. szeptember elején küldöttük szét s vele együtt alapszabálytervezetünket is azzal a felszólítással, hogy vidéki szaktársaink, ha velünk a czélra és az eszközökre nézve egyetértenek, hozzánk csatlakozzanak. Örömmel jelentem, hogy felszólításunk eredménye igen kedvező. Eddig 298 tag jelentkezett (Éljenzés), sőt pártolói vannak már a keletkező társulatnak. Ezek: Dr. br. Hornig Károly veszprémi püspök, Dr. Kunc Adolf csornapremontrei prépost, Dr. Martin Lajos kolozsvári egyetemi tanár és Hopp Ferencz urak. (Éljen.) Szerencsém van a jelentkezett rendes tagok névsorát is felolvastatni. (Lásd a 182. l.)

Ezzel a Mathematikai és Physikai Társulatot megalakultnak nyilvánítom. (Éljenzés.)

Alig alakult meg Társulatunk, már is egyes vidéki testületek üdvözletökkel tűntetik ki. Igy megjelent körünkben Ft. Ábrahám János a szt-benedekrendi tanárképző intézet tanára Pannonhalmáról, tanártársainak és a tanárjelölteknek aláirásával ellátott meleghangú üdvözlő-iratot hozván magával.»

Dr. Lúcz Ignácz a kassai főreáliskolai tanári kar nevében lelkes szavakban üdvözli a megalakult Mathematikai és Physikai Társulatot, sikert kívánván működésének.

Gidófalvy Géza a nagyszebeni áll. főgymnasium részéről üdvözli a megalakult Társulatot, elismerését fejezvén ki a budapesti szaktársak előtt az immár sikerre vezetett mozgalom megindításáért.

Ft. Simon Tádé, a győri szt-benedekrendi-, Ft. Dr. Edelmann Sebő, premontrei kanonok pedig a szombathelyi prem. főgymnasium részéről jelent meg; Orbók Mór pedig a pozsonyi szaktársak üdvözletét hozza.

*Elnök* megköszönvén az üdvözlő szavakat, a következőket mondja: «A felolvasott névsorból megtudtuk, hogy hazánk mathematikusainak és physikusainak nagy többsége szövetkezett velünk a Társulat megalakítására. Én úgy érzem, hogy a névsor nem lenne teljes, ha annak a neve hiányozna belőle, ki nemcsak korára nézve valamennyinket fölülmúl, hanem érdemeinél fogva is a legelső helyet foglalja el közöttünk. Dr. Jedlik Ányos kiérdemesült egyetemi tanárt, az első magyar physikust értem, ki 91 év óta él és életének legnagyobb részét a tudománynak szentelt munkásságban töltötte, még pedig oly korban, a melyben a viszonyok nem voltak oly kedvezők, mint most. Kedvelt tudományát nemcsak bámulatos szorgalommal, de rendkívül éles elmével is művelte és csak az ő páratlan szerénységén múlt, hogy e század nem egy nagy fontosságú tudományos fölfedezésének dicsősége nem az ő nevéhez fűződik. Az iránta való mély tiszteletünket véleményem szerint legjobban az által fejezzük ki, ha társulatunk első határozatával *a Mathematikai és Physikai Társulat első rendes tagjává választjuk meg s nevét a tagok névsorában az első helyre felirjuk.*» (Elfogadtatik.)

2. Erre a tisztikar és a választmány megalakítása kerül sorra. Elnök bemutatja az október hó 22-én tartott összejövetelből kiküldött kandidáló bizottságnak a választásra vonatkozó javaslatát. Kiemeli, hogy a lista megállapítása nehéznek bizonyult, a mennyiben a választandó tagok száma aránylag csekély. Szóba került, hogy vidéki tagtársaink közül is kellene tagokat a választmányba fölvenni, a mennyiben e tiszt némi figyelem, kitüntetés jelét viseli magán; de tekintettel arra, hogy a választmány ügyköre leginkább administrativ teendőkben áll, melyek esetleg nem halasztható ülés összehivását teszik szükségessé, a kandidáló bizottság vidéki tagok jelölését most még időszerűnek nem tartotta, annál is kevésbbé, mert társulatunk választmányi ülésein aligha fognak oly ügyek tárgyalás alá kerülni, melyekben a vidéki és a budapesti tagtársak érdekei esetleg összeütközésbe jöhetnének. — A bemutatott névsor természetesen csak javaslat, melyet kiki saját belátása szerint megváltoztathat.

A szavazatok beszedésére Tőtössy Béla elnöklete alatt Hornischek Henrik és Rátz László tagtársak kéretnek fel. — A választás tartamára elnök az ülést felfüggeszti.

3. A szavazatszedő bizottság működését befejezvén, Tőtössy Béla a szavazás eredményét hirdeti ki, mely a következő:

*Elnök:* Báró Eötvös Loránd. *Alelnökök:* König Gyula és Schmidt Ágoston. *Titkárok:* Bartoniek Géza és Rados Gusztáv. *Jegyzők:* Kopp Lajos és Kövesligethy Radó. *Pénztárnok:* Mandák Dezső. *Választmányi tagok:* Beke Manó, Czógler Alajos, Fröhlich Izidor, Gruber Nándor, Heller Ágost, Mauritz Rezső, Réthy Mór, Scholtz Ágost, Szily Kálmán, Than Károly, Tőtössy Béla és Wagner Alajos.

4. Báró Eötvös Loránd elfoglalván az elnöki széket, a maga és tiszttársai nevében köszönetet mond a bizalomért s reményét fejezi ki, hogy a tisztikar és a választmány működése a közgyűlés bizalmát igazolni fogja.

Kéri minden tagnak közreműködését, hogy a fiatal társulat az eléje tűzött szép feladatnak jól megfelelhessen.

Ezzel az alakuló közgyűlés befejeztetett.

*

Az alakuló közgyűlés jegyzőkönyvének lényeges kiegészítéséül közöljük *a társulat megalapításában részt vett tagok névsorát.*

## A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai.

*Pártoló tagok:*

Br. Hornig Károly dr., veszprémi püspök.
Kuncz Adolf dr., csornai prépost.
Hopp Ferencz, a Calderoni-czég feje.
Martin Lajos dr., egyet. tanár.

*A társulat első rendes tagja:*

Jedlik Ányos.

*Rendes tagok:*

Abel János (N.-Szombat), Ábrahám János (Pannonhalma), Dr. Abt Antal (Kolozsvár), Alszeghy Alajos (Csáktornya), Altenburger Gyula (Bp.), Angheben Albin (Fiume), Antolik Károly (Arad), Arany Dániel (Győr), Aranyosi Miksa (Bp.), Asbóth Emil (Bp.), Avéd Jákó (Gyulafehérvár), Baló Gyula (Kaposvár), Balog Mór (Bp.), Barabás Jenő (Pápa), Baranyi Balázs (Jászberény), Bártfay József (Bp.), Bartha Zsigmond (N.-Enyed), Bartoniek Géza (Bp.), Baumgartner Alajos (Bp.), Bein Károly (Bp.), Dr. Beke Manó (Bp.), Beke József (Bp.), Bellaagh Kálmán (Bp.), Benkó Imre (N.-Kőrös), Berecz

Antal (Bp.), Berkes Imre (Bp.), Békési Gyula (Debreczen), Bielek Miksa (Bp.), Bóbita Endre (Kis-Marton), Bod Lajos (Székesfehérvár), Bodjánszky János (Eperjes), Bodola Lajos (Bp.), Bodola László (Csurgó), Bodor Domokos (Sepsi-Szentgyörgy), Bogyó Samu (Bp.), Bónis Károly (N.-Kőrös), Boros Sándor (Kolozsvár), Borosay Dávid (Esztergom), Dr. Bozóky Endre (Bp.), Bozmánszky Gyárfás (Pannonhalma), Bujk Béla (Kis-Ujszállás), Bukovszky János (B.-Csaba), Bukuresti B. János (Kassa), Bulyovszky Sándor (Erzsébetváros), Dr. Butorka Száva (Versecz), Chudy Hugó (Bp.), Csemez József (N.-Bánya), Csehély Adolf (Trsztena), Csernus László (S.-A.-Ujhely), Csomóssy Sándor (Esztergom), Csopey László (Bp.), Czakó Sándor (Zágráb), Czekélius Aurél (Bp.) Czigler Győző (Bp.), Czógler Alajos (Bp.), Danch Ferencz (Arad), Delej Lajos (Bp.), Dr. Demeczky Mihály (Bp.), Dietz E. Lajos (Bp.), Dischka Győző (Pécs), Dobay Sándor (Mármaros-Sziget), Dohnányi Frigyes (Pozsony), Dömötör Iván (Pozsony), Doroghi Ignácz (Temesvár), Dzsida Szaléz (Pannonhalma), Éberling Jógsef (Bp.), Dr. Edelmann Sebő (Szombathely), Eltscher Simon (Nyiregyháza), Br. Eötvös Loránd (Bp.), Erdődy Imre ((Bp.), Etele Károly (M.-Óvár), Fábry Emil (Kassa), Dr. Fail Attila (Rozsnyó), Faragó János (Békés), Farbaky István (Selmeczbánya), Dr. Farkas Gyula (Kolozsvár), Fekete Demeter (Belényes), Félegyházy Antal (Székely-Udvarhely), Félegyházy Béla (S.-A.-Ujhely), Félix János (Érsekujvár), Fényes Dezső (Arad), Fertig Vilmos (Bp.), Fogarasi Béla (Nagy-Enyed), Dr. Fodor László (Selmeczbánya), Földes Izabella (Bp.), Fraunhoffer Lajos (Bp.), Dr. Fröhlich Izidor (Bp.), Dr. Frosch Károly (Siklós), Ferenczy István (N.-Szeben), Ferenczy József (Nyitra), Fuchs Károly (Pancsova), Gaith Rudolf (Temesvár), Gállik-Dömötör István (Bp.), Géczy Benedek (Pozs.-Szt-György), Dr. Gerevich Emil (Kassa), Gidófalvy Géza (N.-Szeben), Gothard Jenő (Herény), Göllner Károly (Pozsony), Dr. Ghiczy Géza (Bp.), Groszbauer József (Léva), Gruber Nándor (Bp.), Grünwald István (Bp.), Grünwald Miksa (Nagy-Kálló), Gúta József (Beszterczebánya), Hahóthy Sándor (Bp.), Hajnal Márton (Bp.), Halmi János (Hódmező-Vásárhely), Harkányi Béla (Bp.), Hassák Vidor (Kézdi-Vásárhely), Hauszmann Alajos (Bp.), Havas Miksa (Pozsony), Hegedüs Károly (Bp.), Héjas Endre (Bp.), Heller Ágost (Bp.), Dr. Heller Rikhárd (Baja), Hirschmann Nándor (Pozsony), Hlatky Miklós (Székely-Udvarhely), Held Károly (Bp.), Höhr Adolf (Segesvár), Homor István (Szeged), Dr. Hoor Mór (Bp.), Dr. Hornischek Henrik (Bp.), Hortobágyi Zsigmond (Lugos), Horváth Mátyás (Esztergom), Horostsák Gyula (Ungvár), Hubatsek Alajos (Bp.), Ignics Boldizsár (Eger), Edvi Illés Aladár (Bp.), Illés Gyula (Székely-Udvarhely), Dr. Ilosvay Lajos (Bp.), Inczédy Dénes (Pécs), Javorik János (Pancsova), Janell József (Versecz), Jakab Antal (Csík-Somlyó), Jeney Pál (Kassa), Jónás Ödön (Bp.), Jurány Henrik (Bp.), Dr. Juckel Gyula (Bp.), Karai Sándor (Debreczen), Dr. Károly J. Irén (N.-Várad), Dr. Kemény Ferencz (Bp.), Képessy Imre (Bp.), Kerekes Dezső (Rimaszombat), Kherndl Antal (Bp.), Kilián Frigyes (Bp.), Király László

(Podolin), Kirchknopf András (Bp.), Kiss Dénes (Alsó-Lendva), F. Kiss Károly (Bp.), Kiss E. János (Bp.), K. Kiss József (Debreczen), Dr. Klamarik János (Bp.), Klein Pál (Késmárk), Kleiszner Rezső (Bp.), Klimkó Mihály (Lőcse), Klimm Mihály (Bp.), Dr. Klug Lipót (Pozsony), Klug Nándor (Bp.), Dr. Klupaty Jenő (Bp.), Kmet József (Beszterczebánya), Kohányi Gyula (Bp.), Dr. Kondor Gusztáv (Bp.), Dr. Konkoly Miklós (Bp.), Kont Gyula (Bp.), Dr. Kopp Lajos (Bp.), Dr. Kőnig Gyula (Bp.), Kőszeghy-Winkler Antal (Bp.), Kosztolányi Árpád (Szabadka), Kovács István (N.-Szalonta), Dr. Kovács János (Buda), Dr. Kövesligethy Radó (Bp.), Kövi Imre (Igló), Dr. Kunc Adolf (Csorna), Kurländer Ignácz (Bp.), Dr. Kürschák József (Bp.), Dr. Lakits Ferencz (Bp.), Dr. Layer Antal (Losoncz), Lázár Pál (Bp.), Lechner Lajos (Bp.) Dr. Lengyel Béla (Bp.), Lengyel István (Bp.), Lengyel Sándor (Bp.), Lipthay Sándor (Bp.), Lukácsi György (N.-Bánya), Lukáts Lajos (Bp.), Dr. Lúcz Ignácz (Kassa), Lutter János (Bp.), Majoros Endre (N.-Károly), Maksay Zsigmond (Pécs), Malatin Gothárd (Alcsuth), Malesevits Miklós (Zombor). Mandák Dezső (Bp.), Marcsiss János (Beszterczebánya), Markos Imre (Szathmár), Dr. Martin Lajos (Kolozsvár), Mauritz Rezső (Bp.), Medreczky István (Ungvár), Medvigy János (Ungvár), Mendlik Ferencz (Bp.), Mialovich Mór (Bp.), Miller Gyula (M.-Sziget), Miklós Ödön (Bp.), Módly Krizsó (Szombathely), Müller József (Bp.), Moldoványi István (Bp.), Molnár József (Győr), Neumann Jenő (Szarvas), Dr. Nuricsán József (Bp.), Orbán Antal (Bp.), Orbók Mór (Pozsony), Osztrogonácz János (Bp.), Palágyi Menyhért (Bp.), Palatin Gergely (Pannonhalma), Pallos Béla (Pannonhalma), Pap János (Szeged), Pap József (Ujvidék), Parragh Gedeon (Kecskemét). Pecz Samu (Bp.), Perényi Vilmos (Hajdú-Böszörmény), Perger József (Kecskemét), Perjéssy László (N.-Rőcze), Pető Menyhért (Győr), Petry Gyula (Homonna), Dr. Plósz Pál (Bp.), Polereczky Jolán (Bp.), Prokes Ignácz (Szabadka), Rados Gusztáv (Bp.), Rados Ignácz (Székely-Udvarhely), Ráth Arnold Lajos (Bp.), Ratkovszki Pál (Szathmár), Rátz László (Bp.), Récsei Lajos Farkas (Pannonhalma), Rejtő Sándor (Bp.), Renner János (Sopron), Dr. Réthy Mór (Bp.), Ritli Vendel S. J. (Kalocsa), Roller Mátyás (Bp.), Rombauer Emil (Brassó), Róna Zsigmond (Bp.), Rucsinszky Lajos (Bp.), Salamin Leo (Sopron), Dr. Sárkány Lajos (Kolozsvár), Dr. Schenek István (Selmeczbánya), Schey Lipót (Győr), Dr. Schlesinger Lajos (Berlin), Dr. Schmidt Ágoston (Bp.), Schmidt Ferencz (Bp.), Schmidt János (Pécs), Dr. Scholtz Ágost (Bp.), Schuller Alajos (Bp.),Dr. Schwartz Ottó (Selmeczbánya), Seltenreich Kornél (Bp.), Simon Ferencz (Szászváros), Simon Tádé (Győr), Simsa Kornél (Szathmár), Sinkó József (N.-Szombat), Sinkovics Ferencz (Bp.), Somogyi Rudolf (Bp.), Söpkéz Sándor (Bp.), Suták József (Bp.), Süss Nándor (Bp.), Stanics Fulgent (Pannonhalma), Stauber József (Arad), Steindl Imre (Bp.), Steiner Simon (Makó), Straub Sándor (Bp.), Strauss Ármin (Bp.), Strohbach Géza (Debreczen), Spiegel Zsigmond (Bp.), Szántó János (Sopron), Szabó Ferencz (Kecskemét), Szabó József (Bp.), Szabó József (Vácz), Szabó Péter (Kolozsvár), Szakmáry József (Beszterczebánya), Szalay István (Szentes), Szerényi Géza (Bp.), Szépréthy Béla (Brassó), Szijártó Miklós (Szolnok), Szily Kálmán (Bp.), Szimányi Samu (Brassó), Szarvassy Margit (Bp.), Szavkay Ede (Bp.), Széchy Ákos (Arad), Székely Károly (Baja), Dr. Szekeres Kálmán (Sopron), Szemethy Béla (Bp.), Szenessy Mihály (Bp.), Szente József (Bp.), Szentmiklósy Jenő (Gy.-Fehérvár), Szerémi Alajos (Rozsnyó), Szontagh Gusztáv (Brassó), Szuppán Vilmos (Bp.), Szutrély István (Ujvidék), Szüts Béla (Bp.), Szüts Miklós (Bp.), Takáts Gyula (Bártfa), Tangl Károly (Bp.), Dr. Than Károly (Bp.), Dr. Thanhoffer Lajos (Bp.), Thuránszky Irén (Bp.), Tokaji Aladár (Szászváros), Tolnay Lajos (Bp.), Torday Imre (Bp.), Tóth József (Debreczen), Tőtössy Béla (Bp.), Dr. Vályi Gyula (Kolozsvár), Vámos Dezső (Bp.), Váter József (Bp.), Vécsey Bekény (K.-Szeben), Dr. Veress Vilmos (Kolozsvár), Vidovich Bonaventura (N.-Várad), Vigh Béla (Szeged), Viszolajszky István (Tata), Dr. Wagner Alajos (Bp.), Waldapfel János (Bp.), Walther Béla (Brassó), Dr. Wartha Vincze, Weber Márton (Baja), Weinhardt Ferencz (Szolnok), Dr. Winkler Lajos (Bp.), Winter József (Losoncz), Wilim Ferencz (Lugos), Wittmann Ferencz (Bp.), Wolf Árpád (Kassa), Závodszky Adolf (Bp.), Zettner Ede (Bp.), Zorkóczy Samu (Pozsony).

# ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI TÁRSASÁG, KÉSŐBB A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1891—92. ÉVBELI

# ELŐADÁSAIRÓL.

1891. október 22-én BEKE MANÓ: *A hypercomplex számok elméletéről.* (I. előadás. Közölni fogjuk.)

Az előadás végeztével KŐNIG GYULA emlékezetébe hozza a jelenlevőknek, hogy Beke Manó dr. úr volt az 1885. őszén a budapesti mathematikusok első összejövetelének előadója. Talán nem csupán a véletlen játéka, hanem az előadó buzgalmának is jele, hogy a mathematikusok társaságának utolsó összejövetelén ismét őt látjuk az előadó asztalnál. A társaság nevében köszönetet mond neki buzgóságáért. A jelenlevő szaktársakat pedig arra kéri, hogy azt a munkakedvet, mely az előadásokat tanulságosakká és érdekesekké s azt az egyetértést, mely az összejöveteleket kellemesekké tették, vigyék át a megalakítandó társulatba. A kis körből alakult társaság egyik czélját elérte, a mennyiben sikerült a szaktársakat a mathematika és physika intenzivebb művelésére egyesítenie: most a Mathematikai és Physikai Társulat működésének kora jött meg. Tőle várjuk és reméljük, hogy a megkezdett munkát szélesebb körben teljes sikerrel folytassa.

Ugyanez összejövetel alkalmával 9 tagú kandidáló bizottság küldetett ki, sors útján, melynek feladata volt a tisztikar és a választmány összeállítására javaslatot tenni.

1891. november 19-én BEKE MANÓ: *A hypercomplex elméletéről.* (II. előadás. Közölni fogjuk.)

Dr. RÉTHY MÓR: *A kinematikai alapfogalmak megállapításáról.*

A rendes ülés vegeztével br. Eötvös elnök jelenti, hogy a választmány nov. 12-én tartott ülésén a társulati ügyek vezetésével Bartoniek Géza titkárt bízta meg. — Az ügyvivő titkár a választmány következő határozatairól tesz jelentést.

1. A társulati év 1892. január hó 1-én kezdődik s így az első évi tagsági díj az alapszabályok VII. 12. §-sa szerint az év első negyedében esedékes.

A társulati év megállapításában a választmány a következőket tartotta szem előtt: A folyóirat szempontjából (főleg technikai okokból) czélszerűbb, ha a társulati év a polgári évvel, nem pedig a tanévvel esik egybe. Ezt elfogadván, az első társulati év kezdetét 1892. január 1-re azért tette, mert nem tartotta méltányosnak a tagoktól egy csonka társulati évért az egész évi tagsági díjat kivánni. De tekintettel arra, hogy a társulat működése tényleg már 1891-ben vette kezdetét s hogy az alakulás tetemes költségekkel járt, a választmány köszönettel veszi, ha akadnak tagtársaink, a kik a tagsági díjat az 1891. évre is önként felajánlják.

2. A társulat kiadásában megjelenendő folyóirat czímlapja a következő lesz: Mathematikai és Physikai Lapok. A Mathematikai és Physikai Társulat megbizásából szerkesztik Bartoniek Géza és Rados Gusztáv. — Az 1892. év folyamán 6 füzet jelenik meg, mely az 1891. évi junius hóban megjelent kettős füzettel együtt a folyóirat I. kötetét fogja alkotni.

3. A lap tartalma annyiban szenved változást, hogy a physikából a fontosabb haladast röviden ismertető referatumok lépnek az *Irodalom* rovatban közlött tartalommutatók helyébe.

4. A választmány megállapítja a tagoknak adandó oklevél szövegét; az oklevélért az alapszabály VII. 11. §. szerint külön díj nem jár.

5. A beérkezett pénzt Mandák Dezső pénztárnoknak adta át, felhalmazván őt egyúttal a Társulat jövendőbeli bevételeinek átvételére s az Alapszabályoknak megfelelő kezelésére.

Hornischek Henrik r. tag kérdésére Elnök kifejti, hogy a folyóirat megjelenésében beállott szünet főleg a társulati évnek épen bejelentett megállapításának a következménye, mely szünetet különösen a lap akadálytalan megjelenésének biztosítása végett teendő előmunkálatok is kivánatossá tettek.

1891. deczember 3-án Bogyó Samu: *A tanári nyugdíjszámítás mathematikai alapjairól.* (I. előadás.)

Br. Eötvös Loránd: *A folyadékhártyák feszültségének méréséről.* (Közölni fogjuk.)

1891. deczember 17-én Fuchs Károly (Pancsováról): *Egy elektromos számoló gépről.*

Bogyó Samu: *A tanári nyugdíjszámítás mathematikai alapjairól.* (II. előadás. Közölni fogjuk.)

1892. január 7-én dr. Winkler Lajos: *A gázok absorptiójáról.* (Közölni fogjuk.)

Dr. Kürschák József: *Az érintési transformatiók elméletéről.* (I. előadás.)

1892. január 21-én Wittmann Ferencz: *A Ferraris-féle forgó mágnesi térről és alkalmazásáról az elektromos erőátvitelre.* (I. előadás.)

# VEGYESEK.

**Helmholtz egy pohárköszöntője.** 1891 nov. 2-án mult 50 éve, hogy a berlini egyetemen egy 21 éves fiatal ember «De fabrica systematis nervosi evertebratorum» czímű, a gerincztelen állatok idegrendszeréről szóló értekezéssel orvosdoktorrá promoveáltatott. Már ez első értekezése fontos felfedezést foglalt magában. Mint katonaorvos kezdte meg pályáját, később a physiologia tanára volt Königsbergben, majd Bonnban és Heidelbergben, míg 1870-ben Berlinbe a physika tanszékére hívták. Ez a férfiú a most élő physikusok közől egyike a legnagyobbaknak: Helmholtz, ki ugyanez évben születésének 70-dik évfordulóját is ünnepelte. A kettős alkalmat felhasználván, számos tisztelője és tanítványa nagyobbszabású ünnepélyt rendezett; ennek egyik momentuma a november 2-ikán Berlinben tartott ünnepélyes lakoma volt, melyen Németország legkiválóbb tudósai vettek részt. Feleletül az őt ünneplő felköszöntőkre Helmholtz saját tudományos fejlődésének rövid képét adta, mely — tekintve az előadó személyiségét és jelentőségét a tudományban — figyelmünket teljes mértékben leköti.

«Ma tisztelettel halmoztak el engem. Hazám fejedelme, más európai uralkodók és a franczia köztársaság elnöke nagy kitüntetésekben részesítettek, melyeknek külső jeleit íme magamon hordom. Nem tudom, miként köszönjem meg mind ezt, érzem, hogy valamennyiöknek hálával tartozom, de nem tudom, hogy mindez miként jött létre. Hiszen én beteges fiú voltam, ki még kortársaim játékaiban sem vehettem részt, hanem arra voltam utalva, hogy a szobában találjak magamnak foglalkozást. Emlékszem, hogy mint kis fiú sokat játszottam fadarabkakkal, miből a térről való első fogalmaimat alkottam. Rám kényszerített magányomban nagy volt a tudásvágyam, vagy a mint azt ma kifejeznék: ideges voltam. De tudásvágyam nagy akadályba ütközött, mely tulajdonkép alapja későbbi tevékenységemnek: rossz emlékező tehetségem volt az összefüggéstelen ismeretekre nézve. A grammatika szabályait még valahogy felfogtam, de a szavakat és a kivételeket nem igen birtam megtartani. Historikus vagy philologus sohasem lett volna belőlem. A mi érdeklődésemet először lekötötte, az a geometria volt; ebben összefüggő tudás kellett, ezen a tárgyon birtam uralkodni, mert összefüggő tudásra kielégítő volt az emlékezetem. Általában, a miben megtaláltam a kapcsolatot, azt meg is birtam tartani egészen. Ekként még hosszú költeményeket is birtam emlékezetben tartani, a minél a metrum segítségemre volt és azonkívül megvolt a belső összefüggés. Annak idején az Odysseának három könyvét, s egész Horatius-féle ódákat tudtam könyv nélkül. A költészettel atyám ismertetett meg, ki azt velem meg is kedveltette.* Könnyen lelkesülő férfiú volt, Fichte tanítványa; kétszer vonult be az önkéntes vadászokkal Párisba, ki ama nagy idő és ideáljai iránt lelkesedését megőrizte és azt mint tanár tanítványaira átszármaztatni törekedett. Philosophiai tekintetben a Fichte-féle rendszert követte, a transscendentális ideálismus híve volt. Sokszor vitt magával sétálni; rendesen velünk jött egyik barátja, a ki Hegel követője volt. A két férfiúnak philosophiai vitatkozásait gyakran hallgattam s nem tudom, hogyan történt, hogy oly nézetre jutottam, mely atyám philosophiájától nagyon is távol esett. Talán azért, mert a való iránt nagy érzékem volt, a miben Potsdam kies környékének része lehetett. Gondolataim végczélja voltaképen mindig a valóság volt, s így Fichte és Hegel között középutat választottam, midőn azt mondtam magamban, hogy a valónak érthetőnek, felfoghatónak kell lennie. Később a physikára fordult a figyelmem, mely a valót törvény alakjában adja és akkor e tárgyra képességet fedeztem fel magamban; megtaláltam benne emlékezetem hiányainak legyőzésére a támasztó pontot és részei között a kellő kapcsolódást. Erre külön elméletet állítottam fel magamnak: ha az emlékező tehetség csak az összefüggő dolgokat tartja meg, végül csak a bennök rejlő törvényszerüség maradhat hátra. Ez a tapasztalásommal is egyezett. Ekként már korán foglalkoztam a physikával, már a gymnasiumban sok időt fordítottam e tárgyra. Az osztályban igen gyakran úgy ültem, hogy előttem hevert az engem szörnyen untató Cicero, a pad alatt pedig papirosból optikai készülékeket tervezgettem. Az egyetemen a physikát szerettem volna tanulni, de a physika akkoriban nem állott a kenyérszerző studiumok hírében, azért atyám inkább azt kivánta, hogy az orvosi tudományokat tanuljam. Az orvosi tudomány családunkban amúgy is hagyományos volt, minthogy atyám egyik nagybátyja hírneves orvos volt.

Az orvostanban a természeti tényeket bővebben ismertem meg, a mint ez a physikában történt volna, s e tekintetben későbbi időben nagy hasznomra volt. Különösen a physiologiára utaltak engem, mely tudományt akkoriban a híres Johannes Müller tanította, kinek reám, valamint Du Bois Reymond, Brücke, Ludwig és Virchow tanulótársaimra roppant nagy befolyása volt és eszméink irányát megállapította. Az orvostan reánk nézve igen hasznos volt; először azért, mert a természetről igen széles körben nyújtott

* Helmholtz atyja Potsdamban gymnasiumi tanár volt.

betekintést; azonkívül itt e téren az igazság és a tünemények törvényeinek kiderítése sürgetőbb, minthogy a halasztást nem tűrő praktikus cselekvés szüksége parancsolja; ez későbbi fejlődésemre szintén nagy befolyással volt. Különben a magam eljárását követtem, midőn a physiologiában physikai fogalmakat érvényre juttatni iparkodtam. Ekként — mint ez fiatal emberek rendes szokása, hogy t. i. a legnehezebbhez fognak először — az életerő problemájára bukkantam. Akkoriban még a Stahl-féle elmélet volt érvényben, mely szerint ugyan elismerték, hogy az emberi testben tulajdonkép physikai és chemiai erők működnek, de azt hitték, hogy azok szabad működése rothadást okozna és hogy ez meggátoltassék, külön életerő léteznék. Soká tartott, míg e nézet alaptévedését kitaláltam. Következőkép okoskodtam: Ha az életerő természeti erők működését megsemmisítheti, miért nem semmisítheti meg pl. a nehézségi erő működését? Ha ezt bírná, úgy a «Perpetuum mobile» lehetséges volna és ez úton szereztem nézeteimet az erő megmaradásáról. Éveken keresztül dolgoztam, megvizsgáltam többek között a rothadásról való tant is és midőn nézeteimmel felléptem, nagyon csodálkoztam, midőn azt mondták nekem, hogy ezek fellengős, ködös speculatiók. Így itélte azt meg akkoriban a berlini tudományos akadémia. Csak Jacobi, a mathematikus hajlott eszméim felé, azonkivül azok, kik Johannes Müllernél társaim voltak; ezek támogattak véleményeimben. Robert Mayer-ről és Joule-ról akkor még nem tudtam semmit. Eszméimnek ezen fogadtatása álláspontomat lényegesen megváltoztatta, melyet valóban szerénységgel fogadtam el. Hiszen már a gymnasiumon mint rossz philologust eléggé megállapították és geometriai tehetségemet mindig csak másodrendű képességnek minősítették. Most pedig azt kellett magamnak bevallanom, hogy nyilván valami fontosat csináltam, mely az akkori vezető szellemek számára oly komoly volt, hogy el sem akarták ismerni. Tovább mentem, meghatároztam az ideg-agens terjedési sebességét és ezt is fellengősnek találták. Azt láttam tehát, hogy oly dolgokat végeztem, melyekre a vezető szellemek egyáltalában elkészítve nem voltak. Nehéz összeütközésbe kerültem saját értékem megbecsülésével. Jól tudtam, hogy egyebet sem csináltam, mint hogy kritikailag, meggondolással jártam el az eddigi módszerek irányában, a mint ezt minden eléggé tanult fiatal physikus tehette volna. Saját tapasztalásomból tudtam azonban, hogy a nagyzás hóbortja — ha ezt a kifejezést használnom szabad — a tudósok legerősebb ellensége és félve vártam a pillanatot, melyben majd arról győződöm meg, hogy édes magam is hiú lettem; mert mindenkor szigorúan itéltem magam felett. Másrészt igaz Gœthe mondása is: Nur die Lumpen sind bescheiden; mert mindenki, ki valami nem közönséges dolgot akar végezni, annak bizalmának is kell lennie ahhoz, hogy meg is csinálhatja, különben a dolog soha sem sikerül.

Ebből sok nehézségem származott, mert mindenki, ki oly dolgokat csinál, jelentőségük megitélésére csak nehezen szerez mértéket, ha külső körülmények nem támogatják, mint pl. a szemtükörnek tőlem származó feltalálásakor, mely esetben csak igen csekély tudományos munkára volt szükségem és hol a szerencse rendkívüli módon kedvezett. Erre a találmányra ezért soha nem is fektettem nagy súlyt. Nagyon nehéz tehát valamely felfedezés szerzőjére nézve, hogy annak jelentőségét helyesen felismerje. Később is tapasztaltam, hogy oly férfiak, kiket nálamnál nagyobb jogosultsággal ünnepeltek, azt, a mit tulajdonkép tudnak és jól tudnak, nem nagyon becsülik. Gœthe Eckermann-nal folytatott beszélgetéseiben költeményeiről csak keveset tart, de a színek elméletében találja életének főelemét! Ily szellemi mű szerzője mindig hajlandó, hogy a reáfordított idő és fáradság után itéljen; pedig a kortársak nem ilyen mérték szerint itélnek, hanem ép ellenkezőleg azt tartják legkiválóbbnak, a mit legkönnyebb el lehetett érni. A kortársak elé valami új dolgozat úgy lép, mint a Minerva Jupiter fejéből, mint egy meglepetés. De a szerző sehogysem részesül ebben a meglepetésben. Talán valami ötlete támadt, mely a dolgozat magvát képezi csak; ez egész csöndesen jött meg, tűzijáték, dob- és trombitaszó nélkül. Az új gondolat a többi közé belopódzik, alig látszik újnak, a többiek módjára fejlődni kezd, magára vonja a figyelmet és új gondolatok csatlakoznak hozzá; de mikor és hogyan jött, ezt a legtöbb esetben megmondani nem lehet. Ez tehát oly dolog, mely a szerző fáradsága nélkül történik és mégis ettől függ minden.

Ne csodálkozzanak tehát, ha azt állítom, hogy arra nézve nem volt mértékem, a mit munkáim értékének neveznek. Azonkívül tulajdonkép nem is azon föltett szándékkal munkálkodtam, hogy az emberiség hasznára legyek. Magamon akartam segíteni, azokat a gondolatkapcsolatokat és törvényeket kerestem, melyekkel saját eszemben a rendet létrehozhassam — és kortársaim azt találták, hogy az én munkám nekik is hasznukra van, háladatosak és segítségemre készek voltak, s ez által lassanként megérttették velem, hogy munkásságomra súlyt fektetnek. Az emberiség, a tudományos kortársak viszont segítettek nekem. Kötelességem volt tanítani, a mi fontos és kellemes kötelesség. A tanár mindig intelligens közönség előtt áll. Mindig mondtam magamnak: «Az előttem ülő fiatal emberek között van nehány, kik a jövő kor legnagyobb férfiai közé tartoznak, kik olyan okosak, a milyen okosnak te képzelted magadat, midőn az iskolapadon ültél.» Komoly felelősség érzete fogott el, s azért mint tanító fáradoztam és írásba foglalt dolgozataimban törekedtem, hogy teljesen kifejtett alakot kölcsönözzek azoknak. Az írásba foglalás a gondolatokat még jobban fegyelmezi, mint az előadásra való egybeállítás. Soha sem tartottam valami dolgozatot befejezettnek, mielőtt írásban nem volt előttem.

Sokat dolgoztam, de tulajdonkép magamnak dolgoztam, önök pedig azt találták, hogy önöknek is dolgoztam; önök viszontszolgálatokkal jutalmazták az én munkámat, midőn, hogy a nagyzás hóbortjába ne essem, a legszakértőbb emberek ítéletét hallottam. E szerint tehát kölcsönös szolgálatot tettünk egymásnak, és azt hiszem, hogy a leszámoláskor az önök oldalára ép annyi fog esni, mint az enyémre. Ha nekem köszönetet szavaznak és későbbi, abstractabb regiókba eső dolgozataimért elismerésüket fejezik ki, ezáltal megerősítettek abbeli bizalmamban, hogy még ezentúl is dolgozhatok. De a dolgok állása szerint köszönetöket a szeretet szabad adományának kell tekintenem, melyre önöket sem erkölcsi kényszer, sem erkölcsi kötelesség nem vezetett. Most pedig köszönetemet szeretném kifejezni azoknak, kik nekem ezt az örömet szerezték, és kik ezt az ünnepélyt rendezték. Ha — a mire tulajdonkép indíttatva érzem magamat — valamennyiöknek fejezném ki köszönetemet, úgy hálámnak gyenge volna a resonantiája; ezért kiválasztom azokat, kiknek legtöbb dolog és fáradság jutott és kik az alapítvány kezdeményezői voltak, t. i. a bizottságot alkotó urakat: Du Bois-Reymond, Kronecker, Zeller, Kundt és Mendelssohn éljenek!»

Helmholtz ezen felköszöntőjében saját tudományos fejlődéséről oly érdekes vázlatot nyújt, mely teljes mértékben megérdemli, hogy a mi körünkben is megismertessük. *H. Á.*

4

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

ELSŐ ÉVFOLYAM

NEGYEDIK FÜZET. 1892 FEBRUÁR

BUDAPEST

KIADJA A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1892

# TARTALOM.



---


**A Mathematikai és Physikai Lapok évenkint 8, legalább 3 ívnyi füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó 20-dik napján. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**


---

**Társulati mondanivalók.** A társulati év a választmány határozata szerint 1892. január 1-én kezdődik. Ennek folytán a M. Ph. Lapokból a folyó évben 6 füzet jelenik meg, mely a mult évben megjelent kettős füzetet 24—30 ívnyi kötetre fogja kiegészíteni. A hátralevő füzeteket márczius, április, október és november hónapok 20-ik napján küldjük szét.

A tagsági díj az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük tiszt. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czimére — legczélszerűbben a jelen füzethez mellékelt postautalványnyal — beküldeni. Legyen szabad egyúttal a választmánynak a 3-dik füzet 187. lapján közölt kérelmét t. Tagtársaink becses figyelmébe ajánlanunk.

A befizetett tagdíjakat a M. Ph. Lapok legközelebbi füzetünkben fogjuk nyugtáztatni.

Ha valamelyik jelentkezett tagtársunk neve a 182—185. lapokon közölt névsorból hiányzik, vagy ha neve hibásan van írva: kérjük a helyreigazítást, még pedig a legrövidebb idő alatt, hogy a munka alatt levő tagsági oklevelek kiállításánál az esetleges hibát kiigazíthassuk.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére (VI. Bajza-u. 20.) intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár (VI., akáczfa-u. 49.), a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a reklamácziók is.

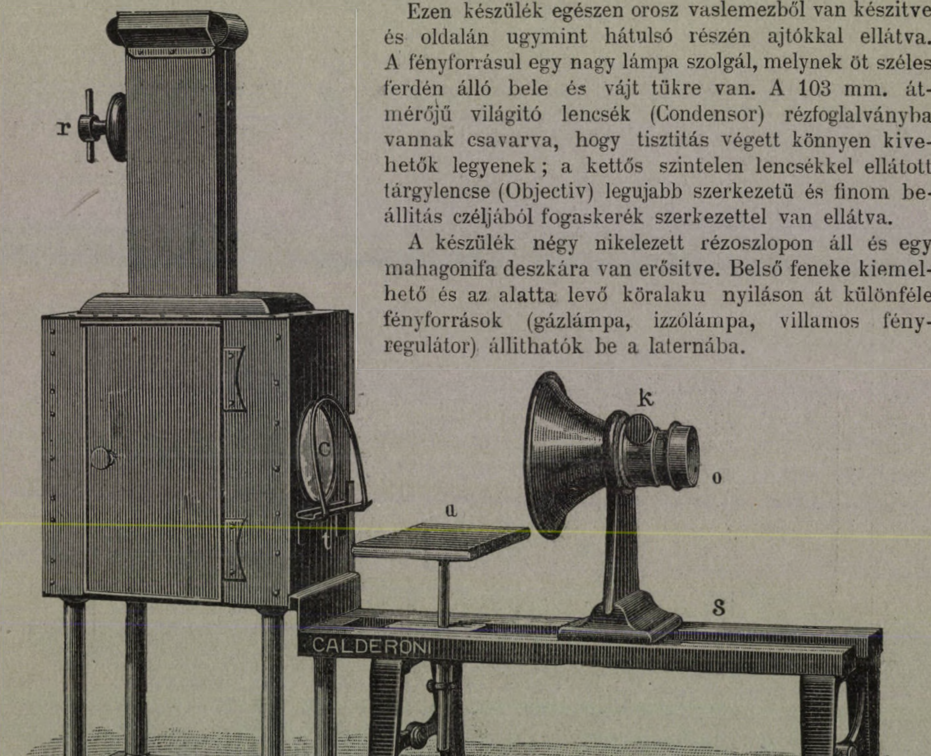
# CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., kis hid-utcza 8. sz.

## „Pentaphane“ universalis vetitő készülék iskolai használatra.

Ezen készülék egészen orosz vaslemezből van készitve és oldalán ugymint hátulsó részén ajtókkal ellátva. A fényforrásul egy nagy lámpa szolgál, melynek öt széles ferdén álló bele és vájt tükre van. A 103 mm. átmérőjű világitó lencsék (Condensor) rézfoglalványba vannak csavarva, hogy tisztitás végett könnyen kivehetők legyenek; a kettős szintelen lencsékkel ellátott tárgylencse (Objectiv) legujabb szerkezetü és finom beállitás czéljából fogaskerék szerkezettel van ellátva.

A készülék négy nikelezett rézoszlopon áll és egy mahagonifa deszkára van erősitve. Belső feneke kiemelhető és az alatta levő köralaku nyiláson át különféle fényforrások (gázlámpa, izzólámpa, villamos fényregulátor) állithatók be a laternába.




A két kis lábra erősitett öntött vasból készült pad a Condensor alatt akasztatik be a készülékbe s ezen padon van az objectivtartó állvány, egy kis asztalka különféle vetitendő testek és készülékek felvételére és a képkeretet tartó rugó: állvány és asztalka a pad hosszában tetszés szerint eltolhatók, sőt utóbbi magasabbra és méyebbre is emelhető és állásában rögzithető. — Ezen készülék minden tekintetben a legkitünőbb eredményeket adja, mint a fent már emlittetett, tetszés szerint minden fényforrással használható és minden árjegyzékünkben előforduló mellékkészülék használható hozzá. — A készülék bővebb leirása, előnyei és használati módja részletesen van előadva vetitő készülékekről szóló árjegyzékünkben, melyet szivezen küldünk meg az érdeklődőknek.

**A «Pentaphane» vetitő készülék ára ötbélü petroleum-lámpával együtt 88 frt.**

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

# A HYPERCOMPLEX SZÁMOK ELMELETE.

(Első közlemény.)

1. *Bevezetés. A közönséges complex szám.* Az arithmetikában az egész szám fogalmát adottnak kell gondolnunk. Minden más számfogalom erre vezethető vissza, a mennyiben teljes tartalma az egész számok segítségével kifejezhető. A legközelebbi lépés, melyet az arithmetika tesz, a mikor a számfogalmat általánosítja, az első fokú egyenlet megoldásában nyilvánul. Mikor azt követeljük, hogy minden

$$x + a = b$$

alakú elsőfokú egyenletnek legyen megoldása, akkor a *negativ* szám fogalmára jutunk, s mikor azt kivánjuk, hogy az

$$ax = b$$

egyenletnek mindig legyen megoldása, akkor a *tört*szám bevezetése válik szükségessé. Az egész és tört számok együttvéve alkotják a raczionális számok összességét.

A magasabb fokú egyenletek megoldása kétféle számra vezethet. Ha az

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

függvény oly természetű, hogy minden pozitiv $\delta$-hoz tartozik oly raczionális $r$ szám, a melyre nézve

$$|f(r)| < \delta$$

de nem található oly raczionális szám, a melynél $f(x) = 0$, akkor az $f(x) = 0$ egyenlet egyik gyökét a raczionális számok bizonyos sorozatával definiálhatjuk, melynek határértékét *irraczionális* számnak nevezzük. Ily módon definiáljuk pl. az $x^2 - 2 = 0$ egyenlet pozitiv gyökét a következő sorozattal:

$$1{,}4,\quad 1{,}41,\quad 1{\cdot}414,\quad 1{\cdot}4142,\quad 1{\cdot}41421, \ldots$$

E definiczió módjának általánosításával nem csak algebrai egyenletek gyökei, hanem *minden* irraczionális szám definiálható. — Ha azonban nem található oly $r$ raczionális szám, a mely kielégitené az

$$|f(r)| < a$$

feltételt, akkor az illető egyenletnek nincsen valós gyöke. Gauss mutatta ki, hogy minden $f(x)$ raczionális egész függvény felbontható első illetve másodfokú tényezőkre. Minden egyenlet gyökei tehát vagy egy első vagy egy másodfokú egyenletet elégitenek ki. Az első fokú egyenlet gyökei valós számok, a másodfokú egyenlet gyökei pedig (ha a másodfokú függvény nem bontható fel), megoldható, ha az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet gyökét ismertnek tételezzük fel, azaz, ha ennek az egyenletnek gyökét adjungáljuk.

Igy arra az eredményre jutunk, hogy minden egyenlet gyökei vagy valósak, vagy képzetesek. — A közönséges complex szám bevezetését az algebrába az egyenletek megoldása teszi szükségessé, t. i. az a követelés, hogy minden $n$-ed fokú egyenletnek $n$ gyöke legyen.

Ebben az irányban haladván tovább, új számfogalom bevezetésére az analizisnek szüksége nincs, mert a közönséges complex számok már minden művelet kivétel nélkül való kivihetőségét biztosítják.

Cauchy, a ki először foglalkozott a complex számokkal tüzetesen és a ki a trigonometriai alakra hozta őket, igy nyilatkozik: (L. Cours d'Analyse 1821. 173. l.) «En analyse on appelle expression symbolique ou symbole toute combinaison de signes algébriques, qui ne signifie rien par elle-même ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir . . . Parmi les expressions ou equations symboliques dont la considération est de quelque importance en analyse, on doit sur tout, distinguer celles que l'on a nominées imaginaires».

Később Cauchy (1847-ben Exercices d'anal. et de phys. 4.) a képzetes egység helyett egy határozatlan mennyiséget vezet be és két képzetes kifejezés egyenlősége alatt azt érti, hogy e két kifejezést $(x^2+1)$-gyel elosztván egyenlő maradékokat ad. Lényegében Kronecker is így fogja fel a dolgot és ez által egészen mellőzhetőnek véli a complex egység bevezetését.*

Hankel szerint Gauss reális tartalmat adott 1831-ben a complex számoknak, midőn a síkon ábrázolta őket és így a complex számoknak ép oly geometriai tartalmat adott, mint a valós számoknak az egyenes vonalon való ábrázolással. Közel fekvő volt a gondolat, hogy úgy, miként a sík minden pontjának megfelel egy szám, nem felelhet-e meg a tér minden pontjának is egy-egy szám, vagy általában az $n$ dimenziós sokaság egy pontjának. Ezzel a kérdéssel úgy látszik már Gauss is foglalkozott és ez a kérdés volt az, a mely a *hypercomplex* számok elméletére vezetett.

Gauss u. i. a biquadratikus maradékokról írt jelentésében, melyben a közönséges complex számokról való felfogását előadja, a következőt mondja:

«Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relation zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden».

Gauss emez állítását, melyet azonban részletesebben nem fejtett ki, Weierstrass úgy értelmezi, hogy az összeadás, szorzás, kivonás és osztás műveletei általánosságban nem értelmezhetők úgy, hogy ama műveleti szabályok, melyek a közönséges (valós) számok körében fennállanak, változatlanul érvényben maradjanak ez esetben is, ha az alapegységek száma 2-nél nagyobb. Weierstrass ide vonatkozó

---

* L. Molk értekezését: Sur la notion de la divisibilité etc. Acta Math. 6. k. 7. l. továbbá Kronecker-től «*Ueber den Zahlbegriff*» Jour. f. d. r. u. ang. Math. 101. és Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin 1888. I. és II. «*Zur Theorie der allg. complexen Zahlen*» 485. l. etc.

vizsgálatainak lényege abban van,* hogy az *általános complex számmal való müveleteket oly komponensekkel végzi el, melyek a közönséges complex számokkal analog módon viselkednek.* Ennek a kimutatása képezi e sorok czélját.

2. *Az általános complex szám definicziója.* A közönséges complex szám *alapegységei:* 1 és $i$; az-az minden complex szám kifejezhető e két alapegység lineár függvénye gyanánt ez alakban: $a + bi$, a hol $a$ és $b$ valós számokat jelentenek. Általánosságban legyenek az

$$e_1, e_2 \ldots, e_n$$

*alapegységek* adva és képezzük segítségükkel az

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n,$$

$n$-edrendű complex számot, a hol az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok, az $a$ complex szám *koordinátái,* valós vagy közönséges complex számokat jelentenek. Az alapegységekről felteszszük, hogy egymástól lineár független, azaz hogy közöttük

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n = 0$$

alakú összefüggés csak úgy állhat fenn, ha

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0.$$

Evvel egyszersmind megállapitottuk két $n$-edrendű complex szám egyenlőségének fogalmát is, a mennyiben két ily szám egyenlő, ha ilyenek a megfelelő koordinátáik.

Az imént bevezetett legáltalánosabb complex szám fogalmának tartalmát kell most már mindenek előtt megállapitanunk, s ezt az alapműveletek reájuk vonatkozó értelmezésével fogjuk eszközölni.

3. *A szorzás commutativ és associativ elve.* A valós számok tartományának jellemvonása, hogy a valós számokon végzett négy alapmüvelet ismét valós számokhoz vezet. A complex számok tartományában is úgy lehet értelmeznünk e müveleteket, hogy az eredmény a tartományon belül levő számokhoz vezessen, továbbá, hogy

* Göttinger Nachrichten 1884.

az összeadás és szorzás commutativ és associativ elvei érvényben maradjanak.

Ha

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n,$$

akkor $a + b$ értelmezése a következő:

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) e_n.$$

Ez értelmezésből nem csak az következik, hogy az említett elvek érvényben maradnak, hanem még az is, hogy e művelet megfordítása, a kivonás is *egyértelmű*.

Két szám, $a$ és $b$ szorzata:

$$a \,.\, b = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_k e_i e_k.$$

Hogy e szorzat benn legyen az $n$ adott alapegység meghatározta komplex számtartományban, melyet $E$-vel jelölünk, kell, hogy

$$e_i e_k$$

szorzatok e komplex tartományba tartozzanak; vagyis kell, hogy fönnálljon a következő $n^2$ számmal lévő egyenletből álló rendszer:

$$\text{I.} \qquad e_i e_k = E_{1ik} e_1 + E_{2ik} e_2 + \dots E_{nik} e_n$$
$$(i = 1, 2 \dots n;\; k = 1, 2 \dots n),$$

a hol az $E$ együtthatók mindannyian valós vagy közönséges complex számok.

*Az I. egyenletrendszer segítségével képesek vagyunk az alapegységek bármely raczionális egész függvényét azoknak lineár függvényévé átalakítani.*

Ha azt kivánjuk, hogy a szorzás commutativ elve érvényben maradjon, akkor kell, hogy $e_i e_k = e_k e_i$ legyen; az-az az $E$ együtthatók között a következő összefüggésnek kell fönnállania

$$1. \qquad E_{sik} = E_{ski} \quad (s = 1, 2 \dots n),$$

az-az az $e_i e_k$ kifejezésében minden együttható rendre egyenlő az $e_k e_i$ kifejezés megfelelő együtthatójával.

Ha az $E$ együtthatók az 1. alatti feltételi egyenleteket nem elégítik ki, akkor a szorzás commutativ elve nem érvényes. Igy pl. ha az

$$e_1, e_2, \ldots e_n$$

alapegységek szorzatait úgy állapítjuk meg, hogy $e_i e_k = -e_k e_i$ legyen, akkor a szorzás commutativ elve nem érvényes. Ily egységekből alkotott complex tartományt az *alternáló* számok tartományának nevezzük. Fontosságuk van a determináns-elméletben, mert minden $n$-edfokú determináns $n$ ilyen complex szám szorzata gyanánt állítható elő.

A Hamilton-féle *quaterniók* is olyan 4 alapegységgel biró complex számok, melyekre a commutativ elv nem alkalmazható. A quaterniók alapegységei közül egyik $e_1 = 1$, a többit $e_2$, $e_3$, $e_4$-el jelölvén, a következő egyenletek állanak fenn:

$$\begin{array}{llll}
e_1e_1 = e_1, & e_2e_1 = \phantom{-}e_2, & e_3e_1 = \phantom{-}e_3, & e_4e_1 = \phantom{-}e_4, \\
e_1e_2 = e_2, & e_2e_2 = -e_1, & e_3e_2 = -e_4. & e_4e_2 = -e_3, \\
e_1e_3 = e_3, & e_2e_3 = \phantom{-}e_4, & e_3e_3 = -e_1, & e_4e_3 = -e_2, \\
e_1e_4 = e_4, & e_2e_4 = -e_3, & e_3e_4 = \phantom{-}e_2, & e_4e_4 = -e_1.
\end{array}$$

E definiczió következtében két quaternió szorzata ismét quaternió s a felállitott egyenletek alapján a szorzat a következő alakot nyeri: Ha

$$\alpha = a_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$$

$$\beta = b_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4$$

és:

$$\alpha . \beta = \gamma = c_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + c_4e_4$$

akkor

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 \\
c_2 &= a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 \\
c_3 &= a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2 \\
c_4 &= a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1.
\end{aligned}$$

Ha az 1. egyenletek fönállanak, akkor a szorzás commutativ elvének érvénye biztositva van, mert ekkor

$$ab = \Sigma a_i \beta_k e_i e_k \text{ és } ba = \Sigma \beta_k a_i e_k e_i.$$

Ha továbbá még azt is követeljük, hogy a szorzás associativ elve is megőriztessék, akkor az I. egyenletrendszerben az $E$ együtthatók közt további összefüggéseket kell létesitenünk. Szükséges ugyanis, hogy:

$$(e_i e_k)\, e_j = (e_i e_j)\, e_k$$

legyen, azaz részletesen kiirva:

$$(E_{1ik}e_1 + E_{2ik}e_2 + \dots E_{nik}e_n)\, e_j = (E_{1ij}e_1 + E_{2ij}e_2 + \dots + E_{nij}e_n)\, e_k.$$

A baloldalon álló kifejezés:

$$\begin{aligned}
&E_{1ik}e_1e_j + E_{2ik}e_2e_j + \dots + E_{sik}e_se_j + \dots + E_{nik}e_ne_j = \\
&\quad E_{1ik}(E_{11j}e_1 + E_{21j}e_2 + \dots + E_{n1j}e_n) \\
&\quad + E_{2ik}(E_{12j}e_1 + E_{22j}e_2 + \dots + E_{n2j}e_n) \\
&\quad + \dots + E_{nik}(E_{1nj}e_1 + E_{2nj}e_2 + \dots + E_{nnj}e_n) \\
&\quad = e_1(E_{1ik}E_{11j} + E_{2ik}E_{12j} + \dots + E_{nik}E_{1nj}) \\
&\quad + e_2(E_{1ik}E_{21j} + E_{2ik}E_{22j} + \dots + E_{nik}E_{2nj}) \\
&\quad + \dots\dots\dots\dots\dots \\
&\quad + e_n(E_{11k}E_{nij} + E_{2ik}E_{n2j} + \dots + E_{nik}E_{nnj})
\end{aligned}$$

vagy rövidített jelzéssel élvén az egyenlet bal oldalán álló kifejezés így írható:

$$\sum_{s=1}^{n} e_s (E_{1ik}e_{s1j} + E_{2ik}E_{s2j} + \dots + E_{nik}E_{snj})$$

jobb oldalán pedig a következő kifejezés áll:

$$\sum_{s=1}^{n} e_s (E_{1ij}e_{s1k} + E_{2ij}E_{s2k} + \dots + E_{nij}E_{snk}).$$

Hogy tehát a szorzás associativ elve érvényben maradjon, kell, hogy a következő feltételi egyenletek álljanak fenn:

$$\begin{aligned}
2.\quad & E_{1ik}E_{s1j} + E_{2ik}E_{s2j} + \dots + E_{nik}E_{snj} = E_{1ij}E_{s1k} \\
& + E_{2ij}E_{s2k} + \dots + E_{nij}E_{snk} \\
& (i, j, k, s = 1, 2, 3, \dots, n)
\end{aligned}$$

4. *E feltételek lehetősége.* Fölmerül a kérdés, hogy lehetséges-e az I. egyenletben az $E$ együtthatókat úgy választani, hogy az 1. és 2. egyenletek egyszerre legyenek kielégitve? DEDEKIND általánosság-

ban megmutatja,* mi módon lehet ilyen $E$-kat választani. Mi csak egy példán mutatjuk meg, hogy ilyen $E$-k valóban léteznek. Legyen ugyanis

$$E_{sik} = 0$$
$$(i \lesseqgtr k;\ s = 1, 2, \ldots, n)$$
$$E_{sii} = 0$$
$$(s = 1, 2, \ldots\ i-1, i+1, \ldots\ n)$$
$$E_{iii} = 1$$

az-az

$$e_i e_k = 0$$
$$(i \lesseqgtr k)$$

és

$$e_i e_i = e_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez alapegységekből alkothatunk számtalan új alapegységet, a melyek eleget tesznek a kivánt föltételeknek. Ha u. i.

$$E_1 = \xi_{11}e_1 + \xi_{21}e_2 + \ldots + \xi_{n1}e_n$$
$$E_2 = \xi_{12}e_1 + \xi_{22}e_2 + \ldots + \xi_{n2}e_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_n = \xi_{1n}e_1 + \xi_{2n}e_2 + \ldots + \xi_{nn}e_n$$

a hol $\xi_{11} \ldots \xi_{nn}$ tetszés szerinti valós számok, akkor az $E_1, E_2, \ldots E_n$, alapegységekből alkotott complex számtartományban érvényes a szorzás commutativ és egyszersmind associativ elve. U. i.:

$$E_iE_k = \xi_{1i}\xi_{1k}e_1 + \xi_{2i}\xi_{2k}e_2 + \ldots + \xi_{ni}\xi_{nk}e_n = E_kE_i$$

és

$$(E_iE_k)E_j = \xi_{1i}\xi_{1k}\xi_{1j}e_1 + \xi_{2i}\xi_{2k}\xi_{2j}e_2 + \ldots + \xi_{ni}\xi_{nk}\xi_{nj}e_n = E_i(E_jE_k).$$

*Beke Manó.*

---

* Göttinger Nachrichten 1885.

# AZ INVARIÁNSOK ELMÉLETÉNEK ALAPJAIRÓL.*

(Második és befejező közlemény.)

## II.

Első közleményünkben láttuk az invariánselmélet keletkezését a geometriai kutatásban; megállapítottuk az invariáns fogalmát, mely szerint ez egyes alaknak vagy több alakból álló rendszernek együtthatóiból összeállított oly homogén raczionális egész kifejezés, mely lineár transzformácziónál csak állandó szorzóval változik és kimutattuk, hogy e szorzó csak a helyettesítés determinánsának bizonyos hatványa lehet.

A mathematikának általános elve, minden fogalmát oly alakban állítani elő, melyen annak leglényegesebb jegyei külsőleg is érvényre lépnek. Ily alakban kell tehát előállítanunk az invariánsokat is.

E czélból vizsgáljunk először két lineár alakot:

$$f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Könnyen látható, hogy e két alak együtthatóiból képezett determináns

$$I = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

invariáns, mert az

$$x_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2$$
$$x_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2$$

helyettesítés alkalmazása után lesz

* Előadva a mathematikai és physikai társaság 1891. évi márczius hó 19-én tartott szakülésén.

$$I' = r \cdot I,$$

a hol $r$ a helyettesítés determinánsát jelenti.

Hogyha nem két, hanem $n$ binär lineár alakot vizsgálunk, akkor ezeknek együtthatóiból $\binom{n}{2}$ számmal lévő determináns képezhető, melyek valamennyien invariáns jellemüek; — ilyen lesz a szorzatuk is, mert lineár szubsztituczió alkalmazása után ez is csak a szubsztituczió determinánsának bizonyos hatványával változhatik. Tehát minden ily alakú

$$\Pi(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 c_2 - a_2 c_1) \ldots \ldots$$

szorzat, sőt ilyeneknek homogén aggregatuma is invariáns. Sokkal nevezetesebb e tétel megfordítása, mely szerint minden invariáns ily jellemző alakra hozható, a mely belső szerkezetét világosan tárja elénk. E Clebsch-től származó tétel így hangzik:

*Valamely alakrendszer minden invariánsa egyszersmind szimultán invariánsa ama lineár tényezőknek is, melyekre az alakok felbonthatók és mindig előállítható mint két-két alak determinánsainak szorzataiból alkotott szimmetrikus kifejezés.*

Legyenek az adott alakrendszer alakjai lineár tényezőikre felbontva a következők:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv (a_{11}x + b_{11}y)(a_{12}x + b_{12}y) \ldots (a_{1m}x + b_{1m}y) \\ f_2 &\equiv (a_{21}x + b_{21}y)(a_{22}x + b_{22}y) \ldots (a_{2n}x + b_{2n}y) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_r &= (a_{r1}x + b_{r1}y)(a_{r2}x + b_{r2}y) \ldots (a_{rp}x + b_{rp}y) \end{aligned}$$

ezeknek minden szimultán invariánsa ily alakú:

$$I = C(a_{11}b_{12} - b_{11}a_{12})^{\alpha}(a_{11}b_{13} - a_{13}b_{11})^{\beta} \ldots + \ldots,$$

a hol $C$ állandó szorzó és $\alpha, \beta \ldots$ pozitiv egész számú hatványkitevők; az összeg első tagjában a determinánsszorzók száma $\binom{m+n+\ldots+p}{2}$ és a többi tagokat úgy kapjuk, hogy a zárjelekben foglalt mennyiségeket minden lehető módon permutáljuk.

E tétel levezetésére egy Cayley-től származó segédtételt (Philos. Transactions 48. kötet) használunk fel:

*Ha $I$ egy vagy több algebrai alaknak pl. $f_1, f_2, \ldots, f_r$-nek invariánsa, ha továbbá $F$ oly binär alak, melynek rendszáma megegyez $f_1$ rendszámával, s ha $f_1$ együtthatói $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $F$ megfelelő együtthatói $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, akkor*

$$I_1 = \alpha_0 \frac{\partial I}{\partial a_0} + \alpha_1 \frac{\partial I}{\partial a_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial I}{\partial a_n}$$

*szintén invariáns.*

E segédtétel levezetésére helyettesítsük az $f_1$ alakot $f_1 + \varkappa F$ alakkal, tehát az $a_i$ együtthatót $a_i + \varkappa\alpha_i$ együtthatóval, akkor

$$I(A_0 + \varkappa A_0, A_1 + \varkappa A_1, \ldots) = r^\lambda I(a_0 + \varkappa\alpha_0, a_1 + \varkappa\alpha_1 \ldots),$$

a hol $A_i$ és $A_i$ a transzformált alakok együtthatói.

Mindkét oldalt $k$ hatványai szerint sorba fejtvén, nyerendő egyenlet $k$ minden értékénél csak úgy állhat fön, ha $k$ hasonló hatványainak együtthatói a két kifejtésben külön-külön egyenlők; ha e kifejlésben $\varkappa$ első hatványainak együtthatóit összehasonlítjuk, nyerjük:

$$I_1 = r^\lambda \left( \alpha_0 \frac{\partial I}{\partial a_0} + \alpha_1 \frac{\partial I}{\partial a_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial I}{\partial a_n} \right).$$

a mivel a jelzett tétel helyességét már is bebizonyítottuk.

E segédtétellel most már meg fogjuk állapíthatni lineár alakokból álló szimultán rendszer invariánsainak általános alakját.*

Legyenek

$$f_a = a_1 x + a_2 y$$
$$f_b = b_1 x + b_2 y$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_h = h_1 x + h_2 y$$

véges számú lineáris alakok; legyen továbbá $I$ ezeknek valamely szimultán invariánsa, mely az $a$ együtthatókban $k$-adfokú, a $b$ együtthatókban $l$-edfokú s i. t., akkor ezt meghatározhatjuk olyan invariáns segítségével, mely ettől csak állandó szorzóban különbözik, és *egy*-gyel kevesebb alakból van képezve. Legyen ugyanis $\overline{I}$

* V. ö. CLEBSCH-LINDEMANN, Vorlesungen I. p. 184.

amaz invariáns, mely $I$-ből keletkezik, ha benne $a_1=b_1$ és $a_2=b_2$, akkor $\bar{I}$ az $a$ együtthatókban $(k+l)$-edfokú lesz és invariánsok lesznek segédtételünk értelmében a következő kifejezések is:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= b_1 \frac{\partial \bar{I}}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial \bar{I}}{\partial a_2} \\ \bar{I}_2 &= b_1 \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial a_2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{I}_l &= b_1 \frac{\partial \bar{I}_{l-1}}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial \bar{I}_{l-1}}{\partial a_2} \end{aligned} \qquad (1.)$$

a hol $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \ldots, \bar{I}_l$ az $a$ együtthatókban ill. $(k+l-1)$, $(k+l-2), \ldots, k$-adfokuak, a $b$ együtthatókra nézve pedig $1, 2, \ldots, l$-edfokuak.

$\bar{I}_l$ tehát a keresett invariáns; könnyen kimutathatjuk, hogy $b_i=a_i$ esetében $\bar{I}_l$ az $I$-től csak állandó szorzóban különbözik. Ha ugyanis a nyert $\bar{I}$ függvényekre Euler tételét alkalmazzuk, akkor

$$\begin{aligned} (\bar{I}_1)_{b=a} &= \frac{\partial \bar{I}}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial \bar{I}}{\partial a_2} a_2 = (k+l)\,\bar{I} \\ (\bar{I}_2)_{b=a} &= \left(\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial a_2} a_2\right)_{b=a} = (k+l-1)(k+l)\,\bar{I} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\bar{I}_l)_{a=a} &= \left(\frac{\partial \bar{I}_{l-1}}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial \bar{I}_{l-1}}{\partial a_2} a_2\right)_{b=a} = (k-1)(k+2)\ldots(k+l)\,\bar{I} \end{aligned}$$

úgy hogy a nyert egyenlőségek közül az utolsónak alapján következik, hogy

$$(\bar{I}_l - (k+1)(k+2)\ldots(k+l)\,I)_{b=a} = 0\,;$$

de ez csak úgy lehetséges, ha a zárjelben álló kifejezés az $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ gyöktényezővel osztható; úgy hogy e megjegyzés révén írhatjuk:

$$\bar{I}_l - (k+1)(k+2)\ldots(k+l)\,I = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,M$$

és innen

$$I = \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots(k-l)}(\bar{I}_l - (a_1 b_2 - a_2 b_1) M).$$

Ezzel $I$-t két oly invariáns összegére vezettük vissza, mely közül $\bar{I}_l$ az egygyel kevesebb alakból képezett $\bar{I}$-ból vezethető le, $M$-nek pedig összes foka egy egységgel kisebb; folytatván ezt az eljárást végre két alak invariánsára fogunk jutni. Csak azt kell tehát még kimutatnunk, hogy két lineár alak, $f_a = a_1 x_1 + a_2 x_2$ és $f_b = b_1 x_1 + b_2 x_2$, invariánsa csak az $r = a_1 b_2 - a_2 b_1$ determináns valamely hatványa lehet. Ilyeninvariáns az

$$I(A_1, A_2, B_1, B_2) = r^\lambda I(a_1, a_2, b_1, b_1)$$

egyenletnek eleget tesz bármely lineár szubsztitucziónál, tehát a következőnél is:

$$x_1 = a_2 \xi_1 + b_2 \xi_2$$
$$x_2 = -a_1 \xi_1 - b_1 \xi_2.$$

Ekkor a transzformált alakok lesznek

$$f_A = (a_1 a_2 - a_1 a_2)\xi_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\xi_2$$
$$f_B = (a_2 b_1 - a_1 b_2)\xi_1 + (b_1 b_2 - b_1 b_2)\xi_2$$

tehát

$$A_1 = 0$$
$$A_2 = r$$
$$B_1 = -r$$
$$B_2 = 0$$

és így

$$I(0, r, -r, 0) = r^\lambda I(a_1, a_2, b_1, b_2)$$

Ez egyenlet baloldala nem egyéb mint $Cr^u$ és így

$$I = C' r^v$$

a hol $C'$ épen úgy mint a $C$ állandó számértéket jelent.

Tételünk már most magasabb fokú alakokra is alkalmazható a következő meggondolás alapján:

Az algebra alaptétele értelmében minden $n$-edrendű binär alak

$$f \equiv A_0 x_1^n + A_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + A_k x_1^{n-k} x_2^k + \ldots + A_n x_2^n$$

előállítható mint gyöktényezőinek szorzata

$$f \equiv (a_1' x_2 - a_2' x_1)(a_1'' x_2 - a_2'' x_1) \dots (a_1^{(n)} x_2 - a_2^{(n)} x_1)$$

a hol

$$A_0 = a_2' a_2'' a_2''' \dots a_2^{(n)}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_n = (-1)^n a_1' a_1'' \dots a_1^{(n)}$$

tehát az eredeti alak együtthatói az $a_1^{(i)}$ és $a_2^{(i)}$ együtthatóknak elemi szimmetrikus kifejezései. Az eredeti $f$ alakra alkalmazott lineár helyettesítés hatása ugyanaz mint a lineár tényezőire gyakorolt helyettesítésé, tehát az eredeti alak minden invariánsa egyúttal a gyöktényezők szimultán invariánsa.

Hogy fordítva, a gyöktényezők valamely szimultán invariánsa az eredeti alaknak is invariansa legyen, kell hogy az invariáns a gyöktényezők együtthatóinak szimmetrikus kifejezése legyen, mert csak ekkor raczionális az eredeti alak együtthatóiban.

Ebből egyszersmind az is következik, hogy az egyes gyöktényezők együtthatói az invariánsban egyenlő magas hatványon fordulnak elő, minthogy különben az invariáns az eredeti alak együtthatóiban homogén nem lehetne.

## III.

Miután megismerkedtünk az invariánsok ama jellemző előállításával, melyen az invariáns-karakter külsőleg is kifejezésre jut, és melynek segítségével tetszés szerint sok invariánst alkothatunk, felmerül az a kérdés, vajjon az ekként nyert invariánsok sorozatában mily törvényszerűség uralkodik; nem tekinthető-e ez a sorozat — elemeinek végtelen nagy száma mellett is — bizonyos módon határoltnak; és ha igen, mily módon történik ez a határolás? A feleletet erre a kérdésre megadja az invariánsok elméletének alaptétele, és ennek bebizonyításával fogunk most már legközelebb foglalkoznunk.

Ez a tétel a következő:

*Valamely alakra vagy alakrendszerre vonatkozólag mindenkor* *képezhető az invariánsok bizonyos véges sorozata, az ú. n. alaprendszer, melynek invariánsaiból az összes többiek raczionális egész műveletek segítségével vezethetők le, tehát azoknak raczionális egész összetételei.*

E tétel bebizonyitása után az invariánsok tanának főproblémáit elintéztük, mert az eddigiek alapján nemcsak az egyes invariáns belső szerkezetébe nyertünk tiszta betekintést, hanem egyszersmind teljesen ismeretes lesz előttünk ama kapcsolat is, mely valamely alak vagy alakrendszer különböző invariánsait összefűzi. E kapcsolat geometriai értelmezésben azt jelenti, hogy valamely algebrai pont-, vonal-, vagy sik-alakzatnak csak véges számmal lehetnek egymástól független projektiv tulajdonságai, melyeknek azután az összes többi projektiv tulajdonságok csak folyományai.

A Gordan-tól származó alaptétel történelmére nézve megjegyezzük, hogy Cayley a *Philosophical transactions* 146. kötetében még ama nézetének adott kifejezést, hogy véges számú invariánsokból nem állitható elő valamely alaknak vagy alakrendszernek minden invariánsa raczionális módon. Gordan előbb a Crelle Journal 69. kötetében egy alakra és ezután a Math. Annalen 2. kötetében egy binär alakokból álló rendszerre mutatta ki a tétel helyességét. Gordannak e levezetése meglehetősen hosszadalmas és egy — lehet mondani — misztikus elemet, a szimbolikus számitást veszi igénybe, minek folytán a tárgyalás világosságából és egyszerűségéből sokat veszit. A legutóbbi években e tételnek két sokkal világosabb és rövidebb bizonyitása jelent meg, a melyek a szimbolikus számitást teljesen mellőzik. Az egyiket Mertens közölte a Crelle Journal 100. kötetében és kevéssel utána kissé módositva a bécsi tudományos akadémia 1889. üléseinek értesitőjében; a másodikat Hilbert a Math. Annalen 33. kötetében.

Ez utóbbi levezetést fogjuk a következőkben ismertetni. E végből két segédtételt fogunk előrebocsátani, melyek annyiban közös természetűek a Gordan-féle tétellel, a mennyiben azok is magukban zárt rendszerek végességével foglalkoznak.

Az egyik segédtétel diophantusi rendszerekkel foglalkozik és igy szól:

*Minden homogen lineár egyenletekből álló diophantusi rendszernek van véges számmal oly pozitiv egész számú megoldása, melyekből pozitiv egész számok segítségével e rendszernek minden más megoldása lineár és homogén módon állítható elő.* (V. ö. GORDAN-KERSCHENSTEINER Invariantentheorie I. p. 199.)

Vegyünk először *egy* ilyen egyenletet, akkor ez mindig erre az alakra hozható:

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_rx_r=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_sy_s$$

a hol $a_i$ és $b_k$ nem negativ egész számok; közvetetlenül belátható, hogy ennek az egyenletnek $r.s$ számmal van ily alakú megoldása:

$$x_1=0,\ x_2=0, \ldots\ x_{i-1}=0,\ x_i=\frac{b_k}{t_{ik}},\ x_{i+1}=0, \ldots\ x_r=0,$$

$$y_1=0,\ y_2=0, \ldots\ y_{k-1}=0,\ y_k=\frac{a_i}{t_{ik}},\ y_{k+1}=0, \ldots\ y_s=0,$$

a hol $t_{ik}$ az $a_i$ és $b_k$ legnagyobb közös osztóját jelenti. Minden más megoldás a következő három csoport valamelyikébe tartozik:

$$1.\ \begin{matrix} x_i<\frac{b_k}{t_{ik}} \\ y_k<\frac{a_i}{t_{ik}} \end{matrix} \qquad 2.\ \begin{matrix} x_i\lesseqgtr\frac{b_k}{t_{ik}} \\ y_k\gtreqless\frac{a_i}{t_{ik}} \end{matrix} \qquad 3.\ \begin{matrix} x_i>\frac{b_k}{t_{ik}} \\ y_k>\frac{a_i}{t_{ik}} \end{matrix}$$

Az 1. csoportba nyilván csak véges számú megoldás tartozhatik, a mi közvetetlenül világos; de a 2. csoportra ugyanaz áll, mert az egyenlet természete valamelyik ismeretlennek minden határon túl való nagyobbodását nem engedi meg; a 3. csoportba tartozó megoldások pedig felbonthatók, mert két megoldás különbsége

$$x_i-\frac{b_k}{t_{ik}} \quad \text{és} \quad y_k-\frac{a_i}{t_{ik}}$$

is gyökei az egyenletnek. Igy nyerünk tehát egy diophantusi egyenletre nézve véges számú ilyen megoldást:

$$\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots \xi_{ri};\ \eta_{1i}, \eta_{2i}, \ldots \eta_{si},$$
$$(i=1, 2, \ldots, m)$$

melyekből az összes többiek pozitiv egész együtthatók segítségével levezethetők, a melyek tehát az összes megoldásokra nézve alaprendszer jellegével birnak.

Legyenek $p_1, p_2, \ldots p_m$ tetszőleges pozitiv egész számok, akkor az általános megoldást a következő képletsorozat szolgáltatja:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = p_1 \xi_{11} + p_2 \xi_{12} + \ldots + p_m \xi_{1m} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_i = p_1 \xi_{i1} + p_2 \xi_{i2} + \ldots + p_m \xi_{im} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_r = p_1 \xi_{r1} + p_2 \xi_{r2} + \ldots + p_m \xi_{rm} \\
y_1 = p_1 \eta_{11} + p_2 \eta_{12} + \ldots + p_m \eta_{1m} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_k = p_1 \eta_{k1} + p_2 \eta_{k2} + \ldots + p_m \eta_{km} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_s = p_1 \eta_{s1} + p_2 \eta_{s2} + \ldots + p_m \eta_{sm}
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Ha az első egyenlethez hozzálép egy második, akkor ebbe behelyettesítjük az $x$-ek és $y$ okra nyert általános megoldásokat és meghatározzuk belőle a $p_i$ számokat; ezeknek értékét az (1) alatti egyenletekbe behelyettesítvén, az első két egyenletnek véges számú szimultán pozitiv egész megoldását nyerjük és hasonló módon folytatván ez eljárást, a tétel helyességét tetszőleges, de véges számú ily egyenletre igazolhatjuk.

A másik hasonló természetű segédtétel algebrai kifejezések normálalakjára vonatkozik:

*Ha*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$$

*$\nu$ tetszőleges mennyiség és $p$ valamely pozitiv számérték, akkor mindig fönnállnak a következő egyenlőségek:*

$$\omega_i^p = g_0 + g_1 \omega_i + g_2 \omega_i^2 + \ldots + g_{\nu-1} \omega_i^{\nu-1}$$

*a hol a $g_h$ együtthatók az $\omega$-ákból képezett*

$$s_i = \omega_1^i + \omega_1^i + \ldots + \omega_\nu^i$$
$$(i = 1, 2, \ldots \nu)$$

*hatványösszegeknek raczionális egész összetételei.*

E tétel bebizonyitása végett képezzük az

$$f(\omega) \equiv (\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)\dots(\omega-\omega_\nu) \equiv$$
$$\equiv \omega^\nu - (\Sigma\omega_1)\,\omega^{\nu-1} + \dots + (-1)^\nu \omega_1\omega_2\dots\omega_\nu$$

raczionális egész függvényt; ennek együtthatói

$$-\Sigma\omega_1,\ \Sigma\omega_1\omega_2,\ \dots (-1)^\nu \omega_1\omega_2\dots\omega_\nu$$

az

$$s_1+(-\Sigma\omega_1)=0$$
$$s_2+(-\Sigma\omega_1)s_1+2(\Sigma\omega_1\omega_2)=0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$s_k+(-\Sigma\omega_1)s_{k-1}+\dots+\big((-1)^{k-1}\Sigma\omega_1\omega_2\dots\omega_{k-1}\big)s_1$$
$$+k\big((-1)^k\Sigma\omega_1\omega_2\dots\omega_k\big)=0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$s_\nu+(-\Sigma\omega_1)s_{\nu-1}+\dots+\big((-1)^{\nu-1}\Sigma\omega_1\omega_2\dots\omega_{\nu-1}\big)s_1$$
$$+\nu\big((-1)^\nu\omega_1\omega_2\dots\omega_\nu\big)=0$$

Newton-féle identitások segítségével kifejezhetők mint az $s_i$ hatványösszegek lineár függvényei, úgy hogy

$$f(\omega) \equiv \omega^\nu + l_1(s_1)\,\omega^{\nu-1} + l_2(s_1, s_2)\,\omega^{\nu-2} + \dots + l_\nu(s_1, s_2, \dots s_\nu) = 0.$$

a hol az $l_1, l_2, \dots l_\nu$ a zárjelekben foglalt hatványösszegek lineár kifejezései.

$\omega^p$ előállításánál már most két eset lehetséges:

*a)* $p<\nu$, akkor maga $f(\omega)=\omega_i^p$ és

$$f(\omega) \equiv 0+0\,.\,\omega_i+0\,.\,\omega_i^2+\dots+0.\omega_i^{p-1}+1\,.\,\omega_i^p+0.\omega_i^{p+1}+\dots+0.\omega_i^{\nu-1}$$

a tétel kimondásában jelzett előállitás.

*b)* $p>\nu$, akkor algebrai osztás alapján:

$$\omega^p = f(\omega)\,q(\omega) + r(\omega),$$

a hol $f(\omega)$ $\nu$-edfokú lévén, $q(\omega)$ $(p-\nu)$-edfokú és $r(\omega)$ legfeljebb $(\nu-1)$-ső fokú. $\omega$ bármely $\omega_k$ értékénél $f(\omega_k)=0$, tehát

$$\omega_k^p = r(\omega_k)$$

tehát egyenlő az $\omega$-knak egy $(\nu-1)$-sőfokú függvényével. Tudvalevőleg az osztás lényege lineár egyenletrendszer megoldásán fordúl meg, melynek determinánsában a diagonális csak az osztó legmagasabb hatványának együtthatóját tartalmazza, ettől jobbra pedig csupa 0-t, tehát a determinánsa jelenleg egyenlő *egy*-gyel, úgy hogy a hányados és maradék minden együtthatója az osztandó és osztó együtthatóinak, tehát a jelen esetben a hatványösszegeknek is raczionális egész függvényei.

## IV.

Ezek után végül áttérhetünk Gordan tételének levezetésére. A tétel így hangzik:

*Minden binär algebrai alaknak vagy ily alakokból álló rendszernek összes invariánsai közűl véges számú kiválasztható úgy, hogy minden az adott alakra vagy alakrendszerre vonatkozó invariáns mint ezeknek raczionális egész függvénye állítható elő.*

Legyen adva *egy* $n$-edfokú binär alak és ez tényezőire felbontva legyen:

$$f \equiv (a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y)\ldots(a_nx+b_ny),$$

akkor a Clebsch-féle tétel értelmében ez alak minden invariánsa ekként állítható elő:

$$I=(1,2)^{e^{1,2}}.(1,3)^{e^{1,3}}\ldots(n-1,n)^{e^{n-1,n}}+\ldots \tag{1}$$

ahol

$$(i,k)=a_ib_k-a_kb_i;$$

és az összeg többi tagjai az elsőből a zárjelekben foglalt indexek minden lehetséges permutácziója által származnak a hatvány-kitevők pedig a következő egyenletrendszernek tesznek eleget:

$$e^{1,2}+e^{1,3}+\ldots+e^{1,n}=e^{2,1}+e^{2,3}+\ldots+e^{2,n}=\ldots=$$
$$=e^{n,1}+e^{n,2}+\ldots+e^{n,n-1},\ (e^{i,k}=e^{k,i})$$

mert az ellenkező esetben $I$ nem volna $f$ együtthatóinak homogén kifejezése.

Eme diophantusi rendszernek — mint az első segédtétel értelmében tudjuk — véges számú oly

$$\varepsilon_i^{1,2},\ \varepsilon_i^{1,3},\ \dots\ \varepsilon_i^{n-1,n}$$
$$(i=1, 2, \dots m)$$

alaprendszere van, melyből pozitiv egész együtthatók $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ segítségével előállítható minden pozitiv egész megoldás ily módon:

$$\begin{aligned}
e^{1,2} &= p_1\varepsilon_1^{1,2} + p_2\varepsilon_2^{1,2} + \dots + p_m\varepsilon_m^{1,2} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
e^{i,k} &= p_1\varepsilon_1^{i,k} + p_2\varepsilon_2^{i,k} + \dots + p_m\varepsilon_m^{i,k} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
e^{n-1,n} &= p_1\varepsilon_1^{n-1,n} + p_2\varepsilon_2^{n-1,n} + \dots + p_m\varepsilon_m^{n-1,n}
\end{aligned}$$

Behelyettesítvén ez értékeket az (1) alatti egyenletbe lesz:

$$I=(1,2)^{p_1\varepsilon_1^{1,2}}(1,2)^{p_1\varepsilon_2^{1,2}}\dots(1,2)^{p_m\varepsilon_m^{1,2}}(1,3)^{p_1\varepsilon_{1,3}^{1}}\dots(n-1,n)^{p_m\varepsilon_m^{n-1,n}}+\dots$$

vagy rövidség okáért

$$I=\omega_1^{p_1}\omega_2^{p_2}\dots\omega_m^{p_m}+\dots\dots \quad (2)$$

a hol

$$\omega_k=(1,2)^{\varepsilon_k^{1,2}}(1,3)^{\varepsilon_k^{1,3}}\dots(n-1,n)^{\varepsilon_h^{n-1,n}}$$

Minden egyes ilyen $\omega$ függvényből az indexek permutálása által származik még $\nu-1$ ily függvény, a hol $\nu=n!$, úgy hogy a második segédtétel értelmében

$$\omega_k^{p_k}=g_k+g'_k\omega_k+g''_k\omega_k^2+\dots+g_k^{(\nu-1)}\omega_k^{\nu-1}$$

Behelyettesítvén ez értékeket a (2) alatti egyenletbe, látjuk, hogy az általános $I$ invariáns bizonyos $\omega$ mennyiségek legfeljebb $(\nu-1)$-dik hatványainak és ugyanazok legfeljebb $(\nu-1)$-dik hatványösszegei egész függvényeinek egész függvénye

$$I=\Gamma(\dots s_{ik},\dots\omega_i^k,\dots)$$

a hol

$$s_{ik}=\omega_i^{(1)}+\omega_i^{(2)k}+\dots+\omega_i^{(\nu)k} \quad (k<\nu).$$

$I$ tehát az ily alakú invariánsoknak

$$I'=\omega_1^{\pi_1}\omega_2^{\pi_2}\dots\omega_m^{\pi_m}$$

raczionális egész függvénye, a hol $k<\nu$.

Evvel GORDAN tételét *egy* binär alakra vonatkozólag bebizonyítottuk; könnyen belátható, hogy szimultán rendszerre a bebizonyítás csak quantitative és nem qualitative fog változni.

A tétel elvi fontossága abban áll, hogy áttekintést nyújt az invariánsok összessége felett, mutatja az ezek között levő összefüggést és módot nyújt arra, hogy bizonyos egyszerű invariánsokból a többieket egész míveletekkel előállíthassuk.

HILBERT levezetése már sokkal egyszerűbb, mint az eredetileg GORDAN-tól adott, de bizonyos szempontokból még mindig további haladás is várható ezen a téren. Egyrészt oly elméletben, mely kizárólagosan raczionális egész függvényekkel foglalkozik, a hol a transzformáczió is egész művelet, a levezetés még egyáltalában irraczionális segéd-elemmel, a gyöktényezők segítségével történik, téhát még nem eléggé elemi; másrészt a nyert véges rendszer valamennyi invariáns képezésére elegendő ugyan, de általában teljességében nem szükséges, azaz az alaprendszer több invariánst tartalmaz, mint a mennyi szükségképen a többiek előállítására kivántatik, olyanokat is, melyek a többiektől nem függetlenek.

*Kopp Lajos.*

# PHYSIKAI SZEMLE.

**A sarkmagasság változásairól.** (Astronomische Nachrichten 125—136. kötetéből).

BESSEL volt az első, ki a geologiai folyamatokkal járó tömegátvitelek befolyását kutatta a föld forgási tengelyének fekvésére s utána GYLDÉN, G. DARWIN, HILL, FISCHER, SCHMICK és mások foglalkoztak a geografiai szélesség esetleges változékonyságának elméletével. A legújabb időben HALL, SCHIAPARELLI, KÜSTNER, SCHWAHN és többen e változás létezését a megfigyelés kapcsán tényleg ki is mutatták.

A főbb csillagvizsgálókon az állócsillagok pontos helymeghatározásának érdekében megszakítatlan sarkmagasság megfigyelések folynak, melyek eredménye gyanánt a következő kivonatos táblácskát adhatjuk:

| | Berlin | | | | Potsdam | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1889. okt. | 8 | $\varphi=52°30'17{\cdot}53''$ | | 1890. okt. | 3 | $\varphi=52°22'56{\cdot}31''$ |
| nov. | 4 | $17{\cdot}39$ | | decz. | 29 | $56{\cdot}02$ |
| | 23 | $17{\cdot}28$ | | 1890. jan. | 10 | $55{\cdot}99$ |
| 1890. jan. | 1 | $17{\cdot}08$ | | | 29 | $55{\cdot}90$ |
| | 10 | $17{\cdot}12$ | | | | |
| | 26 | $17{\cdot}04$ | | | | |

| | Prága | |
|---|---|---|
| 1889. szept. | 27 | $\varphi=50°5'16{\cdot}04''$ |
| nov. | 4 | $15{\cdot}85$ |
| | 16 | $15{\cdot}69$ |
| 1890. jan. | 13 | $15{\cdot}55$ |

Es korábbi adatokat hasonlítva össze:

| | Pulkowa | | | | Berlin | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1889. nov. | 20 | $\varphi=59°46'18{\cdot}66''$ | | 1884. szept. | 11 | $\varphi=52°30'16{\cdot}96''$ |
| decz. | 18 | $18{\cdot}35$ | | 1885. ápr. | 22 | $16{\cdot}52$ |
| | 29 | $18{\cdot}02$ | | | | |

| Pulkowa |
|---|
| $\varphi=59°46'18{\cdot}63''$ |
| $18{\cdot}30$ |

Ezen adatok a sarkmagasságnak határozottan periodusos változására utalnak, és elég szembeszökő a párhuzamosság a különböző helyeken nyert értékek menete között. A helyről-helyre való fáziseltolódás megismerése érdekében most Honoluluban is folynak hasonló irányú vizsgálódások. A változás amplitudója Berlin számára körülbelül 0·5″.

A geografiai szélességmeghatározásnál szereplő hibaforrások, melyek változása mint szélességváltozás tünnék fel, a következők: a megfigyelésnél elkövetett személyes és instrumentális hibák, a refrakcziótáblázatok hibája, periodusos függélyeltérések, és hibák az állócsillagok helyzetmeghatározásánál használt javitási mennyiségekben. Az első és második hibaforrás nem játszhatik szerepet, mert az összes állomásokon észlelt egyes értékek megegyezése ezt kizárja. Sugártörési anomaliák szintén nem magyarázhatják az eltéréseket, nemcsak mert Pulkowán a zenith mindkét oldalán történtek a megfigyelések, hanem azért is, mert az efféle hypothesis nagyon különös következtetésekhez vezetne: Berlin és Prága között az egyenlő sürűségű légrétegek időnként egy kilométernyi magasságkülönbséget mutatnának. A mi végre a két utolsó hibaforrást illeti, ezek különösen a Berlin-Pulkowai megfigyelések megegyezése által oly tetemes eltérések egyedüli magyarázatára nem elegendők, már csak azért sem, mert Pulkowán a helymeghatározás teljesen más methodus szerint történik, mint a többi helyen.

Az okok, melyekre a csillagászok és geodéták ezen kétségkívül meglevő változásokat visszavezetni iparkodnak, nagyjában véve megegyezők: tömegátvitelek a föld belsejében, vagy az óczeánok felületén, vagy a légkörben, melyek folytán a föld forgási tengelye kis elmozdulásokat szenved.

De mindezen hypothesiseknek is csak azóta van értelmök, mióta Radau kimutatta, hogy a föld pillanatnyi forgástengelyéhez közelfekvő főtehetetlenségi tengelynek évi periodusban való megváltozása a pillanatnyi tengely ugyanoly jellegű, de különben 3-szor akkora változását vonja maga után. Az elmélet szerint a pólus mozgása egy 12 hónapi periodusú ellipsises és 10 havi periodusú körös mozgásra vezethető vissza.

Ama tény, hogy a főtehetetlenségi tengely változása a forgási tengely változásaiban sokszorosítva tükröződik vissza, kisebb tömegek átvitelével engedi magyarázni a tüneményt, úgy hogy a légkörben véghez menő mozgások magukban véve is nagyrészt kielégítő magyarázatot adnak. A valódi ok kiderítéséről azonban legfölebb a honolului eredmények közzététele után lehet szó; ezek fogják eldönteni, mily irányú fáziskülönbség mutatkozik a földfelület különböző helyeinek szélességváltozásaiban. *Kövesligethy.*

*

**A rugalmas nyújtás törvényéről.** J. O. Thompson: «Ueber das Gesetz der elastischen Dehnung.» *Ann. d. Ph.* XLIV, 555—576. l.

«Ut tensio, sic vis» szavakban fejezte ki Hooke 1679-ben a rugalmas nyújtás alaptörvényét, melyet a lelkiismeretes experimentatorok egész sora, köztük Edlund, Miller, Morin, Wertheim a valósággal megegyezőnek talált. Pedig kritikai szemmel tekintve a dolgot, valószinűtlennek tetszik, hogy a Hooke törvénye teljes szigorúsággal álljon. Ugyanis a drót feszíttetvén, meghosszabbodik s így részeinek elhelyezkedése változik, vagyis szerkezetében változást szenved. Annyi azonban mégis biztosra vehető, hogy az eltérés a Hooke-féle törvénytől mindenesetre csak csekély lehet, mert különben már rég feltűnt volna. Ha ekként várható, hogy az eltérés igen csekély, bizonyos, hogy csak az eddig alkalmazottaknál sokkal érzékenyebb módszerekkel sikerülhet azt pontosan felismerni.

Thompson kisérleteit F. Kohlrausch strassburgi physikai intézetében hajtotta végre. Az intézet tornyában levő két pilléren vastag fagerenda volt átfektetve, melyen a kisérletnek alávetendő drótok meg voltak erősítve. A drót hossza közel 23 m. volt; a hőmérséklet hatásának kiküszöbölése végett ettől 9 cm-nyire egy másik drót volt felfüggesztve, melyet állandó nagyságú súly feszített. Kisérletei kezdetén Th. mikroszkóp segélyével megállapította, hogy a maximális megterhelés (18 kilogr.) a gerendát észrevehetően meg nem görbítette, a drót felfüggesztése tehát változatlan volt. A terhelés okozta változást a drót alsó végén kathetometerrel észlelte. Jel gyanánt gyémántkarczolás, vagy pedig a drótra erősített papiron levő finom jel szolgált, mely 0·005 mm. pontosságú beállítást engedett meg.

Főnehézség előreláthatólag a rugalmas utóhatás és a térfogat változás okozta hőmérséklet változásban volt várható. Thompson úgy találta, hogy kisérleteiben ezen thermikus befolyás 0·1 mmeterre rúghat. Hogy e befolyás mennél csekélyebb legyen, igen vékony (0·2—0·3 mm. átmérőjű) drótokat használt. Hogy a thermikus hatás csakugyan igen gyorsan elmúlt, arról úgy győződött meg, hogy a feszített dróthoz vas és újezüst drótocskát forrasztott s az ekként keletkezett thermoelembe érzékeny galvanometert kapcsolt be. Így megtudta, hogy a nyújtás okozta mérsékletcsökkenés 13 másodpercz alatt teljesen eltűnt, valamint azt is, hogy ez az egész befolyás eltünő csekély, alig $\frac{1}{10}$ C° volt.

A rugalmas utóhatás igen csekély volt. A méréseket 2 percznyi időközökben eszközölte, miután meggyőződött, hogy ezen idő múlva a rugalmas utóhatás teljesen eltűnt.

A kisérleteket sárgaréz-, vörösréz-, aczél- és ezüstdróttal hajtotta végre. Valamennyi kisérletéből az következett, hogy a Hooke-féle törvény csak első közelítése a valóságnak. Ugyanis, ha $p$ a terhelés növekedését, $x$ az általa okozott megnyújtast jelenti, Th. a következő képletet találta alkalmazhatónak:

$$x=ap+bp^2+cp^3$$

hol $a$, $b$, $c$ az anyag minőségétől függő állandók.

Ez az egyenlet a használt anyagokra nézve következőkép alakúl:

| | |
|---|---|
| Sárgaréz ... ... | $x=35\cdot4385\,p+0\cdot5353\,p^2+0\cdot1487\,p^3$ |
| Vörösréz ... ... | $x=27\cdot5780\,p+0\cdot3193\,p^2+0\cdot0538\,p^3$ |
| Aczél... ... ... | $x=35\cdot2725\,p+0\cdot5725\,p^2-0\cdot0525\,p^3$ |
| Ezüst... ... ... | $x=39\cdot4030\,p+0\cdot3905\,p^2-0\cdot0313\,p^3$ |

A mérés eredményeiből kitetszik, hogy a *rugalmassági modulus a feszítés függvénye.*

A megfigyelés és számítás megengedi azt a következtetést, hogy a felállított egyenlet egészen a terheletlen állapotig megtartja érvényességét. Ekként lehetségessé válik a még deformálatlan test rugalmassági modulusának: *a valódi rugalmassági modulusnak* a meghatározása.

Legyen $X_0$ a $P_0$ kezdőleges megterhelésnek megfelelő hosszabbodás, $X$ pedig ugyanaz a $P_0+p$ terhelésnek megfelelőleg, és legyen

$$X=\alpha P+\beta P^2+\gamma P^3$$
$$X_0=\alpha P_0+\beta P_0^2+\gamma P_0^3$$

akkor

$$x=X-X_0=\alpha P+\beta P^2+\gamma P^3-(\alpha P_0+\beta P_0^2+\gamma P_0^3)$$

De előbb volt

$$\begin{aligned}x&=a(P-P_0)+b(P-P_0)^2+c(P-P_0)^3\\&=(-aP_0+bP_0^2-cP_0^3)+(a-2bP_0+3cP_0^2)P+\\&+(b-3cP_0)P^2+cP^3\end{aligned}$$

A változó $P$ egyenlő hatványainak együtthatóit az utolsóban és az előbb kifejtett egyenletben egyenlővé tevén, lesz

$$\begin{aligned}\alpha&=a-2bP_0+3cP_0^2\\\beta&=b-3cP_0\\\gamma&=c.\end{aligned}$$

Ezen együtthatók p. o. az aczéldrótra nézve:

$$X=34\cdot672\,P+0\cdot6498\,P^2-0\cdot0525\,P^3$$

s így

$$\left(\frac{dX}{dP}\right)_{P=0}=34\cdot672$$

A kisérletnek alávetett aczéldrót hoszsza 22,683 m., keresztmetszete 0,03263 mm² lévén, az aczél valódi rugalmassági modulusa $E=\frac{l}{q}\cdot\frac{dP}{dX}$ szerint kiszámítva 20 050.

A terhelés és a megnyulás összefüggését a többi anyagokra nézve is a nem terhelt állapotból kiindulólag kiszámítván, az adatok a következők:

| | |
|---|---|
| Sárgaréz ... ... | $X=34\cdot924\ P+0\cdot2386\ P^2+0\cdot1487\ P^3$ |
| Vörösréz... ... | $X=27\cdot461\ P+0\cdot2883\ P^2+0\cdot0538\ P^3$ |
| Ezüst ... ... | $X=38\cdot907\ P+0\cdot4462\ P^2-0\cdot0313\ P^3$ |

Ezen adatokból a következő modulusokat kapjuk:

| | |
|---|---|
| Sárgaréz ... ... ... ... ... | $E=10\ 370,$ |
| vörösréz ... ... ... ... ... | $E=12\ 890,$ |
| ezüst ... ... ... ... ... ... | $E=\ 8\ 490.$ |

*Heller A.*

*

**A fény hatása az elektromos kisülésre.** WIEDEMANN u. EBERT: Ueber den Einfluss des Lichtes auf die electrischen Entladungen. *Ann. d. Ph.* XXXIII. k. 241—264. l.

HERTZ az Ann. d. Ph. XXXI. köt. 983. lapján a következő jelenséget irja le: A szikraindító tekercs sarkaival összekötött kisütő golyóit egymástól annyira távolítván, hogy a szikrák épen kimaradjanak: a szikraáram nyomban ujra megered, mihelyt a kisütő golyóit s a szikra-utat az elektromos ívfényből vagy magnézium-lámpából jövő fénysugarak érik. Kiderült, hogy a hatás főképen az ibolyántúli sugarakból ered.

WIEDEMANN és EBERT ezt a kisérletet a Holtz-féle gép szikraáramán ismételték. A kisérlet berendezése a következő: A gép sarkain felhalmozódó elektromosság egy szikramérő golyóihoz, az $A$ szikra-úthoz, ezektől pedig egy másik golyópárhoz, a $B$ szikra-úthoz van vezetve. A golyók távolsága mindkét szikra-úton néhány millimeter. A gép kisütője kellőleg széthuzatván, a szikraáram természetesen az egymáshoz közelebb álló golyók között veszi utját. Ezeket már most addig távolítgatván egymástól, hogy a szikraáram épen még átmehessen köztük, a szikraáram nyomban a másik golyópárra csap át, mihelyt a golyókat az elektromos ív vagy a magnéziumlámpa fénye éri. A fény behatása alatt tehát a kisülés a rendes körülményektől eltérőleg a hosszabbik utat választhatja. A jelenség tehát az, mintha a fény a két golyó közötti potentialkülömbséget csökkentené. — A fény hatása nemcsak a kisülés megindításában mutatkozik, hanem a megvilágítás tartama alatt állandóan és egyformán érvényesül. A több, nyugtalanul ide-oda mozgó czikázó fényes vonalból álló szikra-áram az ibolyántúli fény behatása alatt egyetlenegy finom, igen fényes vonalba folyik össze, mely a golyókat lehetőleg rövid uton törekszik összekötni. A szikraáram csattogó, szakadozott hangja a fény hatására egy quarttal magasabb hangba csap át, mely az előbbinél jóval egyenletesebb és valóságos lágy zenei hang benyomását kelti. — A fény hatásának könnyebb tanulmányozása végett W. és E. a két szikraút egy-egy golyóját a földbe vezették s a fény hatásának alávetendő szikraút: a *passiv szikraút* föld-vezetékébe egy GEISSLER-féle spektrál-csövet, vagy telefont kapcsoltak. Ha a passiv szikraútra fény esett, a spektrálcső kapilláris csöve erősebben kezdett világítani, de mihelyt a fény felfogatott, a világosság a kapilláris részből az elektródokat környező térbe vonult vissza. A kapilláris csőnek a forgó tükörben megjelenő képei, ha a szikrautat fény éri, jóformán teljesen egyenlő közökben következnek egymás után; a fény útját elvágván, a képek elszéled nek s közeik sem egész szigorúan egyenlők. A képek sűrűsége a két esetben 4 : 3 viszonynak felel meg, a mi szintén azt mutatja, hogy a megvilágítás a kisülések számát $^4/_3$ arányában szaporítja. — A Geissler-cső helyére bekapcsolt telefonban a fény hatása a hangnak egy quarttal való emelkedésében s a hang feltünő egyenletességében mutatkozik.

A fény hatásának mértéke a passiv szikrautat környező levegő nyomásától is függ. A hatás maximuma kb. 30—40 cm. magasságu higanyoszlop nyomása alatt jelentkezik; nagyobb nyomás alatt a hatás kisebbé válik, de még gyorsabban fogy, ha a nyomás ezen az értéken alábbszáll.

W. és E. sokféleképen változtatott kisérleteikből kiderült, hogy *csupán a positiv elektród megvilágítása semmiféle* változást nem idéz elő; a felsorolt hatások csak akkor mutatkoznak, ha a *fény a negativ elektródra esik.* Sőt lényegesen szükséges, hogy a fény a negativ elektródra essen, amennyiben a hatás teljesen kimarad, ha csupán csak a szikraút világíttatik meg. — Az ívfény hatása akkor a legnagyobb, ha a positiv szén izzó szélének a képe esik a negativ elektródra. Az említett fényforrásokon kívül igen hatásos a statikai elektromos kisülés fénye. Minthogy a szikraáram az ibolyántúli fény iránt rendkivül érzékeny, a neg. elektródot a visszaverődött fény ellenében is gondosan meg kell védelmezni. Így pl. a positiv elektródról visszaverődő fény hatása egész biztosan felismerhető.

A hidrogénben a hatás maximuma 10—30 cm. higanynyomás alatt mutatkozik; a megvilágítás hatására a szikraáram hangja egy sext-tel emelkedik. Kisebb nyomások alatt a hangnak felszökkenése még jelentékenyebb. Még kedvezőbbek az eredmények, ha a szikraáram széndioxidon halad át. Ez esetben már nemcsak az ibolyántúli sugarak hatásosak. Ugyanis a közönséges («szintelen») üvegen átmenő fény jóformán teljesen hatástalan, ha a szikraáram levegőn vagy hidrogénen halad át; ha ellenben a szikraáram száraz szénsavon megy keresztül, még az ibolyaszínű és kék üvegen átszűrt fény hatása is felismerhető. A hősugarak minden körülmények között hatástalanok.

*

**A fény hatása elektrostatikailag töltött testekre.** W. HALLWACHS: Ueber den Einfluss des Lichtes auf electrostatisch geladene Körper. *Ann. d. Ph.* XXXIII. 301—312. l. és W. HALLWACHS: Ueber d. Zusammenhang d. Electricitätsverlustes durch Beleuchtung mit der Lichtabsorption. *Ann. d. Ph.* XXXVII. 666—675. l.

H. a fénynek az elektromos kisülésen felismert hatását egyszerűbb viszonyok között vizsgálja. Kisérletében egy 8 cm. átmérőjű köralakú czinklemez, lehetőleg jól elszigetelve, aranylemezes elektroskóppal közlekedik. A lemez előtt czinkpléhből vágott $50 \times 60$ cm$^2$ területű ernyő áll. Az ernyő közepe kivágva s mária-üveg (gipsz) ablakkal van ellátva; a czinklemezt csakis ezen az ablakon át jövő fény érheti. Az elektroskóp s a czinklemez negativ elektromossággal megtöltetvén, a töltés rohamosan fogy, ha a lemezt elektromos ívfény sugarai érik. A positiv töltés csak nagyon lassan fogy az ívfény hatása alatt. Ha a lámpa a lemeztől 70 cm. távolságban van, a negativ töltésből 70% vész el 5 mp. alatt; 10 mp. alatt az áramlemezkék teljesen összeestek. A lámpa hatása 3 m. távolságból is érvényesült.

*

**Az absorptio a fény hatását csökkenti.** Az ernyő 4 cm$^2$ nyilása különféle anyagú lemezekkel befödetvén, az eredmény a következő:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lemez nélkül | 5 ill. | 10 mp. | alatt | a töltésbeli | veszteség | 65 | ill. | 100 | %. |
| 1 mm. gipsz | « | « | « | « | « | 35 | « | 70 | « |
| 4,6 mm. gipsz | « | « | « | « | « | 30 | « | 70 | « |
| 6,3 mm. hegyi kristály | « | « | « | « | « | 35 | « | 80 | « |
| 3 mm. konyhasó | « | « | « | « | « | 30 | « | 60 | « |

Ezek tehát jól átbocsátó anyagok. Ellenben a fémek, a papir a hatást teljesen felfogják. 0,09 mm. csillám és 2,5 mm. «szintelen» üvegen átmenő fény 120 mp. alatt a hatásnak még csak nyomát sem mutatta. A folyadékok fénynyelése is érvényesül. Ha a lemez és az ívfény között világító gáz áramlik, a hatás körülbelől felére csökken.

Sűrű sárgarézháló a fény hatását nem fogja fel.

A visszavert és törött fény szintén hatásos.

Az elektromos ívlámpa helyett magnéziumfény is használható, csakhogy a hatás kisebb. 24 cm. távolságban álló magnéziumláng hatására 30 mp. alatt a töltés 60%-a szóródott el.

Mindezen kisérletek bizonyítják, hogy a negativ töltésű testek az ibolyántúli fény iránt a legérzékenyebbek.

A jelenség a töltött vezető felületén, nem pedig a környező közegen érvényesülő hatásnak eredménye. Ugyanis a fény a neg. elektromos töltést csak az esetben kisebbíti, ha a czink felülete fényesre van csiszolva; mihelyt a felület homályos, állott, a hatás teljesen elmarad. Fényes felületen a hatás az idővel közel arányos. A hatás nagyobb a tiszta aluminium felületen, ellenben kisebb a vason. A kisérlet más fémekkel is sikerül, de mindenkor szükséges, hogy a fémlemez felülete frissen tisztított legyen. Réz is kedvező eredményt ad. A réz ledörzsölés helyett erősen kiizzítható; bár teljesen bevonódik oxidréteggel, mégis érzékeny a fény hatása iránt.

Az elektromos ívlámpától 1 m. távolságban egy arany- és egy rézlap úgy voltak egymással szemben felállítva, hogy a fénysugarak mintegy 78° szög alatt eshettek a felületükre. A lemezek közepei mintegy 3 cm. távol állottak egymástól s mindegyikök a fény közvetlen hatása ellenében megvédett elektroskóppal közlekedett. (A rézlap, ha magában állott, igen érzékeny volt a fény iránt, az állott felületű aranylemezen ellenben hatás nem mutatkozott.) A rézlapot s a vele közlekedő elektroskópot neg. elektromossággal megtöltvén s megvilágítván, a negativ elektromosság az aranylemezre áramlott át mindaddig, míg a töltésök egyenlővé nem vált; ez után a töltés mindkét lemezen lassan fogy. E szerint tiszta felületű negativ elektromossággal töltött vezetőkből az elektromosság az ibolyántúli fény hatása alatt az elektrostatikai erők irányában kiáramlik.

A negativ elektromosság a folyadékok felszinéről is elszóródik, ha ibolyántúli fénynyel megvilágíttatik. (Az elektromos ívfény jóval hatásosabb, ha a szenek 1—2 mm. vastagságú czinkbéllel vannak ellátva, azaz ha az ívben czink ég.) A tiszta vizen a fény hatástalan; de vizes fuchsin, cyanin vagy jódzöld oldata épen oly fokban érzékeny, mint a tiszta fémfelületek. Kevésbbé hatásosak az eosin, a hämatoxilin, a hangyasav és az anilin oldatok. Chromsav, salétrom, brómkáli s több más oldat teljesen érzéketlen. — A kisérletek azt engedik gyanítani, hogy azok az anyagok a legérzékenyebbek a fény behatása iránt, melyek az ibolyántúli fénysugarakat a legnagyobb mértékben elnyelik.

*

**A fénynek elektromossággerjesztő hatásáról.** W. Hallwachs: Ueber die Electrisirung von Metallplatten durch Bestrahlung mit electrischem Licht. *Ann. d. Ph.* XXXIV. 731—734. l.

*Az elektromos fénynyel megvilágított fémlapok positiv elektromos töltést vesznek fel.* A kisérlet, melyben H. ezt a tényt bebizonyította, a következő berendezésű: Egy nagy, a földbe levezetett vasedény belsejében 8 cm. átmérőjű czinklemez van szigetelten felfüggesztve; a lemez kis capacitású elektrométerrel közlekedik. Az edény a lemezzel szemben nyilással van ellátva, a nyilás pedig sűrű fémhálóval leborítva. A lemez tehát minden külső elektrostatikai inductio ellen védve van. Ha a hálón keresztűl az ívlámpa fénye esik a lemezre, az elektrometer potentiálemelkedést mutat. A fény útjába állított vékony csillám vagy üveg a hatást felfogja, gipsz vagy hegyi kristály nem. A potentiál maximuma czinkfelületen 1 volt-nál több, sárga rézen 1 v., aluminiumon pedig 0,5 v.

A fémlemezeken a potentiál csak akkor emelkedik, ha frissen meg vannak tisztítva. A tisztított felület annál kisebb töltést képes fölvenni, mennél többször volt az ívfény hatásának kitéve. Ujra lecsiszoltatván, ismét a potentiál maximumára emelhető.

Ezekkel lényegökben megegyező eredményeket kaptak Righi, valamint Bichat és Blondlot. Ez utóbbiak egy fémkorong elé ugyanazon fémből vágott, sűrűen kilyuggatott rostát állítottak fel s az ívfényt ezen keresztül bocsátották a korongra. Ha az ívfény szénrudaiban aluminiumbél van, a korong mintegy +3 voltnyi potentiálig töltődik. Száraz légáram tetemesen fokozza a potentiált; már gyenge legyezés is hat. Elektrométer helyett a rosta és a fémlap közé érzékeny (nagy ellenállású) galvanométer is kapcsolható: a fény ez esetben a korongtól a rosta felé tartó áramot indit. (Lásd: C. R. CVII. 29, 557 és 559. l.)

*

**Az ibolyántúli fénysugarak gerjesztette elektromos áramok.** A. Stoletov: Sur une sorte de courants électriques, provoqués par les rayons ultra-violets. *C. R.* CVI. 1149 l.

22 cm. átmérőjű fémkorong előtt, 0,2—2 cm. között változó távolságban ugyanakkora fémháló vagy sűrűn átlyuggatott fémlemez áll. A korong egy sok elemű galvántelep negativ sarkával, a háló pedig a positiv sarkkal közlekedik. Mihelyt a fémkorongra a hálón keresztül az elektromos ívlámpa fénye esik, a vezetékbe iktatott galvanométer áramot árul el. Ha az ívfény állandó, a mágnestű kitérése változatlan; az ívfény minden ingadozása hasonló változást okoz az áramban. Sötét ernyők, mindenféle üvegtáblák a fény eme hatását felfogják; a kvarcz csak kevéssé gyengíti. (Az ívfénynek tehát nem szabad üveglencséken átmennie, mert ezek a hatásos sugarakat elnyelik!) Megmutatható, hogy a fénynek emez áramgerjesztő hatása a nagy törékenységű, főleg ibolyántúli sugarak sajátsága.

A végrehajtott mérésekből kiderült, hogy 1. az áramerősség a megvilágított felület nagyságával arányos; 2. az áramerősség $i = \frac{e}{a+bl}$, ha $e$ a galvántelep elektromindító ereje, $a$ és $b$ tapasztalati állandók, $l$ pedig a háló távolsága a korongtól; végre 3. az áramerősség a fémlemezeket töltő telep elektromindító erejével növekedik.

Ha a két lemez különböző fémekből van, ezek potentiálkülönbsége is érvényesül; így pl. kilyukasztott czinkrosta mögé ezüstözött rézlemez helyeztetvén, a két lemezt összekötő vezetékben az ibolyántúli fény hatása alatt áram indult meg. A szerkezet tehát mintegy galvánelemnek tekinthető, melyben a fémlapok között levő levegő a folyadékot helyettesíti. A (Zn, Ag) potentiálkülönbség 0,97—1,06 volt-tal egyenlő.

S. ebben a kisérletben új módszert lát az egymással érintkező féme k potentiálkülönbségének pontos meghatározására.

Az ívfény hatásossága rendkivül fokozódik, ha a szenek fémbéllel vannak ellátva. Leghatásosabb az *Al*, utána következnek a *Zn* és *Pb*. Ezen fémek lángjában tudvalevőleg igen sok ibolyántúli fény van.

*

**A negativ elektromosság szétszóródása a napfény és a nappali világosság hatása alatt.** J. Elster és H. Geitel: Ueber die Zerstreuung der negativen Electricität durch das Sonnen- und Tageslicht. *Ann. d. Ph.* XXXVIII. köt. 40. l. és 497—514. l.

20 cm. átmérőjű czinktál 300 v. negativ elektromos töltését 60 mp. alatt teljesen elveszti, ha napsugarak érik, vagy ha csak a kék égboltozat fénye világítja meg. A hatás jóval gyengébb, ha a fény üvegtáblán keresztül jut a tálhoz. A positiv elektromos töltésre a napfény nem hat. A czinktál a légköri elektromosság ellen jól megvédve és szigetelten állítandó fel; a töltés potentiálja elektrométerrel, vagy érzékeny elektroskóppal mérhető.

Ha a czinktál frissen le van csiszolva, a napfény hatása alatt +2,5 v. töltést vesz fel. Megfúvás által a töltés fokozható.

Jóval egyszerűbb a kisérlet, ha a megvilágítandó fém drótalakban van magára az elektroskópra erősítve. 20—25 cm. hosszaságú, spirálisba csavart frissen ledörzsölt aluminium-, magnézium-, vagy czinkdróttal ellátott elektroskóp, ha napsugarak érik, negativ elektromossággal meg sem tölthető és csakhamar positiv elektromossággal töltődik, ha földbe levezetett fémháló vagy fémház a légköri elektromosság hatása ellen védi. Még az esteli világosságnak is van észrevehető hatása.

Érdekes, hogy az ujonnan letisztított fémdrótok (*Zn, Al, Mg*) épen úgy hatnak, mint az izzó testek és lángok, a mennyiben a teljesen szabadon álló elektroskópot a légköri elektromosság potentiáljáig megtöltik.

Kisérleteik közben E. és G. észrevették, hogy a fénynek hatása az elektromos töltésre főleg az elektropositiv fémeken mutatkozik. Érzékenységök szerint a fémek a következőkép sorakoznak: *K, Na, Mg, Al, Zn, Sn.* Meglepő, hogy a sorrend a Volta-féle sorozattal megegyező. *K* és *Na* amalgamaikban voltak a kisérletnek alávetve. A tiszta higany teljesen érzéketlennek mutatkozott, de mihelyt *K* vagy *Na* nyoma volt benne feloldva, a fény hatása alatt negativ elektromos töltését igen gyorsan elvesztette. Az amalgámok általában igen érzékenyeknek bizonyultak.

Ellenben ugyanolyan kisérleti berendezésben az ón, kadmium, ólom, réz, sárga réz, vas, (szén), platina tiszta felületén a napfény hatástalan volt. A folyadékokon sem mutatkozott hatás. A Balmain-féle festék mutatott némi érzékenységet.

Részben ellenkező eredmények a következők: HOÓR MÓR (Rep. d. Ph. 25. k. 380. l. szerint a visszavert napfényben réz, czink és sárgaréz perczenkint a negativ töltésnek 6—7%-át veszti; PALMIERI pedig azt tapasztalta, hogy tengervizzel telt fémtál napfényben negativ elektromosságot vesz fel.

Az itt felsorolt jelenségek bemutatására G. és E. szerint 3 cm. átmérőjű, jól amalgamált, higított kénsavval lemosott s minden kisérlet előtt ujra száraz ruhával jól ledörzsölt czinkgolyó a legalkalmasabb. A golyó vastag vasdrótra van ráforrasztva, melyről az elektroskóphoz rézdrót vezet. A golyót a külső elektrostatikai hatások ellen dróthálóból készült borító védi; a dróthház a földbe van levezetve. A borítót teljesen átlátszatlan fedő veszi körül. Meggyőződvén arról, hogy a golyó jól van szigetelve, megmutatható, hogy:

1. az amalgamált czink negativ töltése a napfényben rögtönösen kisül, ellenben a positiv elektromosság a golyón marad;

2. az amalg. czinkgolyó a közelében levő positiv töltésű vezetőt a fény hatása alatt kisüti; végre, hogy

3. a fény eme hatása a kisebb hullámhosszaságú fénynemekhez van kötve.

ARRHENIUS szerint a légköri elektromosság a napfénynek elektromosság-gerjesztő erejéből veszi eredetét. Ez egyelőre természetesen csak feltevés, melyet a meglevő aránylag kevés, egymásnak részben ellentmondó kisérleti tényből alaposan megállapítani nem lehet.

*

**Az elektromosság szétszóródása az ásványok felületéről a napfény behatása alatt.** I. ELSTER u. H. GEITEL: Ueber die durch Sonnenlicht bewirkte electrische Zerstreuung von mineralischen Oberflächen. *Ann. d. Ph.* XLIV. 722—736. l.

Azt tapasztalván, hogy a nem fémes anyagok közől csupán csak egy phosphorescáló anyag, a BALMAIN-féle festék mutatkozott a fény hatása iránt érzékenynek: E. és G. azt gyanították, hogy a phosphorescentia és a testek *fényelektromos* viselkedése között benső kapcsolat lehetséges. Ez okból a phosphorescáló anyagokat vizsgálat alá vonták, melyből kiderült, hogy az illető anyagok annál nagyobb mértékben fényelektromosak, mentül erősebben phosphorescálnak. Ez anyagok a *Ca, Sr, Ba* kénvegyületei, melyekhez *Cu* és *Mn* nyomai voltak hozzákeverve.

Kisérletök berendezése a következő: 6·5 cm. átmérőjü vascsésze fölé ugyanakkora vasháló van szigetelten felállítva. A csésze — lehetőleg gondosan szigetelten — elektrométerrel, egyes esetekben elektroskóppal közlekedik. A háló egy száraz oszlop positiv sarkával van összekötve; a negativ sark a földbe van levezetve. A csészét és a hálót a külső elektrostatikai hatások ellenében stanniollal bevont borító védi; a stanniol-bevonat a földdel közlekedik. A borító a háló fölött megfelelő nagyságú nyilással van ellátva, melyen keresztül a fény bebocsátható. — Ebben a berendezésben az elektrométer a hálóból a csészére áramló elektromosság mennyiségét méri. A vascsészébe kis darabka lecsiszolt magnéziumot helyezvén, az elektrométer tűje nyomban kitér, mihelyt a magnéziumot napfény, vagy akár csak a nappali szétszórt világosság éri. A fény hatására tehát a hálóból a magnézium felé elektromos áram: *photoelektromos áram* indul meg. Az oszlop sarkait megcserélvén, az áram nyomban megszünik. — A vascsészébe az előbb említett phosphorescáló anyagokat helyezvén, a photoelektromos áram szintén megindult. Tehát ez anyagok is *photo- v. aktinoelektromosak, fényelektromosak.*

Kisérleteik főbb eredményei a következők:

1. A folypát a napfényben, sót a szétszórt nappali világosságban is fényelektromos. Az ásvány különféle változatainak fényelektromos viselkedése között jelentékeny külömbség mutatkozik. Leghatásosabbnak mutatkozott a wölsendorfi (Bajororsz.) fluorit (Stinkfluss).

2. A kisülés a friss törésű felületekről sokkal gyorsabb, mint az állott felületről.

3. A kisülés folyamatát nemcsak az ibolyántúli sugarak, hanem a kék sugarak is megindítják.

4. Az üres térben a folypát fény iránt való érzékenysége elektromos vezetőképességével együtt megszünik. A nedves levegővel érintkezvén, fényelektromos képességét újra visszanyeri.

5. A vízzel való megnedvesítés a folypát érzékenységét megsemmisíti, vagy legalább tetemesen csökkenti, az izzítás pedig e tulajdonságát véglegesen megsemmisíti s az ásvány egyúttal nagy phosphorescentiáját is elveszti.

6. A kryolith, a súlypát, a cœlestin, az aragonit, a strontianit, a földpát, a mészpát és a granit a fényelektromos hatásoknak biztosan felismerhető nyomait árulják el.

7. Sok esetben helyesnek bizonyult ama feltevés, hogy a phosphorescáló képesség hozzávetőleges mértéke a napfény iránt való érzékenységnek.

Ez eredményekre támaszkodva E. és G. azt hiszik, hogy a légköri elektromosság eredete meg van magyarázva. Véleményök szerint az elektromosság a negativ töltésű földfelületről a fény hatása következtében a légkörbe áramlik, a mint ezt Arrhenius és Bezold már régebben föltételezték. *B.*

**A gázelemek elektromindító erejéről.** G. MARKOVSKY: Ueber die elektromotorische Kraft der Gasketten. *Ann. d. Ph.* XLIV. 457—473. l.
A gázelemek elektromindító erejének okát GROVE abban keresi, hogy az elektródákkal érintkező gázok chemiailag egyesülnek s folyékony testté lesznek. SCHÖNBEIN a hydrogennek tulajdonítja az áramindító képességet és szerinte az oxigénnek csak depolározó szerep jut. BECQUEREL szerint az elektromindító erő okát a gázoknak az elektródák felületén való egyenlőtlen sűrűsödésében kell keresni. GAUGAIN úgy találja, hogy az elektromindító erő oka egyedül azon vegyrokonság lehet, a mely a platina elektróda felületén condensált hydrogén és a víz oxygénje között van. WARBURG azt hiszi, hogy a folyadéktól elnyelt, vagy a fém elektródában okkludált gáz a fém és folyadék között (a határon) chemiai folyamatnak van alávetve, melynek folytán a gáz eltünik, s az elektrolit chemiai változást szenved. MARKOVSKY WARBURG nézetéhez csatlakozik s nagy körültekintéssel végrehajtott és érdekesen leirt kisérleteinek eredménye a következő:

1. Hidrogénnel vagy oxigénnel töltött platin lemeznek (légmentes kénsavba merülő platin lemezzel szemben) az elektromotoros ereje nem egyezik az eddig találtakkal, hanem hidrogénre kisebb, oxigénre nézve pedig nagyobb. Kisérletei szerint:

$$Pt_H \mid H_2SO_4 \mid Pt{=}0{\cdot}646\ V; \quad Pt \mid H_2SO_4 \mid Pt_0{=}0{\cdot}372\ V$$

és így

$$Pt_H \mid H_2SO_4 \mid Pt_0{=}1{\cdot}02\ V \text{ (közel)}$$

BEETZ szerint ezen értékek: 0·826 $V$, 0·190 $V$ és 1·02 $V$ (közel). $Pt_H$ és $Pt_0$ között mutatkozó külömbség oka az, hogy BEETZ higított kénsava levegőt, ennélfogva oxigént tartalmazó vízzel készült.

2. Az elektrolitikus úton kiválasztott gázok ($H$ és $O$) éppen úgy hatnak mint a chemiai úton előállítottak.

3. Az elektromindító erő a gázok sűrűségétől éppen semmit vagy nagyon keveset függ.

4. Épúgy független az elektromindító erő a gázok hőmérsékétől. Változás csak akkor következik be, ha a hőmérsék oly magas, hogy az az okkludált gázt kiűzi.

5. Platinaszulfát oldatot adván a hig kénsavhoz az elektromindító erő kisebbedik az oxigén elemnél, de növekszik a hidrogén elemnél; azonban az oxigén-hidrogén elem elektromindító ereje ugyanaz marad. Igy pl. 1 liter hig. savra 1 gr. platinaszulfát vétetvén, $Pt_H$ esetében 0·804 $V$; $Pt_0$ pedig 0·228 $V$ és $Pt_H \mid (H_2SO_4{+}PtSO_4) \mid Pt_0{=}1{\cdot}032\ V$. Ha pedig 1 liter savra 6 gr. platinaszulfát vétetett, akkor 0·963 $V$, 0·086 $V$ és 1·032 $V$ voltak a megfelelő értékek. 1—12 gr. platinaszulfát hozzáadásával oxigénre még

72 óra múlva sem volt konstatálható az elektromotoros erő változása, holott tiszta (légmentes) savnál már 22 óra múlva emelkedés volt észlelhető.

6. Szénelektródák lényegesen más magaviseletet tanusítanak a gázelemben, vagy pedig ha áram által polároztatnak úgy, mint platinelektródák. Nevezetesen: szénelektródák sem hidrogénnel sem oxygénnel áramot nem adnak; ellenben egy Daniel-elem áramával polároztatván, az elem kikapcsolása után a $C_H \mid C_0$, $C_H \mid C$ és $C_0 \mid C$ áramok mindegyike észlelhető. A polározott $C$ és $Pt$ elektródák között a különbség abban mutatkozik, hogy $C$-nál az elektromindító erő gyorsabban esik. E különbség oka azonban az is lehet, hogy a $C$ likacsossága folytán közvetetlen érintkezés jöhetett létre a folyadék (sav) és a contact higanya között. *Edelmann.*

*

**A réz (Cu) elektrochemiai egyenértékének látszólagos ingadozásáról.** I. Vanni: Ueber die scheinbare Veränderlichkeit des elektrochemischen Aequivalents des Kupfers. *Ann. d. Ph.* XLIV. 214—222. l.

Áramintenzitások mérésénél kétségtelenűl sok előnynyel alkalmazható a rézvoltameter s azért nem kis fontosságú, hogy elektrochemiai egyenértéke lehetőleg pontosan meg legyen állapítva. A rézvoltametert tanulmányozók azonban azt a sajátságos tüneményt észlelték, hogy a réz egyenértéke az elektróda felületének nagyságával, s így az áram sűrűségével változik. E változás sokszor jelentékeny és észlelési hibának nem tekinthető. E tüneménynek szorgalmas tanulmányozója Gray azt találta, hogy a réz elektrochemiai egyenértéke 0·0003287, ha az áramsűrűség 20 milliamper 1 cm²-re és 0·0003278, ha az áram sűrűsége csak 3·3 milliamper. Magasabb hőmérsékletnél (35° C) ez érték 0·0003245. Faraday törvénye szerint a réz egyenértéke csak egy lehet s ezt az ingadozást látszólagosnak kell tekintenünk, melynek okát Gray abban keresi, hogy a kiváló réz a rézszulfát oldatában oldódik. Gray nézetének kisérleti igazolására és a réz egyenértékének meghatározására vállalkozott Vanni. A tiszta rézszulfátból előállított oldat sűrűsége 1·12 s benne a szabad kénsavnak semmi nyoma. Az áramkörbe egymásután két rézvoltametert kapcsolt be; az elsőben a folyadékba merülő elektródafelület 58 cm², az utóbbiban pedig 14·5 cm². Miután 3 Daniel elem áramát 3 órán át működni hagyta, a kiválasztott réz súlya volt: a nagyobbik lemezen 0·1903 gr., a kisebbiken 0·1960 gr. Ezután a lemezeket, anélkül, hogy az áram zárva lett volna, még 3 órán át a folyadékban hagyta, mely idő elteltével a lemezek újra leméretvén, kiderűlt, hogy a nagyobbik lemez 9·2 mgr.-ot, a kisebbik 3·2 mgr.-ot veszített az elektrolit oldó hatása folytán. Ezt betudván, az elektromos áram tényleg a nagyobbik lemezen 0·1995 gr., a kisebbiken 0·1992 gr. rezet választott ki. Ezen eredmény egyezése megnyugtató, egyszersmind kisérletileg igazolja Gray állítását.

A további kisérletekben Vanni arra jut, hogy *ha a tiszta rézszulfát teljesen közömbös oldatának 1 literébe körülbelül ½ gr. 1%-os szabad kénsavat tartalmazó oldatot ad, akkor megszünik az elektrolit oldó hatása.* Ilyen folyadékot alkalmazva s a két rézvoltameter után az áramkörbe még egy ezüst voltametert csatolva azt találta, hogy a kiválasztott réz súlya: a nagyobbik lemezen 0·3447 gr., a kisebbiken 0·3449. Ugyanezen áram 1·1740 gr. ezüstöt választott ki. Az átlagos áramerősség 0·292 *A* volt. A kiválasztott réz középértéke 0·3448 gr. lévén, ennek viszonya a kiválasztott ezüsthöz 0·3448 : 1·1740=0·2937 s így a réz elektrochemiai egyenértéke: 0·001118×0·2937=0·0003284 gr.

Számos kisérlet középeredményével egyező érték.

*Edelmann S.*

# IRODALOM.

**Dr. Siegmund Günther, Lehrbuch der physikalischen Geographie.** 8°, 12+508 l. és 3 táblával, Stuttgart, Enke F. 1891.

Gyönyörű kiállítású, aránylag mérsékelt terjedelmű s mégis igen tartalmas munkával gyarapodott az exakt tudományok módszereihez hajló geografia irodalma. Ugyanazon szerző 1884 és 1885-ben megjelent «Jahrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie» czímű két kötetes kézikönyvének helyenkint rövidített, helyenkint bővített átdolgozása ez, mely a tanulmányozás érdekét amannál mindenesetre fokozódottabb mértékben szolgálja, a mennyiben mindent magában foglal, a mi a föld jelenségeiben elvi fontosságú, és másrészt a szükségessé vált hypotheziseket és ezeknek esetleges elméletekké való megszilárdulását is bőven és világosan tárgyalja. Az előadás ezen modora egyszersmind fontos methodikai előnyt biztosít: megtanítja, mi alkotja biztos ismeretünket, és a legközelebbi kutatásnak mily czél felé, mily valószínű eszközökkel kell indulnia. Nem gondolom, hogy a «felületes» értelemben vett geografiára készülő tanulónak könnyű olvasmány volna, de ha egyelőre csak annyit ér is el, hogy következetes physikai methodust és mathematikai gondolkozást e tárgyra alkalmazni kényszerít, sokat nyertünk. És erre ugyancsak nyújt alkalmat a könyv.

Az égi physikából merített bevezető rész az első fejezet, mely a physikai földrajznak az astrophysika alá való tartozását okolja meg, és egyúttal a föld valószinű fejlődési folyamatával is foglalkozik. A második fejezet már a föld alakját és nagyságát és az ezekre befolyással biró nehézségi jelenségeket tárgyalja. A physikusra nézve mindenesetre ez a fejezet a legvonzóbb, a mennyiben nem gondolnám, hogy egyebütt 30 lapon egyesítve találna majd mindent, a mit a földalak tanának kifejlődéséről a legrégibb időktől fogva tudni érdemes, beleértve természetesen az utolsó húsz év vívmányait is. A földsűrűség meghatározásainak különböző módszerei — Jolly és Wilsing-é tán kissé érdemen felűl van dicsérve,* — a sűrűség-eloszlás

* Legalább nem 5·60 és 5·59 a ma ismert legpontosabb érték, hanem 5·53 (l. Fröhlich J. Math. repert. Budapest 1890.)

törvénye, nehézségi eltérések, függély-eltérések és a geois kijelölése a sphæroissal szemben a fejezet érdekesebb pontjai. A föld hőmérsékletéről és belsejéről szóló részben megtaláljuk a hőelmélet és a halmazállapotok elméletének legújabb eredményeit ügyesen alkalmazva, a következő három fejezetben a geognosia legszükségesebb elemeit, az orographiát és a színlő * változásokat. A VII—X. fejezet ismét közelebbről érdekelheti a physikust, ki a vulkános jelenségekkel, a földrengések elméletével, a föld mágnesi és elektromos magatartásával, a légkör jelenségeivel kiván foglalkozni; különösen érdekesnek fogja találni a földrengés térbeli lefolyásának ábrázolását a seismo-hodograph segítségével. A klimatologia, oceánografia (oceános statika és dynamika), a szárazföldi vizek, a szilárd víz, a földfelületi bontó erők és a földfelület általános és speciális morphologia czímeknek van szentelve a XI—XVII. fejezet. Az árapály jelenségről szóló pont az erre vonatkozó roppant irodalmat szépen, áttekinthetően ismerteti.

---

## Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften.

**2. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte** von Carl Friedrich Gauss. 51. lap. 1840. Aus «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839», Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung 1840. — Herausgegeben von A. Wangerin, Leipzig. 60 lap. 1889. Ára 80 Pfennig.

E kis füzet, melynek egy eredeti kiadásbeli példánya a hajdani budai gellérthegyi csillagda könyvtári töredékeivel a budapesti tud. egyetemi physikai intézet birtokába jutott, magában foglalja a modern potentiálelmélet alapját képező tantételek nagyobb részének szigorú bebizonyítású gyűjteményét.

Igaz ugyan, hogy e tételek legtöbbjét már Gauss előtt ismerték. Igy Lagrange 1777-ben észrevette, hogy az általános Newton-féle attractió erőöszszetevői *egy* függvénynek a coordináták szerint képezett differentiálquotienseivel fejezhetők ki, mely sajátságát az általános gravitatiónak Laplace már 1785-ben használta fel; igaz, hogy Laplace és Poisson a térbeli és a felületi hatók potentiáljának legfontosabb tételeit már a múlt század végén s a jelen század elején megállapították. Áll az is, hogy George Green angol mathematikus: «*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*» czím alatt 1826-ban Nottinghamban megjelent nevezetes és jelentőségére nézve

* Hermann O. szerint a Strandlinie, Uferlinie magyar neve.

GAUSS-éval vetélkedő, de előtte ismeretlen értekezésében a GAUSS tételeinek jó részét már előbb felfödözte volt. Mindezek daczára GAUSS ezen értekezése a potentiálelmélet történetében határkövet jelent s fejlődésére nézve határozottan úttörő volt.

Első hatásainak egyike abban állott, hogy W. THOMSON figyelmét az akkor még az angol tudósok előtt is majdnem ismeretlen s épenséggel nem méltányolt GREEN-féle értekezés felé fordította, ki azt a CRELLE-féle Journal 39, 44 és 47 köteteiben újra lenyomatta s így hozzáférhetővé tette. Azonban GAUSS dolgozatának fontosságát szintén igen hamar felismerték s rövid idő alatt francziára és angolra fordították.

Ez értekezésében hozta be először GAUSS a $\Sigma\frac{m}{r}$ függvény számára a *potentiál* elnevezést; GREEN ugyanazt a függvényt *potentiálfunctió*-nak nevezte, CLAUSIUS pedig «*Die Potentialfunction und das Potential*» czímű könyvében (harmadik kiadás 1877) megkülönbözteti a $V=\Sigma\frac{m}{r}$ alakú függvényt, a *potentiálfunctiót* az $U=\Sigma\Sigma\frac{m_1 m_2}{r}$ szerkezetű, *potentiál*-nak nevezett függvénytől. CLAUSIUS ezen terminologiáját általánosságban véve nem fogadták ugyan el, de mégis szemmel tartandó, hogy $V$ és $U$ teljesen különböző jellegű két menynyiség, melyek elseje sebesség-négyzetet, másodika munkát jelent.*

A GAUSS-tól származó tételek közül kiemelendő az «*arithmetikai középérték*» tétele, mely a potentiálnak egy gömbfelületre vonatkozó középértékét:

$\overline{V}=V_0+\frac{M_i}{R}$ alakban fejezi ki. Ide tartozik a tulajdonképen GAUSS-félének nevezett tétel: $\int\frac{\partial V}{\partial n}\,df=0$ vagy $=4\pi M$.

Az értekezés főeredménye, melyet GAUSS maga is az egész vizsgálat legnyomatékosabb tételének nevez, s mely *Dirichlet elve* elnevezés alatt ismeretes: Ha valamely zárt, $f$ felület által határolt $\tau$ tér minden pontjában valamely $u$ függvénye az $x$, $y$, $z$ coordinátáknak s ezen $u$-nak e coordinátak szerint képezett első differentiálhányadosai folytonosak és $u$ e térben mindenütt megfelel a jellemző $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ LAPLACE-féle egyenletnek s végre az $u$ az $f$ felület minden pontjában meghatározott értékek-

* L. Czógler Alajos: Fizikai egységek, Budapest. Kir. M. Termtt. Társulat, 1891, 40. lap, 29. és 30. pontjai. Ha $V$-t *potentiál*-nak nevezzük, akkor $U$-t, a szerint, a mint két különböző tömegrésznek egymásra való hatására vagy egy tömegnek önmagára való hatására vonatkozik, *kölcsönös potentiál*-nak, illetve *önpotentiál*-nak nevezhetjük.

kel bír; akkor csak egyetlen egy ily függvény létezik, mely ezen feltételeknek megfelel. E tétel bebizonyításánál mind GAUSS, mind DIRICHLET arra támaszkodik, hogy bizonyos térbeli integrálnak, mely azonban a két szerzőnél nem ugyanaz, minimumnak kell lennie; ez az eljárás később azon oknál fogva esett kifogás alá, mivel néhány be nem bizonyított feltevésen alapszik. Ezért e tétel újabb bebizonyításai oly utat követtek, mely a nevezett feltételeknek megfelelő ily függvény tényleges megszerkesztéséhez szükséges szabályok felkeresésében áll.

Végre felemlítendő még az *egyenértékű tömegáthelyezés* fontos tételének két főesete, melynek segélyével ugyanis valamely ható térbelileg eloszlott tömegét olyképen lehet egy felületre elhelyezni és elosztani, hogy potentiálja a tér bizonyos részében ugyanaz maradjon, mint az áthelyezés előtt.

GAUSS-nak nem volt az a szerencséje, hogy azt a nevezetes analytikai összefüggést, a GREEN-féle tételt vagy helyesebben tételeket, általánosságukban ismerje fel; a 24. czikk tétele tulajdonképen a GREEN-féle tételnek egy speciális esete, az äquivalens tömegáthelyezés, melyet GAUSS függetlenűl talált, GREEN tételének egyszerű következménye.

E hatalmas és felette termékeny transformáló módszerek GREEN nevével elválaszthatatlanúl vannak egybekapcsolva s már magukban véve biztosítják fölfedezőjük elhervadhatlan érdemeit a potentiálelmélet körűl.

*Fröhlich.*

---

## FELADATOK.

9. Legyenek

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

az

$$u_1, u_2, \ldots, u_m \qquad (m < n)$$

változók differencziálható függvényei; jelöljük továbbá rövidség okáért a

$$D\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_m} \\ u_1, u_2, \ldots u_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_1} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_{i_1}}{d u_2} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial u_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_m} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial u_m} & \ldots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

függvénydeterminánst, melyben $i = (i_1, i_2, \ldots i_m)$ az $1, 2, 3, \ldots, n$ elemek tetszőleges $m$-edfokú kombinácziója, $D_i$-vel; bebizonyítandó, hogy minden az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókra alkalmazott orthogonális helyettesítés ugyanily helyettesítést létesít a $D_i$-k között. (RADOS.)

# MEGOLDOTT FELADATOK.

2. Mekkora ingadozást létesit a függőn irányulásában egy nagy folyónak pl. a Dunának áradása vagy apadása? (Br. Eötvös.)

---

*Első megoldás Gruber Nándor tanár úrtól.*

A kérdés megoldásában csak arra az esetre fogunk szorítkozni, melyben az áradás vagy apadás kicsi a függőn távolságához képest, vagyis a folyó áradása oly síknak tekinthető, melynek szélessége a folyó szélességével, hossza pedig az áradás kiterjedésével egyenlő.

Legyen a víz normális felszine az $XY$ sík, a folyóval párhuzamosan s tőle $d$ távolságban az $X$ tengely, a függő-ón irányában pedig a $Z$ tengely; a függő-ón az $XY$ sík fölött $m$ magasságban van. Ha az áradás kiterjedéséből a $ZY$ síktól a folyón fölfelé s lefelé $l$ hosszaságú részt veszünk tekintetbe, a függónra ható erőnek a folyó irányára merőleges összetevője

$$P_y = fa\mu\rho\int_{-l}^{l}dx\int_{d}^{d+s}\frac{ydy}{(m^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

hol $f$ a gravitatio állandóját, $a$ az áradás nagyságát, $\mu$ a függő-ón tömegét, $\rho$ pedig a víz sűrűségét jelenti. A kettős integrál előtt álló szorzót $A$-val jelölvén s az integratiót végrehajtván lesz:

$$P_y = A\,\mathrm{l}.\frac{(l+\sqrt{m^2+d^2+l^2})\,(-l+\sqrt{m^2+(d+s)^2+l^2})}{(l+\sqrt{m^2+d^2+l^2})\,(-l+\sqrt{m^2+(d+s)^2+l^2})}\quad . \quad . \quad (1)$$

kifejezést, mely

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{m^2+d^2+l^2}},\quad \cos\beta = \frac{l}{\sqrt{m^2+(d+s)^2+l^2}},$$

bevezetése által igen egyszerüsíthető. Ugyanis

$$P_y = A\,\mathrm{l}.\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)} = 2A\ \mathrm{l}.\ (\mathrm{cotg}\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta).$$

A függélyes irányba eső összetevő

$$P_z = Am\int_{-l}^{l} dx \int_{d}^{d+s} \frac{dy}{(m^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mely az integratio végrehajtása után

$$P_z = 2A\,\mathrm{arctg}\frac{l(d+s)}{m\sqrt{m^2+(d+s)^2+l^2}} - 2A\,\mathrm{arctg}\frac{ld}{m\sqrt{m^2+d^2+l^2}} \qquad (2)$$

alakot nyer, mely két új szög: $\gamma$ és $\delta$ bevezetése után a következő módon írható:

$$P_z = 2A\,\mathrm{arctg}\,(\cos\beta\,\mathrm{cotg}\,\gamma) - 2A\,\mathrm{arctg}\,(\cos\alpha\,\mathrm{cotg}\,\delta).$$

Ha $l$ igen nagynak vétetik a többi méretekhez képest, akkor (1) és (2) alatti kifejezések

$$P_y = A\,\mathrm{l}.\frac{m^2+(d+s)^2}{m^2+d^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

és

$$P_z = 2A\,\mathrm{arctg}\frac{d+s}{m} - 2A\,\mathrm{arctg}\frac{d}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

alakot öltenek.

Vizsgáljuk meg, hogy mily értékkel bírnak ezen erők egy tényleges esetben. Az 1000 gr. tömegü függón a budapesti physikai intézetben, tehát a Dunától körülbelül 1 km. távolban s a víz felszíne fölött 5 m. magasságban legyen; az 5 méternyi áradás tekintetbe veendő része pedig Budapesttől fölfelé s lefelé 30 kmnyi távolságra terjedjen. A Duna szélességét 400 m.-nek vevén, akkor számítás útján könnyen meggyőződhetünk, hogy az (1) és (3) alatt álló kifejezések logarithmusai csak az ezredrészekben térnek el egymástól s így a $P_y$ értékének kiszámítására bátran a (3) alatti kifejezést, sőt a mi esetünkben — $m$ kis értékénél fogva — annak

$$P_y = 2A\log\frac{d+s}{d}$$

egyszerű alakját használhatjuk.

Ezen kifejezésben

$$A = f\mu a\rho,$$

hol

$$f = 6{\cdot}647.10^{-8}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{gr}^{-1}\,\mathrm{sec}^{-2},\quad a = 5.10^2\,\mathrm{cm},\quad \mu = 10^3\,\mathrm{gr},\quad \rho = 1,$$

$$d = 10^5\,\mathrm{cm},\quad s = 4.10^4\,\mathrm{cm}$$

lesz

$$P_y = 2{\cdot}29.10^{-2} \text{ dyn.}$$

A $P_z$ erő egy irányban működvén a föld nehézségével, e mellett elhanyagolható, úgy hogy a függón

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{P_y}{\mu . g}$$

egyenlet által van meghatározva, mely $\varepsilon$ értékeül $4{\cdot}8.10^{-3}$ ívmp.-czet ad.

---

*Második megoldás Tangl Károly tanárjelölt úrtól.*

A feladat meg van oldva, ha ismerjük az áradás következtében a folyó vízmennyiségéhez hozzájáruló vízmennyiség vonzását a függónra. Ha ugyanis ezen erő vonatkoztatva a tömegegységre $P$, — a függón tömege a kitérítés szempontjából közömbös — és $X$ a $P$-nek azon összetevője, mely a $P$-n átfektetett függőleges síkban a függón irányára merőleges, és $\varepsilon$ a függón kitérítésének szöge, akkor

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{X}{g}$$

Hogy az $X$ componenst számíthassuk, a hozzájáruló víztömegnek oly geometriai alakot adunk, mely a valóságot lehetőleg megközelíti. Helyettesíthetjük pl. egy végtelen hosszú prizma alakú testtel, melynek hosszirányára merőleges keresztmetszete trapéz; szögei legyenek 45° illetőleg 135°. A coordinátarendszer kezdőpontja a vonzott pontban legyen.

Az $Y$ tengely legyen a prizma hosszirányával párhuzamos, a $Z$ tengely feküdjék a ki nem térített függón irányában. A prizma vonzásának csak az $X$ és $Z$ tengelyek mentén lesz összetevője, ezek közől kitérítést csak az $X$ tengely menti létesít. Keressük ezen összetevő értékét.

Ha $\sigma$ a folyadék sűrűsége, $f$ a gravitatio állandója, akkor a

$$dm = \sigma dx dy dz$$

elem hatása az $X$ tengely mentén az $O$ pontban

$$f\frac{\sigma dx dy dz}{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Az $Y$ tengelylyel párhuzamos végtelen hosszú egyenes vonzása tehát

$$f x \sigma dx dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = f\sigma dx dz \left[\frac{y}{(x^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = f\sigma dz \frac{2x dx}{x^2+z^2} *$$

---

* FRÖHLICH: Math. rep. 130. lap 24. form.

Az $XY$ síkkal párhuzamos síklap vonzása

$$f\sigma dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{2x dx}{x^2+z^2} = \sigma dz\, \mathrm{l.}\, \frac{x_2^2+z^2}{x_1^2+z^2}$$

Legyen most $a_1$ illetőleg $a_2$ azon pontok $x$ coordinátája, melyben az $X$ tengely a folyó testét átdöfi, akkor

$$x_1 = a_1 - z \qquad x_2 = a + z$$

tehát az $XY$ síkkal párhuzamos lap vonzása

$$f\sigma dz\, \mathrm{l.}\, \frac{a_2^2+2a_2z+2z^2}{a_1^2-2a_1z+2z^2}$$

A teljes prizma vonzása pedig

$$X = f\sigma \int_{z_2}^{z_1} \mathrm{l.}\, \frac{a_2^2+2a_2z+2z^2}{a_1^2-2a_1z+2z^2}\, dz$$

De

$$I = \int \mathrm{l.}\, (a^2+2az+2z^2)\, dz = z\, \mathrm{l.}\, (a^2+2az+2z^2) - \int \frac{z\,(2a+4z)}{a^2+2az+2z^2}\, dz$$

Tekintetbe véve, hogy

$$\int \frac{zdz}{a^2+2az+2z} = \frac{1}{4}\, \mathrm{l.}\, (a^2+2az+2z^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{2z}{a}\right) *$$

és

$$\int \frac{z^2 dz}{a^2+2az+2z^2} = \frac{z}{2} - \frac{a}{4}\, \mathrm{l.}\, (a^2+2az+2z^2) **$$

$$I = \left(z + \frac{a}{2}\right) \mathrm{l.}\, (a^2+2az+2z^2) + a \,.\, \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{2z}{a}\right) - 2z$$

Tehát

$$\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{l.}\, (a_2^2+2a_2z+2z_2^2)\, dz = \left(z_2 + \frac{a_2}{2}\right) \mathrm{l.}\, (a_2^2+2a_2z_2+2z_2^2) + a_2 \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{2z_2}{a_2}\right) -$$

$$- \left(z_1 + \frac{a_1}{2}\right) \mathrm{l.}\, (a_2^2+2a_2z_1+2z_1^2) - a_2 \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{2z_1}{a_2}\right) - 2\,(z_2 - z_1)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{l.}\, (a_1^2-2a_1z+2z^2)\, dz = \left(z_2 - \frac{a_1}{2}\right) \mathrm{l.}\, (a_1^2-2a_1z_2+2z_2^2) - a_1 \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{2z_2}{a_1}\right) -$$

$$- \left(z_1 - \frac{a_1}{2}\right) \mathrm{l.}\, (a_1^2-2a_1z_1+2z_1^2) + a_1 \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{2z_1}{a_1}\right) - 2\,(z_2 - z_1)$$

* FRÖHLICH: Math. rep. 127. lap. 25. form.

** FRÖHLICH: Math. rep. 127. lap. 29. form.

és

$$X = f\sigma \left\{ z_2 \,\mathrm{l.}\, \frac{a_2^2+2a_2z_2+2z_2^2}{a_1^2-2a_1z_2+2z_2^2} - z_1 \,\mathrm{l.}\, \frac{a_2^2+2a_2z_1+2z_1^2}{a_1^2-2a_1z_1+2z_1^2} + \frac{a_2}{2} \,\mathrm{l.}\, \frac{a_2^2+2a_2z_2+2z_2^2}{a_2^2+2a_2z_1+2z_1^2} + \right.$$

$$+ \frac{a_1}{2} \,\mathrm{l.}\, \frac{a_1^2-2a_1z_2+2z_2^2}{a_1^2-2a_1z_1+2z_1^2} + a_2 \left[ \mathrm{arctg}\left(1+\frac{2z_2}{a_2}\right) - \mathrm{arctg}\left(1+\frac{2z_1}{a_2}\right)\right] +$$

$$\left. + a_1 \left[ \mathrm{arctg}\left(1-\frac{2z_2}{a_1}\right) - \mathrm{arctg}\left(1-\frac{2z_1}{a_1}\right)\right] \right\}$$

Keressük a prizma vonzását a nem párhuzamos oldalak egyikének a közepén; akkor

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = a \qquad -z_1 = z_2 = z$$

s így

$$X = f\sigma \left\{ \left(z+\frac{a}{2}\right) \mathrm{l.}\, (a^2+2az+2z^2) + \left(z-\frac{a}{2}\right) \mathrm{l.}\, (a^2-2az+2z^2) - 2z \,\mathrm{l.}\, 2z^2 + \right.$$

$$\left. a \left[ \mathrm{arctg}\left(1+\frac{2z}{a}\right) - \mathrm{arcgt}\left(1-\frac{2z}{a}\right)\right] \right\}$$

Legyen már most a folyó szélessége normalis körülmények között 500 méter, tehát $a = 50000$ cm, a folyó legmagasabb és legmélyebb állása közötti magasság-külömbség pedig 10 méter vagyis $z = 500$ cm.

Akkor

$$z + \frac{a}{2} = 25\,500$$

$$z - \frac{a}{2} = -24\,500$$

$$a^2+2az+2z^2 = 2\,550\,5000\,00$$

$$a^2-2az+2z^2 = 2\,450\,500\,000$$

$$2z^2 = 500\,000$$

$$1 + \frac{2z}{a} = 1\cdot 02$$

$$1 - \frac{2z}{a} = 0\cdot 98$$

Tekintve hogy a víz sűrűsége $\sigma = 1$ és $f = \frac{2}{30\,.\,10^6}$, találjuk, hogy

$$X = 0\cdot 000\ 701$$

$$\frac{X}{g} = \frac{X}{980} = 0\cdot 000\ 000\ 715 = \varepsilon$$

Ámde

$$1'' = 0\cdot 000\ 004\ 81$$

lévén,

$$\varepsilon = 0{,}15''$$

Keressük még a folyó hatását a folyam tükrének a szélén — a trapéz hosszabbik párhuzamos oldalának a végpontján; akkor;

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 51\,000 \text{ cm}; \quad -z_1 = 1000 \text{ cm} \qquad z_2 = 0$$

és

$$X = f\sigma\left[\left(z-\frac{a}{2}\right) \text{l.}\,(a^2-2az+2z^2)-z\,\text{l.}\,2z^2+a\,\text{l.}\,a+a\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\left(1-\frac{2z}{a}\right)\right)\right]$$

$$X=0\cdot 000000623$$

és

$$\varepsilon=0\cdot 13''$$

A trapéz alján, a folyam fenekén, azaz a rövidebb párhuzamos oldal végén a kitérítés még kisebb, mert akkor egy része az $X$ tengely mentén nem ad componenst, a hátramaradó dült rész vonzása pedig kisebb, mint az előbbi esetben az egészé.

---

3. Változtassuk 31-nek reciprok értékét tizedes törtté s az egymásra következő maradékok sorát, mely a következő 15 tagból áll:

1, 10, 7, 8, 18, 25, 2, 20, 14, 16, 5, 19, 4, 9, 28,

írjuk hármával öt sorba, vagy ötével három sorba

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 10, | 7 | | | | | |
| 8, | 18, | 25 | | | | | |
| 2, | 20, | 14 | 1, | 10, | 7, | 8, | 18 |
| 16, | 5, | 19 | 25, | 2, | 20, | 14, | 16 |
| 4, | 9, | 28 | 5, | 19, | 4, | 9, | 8 |

azt találjuk, hogy az egyes oszlopokban álló számok összege mindig osztható 31-gyel.

Bizonyíttassék be általában, hogy ha az

$$\frac{a^0}{p},\ \frac{a^1}{p},\ \frac{a^2}{p},\ \frac{a^3}{p},\ldots$$

osztásokból származó maradékok sora (hol $p$ törzsszám, $a$ pedig $p$-vel viszonylagos törzsszám) $mn$ tagból áll s $m$-ével $n$ sorba, vagy pedig $n$-ével $m$ sorba iratik, az egyes oszlopokban álló számok összege mindig osztható $p$-vel. (Szily.)

---

*Első megoldás Dr. Demeczky Mihály főgymnasiumi tanár úrtól Budapesten.*

Tartozzék az $a$ szám a $p$ törzsszámra nézve a $d=m.n$ kitevőhöz, úgy hogy az

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ldots a^{mn-1}$$

hatványok mod. $p$ inkongruensek. Irjuk fel most már e számokat $m$-ével $n$ sorba:

$$\begin{array}{llllll} a^0 & , a^1 & , a^2 & , \ldots a^r & , \ldots a^{m-1}, \\ a^m & , a^{m+1} & , a^{m+2} & , \ldots a^{m+r} & , \ldots a^{2m-1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(n-1)m}, & a^{(n-1)m+1}, & a^{(n-1)m+2}, & \ldots a^{(n-1)m+r}, & \ldots a^{nm-1}, \end{array}$$

akkor az $r$-edik oszlopban állók összege, $S_r$, lesz

$$S_r = a^r(a^0 + a^m + \ldots + a^{(n-1)m});$$

ámde az

$$x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p} \qquad 1)$$

kongruencziának gyökei, $a^0$, $a^m$, $a^{2m}$, ... $a^{(n-1)m}$, számra nézve a kongruenczia fokával megegyezvén, ezekre a szimmetrikus függvényekre vonatkozó Vieta-tétel alkalmazhatóvá lesz, minek következtében e gyökök összege megegyez az 1) alatti kongruencziában $-x^{n-1}$ együtthatójával, tehát kongruens zérussal, úgy hogy evvel egyszersmind $S_r \equiv 0 \pmod{p}$ hacsak $n > 1$; de ezt kellett épen bebizonyítanunk.

---

*Második megoldás Gruber Nándor polgári iskolai tanár úrtól Budapesten.*

Tartozzék $a$ a $t$ kitevőhöz, vagyis $t$ legyen a legkisebb szám, melyre nézve

$$a^t \equiv 1 \bmod. p,$$

akkor, ha $t = m.n$ és

$$a^s \equiv \mu_s \pmod{p},$$

az összes

$$\mu_s \quad (s = 0, 1, 2, \ldots t-1)$$

maradékokat $m$-ével $n$ sorba írhatjuk a következő módon:

$$a^{im} \equiv \mu_{im},\ a^{im+1} \equiv \mu_{im+1}, \ldots,\ a^{(i+1)m-1} \equiv \mu_{(i+1)m-1} \pmod{p}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Ha a $k$-dik oszlopban lévő maradékok összegét $S_k$-val jelöljük, akkor

$$S_k \equiv a^k(1 + a^m + a^{2m} + \ldots + a^{(n-1)m}) \equiv a^k \frac{a^{mn}-1}{a^m-1} \pmod{p.}$$

vagy

$$(a^m - 1)\, S_k \equiv a^k(a^t - 1) \pmod{p}$$

De föltevésünk szerint $a^t - 1$ osztható $p$-vel, tehát

$$(a^m - 1)\, S_k \equiv 0 \pmod{p}$$

a miből következik, hogy

$$S_k \equiv 0 \text{ mod.} p,$$

mert $a^m-1$ nem lehet osztható $p$-vel, $m$ kisebb lévén $t$-nél s $t$ a legkisebb kitevő, melyre nézve $a^t-1$ osztható $p$-vel.

Utóbbi kongruencziából látjuk, hogy ez $k$ értékétől független, úgy, hogy bármely oszlop számainak összege szintén $p$-vel osztható.

Ugyanez eljárással ki lehet mutatni, hogy ha a maradékokat $n$-ével $m$ sorba írjuk, bármely oszlopban álló számok összege megint osztható $p$-vel.

Ha $a=1$, tehát $t=0$ a szabály érvénytelen. Ez némi ellenmondásban látszik állni a feladatban adott példával, a hol $\frac{1}{31}$ van átváltoztatva tizedes törtté s a maradékok mindazonáltal hódolnak a szabálynak. Az ellenmondás azonban csak látszólagos, mert ebben az esetben $a=10$ s a számlálóban lévő *egyes* $10^0$ hatványként szerepel. Ugy szintén ki van zárva $p=2$ esete, mert $1^0 \equiv 1$ mod. 2, tehát $t=0$.

Abban az esetben, midőn $t=m.n$ törzsszám (pl. $p=41$, $a=10$-re $t=5$), $n=1$ és így csak egy-egy szám jut minden oszlopba vagyis

$$S_k = a^k,$$

a szabály nem érvényes, mert $a^k$ nem osztható $p$-vel. Ha azonban $t=n$ és $m=1$-nek veszszük, tehát az összes maradékokat egy oszlopba írjuk, akkor

$$(a-1)\, S \equiv a^n-1 \equiv a^t-1 \equiv 0 \text{ mod.} p.$$

és ebből, mivel $a-1$ nem osztható $p$-vel,

$$S \equiv 0 \text{ mod.} p,$$

vagyis a maradékok összege megint osztható $p$-vel.

Ha az osztó összetett szám, a szabályok már nem oly egyszerűek. Ugyanis ha $r$ az osztó, $a$ pedig vele relatív törzsszám, mely mod. $r$ a $t$ kitevőhöz tartozik, akkor $t=mn$ esetében a maradékokat ismét $m$-ével $n$ sorba írván, az egy oszlopban álló maradékok összege megint

$$S_k = a^k \frac{a^{mn}-1}{a^m-1} \text{ (mod. } r)$$

vagy

$$(a^m-1)\, S_k \equiv a^k\, (a^{mn}-1) \text{ (mod. } r)$$

Ebben az esetben $a^{mn}-1$ $r$-rel való oszthatóságából még nem következik $S_k$-nak oszthatósága $r$-rel, mert most $a^m-1$ és $r$-nek lehet közös osztója. Keressük, hogy mily föltételek mellett lesz $S_k$ osztható $r$-rel?

Legyen $a^m-1$ és $r$ legnagyobb közös osztója $\mu$ és $r=\mu\nu$; továbbá $\mu$-nek legmagasabb hatványa, mely $a^m-1$-ben foglaltatik az $i$-dik, akkor

$$S_k \equiv a^k \frac{a^{mn}-1}{a^m-1}$$

osztható $\mu\nu$-vel, ha

$$a^{mn}-1 \equiv 0 \pmod{\mu^{i+1}\nu}. \tag{1}$$

Ha tehát e kongruenczia ki van elégítve, akkor az összes maradékokat $m$-ével írván $n$ sorba, bármely oszlopban levő számok összege osztható $r$-rel.

Ha pedig $a^n-1$ és $r$ legnagyobb közös osztója $\mu_1$ és $r=\mu_1\nu_1$, továbbá $\mu_1$-nek legmagasabb hatványa, mely $a^n-1$-ben foglaltatik a $j$-dik, akkor az összes maradékokat $n$-ével írván $m$ sorba, bármely oszlopban levő számok összege osztható $r$-rel, ha

$$a^{mn}-1 \equiv 0 \pmod{\mu_1^{j+1}\nu_1} \tag{2}$$

Az egyes oszlopba jutott számoknak $r$-rel való oszthatósága tehát — mint innen látni való — lényegesen függ $a$-nak alkatától.

Az $a=1$ esete itt is kivételes. Ha pedig $t$ törzsszám, hasonló megjegyzések érvényesek, mint törzsszám osztó esetében.

Pl. Ha $r=21$, $a=5$, akkor $t=6=2.3$; $a^2-1$ és $r$ legnagyobb közös osztója 3 és

$$a^6-1 \equiv 0 \pmod{3^2.7};$$

tehát a 6 maradékot kettesével 3 sorba írván, egy-egy oszlopban álló számok összege osztható 21-gyel. Másrészt $a^3-1$ és $r$ közös osztója 1, tehát a (2) alatti kongruenczia is ki van elégítve, ésígy a 6 maradékot hármasával 2 sorba írván, az egyes oszlopokba jutott számok összege szintén osztható 21-gyel.

$$5^0\equiv1,\ 5^1\equiv5,\ 5^2\equiv4,\ 5^3\equiv20,\ 5^4\equiv16,\ 5^5\equiv17 \mod 21.$$

$$\begin{array}{rr} 1, & 5 \\ 4, & 20 \\ 16, & 18 \\ \hline 21, & 42 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1, & 5, & 4 \\ 20, & 16, & 17 \\ \hline 21, & 21, & 21 \end{array}$$

---

E feladat megoldását beküldötték még MAKSAY ZSIGMOND főreáliskolai tanár, SZABÓ PÉTER okl. tanárjelölt és SUTÁK JÓZSEF urak, kik a feladatban jelzett viszonyokra szorítkozva, a szóban forgó tételt hasonló úton vezetik le.

*Szerk.*

## PHYSIKAI LABORATORIUM.

**Leidenfrost-féle tünemény.** — Platinacsészike fölé egy rézdrótot, melynek egyik végéhez néhány cm. hosszú platinadrót van forrasztva, úgy erősítünk meg, hogy a platinadrót vége a csészétől csak igen kevéssé álljon el. A csészikét egy galvántelep egyik sarkával, a rézdrótot pedig a másik sarkával kötjük össze és a vezetékbe elektromos csengetyűt iktatunk. Magát a kisérletet $\frac{1}{10}$ térf. résznyi kénsavval megsavanyított vízzel teszszük. A platinadrót belemerül ugyan az izzó csészébe csepegtetett folyadékba, a csengetyű azonban nem szólal meg; de ha a csészét hevítő Bunsenlángzót eltávolítjuk, rövid idő mulva a csengetyű erős hanggal árulja el, hogy a folyadék és a csésze között közvetlen érintkezés állott be.

*

**Peltier-féle tünemény.** — Az elektromos áramtól a különnemű fémek forrasztás helyén létesített lehülést — csak ennek megmutatása jár az eddigi kisérleteknél nehézséggel — akként mutathatjuk meg, hogy egy egész hőelektromos oszlopot, péld. a Melloni-készülék oszlopát, érzékeny léghőmérővel közvetetlen kapcsolatba hozunk. E végből az oszlop hengeralakú fémfoglalatára egy pontosan reá illő üvegcső-darabot tolunk, melynek a fémfoglalatra illeszkedő belső része fagyúval be van kenve, másik végét pedig egy a közepén átfúrt parafa-dugóval jól elzárjuk, úgy hogy a parafa és az oszlop forrasztás-helyei közötti távolság legfeljebb 5 mm. legyen. A dugó fúrásába egy rövid és szűk üvegcsövet, és ehhez ismét kaucsuk csövecske segítségével egy másik, mintegy 12 cm. hosszú üvegcsövet toldunk, melynek belső átmérője azonban legfeljebb csak 1 mm. lehet, s melynek a kisérlet alkalmával vízszintes állásban kell lennie; legegyszerűbb, ha fehér papirossal borított vízszintes lapra fektetjük. Ezen csőbe, melyet csak a kisérlet előtt tolunk a gummicsőbe, mutatóul előzetesen egy csepp festett vizet hozunk. Midőn a csepp nyugalomba jött, a hőelektromos oszlopon át egy galvántelep áramát vezetjük, melynek elektromótoros erejét a hőelektromos oszlopnak ellenállásához képest kell megválasztanunk; az áram irányához képest a borszesz-csepp mozgása hűtést vagy felhevülést mutat. Nagyon czélszerű a hőelektromos oszlop csiptetőit drótok segítségével higany-gödröcskékkel összekötni és a galvántelep áramát az utóbbiak révén vezetni az oszlopba.

A borszesz-cseppnek a forrasztáshelyek lehülésével járó mozgása a leírt berendezésnél sem valami nagy és a Joule-féle hőhatás már igen rövid idő múlva megszünteti s nyomban rá ellenkezőre változtatja ; de a kisérlet legalább biztosan sikerül és az a jó oldala is megvan, hogy épen csak a forrasztás-helyeken mutatkozó hatásokat árulja el. *Czógler.*

*

**Rozsdás vas és aczél** könnyen megtisztítható a következő folyadékkal: 1 liter desztillált vízben 3 gr. borkősav, 10 gr. ónsó (óndichlorid, $S_nCl_2$) és 2 gr. higanychlorid oldandó fel, a mihez még 50 cm³ 100-szorosan hígított indigó-oldat keverendő. Ez a folyadék készletben tartható s a rozsdát és a rozsdafoltokat gyorsan eltünteti.

*

**Vízálló enyv.** Vízben felázott és gyengén felmelegített enyvhez megfelelő mennyiségű lenolaj öntendő s folytonos keverés közben hosszabb ideig óvatosan melegítendő. Az enyv jól fog és víz alatt is kitünően tart.

*

**Szines zselatinlemezek.** Csupán csak a vörös fényt átbocsátó üveg ritkán kapható. Igen jól pótolják anilinfestékkel szinezett, közönséges üveghez rögzített zselatinhártyák ; készíthetők a következőképen : Az üveglemez jól letisztítva, lehetőleg vízszintesre nivellálandó, mire a rákövetkező oldatok valamelyikével leönthető. I. 1 gr. aurantia 100 cm³ dest. vízben, 20 gr. zselatin pedig 100 cm³ dest. vízben feloldva, összeöntendő. II. 8 gr. rhodamin 250 cm³ dest. vízben és 20 gr. zselatin 100 gr. dest. vízben ; összekeverendő 30 cm³ rhodaminoldat 20 cm³ zselatinoldattal. A megfestett oldatok nedves flanellen átszűrendők. A két keveréket nem szabad összeönteni, mert a rhodamin az aurantia jelenlétében kiválik. — Az aurantia-oldat a vöröset, a sárgát és a zöldet átbocsátja, de a kéket nem, rhodamin pedig csupán csak a vöröset és a kéket. Tehát az aurantiával és a rhodaminnal festett két lemez csakis a vörös színt bocsátja át. — Hogy a zselatin melegben az üvegről le ne pattogjon, a jól megtisztított üveglemez mindenekelőtt 1 gr. zselatin, 250 cm³ víz és 6 cm³ $^1/_{50}$-részes chrómtimsó-oldatból készített keverékkel öntendő le ; a lemez függélyes helyzetben szárítandó s csak ha megszáradt, önthető rá a szines zselatinoldat. — A zselatinlemez a lepattogzás ellen még úgy is védhető, hogy a megtisztított üveg $2^1/_2$ %-os nyers collodiumoldattal öntetik le s ha megszáradt, jön rá a festő-oldat s erre újra a $2^1/_2$ %-os collodium. A hártya, ha megszáradt, az üvegről le is húzható s ha kell, két üveglemez vagy csillám közé foglalható. *B.*

## Kérdések, feleletek.

**3. Kérdés.** Több optikai készülék egyes részeit homályos fekete festékkel szeretném bevonni. Miféle festék felel meg legjobban e czélnak? *G.*

**Felelet.** Ha a befestendő tárgy fa vagy papir, apróra tört kormot kell sellakoldatban feloldani s avval a tárgyat befesteni. A fémtárgyak azonban ezen festéket csak úgy veszik fel, ha a befestendő fémfelületet előbb concentrált gáliczoldattal kenjük be. Ha a fémtárgy a gáliczoldattal való bekenés után megszáradt, az említett festék puha ecsettel könnyen rávihető. Az így befestett tárgyak szép feketék és egész homályosak. Sz.

*

**Kérdés:** Kérem egy oly munkának a czímét, melyben a vetítő-készülékek, a velök való bánásmód és a vetítés mindenféle fogásai lehetőleg kimerítően le vannak írva. *V.*

Stein. Die optische Projectionskunst im Dienste der exakten Wissenschaften. Halle. W. Knapp 1887. Ára 3 márka.

Liesegang. Die Projectionskunst für Schulen, Familien und öffentliche Vorstellungen nebst einer Anleitung zum Malen auf Glas und Beschreibung optischer, magnetischer, chemischer und electrischer Versuche. Düsseldorf, E. Liesegang 1888. Ára 5·70 márka.

Lewis Wright. Optical Projection. A treatise on the Use of the Lantern in Exhibition and scientific Demonstration. 232 Illustrations. London, Longmans and Comp. 1891. Ára 7.20 márka.

Az első és a harmadik munka talán legjobban fog czéljainak megfelelni.

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

ELSŐ ÉVFOLYAM

ÖTÖDIK FÜZET. 1892 MÁRCZIUS

BUDAPEST

KIADJA A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1892

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenkint 8, legalább 3 ívnyi füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó 20-dik napján. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A társulati év a választmány határozata szerint 1892. január 1-én kezdődik. Ennek folytán a M. Ph. Lapokból a folyó évben 6 füzet jelenik meg, mely a mult évben megjelent kettős füzetet 24—30 ívnyi kötetre fogja kiegészíteni. A hátralevő füzeteket április, október és november hónapok 20-ik napján küldjük szét.

Tagsági okleveleink elkészülvén, még e hó folyamán fogjuk szétküldeni.

A tagsági díj az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük tiszt. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czimére — legczélszerűbben a 4-dik füzethez mellékelt postautalványnyal — beküldeni. Legyen szabad egyúttal a választmánynak a 3-dik füzet 187. lapján közölt kérelmét t. Tagtársaink becses figyelmébe ajánlanunk.

Az Alapszabályok IX. 24. §-ának megfelelőleg a M. P. Társulat husvét táján közgyűlést tart, melynek napjáról t. Tagtársainkat külön meghivó utján értesítjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czimére (VI. Bajza-u. 20.) intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár (VII., akáczfa-u. 49.), a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a reklamácziók is.

---

# FÉNYKÉPÉSZETI KÉSZÜLÉKEK

**minden nagyságban és kivitelben nagy választékban.**

Mint különösen kedvelt és nagyon elterjedt készüléket ajánljuk

## Goldmann A. és Fia bécsi czég

## Universalis Detectiv-kamaráját.

Részletes, dúsan illustrált árjegyzékek bérmentve küldetnek.

Részletes, dúsan illustrált árjegyzékek bérmentve küldetnek.

Czélszerü szerkezete folytán kitünően alkalmas ezen műszer szabadkézből való pillanatfelvételek, ugymint (egy állványra csavarva) személy-, csoport-, tájkép-, épitmény-, interieur-, sőt reproductió felvételek eszközlésére. Különböző gyútávolságok beállithatása végett kihuzható szerkezettel és hajtócsavarral bir, és el van látva távmutatóval, mely egy csavar forgatása által a becslés által meghatározott méterek távolságának megfelelő számra állittatik be, hogy az emlitett távolságban levő tárgy élesen jelenjék meg a lemezen. Az objectivum egy különös szerkezetü Steinheil-féle antiplanetikus lencse, a mögötte levő pillanatzár pedig kényelmesen beállitható 1/100—1 másodpercznyi gyorsaságra, vagy hatályon kivül helyezhető. A kamara továbbá egy keresővel van ellátva és hossz- ugymint függőleges felvételekre egyaránt használható.

A kamara bővebb leirása és használati utasitása az érdeklődőknek rendelkezésére áll.

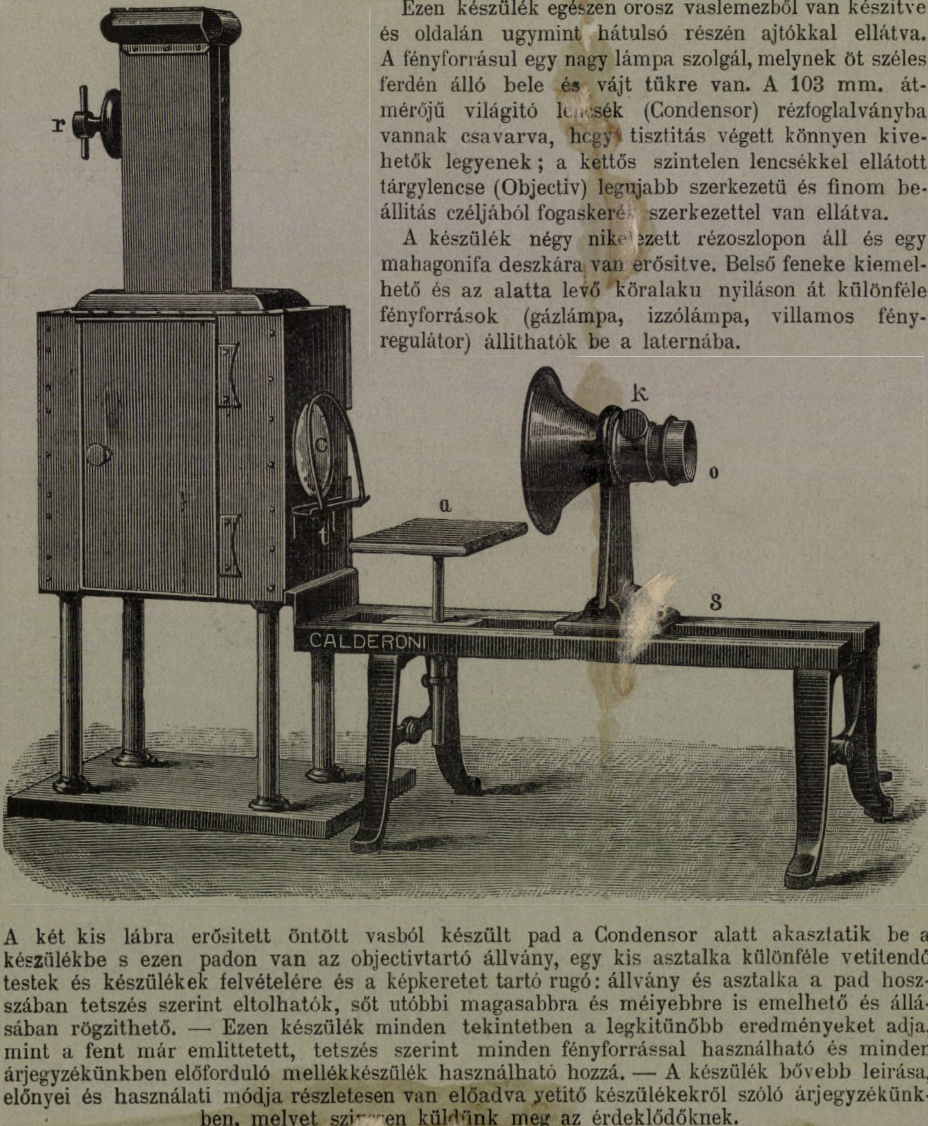
| Nagyság | Lencse | Ára 6 kettős kassetával és bőrönddel |
|---|---|---|
| 9×12 | Antiplanet 25 m/m | 110.— |
| 12×16½ | « 33 « | 152.— |
| 13×18 | « 43 « | 190.— |
| 16×21 | « 43 « | 215.— |
| 16×21 | « 48 « | 230.— |

**Calderoni és Társa, Budapest, IV. kis hid-utcza 8.**

# CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., kis hid-utcza 8. sz.

## „Pentaphane“ universalis vetitő készülék iskolai használatra.




Ezen készülék egészen orosz vaslemezből van készitve és oldalán ugymint hátulsó részén ajtókkal ellátva. A fényforrásul egy nagy lámpa szolgál, melynek öt széles ferdén álló bele és vájt tükre van. A 103 mm. átmérőjü világitó lencsék (Condensor) rézfoglalványba vannak csavarva, hogy tisztitás végett könnyen kivehetők legyenek; a kettős szintelen lencsékkel ellátott tárgylencse (Objectiv) legujabb szerkezetü és finom beállitás czéljából fogaskerék szerkezettel van ellátva.

A készülék négy nikelezett rézoszlopon áll és egy mahagonifa deszkára van erősitve. Belső feneke kiemelhető és az alatta levő köralaku nyiláson át különféle fényforrások (gázlámpa, izzólámpa, villamos fényregulátor) állithatók be a laternába.

A két kis lábra erősitett öntött vasból készült pad a Condensor alatt akasztatik be a készülékbe s ezen padon van az objectivtartó állvány, egy kis asztalka különféle vetitendő testek és készülékek felvételére és a képkeretet tartó rugó: állvány és asztalka a pad hoszszában tetszés szerint eltolhatók, sőt utóbbi magasabbra és méiyebbre is emelhető és állásában rögzithető. — Ezen készülék minden tekintetben a legkitünőbb eredményeket adja, mint a fent már emlittetett, tetszés szerint minden fényforrással használható és minden árjegyzékünkben előforduló mellékkészülék használható hozzá. — A készülék bővebb leirása, előnyei és használati módja részletesen van előadva vetitő készülékekről szóló árjegyzékünkben, melyet szivesen küldünk meg az érdeklődőknek.

**A «Pentaphane» vetitő készülék ára ötbélü petroleum-lámpával együtt 88 frt.**

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

# A LOGIKA-KALKULUSRÓL.*

(Első közlemény.)

*Bevezetés.* A különböző tudományok történetében az a jellemző vonás vehető észre, hogy a szerzett tapasztalatok száma és ezek kifejezésének terjedelme egymással forditott arányban állanak oly módon, hogy az előbbinek növekedése az utóbbinak tér- és időbeli csökkenését vonta maga után; az ismeretkör bővülése után rendesen az összefoglalás és csoportositás, a gondolattömörülés, korszaka következett be, úgy hogy *a fogalomtömeg mindig mintegy fajlagosan sűrült.* Legszembetünőbben mutatkozik ez az exakt tudományok történetében. Az első tudatos észlelések eredményeinek jelölése és kifejezése nehézkes és körülményes volt, de megjárta mindaddig, míg a fölismert vonatkozások terjedelmükre nézve a kezdeményezés szűk keretében megfértek; de abban a mértékben, melyben az ismeretkör bővült, a kifejezés is rövidebb, tömöttebb alakot öltött.

A rövidités kétféle módon történt: 1. oly módon, hogy egy egész fogalomszerkezet helyébe egyszerü szimbolum lépett, 2. akként, hogy a különböző fogalomszerkezeteknek egymástól való függései az őket helyettesitő szimbolumokon végzett egyszerű operácziókkal jelöltettek. Ily módon keletkezett a mathematikai képlet és valahányszor ez oly térbe volt felvehető, melynek a tiszta mathézissel való alaki azonosságát fölismerték, az illető téren gyorsabb haladás volt észlelhető, mert midőn már egyszer a gondo-

* Előadva a math. és phys. társaság 1891 április hó 16-án tartott szakülésén.

latok közti vonatkozások mathematikai képletekben voltak összefoglalva, az ezen végig húzódó lánczon könnyen lehetett tovább haladni; nem volt szükséges minden egyes lépésnél újra leküzdeni ama nehézségeket, melyekkel az operácziók szabályainak megállapítása alkalmával egyszer és mindenkorra végeztek.

Az itt jelzett tendencziával találkozunk az újabb időben ismételten felmerült ama törekvésekben is, melyek a mathematikai szimbolumok- és operáczióknak a logika számára való értékesitése felé irányúlnak. A logikai anyag mathematikai tárgyalásának eszméjét már Leibnitz [1] penditette meg, későbben Lambert [2] és Ploucquet [3] tettek ez irányban alapvető kisérleteket. Önálló tudományos, és az idevágó problémák megoldását czélzó rendszerré azonban legelőször az angol George Boole foglalta össze a «*Calculus of logic*» alapelveit.[4] Ujabban Charles Peirce [5] és E. Schröder [6] nemcsak a tudományos discussió előterébe hozták ismét e többizben — úgyszólván — ad acta tett disciplinát, hanem egyrészt a megelőző munkálatok kritikai megrostálása és kiegészitése, másrészt a kitűzött feladat és az elérhető czél exakt megállapitása — úgy látszik — maradandó érdeket biztositottak a logika mathematikájának, ámbár az e módszerhez kötött várakozások épen az elérhetőnek pontos körülirása folytán lényegesen redukálódnak, a mennyiben kiderül, hogy a tárgyalás alá kerülő anyag legnagyobb része a formális logika épen ama köréből való, mely már a régi logikusok kedvencz tomboló terét képezte. Mindenesetre érdemes, hogy a mathematikus e jelenségről tudomást vegyen, már csak azért is,

---

[1] Opera philos., ed. Erdmann 1840.

[2] «Nova acta eruditorum» 1765. — Logische u. phil. Abhandl. 1781. — Deutscher gelehrter Briefwechsel 1782—84.

[3] Sammlung der Schriften, welche den logischen Kalkul des Herrn Prof. Ploucquet betreffen 1773.

[4] An investigation of the Laws of thougt on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. London 1854.

[5] Az «*American Journal of Mathematics*»-ban foglalt értekezéseiben és önállóan megjelent több munkájában.

[6] *Der Operationskreis des Logikkalkuls*. Leipzig 1877 és *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. Leipzig 1890.

mert nincsen kizárva, hogy a mathematikától disciplinált logika vissza fog hatni ismét magára a mathematika módszerére. E tekintetben utalok Peano-nak * a logika-kalkulus módszerével tárgyalt egyik értekezésére, melyben különben igen hosszadalmas fejtegetések a logika-kalkulus jelzéseinek segitségével, a lehető legtömörebb alakban vannak előadva.

Midőn a következőkben a logika-kalkulus alapvető axiomáit és tételeit bemutatom, különös tekintettel leszek az algebrából átvett oly alakokra, melyek a speczialis czélnak megfelelő értelmezésök folytán az algebra tételeitől lényegesen eltérő egyéb formális törvényeknek hódolnak.

*

*Alapfogalmak.* A logika-kalkulusban $a, b, c, \ldots$ szimbolumokkal valamely fogalom körébe tartozó egyének összességét, az ú. n. *osztályokat* jelöljük; ilyen osztályok pl. az emberek, a feketék, stb.

Az $a = b$ reláczió azt jelenti, hogy az $a$ és $b$ szimbolumok jelölte osztályok azonosan ugyanazokat az egyéneket ölelik fel, hogy tehát oly osztályokkal van dolgunk, melyek csak nevükben, de nem tartalmukban különböznek egymástól. Igy pl. konyhasó = chlornatrium. Az identitás azonban csak speczialis alakja amaz általános viszonynak, melyben két osztály egymáshoz áll, midőn a logikai itéletben mint alany és állitmány függnek össze egymással. Ilyenkor általában terjedelemre nézve az egyik a másiknak fölé van rendelve, illetőleg ez utóbbit magában foglalja; ezt az összefüggést a *subsumtio* viszonyának mondjuk, és igy jelöljük:

$$a \mathrel{\overset{=}{\leftarrow}} b,$$

pl. ember $\mathrel{\overset{=}{\leftarrow}}$ élő lény.

Jóllehet a logika szempontjából épen ez az általánosabb viszony a termékenyebbik, mégis itt, hol a szimbolumokon végzendő mű-

* *Démonstration de l'Integrabilité des équations differentielles ordinaires. Math. ann.* 37. köt. 1890.

veleteket, illetőleg a kifejezéseknek ezek alapján eszközölhető transformáczióját akarjuk megvizsgálni, inkább az identitás érdekel bennünket.

A műveletek közt legfontosabbak a *szorzás* és az *összeadás*. E két művelet igen érdekes duális viszonyban áll egymáshoz, melyet különösen Schröder juttat következetesen érvényre, noha igen gyakran csak a rendszer teljessége kedveért foglalkozik oly alakokkal is, melyek különben nem járulnak a kitűzött feladat megoldásához. E helyen csupán csak azokra a duális viszonyokra akarunk kiterjeszkedni, melyek a bemutatandó anyag szerkezetébe szigorúan beletartoznak.

A logika-kalkulusban az

| $ab$ | $a+b$ |
|---|---|
| *szorzat azt az osztályt jelöli, mely* az $a$ és $b$ osztályok *közös egyéneit tartalmazza.* Pl. ha $a$ a «fehérek», $b$ a «lovak» osztályát jelöli, akkor $ab$ az összes «fehérek» közt csak azon egyénekre vonatkozik, melyek azonkívül lovak is, vagy az összes lovak közt csak azokra, melyek fehérek. | *összeg amaz egyének összeségét jelöli, melyek vagy az a, vagy a b osztályhoz tartoznak.* Pl. ha $a$ az összes növények, $b$ az összes állatok osztályát jelöli, akkor $a+b$ a biologia körébe tartozó egyének összeségét jelöli. |

Mindkét definiczió tetszés szerinti sok osztályra is terjeszthető ki.

Az adott definiczió kiegészítésre szorúl abban az esetben, midőn az $a$ és $b$ osztályok

| | |
|---|---|
| egymást teljesen kizárják. | az összes, egyáltalában szóba kerülhető egyénekre *, a «*minden*»-re kiterjednek. |

Ez alkalmat szolgáltat a

| 0 | 1 |
|---|---|

* Boole szerint: «universe of discourse.»

szimbolumok bevezetésére; ugyanis

*0-sal jelöljük azt az osztályt, melyben egyetlen egy egyén sem foglaltatik.* Ennélfogva

$$ab=0$$

összefüggés oly $a$ és $b$ osztályokra áll, melyek egyetlen egy közös egyénnel sem birnak; ezek az ú. n. *diszjunktiv* osztályok,

*1-gyel jelöljük azt az osztályt, melyben valamennyi egyén foglaltatik.* Ennélfogva

$$a+b=1$$

összefüggés oly $a$ és $b$ osztályokra áll, melyek a «mindent» karolják föl; ezek az ú. n. *komplementárius* osztályok.

A baloldali tételből kitetszik, hogy a logika-kalkulusban valamely szorzat azonosan tünhetik el, anélkül, hogy valamelyik tényezője zézussal volna egyenlő.

A szorzat és az összeadás számára nyert definiczióból következik a *tautologiáról* szóló tétel:

$$a.a.a\ldots=a,$$

*az-az valamely osztály önmagával szoroztatván, nem változik;* tehát, a logika-kalkulusban hatványozás nincsen.

$$a+a+a+\ldots=a.$$

*az-az valamely osztályt önmagához adván, ez változatlan marad;* tehát a logika-kalkulusban az összeadás és a szorzás közt nincs oly összefüggés, mint a hogy azt az arithmetika definiálja.

Igen alkalmas segédeszközt nyer a logika-kalkulus a *negáczió* elvének bevezetésével. Ugyanis *minden $a$ osztályhoz tartozik legalább egy oly $a_1$ osztály, hogy*

$$aa_1=0 \quad \text{és} \quad a+a_1=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Világos, hogy itt két oly osztályról van szó, melyek közűl az egyik a másiknak kontradiktorius ellentéte, pl. szerves és szervetlen testek, ember és nem-ember; közös egyénekkel nem birnak és együttvéve a «minden»-t karolják fel.

Ebből következik:

| | |
|---|---|
| 1) $0 \,.\, a = 0.$ | 1*) $1 + a = 1$ |
| 2) $a \,.\, 1 = a.$ | 2*) $a + 0 = a.$ |
| Ugyanis | Ugyanis |
| $a \,.\, 0 = a\,(aa_1) = (aa)\,a_1 = aa_1 = 0.$ | $1 + a = (a + a_1) + a = (a + a) +$ |
| $a \,.\, 1 = a\,(a + a_1) = aa + aa_1 =$ | $+ a_1 = a + a_1 = 1.$ |
| $= a + 0.$ | $a + 0 = aa + aa_1 =$ |
| | $= a\,(a + a_1) = a.$ |

A mint látszik a 2) és a 2*) tételek bebizonyításai közt csak az egyik önálló.

A logika-kalkulusra jellemző még az ú. n. *absorptió* törvénye:

$$a + ab = a.$$

Ugyanis

$$a + ab = a\,(1 + b) = a \,.\, 1 \,. = a.$$

Bármely $b$ osztály előállítható mint egy másik $a$ osztálynak és az ehhez tartozó $a_1$-nek homogén lineár függvénye, úgy hogy

$$b = xa + ya_1 \quad . \; . \; . \qquad (A)$$

Minthogy

$$b = b \,.\, 1 = b\,(a + a_1) = ba + ba_1$$

úgy ebből az $(A)$ alatti állítás helyességét bizonyitottuk be ama speicziális esetre nézve, midőn $x = y = b$. Ámde, hogy $x$ és $y$ nem teljesen meghatározott osztályokat jelentenek, az abból is tünik ki, hogy abban az esetben, midőn $x$ és $y$ az $(A)$ egyenletnek eleget tesznek, akkor eleget tesznek neki egyszersmind az $(x + ua_1)$, $(y + va)$ megoldások is.

Általában könnyen fölismerhető a következő egyenlőség helyessége

$$b = (ab + ua_1)\,a + (a_1 b + va)\,a_1\,,$$

melyben $u$ és $v$ egészen tetszés szerinti osztályokat jelentenek.

*Bein Károly.*

# A KÖRMÉRÉS TÖRTÉNETE ÉS ELMÉLETE.

(Harmadik közlemény.)

Az eddigiek után áttérhetünk a SNELLIUS-tól felállított egyenlőtlenségek bebizonyítására, melyek a következő két tételben nyernek kifejezést.

1. *Vegyük fel az $AB$ átmérővel s $C$ középponttal biró körön* (11. ábra) *tetszés szerint a $D$ pontot; továbbá válaszszuk az $E$ pontot az $AB$ meghosszabbításán úgy, hogy $DE$ egyenlő legyen a sugárral. Ha most $ED$ meghosszabbítása a kört $F$ pontban, a $B$-ben vont érintőt pedig $G$-ben metszi: akkor $BF$ ív kisebb mint a $BG$ vonaldarab.*

2. *A kör $AB$ átmérőjének* (12. ábra) *meghosszabbítására rakjuk fel a sugárral egyenlő $AC$ távolságot. A körnek $BE$ íve nagyobb mint ama $BL$ vonaldarab, melyet $CE$ metsző a $B$-ben vont érintőről lemetsz.*

HUYGENS e tételeket következőleg bizonyította be.

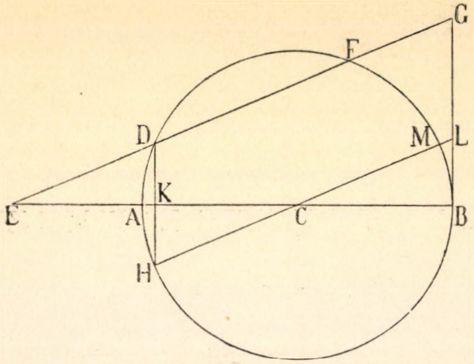
Legyen (11. ábra) a $C$-n keresztül vont $HCML$ metsző az $EDFG$ metszővel párhuzamos, továbbá messe $DH$ húr az $AB$ átmérőt $K$-ban. $EDK$ és $CHK$ háromszögek egybevágók lévén, $K$ pont a $DH$ húrnak felező pontja. Ennélfogva $DA$ és $AH$ ívek egyenlők. Világos továbbá, hogy $BM$ ív is ugyanakkora. Ugyancsak könnyen látható be $DH$ és $MF$ körívek egyenlő volta is.

Ha tehát

$$\text{arc. } DA = ra,$$

akkor

$$\text{arc. } AH = \text{arc. } BM = ra$$
$$\text{arc. } DH = \text{arc. } MF = 2ra$$
$$\text{arc. } BF = 3ra.$$




11. ábra.

Másrészt

$$BL = r \operatorname{tg} \alpha,$$

$$LG = HD = 2r \sin \alpha$$

és

$$BG = r (\operatorname{tg} \alpha + 2 \sin \alpha).$$

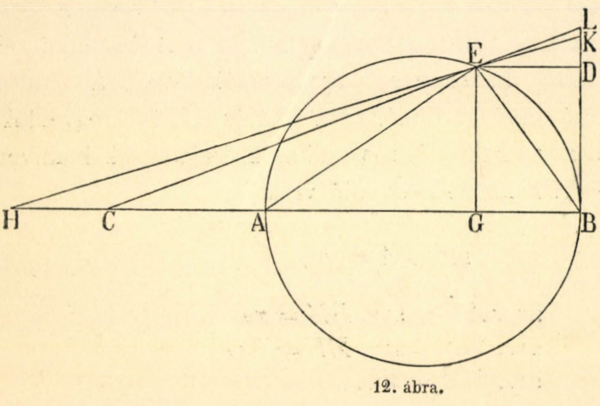
Az első egyenlőtlenség, hogy t. i.

$$\text{arc. } BF < BG,$$

tehát ugyanazt fejezi ki, mint a már levezetett

$$\alpha < \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2}{3} \sin \alpha.$$

Jóval hosszadalmasabb a második egyenlőtlenség bebizonyítása.




12. ábra.

Huzzuk e czélra (12. ábra.) $ED$-t $BL$-re merőlegesen, és $EG$-t $AB$-re merőlegesen. Válaszszuk $AB$ átmérő meghosszabbításán a $H$ pontot úgy, hogy

$$AH = AE.$$

A $H$ ponton át huzott $HE$ messe $BL$-t $K$ pontban.

Most már $AE$ húr $AG$ és $AB$-nek mértani közepe s ennélfogva kisebb ezeknek számtani közepénél. Képletben:

$$AE < \frac{1}{2}(AB + AG).$$

Ugyanaz így is írható

$$AH < CA + \frac{1}{2}AG$$

vagy $AG$ szerint megoldva

$$\frac{1}{2}AG > CH.$$

Továbbá

$$HA = AE > AG,$$

tehát még inkább

$$HA > 2CH,$$

s mindkét oldalon $CH$-t kivonva

$$CA > CH.$$

Egyenlőtlenségeinknél fogva

$$CG = CA + AG > 3CH.$$

Másrészt

$$HG : GE = ED : DK$$

és

$$GE : GC = LD : DE$$

a miből, $GE$ és $DE$-t eliminálván, találjuk:

$$HG : GC = LD : DK.$$

E proporczió értelmében

$$(HG - GC) : GC = (LD - DK) : DK$$

azaz

$$CH : GC = KL : DK.$$

A bal oldalon az előbbiek szerint

$$GC > 3CH$$

tehát egyszersmind

$$DK > 3KL.$$

Hogy $DK$ helyett egy vele egyenlő hosszat nyerhessünk, vegyük tekintetbe, hogy

$$KEB = \frac{\pi}{2} - HEA = \frac{\pi}{2} - EHA =$$

$$= \frac{\pi}{2} - KED = EKD = EKB,$$

hogy tehát $KEB$ háromszögben

$$BE = BK.$$

Innen

$$DK = BK - BD = BE - EG.$$

E szerint utolsó egyenlőtlenségünk igy is irható

$$KL < \frac{1}{3}(BE - EG).$$

Adjuk ehhez

$$BK = BE$$

egyenletet, akkor

$$BL < BE + \frac{1}{3}(BE - EG)$$

nyerjük; ha a $BE$ ívnek megfelelő középponti szöget $2\alpha$-val jelöljük, akkor

$$\sin\alpha + \frac{1}{3}(\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha) < \alpha$$

egyenlőtlenség értelmében

$$BE + \frac{1}{3}(BE - EG) < \text{arc. } BE.$$

A bal oldal helyébe a nálánál kisebb $BL$ vonaldarabot helyettesitvén, végre találjuk, hogy valóban

$$BL < \text{arc. } BE.$$

Snellius és Huygens egyenlőtlenségei a Ludolfi szám kiszámitásának lényeges egyszerűsitését tették lehetővé. Igy nevezetesen Huygens a maga egyenlőtlenségeinek ügyes kikasználásával a 60 szögből a Ludolfi számnak *kilencz* jegyét birta meghatározni, holott Archimedes még a 96 szög segitségével is csak *két* tizedest nyert.

Ime kiindulván a legrégibb mathematikai munkában minden további indokolás nélkül megadott közelítő értéktől, magas tökélyre emelt elméletig jutottunk el. Mennyi változatosság e fejlődésben! Már az ismeretlen megválasztása sem egyez a különböző vizsgálatokban. Míg az egyptomiak a körrel egyenlő területű négyzetnek oldalát keresik, addig DÜRER ennek diagonalisát, ARCHIMEDES pedig a kör kerületével egyenlő vonaldarabot. AHMES, ARCHIMEDES, DÜRER, METIUS a keresett ismeretleneket lehetőleg kis egész számok viszonyaival közelítik meg, tehát a láncztört-alak közelítő törtjeivel. PTOLEMAEUS a 60-as rendszerben számítja $\pi$-t, most a 10-es rendszerben írjuk, s a 2-es rendszernek is nyomát leltük. ARCHIMEDES a *kerület* számítását vélte egyszerűbbnek, de később a *területekre* vonatkozó igazságok szembeszökőbbeknek bizonyultak, s csak belőlük adódtak ki a kerületre vonatkozó tételek. A műveletek sora, mely $\pi$ kiszámításánál bizonyos pontosság elérésére megkívántatott, szintén megváltozott, még pedig meglepően megrövidült.

S hogyan állott a leglényegesebb kérdés, t. i. az hogy a quadratura lehetséges-e vagy pedig lehetetlen?

A quadratura számtalan kisérlete egytől-egyig hamisnak bizonyult, sőt GREGORY már a probléma lehetetlen voltát vélte bebizonyítani. Érveiről azonban HUYGENS minden kétséget kizáró módon kimutatta, hogy tévesek, s kénytelen volt bevallani, hogy noha a körző- és vonalzóval való megoldást ugyan a maga részéről is lehetetlennek tartja, véleményének helyességét bebizonyítani még sem képes. Épen úgy nyilatkozott később NEWTON. A definitiv felelet megadását az *analizis* hozta meg, de ez is zsenge korában problémánkat csupán annyiban vitte előbbre, hogy a számításokat még inkább egyszerűsítette és csak hosszú fejlődés után nyerhetett teljes betekintést a feladat rejtelmeibe.

---

* De circuli et hyperbolæ quadratura controversia.

## IV. Analitikai kifejezések.

A 17. század második felében a mathematika a fejlődésének útján a legnevezetesebb fordulók egyikéhez ért. A korszakot alkotó új tanok — a végtelen analizise, a differencziál- és integrálszámitás — nemcsak számos eladdig ismeretlen problémára és azoknak megoldására vezettek: hanem az oly régi problémákat is, mint a milyen a körmérés, új szinben tüntették fel s az előzőtől felfogás és módszer dolgában teljesen elütő vizsgálódás tárgyaivá tették. Nincsen szó többé arról, miképen lehet a $\pi$ számértékének ugyanannyi tizedesjegyét ennyivel meg ennyivel kevesebb gyökvonás után felírni, hanem a tudósok e számértéknek oly analitikai kifejezéseit találják, melyekben a gyökvonás egyáltalában elő sem fordul. E kifejezések levezetésénél a geometriai szemléletnek kezdetben még jelentékeny szerep jut, de alig egy évszázad mulva EULER-nél teljesen háttérbe szorul.

Az első ilynemű kifejezések WALLIS (sz. 1616. Ashford-ban. mh. 1703. Oxford-ban) végtelen szorzata *

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

BROUNCKER lord (sz. 1620., mh. 1684.) láncztörtje: **

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots}}}}}}$$

és LEIBNITZ (sz. 1646. Lipcsében, mh. 1716. Hannoverben) sora:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdots$$

---

* WALLIS. Arithmetica infinitorum.

** Ugyanott.

Mindezek a tudomány mai rendszerében mint jóval általánosabb kifejezések legegyszerűbb esetei szerepelnek.

WALLIS képletét úgy kapjuk, hogy az EULER-től talált

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

szorzatban $z$ helyébe a $\frac{\pi}{2}$ értékét helyettesíthetjük; ekkor ugyanis

$$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^2 n^2}\right),$$

azaz

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2^2n^2 - 1}{2^2n^2}$$

s innen

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2^2n^2}{2^2n^2 - 1} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

a mi valóban WALLIS képlete.

LEIBNITZ sora a következő hatványsorból

$$(\text{arc.}\operatorname{tg} x)^{*} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\cdots$$

az $x = 1$ helyettesítéssel adódik ki.

Végre ismeretes,** hogy e végtelen sor

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{v_n} + \ldots$$

egyenlő értékü a következő láncztörttel:

---

* (arc. tg $x$) alatt a zárjelbe foglalt függvény *főértéke* értendő, mely $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt van.

** L. KŐNIG. Analizis I. köt. 290. l.

$$\cfrac{1}{v_1 + \cfrac{v_1^2}{v_2 - v_1 + \cfrac{v_2^2}{v_3 - v_2 + \cdots}}}$$

Ha ezt az átalakítást LEIBNITZ során végezzük, akkor BROUNCKER képletét nyerjük.

Az imént bevezetett kifejezések mindnyájan oly lassan konvergálnak, hogy értéküknek csak némileg pontos megközelítésére már hosszú számítás szükséges. De (arc. tg $x$) hatványsora, mely GREGORY (1670) és LEIBNITZ-től (1673) származik, az $x$ értékének ügyes megválasztása után a numerikus számításra igen alkalmas sorokat is nyújt.

Legyen pl.

$$x = \frac{1}{5},$$

akkor

$$A \equiv \left(\text{arc. tg}\,\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{5^7} + \ldots$$

$A$ kétszeresének és négyszeresének tangense:

$$\text{tg}\, 2A = \frac{2\,\text{tg}\, A}{1 - \text{tg}^2 A} = \frac{5}{12}$$

és

$$\text{tg}\, 4A = \frac{2\,\text{tg}\, 2A}{1 - \text{tg}^2\, 2A} = \frac{120}{119},$$

innen

$$\text{tg}\left(4A - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tg}\, 4A - 1}{1 + \text{tg}\, 4A} = \frac{1}{239};$$

az utolsó egyenlet ertelmében

$$\frac{\pi}{4} = 4A - \left(\text{arc. tg}\,\frac{1}{239}\right) = 4\left(\text{arc. tg}\,\frac{1}{5}\right) - \left(\text{arc. tg}\,\frac{1}{239}\right),$$

s így végre

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{239^3} + \ldots\right)$$

Machin (sz. 1680., mh. 1752. Londonban) 1706-ban e képlettel $\pi$ értékét *száz* tizedesre határozta meg, mit Ludolf a régi módszerekkel egy emberéleten át nem volt képes elérni.

Azóta sokan akadtak, kik messze folytatva e sornak vagy más hasonlóknak kiszámitását, a $\pi$ számnak bámulatosan pontos értékével lepték meg a laikusokat. Shanks legújabban 707 tizedest számított; de az efféle számításokban csakis gyermekes kedvtelést láthatunk, mert a tudomány haladása nem ilyen erőmutatványokban, hanem a *fogalmak kapcsolatának* felismerésében nyilvánul. Ámde a mult századig a körmérésnek és a szögmérési számoknak elmélete még a mathematika legközelebbi fejezeteitől is el volt szigetelve. Igy találta problemánkat Euler (sz. 1707. Baselben, mh. 1783. Pétervárott), ki a mai rendszeres mathematikai ismereteinknek a legtöbb fejezetben alapját vetette. Alapvetése nemcsak nagyfontosságú tételek felállításában áll, hanem a mellett néha igen aprolékos, de hasznos jelölések bevezetésében. Igy — tárgyunknál maradva — a $\pi$ betüt ő tette közhasználatuvá a kör kerülete és átmérője közötti viszony jelölésére, melyet eddig szavakkal írtak körül. Tőle származnak a trigonometriai függvények rövid jelzései, sőt e függvények *mai* fogalma is. Odáig ugyanis a *sinus, cosinus* stb. alatt vonaldarabokat értettek, s nem, mint mi Euler óta teszszük, ezen vonaldarabok viszonyát a sugárhoz. Pedig csak így lettek e mennyiségek *egy független változónak* (a szögnek) *függvényei.* E funkcziókat azután Euler nem hagyta meg továbbra is elszigelten álló osztálynak, hanem felfedezte az exponencziális függvénynyel való kapcsolatukat. Ugyanis «*Introductio in analysim infinitorum*» czimű nevezetes művében* a változók complex értékeit is tekintetbe véve azt találta,** hogy

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

és viszont

$$e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z,$$

* Lausanne 1748. Új német fordításban H. Maser-től Berlin 1885.

** V. ö. Kőnig. Analizis I. köt. 668. lap.

a hol

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

és

$$i = \sqrt{-1}.$$

E képletekből a ludolfi számnak egyik fontos tulajdonsága következik, hogy t. i. $i\pi$ a negativ egység, $2i\pi$ pedig a pozitiv egység természetes logarithmusának egyik értéke. Valóban

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{és} \quad e^{2i\pi} = 1.$$

E helyen nem emlékezhetünk meg arról is, hogy a talált kapcsolat alapján a trigonometria minő fontos felvilágosításokat szolgáltatott az exponencziális függvény s a logarithmus természetéről: ránk nézve ennek fordítottja a fontos, hogy t. i. ezentúl minden egyes haladás, melylyel a kitevős függvénynek elméletében találkozunk, egyszersmind egy-egy lépés a szög- és körmérési számok tulajdonságainak teljesebb megismerése felé.

Egy másik nevezetes eredmény, melylyel Euler a trigonometriai függvények elméletének kifejtéséhez járult, ezeknek tényezőkre bontása. Ugyanis tőle származnak az ismeretes szorzatelőállítások:

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots,$$

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right)\ldots$$

Euler e szorzatokból a ludolfi számra és hatványaira vonatkozó sorok, szorzatok és láncztörteknek bámulatos sokaságát vezette le. Ezeknek jelentősége azonban nem abban keresendő, mintha a $\pi$ számnak kiszámítására nyújtanának kényelmes műveletsorozatokat, hanem épen fordítva abban áll, hogy e műveletsorozatok eredményei $\pi$ segítségével igen egyszerüen fejezhetők ki. Ezért csak egy ily képletsorozat bemutatására szorítkozunk. Megelőzőleg azonban egy magában véve is figyelemre méltó segédtételt kell bebizonyitanunk. Ez a következő:

*Ha valamely*

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots$$

*hatványsor z minden véges értékénél összetartó s a tőle értelmezett f(z) függvény egyszersmind oly*

$$(1 - a_1 z)(1 - a_2 z)(1 - a_3 z) \ldots$$

*végteten szorzat alakjában írható fel, melyben*

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots$$

*pozitiv számok: akkor a*

$$\begin{aligned}
P_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \\
P_2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
P_n &= a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

*végtelen sorok összegei a*

$$\begin{aligned}
&P_1 + A_1 = 0 \\
&P_2 + A_1 P_1 + 2A_2 = 0 \\
&P_3 + A_1 P_2 + A_2 P_1 + 3A_3 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_n + A_1 P_{n-1} + \ldots + A_{n-1} P_1 + nA_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

*egyenletsorozatnak tesznek eleget.**

A bebízonyításnál azt a gyakran használható módszert követjük, hogy oly hatványsort képezünk, melyről ismeretes, hogy összege zérus, azután pedig részletesen kiirjuk, hogy minden egyes tag külön-külön elenyészik.

A tételben szerepelő $f(z)$ függvény szorzat-alakjából következik, hogy

$$-l.f(z) = -l.(1 - a_1 z) - l.(1 - a_2 z) - \ldots$$

* E tétel általánosítása amaz ismeretes algebrai tételnek, mely valamely egyenlet gyökeiből alkotott hatványösszegek és az egyenlet együtthatói közt fennálló kapcsolatra vonatkozik és a Newton-féle indentitásokban jut kifejezésre.

Ha itt $z$ oly értékeire szorítkozunk, melyeknek absolut értéke kisebb az

$$\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_2}, \quad \frac{1}{a_3}, \ldots$$

számok legkisebbikénél, akkor minden egyes tag hatványsorba fejthető. Az általános tag hatványsora:

$$-l.(1-a_n z) = a_n z + \frac{1}{2}(a_n z)^2 + \frac{1}{3}(a_n z)^3 + \ldots$$

Áttérvén e hatványsor tagjainak absolut értékeire, oly sort nyerünk, melynek összege

$$-l.(1-a_n|z|).$$

Minthogy most már a

$$-l.(1-a_1|z|) - l.(1-a_2|z|) - \ldots$$

sor a zérushely fönt megállapított környezetében összetartó, értéke $-l.f(|z|)$-vel lévén egyenlő, azért ismeretes tétel * szerint a

$$-l.f(z)$$

$z = 0$ hely környezetében hatványsorba fejthető, még pedig

$$-l.f(z) = P_1 z + \frac{1}{2}P_2 z^2 + \frac{1}{3}P_3 z^3 + \ldots$$

Ha most hasonlóan járunk el mint a Newton-féle identitások levezetésénél és $-f(z)$-nek logarithmikus differencziálhányadosát képezzük, ez lesz:

$$-\frac{f'(z)}{f(z)} = P_1 + P_2 z + P_3 z^2 + \ldots$$

és innen

$$-f'(z) = (P_1 + P_2 z + P_3 z^2 + \ldots)(1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots).$$

Ha még a jobb oldalon elvégezzük a kijelölt szorzást, akkor $-f'(z)$ számára oly hatványsort nyerünk, melyben $z^{n-1}$ együtthatója

* Lásd König. Analizis I. 648—649. l.

$$P_n + P_{n-1}A_1 + \ldots + P_1 A_{n-1};$$

de más oldalról, ha $f(z)$ hatványsorát tagonként differencziáljuk, azt nyerjük, hogy

$$f'(z) = A_1 + A_2 z + \ldots + nA_n z^{n-1} + \ldots;$$

ezt hozzáadván az előbbi sorhoz lesz

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}(P_n + P_{n-1}A_1 + \ldots + P_1 A_{n-1} + nA_n)\, z^{n-1},$$

az-az a $P$-k valóban kielégitik a bebizonyitandó egyenlőségeket.

Alkalmazzuk ezt az eredményt a

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{3!}x^2 + \frac{\pi^4}{5!}x^4 - \ldots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}x^{2n} + \ldots$$

hatványsorra, mely egyenlő értékü a

$$\prod_{n-1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = (1 - x^2)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\ldots$$

szorzattal.

Itt $x^2$ tekintendő a segédtételben $z$-vel jelölt változónak, továbbá

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad A_n = \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Ebben az esetben azt találjuk, hogy

$$P_1 - \frac{\pi^2}{3!} = 0$$

$$P_2 - \frac{\pi^2}{3!}P_1 + \frac{2\pi^4}{5!} = 0$$

$$P_3 - \frac{\pi^2}{3!}P_2 + \frac{\pi^4}{5!}P_3 - \frac{3\pi^6}{7!} = 0$$

. . . . . . . . . . . . . .

Ez egyenletekből a

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots$$

sorok rekurziv módon határozhatók meg, még pedig $P_n$ mint a ludolfi szám $2n$-edik hatványának s egy *ráczionális* számnak szorzata fejezhető ki. E ráczionális együtthatót így fogjuk jelölni:

$$\frac{B_n 2^{n-1}}{(2n)!}$$

hol $B_n$ megint ráczionális szám.

Ha még a $P$-ket részletesen kiirjuk, a

$$\frac{B_1 2\pi^2}{1.2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

$$\frac{B_2 2^3\pi^4}{1.2.3.4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{B_n 2^{n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

végtelen sorokat nyerjük, s ezek egyszersmind azok, melyek segítségével Euler a ludolfi számnak páros hatványait kifejezte. A $B$-kel jelölt együtthatók az úgynevezett Bernoulli-féle számok.

Az exponencziális és a trigonometriai függvények kapcsolatának kiderítése, továbbá ama könnyűség, melylyel Euler az analitikai kifejezéseket kezelte, a tudományt oly újabb magaslatra emelték, honnan már a ludolfi szám természetébe és arithmetikai szerkezetébe is kereshetett betekintést. Az ide vonatkozó vizsgálatokat, melyek, miután egy évszázadnál tovább folytak, végül a kör quadraturájának lehetetlen voltát is kétségtelenné tették, a következő fejezetekben fogjuk ismertetni.

*Kürschák József.*

# PHYSIKAI SZEMLE.

**Cailletet és Colardeau vizsgálatai a telített vízgőz feszítőerejéről a kritikus pontig és ennek a kritikus pontnak a meghatározásáról.** Cailletet et Colardeau : Recherches sur la tension de la vapeur d'eau saturée jusqu' au point critique et sur le détermination de ce point critique *C. R.* Tome CXII. 1170. l. (Tekintettel a dolgozat fontosságára, egész terjedelmében közöljük).

Az École Normale supérieure physikai intézetében az 1889. év folyamán végzett kisérleteink új módszerre vezettek, melylyel bármely anyag kritikus pontját és telített göze feszültségének törvényét egyszerre meg lehet határozni.

Víznél a legszokottabb módszerek azért nem alkalmazhatók, mert magas hőfoknál a víz az üveget megtámadja, míg a mi módszerünknél nem kellvén látni a folyadékot, ezt a legerősebb ellenállásu fémcsőbe is zárhatjuk. Az egyes kisérleteknél használt vízmennyiség különböző; annyinak kell lennie, hogy a kritikus pontig telített gőzt szolgáltasson, de nem oly soknak, hogy kiterjedvén, a cső üregét egészen betöltse. A telített gőz feszültségi görbéje a kritikus pontig mindig ugyanaz, bármi legyen a felhasznált folyadék mennyisége; de a kritikus hőmérséken felül az alkalmazott folyadék más mennyiségének más feszültségi görbe is felel meg.

Kisérleteinknél a változó vízmennyiségeket manometerrel összekötött aczélcsőbe zártuk; e csövet magas hőfoku fürdőben hevítvén, az egyes hőfokokból mint abscissákból és a nekik megfelelő nyomásokból mint ordinátákból az eredő görbét megszerkeszthetjük. Mindezek a görbék egybeesnek addig a pontig, melynek abscissája a krit. hőmérséklet; míg azon a ponton túl mindenik görbének az alkalmazott vízmennyiséghez képest más az iránya és lefolyása.

A vizet tartalmazó aczélcsőnek* *T*-nek (1. ábra) körülbelül 15 mm. a

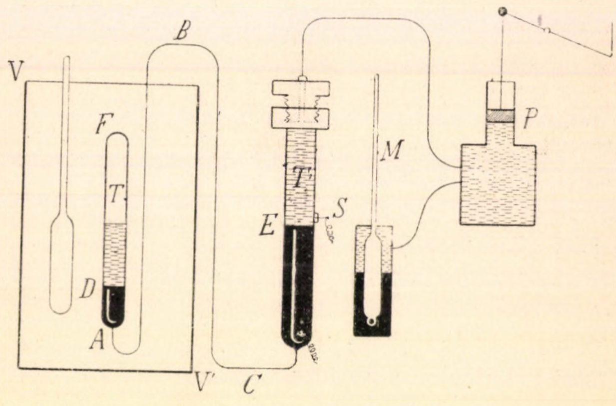
---

* Eleinte azt hittük, hogy az aczélcsövet platinával kell béllelnünk, nehogy a magas hőfoknál a vas a vizet fölbontsa; de soha, még a legmagasb hőfoknál sem sikerült a hidrogén fejlődésének bár nyomát is felfedeznünk; kétségkívül a cső belső falára védő vasoxidhártya rakódik le.

belső átmérője, falának 5 mm.-nyi vastagsága az alkalmazott legnagyobb nyomásokat is jól kibirta.

A cső hossza mintegy 20 cm.; a készüléknek ez a része a *VV'* fürdőben hevíttetik. A cső alsó részét vékony, hajlékony aczélcső *T'* csővel kapcsolja össze, mely szintén aczélból készült és *T*-vel egyenlő keresztmetszetű; végül közlekedik *T'* cső még comprimált hidrogénnel töltött *M* manometerrel és *P* szivattyúval, melylyel *T'*-be vizet szoríthatunk.

A *T* csőbeli gőznyomást ez a víz, meg a *DABCE* tért betöltő higany viszi át a manometerre. *T'* cső falába *S* izolált platinadrót van beolvasztva; ez egy elektromos csengetyűt szólaltat meg, mihelyt a *T'* higanyával érintkezik. Ezzel, mint látni fogjuk, módunkban van a *DF* teret, t. i. a kisér-



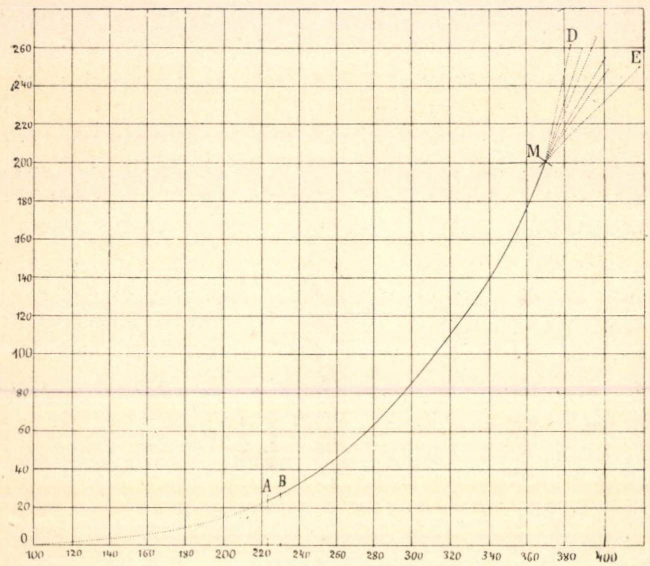

1. ábra.

leti csőnek a folyadék és göze számára rezervált üregét igen pontosan állandó térfogaton tarthatni. A hőmérsék és így a nyomás növekedtével a higany *T*-ből átömlik *T'*-be; mihelyt a csengetyü az *S* platinadrót érintkezését a higanynyal jelzi, a nyomószivattyút lassan megindítjuk, hogy a higanyt előbbi szintjére visszatereljük, a mit a csengő készülék elhallgatásából ismerünk fel.

A vízzel telt cső hevítésére eleinte higanyfürdőt használtunk; de már első kisérleteinknél láttuk, hogy a higany forrópontja a víz kritikus hőmérsékletén alul fekszik. Más alkalmasb fürdőhöz kellett tehát folyamodnnnk, a melyet natrium- és kaliumnitrát egyenlő irányú keverékében találtunk meg, mert ez a keverék — legalább 220°-tól kezdve — bármelyik alkatrészénél jóval hígabb s hőmérséke a 400°-ot is könnyen túlhaladhatja.

Állandó és lehetőleg egyenletes hőmérsék elérése végett a szabályozható gázlángoktól hevített keveréket erősen kavarjuk. A nyomószivattyu segítségével a higanyt $S$-ig fölszorítván, a manometeren a nyomást s az egyes thermometereken a hőmérséket leolvassuk; e czélra egymás után egy levegős és két higanyos thermometert alkalmaztunk, melyek 400°-on fölüli temperaturák mérésére voltak szerkesztve.

A kapott eredmények a 2. ábrán látható görbén vannak föltüntetve. Kisérleteink kezdő hőmérséke körülbelül 224° volt.




2. ábra.

*OB* Regnault 230°-ig menő görbéje. *AM* a telített vízgőz feszültségi görbéje 223°-tól a kritikus pontig. *M* a kritikus pont. *DME* a kritikus ponton túl szétágazó görbék sora.

Regnault a vízgőz maximalis feszítő erejének meghatározásában 230°-nál megállapodván, látható, hogy a mi görbénk Regnault-éhoz illeszkedik és hogy a 224°-tól 230°-ig menő intervallum *AB* mindkét görbének közös íve. A görbe szerkesztésére felhasznált 60 pontot 6 kisérleti sorból nyertük; minden kisérleti sorozatot más vízmennyiséggel, de egy-egy sorozatot ugyanannyi vízmennyiséggel hajtottunk végre.

A mindenik sorozatnál nyert görbék megegyeznek körülbelül a 365°-ú abscissának megfelelő pontig, hol a hat görbe mindegyike láthatólag külön irányt vesz, a miből következtethetjük, hogy a víz kritikus hőmérséket a szétágazás pontjának 365°-nál fekvő abscissája határozza meg; míg a pont ordinatája a kritikus nyomás értékeül 200·5 atmosphærát ad.

Fölmerülhet a kérdés, hogy mi történnék, ha vagy a munkába vett folyadék kiterjeszkedésével a csövet egészen kitöltené, vagy már teljesen elpárolgott volna, még mielőtt elérné a kritikus pontot. Könnyen belátható, hogy az első esetben a cső megtelése pillanatától fogva a nyomás rohamosan emelkednék, mi oly görbét eredményezne, mely a telített gőz feszültségi görbéjétől már a krit. pont előtt elágaznék s jóval meredekebb emelkedésű lenne; az utóbbi esetben pedig a folyadék elégtelensége miatt a görbe folyton a telített gőz feszültségi ordinatáin alul maradna.

Ha a kritikus pont gyanánt azt vesszük, a melyen Andrews ismert görbéi forduló pontot mutatnak, érintője tehát vízszintes, könnyen belátható, hogy az alkalmazott anyag mindegyik mennyiségének, a kritikus nyomás felé, egy-egy pontosan meghatározott kritikus térfogata felel meg. Ebből következik, hogy kisérleteinkben, hol ugyanabban a térfogatban egymás után különböző anyagmennyiségek foglaltatnak, a vizsgált esetek egyikének vagy másikának okvetetlenül be kell következnie.* Ez az oka annak, hogy az ábra szétágazó görbéi közt olyan is akad, mely a telített gőz feszültségi görbéjének folytatásán fölül halad tova, míg a többiek ennek alatta maradnak. Világos az is, hogy ha e kisérletekben a folyadék mennyisége túlságosan tág határok között változnék, a görbék többé nem ugyanabból a pontból ágaznának el: elágazási pontjai eloszlanának bizonyos hosszaságú íven, melynek felső pontja a kritikus pont lenne; az ív a belőle kiágazó görbékkel toll zászlajához hasonló alakot mutatna. A kisérleteket tehát úgy kell intéznünk, hogy az elzárt vízmennyiség csak eléggé szük határok között változzék.

Görbéink megszerkesztése az imént kifejtett eredményeket igazolja; az ábra tisztasága és világossága érdekében csak azokat a görbéket láttuk jónak megtartani, melyeknek elágazó pontjai elég közel vannak egymáshoz, hogy aztán a rajzban szabatosan egyetlen egy pontnak feleljenek meg, a mely pont coordinatái a kritikus elemeket szolgáltatják.

Hogy kipuhatoljuk módszerünk pontosságát, azt egy oly testre törekedtünk alkalmazni, melynek kritikus hőmérséke már ismeretes volt. Cagniard-Latour ide vonatkozó értekezéseinek átlapozásánál tényleg találtunk ætheren tett két kísérletet, a melyeknél a cső térfogata s a használt folyadék súlymennyisége közti viszony különböző volt; e kísérleteknél a hőmérsékeken kívül legalább megközelítőleg a nyomásokat is mérték és pedig sűrí-

* Ha t. i. a felhasznált anyagmennyiség krit. térfogata esetleg a cső térfogatával nem lenne pontosan egyenlő; ekkor ugyanis olyan görbe létesülne, a mely a telített gőz feszültségi görbéjét pontosan folytatná.

tett levegővel ellátott manometer segítségével. Cagniard-Latour adataiból két görbét szerkeszthettünk, melyek körülbelül 190°-ig párhuzamosan haladtak, de azontúl nagyon is láthatólag elágaztak; az elágazás pontjának ordinatája 38 atmosphærányi nyomásnak felelne meg. Tudjuk, hogy az ætherre manap érvényesnek vett értékek a Cagniard-Latour kisérleteiből nyert értékekkel közel megegyezők.

Fontosnak tartjuk, a telített gőz feszültségének kisérleti görbéjét az eddigelé ismert elméleti képletekkel egybevetni. Clausius * és más physikusok mathematikai összefüggést állapítottak meg a telített gőzök feszültségi törvénye s a cseppfolyós és gáz állapotu anyag összenyomhatóságának törvénye között. Clausius elmélete szerint a telített gőz feszítő ereje $P$ annak absolut hőmérsékével, $T$-vel oly vonatkozásban áll, melyet $s$ és $\sigma$ eliminatiójával a következő három egyenletből nyerünk:

$$\frac{P}{R.T} = \frac{1}{s - a} - \frac{1}{\theta (s + \beta)^2},$$

$$\frac{1}{R.T} = \frac{1}{\sigma - a} - \frac{1}{\theta (\sigma + \beta)^2},$$

$$\frac{P}{R.T}(s - \sigma) = \log \frac{s - a}{\sigma - a} - \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{s + \beta} - \frac{1}{\sigma + \beta}\right).$$

$a$, $\beta$, $R$ három, a vizsgált anyag természetétől függő állandó; $\theta$ pedig egy functio, melynek Clausius ezt az alakot adta:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{a}{T^n} - b,$$

hol $a$, $b$, $n$ hasonlókép a vizsgálat alá vett test anyagi minőségétől függő állandók.

A fönnebbi három egyenletből $s$ és $\sigma$ kiküszöbölése lehetetlen ugyan, de a változók kellő megválasztása és alkalmas fogásokkal sikerült Clausius-nak a mindenik $T$-nek megfelelő $P$-t szám szerint meghatározni. Az e czélra szerkesztett táblái a számolást megkönnyítik, sőt az $s$ és $\sigma$ ismerete nélkül is lehetővé teszik, föltéve, hogy a test kritikus hőmérséke és nyomása tudva van. Igy tehát minden még csak az $a$, $b$, $n$ állandók meghatározásán múlik. A leírt kisérletek vízre nézve ezeket az értékeket adták: $a = 4033{\cdot}869$, $b = 0{\cdot}8320$, $n = 1{\cdot}1918$.

$P$-nek a képletekből és kísérletekből nyert értékei teljesen kielégítő megegyezést mutattak. A 2. ábrán fölvett mérték szerint az elméleti és kisérleti

---

* Clausius, *Ann. d. Ph.* XIV. p. 279. 1881.

görbét lehetetlen volna egymás mellett föltüntetni, mert mindkettő a rajzvonás vastagságában olvadna össze.

Bertrand * más elméleti megfontolások útján a telített vízgőz feszültségét ily alakú képlettel fejezte ki:

$$P = G \cdot \frac{T^a}{(T+127)^b}.$$

$a$, $b$, $G$ állandók kisérleti értékei a vízre nézve:

$$a = 57{\cdot}074, \quad b = 59{\cdot}572, \quad \log G = 14{\cdot}00527.$$

Ez a képlet oly eredményeket ad, melyek a Clausius-féle képletek eredményeitől nem igen különböznek. Lássuk ez eredmények táblázatos összehasonlítását 100°-tól, 25°-ról 25°-ra, egészen a kritikus pontig:

| | A telített gőz feszültsége | | |
|---|---|---|---|
| | megfigyelve | kiszámítva | |
| | | Clausus | Bertrand szerint |
| Hőmérsék Celsius °-ban | atm. | atm. | atm. |
| 100° | 1·0 | 1·0 | 1·0 |
| 125 | 2·2 | 2·3 | 2·2 |
| 150 | 4·7 | 4·7 | 4·5 |
| 175 | 8·8 | 8·6 | 8·4 |
| 200 | 15·3 | 15·1 | 14·8 |
| 225 | 25·1 | 25·2 | 24·6 |
| 250 | 39·2 | 39·5 | 38·9 |
| 275 | 59·4 | 59·3 | 59·1 |
| 300 | 86·2 | 86·2 | 86·2 |
| 325 | 121·6 | 121·6 | 122·0 |
| 350 | 167·5 | 167·3 | 167·8 |
| 375 | 200·5 | 200·5 | 200·5 |

A fent leírt kisérletekben a hidrogen-manometer csak közvetítő készülékül szolgált; a nyomások az Eiffel-torony manometere ** szerint mérettek, a mennyiben egyenesen e szerint történt a hidrogen-manometer skálájának megállapítása. Közli: *Schmidt Á.*

*

**A voltaív ellentett elektromindító erejéről.** Fr. Stenger: Ueber die electromotorische Gegenkraft des Lichtbogens, *Ann. d. Ph.* XLV. 33. l.

A voltaívben végbemenő tünemények úgy tudományos mint technikai

* J. Bertrand, Thermodynamique, Chap. IX. Paris 1887.

** L. 126. l.

szempontból régóta tanulmány tárgyát képezik. A voltaív elektrodjai (széncsúcsai) között levő nagy potentiálkülömbség, továbbá ezen feszültség csekély változása az ív hosszával a kutatók nagy részét arra a föltevésre vezette, hogy az áram a voltaívben ellentett elektromindító erőt ébreszt.

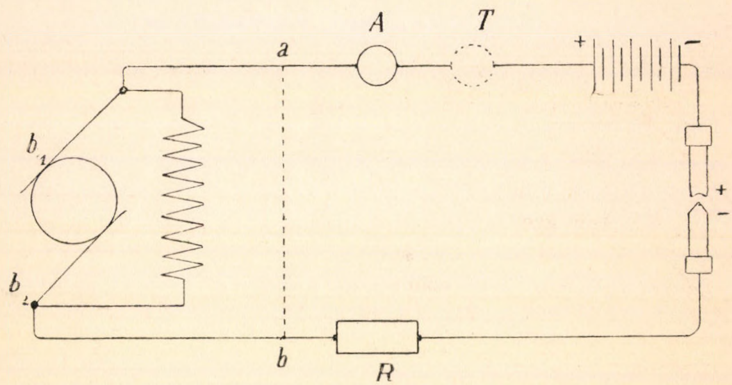
LANG és ARON *indirect* úton bizonyítják ezen ellentett elektromindító erőt; okoskodásuk azonban nem egészen helyes, mert OHM törvényét azzal a feltevéssel alkalmazzák, hogy a voltaív gázútjának ellenállása az áram-intenzitástól független, a mi éppen nem fogadható el.

EDLUND közvetlenül igyekszik kimutatni a voltaív ellentett elektromindító erejét. E czélból a főáramot megszakítja s a megszakítás után mintegy $\frac{1}{80}$ mp. elteltével a + szén-, voltaív-, — szén- és galvanometerből álló mellékzárlatot állít elő. A galvanometer kiütését létesítő áramot a voltaív ellentett elektromindító erejének tulajdonítja. LUGGIN ismételte EDLUND kisérletét s jóllehet nála a főáramkör megszakítása és a mellékzárlat létesítése között letelt időköz rövidebb volt mint EDLUND kisérletében, galvanométerének mágnese nem tért ki, kisérlete negatív eredményű volt.

STENGER alábbközölt kisérletének alapján következteti, hogy EDLUND kisérletében valami hibát követhetett el. LUGGIN negativ eredményű kisérlete is kifogás alá eshetik, mert föltéve, hogy a voltaív poláros állapota a kioltás után igen gyorsan eltünik, előbb mint a mellékzárlat létesül, akkor LUGGIN negativ eredménye mit sem bizonyít.

LECHER kisérlete már számottevő kisérlet és STENGER módszerének alapja. LECHER a dinamo áramkörébe egy szabályozót és egy galvanometert helyezett, melynek mágnese egyik oldalán megtámasztatván, csak egy irányban mozoghatott. Ezen irány a dinamo áramának eltérítése irányával ellenkező volt. Midőn a voltaív csendes és rendes működésben volt, a dinamot hirtelen röviden zárta s így ugyanezen pillanatban a dinamon kívül mellékzárlatot hozott létre; ha van a voltaívben ellentett elektromindító erő, ebben a mellékzárlatban a főárammal ellenkező irányú áramnak kell létrejönnie s a mágnesnek a szabad mozgás irányában kitérnie. Az eredmény azonban negativ volt, a mágnes nyugodt maradt; LECHER ebből azt következteti, hogy ellentett elektromindító erő a voltaívben nincs. E módszer mindenesetre lényeges haladás az előbbiekhez képest; de hibája, hogy *nem elég érzékeny*. Csekély ellenállású galvanometert kiván, holott az ív ellenállása aránylag nagy.

STENGER kisérlete a következő: SCHUCKERT-féle mellékzárású dinamo ($D$) áramkörébe (1. ábra) szabályozót, KOHLRAUSCH-féle rugós galvanometert ($A$), tangenstájolót ($T$), (melynek mágnese ismét csak egy irányban térhetett ki), 5 drb akkumulatort ($B$) s egy ellenállást ($R$) csatolt. A dinamo keféitől jövő két sodronyba ($a$ és $b$-nél) úgy kapcsolt be egy kulcsot, hogy a dinamo ($ab$ úton át) röviden zárható legyen, míg az előbb említett készülékek egy zárt áramkörben maradtak. A világító áram, mely átment az említett készülékek mindegyikén, világítás közben az akkumulatorokat töltötte. A kulcs lenyomása pillanatában a dinamo működése megszünik, az ív kialszik. E pillanatban a tájoló mágnese erős (néha 90°-nál nagyobb) kiütést ad. E kiütés — nyilván az akkumulatorok árama — azt mutatja, hogy az *ív gázútja* — habár nagyon rövid ideig — *oly jól vezet,* hogy az érzéketlen tájoló 55°—127° kiütést is adott. Ha azonban STENGER az akkumulatorokat az áramkörből eltávolította, 0·5°—1°-nál nagyobb kitérést nem nyert s ez is csak a mágnes megtámasztásának rugalmas hatásából ered. Minél rövidebb az ív és minél erősebb a főáram, annál nagyobb a zárás után bekövetkező kitérés. Továbbá nagyobb a kitérés, ha a szenek a normális hőmérséket elérték, mint akkor, midőn a meggyújtás után csak a nyugodt égésig várt.



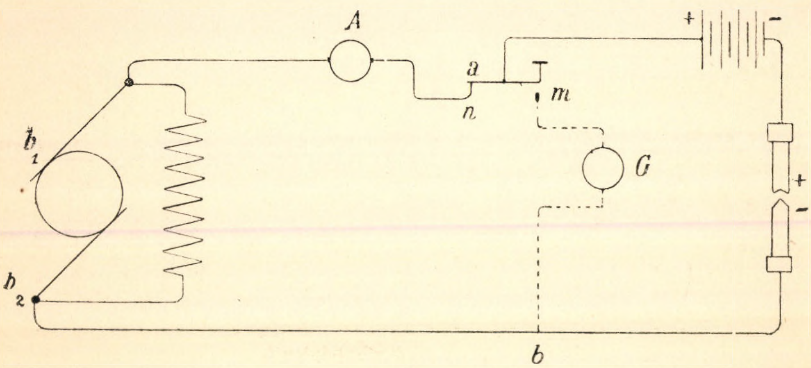

1. ábra.

Tehát: Míg azon pillanatban, melyben az ív kialszik, kevés akkumalator erőteljes áramot küld a gázúton át, addig akkumulatorok nélkül absolute semmi sem észlelhető.

STENGER *azt hiszi,* hogy ezen kisérletével véglegesen bebizonyította, hogy a voltaívben ellentett elektromindító erő nincs.

*

A fentebbiekben csaknem szóról-szóra közöltem STENGER értekezését s az utolsó mondatba szándékosan szúrtam be e szókat «azt hiszi» ; mert én STENGER kisérletében megnyugodni nem tudok. Hiszen kisérlete éppen azon hibában szenved mint LECHER-é, hogy t. i. nem elég érzékeny, mert ha egy vezető körben olyan tájoló van, a melyen keresztül bátran átbocsáthatok 15—17 amper intenzitású áramot (Stenger főárama pedig ilyen volt), akkor e tájoló mágnesének mozdulatlanságából vagy csekély mérvű kimozdulásából nem következtethetek arra, hogy abban a vezető körben absolute semmi áram nincs és elektromindító erő nem működik. Egy másik hibája Stenger módszerének az, hogy midőn *ab* között (1. ábra) a dinamót röviden zárja, a voltaív gázútján át egy mellékzárlat marad még, a melyben mindaddig áram kering, míg a dinamo sarkfeszültsége 0 nem lett, vagy a voltaív gázútja meg nem szünt vezető lenni. A dinamo sarkfeszültsége csak fokozatosan csökkenhet s így — bár rövid, de mégsem elhanyagolható időre van szüksége, hogy eltünjék. Ha most felteszszük, hogy a szenek poláros állapota s a gázút vezető képessége is csak ilyen rövid ideig tart, akkor e rövid időtartam alatt a magasabb feszültségű dinamo-áram




2. ábra.

ellenében a poláros áram nem tüntethető ki, kiütés nem észlelhető. A közbeiktatott akkumulatorok a poláros áram feszültségét emelik, így származik ekkor a tájoló kiütése.

Stenger kisérlete tulajdonképen tiszta bizonyítéka annak, hogy a voltaív gázútja a fény kialvása után kis időre *elég jól vezet* arra, hogy az akkumulatorok árama 55°—127° kiütést adjon s így Lecher kisérletét Stenger-ével szemben épp azért kell *csekélyebb* jelentőségűnek tekintenünk, mert *nem mutatja meg azt, hogy a voltaív gázútja a kialvás után is vezet.*

Mivel Stenger kísérletében megnyugodni nem tudtam, bizonyos módosításokkal megismételtem. Berendezésemet a 2. ábra mutatja. *D* egy mellékzárású dinamo, *A* Kohlrausch-féle rugós ampermeter, *G* egy nagyobb ellenállású harangmágneses galvanometer 15 cm. hosszú mutatóval. A harangmagnes *mindegyik irányban szabadon mozoghat.* Stenger egyszerű kulcsa helyett *ab* között egy rendes távíró kulcsot kapcsoltam be. A voltaív hosszúsága 1—5 mm. volt.

A kulcs játéka alig 1 mm. s így hirtelen lenyomásnál — mondhatjuk — abban a pillanatban, a melyben a főáram megszakad s a dinamo kizáratik, a galvanometer *a* + — *bGm* zárlatba jut.

Ilyen berendezés mellett azt találtam, hogy *ha akkumulator nem volt bekapcsolva, a galvanometer mágnese teljesen nyugodt maradt* a dinamo kizárása után. A mint fokozatosan (1—4-ig) több akkumulatort kapcsoltam be *a* és + közé, a kiütés is *fokozatosan* nagyobbodott 18°—52°-ig.

E berendezés elég érzékeny arra, hogy a galvanometer magnesének mozdulatlanságából következtetést vonhassunk arra, hogy a *voltaív ellentett elektromindító ereje nem létezik.* *Edelmann.*

*

**A hang törése likacsos testekben.** Hesehus: Sur la réfraction du son dans les corps poreux, perméables pour le son. *Journ. d. Phys.* XXI. 233—258.

Szerző a likacsos szerkezetű testeket, a minő pl. a gyapot, a pehely, finom forgács, fareszelék stb., melyeket rendesen hangszigetelőknek, hangnemvezetőknek szokás mondani, hangot *átbocsátóknak,* a hangra nézve permeábiliseknek nevezi és pedig azért, mert a hézagaikat kitöltő levegő a hangot tényleg tovább terjeszti. Minthogy a hang a szük hézagokba zárt levegőben lassabban terjed, mint a szabad levegőben, valószínűnek tartotta, hogy a likacsos szerkezetű testekkel a hangtörés jelenségét sikerül előidéznie. Fémhálóból mintegy 25 cm. sugarú félgömböt készített, megtöltötte finom ebonit-forgácscsal és sík fémhálóval lezárta. Az ekként keletkezett hangtörő lencse egy erősen szóló magashangú sípnak hanghullámait tényleg összegyűjtötte; a hangerősödés helyét érzékeny láng segélyével biztosan lehetett felkeresni. Alkalmazván a lencse ismeretes képletét, az összetartozó pontoknak a lencsétől való távolságából a hangtörés együtthatója, ebből pedig a hangterjedés sebessége volt kiszámítható. A sebességet a következő tapasztalati képlet adja:

$$v = 343\,(1-\delta)^{0{,}222\delta^{-5}}$$

hol 343 a hangterjedés sebessége 18° C hőmérsékletű levegőben, $\delta$ az ebonitforgács tömegének viszonya az egész lencsével egytérfogatú ebonitdarabhoz. E szerint $(1-\delta)$ a lencsében foglalt levegőnek a viszonya a lencse térfogatához. H. kísérleteiben a hullámhossz 24—60 mm. között változott, $\delta$ értéke pedig 0,0356 és 0,1441 között; a kiszámított sebességek 261 és 146 $\frac{\text{m}}{\text{mp}}$ voltak. *B.*

*

**A sugárzó testek taszító erejéről.** P. LEBEDEN: Ueber die abstossende Kraft strahlender Körper. *Ann. d. Ph.* XLV. 292—297. l.

MAXWELL bebizonyította, hogy a sugárzó testek a sugarakat elnyelő testeket a sugár irányában $P$ erővel taszítják; a taszító erő $P=\frac{E}{v}$. $E$ az időegység alatt kisugárzott energia mennyisége, $v$ a fény terjedésének sebessége azon közegben, melyben a sugarat elnyelő test van. Ugyanoly számításokat a fény visszaverődésre alkalmazván, BARTOLI és BOLTZMANN kimutatták, hogy a fénysugarak merőleges beesés esetén kétszer akkora nyomást fejtenek ki a *tükörre*, mint ugyanakkora teljesen fénynyelő felületre.

A következőkben a nap, s általában a gömbalakú, meleg testek által a sugárzás következtében előidézett taszító erőt fogjuk meghatározni s nagyságát a NEWTON-féle gravitáczióhoz viszonyítani, minden adatot kerek számokban fejezvén ki.

LANGLEY szerint a nap 1 másodpercz alatt a földtávolságban 1 $cm^2$-nyi felületre 0·05 grammkaloriát sugároz ki; e szerint az 1 $cm^2$-nyi keresztmetszetű fénynyaláb taszító ereje eme fénynyalábot elnyelő testre a földtávolságban:

$$P=\frac{E}{v}=\frac{0{\cdot}05\times4{\cdot}2.10^7}{3.10^{10}}=6.10^{-5} \text{ din.}$$

Ha a föld sebessége $\sigma=3.10^6$ cm $sec^{-1}$, a nap távolsága $\rho=15.10^{12}$ cm. úgy a földtávolságban a nap vonzóereje 1 gr.-nyi tömegre:

$$A=\frac{1\times\sigma^2}{\rho}=0{\cdot}6 \text{ din.}$$

Legyen a földtávolságban egy gömbalakú test, mely a nap sugarait elnyeli, s legyen e gömb sugara $r$ cm, a vízhez viszonyított sűrűsége $\delta$, akkor a gravitáczió következtében a vonzó ereje $G=\frac{4}{3}\pi r^3\delta A$; a sugárzás következtében pedig a nap taszító ereje $H=\pi r^2 P$; az eredő erő, melylyel a nap az illető testet vonzza a gravitáczióhoz viszonyítva:

$$F=\frac{G-H}{G}=1-\frac{H}{G}=1-\frac{3}{4}\frac{P}{Ar\delta};$$

mivel $A$ és $P$ a naptávolságtól egyenlő módon függnek, azért $F$ a naptávolságtól független.

$F$ számértéke a megfelelő helyettesítések után:

$$T=1-\frac{10^{-4}}{r\delta}.$$

Minél kisebb $r$, annál nagyobb a nap taszító ereje a gravitáczióhoz viszonyítva. Ebből tehát látható, hogy a Newton törvényétől való eltérés mindazon testekre nézve, melyeknél $r > 1000$ cm és $\delta > 1$, a legpontosabb mérések megfigyelési hibáin alul van. Megjegyzendő azonban, hogy eme képletek csak oly testekre érvényesek, melyek tökéletesen feketék és dimenzióik a reájuk eső fényhullámhosszhoz viszonyítva nagyok; de annyit mégis mutatnak, hogy az üstökösök csóváira a nap taszító ereje sokkal nagyobb, mint vonzóereje, mert Exner szerint az üstökösök testecskéinél $r < 10^{-8}$ cm, és $\delta < 1$.

Minden test, melynek hőmérséklete az abszolut nullafoknál magasabb, a sugárzás irányában a sugárzás miatt a környező testeket taszítja, de a gravitáczió következtében vonzza is. Legyen a nap helyén egy $R$ cm-nyi sugarú gömb, melynek sűrűsége $\Delta$, és 1 $cm^2$-nyi felülete 1 másodpercz alatt sugározzon $Q$ grammkaloriát ki; legyen továbbá a nap sugara $R_0 = 7 . 10^{10}$ cm; sűrűsége $\Delta_0 = 1 . 4$, 1 $cm^2$-nyi felülete pedig 1 másodpercz alatt $Q_0 = 0{\cdot}05 \left(\frac{\rho}{R_0}\right)^2 = 2000$ grammkaloriát sugározzon ki, akkor, — ha $s$ a sugárzásnak megfelelő taszító erő a gravitáczióhoz viszonyítva, — $s$ egyenes arányban áll $Q$-val, de fordított arányban $\Delta$-val és $R$-el, mert a tömeg vonzó ereje $R^3$-al, taszító ereje pedig $R^2$-al áll egyenes viszonyban; a napra nézve, mint látttuk $s_0 = \frac{10^{-4}}{r\delta}$; bármely más testre $s = s_0 \frac{Q . \Delta_0 R_0}{Q_0 \Delta R}$; megfelelő helyettesítések után $s = 5 . \frac{Q}{r\delta R\Delta} . 10^2$; a

a vonzó és taszító erő eredője $K = 1 - s = 1 - 5 \frac{Q}{r\delta R\Delta} . 10^3$

Ha Christiansen szerint egy fekete gömbalakú test 1 $cm^2$-nyi felülete $OC^{\circ}$ mellett 1 másodpercz alatt $Q' = (1{\cdot}21 . 10^{-12}) . (273)^4 = 0{\cdot}004$ grammkaloriát sugároz ki, akkor az a $K'$ erő, melylyel eme fekete, $R$ cm sugarú, $\Delta$ sűrűségű, és 0° hőmérsékletű test egy gömbalakú testet a világűrben vonz, a melynek sugara $r$ cm, sűrűsége $\delta$: $K' = 1 - \frac{20}{r\delta R\Delta}$; ha $R = r = 2mm$, $\delta = \Delta = 10$, akkor a világűrben ama nulla hőmérsékletű két test egymást sem nem vonzza, sem nem taszítja; minél kisebbek lesznek a sugarak, annál nagyobbá válik a taszító erő; a porszemek, melyeknek sugarai $\frac{1}{1000}$ millimeter, a világűrben $O°$-nál millioszor nagyobb erővel taszítják egymást a sugárzás miatt a sugarak irányában, mint vonzzák a gravitáczió következtében; ha még kisebb sugarakat veszünk fel, eljutunk a molekulák dimenziójához s így a molekuláris erők fogalmánál a kölcsönös sugárzás által előidézett taszító erőt figyelmen kívül nem hagyhatjuk.

*Dr. Károly Irén.*

# Folyadékok kritikus hőmérsékleteinek és nyomásainak táblázata.*

| Anyag | Chemiai képlete | Kritikus hőmérséklet Celsius szerinti hőfokokban $\vartheta$ | Kritikus nyomás atmosphaerákban $\pi$ | Megfigyelő |
|---|---|---|---|---|
| **A) Elemek.** | | | | |
| Oxygén | $O_2$ | —118·0 | 50·0 | *Wroblewski* |
| « | « | —118·8 | 50·8 | *Olszewszki* |
| Nitrogén | $N_2$ | —146·0 | 33·0 | *Wroblewski* |
| « | « | —146·5 | — | *Wroblewski* |
| « | « | —146·0 | 35·0 | *Olszewski* |
| Chlor | $Cl_2$ | 141·0 | 83·9 | *Dewar* |
| « | « | 148·0 | — | *Ladenburg* |
| Brom | $Br_2$ | 302·2 | — | *Nadejdine* |
| **B) Organikus vegyületek.** | | | | |
| a) *Szénhydrogének.* | | | | |
| Methan | $CH_4$ | —81·8 | 54·9 | *Olszewski* |
| « | « | —95·5 | 50·0 | *Dewar* |
| Äthan | $C_2H_6$ | 35·0 | 45·2 | *Dewar* |
| Isopentan | $C_5H_{12}$ | 194·8 | — | *Pawlewski* |
| Hexan | $C_6H_{14}$ | 250·3 | — | *Pawlewski* |
| Diisobutyl | $C_8H_{18}$ | 270·8 | — | *Pawlewski* |
| Äthylen | $C_2H_4$ | 9·2 | 58·0 | *van der Waals* |
| « | « | 10·1 | 51·0 | *Dewar* |
| « | « | 13·0 | — | *Cailletet* |
| Propylen | $C_3H_6$ | 90·2 | — | *Nadejdine* |
| « | « | 97·0 | — | *Nadejdine* |
| Isobutylen | $C_4H_8$ | 150·7 | — | *Nadejdine* |
| Amylen | $C_5H_{10}$ | 201·0 | — | *Pawlewski* |
| Isoamylen | $C_5H_{10}$ | 191·6 | 33·9 | *Nadejdine* |
| Caprylen | $C_8H_{16}$ | 298·6 | — | *Pawlewski* |
| Acetylen | $C_2H_2$ | 37·05 | 68·0 | *Ansdell* |
| Diallyl | $C_6H_{10}$ | 234·4 | — | *Pawlewski* |
| Benzol | $C_6H_6$ | 280·6 | 49·5 | *Sajotschewski* |
| « | « | 291·5 | 60·5 | *Ramsay* |
| « | « | 288·5 | 47·9 | *Young* |
| Toluol | $C_7H_8$ | 320·8 | — | *Pawlewski* |

* A folyadékok kritikus hőmérséklete és nyomásának pontos ismerete a halmazállapotokra vonatkozó vizsgálatok szempontjából rendkivül fontosságú levén, *E. Heilborn* a különböző folyóiratokban eddig megjelent adatokat egybegyűjtötte. Minthogy e tárgyról a M. P. Lapok előreláthatólag többször fognak közleményeket adni, H. táblázatát a Zeitschr. f. phys. Chemie VII. kötetéből átveszszük.

| Anyag | Chemiai képlete | $\vartheta$ | $\pi$ | Megfigyelő |
|---|---|---|---|---|

b) *Alkoholok.*

| Anyag | Chemiai képlete | $\vartheta$ | $\pi$ | Megfigyelő |
|---|---|---|---|---|
| Methylalkohol | $CH_4O$ | 232·76(+0·26) | 72·85 (+0·12) | *Hannay* |
| « | « | 239·9—240 | 78·5 | *Ramsay és Young* |
| « | « | 233·0 | 69·73 | *Nadejdine* |
| « | « | 263·0 | — | *de Heen* |
| Äthylalkohol | $C_2H_6O$ | 234·3 | 62·1 | *Sajotschewski* |
| « | « | 243·6 (+0·5) | 62·76 | *Ramsay és Young* |
| « | « | 234·6 | 65·0 | *Hannay és Hogarth* |
| « | « | 235·47 | 67·07 | *Hannay* |
| « | « | 258·8 | 119·0 | *Cagniard de la Tour* |
| « | « | 240·6 | — | *Strauss* |
| « | « | 250·0 | — | *Strauss* |
| « | « | 233·7 | — | *Jouk* |
| « | « | 251·5 | — | *de Heen* |
| Propylalkohol | $C_3H_8O$ | 263·7 | 50·16 | *Ramsay és Young* |
| « | « | 261·0 | — | *de Heen* |
| « | « | 254·1—258·0 | 53·26 | *Nadejdine* |
| « | « | 254·2 | — | *Nadejdine* |
| Isopropylalkohol | $C_3H_8O$ | 234·6 | 53·1 | *Nadejdine* |
| « | « | 238·0 | — | *de Heen* |
| Butylalkohol | $C_4H_{10}O$ | 287·1 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 270·5 | — | *de Heen* |
| Isobutylalkohol | $C_4H_{10}O$ | 265·0 | 48·27 | *Nadejdine* |
| Trimethylkarbinol | $C_4H_{10}O$ | 234·9 | — | *Pawlewski* |
| Isoamylalkohol | $C_5H_{12}O$ | 306·6 | — | *Pawlewski* |
| Allylalkohol | $C_3H_6O$ | 271·9 | — | *Nadejdine* |
| Formal | $C_3H_8O_2$ | 223·6 | — | *Pawlewski* |
| Acetal | $C_6H_{14}O_2$ | 254·4 | — | *Pawlewski* |

c) *Oxydok és aetherek.*

| Anyag | Chemiai képlete | $\vartheta$ | $\pi$ | Megfigyelő |
|---|---|---|---|---|
| Szénoxyd | $CO$ | —141·1 | 35·9 | *Wroblewski* |
| « | « | —139·5 | 35·5 | *Olszewski* |
| Széndioxyd | $CO_2$ | 31·1 | 73·0 | *Andrews* |
| « | « | 30·92 | 77·0 | *Andrews* |
| Viz | $H_2O$ | 358·1 | — | *Nadejdine* |
| « | « | ca. 412 | — | *Cagniard de la Tour* |
| Methyläther | $C_2H_6O$ | 129·6 | — | *Nadejdine* |
| Methyläthyläther | $C_3H_8O$ | 167·7 | — | *Nadejdine* |
| « | « | 168·4 | 46·27 | *Nadejdine* |
| Äthyläther | $C_4H_{10}O$ | 200·0 | 37·0—38·0 | *Cagniard de la Tour* |
| « | « | 188·0 | 37·5 | *Cagniard de la Tour* |
| « | « | 200·0 | — | *Wolf* |
| « | « | 195·5 | 40·0 | *Ramsay* |
| « | « | 190·0 | 36·9 | *Sajotschewski* |
| « | « | 191·8 | — | *Galitzine* |
| « | « | 197·0 | 35·768 | *Battelli* |
| « | « | 194·4 | 35·61 | *Ramsay és Young* |
| « | « | 192·6 | — | *Avenarius* |

| Anyag | Chemiai képlete | $\vartheta$ | $\pi$ | Megfigyelő |
|---|---|---|---|---|
| Äthyläther | $C_4H_{10}O$ | 195·5 | — | *Srtauss* |
| « | « | 190·5 | — | *Drion* |
| « | « | 196·0 | — | *Ladenburg* |
| Äthylpropyläther | $C_5H_{12}O$ | 233·4 | — | *Pawlewski* |
| Allyläthyläther | $C_5H_{10}O$ | 245·0 | — | *Pawlewski* |
| | | | | |
| | | d) *Aldehydok, ketonok és zsirsavak.* | | |
| Äthylaldehyd | $C_2H_4O$ | 181·5 | — | *van der Waals* |
| Aceton | $C_3H_6O$ | 232·8 | 52·2 | *Sajotschewski* |
| « | « | 237·5 | 60·0 | *Sajotschewski* |
| « | « | 234·4 | — | *Galitzine* |
| Eczetsav | $C_2H_4O_2$ | 321·5 | — | *Pawlewski* |
| Propionsav | $C_3H_6O_2$ | 339·9 | — | *Pawlewski* |
| | | | | |
| | | e) *Összetett aetherek.* | | |
| Methylformiat | $C_2H_4O_2$ | 212·0 | 61·65 | *Nadejdine* |
| « | « | 250·5 | — | *de Heen* |
| Äthylformiat | $C_3H_6O_2$ | 230·0 | 48·7 | *Sajotschewski* |
| « | « | 233·1 | 49·16 | *Nadejdine* |
| « | « | 238·6 | — | *Pawlewski* |
| Propylformiat | $C_4H_8O_2$ | 260·8 | 42·7 | *Nadejdine* |
| « | « | 267·4 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 260·5 | — | *de Heen* |
| Isobutylformiat | $C_5H_{10}O_2$ | 278·2 | 38·29 | *Nadejdine* |
| Amylformiat | $C_6H_{12}O_2$ | 302·6 | 34·12 | *Nadejdine* |
| Isoamylformiat | $C_6H_{12}O_2$ | 304·6 | — | *Pawlewski* |
| Methylacetat | $C_3H_6O_2$ | 229·8 | 57·6 | *Sajotschewski* |
| « | « | 232·9 | 47·54 | *Nadejdine* |
| « | « | 239·8 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 278·7 | — | *de Heen* |
| Äthylacetat | $C_4H_8O_2$ | 239·8 | 42·2 | *Sajotschewski* |
| « | « | 249·5 | 39·65 | *Nadejdine* |
| « | « | 256·5 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 275·7 | — | *de Heen* |
| Propylacetat | $C_5H_{10}O_2$ | 276·3 | 34·8 | *Nadejdine* |
| « | « | 282·4 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 264·5 | — | *de Heen* |
| Butylacetat | $C_6H_{12}O_2$ | 305·9 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 287·0 | — | *de Heen* |
| Isobutylacetat | « | 288·3 | 31·4 | *Nadejdine* |
| « | « | 295·8 | — | *Pawlewski* |
| Methylpropionat | $C_4H_8O_2$ | 255·7 | 39·88 | *Nadejdine* |
| « | « | 262·7 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 261·0 | — | *de Heen* |
| Äthylpropionat | $C_5H_{10}O_2$ | 272·4 | 34·64 | *Nadejdine* |
| « | « | 280·6 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 279·5 | — | *de Heen* |
| Propylpropionat | $C_6H_{12}O_2$ | 304·8 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 290·5 | — | *de Heen* |

| Anyag | Chemiai képlete | $\vartheta$ | $\pi$ | Megfigyelő |
|---|---|---|---|---|
| Isobutylpropionat | $C_7H_{14}O_2$ | 318·7 | — | *Pawlewski* |
| Methylbutyrat | $C_5H_{10}O_2$ | 278·0 | 36·02 | *Nadejdine* |
| « | « | 171·5 | — | *de Heen* |
| Äthylbutyrat | $C_6H_{12}O_2$ | 292·8 | 30·24 | *Nadejdine* |
| « | « | 304·3 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 185·5 | — | *de Heen* |
| Propylbutyrat | $C_7H_{14}O_2$ | 326·6 | — | *Pawlewski* |
| Methylisobutyrat | $C_5H_{10}O_2$ | 273·6 | — | *Pawlewski* |
| Äthylisobutyrat | $C_6H_{12}O_2$ | 280·4 | 30·13 | *Nadejdine* |
| « | « | 290·4 | — | *Pawlewski* |
| Propylisobutyrat | $C_7H_{14}O_2$ | 316·0 | — | *Pawlewski* |
| Methylvalerat | $C_6H_{12}O_2$ | 293·7 | 31·5 | *Nadejdine* |
| « | « | 283·5 | — | *de Heen* |
| Äthylvalerat | $C_7H_{14}O_2$ | 297·0 | — | *de Heen* |
| Äthylcrotonat | $C_6H_{10}O_2$ | 326·0 | — | *Pawlewski* |

f) *Chlor-, brom- és fluorvegyületek.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Methylchlorid | $CH_3Cl$ | 141·5 | 73·0 | *Vincent és Chappuis* |
| Äthylchlorid | $C_2H_5Cl$ | 182·5 | 54·0 | *Vincent és Chappuis* |
| « | « | 182·6 | 52·6 | *Sajotschewski* |
| « | « | 184·0 | — | *Drion* |
| « | « | 189·9 | — | *Djatschewski* |
| Propylchlorid | $C_3H_7Cl$ | 221·0 | 49·0 | *Vincent és Chappuis* |
| Allylchlorid | $C_3H_5Cl$ | 240·7 | — | *Pawlewski* |
| Methylenchlorid | $CH_2Cl_2$ | 245·1 | — | *Nadejdine* |
| Äthylenchlorid | $C_2H_4Cl_2$ | 288·4 | 53·0 | *Nadejdine* |
| « | « | 283·0 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 289·3 | — | *Nadejdine* |
| Äthylidenchlorid | $C_2H_4Cl_2$ | 250·0 | 50·0 | *Nadejdine* |
| « | « | 254·5 | — | *Pawlewski* |
| Chloroform | $CHCl_3$ | 260·0 | 54·9 | *Sajotschewski* |
| Szénchlorid | $CCl_4$ | 277·9 | 58·1 | *Hannay és Hogarth* |
| « | « | 282·51(+0·38) | 57·57(+0·14) | *Hannay* |
| « | « | 283·15 | 44·97 | *Young* |
| « | « | 285·3 | — | *Pawlewski* |
| « | « | 292·5 | — | *Avenarius* |
| Chlorbenzol | $C_6H_5Cl$ | 360·55—360·8 | 44·64—44·74 | *Young* |
| Äthylbromid | $C_2H_5Br$ | 226·0 | — | *Pawlewski* |
| Methylfluorid | $CH_3F$ | 44·9 | 62·0 | *Collie* |
| Fluorbenzol | $C_6H_5F$ | 286·55 | 44·62 | *Young* |

g) *Nitrogénvegyületek.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ammoniak | $NH_3$ | 130·0 | 115·0 | *Dewar* |
| « | « | 131·0 | 113·0 | *Vincent és Chappuis* |
| Nitrogénoxydul | $N_2O$ | 35·4 | 75·0 | *Dewar* |
| | $N_2O$ | 36·4 | 73·07 | *Janssen* |
| | $NO$ | —93·5 | 71·2 | *Olszewski* |
| | $N_2O_4$ | 171·2 | — | *Nadejdine* |

| Anyag | Chemiai képlete | $\vartheta$ | $\pi$ | Megfigyelő |
|---|---|---|---|---|
| Methylamin ... | $C H_5 N$ | 155·0 | 72·0 | *Vincent és Chappuis* |
| Dimethylamin. | $C_2 H_7 N$ | 163·0 | 56·0 | *Vincent és Chappuis* |
| Trimethylamin .. | $C_3 H_9 N$ | 160·5 | 41·0 | *Vincent és Chappuis* |
| Äthylamin ... | $C_2 H_7 N$ | 177·0 | 66·0 | *Vincent és Chappuis* |
| Diäthylamin ... | $C_4 H_{11} N$ | 216·0 | 40·0 | *Vincent és Chappuis* |
| « ... | « | 220·0 | 38·7 | *Sajotschewski* |
| « ... | « | 222·8 | — | *Kannegiesser* |
| Triäthylamin . | $C_6 H_{15} N$ | 259·0 | 30·0 | *Vincent és Chappuis* |
| « ... | « | 267·1 | — | *Pawlewski* |
| Propylamin ... | $C_3 H_9 N$ | 218·0 | 50·0 | *Vincent és Chappuis* |
| Dipropylamin ... | $C_6 H_{15} N$ | 277·0 | 31·0 | *Vincent és Chappuis* |
| Cyan ... ... | $C_2 N_2$ | 124·0 | 61·7 | *Dewar* |

h) *Kénvegyületek.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Carbonylsulfid ... | $C O S$ | 105·0 | — | *Ilosvay* |
| Tiophen . ... | $C_4 H_4 S$ | 317·3 | 47·7 | *Pawlewski* |
| Szénsulfid... ... | $C S_2$ | 275·0 | 77·8 | *Cagniard de la Tour* |
| « ... | « | 272·96 | 77·9 | *Hannay és Hogarth* |
| « ... ... | « | 277·68(±0·16) | 78·14(±0·07) | *Hannay* |
| « ... | « | 271·8 | 74·7 | *Sajotschewsky* |
| « ... ... | « | 279·6 | — | *Galitzine* |

## *C)* Anorganikus vegyületek.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sósav ... ... | $H Cl$ | 51·25 | 86·0 | *Ansdell* |
| « ... ... | « | 51·50 | 96·0 | *Vincent és Chappuis* |
| « ... ... | « | 52·3 | 86·0 | *Dewar* |
| Kénhydrogén ... | $H_2 S$ | 100·0 | 88·7 | *Olszewski* |
| « ... | « | 100·2 | 92·0 | *Dewar* |
| Selenhydrogén ... | $H_2 Se$ | 137·0 | 91·0 | *Olszewski* |
| Siliciumhydrogén | $H_4 Si$ | —0·5 | ca. 100 | *Ogier* |
| Kéndioxyd . ... | $S O_2$ | 155·4 | 78·9 | *Sajotschewski* |
| « ... ... | « | 157—161 | — | *Ladenburg* |
| « ... ... | « | 157·0 | — | *Drion* |
| « ... ... | « | 157·0 | — | *Clark* |
| « ... ... | « | 155·0 | — | *Schuck* |
| « ... ... | « | 156·0 | — | *Cailletet és Mathias* |
| Phosphorchlorür. | $P Cl_3$ | 285·5 | — | *Pawlewski* |
| Siliciumchlorid | $Si Cl_4$ | 230·0 | — | *Mendelejew* |
| Ónchlorid ... ... | $Sn Cl_4$ | 318·7 | 36·95 | *Young* |
| Germaniumchlorid | $Ge Cl_4$ | 276·9 | 38·0 | *Nilson és Petterson* |

# IRODALOM.

**Sophus Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen.** Bearbeitet und herausgegeben von Dr. GEORG SCHEFFERS. Leipzig. B. G. Teubner. 1891. 8°, XVI+568 l. Ára 16 márka.

Az újabb mathematikában mindinkább előtérbe lép egy fogalom: a *csoport* fogalma. Szerepel pedig e fogalom mindenütt, a hol összetehető műveletekről van szó, milyenek pl. elemek permutálásai, mozgások stb.

Legyen

$$S_1, S_2, \ldots S_i, \ldots S_k, \ldots S_n$$

$n$ oly müvelet, melyek közül bármelyik kettő összetehető; de az $S_i$ és $S_k$ összetételéből keletkezett $S_i S_k$ müvelet ne legyen új, még fel nem sorolt operáczió, hanem $i$ és $k$ bármely megválasztásánál olyan, mely már az

$$S_1, S_2, \ldots S_i, \ldots S_k \ldots S_n$$

sorozatban benfoglaltatik; ekkor a felsorolt müveletek *csoportot* alkotnak.

Igy pl. csoportot képez a következő négy müvelet: valamely test körülforgása 0, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$ szöggel ugyanazon tengely körül. Ugyanis pl. a $\pi$ és $\frac{3\pi}{2}$ szöggel való körülforgás eredője $\frac{5\pi}{2}$ szöggel való körülforgás, de ez ugyanarra az eredményre vezet, mint a $\frac{\pi}{2}$ szöggel való elforgás.

A csoport végtelen sok müveletből is állhat. Ilyen csoportot alkot az $x$ alapra vonatkozó összes egész kitevős hatványozások. Valóban

$$(x^m)^n = x^{mn},$$

tehát a kétszer való hatványozás egyetlen egygyel pótolható.

A differencziálegyenletek elméletében különösen ama csoportok nyertek alkalmazást, melyek *véges folytonos transzformáczió csoportoknak* neveztetnek. Ezeknek elmélete LIE-től származik. Számos értekezésben közzétett vizsgálatait újabban ENGEL társaságában terjedelmes műben foglalja össze, melyből eddig két kötet jelent meg s a befejező kötet most készül.

A most ismertetendő munka, mely a kiváló tudós egyik tanítványának tollából eredt, a mondott csoportoknak az integrálszámításban * való alkalmazását tárgyalja. Hogy tartalmáról magunknak képet szerezzünk, ismerkedjünk meg először az új elmélet alapfogalmaival, azután lássuk, hogy miként értékesíthetők ezek a differencziálegyenletek integrálásánál.

Ha — egyszerűség kedvéért két változóra szorítkozva — az $x'$, $y'$ változók az

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

egyenletekkel, mint $x$ és $y$ függvényei vannak értelmezve, akkor ez az egyenletrendszer az $x$, $y$ és az $x'$, $y'$ változók között *transzformácziót* fejez ki, feltéve, hogy az egyenletrendszer $x$ és $y$ szerint megoldható. Ha pl. a sík minden $(x, y)$ pontjának megkeressük az $x$ tengelyre vonatkozó tükörképét, oly transzformácziót végeztünk, mely az

$$x' = x, \ y' = -y$$

egyenletekben nyer kifejezést.

Az

$$\begin{aligned} x' &= a + x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= b + x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

egyenletek szintén transzformácziót állapítanak meg vagy helyesebben mondva végtelenül sok transzformácziót, ha t. i. az $a$, $b$ és $\alpha$ parameterek értékét megváltoztatjuk.

Végezzünk egymásután két ily transzformácziót.

$$\begin{aligned} x' &= a_1 + x\cos\alpha_1 - y\sin\alpha_1 \\ y' &= b_1 + x\sin\alpha_1 + y\cos\alpha_1 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} x'' &= a_2 + x'\cos\alpha_2 - y'\sin\alpha_2 \\ y'' &= b_2 + x'\sin\alpha_2 + y'\cos\alpha_2\,; \end{aligned}$$

ezek eredője:

$$\begin{aligned} x'' &= a_1 + a_2 + x\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - y\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ y'' &= b_1 + b_2 + x\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + y\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

E transzformáczió megint (2) alakú. A parameterek értéke benne:

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2 \\ b &= b_1 + b_2 \\ \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 . \end{aligned}$$

---

* Az integrálszámitás kifejezése itt amaz általánosabb értelmében van használva, melyben ez differencziál-egyenletek megoldására is vonatkozik.

A (2) alakú transzformácziók tehát csoportot alkotnak, úgynevezett *háromtagú véges és folytonos csoportot.* E csoport *folytonos,* mert nem képez diszkrét sokaságot mint pl. az $x$ összes egész hatványainak képezése; *véges* pedig azért, mert nem tartalmaz határozatlan függvényeket mint pl. az összes

$$x' = f(x)$$
$$y' = g(y)$$

alakú transzformácziók csoportja, hanem csak határozatlan parametereket. Hogy *hány tagú* a csoport, azt a parameterek száma szabja meg.

Ha

$$a = 0 \qquad b = 0 \qquad a = 0,$$

akkor

$$x' = x, \qquad y' = y,$$

ekkor tehát mindegyik változó megtartja értékét. Ez az *identikus transzformáczió.*

Szorítkozzunk most már oly *egy tagú* csoportokra, melyek az *identikus transzformácziót is magukban foglalják.** 

Jellemezzen az

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y\,;\, a) \\ y' &= g(x, y\,;\, a) \end{aligned} \tag{3}$$

egyenletrendszer ily csoportot, s legyen $a_0$ a parameter amaz értéke, melynek az identikus transzformáczió felel meg. Ha $a$ helyébe

$$a = a_0 + \partial t$$

képlet szerint a $\partial t$ parametert vezetjük be és ennek hatványai szerint sorba fejtünk:

$$\begin{aligned} x' &= x + \xi(x, y)\,\partial t + \dots \\ y' &= y + \eta(x, y)\,\partial t + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

hol $\xi$ és $\eta$ az $x$ és $y$ bizonyos függvényei.

Ha $\partial t$ igen kis értékeire szorítkozunk, akkor a

$$\begin{aligned} \partial x &= \xi . \partial t \\ \partial \eta &= \eta . \partial t \end{aligned} \tag{5}$$

---

* Megjegyezzük, hogy vannak oly csoportok is, melyek az identikus transzformácziót nem tartalmazzák; ezek azonban a parameterek alkalmas transzformácziójával mindenkor a föntemlített csoportokra vezethetők vissza. Ilyen az identitást nem tartalmazó csoportot ENGEL F. mutatott be először.

egyenletek $\delta t$-nek első hatványáig terjedő pontossággal megadják $x$ és $y$ változását a szóban forgó transzformácziónál. Azért az (5) egyenletrendszerről azt mondjuk, hogy *infinitezimál transzformácziót* fejez ki.

Ez az infinitezimal transzformáczió egyszersmind magát a szóban forgó csoportot is teljesen jellemzi. Ugyanis a (4) alatti sorokban $\delta t$ $n$-edik hatványának együtthatója oly módon nyerhető $x$ illetőleg $y$-ból, hogy $n$ ízben ismételjük rajta a következő képlettel értelmezett $X$ differencziálási müveletet:

$$X(f) = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Az infinitezimális transzformáczió fogalma a legszorosabb kapcsolatba lép az *integráló tényező* ismeretes elméletével.

Legyen adva a

$$dy = \mu(x, y)\, dx$$

elsőrendű totál differencziálegyenlet. Ha ezt oly módon transzformáljuk, hogy $x$ és $y$ helyébe

$$x' = f(x, y)$$
$$y' = g(x, y)$$

változókat vezetjük be, akkor esetleg megtörténhetik, hogy a transzformált egyenlet megint

$$dy' = \mu(x', y')\, dx',$$

$\mu$ alatt megint a fentebb így jelölt függvényt értve. Ekkor azt mondjuk, hogy transzformácziónk a differencziál-egyenletet változatlanul hagyja, vagy hogy az egyenlet megtűri e transzformácziót.

Most már lehetséges, hogy nem csak egy ily transzformácziót ismerünk, hanem egész egytagú csoportról tudjuk, hogy a differencziál-egyenlet megtűri annak összes transzformáczióit.

Ha e csoport infinitezimál transzformácziója

$$\begin{aligned} \delta x &= \xi(x, y) . \delta t \\ \delta \eta &= \eta(x, y) . \delta t \end{aligned} \qquad (6)$$

akkor

$$M = \frac{1}{\eta - \mu\xi} \qquad (7)$$

a differencziálegyenletnek integráló tényezője.

Fordítva, ha $M$ egy ismeretes integráló tényező és $\xi$ meg $\eta$ a (7) egyenletnek megfelelőleg vannak választva, akkor a (6) segítségével definiált csoportnak minden transzformácziója változatlanul hagyja differencziálegyenletünket.

Hasonló kapcsolat áll fönn a magasabb esetekben is a differencziál-egyenletek integrálása és a tőlük megtürt transzformácziók csoportja között. Nevezetesen a mechanika ismeretes elvei, melyek a differencziálegyenletek egy-egy integrálját adják (pl. a tömegközéppont mozgásának elve, a területek elve) mind azon alapulnak, hogy ismerünk oly transzformácziókat, melyeket az egyenletek megtürnek.

De további részletekbe nem bocsátkozhatunk és arra kell szorítkoznunk, hogy SCHEFFERS könyvének fejezeteit felsoroljuk:

I. Az infinitezimál transzformácziónak és az egytagú csoportnak fogalma a síkban.

II. Az infinitezimál transzformáczió fogalmának alkalmazása két változós első rendű differencziálegyenletekre.

III. Egytagú csoportok három változóval.

IV. Egytagú csoportok és infinitezimál transzformácziók $n$ változóval. E fogalmak alkalmazása differencziál-egyenletekre.

V. Oly közönséges másodrendű differencziálegyenletek integrálása, melyek valamely háromtagú csoportot megtűrnek, és rokon problémák.

A könyv bevezetésül akar szolgálni azoknak, kik maguknak betekintést kivánnak szerezni LIE vizsgálataiba. Modora olyan, hogy a haladottabb kezdő is megértheti. A ki első semestereit csak némileg jól használta fel az egyetemen, nem fog az olvasásnál nehézségekbe ütközni. Különösen a könyvben tartalmazott számos gyakorló példa igen megkönnyíti az új elmélettel való megbarátkozást. A ki LIE tanaival meg akar ismerkedni tanulmányát leghelyesebben evvel a könyvvel kezdi meg.

*Kürschák József.*

# MEGOLDOTT FELADATOK.

4. Bizonyítassék be, hogy az

$$\frac{5^0}{p}, \frac{5^1}{p}, \frac{5^2}{p}, \frac{5^3}{p}, \ldots$$

osztásokból származó maradékok sora (hol $p$ törzsszámot jelent) csak is akkor állhat számra nézve $(p-1)$ különböző tagból, ha $p = 10\,n \pm 3$ alakú. (Szily.)

---

*Első megoldás Szabó Péter okl. tanárjelölt úrtól (Kolozsvár).*

A feladat értelmében 5 primitív gyök a $p$ modulusra vonatkozólag. Mivel pedig $p$ törzsszám:

$$5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Azonban ez a kongruenczia így írható:

$$5^{p-1}-1 \equiv (5^{\frac{p-1}{2}}-1)(5^{\frac{p-1}{2}}+1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

De mivel 5 a $p-1$ kitevőhöz tartozik:

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p};$$

tehát 5 *quadratikus nem-maradék* $p$-re vonatkozólag.

A Legendre-féle reciprocitási tétel szerint:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right),$$

honnan $q=5$ esetében:

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)$$

következik. De a mint ismeretes (l. SERRET. Algébre Sup. T. II. 111. l.)

$$\left(\frac{p}{5}\right) = \pm 1$$

a szerint a mint $p = 5k \pm 1$ vagy $p = 5k \pm 2$ alakú. Minthogy 5 $p$-hez képest nem maradék, tehát $p$ alakja $5k \pm 2$; de $p$ egyszersmind törzsszám is, minek folytán $k$-nak csak páratlan értékeit vehetjük számba. Tehát a

$$k = 2n \pm 1$$

alakot vezetvén be, lesz:

$$p = (10n \pm 5) + 2.$$

Azonban az összes jelkombinácziók összefoglalhatók a

$$1)\qquad p = 10n \pm 3$$

alakban, mert

$$10n \pm 7 = 10(n \pm 1) \mp 3$$

hol az alsó és felső jeleket egyidejűleg kell vennünk. *Tehát az* (1) *alakú törzsszámok között vannak mindazok, melyekre nézve 5 primitiv gyök;* de hogy a tétel nem megfordítható, azt már egyszerű példák is mutatják. Ugyanis, ha $p = 13$

$$5^4 \equiv 1 \text{ (mod. 13)},$$

tehát az 5 nem minden a (4) alakban foglalt törzsszámmodulusra nézve primitiv gyök.

---

*Második megoldás Dr. Demeczky Mihály főgymnasiumi tanár úrtól Budapesten.*

A szóban forgó tétel a következőképen általánosítható. Legyen $a$ a $p$ törzsszámmal relativ törzsszám, akkor Fermat tétel szerint

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}}+1\right).\left(a^{\frac{p-1}{2}}-1\right) \equiv a^{p-1}-1 \equiv 0 \text{ (mod. } p),$$

és így, ha $a$ $p$-nek primitiv gyöke $a^{\frac{p-1}{2}}-1$ (mod. $p$) a zérustól különböző lévén, kell hogy

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (mod. } p),$$

vagyis $a$ a $p$-nek quadratikus nem-maradéka legyen. Tehát:

*Valamely a szám csakis oly törzsszámoknak lehet primitiv gyöke* *melyekre nézve quadratikus nem-maradék.* (Hogy e tétel a megfordítást nem tűri meg, azt mutatja a SZABÓ úr megoldásában közölt példa. *Szerk.*)

Alkalmazzuk e tételt $a=5$ esetében, ekkor ugyanis a recziproczitási tétel értelmében

$$\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right);$$

ha tehát $p=10n\pm3$

$$\left(\frac{p}{5}\right)=\left(\frac{10n\pm3}{5}\right)=\left(\frac{\pm3}{5}\right)=-1,$$

ha pedig $p=10n\pm1$

$$\left(\frac{p}{5}\right)=\left(\frac{10n\pm1}{5}\right)=\left(\frac{\pm1}{5}\right)=+1,$$

*úgy hogy 5 csak is a $10n\pm3$ alakú törzsszámoknak lehet primitiv gyöke.*

Ha $p=2^n+1$ alakú, akkor primitiv gyökeinek száma

$$\varphi(p-1)=\varphi(2^n)=2^{n-1}=\frac{p-1}{2},$$

megegyezvén a quadratikus nem-maradékainak számával, ez utóbbiaknak mindegyike primitiv gyök lesz. Igy pl. $p=17$ esetében a quadratikus nem-maradékok sorozata,

$$3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14,$$

egyszersmind a primitív gyökök sorozatát szolgáltatja.

---

E feladat megoldását beküldötték még Dr. BEKE MANŐ és GRUBER NÁNDOR tanár urak is, kiknek bebizonyítása a közöltekkel nagyjában megegyez.

*Szerk.*

---

5. Adva van az $A_1A_2A_3$ háromszög és a háromszög síkjában a $P$ pont. Az $A_1P$ metszéspontja az $A_2A_3$ oldallal legyen $B_1$, az $A_2P$-é az $A_3A_1$ oldallal $B_2$, az $A_3P$-é az $A_1A_2$ oldallal $B_3$.

Megvizsgálandó azon $P$ pontok geometriai helye, a melyekre nézve a $B_1B_2B_3$ háromszög területe állandó. (TŐTÖSSY.)

---

*Első megoldás. Arany Dániel főreáliskolai tanár úrtól, Győrött.*

Az $A_k$ pont koordinátáit $x_k$, $y_k$-val jelölöm, a hol ($k=1, 2, 3$). A $P$ pont-ét $x, y$-ral, a $B_k$ pont-ét $\xi_k$, $\eta_k$-val, végre a $\frac{B_kA_k}{B_kP}$ hányadosokat $\lambda_k$-val, akkor

$$\xi_k=\frac{x_k-\lambda_k x}{1-\lambda_k}$$

$$\eta_k=\frac{y_k-\lambda_k y}{1-\lambda_k},$$

a hol a $\lambda_1$-et, $\lambda_2$-t illetőleg $\lambda_3$-at úgy kell meghatároznunk, hogy a $B_1$, $A_2$, $A_3$; $A_1$, $B_2$, $A_3$ illetőleg $A_1$, $A_2$, $B_3$ pontok egy-egy egyenesen feküdjenek.

Az első feltétel:

$$\begin{vmatrix} x_1-\lambda_1 x & y_1-\lambda_1 y & 1-\lambda_1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=t-\lambda_1 t_1=0$$

ebből:

$$\lambda_1=\frac{t}{t_1}$$

a hol

$$t=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad t_1=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

A másik két feltétel szolgáltatja a

$$\lambda_2=\frac{t}{t_2}, \qquad \lambda_3=\frac{t}{t_3}$$

értéket, a hol

$$t_2=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad t_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}.$$

A $\lambda_k$ emez értékeit helyettesítvén, a $B_k$ pontok koordinátái lesznek:

$$\xi_k=\frac{t_k x_k-tx}{t_k-t}$$

$$\eta_k=\frac{t_k y_k-ty}{t_k-t};$$

de a feladat követelménye szerint a $B_k$ pont meghatározta háromszög területe állandó tehát:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = C$$

A $\xi_k$, $\eta_k$ értékeit helyettesítvén lesz:

$$\begin{vmatrix} t_1x_1 - tx & t_1y_1 - ty & t_1 - t \\ t_2x_2 - tx & t_2y_2 - ty & t_2 - t \\ t_3x_3 - tx & t_3y_3 - ty & t_3 - t \end{vmatrix} = C(t_1 - t)(t_2 - t)(t_3 - t).$$

A baloldalon álló determináns még a következő alakban is írható:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_1x_1 - tx & t_1y_1 - ty & t_1 - t \\ 1 & t_2x_2 - tx & t_2y_2 - ty & t_2 - t \\ 1 & t_3x_3 - tx & t_3y_3 - ty & t_3 - t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & tx & ty & t \\ 1 & t_1x_1 & t_1y_1 & t_1 \\ 1 & t_2x_2 & t_2y_2 & t_2 \\ 1 & t_3x_3 & t_3y_3 & t_3 \end{vmatrix} =$$

$$= tt_1t_2t_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & x & y & 1 \\ \frac{1}{t_1} & x_1 & y_1 & 1 \\ \frac{1}{t_2} & x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{1}{t_3} & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = tt_1t_2t_3\left(\frac{1}{t} \cdot t - \frac{1}{t_1} \cdot t_1 - \frac{1}{t_2} \cdot t_2 - \frac{1}{t_3} \cdot t_3\right)$$

$$= -2tt_1t_2t_3.$$

A keresett geometriai hely egyenlete tehát lesz:

$$-2tt_1t_2t_3 = C(t_1 - t)(t_2 - t)(t_3 - t)$$

$$= C[t_1t_2t_3 - (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)t + (t_1 + t_2 + t_3 - t)t^2].$$

De

$$t_1 + t_2 + t_3 - t = 0$$

mert

$$0 \equiv \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & x_3 & y_3 & 1 \\ 1 & x & y & 1 \end{vmatrix} = t_1 + t_2 + t_3 - t.$$

Ha még a $\dfrac{C + 2t}{Ct}$ állandót $m$-mel jelöljük, akkor a keresett geometriai hely egyenlete:

$$mt_1t_2t_3 - (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) = 0$$

Ez harmadrendű görbének egyenlete, mert a $t_k$ az $x$ és $y$-nak lineár függvénye.

---

*Második megoldás. Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.*

Az $A_1A_2A_3$ háromszög szögpontjainak derékszögű koordinátáit 0, 0; $x_1$, $y_1$; illetőleg $a$, 0 sal jelölvén, a keresett geometriai hely egyenlete:

$$\frac{y(y_1x - x_1y)[y_1x - (x_1 - a)y - ay_1]}{(y_1 - y)[y_1x - (x_1 - a)y][y_1x - xy - ay_1]} = n$$

alakra hozható, a hol $n$ a $B_1B_2B_3$ háromszög területe, mérve az $A_1A_2A_3$ háromszög kétszeres területével mint egységgel.

Kifejtvén és rendezvén, az egyenlet ily alakot ölt:

$$x_1(x_1-a)(n+1)y^3-y_1(2x_1-a)(n+1)y^2x+y_1^2(n+1)yx^2+y_1^2[2n(x_1-a)-a]xy$$
$$-ny_1^3x^2-y_1[n(x_1-a)^2-ax_1]y^2+nay_1^3x-nay_1^2(x_1-a)y=0.$$

Könnyen verifikálható, hogy az $A_1A_2A_3$ pontok pontjai a görbének és e pontokban a görbe érintője parallel a háromszög szemben fekvő oldalával; továbbá, hogy a görbének három aszimptotája parallel e háromszög három oldalával.

---

*Kiegészítő megjegyzések Tőtössy Béla műegyetemi tanár urtól.*

A feladatot analitikailag tárgyaljuk.

1. A legczélszerűbb koordinátarendszer az lesz, melynél a feladatban megadott egyenlő jogu adatok a koordinátarendszer egyenlő jogú adatainak választásánál egyformán szerepelnek. Ezt szem előtt tartván, az $A_1A_2A_3$ háromszöget választjuk koordinátaháromszögnek. Mint egységegyenest, vagyis azt az egyenest, melynek egyenlete

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

választjuk a végtelenben fekvő egyenest; ekkor tudjuk, hogy az egységpont, melynek koordináta-viszonyai

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1 : 1$$

nem más mint a koordináta-háromszög súlypontja $E$ és hogy valamely tetszőleges $P$ pontnak koordináta-viszonyai meg lesznek adva az

$$x_1 : x_2 : x_3 = PA_2A_3 : PA_3A_1 : PA_1A_2$$

háromszögek terület-mérőszámainak viszonyaival, a hol természetesen a területek előjelei is tekintetbe veendők. Ezért ezeket a koordinátákat *terület-koordinátáknak* is szokás nevezni.

Első teendőnk e koordinátarendszerben a háromszög területét szögpontjainak koordinátáiban kifejezni. Ez koordináta-transzformáczióval eszközölhető.

Az $A_1A_3$ oldal legyen valamely derékszögű koordinátarendszernek $x$-tengelye, az $y$-tengely menjen keresztül az $A_2$ ponton és a koordinátakezdőpontot jelöljük $O$-val. Az $OA_1$, $OA_2$, $OA_3$ vonaldarabok mérőszámai legyenek rendre $m_1$, $m_2$, $m_3$, akkor az $A_2A_3 \equiv (x_1)$, $A_3A_1 \equiv (x_2)$ illetőleg $A_1A_2 \equiv (x_3)$ koordinátatengelyek egyenletei, vonatkoztatva a derékszögű koordinátarendszerre

$$m_2x + m_3y - m_2m_3 = 0$$
$$y = 0$$

illetőleg

$$m_2x + m_1y - m_1m_2 = 0.$$

A tetszőleges $P$ pont derékszögű koordinátái legyenek $x$, $y$; az $A_1A_2A_3$ koordinátaháromszögre vonatkoztatott területkoordinátái pedig legyenek $x_1$, $x_2$, $x_3$; akkor a kétféle koordináta közti összefüggést megadják a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= k_1(m_2x + m_3y - m_2m_3) \\ \rho x_2 &= k_2(0 \,.\, x + 1 \,.\, y - 0m_2) \\ \rho x_3 &= k_3(m_2x + m_1y - m_1m_2), \end{aligned}$$

a hol a $k_1, k_2$, $k_3$ állandók felett úgy kell rendelkeznünk, hogy

$$\rho(x_1+x_2+x_3) \equiv m_2(k_1+k_3)x + (m_3k_1+k_2+m_1k_3)y - m_2(m_3k_1+m_1k_3) = 0$$

az egységegyenesnek, tehát a mi esetünkben a végtelenben fekvő egyenesnek a derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott egyenlete legyen. Ezt a feltételt kielégítik a

$$k_1 = 1,\ k_2 = m_1 - m_3,\ k_3 = -1$$

értékek, mert

$$m_1 \gtrless m_3$$

feltétel mellett ezeket az értékeket helyettesítvén,

$$\rho(x_1 + x_2 + x_3) \equiv 0 \,.\, x + 0 \,.\, y + m_2(m_1 - m_3) = 0$$

lesz a végtelenben fekvő egyenesnek a derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott egyenlete.

Az a lineár helyettesítés tehát, mely az átmenetet a területkoordinátáktól a derékszögű koordinátákra közvetíti, következő:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= m_2 x + m_3 y - m_2 m_3 \\ \rho x_2 &= (m_1 - m_3) y \\ \rho x_3 &= -m_2 x - m_1 y + m_1 m_2 . \end{aligned}$$

Ha ezt az egyenletrendszert az $x$ és $y$ szerint megoldjuk, akkor az

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1 x_1 + m_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \\ y &= \frac{m_2 x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \end{aligned} \qquad (1)$$

egyenletekben nyerjük *azt a lineár helyettesítést, melynek segítségével derékszögű koordinátáktól áttérhetünk területkoordinátákra.*

A $P'$, $P''$, $P'''$ pontok derékszögű koordinátái legyenek rendre $x'$, $y'$; $x''$, $y''$; $x'''$, $y'''$; területkoordinátái pedig $x'_i$; $x''_i$; $x'''_i$; $(i = 1, 2, 3)$. Feladatunk a $P'P''P'''$ háromszög területét $T$-t az $x'_i$; $x''_i$; $x'''_i$ koordinátákban kifejezni.

Derékszögű koordinátákban a háromszög kétszeres területe

$$2T = \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} .$$

Az (1) alatti értékeket behelyettesítvén és az egyenlet mindkét oldalát a közös nevezőkkel szorozván, lesz:

$$2T(x'_1 + x'_2 + x'_3)(x''_1 + x''_2 + x''_3)(x'''_1 + x'''_2 + x'''_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} m_1 x'_1 + m_3 x'_3 & m_2 x'_2 & x'_1 + x'_2 + x'_3 \\ m_1 x''_1 + m_3 x''_3 & m_2 x''_2 & x''_1 + x''_2 + x''_3 \\ m_1 x'''_1 + m_3 x'''_3 & m_2 x'''_2 & x'''_1 + x'''_2 + x'''_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} m_1 & 0 & m_3 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix} = m_2(m_1 - m_3) \cdot \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix}$$

De $m_2(m_1 - m_3)$ nem más mint az $A_1A_2A_3$ háromszög kétszeres területe; ezt $\Delta$-val jelölvén, lesz:

$$\frac{2T}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix}}{(x'_1 + x'_2 + x'_3)(x''_1 + x''_2 + x''_3)(x'''_1 + x'''_2 + x'''_3)} \qquad (2)$$

2. E képlet segítségével a keresett geometriai hely egyenlete tüstént felírható. A $P$ pont koordinátáit $x_1$, $x_2$, $x_3$-mal jelölvén, a $B_1$, $B_2$, $B_3$pontok koordinátái lesznek:

$$\begin{aligned} x_1' : x_2' : x_3' &= 0 : x_2 : x_3 \\ x_1'' : x_2'' : x_3'' &= x_1 : 0 : x_3 \\ x_1''' : x_2''' : x_3''' &= x_1 : x_2 : 0 . \end{aligned}$$

Ezeket az értékeket helyettesítsük a (2) alatti képletbe, akkor lesz:

$$\frac{2T}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{vmatrix}}{(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)} = \frac{2x_1x_2x_3}{(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)} = \frac{2}{m}.$$

A keresett geometriai hely egyenlete tehát:

$$F_m \equiv (x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2) - mx_1x_2x_3 = 0, \tag{3}$$

a hol az $m$ állandó a $B_1B_2B_3$ háromszög terület-mérőszámának recziprok értéke, ha az $A_1A_2A_3$ háromszög kétszeres területének mérőszámát tekintjük mértékegységnek.

Ez az egyenlet az $x_i$ koordinátákban harmadrendű, a *keresett geometriai hely* tehát *harmadrendű görbe.*

3. Tekintsük mindjárt az összes görbéket, melyek úgy keletkeznek, hogy az $m$, és evvel $B_1B_2B_3$ háromszög területe felvesz minden értéket $-\infty$-től $+\infty$-ig. A (3) alatti egyenlet

$$F_m \equiv u - mv = 0,$$

melyben $m$ mint lineár paraméter fordul elő, azt mutatja, hogy *az egyenlet harmadrendű görbe-sort ábrázol,* vagyis oly egyszerűen végtelen sok harmadrendű görbét, *mely ugyanazt a kilencz pontot birja közösen.*

Az

$$m = 0 \quad \text{és} \quad m = \infty$$

paraméterértékeknek megfelelnek az

$$F_0 \equiv u \equiv (x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2) = 0 \quad \text{és} \quad F_\infty \equiv v \equiv x_1x_2x_3 = 0$$

degeneráló harmadrendű görbék. Mind a kettő három-három egyenesből áll. Az első esetben egy-egy egyenes keresztül megy a koordinátaháromszög egyik szögpontján és parallel a szemben fekvő oldallal; a második esetben a három egyenes összeesik a koordinátaháromszög három oldalával. E két degenerált harmadrendű görbe teljes metszéspontrendszere megadja a *görbe-sor kilencz alappontját.* Ebből a kilencz pontból kettő esik mindegyik koordináta-szögpontba, úgy hogy a két összeeső pont összekötő vonalának mindig a szemben fekvő koordinátatengelylyel vont parallel egyenes tekintendő. Ez összesen *hat* alappont, a még hiányzó *három* a koordináta háromszög három oldalának végtelenben fekvő pontja. Ezeket a következőkben $\mathbf{E}_i$-vel jelöljük, úgy hogy $\mathbf{E}_i$ az $(A_k\ A_l)$ egyenesnek végtelenben fekvő pontja. Ez alkalommal és a következőkben mindig $i, k, l = 1, 2, 3$ és $i, k, l$ egymástól különbözők. — Legyen továbbá $a_i$ az $A_i$ koordináta-szögponttal szemben fekvő koordinátatengely; $a_i'$ az $A_i$ ponton keresztül menő egyenes, a mely parallel $a_i$-val; $A_i'$ a $a_1'a_2'a_3'$ háromoldalban a $a_i'$-val szemben fekvő szögpont; $E$ az egységpont, mely a koordinátaháromszög súlypontja; $e_i$ az $A_i$ és E pontok összekötő vonala, tehát a koordináta-háromszög súlyvonala; $E_i$ az $e_i$ és $a_i$ metszéspontja.

4. Határozzuk meg a sor *egy tetszőleges $F_m$ görbéjének aszimptotáit.* Az $\mathbf{E}_1$ pont első polárisa kúpszelet, egyenlete

$$(x_2 - x_3)(-mx_1 + x_2 + x_3) = 0$$

egyenespárt jelent, a mi azt mutatja, hogy $\mathbf{E}_1$ inflexióspontja a görbének;

$$w_1 \equiv -mx_1 + x_2 + x_3 = 0$$

pedig a hozzátartozó inflexiós érintőnek-, — a mi esetünkben — *inflexiós aszimptotának* egyenlete;

$$p_1 \equiv x_2 - x_3 = 0$$

pedig az $\mathbf{E}_1$ inflexiós ponthoz tartozó úgynevezett *harmonikus poláris* egyenlete. Ugyanígy nyerjük az $\mathbf{E}_2$ és $\mathbf{E}_3$-ra nézve az első polárisoknak egyenleteit, melyek resp.

$$(x_3 - x_1)(x_1 - mx_2 + x_3) = 0, \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - mx_3) = 0.$$

Tehát az $\mathbf{E}_2$ és $\mathbf{E}_3$ is az $F_m$-nek inflexiós pontja, a hozzátartozó inflexiós aszimptoták és harmonikus polárisok egyenletei:

$$w_2 \equiv x_1 - mx_2 + x_3 = 0 \quad \text{és} \quad p_2 \equiv x_3 - x_1 = 0$$

illetőleg

$$w_3 \equiv x_1 + x_2 - mx_3 = 0 \quad \text{és} \quad p_3 \equiv x_1 - x_2 = 0.$$

A harmonikus polárisok, minthogy egyenletei függetlenek az $m$-től, a sor bármely görbéjére nézve ugyanazok, t. i. az $e_i$ egyenesek. — Az inflexiós pontok és a hozzájuk tartozó harmonikus polárisok ismeretes tulajdonságaiból következik, hogy *az $e_i$ egyenes szimmetria tengely az $F_m$ sor minden görbéjére nézve; a hozzá tartozó szimmetria irányát megadja az $\mathbf{E}_i$ vég-*

*telenben fekvő inflexiós pont.* Ez a három szimmetria tengely természetesen az $E$ pontban találkozik.

5. *Az inflexiós aszimptoták szerkesztése* igen egyszerű; vegyük például a $w_1$-et. Felkeressük $w_1$ metszését az $a_3$ koordináta-tengelylyel. A

$$-mx_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

egyenletbe $x_3 = 0$-t helyettesítvén, nyerjük az

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{m}$$

értéket. A projektiv koordináták definicziója értelmében

$$\frac{x_1}{x_2} = (A_1A_2E_3X) = \frac{A_1E_3}{A_2E_3} : \frac{A_1X}{A_2X} = -\frac{A_2X}{A_1X} = \frac{1}{m},$$

a hol $X$ a keresett $w_1a_3$ metszéspont. $\frac{A_1E_3}{A_2E_3} = -1$, mert $E_3$ az $A_1A_2$ oldalnak felező pontja.

A szerkesztés most a következő: Az $A_2$ ponton keresztül húzunk egy tetszőleges egyenest, mely az $a_3$-tól külömbözik, mint ilyen felhasználható például az $a_1$. Ezen felveszünk két pontot $Q$-t és $R$-et, úgy hogy egy tetszőleges lépték szerint

$$A_2Q = 1 \quad \text{és} \quad QR = m;$$

megjegyezvén, hogy $A_2Q$ és $QR$ egyenlő-, vagy ellentett értelmű, a szerint a mint $m$ pozitiv vagy negativ. Az $R$ pontot összekötjük az $A_1$-gyel és a $Q$-n keresztül parallelt húzunk az $RA_1$-gyel, mely az $a_3$-ból kimetszi a keresett $X$ pontot, még pedig az $A_1$ és $A_2$ között, ha $m$ pozitiv; ellenben az $A_1A_2$ oldal meghosszabbításán, ha $m$ negativ. Az $X$ ponttal meg van a $w_1$ inflexiós aszimptota is, Ugyanígy szerkesztjük meg a $w_2$-t és a $w_3$-at is. Látjuk tehát, hogy *pozitiv m-nél az inflexiós aszimptoták belépnek a koordináta-háromszög belsejébe, negativ m-nél ellenben nem.*

6. A három inflexiós aszimptotából képezett háromszög — röviden *inflexiós háromszög* $W_i \equiv w_k w_l$ szögpontjainak koordináta-viszonyai:

$$\begin{aligned}
W_1;\ x_1 : x_2 : x_3 &= m-1 : \ 1 \ : \ 1 \\
W_2;\ x_1 : x_2 : x_3 &= \ 1 \ : m-1 : \ 1 \\
W_3;\ x_1 : x_2 : x_3 &= \ 1 \ : \ 1 \ : m-1.
\end{aligned}$$

A $W_i$ szögpontok az $e_i$ egyeneseken feküsznek. Az $a_1, a_2, a_3$; $a'_1, a'_2, a'_3$; $w_1, w_2, w_3$ egyenesek három háromszöget alkotnak, mely közül bármely kettő perspektiv, oly módon, hogy $E$ a perspektiv czentrum, a végtelenben fekvő egyenes pedig a perspektiv tengely. Ha

$$m = 1,$$

akkor az inflexiós háromszög szögpontjai a koordináta-háromszög oldalain feküsznek, még pedig az oldalfelező $E_i$ pontokban és $w_i$ felezi az $a_i$ és $a_i'$ parallel egyenesek határolta síksávot.

7. *Az inflexiós háromszög területének mérőszáma* az $\frac{m+1}{m+1}$ tényező elhagyásával:

$$F = \left(\frac{m-2}{m+1}\right)^2$$

ha az $A_1A_2A_3$ háromszög területének mérőszámát (nem a kétszeres területét, mint a (3) alatti egyenlet levezetésénél) tekintjük egységnek.

8. Az inflexiós háromszög területe zérus, ha

$$m = 2;$$

ez esetben a három aszimptota az $E$ ponton megy keresztül. Ez a görbe még arról is nevezetes, hogy kettős viszonya — t. i. a görbének tetszőleges pontjából még vonható négy érintőnek állandó kettősviszonya — *aequianharmonikus*. Az $F_m$ sorban még három æquianharmonikus görbe foglaltatik, a melyeknek parameterei az

$$m^3 - 6m^2 - 12m - 8 = 0$$

egyenletnek tesznek eleget.

9. Az inflexiós háromszög területének képletében

$$m = -1$$

kritikus érték. Ebben az esetben a görbe egyenlete csekély összevonás után a következő alakra hozható:

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0$$

A görbe tehát két részből áll: az

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

egyenletnek megfelelő végtelenben fekvő egyenesből és az

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$$

egyenletnek megfelelő kúpszeletből. Ez oly *ellipszis*, a mely keresztül megy az $A_i$ szögpontokon és ezekben érinti az $a_i'$ egyeneseket; az $E$ pont középpontja az ellipszisnek.

*Ez a görbe az* $m = 0$ és $m = \infty$ paraméterértékeknek megfelelő $u = 0$ és $v = 0$ *három-oldalakkal együtt képezik az összes széteső harmadrendű görbéket*, melyek az $F_m$ sorban előfordulnak.

10. Létezik azonban az $F_m$ sorban irreduktibilis görbe is, mely szinguláris ponttal bir. Ha ugyanis

$$m = 8,$$

akkor az $A_i$ pontok első polárisai és ezekkel együtt bármely pont első polárisa is keresztül megy az $E$ ponton, tehát $E$ az $F_8$-nak *szinguláris pontja.* Az $E$ első polárisa adja a szinguláris pontban a görbe érintőit. Egyenletének

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0$$

alakjából látjuk hogy ez az egyenespár az előbbi pontban talált $F_{-1}$ ellipszisnek két aszimptotája. *Az $E$ pont* tehát *az $F_8$ görbének izolált kettőspontja.*

11. *Az $F_m$ görbe alaki viszonyainak* elemzését az inflexiós pontokhoz tartozó harmonikus polárisok segítségével eszközölhetjük. A görbe hármas szimmetriájánál fogva teljesen áttekinthetjük a viszonyokat, ha a részletezést csak az egyik harmonikus polárisnál végezzük. — Az $e_1$ és $F_m$ metszéspontjait az

$$F_m \equiv (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) - mx_1x_2x_3 = 0, \quad e_1 \equiv x_2 - x_3 = 0$$

egyenletekből számíthatjuk ki. Mint egyik metszéspontot először is megkapjuk az $A_1$-et. A még hátralevő két pont $\frac{x_1}{x_2}$ koordinátaviszonyának kiszámítására szolgál a

$$2x_1^2 + (4 - m)x_1x_2 + 2x_2^2 = 0$$

egyenlet, mely az $F_m = 0$ egyenletből az $x_3 = x_2$ helyettesítés révén ered. Innen

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{m - 4 \pm (m(m-8))^{\frac{1}{2}}}{4}.$$

Legyen az ekként meghatározott két pont $P'_m$ és $P''_m$, akkor ezeknek kiszámított koordinátaviszonyai:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = m - 4 + (m(m-8))^{\frac{1}{2}} : 4 : 4$$
$$x''_1 : x''_2 : x''_3 = m - 4 - (m(m-8))^{\frac{1}{2}} : 4 : 4.$$

$P'_m$, $P''_m$, $A'_1$ és $E$ mindig harmonikus csoportot képeznek, úgy hogy egyrészt $P'_m$ és $P''_m$ — másrészt $A'_1$ és $E$ kapcsolt párok. — A $P'_m$, $P''_m$ pontpárok összesége tehát involucziót képez, melynek dupla elemei $A'_1$ és $E$.

Az $m - 4 \pm (m(m-8))^{\frac{1}{2}}$ kifejezések a következő két esetben valósak:

1) Ha $m > 8$, akkor egyszersmind mind a kettő pozitiv és a $P'_m$ és $P''_m$ pontok az $A_1A_2A_3$ háromszög belsejében feküsznek.

2) Ha $m$ negativ, akkor a szóban forgó kifejezések mind a ketten negativok, a megfelelő $P'_m$ és $P''_m$ pontok az $A_1A_2A_3$ háromszögön kívül feküsznek.

Ha $m=0$, akkor a $P'_m$ és $P''_m$ összeesik a $A'_1$ ponttal, ha $m=+8$ akkor e két pont összeesik az $E$-vel.

Ha $0<m<8$ akkor $m-4\pm(m(m-8))^{\frac{1}{2}}$ képzetes, tehát $P'_m$ és $P''_m$ is ilyenek.

12. Most már teljesen áttekinthetjük azokat az alakváltozásokat, melyeken az $F_m$ görbe a paraméter változtatásánál keresztül megy.

A végtelenben fekvő egyenes, az $a_i$ és $a'_i$ egyenesek a síkot tizenöt részre osztják. Ezek a síkrészek háromszögek, melyeknek szögpontjai az $A_i$, $A'_i$ és $\mathbf{E}_i$ pontok. Rövidség kedvéért e síkrészek jelölésére, könnyen érthető jelekkel bevezetjük a következő elnevezéseket:

Belső síkrész $\equiv A_1A_2A_3$; $A_i$ csucsszöge $\equiv A_i\mathbf{E}_k\mathbf{E}_l$; $a_i$ melletti síkrész $\equiv A'_iA_kA_l$; $A'_i$ csúcsszöge $\equiv A'_i\mathbf{E}_k\mathbf{E}_l$; $a'_i$ melletti síkrész $\equiv A_i\mathbf{E}_kA'_l+A_iA'_k\mathbf{E}_l$.

Az $F_m$ görbesor jellemző alakváltozásait a következőkben adjuk.

$$m=-\infty.$$

Az $F_m$ görbe áll az $F_\infty\equiv a_1a_2a_3$ háromoldalból.

$$-\infty<m<-1.$$

$F_m$ egy oválisból áll, mely a $a'_i$ egyeneseket az $A_i$ pontokban érinti és egészen az $F_{-1}$ ellipszisen belül, de az $A_1A_2A_3$ háromszögön kívül fekszik. Az oválison kívül az $F_m$-nek van még három hiperbola alakú, a végtelenben összefüggő ága az $A_i$ csúcsszögeiben. Az aszimptoták nem metszik át az $A_1A_2A_3$ háromszög területét. Mennél nagyobb $m$ abszolut értéke, annál hegyesebb az ovális az $A_i$ pontok környezetében és annál jobban simulnak a végtelenbe menő ágak az $a_k$ és $a_l$ egyenesekhez.

$$m=-1.$$

A végtelenbe menő ágak és az aszimptoták összeestek a végtelenben fekvő egyenessel, az ovális átment az $F_1$ ellipszisbe.

$$-1<m<0.$$

$F_m$ oly oválisból áll, mely egészen a $A'_i$ háromszögön belül, de az $F_{-1}$ ellipszisen kívül fekszik; $A_i$ és $a'_i$ három pontja, illetőleg érintője az oválisnak. A végtelenben összefüggő három hiperbola alakú ág átment a $A'_i$ pontok csúcsterületeibe. — Mennél kisebb $m$ abszolut értéke, annál laposabb lesz az ovális az $A_i$ pontok környezetében és hegyesebb a $A'_i$ pontok közelében, és annál inkább simulnak a végtelenbe menő ágak a $a'_k$ és $a'_l$ egyenesekhez.

$$m=0.$$

$F_m$ átment az $F_0 \equiv a_1' a_2' a_3'$ háromoldalba.

$$0 < m < 8.$$

Az ovális eltünt, az $F_m$ egy-egy a $a_i'$ melletti síkrészben fekvő ágból áll, a melyek a végtelenben összefüggnek. Az $A_i$ pontok most már a végtelenbe menő ágakon feküsznek. Mennél kisebb $m$, annál laposabb $F_m$ az $A_i$ pontok környezetében és annál inkább simul az egyik oldalon a $a_i'$ és $a_k'$ — a másik oldalon a $a_i'$ és $a_l'$ egyenesekhez. Az aszimptoták most már átmetszik a belső síkrészt.

$$m = 8.$$

$E$ a görbének izolált kettőspontja: azonkívül a görbe áll egy-egy a végtelenbe menő ágból a $a_i'$ melletti síkrészekben. Ezek az ágak a végtelenben függnek össze.

$$8 < m < \infty$$

Az izolált kettőspontból ovális képződött, mely egészen az inflexiós háromszög belsejében fekszik, tehát már nem megy keresztül az $A_i$ pontokon. A három hiperbola alakú, a végtelenben egymással összefüggő és a $a_i'$ egyeneseket az $A_i$ pontokban érintő ág a $a_i'$ melletti síkrészben persze megmaradt. Mennél nagyobb értékeket vesz fel az $m$ parameter, annál inkább közeledik az ovális az $A_1 A_2 A_3$ háromszöghöz, a végtelenbe menő ágak ellenben e háromszög oldalainak meghosszabbításaihoz, míg végre ha

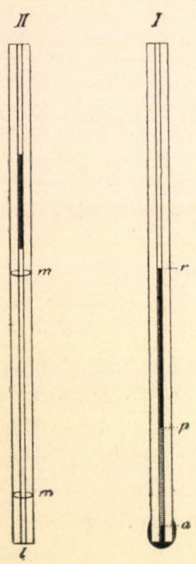
$$m = +\infty$$

az $F_m$ megint átmegy az $F_\infty \equiv a_1 a_2 a_3$ háromoldalba, a melyből kiindultunk.

Ezeket kívántam még megjegyezni, ámbár evvel a tárgy teljességgel még nincsen kimerítve.

## PHYSIKAI LABORATORIUM.

**Kisérletek szűk üvegcsövekkel.** Általánosan ismeretes, hogy a szűk kapillaris csőbe zárt higanyoszlop a csőnek függőleges helyzetében sem szakad el. MELDE a higany eme tulajdonságát több igen egyszerű s különösen a tanítás szempontjából figyelemre méltó kisérletben felhasználta.




A kisérletekhez mindössze néhány darab 2 mm., vagy ennél valamivel kisebb átmérőjű vastagfalú üvegcső — ú. m. barometercső — kell; ezekből a szükséges készülékeket ki-ki könnyű szerrel maga készítheti el.

1. *A Mariotte-féle törvény megállapitása.* A kisérlet czéljának legjobban az olyan cső felelne meg, melynek keresztmetszete mindvégig ugyanaz. Ámde ilyen cső igen nehezen kapható s azért ha pontos eredményekre törekszünk, a kereskedésben rendesen előforduló csöveket mindvégig kimérni, kalibrálni kell. Előadási kisérletben még a nem kalibrált cső is hasznavehető.

A cső egyik vége vagy egyszerűen beolvasztható, vagy pedig a csőbe illő vashengerecskével zárható el; az eredmények pontossága szempontjából minden esetre ez utóbbi mód ajánlatos. E végett a csőbe jól beillő vasdrótot — pl. drótszeget — síkra reszelvén, alkalmas ragasztó szerrel: spanyolviaszszal bevonjuk s a felmelegített üvegcsőbe toljuk. Az üveg a spanyolviaszt megolvasztja s a vasdugót rendesen légzáróan fogja meg. Biztosság okáért azonban nem árt az üvegcső végét kívülről is bevonni, a mint ez az I. rajzban *a* mellett látható. A higanyoszlop a cső bezárása előtt vihető be; természetes, hogy e ragasztás alatt a csőnek vízszintesen kell feküdnie. Az előre elzárt csőbe a higanyoszlop igen vékonyra kihuzott üvegcsőből készült tölcséren keresztül tölthető be.

Legyen körülbelül 60—80 cm. hosszaságú csőben 20—30 cm. hosszaságú ($rp$) higanyoszloppal mintegy 10 cm.-nyi ($ap$) légoszlop elzárva. A csövet nyított végével felfelé függélyes helyzetbe hozván, a benne elzárt levegőnek nyomása $b+h$, ha $b$ a barometer oszlopának magasságát, $h$ pedig a csőben lebegő higanyoszlop hosszát jelenti; legyen ekkor az elzárt levegő térfogata $v$. Erre a csövet nyított végével lefelé fordítván, a nyomás $b-h$; ha most a levegő $v'$ térfogatú, a kisérlet azt fogja mutatni, hogy $v(b+h)=v'(b-h)$.

Ha az üvegcső hőállóan van elzárva, gőzfürdőben a GAY-LUSSAC-féle törvények megállapítására is felhasználható. E végett egy lombik nyakába 1—2 cm. átmérőjű csövet illesztünk be; ha a lombikban vizet forralunk, a forró víz gőzébe függesztett csőben a hőmérséklettel való térfogat-változás, illetőleg nyomásnövekedés kielégítő közelítéssel mérhető.

2. *Kapilláris barometer.* Ha a most leírt cső belső térfogata ki van mérve, a légnyomás megmérésére, vagyis barometernek használható. Ugyanis az előbbi kisérletből $b=\frac{vh+v'h'}{v'-v}$. MELDE kisérletei szerint evvel az egyszerű készülékkel a légnyomás ½ milliméteren túl terjedő pontossággal határozható meg. Ez az egyszerű barometer, könnyen lévén szállítható, főleg a kirándulók czéljainak megfelel. (MELDE 1887-ben írta le ezt a kis készüléket; azóta ketten is újra «felfedezték»).

3. *Gázok sűrűségének meghatározása.* Ez MELDE-nek itt közölt kisérletei közül talán a legértékesebb. A kapilláris cső egyik végére igen finom nyílással ellátott platina lemezke ragasztandó. A nyílás BUNSEN szerint így készül: vékony platina lemezkét finom varrótűvel átszúrván, a lemezkét sík alapon óvatosan kalapálgatjuk mindaddig, míg a nyílás annyira össze nem húzódott, hogy nagyítóval épen még észrevehető. Az így előkészített csőbe mintegy 10 cm. hosszaságú higanyoszlopot hozván, a csőben foglalt gázokat ennek nyomása alatt engedjük kiáramlani. A higanyoszlop mozgása csak kezdetben gyorsuló, és csakhamar egyenletessé válik. Meghatározván az időt, mely alatt a különböző gázok egyenlő térfogata kiáramlik, kiszámítható a relativ sűrűségök. Ugyanis a higanyoszlop egyenlő eltolódása közben végzett munkának legnagyobb része mindenkor a gáz eleven erejévé alakulván át: $mv^2=m'v'^2$, ha $m$ és $m'$ a kiáramló gáztömegeket, $v$ és $v'$ pedig kiáramlási sebességeket jelentik. Legyen pl. $m'$ levegő, akkor a reája vonatkoztatott sűrűség $\frac{m}{m'}=\frac{v'^2}{v^2}$, vagy pedig kiáramlási időkkel kifejezve $\frac{t^2}{t'^2}$.

A cső a különböző gázokkal legkönnyebben úgy tölthető meg, hogy a csőnek (II.) $l$ nyílással fölszerelt végére kaucsuk csövet tolunk s a csövet nyitott végével lefelé fordítván, a higanyoszloppal beleszivatjuk a gázt. Az első töltésből eredő gáz nem elég tiszta arra, hogy megbízható eredményeket adhasson, s azért a csövet megfordítván, kifolyatjuk s az eljárást a tulajdonképeni kisérlet előtt 3—4-szer megismételjük. 1 m. hosszaságú csővel s elég finom nyílással könnyen elérhető, hogy a kiáramlás ideje 1 percz, vagy ennél is több. Időmérőnek inga, metronom, vagy pedig Galilei órája: nagyobb edényből sugárban kiáramló víz lehet. Minthogy megeshetik, hogy a higanyoszlopból kis cseppecske leszakad s a nyílást elzárja, czélszerű a csövet a platina lemezke felragasztása előtt pipa alakúra fölfelé hajlítani.

A gázsűrűség meghatározásának eme módszere tudvalevőleg Bunsen-től ered, de az itt leírt módosításban annyiban tökéletesebb, mert a kiáramlás jóformán teljesen állandó nyomás alatt történik. A cső kalibrálása erre a czélra teljesen felesleges, mert a különböző gázak a csőnek ugyanazon, *m* — *m* jelek között foglalt teréből áramlanak ki. (Ann. d. Ph. XXXII.)

*

**Paraffin alkalmazása elektrostatikai készülékeknél.** Nem ritkán tapasztalható, hogy a közönséges üvegelektroszkóp nem tartja a töltést. Ennek oka többnyire az, hogy az elektroszkóp üvege vezető. Bíztosan felismerhető ez arról, hogy az aranylemezkék a függélyes helyzetbe esnek vissza, ha túl nagy töltés esetében valamelyik lemezke az edény falával érintkezésbe jő. Boudréaux azt ajánlja, hogy az aranylemezkéket tartó fémpálczika széles és vastag paraffindugóba illesztessék be. Tapasztalata szerint az ily módon az üvegtől elszigetelt aranylemezkék a töltést 10—12 órán keresztül is megtartják, még nedves időben is. — Ajánlja azt is, hogy a *szigetelő zsámoly* lábai paraffinból készüljenek, vagy legalább is be legyenek vele vonva. Az ilyen jól szigetelő zsámolyon álló ember rókafarkkal a kezére mért egyetlenegy hirtelen csapástól akkora elektromos töltést vesz fel, hogy a leírt módon készült elektroszkóp bíztosan megmutatja. (Ez a kisérlet különben az elterjedt üveglábú, zsámolyon, jobbféle elektroszkóppal rendesen bíztosan sikerül). Ha a rókafarkot vagy a macskabőrt kezelő egyén is szigetelő zsámolyon áll s az ütés megadása után egy másik elektroszkópot érint, ennek lemezkéi is kitérnek. Ha most a két egyén — egyik kezükkel az elektroszkópot érintvén — egymással kezet fog: az elektroszkópok aranylemezkéi összeesnek, jeléül annak, hogy az ütés alatt egyenlő, de ellentétes elektromos töltést vettek fel. — Boudréaux szerint az elektrofor is lényegesen jobbá lesz, ha a fémlap paraffin nyéllel van ellátva s a lepény paraffinnel készül. Jó keveréket ad erre a czélra a paraffin, ha gummilakkal és kolofóniummal olvasztatik össze; ez a keverék egyáltalában nem repedezik s ennélfogva igen tartós. Minden körülmények között azonban igen fontos, hogy a parraffin a por hatása ellen jól legyen védve. Azért is minden paraffin-részhez külön fedő vagy tok készítendő, melyet csak a kisérletezés tartamára kell eltávolítani.

**Az exsiccatorok helyes használatáról.** Hempel megjegyzi, hogy a legtöbb exsiccator alkalmazásánál ezt a hibát követik el, hogy a szárító anyag — kénsav, chlorcalcium — a megszárítandó tárgy alatt van elhelyezve. Minthogy a száraz levegő sűrűbb, alul marad s csak lassan keveredik a száradásra váró nedves levegővel, diffusio útján. Ellenben ha a szárító anyag fölül van, a száraz levegő lefelé áramlik s helyet enged a nedves levegőnek. Az így támadó légáramlás meglepő módon gyorsítja a szárítást. Két egyenlő nagyságú harang alá 10—10 $cm^3$ vizet helyezett el, úgy azonban, hogy az egyik harangban a víz kénsavas edény fölött a másikban pedig a kénsav alatt volt. Első esetben a víz 9 nap alatt, az utóbbiban ellenben 3 nap alatt párolgott el. Az elpárolgás gyorsítása végett kivánatos, hogy a szárító anyag — chlorcalcium vagy kénsavval áztatott horzsakő — jól felhalmozva a csésze falai fölé emelkedjék, hogy a megszárított levegőnek szabad lefolyása legyen. A szárítás még inkább gyorsítható az által, hogy a harang teteje alkalmas módon hűtő keverékkel boríttatik be. A lehűlő száraz levegő az áramlás gyorsaságát fokozza s így a *hűtés* a szárításnál sokkal hatásosabbnak bizonyul, mint a rendesen alkalmazásba vett *melegítés.*

*

**Az üvegnek fémekkel való összeforrasztása.** Cailletet megmutatta, miként lehet üveg- vagy porczellancsöveket fémrészekkel ragasztó szerek nélkül, forrasztás útján összekapcsolni. — A gyengén fölmelegített üvegcsőnek összeforrasztandó része lágy ecset segítségével platinachlorid és kamilla-olaj keverékével bevonandó. Ezt a keveréket elpárologtatván, a cső sötét-vörös izzásig hevíttetik mindaddig, míg az erős szagú gőzök fejlődése véget nem ért. Izzás közben a platinachlorid redukálódik s az üvegfelületen erősen fogó fényes fémbevonatot ad. Az így fémesen vezetővé tett cső a galvántelep negativ sarkával összeköttetvén, rézgáliczfürdőben rézréteggel vonódik be. A réz az üvegen kitünően tart s azért is, ha jó vastag rézgyürü képződött a csövön, az üvegcső fémekkel csak úgy kapcsolható össze, mint bármilyen fémcső. A rézgyürűbe csavarmenet vágható, vagy pedig forrasztóónnal vas, réz vagy bronsz részekhez forrasztható. — Az így készült forrasztások rendkívül ellenállóknak bizonyultak. Cailletet egy ilyen módon forrasztott üvegcsövet 300 atmosphæra belső nyomásnak vetett alá s a cső minden baj nélkül megbírta.

(L' Électricien 1891. 42. l.)

# VEGYESEK.

## Sir George Biddel Airy K. C. B.

NORMAN I. LOCKYER-tól.

E napokban* egy férfiút veszítettünk el, ki a jelen század legnagyobb részén át a kiváló angolok legelsőinek sorában állott. Sir GEORGE AIRY, a nyugalmazott királyi csillagász és a *Royal Society* volt elnöke halála által a tudomány oly veszteséget szenvedett, mely nem kisebbedett az által, hogy a kilenczven éves kort elért nagy férfiú utolsó éveit jól megérdemlett nyugalomban tölté.

Tizennyolcz éves korában mint «*sizar*» (kezdő tanuló) a cambridge-i egyetembe lépvén be, csakhamar kimutatta, mily anyagból való s miután 1822-ben «*scholarship*»-re (tanulói állásra) megválasztatott, 1823-ban mint *Senior Wrangler* (tudományos versenyvizsgálat első győztese) nyert akadémiai fokot és a következő évben «*Fellowship*»-re (tetemes javadalmazással járó állásra) tett szert ugyanez egyetem «Trinity-College»-ében.

Rövid idő mulva mutatkozott kiváló tehetsége a csillagászati vizsgálódásokra s ez időben e tárgyakra vonatkozólag számos közleményt is bocsátott közzé; ilyen pl. «The Lunar and Planetary Theories» (A hold és a bolygók mozgásának elméletei) 1826; «The Figure of Earth» (A föld alakja) 1830 és «The Undulatory Theory of Optics» (A fény hullámelmélete) 1831. Ezeket, melyek mind több kiadást értek, később az irodalmi termékek egész sora követte, melyek legnagyobb részben csillagászati megfigyelésekre, ezek reductiójára vonatkoznak. Említést érdemel még három műve: «Theory of Errors of Observation» (Az észlelési hibák elmélete) II. kiadás, 1875; «On Sound and atmospheric vibrations» (Hang és légköri rezgések) 1868; «Treatise on Magnetism» (A mágnesség tankönyve) 1870. Az 1826-ik évben ugyanezen College-en a LUCAS-féle alapítványból fentartott «Kisérleti tudományok» tanszékére nevezték ki, mely hosszú időn át alig volt más, mint sinecura, élvezőjét évenként csak egy előadási sorozatra kötelezvén. Nemsokára, 1828-ban a cambridge-i egyetemen a PLUM-féle alapból fentartott csillagászati tanszék tanárának és az akkoriban ujonnan épült cambridge-i observatorium igazgatójának nevezték ki. E minőségében észlelő

* 1892. jan. 7.

tehetsége és igazgatói ügyessége oly szembetűnően jelentkezett, hogy ezen intézet Anglia egyik legfinomabb megfigyelő helyévé lett s hogy azon javításokat és tökéletesítéseket, melyeket a megfigyelések kiszámításában és közzétételében kezdeményezett, csakhamar más observatoriumok is követték. Az 1835-ik évben az «Astronomer-Royal» (királyi csillagász) tisztje (a világhírű greenwich-i csillagvizsgáló igazgatói állása) megürülvén, lord Auckland, az angol admiralitás akkori feje őt szemelte ki ezen állásra, mint JOHN POND legméltóbb utódját. Ezt a tisztséget 1881-ig viselte s e közben tökéleteség legmagasabb fokán álló ügyességgel és nem lankadó éberséggel a csillagászati megfigyelés instrumentális felszerelését megújította s a megfigyelés gyakorlatát és módszereit átalakította.

Neki köszönhetik a csillagvizsgálók az altazimuth, a visszaverő zenithtávcső, egy új passage-műszer és a nagy æquatoreal bevezetését, melyeket mind saját czéljai és utasításai szerint szerkesztetett és saját felügyelete alatt állíttatott fel. A legnagyobb eredetiséget talán az æquatoreal szerkesztésében fejtett ki, melyet régi barátai, RANSOME és MAY Ipswichben készítettek. RANSOME-ra vonatkozólag maga AIRY azon előadások elsejében, melyeket 1848-ban Ipswichben tartott, felemlíti, hogy Saturnus képét barátjának saját készítésű teleskópján át látta meg legelőször.

Sir GEORGE AIRY igazgatóságának egész tartama alatt, azon absolut és soha félbe nem szakított szabályosságnál fogva, mely még a legkisebb részletekre is kiterjedt, az observatorium, mintegy egész, óriási gépezethez hasonlított, melynek valamennyi mozgása előre megállapítva és pontosan ellen őrizve volt. A megfigyelések kötetei mindig igen bőkezűen bocsáttattak rendelkezésére azoknak, kik hasznukat vehették. Így ADAMS tanár, ki LE VERRIER-vel egyidejüleg számítás útján fedezte fel Neptun bolygót, az Uranus bolygóra vonatkozó 1750—1830-ig terjedő összes greenwich-i megfigyeléseket teljesen redukálva megkapta.

Az 1833—1848. években a királyi csillagász egy BESSEL által javasolt és kezdeményezett nagy munkával volt elfoglalva. Ez nem volt kevesebb, mint a Greenwich-ben végzett hold- és bolygó-megfigyelések reductiója; a feladat hosszú és fáradságos volt, de az így nyert eredmények tetemesen elősegítették a hold és a bolygók mozgása tábláinak javítását.

Azonban ezen napi munka mellett és azon felelősségen kívül, mely a nap, a hold s az álló csillagok megfigyeléseinek folytonos nyilvántartásával járt, működését nem szentelte kizárólagosan állása ezen inkább gyakorlati kötelességeinek. Már 1842-ben felismerte a napfogyatkozások fontosságát, midőn Turinba utazott az ott látható teljes napfogyatkozás megfigyelése végett. 1851-ben ugyanily okból Gothenburgot Svédországban kereste fel. 1860-ban a kormány segélyét eszközölte ki s ugyanezen évben szervezte azt a híres expeditiót, mely a «Himalaya» angol hadihajóval Spanyolországba ment, s mely ama gyönyörű fényképekről lett nevezetessé, melyet a szintén már elhúnyt Warren de la Rue e teljes napfogyatkozásról felvett.

Közel félszázadon át Airy az angol korona tudomány-tisztje (science-officer) volt, kinek tanácsát a kormány majdnem valamennyi általánosabb érdekű tudományos kérdésben kikérte, a nélkül azonban, hogy ezért, mint az pl. a jogi tiszteknél (ügyészek, law-officer) szokásos, valaha tiszteletdíjban részesült volna. Mikor 1834-ben az angol parliament épületében kiütött tűzvész az összes régi súly- és mérték-egységeket (ősmintákat) elpusztította, őt nevezték ki ama bizottság elnökévé, mely a mértékegységek általános kérdésének tanulmányozására és új ősmértékek készítésére küldetett ki.

Több közérdekű intézményen kívül ő javasolta a tizedes pénzrendszert. A földmérési hivatal gyakorlati eszközei közül többeket az ő utasításai szerint készítettek el; ő vezette az előzetes megfigyeléseket, melyek a Canada és az Egyesült-államok közötti határvonal megállapítását czélozták. A tengerészek időtájékoztatására szolgáló déljelző gömb (time-ball) ejtését ő kezdeményezte s a chronometerek készítésének mesterségét nagy mértékben előmozdította azon megvizsgálások és ismertető jelek megállapítása által, melyeket tökéletességük megítélésére bevezetett. Számos más kérdésre is fordította figyelmét; ezek közül említést érdemel a tengerész-tájoló eltérése, melyre nézve egy később általánosan elfogadott javítást hozott be, a vaspályák nyomjelzése s végre a föld középsűrűségének meghatározása.

Nehéz dolog, ily rövid kis közleményben mindazokról a munkákról megemlékezni, melyeknek a most véget ért élet volt szánva s melyek nemcsak az angol nemzet érdekében végeztettek, hanem világra szólók is voltak. Befejezésül jegyezzük meg, hogy e munkák az angol kormányok részéről későn részesültek elismerésben: 1871-ben a C. B. (a «Baronet» czím) adományozása által, miután Airy már harminczhat éven át királyi csillagász volt; ezt követte a következő évben a K. C. B. (Knight Commander of the Bath, a Bath-rend középkeresztese). De már sokkal előbb Európa összes akadémiái külső tagul választották; s ő az Institute de France nyolcz külső tagjának egyike volt, a mi a legmagasabb tudományos megtiszteltetés, melyben angol ember részesülhet. *F.*

# MATHEMATIKAI
ÉS
# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

ELSŐ ÉVFOLYAM

HATODIK FÜZET. 1892 ÁPRILIS

BUDAPEST

KIADJA A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1892

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenkint 8, legalább 3 ívnyi füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó 20-dik napján. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A társulati év a választmány határozata szerint 1892. január 1-én kezdődik. Ennek folytán a M. Ph. Lapokból a folyó évben 6 füzet jelenik meg, mely a mult évben megjelent kettős füzetet 24—30 ívnyi kötetre fogja kiegészíteni. A hátralevő füzeteket október és november hónapok 20-ik napján küldjük szét.

A tagsági okleveleket április hó végével küldtük meg a M. Ph. Lapok 182—185. lapjain közölt tagtársainknak. A megválasztásra ajánlott tagtársaink oklevelét május hó folyamán fogjuk szétküldeni.

A tagsági díj az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében volt beküldendő. Kérjük a tagsági díjjal hátralékban levő tiszt. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czimére — legczélszerűbben postautalványnyal — beküldeni. Legyen szabad egyúttal a választmánynak a 3-dik füzet 187. lapján közölt kérelmét t. Tagtársaink becses figyelmébe ajánlanunk.

A befizetett tagdíjakat a M. Ph. Lapok mellékletén nyugtáztatjuk.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére (VI. Bajza-u. 20.) intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár (VII., akáczfa-u. 49.), a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a reklamácziók is.

---

**Kérelem.** Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg.

# FÉNYKÉPÉSZETI KÉSZÜLÉKEK

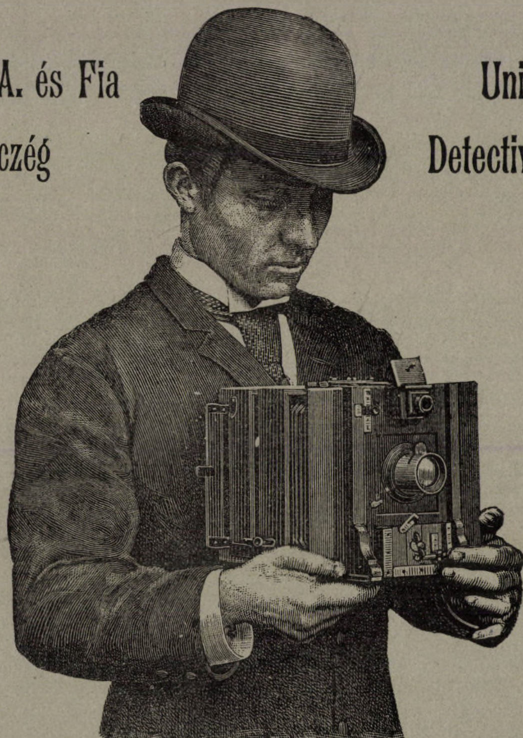
**minden nagyságban és kivitelben nagy választékban.**

Mint különösen kedvelt és nagyon elterjedt készüléket ajánljuk

## Goldmann A. és Fia bécsi czég

## Universalis Detectiv-kamaráját.

Részletes, dúsan illustrált árjegyzékek bérmentve küldetnek.



Részletes, dúsan illustrált árjegyzékek bérmentve küldetnek.

Czélszerü szerkezete folytán kitünően alkalmas ezen műszer szabadkézből való pillanatfelvételek, ugymint (egy állványra csavarva) személy-, csoport-, tájkép-, épitmény-, interieur-, sőt reproductió felvételek eszközlésére. Különböző gyútávolságok beállithatása végett kihuzható szerkezettel és hajtócsavarral bir, és el van látva távmutatóval, mely egy csavar forgatása által a becslés által meghatározott méterek távolságának megfelelő számra állittatik be, hogy az emlitett távolságban levő tárgy élesen jelenjék meg a lemezen. Az objectivum egy különös szerkezetü Steinheil-féle antiplanetikus lencse, a mögötte levő pillanatzár pedig kényelmesen beállitható $^1/_{100}$—1 másodpercznyi gyorsaságra, vagy hatályon kivül helyezhető. A kamara továbbá egy keresővel van ellátva és hossz- ugymint függőleges felvételekre egyaránt használható.

A kamara bővebb leirása és használati utasitása az érdeklődőknek rendelkezésére áll.

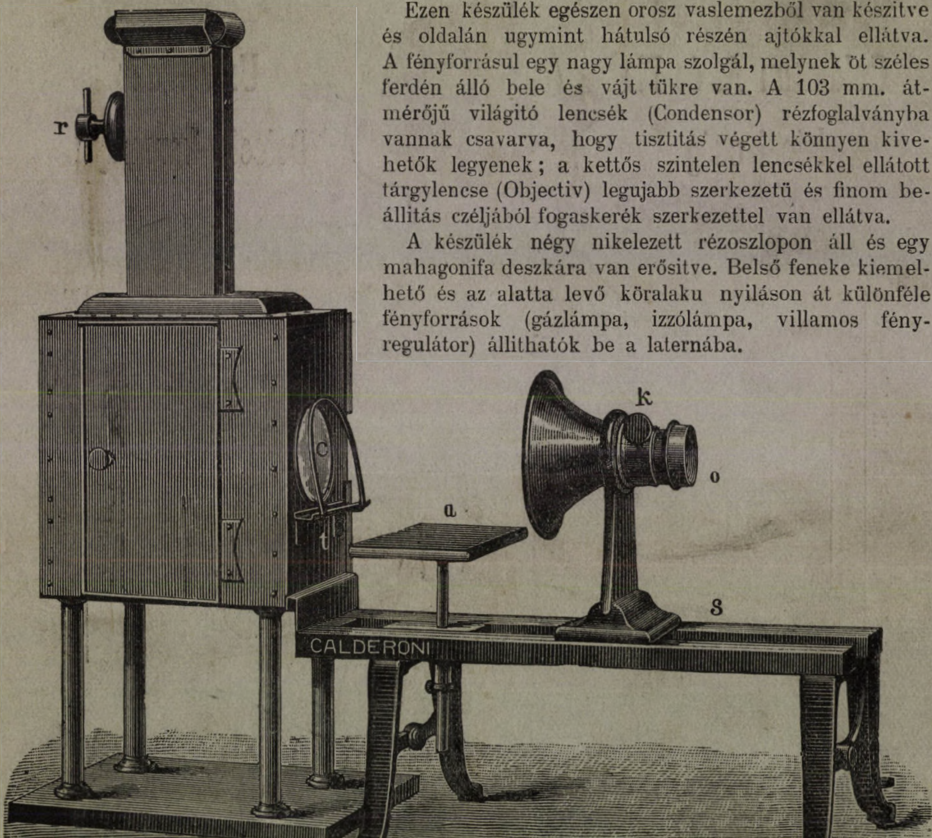
| Nagyság | Lencse | Ára 6 kettős kassetával és böröndddel |
|---|---|---|
| 9×12 | Antiplanet 25 m/m | **110.—** |
| 12×16$^1/_2$ | « 33 « | **152.—** |
| 13×18 | « 43 « | **190.—** |
| 16×21 | « 43 « | **215.—** |
| 16×21 | « 48 « | **230.—** |

## Calderoni és Társa, Budapest, IV. kis hid-utcza 8.

# CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., kis hid-utcza 8. sz.

## „Pentaphane“ universalis vetitő készülék iskolai használatra.




Ezen készülék egészen orosz vaslemezből van készitve és oldalán ugymint hátulsó részén ajtókkal ellátva. A fényforrásul egy nagy lámpa szolgál, melynek öt széles ferdén álló bele és vájt tükre van. A 103 mm. átmérőjű világitó lencsék (Condensor) rézfoglalványba vannak csavarva, hogy tisztitás végett könnyen kivehetők legyenek; a kettős szintelen lencsékkel ellátott tárgylencse (Objectiv) legujabb szerkezetű és finom beállitás céljából fogaskerék szerkezettel van ellátva.

A készülék négy nikelezett rézoszlopon áll és egy mahagonifa deszkára van erősitve. Belső feneke kiemelhető és az alatta levő köralaku nyiláson át különféle fényforrások (gázlámpa, izzólámpa, villamos fényregulátor) állithatók be a laternába.

A két kis lábra erősitett öntött vasból készült pad a Condensor alatt akasztatik be a készülékbe s ezen padon van az objectivtartó állvány, egy kis asztalka különféle vetitendő testek és készülékek felvételére és a képkeretet tartó rugó: állvány és asztalka a pad hosszában tetszés szerint eltolhatók, sőt utóbbi magasabbra és mélyebbre is emelhető és állásában rögzithető. — Ezen készülék minden tekintetben a legkitünőbb eredményeket adja, mint a fent már emlittetett, tetszés szerint minden fényforrással használható és minden árjegyzékünkben előforduló mellékkészülék használható hozzá. — A készülék bővebb leirása, előnyei és használati módja részletesen van előadva vetitő készülékekről szóló árjegyzékünkben, melyet szivezen küldünk meg az érdeklődőknek.

**A «Pentaphane» vetitő készülék ára ötbélü petroleum-lámpával együtt 88 frt.**

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

# AZ ENERGIA MOZGÁSA AZ ELEKTROMÁGNESI TÉRBEN.*

## I. A Faraday-Maxwell-féle felfogás. Az energia mozgásának törvénye és ennek értelmezése.

*1. Bevezetés.* Az elektromos áramokat környező tér oly természetűnek tekintendő, melynek bizonyos részeiben az energia — telepek, dynamogépek, thermo-elektromos hatások stb. közvetítésével — elektromos és mágnességi hatásokba s alakokba átváltozik, a tér más részeiben pedig ugyanez az energia meleggé, vagy az elektromágnesi hatások által végezett munkává, vagy az áramok által egyáltalában szolgáltatható valamely fajú energiává alakul át.

Az elektromos áramot előbb oly valaminek tekintették, a mi a vezető mentén halad, a figyelmet főleg a vezetőre vagy a vezeték felé fordították, a zárt vezeték valamely részében megjelenő energiáról pedig azt vették fel (ha erről egyáltalában említés történt), hogy ezt maga az áram viszi tovább a vezető mentén.

---

* Előadva a Math. Phys. Társulat 1892. évi márczius 3-án tartott rendes ülésén. — V. ö. J. H. POYNTING: Az energiának az elektromágnesi térben való átviteléről (Philos. Transactions of Roy. Soc. of Lond. 175. k., 343—361 ll. 1884); J. H. POYNTING: Az elektromos áram és a környező térben végbemenő elektromos és mágnesi indukcziók közötti összefüggésről (Proceedings of Roy. Soc. of London 38. k. 168—172. ll. 1885); J. H. POYNTING: Az elektromos áram vonatkozásai a környező térhez (Proc. of Birmingham Phil. Soc. 5. kötet 2. rész, 17. ll., 1887); SYLVANUS P. THOMSON: A szigetelőben felmerülő eltolásbeli (polározásbeli) áramok mágnesi hatásáról (Proc. of Roy. Soc. of. London, 45. k., 392—393 l., 1889); J. BORGMANN: A kondenzátorok szigetelő üvegének az intermittáló elektromozás folytán felmerülő felmelegedéséről (Wiedmann's Beiblätter IX. k., 50. l., 1887); J. J. THOMSON: Az elektromos tér sajátságainak indukczió-csövek segélyével való előtüntetése (Philosophical Magazine, 5. series, 31. k., 149—171. l., 1891) czímű értekezéseit.

Ámde az elektromágnesi és elektrodynamikus távolbahatások, valamint az indukált áramok létezése, mely utóbbiak energiája az első (indukáló) áramból vagy mágnesből vagy pedig más, távolban levő energia-forrásból ered, a FARADAY- és MAXWELL-től kezdeményezett felfogás szerint arra késztetnek, hogy e tünemények létrejöttében a vezetőt környező közegnek is fontos szerepet tulajdonítsunk. Ha az energia mozgásának *folytonosságát* felveszszük, azaz ha feltételezzük, hogy ha egy helyen eltűnik és egy másik helyen ismét felmerűl, akkor annak a közbeneső téren is át kellett haladnia s így azt a felfogást is kell jogosultnak tekintenünk, hogy ezen energiának legalább egy része magában a környező közegben rejlik, s hogy e közeg az energiának pontról-pontra való átvitelére, továbbszállítására alkalmas.

Kiindulva ebből az alapból, MAXWELL* megvizsgálta, mennyi energia rejlik a közegben, s oly kifejezéseket állít elő, melyek a tér minden részének erélyt tulajdonitanak, melynek (a térfogat egységében foglalt) mennyisége az e térrészben felmerülő elektromindító- és mágnesi intenzitásoktól,** továbbá a közegnek erre vonatkozó természetétől, nevezetesen dielektromos és mágnességi permeabilitásbeli (áthatósági) állandóitól függ. Ezek a kifejezések, a mennyire tudjuk, az összes energiáról adnak számot. MAXWELL felfogása szerint az áramok lényegükben véve az energiának a vezetőben és a környező közegben való bizonyos eloszlásából állanak, mely eloszlás az energiának átalakulásával s ebből folyólag a téren keresztül való mozgásával jár.

MAXWELL ezen elméletét véve alapul, természetszerűen a következő probléma merül fel: Hogyan halad az elektromos áramot

---

* MAXWELL ezen vizsgálatai többek között: «A Treatise on Electricity and Magnetism» (Az elektromosság és a mágnesség tankönyve) czímű híres könyvének (első kiadás 1873, második 1881, London), mely B. WEINSTEIN német fordításában «Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus» czímmel 1883-ban jelent meg, II. kötete 630—633. §§-aiban foglaltatnak.

** Itt ezen intenzitásokat teljesen oly értelemben veszszük, mint ezek az *elektromos tér intenzitása* és a *mágnesi tér intenzitása* elnevezéssel CZÓGLER ALAJOS «Fizikai egységek» czímű könyvének 64. és 73. §§-aiban (94. és 105. l.) definiálva vannak.

körülvevő energia pontról-pontra, azaz, mily utakon és mily törvény szerint halad az energia a zárt vezeték azon részeiből, melyekben legélőször mint elektromos és mágnesi energia észrevehető, ama részek felé, melyekben meleggé vagy más formáju energiává alakul át?

Poynting idézett értekezései közől az elsőnek czélja annak a bebizonyitása, hogy az energia nevezett átvitelére vonatkozólag egy általános törvény áll fenn. E törvény értelmében az erély merőlegesen mozog arra a sikra, mely az elektromos és a mágnesi erőt magában foglalja s e sik felületegységén át az időegység alatt áthaladó energia mennyisége szám szerint egyenlő a nevezett két erő szorzatával, szorozva még a kettő által bezárt szögnek sinusával s osztva $4\pi$-vel (1. ábra).

Végre a haladás iránya megegyezik egy jobb-sodrású csavar tengelyének haladásával, ha ezt az elektromos erő pozitiv irányától a mágnesi erő pozitiv iránya felé fordítjuk (1. és 2. ábra).

2. Előrebocsátván a Maxwell felfogását jellemző néhány megjegyzést, a következőkben adjuk azon eljárás vázlatát, melylyel Poynting a jelzett törvényt leszármaztatta:

Az elektromos erő a szigetelő minden elemében az elektromosságok elválasztását létesiti, de az elektromosságok, a szigetelő természeténél fogva, nem távozhatnak a szigetelő ezen eleméből s így ez elem egyik végén szabad pozitiv, másik végén pedig szabad negativ elektromosságot mutat. E szerint az elektromos erő befolyása alatt a szigetelő minden eleme elektrostatikai polározottságot mutat. Legyen $d\tau$ egy ily elemi rész térfogata, melyet egyszerűség kedvéért hasábszerűnek s az elektromindító erőhöz párhuzamos fekvésűnek tekintünk, továbbá $dn$ az erőre merőleges, $+Q$ illetve $-Q$ szabad elektromos töltést mutató két véglapjának egymástól való távolsága és $k$ a keresztmetszete. Akkor $d\tau = k \,.\, dn$; az elektromosságnak ama mennyisége pedig, melynek a közegben levő elektromos erővonalakra merőleges keresztmetszet egységén át kell haladnia, hogy a közeg a neutrális állapotból az emlitett polározott állapotba jusson, egyenlő a $Q:k$ hányadossal. Ez a mennyiség Maxwell szerint (I. köt. 60., 68. §§.[1] az *elektromos eltolódás*, *elosztás* (electric displacement), vagy pedig *polározás*. MAXWELL minden testet úgy tekint, hogy benne az elektromindító erő befolyása alatt egyrészt az elektromosság áramlásnak indul és így vezetésbeli áram létesül, másrészt pedig a test elektrostatikailag polározódik; szóval minden test egyszerre vezető is, meg szigetelő is, de e két tulajdonság foka különböző testekben nagyon különböző. A vezetőkben az előbbi tulajdonság az uralkodó; a szigetelőkben megfordítva.

A használandó jelölések a következők:

$\mathfrak{E}$ az elektromindító intenzitás a tér tetszőleges pontjában [vagyis az az elektromos erő, mely az e pontban lévő kicsiny, a pozitiv elektromosság egységével töltött testre hat vagy hatna, osztva még a pozitiv elektromosság egységével].

$\mathfrak{M}$ az elektromágnesi vagy a mágnesi intenzitás a tér tetszőleges pontjában [vagyis az a mágnesi erő, mely az e pontban lévő, a pozitiv mágnesség egységét tartalmazó mágnesezett testre hat vagy hatna, osztva még a pozitiv mágnesség egységével].

$K=1+4\pi\varkappa$ a közeg dielektromos állandója,

$M=1+4\pi\mu$ a közeg mágnesi permeabilitásának állandója.

MAXWELL kifejezése (i. h.) a térfogategységben lévő elektromos és mágnesi energiák összegére nézve:

$$\frac{K}{8\pi}\mathfrak{E}^2+\frac{M}{8\pi}\mathfrak{M}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

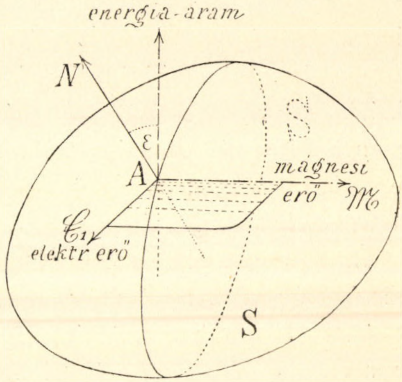
Ezen energia időbeli differentiál-quotiense:

$$\frac{K}{4\pi}\cdot\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\mathfrak{E}+\frac{M}{4\pi}\cdot\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}\mathfrak{M} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

MAXWELL felfogása szerint az $e$, azaz a *valódi* vagy *teljes* elektromos áram két részből áll: az $i$ *vezetésbeli* áramból és a $p$ *eltolódási* (polározásbeli) áramból (displacement-current, courant de displacement, Verschiebungsstrom), mely utóbbi a közeg elektromos eltolódásának vagy elektromos polározásának változásából keletkezik (l. a 2. példát). Ámde az eltolódás vagy polározás $\mathfrak{E}$-vel egyenesen arányos, s miként egyszerű, de itt mellőzendő megfontolások mutatják, értéke $K\frac{\mathfrak{E}}{4\pi}$; ennek változása $\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}$ a polározásbeli áram, mely e szerint

$$p=\frac{K}{4\pi}\cdot\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=e-i, \text{ miből } \frac{K}{4\pi}\,\mathfrak{E}\,\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=e\,\mathfrak{E}-i\,\mathfrak{E}\quad. \quad (3)$$

Eme kifejezés jobboldali első tagja akként alakitható át, hogy a teljes áram összetevői helyébe ezeknek a mágnesi intenzitás komponenseiben kifejezett értékei helyettesittetnek, mig a második tag, vagyis a vezetésbeli áramintenzitásnak az elektrominditó intenzitással való szorozata az Ohm-féle törvény * értelmében: $i^2 W$. Ez utóbbi azonban azt az energiát jelenti, mely Joule törvénye értelmében az áramvezeték térfogat-egységében az időegység alatt meleg alakjában jelenik meg. A (3) mennyiséget a $d\tau$ térfogat-elemmel szorozzuk s a szorozatokat egy zárt $S$ felülettel határolt $\tau$ térre nézve összegezzük (integráljuk) (1. ábra); akkor a (3) kifejezés első tagja partiálisan integrálható s azt találjuk, hogy két tagból áll: Az első csak a felülettől függ s a felület minden része oly értéket szolgáltat, mely az e felületi részben uralkodó elektromos és mágnesi intenzitásoktól függ; a második tag a mágnesi energiának az idő szerinti differentiálquotiense, azaz a (2) második tagja, de negativ előjellel. A (3) második tagja azon összes meleg-mennyiség egyenértékét adja, mely a vezetőkben az időegység alatt




1. ábra.**

* Jelölésünk szerint $i=C\mathfrak{E}$, hol $C$ a fajlagos vezető képesség, vagy pedig $iW=\mathfrak{E}$, ha $W$ a fajl. ellenállást jelenti.

** Az ábrákat Csillag Vilmos tanárjelölt úr volt szives elkésziteni. Ezek közől a 9 és 11 változatlanul, a 3, 4, 7 és 13 pedig kiegészítésekkel van Poynting első értekezéséből átvéve. A többiek e sorok irójának eredeti vázlatai.

fejlődik. E szerint eredményünk a következő: Valamely zárt felületen belül lévő elektromos energia időbeli változása egyenlő egy a felülettől függő mennyiséggel, levonva belőle a mágnesi energia időbeli változását és a vezetőkben kifejtett meleg egyenértékét.

Egy oldalra helyezvén a mágnesi és az elektromos energiát s a meleg egyenértékét, eredményünk így is kifejezhető:

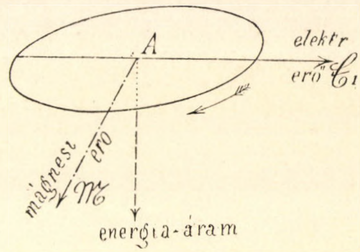
Valamely zárt felületen belül az elektromos és a mágnesi energiák változásának összege, hozzáadván az áramok létesitette meleg egyenértékét, oly mennyiséggel (felületi integrállal) egyenlő, melyhez a felület minden eleme járul egy oly részszel, mely az elektromos és a mágnesi intenzitásoknak ezen elemre vonatkozó értékeitől és irányaitól függ. Más szóval: a felületen belül lévő energiának teljes változása úgy számítható ki, ha feltételezzük, hogy az energia e felületen keresztül a fent idézett kifejezésben rejlő törvény szerint hatol e térbe.

Értelmezvén e kifejezést, jelentéseül azt találjuk, hogy az energia úgy áramlik, mint előbb meg volt állapitva, azaz minden $dS$ felületi elemen keresztül úgy, hogy iránya merőleges a $dS$-ben uralkodó $\mathfrak{E}$ elektromos és $\mathfrak{M}$ mágnesi intenzitásokon átfektetett síkra (1. ábra), azaz mindenütt merőleges arra a felületre, mely az elektromos és a mágnesi erővonalat magában foglalja. Továbbá, hogy a felületegységen át az időegység alatt keresztülhaladó energiamennyiség egyenlő a következő szorzattal:

$$\frac{\text{elektromindító intenzitás}^{*} \times \text{mágnesi intenzitás} \times \text{a bezárt szög sinusa}}{4\pi},$$

* Itt azt a körülményt kell kiemelnünk, hogy az ezen törvény kifejezésében fellépő elektromindító intenzitás nem a közönségesen u. n. *egész* elektromindító intenzitás. Ugyanis, e kifejezés az $S$ felület minden elemére lévén alkalmazandó, itt megjegyzendő, hogy az e geometriai felületen uralkodó elektromindító erő többek között a felületen lévő anyagi testrészek sebességétől is függ; a fentirt kifejezésben fellépő elektromindító intenzitás az egésznek az a része, mely a felületet alkotó anyagi pontok sebességétől független. Ha az $S$ felületen az anyagi pontok nyugalomban vannak, akkor a szövegben idézett törvény kifejezésében az elektromindító intenzitás egyszersmind az egész ott uralkodó elektromindító intenzitás. Ez az eset a következőkben tárgyalandó példák valamennyiénél áll fenn.

míg az energia-áram irányát az határozza meg, hogy a három iránymennyiség: elektromindító intenzitás, mágnesi intenzitás és energia-áramlás a jobb sodrású csavar elve szerint sorakoznak (2. ábra). Egyszersmind az is következik, hogy az energia az elektromos erővonalakra merőlegesen folyik, azaz az elektromos niveau-felületek* mentén, a hol ilyenek léteznek. De az energia a mágnesi erővonalakra is merőlegesen folyik, azaz a mágnesi szintfelületek mentén, a hol ilyenek vannak. Miután csak ott van energia-áram, hol egyszerre elektromindító és mágnesi erő van jelen, a kétféle szintfelületek seregeinek metszővonalai egyszersmind az energia áramlási görbéi.



2. ábra.

## II. Az energia-mozgás törvényének alkalmazása egyszerű esetekre.

*1. példa. Áramot vivő egyenes drót.*

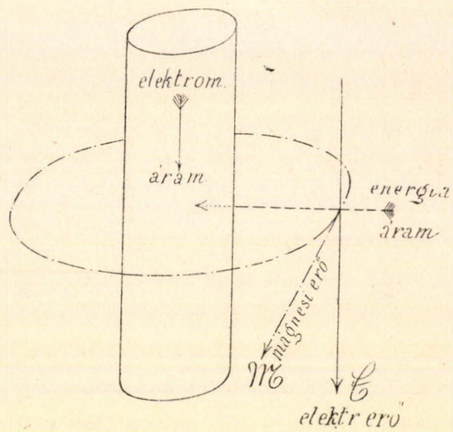
Ez esetben nagy közelítéssel felvehetjük, hogy a drót keresztmetszetének minden egyenlő területű részén egyenlő áramrészek haladnak át. Az elektromindító erő itt úgy a drót belsejében, mint a rajta kívül lévő térben mindenütt a drót geometriai tengelyével párhuzamos, míg az erővonalakra merőleges elektromos szintfelületek a tengelyre merőleges *síkok*. Ellenben az elektromágnesi erő minden pontban merőleges az e tengelyen s e ponton átfektetett síkra s az erővonalak maguk e tengely körüli köröket alkotnak, melyekre mindenütt merőlegesek a sodrony tengelyén átmenő síkok, mely utóbbiak itt az (elektro-) mágnesi szintfelületeket képviselik. (3. ábra.)

Ha az áram $A$-tól $B$ felé halad, az $\mathfrak{E}$ is ugyanoly irányú, s így a

* Talán szabad itt azt a kérdést felvetni, vajjon az angol *level-surface*-nek megfelelőleg nem használhatnók-e mi a *szintfelület* kifejezést?

megállapított törvény szerint az energia-áram a szintfelületek e két sikseregének metszővonalai, azaz a tengelyre merőleges sugarak mentén halad a drótba, ennek tengelye felé.

Tekintsük a drótnak tengelyére merőleges két sik közötti részét; a megelőzőek szerint e két alaplapon keresztül nem haladhat energia, mert ennek áramlása e lapok sikjaihoz párhuzamosan történik. Az összes beáramló energia a drót külső felületén lép be; ha még ezenkívül az áram állandó (stationárius), akkor az egész belépő energia a drótban ennek vezető-ellenállása folytán meleggé




3. ábra.

alakul át, feltéve, hogy az áramrészben ezenkívül chemiai, mechanikai, vagy másféle erélyátalakulások nem merülnek fel.

[Könnyű ezen esetre nézve — függetlenül az *T* ben előadott általános törvénytől — kimutatni, hogy a beáramló energia a tényleg kifejtett meleggel egyenértékű; de mivel e bizonyítás az elektromágnességnek egy nem egészen elemi tételén alapszik, e bizonyitást mellőzzük.]

Ezen felfogás értelmében úgy látszik, hogy az energia *egyáltalában nem halad a drót mentén,* hanem hogy az a drótot környező szigetelőből a vezetőbe beáramlik, s hogy a beáramlás kezdete után azonnal meleggé kezd átalakulni.

A befelé haladó energiának azon része, mely az egymásra következő ürhenger-alakú drótrétegeken keresztül hatol, folytonosan fogy, míg a drót tengelyéhez érve (melyben a mágnesi erő zérus, s melyen keresztül ezért energia nem is haladhat) már minden energia meleggé alakult át.

Ezek alapján azt mondhatjuk: A vezetésbeli áram az energiának az előbb jelzett módon a vezetőbe való áramlásából áll, melyet elektromindító és mágnesi erők kisérnek, továbbá ezen energiának a vezető belsejében meleggé való átváltozásából.

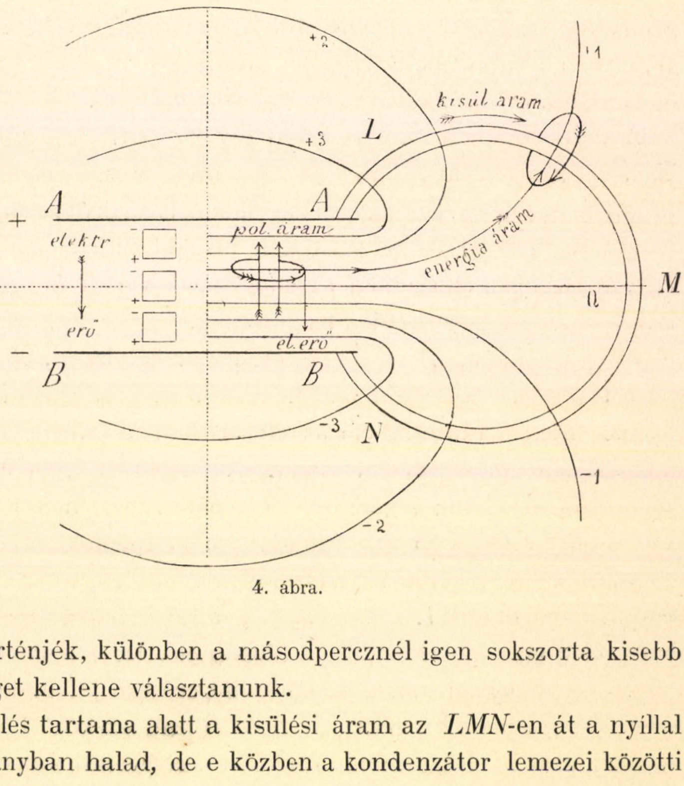
Hátra van még annak a megvizsgálása, miképen halad az energia a szigetelő közegen keresztül a vezető drót felé? A feleletet különösen a következő 2. és 3. példa adja meg.

*2. példa. Sűrítő kisülése vezető drót segélyével.*

A következőkben mindenekelőtt oly egyszerű kondenzátor lassú kisülését akarjuk tárgyalni, mely két párhuzamos, elektrostatikailag töltött lemezből áll. Ezeket igen nagy ellenállású drót segélyével kapcsoljuk egymással össze, miáltal a kisülést nagyon meglassítjuk, úgy, hogy ebben az esetben az energiának valódi útjáról elég közelítő fogalmat szerezhetünk magunknak.

Legyen (4. ábra) $A$ és $B$ a kondenzátor két lapja, $A$ pozitiv, $B$ negativ elektromossággal töltve. Akkor az ábra görbéi meglehetős közelítéssel tűntetik elő az elektrostatikai szintfelületeknek a rajz síkjával való metszővonalait. A fellépő energia ez esetben csak elektrostatikai; legnagyobb része a szigetelőnek a két lemez közé foglalt rétegeiben van felhalmozva s e rétegeknek azon kényszerállapotában jelentkezik, melyet elektrostatikai polározottságnak nevezünk (v. ö. a 311. l. 2. pontját); ábránk bal fele e réteg néhány elemének polározottságát tűnteti elő. De ezenkívül a közeg mindazon részeiben, hol elektromindító erő van jelen, létezik még ezen energia némi kis része. Az $A$ és $B$-lemezek között az elektrostatikai, azaz itt elektromindító erő $A$-tól $B$ felé hat s az elektrostatikai szintfelületek a szigetelő ezen részében igen közelítőleg a lemezekhez párhuzamos síkok.

Kapcsoljuk most az $A$-t a $B$-vel egy igen nagy ellenállású $LMN$ drót segélyével akként össze, hogy a drót a szintfelületekre mindig merőlegesen haladó elektromos erővonalak valamelyikével essék egybe (4. ábra); ezenkívül, a jelenség egyszerűsítése céljából ellenállását úgy válaszszuk, hogy egyenlő potentiál-különbségek közötti drót-részek ellenállása is egyenlő legyen. E berendezést azért választottuk, hogy az elektromos kisülési áram folyása daczára a szintfelületek alakja változatlan maradjon, habár minden egyes ily szintfelületen a potentiál értéke a kisülés folyamában folytonosan, de minden felületre nézve mégis egyenlő arányban alábbszáll. Az ellenállást azért kell oly nagynak felvennünk, hogy a kisülés igen




4. ábra.

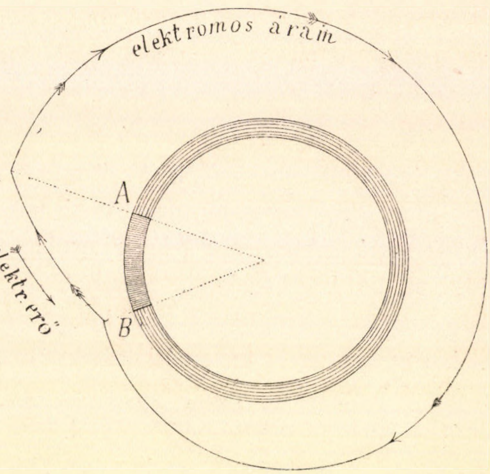
lassan történjék, különben a másodperczнél igen sokszorta kisebb időegységet kellene választanunk.

A kisülés tartama alatt a kisülési áram az *LMN*-en át a nyillal jelzett irányban halad, de e közben a kondenzátor lemezei közötti elektrostatikai feszültség a kisülés folytán folytonosan csökken, miáltal a szigetelő réteg elektrostatikai polározottsága is apad. E polározásbeli apadás pedig úgy áll be, hogy minden szigetelő elemben a pozitiv elektromosság egy része a negativ elektromosság felé halad és megforditva; szóval minden ily elemben az elektromosságok helyzetváltozása most ellenkezőképen történik, mint a kondenzátor töltésénél e szigetelő elemekben ébresztett elektrostatikai eltolodásnál. Ezek szerint a polározottságnak a lassú kisülés közben bekövetkező apadása a szigetelőben az elektromosságok oly elhelyezés-változását idézi elő, melynél minden elemben a pozitiv elektromosság $B$-től $A$-felé, a negativ elektromosság $A$-tól $B$-felé mozdul el, azaz ez az elektromos elhelyezés-változás nem más mint egy $B$-től $A$ felé irányitott eltolódásbeli (polározásbeli) áram.

Ámde minden elektromos áram körül a mágnesi erővonalak rendszere van jelen, melyek általában a vezetésbeli áramot vivő vezetőt vagy a polározásbeli áram székhelyét képező szigetelő minden részét zárt görbékben veszik körül. Elölről és felülről tekintve, e görbék az $LMN$ drót körül jobbról lefelé és balfelé haladnak, az $A$ és $B$ közötti térben pedig az óramutató járásával ellenkezőleg (4. ábra); ezek tehát a mágnesi erők irányait adják meg. Az elektromindító erő mindig a magasabb potentialú szintgörbékről az alacsonyabb potentialú szintgörbék felé irányul; az elsők itt az $A$-hoz, az utóbbiak a $B$-hez közelebb feküsznek s ez áll mind az $LMN$ drót közelében lévő, mind az $A$ és $B$ közötti térre nézve.

A kisülésnek egy oly rövid tartamú közére nézve, mely alatt a kisülési áram állandónak tekinthető, az 5. ábra mutatja a potentiáldiagrammot, úgyszintén a vezetésbeli valamint a polározásbeli áram irányát s az elektromidító erőt, mely a vezetőben az árammal egyirányú, a szigetelőben pedig vele ellentett irányú.

Minthogy az energia az elektromindító erő irányára mindig merőlegesen halad, azért az elektrostatikai szintfelületek mentén kénytelen haladni; de mivel ezenkívül az elektromágnesi erő irányára merőlegesen, azaz a mágnesi szintfelületek mentén halad: az energia, mint azt az 1. példában megmutattuk, minden oldalról beleömlik a kisülési áramot vivő $LMN$ drótba s ott meleggé alakul át (4. ábra) feltéve, hogy a kisülés oly lassan megyen végbe, hogy az áram a tekintetbe vett idő alatt állandó marad. Ámde $A$ és $B$ közötti szigetelőben az előbb emlitett, $A$-tól $B$-felé irányitott elektromindító erő az ugyanebben a térrészben $B$-től $A$ felé irányitott polározásbeli árammal *ellentett* irányú. Másfelől az energia áramlás általános törvénye szerint az elektromindító erő, a mágnesi erő s az energia-áramlás irányai a jobb sodrású csavar geometriája szerint lévén egymáshoz kapcsolva, ezen $A$ és $B$ közötti térrészben a (szigetelőben) az energia nem ömlik a polározásbeli áram*hoz*, hanem reá merőlegesen tőle *el* a szigetelő más részeibe (4. ábra). Miután az $A$ és $B$ közötti szigetelő feszültsége az $LMN$ dróton áthaladó kisülési áram folytán szakadatlanúl apad, az így eltűnő energia a szigetelőn keresztül kifelé vándorol s folytonosan követve az elektrostatikai szintfelületeket, mindinkább közeledik a drótvezető-




5. ábra.

höz s eléri ezt ott, hol ennek anyaga e felületeket metszi. Ott kezdődik ez energiának hővé alakulása. Megjegyzendő, hogy abban az esetben, ha az áram állandónak tekinthető, az energia minden egyes szintfelület mentén s ennek egész kiterjedésében mozog. (V. ö. erre nézve a III. rész kiegészítő észrevételeit).

*3. példa: Volta-féle elemet magában foglaló zárt vezeték.*

Ha valamely zárt vezetékbe Volta-féle elem van bekapcsolva, nem tudjuk kétséget kizáró módon megmondani, milyen a potentiál eloszlása az elemben, de a legnagyobb valószínűség szerint a következő: *

* Valószínű, hogy a különböző vezetőből álló és állandó áramot vivő-

Vegyük fel, hogy egyszerű, vörösréz-, czink- és savból álló elemmel van dolgunk, mely állandó áramot létesít. Ez elemben valószínűleg a czinktől a savba való átmenetelnél tetemes és hirtelen potentiálemelkedés mutatkozik (6. ábra), mely átmenetel chemiai energia kiadásával jár; a savon áthaladván, a potential esése lép fel, melyet a sav vezetésbeli ellenállása okoz; azután a savból a vörösrézbe átmenvén, a potential hirtelen esése következik be, miközben hidrogén fejlődik s erély absorbeáltatik; végül a pólusokat egybekapcsoló vörösréz drót mentén a potential lassan s folytonosan alábbszáll. Ezenkívül a vörösrézből a czinkbe való átmenetel közben a potentiálnak jelentéktelen változása áll be, melyet ábránk is feltüntet.

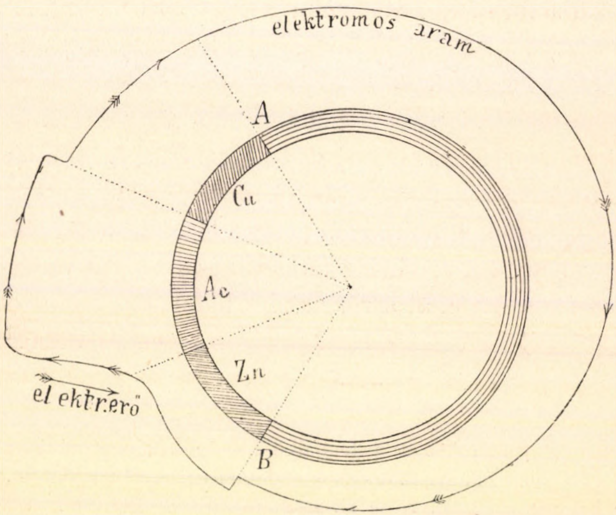
Az elektrostatikai niveau-felületeknek a zárt vezeték tengelyén áthaladó szimmetria-síkkal való metszőgörbéit a 7. ábra igen közelítőleg tünteti elő; benne e felületek mind a czink és a sav érintkezési felületéből indulnak ki; és pedig a legmagasabb potentiáluak közül egynéhány a savon halad keresztül és a czinkbe visszatér, míg a következők a savon át a vörösrézbe hatolnak s e fémben sűrűn összetömörülnek; végre a többiek, melyek potentiálja alacsonyabb, mint a megelőzőeké, a pólusokat egybekapcsoló vezetőt derékszög

---

zárt vezeték két pontja közötti potentiálkülönbség meghatározásának egyedül jogosult módja abban áll, azt az összes energiamenynyiséget megtalálni, melyet a vezeték e két pontja közötti része kibocsát, mialatt az elektromosság egysége e pontok (keresztmetszetek) mindegyikén áthalad. Ha ez tényleg úgy van, akkor lehetetlennek látszik, hogy két különböző fém egymással érintkező felülete az elektromindító erő főszékhelye legyen, mert ott az energiának a PELTIER-féle hatás folytán felmerülő, csak jelentéktelen kifejtése vagy elnyeletése mutatkozik (V. ö. a 4. példa *b)* pontját). Ezért itt a VOLTA-féle zárt áramvezeték azon elméletét fogadtuk el, melynél az elektromindító erő egyedüli vagy legalább főszékhelyeül a sav és a fémek közötti közös érintő-felületeket tekintjük. Azok a nagy potentiál-differentiák, melyeket elektrométeres módszerek alapján két különböző, egymással érintkező fém közelében lévő levegőrészek között találtak, ezen felfogás alapján ama feltevésből magyarázhatók, hogy a levegő itt oxidáló elektrolit módjára hat. (Ezen elmélet rövid áttekintését J. MAXWELL az «Electrician» czímű folyóirat szerkesztőségéhez 1879. ápril 26-án k. levelében adta, mely «Elementary Treatise on Electricity» (Az elektromosság elemi tankönyve) könyvében is van idézve. L. még J. C. MAXWELL: Treatise on Electricity and Magnetism, vol. I., 249. §., 1884. junius 19.]

alatt oly pontokban (keresztmetszetekben) szelik, melyek közei egyenlő potential-esést képviselnek.

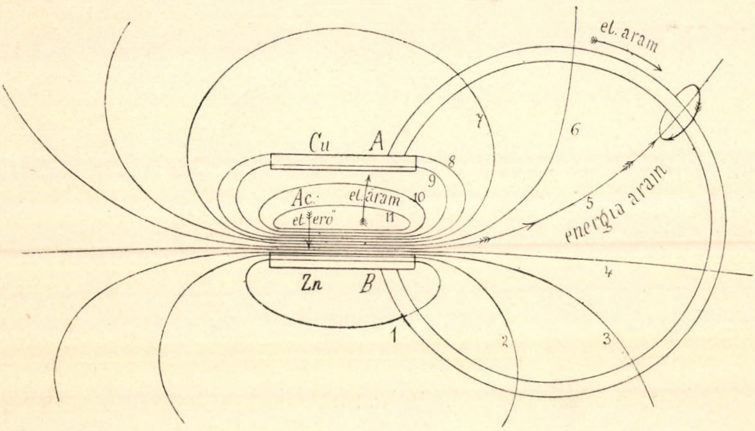
Ha ez a szintfelületek tényleges eloszlása, akkor először is észreveszszük, hogy az elem elektromindító ereje a magasabb potentiálú vörösréztől, *Cu*-tól az alacsonyabb potentiálú czink, *Zn*-felé van fordítva és pedig úgy az elemben, mint az azon kivül levő térben. De azt is látjuk (6. ábra), hogy a czinktől a savon át a vörösréz felé haladó áram iránya ellentett az ott uralkodó elektromindító erő-




6. ábra.

vel, míg az árammal járó (elektro-) mágnesi erő ehhez a közönséges kapcsolatban áll (1. példa). E szerint itt az energia a savból a szintfelületek mentén halad kifelé a közegbe (7. ábra). A czink és a vörösréz közötti közeg (a sav) itt épen úgy viselkedik, mint a 2. példában a két kondenzátor közötti szigetelő s így lehetségesnek látszik, hogy itt a chemiai hatás folytonosan új, a savtól a czink felé irányított elektromos palározottságot (eltolódást) létesít, mely polározás ismét épen oly gyorsan apad, a mint keletkezett, míg a polározásbeli energia kifelé halad. Az energia azon része, mely a legmagasabb potentiálú szintfelületek mentén halad, a savban marad s ott végre meghatározott arányban hővé alakul át. Másik része azon szintfelületek mentén mozog, melyek a sav és a vörösréz között vannak összeszorulva és ott pótolja a fejlődő és eltávozó hidrogéntől elvitt energiát. Az energia hátramaradó része a környező közegben elterjed, hogy végre a zárt vezeték különböző helyein benyomuljon és ott JOULE törvénye értelmében hővé átalakuljon.

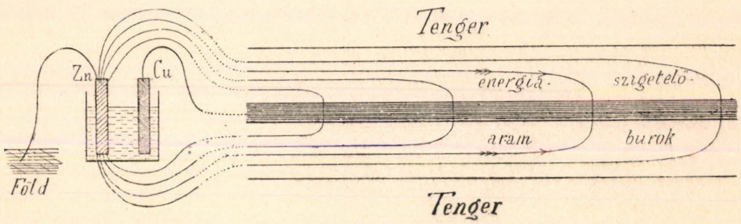
Megjegyzendő, hogy ha az egymásra következő szintfelületek egyenlő potentiál-különbséggel vannak rajzolva, akkor egymásra következő két szintfelület között egyenlő időközökben egyenlő ener-




7. ábra.

gia-mennyiségek is áramolnak ki. Mert a vezetőnek ama részében, melyben a végkeresztmetszetek potentiál-különbsége $V$, az energia oly része alakul át hővé, melynek értéke $V \times$*áramintenzitás*; ezért is az energia ama részei, melyek egyenlő potential-külömbséggel biró két-két szintfelület között átalakulnak, egyenlő értékkel is birnak. Minthogy pedig az elektromágnesi tér és az áram állandó, azért ezen átalakult energia is egyenlő a VOLTA-féle elemből ugyanezen szintfelületek között kiömlő energiával, mivel ily állandó viszonyok között az energia sohasem hatolhat át a szintfelületeken. Ez az állítás közvetlenül is bebizonyítható, de helyességének belátására a fentmondottak elegendőknek látszanak.

Ez eredményünknek egy folyományát, bár jól ismeretes, érdemes itt felemlíteni. Jeleljék $V_1$ a czink és a sav, $V_2$ pedig a sav és a vörösréz közötti potentiál-különbséget. Ha $i$ a vezetésbeli elektromos áram erőssége, akkor a czink felületéből az időegység alatt kiáramló összes energia mennyisége $iV_1$. Ezen energiának $iV_2$ része a vörösréz felületen nyeletett el, míg a fenmaradó rész, t. i. $i(V_1 - V_2)$ a zárt áramvezetékben átalakul. Ezért az összes kibocsátott energiának eme törtrésze, mely az áramkörben átalakul, $\frac{V_1 - V_2}{V_1}$. Ezen eredmény nyilván ama hőmennyiség viszonyszámával analog, mely a megfordítható hőgépben munkává alakitható át.

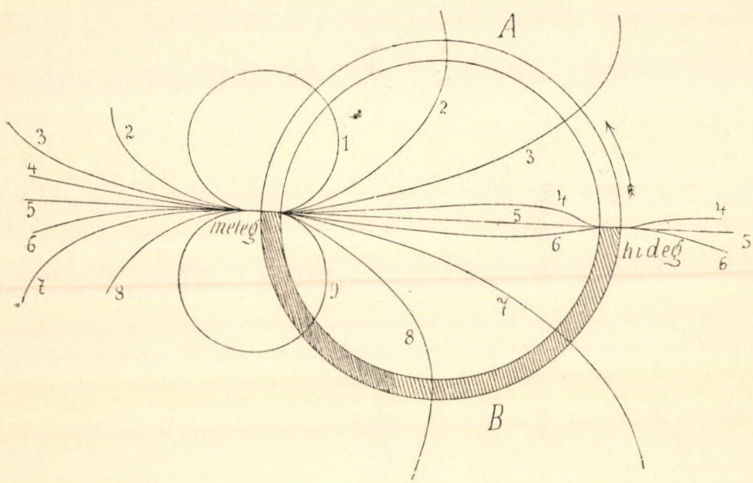



8. ábra.

Legyen szabad itt még az energia ezen mozgásához egy vagy két érdekes, a Volta-féle zárt árammal kapcsolatos esetet értelmeznünk.

*a)* Felveszszük, hogy tengeralatti kábelen át oly telep segélyével küldünk áramot, melynek czink pólusa a földbe van levezetve s még felveszszük, hogy a kábel burkolatjának a tengerrel érintkező külső felülete mindenütt a földével egyenlő, azaz zérus potentiállal birjon. Ekkor a vezető drót potentiálja mindenütt magasabb, mint a környezeté s igy a szintfelületek a telepből kiindulólag részben a levegőn, részben a földön keresztül a burkolatba, s folytatólag a szigetelő burkolaton keresztül a vezető azon pontjáig (keresztmetszetéig) haladnak, melyekben a drótot metszik (8. ábra). E metszés a vezető drót hosszirányára merőleges, mivel ezen hosszirány mentén történik az elektromos áramlás, ez áramlás pedig mindenütt merőleges a szintfelületekre. E szerint ez esetben az áramot fentartó energia a szigetelő anyagon keresztül mozog, míg a kábel magva, a drót csak eszköz, vagyis inkább közeg gyanánt szolgál, mely az energiának a mozgását közvetíti.

*b)* Ha másrészt valamely zárt vezetékben az áram egyedüli hatása a melegkifejtés, akkor oly energiával van dolgunk, mely a drótba behatol, ott az átalakulás bizonyos nemét szenvedi, s ismét mint meleg és fény kiáramlik. Ha Maxwell elektromágnesi fényelmélete helyes, akkor ez az energia ismét mint elektromos

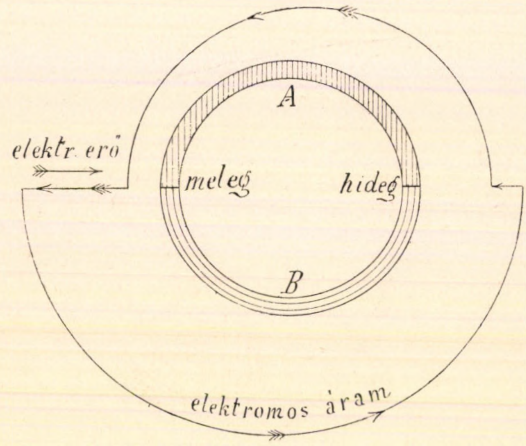



9. ábra.

és mágnesi energia áramlik ki, de bizonyos sebességgel és periodikus jellegű módon. E szerint például az elektromos fénynél avval a sajátságos eredménynyel állunk szemben, hogy az energia a környező közegből a lámpa fényívébe vagy a szén fonalába beáramlik, ott más alakot ölt s onnét ismét kibocsáttatván, érzékeinkre hatni képes, habár lényegében véve ugyanaz maradt.

*4. példa: Thermoelektromos áramok.*

*a)* Mindenekelőtt két nem vasjellegű (mágnesezés iránt közömbös) vezetőből álló zárt vezetéket veszünk tekintetbe. Az áram a meleg forrasztási helyből, az $A$ fémből a $B$ fém felé haladjon * (9. és 10. ábra). Ha az áram állandó, akkor ez esetben a meleg forrasztási helyen az $A$-tól $B$-felé való átmenetelnél igen valószínűleg hirtelen potentiálemelkedés lép fel, erre a $B$ mentén a potentiál folytonos esése s ez irányban tovább haladva, a hideg forrasztási helynél hirtelen esése következik be, — mely utóbbinak értéke kisebb, mint a meleg helyen való hirtelen emelkedés — végre pedig az $A$ mentén a potentiál ezentúl folytonosan esik (10. ábra).




10. ábra.

Ezen esetben az egypotentiálú felületek mind a meleg forrasztási helyből indulnak ki, a magas potentiálú szintfelületek a zárt

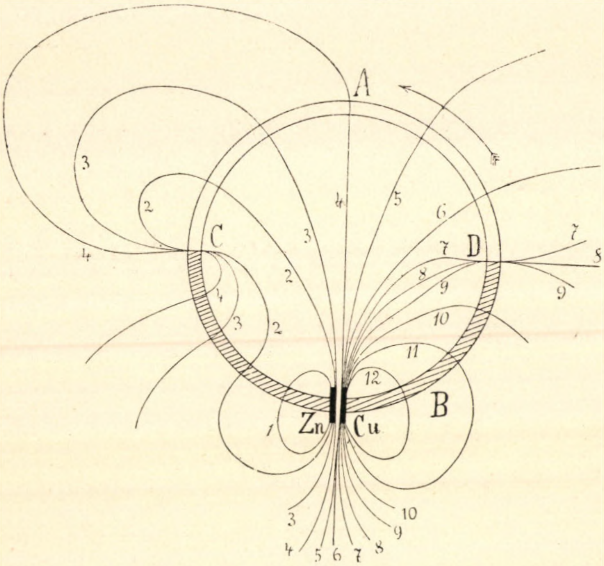
* G. P. TAIT kisérletei és elmélete szerint (MAXWELL i. h., I. köt. 254. §.) ekkor a meleg forrasztási helyen fellépő elektromindító erő oly viszonyban állana a hideg forrasztási helyen levő elektromindító erőhöz, mint e két hely absolut hőmérséke. Ha ugyanis $T_0$ az absolut hőmérsék, melynél a két fém egymáshoz közömbös, $T_1$ a meleg, $T_2$ a hideg forrasztási hely absolut hőmérséke és $a$ a két fém természetétől függő együttható, akkor e két helyen uralkodó elektromindító erő $\mathfrak{E}_1$ és $\mathfrak{E}_2$:

$$\mathfrak{E}_1 = a\,T_1\left\{T_0 - \tfrac{1}{2}(T_1 + T_2)\right\};$$
$$\mathfrak{E}_2 = a\,T_2\left\{T_0 - \tfrac{1}{2}(T_1 - T_2)\right\};$$

s az eredő elektromindító erő: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2$.

vezetéket a $B$-ben egymásra következő pontokban metszik, nehány felület a hideg forrasztási hely felé konvergál, a többi pedig az áramkört az $A$-ban egymásra következő pontokban metszi.

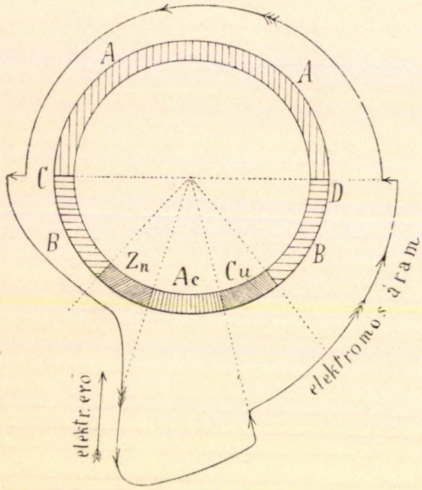
A meleg forrasztási hely melegének egy része elektromos és mágnesi erélylyé alakúl át, mely itt *kifelé* a környező közegbe mozog, mert ezen a helyen az elektromindító erő (mely mindig a magasabb potentiálú pontoktól az alacsonyabb potentiálú pontok felé van




11. ábra.

fordítva) az árammal ellentett irányú (10. ábra). Ezen energia egy része a $B$ és $A$ vezetőkbe ömlik, hogy ott Joule törvénye értelmében meleggé alakuljon át; egy másik része a hideg forrasztási helybe megyen, s ott az ismeretes Peltier-féle melegedést hozza létre.

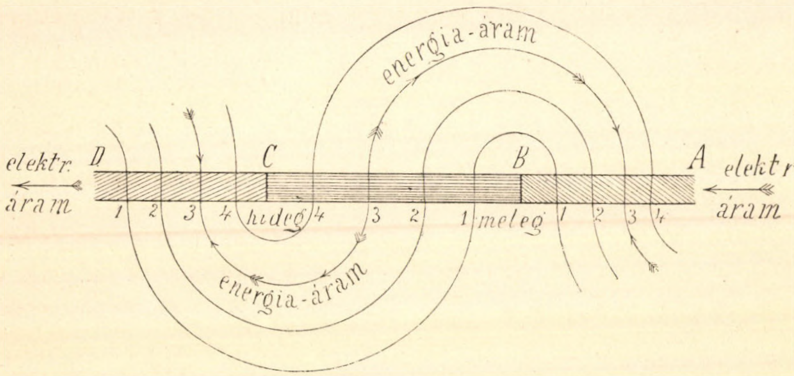
*b)* Tekintsünk most oly zárt áramkört, mely az *a)* alatti esetben említett, de most kezdetben egyenlő hőmérsékűnek tekintett két fémből és egy a $B$ fémbe bekapcsolt telepből álljon (11. ábra), mely utóbbi oly irányú áramot szolgáltasson, a milyen a megelőző esetben a thermoáram (9. ábra). Ha most $C$ az a forrasztási hely, mely a megelőző példában meleg volt és $D$ az, mely ott hideg volt, akkor a tapasztalásból tudjuk, hogy a telep létesítette áramnak törekvése $C$-t lehűteni, $D$-t pedig felmelegíteni. Ha most $C$ közelében $A$ fémből $B$ fémbe megyünk, akkor $C$-nél a potentiál hirtelen emelkedése s $D$ közeléből $B$-ből $A$-ba haladván, $D$-ben a potentiál hirtelen esése fog bekövetkezni (12. ábra). Minthogy továbbá a potentiál folytonosan esik, ha az árammal $A$ fém mentén haladunk, azért $C$ közelében az $A$-ban oly pontnak (keresztmetszetnek) kell léteznie, melynek potentiálja épen oly nagy, mint a $B$-nek a $C$ forrasztási helyen való potentiálja. Ezen ponttól kezdve a $C$-ig terjedő részében az $A$ fémnek a potentiál értéke kisebb, mint e nevezett potentiál; mivel pedig $C$-ből kiindulólag $B$-ben az áram mentén haladva, a potential folytonosan esik: azért a $C$ közelében $A$-ban és $B$-ben oly megfelelő pontok párjai fognak létezni, mely ($C$ két oldalán fekvő megfelelő) pontokban a potential értéke egymással egyenlő. Ekkor tehát a $C$ forrasztási helyen átmenő szintfelületeknek vagy zárt felületeknek kell lenniök, melyek $A$-t vagy $B$-t metszik s melyek a telepet egyáltalában nem érintik, vagy pedig, a mi valószínűbbnek látszik, azok a felületek, melyek a telepből indulnak ki és $C$-n áthaladnak, a zárt áramvezetéket a telepen kívül három helyen metszik: egyszer valahol az $A$ fémben, egyszer a $C$ forrasztási helyen és egyszer valahol a $B$ fémben. Ezért a 11. ábrában a szintfelületek ezen feltevés szerint vannak számozva,




12. ábra.

Ennek értelmében a zárt vezetéknek a $C$ közelében lévő részeiben kifejtett meleg részben a $C$ forrasztási helyből kerül ki, hol az áram az elektromindító erővel ellenkező irányban halad. E szerint az energia e helyből kifelé, a környező közegbe mozog, a mi lehülésnek felel meg.

*c)* Az ú. n. Thomson-hatást, mely az áram átfolyta vasdrót sajátszerű magaviseletére vonatkozik (l. alább), körülbelől ugyanily módon lehet tárgyalni. Vegyük fel, hogy egy vastipusú (mágnesezhető) fém, melynek hőmérséke $B$-től $C$ felé fogy (13. ábra), két semleges, ólomtipusú (nem mágnesezhető) fém között helyet foglalva, egy zárt áramvezeték egy részét alkotja; egyszerűség kedvéért vegyük még fel, hogy az ólomtipusú két fém $BC$-re vonatko-




13. ábra.

zólag neutrális hőmérséken legyen, úgy, hogy e forrasztási helyeken elektromindító erők nem lépnek fel. Ha most külső elektromindító erő segélyével (mely a zárt vezeték valamely részében, talán valamely forrasztási helyen is létesíttetik) elektromos áramot küldünk $A$-tól $D$ felé, akkor a potentiál általában véve $A$-tól $D$ felé való esés hajlamával fog birni. Ámde tapasztalati tény, hogy a vasban meleg helyről hidegebb hely felé haladó áram e fémet lehűti, ez pedig annyit mond, hogy az energia, mely e vezetőben meleg alakjában van jelen, részben e fémből kifelé ömlik. Ámde, mint már a 2. példában láttuk, ez csak úgy lehetséges, hogy e fémben az elektromindító erő az árammal ellentett irányú. E szerint a potentiálnak a vasban az a törekvése, hogy $B$-től $C$ felé emelkedjék s ez tényleg be is következik, ha a *BC* fémrésznek ellenállása a zárt vezeték többi részeinek ellenállásához képest elhanyagolható.

Ez esetben a szintfelületek valószínűleg oly alakúak és eloszlásúak, mint a hogy a 13. ábra őket mutatja, melyben potentiáljuk értéke szerinti sorrendben vannak megszámozva; itt mindazok a szintfelületek, melyek a *BC* vasat metszik, egyszersmind az *AB* és *CD* fémeket is metszik s a vasból kiáramló energia az *AB* és *CD* fémeknek a forrasztási helyek közelében lévő részeibe behatol s ott meleggé alakul. Ha most a *BC* vas ellenállását folytonosan növeljük, akkor a potentiálnak az Ohm törvénye szerinti apadása az előbbi növelést kisebbíteni törekszik s ekkor kevesebb szintfelület fogja a *BC* vasat metszeni. Talán lehetséges volna akkor e viszonyokat úgy szabályozni, hogy a nevezett emelkedés és apadás egymással egyenlő legyen és így egymást megsemmisítse; ekkor, daczára a vezetéken áthaladó elektromos áramnak, energia a *BC* vasba sem be nem halad, sem kifelé nem áramlik. Ez esetben csak a *BC* körüli mágnesi erővonalak volnának jelen s kívülök a zárt vezeték ezen részében az áram semmiféle más jellemzője nem lépne fel.*

Ha ez a Thomson-hatás valódi előtüntetése, akkor úgy látszik, hogy ezt nem kellene az elektromos áram okozta melegabsorptió vagy melegkifejtés gyanánt előtüntetni, hanem inkább az energiának a vasból kifelé vagy abba befelé haladása gyanánt, a szerint, a mint az elektromindító erő egyenetlenűl melegített vezetőkben az elektromos árammal ellentett- vagy pedig egyenlő irányú.

*5. példa. Mótort magában foglaló áramkör.*

Ez az eset teljesen hasonlít a harmadik példához, t. i. ahhoz, melyben a zárt áramvezeték egy vörösréz-sav-czink elemet foglal

---

* Ez talán a *BC* vas drótra, mint egészre nézve áll. Ha a hatásokat a kicsiny részekben is tanulmányozhatnók, akkor lehetséges volna, hogy a hőmérsék-különbségből eredő elektromindító erőnek székhelyéül nem azt a helyet találnók, mint a mely az Ohm törvényéből számított azon elektromindító erőre nézve következik, mely az előbbit semlegesíti. Az egyiknek székhelye pl. a molekulák között lehetne, a másiké a molekulák belsejében, úgy hogy a molekulák között vagy a molekulák egyes részei között oly energia-csere léphetne fel, melynél a drótból való kiáramlásra fölösleges energia nem maradna.

magában; jelen esetünkben a mótor oly szerepet visz, mely analog a sav és a vörösréz érintési felületével. Egyszerűség kedvéért vegyük fel, hogy a mótornak nincsen belső ellenállása. Ha sebessége zérus, akkor valamennyi szintfelület metszi a zárt áramvezetéket s az az összes energia, mely az áramot szolgáltató dinamogépből vagy telepből kiáramlik, egészen ellenállásbeli meleggé változik.

De ha a mótort mozgásba hozzuk, az áram csökken s a szintfelületek a mótor felé kezdenek konvergálni s már kisebb számban metszik az áramvezetéket. E szerint ekkor az energiának egy része a mótorba halad és ott munkává alakittatik át. Ha a mótor sebessége növekszik, akkor azon niveau-felületek száma, melyek a zárt áramvezetéket metszik, fogy, mert az áram maga gyengébb lesz s vele együtt Ohm törvénye értelmében a potentiál esése az áramkör mentén apad s ha végre a mótor sebessége igen nagy, akkor az áram is igen gyenge lesz.

Ha a mótor sebessége végtelen nagy, akkor ezen határesetben egy szintfelület sem metszi a zárt vezetőkört, hanem valamennyi a mótorba halad, azaz: az áramot szolgáltató dinamógépből vagy telepből származó összes energia a mótorba megyen, melyben munkává alakittatik át. E szerint itt a berendezés hasznossági tényezője teljes (azaz az egység), míg maga a végzett munka persze végtelen kicsiny.

*6. példa. Indukált áramok.*

Nem könnyű dolog, magunknak azon energia-mozgásról átnézetes képet alkotni, mely bekövetkezik, mikor az elektromágnesi tér változik és indukált áramok keletkeznek. Mindazonáltal általánosságban beláthatjuk, hogy ezen áramok miképen keletkezhetnek.

Ha valamely térben állandó áram létezik, akkor ennek az energia bizonyos meghatározott eloszlású térbeli mozgása felel meg. Ha e térben egy másodrendű áramvezető van jelen, akkor e vezetőben mindaddig, míg az elsőrendű áram állandó marad, semmiféle elektromindító erő nem léphet fel, mert e másodrendű vezető minden pontjában a potentiál ugyanaz. Ennek értelmében e vezető külső felülete egy szintfelület s így, ha e vezető szomszédságában egyáltalában energia-áramlás létezik, akkor ez csakis a felület *mentén* történhetik, vagyis az energia a vezető külső felülete mentén halad, de a vezető belsejébe nem hatol s abból ki sem áramlik, hanem úgy áramlik a vezető körül, mint például valamely folyadék egy szilárd akadály, egy sziget körül áramlik. De a mint az elsőrendű áram helyzete vagy erőssége változik, a térben az energia-áramlás változása következik be. Mindaddig, míg e változás tart, a tapasztalás szerint a másodrendű zárt vezeték anyagi vezetőiben múlékony elektromindító erő fog fellépni, mely vele egyirányú áramot s hozzátartozó mágnesi erővonalakat létesit; e szerint az energia egy része a vezetőbe be fog hatolni s ott részben meleggé, részben munkává alakúl át, szóval ez az egész folyamat az indukált elektromos áram jelensége.

7. *példa. A fény elektromágnesi elmélete.*

MAXWELL felfogása szerint (i. h. II. köt. 781—805. §§.) az elektromos és a mágnességi erőváltozások a vezető s a szigetelő közegekben oly sebességgel terjednek tovább, mint a fény; sőt a fényjelenségek maguk is periodikus elektromágnesi zavarokból állanak. HERZ hires kisérletei az elektromágnességi erők s hatások terjedési sebességét, törését s visszaverődését kisérletileg megállapitották s evvel e felfogást igen plausibilissé tették.

MAXWELL szerint e jelenségeknél a mágnesi erő merőleges az elektromos erőre és továbbterjedésük $v$ sebességének iránya mindkettőre merőleges. Ha a térfogategységnyi köb élei ezen irányokhoz párhuzamosak, akkor a sugárzó energia $1:v$ idő alatt halad rajta végig s mozgásának törvénye szerint e köbre nézve áll

$$\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{M}}{4\pi v} = \frac{K\mathfrak{E}^2}{8\pi} + \frac{M\mathfrak{M}^2}{8\pi}.$$

További tárgyalások, melyek részletezése itt messze vezetne, azt adják, hogy $v = 1 : \sqrt{MK}$ és $\mathfrak{M} = Kv\mathfrak{E}$; miből következik, hogy ezen elektromágnesi fényjelenségeknél minden térfogati elemben az elektromos és a mágnesi energia egymással egyenlő értékű.

### III. Kiegészítő és befejező megjegyzések.

1. J. C. Poynting idézett értekezései közől az elsőt a következő szavakkal fejezi be:

«A felsorolt példák talán elegendők annak a kimutatására, mily könnyű dolog nehány általánosan ismert kisérleti tényt az energiaáramlás fent megállapitott általános törvényével összhangzásba hozni.

Nem tudom bizonyosan, vajjon eddig létezik-e szigorú elmélet azon útra nézve, melyen a zárt áramvezeték különböző részeiben fejlesztett energia tovább mozog; de úgy gondolom, fennáll az az általános, kissé bizonytalan nézet, hogy az energiát az elektromos áram a vezető mentén tovább szállítja. Valószinű, hogy a Maxwell-től származó, a közegben lévő energia egyik tényezőjének megjelölésére szolgáló, «elektromos eltolódás» (displacement) kifejezésnek bevezetése eme vélemény támogatására szolgált. Nagyon nehéz dolog szabatosan szem előtt tartani azt, hogy ez az «eltolódás» vagy «elhelyezés» a mennyiben róla egyáltalában valamit kimondani képesek vagyunk, csak valami iránymennyiség, mely az összenyomhatatlan folyadékok- vagy a szilárd testekben fellépő valóságos eltolódások néhány tulajdonságával bir. Ha azt tapasztaljuk, hogy Maxwell szerint az «eltolódás» az áramot vivő vezetőben az idővel folytonosan növekszik, akkor majdnem lehetetlen elkerülni azt, hogy ezen «eltolódást» ne úgy képzeljük, mint a mely a vezető mentén mozog és csak egészen természetszerűnek látszik ezt az «eltolódást» az energia továbbszállitására alkalmas képességgel felruházottnak tekinteni.

[Természetesen kiderülhet az, hogy az elektromos erővonalak mentén tényleg eltolódás bekövetkezik. De épen úgy lehetséges, hogy az elektromos «eltolódás» csak függvénye a valóságos eltolódásnak és képzelhető, hogy különböző elméletek állithatók fel, melyekben e függés lehetséges, míg ez elméletek a megfigyelt tényeknek, mind megfelelnek. Glazebrook (Phil. Mag. 5 ser. 11 köt. 397 l. 1881) az utóbbi években már kidolgozott egy ily elméletet, melyben a tér valamely pontjában fellépő elektromos eltolódás $x$-menti componense $\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)$ értékkel egyenlő, hol $\xi$ a valóságos eltolódás $x$-menti összetevője.]

Úgy látom, mintha az «eltólódás» kifejezésének használata kissé szerencsétlen volna, mivel gondolkodásunkat oly sok be nem bizonyított, esetleg hamis dolog elképzelésére készteti, míg másrészt igen nehéz szem előtt tartani, hogy tulajdonképen mily keveset fejez ki.

Ezen oknál fogva nehány esetet, melyben az áramot vivő zárt vezetékben végbemenő energia-átvitelnek módja a fent közlött törvény értelmében meg lesz határozva, kissé terjedelmesebben tárgyaltam, mert azt gondolom, hogy okvetetlenül szem előtt kell tartanunk, miszerint MAXWELL-nek a közegben lévő energiáról való felfogását elfogadva, már nem szabad az áramot olyasminek tekintenünk, a mi a vezető mentén energiát szállít el. A vezetőben lévő áramot ellenkezőleg úgy kell felfognunk, hogy ez lényegében véve az elektromos és mágnesi energiának a nem vezető (szigetelő) közegből a vezetőbe való áramlásából s ez energiának ott más alakokba való átváltozásából áll. Az u. n. elektromindító erőnek székhelyén áthaladó elektromos áram lényegében véve az energiának a vezetőből az azt környező nem vezetőbe történő kiáramlásából áll.

A mágnesi erővonalak a vezető minden részére nézve az áramkörhöz képest mindig egy s ugyanazon irányú zárt görbéket képeznek, míg az elektromos erővonalak az áramkörnek két főrészében ellenkező iránynyal bírnak és pedig az árammal *egyirányúak* a vezető egész hosszában, a hol elektromindító erő nincsen, az elektromindító erő székhelyén (illetőleg székhelyein) pedig az árammal *ellentett irányúak*. Ezen felfogásból következik, hogy egy állandó áramot vivő *zárt* vezeték (zárt vonal) mentén az elektromindító erő összegét képezvén: *zérust* nyerünk, azaz, hogy az a munka, melyet végzünk, ha a pozitiv elektromosság egységét az áram mentén a zárt áramkörön egyszer végig viszszük: zérus értékű. Ugyanis ezen egységnek az energia székhelyében az elektromindító erővel ellentett irányban való mozgatása közben munkát kell végeznünk, miközben ez a munka ugyanannyi energiát bocsát ki a közegbe; míg az áramvezeték hátralevő részébe, melyben ez az egység az elektromindító erő mentén lesz mozgatva, ugyanily mennyiségű energia ömlik be.

A zárt áramkör különböző részeinek egymás közötti vonatkozásainak ezen tárgyalási és felfogási módja — a mennyire tájékozva vagyok — a különben szokásos eljárástól nagyon elütő, de úgy látom, mintha e felfogás jobban adna számot az ismert tapasztalati tényekről. Első tekintetre úgy tetszik, mintha az energia mozgásának ezen módjáról, ha az tényleg így történik, új kisérleti bizonyítékokkal kellene bírnunk; mintha ott kellene bizonyítékokat keresnünk, hol az energia más alakokba átváltozik, t. i. a vezetőkben. Ámde, ha a tér stationárius állapotban van, akkor a benne elhelyezett (az áramkörrel össze nem függő, másodrendű) vezetőben nincs elektromindító erő s így e vezetőben az energia nem bír mozgással és nem szenved átalakulást. Az energia csak e vezető külső határfelülete körül áramlik, feltéve, hogy az energia e vezető közelségében egyáltalában mozgásban van. Ha az elektromágnesi tér változó, akkor az energia behatolhat a vezetőbe, mivel ekkor a vezetőben időleges elektromindító erő keletkezhetett s evvel kapcsolatban az energiának átváltozása is bekövetkezhetik. De az átváltozás ezen nemét tapasztalatilag már jól ismerjük: ez az indukált áramot létesíti s alkotja.

Hiszen tényleg az az alapegyenlet (314. l.), mely az energia mozgását kifejezi és meghatározza, csak MAXWELL elektromossági és mágnességi egyenleteiből van leszármaztatva, melyek úgy vannak képezve, hogy az eddig ismert összes e fajta kisérleti tényeket magukban foglalják. Ezek között a másodrendű vezetőkörökben fellépő inductio törvényei is vannak és ezért ez utóbbiaknak az energia mozgásának törvényével megegyezésben kell lenniök. E szerint az eddig ismert kisérleteken kívül alig remélhetjük e törvény további igazolását, hacsak nem fedeztetnek fel új kisérleti módszerek arra nézve, hogy azt, a mi a szigetelőben végbe megyen, a másodrendű vezetőkörtől függetlenül lehessen megvizsgálni.»

2. Ezen utolsó pontra vonatkozólag azóta némi tapasztalásaink vannak, melyek azonban e kérdésre kimerítő feleletet nem adnak.

J. BORGMANN idézett dolgozatában, valamint W. SIEMENS is kimutatták, hogy az intermittáló elektromozásnak alávetett kondenzátorok szigetelő üvege észrevehetőleg, thermo-áramokkal kimutatható módon felmelegedik. Hasonlóképen kimutatta Sylvanus P. THOMSON fent idézett dolgozatában, hogy e szigetelőben keletkező eltolódási (polározásbeli) áramok tényleg birnak mágnesi hatással. Ugyanis egy Ruhmkorff-induktor két sarkát a sűrítő két lapjával egybekapcsolván, ebben intermittáló elektromozás létesűlt. A lapok közötti szigetelőben a lapokhoz párhuzamosan szigetelt dróttal körültekert lágy vasgyűrű volt elhelyezve s a drót végei telefonnal összekapcsolva. A vasgyűrű a szigetelő rétegben fellépő intermittáló polározásbeli áram behatása alatt váltakozva megmágnesedett és lemágnesedett. A telefonban hallható hangok jelezték e jelenség lefolyását.

De e kisérletek nem elegendők az energiának a szigetelőben végbemenő mozgásának tényleges konstatálására s e tovább haladásnak pontról pontra való követésére.

3. Ezért Poynting és utána J. J. Thomson idézett értekezéseikben, különösen az utóbbi, elméletezés alapján törekedtek e mozgás mibenlétének magyarázatára. Mindkettő az elektromos inductio-csövek létezéséből indul ki * s ezekből, valamint ezeknek az elektromos térben való mozgásából vezetik le az elektromágnesi tér legfontosabb tulajdonságait. Épen úgy lehetne a mágnesi inductio-csöveket alapul venni; de kétségtelen, hogy az elektromos csöveknek nagyobb jelentőséget kell tulajdonitanunk, már csak azért is, mert az elektromos jelenségek Faraday elektrolytikai törvénye révén az atom-szerkezettel a legszorosabban vannak egybefűzve s mert az elektromos áram mindig létesít mágnesi hatásokat, míg mágnesek, ha helyzetük és állapotuk állandó, nem létesitenek elektromos hatásokat.

Maxwell felfogása szerint az egész elektromos tér ily csövekbe van osztva s Poynting most feltételezi, hogy az elektromos inductio-

* Ha a tér bármely pontján uralkodó elektromos erő irányára merőleges kis lapot szerkesztünk s e lap valamennyi kerületi pontján áthaladó elektromos erővonalakat meghúzzuk: akkor az ezen erővonalak által határolt csőalakú tér-részt elektromos erőcsőnek nevezzük. Hasonlóképen szerkesztődnek a mágnesi erőcsövek a mágnesi erővonalakból.

E csöveket még inductio-csöveknek is nevezik, mert geometriai tengelyük mentén történik mindenütt a mágnesi vagy elektromos inductio.

csövek az elektromindító erő székhelyéből kiindulnak s az áramot vivő drót felé haladnak, ott eltöretnek vagy feloszlatnak, míg a mágnesi inductio-csövek a vezető sodrony felé szűkűlve, összehúzódnak s végre a vezetőben látszólag elenyésznek. Az eképen az elektromágnesi térből kilépett csöveket az elektromindító erő székhelyéből kinövő új meg új ily csövek helyettesítik. Így a 2. példában tárgyalt kondenzátor kisülésénél az elektromos erővonalaktól körülvett inductió-csövek a kondenzátor szigetelő rétegéből kifelé s oldalvást úgy mozognak, hogy végeik először a kondenzátor-lapok, azután az összekötő kisülési drót mentén haladnak. E végeken egyszersmind a csőben lévő elektromos energia a drót fémtömegébe behatol, ott szétbomlik s meleget létesít, míg teljesen feloszlott. A térnek mágnesi energiája az elektromos inductio-csövek ezen haladása által létesül (l. alább). Állandó áram keletkezik, ha egy helyen mindig új meg új inductio-csövek létesíttetnek. Az inductio-tekercsben az indukált áram az által gerjesztetik, hogy az indukáló áram inductio-csöveinek egyes részeit az inductio-tekercs menetei felfogják.

E felfogás szerint az elektromos áramnál a szigetelőben játszódik le a jelenségnek első (primarius) része, a drót maga csak másodrendű szereppel bír. A kábeleken a szigetelő burok az energia vezetője.

J. J. Thomson a fentjelzett Maxwell- és Poynting-féle feltevéseken kívül még felveszi, hogy a molekulákban, az atomok között is vannak inductio-csövek, de ezeknek az elektromos térre befolyásuk nincs.

Az inductio-cső sem ujból nem teremthető, sem el nem enyészhetik teljesen; ha az elektromos térből kilép, úgy, hogy ott már többé nem mutatható ki, akkor csak saját molekuláris méreteire huzódott össze s evvel mindig chemiai egyesülés jár. Megfordítva, nagyobb hosszaságú inductio-csövek, melyek az elektromos térre befolyással vannak, csak a molekuláknak szabad atomokba való bontásánál keletkeznek, mely szétbontás által az előbb rövid inductio-csövek meghosszabbodnak.

Mathematikai fejtegetések, melyek az elektromosság és mágnesség tapasztalati alaptételeiből indulnak ki, de a melyeket itt mellőzünk, bebizonyítják, hogy a mozgó elektromos inductio-cső oly mágnesi erőt létesít, melynek iránya az elektromos erő irányára és a cső mozgásának irányára merőleges és melynek nagysága =

$$= 4\pi \times \textit{az inductio-cső erőssége}^{*} \times \textit{a reá merőleges sebességi összetevő}.$$

Az inductio elektromos sajátságait J. J. THOMSON könnyen nyeri: Ha $\mathfrak{M}$ a mágnesi, $\mathfrak{E}$ az elektromos erő, $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$, illetőleg $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$ a componenseik, $f, g, h$ azon egység-erősségű csövek száma, melyek a szigetelőben a coordináták síkjaihoz párhuzamos területegységeken áthaladnak, $u, v, w$ pedig e csövek sebességi componensei, akkor:

$$\mathfrak{M}_x = 4\pi(hv - gw) \text{ stb.}; \quad \mathfrak{E}_x = \mathfrak{M}_y w - \mathfrak{M}_z v \text{ stb.}$$

s ez utóbbi egyenletekből, melyek az $\frac{\mathfrak{M}^2}{8\pi}$ mágnesi energiának az $f, g, h$ szerinti differentiálásából nyerhetők, az inductio közönséges törvényei folynak.

Differentiálva továbbá a mágnesi energiát az összrendezők szerint, J. J. THOMSON egy «nyomaték» componenseit nyeri, mely az áramátfolyta vezetők között működő dinamoelektromos erők magyarázatánál szerepet játszik. J. J. THOMSON véleménye szerint az inductio-csövek, melyek a vezető belsejében összehúzódnak, mintegy ebben feloszlódnak, «nyomaték»-ukat e vezetőnek adják át. A dinamoelektromos erő ugyanis az által keletkezik, hogy ez az összehúzódás nem történik minden oldalról szimmetrikusan.

4. Az elektromágnesi jelenségeknek a megelőző 3. pontban részletezett magyarázatának legfőbb nehézségei a permanens mágnesek s általán az állandó mágnesi terek s a telepek chemiai jelenségeinek értelmezésében keresendők. POYNTING ezekről nem szól, J. J. THOMSON felveszi, hogy az állandó mágnesi terekben ellentett irányú inductio-csövek ellenkező irányban mozognak és pedig, miként azt külön vizsgálat mutatja, a fény terjedésének sebességével.**

A *puha* vas viselkedését pedig úgy értelmezi: ha az inductio-csövek oly téren keresztül mozognak, melyet részben vas tölt be, akkor — mivel a csövek tehetetlensége a vasban sokkal nagyobb, mint a levegőben — a csőnek a téren való átvonulása a vas jelen-

---

* Ez a csőben foglalt erővonalak számával arányos mennyiség.

** A *T idő*, mely alatt az inductio-cső a fémekben eltűnik (azaz molekuláris távolságra rövidül), egyenrendű egy fényrezgés időtartamával; ugyanis $T = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\sigma}{9 \cdot 10^{20}}$ hol $K$ a diëlektr. állandó elektrost. mértékben, $\sigma$ a vezető fajlagos ellenállása mágnesi mértékben. A $K$ fémekre nézve igen *nagy*.

léte által olyformán lesz befolyásolva, mint egy elektromos áramé, ha a levegőt jó s a vasat rossz vezető által helyettesítve gondoljuk. A vas felületén való mágnesezés megfelelne az inductio-csövek tengentiális sebessége discontinuitásának.

---

*Zárszó.* Az energiának az elektromágnesi térben való, e czikk I. és II. részében értelmezett átvitele a FARADAY-MAXWELL-féle felfogás mathematikai következménye gyanánt tűnik elő.

A környező közegnek ezen átvitelnél való szerepe azonban még nincsen tisztázva. Ismerjük ugyan az energiának a közegen való áthaladása *idejét,* mert ennek a dolog természete szerint avval az idővel kell egyenlőnek lennie, mely alatt az elektromos impulsus az elektromindító erő székhelyéből a vezető sodronynak tekintetbe vett részeig terjed; erre nézve igen számos kisérleti adatunk van. De nem ismerjük az energiának azt a formáját vagy azon formáit, melylyel vagy melyekkel ez a közegen át mozog; hogy ez hullámszerü, szakaszos mozgás, ezt HERZ és követőinek kisérletei igen valószínűvé teszik.

Bármiként legyen is a dolog, kétséget nem szenved, hogy a FARADAY-MAXWELL-féle felfogás e téren is teljesen megváltoztatja eddigi nézeteinket s a kisérleti vizsgálódásnak itt is nagyérdekű ú irányt jelöl ki. *Fröhlich.*

---

# A LENCSE KÉPLETÉNEK GRAPHIKAI TÁRGYALÁSA.

*D'Ocagne* az általánosan ismeretes lencseképletnek következő egyszerű geometriai szerkesztését adja.* Mérjük egy 120° tengelyszögű coordinatarendszer tengelyeire az összetartozó tárgy- ($OP=p$), ill. képtávolságokat ($OP'=p'$). Ha $OF$ a tengelyszöget felezi, akkor nyilván $OF=FH=OH$. Az $OPP'$ és $FHP\Delta$-ekből

$$\frac{p'}{p}=\frac{FH}{HP}=\frac{OF}{p-OF}, \text{ a miből}$$

$$p\,.\,p'-OF\,.\,p'=p\,.\,OF, \text{ vagy pedig } t.\,k.\; OF\text{-fel osztván,}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{OF}$$

---

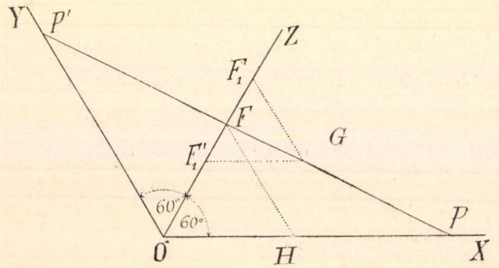
* *Journal de Physique.* 3. sér. I. 75. l.

E szerint $OF$ nem más, mint azon lencse gyúponttávola, melyre nézve $P$ és $P'$ conjugált pontok.

Ugyanily eredményre vezet $PP'$ egyenes egyenlete:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{p'}=1$$

Ugyanis $F$-re nézve $x=y=OF=f$, s ennélfogva az egyenlet az ismeretes lencseképlettel megegyezik.




E szerint az $F$ ponton átmenő egyenes minden körülmények között az összetartozó tárgy és képtávolságokkal egyenlő darabokat vág le a tengelyekről. A negativ tengelyekre eső pontok nyilván optikailag virtuális pontokat jelentenek.

Ha a lencse két oldalán egymástól különböző két közeg van, az akkor érvényes

$$\frac{f_1}{p}+\frac{f_1'}{p'}=1$$

képlet a következő módon szerkeszthető. Húzzuk meg $PP'$ vonalat, úgy, hogy $OP=p$, $OP'=p'$ legyen. Ha $OF_1=f_1$ és $OF_1'=f_1'$, akkor az $F_1$ és $F_1'$ pontokon keresztűl $OP$ ill. $OP'$-hoz párhuzamosan húzott egyenesek a $PP'$ vonalon fekvő $G$ pontban találkoznak. Ugyanis

$$\frac{F_1'G}{OP}=\frac{OF-OF_1'}{OF} \quad \text{és} \quad \frac{F_1G}{OP'}=\frac{OF_1-OF}{OF}$$

Vagy, minthogy az $F_1F_1'G$ háromszög egyenoldalú: $F_1'G=F_1G$ s így

$$OP\times OF-OP\times OF_1'=OP'\times OF_1-OP\times OF,$$

az egyenletet $OP\times OP'$ szorzattal osztván:

$$\frac{OF_1}{OP}+\frac{OF_1'}{OP'}=\frac{OF}{OP}+\frac{OF}{OP'}=1$$

azaz

$$\frac{f_1}{p}+\frac{f_1'}{p'}=\frac{f}{p}+\frac{f}{p'}=1.$$

*H. Á.*

# A MÁSODRENDŰ FELÜLETEK OSZTÁLYOZÁSÁRÓL.

Altalánosan ismeretesek azok az egyszerű kritériumok, a melyekkel a másodrendű görbék faját meg lehet határozni.

Ha a görbék egyenlete

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2=0,$$

a hol $z=0$ a sík végtelen távol fekvő egyenese, és ha

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (a_{ik}=a_{ki})$$

$A_{ik}$ az $a_{ik}$-hoz tartozó aldetermináns, akkor a kritériumok a következők:

I. $A \gtrless 0$.

1. $A_{33}>0$.
   a) $a_{11}A>0$. *Képzetes ellipszis.*
   b) $a_{11}A<0$. *Valós ellipszis.*
2. $A_{33}<0$. *Hiperbóla.*
3. $A_{33}=0$. *Parabóla.*

II. $A=0$.

1. $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$ között van pozitiv.* *Két képzetes egyenes.*
2. $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$ között van negativ. *Két valós egyenes.*
3. $A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$. *Egy kétszeres egyenes.*

---

* Ismeretes, hogy egy valós elemekből álló elenyésző szimmetrikus determináns átlói aldeterminánsai nem lehetnek különböző előjelűek. Ugyanis az adjungált determinánsok tulajdonsága $A=0$ esetében az, hogy

$$A_{ii}\cdot A_{kk}=A_{ki}^2.$$

Kevésbbé ismeretesek azok a hasonlóan egyszerű explicit kritériumok, a melyek a másodrendű felületek fajának meghatározására szolgálnak.

Ezeket egy táblázatba összeállítva bizonyítás nélkül közöltem volt az Akadémia «Mathematikai és természettudományi értesitő»-jében. (VIII. kötet, 218—219. lap).

Nem lesz talán érdektelen, ha itt most bizonyitással együtt közlöm azt a táblázatot.

---

Ha a felület egyenlete

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}xt+2a_{24}yt+$$
$$+2a_{34}zt+a_{44}t^2=0,$$

a hol $t=0$ a végtelen távol fekvő sik, és ha

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (a_{ik}=a_{ki})$$

$A_{ik}$ az $a_{ik}$-hoz tartozó aldeterminána, akkor a fennebb összeállitott kritériumok segitségével első sorban a felület végtelen távol fekvő pontjait fogjuk megvizsgálni.

Ezekre nézve $t=0$ és

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2=0.$$

Az utóbbi egyenlet magában annak a kúpnak egyenlete, melynek egyenes alkotói a felület végtelen távol fekvő pontjai felé mutatnak. Ennek a kúpnak megvizsgálására elég azt egy sikkal átmetszeni. Vegyük ilyen sikul pl. a $z=1$ sikot. A metszési görbe egyenlete ugyanaz, ha benne $z$ homogénná tevő koordináta.

Az adott felület végtelen távol fekvő pontjai alkotta görbére a kritériumok a következők:

I. $A_{44}\gtrless 0.$

1. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0,\quad a_{11}\cdot A_{44}>0.$ *Képzetes kúpszelet.*

2. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0,\quad a_{11}\cdot A_{44}<0,$

vagy

$a_{11}a_{22}-a_{12}^2 \leqq 0.$ *Valós kúpszelet.*

II. $A_{44}=0.$

1. $A_{44}$ átlói aldeterminánsai között van pozitiv.

*Két képzetes egyenes.*

2. $A_{44}$ átlói aldeterminánsai között van negativ.

*Két valós egyenes.*

3. $A_{44}$ átlói aldeterminánsai mind elenyésznek.

*Egy kétszeres egyenes.*

A II. 1 és II. 2. esetekben a végtelen távol fekvő sík a felületet érinti egy pontban, a II. 3. esetében pedig érinti egy egész egyenes hosszán.

A kúp, henger és két sík felismerésére az a körülmény vezet, hogy ezeken olyan pontok is vannak, a melyekhez határozott érintő sík nem tartozik. (Szinguláris pont.)

Ismeretes, hogy $f=0$ felület $(x_1, y_1, z_1, t_1)$-pontjához tartozó érintő sík egyenlete a következő:

$$x \cdot f_1(x_1, y_1, z_1, t_1)+yf_2(x_1, y_1, z_1, t_1)+zf_3(x_1, y_1, z_1, t_1)+$$
$$+tf_4(x_1, y_1, z_1, t_1)=0,$$

a hol

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_2=\frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_3=\frac{\partial f}{\partial z}, \quad f_4=\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Az $(x_1, y_1, z_1, t_1)$-pont szinguláris, ha $f_1=f_2=f_3=f_4=0$, mikor ha $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, $t=t_1$.

Tehát a szinguláris pontokat

$$\begin{aligned}
a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=0\\
a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t=0\\
a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t=0\\
a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t=0
\end{aligned}$$

egyenletek határozzák meg.

A következő esetek lehetségesek:

1. $A \gtrless 0.$ *Nincs szinguláris pont.*

2. $A=0$, de átlói aldeterminánsai között van el nem enyésző. *Egy szinguláris pont van.*

Megkülönböztetendő alesetek:

*a)* $A_{44} \gtrless 0$. *A szinguláris pont végesben van.*

*b)* $A_{44} = 0$. *A szinguláris pont végtelen távol fekszik.*

3. $A$ és átlói aldeterminánsai elenyésznek, de a másodfokú átlói aldeterminánsok nem. *Szinguláris egyenes.*

4. $A$ és összes átlói harmad és másodfokú aldeterminánsai elenyésznek. *Egy szinguláris sík.*

Igy válnak ki a kúp, henger, két sík és a kétszeres sík.

A hiperboloidok elválasztására ismernünk kell még a kritériumot arra nézve, hogy az érintő sík valós vagy képzetes egyeneseket vág-e ki a felületből?

Válaszszuk egy perczre a felület egy pontját koordináta-kezdőpontnak a hozzá tartozó érintő síkot $xy$-síknak. A felület egyenlete ilyen koordináta-rendszer mellett:

$$b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+2b_{23}yz+2b_{31}zx+2b_{12}xy+2b_{34}zt=0.$$

Az $xy$-síktól kimetszett két egyenes ($z=0$ sík)

$$b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2=0$$

*Valósak,* ha $b_{11}b_{22}-b_{12}^2<0$

*Képzetesek,* ha $b_{11}b_{22}-b_{12}^2>0$.

De a $b$-koefficiensek determinánsa

$$B=-(b_{11}b_{22}-b_{12}^2)\,a_{34}^2$$

Tehát a kimetszett egyenesek *valósak* $B>0$, *képzetesek* $B<0$ esetében.

Azonban ismeretes, hogy egy négyzetes alak linear transzformácziójánál az eredeti alak determinánsa $A$, a transzformált alak determinánsa $B$ és a transzformáczió determinánsa $C$ között ez a viszony:

$$B=AC^2$$

Tehát $B$ és $A$ egyenlő előjelű. Sőt akkor sem változik a determináns jele, ha a felület egyenletét valós szorzóval szorozzuk, mert $A$ negyedfokú determináns és így minden elemének jelváltozásával jele nem változik.

Igy kimondhatjuk, hogy *a felület valós pontjaihoz tartozó érintő síkok valós vagy képzetes egyeneseket vágnak ki a felületből a szerint, a mint $A$ positiv, vagy negativ.*

Igy válnak a hiperboloidok és paraboloidok két fajra; hasonlóképen az ellipszoidok is.

Ha a felületnek nincs végtelen távol fekvő pontja és $A > 0$, *a felület egészen képzetes.* Mert ha volna valós pontja, ahoz két valós egyenest kimetsző érintő sík taroznék, mi pedig valós végtelen távol fekvő pontokat kivánna.

Hogy pedig $A < 0$ esetében a felület valós, így bizonyítható be:

$$f(1, 0, 0, 0) = a_{11}$$

$$f(A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}) = A_{44} . A$$

(Legkönnyebben úgy számítható ki, hogy felhasználjuk a homogén függvények ama jól ismert tulajdonságát, hogy

$$2f = xf_1 + y . f_2 + 2f_3 + tf_4.$$

Tehát

$$f(1, 0, 0, 0) . f(A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}) = a_{11} . A_{44} . A$$

Már pedig, ha nincs valós végtelen távol fekvő pont, $a_{11} . A_{44} > 0$; és így $A < 0$ esetében $f$ értéke az $(1, 0, 0, 0)$- és $(A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44})$-pontokban ellenkező előjelű, a miből a felület valós volta következik.

A teljesség okáért még megemlítem, hogy a hengerek fajának meghatározására, messük azokat a koordináta-síkokkal. Legalább egyikök igazi kúpszeletben vágja és ez meghatározza a fajt.

Síkpár esetében annak eldöntésére, hogy ezek valósak-e vagy képzetesek, metszőkül használjuk a koordináta-tengelyeket és a koordináta-síkok végtelen távol fekvő egyeneseit. Ezen hat egyenes közűl legalább egy külön két pontban metszi a két síkot, azok valós vagy képzetes volta a kérdést eldönti. A feleletet tehát a másodfokú átlói aldeterminánsok előjele adja meg.

Az eddigiekben teljes bebizonyítást nyert a következő táblázat helyes volta:

I. $A_{44} \gtrless 0$.

1. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, $a_{11}\,.\,A_{44}>0$.

a) $A>0$. *Képzetes ellipszoid.*

b) $A=0$. *Képzetes kúp.*

c) $A<0$. *Valós ellipszoid.*

2. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, $a_{11}\,.\,A_{44}<0$ vagy $a_{11}a_{22}-a_{12}^2 \leqq 0$.

a) $A>0$. *Egyköpenyű hiperboloid.*

b) $A=0$. *Valós kúp.*

c) $A<0$. *Kétköpenyű hiperboloid.*

II. $A_{44}=0$, $A \gtrless 0$.

1. $A>0$. *Hiperbolikus paraboloid.*
2. $A<0$. *Elliptikus paraboloid.*

III. $A_{44}=0$, $A=0$, de $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$ között van el nem enyésző.

1. $A_{44}$ átlói aldeterminánsai között van positiv.

a) $a_{ii}A_{kk} \geqq 0$ $(i, k=1, 2, 3)$ *Képzetes henger.*

b) $a_{ii}A_{kk} \leqq 0$ $(i, k=1, 2, 3)$ *Elliptikus henger.*

2. $A_{44}$ átlói aldeterminánsai között van negativ.

*Hiperbolikus henger.*

3. $A_{44}$ összes átlói aldeterminánsai elenyésznek.

*Parabolikus henger.*

IV. $A_{11}=A_{22}=A_{33}=A_{44}=0$, $A=0$.

1. A másodfokú átlói aldeterminánsok között van pozitiv.

*Két képzetes sík.*

2. A másodfokú átló aldeterminánsok között van negativ.

*Két valós sík.*

3. A másodfokú átlói aldeterminánsok mind elenyésznek.

*Egy kétszeres sík.*

*Vályi Gyula.*

# INVOLUTORIKUS PONTSOROKRÓL.

Az elliptikus involutorikus egyenes pontsor legkényelmesebb szerkesztését a következő ismeretes tétel szolgáltatja:

I. *Minden egyenes vonalú elliptikus pont-involuczió előállítható, mint sorozójának metszése valamely derékszögű involuczióval.* Más szóval: *Mindig létezik oly $G$ pontja a síknak, melyből az adott elliptikus involuczió derékszög alatt látszik;* melyre nézve tehát minden $XGX_1$ szög derékszög, $X$-, $X_1$-gyel jelölvén az elliptikus involucziónak tetszőleges pontpárját. E tétel értelmében a $G$-ből $YG$-re emelt merőleges az involuczió sorozójából kimetszi $Y$-nak megfelelő pontját $Y_1$-et.

Ennek a tételnek oly általánosítását kivánom e helyen közölni, mely az involuczió számára *ugyanoly* kényelmes szerkesztést szolgáltat, a mely azonban egyaránt alkalmazható úgy az elliptikus, mint a hiperbolikus involuczióra.

Legyen az $s$ egyenes egy adott involuczió sorozója, s ennek az $s$ involucziónak tetszőleges pontpárja $X$, $X_1$, az $XX_1$ vonaldarab mint átmérő fölött leírt kör $x$; akkor tudjuk, hogy az $x$ körök öszszessége egy $k_s$ körsort képez, melynek chordáléja $s'$ az involuczió $M$ középpontjában merőleges az $s$-re. A $k_s$ körsor köreinek középpontjai az $s$ egyenesen feküsznek. Tudjuk, hogy a $k_s$ körsorhoz egy konjugált körsor $k_s'$ tartozik, melynek minden egyes köre a $k_s$ sor minden egyes körét derékszög alatt metszi és hogy ezen második körsor chordáléja az $s$ egyenes. A $k_s'$ körsor köreinek középpontjai a $s'$-en feküsznek. A $s'$ egyenes a $k_s'$ körsorból kimetszi az $s$ involuczióhoz tartozó konjugált $s'$ involucziót, úgy hogy a $k_s'$ tetszőleges

$x'$ köre szolgáltatja a $s'$ involucziónak tetszőleges $X'$, $X_1'$ pontpárját.

Ismeretes, hogy ha a két konjugált körsor közül az egyik, például a $k_s$ két valós alapponttal bír, — tehát a sorban null-sugarú körök nem fordulnak elő és így az $s$ involuczió elliptikus; — akkor a $k_s'$-nek nincsenek valós alappontjai, tehát a $k_s$ valós alappontjai $G'$ és $H'$ a $k_s'$ körsor null-sugarú köreinek középpontjai és egyszersmind a $k_s'$-hez tartozó $s'$ hiperbolikus involucziónak kettőspontjai.

$G'$ és $H'$ a síknak ama pontjai, a melyek mindegyikéből az $s$ elliptikus involuczió derékszög alatt látszik, úgy hogy például:

$$(1) \qquad XG' \perp X_1 G'.$$

A fent említett I. alatti tétel, tehát következőképen fogalmazható:

I*a*. *Minden egyenesvonalú pont-involuczió a konjugált involuczió tetszőleges kettőspontjából derékszög alatt látszik.*

A tételnek persze csak akkor van értelme, ha az adott involuczió elliptikus; mert a hiperbolikus involuczió konjugált involucziója elliptikus, tehát a szóban forgó kettőspontok képzetesek. De a jelen fogalmazásban a tétel általánosításra közvetetlenül alkalmas.

Tekintve ugyanis, hogy a konjugált involucziónak bármely kettőspontja, például $G'$, a megfelelőjével $G_1'$-gyel összeesik, az (1) alatti feltétel így is írható:

$$XG' \perp X_1 G_1'.$$

Minthogy $G'$, $G_1'$ a konjugált involuczió egyik pontpárjának tekintendő, közelfekvő a kérdés, *vajjon megmarad-e ez a feltétel, ha a $G'$, $G_1'$ pontpárt a $s'$ involucziónak tetszőleges $X'$, $X_1'$ pontpárjával helyettesítem? — A felelet: igen.* Ha tehát $X$, $X_1$-gyel, illetőleg $X'$, $X_1'$-gyel jelölöm a megadott, illetőleg a konjugált involuczió egy-egy egészen tetszőleges pontpárját, akkor mindig

$$(2) \qquad XX' \perp X_1 X_1'.$$

Az I*a*. alatti tétel általánosítását már most így fogalmazhatom:

II. *Minden egyenesvonalú pont-involuczió a konjugált involuczió tetszőleges pontpárjából derékszög alatt látszik.*

Ha az adott involuczió *elliptikus*, akkor a konjugált involuczióban *van* összeeső pontpár, melyre nézve az (1) alatti speczіálisabb feltétel érvényes; ha az adott involuczió *hiperbolikus*, akkor a konjugált involuczióban *nincsen* összeeső pontpár, de akkor minden esetre a (2) alatti feltétel ki van elégítve.

A tétel bebizonyítására szolgáló egyszerű ábra elkészítését a tisztelt olvasóra bizom; leírását a következőkben adom:

Az adott $s$ involuczió legyen például *hiperbolikus*, az involuczió középpontja $M$, egy tetszőleges pontpárja $X$, $X_1$ és a jelölés olyan, hogy $XM > X_1M$; az $X$, $X_1$ pontpárhoz tartozó $x$ körnek középpontja $K$. A konjugált involuczió ekkor *elliptikus*; egy tetszőleges pontpárja legyen $X'$, $X_1'$ és a jelölés olyan, hogy $X'M > X_1'M$; az $X'$, $X_1'$ pontpárhoz tartozó $x'$ körnek középpontja $K'$. Az egymást derékszög alatt metsző $x$ és $x'$ köröknek azt a metszéspontját, mely $K'$-val az $s$ egyenesnek ugyanazon oldalán fekszik, jelölöm $O$-val, akkor

$$(3) \qquad \measuredangle KOK' = \measuredangle XOX_1 = \measuredangle X'OX_1' = 90°.$$

Bebizonyítom, hogy: *a)* Az $X$, $O$, $X'$ pontok, *b)* az $O$, $X_1$, $X_1'$ *pontok egy-egy egyenesen feküsznek és c) hogy* $XX' \perp X_1X_1'$.

*a)* Az $OKX$ és $X'K'O$ egyenszárú háromszögökből következik, hogy

$$\measuredangle KXO = \measuredangle XOK$$

$$\measuredangle OX'K' = \measuredangle K'OX'$$

tehát

$$(4) \qquad \measuredangle KXO + \measuredangle OX'K' = \measuredangle XOK + \measuredangle K'OX' = 90°,$$

mert $\measuredangle KXO$ és $\measuredangle OX'K'$ az $X'MX$ derékszögű háromszögnek hegyes szögei. A (3) és (4) alatti relácziók felhasználásával látjuk, hogy:

$$\measuredangle XOK + \measuredangle KOK' + \measuredangle K'OX' = 2.90°;$$

*az* $X$, $O$ *és* $X'$ *pontok ennélfogva egy egyenesen feküsznek.*

*b)* a (3) alatti egyenletekből következik, hogy

$$OX_1 \perp XO \equiv XX',$$
$$OX_1' \perp OX' \equiv XX'.$$

De az $O$ pontban az $XX'$ egyenesre csak egy merőleges emelhető, ennélfogva:

$$OX_1 \equiv OX_1',$$

tehát *az $O$, $X_1$ és $X_1'$ pontok is egy egyenesen feküsznek* és így

$$c) \qquad XX' \perp X_1 X_1',$$

a mivel a tétel be van bizonyítva.

E tétel értelmében adott involuczióban a tetszőleges $Y$ pontnak megfelelőjét $Y_1$-et, az $X_1'$ pontból az $YX'$-re bocsájtott merőleges az involuczió sorozójából metszi ki, ha $X'$, $X_1'$ a konjugált involucziónak tetszőleges pontpárja, tekintet nélkül arra, hogy az eredetileg megadott involuczió elliptikus-e, vagy pedig hiperbolikus.

*Tőtössy Béla.*

# A LAPLACE-EGYENLET EGYIK TULAJDONSÁGÁRÓL.*

A

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

egyenletet legelőször LAPLACE használta, midőn a bolygómozgás secularis egyenlőtlenségeinek meghatározásával foglalkozott (Histoire de l'Academie des Sciences 1772); azóta ez az egyenlet számos más irányban is talált alkalmazást és különösen sokan foglalkoztak ama nevezetes tulajdonságának kimutatásával, hogy t. i. összes gyökei valósak (CAUCHY, KUMMER, BORCHARDT, JACOBI, BRIOSCHI és mások). A jelen dolgozat czélja ez egyenlet oly tulajdonságát kimutatni, mely az $a_{ik}$ elemek bizonyos értelemben történő specziálizálásának befolyását az egyenlet algebrai szerkezetére mutatja. E tulajdonság a következő tételben nyer kifejezést:

*Ha a $D(\lambda)$ determináns nem csak első fődiagonálisa szerint szimmetrikus, hanem második diagonálisára nézve is szimmetriát mutat oly értelemben, hogy*

$$a_{ik} = a_{n-k+1,\, n-i+1}$$
$$(i, k = 1, 2, \dots, n)$$

*akkor $D(\lambda)$ reduktibilis; még pedig oly módon, hogy ha fokszáma $n = 2m$, akkor két $m$-edfoku raczionális tényezőre esik*

---

* A szövegben bebizonyított tételt az «*Együttesen lengő elemi mágnesek kölcsönös vonzásai és taszításai*» czímű 1891-ben megjelent akadémiai értekezésem kidolgozása közben találtam.

*szét; ha pedig fokszáma $n=2m+1$, akkor mint egy $m$-edfoku és egy $(m+1)$-ső fokú tényező szorzata állítható elő. A tényezők maguk a használt módszer alapján ismét szimmetrikus determinánsok alakjában adódnak ki.*

E tétel bebizonyitását nagyobb áttekinthetőség kedveért specziális esetekhez fogjuk fűzni, a mit annyival inkább tehetünk, mivel az általános esetben követendő gondolatmenet ugyanaz.

1. *n páros.* Legyen pl. az egyenlet 4-edfokú és részletesen kiírva a következő:

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & d \\ b & e-\lambda & f & c \\ c & f & e-\lambda & b \\ d & c & b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ha e determináns első oszlopához az utolsót, második oszlopához az utolsóelőttit hozzáadjuk és az ekként átalakított determináns utolsó sorából az elsőt, utolsóelőtti sorából a másodikat kivonjuk, lesz

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a+d-\lambda & b+d & c & d \\ b+c & e+c-\lambda & f & c \\ 0 & 0 & e-f-\lambda & b-c \\ 0 & 0 & b-c & a-d-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a+d-\lambda & b+d \\ b+c & e+c-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e-f-\lambda & b-c \\ b-c & a-d-\lambda \end{vmatrix},$$

a mivel $D$-nek fönt jelzett egyik tulajdonságát már is kimutattuk.

2. *n páratlan.* Legyen pl. az egyenlet 5-ödfokú és részletesen kiírva a következő:

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & d & e \\ b & f-\lambda & g & h & d \\ c & g & i-\lambda & g & c \\ d & h & g & f-\lambda & b \\ e & d & c & b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ha ismét az első oszlophoz hozzáadjuk az utolsót, a másodikhoz az utolsóelőttit és az ekként átalakított determináns első sorát kivonjuk az utolsóból, második sorát az utolsó előttiből, és végűl még a harmadik oszlopot szorozzuk 2-vel, lesz

$$2D(\lambda) = \begin{vmatrix} a+e-\lambda & b+d & 2c & d & e \\ b+d & f+h-\lambda & 2g & h & d \\ 2c & 2g & 2(i-\lambda) & g & c \\ 0 & 0 & 0 & f-h-\lambda & b+d \\ 0 & 0 & 0 & b+d & a-e-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+e-\lambda & b+d & 2c \\ b+d & f+h-\lambda & 2g \\ 2c & 2g & 2(i-\lambda) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f-h-\lambda & b+d \\ b+d & a-e-\lambda \end{vmatrix}$$

miként bebizonyítandó volt.

*Fröhlich Izidor.*

# A LAPLACE-EGYENLET GYÖKEIRŐL.

A tétel, melynek e sorokban felette egyszerű bebizonyitását közölni szándékozom, a megelőző czikk jelöléseinek felhasználásával a következőképen fogalmazható:

*Ha az $a_{\alpha\beta}$ elemek valós értékűek, akkor a $D(\lambda) = 0$ Laplace-egyenlet összes gyökei valós számok.**

Legyen $\lambda = \lambda_k$ a $D(\lambda) = 0$ egyenlet tetszés szerinti gyöke, akkor az

$$1) \qquad a_{\alpha 1}x_1 + a_{\alpha 2}x_2 + \ldots + a_{\alpha n}x_n = \lambda_k x_\alpha$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n\,;\; a_{ik} = a_{ki})$$

homogén lineár egyenletrendszer, minthogy determinánsa $D(\lambda_k)$ egyenlő zérussal, oly megoldást is fog szolgáltatni, melyben nem minden ismeretlennek értéke egyenlő zérussal. Ha ilyen megoldás

$$2) \qquad x_1 = \xi_1' + \xi_1''i,\; x_2 = \xi_2' + \xi_2''i, \ldots, x_n = \xi_n' + \xi_n''i,$$

akkor a

$$3) \qquad \xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n', \xi_1'', \xi_2'', \ldots, \xi_n''$$

valós számok sorozata a zérustól különböző elemet is tartalmaz, mert a 2) sorozat is tartalmaz ilyent.

Szorozzuk az 1) egyenletet $\bar{x}_\alpha$-vel, a hol $\bar{x}_\alpha$ az $x_\alpha$-nak konjugált értékét jelenti, s képezzük ezután az $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ értékekre az összeget. Az ekként nyert

---

* E bebizonyitás gondolatmenete nagyjában megegyez avval az eszmemenettel, melynek révén WEIERSTRASS egyik dolgozatában a tárgyalt tétel általánosítására jutott. L. *Monatsberichte der Berliner Akademie* 1858. évi kötetében 212. és 213 l.; továbbá CHRISTOFFEL értekezését *Crelle-Journal* 63. kötet 255. és 256. l., mely WEIERSTRASS vizsgálatainak általánosítását tartalmazza.

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_{\alpha 1}x_1+a_{\alpha 2}x_2+\ldots+a_{\alpha n}x_n)\overline{x}_\alpha=\lambda_k\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha\overline{x}_\alpha$$

egyenlőség bal oldalán álló összeg valós számmal egyenlő, mert konjugált értékével megegyez; a jobb oldalán pedig $\lambda_k$ szorzója,

$$\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha\overline{x}_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha'^2+\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha''^2,$$

3) sorozatnak fentemlitett tulajdonsága miatt a zérustól különböző valós szám.

*Tehát $\lambda_k$, mint két valós szám hányadosa, maga is valós szám.* Ezzel a fönt kimondott tételt teljesen bebizonyitottuk.

Még megjegyzem, hogy szóról-szóra ugyan így bizonyitható be a fentebbi tétel, ha $a_{\alpha\beta}$ komplex értékű és nem *egyenlő* $a_{\beta\alpha}$-val, hanem ennek *konjugált értéke.*

*Rados Gusztáv.*

# A FERDÉN SZIMMETRIKUS HELYETTESITÉSEK ELMÉLETÉHEZ.*

Míg a szimmetrikus helyettesítések karakterisztikus egyenletét, a *Laplace-egyenletet,* gyökeinek realitási viszonyai tekintetében már sok oldalról alapos és kimerítő fejtegetések tárgyává tették, addig a ferdén szimmetrikus helyettesítésekre vonatkozólag a hasonló kérdések megoldására ez ideig kisérlet még nem tétetett, jól lehet ezek geometriai és mechanikai alkalmazásokban épenséggel nem ritkán szerepelnek. E ténynyel szemben talán nem lesz érdektelen, ha e helyettesítések karakterisztikus egyenletéről a következő tételt és a bebizonyitását közlöm:

*Ferdén szimmetrikus helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei, — a mennyiben zérustól különböző értékkel bírnak — tiszta képzetes számok.*

A míg tehát Laplace egyenletének összes gyökei *valósak,* addig a közel rokon helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökeit *tiszta képzetes* számok szolgáltatják.

Legyen az adott valós együtthatókkal bíró ferdén szimmetrikus helyettesítés

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

$$(i=1, 2, \ldots, n;\ a_{ik} = -a_{ki};\ a_{ii}=0)$$

akkor karakterisztikus egyenletét a

* E dolgozatban tárgyalt tételt valamint bebizonyitásának alapvonásait Rados Gusztáv tanár úr f. é. február hóban a kir. József-műegyetemen tartott math. gyakorlatokban közölte.

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & -\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet szolgáltatja. Erről kell tehát kimutatnunk, hogy gyökei — a mennyiben a zérustól különbözők — tiszta képzetes értékek.

A bebizonyítást a következő részletekben adjuk:

1. *Bebizonyítjuk, hogy a $\Delta(\lambda) = 0$ egyenlet páratlan fokszám esetében fellépő zérus gyökén kívül egyéb valós gyökkel nem bírhat.* Az egyenletet $\lambda$ fogyó hatványai szerint rendezvén lesz:

$$\Delta(\lambda) \equiv (-1)^n [\lambda^n - (\Sigma\Delta_1)\lambda^{n-1} + (\Sigma\Delta_2)\lambda^{n-2} - (\Sigma\Delta_3)\lambda^{n-3} + \dots + \\ + (-1)^m (\Sigma\Delta_m)\lambda^{n-m} + \dots] = 0,$$

a hol $\Sigma\Delta_m$ a $\Delta(0)$ determináns $m$-edfokú főminorainak összegét jelenti, s $m$-edfokú főminor alatt oly $m$-edfokú aldetermináns értendő, melynek diagonális elemei a $\Delta(0)$ determinánsban is ilyenek. Ilyen pl. a

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2}, & \dots, & a_{i_1k_m} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2}, & \dots, & a_{i_2k_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_mk_1} & a_{i_mk_2}, & \dots, & a_{i_mk_m} \end{vmatrix}$$

determináns, ha

$$i_1 = k_1, \quad i_2 = k_2, \quad \dots, \quad i_m = k_m.$$

Közvetetlenül belátható, hogy ferdén szimmetrikus determináns összes főminorai ismét ferdén szimmetrikus determinánsok. Az ilyen determinánsokról pedig ismeretes, hogy értékük *zérus*, ha fokszámuk *páratlan*; míg *páros* fokszám esetében az elemekből raczionális uton képezhető kifejezésnek négyzete gyanánt állíthatók elő, úgy hogy valós elemek esetében, *negativ értéket nem vehetnek fel.*

Ennek következtében

$$\Sigma\Delta_1 = 0, \quad \Sigma\Delta_3 = 0, \quad \Sigma\Delta_5 = 0, \quad \dots$$

és

$$\Sigma\Delta_2 \geqq 0, \quad \Sigma\Delta_4 \geqq 0, \quad \Sigma\Delta_6 \geqq 0, \quad \dots$$

A $\Delta(\lambda) = 0$ egyenlet tehát a következő alakot ölti fel:

$$\Delta(\lambda) \equiv (-1)^n [\lambda^n + (\Sigma\Delta_2)\lambda^{n-2} + (\Sigma\Delta_4)\lambda^{n-4} + \ldots] = 0.$$

Ez pedig oly egyenlet, melyben az összes együtthatók megegyező előjelűek s a $\lambda$-tól független tagot általánosságban csak akkor fog tartalmazhatni, ha $n$ páros. Páratlan $n$ esetében tehát $\lambda = 0$ gyöke az egyenletnek; ennek eltávolítása után oly egyenletre jutunk, melynek többtagújában jelváltozás nincsen és az előforduló hatványkitevők egymás között (mod. 2) kongruensek. Tökéletesen ilyen szerkezetű már maga az eredeti $\Delta(\lambda) = 0$ egyenlet, ha $n$ páros. De DESCARTES jelszabályának értelmében ily alakú egyenlet sem pozitiv sem pedig negativ számmal kielégithető nem lévén, valós gyökkel sem birhat.

2. *Ha komplex szám négyzete valós, akkor ez csak úgy lehetséges, hogy e komplex szám tisztán képzetes.* Ha ugyanis $\alpha + \beta i$ komplex számban $\beta \gtrless 0$ és

$$(\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$$

valós, akkor a

$$2\alpha\beta = 0$$

egyenlőségből következik, hogy

$$\alpha = 0.$$

3. *A $\Delta(\lambda) = 0$ egyenlet gyökei oly számok, melyek négyzetre emelve valós számokat eredményeznek.* Képezzük $\Delta(\lambda)$ négyzetét:

$$\Delta(\lambda)^2 \equiv \begin{vmatrix} c_{11} + \lambda^2 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} + \lambda^2 & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} + \lambda^2 \end{vmatrix} \equiv \Phi(\lambda^2),$$

a hol

$$c_{ik} = \sum_\alpha a_{i\alpha} a_{k\alpha} - \lambda(a_{ik} + a_{ki}) = \sum_\alpha a_{i\alpha} a_{k\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$$

és

$$c_{ii} = \sum_\alpha a_{i\alpha}^2$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n).$$

A

$$\Phi(x) \equiv \begin{vmatrix} c_{11}+x & c_{21} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22}+x & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn}+x \end{vmatrix} = 0$$

tehát oly egyenlet, melynek a $\Delta(\lambda) = 0$ egyenlet minden gyökének négyzete eleget tesz; de minthogy

$$c_{ik} = \sum_{\alpha} a_{i\alpha} a_{k\alpha} = \sum_{\alpha} a_{k\alpha} a_{i\alpha} = c_{ki}$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n),$$

ez az egyenlet *Laplace-egyenlet* s mint ilyen csak is valós számértékekkel elégíthető ki.

Az eddigieket a következőképen foglalhatjuk össze:

a) *A* $\Delta(\lambda) = 0$ *gyökei — a mennyiben zérustól különbözők — komplex számok.*

b) *E gyökök négyzetei valós értékek.*

E két tulajdonságból 2. alapján következtethetjük:

c) *Az egyenlet gyökei — a mennyiben zérustól különbözők — tiszta képzetes számok.*

*Bauer Mihály.*

# A $\left(\frac{2}{p}\right)$ LEGENDRE-JEL MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

## I.

A czímben említett jel meghatározása czéljából vizsgáljuk meg a

$$\left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right), \ldots, \left(\frac{p-1}{p}\right) \qquad (L)$$

Legendre-jelekből álló sorozatot, melyben $p$ alatt tetszés szerinti páratlan törzsszámot értünk. $(L)$ pozitiv és negativ egységek sorozata. Ha e sorozat tetszőleges $\left(\frac{k}{p}\right)$ elemét a reá következővel hasonlítjuk össze, akkor két eset állhat elő, a szerint a mint

$$\left(\frac{k}{p}\right) = \left(\frac{k+1}{p}\right),$$

vagy pedig

$$\left(\frac{k}{p}\right) = -\left(\frac{k+1}{p}\right).$$

Az első esetben azt fogjuk mondani, hogy az $(L)$ sorozatban $k$-nál *jelkövetkezés* van, a második esetben pedig $k$-nál *jelváltozás* lép fel.

A jelváltozások számára vonatkozólag a következő tétel állítható fel:

*Az*

$$\left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right), \ldots, \left(\frac{p-1}{p}\right)$$

*sorozatban a jelváltozások száma egyenlő* $\frac{p-1}{2}$-vel.

*Bebizonyítás.* Legyen az $1, 2, \ldots, p-1$ sorozatban:

$r$ ama maradékok * száma, melyekre maradék következik;

$n$ ama nem-maradékok száma, melyekre nem-maradék következik;

$r'$ ama maradékok száma, melyekre nem-maradék következik,

$n'$ ama nem-maradék száma, melyekre maradék következik.

A jelváltozások száma $v$ nem más mint $r'+n'$; ugyanis jelváltozás akkor, és csak akkor fordul elő, ha maradékra nem-maradék következik, vagy pedig, ha nem-maradékra maradék következik.

*Tételünk bebizonyítása ezzel vissza van vezetve annak a kimutatására, hogy*

$$r'+n'=\frac{p-1}{2}^{**}.$$

Ha $\beta$ az

$$1, 2, \ldots, (p-2)$$

sorozatban foglalt nem-maradékok bármelyike, akkor az

$$1, 2, \ldots, (p-1)$$

sorozatban mindig egy és csak is egy oly $\gamma$ számot határozhatunk meg, hogy

$$\beta\gamma \equiv 1 \pmod{p}$$

legyen, a hol $\gamma$ szintén nem-maradék, mert

$$1=\left(\frac{\beta\gamma}{p}\right)=\left(\frac{\beta}{p}\right)\left(\frac{\gamma}{p}\right)=-\left(\frac{\gamma}{p}\right);$$

minthogy továbbá

$$\gamma+1\equiv\gamma+\beta\gamma\equiv\gamma(\beta+1) \pmod{p},$$

---

* Itt csak quadratikus maradékokról ill. nem-maradékokról van szó.

** Serret-Wertheim «Handb. d. höheren Alg.» II. kiadás, II. kötet 79. lapján az $r'$ és $n'$ számok külön-külön ki vannak számítva. Ha az adott értékeket összeadjuk szintén kijön az

$$r'+n'=\frac{p-1}{2}$$

képlet. Bebizonyításunk részben azonos a Serret-Wertheim-félével.

lesz

$$\left(\frac{\gamma+1}{p}\right)=-\left(\frac{\beta+1}{p}\right).$$

Tekintettel lévén arra, hogy $\gamma$ nem lehet egyenlő $\beta$-val továbbá arra is, hogy különböző $\beta$-hoz, különböző $\gamma$-k tartoznak, kimondhatjuk, hogy az ($L$) sorozatban minden

$$\left(\frac{\beta}{p}\right),\ \left(\frac{\beta+1}{p}\right)$$

egymásutánjának, megfelel egy-egy

$$\left(\frac{\gamma}{p}\right),\ \left(\frac{\gamma+1}{p}\right).$$

egymásután; tehát minden $(-\ \pm)$ jelkombinácziónak megfelel egy-egy $(-\mp)$ jelkombináczió, úgy hogy

$$n'=n. \tag{1}$$

$\alpha$) *Legyen* $p$ ($4k+1$)-*alakú.* Tudjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{2}{p}\right)+\ldots+\left(\frac{p-1}{p}\right)=0,$$

tehát

$$2\left[\left(\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{2}{p}\right)+\ldots+\left(\frac{p-1}{p}\right)\right]=0=\left[\left(\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{2}{p}\right)\right]+$$
$$+\left[\left(\frac{2}{p}\right)+\left(\frac{3}{p}\right)\right]+\ldots+\left[\left(\frac{p-2}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right)\right]+\left(\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right),$$

és minthogy ebben az esetben

$$\left(\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right)=2,$$

lesz

$$\left[\left(\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{2}{p}\right)\right]+\left[\left(\frac{2}{p}\right)+\left(\frac{3}{p}\right)\right]+\ldots+\left[\left(\frac{p-2}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right)\right]=-2. \tag{$\alpha$}$$

Ha $k$-nál jelváltozás van, akkor

$$\left[\left(\frac{k}{p}\right)+\left(\frac{k+1}{p}\right)\right]=0;$$

ha pedig $k$-nál jelkövetkezés van, akkor a szerint a mint $k$ maradék vagy nem-maradék

$$\left[\left(\frac{k}{p}\right)+\left(\frac{k+1}{p}\right)\right]=\pm 2.$$

Ennélfogva az ($\alpha$) alatti képlet alapján

$$2r-2n=-2$$

vagyis

$$r-n=-1; \tag{2}$$

s így (1)-et összehasonlítván (2)-vel találjuk, hogy

$$r=n'-1. \tag{3}$$

Az összes maradékok száma $r+r'+1$, mert hiszen a $(p-1)$, melyre elem többé nem következik, lévén ez sorozatunk utolsó eleme, a jelen esetben maradék, és így

$$r+r'+1=\frac{p-1}{2}. \tag{4}$$

Az $r$ értékét (3)-ból (4)-be behelyettesítvén találjuk, hogy csakugyan

$$r'+n'=\frac{p-1}{2}.$$

$\beta$) *Legyen* $p$ $(4k+3)$-*alakú.* Ebben az esetben a követendő eljárás teljesen analog az előbbihez; t. i. ismét kiindulunk a

$$\left[\left(\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{2}{p}\right)\right]+\left[\left(\frac{2}{p}\right)+\left(\frac{3}{p}\right)\right]+\ldots+\left[\left(\frac{p-2}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right)\right]=0$$

egyenlőségből, mely fönnáll, minthogy

$$\left(\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right)=0$$

és ennélfogva

$$r=n. \tag{5}$$

Az összes maradékok száma itt, minthogy $(p-1)$ nem-maradék, $r+r'$.

Lesz tehát

$$r+r'=\frac{p-1}{2},$$

de (1)-ből az $r=n=n'$ és így

$$r'+n'=\frac{p-1}{2}.$$

Tehát $p$ akár $(4k+1)$-alakú, akár pedig $(4k+3)$-alakú, az $(L)$ sorozatban előforduló jelváltozások száma, $v$, mindig $\frac{p-1}{2}$-vel lesz egyenlő.

II.

Vizsgáljuk meg most a jelváltozások számát a következő két sorozatban:

$$(A)\qquad \left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right), \ldots, \left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right)$$

$$(B)\qquad \left(\frac{\frac{p+1}{2}}{p}\right), \left(\frac{\frac{p+3}{2}}{p}\right), \ldots, \left(\frac{p-1}{p}\right)$$

$\gamma$) *Legyen* $p$ $(4k+1)$-*alakú,* akkor $\mu$-vel jelölvén a jelváltozások számát $(A)$-ban, könnyen belátható, hogy $(B)$-ben is a jelváltozások száma $\mu$-vel lesz egyenlő. Ugyanis minden az $(A)$-ban előforduló $\left(\frac{k}{p}\right)$, $\left(\frac{k+1}{p}\right)$ egymásutánnak, $(B)$-ben megfelel egy $\left(\frac{p-(k+1)}{p}\right)$, $\left(\frac{p-k}{p}\right)$ egymásután, úgy hogy minden $(A)$-ban előforduló jelváltozásnak, $(B)$-ban egy és csak egy jelváltozás felel meg és megfordítva.

Tekintvén azt, hogy esetünkben

$$\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right)=\left(\frac{\frac{p+1}{2}}{p}\right)$$

és ennélfogva $\frac{p-1}{2}$-nél nincsen jelváltozás, az $(L)$ sorozat jelváltozásainak száma egyenlő az $(A)$-ban és $(B)$-ben előforduló jelváltozások számának összegével, az-az

$$2\mu = v = \frac{p-1}{2}$$

és ebből

$$\mu = \frac{p-1}{4}.$$

De

$$(-1)^{\mu} = \left[\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{2}{p}\right)\cdot\left(\frac{3}{p}\right)\right]\cdots\left[\left(\frac{\frac{p-3}{2}}{p}\right)\cdot\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{p}\right)^2\cdots\left(\frac{\frac{p-3}{2}}{p}\right)^2\cdot\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right) = \left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}};$$

és minthogy továbbá

$$\left(\frac{2}{p}\right)\cdot\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = 1,$$

a két utolsó egyenlet szorzásából ered

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}.$$

$\delta$) *Legyen* $p$ $(4k+3)$-*alakú*, akkor hasonló módon bizonyíthatjuk be, hogy az $(A)$-ban előforduló jelváltozások száma $\mu$ megegyez a $(B)$-ben előforduló jelváltozások számával. De itt az $(L)$ sorozatban $\frac{p-1}{2}$-nél is van jelváltozás, a melyet $2\mu$-hez hozzá kell számlálnunk, hogy $v$-t nyerjük; azaz esetünkben

$$2\mu + 1 = v = \frac{p-1}{2}$$

és ebből

$$\mu = \frac{p-3}{4}.$$

De

$$(-1)^{\mu}=\left[\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)\right]\cdots\left[\left(\frac{\frac{p-3}{2}}{p}\right).\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{p}\right).\left(\frac{2}{p}\right)^2\left(\frac{3}{p}\right)^2\cdots\left(\frac{\frac{p-3}{2}}{p}\right)^2.\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right)=\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right)$$

és így

$$\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-3}{4}}.$$

Esetünkben

$$\left(\frac{2}{p}\right).\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$$

és így a két utolsó egyenlet szorzásából ered

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p+1}{4}}.$$

A talált eredményeket a következőképen foglalhatjuk össze:

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p\mp1}{4}}$$

*a szerint, a mint $p$ $(4k+1)$-alakú vagy pedig $(4k+3)$-alakú.*

Ez nem más, mint a 2-re vonatkozó ismeretes tétel, melyet legelőször Lagrange bizonyított be és melynek szokásos alakja:

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

*Spiegl Zsigmond.*

## FELADATOK.

10. Legyenek

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

a

$$g(x) = 0$$

$n$-edfokú egyenlet gyökei; bebizonyítandó, hogy az

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \ldots & \alpha_1^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2\alpha_1 & 3\alpha_1^2 & \ldots & (2n-1)\,\alpha_1^{2n-2} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & \ldots & \alpha_2^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2\alpha_2 & 3\alpha_2^2 & \ldots & (2n-1)\,\alpha_2^{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \alpha_n^3 & \ldots & \alpha_n^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2\alpha_n & 3\alpha_n^2 & \ldots & (2n-1)\,\alpha_n^{2n-2} \end{vmatrix}$$

determináns egyenlő a $g(x)=0$ egyenlet discriminánsának négyzetével.

(RADOS G.)

11. Két test összeütközvén, az érintkezés pillanatában merev összeköttetésbe lép; adva lévén a két test haladó és forgó mozgása összeköttetésük előtt, határoztassék meg együttes mozgásuk ezután; a részletes számítás arra az esetre eszközlendő, melyben a testek homogén gömbök.

(RÉTHY.)

12. Leirandó egy súlyos anyagi pont mozgása vertikális tengelyű körhenger belső felületén a súrlódás tekintetbe vételével, ha a pont kezdeti helye és sebessége valamint ennek iránya adva van.

(RÉTHY.)

# MEGOLDOTT FELADATOK.

**6.** Valahol a síkon rajzban meg van adva egy kör és annak a középpontja. Egy második körnek meg van adva három pontja. Tisztán vonalzó segítségével döntendő el vajjon e második körnek egy adott egyenessel vannak-e valós metszéspontjai, és ha igen, ezek ismét tisztán vonalzó segítségével meg is szerkesztendők. (RADOS.)

---

*Első megoldás dr. Kürschák József műegyetemi m. tanár úrtól.*

STEINER egyik terjedelmesebb értekezésében * részletesen kimutatta, hogy a vonalzó és körzővel megoldható planimetriai feladatoknál a körző teljesen nélkülözhető, mihelyt a síkban meg van adva egy teljesen kirajzolt kör és annak középpontja. Hogy ily módon a körző egyszeri használatával megfejthessük mindazokat a feladatokat, melyeket az elemi geometria a körző szabad használatával old meg, arra bizonyos alapszerkesztések ismerete szükséges. STEINER *nyolczat* sorol fel, nekünk azonban a jelen feladat megoldásánál ezek közül már *négy* lesz elegendő. Czélszerű lesz először az idézett értekezés alapján e négy alapfeladat szerkesztésével megismerkednünk, voltaképeni feladatunkat ezután igen könnyen fogjuk ezekre visszavezethetni.

**I. Alapfeladat.** *Adott egyenessel adott ponton át párhuzamos vonandó.*

Hogy a körző használatát elkerülhessük, e szerkesztésnél s valamennyi későbbinél meg van adva *egy* teljesen kirajzolt kör és annak középpontja $M$.

Legyen az adott egyenes $ef$ (1. ábra). Húzzunk az $M$ ponton át egy tetszőleges $ab$ átmérőt, mely (kellően meghosszabbítva) az $ef$ egyenest $g$-ben

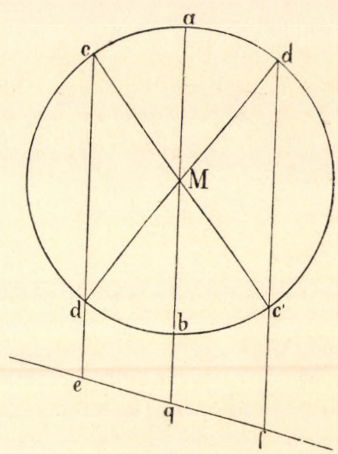
---

* Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie, und eines festen Kreises. Berlin 1833. Ujból lenyomatott St. összegyűjtött munkáinak I. kötetében 461—522. l.

metszi; húzzunk továbbá a kör valamely $c$ pontján át $ab$-vel párhuzamosat, a mennyiben megszerkesztjük a $ca$, $cM$, $cb$ sugarakhoz a negyedik harmonikust. Messe ez a kört a $c$ ponton kívül még $d$-ben, az $ef$ egyenest pedig $e$-ben.

Ha még meghúzzuk a $cMc_1$ és $dMd_1$ átmérőket és a $c_1$ pontot összekötjük $d_1$-gyel: akkor a $c_1d_1$ egyenes oly $f$ pontban metszi az adott $ef$ egyenest, hogy

$$\overline{eg}=\overline{gf}.$$




1. ábra.

Szerkesztésünk hátralevő része oly egyszerű, hogy az ábrában nincs feltüntetve. Ha ugyanis $P$-vel jelöljük azt a pontot, melyen át a párhuzamos vonandó: akkor csak a $Pe$, $Pg$, $Pf$ sugarakhoz a negyedik harmonikust kell megszerkesztenünk, a mi tisztán vonalzó segítségével végezhető. Az $e$, $g$, $f$ pontok viszonylagos helyzetéből következik, hogy az így nyert egyenes valóban párhuzamos az $ef$ vonallal.

**II. Alapfeladat.** *Adott AB vonaldarab felezendő.*

E czélból húzzuk meg a sík valamely $P$ pontján keresztül a $PA$, $P\infty$, $PB$ sugarakat, hol $P\infty$ a $P$ ponton át $AB$-vel párhuzamosan vont egyenest jelenti. A hol e három sugár negyedik harmonikus sugara metszi $AB$-t, ott lesz e vonaldarab felező pontja.

A $P\infty$ egyenes szerkesztése itt úgy történik, mint az I. alapfeladatnál előadtuk.

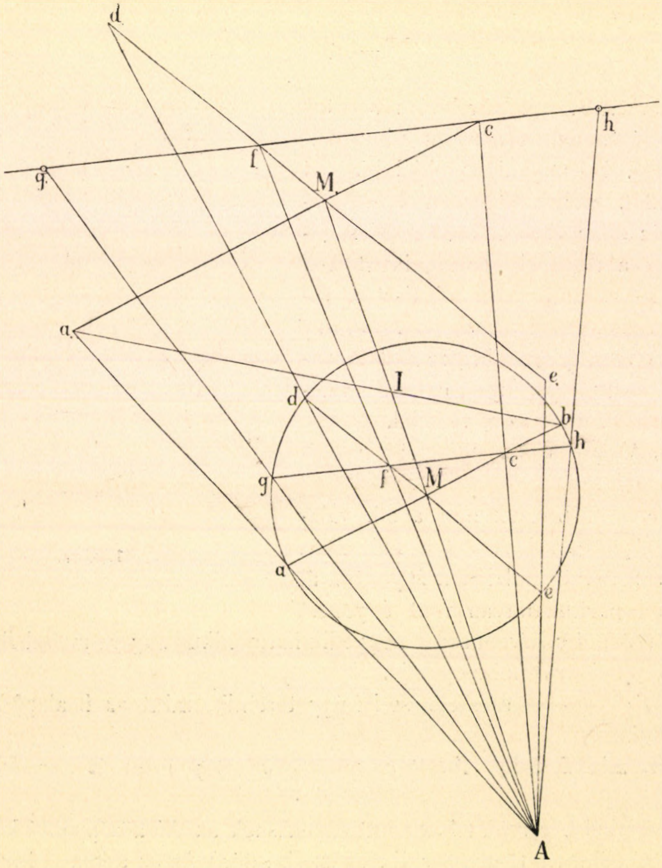
**III. Alapfeladat.** *Adott egyenesre adott ponton át merőleges vonandó.*

E czélból keressük fel az adott egyenesnek az $M$ középpontú körre vonatkozó pólusát. (Ismeretes lineár szerkesztés.) Az az egyenes, mely e pólust az $M$ középponttal köti össze, az adott egyenesre merőleges. Hogy épen a keresett merőlegest nyerjük, az adott ponton át a már talált merőlegessel párhuzamost kell húznunk.

Ha az adott egyenes igen közel esik az $M$ középponthoz, akkor pólusa igen messze fog esni. Ebben az esetben czélszerű az adott egyenes helyett egy vele párhuzamosnak polusát meghatározni.

**IV. Alapfeladat.** *Valamely körnek meg van adva egyik pontja,* *továbbá a középpontja. Kerestetnek e körnek adott egyenessel való metszéspontjai.*

Legyen $M_1$ (2. ábra) az adott középpont és $M_1a_1$ az adott sugár, s legyen $g_1h_1$ az az egyenes, melynek az ekként megadott körrel való metszéspontjai meghatározandók.




2. ábra.

Huzzuk meg az $M$ középpontú s teljesen kirajzolt segédkörben az $ab$ átmérőt párhuzamosan $M_1a_1$ vonallal. (I. alapfeladat.) Vonjuk meg továbbá az $aa_1$ és az $a_1b$ egyeneseket, valamint $MM_1$ vonalat is, melyet ezek $A$ és $I$-ben metszenek. Ezek a pontok lesznek az $M_1$ és az $M$ középponttal bíró két körnek hasonlósági pontjai. A következőkben tartsuk szem előtt az $A$

pont megállapította hasonlóságot, s határozzuk meg, hogy az $M$ középpontú kör melyik szelője fog az $M_1$ középpontú kör $g_1h_1$ szelőjének megfelelni.

E czélra hosszabbítsuk meg az $M_1a_1$ egyenest míg az adott $g_1h_1$ vonalat $c_1$-ben metszi, ezután vonjuk meg az $Ac_1$ egyenest. Ennek és $ab$-nek metszéspontját jelöljük $c$-vel. A $c$ és $c_1$ pontok az $A$ hasonlósági pontra nézve hasonló fekvésüek, mert ilyenek $aM$ és $a_1M_1$. Húzzuk meg továbbá a $de$ átmérőt és vele párhuzamosan $M_1$ ponton át a $d_1e_1$ egyenest, mely $g_1h_1$-t $f_1$ pontban metszi. Kössük össze egyszersmind ezt a pontot $A$-val. Az így nyert $Af$ vonalnak és $de$-nek $f$ metszéspontja $f_1$-gyel hasonló fekvésű. Az adott $g_1h_1$ vagyis $c_1f_1$ egyenesnek tehát az $M$ középpontú kör szelői közül a $cf$ egyenes fog megfelelni.

Legyenek most már $g$ és $h$ e $cf$ egyenesnek és az $M$ körül megadott segédkörnek metszéspontjai. A hol az $Ag$ és $Ah$ egyenesek $c_1f_1$ egyenest metszik ott lesznek $c_1f_1$-nek s az $M_1$ középpontú körnek keresett metszéspontjai. Az ábrában épen ezek vannak $g_1h_1$-gyel jelölve.

Megjegyzendő, hogy $g$ és $h$ lehet két valós pont, lehet két képzetes pont, vagy esetleg össze is eshetik. Hasonló áll akkor a $g_1$ és $h_1$ pontokról is.

Hogyan oldjuk most már meg a tulajdonképen kitüzött feladatot?

Az elemi geometria megtanít arra, hogyan lehet három pontból pusztán vonalak felezésével és merőlegesek vonásával megtalálni a tőlük meghatározott kör középpontját. Ha e szerkesztéseket úgy végezzük, mint II. és III. alatt előadatott, feladatunk vissza van vezetve a IV. alatti alapszerkesztésre.

---

## *Második megoldás Suták József főgymnasiumi tanár úrtól Budapesten.*

Ha a síkban adva van egy kör és középpontja $C$, akkor két átmérőjének végpontjait összekötő egyenesek alkotta parallelogramm segítségével, a másik kör $B_1$, $B_2$, $B_3$ pontjait összekötő egyenesekhez párhuzamosakat, valamint azokra merőlegeseket a már ismert módon vonalzó segítségével szerkeszthetünk. $B_1B_2$, $B_2B_3$, $B_3B_1$, felező pontjait a húzott párhuzamosak segítségével vonalzóval meglelem, ha $(B_1, B_2, \infty)$, $(B_2, B_3, \infty)$, $(B_3, B_1, \infty)$ pontokhoz a negyedik harmonikust keresem; a felező pontokon át az említett parallelogramm útján a már húzott merőlegesekhez párhuzamosakat vonunk; ezek találkozási pontja, a $B_1$, $B_2$, $B_3$ pontokon átmenő kör középpontját, $C_1$-et adja; kössük össze $C_1$-et a felvett pontok valamelyikével pl. $B_1$-gyel, húzzunk $C$ ponton át párhuzamost $C_1B_1$-hez, mely $C$ kört két pontban metszi ezek egyikét $A_1$-el jelölvén $A_1B_1$ és $CC_1$ egyenesek találkozási pontját $O$-t tekintsük hasonlósági pontnak a végtelen távoli egyenest pedig a kollineaczió tengelyének, ekkor $A_1$, $B_1$ valamint $C$, $C_1$ megfelelő pontok, és a $C$ kör kollinear idoma a $C_1$ kör.

Megvizsgálom most, hogy a feladatban adott $b$ egyenes metszi-e $C_1$ kört? Messe a $b$ egyenes $B_1B_2$ és $B_1B_3$ egyeneseket $B_4$ illetőleg $B_5$-ben. Húzzunk $C$ ponton át $B_1B_2$ és $B_1B_3$-al párhuzamos $A_1A_2$ és $A_1A_3$ egyeneseket, melyeket $B_4O$ és $B_5O$ messenek $A_4$ és $A_5$ pontokban; tehát $A_4A_5$ röviden $a$ egyenes lesz $b$-nek megfelelője. $b$ egyenes annyi pontban metszi $C_1$ kört a hányban $a$ $C$-t. Messe $a$ $C$ kört $A$-ban; $AO$ és $b$ egyenesek találkozási pontja lesz a kivánt metszés pont, ha $a$ $C$ körnek érintője $b$ $C_1$-é, ha $a$ nem szeli $C$ kört $b$ sem metszi $C_1$-et.

*

A fent közölt megoldással nagyjában egyező megoldást beküldött még Dr. Beke Manó főreáliskolai tanár úr. *Szerk.*

# ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1892. ÉVBELI

# ELŐADÁSAIRÓL.

1892. februárius 4. Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az érintési transformatiók elméletéről. (II. előadás. Közölni fogjuk.)

BARTONIEK GÉZA: JEDLIK lánczolatosan kisüthető leydeni battériájáról.

1892. február 18. Dr. KOPP LAJOS: Adatok a parallelák elméletének újabb irodalmából.

1892. márczius 3. Dr. FRÖHLICH I. Az energia mozgása az elektromágnesi térben. (Közölni fogjuk.)

1892. márczius 17. RADOS GUSZTÁV: Néhány új adat a transcendens egyenletek elméletének újabb irodalmából. (Ismertetjük.)

1892. aprilis 7. SZILY KÁLMÁN bemutatja LIPPMANN spektrum-fotografiáját.

TANGL KÁROLY: A transcendens függvények elméletéről. (Közölni fogjuk.)

1892. aprilis 21. Dr. RÉTHY MÓR: A gravitatio, az elektromosság, a mágnesség és a fény elméletének közös alapon való tárgyalásáról. (Közölni fogjuk.)

*

*A gázok absorptiójáról.* (Dr. WINKLER LAJOS január 7-én tartott előadásából.)

Előadó először is, magáról az absorptio tüneményéről szólván, példákat sorol fel arra, hogy a különféle folyadékok a gázokat minő változó mennyiségben oldják.

Azután röviden ama búvárok munkáit ösmertette, a kik a gáz absorptióval behatóbban foglalkoztak. Elsők voltak DALTON és SAUSSURE, később BUNSEN és tanítványai (THAN, CARIUS, SCHÖNFELD, SCHIEKENDANTZ), kik számos mérést végeztek annak kiderítése végett, hogy a víz és az alkohol mennyire oldják a különféle gázokat. Előadó DALTON eljárásának vázolása után a BUNSEN-féle absorptiométert mutatja be. BUNSEN alapvető dolgozataiban sok hézag maradt s ez indította előadót ez irányú mérések eszközlésére.

Absorptiométerét úgy rendezte be, hogy a megelőző kisérletek legfőbb hibaforrásait lehetőleg elkerülje. Készüléke mintegy 2000 $cm^3$ térfogatú üveggolyó volt, melyhez kétszer meggörbített tág üvegcső volt forrasztva; a berendezés főelőnye a tökéletes légzárás volt, vagyis az, hogy az absorptiónak alávetendő gázból semmi sem illanhat el és levegő sem hatolhat hozzá. Az absorptiométer nagy vízfürdőbe volt helyezve, melynek hőmérséklete tetszőlegesen szabályozható és pontosan mérhető volt. Készülékével eddig a hidrogen, oxigén, nitrogén, szénoxid és nitrogénoxid vízben való oldhatóságát határozta meg, 0 és 80° közötti hőmérséki fokokon. Adataiból a következőket közöljük, melléjök zárjelbe írván B. adatait is:

| | abs. cœfficiens. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0°-on. | | 20°-on. | |
| Hidrogén ... ... ... | 0·02148 | (0,01930) | 0·01819 | (0,01930) |
| Nitrogén ... ... ... | 0·02348 | (0, 2035) | 0·01542 | (0,01403) |
| Szénoxid ... ... ... | 0·03537 | (0,03287) | 0·02319 | (0,02312) |
| Nitrogénoxid ... ... | 0·07381 | — | 0·04706 | — |
| Oxigén ... ... ... | 0·04890 | (0,04114) | 0·03103 | (0,02838) |

A táblázat mutatja, mily nagyok az eltérések a régibb és az új mérések között.

Bemutatja azután a vízben oldott oxigén chémiai úton való meghatározására szolgáló jodometrikus módszerét. Az oxigénre vonatkozólag, a chemiai és physikai úton kapott eredmények megegyezők, a mi a meghatározások helyességét bizonyítja.

Szólt a levegőnek vízben való oldhatóságáról is; a levegő abs. coeff.-ei ugyanis a Henry-Dalton-féle törvény alapján, az oxigén és nitrogén abs. cœff.-ei-ből kiszámíthatók.

Közvetlen méréseket is végzett levegővel, olyformán, hogy a vizet levegővel telitette, azután alkalmas készülékben a levegőt belőle forralással kiűzvén, mennyiségét megmérte. Előadó erre vonatkozó mérései még nincsenek befejezve, de már is bizonyos, hogy a vízből kifőzött levegő oxigéntartalma nem független a telitéskor uralkodó hőmérséktől, hanem oxygéntartalma a hőmérsék emelkedtével lassacskán csökken. Bunsen ugyanis azt találta, hogy 0° és 20° között a telitett vízből kifőzött levegő állandóan 34,91% oxigént tartalmaz.

Végül az absorptio jelenségeknél fölismerhető törvényszerűségekről szólott. A megvizsgált gázok absorptio coefficiensei a hőmérsék növekedtével csökkennek, de nem egyformán; a százalékos csökkenés annál nagyobb minél nagyobb a gáz molekula súlya. *A százalékos csökkenés a gáz molekula súlyának a köbgyökével közel arányos.* Igy tehát a víz valamely physikai sajátságának a megváltozása okozza az abs. coeff. csökkenését.

Előadó úgy véli, hogy a víz *belső surlódásának* a megváltozása okozza az abs. coeff. csökkenését. Tapasztalati úton oda jut, hogy az összefüggés a következő formulával fejezhető ki:

$$\frac{\beta-\beta_t}{\beta}=\frac{\mu-\mu_t}{\mu}\cdot\frac{\sqrt[3]{m}}{k}$$

$\beta$ és $\beta_t$ a gáz absorptio coefficiensét jelenti két különböző hőmérséken, $\mu$ és $\mu_t$ ugyanezen hőmérséken a víz viszonyos belső surlódását, $m$ a gáz molekula súlyát, $k$ pedig egy állandót. Csupán $k$ lévén ismeretlen, könnyen kiszámítható; minden gázra nézve közel ugyanaz és 3·78-at teszen ki.

Ámde e szám a víz molekula súlyának a köbgyökével $\left(\sqrt[3]{54}=3{\cdot}7798\right)$ megegyezik, úgy hogy a képlet így is írható:

$$\frac{\beta-\beta_t}{\beta}=\frac{\mu-\mu_t}{\mu}\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{M}}$$

ha $M$ a víz molekula súlyát jelenti.

Ezentúl végzendő kisérletek fogják eldönteni, hogy az itt felismert törvényszerűség más folyadékoknál is mutatkozik-e vagy nem.

*

*Jedlik Ányos lánczolatosan kisüthető leydeni battériájáról.* (Bartoniek Géza 1892. febr. 4-én tartott előadásából.)

Jedlik Ányos, társulatunk első rendes tagja, a magyar orvosok és természetvizsgálók IX. nagy-gyűlésén, Pesten 1863-ban, a leydeni battéria kisütésének egy új módját mutatta be, mely tanulságos voltánál fogva megérdemli, hogy a szaktársak figyelmét újra reáirányítsuk.

Az általánosan elterjedt leydeni battériák tudvalevőleg úgy vannak szerkesztve, hogy kisütés közben az egyformán töltött fegyverzetek vannak egymással összekötve. Az ilyen battéria voltaképen csak egy nagyobb fegyverzetű leydeni palaczk, melynek segítségével a kisütésben résztvevő elektromosság mennyisége a palaczkok szaporításával növelhető, de a szikra hoszsza nem lesz nagyobb, mint a mekkora egyetlen egy palaczkkal kapható. Jedlik a szikrának hoszszát hatalmasan fokozza az által, hogy a megtöltött palaczkoknak ellentétesen töltött fegyverzeteit köti össze. Ő ugyanis a töltött leydeni palaczkot Volta-féle galván-elemhez hasonlítja s úgy okoskodik, hogy a mint a galvánelemek ellentétes sarkainak összekapcsolása a potentialkülömbséget az elemek számával arányosan emeli, ép úgy kell emelkednie a potentiál-külömbségnek a töltött leydeni palaczkok megfelelő összekapcsolása által is.

Gondoljuk, hogy $n$ egyforma leydeni palaczk áll rendelkezésünkre, s a fejtegetés egyszerüsítése végett tegyük fel, hogy a belső s a külső fegyverzeteken elhelyezkedő ellentétes elektromosságok mennyisége ugyanaz; a külső fegyverzetek töltés közben a földdel érintkezzenek, azaz potentiáljuk legyen 0. Ha ezen körülmények között a $V$ potentiálu forrásból minden palaczk belső fegyverzetére $e$ elektromosság-menynyiség áramlik, az egyes palaczk elektromos energiája $eV$. Ha már most valamiféle mechanismus mindegyik palaczk belső fegyverzetét a rákövetkezőnek külső fegyverzetével érintkezésbe helyezi, akkor a rendszerben levő összes energia az utolsó palaczk szabadon maradt belső fegyverzetén halmozódik fel s értéke nyilván $neV$. Minthogy a palaczk töltése e közben ugyanaz maradt, a potentiál változott olyformán, hogy $eV' = neV$, vagyis $V' = nV$. A potentiál tehát a palaczkok számával arányosan emelkedett.

Jedlik a töltött leydeni palaczkoknak ilynemű összekapcsolására többféle szerkezetet gondolt ki. Berendezése legegyszerűbb alakjában a következő: A leydeni palaczkok, jól szigetelve, úgy vannak sorba állítva, hogy az egymásra következők között körülbelül egy palaczk-szélességű köz maradjon. Minden palaczk belső és külső fegyverzetével csuklóban forgó 2—3 mm. vastag fémpálcza közlekedik (vezetőleg), melynek végére erősített golyó a rákövetkező palaczk belső-, ill. külső fegyverzetét érinti (vezetőleg); ha a fémpálczák ebben a helyzetben vannak, a palaczkok közönséges módon, nagy felületű battériába vannak összekapcsolva. Az egyes palaczkok fegyverzetével közlekedő pálczák selyemzsinorral vannak egymáshoz kötve úgy, hogy egymástól való távolságuk állandó maradjon; a zsinór azonfelül arra szolgál, hogy a pálczák emelhetők s lebocsáthatók legyenek. Minden palaczkhoz tartozó pálcza-párt egy-egy zsinór tart s a zsinórok közös tengelyre erősített kerekek kerületéhez vannak kötve. Ha a pálczák abból a helyzetből, melyben az egyforma fegyverzeteket kötötték össze, lebocsáttatnak, a belső fegyverzetek vezetői a szomszédos palaczk külső fegyverzetét — vagy annak valamilyen fémtoldalékát — érintik s a palaczkok lánczolatos kapcsolatba kerülnek: szabadon marad az első palaczknak külső-, s az utolsónak belső fegyverzete. A battéria fémpálczák első állása közben töltendő s ha eléggé megtelt, a pálczák lebocsáttatván, a battéria hirtelen lánczolatosan van összekötve s a kisülés az első s az utolsó palaczk fegyverzetei között megtörténik. E végett az utolsó palaczk belső fegyverzetéhez golyó helyett fémtányér van kötve s fölötte — kellő távolságban — az első palaczk külső fegyverzetével közlekedő golyó van megerősítve.

Jedlik 8 palaczkból álló battériájával 55—65 cm. hosszaságú szikrák kaphatók, holott az egyes palaczkok tölthetőségök határán legfölebb 2—3 cm. hosszaságú szikrát adnak.

A kisérlet kicsiben két, lehetőleg egyforma leydeni palaczkkal is minden különös berendezés nélkül könynyen megmutatható. Egy palaczkot az elektr. gép bizonyos számú fordulatával megtöltünk s szikráját megmérjük. Ezután mindkét palaczkot megtöltjük; az egyiket szigetelőre helyezzük s golyójával szemben — az előbbi szikra hoszszának kétszeresénél nagyobb távolságban — szigetelő száron fémgolyót állítunk fel, fémlánczocskát vagy vezető szalagot akasztunk rá s ezt a második palaczk külső fegyverzetével összeillesztvén, a palaczk golyójával az elszigetelt palaczk külső burkolatát megérintjük. Ha a palaczkok csak némileg jók, a szikra 3-szor, sőt 4-szer oly hosszú, mint egy palaczk szikrája.

Ez a kisérlet, s még sokkal szembetünőbben a JEDLIK battériája, szembeszökően mutatja, hogy a szikra hoszsza nagyobb mértékben növekedik, mint a potentiálkülömbség. Az erre vonatkozó kisérletek nagy sorából MASCART * néhány adatát közöljük.

| Szikra hossza | Potentiál-külömbség | Szikra hossza | Potentiál-külömbség |
|---|---|---|---|
| 1 mm. | 1 | 60 | 18,5 |
| 4 « | 4 | 70 | 19,6 |
| 5 « | 4,9 | 80 | 20,5 |
| 10 « | 8,3 | 90 | 21,5 |
| 15 « | 10,3 | 100 | 21,7 |
| 20 « | 11,8 | 110 | 22,1 |
| 30 « | 14 | 120 | 22,5 |
| 40 « | 15,9 | 150 | 23,3 |
| 50 « | 17,3 | | |

MASCART ezen táblázatához két érdekes megjegyzést fűz. Az egyik az, hogy nagyot tévedünk, ha az elektromos gépet tisztán csak szikráinak hosszúsága szerint itéljük meg. A másik pedig: a villámok rengeteg hosszúságából nem lehet arra következtetni, hogy az elektromos felhők potentiálja nem hasonlítható össze a mi gépeinkből előállítható potentiálokkal.

JEDLIK lánczolatos battériája igen alkalmasnak látszik arra, hogy az ez iránybeli hézagos ismeretek kibővítésénél hasznos szolgálatot tegyen. Történetét illetőleg nem érdektelen megjegyezni, hogy a battéria módosított alakban az 1873. bécsi kiállításon díjat nyert, s hogy JEDLIK-ével egyező szerkezetű battériát MACH ismertetett meg — 1878-ban.

*

*Adatok a parallelák elméletének újabb irodalmából.* (Dr. KOPP LAJOS febr. 18-án tartott előadásából.)

Az EUKLIDES *elemeiben* összeállított definicziók, posztulatumok és axio-

* MASCART, *Traité d' Électricité statique.* II. köt. 90. l.

mák között nevezetes helyet foglal el az *ötödik posztulatum*, melynek tartalma velejére nézve abban áll, *hogy adott ponton át adott egyenessel csak egy parallelát húzhatunk.*

PROKLUS-tól kezdve egészen LEGENDRE-ig a geometrák egész serege foglalkozott avval a kérdéssel, hogy nem lehet-e ennek a posztulatumnak tartalmát Euklides többi alaptételeiből levezetni? De az összes ez irányban tett kísérletek czélhoz nem vezettek. Így támadt az a gondolat, felépíteni oly geometriai rendszert, mely eme posztulatum mellőzésével EUKLIDES-nek csak többi alaptételeit fogadja el. Hogyha ez utóbbi geometria, az u. n. *abszolut geometria*, ellenmondáshoz vezetne, ezzel indirekte az ötödik posztulatum helyessége is be volna bizonyítva. De az abszolut geometria, melynek GAUSS, BÓLYAI és LOBATSCHEWSKY a megalapítói, ellenmondáshoz nem vezetett, hanem ellenkezőleg egy önmagában konzekvens geometriát adott, mely ugyan a legtöbb megszokott geometriai szemlélettel nem egyez, de mégis elvitázhatatlanul helyes következtetésekkel állítja elő tételeit az alapul tett præmissákból.

Ügyelnünk kell azonban itt egy körülményre: a míg ugyanis bebizonyítható, hogy valamely tétel más tételekből levezethető, addig nem bizonyíthatjuk be, hogy valamely tétel másokból le nem vezethető; csak ha sikerül kimutatnunk, hogy létezik oly terület, a melyen a többi alaptétel érvényesül, míg az ötödik posztulatum pedig nincsen teljesítve; állíthatjuk azt, hogy ez az 5. posztulatum a többi alaptételtől független. Ily példát mutat az ismeretes BELTRAMI-tér, de sokkal egyszerűbb és elemibb példákat adott PETERSEN a *Tidsskrift for Mathematik* 1883-iki kötetében közölt értekezésében, mely német fordításban is megjelent a *Math. Annalen* 29. kötetében.

Nevezzük a sugársor elemeinek összességét «*egyenes*»-nek, minden egyes elemét «*pont*»-nak és a sugárpont (Strahlen-bündel) összes elemeit «*sík*»-nak, akkor ezeknek az elnevezéseknek bevezetése mellett is állanak a geometriai alaptételek:

Az egyenest a két pontja már teljesen meghatározza (a sík két egy ponton keresztül menő egyenesből van meghatározva); két egyenes egy pontban metszi egymást (két sugársor közös eleme egy sugár); a sík 3 pontból van meghatározva, melyek nem feküsznek egy egyenesben (3 nem egy sugársorban fekvő sugár sugárpontot határoz meg) sat. Itt is 3 «egyenes» képez egy «háromszöget» (háromélü testszögletet, melyben azonban a szögek összege többé nem $2R$, hanem $2R$ és $6R$ között van. Hogyha tehát a szemlélet mellőzésével tisztán eme definicziókból indulunk ki, kapunk egy ellenmondás nélküli geometriát, melyben Euklides többi alaptételei fennállanak, de a háromszög szögösszegére vonatkozó tétel, mely az ötödik posztulatum folyománya, többé nem áll.

Söt, ha a pontnak a szemléletből nyert fogalmát meg is tartjuk, még akkor is hiányosnak bizonyul az egyenesnek ama definicziója, hogy két pontjából már meg van határozva. Két pont meghatározza pl. azt a kúpszeletet is, mely már három adott ponton keresztül megy. Úgy úgy az egyesnek föntemlített definicziója ráillik tehát ama kúpszeletek összességére is, melyek három szilárd ponton átmennek. Hogyha az egyenes definiczióját még ama követeléssel bővítjük ki, hogy önmagában eltolható legyen, akkor e definiczió felőleli ama körök összességét is, melyek egy adott ponton már keresztül mennek.

A sík definicziója áll az egy ponton átmenő gömbökre is, melyek 3 pontból meg vannak határozva és önmagukban eltolhatók, és a síkbeli egyenes definicziója ugyanaz, mint a gömbfelületen levő és már egy ponton keresztül menő köré vagy a gömb legnagyobb körének definicziója. Az előbbi körök az adott ponton kívül még egy pontban metszik egymást, a legnagyobb körök két pontban; azonkívül a legnagyobb körök meghatározása két pont által megszűnik, ha ezek egy átmérőnek két végpontját képezik. Ha a gömbfelületen már egy ponton keresztülmenő köröket tekintjük egyeneseknek, itt a háromszögben a szögek összege $2R$ lesz, a mint az könnyen kimutatható; ha pedig a legnagyobb köröket tekintjük egyeneseknek, ez a tétel nem tartja meg érvényességét, a mint azt a háromszögtanból tudjuk.

Látjuk e példákból, hogy a geometriai fogalmaknak rendesen adott definicziója sokkal nagyobb kört ölel fel, mint a milyent a szemléletből vett fogalmak kitöltenek. Ez egyik főnehézség a geometriai alapfogalmak kutatásában, míg egy másik nehézséget az idéz elő, hogy rendesen nem azonnal állítjuk fel az összes alapfogalmakat, hanem mindig ujabbakat veszünk a tárgyalás folyamán a szemléletből hozzá. Így pl. Legendre ismeretes bizonyítása, hogy a háromszögben a szögek összege nem lehet nagyobb mint $2R$, is felhasznál olyan adatokat, melyek Euklides alaptételeiben nem tartalmaztatnak: mint pl. hogy a háromszögnek egyik szöge sem lehet egy maga nagyobb, mint $2R$, hogy az oldalfelezők a háromszög belsejében maradnak.

*

*Lippmann spektrum-fotografiája.* (Bemutatta Szily Kálmán az 1892. apr. 7-én tartott ülésen).

Előadó Korda Dezső hazánkfiától, ki jelenleg Lippmann laboratoriumában physikai tanulmányokat végez, a rövid idő alatt híressé vált Lippmann-féle spektrum-fotografiájának egy szép példányát kapta, melyet a társulat ülésén bemutatott. Hivatkozván a társulat előtt régebben tartott előadásra, * főleg a fotografia leírására és a készítésénél újabban tett haladás ismertetésére szorítkozik.

A fotográfia a színkép színeit visszavert fényben rendkívül élénken, szépen mutatja. Első tekintetre észrevehető, hogy a színek vékony lemezekben végbemenő interferentia révén jönnek létre: más-más hajlás alatt tekintve, más és más színek mutatkoznak a lemez ugyanazon helyén. A vörös szín helyén változtatott hajlásszög alatt zöld, ennek helyén pedig a kék mutatkozik. A zselatin-hártyát megnedvesítvén, a hártya megduzzad s a színek eltünnek; de mihelyt megszáradt újra láthatókká lesznek.

A kisérletek kezdetén egyik legnagyobb nehézség abban állott, hogy a brómezüstös zselatin v. collodiumhártya a nagyobb hullámhosszú (vörös, sárga) színek iránt igen érzéketlennek mutatkozott. Ezt a nehézséget sikerült leküzdenie Lippmann-nak, a mennyiben a fénybenyomás fölvételére jelenleg a fénynek fél perczényi hatása elegendő, holott azelőtt órákon át kellett a színképnek a lemezt megvilágítania. Fenmarad azonban még mindig az a baj, hogy az ezüstsó a külömböző színek iránt nem egyformán érzékeny. Most a vörös szín jön legjobban, holott azelőtt a kék és ibolya volt a leghatásosabb. Ez eredmény alapján remélhető, hogy az érzékenység teljes kiegyenlítése is fog sikerülhetni.**

---

* L. 28. lap.

** L. bővebben: Természettudományi Közlöny XXIV. köt. 190. lapján: Korda D.: A szinek fotografiája.

## A Mathematikai és Physikai Társulat pénztárába a tagok részéről történt befizetések.

Pártoló tagsági díjat fizettek: *Dr. b. Hornig Károly* veszprémi püspök, *Dr. Kune Adolf* csorna-premontrei prælatus prépost, *Hopp Ferencz* a Calderoni-czég tulajdonosa és a *Magyar Kegyes Tanítórend* 100—100 frtot.

Örökítő tagsági díj fejében fizettek: *Fröhlich Izidor* 100 frtot, *Kürschák József* és *Vályi Gyula* 60—60 frtot.

*Az 1891. évre a tagsági díjat önként felajánlották:* Balog Mór, Bartoniek Géza, Bein Károly, Beke Manó, Berecz Antal, Bodola Lajos, Bogyó Samu, Bozóky Endre, Chudy Hugó, b. Eötvös Loránd, Éberling József, Edelmann Sebő, Fraunhoffer Gyula, Fröhlich Izidor, Ghyczy Géza, Gothard Jenő, Gruber Nándor, Heller Ágoston, Hornischek Henrik, Hortobágyi Zsigmond, Ilosvay Lajos, Juckel Gyula, Kemény Ferencz, Kherndl Antal, Kilián Frigyes, Kleiszner Rezső, Kovács János, Kőnig Gyula, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz, Lipthay Sándor, Palatin Gergely, Perger József, Plósz Pál, Rados Gusztáv, Rátz László, Réthy Mór, Rombauer Emil, Rucsinszky Lajos, Schmidt Ágoston, Schmidt Ferencz, Scholtz Ágost, Schuller Alajos, Sinkó József, Szenessy Mihály, Szily Kálmán, Than Károly, Tőttössy Béla, Vámos Dezső, Wagner Géza, Wittmann Ferencz.

*A köteles tagsági díjnál többet fizettek:* Antolik Károly (2), Bodola László (2), Etele Károly (2), Fényes Dezső (2), Gerevich Emil (2), Hlatky Miklós (2), Klimkó Mihály (2), Kosztolányi Árpád (1), Palatin Gergely (8), Perjéssy László (2), Ratkovszky Pál (2), Salamin Leo (1), Schenek István (2), Schwarz Ottó (2), Simon Tádé (2), Szabó Ferencz (2), Szépréthy Béla (2) és Weinhardt Ferencz (2). [A ( )-be foglalt szám forintot jelent.]

*Az első társulati évre (1892) eső tagdíjat lefizették:* Ábel János, Abt Antal, Alszeghy Alajos, Antolik Károly, Arany Dániel, Aranyosi Miksa, Asbóth Emil, Ábrahám János, Baló Gyula, Balog Mór, Barabás Jenő, Baranyi Balázs, Bartoniek Géza, Bein Károly, Beke József, Bellaágh Kálmán, Berecz Antal, Berkes Imre, Bielek Miksa, Bóbita Endre, Bodola Lajos, Bodola László, Bodor Domokos, Bogyó Samu, Boros Sándor, Borosay Dávid, Bozmánszky Gyárfás, Bretz Berta, Bukovszky János, Butorka Száva, Chudy Hugó, Csehély Adolf, Csernus László, Csomóssy Sándor, Csopey László, Czigler Győző, Czógler Alajos, Demeczky Mihály, Dietz E. Lajos, Dömötör Iván, Dzsida Szaléz, Edvi Illés Aladár, Eltscher Simon, Erdődy Imre, Etele Károly, Éberling József, Edelmann Sebő, Faragó János, Fábry Emil, Ferenczy István, Ferenczy József, Fertig Vilmos, Félegyházi Antal, Fényes Dezső, Fodor László, Földes Izabella, Fraunhoffer Lajos, Frosch Károly, Fröhlich Izidor, Fuchs Károly, Gaith Rudolf, Gállik-Dömötör István, Gerevich Emil, Géczy Benedek, Ghiczy Géza, Gúta József, Groszbauer József, Gruber Nándor, Grünwald István, Hahóthy Sándor, Halmy János, Harkányi Béla, Hauszmann Alajos, Havas Miksa, Hegedüs Károly, Held Károly, Heller Richárd, Héjás Endre, Hirschmann Nándor, Hlatky Miklós, Hoór Mór, Hornischek Henrik, Horostsák Gyula, Hortobágyi Zsigmond, Horváth Mátyás, Höhr

Adolf, Hubatsek Alajos, Ignics Boldizsár, Ilosvay Lajos, Inczédy Dénes, Jakab Antal, Janell József, Javorik János, Jónás Ödön, Jurány Henrik, Károly J. Irén, Kerekes Dezső, Kemény Ferencz, Képessy Imre, Kherndl Antal, Kilián Frigyes, Király László, Kirchknopf András, Kiss Dénes, Kiss E. János, K. Kiss József, F. Kiss Károly, Klein Pál, Kleiszner Rezső, Klimkó Mihály, Klug Lipót, Klupathy Jenő, Kmet János, Kohányi Gyula, Kondor Gusztáv, Konkoly Miklós, Kopp Lajos, Kosztolány Árpád, Kőszeghy-Winkler Antal, Kövesligethy Radó, Kövy Imre, Kurländer Ignácz, Lakits Ferencz, Lázár Pál, Lechner Lajos, Lengyel Béla, Lengyel István, Lengyel Sándor, Lipthay Sándor, Lúcz Ignácz, Lukácsi György, Lukáts Lajos, Lutter János, Majoros Endre, Maksay Zsigmond, Malatin Gothárd, Mandák Dezső, Markos Imre, Martin Lajos, Mauritz Rezső, Mendlik Ferencz, Miklós Ödön, Miller Gyula, Módly Krizsó, Molnár József, Müller József, Neumann Jenő, Nuricsán József, Orbán Antal, Palatin J. Gergely, Pallos Béla Kajetán, Papp János, Papp Lajos, Parragh Gedeon, Pecz Samu, Perényi Vilmos, Perjéssy László, Pető Menyhért, Petry Gyula, Plósz Pál, Polereczky Jolán, Prokes Ignácz, Rados Ignácz, Ratkovszky Pál, Ráth Arnold, Rátz László, Récsei L. Farkas, Rejtő Sándor, Renner János, Réthy Mór, Ritli Vendel, Roller Mátyás, Rombauer Emil, Róna Zsigmond, Rucsinszky Lajos. Salamin Leó, Sárkány Lajos, Schenek István, Schey Lipót, Scholtz Ágost, Schmidt Ágoston, Schmidt Ferencz, Schmidt János, Schuller Alajos, Schvarz Ottó, Simon Ferencz, Simon Tádé, Simsa Kornél, Sinkó József, Sinkovics Ferencz, Somogyi Rudolf, Söpkéz Sándor, Stanits Fulgent, Stauber József, Steindl Imre, Straub Sándor, Strauss Ármin, Strohbach Géza, Suták József, Süss Nándor, Szabó Ferencz, Szabó József, Szabó Péter, Szakmáry József, Szalay István, Szarvassy Margit, Szavkay Ede, Szekeres Kálmán, Szemethy Béla, Szenessy Mihály, Szentmiklósy Jenő, Szerényi Géza, Székely Károly, Szépréthy Béla, Szutrély István, Szüts Béla, Takáts Gyula, Tangl Károly, Thanhoffer Lajos, Torday Imre, Tóth József, Tőtössy Béla, Thuránszky Irén, Than Károly, Vályi Gyula, Vámos Dezső, Váter József, Veress Vilmos, Vécsey Bekény, Vidovich Bonaventura, Viszolajszky István, Wagner Alajos, Waldapfel János, Wartha Vincze, Weinhardt Ferencz, Wilim Ferencz, Winkler Lajos, Winter József, Wittmann Ferencz, Wolf Árpád, Závodszky Adolf, Zettner Ede, Zorkóczy Samu.

*A Mathematikai és Physikai Lapok-ra előfizettek:* Aradi főreáliskola, budapesti II. ker. főreáliskola, budapesti III. ker. községi polgári iskola, dévai főreáliskola, győri főreáliskola, jászói prépostság, kaposvári áll. főgymnasium, Mérnök- és Építész-Egylet könyvtára, K. M. Természettudományi Társulat, pozsonyi kir. kath. főgymnasium, pozsonyi áll. főreáiskola, Szt.-Benedekrendi főapátság, szolnoki állami főgymnasium, székely-udvarhelyi áll. főreáliskola, sepsi-szentgyörgyi ev. ref. főgymnasium, ungvári kir. kath. főgymnasium, temesvári áll. főreáliskola.

Budapest, 1892 május 5.

*Mandák Dezső,*
pénztárnok.

4

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

ELSŐ ÉVFOLYAM

VII. ÉS VIII. FÜZET. 1892 NOVEMBER

BUDAPEST

KIADJA A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1892

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenkint 8, legalább 3 ívnyi füzetben fognak megjelenni, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó 20-dik napján. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A társulati év a választmány határozata szerint 1892. január 1-én kezdődik. Ennek folytán a M. Ph. Lapokból a folyó évben 6 füzet jelenik meg, mely a mult évben megjelent kettős füzetet 24—30 ívnyi kötetre fogja kiegészíteni.

A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében volt beküldendő. *Kérjük a tagsági díjjal hátralékban levő tiszt.* Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czimére — legczélszerűbben a mellékelt postautalványnyal — beküldeni. Legyen szabad egyúttal a választmánynak a 3-dik füzet 187. lapján közölt kérelmét t. Tagtársaink becses figyelmébe ajánlanunk.

A befizetett tagdíjakat a M. Ph. Lapok mellékletén nyugtáztatjuk.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére (VI. Bajza-u. 20.) intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár (VII., akáczfa-u. 49.), a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a reklamácziók is.

---

**Kérelem.** Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg.

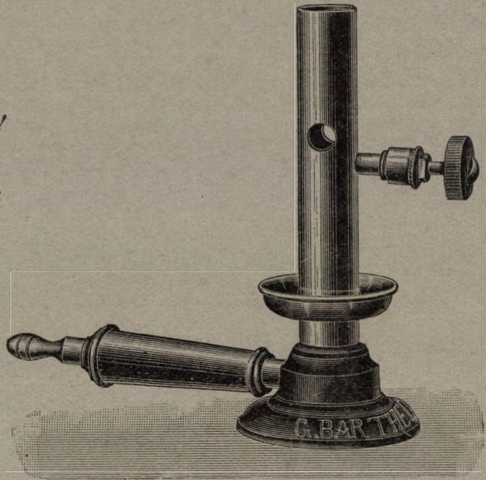
BARTHEL-féle szabadalmazott

# BORSZESZ-BUNSENLÁNGZÓ.

*Olcsóbb mint gáz!*

*Mint fúvólámpa is használható!*

*Teljesen veszélytelen!*



*Bél nélkül ég!*

*Egyszerű és tartós szerkezetű!*

*Explosió lehetetlen!*

## Kitünő eszköz oly intézeteknek és szertáraknak, melyekben világitó gáz nincsen bevezetve.

Az ezen lámpa állványába oldalt becsavart és fával burkolt cső egy hengeralakú, alul csappal ellátott, körülbelül 1 méter magasságban felakasztott edénynyel köttetik össze, és pedig aczélból készült hajlékony cső utján. Ha most a lámpa oldalán levő szabályzó csavart balra forgatjuk, akkor a borszesz az aczélcsövön át a lámpába folyik, annak egyszer fölmelegitett alsó részében elpárolog, a szabályozható nyiláson át a lámpa felső részébe jut és annak végén levegővel keveredve, nagy hőt fejlesztő lánggal ég el. A borszesz oly mérvben folyik a reservoirból a lámpába, milyenben a szeszgőzők a lámpa alsó részéből a felsőbe elillanak. E mellett teljesen közönyös, valjon kis vagy nagy lánggal ég-e a lámpa, mi a szabályozó csavar forgatásával könnyen és azonnal elérhető.

Ha a lámpa alsó része egyszer fel van hevitve, mi körülbelül $1^1/_2$ percz alatt megtörtént, akkor a lámpa addig ég, míg a felakasztott edényből a borszesz — közönséges denaturált használandó — ki nem fogyott. A lámpa óránként $^1/_4$ liter borszeszt fogyaszt.

Ezen lámpák két nagyságban készülnek:

**A** *minta, a láng magassága 26 cm.,* hatására nézve 4 Bunsengázlámpának felel meg

**B** *minta, a láng magassága 20 cm.,* « « 2 « « «

Egy lámpa ára $1^1/_2$ méter aczélcsővel, 1 literes borszeszreservoirral és alkalmas szerkezetű háromlábbal stb. felszerelve:

**A** *minta* ... ... ***17 forint.*** | **B** *minta* ... ... ***13 1/2 forint.***

Részletes használati utasitások és tartalék-alkatrészek minden lámpához mellékeltetnek.

*Magyarországban kizárólagosan kaphatók*

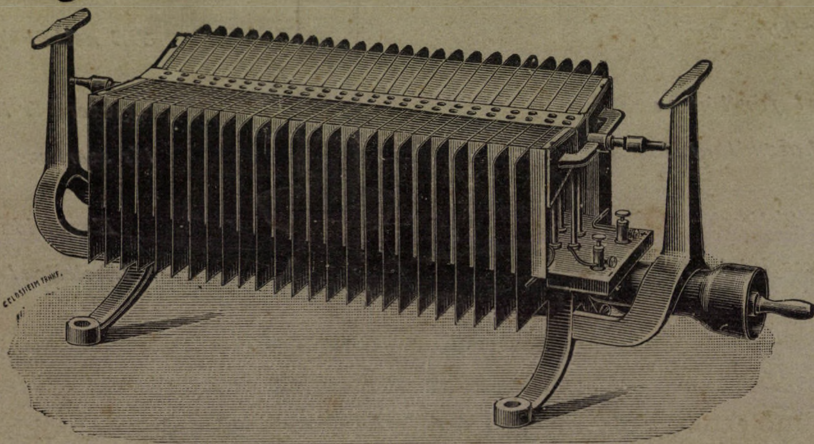
## Calderoni és Társánál, Budapesten,

IV., kis hid-utcza 8. szám.

# GÜLCHER SZABAD. HŐELEKTROMOS OSZLOPA

legujabb szerkezet, gázfűtésre berendezve.

*Galván elemek előnyös pótlása. Folytonos és megerőltetett használatban sincsen gyengülésnek vagy kopásnak kitéve.*



term. nagys. 1/6 r.

Legjelentékenyebb előnyei a következők:

*Állandó elektromindító erő,*
*Csekély gázfogyasztás,*
*Kényelmes és tiszta kezelés,*
*Nem fejleszt gőzöket,*
*Nem polarizálódik, azért ki nem merülhet.*

Különösen alkalmasnak bizonyult chémiai és physikai szertárakban, akkumulátorok töltésére, galvanoplasztikai czélokra, elektrolitikus vizsgálatoknál és orvosi czélokra való villamos készülékek hajtására stb.

Ezen uj thermo-oszlopok három nagyságban készülnek:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **I.** | 26 elemből áll, | elektromindító ereje 1,5 Volt, | belső ellenállása | 0,25 Ohm |
| **II.** | 50 « « | « « 3,0 « | « « | 0,50 « |
| **III.** | 66 « « | « « 4,0 « | « « | 0,65 « |

ugy hogy — egyenlő külső ellenállásnál — mind a három mintegy 3 Ampère intensitású áramot szolgáltat.

A gázfogyasztás csekély, az I. számú oszlopnál 70 liter óránként, a II. számúnál 130 liter, a III. számúnál 170 liter, azaz legfeljebb 1, 2 és 2½ krajczár áru világitógáz.

Részletes használati utasitások mellékeltetnek.

A Gülcher-féle thermo-oszlopok a következő árakon kaphatók:

**I.** *szám* ... *frt* **68.50** | **II.** *szám* ... *frt* **122.50** | **III.** *szám* ... *frt* **139.—**

*és pedig Magyarországban kizárólagosan*

**CALDERONI és Társa czégnél, Budapest, IV., kis hid-utcza 8.**

☞ *Ezen oszlopok már több hazai tanintézetben vannak állandó használatban, hol az illető tanár urak teljes megelégedésére működnek.* ☜

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

# A GÖMBFELÜLETEKKEL HATÁROLT FÉNYTÖRŐ KÖZEGEK CARDINALIS PONTJAI.

A ki rövid uton s még hozzá kevés fáradsággal akarja megismerni az optikai lencsék cardinális pontjait és e pontok jellemző tulajdonságait, annak sem GAUSS[1]-nak szigorú és mintaszerű analytikai tárgyalása, sem REUSCH[2]-nek bonyodalmas mértani szerkesztései nem ajánlhatók; NEUMANN[3] és FERRARIS[4] magában véve egyszerű és könnyen megérthető módszert követnek, de ezeknél is vagy a kiindulás történik messzünnen, vagy nem abból az alapból vezetik le egyenleteiket, mely mindnyájunk előtt ismeretes; értem azt a néhány tételt és képletet, mely a közkézen forgó tankönyvekben is szokott tárgyaltatni.

Mindezt szem előtt tartva, arra törekedtem, hogy rövid úton s a legelemibb módon ismertessem a gömbfelületekkel határolt fénytörő közegek cardinális pontjait, még pedig oly formán, hogy a kijelölt úton tovább haladva, a levezetett képletek és tételek tetszőleges számú közegre is könnyen kiterjeszthetők legyenek.

Teljesség és egyöntetű tárgyalás kedveért bevezetésül előre bocsátom a két közeget elválasztó gömbfelület törését.

---

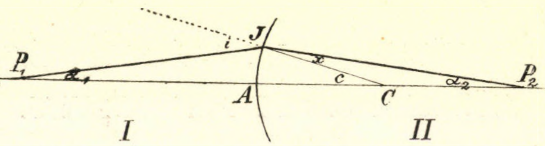
[1] GAUSS: Dioptrische Untersuchungen. Abhandl. d. kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. I. 1838—43.

[2] E. REUSCH: Constructionen zur Lehre von den Haupt- u. Brennpunkten eines Linsensystemes. Leipzig, 1870.

[3] C. NEUMANN: Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystemes. Leipzig, 1866.

[4] GALILEO FERRARIS: Die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Übers. von Lippich. Leipzig, 1879.

1. *Törés kis nyilású gömbfelületen.* Legyen a két közeget elválasztó gömbfelület középpontja $C$ (1. ábra), az I és II közegek absolut törésmutatói $n_1$ és $n_2$. A tengelyen fekvő $P_1$ világító pontból a gömbfelületre eső $P_1I$ sugár megtöretvén, $P_2$-ben metszi a tengelyt.




1. ábra.

Ha $c, i, r, \alpha_1$ és $\alpha_2$ szögek oly kicsinyek, hogy tangenseik és sinusaik az ivekkel helyettesithetők, eme két egyenlet egymással fölcserélhető:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad \frac{i}{r} = \frac{n_2}{n_1},$$

miből (Kepler formulája)

$$n_1 i = n_2 r.$$

Tekintetbe vévén, hogy

$$i = c + \alpha_1, \qquad r = c - \alpha_2,$$

e képlet a következő alakot ölti:

$$n_1 c + n_1 \alpha_1 = n_2 c - n_2 \alpha_2.$$

$AP_1$, $AP_2$ és $AC$ hosszakat $t$, $u$ és $R$ betűkkel jelölvén,

$$c = \frac{AI}{R}, \quad \alpha_1 = \frac{AI}{t}, \quad \alpha_2 = \frac{AI}{u}$$

értékeket helyettesítvén, rendezés, összevonás és $AI$-val való osztás után a képlet

$$\frac{n_1}{t} + \frac{n_2}{u} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad 1)$$

alakot veszi fel. Ezzel $P_2$ helye meg van állapítva s minthogy $AI$-től nem függ, az következik belőle, hogy a $P_1$-ből a kis nyilású gömbfelület többi pontjain beeső sugarak is a tengelynek ugyanezen $P_2$

pontja felé töretnek és viszont, a $P_2$-ből jövő sugarak $P_1$-be töretnének. Ez okból $P_1$ és $P_2$ *conjugált pontoknak* neveztetnek.

Képletünk, mely csak az esetre érvényes, ha a görbület az I közeg felé domború és $n_2 > n_1$, általánosítható az által, ha $t$ és $u$ távolságokat $A$-tól az illető közeg felé tartó irányban veszszük positivoknak. E szerint $t$ positiv, ha a fény I közegben levő pontból árad ki; $u$ pedig akkor positiv, ha a fény a II közeg valamely pontja felé convergál. Ezzel $R$ előjele is meg van állapítva; ugyanis ha a fény $C$ felé convergál, $t = -R$, $u$ pedig $= R$ s ez értékekkel az 1) képlet baloldala $\frac{n_2 - n_1}{R}$; hogy az egyenlőség tényleg fennálljon, $R$ a rajzban felvett esetben (vagyis ha a gömbfelület az I felé domború) $+$ jelűnek veendő.

Jelöljük a párhuzamosan beeső sugárnyalábnak ($t = \infty$) megfelelő képtávolságot $f_2$-vel és a párhuzamosan kilépő sugárnyalábnak ($u = \infty$) megfelelő tárgytávolságot $f_1$-gyel; ezek értéke 1) képletből:

$$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \quad \text{és} \quad f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R. \qquad 2)$$

$f_2$ a *második*, $f_1$ pedig az *első gyujtótávolság*. Ezek között a következő egyszerű összefüggések találhatók:

$$f_2 - f_1 = R, \qquad \frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Az 1) képlet minden tagját $\frac{n_2 - n_1}{R}$ hányadossal osztván, az $f_2$ és $f_1$ jelek felhasználása útján nyerjük a következő egyszerű s az emlékezetben könnyen megtartható alakot:

$$\frac{f_1}{t} + \frac{f_2}{u} = 1 \qquad 1)$$

Ebből a képletből egyszerű átalakítás útján

$$\frac{t}{u} = \frac{t - f_1}{f_2}, \qquad \frac{u}{t} = \frac{u - f_2}{f_1} \qquad 3) \text{ és } 4)$$

származtatható, melyek szorzata

$$(t-f_1)(u-f_2)=f_1 f_2 \qquad \text{II)}$$

az ismeretes NEWTON-féle formulát adja. Ez a képlet a tárgy- és képtávolságok között fenálló összefüggést, kivált ha a gyújtóponttól mért távolságokra külön jeleket hozunk be, a legegyszerűbben fejezi ki s a tárgyalásra is a legalkalmasabb.

Ha ugyanis $t-f_1=\tau$ és $u-f_2=\varkappa$, a formula a következő alakúvá lesz:

$$\tau\varkappa=f_1 f_2$$

Minthogy ez esetben $\tau$ akkor positiv, ha a világító pont az első gyúponttól balra esik, a jobboldalon pedig negativ; $\varkappa$ pedig ellenkezőleg akkor positiv, ha a képpont a második gyujtóponttól jobbra- s negativ, ha tőle balra esik: a képletből nyomban kitetszik, hogy a $\tau$ és $\varkappa$ összetartozó értékei mindig egyező előjelüek. A $\tau$ tetszőlegesen felvett értékeinek megfelelő $\varkappa$ értékek pedig legegyszerübben úgy számíthatók ki, ha hosszegységül $f_1$ vétetik; ekkor $\tau=\varepsilon f_1$, hol $\varepsilon$ tetszőleges + vagy — számérték, és $\varkappa=\frac{f_2}{\varepsilon}$.

2. *Törés három közegben, két gömbfelületen át.* Mindenek előtt világos, hogy a *főtengelyen* — a két gömbfelület görbületi középpontjain átmenő egyenesen — az I közegben levő $P_1$ világító pontnak képe a III közegben is a főtengelyen, pl. $P_3$ pontban jön létre. Ugyanis $P_1$-ből jövő sugarak az első törés után a főtengelyen fekvő $P_2$ felé töretvén, a másodszori töréshez úgy esnek be, mintha a főtengely valamely pontjából jönnének, vagy pedig feléje convergálnának s így ezen törés a fénysugarakat ismét a főtengely egy pontja felé tereli.*

Az I. képletet az első és második gömbfelület törésére alkalmazván, az első törésre nézve

$$\frac{f_1}{t}+\frac{f_2}{u}=1\,;$$

---

* A fejtegetésből még az is következik, hogy az egy pontból kiinduló sugarak akárhány gömbfelületen történő törés után is *homocentrikusak* — egy pont felé convergálók — maradnak, feltéve, hogy a gömbfelületek *centrálva* vannak, azaz középpontjaik egy egyenesen fekszenek.

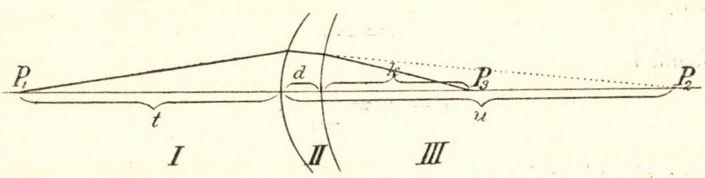
a második törésre nézve pedig:

$$\frac{f_3}{-(u-d)}+\frac{f_4}{k}=1$$

képletek állanak, melyekben $f_3$ és $f_4$ a második gömbfelületre $f_1$ és $f_2$-höz analog módon vannak definiálva; vagyis

$$f_3=\frac{n_2}{n_3-n_2}R', \qquad f_4=\frac{n_3}{n_3-n_2}R',$$

$R'$-rel a második gömbfelület görb. sugarát jelölvén. Legyen $t$ a tárgytávolság, $u$ az első képtávolság, $k$ a második képtávolság, $d$ a




2. ábra.

középső «közeg vastagsága» (2. ábra). Ezen jelekkel a két képletet a II) alakjában írva:

$$(t-f_1)(u-f_2)=f_1 f_2 \tag{5}$$

$$(d-u-f_3)(k-f_4)=f_3 f_4 \tag{6}$$

Az utóbbiakból következik, hogy:

$$u-f_2=\frac{f_1 f_2}{t-f_1} \tag{7}$$

$$-u+d-f_3=\frac{f_3 f_4}{k-f_4} \tag{8}$$

és végre e kettőnek az összege:

$$\frac{f_1 f_2}{t-f_1}+\frac{f_3 f_4}{k-f_4}=d-f_2-f_3 \tag{III}$$

A III) képlet jobb oldalán lévő $d-f_2-f_3$ kifejezést röviden $(-e)$-vel jelölvén és vele minden tagot osztván

$$\frac{\frac{f_1 f_2}{-e}}{t-f_1}+\frac{\frac{f_3 f_4}{-e}}{k-f_4}=1. \qquad \text{IV)}$$

Ez a három törő közegből álló rendszer általános képlete.

Nevezetes az az eset, midőn

$$t-f_1=\frac{f_1 f_2}{-e},$$

vagy pedig $f_2=e+d-f_3$ helyettesítése után

$$t=\frac{f_1 d}{-e}-\frac{f_1 f_3}{-e};$$

mert ilyenkor

$$k=\infty.$$

Továbbá ha

$$k-f_4=\frac{f_3 f_4}{-e},$$

vagy az előbbihez hasonló helyettesítés utján

$$k=\frac{f_4 d}{-e}-\frac{f_2 f_4}{-e};$$

akkor meg

$$t=\infty.$$

Az a különös tárgytávolság, melynek megfelelőleg $k=\infty$, nem egyéb, mint a három fénytörő közegből álló rendszernek *közös első gyújtó távolsága;* ép úgy az a képtávolság, melyre nézve $t=\infty$, a rendszer *közös második gyújtó távolsága.* Ezeket egyszerűen $\varphi_1$, $\varphi_2$-vel jelölvén, lesz:

$$\varphi_1=\frac{f_1 d}{-e}-\frac{f_1 f_3}{-e} \qquad 9)$$

$$\varphi_2=\frac{f_4 d}{-e}-\frac{f_2 f_4}{-e} \qquad 10)$$

A IV) képlet ugyanoly módon, mint a hogyan I)-ből a II) alatti képletet származtattuk, a következő alakba hozható:

$$\left(t-f_1-\frac{f_1 f_2}{-e}\right)\left(k-f_4-\frac{f_3 f_4}{-e}\right)=\frac{f_1 f_2}{-e}\cdot\frac{f_3 f_4}{-e},$$

vagy pedig baloldalon előforduló első tényezőben $f_2$ helyett $(e+d-f_3)-$, a másodikban pedig $f_3$ helyett $(e+d-f_2)$ értéket helyettesítvén, lesz:

$$\left[\left(t-\frac{f_1 d}{-e}\right)+\frac{f_1 f_3}{-e}\right]\left[\left(k-\frac{f_4 d}{-e}\right)+\frac{f_2 f_4}{-e}\right]=\frac{f_1 f_3}{-e}\cdot\frac{f_2 f_4}{-e} \qquad 11)$$

s ezt az I) alakjába írva:

$$\frac{-\dfrac{f_1 f_3}{-e}}{t-\dfrac{f_1 d}{-e}}+\frac{-\dfrac{f_2 f_4}{-e}}{k-\dfrac{f_4 d}{-e}}=1, \qquad V)$$

s ha végül a 9) és 10) egyenletet figyelembe veszszük:

$$\frac{\varphi_1-\dfrac{f_1 d}{-e}}{t-\dfrac{f_1 d}{-e}}+\frac{\varphi_2-\dfrac{f_4 d}{-e}}{k-\dfrac{f_4 d}{-e}}=1 \qquad VI)$$

Mindezen képletek, különösen pedig 11) alattinak megtekintéséből kiderül, hogy $\frac{f_1 d}{-e}$ és $\frac{f_4 d}{-e}$ szintén optikailag öszszetartozó, *conjugált* pontok távolságait adják, e távolságokat — épen úgy mint a $\varphi_1$, $\varphi_2$, $t$ és $k$ távolságokat — az első s ill. a második határfelület csúcsától mérvén le. Ha ugyanis 11)-ben $t=\frac{f_1 d}{-e}$ tétetik, $k=\frac{f_4 d}{-e}$; tehát ez értékek tényleg conjugált pontok távolságait adják.

3. *Főpontok, főgyújtópontok.* Ha már most mindezeket a távolságokat nem a törő közegek határfölületeitől, hanem az előbb említett két összetartozó ponttól $\left(\frac{f_1 d}{-e}, \frac{f_4 d}{-e}\right)$ számítjuk, a VI) képlet a következő egyszerű alakot ölti:

$$\frac{F_1}{T}+\frac{F_2}{K}=1 \qquad VII)$$

vagy

$$(T-F_1)(K-F_2)=F_1 F_2 \qquad VIII)$$

a hol

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 - \frac{f_1 d}{-e} = -\frac{f_1 f_3}{-e} \\ F_2 &= \varphi_2 - \frac{f_4 d}{-e} = -\frac{f_2 f_4}{-e} \\ T &= t - \frac{f_1 d}{-e} \\ K &= k - \frac{f_4 d}{-e} \end{aligned}\right\} \quad \text{IX)}$$

és

Azt a nevezetes két pontot, melyek felhasználásával a tárgy- és a képtávolság között való összefüggést ép oly egyszerű alakban ki tudjuk fejezni a három törő közegből álló rendszernél, mint két törő közeg esetében, GAUSS a rendszer *főpontjainak* nevezte el; ép úgy a közös gyújtó pontoknak ama főpontoktól mért távolságát *fő gyújtótávolságoknak.*

E szerint a főpontok távolsága az illető görbülettől:

$$H_1 = \frac{f_1 d}{-e}, \quad H_2 = \frac{f_4 d}{-e}$$

és fő gyújtópontok távolsága az első s ill. a második főponttól:

$$F_1 = -\frac{f_1 f_3}{-e}, \quad F_2 = -\frac{f_2 f_4}{-e}.$$

A főpontok jellemző tulajdonságai:

1. hogy a rendszer főegyenleteiben (VII és VIII) a határfölületek szerepét játszák;

2. hogy ha az egyikbe helyezzük a világító pontot, ennek képe a másikban jelenik meg;

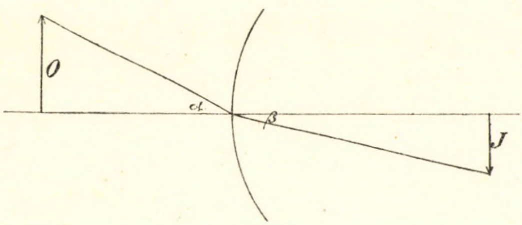
3. hogy ama pontokra nézve a tárgy képe ép akkora, mint maga a tárgy s hozzá még egyenes helyzetű is, a mint ez a rákövetkezőkből nyomban kiderül.

4. *A kép és a tárgy nagyságának viszonya.* Hogy a főpontok ez utolsó tulajdonságát is bebizonyíthassuk, visszatérünk a két fénytörő közeg törésére és először erre nézve megállapítjuk a tárgy és kép nagysága között fennálló összefüggést.

Jelentse $O$ a tárgy nagyságát (3. ábra), $J$ a kép nagyságát, $\alpha$ a legszélsőbb sugár beesési szögét, $\beta$ az ennek megfelelő törés szögét; akkor (— jellel kitüntetvén azt, hogy a kép *fordított* állású)

$$\frac{O}{t} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{-J}{u} = \operatorname{tg} \beta$$




3. ábra.

Ezek osztása által:

$$\frac{O}{J} \cdot \frac{u}{t} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Tekintettel az 1. pontban a szögekre vonatkozó megállapodásunkra:

$$\frac{O}{J} \cdot \frac{u}{t} = -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = -\frac{n_2}{n_1} = -\frac{f_2}{f_1}$$

$$\frac{O}{-J} = \frac{t}{u} \cdot \frac{f_2}{f_1}; \qquad \text{X)}$$

vagy ha a 3) és 4) egyenletet figyelembe veszszük:

$$\frac{O}{J} = -\frac{t-f_1}{f_1} = -\frac{f_2}{u-f_2} \qquad \text{XI)}$$

Áttérvén a három törő közeg esetére, az első határfölülettől balra és jobbra eső háromszögekből következik (4. ábra):

$$\frac{O}{J} = -\frac{t-f_1}{f_1} \qquad a)$$

A második határfölület jobb oldalán lévő két háromszögből ugyanoly úton:

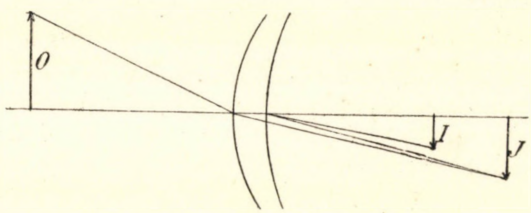
$$\frac{J}{I} = \frac{(u-d)}{k} \cdot \frac{f_4}{f_3} \qquad \beta)$$

vagy a 8) egyenlet segélyével $(u-d)$-t kirekesztvén,

$$\frac{J}{I} = -\frac{f_4}{k-f_4} \qquad \gamma)$$

és végre $\alpha$) és $\gamma$) egyenleteket összeszorzása után:

$$\frac{O}{I} = \frac{t-f_1}{f_1} \cdot \frac{f_4}{k-f_4}. \qquad \text{XII)}$$




4. ábra.

Ebben a képletben a tárgy- és a képtávolság még az illető határfelülettől van mérve, nekünk pedig szükségünk van oly képletre, melyben a távolságok a főpontoktól méretnek. Hogy ezt elérhessük, helyettesítsük a fönnebbi egyenletbe $(k-f_4)$ értékét a IV) egyenletből, az $f_2$-t pedig a $-e$-vel jelölt összegből s nyerjük:

$$\frac{O}{I} = \frac{t - \frac{f_1 d}{-e} + \frac{f_1 f_3}{-e}}{\frac{f_1 f_3}{-e}}.$$

Ha pedig $(t-f_1)$-et küszöböljük ki ugyanazon képlet segítségével, nyerjük:

$$\frac{I}{O} = \frac{k - \frac{f_4 d}{-e} + \frac{f_2 f_4}{-e}}{\frac{f_2 f_4}{-e}}.$$

Végül pedig a IX) alatt elfogadott jelzéseket behozván:

$$\frac{O}{I} = -\frac{T-F_1}{F_1} \tag{XIII}$$

és

$$\frac{I}{O} = -\frac{K-F_2}{F_2}. \tag{XIV}$$

Ezekből már kitünik, hogy akár ha $T=o$, akár pedig $K=o$, mindkét esetben

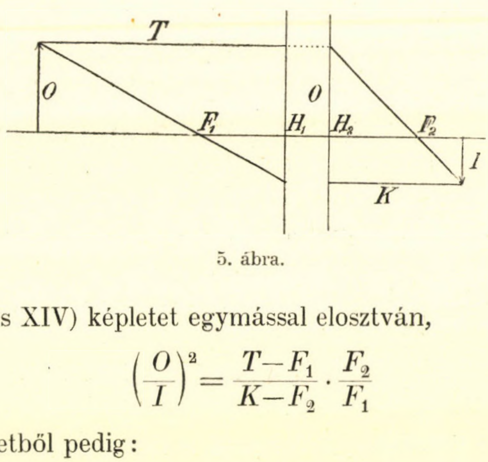
$$I=O$$

azaz *a kép és tárgy a két főpontban valóban egyenlő nagyságú és egyenes helyzetű.*

A XIII) és XIV) képleteket a következő alakba írván:

$$\frac{O}{-I} = \frac{T-F_1}{F_1}, \qquad \frac{-I}{O} = \frac{K-F_2}{F_2}$$

az 5-dik rajzban végrehajtott szerkesztés könnyen megérhető.




5. ábra.

A XIII) és XIV) képletet egymással elosztván,

$$\left(\frac{O}{I}\right)^2 = \frac{T-F_1}{K-F_2} \cdot \frac{F_2}{F_1} \tag{$\delta$}$$

a VIII) képletből pedig:

$$T : F_1 = K : K-F_2$$
$$K : F_2 = T : T-F_1,$$

melyeknek egymással való osztásából

$$\frac{K-F_2}{T-F_1} = \frac{K^2}{T^2} \cdot \frac{F_1}{F_2}, \tag{$\varepsilon$}$$

végre pedig $\delta$) képletet az $\varepsilon$) alattival elosztván:

$$\frac{O}{I}=\frac{T}{K}\cdot\frac{F_2}{F_1}. \qquad \text{XV)}$$

Ez ismét oly egyszerű képlet, mely alakjára nézve teljesen megegyezik a két törő közegből álló rendszer megfelelő [X)] képletével.

5. *A rendszer főpontjai, fő gyújtópontjai és csomópontjai.* A három közegből álló rendszerre felállitott nevezetesebb képleteket, ú. m.

$$(T-F_1)(K-F_2)=F_1F_2$$

és

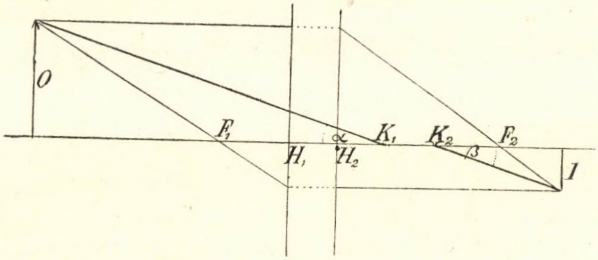
$$\frac{I}{O}=\frac{K}{T}\frac{F_1}{F_2}=-\frac{F_1}{T-F_1}=-\frac{K-F_2}{F_2}$$

rendszeresebben vizsgálván, a következő, részben már ismert nevezetes (cardinalis) pontokra akadunk:

| | $T$ | $K$ | $I$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\infty$ | $F_2$ | 0 | (Második fő gyújtópont) |
| 2. | $2F_1$ | $2F_2$ | $-O$ | (Negativ főpontok) |
| 3. | $F_1$ | $\infty$ | $\infty$ | (Első fő gyújtópont) |
| 4. | 0 | 0 | $+O$ | (Positiv főpontok) |
| 5. | $F_1-F_2$ | $-(F_1-F_2)$ | $\frac{F_1}{F_2}\cdot O$ | (Positiv csomópontok) |
| 6. | $F_1+F_2$ | $F_1+F_2$ | $-\frac{F_1}{F_2}\cdot O$ | (Negativ csomópontok) |

Az 1), 3) és 4) eset pontjairól már szóltunk. A második eset pontjai a negativ főpontok (Töpler elnevezése szerint). Ezek jellemző tulajdonságai: 1) A tárgy és a kép ezekben a pontokban egyenlő nagyságú, de az utóbbi forditott helyzetű. 2) A tárgy és a kép legszélsőbb pontjait összekötő egyenes a negativ főpontok között való távolságot felezi. 3) Távolságuk a megfelelő főgyújtópontoktól ép akkora, mint az illető positiv főpontoké, csakhogy ezekkel ellentett oldalakon állnak.

Az 5) eset pontjai az úgynevezett *csomópontok* (Listing.); az jellemzi őket, hogy a tárgy és a képtől a megfelelő csomópontokig húzható legszélsőbb sugarak párhuzamosak; más szóval, hogy az a két szög, melyet a tárgy és kép szélső sugarai a megfelelő csomópontoknál az optikai tengelylyel bezárnak, egyenlők (6. ábra).




6. ábra.

Ugyanis a tárgy- és a képtávolság a csomópontoktól számítva:

$$T-(F_1-F_2)$$
$$K+(F_1-F_2)$$

ennélfogva:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{O}{T-(F_1-F_2)}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I}{K+(F_1-F_2)}$$

és

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{O}{I} \, \frac{K-F_2+F_1}{T-F_1+F_2} = \frac{O(K-F_2)+OF_1}{I(T-F_1)+IF_2}.$$

Ámde figyelembe véve a XIII) és XIV) képletet:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{-IF_2+OF_1}{-OF_1+IF_2} = -1,$$

tehát:

$$\alpha = -\beta.$$

Nem nehéz az előzményekből kiokoskodni, hogy az első csomópontnak az első fő gyújtóponttól való távolsága egyenlő a második fő gyújtótávolsággal és viszont a második csomópontnak a második fő gyújtóponttól való távolsága egyenlő az első fő gyújtótávolsággal.

A 6) eset pontjait *negativ csomópontoknak* nevezték el. (TÖPLER.) Ezek távolsága a megfelelő főgyújtópontoktól ugyanakkora, mint a positiv csomópontoké, csakhogy a főgyújtópontok ellenkező oldalaira esnek; az említett szögek is egyenlők, de az optikai tengely egy és ugyanazon oldalára esnek.

A három fénytörő közeget határoló gömbfelületek törésére vonatkozó fő képletek felállításánál és cardinális pontjaik meghatározásánál a következő módon jártunk el: Megállapítottuk az I és II közeg s azután a II és III közeg conjugált pontjait; azután egyesítettük az összetartozó képleteket a végből, hogy csak az I és II közeg tényezői szerepeljenek bennök. Végre a képleteket igen egyszerű műveletekkel oly alakra hoztuk, hogy már az alakból is kitűnt egyik-másik cardinális pontnak a nevezetesebb tulajdonsága.

A legföltünőbb jelenség az egészben az, hogy a három közegből álló törőrendszer fő képletei alakra nézve teljesen megegyeznek a két közeg képleteivel, a mi arra utal, hogy a számra nézve fokozatosan növekedő közegrendszer törésének megállapitásánál is csak azokat a müveleteket s ugyanazt az utat kell követnünk, mely az itt kifejtett eredményekhez elvezetett.

*Palatin Gergely.*

# A HYPERCOMPLEX SZÁMOK ELMÉLETE.

(Második és befejező közlemény.)

5. *Általános complex számok osztása.* Hátra van még az osztás müveletének értelmezése. Ha $a$ és $b$ két complex szám, akkor kérdés, hogy lehet-e mindig oly $c$ számot találni, mely $b$-vel szorozva $a$-t adja? A közönséges complex számok tartományában ez a követelés csak akkor nem volt teljesithető, midőn $b = 0$. Jelen esetben, miként látni fogjuk, nem csak ez az eset alkot kivételt. Legyen a keresett szám részletesen kiírva:

$$c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n$$

továbbá

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$$

akkor

$$a = cb$$

egyenlet a $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$-re vonatkozólag $n$ lineár egyenletet von maga után; ugyanis a

$$(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n)(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n) =$$
$$= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

egyenletből ered a következő egyenletrendszer:

$$3. \quad \gamma_1 \sum_{k=1}^{n} \beta_k E_{s1k} + \gamma_2 \sum_{k=1}^{n} \beta_k E_{s2k} + \dots + \gamma_n \sum_{k=1}^{n} \beta_k E_{snk} = \alpha_s$$
$$(s = 1, 2, \dots, n)$$

Ha ennek determinánsa nem tünik el, akkor a $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ egyértelmüen határozhatók meg, vagyis akkor maga az $\frac{a}{b}$ hányados is az $E$ tartományban egyértéküen van meghatározva. Ha azonban a rendszer determinánsa eltűnik, akkor a $\gamma$ értékek csakis az esetben határozhatók meg, ha az $a_1, \ldots, a_n$ között bizonyos összefüggések állanak fenn; ekkor pedig végtelen sok értékrendszert nyerünk a $\gamma$-kra; azaz $\frac{a}{b}$ nem meghatározott érték. A kérdéses determináns a $\beta$-kra nézve $n$-edfokú. Ha az $E_{ijk}$ speicziális választásánál fogva e determináns azonosan, az-az minden $\beta$ érték mellett tűnnék el, akkor egyáltalában nem volna értelme az $\frac{a}{b}$ hányadosnak, akkor e tartományban *osztás a szó közönséges értelmében nem volna végezhető.** Ha azonban e determináns nem tűnik el azonosan, akkor a 3. alatti egyenletrendszernek a $\gamma$-kban végtelen sok megoldása van midőn

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

és

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

oly értékek, a melyek mellett a

4. $$|\Sigma\beta_k E_{sik}|$$

determináns eltűnik, *akkor a* $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$ *complex számhoz mindig található számtalan sok olyan* $c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_n e_n$ *complex szám, hogy a kettő szorzata:* $bc = 0$ *a nélkül, hogy a tényezők közül bármelyik is eltűnnék.*

Hogy tehát az osztás értelmezhető legyen, kell, hogy ama $E$ együtthatókat, melyek mellett a 4. alatti determináns identikusan eltűnnék, kizárjuk; de bárminő $E$ együtthatókat is vezessünk be az I. alatti egyenletrendszerbe, mindig találhatók olyan a zérustól különböző $b$ számok, melyek a megfelelő zérustól szintén különböző $c$-vel szoroztatván, szorzatul zerust adnak. Ilyen számokat Weierstrass *szerint* a *zérus osztóinak* nevezzük. A közönséges complex

* Ez az eset bekövetkeznék pl. akkor, ha az $e_i e_k$ szorzatot ugy definiáljuk, hogy

$$E_{sik} = \lambda_s E_{nik}$$
$$(s, i, k = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Ebben a számtartományban az osztás mindig vagy végtelen sok értelmű művelet vagy pedig kivihetetlen.

számok tartományában a 0 osztója csak 0 lehet, a lényeges különbség a közönséges és az általános complex számok közt tehát abban van, hogy az utóbbiaknál léteznek 0 osztói, vagyis egy szorzat 0-sal lehet egyenlő a nélkül, hogy a tényezői közt a 0 előfordulna. Ebből egyszersmind az is következik, hogy a szorzat nem változik meg mindig, ha megváltoztatjuk egyik tényezőjét. Ha ugyanis $b$ a 0 osztója, és a hozzá tartozó tényezők egyike $c$, akkor a $bm$ szorzat nem változik, ha $m$-hez a $cx$-et adjuk; mert

$$(m + cx)\, b = bm + bcx = bm.$$

6. *A hypercomplex egység definicziója.* A közönséges complex számok tartományában az egyik alapegység, az *egy*, jellemzésére az szolgált, hogy $1 . a = a$. Kérdés, vajjon nincs-e a hypercomplex számok tartományában is olyan szám, mely avval a tulajdonsággal bir, hogy változatlanul hagyja a számot, ha azt vele megszorozzuk. Ilyen szám valóban létezik. Ha ugyanis a 3. alatti egyenletrendszer segítségével meghatározzuk az $\frac{a}{a}$ hányadost és azt találjuk, hogy

$$a = a\,(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_n e_n)$$

a hol $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ a 3. egyenletrendszerből mindig egyértékűen meghatározhatók, ha $a$ nem osztója a 0-nak; a

$$ba = ba\,(\gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_n e_n)$$

egyenletből ered, hogy

$$b = b\,(\gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_n e_n)$$

vagyis az $e_0 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_n e_n$ nemcsak $\frac{a}{a}$ hányadossal, hanem $\frac{b}{b}$ hányadossal is egyenlő. Hogy még egy más ilyen $e_0'$ szám nem létezhetik, azt a következőként mutathatjuk meg. Ha $e_0'$-nek is meg van a jelzett tulajdonsága, akkor

$$ae_0' = a,$$

de ez egyenlet a $e_0'$ koordinátáinak meghatározására oly lineár egyenletrendszer megoldását követeli, a mely föntebbivel megegyezik, tehát csakis a

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$$

lehetnek a keresett koordináták.

A kettő tehát nem különbözik egymástól. Ezzel ki van mutatva, *hogy az általános complex szám tartományában is van egy szám, mely olyan szerepet visz, mint az egység a közönséges számok tartományában.*

7. *A közönséges complex számok.* Lássuk már most példa gyanánt a két alapegységgel bíró complex tartomány elméletét s nézzük meg, hogy minő speciális követelések azok, melyek a közönséges complex számokra vezettek.

Jelöljük a két alapegységet $e_1$ és $e_2$-vel, akkor minden szám ezen $E_2$ tartományban ilyen alakú:

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2.$$

Az $E_2$ tartomány jellemzésére szolgálnak az I. alatti egyenletek, melyeket a jelen esetben következőként írhatunk:

$$\begin{aligned} e_1e_1 &= E_{111}e_1 + E_{112}e_2 \\ e_1e_2 &= E_{121}e_1 + E_{122}e_2 \\ e_2e_1 &= E_{211}e_1 + E_{212}e_2 \\ e_2e_2 &= E_{221}e_1 + E_{122}e_2 \end{aligned}$$

Hogy a szorzás *commutativ* elve fönnálljon, kell, hogy $e_1e_2 = e_2e_1$- azaz:

$$E_{121} = E_{211}, \quad E_{122} = E_{212}$$

legyen. Ha rövidség végett

$$E_{111} = \lambda_1, \; E_{112} = \lambda_2, \; E_{121} = E_{211} = \mu_1, \; E_{122} = E_{212} = \mu_2,$$
$$E_{221} = \nu_1, \; E_{222} = \nu_2$$

jelöljük, akkor az egységek szorzatára a következő egyenleteket nyerjük:

$$e_1^2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, \; e_1 e_2 = e_2 e_1 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2, \; e_2^2 = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 \qquad A)$$

Hogy a szorzás *associativ* elve is érvényben maradjon, kell, hogy előbbi közleményünk 2) alatti egyenletei fönnálljanak, vagyis, hogy:

$$e_1^2e_2 = (e_1e_2)\,e_1, \qquad e_2^2e_1 = (e_2e_1)e_2 \qquad B)$$

legyen. E két feltételi egyenletből erednek a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \nu_2$ együtthatók közötti feltételek. Ha ugyanis a $B$) alatti egyenletekben az egységszorzatoknak az $A$) alatti egyenletekből vett lineár kifejezéseit helyettesítjük, akkor az első egyenletből e két feltétel származik:

$$\begin{aligned} \lambda_2\nu_1 &= \mu_1\mu_2 \\ \lambda_2(\nu_2 - \mu_1) &= \mu_2(\mu_2 - \lambda_1) \end{aligned} \qquad \alpha)$$

A $B$) alatti második egyenletből pedig:

$$\begin{aligned} \lambda_2\nu_1 &= \mu_1\mu_2 \\ \nu_1(\mu_2 - \lambda_1) &= \mu_1(\nu_2 - \mu_1) \end{aligned} \qquad \beta)$$

Ezek közűl az első megegyezik az $\alpha$) alatti első egyenlettel, a második pedig azt fejezi ki, hogy az $\alpha$) alatti egyenleteknek a $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ tól különböző megoldása is lehet, vagy más szóval: ez az egyenlet következménye az $\alpha$) alattiaknak, ha $\lambda_2$ és $\mu_2$ a 0-tól különbözők. Éppen így az $\alpha$) alatti második egyenlet következménye a $\beta$) alattiaknak, ha $\mu_1$ és $\nu_1$ a 0-tól különböznek.

Az $A$) egyenletekben szereplő hat együttható közűl, az esetben mikor $\lambda_2$ és $\mu_2$ illetőleg $\mu_1$ és $\nu_1$ nem tünnek el, négy együttható szabadon választható. Ha pedig $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ akkor a $\beta$) alatti második egyenlet még 3 együttható szabad választását engedi meg (ép így, ha $\nu_1 = \mu_1 = 0$), ha pedig $\lambda_2 = \mu_2 = \mu_1 = \nu_1 = 0$, akkor a hiányzó $\lambda_1$ és $\nu_2$ szabadon választhatók.

Ez esetben az $E_2$ tartomány $A$) egyenletei igen egyszerűek:

$$e_1^2 = \lambda_1e_1; \quad e_1e_2 = 0; \quad e_2^2 = \nu_2e_2$$

8. *Osztás az $E_2$ tartományban.* Láttuk, hogy a hypercomplex számok tartományát megállapíthatjuk úgy is, hogy benne osztást egyáltalában ne lehessen végezni. Ez az eset akkor áll elő, ha a 4)-el jelölt determinans az osztónak tetszés szerinti megadásánál azonosan tűnik el. Kérdés, hogy bekövetkezhetik-e ez az eset a két dimenziós complex számoknál és ha igen, mikor?

Az említett determinans a jelen esetben a következő:

$$\begin{vmatrix} \beta_1\lambda_1+\beta_2\mu_1 & \beta_1\mu_1+\beta_2\nu_1 \\ \beta_1\lambda_2+\beta_2\mu_2 & \beta_1\mu_2+\beta_2\nu_2 \end{vmatrix} \qquad \gamma)$$

ezt kifejtvén és $\beta$ szerint rendezvén, lesz:

$$\beta_1^2(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)+\beta_1\beta_2(\lambda_1\nu_2-\lambda_2\nu_1)+\beta_2^2(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1).$$

Hogy pedig ez a determináns azonosan tűnjék el kell, hogy e 3 egyenlet álljon fönn:

$$\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2=0;\quad \lambda_1\nu_2-\lambda_2\nu_1=0;\quad \mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1=0 \qquad \delta)$$

Ha ezek fennállanak, akkor az $E_2$ tartományban az osztás fogalma határozatlan vagy, akkor ugyanis két szám hányadosa nem egyértékű, hanem vagy számtalan sok értékű kifejezés vagy pedig egyáltalában nem létezik.

Ha a szorzás associativ elve érvényes, vagyis, ha az előbbi pont $\alpha$) és $\beta$) egyenletei fönnállanak, akkor e 3 egyenlet még átalakítható úgy, hogy mindegyik baloldala ugyanazt a tényezőt tartalmazza.

Hogy ezt megmutassuk, e végből az első egyenletbe az $\alpha$) alattiakból $\lambda_1\mu_2$ értékét helyettesítjük:

$$\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2=\mu_2^2-\lambda_2\nu_2.$$

A második egyenlet baloldalát $\mu_2$-vel szorozván és az előbbi helyettesítést végezvén, nyerjük:

$$\lambda_1\nu_2-\lambda_2\nu_1=\frac{1}{\mu_2}(\nu_2-\mu_1)(\mu_2^2-\lambda_2\nu_2)$$

és végre a harmadik egyenlet baloldalán:

$$\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1=\frac{-\nu_1}{\mu_2}(\mu_2^2-\lambda_2\nu_2).$$

Látjuk tehát, hogy abban az esetben, midőn $\mu_2$ nem tűnik el,

$$\mu_2^2-\lambda_2\nu_2=0 \qquad \varepsilon)$$

szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a $\gamma$) alatti determináns azonosan eltűnjék, vagyis *ez a szükséges és elégséges feltétele* *annak, hogy e tartományban az osztást végezni egyáltalában ne lehessen.*

Ha a $\gamma$) alatti determináns nem tűnik el azonosan, akkor az $E_2$ tartományban az osztás általánosságban elvégezhető. Kivételt képeznek azon $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ alakú osztók, melyek koordinátái a $\gamma$) alatti determinánst zérussá teszik. Ez a determináns a $\beta_1$ és $\beta_2$ másodrendű homogén egész függvénye, tehát (az $e_1$ és $e_2$-től független szorzótól eltekintve) általánosságban csak két ilyen $b$ szám létezik. Ezektől eltekintve, minden más számmal egyértékűen végezhetjük az osztást, mert az

$$\frac{a}{b} = c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$$

hányados koordinátáinak meghatározására szolgáló egyenletek, melyek a jelen esetben a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_1(\beta_1\lambda_1 + \beta_2\mu_1) + \gamma_2(\beta_1\mu_1 + \beta_2\nu_1) \\ a_2 &= \gamma_1(\beta_1\lambda_2 + \beta_2\mu_2) + \gamma_2(\beta_1\mu_2 + \beta_2\nu_1), \end{aligned}$$

a $\gamma_1$ és $\gamma_2$-re nézve megoldhatók.

Ha azonban $\beta_1$ és $\beta_2$ a $\gamma$) alatti determinánst zérussá teszik, akkor ez az egyenletrendszer csak abban az esetben oldható meg, ha $a = 0$ és ez esetben a 0 osztóira vezettetünk. Látjuk tehát, hogy már a két dimenziós complex tartományban is van a 0-nak két rendbeli osztója, vagy más szóval: két tényező szorzata 0-sá lehet, a nélkül, hogy egyikük, vagy másikuk egyenlő lenne zerussal.

A közönséges complex számok tartományában azzal a kivételes esettel találkozunk, hogy a $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ *zérus-osztó* maga is zérussá válik. Ez esetben ugyanis az alapegységek: $e_1 = 1$; $e_2 = i$ és így:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1,\ \nu_1 = -1,\ \nu_2 = 0$$

tehát a $\gamma$) alatti determináns a következőbe megy át:

$$\beta_1^2 + \beta_2^2;$$

hogy pedig ez a determináns 0-sal legyen egyenlő, kell, hogy $\beta_1$ és $\beta_2$ külön-külön eltűnjenek, minthogy mindketten valós száma.

10. *Új egységek bevezetése.* Most áttérünk oly tételek ismerteté-

sére, melyek a magasabb complex számokkal való műveleteket visszavezetik olyan *componenseken* végzendő műveletekre, melyek a közönséges complex számokkal analog módon viselkednek.

E végből a kezdetben bevezetett

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

alapegységek helyett új egységeket vezetünk be és megállapítjuk az új egységekkel való műveletek elvégzésének módját. Az egyik új egység

$$g = \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2 + \ldots + \xi_{1n}e_n$$

ahol $\xi_{1k}$ együtthatók valós számok Eme $g$ úgy választjuk hogy a

$$g, g^2, g^3, \ldots, g^n$$

számok egymástól lineárisan függetlenek legyenek. Ha e kifejezéseket az első közlemény I) alatti egyenletei segítségével redukáljuk az eredeti egységek lineár függvényeire, akkor a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} g &= \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2 + \ldots + \xi_{1n}e_n \\ g^2 &= \xi_{21}e_1 + \xi_{22}e_2 + \ldots + \xi_{2n}e_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^n &= \xi_{n1}e_1 + \xi_{n2}e_2 + \ldots + \xi_{nn}e_n. \end{aligned} \qquad \text{III.}$$

Az új $g$ alapegység hatványait egymástól lineárisan függetleneknek mondjuk, ha ez az egyenletrendszer az $e_1, e_2, \ldots, e_n$-re megoldható, vagyis, hogy e rendszer determinánsa

$$|\xi_{ik}| \gtrless 0. \qquad 5)$$

Ez esetben az $e_1, \ldots, e_n$ egységek szerint valóban megoldván, a számokra ekként nyert képletek segítségével bármely hypercomplex szám mint a $g$ raczionális egész függvénye fejezhető ki.

Oly számtartomány, a melynél az 5) alatti determináns nem tűnik el identice, tényleg létezik. Igy pl. ha az I) egyenletrendszer segítségével definiált $E_n$ tartományt úgy választjuk, hogy $e_ie_k = 0$, ha $i \gtrless k$, ellenben $e_ie_i = e_i$ legyen, akkor

$$g^i = \xi_{11}^i e_1 + \xi_{12}^i e_2 + \ldots + \xi_{1n}^i e_n;$$

tehát a kérdéses determináns nem más, mint

$$\xi_{11}\xi_{12}\ldots\xi_{1n}\,\Pi(\xi_{1k}-\xi_{1i}),\quad (i<k,\ k=1,2,\ldots,n)$$

mely csak akkor tűnik el, ha a $\xi_{1k}$ együtthatók közt egyenlők vannak. Ha tehát a $\xi_{1k}$ együtthatók egymástól és zérustól különbözők, az 5) alatti determináns az $E_n$ tartományban nem tűnik el.

Hogy az új egységeket bevezethessük, a tárgyalásainkból kizárjuk mindama $E_n$ tartományokat, a melyekben az I) egyenletben szereplő együtthatók olyan értékűek, hogy a $|\xi_{ik}|$ determináns azonosan eltűnik.

Ilyen tartomány a két-dimenziósok közt nincs is, mert ha

$$g=\xi_1e_1+\xi_2e_2,$$

akkor az előbbi pont jelzéseit használva:

$$g^2=\xi_1^2(\lambda_1e_1+\lambda_1e_2)+2\xi_1\xi_2(\mu_1e_1+\mu_2e_2)+\xi_2^2(\nu_1e_1+\nu_2e_2$$

tehát a kérdéses determináns:

$$\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_1^2\lambda_1+2\xi_1\xi_2\mu_1+\xi_2^2\nu_1 & \xi_1^2\lambda_2+2\xi_1\xi_2\mu_1+\xi_2^2\nu_2\end{vmatrix},$$

mely csak akkor tünnék el identikusan, ha

$$\lambda_2=0,\quad \nu_1=0,\quad 2\mu_1=\lambda_1,\quad \nu_2=2\mu_1$$

volna; de akkor következnék, hogy ha az associativ elv érvényes, azaz, ha a 7. pont $\alpha$) és $\beta$) alatti egyenletei fönnállanak, hogy oly tartománynyal van dolgunk, melyben osztás nem lehetséges, tehát melyet már előbb kellett kizárnunk tárgyalásainkból.

A $g$ hatványaihoz még hozzá veszszük a $g^{n+1}$-et is és akkor az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eliminácziója a III. egyenletekből és a $g^{n+1}$ kifejezéséből a következő egyenletre vezet *

$$g^{n+1}+\varepsilon_1g^n+\varepsilon_2g^{n-1}+\ldots+\varepsilon_ng=0$$

* $g^{n+1}$ coefficiense $|\xi_{ik}|$ a feltétel szerint nem 0, tehát vele az egyenlet mindkét oldalán oszthatunk.

vagy ha $g$ nem osztója a 0-nak, akkor a $\frac{g}{g} = g_0$ tehető és így:

$$g^n + \varepsilon_1 g^{n-1} + \varepsilon_2 g^{n-2} + \ldots + \varepsilon_n g_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{II)}$$

a hol $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_n$ valós számok. *Uj egységeink most már*

$$g_0, g, g^2, \ldots, g^{n-1}.$$

*Hogy valamely számot ezekkel kifejezhessünk, azt előbb mint $g$ raczionális függvényét állítjuk elő s ezt azután a II) egyenlet segítségével n-nél alacsonyabb fokúra redukáljuk.*

Ez a redukczió analog a raczionális egész függvények redukcziójához. Hogy az analogia jobban kitűnjék, minden hypercomplex szám mellé egy változó valós raczionális egész függvényét rendeljük és viszont a következő elv szerint:

Legyen $\xi$ a változó, akkor az

$$a_0 g_0 + a_1 g_1 + a_2 g^2 + \ldots + a_{n-1} g^{n-1}$$

számnak *megfeleljen* az

$$a_0 \quad + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \ldots + a_{n-1} \xi^{n-1}$$

raczionális egész függvény. E szerint a II. egyenletből folyólag: a 0-nak megfelel az

$$\text{IV)} \qquad f(\xi) = \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \varepsilon_2 \xi^{n-2} + \ldots + \varepsilon_n$$

raczionális egész függvény és viszont. Vagy más szóval, *ha valamely hypercomplex számnak megfelelő függvény osztható $f(\xi)$-vel, akkor az egyenlő zérussal.*

11. *Szorzás és osztás az új egységekkel.* Ha az új alapegységeket az előbbiekhez hasonlóan úgy jelöljük, hogy a kitevőt indexül írjuk, vagyis hogy általában

$$g^i = g_i$$

tesszük, akkor az alapegységek szorzatára igen egyszerű egyenletrendszert nyerünk, mert:

$$g_i g_k = g_{i+k}$$

a hol az $i + k$ index $n$ modulus szerint redukálandó.

Két szám szorzatát legegyszerűbben úgy állíthatjuk elő, hogy a nekik megfelelő függvények szorzatát az $f(\xi)$ szerint redukáljuk. Ha u. i. az $a$ hypercomplex számnak megfelel $A(\xi)$ függvény és $b$ nek $B(\xi)$, akkor, ha $A(\xi) . B(\xi)$-t redukáljuk az $f(\xi)$ segítségével oly módon, hogy $f(\xi)$-vel elosztjuk, akkor, ha a hányadost $Q(\xi)$-vel és az $n$-nél alacsonyabb fokú maradékot $C(\xi)$-vel jelöljük lesz:

$$A(\xi) . B(\xi) = Q(\xi)\, f(\xi) + C(\xi),$$

és ha most $\xi$ helyébe a $g$ számot helyettesítjük, és a $C(\xi)$-nek megfelelő számot $c$-vel jelöljük az

$$ab = c$$

egyenletre jutunk.

A szorzás ezen módja rávezet a 0 osztójának alakjára is. Hogy a $c$ szorzat 0 legyen, kell, hogy $A(\xi) . B(\xi)$ osztható legyen $f(\xi)$-vel. Ehhez pedig csakis az szükséges, hogy $A(\xi)$-nek az $f(\xi)$-vel közös osztója legyen. Ha ugyanis ez a közös osztó $\varphi(\xi)$ és $f(\xi) = \varphi(\xi) . \psi(\xi)$, és ha a $B(\xi) = \psi(\xi)\, p(\xi)$ a hol $p(\xi)$ tetszés szerinti raczionális egész függvénye a $\xi$-nek, akkor az $A(\xi)$-nek megfelelő *a szám és a $B(\xi)$-nek megfelelő b számok szorzata 0 a nélkül, hogy egyikük is 0 lenne;* tehát $a$ és $b$ számok a 0 osztói.

*Hogy tehát valamely szám a 0 osztója legyen, kell, hogy a neki megfelelő függvénynek az $f(\xi)$-vel közös osztója legyen.*

A bevezetett új egységekkel két szám hányadosát is könnyen állíthatjuk elő. Hányadosról — a zérustól különböző osztandó esetében — természetesen csakis akkor lehet szó, ha az osztó a 0-nak nem osztója. Legyen $a$ az osztandó, melynek $A(\xi)$ függvény felel meg és $b$ az osztó, melynek $B(\xi)$ felel meg. $B(\xi)$-nek a feltétel szerint az $f(\xi)$-vel közös osztója nincs. Ekkor mindig meghatározhatók a $\varphi(\xi)$ és $\psi(\xi)$ raczionális egész függvények oly módon, hogy a

$$B(\xi) . \varphi(\xi) - f(\xi) . \psi(\xi) = 1$$

egyenlet fennálljon.

Ha most az egyenlet két oldalán $A(\xi)$-vel szorzunk és a $\varphi(\xi) . A(\xi)$-t az $f(\xi)$ segítségével redukáljuk és e redukált alakját $C(\xi)$-vel jelöljük, akkor

$$B(\xi) \,.\, C(\xi) - f(\xi) \,.\, \psi(\xi) \,.\, A(\xi) = A(\xi)$$

egyenletre jutunk. Ha pedig a $\xi$ helyett ismét bevezetjük a $g$ hypercomplex számot, és a $C(\xi)$-nek megfelelő számot $c$-vel jelöljük, akkor:

$$bc = a$$

egyenletre jutunk, vagyis a keresett $\frac{a}{b}$ hányadost, a $c$-t meghatároztuk.

12. *A hypercomplex szám componensei.* A hypercomplex tartomány jellemzésében igen fontos szerepe van az előbb $f(\xi)$-vel jelölt raczionális egész függvénynek. (IV. egyenlet.)

Ha az $f(\xi) = 0$ egyenlet többszörös gyökkel bírna, akkor a hypercomplex tartományban volna olyan szám, mely maga nem 0, de valamely hatványa az. Ha ugyanis

$$f(\xi) = \varphi(\xi)^{\lambda} \psi(\xi)$$

akkor e függvénynek:

$$\varphi(\xi) \,.\, \psi(\xi)$$

megfelelő szám nem 0, mert e függvény nem oszható $f(\xi)$-vel; *de a $\lambda$-ik hatványának megfelelő szám* 0. Ha e $\varphi(\xi) \,.\, \psi(\xi)$-nek megfelelő számot $m$-mel jelöljük, akkor $m^{\lambda} = 0$, a nélkül, hogy $m$ maga 0-sal lenne egyenlő.

A következőkben csakis olyan complex tartománynyal foglalkozunk, a melyben az $f(\xi)$-nek többszörös gyöktényezői nincsenek, vagyis az $f(\xi)$ discriminánsa a 0-tól különböző. Ez esetben az $f(\xi)$ csupa első- és másodfokú valós tényezőkre bontható. Ha e tényezőket rendre $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, . . ., $f_r(\xi)$-vel jelöljük akkor minden $\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)}$ valódi törtfüggvény oly részlettörtek összege gyanánt állítható elő, melyek nevezői a felsorolt $f_i(\xi)$ első vagy másodfokú tényezők és melyek számlálói a $\xi$-nek 0-ad vagy elsőfokú függvényei, a szerint, a mint a nevező első vagy másodfokú. Igy a

$$\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\varphi_1(\xi)}{f_1(\xi)} + \frac{\varphi_2(\xi)}{f_2(\xi)} + \ldots + \frac{\varphi_r(\xi)}{f_r(\xi)} \tag{6}$$

a hol $\varphi_i(\xi)$ közönséges valós szám, vagy $\xi$-nek lineár függvénye a szerint, a mint $f_i(\xi)$ első- vagy másodfokú a $\xi$-ben. Az első esetben $\varphi_i(\xi) = A_i$ alakú, a másodikban pedig $A_i + B_i\xi$.

Ha az egyenlet mindkét oldalát $f(\xi)$-vel megszorozzuk, akkor az a

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^{r} \frac{f(\xi)\,\varphi_i(\xi)}{f_i(\xi)}$$

alakban áll elő. Ha az $f_i(\xi)$ elsőfokú, akkor

$$\frac{f(\xi)}{f_i(\xi)} = p_i(\xi)$$

$(n-1)$-sőfokú, ha pedig $f_k(\xi)$ másodfokú, akkor

$$\frac{f(\xi)}{f_k(\xi)} = p_k(\xi)$$

$(n-2)$-odfokú raczionális egész függvény. Az előbbi képlet szerint

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^{r_1} A_i p_i(\xi) + \sum_{k=r_1}^{r} (A_k + B_k\xi)\,p_k(\xi),$$

a hol az első összegezés kiterjed azon $i$ indexxel ellátott kifejezésekre, melyeknél $f_i(\xi)$ elsőfokú, a második összegezés pedig azokra terjed ki, melyeknél $f_k(\xi)$ másodfokú.

Ha a $\varphi(\xi)$ az $a$ hypercomplex-számnak megfelelő függvény és a $p_i(\xi)$-nek megfelelő számot $v_i$-vel, a $\xi p_k(\xi)$-nek megfelelő számot $u_k$-val jelöljük, akkor az $A_i v_i$-t az $a$ szám $i$-dik, $(A_k v_k + B_k u_k)$-t pedig ugyan e szám $k$-dik *componensének* nevezzük.

Látjuk, hogy a $v_i$, $v_k$, $u_k$ függetlenek az $a$ számtól, csakis az $f(\xi)$ alkatától függnek; tehát az egyes számok componensei egymástól csakis a valós együtthatókban különböznek. A valós együtthatók száma 1 vagy 2 a szerint, a mint $f_i(\xi)$ első vagy másodfokú. Más szóval: a componensek *egy- vagy kétdimenziósak.*

13. *A componensekkel való müveletek.* Az egyes componensek azzal a fontos tulajdonsággal birnak, hogy *két különnemű componens szorzata* 0 *és két egynemű componens szorzata ugyanilyen*

*nemű componens.* Ha ugyanis $a$-nak $i$-dik componense $a_i$ és $b$-nek $k$-dik componense $b_k$, akkor $a_i$-nek megfelelő függvény ilyen alakú:

$$\frac{\varphi_i(\xi)\, f(\xi)}{f_i(\xi)},$$

a hol $\varphi_i(\xi)$ $\xi$-nek 0-ad, vagy elsőfokú függvénye. A $b_k$-nak megfelelő függvény pedig ilyen alakú:

$$\frac{\psi_k(\xi) \,.\, f(\xi)}{f_k(\xi)}.$$

E kettő szorzata a

$$\frac{\varphi_i(\xi) \,.\, \psi_k(\xi) \,.\, f(\xi)}{f_i(\xi)\, f_k(\xi)} \,.\, f(\xi)$$

alakban állítható elő, melyen azonnal szembe ötlik, hogy $f(\xi)$-nek többszöröse tehát az $a_i b_k$-nak megfelelő szám: 0.

Ha pedig két megegyező jellegű egyszerű componens szorzatát állítjuk elő, akkor e szorzatnak megfelelő függvény:

$$\frac{\varphi_i(\xi) \,.\, \psi_i(\xi) \,.\, f(\xi)}{f_i(\xi)} \,.\, \frac{f(\xi)}{f_i(\xi)},$$

melynek alakja azonnal elárulja, hogy a neki megfelelő szám $i$-dik componens.

Ha tehát $a$ componensei: $a_1, a_2, \ldots, a_r$ és $b$-éi: $b_1, b_2, \ldots, b_r$, azaz:

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_r$$
$$b = b_1 + b_2 + \ldots + b_r,$$

akkor

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_r b_r$$

vagyis: *a szorzat componensei a megfelelő componensek szorzatai.*

Épen így, ha $\frac{a}{b}$ hányadost $c$-vel jelöljük, melynek componensei: $c_1, c_2, \ldots, c_r$, akkor

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_r = (b_1 + b_2 + \ldots + b_r)(c_1 + c_2 + \ldots + c_r),$$

miből következik, hogy:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_r}{b_r},$$

vagyis: *a hányados componensei a megfelelő componensek hányadosai.* E szerint a hypercomplex-számok minden raczionális függvényének componensei a megfelelő componensek raczionális függvénye.

14. *Az egységnek megfelelő szám componensei.* Az egységnek megfelelő szám definicziójára az $\frac{a}{a} = e_0$ egyenlet szolgált és láttuk, hogy az $e_0$ független az $a$-tól; tehát $e_0 = g_0$ és a $g_0$ jellemzése akként történik, hogy: $a \,.\, g_0 = a$ tesszük.

Megmutatjuk most, hogy a $g_0$ componenseit ugyanez az egyenlet jellemzi.

Ha $g_0$ componenseit $g_{01}, g_{02}, \ldots, g_{0r}$-el jelöljük, akkor:

$$g_0 = g_{01} + g_{02} + \ldots + g_{0r}$$

és így:

$$\begin{aligned} ag &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)(g_{01} + g_{02} + \ldots + g_{0r}) \\ &= a_1 g_{01} + a_2 g_{02} + \ldots + a_r g_{0r}, \end{aligned}$$

tehát fönnállanak a következő egyenletek:

$$a_i = a_i g_{0i} \quad (i = 1, 2, \ldots r)$$

és $a_k g_{0i} = 0$, ha $k$ különbözik az $i$-től.

15. *A 0 componensei és a zérus-osztók.* A 0 componensei 0-ok. Ha ugyanis

$$0 = u_1 + u_2 + \ldots + u_r$$

akkor:

$$0 \,.\, g_{01} = 0 + u_i g_{0i} = u_i.$$

Hogy a 0 componensei mind eltünnek, azt e componensek előállításából közvetlenül is következtethetjük. A 0-nak megfelelő függvény ugyanis $f(\xi)$, tehát az $i$-dik componensének egyik tényezője:

$$\frac{f(\xi) \,.\, f(\xi)}{f_i(\xi)},$$

melyről közvetetlenül láthatjuk, hogy $f(\xi)$-vel osztható, tehát a neki megfelelő szám 0.

Meghatározhatjuk már most azt is, hogy mi jellemzi a *zérus-osztók* componenseit. Hogy ugyanis $a$ és $b$ szorzata 0 legyen, kell, hogy minden componense, az-az

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = \ldots = a_r b_r = 0$$

legyen. Erre pedig szükséges, hogy ha az $a$ és $b$ a 0-tól különbözők, hogy az $a$ componensei közül egy vagy több 0-sal legyen egyenlő, azaz, ha

$$i_1, i_2, \ldots, i_s, i_{s+1}, \ldots, i_r$$

az 1, 2, . . ., $r$ számok egy bizonyos sorozata, akkor

$$a_{i_1} = a_{i_2} \ldots = a_{i_s} = 0$$

legyen és a hozzátartozó $b$ tényezőnek többi componensei, tehát:

$$b_{i_{s+1}} = b_{i_{s+2}} = \ldots = b_r = 0$$

legyenek. *Mindama hypercomplex-számok, melyeknek egy vagy több componense* 0, *a zérus osztói.*

Ez a tétel megint közvetetlenül nyerhető a *zérus-osztónak* megfelelő függvény alakjából.

Láttuk ugyanis, hogy a zérus-osztónak megfelelő függvénynek az $f(\xi)$-vel van közös osztója. Ha e közös osztó pl.:

$$f_1(\xi) . f_2(\xi) \ldots f_k(\xi)$$

és ha a zérus-osztónak megfelelő függvény $\varphi(\xi)$, akkor

$$\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \frac{A_{k+1}(\xi)}{f_{k+1}(\xi)} + \frac{A_{k+2}(\xi)}{f_{k+2}(\xi)} + \ldots + \frac{A_r(\xi)}{f_r(\xi)}$$

és így a $\varphi(\xi)$ előállításából parcziális törtek segítségével hiányoznak azok, a melyeknek megfelelő számok a zérus-osztó 1, 2,. . ., $k$-dik componensei volnának.

16. *A componensek átalakítása.* Láttuk, hogy minden hypercomplexszám előállítható egy- és két-dimenziós componenseinek összege gyanánt. Ha ugyanis $f_i(\xi)$ elsőfokú, akkor az

$$\frac{f(\xi)}{f_i(\xi)}$$

törtnek megfelelő számot $v_i$-vel jelölve, minden szám $i$-dik componense $A_i v_i$ alakú, a hol $A_i$ valós szám. E szerint a $g_0$ egység $i$-dik componense, a $g_{0i}$ is ilyen alakú, tehát minden szám $i$-dik componense

$$a_i g_{0i}$$

alakra hozható. A $g_0$ componenseinek ismeretes tulajdonsága folytán az egy-dimenziós componenseken ép *úgy végezhetjük a négy alapmüveletet, mint a közönséges valós számokon.* Igy

$$(a_i g_{0i})(\beta_i g_{0i}) = \alpha_i \beta_i g_{0i}^2 = \alpha_i \beta_i g_{0i}$$

és

$$\frac{a_i g_{0i}}{\beta_i g_{0i}} = \frac{a_i}{\beta_i} \cdot \frac{g_{0i}}{g_{0i}} = \frac{a_i}{\beta_i} g_{0i}.$$

A $g_{0i}$ szerepe e számitásban ugyanaz, mint 1-é a valós számoknál.

A két-dimenziós componensekkel pedig úgy végezzük a müveleteket, mint a közönséges complex-számokkal. Ha ugyanis $f_k(\xi)$ másodfokú tényezője az $f(\xi)$-nek, akkor minden szám $k$-dik componensének megfelelő függvény ilyen alakú:

$$\frac{A_k f(\xi)}{f_k(\xi)} + \frac{B_k \xi f(\xi)}{f_k(\xi)},$$

és ha az

$$\frac{f(\xi)}{f_k(\xi)}, \quad \frac{\xi f(\xi)}{f_k(\xi)}$$

nek megfelelő számokat $v_k$ illetve $u_k$-val jelöljük, akkor a $g_0$ $k$-dik componense, a $g_{0k}$, *az-az* $g_k = Av_k + Cu_k$. *Válaszszuk most már tetszésünk szerint a* $h_k = Bv_k + Du_k$ *számot úgy, hogy* $g_k$*-tól független legyen, az-az hogy* $AD-BC$ *ne tünjék el,* akkor $u_k$ és $v_k$ a $g_k$ és $h_k$-ban lineár módon kifejezhetők és így minden szám $k$-dik componense ilyen alakú:

$$\alpha g_k + \beta h_k.$$

Megmutatjuk, hogy a $h_k$ helyett választhatunk egy $j_k$ $k$-dik componenst ugy, hogy

$$j_k^2 = -g_k$$

legyen vagyis, hogy a két-dimenziós componens egyik eleme a $g_k$ megfeleljen a valós egységnek, a másik pedig a $j_k$ a közönséges képzetes egységnek.

A $j_k$ ismeretlen koordinátái legyenek $\xi$ és $\eta$, az-az

$$j_k = \xi g_k + \eta h_k$$

és

$$j_k^2 = \xi^2 g_k^2 + 2\xi\eta g_k h_k + \eta^2 h_k^2.$$

A $g_k$ és $h_k$ $k$-dik componensek lévén, szorzataik $k$-dik componenseket adnak. Ezek közül:

$$g_k^2 = g_k$$

$$g_k h_k = h_k$$

és végre $h_k^2$ a $g_h$ és $h_k$ lineár kifejezése, az-az

$$h_k^2 = \lambda g_k + \mu h_k$$

Megjegyezzük, hogy ez egyenletből következik, hogy $\mu^2 + 4\lambda$-nak negativnak kell lennie, mert ha pozitiv volna, akkor $h_k$ a $g_k$-ban valós együtthatókkal kifejezhető volna, a mi ellenkezik ama feltevésünkkel, hogy $h_k$ a $g_k$-tól független. A feladatunk vissza van vezetve a $j_k$ együtthatóinak a $\xi$ és $\eta$-nek olyatén meghatározására, hogy

$$\xi^2 g_k^2 + 2\xi\eta g_k h_k + \eta^2 h_k^2 = - g_k$$

legyen. Az előbbi helyettesítéseket végezvén:

$$\xi^2 g_k + 2\xi\eta h_k + \eta^2 (\lambda g_k + \mu h_k) = - g_k$$

vagyis kell hogy fennálljon e két egyenlet:

$$\xi^2 + \lambda\eta^2 = -1$$

$$2\xi\eta + \mu\eta^2 = 0.$$

A második egyenlettől eredő $\eta = 0$ nem szolgáltat a $\xi$-re valós megoldást, tehát

$$\eta = -\frac{2\xi}{\mu},$$

és ebből:

$$\xi^2 (\mu^2 + 4\lambda) = -1,$$

és minthogy $\mu^2+4\lambda$ negativ, tehát $\xi$ és $\eta$-ra valós értékeket nyertünk, vagyis meghatározhattuk a $j_k$ hypercomplex-számot oly módon, hogy $j_k^2=-g_k$ legyen. Minden $k$-dik componens e szerint előállítható a

$$xg_k+yj_k$$

alakban, a hol $j_k$ és $g_k$ között ugyanolyan összefüggés áll fönn, mint az $i$ és 1 között.

A kétdimenziós componensekkel tehát épen úgy végezzük a müveleteket, mint a közönséges complex-számokkal; ugyanis két szám szorzata:

$$(xg_k+yj_k)(x_1g_k+y_1j_k)=(xx_1-yy_1)g_k+(xy_1+x_1y)j_k$$

és a hányadosuk:

$$\frac{xg_k+yj_k}{x_1g_k+y_1j_k}=\frac{(xg_k+yj_k)(x_1g_k-y_1j_k)}{(x_1^2+y_1^2)g_k}=$$

$$=\frac{xx_1+yy_1}{x_1^2+y_1^2}g_k+\frac{x_1y-y_1x}{x_1^2+y_1^2}j_k.$$

Ezzel kimutattuk, hogy az *általános complex-számok tartományát az I egyenletben szereplő E együtthatók választásával úgy alkothatjuk meg, hogy benne e műveletek éppen úgy végezhetők, mint a közönséges complex-számok tartományában.* A különbség a kétféle szám között csakis az, hogy míg a közönséges complex számok tartományában a szorzat csak úgy tünhetik el, ha legalább egyik tényezője 0, addig az általános complex számok tartományában, (melyben az alapegységek szorzatait az I alatti egyenletek állapitják meg) a szorzat 0 lehet a nélkül, hogy a tényezők egyike is 0 lenne; vagyis, míg a közönséges complex-tartományban a *zérus-osztó* csak 0 volt, addig itt a zérus-osztó a 0-tól különböző szám is lehet.

A hypercomplex számok e tartományának megállapítására az *I* egyenletben szereplő *E* együtthatók szabad választását korlátoznunk kellett oly módon, hogy

1. Kizártuk azokat az *E* együtthatókat, melyek mellett a 4) alatti

determináns azonosan eltűnik, mert különben az osztás fogalma határozatlanná lett volna.

2. Kizártuk továbbá azokat az $E$ együtthatókat, melyek mellett az 5) alatti determináns azonosan 0, mert akkor a $g_0, g, g^2, \ldots$ egységeket nem vezethetjük be.

3. Végre ki kellett zárnunk amaz $E$ együtthatókat is, melyek mellett a 10. pont IV. egyenletének discriminánsa 0, mert különben volna a tartományban a 0-tól különböző szám, melynek bizonyos hatványa mégis 0.

Az $I$ egyenletrendszer felállításánál természetesen csakis olyan $E$ együtthatók jöhetnek szóba, a melyek a szorzás commutativ és associativ elvéből folyó 1. és 2. alatti egyenleteket kielégítik.*

17. *Egyenlet megoldása a hypercomplex tartományban.* A kérdés, melylyel foglalkoznunk kell, a következő. Ha adva van az

$$ax^m + bx^{m-1} + \ldots + l = 0 \qquad a)$$

algebrai egyenlet, melynek együtthatói az $E_n$ tartományba tartozó hypercomplex számok, (tehát $e_1, e_2, \ldots, e_n$ egységekből valós koordinátákkal alkotott számok) miként lehet akkor oly $E_n$ tartománybeli számokat meghatároznunk, a melyek ezt az egyenletet kielégítik?

A közönséges complex tartományban mindig meghatározhatók ennek az egyenletnek e tartományba tartozó gyökei, kivéve azt az esetet, hogy az együtthatók mindannyian eltünnek. Ez ott az egyetlen kivételes eset, a mikor az egyenlet megoldása határozatlan probléma. A hypercomplex számoknál előforduló határozatlanság ezzel analog; a különbség csak is az, hogy itt beáll a határozatlanság már akkor is, *ha az együtthatók mind ugyanannak a zérusosztónak többszörösei.*

Ha $a$ zérus-osztó, akkor már a következő

$$ax = 0$$

* A feltételek redukcziójával és a feltételeknek megfelelő $E$ együtthatók meghatározásával bővebben foglalkozik DEDEKIND a Göttinger Nachrichten 1885. évi és PETERSEN J. a G. N. 1887. évi köteleiben.

elsőfokú egyenletnek is végtelen sok, 0-tól különböző gyöke van, mert az $a$ zérus-osztóhoz végtelen sok számot találhatunk, melylyel az szorozva 0-t ad. Hasonlóképen az

$$akx + bk = 0$$

egyenletnek, az esetben, midőn $k$ a zérus osztója, végtelen sok gyöke van; mert ha $l$ egy a $k$-hoz tartozó zérus-osztó, az-az $kl = 0$, akkor az

$$ax + b = l$$

egyenlet gyöke kielégíti a föntebbi egyenletet, mert ha mindkét oldalon $k$-val szorzunk, a felső egyenletre jutunk; de mivel $l$-nek végtelen sok értéke lehet; tehát a föntebbi egyenletnek is végtelen sok gyöke van.

Ha a felső, $\alpha$) alatti egyenletben úgy az együtthatók, mint a gyök componenseit vezetjük be, akkor minden componens-egyenletnek ki kell elégítve lennie, mert 0 componensei 0-ok. E szerint az $\alpha$) alatti egyenlet a következő $n$ egyenletre bomlik:

$$a_i x_i^m + b_i x_i^{m-1} + \ldots + l_i = 0 \qquad \beta)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

Itt az $a_i$, $b_i$, együtthatók egy- vagy két-dimenziós complex számok, a szerint a mint az $i$-dik componens 1- vagy 2-dimenziós. Ha az $i$-dik componees 1-dimenziós, akkor

$$a_i = \alpha_i g_i, \quad b_i = \beta_i g_i, \quad \ldots, \quad l_i = \lambda_i g_i$$

tehető, a hol $\alpha_i$, $\beta_i$, ... valós számok és $\xi_i$-nek valós számnak kell lennie. Ha az

$$\alpha_i \xi_i^m + \beta_i \xi_i^{m-1} + \ldots + \lambda_i = 0$$

egyenletnek van valós gyöke, akkor megtaláltuk e tartományban az $x$ $i$-dik componensét; de ha valós gyöke nincsen, akkor e tartományban megoldás nincsen, akkor e tartományhoz még adjungálnunk kell egy új egységet, a közönséges képzetes egységet, hogy a megoldást egyáltalában eszközölhessük. Ha azonban a koordináták közönséges complex értékeit is megengedjük, akkor ez egyenletnek complex gyökeit is használhatjuk. Ha az $i$-dik tartomány kétdimenziós, akkor a $g_i$ és $j_i$ egységek bevezetésével felbonthatjuk a $b)$ alatti egyenletet ép úgy, mint a közönséges complex tartományban tesszük. Ha ugyanis

$$x = \xi g_i + \eta j_i$$

tesszük, akkor a $j_i^2 = -g_i$ segítségével redukáljuk a $\beta)$ alatti egyenletet, vagy más szóval, ha $g_i$ helyett 1-et, $j_i$ helyett a képzetes egységet $i$-t tesszük, akkor a $\beta)$ alatti egyenlet complex gyökeit is használhatjuk, mert a valós rész szolgáltatja $g_i$ és a képzetes rész $j_i$ együtthatóját.

Ha a $k$ dik componens egyenletnek $m_k$ használható gyöke van, akkor az adott egyenletnek:

$$m_1 m_2 \ldots m_r$$

gyöke van. Ha csupa 2-dimenziós componense van e tartománynak, akkor $r = \frac{n}{2}$ és így, ha az $x^m$ együtthatójának, az $a$-nak egyetlen componense sem 0, akkor a gyökök száma:

$$m^{\frac{n}{2}}$$

Az esetben, ha $n = 2$, a gyökök száma: $m$.

Végtelen sok gyöke akkor lesz az egyenletnek, ha legalább egyik componensének végtelen sok gyöke van, azaz ha pl.:

$$a_i = b_i = c_i = \ldots = l_i = 0$$

az $i$-nek legalább egy értékénél.

De ez esetben minden együttható a *zérus osztója.*

Ha

$$i_1, i_2, \ldots, i_s, i_{s+1}, \ldots, i_r$$

az $1, 2, \ldots, r$ számok bizonyos sorozata és az $a, b, c, \ldots, l$ együtthatók $i_1, i_2, \ldots, i_s$-edik componensei eltűnnek, akkor ha $u$-val oly számot jelölünk, melynek szintén $i_1, i_2, \ldots, i_s$-dik componense 0, akkor meghatározhatók $a', b', \ldots, l'$ számok úgy, hogy

$$a = a'u, \quad b = b'u, \quad \ldots, \quad l = l'u$$

legyen. Ehhez nem kell egyéb, mint hogy

$$a'_k = \frac{a_k}{u_k}, \quad b'_k = \frac{b_k}{u_k} \dots l'_k = \frac{l_k}{u_k}$$

legyen, ha $k = i_{s+1}, i_{s+2}, \dots, i$ és a többi componensek tetszés szerintiek, tehát látjuk, hogy ha az adott egyenletnek végtelen sok megoldása van, akkor *mindenik együtthatója egy és ugyanannak a zérus-osztónak (u-nak) többszöröse.*

Viszont, ha mindegyik együttható oly $u$ zérus-osztó többszöröse, melynek $i_1, i_2, \dots, i_s$-ik componense 0, akkor az $a, b, c, \dots, l$ együtthatók $i_1, i_2, \dots, i_s$-ik componense is 0, vagyis ezen együtthatókkal biró componens egyenleteknek végtelen sok megoldásuk van. E szerint az egyenlet megoldásának határozatlanságára szükséges és elégséges feltétel az, hogy az egyenlet minden együtthatója ugyanazon zérus-osztónak többese legyen.

Az egyenlet gyöke az együtthatók algebrai függvénye és mivel itt a gyök componenseit az együtthatók componenseiből alkotott egyenletek gyökei képezik, vagyis a gyök componensei az együtthatók componenseinek algebrai függvényei, tehát *az algebrai függvény componensei is a változók megfelelő componenseinek algebrai függvényei.*

18. *Hypercomplex változó függvénye.* Végre még egy kérdéssel kell foglalkoznom, a mi a közönséges complex-számok függvényeinek elméletében az elemek közé tartozik. Ott ugyanis első kérdésünk az, hogy miképpen ismerhetjük fel, hogy tetszés szerinti complex függvénye az $x$ és $y$ változóknak függvénye-e az $x + iy$ változónak?

Ha adva van

$$f_1(x, y) + if_2(x, y)$$

függvény, kérdés, átalakitható-e ez

$$f(x + iy)$$

alakúvá. Itt is azt a kérdést tesszük, hogy miképpen lehet felismerni, hogy az

$$x_1, x_2 \dots, x_n, e_1, e_2 \dots, e_n$$

valamely adott függvénye az

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

complex változó függvénye-e? Az $x_1, x_2, \ldots, x_n, e_1, e_2, \ldots e_n$ minden függvénye (egyelőre ugyan csak algebrai függvénye) ilyen alakra hozható:

$$f_1e_1 + f_2e_2 + f_3e_3 + \ldots + f_ne_n,$$

a hol az $f$ együtthatók az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ függvényei. Hogy ha

$$f_1e_1 + f_2e_2 + \ldots + f_ne_n = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n)$$

akkor mindkét oldalon $x_i$ szerint parcziálisan differencziálván (a jobb oldalon $x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = z$ téve):

$$e_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + e_2\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + e_n\frac{\partial f_n}{\partial x_i} = e_i\frac{\partial f}{\partial z}$$

$x_k$ szerint differencziálván

$$e_1\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + e_2\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + e_n\frac{\partial f_n}{\partial x_k} = e_k\frac{\partial f}{\partial z}.$$

E két egyenletből $\frac{\partial f}{\partial z}$-t kiküszöbölvén, ered $n$ egyenlet:

$$E_{s1k}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + E_{s2k}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + E_{snk}\frac{\partial f_n}{\partial x_i} =$$

$$= E_{s1i}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + E_{s2i}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + E_{sni}\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

vagy

$$E_{s1k}f_1 + E_{s2k}f_2 + \ldots + E_{snk}f_n = F_{ks}$$

téve:

$$\frac{\partial F_{ks}}{\partial x_i} = \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_k}$$

$$(s,\ i,\ k,\ = 1, 2, \ldots, n).$$

Alkalmazzuk e feltételi egyenleteket a közönséges complex számok tartományán, a hol:

$$E_{111} = 1,\ E_{211} = 0;\ E_{121} = 0,\ E_{221} = 1,\ E_{122} = -1,\ E_{222} = 0,$$

akkor:

$$F_{11}=f_1 \quad F_{21}=-f_2$$
$$F_{12}=f_2 \quad F_{22}=f_1$$

és az előbbi feltételek helyébe 2 feltétel lép:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=-\frac{\partial f_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}=\frac{\partial f_1}{\partial x}.$$

a melyek a közönséges complex függvények elméletében ismeretesek.

19. *Összefoglalás.* A hypercomplex számok elméletén végig tekintvén, azt látjuk, hogy általánosságban az eredmények megegyeznek a közönséges complex számok elméletével, a mennyiben a műveletek olyan componenseken végezhetők, melyek egy- vagy két-dimenziósak.

Az első esetben ugyanúgy járunk el, mint a valós számok tartományában, a másodikban pedig úgy, mint a közönséges complex számok tartományában. Az egész különbség a két elméletben a *zérusosztó* fellépéséből ered.

Ezért mondja WEIERSTRASS (G. N. 1884. p. 410): «... So scheint es mir dass GAUSS diese Unzulässigkeit als dadurch begründet angesehen habe, dass das Product zweier Grössen, sobald $n>2$, verschwinden kann, ohne dass einer seiner Factoren den Werth 0 hat. Denn hätte er diesen Umstand nicht als ein unübersteigliches Hinderniss für die Einführung der allgemeinen Complexen Grössen in die Arithmetik betrachtet, so würde es ihm schwerlich entgangen sein, dass sich eine Arithmetik dieser Grössen begründen lässt in denen alle Sätze entweder mit denen der Arithmetik der gewöhnlichen complexen Grössen identisch sind, oder doch in der letzteren ihr Analogon finden. Er würde auch ohne Zweifel seinen Ausspruch dahin modificirt haben, dass die Einführung der allgemeinen complexen Grössen in die Arithmetik zwar nicht unstatthaft, wohl aber überflüssig sei».

DEDEKIND úgy fogja fel a hypercomplex számokat, hogy azok nem *új* számok, mert a dolog velejére nézve semmiben sem térnek el a közönséges algebrai számoktól. Igy ha $e_1$, $e_2$, $e_3$ valamely harmadrendü tartomány alapegységei, melyekre vonatkozólag az I. alatti egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= -2e_1 - e_2 - 2e_3 \\ e_2^2 &= -2e_1 - 2e_2 - e_3 \\ e_3^2 &= -e_1 - 2e_2 - 2e_3 \\ e_2e_3 &= e_1 + e_2 \\ e_3e_1 &= e_2 + e_3 \\ e_1e_2 &= e_1 + e_3, \end{aligned}$$

akkor e 3 alapegység definiálta számok az

$$\frac{r^7-1}{r-1} = 0$$

egyenlet bármely gyökéből készült periodusoknak felelnek meg, ha:

$$e_1 = r + r^{-1}, \quad e_2 = r^2 + r^{-2}, \quad e_3 = r^3 + r^{-3}$$

tesszük. Még a zérusosztó tüneményében sem lát új dolgot. Szerinte ugyanis, ha $r$ $n$ értékű szám, akkor

$$\varphi(r) = \psi(r)$$

csakis akkor áll fönn, ha ez az egyenlet fönnáll $r$ mindenik értékénél, vagyis ha tehát

$$\varphi(t) - \psi(t)$$

osztható az

$$f(t) = (t - r_1)(t - r_2) \ldots (t - r_n)$$

-nel. Igy pl. ha $r$ a gyöke az $r^2 - 1 = 0$ egyenletnek, akkor $r + 1$ vagy $r - 1$ nem 0, de $(r + 1)(r - 1) = 0$.

Dedekind szerint Gauss azért nem foglalkozott a hypercomplex számokkal, mert felismerte, hogy azok elmélete az algebrai számok elméletével megegyezik, melynek egy speciális problémájával, a körosztási számokkal behatóan foglalkozott. Nézete szerint Gaussnak rá kellett jutnia arra, hogy e hypothetikus complex-számok nem különböznek a többértékű mennyiségektől.*

*Beke Manó.*

---

* Dedekind. Erläuterungen stb. Göttinger Nachrichten 1887. p. 1—7.

# A LOGIKA-KALKULUSRÓL.

(Második és befejező közlemény.)

Jelöljük most $f(a)$-val az $a$ és $a_1$ osztályok valamely függvényét, melyben $a$ és $a_1$ egymással és a tőlük függetlenül adott más osztályokkal az összegezés és a szorzás müveletével vannak összekapcsolva; ez oly eset, melyre valamennyi más eset könnyen visszavezethető. Ha már most a többtagú tényezőket felbontjuk, csupa oly egytaguakat nyerünk, melyekben az $a$ és $a_1$ szimbolumok egyidejűleg nem fordulhatnak elő és mindegyik legfölebb egyszer szerepelhet mint tényező. Ennélfogva az egész függvény $a$ és $a_1$ szerint elsőfokúvá s homogénné alakitható akként, hogy tetszés szerint vagy az $a$- és $a_1$-től független tagokat, vagy pedig az egész kifejezést $(a + a_1)$-gyel szorozzuk. Ily módon itt is a következő alakot nyerjük:

$$f(a) = xa + ya_1, \qquad (B)$$

melyben $x$ és $y$ $a$- és $a_1$-től független módon vannak megadva.

Ezek az együtthatók azonban itt már nem tetszőlegesek, hanem az $f(a)$ függvényben való szereplésök őket már teljesen meghatározza.

Az $x$ és $y$ meghatározására tegyük $(B)$-ben

$$a = 1, \quad a_1 = 0, \qquad 1)$$

lesz akkor

$$x = f(1),$$

$$a = 0, \quad a_1 = 1, \qquad 2)$$

miből

$$y = f(0)$$

és e szerint

$$f(a) = f(1)\, a + f(0)\, a_1 \qquad (C)$$

Ez az eljárás könnyen kiterjeszthető két vagy több argumentum tüggvényére:

$$
\begin{aligned}
&f(a, b) = f(1,1)\, ab + f(1,0)\, ab_1 + f(0,1)\, a_1 b + f(0,0)\, a_1 b_1, \\
&f(a, b, c) = f(1,1,1)\, abc + f(1,1,0)\, abc_1 + f(1,0,1)\, ab_1 c \\
&+ f(1,0,0)\, ab_1 c_1 + f(0,1,1)\, a_1 bc + f(0,1,0)\, a_1 bc_1 \\
&+ f(0,0,1)\, a_1 b_1 c + f(0,0,0)\, a_1 b_1 c_1 \quad \text{stb.}
\end{aligned}
$$

Az itt

$$f(0), \quad f(1,0), \quad f(1,0,1)$$

együtthatókon kivül szereplő mennyiségek (az ú. n. konstituensek) összegei

$$
\begin{aligned}
&a + a, \\
&ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1, \\
&abc + abc_1 + ab_1 c + ab_1 c_1 + a_1 bc + a_1 b_1 c + a_1 b_1 c_1 + a_1 b_1 c_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

így is írhatók:

$$
\begin{aligned}
&a + a_1 \\
&(a + a_1)(b + b_1) \\
&(a + a_1)(b + b_1)(c + c_1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

($\alpha$) szerint pedig e tényezők mindegyike, tehát ezeknek szorzata is és így a konstituenseknek összege is $= 1$. Ugyancsak ($\alpha$)-ból következik, hogy bármely két konstituensnek szorzata zérus, a mennyiben e szorzatban legalább is két egymásra nézve kontradiktorius osztály szerepel mint tényező.

A konstituenseknek tulajdonságából következik, hogy két ugyanazon argumentumok szerint kifejtett sor szorzása csupán a megfelelő együtthatóknak szorzásával eszközölhető. Igy tehát

$$
\begin{aligned}
&(pab + qab_1 + ra_1 b + sa_1 b_1)(p'ab + q'ab_1 + r'a_1 b + s'a_1 b_1) \\
&= pp'ab + qq'ab_1 + rr_1 a_1 b + ss'a_1 b_1 .
\end{aligned}
$$

*

A logika-kalkulusban

$$a + b = 0 \ldots (4)$$

csak úgy állhat, ha

$$a = 0, \quad b = 0.$$

Ugyanis $a$-val szorozván, lesz

$$a + ab = a = 0,$$

vagy $b$-vel szorozván, lesz

$$ab + b = b = 0.$$

Minden logikai egyenlet 0-ra redukálható oly módon, hogy az

$$a = b$$

egyenlet helyébe a vele teljesen egyenlő értékű

$$ab_1 + a_1 b = 0$$

egyenletet irjuk. Hogy e két egyenlet csakugyan æquivalens, az azonnal tünik ki, ha az utóbbiba $a$-t irunk $b$ (tehát $a_1$-t $b_1$) helyébe.

Hogy tehát valamely egyenletet 0-ra redukálhassunk, arra szükséges, hogy bármily komplikált osztálykifejezésre nézve azonnal annak negáczióját fölirhassuk. Ezt pedig megkönnyitik a következő tételek:

1.) $(ab)_1 = a_1 + b_1$

azaz, *valamely szorzat negácziója egyenlő a tényezők negáczióinak összegével.*

1'.) $(a + b)_1 = a_1 b_1$

azaz, *valamely összeg negácziója egyenlő a tagok negáczióinak szorzatával.*

Az 1'.) bizonyitására csak azt kell kimutatnunk, hogy

$$(a + b)\, a_1 b_1 = 0 \qquad \alpha)$$

és

$$(a + b) + a_1 b_1 = 1 \qquad \beta)$$

Az első egyenlet helyessége közvetetlenül kitünik; a másodikat illetőleg alakitsuk át $(a + b)$-t:

$$a + b = a\,(b + b_1) + b\,(a + a_1) = ab + ab_1 + a_1 b;$$

ezt $\beta$)-ba helyettesítvén, lesz

$$a + b + a_1 b_1 = ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1 = (a + a_1)(b + b_1) = 1.$$

Valamely kifejtett osztályfüggvény negáczióját akként kapjuk, hogy az együtthatók helyébe egyszerűen ezeknek negáczióját írjuk. Legyen

$$f = pab + qab_1 + ra_1 b + sa_1 b_1,$$

akkor

$$f_1 = p_1 ab + q_1 ab_1 + r_1 a_1 b + s_1 a_1 b_1.$$

Hogy itt csakugyan két kontradiktorius alak van előttünk, ez onnan derül ki, hogy

$$ff_1 = 0 \qquad \gamma)$$

$$f + f_1 = 1 \qquad \delta)$$

A $\gamma$) egyenlet helyessége közvetetlenűl kitünik; a $\delta$) egyenletet illetőleg, írjuk

$$f + f_1 = ab(p + p_1) + ab_1(q + q_1) + a_1 b(r + r_1) + a_1 b_1 (s + s_1);$$

ámde

$$p + p_1 = q + q_1 = r + r_1 = s + s_1 = 1$$

és ezenfelül

$$ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1 = 1.$$

A logika-kalkulusnak egyik legfontosabb tétele a következő: Bármily

$$xa + ya_1 = 0 \ldots \varepsilon)$$

egyenlet æquivalens e két egyenlettel:

$$xy = 0 \qquad \varphi)$$

és

$$a = (v + y)x_1 \qquad \psi)$$

hol $v$ alatt határozatlan osztály értendő.

Ha ugyanis az $\varepsilon$ egyenletet $y$-nal és $x$-xel szorozzuk és ezután összeadunk, kapjuk

$$xa + xya_1 + yxa_1 + ya_1 = 0,$$

hol az első és utolsó tag összege $\varepsilon$)-ra való tekintettel kiesik, úgy hogy marad

$$xy(a + a_1) = xy = 0.$$

Hogy a $\psi$ alatti egyenletet megnyerjük, mindenek előtt tekintetbe kell vennünk, hogy abban az esetben, midőn $ab = 0$, $a = ub_1$ tehető, hol $u$ határozatlan. Az $\varepsilon$) egyenletből a fentebbiek alapján következik, hogy

$$xa = 0 \quad \text{és} \quad ya_1 = 0 \qquad \varkappa)$$

A két egyenlet elsejében

$$a = ux_1 \qquad \lambda)$$

írható. Ámde ebből $a_1 = u_1 + x$. Ha ezt $y$-nal szorozzuk, lesz

$$a_1y = u_1y + xy,$$

miből $\varphi$) és $\varkappa$)-ra való tekintettel

$$o = u_1y.$$

Itt azonban

$$u_1 = vy_1,$$

vagy

$$u = v_1 + y$$

tehető.

Ezt $\lambda$)-ba helyettesítvén, lesz

$$a = (v_1 + y)x_1,$$

hol $v_1$ határozatlan osztályt jelent, helyébe tehát $v$-t is írhatunk, és ezzel a $\psi$) alatti egyenlet helyessége teljesen be van bizonyítva.

E tétel a logika-kalkulusra nézve azért fontos, mert mindenekelőtt képesit bennünket arra, hogy az $\varepsilon$) függvényből vagy egy hasonló alakból egy tetszés szerinti $a$ osztályt elimináljunk. A $\varphi$) egyenletet, mely az $\varepsilon$) egyenletnek következménye és mely $a$ osztályt nem tartalmazza, az *a eliminácziója rezultánsának* nevezzük. Ámde a $\psi$ egyenlettel ismét képesek vagyunk az adott egyenlethez tartozó valamennyi *a gyökeit* meghatározni.

Minthogy

$$a + b + c + d + \ldots = 0$$

az előbbiek szerint

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \ldots$$

egyenleteket föltételezi, az *egy* egyenletre alkalmazott eljárást egyenlet-rendszerre is alkalmazhatjuk, a mennyiben ez utóbbi mindig egyenlő értékű egyetlenegy egyenlettel, melyben az adott egyenletekben szereplő osztály-szimbolumok és negácziók mint szorzók vagy mint összeadandók fordulnak elő. Ha pedig az egyenletrendszert így egyesítettük, tetszésszerinti osztály-szimbolumok eliminácziójának rezultánsát egyszerűen akként nyerjük, ha az együtthatók szorzatát egyenlővé teszszük 0-sal.

Az összevonás előtt azonban az adott egyenleteket a fennebb adott módon 0-ra kell redukálnunk.

*

*Példa.* Valamely társulat alakulása alkalmával annak bizottságaira nézve a következő indítványok merülnek fel:

1) *a pénztári bizottságnak* (financial comittee) *minden tagja egyúttal az igazgató tanácsnak* (general c.) *is tagja;*

2) *a ki a könyvtári bizottságban* (library c.) *és az igazgató tanácsban is részt vesz, az egyszersmind a pénztári bizottságnak is tagja;*

3) *a ki a pénztári bizottságnak tagja, az a könyvtári bizottságból ki van zárva.*

Hogyan lehet ezeket az indítványokat egymással megegyeztetni s legegyszerűbben összefoglalni?

Az első két indítvány subsumáló itélet, hogy t. i.

$$x ⋹ z, \qquad yz ⋹ x,$$

ha $x$ a pénztári, $y$ a könyvtári bizottság tagját jelenti, $z$ pedig igazgató tanácsost. Ugyanezek az itéletek egyenletek alakjában így írhatók fel:

$$xz_1 = 0, \qquad x_1 yz = 0.$$

A harmadik indítvány értelmében

$$xy = 0.$$

A három indítvány foglalatja tehát az, hogy

$$xz_1 + x_1 yz + xy = 0.$$

Ha ezt az egyenletet $z$ és $z_1$-ben homogénné tesszük, akkor

$$xz_1 + x_1 yz + xy(z + z_1) = 0,$$

vagyis

$$(x + x_1) yz + (x + xy) z_1 = 0.$$

Ámde

$$x + x_1 = 1, \quad x + xy = x,$$

tehát

$$yz + xz_1 = 0,$$

azaz

$$yz = 0, \quad xz_1 = 0.$$

Az előbbi három inditványnak tehát a következő alapszabályokkal lehet eleget tenni:

1) *a könyvtári bizottság tagjai nem vehetnek részt az igazgató tanácsban;*

2) *ellenben a pénztári bizottság tagjai az igazgató tanács kebeléből választandók.*

Az

$$yz + xz_1 = 0$$

egyenletből

$$z = (u + x) y_1 = xy_1 + uy_1 (x + x_1)$$
$$= xy_1 + ux_1 y_1 .$$

Az igazgató tanács tehát magában foglalja a társulat mindama tagjait, kik a pénztári bizottságban részt vesznek, de a könyvtáriból ki vannak zárva, továbbá (esetleg) oly tagokat, kik e két bizottság egyikébe sem tartoznak.*

*Bein Károly.*

---

* *Venn.* Symbolic logic. London 1881. 262. lap.

# A CHRÓMSAVAS ELEMEKRŐL.

Az áramló elektromosság forrásai: a galván elemek, hőoszlopok és mágneselektromos vagy dinamoelektromos gépek. Mindegyik esetben az elektromos forrás árama azon másnemü energiának æquivalenseül tekinthető, mely az elektromos forrás működésének fenntartására fordíttatott. Az említett elektromos forrásokban a *hő* az, ami elektromossággá alakul át. A galván elemekben a chemiai változások folytán származott hő az elektromosság forrása; a hőoszlopok közvetlenül alakítják át a forrasztási helyek fölmelegítésére fordított hőt; a dinamogépeken a mozgató gépekbe fektetett hő közvetetve alakul át, a mennyiben mechanikai energiává lesz s ez vitetik át a dinamóra.

Kétségtelen, hogy e források közűl a legolcsóbb elektromos energiát a dinamogépek szolgáltatják; de az is bizonyos, hogy ezek csak ott alkalmazhatók előnyösen, a hol nagyobb mennyiségű elektromos energiára van szükség. Berendezésük és fenntartásuk a középiskolai szertárak és laboratoriumok szerény költségkeretét messze túlhaladják s így nem marad más hátra, mint a galván elemek és hőoszlopok között választani.

Első tekintetre azt hinnők, hogy a választás csak a hőoszlopokra eshetik. Hiszen ezek működése a legrationalisabb, mert a hőt közvetlenül alakítják át; azonban ha tekintetbe vesszük, hogy a belőlük vehető elektromos haszonmunka a befektetett energia értéknek alig 0·1° 0·2%-át teszi, míg a galván elemek 40—60%-ot adnak vissza, akkor igazolva látjuk a gyakorlatot, mely a hőoszlopoknak oly kevés tért nyújt.

Középiskolai czélokra tehát megmaradnak a galván elemek.

Ezen dolgozatom czélja, egyelőre néhány chrómsavas elem kisütésének eredményét közölni, s ezekből megállapitani, hogy menynyiért mit képesek ezek az elemek adni, mi az értékük és munkaképességük.

A Daniell-féle elemeknél az elektromos áram forrását képező chemiai változások ismeretesek s tudjuk, hogy ezek

$$\begin{array}{cccccc} -\,Zn & H_2SO_4 & | & CuSO_4 & & Cu\,+ \\ Zn & SO_4 & H_2 & SO_4 & Cu & \end{array}$$

képlet szerint mennek végbe, vagyis $ZnSO_4$ képződik, $CuSO_4$ pedig felbomlik és *Cu* válik ki belőle. A $ZnSO_4$ képződése hőfejlődéssel, a *Cu* kiválása hőfogyasztással jár és pedig a *Zn* egy æquivalensének átalakulása 54191 gr. caloria hőt ad, míg a *Cu* egy æquivalensének kiválása 27822 gr. caloriát fogyaszt s így a *Zn* egy æquivalensének elfogyasztása 54192—27822 = 26369 gr. cal. hőt, illetőleg ezzel egyenlő elektromos energiát adhat. Minthogy 1 *VA* secund = 0·24 gr. cal., az említett különbség 26369 gr. c. = 30·52 *HW* (órawatt). Ha tehát *a fennmaradt összes hő elektromos energiává alakulna, akkor 34·22 gr. czinkre a Daniell elemtől 30·52 HW-ot várhatnánk.*

A chrómsavas elemekben végbemenő chemiai változásokról nincs oly határozott és biztos képünk, mint az előbb említettnél s csak gyanítjuk, hogy:

$$\begin{array}{cccccc} Zn & H_2SO_4 & | & {}^1/_3\,(Cr_2O_3O_3) & & C \\ Zn & SO_4 & H_2 & & O & {}^1/_3\,Cr_2O_3 \end{array}$$

képlet szerint történik. A végeredményben $ZnSO_4$ származik $Cr_2O_3O_3$ pedig bomlik; a megfelelő hő egyenérték 54191—3150 = 51041 gr. c. egy æquivalens zinkre. A $ZuSO_4$ képződéséből származó hőnek tehát 5·9%-a fordíttatik a chrómsav desoxidatiójára s csak a többi alakulhat elektromos energiává. A czink égési hője 1670 gr. c. lévén, az említett 5·9% levonása után 1571·5 gr. c. marad fenn, a minek 1·859 *HW* elektromos energia felel meg. Bizonyos, hogy egyetlen egy elem sincs, mely visszaadná teljesen a befektetett energia egyenértékét, de mindenesetre érdekel bennünket, hogy mennyit ad vissza?

Az alább közölt kisütési kisérleteknek czélja megmutatni, hogy a chrómsavas elemek a beléjük fektetett energia készletből mennyit adnak vissza a *sarkokat összekötő külső zárlatban* hasznosítható elektromos energia alakjában.

*A kisérleti elem leírása.* A kisérletekre használt elemnek két szén és egy czink elektrodája volt; az utóbbi diaphragmában. A szénlemezek méretei 1×9·5×20 cm, s a *folyadékkal érintkező összes felület: 672 cm²*; a czinklemez mérete 0·5×9·5×20 cm., s a *folyadékkal érintkező felület 304 cm²*.

A szénlemezek felső részei 2 cm.-nyi szélességben parafinnal itatva és galvanoplasztikai úton rézzel voltak bevonva. A III. és IV. kisütésnél használt szénlemezek méretei 0·8 × 9×18 cm. s így a folyadékkal érintkező *összes felület ezeknél csak 504 cm²*. Az üvegedény 21 cm. magas, négyzet (14×14 cm.) keresztmetszetü, a diaphragma pedig 6×11·5×20 cm. méretű. A diaphragmában mindig 750 cm.³ 10%-os kénsav volt, melybe 7·5 gr. *amalgamsó* adatott. Ez utóbbinak hatására a czink állandóan jól foncsorozottnak mutatkozott. Hogy a czink tisztátalansága — még a jó foncsorozás esetében is — minő különbséget okoz a fogyasztásban, mutatja a VII. és VIII. kisütés.

Az elem összeállításánál nagy gond fordítandó arra, hogy a működés közben kivált és a szénlemezek, valamint a diaphragma likacsaiba behatoló és a bennők kikristályosodó chrómtimsó teljesen eltávolíttassék. E végből a szeneket és a diaphragmát higított (3—5%) kénsavban huzamosabb ideig áztatjuk, többször megujítván a folyadékot s azután jól kiszárítván a lemezeket és a diaphragmát, új elem összeállítására használhatjuk. A chrómtimsó kikristályosodván, a szeneket s a diaphragmát szétőrli; ha pedig kimosás után nincs jól kiszárítva, akkor a bennmaradt víz az elem ellenállását a hatásfok * rovására nagyobbítja. Egy ilyen rosszul ki-

---

* $\text{Hatásfok} = \dfrac{\text{visszanyert energia}}{\text{befektetett energia}} \,.\, 100$

mosott és ki nem szárított szenekből összeállított elemnél tapasztaltam, hogy összeállítás után:

| | | áramerősség | | |
|---|---|---|---|---|
| | $E=1{\cdot}860$ volt; | $i=2{\cdot}47$ ampère, | $e=0{\cdot}934$ volt | és $6=0{\cdot}374$ ohm, |
| 1/2 óra mulva | $E=1{\cdot}910$ v. | $i=3{\cdot}08$ a., | $e=1{\cdot}176$ v. | « $6=0{\cdot}238$ ohm, |
| 1 1/2 « « | $E=1{\cdot}928$ v. | $i=3{\cdot}63$ a., | $e=1{\cdot}400$ v. | « $6=0{\cdot}145$ ohm, |
| 2 « « | $E=1{\cdot}922$ v. | $i=3{\cdot}73$ a., | $e=1{\cdot}438$ v. | « $6=0{\cdot}129$ ohm, |

2 óra lefolyása alatt tehát — a mely idő alatt az elem állandóan bemártva, de árama csak 4-szer és pedig csak addig (15—20 mp.) volt zárva, míg a lemérés történt — a belső ellenállás csökkent s az elektromotoros erő s vele az intenzitás és a sarkfeszültség is emelkedett. A folyadékok színe nyilván mutatta, hogy ezen idő alatt chrómtimsó oldódott fel.

*Észlelés, berendezés, műszerek.* Mint már említve volt, a kisérletek és kisütések tisztán gyakorlati czélból történtek, hogy t. i. kitudódjék a zárlatban hasznosítható elektromos energia mennyisége, s hogy 10 *HW* elektromos energia mennyibe kerül?

Ha valamely vezeték két pontján a potentiálkülönbség $e=v_1-v_2$, s ha e két pont között a vezető ellenállása $R$, az áram intenzitása pedig $i$, akkor az árammunka (másodperczenkint):

$$P=i\,.\,e=i^2.\,R.$$

Ha az első képletben az intenzitást ampère-rel, a potentiál-különbséget volt-tal fejezzük ki, akkor a munkát voltamperekben (watt secund) nyerjük.

$$1\,W\text{sec.}=1\,VA\text{ sec.}=10^7\text{ erg sec.}=\frac{1}{9{\cdot}81}\,MK\text{sec.}=0{\cdot}1019\,MK\text{ sec.}$$

melynek hőegyenértéke 0·24 gr. caloria.

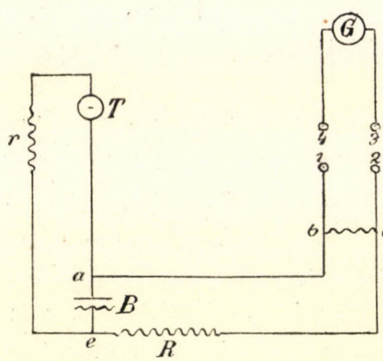
Ha $i$ az áram intenzitása és $e$ az elem sarkfeszültsége, akkor $i\,.\,e$ a vezetékben hasznosítható elektr. energia.

Az $e$ és $i$ értékek óráról-órára észleltettek és a kisütési táblák megfelelő rovataiban láthatók. Az $i$ középértéke adja az óraampereket ($HA$) és a közép $i$ és közép $e$ szorozmánya óráról-órára az órawattokat ($HW$). $HW=3600\,W$sec. lévén, hőegyenértéke

0·24 . 3600=864 gr. cal. Ha tehát $y$ gr. czink fogyasztásával $x$ $HW$ elektromos energiát nyerünk, akkor

$$\frac{864 \,.\, x}{1571 \,.\, 5y} \,.\, 100 = \text{hatásfok } {}^0\!/_0\text{-ban.}$$

A sarkfeszültség $e$ és az intenzitás $i$ egyidejű mérésére a berendezést az 1. ábra mutatja. $B$ a mérés alatt levő elem, melynek árama $R$ ellenálláson át süttetik ki. Az $abcdRe$ vezeték az összes kisütések alatt nem változott. $T$ egy SIEMENS-féle torziós galvanometer, $G$ pedig tükrös galvanometer.




A sarkfeszültség lemérésére szolgáló torziós galvanometer köre 180 fokra (kettős fok) van beosztva s a hozzáadott ellenállás megválasztásával úgy szabályozható, hogy 1 volt=1°, vagy 10°, vagy 100°. A jelen esetben egy olyan $r$ ellenállással ($r$=19 ohm) láttam el, hogy 1 volt=50° legyen, így ½°=0·01 volt.

Az intenzitás lemérésére szolgáló tükrös galvanometer skála és távcső leolvasásra volt berendezve és $bc$ között mellékzárlatba* bekapcsolva.

A távcső és fokosztály a galvanometer tükrétől 278 cm. távolságban volt elhelyezve s a leolvasás mindig fordított (1342) áram-

* KITTLER «Handbuch d. Elektrotechnik» 243. lap.

mal is történt. A kiütés egyik irányban sem volt soha nagyobb 5°-nál.

Az *abcdRe* áramkör ellenállása több ízben egy SIEMENS-féle universal galvanometerrel meghatároztatván, 0·38—0·39 ohm-nak találtatott. 3—4 *A* intenzitású áramnál az *R* ellenállás (3 mm. vastag újezüst sodrony) egy kissé fölmelegedett s ez okozta az ellenállás ingadozását. Az elem belső ellenállását $\frac{E-e}{i}$ képletből számítottam ki.

A czink súlya kisütés előtt és után egy NEMETZ-féle mérlegen határoztatott meg, a mely mérleg érzékenysége 5 kiló megterhelésnél 5 mgr.

Az észlelés óráról-órára történt reggeli 8-tól esti 8 óráig, illetve 10-ig. Az I. és VIII. kisütésnél az elem az esti 10 órai észlelés után zárva maradt s másnap reggel méretett le.

A kisütés megszakítás nelkül 5 esetben 12 óráig tartott; az I kisütésben $22^h$ $35^p$-ig; a II-ban $14^h$-ig; az V-ben $11^h$ $40^p$-ig; a VIII-ban — néhány percznyi megszakítással $24^h$-ig.

*Eredmények.* A *kisütési táblák* a sarkfeszültség és intenzitás esését mutatják óráról-órára, úgy a mint észleltetett. A 3-ik oszlop óráról-órára mutatja a sarkfeszültség középértékét; az 5-ik, két egymásra következő észlelés között produkált óraamperek s a 6-ik az órawattok összegét. A potentiál és intenzitás esése meglehetősen egyenletes s ha 12 órai kisütést veszünk s nem tekintjük a IX. kisütést, akkor legkedvezőtlenebb az eredmény az V esetben és legkedvezőbb a IV-ben. Az elsőben a potentiál esése 33·8%, az intenzitásé 40%; az utóbbiban a potentiál 22·9%-kal, az intenzitás pedig 21·5%-kal esett.

A IX-ik kisütésben 9 óra lefolyása alatt a potentiál már 1 volt alá sülyedt és esése 37·5%, az intenzitásé ugyanezen idő alatt 35·6%.

Az észlelés eredménye összegezve látható az *összegező táblán.* Ebből látható, hogy az elektromindító erő és vele együtt a kisütési áram átlagos intenzitása és az áram effektusa emelkedik a chrómsó-oldat töménységével s e tekintetben a legjobb eredményt a VIII. kisütési eset mutatja fel. A belső ellenállás legnagyobb a III. és IV. esetben, a melyekben a szénlemezek felületei kisebbek voltak. A 10 *HW* elektr. munka árának megállapításánál 1 kiló kalibichromat 70 krba, 1 kiló kénsav 20 krba, 1 kiló amalgamsó 3 frt 60 krba, 1 kiló czink 50 krba és egy kiló chrómsavsó (IX. és X.) 65 krba számittatott.

Két dologra akarunk különösen kiterjeszkedni: 1) 1 gr. fogyasztott czinkre mennyi *HW*-ot kaptunk és 2) 10 *HW* mennyibe került? A megfelelő rovatokban megtaláljuk a választ, de felvilágositásul szükségesnek tartunk egyet-mást megemliteni.

Az I., IX. és X. eseteket egyelőre nem tekintjük; akkor az II.—VI. esetekben 1 gr. czinkre középérték szerint 1·037 *HW* esik s a legnagyobb különbség 79 mgr. E különbség okát a czink tisztátalanságában kell keresnünk. Feltünő különbséget látunk a VII. és VIII. esetben. Az előbbi esetben használt czink felületén a kisütés után mély barázdák és nagy egyenetlenségek (4—8 cm.$^2$ felületű 1—1·5 m. mélységűek) voltak észlelhetők; az utóbbiban a felület a kisütés után is egyenletes maradt.

Huzamosabb működésben a folyadék depolározó képessége csökken, az elem ellenállása növekszik, a czink kevésbbé érvényesül és így a hatásfok csökken, az elem pedig érezhető módon felmelegszik. E körülményeknek tudható be, hogy a I. esetben a hatásfok csak 52·3% s így 1 gr. czinkre 0·951 *HW* esik. Hogy ez így van, kitünik a következőből: a VIII. kisütésnél 12 óra lefolyása után az áramot néhány perczre megszakitottam, hogy a czink súlyát meghatározzam s azután a kisütést folytattam újra 12 óráig. Az összegező táblán az első 12 órai kisütés eredményei vannak feljegyezve; miután az elem még 12 óráig működött, a hatásfok 65·9%-ról 46·7%-ra csökkent s a 24 órai működés eredményében 1 gr. czinkre 0·986 *HW*-ot adott.

A 10 *HW* elektr. munka árát illetőleg a következő megjegyzéseink vannak: a II., VI. és VIII. esetből látható, hogy ez emelkedést nem a czink fogyasztás okozza, hanem a folyadékok ára. Az elem összeállításához szükséges folyadékok és amalgamsó ára az

I—IV. esetben 20 kr.; az V—VI.-ban 22·3 kr.; a VII—VIII.-ban 26·3 kr.; azaz 13%—18·5%-kal több; e mellett a fogyasztott czink ára II-ban 2·5 kr.; VI.-ban 2·45 kr.; VIII.-ban 2·33 kr.

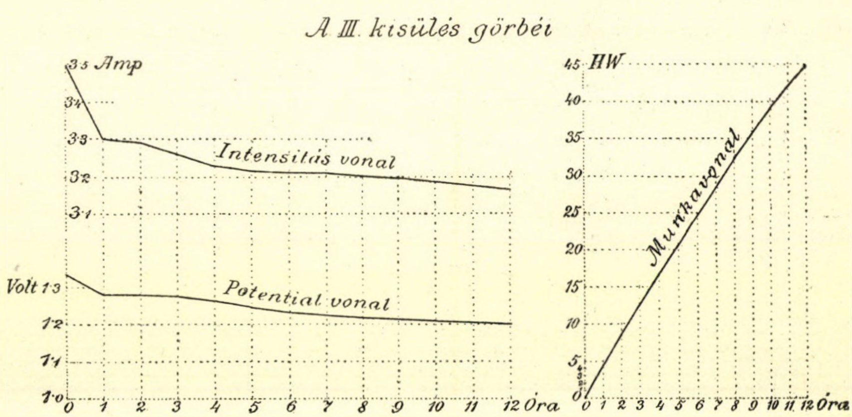
Hogy a III. és IV. eltér a II.-tól és V. a VI.-tól, ennek oka az elem nagyobb belső ellenállásában kereshető; hogy a VII. eltér a VIII.-tól, oka a czink tisztátalansága.

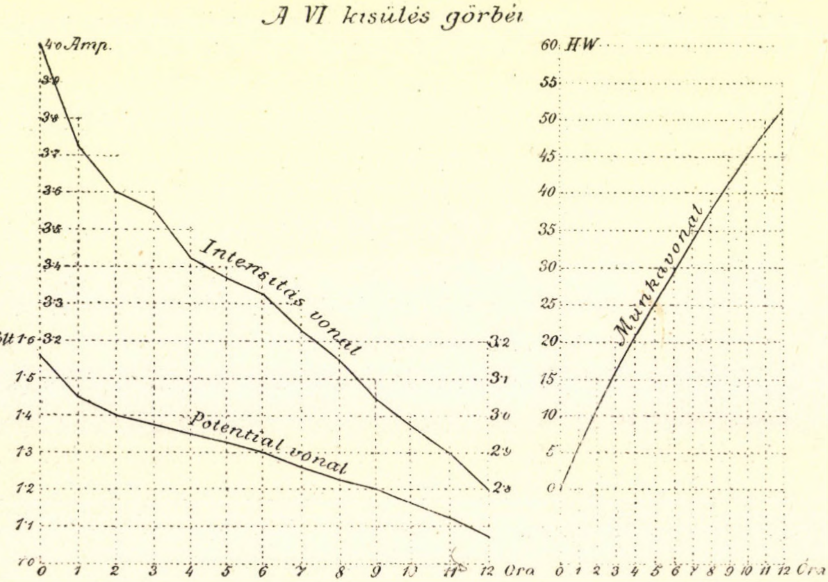
Az I. eset mutatja (10 *HW* ára 3·12 kr.), hogy a chrómsavas elemeknél annál olcsóbb az elektr. energia, minél tovább működtetjük az elemet s így minél jobban használjuk ki a folyadékokat. Igazolja ezt a VIII. eset is, melyben 12 órai kisütés után 10*HW* ára 5·02 kr., míg 24 órai kisütés után 3·64 kr.

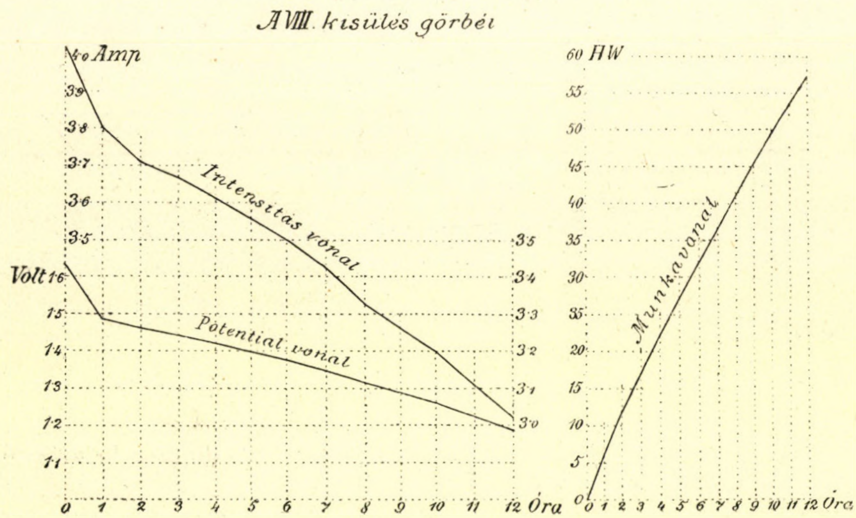
A IX. és X. esetben nem kalibichromat, hanem chrómsavsó alkalmaztatott.

A III., VI. és VIII. kisütés észleléseiből szerkesztett görbék az intenzitás és potential változását, az elektromos munka összegét grafikailag tüntetik fel.

**Kisütési görbék.**




A VI kisülés görbéi
4·0 Amp.
Volt 1·6
Intensitás vonal
Potential vonal
Óra
60 HW
Munkavonal


A VIII. kisülés görbéi
4·0 Amp
Volt 1·6
Intensitás vonal
Potential vonal
Óra
60 HW
Munkavonal

## Kisütési táblák.

### I.

| Észlelési idő ó (óra) p (percz) | Sarkfeszültség Volt észlelt | Sarkfeszültség Volt közép | Intenzitás Amper | Óraamper HA | Órawatt HW | Chrómsó-oldat |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0ó 35p | 1·504 | | 3·92 | | | 1000 gr. víz, 125 gr. chrómsó, 250 gr. kénsav |
| 1 — | 1·434 | 1·469 | 3·73 | 1·59 | 2·34 | |
| 2 — | 1·393 | 1·413 | 3·67 | 3·70 | 5·23 | |
| 3 — | 1·388 | 1·390 | 3·61 | 3·64 | 5·05 | |
| 4 — | 1·371 | 1·379 | 3·56 | 3·58 | 4·93 | |
| 5 — | 1·354 | 1·362 | 3·52 | 3·54 | 4·81 | |
| 6 — | 1·334 | 1·344 | 3·48 | 3·50 | 4·70 | |
| 7 — | 1·300 | 1·317 | 3·42 | 3·45 | 4·54 | |
| 8 — | 1·276 | 1·288 | 3·36 | 3·39 | 4·35 | |
| 9 — | 1·252 | 1·264 | 3·29 | 3·32 | 4·19 | |
| 10 — | 1·228 | 1·240 | 3·22 | 3·25 | 4·03 | |
| 11 — | 1·200 | 1·214 | 3·13 | 3·17 | 3·84 | |
| 12 — | 1·161 | 1·180 | 3·04 | 3·09 | 3·64 | |
| 13 — | 1·122 | 1·141 | 2·94 | 2·99 | 3·40 | |
| 23ó 10p | 0·680 | 0·901 | 1·79 | 24·07 | 21·87 | |
| | | | | 66·28 | 76·92 | |

### II.

| Észlelési idő ó (óra) p (percz) | Sarkfeszültség Volt észlelt | Sarkfeszültség Volt közép | Intenzitás Amper | Óraamper HA | Órawatt HW | Chrómsó-oldat |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0ó 0p | 1·430 | | 3·74 | | | Mint I-ben |
| 1 — | 1·362 | 1·396 | 3·54 | 3·64 | 5·08 | |
| 2 — | 1·340 | 1·351 | 3·50 | 3·52 | 4·76 | |
| 3 — | 1·320 | 1·330 | 3 45 | 3 47 | 4·61 | |
| 4 — | 1·300 | 1·310 | 3·40 | 3·42 | 4·48 | |
| 5 — | 1·275 | 1·287 | 3·33 | 3·36 | 4·31 | |
| 6 — | 1·250 | 1·262 | 3·27 | 3·30 | 4 16 | |
| 7 — | 1·214 | 1·232 | 3·17 | 3·22 | 3·97 | |
| 8 — | 1·178 | 1·196 | 3·08 | 3·12 | 3·73 | |
| 9 — | 1·142 | 1·160 | 2·99 | 3·03 | 3·52 | |
| 10 — | 1·106 | 1·124 | 2·90 | 2·94 | 3·30 | |
| 11 — | 1·066 | 1·086 | 2·80 | 2·85 | 3·08 | |
| 12 — | 1·026 | 1·046 | 2 68 | 2·74 | 2·86 | |
| 13 — | 0·081 | 1·003 | 2·57 | 2·62 | 2 63 | |
| 14 — | 0·937 | 0·959 | 2·45 | 2·51 | 2·41 | |
| | | | | 43·74 | 52·91 | |

### III.

| Észlelési idő ó (óra) p (percz) | Sarkfeszültség Volt észlelt | Sarkfeszültség Volt közép | Intenzitás Amper | Óraamper HA | Órawatt HW | Chrómsó-oldat |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0ó 35p | 1·346 | | 3·50 | | | Mint I-ben |
| 1 — | 1·284 | 1·315 | 3·30 | 3·40 | 4·47 | |
| 2 — | 1·280 | 1·282 | 3·29 | 3·29 | 4·22 | |
| 3 — | 1·274 | 1·277 | 3·26 | 3·27 | 4·16 | |
| 4 — | 1·260 | 1·267 | 3·23 | 3·24 | 4·10 | |
| 5 — | 1·244 | 1·252 | 3·19 | 3·21 | 4·02 | |
| 6 — | 1·228 | 1·236 | 3·14 | 3·16 | 3·90 | |
| 7 — | 1·200 | 1·214 | 3·08 | 3·11 | 3·77 | |
| 8 — | 1·170 | 1·185 | 3·02 | 3·05 | 3·62 | |
| 9 — | 1·160 | 1·165 | 2·98 | 3·00 | 3·50 | |
| 10 — | 1·102 | 1·131 | 2·84 | 2·91 | 3·29 | |
| 11 — | 1·063 | 1·082 | 2·75 | 2·80 | 3·02 | |
| 12 — | 1·024 | 1·043 | 2·66 | 2·70 | 2·82 | |
| | | | | 37·14 | 44·89 | |

### IV.

| Észlelési idő ó (óra) p (percz) | Sarkfeszültség Volt észlelt | Sarkfeszültség Volt közép | Intenzitás Amper | Óraamper HA | Órawatt HW | Chrómsó-oldat |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0ó 0p | 1·340 | | 3·40 | | | Mint I-ben |
| 1 — | 1·298 | 1·319 | 3·30 | 3·35 | 4·42 | |
| 2 — | 1·272 | 1·285 | 3·23 | 3·26 | 4·19 | |
| 3 — | 1·260 | 1·266 | 3·21 | 3·22 | 4·07 | |
| 4 — | 1·245 | 1·252 | 3·19 | 3·20 | 4·01 | |
| 5 — | 1·227 | 1·236 | 3·14 | 3·16 | 3·90 | |
| 6 — | 1·210 | 1·218 | 3·09 | 3·11 | 3·78 | |
| 7 — | 1·187 | 1·198 | 3·02 | 3·05 | 3·65 | |
| 8 — | 1·164 | 1·175 | 2·96 | 2·99 | 3·50 | |
| 9 — | 1·138 | 1·151 | 2·89 | 2·92 | 3·35 | |
| 10 — | 1·100 | 1·119 | 2·81 | 2·85 | 3·19 | |
| 11 — | 1·066 | 1·083 | 2·74 | 2·77 | 3·00 | |
| 12 — | 1·032 | 1·049 | 2·67 | 2·70 | 2·80 | |
| | | | | 36·58 | 43·86 | |

## V.

| Észlelési idő ó (óra) p (percz) | Sarkfeszültség Volt észlelt | Sarkfeszültség Volt közép | Intenzitás Amper | Óraamper HA | Órawatt HW | Chrómsó-oldat |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0ó 20p | 1·472 | | 3·82 | | | 1000 gr. viz, 150 gr. chrómsó, 250 gr. kénsav |
| 1 — | 1·356 | 1·414 | 3·53 | 2·45 | 3·46 | |
| 2 — | 1·322 | 1·339 | 3 44 | 3 48 | 4·66 | |
| 3 — | 1·302 | 1·312 | 3·39 | 3·41 | 4·47 | |
| 4 — | 1·278 | 1·290 | 3·33 | 3·36 | 4·33 | |
| 5 — | 1·254 | 1·266 | 3·26 | 3·29 | 4·12 | |
| 6 — | 1·230 | 1·242 | 3·20 | 3·23 | 4·02 | |
| 7 — | 1·200 | 1·215 | 3·11 | 3·15 | 3·73 | |
| 8 — | 1·164 | 1·182 | 3·04 | 3·07 | 3·63 | |
| 9 — | 1·118 | 1·141 | 2·92 | 2·98 | 3·40 | |
| 10 — | 1·076 | 1·097 | 2·82 | 2·87 | 3·13 | |
| 11 — | 1·024 | 1·050 | 2·77 | 2·79 | 2·93 | |
| 12 — | 0·974 | 0·999 | 2·29 | 2·53 | 2·53 | |
| | | | | 36·61 | 44·41 | |

## VI.

| Észlelési idő ó (óra) p (percz) | Sarkfeszültség Volt észlelt | Sarkfeszültség Volt közép | Intenzitás Amper | Óraamper HA | Órawatt HW | Chrómsó-oldat |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0ó 00p | 1·560 | | 4·00 | | | 1000 gr. viz, 150 gr. chrómsó, 250 gr. kénsav |
| 1 — | 1·448 | 1·504 | 3·72 | 3·86 | 5·80 | |
| 2 — | 1·400 | 1·424 | 3·60 | 3·66 | 5·20 | |
| 3 — | 1·376 | 1·388 | 3·55 | 3·57 | 4·94 | |
| 4 — | 1·352 | 1·364 | 3·42 | 3·48 | 4·73 | |
| 5 — | 1·326 | 1·339 | 3·37 | 3·39 | 4·54 | |
| 6 — | 1·300 | 1·313 | 3·33 | 3·35 | 4·40 | |
| 7 — | 1·266 | 1·283 | 3·23 | 3·28 | 4·21 | |
| 8 — | 1·230 | 1·248 | 3·15 | 3·19 | 3·97 | |
| 9 — | 1·200 | 1·215 | 3·05 | 3·10 | 3·77 | |
| 10 — | 1·164 | 1·182 | 2·98 | 3·01 | 3·56 | |
| 11 — | 1·126 | 1·145 | 2·90 | 2·94 | 3·36 | |
| 12 — | 1·088 | 1·107 | 2·80 | 2·85 | 3·15 | |
| | | | | 39·68 | 51·63 | |

## VII.

| Észlelési idő ó (óra) p (percz) | Sarkfeszültség Volt észlelt | Sarkfeszültség Volt közép | Intenzitás Amper | Óraamper HA | Órawatt HW | Chrómsó oldat |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0ó 00p | 1·564 | | 4·00 | | | 1000 gr. viz, 150 gr. chrómsó, 250 gr. kénsav |
| 1 — | 1·422 | 1·493 | 3·63 | 3·81 | 5·68 | |
| 2 — | 1·402 | 1·412 | 3·58 | 3·60 | 5·09 | |
| 3 — | 1·386 | 1·394 | 3·55 | 3·56 | 4·96 | |
| 4 — | 1·376 | 1·381 | 3·51 | 3·53 | 4·87 | |
| 5 — | 1·358 | 1·367 | 3·46 | 3·48 | 4·74 | |
| 6 — | 1·340 | 1·349 | 3·42 | 3·44 | 4·65 | |
| 7 — | 1·320 | 1·330 | 3·36 | 3·39 | 4·51 | |
| 8 — | 1 294 | 1·307 | 3·31 | 3·33 | 4·35 | |
| 9 — | 1·272 | 1·283 | 3·25 | 3·28 | 4·21 | |
| 10 — | 1·240 | 1·256 | 3·16 | 3·20 | 4·02 | |
| 11 — | 1·190 | 1·215 | 3·06 | 3·11 | 3·78 | |
| 12 — | 1·140 | 1·165 | 2·97 | 3·01 | 3·51 | |
| | | | | 40·74 | 54·37 | |

## VIII.

| Észlelési idő ó (óra) p (percz) | Sarkfeszültség Volt észlelt | Sarkfeszültség Volt közép | Intenzitás Amper | Óraamper HA | Órawatt HW | Chrómsó-oldat |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0ó 00p | 1·630 | | 4·20 | | | 1000 gr. viz, 150 gr. chrómsó, 250 gr. kénsav |
| 1 — | 1·484 | 1·557 | 3·80 | 4·00 | 6·23 | |
| 2 — | 1·458 | 1·471 | 3·71 | 3·75 | 5·51 | |
| 3 — | 1·440 | 1·449 | 3·67 | 3·69 | 5·34 | |
| 4 — | 1·420 | 1·430 | 3·61 | 3·64 | 5·21 | |
| 5 — | 1·398 | 1·409 | 3·56 | 3·58 | 5·04 | |
| 6 — | 1·376 | 1.387 | 3·50 | 3·53 | 4·79 | |
| 7 — | 1·348 | 1·362 | 3·43 | 3·46 | 4·71 | |
| 8 — | 1·318 | 1·332 | 3·33 | 3·38 | 4·50 | |
| 9 — | 1·239 | 1·278 | 3·26 | 3·29 | 4·19 | |
| 10 — | 1·260 | 1·249 | 3·20 | 3·23 | 4·04 | |
| 11 — | 1·222 | 1·241 | 3·11 | 3·15 | 3·80 | |
| 12 — | 1·184 | 1·203 | 3·02 | 3·06 | 3·68 | |
| | | | | 41·76 | 57·04 | |

| IX. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Észlelési idő ó (óra) p (percz) | Sarkfeszültség Volt észlelt | Sarkfeszültség Volt közép | Intenzitás Amper | Óraamper HA | Órawatt HW | Chrómsav |
| 0ó 0p | 1·512 | 1·441 | 3·82 | | | 1000 gr. viz 100 gr. chrómsav 50 gr. kénsav |
| 1 — | 1·371 | 1·325 | 3·49 | 3·65 | 5·25 | |
| 2 — | 1·280 | 1·264 | 3·27 | 3·38 | 4·48 | |
| 3 — | 1·248 | 1·228 | 3·18 | 3·22 | 4·06 | |
| 4 — | 1·208 | 1·187 | 3·10 | 3·14 | 3·85 | |
| 5 — | 1·167 | 1·146 | 3·00 | 3·05 | 3 62 | |
| 6 — | 1·126 | 1·087 | 2·90 | 2·95 | 3·38 | |
| 7 — | 1·068 | 1·034 | 2·73 | 2·81 | 3·04 | |
| 8 — | 1·000 | 0·972 | 2·58 | 2·65 | 2 74 | |
| 9 — | 0·944 | | 2·46 | 2·52 | 2·45 | |
| | | | | 27·37 | 32·87 | |

| X. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Észlelési idő h (óra) p (percz) | Sarkfeszültség Volt észlelt | Sarkfeszültség Volt közép | Intenzitás Amper | Óraamper HA | Órawatt HW | Chrómsav |
| 0ó 0p | 1·544 | 1·473 | 3·99 | | | 1000 gr. viz 200 gr. chrómsav 250 gr. kénsav |
| 1 — | 1·402 | 1·394 | 3·58 | 3·78 | 5·76 | |
| 2 — | 1·386 | 1·377 | 3·52 | 3·55 | 4·95 | |
| 3 — | 1·368 | 1·357 | 3·48 | 3·50 | 4·82 | |
| 4 — | 1·346 | 1·332 | 3·42 | 3·45 | 4·68 | |
| 5 — | 1·318 | 1·304 | 3·40 | 3·41 | 4·54 | |
| 6 — | 1·290 | 1·274 | 3·38 | 3·39 | 4·42 | |
| 7 — | 1·258 | 1·235 | 3·20 | 3·29 | 4·18 | |
| 8 — | 1·212 | 1·186 | 3·09 | 3·14 | 3·88 | |
| 9 — | 1·160 | 1·123 | 2·96 | 3·02 | 3·66 | |
| 10 — | 1·086 | 1·053 | 2·79 | 2·87 | 3·23 | |
| 11 — | 1·022 | 0·983 | 2·61 | 2·70 | 2·85 | |
| 12 — | 0·944 | | 2·43 | 2·52 | 2·48 | |
| | | | | 38·61 | 49·45 | |

## Összegező tábla.

| A kisütés száma | Elektromindító erő E.(Volt) | Az elem ellenállása Ohm | Az intenzitás középértéke Amper | Sarkfeszültség középértéke Volt | Az áram munka középértéke Watt sec. | Az áram munka középértéke M. K. sec. | 1 gr. fogyasztott czinkre esik HA | 1 gr. fogyasztott czinkre esik HW | 10 HW elektr. munka kerül: kr. | Az elem hatásfoka % | A fogyasztott czink összes súlya gr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 1·97 | 0·118 | 2·81 | 1·16 | 3·26 | 0·332 | 0·819 | 0·951 | 3·12 | 52·3 | 80·85 |
| II. | 1·92 | 0·131 | 3·12 | 1·21 | 3 77 | 0·384 | 0·875 | 1·059 | 4·25 | 58·2 | 49·45 |
| III. | 1·92 | 0·164 | 3·10 | 1·21 | 3·74 | 0·381 | 0·886 | 1·071 | 4·92 | 58·8 | 41·90 |
| IV. | 1·90 | 0·164 | 3·06 | 1·19 | 3·64 | 0·371 | 0·844 | 1·013 | 5·06 | 55·7 | 43·03 |
| V. | 1·98 | 0·133 | 3·05 | 1·21 | 3·70 | 0·377 | 0·818 | 0·992 | 5·59 | 54·5 | 44·75 |
| VI. | 2·00 | 0·110 | 3·30 | 1·30 | 4·29 | 0·437 | 0·809 | 1·053 | 4·84 | 57·8 | 49·03 |
| VII. | 1·97 | 0·101 | 3·39 | 1·33 | 4·52 | 0·461 | 0·422 | 0·562 | 5·72 | 30·9 | 96·57 |
| VIII. | 2·02 | 0·093 | 3·48 | 1·36 | 4·74 | 0·483 | 0·895 | 1·222 | 5·02 | 65·9 | 46·64 |
| IX. | 1·99 | 0·125 | 3·04 | 1·20 | 3·65 | 0·372 | 0·952 | 1·143 | 4·42 | 62·8 | 28·74 |
| X. | 1·95 | 0·101 | 3·21 | 1·28 | 4·11 | 0·419 | 0·895 | 1·147 | 5·51 | 63·09 | 43·09 |

*Edelmann Sebő.*

# A FERDÉN SZIMMETRIKUS HELYETTESITÉSEK ELMÉLETÉHEZ.

A Math. és Phys. Lapok hatodik füzetének 356. lapján BAUER MIHÁLY úr foglalkozik e helyettesitésekkel és bebizonyitja azt a tételt, hogy *a ferdén szimmetrikus helyettesítések karakterisztikus egyenletének gyökei — a mennyiben zérustól különböző értékkel birnak, — tiszta képzetes számok.*

Ez a tétel közvetlenül kiadódik RADOS úrnak a «LAPLACE egyenet gyökeiről» szóló czikkének végén (l. ugyancsak az id. folyóirat 354. lapját) tett megjegyzéséből, mely így hangzik: «*Még megjegyzem, hogy szóról szóra ugyanígy bizonyítható be a fentebbi tétel, ha $a_{\alpha\beta}$ complex értékű és nem egyenlő $a_{\beta\alpha}$-val, hanem ennek konjugált értéke.*»

Ha ugyanis a ferdén szimmetrikus helyettesités karakterisztikus egyenlete:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & -\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a_{ik} = -a_{ki};\ a_{ii} = 0)$$

akkor, ha megszorozzuk e determináns minden sorát $i$-vel, és $-i\lambda = -\mu$ tesszük, oly determinánsunk lesz, mely az idézett megjegyzés feltételeinek megfelel, a mennyiben az $i$-dik sor $k$-dik eleme $a_{ik}.i$ és a $k$-dik sor $i$-dik eleme $a_{ki}.i = -a_{ik}i$, vagyis e két elem egymásnak konjugált értéke; tehát ez egyenlet minden gyöke valós és ennek következtében az eredeti egyenlet minden gyöke tiszta képzetes szám.

*Beke Manó.*

## PHYSIKAI SZEMLE.

**A magnézium mint fényforrás.** F. J. ROGERS: Magnesium as a Source of Light. *Amer. Journ. of Science. Vol.* XLIII. 301—314. l.

A gondos kisérleti sorozaton alapuló tanulmány fontosabb eredményei a következőkben foglalhatók össze.

1. *A Mg-fény összetétele.* A fényforrásul használt 2,5 mm. széles Mg-szalag fénye az ARGAND-féle gázlángzó fényével egybehasonlíttatván, a különböző színek fényintenzitását a D-vonal intenzitásához mint egységhez viszonyítva a különböző hullámhosszakra ($\lambda$) a következő számadatokat adta:

| $\lambda$ | $\frac{\text{Mg-fény}}{\text{Gázláng}}$ | $\lambda$ | $\frac{\text{Mg fény}}{\text{Gázláng}}$ |
|---|---|---|---|
| 0,000450 mm. | 8,77 | 0,000574 | 1,21 |
| 479 | 5,33 | 606 | 0,83 |
| 506 | 3,43 | 635 | 0,66 |
| 536 | 2,07 | 670 | 0,53 |

A nappali fényre vonatkozólag tett hasonló mérésekből nyert viszonyszámok az itt közlöttekkel igen közel megegyezők voltak, a miből következik, hogy a *Mg-fény a napfény összetételét jobban megközelíti, mint bármely más mesterséges fényforrás.*

2. *A Mg-láng hőmérséklete.* A különböző fényforrások lángjának hőmérsékletét ezüst, arany és réz olvadási pontjaira calibrált platiniridium-platina thermo-elemmel mérvén, ezeket az eredményeket kapta:

| Gyertya-láng | Világító gázláng | Bunsen-láng | Forrasztó láng | Magnézium láng |
|---|---|---|---|---|
| 827° | — | 1227° | 1398° | 1333° |
| 765 | 992° | 1233 | 1382 | 1342 |
| 792 | 1018 | 1222 | 1404 | 1332 |

3. *A világító energia* arányát az összes sugárzó energiához azaz: a *magnéziumfény sugarainak hathatósságát* (radiant efficiency) úgy határozta meg, hogy előbb az összes sugarakat, azután a 72 mm. vastag timsó-

oldatrétegen átmenő sugarakat bocsátotta a thermomultiplicatorra; adatai ezek:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gyertyafény | 0,0153 | Argand-láng | 0,0161 |
| Pillangó gázláng | 0,0128 | Magnéziumláng | 0,137 |

Marks az elektr. ivfényre 0,08—0,127, Nakano 0,25″ átméretű széncsúcsokra és 38 voltnyi potentialkülönbségre 0,166, Merritt az izzólámpákra a legkedvezőbb viszonyok közt 0,06, Geissler csövekre a legjobb körülmények között 0,34-et kapott; *a magnéziumfény haszonmunkája tehát* (a Geissler-csövet kivéve) a *legnagyobb.*

4. *A magnézium égési melege* grammonkint 6010 gramm-caloria, a mit úgy talált Rogers, hogy a magnéziumdrótot v. szalagot oxygénnel telt edénybe tette s a rajta átvezetett galván árammal a meggyúlás hőmérsékére hevítette.

5. *Az égő magnéziumból kisugárzó energia* 4630 caloria grammonkint vagy az összes égési melegnek 75%-a, míg ugyanaz a mennyiség a légszesznél 15—20%.

6. *A magnéziumfény chémiai æquivalense* gyertyára és perczre vonatkoztatva 2,4 caloria, míg más világító anyagokra nézve u. m. légszesz vagy stearinre nézve ez az æquivalens 3,7—4,4 caloriára növekedik.

Rogers kisérleti adatai szerint a magnézium *teljes fényhatása* (total efficiency) körülbelül 10%, míg a világító gázé 0,25%, tehát a magnézium fény energiája 40-szer akkora, mint a világító gázé.

Tekintve a magnézium-spektrum látható részének nagyobb fényerőátlagát, biztosra vehetjük, hogy *az égő magnézium fényereje, energiaegységenkint, 50—60-szor akkora, mint a világító gáz fényereje, szintén energia-egységenkint számítva.* *Schmidt Á.*

*

**A vízesések elektromosságáról.** Ph. Lénárd: Über die Elektricität der Wasserfälle. *Ann. d. Ph.* XLVI. 584—636. l.

Rég ismeretes, hogy a vízesések környezetük levegőjét negativ elektromossággal töltik meg. Ezen jelenség feltünő hasonlatossága a légköri csapadékokat kisérő elektromos jelenségekkel a szerzőt a kérdés behatóbb tanulmányozására indították.

A légkör elektromos állapotának megvizsgálására az Exner-féle elektroskópot* használta; a légköri elektromosságot pedig egy kis, fémből készült

* Közönséges arany- v. aluminium-lemezes elektroskóptól csak annyiban különbözik, hogy a kiütés mérésére be van osztva s lemezkéi két védő pálcza közé foghatók, hogy utazásközben meg ne sérüljenek. (Leirását l. Müller: Physik. IX. kiad. III. köt. 305. l.)

petroleumlámpával gyűjtötte, melynek üveghengerét rövidke pléhhenger helyettesítette. Ez a *collector* 40 cm. hosszaságú ebonit rúdra volt tolható. — A gyűjtő lángocskát derült időben feltartván, az elektroskóp positiv elektromosságot árul el; vízesés közelében azonban a töltés negativ és jóval erősebb. Nagyon bővizű, zuhanó vízesés mellett, ha az esés csak néhány méternyi is, a gyűjtő lángocskát el kellett hagyni: az elektroskóp golyójához erősített 10—30 cm. hosszaságú fémdrót annyi elektromosságot szedett fel, hogy a lemezkék minduntalan a falakhoz ütődtek. Zuhogó patakok, sőt még a gyenge lejtésű, de nyugtalan folyású vizfelületek is, ha csak a gyűjtő lángocska a víz felszinéhez közel állott, mindig negativ elektromossággal töltötték az elektroskópot. Az egészen síma folyású áramok ilyenforma hatást nem mutattak.

Általában a hatás annál nagyobb, mennél hevesebb a víz esése s e tekintetben még a hegyszakadékokban levő, a földpotential hatása ellenében védett vízesések sem tettek kivételt. Minthogy 7 méter mélységű hegyhasadékban a földpotentiál esése már nem volt észrevehető s a vízesés hatása ugyanolyan volt, mint az egész szabadon, lapos hegyoldalakon leomló vízeséseké, arra kell következtetni, hogy a jelenség a földpotentiál hatásától független.

Lénárd az alpesi vízesések egész sorában tett kísérleteket s tapasztalata mindenütt ugyanaz volt; az t. i., hogy a levegőnek negativ potentiálja annál nagyobb, mennél hevesebb a víz lezuhanása. — Esős időben, a midőn nyilt völgyekben a kinyújtott karban tartott elektoskóp majd positiv, majd negativ elektromosságot árult el, a vízesés közelében a levegő állandóan negativ elektromossággal volt telve, jeléül annak, hogy az elektromosság forrása nem a légkörben, hanem a víz esésében keresendő.

A jelenség okainak és körülményeinek felderítése végett tett kísérletekből bebizonyult, hogy az *akadályokba ütköző vízsugár a levegőben negativ elektromosságot terjeszt.* — Kis zárt helyiségben, nagy nyomással mintegy 2 m. hosszaságú vízsugarat bocsátott czinkpléhből készült fürdőkádba. A gyűjtő lángocskával közlekedő elektroskóp azt mutatta, hogy a helyiség levegője mind erősebben negativ elektromossággal telik meg; a vizet 4 perczig folyatván, az elektroskóp lemezkéi a falhoz ütődtek s az elektroskóp kisült, a mi körülbelül négy másodperczenkint ismétlődött. Szellőztetés után a levegő az elektromosságnak nyomát sem mutatta, de a mint a sugár megeredt, az előbbi jelenség változatlanul ismétlődött. — Lényeges kellék, hogy a víz valami szilárd akadályba (s nem csupán vízfelületbe) ütközzön és bebizonyult, hogy az ütközés helyéről eláramló levegő negativ, maga a víz pedig positiv töltésű. — Szennyes, sótartalmú víz a kísérletre nem alkalmas. (L. a bonni vízvezeték tisztátalan vizével a jelenséget alig birta előidézni.) Míg a desztillált víz —140 voltnyi töltést ad, szennyes vízvezetéki víz csak —3·4, telített konyhasóoldat pedig +1·3 voltnyi töltést közölt az elektrometerrel.

A jelenséget a következő kisérlet igen tisztán mutatja: Vékony kifolyató csővel felszerelt fém-reservoir szigetelőn van felállítva vagy felfüggesztve; alatta (kb. 1 m.-nyire) nagyobb fajta bádogedény áll, szintén elszigetelten s mintegy 10 cmnyire felső szélétől egy czinklemez van benne elhelyezve: a vízsugár ebbe ütközik s a víz cseppekben hullhat le róla az edény fenekére. Az edény nyilása közepén kivágott dróthálóval van leborítva: ennek feladata a víz szétfrecscsenését megakadályozni. A bádogedény s a reservoir vezetőleg közlekednek. A reservoirt komprimált levegővel s vízzel megtöltvén (L. kísérletében a reservoir levegőjének feszítő ereje 3 atm. volt) s a csapot megnyitván, a kitörö vízsugár a reservoir s a felfogó edény positiv elektromosakká lesznek, a helyiség levegője pedig negativ töltést kezd felvenni, mely folyton fokozódik. LÉNÁRD kísérleteiben kis szikrákat csalt ki a reservoirból.

Ez a kísérlet a Heron labdájával egészen jól ismételhető, csak az edény fenekéig érő csövet kell eltávolítani s a kifolyó csövet kb. 1 mm. nyilású üvegcsővel helyettesíteni. A készülék nyílásával lefelé, szigetelőn állítandó fel.

A kísérletben arról kell gondoskodni, hogy a levegő a felfogó edényből könnyen eltávozhasson; gyenge fujtatással az elektromos töltés fokozható. A kifolyató nyilást szükítvén, ugyanazon vízmennyiség árán több elektromosság fejlődik.

A kísérletek tanulságait a vízesésekre alkalmazván légkörük negativ elektromosságának forrását a víznek a nedves kőzetekhez való *ütődésében* keresi; a negativ elektromosságot a levegő viszi át a környezetbe, a positiv elektromosság pedig a földbe áramlik.

A víznek a levegőn keresztül való áramlása s a levegőn való elporladása hatástalan; a közethez való *surlódása*, valamint a földfelület elektromos potentiáljának esése jelentéktelen hatásúak. — A földpotentiálnak esőtől okozott csökkenése és ellenkező irányba való átcsapása hasonló magyarázatra utalnak.

A terjedelmes értekezés sok érdekes részletben bővelkedik. *B. G.*

*

**A Leidenfrost-féle tünemény történetéhez.** G. BERTHOLD «Zur Geschichte des Leidenfrost'schen Phänomens» czimen egy kis irodalomtörténeti jegyzetet közöl az *Ann. d. Ph.* XLVII. köt. 350. lapján.

Tudvalevő dolog, hogy LEIDENFROST e tüneménynyel tüzetesen 1756-ban foglalkozik. ELLER 1746-ban tárgyalja, míg BOERHAAVE H. 1732-ben megjelent «Elementa chemiæ» (Lugd. Bat. 1732) czímű munkájában I. p. 2.

exp. XIX. p. 258 következőképen ír: «Tekintsék csak figyelemmel ezt a csodálatos kísérletet. Itt e kicsi üvegpohárban a legtisztább alkohol van, a melyből nagyon keveset ezen izzó vasra öntök. Várakozásuk szerint mi fog történni ? Meg fog gyulladni az alkohol ? Azt kellene hinnem, hogy ezen senki sem kételkedik. Pedig tévednénk, mert látják, a mint az alkohol az izzó vasra esik, azonnal fénylő golyóvá alakul, hasonlóan a higanyhoz, s mint ez, úgy futkos a vas felületén, a meggyulladás minden jelensége nélkül. Midőn azonban futtában most a vas felületének hidegebb helyére érkezett, azonnal szétszóratik a levegőbe (elpárolog), láng nélkül. Hallgató uraim, miként magyarázandó ez? A kén, lőpor, fa és más anyagok ha e vassal érintkeznek, azonnal meggyulladnak. Az alkohol, mely lassan melegítve majdnem az összes anyagok között a legkönnyebben gyullad, elviseli az izzó vas melegét és nem gyullad meg. Nodus hic vestro dignus acumine!»

Ezekből kétségtelen, hogy a Leidenfrost-féle tünemény első észlelése és leírása Boerhaave-nak tulajdonítandó, míg Eller észlelése, a melyet eddig elsőnek tekintettek, 14 évvel későbbi keletű. *Edelmann S.*

# IRODALOM.

**Paul Bachmann, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen.** B. G. Teubner. 1892. 8°. X+151. l. Ára 4 márka.

Az irraczionális számokra vonatkozó vizsgálódások két igen különböző irányban haladnak. Egyrészt e számok szabatos és ellenmondástól ment értelmezése, valamint a velök való számolásnak tudományos megállapítása oly elméket foglalkoztatott, milyenek Weierstrass, Cantor G., Heine, Dedekind. Másrészt az irráczionális számok sokfélesége arra a kérdésre vezetett: hogyan lehetne őket osztályozni s adott esetben felismerni, hogy egy-egy szóban forgó szám a nyert osztályok melyikébe tartozik. Az első irányban folyt vizsgálatok eredményei a tankönyvekbe is mentek át s magyarul is különösen behatóan vannak feldolgozva társulatunk alelnökének, Kőnig Gyula úrnak, *Analizis*-ében. A második fajta vizsgálatokból is nem egy vált szélesebb körökben ismeretessé, de hiányzott valamennyinek könnyen áttekinthető összefoglalása. Ilyent nyujtott most Bachmann. Új könyvének tíz előadása közül csak az első foglalkozik az irráczionális számok s a rajtuk végzendő műveletek értelmezésével, a többi kizárólagosan a második fajta vizsgálatoknak van szentelve.

Mindjárt a második előadásban megismerkedünk a számok ama megkülönböztetésével, mely szerint valamely szám *algebrai*-nak neveztetik, ha oly algebrai egyenletnek tesz eleget, melynek együtthatói egész számok, míg ellenkező esetben *transzczendens*-nek mondjuk. Ugyanott be vannak bizonyítva az algebrai számokra vonatkozó alaptételek; közülök a legáltalánosabb az, hogy minden algebrai egyenletnek, melyben az együtthatók algebrai számok, gyökei szintén algebrai számok.

A harmadik és negyedik előadás, az algebrai (valós) számoknak egyik különösen egyszerű osztályával foglalkozik. Nevezetesen a harmadik előadás a közönséges láncztörtek elméletének alapjait tartalmazza s annak bebizonyítását, hogy ha az ily láncztört tisztán vagy vegyesen szakaszos, akkor értéke bizonyos egész számú együtthatókkal biró másodfokú egyenletnek tesz eleget. A negyedik előadás viszont a quadratikus alakok elméletének segítségével kimutatja, hogy a periodikus láncztörteken kívül más valós szám nem birhat a mondott tulajdonsággal.

Hogy miként ismerhetők fel a magasabb fokú egyenletek gyökei, az eddig nyilt kérdés; azért az ötödik előadás az algebrai számokról már a transzczendensekre tér át. Liouville nyomán bebizonyítván, hogy ilyenek valóban léteznek, a két legfontosabbra — $e$-re és $\pi$-re — vonatkozó kutatások történetét adja.* A régibb vizsgálatok, melyeknek részletezése még ugyanez előadásban foglaltatik, csak annyit bizonyítottak be, hogy e nevezetes számok arithmetikai természete nem valami egyszerű. Lambert és Legendre kimutatták, hogy ha $x$ (a zérustól külömböző) ráczionális szám, akkor $e$ és $tg. x$ irraczionálisak. Ennek értelmében a $\pi$ szám nem lehet ráczionális, hiszen $tg. \frac{\pi}{4} = 1$. Sőt Legendre vizsgálataiból kitünt, hogy $\pi^2$ sem raczionális szám. Liouville az $e$ szám nehány tulajdonságát ismerte fel, hogy t. i. az $e$ szám sem maga, sem annak négyzete nem tehetnek eleget oly másodfokú egyenletnek, melynek együtthatói egész számok.

A következő két előadás Hermite-től eredő vizsgálatokat tartalmaz: Lambert és Legendre eredményeinek új igazolását, majd pedig azt a felfedezést, hogy $e$ transzczendens szám.

A következő két előadás a $\pi$ szám transzczendens voltával foglalkozik: a nyolczadik e ténynek Lindemann-tól származó bebizonyítását ismerteti, de nem teljesen; a kilenczedik Weierstrass egyszerűsített bebizonyítását tartalmazza. A két buvárnak a kitevős függvényre vonatkozó általánosabb vizsgálódásaiból csak a végeredményeket találjuk.

A quadratikus irraczionálitásokra és a kitevős függvényre vonatkozó ismereteink azok, melyekben a számok arithmetikai természetére vonatkozó kutatások kész eredményeket birnak felmutatni. Bachmann utolsó felolvasásában a vizsgálódás egy oly teréről nyerünk tudósítást, melyen még csak most folynak az első kisérletezések.

«A negyedik felolvasásban — így szól maga a szerző — a quadratikus irráczionálitásokra vonatkozólag egészen sajátos ismertető jelt vezettünk le, t. i. azt, hogy ők és csakis ők alakíthatók át periodikus láncztörtté. Ehhez immár azt a kérdést is füztük, valjon a magasabb fokú algebrai számokra nézve létezik-e hasonló ismertető jel s ez miben áll?

Hogy ilyennek kimutatása mily fontos és érdekes volna, s hogy itt a kutatásnak mily gazdag mezeje tárul fel, azt aligha kell külön kiemelnünk, de legyen szabad Hermite-nek Jacobi-hoz intézett számelméleti leveleinek** egy helyét közölnöm, melyben e kérdésről különösen érdeket keltő módon

* E vizsgálatoknak a Ludolfi számra vonatkozó részét a «Körmérés stb.» czímű czikkünk folytatásai behatóan fogják ismertetni. *Szerk.*

** Extrait de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objects de la théorie des nombres.

nyilatkozik. Ez a *Crelle-Journal* 40. kötetében a 286. lapon található és így hangzik: Ámde engedje meg, uram, hogy egy pillanatra visszatérjek ama figyelemre méltó körülményekre, melyekkel az oly alakok redukcziójánál találkozunk, hol az együtthatók egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletek gyökeitől függnek. Innen talán e mennyiségek mindegyik osztályára a jellemző tulajdonságok oly rendszerét nyerhetnők, milyent pl. a láncztörtek elmélete a másodfokú egyenletek gyökeire nézve nyujt. Legalább sok oly elemet lehetne összegyűjtenünk, melyek némi fényt vetnének az algebrai számok ama végtelen sokféleségére, melynek a gyökvonás csak igen jelentéktelen részét nyujtja. Itt csak úgy, mint a transzczendensek elméletében, könnyű a mindinkább bonyolodott analitikai fogalmak özönének közös forrását találni egy oly általános értelmezésben, melyben a számításnak csak első elemei lépnek fel; de mily roppant feladata ez a számelméletnek és az integrálszámításnak, az ész teremtményei e sokaságának lényegébe behatolni, őket tovább nem redukálható osztályokba sorozni, azokat jellemző és elemi definicziókkal egyénileg megszerkeszteni.

Hermite, mint látni, e helyen egyszersmind útmutatást adott arra nézve, hogy mily alapon keressük a feladat megoldását, ugyanis az «úgynevezett számelméleti alakok redukcziójának» segítségével. Valóban Lagrange — mint a negyedik felolvasásban láttuk — a kérdéstételnek, a mennyiben a quadratikus irráczionálításokra vonatkozik, a quadratikus alakokkal való kapcsolatát derítette fel, úgy hogy sejteni lehetett, hogy a magasabb irráczionálítások és a magasabb alakok elmélete között hasonló vonatkozás áll fenn. Hermite ezt megfontolván, a vizsgálatok egész sorát kezdte meg; ezeket leveleiben közölte és a magasabb fajú «redukált alakok» alkalmas értelmezését nyujtandó s bebizonyítandó, hogy azoknak valamely eredetileg adott alakból való kiszámításában bizonyos szakaszosságnak kell beállania. Egyik tanítványa, Charve úr,* a redukált alakoknak azt a felfogását vévén alapúl, melyet Selling-nek** köszönünk, Hermite gondolatait a ternär quadratikus alakokról írt részletes dolgozatában kifejtette és igazolta, a redukczió arithmetikai műveletét egyúttal geometriailag értelmezvén, részint elméletileg, részint a numerikus példák egy egész során valóban szakaszosságot talál a helyettesítések ama sorában, melyek egy eredetileg adott alakból a redukált alakot levezetni alkalmasak.»

A láncztörtek algorithmusának általánosításában egy másik fontos lépést Jacobi-nak köszönünk. Az új algorithmusnak megfelelő másodrendű

* Thèses prés. à la faculté des Sciences de Paris; de la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de leur application aux irrationelles du troisième degré.

** Journal f. d. r. u. a. M. Bd. 77.

láncztörtek fogalmát azután FÜRSTENAU vezette be. JACOBI számos példa kidolgozása után arra a gondolatra jött, hogy az egész számok köbgyökére nézve ez az algorithmus szakaszos, de ez állítás helyességét sem a saját, sem pedig BACHMANN kutatásai nem tették kétségtelenné. FÜRSTENAU-nak ellenben sikerült kimutatni, hogy ha valamely $a$ számnak kifejtése szakaszos másodrendű lánctörtre vezet, akkor $a$ oly harmadfokú egyenletnek tesz eleget, melyben az együtthatók egész számok.

A harmadfokú irráczionálításokra vonatkozó eme még felette hézagos vizsgálatok lényegének kifejtése zárja be a könyvet, mely a mathematikai vizsgálódásoknak egy fényes multú, de még fenségesebb jövővel kecsegtető részébe iparkodik betekintést nyujtani.

BACHMANN ez idő szerint hézagpótló előadásai főleg némely helynek különösen lelkes hangjával bizonyára nem egy munkást fognak a tudomány egyik szép mezejének művelésére buzdítani. Mégis egyet igen sajnálunk: a szerző — művét lehetőleg széles köröknek szánva — sokszor vázlatosan és pongyolán írt. Így mindjárt az első felolvasásban valóban könnyelmű hamarossággal bánik el az irráczionális számok fogalmának értelmezését és méltatását. Szinte félni látszik attól, hogy e helyen minden mélyebb megfontolás és az alapvető kérdések jobb kidomborítása sok olvasót mindjárt kezdetben elriasztana. *Kürschák József.*

---

## Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften.

**3. Abhandlungen zur Atomtheorie.** (1803—1808). J. DALTON u. W. H. WOLLASTON. Herausg. v. W. OSTWALD. Leipzig 1889. 60 lap. Ára 50 pfennig.

«Die Grundlagen der Atomtheorie» (30 lap és 1 tábla) JOHN DALTON két értekezését foglalja magában: a gáznemüek elnyeletéséről vízben és más folyadékokban (Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Second Series, Vol. I. 1805.) és a testek alkatáról (A new System of Chemical Philosophy, London 1808—1827 czímű műnek II. fejezetéből), továbbá WILLIAM HYDE WOLLASTON (Philos. Trans. of the Royal Society of London 1808, 96—102 lapjain megjelent) a savanyú és a lúgos sókról szóló tanulmányát, melyek a mai atomelmélet alapját alkotják.

Az első értekezés lényegében nem más, mint annak a tételnek kibővítése, melyet már Henry felállított s mely szerint az elnyelt gáz mennyisége a folyadékra ható nyomással arányos. Mindamellett az itt közölt értekezések sorában helyet érdemel, mert az atomsúlyok első táblázatát közli. Különösen érdekes az egész tanulmányon végigvonuló mechanikai gondolatmenet.

A második értekezés a ma is érvényes nézet megokolása miatt fontos, melynek értelmében valamely anyag legkisebb részei egymás között egyenlők. Szabályokat állít össze, melyek segítségével az atomsúlyok a kisérlet útján található sokszorosai között döntenünk kell, és az elemek jeleit először használja nem qualitativ, hanem quantitativ értelemben. Ezen még az alchymia korából maradt jelek helyébe BERZELIUS később az elemek neveinek kezdőbetüit helyezte. WOLLASTON tanulmánya végül nemcsak azért fontos, mert a vegyülés sokszoros viszonyainak első felfedezéseinek egyikét adja, hanem különösen egynehány ma is ajánlható egyszerű előadási kisérlet leírása és a molekuláris képletek térbeli értelmezésének hangoztatása teszi figyelemre méltóvá. *Kövesligethy.*

*

**4. Jod (1814).** GAY LUSSAC. Herausg. v. W. OSTWALD. Leipzig, 1889. 52 lap. Ára 80 pfennig.

GAY LUSSAC eme tanulmánya (megj. Annales de Chimie 91, 5—96 lap. 1814. 752 lap) egyes elemről és annak legfontosabb vegyületeiről szóló nem csak legelső, hanem a kiadó véleménye szerint minden időre legjobb monographiája, mely számos hasonló munkának mintául szolgált. Pontos megfigyelések és ezek éleselméjű értékesítésének oly nagy halmazát találjuk benne, hogy alig képzelhető élvezetesebb tanulmány a leendő úgy mint a haladott kutató számára. Elvi fontossággal is bír, mert a chlórral való hasonlatosságánál fogva annak BERZELIUStól még makacsúl tagadott elemtermészetét kétségen kívül helyezte. *Kövesligethy.*

*

**6. Über die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislaufe des Blutes und insbesondere auf die Pulslehre,** von E. H. WEBER. Herausgegeben von M. v. FREY. Leipzig, ENGELMANN 1889. — 46 l. Ára 1 márka.

A WEBER testvéreknek a folyadékok hullámzó mozgására vonatkozó dolgozatai, legalább végeredményeikben, minden fizikus előtt ismeretesek. Ezen eredmények az idézett czím alatt a «Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse» 1850-diki évfolyamában megjelent, a legidősebb (ERNST HEINRICH) WEBER-től eredő értekezésben a vérkeringés folyamatának mechanikai magyarázatára vannak alkalmazva s ebből a szempontból a fizikust is érdeklik. A folyadékok hullámzó mozgásának törvényeiből kiindulólag, W. megállapítja a külömbséget, mely az összenyomhatatlan folyadéknak rugalmas csövekben való áramlása és hullámzó mozgása között mutatkozik. Igen egyszerű mintán megmutatja, mily része van ezen kétféle mozgásnak a vér mozgatásában. Kifejti, mily része van a szív mozgásának, a rugalmas falaknak, a capillaris edényekben fellépő ellenállásnak s a vér mennyiségének a vérnek az edényekben való eloszlására és mozgására. Mindeme tényezők szereplését említett mintája, ámbár képzelhető legegyszerűbb, szembetűnően és helyesen szemlélteti. A dolgozat becsét és megbizhatóságát legjobban az jellemzi, hogy eredményeit a fiziológusok még mai nap is lényegökben módosítás nélkül helyeseknek ismerik el. *B. G.*

*

**7. Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels** von F. W. Bessel. Leipzig, Engelmann 1889. — 171 lap. Ára 3 márka. (Megjelent az «Abhandlungen der mathematischen Klasse der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin» 1826. évi folyamában).

Bessel ezen dolgozatának maradandó becse nem a másodperczinga hoszszának pontos meghatározásában s nem is a vizsgálat részleteinek éles elmésségű berendezésében rejlik, hanem a feladat kitűzésének és megoldásának ama módjában, mely egyébként B. minden munkájára nézve jellemző. A lényeges pontok megkeresésében mutatkozó éles itélet, a felmerülő nehézségek leküzdésében mutatkozó nagy leleményesség, a megfigyelések végrehajtásában tanusított lelkiismeretesség és törhetetlen kitartás, végre a hosszú fáradságos munkával szerzett eredmények valódi értékének megbecslésében nyilatkozó önzetlen, szerény kritika oly csodálatos módon párosulnak benne, hogy az olvasót mindenkor bámulatra ragadják. Lépten-nyomon új hiba-forrásokat fedez fel, de egyúttal egy-egy új, később általános használatba átment módszert eszel ki, melylyel ártalmatlanná teszi. Meglepő a hiba-források hatásának analytikai kifejezésében mutatkozó könnyűség és egyszerűség. Ebből a szempontból a munka valóságos iskolája a komoly tudományos vizsgálatnak. — A munkálatban megoldott főbb problémák közül csak a következőket emeljük ki. Megmutatta, hogyan kell az ingával együtt lengő levegőtömeg hatását — mely épen nem elhanyagolható — számításba venni (B. előtt az inga hoszszának reductiójánál csak a levegő felhajtó erejét vették számba). Az élek alakjának, valamint ezek tartóinak s általában az inga felfüggesztés módjának befolyása a lengésidőre szintén gondos vizsgálatok tárgya volt. — B. elfogulatlanságára legjellemzőbb az, hogy dolgozatainak eredményeit összegezvén, a későbbi meghatározásokban nem az ő saját módszerének itéli a jövőt, hanem Bohnenberger reverzio-ingájának, megjelölvén egyúttal az útat is, melyen a tökéletesítése eszközlendő. Az értekezés fontosságára mutat, hogy minden későbbi pontos ingameghatározás B. művére támaszkodik. *B. G.*

*

**8. Abhandlungen zur Molekulartheorie (1811 und 1814).** A. Avogadro u. Ampère. Herausg. v. W. Ostwald. Leipzig, 1890. 50 lap, 3 tábla. Ára 1,20 márka.

Avogadro és Ampère egy-egy értekezésével van ebben a füzetben képviselve. Az első: «Az anyagok molekuláinak viszonylagos tömegei és vegyülési viszonyai meghatározására irányuló módszernek kisérlete» (Journal de physique par Delamétherie 73. p. 58—76, juillet 1811) czímet viseli; a második Berthollet grófhoz (Annales de Chimie 90, p. 43—86, 1814-ben) intézett levél, mely a súlyviszonyok meghatározásáról szól, melyekben az anyagokat alkotó molekulák számuk és kölcsönös elhelyezkedésük szerint vegyűlnek. Avogadro a gázok chemiai folyamatainál fellépő térfogatviszonyoknak, különösen ama feltevésével ad könnyen áttekinthető kifejezést, mely szerint különböző gázokból vett egyenlő térfogatok egyenlő számu molekulát foglalnak magukban; ez a feltevés még avval volt megtoldandó, hogy az egyszerű anyagok molekulái is általában véve legalább két atomból állanak. Ez van meg lényegében Ampère kifejtésében is. Bár számos más nézetét a haladottabb chemia nem tehette magáévá, mégis fölötte érdekes a mód, melyben egy szomszédos tudományágban kitünő tudós a chémiát fejleszteni iparkodik. Nevezetes, hogy mindkét dolgozat nem közvetlenül hatott; gyümölcseit csak akkor termette, mikor későbbi megfigyelések hasonló gondolatmenetet keltettek, s különösen a szerves chémia ezen hypothezistől akkor még független tényeket előrelátni engedte.

*Kövesligethy.*

*

**9. Thermochemische Untersuchungen.** G. H. Hess. Herausg. v. W. Ostwald. Leipzig 1890. 102 lap. Ára 1,20 márka.

Négy főleg a Bull. de Petersb. 1839-ben és Pogg. Ann. folyóiratokban megjelent értekezés, mely először foglalkozik rendszeresen a vegyi folyamátok kiséretében fellépő hőviszonyok mérésésel és elméletével is. Mivel összetartozó reakcziók egész csoportjait öleli fel, az első általános törvényekhez is vezet. Ezek legfontosabbika, hogy valamely vegyi folyamat hőeffektusa független a folyamat útjától, csupán a kezdet- és végállapot határozza meg. Hogy ma e tétel tisztán az energia tételének közelfekvő következménye, érdemeiből mitsem von le, mert hiszen az energia tételét R. Mayer csak két évvel később mondta ki és legalább 7 év mult el, míg általános tudományos értékesítését Hemholtz kezdeményezte. Az állandó melegösszegek neve alatt is nevezetes tételt már gyakorlatilag is látjuk felhasználva s ez végkép tisztázza az állati lélegzéssel járó melegkifejlődés tüneményeinek akkortájt még hamis magyarázatát. Talán ez értekezésben találkozunk először, évekkel Mayer és Joule előtt a «hőæquivalens» nevével, természetesen egészen más értelmezésben, mint azt mai nap használni szoktuk. *Kövesligethy.*

*

**11, 24 és 25. Untersuchungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend.** Galileo Galilei. Aus dem italienischen Uebers., und herausgegeben von Arthur v. Oettingen. Leipzig, 1890. — 142 lap. Ára 3 márka.

Galilei ezen munkáját akkor szerkesztette, midőn már az inquisitio foglya volt a Florenz melletti Arcetri villában és minthogy a mű 1638-ban jelent meg az Elzevirek könyvnyomó intézetében és a szerző már 1637-ben megvakult, azért valószínű, hogy nem saját kezével irta, hanem csak tollba mondta.

A mű kinyomatása di Noailles grófnak érdeme, kinek Galilei a kéziratot átküldte, minthogy az inquisitio minden áron meg akarta akadályozni, hogy a nehezen legyőzött ellenség a sajtó útján szavát föl ne emelje. A nemes gróf a reá bizott kincset a híres Elzevir-könyvnyomó műhelynek adta át, hol már Galilei többi művei is napvilágot láttak. A mű megjelent: «Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica ed ai movimenti locali: Altrimenti dialoghi delle nuove scienze» czím alatt. Az első kiadás csak négy napból («giornate») állott, az ötödiket és hatodikat később toldotta hozzá. Az egész mű a két világrendszerrel foglalkozó híres «Dialogo» alakjában van szerkesztve, s ugyanazok a személyek is szerepelnek benne: Filipo Salviati, Galilei tanítványa és barátja, a ki mesterének tanait hirdeti, aztán Giovan Francesco Sagredo, a velenczei senator, mint a művelt, tudománykedvelő laikus és végül Simplicio, Aristoteles ismeretes commentatora, ki a peripatetikus philosophia tántoríthatatlan követője és védője. Az egész mű tartalmát röviden következőkép lehet összefoglalni: *1. nap.* A szilárd testek részeinek összetartásáról. *2. nap.* A testek törés elleni szilárdságáról. *3. nap.* Az egyenletes és a «természetszerűleg» gyorsuló mozgásról. *4. nap.* Az erőszakolt mozgásról vagy hajításról. *5. nap.* Az arányok tanáról. *6. nap.* Az ütközésről.

A két első nap tartalma röviden a következő: Nagy testek szilárdsága kisebb, mint a kisebbeké. A szilárdság megmagyarázására sajátságos elmélet felállítását koczkáztatja. Ő ugyanis a testet, végtelen sok apró üres terektől áthatottnak képzeli s ez üres terek «resistentiája» a részecskék elválasztásakor tapasztalt ellenállást okozzák. Ő ezt a nyilvánuló erőt «resistenza del vacuo»-nak nevezi és iparkodik nagyságát meghatározni, mely alkalommal természetesen a «horror vacui» nagyságát, melyet 18 florenzi rőfnyi vízoszlop súlyával tesz egyenlővé, azaz a légkör nyomását meghatározza. A véges nagyságú testnek végtelen sok, végtelen kicsiny üres terekkel való áthatásását igen szellemes módon a híres Aristoteles-féle kerékkel (rota Aristotelis) akarja érthetővé tenni. Ezután különféle physikai jelenségről szól, különösen az inga mozgásról és a húrok rezgéséről, a consonantiáról és dissonantiáról. A második fejezet a törési szilárdság különféle tételeit előadja. — Legfontosabb a harmadik nap, melyben a szabad esés törvényeit levezeti és Aristoteles esési elméletét megczáfolja. Kétféle kísérletet tesz: a pisai ferde toronyról 200 láb magasságból ejt le különböző anyagú és súlyú tárgyakat és másodszor lejtőn gurít le golyókat, azonkívül még inga kísérleteket is tesz. A negyedik fejezetben különösen a vízszintes hajítást tárgyalja és a parabolikus pályát kimutatja. Ezen fejezethez csatolt függelékben különféle testek súlypontjának meghatározásával foglalkozik. Az ötödik fejezet tisztán mathematikai érdekű. A hatodik az ütközésről szól; megczáfolja Aristotelest, ki a nyomást a lökéstől nem bírja megkülönböztetni, de azért ő maga nem tudja még az ütközés törvényeit levezetni, minthogy a tömeg fogalma neki még hiányzik.

A Galilei-féle «Discorsi» oly könyv, melyet a physika minden tanárának át kellene tanulmányoznia, mert még mai napig sincs utól érve Galilei valóban remek népszerűsége mellett, szigorúan tudományos előadása.

*Heller Ágost.*

*

**12. Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebäudes nach den Newton'schen Grundsätzen abgehandelt.** Immanuel Kant. Herausg. von H. Ebert, Leipzig 1890.

A nagy német philosophusnak ezen műve tudományos tevékenységének első periodusában keletkezett, a midőn majdnem kizárólag természettudományi tanulmányokkal foglalkozott. Értekezését II. Frigyes porosz királynak dedikálta. A mű első ízben a szerző neve nélkül jelent meg, 1755-ben. Benne találjuk azt a jelenleg általánosan elfogadott kosmologiai elméletet, mely szerint a Naprendszer egyes tagjai közös eredetűek, miből egyenlő chemiai összetételükre is lehet következtetni.

Alig ötven évvel később, hogy Newton Dr. Bentley-hez intézett leveleiben a világegyetemnek tisztán mechanikai okokból való keletkezését, isteni alkotói tevékenység kizárásával, lehetetlennek nyilvánította: Kant épen a Newton-féle elvek alapján a világrendszer keletkezését a chaosból tisztán az anyagban székelő erők hatásából kimagyarázni megkísérlette.

Kant-nak ezen műve megjelenésekor nagyobb feltűnést nem okozott; különösen a természettudósok nem vettek róla tudomást, úgy hogy negyven évvel később LAPLACE «Exposition du système du monde» czímű művében a KANT-féle elmélethez igen közel álló nézetét mint a német philosophustól teljesen független és önálló eszmét adhatta elő. LAMBERT, midőn kosmologiai leveleit 1761-ben kiadta, KANT művéről szintén semmit sem tudott. Azonban nem szabad KANT nézetét egyszerűen azonosítani LAPLACÉ val. Míg ugyanis az utóbbi forgásban levő gázgömbből indúl ki és csak a bolygó rendszer keletkezését igyekszik megmagyarázni, addig KANT sokkal általánosabb alapból indúl: az anyagnak finoman elosztódott állapotából és az állócsillagok egész rendszerére terjeszkedik ki. A csillagrendszer szerkezetére és a csillagoknak lencse alakú térben való elhelyezésére KANT WILLIAM HERSCHEL-nek 1777-től 1784-ig megjelent «On the construction of the heavens» czímű két értekezésében foglalt elméletét megelőzi, a mint KANT művében egyáltalában számos ily anticipatio található, ú. m. a Nap haladó mozgása, az álló csillagok saját mozgása, a Saturnus-gyűrűnek összetétele több gyűrűből és forgás idejének szellemes kiszámítása, az állatövi fénynek, mint a Naptól megvilágított zárt porgyűrűnek való magyarázata s más egyéb.

Elméletének főérdemét a következő tételben jellemzi: «A bolygók képződése e rendszer szerint minden más elmélet előtt azon előnynyel bír, hogy a tömegek keletkezése egyszersmind a mozgásoknak és a pályakörök állásának keletkezését ugyanabban az időpontban mutatja.» — A világegyetem különben KANT nézete szerint nem örökké való; a mint keletkezett úgy ismét el is fog enyészni és vissza fog térni a chaosba, helyet adva keletkezendő új világoknak. A mechanikai magyarázat azonban csak a szervetlen világra alkalmazható; az organikusra, szerző nézete szerint, a teleologikus álláspontot nem nélkülözhetjük.

KANT-nak e művét csak a jelen században méltatták, mióta LAPLACE kosmogonikus nézete ismeretessé vált. *Heller Ágost.*

## FELADATOK.

13. Adva van valamely ellipszisen a $P$ pont. Szerkesztessék az adott ellipszisbe beírt ama háromszög, melynek egyik szögpontja $P$ és magassági pontja az ellipszis középpontja. Klug Lipót.

14. Bizonyítassék be a következő tétel: Ha valamely $ABC$ háromszög $AB$ oldalának tetszés szerinti $C_1$ pontjából az $AC$ és $BC$ oldalakra merőlegeseket bocsájtunk, melyeknek talppontjai $B_1$ illetve $A_1$, akkor ama két derékszögű parallelepipedon, melynek egy csúcsban találkozó élei $AC$, $BC_1$ és $C_1B_1$, illetve $BC$, $AC_1$ és $C_1A_1$ egyenlő köbtartalmú. Tőtössy.

15. Milyen alakú a síkbeli harmadrendű görbe egyenlete, ha koordináta-háromszögnek triászt, és milyen alakú, ha Steiner-háromszöget választunk? Vályi.

16. Valamely $p$ torzió-együtthatójú szál alsó végére $T$ tehetetlenségi nyomatékú tömeg van függesztve. Mekkora szöggel fordul el ez a tömeg a szál mint függélyes tengely körül, ha a szál felső végét $t$ idő tartamában $\alpha$ szöggel egyenletesen megsodorjuk? (A szál tömege a felfüggesztett testéhez képest elenyésző.) Czógler.

17. Egy 20 méter hosszaságú tekepálya 2 méter magasságú hengerdobban végződik; a 10 m-nyi sebességgel elindított golyó 0,10 surlódási együtthatóval mozog. Mekkora sebességgel érkezik a golyó a dob tetejére? Fröhlich.

18. Minő görbét ad a

$$\sin^2 \pi x \, . \, \sin^2 \pi y = 1$$

egyenlet? Kőnig.

# MEGOLDOTT FELADATOK.

6. Valahol a síkon rajzban meg van adva egy kör és annak a középpontja. Egy második körnek meg van adva három pontja. Tisztán vonalzó segítségével döntendő el, vajon e második körnek egy adott egyenessel vannak-e valós metszéspontjai, és ha igen, ezek ismét tisztán vonalzó segítségével meg is szerkesztendők. (RADOS.)

*

*Harmadik megoldás Csillag Vilmos műegyetemi hallgató úrtól.*

Legyen a megrajzolt $m$ kör középpontja $M$; a három pontjából $A$, $B$, $C$-ből meghatározott kör $k$ és az adott egyenes $l$.

A feladat következőképen oldható meg:

«Képezzük a $k$ körre vonatkozólag a konjugált pólusok involuczióját az $l$ egyenesen; akkor az $XX'$, $YY'$ poluspárok meghatározta involuczió kettős pontjai szolgáltatják az $l$ egyenesnek a $k$ körrel való metszéspontjait, melyek képzetesek vagy valósak lesznek a szerint a mint ennek az involucziónak párjai, $XX'$ és $YY'$, egymást elválasztják vagy nem.» (6. ábra.)

Hogy a bemutatott szerkesztést könnyen áttekinthetővé tegyük, állítsuk össze a benne előforduló egyes segédszerkesztéseket.

1. *Adva van valamely harmonikus pontquadruplum egyik párja $G$, $H$ és a másik párnak egyik eleme $C$; szerkesztessék az utóbbival konjugált elem $C'$.*

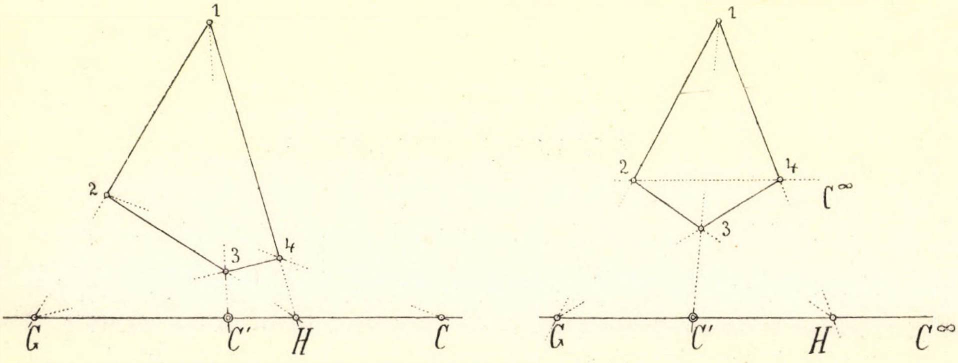
A $GH$ egyenest oly teljes négyszög átlójává tesszük, melynek második átlója $C$-n megy keresztül, akkor a harmadik átló kimetszi a $C'$ pontot. (1. ábra.)

2. *Szerkesztendő adott kúpszeletre nézve $P$ pont polárisa $p$.*

A $P$ pontot tegyük valamelyik a kúpszeletbe írt teljes négyszög diagonálpontjává, akkor a vele szemközt fekvő diagonális a kivánt poláris. (2. ábra.)

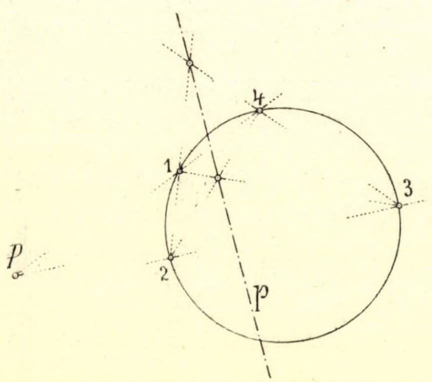
3. *Adva van két párhuzamos egyenes; szerkesztendő az ezekkel párhuzamos és a tetszőleges $X$ ponton átmenő egyenes.*

Az adott két párhuzamoson két tetszés szerinti szelőtől lemetszett segmentumok legott felezhetők ; a további szerkesztés pedig a 1. $\beta$) ábra megfordítása. (3. ábra.)

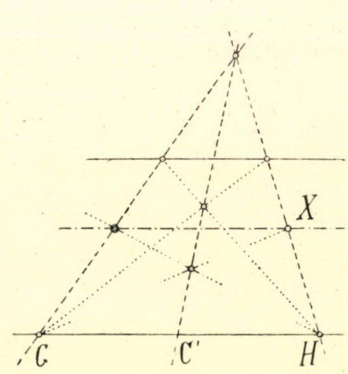



$\alpha$ 1. ábra. $\beta$

4. *Megrajzolt körben adott $XMY$ középponti szög tetszőleges $MX'$ sugár mellé fölrakandó.* (Lásd a 4. ábrát.)




2. ábra.

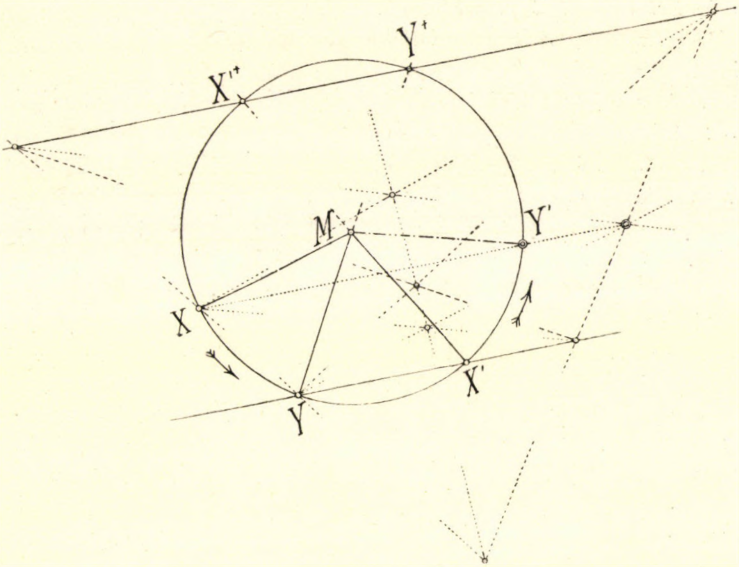



3. ábra.

Jelöljük az $Y$ és $X'$ pontok diametrálpontjait $Y^+$ illetőleg $X'^+$-tel. Az $XMY'$, $YMX'$ és $X'^+MY^+$ egyenlőszárú háromszögek $M$-ben lévő szögeinek közös felező egyenese merőleges lévén e háromszögek alapjaira, ez alapvonalak

$$XY',\ YX',\ X'^+Y^+$$

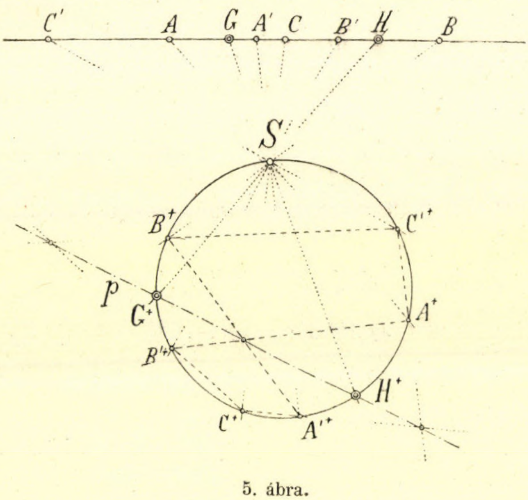
egymással párhuzamosak.




4. ábra.

Ha tehát az $X$-ponton át párhuzamost vonunk $YX'$-sel — ezt pedig az $X'Y$ párhuzamos segítségével a 3. ábra mintájára eszközölhetjük —, akkor ennek második metszéspontja a körrel adja az $Y'$ pontot úgy, hogy

$$\sphericalangle XMY = \sphericalangle X'MY'.$$




5. ábra.

5. *Két egyesített projektiv pontsor kettős pontjainak vonalos úton való szerkesztése rajzban adott kúpszelet* (kör) *segítségével.* (Lásd az 5. ábrát.)

A közös sorozóval biró pontsorok projektiv (esetleg involutorikus) vonatkozását meghatározó pontpárokat a kúpszelet (kör) tetszőleges $S$ pontjából átvetítjük és a kúpszeleten ekként létesített két projektiv pontsornak PASCAL-féle egyenesét keressük; ez metszi ki a megrajzolt kúpszeletből ama pontokat, melyek $S$-ből visszavetíttetvén a kettős pontokat szolgáltatják.

Ezek után áttérhetünk a fő-ábra magyarázatára.

Kiemelendő, hogy épen a 4. számú szerkesztés, mely az adatokból vonalos úton volt kivihető, bizonyítékát képezheti annak, hogy kitűzött feladatunk tisztán vonalzóval való megoldása csakugyan lehetséges.

Czélunk a $k$ körre nézve konjugált pólusok involuczióját az $l$ egyenesen valóban előállítani. Erre a $k$ körnek két újabb pontjára van szükségünk, de elég lesz az egyiknek meghatározását részleteznünk. (L. a 6. ábrát.)

Összekötjük pl. $AC$-nek $l$-lel való metszéspontját $X$-et a $B$ ponttal és a $BX$ szelőnek kivánjuk a $k$ körrel való második metszéspontját, $D$-t meghatározni. Ennélfogva a

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$$

vagyis

$$\sphericalangle(1, 2) = \sphericalangle(1' 2')$$

egyenlőségnek megfelelően kell az $CD$ szelőt meghúznunk.

Ezt a következő módon tehetjük: az $m$ segédkör középpontjából $M$, merőlegeseket ($1^+$, $1'^+$, $2^+$) vonunk az — 1, 1', 2 — sugarakra olyformán, hogy az utóbbiaknak az $m$ körre vett pólusait (I, I', II.) $M$-mel kötjük össze.

Ezen I, I', II pólusokat pedig mint — az $A$ és $B$, illetve az $A$ és $C$, illetőleg az $X$ és $B$ pontok $m$ körre vett $a$ és $b$, illetőleg $a$ és $c$, illetőleg $x$ és $b$ — polárisainak metszéspontjait kapjuk.

Magukat e polárisokat az 2. ábra mintájára csupán vonalzóval rajzoltuk meg.

Most az 1, 1' és 2 átmérőkhöz a 4. számú szerkesztéssel keressük a 2'-et oly módon, hogy

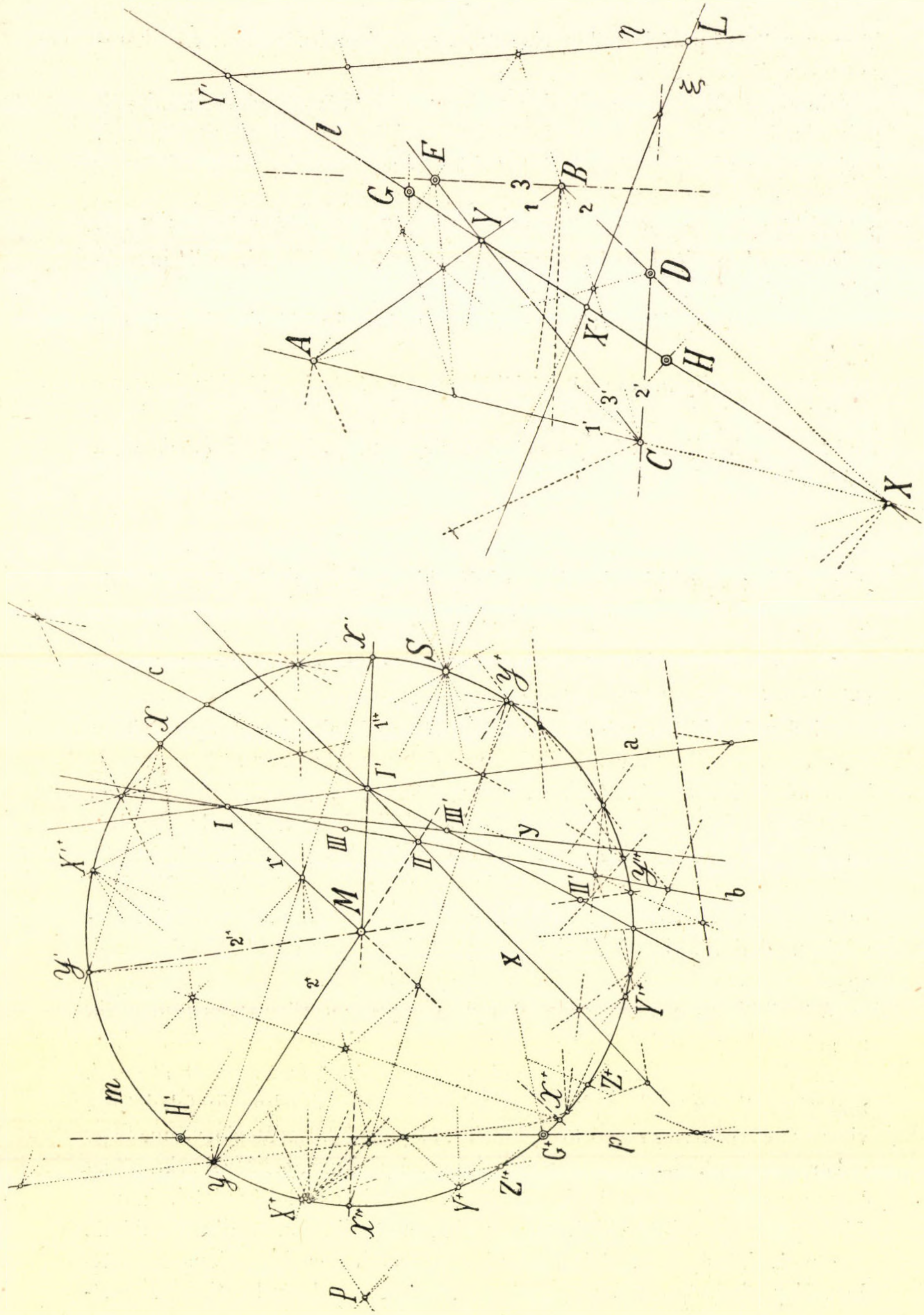
$$\sphericalangle XMY = \sphericalangle X'MY'$$

vagyis

$$\sphericalangle(1'^+ 2'^+) = \sphericalangle(1^+, 2^+)$$

legyen. Világos, hogy az ekként nyert $2'^+$ átmérő merőleges a tulajdonképen keresett 2', vagyis $CD$ szelőre.

Ez utóbbit végre úgy kapjuk, ha az $C$ pontnak az $m$ körre vett $c$ polárisát átmetszük a $2'^+$ átmérővel és az így nyert $II'$ pontnak ugyancsak az $m$



6. ábra.

körre vonatkozó polárisát $2'$ szerkesztjük. $2$ és $2'$ metszése a $k$ kör keresett negyedik $D$ pontja.

Mint hangsúlyoztuk, czélunk az, hogy a $k$ körre nézve konjugált pólusoknak az $l$ egyenesen lévő involúczióját megállapítsuk. Ennek egyik párját az eddigiekből tüstént meghatározhatjuk. Ugyanis a $k$ kör negyedik pontja $D$ meglévén, az $X$ pontnak ugyancsak a $k$ körre vonatkozó polárisa $\xi$, mint az $ABCD$ teljes négyszögnek $X$-szel szemközt fekvő diagonálisa —, $X'$ pedig $\xi$ és $l$ metszéspontja gyanánt adódik ki. $XX'$ involúcziónk egyik párja.

Ugyanez elv alapján szerkesztettük az említett involúcziónak még egy $YY'$ pontpárját.

Most már az ily módon két párjából megállapított involúcziónak kettős pontjai, — melyeket az $m$ kört használva az 5. ábra mintájára szerkesztünk, — adják végre az $l$ egyenesnek esetleges metszéspontjait ($G$ és $H$) a *k körrel.*

*

## *Negyedik megoldás dr. Kürschák József műegyetemi m. tanár úrtól.*

Legyen a megrajzolt $m$ kör középpontja $M$; a három pontjából $A$, $B$ és $C$-ből meghatározott kör $m_1$ és az egyenes $l$.

Mindenek előtt meghatározzuk $A$, $B$ és $C$-nek diametrálpontjait az $m_1$ körben. E czélból megrajzoljuk a mondott pontoknak az $m$ körre vonatkozó polárisait: $a$, $b$ és $c$-t. A $(b, c)$, $(c, a)$ és $(a, b)$ pontokat összekötvén $M$-mel, az $m$ körnek $PP'$, $QQ'$ és $RR'$ átmérői adódnak ki, melyek sorban merőlegesek $BC$, $CA$ ill. $AB$-re. Most pl. az $A$-nak keresett diametrálpontja a $CQ$, $CQ'$ és $CM$ negyedik harmonikusának, a $CD$ sugárnak, és $BR$, $BR'$ és $BM$ negyedik harmonikusának, a $BD$ sugárnak, metszéspontja. Hasonlóan adódnak ki $B$ és $C$ diametrálpontjai, melyek közül különben csak egyre — nevezzük $E$-nek — lesz szükségünk.

A továbbiakban vagy az első és a vele lényegben véve azonos második megoldás alapgondolatát vagy a harmadik megoldásét használhatjuk fel.

Az első esetben összekötvén a diametrálpontokat, az így nyert átmérők metszéspontja az $m_1$ körnek $M_1$ középpontját adja. Ezzel pedig feladatunk vissza van vezetve az első megoldás IV. alapfeladatára. Megjegyzem, hogy ekkor $a_1$-nek pl. $A$-t választván, az $M_1a_1$-gyel párhuzamos $Ma$ szerkesztéséhez nem szükségesek az I. alapfeladat hosszadalmas előkészületei, hanem $Ma$ egyszerűen mint az $MA$, $MD$ és $MM_1$ negyedik harmonikusa adódik.

Ép oly könnyen csatlakozhatunk a harmadik megoldás alapgondolatához. Ugyanis határozzuk meg $DA$, $DB$, $DC$-nek az $l$-l való $X$, $Y$, $Z$ metszéspontjait, továbbá $EA$, $EB$, $EC$-nek ugyancsak $l$-l való $X'$, $Y'$, $Z'$ metszéspontjait. Az $(X, Y, Z \ldots)$ és $(X', Y', Z' \ldots)$ egyesített fekvésü projektiv pontsorok kettős pontjai lesznek az $m_1$ és $l$ keresett metszéspontjai. Ezeket most már a harmadik megoldás 5.-je adja.

---

7. Bizonyíttassék be, hogy azoknál az ovális harmadrendű görbéknél, a a melyek a sík két végtelen távol fekvő kör pontján átmennek, a reális aszimptotával párhuzamos négy érintő érintési pontjai közül akármelyik a más háromtól alkotott háromszög magasságainak metszéspontja. (VÁLYI.)

*

*Első megoldás Széprélhy Béla főreáliskolai tanár úrtól Brassón.*

E tétel azonnal evidenssé válik, mihelyt a harmadrendű görbét a STEINER-féle rokonság segítségével származtatjuk. Ha ugyanis valamely ovális harmadrendű görbéhez meghúzzuk a valós aszimptotával párhuzamos négy érintőt, négy érintési pontot nyerünk, és ezzel egy teljes négyszöget, mely a görbe síkjában fekvő pontok között egy összefüggést, a STEINER-féle rokonságot állapítja meg. A teljes négyszög szemben fekvő oldalpárjai megállapítják ugyanis a sík minden egyenesén egy pont-involúczió három pontpár ját, és emez involúczió kettőspontjai azok, a melyeket a STEINER-féle rokonságban egymásnak megfelelőknek nevezünk. Az aszimptota-irány megállapította parallel-sugársor minden sugarán fekszik egy-egy ilyen megfelelő pontpár, és ezek összessége oly ovális harmadrendű görbét alkot, mely a megadott görbénkkel azonos. (Lásd: «M. DISTELI: Ueber eine planare Darstellungsweise der Gestalten der ebenen Curven dritter Ordnung» Schlömilch-Zeitschrift für Math. und Physik 1891.)

A sík végtelenben gondolt egyenesén megállapított pont-involúczió kettőspontjai is görbénkhez tartoznak, a miből nyilvánvaló, hogy ez az involúczió czirkuláris, mihelyt kettőspontjai a sík imaginárius körpontjai. Ez a sík végtelenben gondolt egyenesén megállapított involúczió azonban csak úgy lehet czirkuláris, ha a teljes négyszög szemben fekvő oldalpárjai egymásra merőlegesen állanak, vagyis ha a teljes négyszög orthogonális, a miből következik, hogy bármely három csúcspontja megállapította háromszög magassági pontja a negyedik csúcsponttal azonos.

*

*Második megoldás Dr. Klug Lipót egyetemi m. tanár úrtól Budapesten.*

Nevezzük a harmadrendű görbének, $C^{(3)}$-nak, végtelen távol fekvő valós pontját $V$-nek; $V$-ből $C^{(3)}$-hez vonható érintők érintéspontjait $A$, $B$, $C$, $D$-nek; $V$ pont érintőjének metszéspontját a $C^{(3)}$-vel, vagyis $V$-nek tangencziális pontját, $U$-nak.

Ismeretes, hogy ha $C^{(3)}$-nek $V$ pontján át tetszés szerint egyenest húzunk, mely a $C^{(3)}$-t még az $Y$ és $Z$ pontokban metszi, akkor az $X$ pont, mely $V$-t, $Y$, $Z$-től harmonikusan elválasztja $V$ pontnak $C^{(3)}$-re vonatkozó konikus polárisán $V^{(2)}$-n fekszik. $V^{(2)}$ e tulajdonság folytán átmegy az $A$, $B$, $C$, $D$, $V$ pontokon és érinti a ($VU$) egyenest. Ha ez az egyenes a sík végtelen távol fekvő egyenese $g_\infty$, akkor az $Y$, $Z$ pontok a föltétel szerint, a síknak képzetes körpontjai, tehát $X$, a ($VU$)-ra merőleges egyeneseknek végtelen távol fekvő pontja. Ebből következik, hogy $V$ pontnak $C^{(3)}$-re vonatkozó konikus polárisa $V^{(2)}$, e görbénél: *egyenoldalú hiperbola.*

De $C^{(3)}$ mint ismeretes* az $A$, $B$, $C$, $D$ alappontokkal biró kúpszeletsor elemeihez $V$-ból vonható érintők érintéspontjainak geometriai helye. Ennélfogva e kúpszeleten $g_\infty$-t oly involúcziós pontsorban metszi, melynek aszimptotái a sík képzetes körpontjai. De az ily tulajdonsággal biró kúpszeletsor egyenoldalú hiperbolákból áll, és így: $A$, $B$, $C$, $D$ alappontok ugyanazon háromszög csúcspontjait illetve magassági pontját képezik. Az $A$, $B$, $C$, $D$ alappontok azonban $C^{(3)}$ görbe ($VU$) aszimptótájával párhuzamosan menő érintők érintéspontjai, — és így ezzel a tétel be van bizonyítva.

---

8. Bizonyíttassék be a következő tétel: Ha $ABC$ háromszög $A$ csúcsából a $BC$ oldalára bocsátott merőleges talppontja $D$; továbbá $E$ ama pont, mely $D$-t a $B$ és $C$ csúcsoktól harmonikusan elválasztja; végül $F$ a $BC$ oldal felezőpontja: akkor $ABC$ és $AEF$ háromszögeknek egy és ugyanazon magassági pontja van. (KLUG.)

*

*Első megoldás Suták József főgymnasiumi tanár úrtól Budapesten.*

Jelöljük az $A$ pontból a $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ pontokhoz húzott egyeneseket rendre $b$, $c$, $d$, $e$, $f$-fel; $ABC$ háromszög magassági pontjából ugyanazon pontokhoz húzott egyeneseket $b_1$, $c_1$, $d_1$, $e_1$, $f_1$-gyel. Az $A$ pontból és a magassági pontból $BC$-hez húzott párhuzamosakat $a$ illetve $a_1$-gyel.

---

* SCHROETER H.: Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. 112. l.

Feltevésünknél fogva:

$$(b\,c\,d\,e) = -1,\ (b\,c\,f\,a) = -1$$
$$(b_1c_1d_1e_1) = -1,\ (b_1c_1f_1a_1) = -1$$

ez utóbbi sort még következőképen is írhatjuk:

$$(c_1b_1e_1d_1) = -1,\ (c_1b_1a_1f_1) = -1$$

tehát

$$(bcde) = (c_1b_1a_1f_1) \qquad \alpha)$$
$$(bcfa) = (c_1b_1e_1d_1) \qquad \beta)$$

mint hogy $b \perp c_1$, $c \perp b_1$, $d \perp a_1$, $a \perp d_1$ azért az $\alpha$) szerint $e \perp f_1$ a $\beta$) szerint pedig $f \perp e_1$, a mi bebizonyítandó volt.

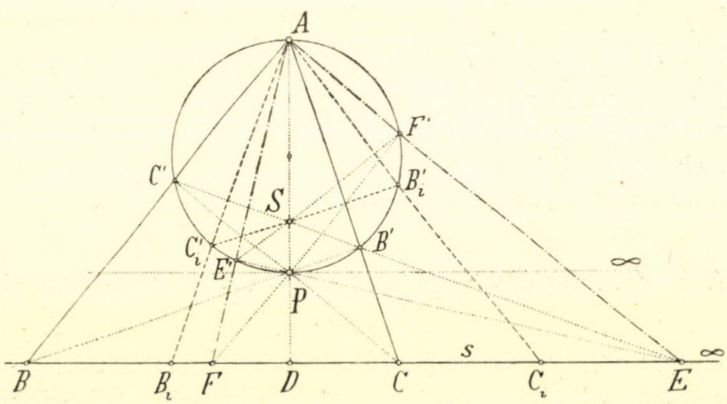
*

*Második megoldás Csillag Vilmos műegyetemi hallgató úrtól.*

Legyen az adott $ABC$ háromszög magassági pontja $P$ és tekintsük $\bar{E}$-t, mint a $P$-ből $AF$-re bocsátott merőlegesnek $BC$-vel való metszéspontját; ekkor $A\bar{E}F$ háromszög magassági pontja szintén $P$ és tételünk be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy

$$B,\ C,\ D,\ \bar{E}$$

harmonikus pontcsoport.




E czélra legyenek a $P$ pontot $B$, illetve $C$, $\bar{E}$, $F$ pontokkal összekötő magasságok talppontjai $B'$, illetőleg $C'$, $E'$, $F'$.

E talppontok — az $AP$ fölött álló derékszögek csúcspontjai lévén — az $AP$ átmérővel biró körön feküsznek.

Ha most egyrészt az említett kört az $A$ illetőleg $P$ sorozóval biró projektiv (egyenlő) sugársorok képződményének tekintjük, másrészt pedig megjegyezzük, hogy valamely elem-quadruplum kettős viszonya csatolás, vagy metszés alkalmazásánál nem változik, akkor — a kettős viszonyok szokott jelzésével élvén — mint az ábrából világosan látható:

$$-1=(CBF\infty)=(P\cdot CBF\infty)^{*}=(A\cdot C'B'F'P)=(BC\bar{E}D)$$

vagyis végre:

$$(BCD\bar{E})=-1.$$

*Megjegyzés.* Jelöljük a $BC$ alapvonalat $s$-sel és $S$-sel az $AP$ és $B'C'$ egyenesek metszéspontját. Az $AB'C'P$ körbe írt teljes négyszögnek diagonálháromszöge a kör polár-háromszöge. Ismeretes továbbá, hogy a körre vonatkozólag az $s$ egyenesen a konjugált pólusoknak involucziója létezik. $s$-nek pólusa $S$; úgy, hogy ha az $S$-en át húzott tetszőleges szelőnek a körrel való metszéspontjait ($B_i'$ és $C_i'$) $A$-ból vagy $P$-ből $s$-re átvetítjük az említett involucziónak pontpárját ($B_i$, $C_i$) nyerjük.

Az $AB_iC_i$ háromszög tehát tetszőleges képviselője az összes — $A$-ból $s$-fölé állított — háromszögeknek, melyek magassági pontja ($P$) közös.

*

*Harmadik megoldás Csillag Vilmos műegyetemi hallgató úrtól.*

A föladat fogalmazásában használt jelzéseket megtartva, jelöljük továbbá az $ABC$-háromszög magassági pontját $P$-vel, a $B$- és $C$-ből vont magasságok talppontjait $B'$- és $C'$-vel. (L. a fönti ábrát.)

Így mindenek előtt $B'C'$ metszése $BC$-vel adja az $E$ pontot. $B'$ és $C'$ — a $BC$ fölött álló derékszögek csúcspontjai — a $BC$ átmérővel biró körön feküsznek. Végre a $BCB'C'$ teljes négyszögnek $A$-val szemközt fekvő átlója $EP$, mint az $A$ polárisa valóban merőleges az említett körnek $A$-n keresztülmenő átmérőjére, az $AF$ egyenesre.

*

*Negyedik megoldás Szépréthy Béla főreáliskolai tanár úrtól Brassón.*

E tétel bebizonyítására húzzuk meg a háromszög többi magasságait is, és legyenek ezek talppontjai $B'$ illetve $C'$, a háromszög magassági pontja pedig $P$. A $B'C'$ egyenes kimetszi a $BC$ egyenesen a $D$-hez konjugált negyedik harmonikus pontot $E$-t, az $AB'PC'$ teljes négyszög egyik alaptulaj-

* $(P\cdot CBF\infty)$ = ama négy sugár kettős viszonya, mely a $P$ pontot a $C$, $B$, $F$, $\infty$ pontokkal csatolja.

donságánál fogva. Ha $F$ a $BC$ oldal felező pontja, nyilvánvaló, hogy az $ABC$ és $AFE$ háromszögekre nézve az $AD$ magasság közös. Hogy a magassági pont is közös volt kitünjék, arra nézve csak azt kell bebizonyítanunk, hogy $P$ és $E$ pontok összekötő egyenese az $AFE$ háromszög egyik magassága, vagyis hogy $PE \perp AF$-re.

Ennek kimutatására képezzük a következő pontcsoportok kettősviszonyait

$$(BCDE) = -1 \tag{1}$$

és

$$(BCF\infty) = -1\,;$$

vagy az utóbbiban szereplő pontpárok felcserélésével

$$(CB\infty F) = -1, \tag{2}$$

hol a $\infty$ jel alatt a $BC$ egyenes végtelenben gondolt pontja értendő.

E pontcsoportoknak $A$, illetőleg $P$ pontokból való vetítése révén nyerünk két sugársort, melyek az adott kettősviszonyok egyenlőségénél fogva projektivek.

$$(A \cdot BCDE) = (H \cdot CB\infty F).$$

Mivel e sugársorokban a szerkesztésnél fogva $AB \perp PC$-re, $AC \perp PB$-re és $AD \perp P\infty$-re, és így az ezek által a sík végtelenben gondolt egyenesén megállapított projektiv pontsorokban három és ennélfogva az összes megfelelő pontpárak egyszersmind a rajta levő czirkuláris pontinvolúczióban is megfelelő pontpárok; következik, hogy az $AE$ és $PF$ megfelelő sugarak szükségképen egymásra merőlegesek.

*

*Ötödik megoldás Nesnera Aladár főreáliskolai tanár úrtól Aradon.*

Ha $BC$ átmérő fölött $F$ pontból kört írunk, akkor az $E$ ponthoz tartozó poláris a $D$ ponton megy át és az $u$ egyenesre merőleges. Jelöljük e polárisnak a körrel való metszéspontját $H$-val, akkor a $BHC$ és $FHE$ derékszögű háromszögekből következik, hogy $BD \,.\, DC = DH^2$ és $FD \,.\, DE = DH^2$ azaz hogy $BD \,.\, DC = FD \,.\, DE$.

Az $s$ ($CFBE$) tehát involúcziós pontsornak tekinthető; a megfelelő pontok $B$, $C$ és $F$, $E$, az involúcziós pontsor középpontja $D$, mert a föntiek szerint $BD \,.\, DC = FD \,.\, DE$.

Ha ezt az involúcziós pontsort a $D$ középpontjában reá emelt merőleges $P$ és $A$ pontjából vetítjük, két projektiv sugársort nyerünk, melyeknek megfelelő sugarai $AC$ és $PB$, $AB$ és $PC$ s. i. t. egymást egy kúpszeletnek pontjaiban metszik. E kúpszeletnek $PA$ az egyik tengelye, mert a $D$ és $A$

pontokban az érintők a $D$-nek megfelelő, azaz az $s$ egyenes végtelenbe fekvő pontjába futnak, s így $s$-sel párhuzamosak és $DA$-ra merőlegesek.

Ez a kúpszelet kör lesz, ha a két projektiv sugársor megfelelő sugarai egymásra merőlegesen állanak. A megfelelő sugarak azonban az involúcziós pontpárokat az $A$ és $P$ pontokkal kötik össze, s így ez utóbbi esetben az $s$ egyenessel háromszögeket és azok két magassági vonalát képezik; miből következik, hogy ez utóbbiak egymást az $AD$-nek $P$ pontjában metszik.

A szóban forgó föladat tehát csak egy különös esete amaz általános tételnek, mely szerint: *valamely involúcziós pontsor középpontjában emelt merőleges bármelyik pontját az involúcziós pontsor megfelelő pontjaival összekötő egyenesek a pontsor s sorozójával oly háromszögeket alkotnak, melyeknek magassági vonalai egymást ama merőleges egyenes ugyanazon pontjában metszik.*

Az $AP$ átmérője meghatározta kör az egyirányú involúcziós pontsorokat két képzetes, a külön irányúakat két valós pontban metszi. Ez utóbbi esetben a metszéspontok a pontsor kettős pontjai. Ha tehát ismeretes a külön irányú involúcziós pontsor $D$ középpontja, akkor a föntiek alapján megszerkesztett $PA$ átmérővel biró kör igen egyszerű szerkesztést nyújt a kettős pontok fölkeresésére.

*

## *Hatodik megoldás dr. Kürschák József műegyetemi m. tanár úrtól.*

A bebizonyítandó tétel érdekes geometriai értelmezése annak a számtani igazságnak, hogy két szám $(b, c)$ számtani közepének és harmonikus közepének szorzata egyenlő az adott számok szorzatával. Képletben:

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}=bc.$$

Ugyanis válaszszuk hosszegységül $AD$-t. Legyen továbbá az $ABC$ háromszögnek $BC$ alapja és $AD$ magassági vonala egy derékszögü koordinátarendszernek $x$ illetve $y$ tengelye. $B$ és $C$ abszczisszáit jelöljük $b$ illetve $c$-vel.

Akkor az $ABC$ háromszög szögpontjai:

$$A(0,\ 1),\quad B(b,\ 0),\quad C(c,\ 0).$$

A velök szemben levő oldalak egyenletei:

$$y=0,\qquad \frac{x}{c}+y=1,\qquad \frac{x}{b}+y=1,$$

továbbá a magassági vonalak:

$$x=0,\qquad \frac{x}{b}-\frac{y}{bc}=1,\qquad \frac{x}{c}-\frac{y}{bc}=1,$$

tehát a magassági pont:

$$(0, \ -bc).$$

Az $AEF$ háromszög magassági pontja hasonlóan adódik ki, csakhogy $b$ és $c$ helyébe azoknak harmonikus illetve számtani közepei teendők. Hogy a két magassági pont összeesik, e szerint egyenlő értékü állítás avval, mely szerint a $bc$ szorzat értéke a mondott helyettesítésnél nem változik.

*

*Hetedik megoldás Tőtössy Béla műegyetemi tanár úrtól.*

A feladat fogalmazásában foglalt szerkesztésből következik, hogy $D$ középpontja a $B$, $C$ és $F$, $E$ pontpárok meghatározta involúcziónak és $A$, $P$ a konjugált involucziónak pontpárja, úgy hogy nemcsak a feladatban közölt tétel, de annak Csillag-Nesnera-féle általánosítása is e folyóirat 349. lapján közölt II. alatti tételemnek közvetetlen folyománya.

## PHYSIKAI LABORATORIUM.

**Egyszerű phosphoroskop.** A phosphorescentia jelenségét rendesen a hosszabb ideig utánvilágító anyagokon szokás bemutatni, mert ehhez magán az anyagon kívül csupán csak napfény — esetleg magnesium-fény — szükséges. BECQUEREL phosphoroskopjával az oly testek phosphorescentiája is megmutatható, melyek a megvilágítás után csak igen rövid ideig, alig $\frac{1}{1000}$ mp.-ig világítanak; de a készülék kevéssé van elterjedve s nagyobb hallgatóságnak való bemutatásra nem alkalmas.

LÉNÁRD FÜLÖP (Bonnban tartózkodó magyar physikus) igen egyszerű módot ír le, melyen a nagyobb fajtájú Ruhmkorff-féle inductor phosphoroskoppá átalakítható. — E végből a higanyos interruptor billegő rúdjához mintegy 50 cm. hosszaságú könnyű, de mégis eléggé merev fapálczát köt úgy, hogy a pálcza vízszintes legyen, ha az interruptor nem működik. A pálcza végére 8 cm. hosszú és 4 cm. széles kemény fekete papirlap van ragasztva úgy, hogy lapja a pálcza lengési síkjába essen. Ha az interruptor megindul, a papirlap saját síkjában fel-alá leng; az interruptor úgy igazítandó, hogy a papirlap amplitudja közel 10 cm. legyen.

Az inductor secundär tekercsébe egy nagy leydeni palaczk van beiktatva s a kisütő 5—10 mm. hosszaságú szikrákra beállítva. Hogy a szikrák fényében lehetőleg sok phosphorescentiát gerjesztő fény legyen, a kisütő végeire hegyezett czinkdrótok vagy hegyesre vágott czinkpléh darabok erősítendők. Ezen fém gőzeiben tudvalevőleg igen sok az ibolya és ibolyántúli fény.

A szikraút már most úgy állítandó, hogy a papirlap lengése közben az átcsapó szikrákat elfödje. Ilyenkor a papir mozdulatlannak látszik s csak a szikrák gyenge diffus fénye veszi körül. De még ez is elfödhető a lengő lap elébe állított nagyobb fekete ernyővel, melyen a mozgó papirlapnál valamivel kisebb ablak van vágva.

Ezzel a phosphoroskop elkészűlt. A papir és a szikraút mögé phosphoreskáló testet, pl. egy üvegcső-darabot helyezvén, a látvány meglepő. A fekete papir az üvegcsövet nem fedi el, mely a fekete papirlapon keresztül zöldes phosphoreskáló fényben ragyog. A jelenség azt a benyomást kelti, mintha a papir a phosphoreskáló fényre nézve átlátszó lenne. A papir tény-leg elfödi a mögötte levő testet, de csak azalatt, míg a szikra fénye meg-világítja s azután elvonulván, a test phosph. fénynyel tovább világít. Az interruptor járását gyorsítván, az utánvilágítás erősbödik.

A phosphorescentiát jól mutatják még a mészpát, kréta, márvány, cseppkő, folypát, topáz, gyémánt stb., valamint a legtöbb fluoreskáló test is.

A czink csúcsok között átcsapó szikrafénynek a phosphorescentiát ger-jesztő láthatatlan fénysugarakban való gazdagságát mutatja a következő kísérlet. Réztartalmú calciummonosulfidból (Ca S) készült világító kő pora két óra-üvegben egyenlő rétegben van elhelyezve; az egyik 3 mm. vastag-ságú kvarczlemezzel, a másik ugyanoly vastag üveglappal leborítva. A két præparatumot egyidejűleg megvilágítván, kiderült, hogy a kvarczczal födött réteget 13-szor akkora távolságban kellett felállítani, mint az üveggel borí-tottat, hogy utánvilágításuk egyenlő legyen. Ebből következik, hogy a kvar-czon átmenő (összes) fénymennyiségnek $13^2 = 169$-szer akkora a phos-phorescentiát gerjesztő képessége, mint az üvegen átmenő (látható) fény-mennyiségnek. E szerint a szikrákból kisugárzott fénynek legnagyobb része láthatatlan.

Az itt leirt phosphoroskop nagy előnye, hogy igen könnyen kezelhető. Nagyobb tárgyakat egyszerűen kézbe fogva lehet a szikrafény hatásának kitenni, kisebbeket pedig alkalmas tartóba foglalni. Poralakú testeket, minthogy a szikráktól gerjesztett léghullámocskák a port szétszórnák, vékony kvarczlapokkal lehet befödni; a kvarcz a fénygerjesztő sugarakat átbocsát-ják s a phorphorescentia nem gyöngül észrevehetőleg.

Az ily phosphoroskop egybeállításához nem kell okvetetlenül higanyos interruptorral gerjesztett nagy induktor. Kisebb fajta rugós interruptor is hasznavehető; kevés leleményességgel kitalálható, mi módon kell a rugóhoz az ernyőt erősíteni, hogy lengése közben az átcsapó szikrákat elfödje. Minden körülmények között arra kell törekedni, hogy a lengő lap akkor födje el a szikraútat, a mikor nyugalmi helyén vonul át, azaz a mikor a sebessége a legnagyobb. (Ann. d. Ph. XLVI. 637. l.) *B. G.*

*

**Egyenletes mozgás.** Tökéletesen hengeres próbacsövet félig vagy egy harmadáig megtöltünk sűrű olajjal és beforrasztjuk. Ha a súlypontot kel-lően szabályozzuk, akkor e henger hosszú, sima léczen, mint lejtőn tökéle-tesen egyenletes sebességgel lassan legurul.

*

**Erőpár.** 1—2 m. hosszú drótra 1—1·5 méteres vonalzót függesztünk fel úgy, hogy a vonalzó a vízszintes síkban legyen. Állítsuk ezt a nagy *tor-*

*ziós mérleget* úgy, hogy a vonalzó a drót sodratlan állapotában kelet-nyugati irányban helyezkedjék el. E vonalozóra erős mágnes rudat fektetünk s tetszőleges súlylyal ellensúlyozzuk. A mágnes erőpárt képvisel és a sodronyt bizonyos szöggel megsodorja: a *torzió* szöge nem változik, ha a mágnest a vonalzón eltoljuk.

*

**A súlypont meghatározása.** Egy szivarskatulya belsejében fémtömeget erősítünk meg oly formán, hogy a súlypont a geometriai középponton kívűl essék. A súlypont coordinatáit a következő módon határozzuk meg. Egy léczből (vonalozóból) mérleget készítünk oly módon, hogy alsó lapjának közepébe élt erősítünk meg, és a léczet az asztalra fektetjük. A mérleg jobb felén a gyorsmérleg módjára ($q$) mozgósúly van. A skatulya súlyát ($p$) először közönséges mérlegen határozzuk meg; azután a léczmérleg bal felére tesszük és ellensúlyozzuk. A jobb oldal megadja a momentumot $qa$ (ha «$a$» a mozgósúly karja); e momentummal egyenlő a skatulya momentuma, $px$. Ebből az $x$ kar kiszámítható. A skatulyát három egymásra merőleges élével fektetvén egymásután a vonalzóra, a három kísérletből a súlypont coordinatái adódnak ki.

*

**Színt** (niveau-t) **tartó szivornya.** A szivornya csöve az edény fenekéről felszáll, az edény külső falán leszáll egészen az edény fenekének mélységéig, azután megint felszáll azon magasságig, melyben a folyadék felszínét tartani akarjuk. Ha a szivornya egyszer meg van indítva, akkor csak a felesleges vizet vezeti le, és a víz nem csap vissza az edénybe.

*

**Fénysugár.** Az optikában minduntalan «fénysugárra» van szükségünk. Napfény természetesen a legjobb sugárnyalábot adja, de naptükör kell hozzá. A hol nincsen, a következő módon segíthetünk magunkon. Fényforrásúl szolgál egy alacsony petroleumlámpa lángjának az éle vagy pedig egy izzólámpa szénfonala. Egy kis gyujtó távolságú lencse ennek egy még keskenyebb képét adja. Hogy a kép minél keskenyebb és élesebb legyen, a láng elé keskeny hasadék alakú diaphragmát teszünk. A kép sugarait azután egy collimator-lencse párhuzamosítja. E készülék az asztalon három méternyire hosszban keskeny, éles, fényes sugarat rajzol. Ha útjába faoszlopocskára erősített függőlegesen álló tükröt állítunk, a visszaverődés törvénye az asztalon óriási dimensióban élesen rajzolódik. E végből az asztalra egy nagy ív papirost terítünk, melyre vastag vonalakkal 1 m. átméröjű 10—10 fokra beosztott kör van rajzolva, s középpontjába állítjuk a tükröt,

**Gyujtó gyűrű.** Mintegy 1 m. átmérőjű fagyűrű belső oldalán van egy körülbelül 45° nyilású kúpnak vagy 5 cm. szélességű öve, fényes pléhből. Ezen öv gyújt, mint egy gyujtó tükör. Kár, hogy ezen ősrégi, már az araboknál használatban volt készülék kiveszett a physikai szertárakból.

*

**Az égboltozat képe.** Veszünk nyakkal ellátott nagy, legalább is 20 cm. átmérőjű üveggömböt (ú. n. szedőgömböt) és olajfestékkel ráfestjük a legfeltünőbb csillagcsoportokat. A sarkcsillagot a nyak tengelyébe rajzoljuk. A gömböt félig vízzel töltjük meg és bedugaszoljuk. A víz felülete akkor minden állásban megadja a föld vízszintes felületét, a viztűkör kerülete pedig a láthatárt. A gömböt tengelye körül forgatván, megkapjuk a csillagos égboltozat látszólagos napi mozgását, a földnek tetszőleges pontjára nézve.

*Fuchs Károly.*

*

**Czink amalgamálása.** A galván-elemek czinkje sokszor a leggondosabb tisztítás után sem amalgamálódik. Azt tapasztaltam, hogy a czink rövid időre higított ammoniakoldatba való megmártás után a higanyt, ha kefével rádörzsöljük, könnyen felveszi.

*

**Intensiv Na-fény.** Homogén Na-fény előállítására chlornatrium helyett sokkal czélszerűbb bromnatriumot égetni a Bunsen-lángban; a homogén sárga fény sokkal intensivebb, és ez utóbbi vegyület a lángban kevésbbé serczeg.

*

**Oxygenfejlesztés.** Ha az oxygénfejlesztésnél chlorkalium és barnakőkeveréket használunk, a gázfejlődés néha oly rohamosan megy végbe, hogy a kaucsukcsöveket is ledobja. A fejlődés lassúbb és egyenletesebb, ha 4 rész chlorkaliumot, 1 rész barnakövet s 2 részt abból az anyagból keverünk össze, a mely az oxygénfejlesztés után a retortában marad. A gázfejlődés elég gyorsan, de nem rohamosan megy végbe, úgy hogy folytonos felügyelet nem kivántatik hozzá. Az így fejlesztett oxygént mosópalaczkon is keresztül vezetvén, tisztább s kevesebb chlortartalmú lesz.

*Szontagh Gusztáv.*

# VEGYESEK.

## MISI PAJTÁS, SÉTÁLHATNÁL? *

Miss Christine Ladd logikai feladata.

*Schüler:* Ich bin dabei mit Seel' und Leib;
Doch freilich würde mir behagen
Ein wenig Freiheit und Zeitvertreib
An schönen Sommerfeiertagen.
*Mephistopheles:* Gebraucht der Zeit, sie geht so schnell von hinnen,
Doch Ordnung lehrt Euch Zeit gewinnen.
Mein teurer Freund, ich rat' Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
*Goethe*, Faust.

Hatan valának a híres . . . magánintézet bennlakó növendékei: Kálmán, László, Mihály, Nándor, Oszkár és Péter. Mihály volt köztük minden tekintetben a legéletrevalóbb. A ki feladatában megakadt, Misitől kért tanácsot. De a játékban is ő volt a legügyesebb, úgy, hogy labdázásnál, viaskodásnál is mindenki az ő pártjára vágyott. Az igazgató is minden vizsgálaton megdicsérte őt. Szemében még sem Misi volt az intézet első növendéke. Misinek legfényesebb feleletei sem bírtak az igazgató arczára oly ragyogó fényt varázsolni, mint a milyen gyönyörűség látszott rajta, mikor László és Oszkár gazdag atyjától vadkan érkezett ajándékba. A két testvér mindenütt előnyben részesült.

*A hétköznapi séták előtt is László és Oszkár nyilatkozhattak először, sétálni akarnak-e vagy inkább az intézetben méltóztatik-e maradniok. Csak azután vetették fel Misinek a séta vagy nem-séta kérdését.* Akkor pedig már kicsinyes rendtartási szabályok korlátozták szabad választását. Ezek pedig a következők voltak:

*I. Hétfőn és kedden sohasem engedték meg négy vagy több tanulónak a sétát.*

*II. Viszont csütörtökön, pénteken és szombaton nem volt szabad három vagy több növendéknek az intézetben maradnia.*

*III. Ha kedden, szerdán vagy szombaton Misi Lászlóval akart tartani,*

* *Studies of logic* by nembres of the Johns Hopkins University. Boston, 1883, p. 58—61.

Schröder. Algebra der Logik. I, 548—552.

*ezt csak akkor tehette meg, ha Kálmán, Oszkár és Péter is velök lehetett.*

*IV. Ha hétfőn vagy szombaton László sétálni ment, akkor vagy Nándor tartozott az intézetben maradni vagy Misi, Oszkár és Péter.*

Egy szerdai napon László és Oszkár valamin összevesztek. Oszkár duzzogott s mikor László sétálni ment, nem ment vele, pedig gyönyörű idő volt. Misi bizony szívesen tartott volna Lászlóval, de a rendtartási szabályok nem engedték meg. Mi több, Oszkár még ingerkedett vele: Misi pajtás, sétálhatnál? Azonfelül a kis haragos avval fenyegetődzött: «Fogsz te ezen a héten még többször is itthon maradni».

Misi egy ideig hallgatott, azután Oszkár ismételt ingerkedésére *nem*-mel feleselt. Oszkár visszafeleselt, végre fogadásra került a dolog. Oszkár amaz előjogát vetette koczkára, melynél fogva eddig *Misi előtt döntött a sétára nézve;* ugyanis megigérte, hogy — ha a fogadást elveszti — a sétára vonatkozó bármely kivánságától Misi kérésére mindenkor kész elállani.

*A nyertes Misi volt.*

*

Valjon Misi már hallgatása közben vette-e észre, hogy nyeresége biztos, vagy öt is, mint ellenfelét, csak a vita heve ragadta a fogadásra, arra nézve

«Nem érzem magamat énekkel adósnak».

De te, nyájas olvasóm, ki nem csak logikát tudsz, ki nem csak a kapcsolástannal tudod a külömböző lehetőségeket áttekinteni, hanem Bein Károly tanár úr czikkéből a logika-kalkulust is elsájátítottad, könnyen fogod eldönteni, hogy egyáltalában mennyiben korlátozták a rendtartási szabályok Misi pajtás szabad elhatározását *s mikor kényszerítették akarva nem akarva sétára vagy honmaradásra.*

Jelentsék e számításban

$$K, L, M, N, O, P.$$

rendre Kálmán, László, Mihály, Nándor, Oszkár illetve Péter sétáját, tehát

$$K_1, L_1, M_1, N_1, O_1, P_1$$

az illetőnek honmaradását (nem-sétáját).

Továbbá

$$h, k, s, c, p, f$$

arra figyelmeztessenek, hogy az illető séta vagy honmaradás mely napon történik. Pl.

$$hK$$

Kálmánnak hétfői sétája, hasonlóan.

$$fO_1$$

Oszkárnak szombati honmaradása.

Az első szabály értelmében a hét első két napján nem lévén megengedve, hogy négyen vagy többen menjenek sétálni, a logika-kalkulus jelzéseinek értelmében pl.:

$$hKLMN=0$$

és

$$kKLMN=0$$

vagy összeadva

$$(h+k)\ KLMN=0.$$

Az *első* szabály tetjes tartalmának algebrai kifejezését úgy nyerjük, ha utolsó egyenletünkben $KLMN$ helyébe $K$, $L$, $M$, $N$, $O$ és $P$ összes quaternóit teszszük s az így kapott egyenleteket összeadjuk.

Hogy pl.

$$(h+k)\ KLMNO=0,$$

azt nem kell külön felirnunk, mert már a

$$(h+k)\ KLMN=0$$

egyenletből következik.

A *második* szabály a honmaradást korlátozza úgy, hogy pl.:

$$(c+p+f)\ K_1L_1M_1=0.$$

A szabály teljes kifejezése a hasonló szerkezetű egyenletek összeadásából adódik.

A *harmadik* szabályban subsumtiók vannak kifejezve, hogy t. i.

$$(k+s+f)\ LM\Subset KLMOP$$

és

$$(k+s+f)\ L_1M_1\Subset K_1L_1M_1O_1P_1$$

Ámde bármely

$$\alpha=\beta$$

subsumtio egyenlő értékű az

$$\alpha\beta_1=0$$

egyenlettel, tehát e szabály követelményei is egyenletekkel jellemezhetők.

Esetünkben

$$(KLMOP)_1=K_1+L_1+M_1+O_1+P_1$$

és

$$(K_1L_1M_1O_1P_1)_1=K+L+M+O+P.$$

A fennebbi subsumtiók értelme tehát egyenletek alakjában így fejezendő ki:

$$(k+s+f)\ LM(K_1+O_1+P_1)=0$$

és

$$(k+s+f)\ L_1M_1(K+O+P)=0,$$

a hol már tekintetbe vettük, hogy

$$LL_1=MM_1=0.$$

A *negyedik* szabály szerint

$$(h+f)\ L=N_1+M_1O_1P_1$$

vagyis

$$(h+f)\ LN(M_1O_1P_1)_1=0.$$

Ámde a második szabály értelmében

$$fM_1O_1P_1=0,$$

úgy, hogy előbbi egyenletünk az

$$(h+f)\ LN(M_1O_1P_1)_1+fLNM_1O_1P_1=0$$

egyenlettel pótolható. Innen végre

$$hLN(M_1O_1P_1)_1+fLN=0.$$

*A négyszabály tartalmát tehát a következő egyenletek összege fejezi ki.*

$$\text{I)}\quad (h+k)\ (KLMN+KLMO+KLMP+ \\ +KLNO+KLNP+KLOP+KMNO+ \\ +KMNP+KMOP+KNOP+LMNO+ \\ +LMNP+LMOP+LNOP+MNOP)=0,$$

$$\text{II)}\quad (c+p+f)\ (K_1L_1M_1+K_1L_1N_1+K_1L_1O_1+K_1L_1P_1+ \\ +K_1M_1N_1+K_1M_1O_1+K_1M_1P_1+K_1N_1O_1+K_1N_1P_1+K_1O_1P_1+ \\ +L_1M_1N_1+L_1M_1O_1+L_1M_1P_1+L_1N_1O_1+L_1N_1P_1+L_1O_1P_1+ \\ +M_1N_1O_1+M_1N_1P_1+M_1O_1P_1+N_1O_1P_1)=0.$$

$$\text{III)}\quad (k+s+f)\,(K_1LM+LMO_1+LMP_1+KL_1M_1+L_1M_1O+L_1M_1P)=0,$$

$$\text{IV)}\quad hLN(M+O+P)+fLN=0.$$

*E négy egyenlet összegéből kell K, N és P-t eliminálnunk.*

Az eliminálásra vonatkozólag ismeretes, hogy valamely

$$Ax+Bx_1+C=0$$

alakú egyenlet egyenlő értékű a következővel:

$$(A+C)x+(B+C)x_1=0\,;$$

ennek pedig rezultánsa:

$$(A+C)\ (B+C)=0$$

vagyis

$$AB+C=0.$$

Esetünkben $K$ (és $K_1$) eliminálásánál azonban korántsem kell $K$ és $K_1$ együtthatóinak teljes alakját kiírnunk. Ugyanis a két együttható-szorzatából kimaradnak mindazok a tagok, melyek két különböző kis betűt tartalmaznak. Valóban valamely séta ideje nem lehet két különböző nap, s azért pl. $hc=0$. E szerint $K$ együtthatójából elhagyhatók a $h$-t tartalmazó tagok, $K_1$ együtthatójából a $c$ és $p$-t tartalmazó tagok, mert eme betűk csak egy-egy tényezőben szerepelnek, minélfogva a kéttényező szorzatára nincsen befolyásuk.

Az I—IV. alatti egyenletek összegéből tehát $K$ és $K_1$ együtthatóinak szorzatára a következő kifejezés adódik ki:

$$\begin{aligned}&[k(LMN+LMO+LMP+LNO+LNP+\\&+LOP+MNO+MNP+MOP+NOP)+\\&+(k+s+f)L_1M_1]\,[f(L_1M_1+L_1N_1+L_1O_1+L_1P_1+\\&+M_1N_1+M_1O_1+M_1P_1+N_1O_1+N_1P_1+O_1P_1)+\\&+(k+s+f)LM]=k(LMN+LMO+LMP)+fL_1M_1\,.\end{aligned}$$

A szóban forgó első eliminálás rezultánsa tehát:

$$\begin{aligned}&(h+k)\,(LMN+LMOP+LNOP+MNOP)+\\&+(c+p+f)\,(L_1M_1N_1+L_1M_1O_1+L_1M_1P_1+L_1N_1O_1+\\&+L_1N_1P_1+L_1O_1P_1+M_1N_1O_1+M_1N_1P_1+M_1O_1P_1+\\&+N_1O_1P_1)\,(k+s+f)\,(LMO_1+LMP_1+L_1M_1O+L_1M_1P)+\\&+hLN(O+P)+kLM(O+P)+f(LN+L_1M_1)=0.\end{aligned}$$

A legközelebbi kiküszöbölésnél $N$ és $N_1$ együtthatóinak szorzata

$$fL(M_1O_1+M_1P_1+O_1P_1),$$

maga a rezultáns pedig:

$$\begin{aligned}&(h+k)LMOP(c+p+f)\,(L_1M_1O_1+L_1M_1P_1+L_1O_1P_1)+\\&+M_1O_1P_1)+(k+s+f)\,(LMO_1+LMP_1+L_1M_1O+L_1M_1P)+\\&+kLM(O+P)+fL_1M_1+fL(M_1O_1+M_1P_1+O_1P_1)=0.\end{aligned}$$

Itt még tetemes egyszerüsítések végezhetők. Ugyanis a $k$-val szorozandó kifejezések közül:

$$\begin{aligned}&LMOP+LMO_1+LMP_1+LMO+LMP=\\&LM[(O+O_1)+(P+P_1)]=LM,\end{aligned}$$

továbbá az $f$ együtthatóiban:

$$L_1M_1O_1+L_1M_1P_1+L_1M_1O+L_1M_1P=LM_1$$
$$LMO_1+LM_1O_1=LO_1$$
$$LMP+LM_1P_1=LP_1$$
$$L_1O_1P_1+M_1O_1P_1+LO_1P_1=O_1P_1.$$

Rezultánsunk tehát rövidebben:

$$hLMOP+k)LM+L_1M_1O+L_1M_1P)+$$
$$+s(LMO_1+LMP_1+L_1M_1O+L_1M_1P)+$$
$$+c+p(L_1M_1O_1+L_1M_1P_1+L_1O_1P_1+M_1O_1P_1)+$$
$$f(L_1M_1+LO_1+LP_2+O_1P_2)=0.$$

Innen még $P$ eliminálandó. Ennél az utolsó kiküszöbölésnél $P$ és $P_1$ együtthatóinak szorzata egészen elmarad. Valóban

$$hLMO+(k+s)L_1M_1$$

meg

$$sLM+(c+p)(L_1M_1+L_1O_1+M_1O_1)+f(L+O_1)$$

szorzata eltünik.

A keresett rezultáns tehát egyszerűen utolsó egyenletünknek $P$ és $P_1$-től független része vagyis a következő:

$$(k+sO_1)LM+(kO+sO+cO_1+$$
$$+pO_1+f)L_1M_1+fLO_1=0.$$

A felvetett kérdésre e szerint a következőképen kell válaszolni.

*I. Misi nem sétálhat:*

*1. kedden ha László sétál,*

*2. szerdán ha László sétál, de Oszkár az intézetben marad.*

*II. Misi akarata ellenére is sétálni kénytelen:*

*1. és 2. kedden és szerdán, ha Oszkár László nélkül sétálni megy,*

*3. és 4. csütörtökön és pénteken ha László és Oszkár mindketten az intézetben maradnak,*

*5. szombaton, ha László otthon marad.*

Minden más esetben Misi független az ő gazdag társaitól.

Megjegyzendő még, hogy szombaton

$$fLO_1=0$$

egyenlet értelmében Oszkár nem maradhat László nélkül az intézetben.

*Kürschák József.*

## Helyreigazítások.

32. l. alulról 8. sor 1776-ban megjelent helyett: 1766-ban írt.

u. o. alulról 3. sor *berufenen* után még: *und unberufenen.*

37. l. felülről 10. sor a $(3\alpha-4)$ tényező helyett. $(3\beta-4)$.

u. o. alulról 8. sor és $\begin{matrix}\alpha=6\\ \beta=5\end{matrix}$ helyett: és $\begin{matrix}\alpha=6.\\ \beta=4.\end{matrix}$

48. l. alulról 12. sor 3649193 helyett 364913.

u. o. alulról 4. sor 336851849433403 helyett 336851849443403.

u. o. az erre következő számításban $\sqrt{2}$ helyett mindenütt $\sqrt{\frac{1}{2}}$ irandó.

275. l. első sor: Lebeden helyett Lebedev.

349. l. alulról 6. sor elmarad teljesen az 5. sorból is a mondat végéig.

u. o. alulról 9. sor tehát helyett: De

$$\sphericalangle KXO + \sphericalangle XOK = \sphericalangle MKO$$
$$\sphericalangle OXK' + \sphericalangle K'OX' = \sphericalangle OK'M$$

az $MKOK'$ négyszögből pedig következik, hogy

$$\sphericalangle MKO + \sphericalangle OK'M = 2.90^\circ$$

tehát.

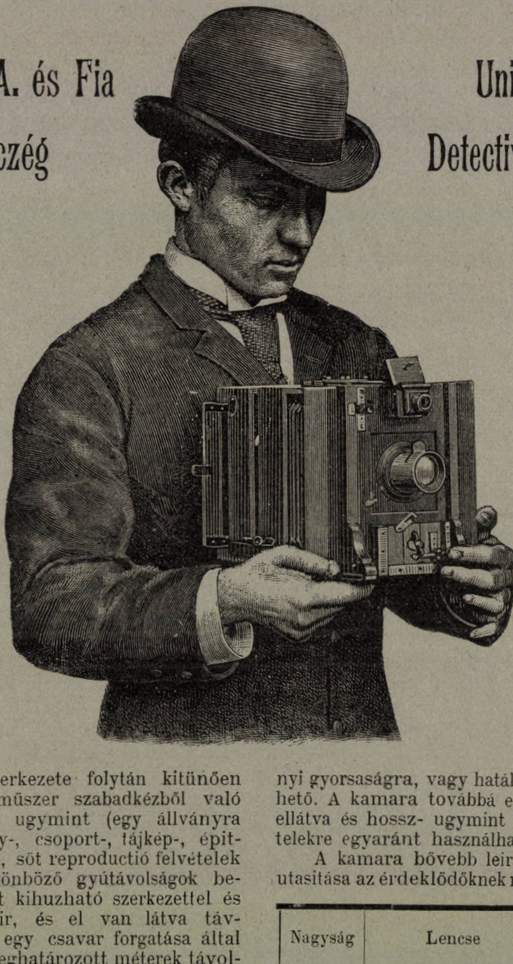
# FÉNYKÉPÉSZETI KÉSZÜLÉKEK

**minden nagyságban és kivitelben nagy választékban.**

Mint különösen kedvelt és nagyon elterjedt készüléket ajánljuk

## Goldmann A. és Fia bécsi czég Universalis Detectiv-kamaráját.

Részletes, dúsan illustrált árjegyzékek bérmentve küldetnek.



Részletes, dúsan illustrált árjegyzékek bérmentve küldetnek.

Czélszerü szerkezete folytán kitünően alkalmas ezen műszer szabadkézből való pillanatfelvételek, ugymint (egy állványra csavarva) személy-, csoport-, tájkép-, épitmény-, interieur-, sőt reproductió felvételek eszközlésére. Különböző gyútávolságok beállithatása végett kihuzható szerkezettel és hajtócsavarral bir, és el van látva távmutatóval, mely egy csavar forgatása által a becslés által meghatározott méterek távolságának megfelelő számra állittatik be, hogy az emlitett távolságban levő tárgy élesen jelenjék meg a lemezen. Az objectivum egy különös szerkezetü Steinheil-féle antiplanetikus lencse, a mögötte levő pillanatzár pedig kényelmesen beállitható $^1/_{100}$—1 másodperczényi gyorsaságra, vagy hatályon kivül helyezhető. A kamara továbbá egy keresővel van ellátva és hossz- ugymint függőleges felvételekre egyaránt használható.

A kamara bővebb leirása és használati utasitása az érdeklődőknek rendelkezésére áll.

| Nagyság | Lencse | Ára 6 kettős kassetával és böröndddel |
|---|---|---|
| 9×12 | Antiplanet 25 m/m | **110.—** |
| 12×16½ | « 33 « | **152.—** |
| 13×18 | « 43 « | **190.—** |
| 16×21 | « 43 « | **215.—** |
| 16×21 | « 48 « | **230.—** |

**Calderoni és Társa, Budapest, IV. kis hid-utcza 8.**

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.