CSILLAGÁSZATI LAPOK

A KIR. MAGY. TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT
CSILLAGÁSZATI SZAKOSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI
DEZSŐ LORÁNT

7. évfolyam **1944** **1. szám**

TARTALOM

BUDAPEST.
STEPHANEUM NYOMDA

CSILLAGÁSZATI LAPOK

A KIR. M. TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT CSILLAGÁSZATI SZAKOSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

MEGJELENIK NEGYEDÉVENKÉNT

1944 JANUÁRI SZÁM

Szerkeszti

DEZSŐ LORÁNT

A szerkesztőség címe: Csillagvizsgáló Intézet, Kolozsvár, Majális-u. 109. Tel.: 17-20. vagy Csillagvizsgáló Intézet, Bpest-Svábhegy, Konkoly Thege Miklós-út 2. Tel.: 365-187.

A folyóiratot a Csillagászati Szakosztály tagjai illetmény gyanánt kapják. Tagdíj 8 P. A Szakosztály tagja bárki lehet, ki egyúttal a Természettudományi Társulat tagja.

Nem tagok részére a Csillagászati Lapok évi előfizetési díja 9 pengő. Az előfizetési díjak a Természettudományi Társulat (a Csillagászati Lapok Kiadóhivatala) címére Budapest, VIII., Esterházy-utca 16. sz. küldendők. Postatakarékpénztári csekkszámla sz. 32.399.

Előzetes megbeszélés nélkül beküldött cikkek megjelenését a szerkesztőség nem biztosíthatja.

Közleményeikért a szerzők sajátmaguk kötelesek felelősséget vállalni.

Az ábrákat a szerzők klisírozásra alkalmas módon küldjék be.

A cikkek magyar, német, angol, francia és olasz nyelven küldhetők be. Idegennyelvű cikkhez magyar, magyarnyelvű cikkhez idegennyelvű összefoglalás irandó.

Az irói tiszteletdíj oldalankint 6 P, sűrűbben szedett szöveg esetén 7 P. Doktori értekezések szerzői a tiszteletdíj helyett 150 példány ingyen különlenyomatot kapnak. Egyébként a szerzők cikkeikből 50 különlenyomatot kapnak ingyen, de saját költségükön tetszőleges számú példányt rendelhetnek.

CSILLAGÁSZATI LAPOK

7. évfolyam 1944 1. szám

PULSIERENDE STERNE*

Von *Wilhelm Becker* (Wien)

Wenn wir heute von pulsierenden Sternen sprechen, so meinen wir damit die Veränderlichen Sterne vom Typus δ Cephei. Die Vorstellung, daß es sich bei dieser Art von Veränderlichen um Sterne handle, die neben ihrer Helligkeit und Temperatur auch ihren Radius in periodischer Weise variieren, stand lange Zeit in Widerstreit mit der älteren Doppelsternvorstellung, die die Ursache der beobachteten Schwankungen der Zustandsgrößen auf die Eigentümlichkeiten eines Doppelsternsystems zurückführte, sei es eines perfekten Systems, sei es ein solches in Statu nascendi, wobei die Revolutionszeit bzw. bei letzterem die Rotationszeit gleich der Periode des Veränderlichen ist. Manche Beobachtungsfunde ließen sich gut auf dem Boden der Doppelsternvorstellung verstehen, andere aber garnicht. Genau so ging es aber auch der Pulsationsvorstellung; auch sie befand sich in einem entscheidenden Punkte im Widerspruch mit den Beobachtungen. Erst in den letzten Jahren ist hier eine Klärung eingetreten. Der Widerspruch wurde als nur scheinbar erkannt, als Folge ungerechtfertigter, stillschweigender Annahmen bei der Interpretation der Beobachtungen und aus dem anfänglichen Widerspruch wurde im Gegenteil ein eindrucksvoller, bündiger Beweis für die Richtigkeit der Pulsationsvorstellung. Von diesem scheinbaren Widerspruch und der Wendung, die die Dinge bei einer einwandfreien Interpretation der Beobachtungen nahmen, soll im folgenden die Rede sein. Doch soll zunächst ganz kurz der Beobachtungsfund bei den Cephei-Sternen gestreift werden im Interesse der Leser, die darüber nicht unterrichtet sind.

1. Das Phänomen der δ Cephei-Sterne.

Die δ Cephei-Sterne sind solche Sterne, bei denen alle beobachtbaren Eigenschaften einem streng periodischen, regelmäßig verlaufenden Wechsel zwischen zwei Extremen unterliegen. Die Helligkeit, die Temperatur, das Aussehen des Linienspektrums oder der Spektraltypus

* Nach einem Vortrag, gehalten in der astronomischen Abteilung des K. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Vereins in Budapest und im physikalischen Kolloquium der Universität zu Kolozsvár im Oktober 1943.

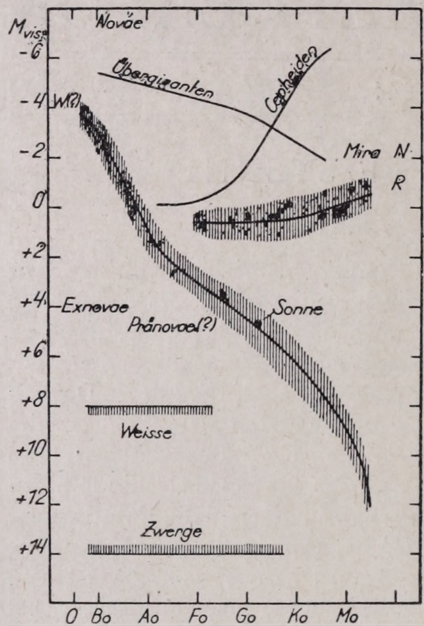


Abb. 1. Die Lage der δ Cephei-Sterne im Hertzsprung — Russell — Diagramm. (Aus W. Becker, Sterne u. Sternsysteme S. 93.)

und die Radialgeschwindigkeit, also die Geschwindigkeiten auf uns zu und von uns fort, sie alle machen diesen Wechsel mit.

Der periodische Wechsel der Helligkeit, der durch photometrische Beobachtungen verfolgt wird, wird anschaulich gemacht durch die Lichtkurve. Jeder Veränderliche besitzt die ihm eigentümliche fast unveränderliche Lichtkurve, in der ihm kein anderer Stern gleicht. Die Mannigfaltigkeit der Erscheinungsformen ist also recht groß, und wenn zwei Veränderliche ähnlich geformte Lichtkurven haben, dann unterscheiden sie sich sicher in der Periode und Amplitude. Trotz der Verschiedenartigkeit lassen sich aber doch die meisten Lichtkurven auf vier Grundformen zurückführen, die in Abb. 2 wiedergegeben sind.

Wenn man nicht äußerst genau beobachtet, dann erscheinen die Lichtkurven als unveränderlich. Sehr genaue, fortlaufende Messungen an einigen Veränderlichen haben dagegen nach Beobachtungen auf der Budapester Sternwarte die wichtige Tatsache ans Licht gebracht, daß doch Veränderungen der Lichtkurve von Periode zu Periode vorkommen, und daß diese sogar ganz geregelt selbst wieder nach einer bestimmten Periode verlaufen.

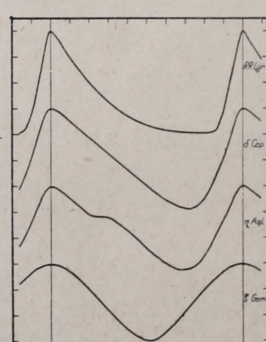


Abb. 2. Die vier typischen Lichtkurven von δ Cephei-Sternen. (Aus W. Becker, Sterne u. Sternsysteme S. 96.)

Der Lichtkurve kann man die Periode und Amplitude des Veränderlichen entnehmen. Die kürzeste Periode, die man bisher gefunden hat, beträgt nur 0·06 Tage und die längsten überschreiten 40—50 Tage nicht. Besonders häufig sind die Perioden um 0·5 und um 5 Tage. Da diese beiden Maxima in der Häufigkeitsverteilung durch ein tiefes Minimum getrennt sind, hat man die δ Cephei-

Sterne in zwei Gruppen aufgeteilt, in die kurzperiodischen und in die langperiodischen. Beide Typen unterscheiden sich auch in ihrer räumlichen Verteilung im Milchstraßensystem und in ihren räumlichen Geschwindigkeiten. Während die Kurzperiodischen einen fast kugelförmigen Raum von etwa 50 000 *Pc** Durchmesser erfüllen und sich mit den hohen Geschwindigkeiten von über 50 km/sec bewegen, befinden sich die Langperiodischen ausschließlich in einem stark abgeplatteten ellipsoidischen Raum, dessen Symmetrieebene die Milchstraße kennzeichnet und der eine große Achse von etwa 30000 *Pc* besitzt, und sie bewegen sich mit den geringen Geschwindigkeiten von weniger als 30 km/sec durch den Raum.

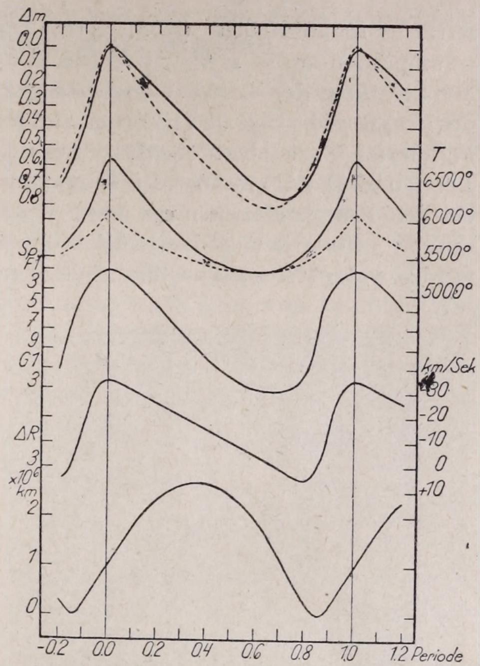


Abb. 3. Schwankungen der Zustandsgrößen bei δ Cephei. Lichtkurve (gestrichelt von der Pulsation befreit), Temperaturkurve (gestrichelt Strahlungstemperaturen), Spektraltypuskurve, Radialgeschwindigkeitskurve und Radiuskurve (durch Integration der vorhergehenden Kurve gewonnen). (Aus W. Becker, Sterne u. Sternsysteme S. 100.)

Die Amplituden schwanken von Stern zu Stern zwischen den Grenzen von rund $0{\cdot}1^m$ und $2{\cdot}0^m$. Das Intensitätsverhältnis zwischen Maxima und Minima liegt demnach zwischen 1·1 und 6·0, meist jedoch nahe bei 3·0.

Den Helligkeitsschwankungen gehen solche der Temperatur parallel, derart, daß maximale Helligkeit mit maximaler Temperatur und minimale Helligkeit mit minimaler Temperatur

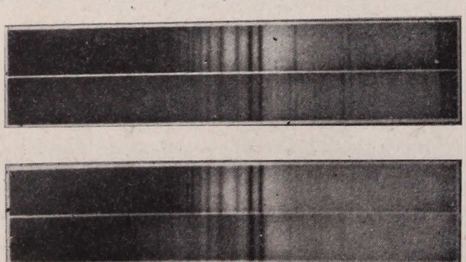


Abb. Linienspektrum zweier δ Cephei-Sterne (oben RT Aurigae and unten η Aquilae) oberes Bild jeweils nahe dem Maximum unteres jeweils nahe dem Minimum, nach Yü, Lik. Obs. Bull. 15, Plate II.

* Pc = Parsec

zeitlich zusammenfallen. (Abb. 3.) Im Durchschnitt ist die Temperaturamplitude um so größer, je größer die Helligkeitsamplitude ist. Die Temperaturen der Kurzperiodischen liegen bei 10 000—15 000 Grad, die der Langperiodischen sind niedriger und zwar um so mehr, je länger die Periode ist. Die niedrigste vorkommende Temperatur haben wir etwa bei 4.000 Grad. Die Amplituden der Temperaturschwankungen bewegen sich bei den Kurzperiodischen um 2000°—3000°, bei den Langperiodischen um 200°—2 000° je nach der Helligkeitsamplitude. Von den Temperaturen werden wir später noch ausführlicher zu reden haben, denn sie sind der entscheidende Punkt bei der Beweisführung.

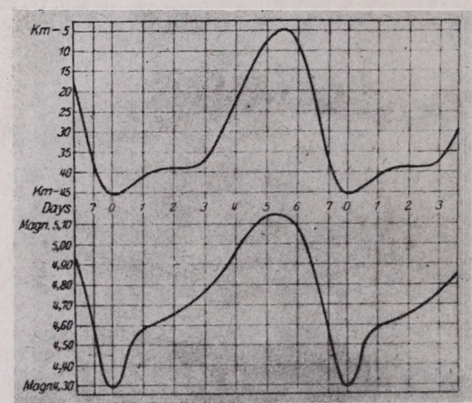


Abb. 5. Die Geschwindigkeits- und die Lichtkurve von W Sagittarii nach R. H. Curtiss, Lich Bull 3, S. 167.

Wir beobachten weiterhin, wie sich parallel mit der Helligkeit und Temperatur auch das Aussehen des Linienspektrums periodisch verändert. Während das eine Extrem des spektralen Aussehens zeitlich ziemlich genau mit der Maxima der Licht- und Temperaturkurve zusammenfällt, tritt das andere Extrem durchschnittlich um 0·2 Perioden früher ein als das Minimum der Helligkeit und Temperatur. Die beiden Extreme im Linienspektrum (Abb. 4) unterscheiden sich in ganz ähnlicher Weise von einander, wie es zwei unveränderliche Übergiganten tun, die die gleiche Temperaturdifferenz haben. Im Durchschnitt ist es etwa 1 Spektralklasse, bei kleinem Lichtwechsel entsprechend weniger.

Schließlich treten bei den δ Cephei-Sternen noch periodische Schwankungen der Radialgeschwindigkeit auf, derart, daß der Stern innerhalb einer Periode zeitweise sich uns nähert, zeitweise sich von uns entfernt. Der Unterschied, die Amplitude der Radialgeschwindigkeiten hält sich von Stern zu Stern zwischen den Grenzen von etwa $\pm$ 3 km/sec und 30 km/sec und hängt durchschnittlich auch wieder von der Größe der Amplituden der anderen Zustandsgrößen ab. Im entsprechenden Maßstab aufgezeichnet ist die Kurve, die den zeitlichen Verlauf der Radialgeschwindigkeiten ausdrückt, der Lichtkurve sehr ähnlich. (Abb. 5.)

2. Der Beweis für die Richtigkeit der Pulsationsvorstellung und sein anfängliches Scheitern.

Wir knüpfen an die Schwankung der Radialgeschwindigkeit an. Die Doppelsternvorstellung deutet sie als Ausdruck für die Bahnbewegung in einem besonders gearteten Doppelsternsystem, nimmt also an, der Stern bewege sich als Ganzes. Die Pulsationsvorstellung dagegen läßt den Schwerpunkt des Sterns ruhen und schreibt die beobachtete Bewegung nur seiner Oberfläche zu, die sich im Laufe einer Periode radialsymmetrisch verlagere und so den Stern expandiere und kontrahiere. Wenn diese Auffassung richtig ist, dann kann man aus der Kurve der Radialgeschwindigkeit, die den zeitlichen Verlauf der Größe $\frac{dR}{dt}$ ausdrückt, sofort durch graphische Integration die Änderung des Radius im Laufe der Periode in Kilometern berechnen (Abb. 3.), denn es ist

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dR}{dt}\, dt = R_2 - R_1 \tag{1}$$

Wo wir für die Phase t_1 die des kleinsten Radius R_{min} als Ausgangspunkt für die Integration ansetzen können. Wir kennen also die lineare Radiusänderung $R - R_{min}$.

Aber auch noch auf andere Weise können wir uns die zunächst noch hypothetische Änderung des Radius rechnerisch ableiten, nämlich aus der Helligkeit und der Temperatur. Die Temperatur gibt uns durch die Strahlungsgesetze sofort die Flächenhelligkeit und aus dem zeitlichen Verlauf der Flächenhelligkeit und der direkt beobachteten Gesamthelligkeit kann man die Änderung der Größe der strahlenden Fläche, d. h. den Radius der als kugelförmig angenommenen Sterne berechnen. Es ist einfach:

$$\frac{I_1}{I_{min}} = \frac{R_1^2}{R^2_{min}} \cdot \frac{E(\lambda, T_1)}{E(\lambda, T_{min})} = \frac{R_1^2}{R^2_{min}} \cdot e^{-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{C_2}{T_1} - \frac{C_2}{T_{min}}\right)} \tag{2}$$

wo I die Gesamtintensität, R den Radius und E die von Temperatur und Wellenlänge abhängigen Flächenhelligkeit nach dem hier als Näherung ausreichenden Wienschen Strahlungsgesetz

$$E(\lambda, T) = \frac{C}{\lambda^5}\, e^{-\frac{C_2}{\lambda T}} \tag{3}$$

ist und der Index *1* sich auf irgendeine Phase des Lichtwechsels und *min* sich auf die des kleinsten Radius bezieht. Aus der obigen Gleichung erhält man sofort:

$$\log \frac{R_I}{R_{min}} = -0{\cdot}2\,(m_I - m_{min}) + \frac{0{\cdot}5 \log e}{\lambda} \left(\frac{C_2}{T_I} - \frac{C_2}{T_{min}}\right), \qquad (4)$$

wenn man die Größenklassen $m = -2{\cdot}5 \log I$ einführte. In der Gleichung kennen wir aus der Beobachtung m_I, m_{min}, $\frac{C_2}{T_1}$ und $\frac{C_2}{T_{min}}$ und können R_I/R_{min} zahlenmäßig berechnen. Außer der linearen Radiusänderung kennen wir somit auch die verhältnismäßige. Wenn nun die Pusationsvorstellung richtig ist, dann müssen für jeden Veränderlichen die beiden Kurven R_I—R_{min} und R_I/R_{min} die gleiche Form und Phase haben und es muß der aus ihnen sich ergebende Wert für R_{min} vernünftig sein und zusammen mit der Temperatur (Flächenhelligkeit) zur richtigen Leuchtkraft führen, die wir aus ganz anderen Quellen, aus der geometrischen Entfernungsbestimmung bereits kennen. Sind umgekehrt diese beiden Bedingungen erfüllt, dann muß unsere hypothetische Annahme, daß die Radialgeschwindigkeiten eine Pulsation bedeuten, richtig sein. Wir haben hier ein Experimentum crucis für die Pulsationsvorstellung, auf das im Jahre 1926 BAADE und 1928 BOTTLINGER zuerst hingewiesen haben. Jahrelang hat man der hier ruhenden Möglichkeit keine Bedeutung geschenkt, wohl weil die Messung der Temperaturschwankungen eine umständliche und zeitraubende Sache ist und nur wenige Sternwarten die erforderliche Ausrüstung besitzen. Im Verlauf der Potsdamer spektralphotometrischen Beobachtungen an δ Cephei-Sternen wurde sie zum ersten Male mit ausreichenden Beobachtungsgrundlagen aufgegriffen.

Was war nun das Ergebnis der Prüfung? Es war ein voller Mißerfolg für die Pulsationsvorstellung. Beide Bedingungen waren entfernt nicht erfüllt. Die Kurven für R_I—R_{min} und für R_I/R_{min} waren nicht phasengleich (Abb. 6) und leitete man trotzdem aus ihnen einen Wert für R_{min} ab, so führte dieser mit der beobachteten Temperatur zu Leuchtkräften, die $1{\cdot}5^m$ bis $3{\cdot}0^m$ zu niedrig waren. Das sieht vernichtend für die Pulsationsvorstellung aus, und wir müßten uns nach anderen Möglichkeiten der Deutung umsehen, wenn uns dieses Ergebnis nicht in einer Hinsicht etwas bedenklich erscheinen würde. Bedenklich erscheint uns nämlich die Tatsache, die aus Abb. 6 hervorgeht, daß die aus Gleichung (4) berechnete Radiusschwankung R_I/R_{min} ihre Maxima und Minimum immer bei fast genau den gleichen Phasen liegen hat wie Licht- und Temperaturkurve. Das ist überraschend und unerwartet, und man könnte vermuten, daß entweder die Helligkeitsschwankung $(m_I - m_{min})$ oder die Temperaturschwankung $\frac{C_2}{T_1} - \frac{C_2}{T_{min}}$ mit einem viel zu hohen Betrag in die Formel eingeführt worden sind. Bei der Helligkeitsschwankung kann das aber nicht der Fall sein, denn sie ist eine unmittelbar gemessene Größe. Anders aber bei der Temperatur. Sie ist nicht unmittelbar gemessen, sondern aus den spektralphotometrischen Beobachtungen mit Hilfe des Wienschen Strahlungsgesetzes berechnet, und mit Hilfe des gleichen Gesetzes in Flächenhelligkeiten umgewandelt worden. Ist in diese Berechnung vielleicht stillschweigend eine Voraussetzung

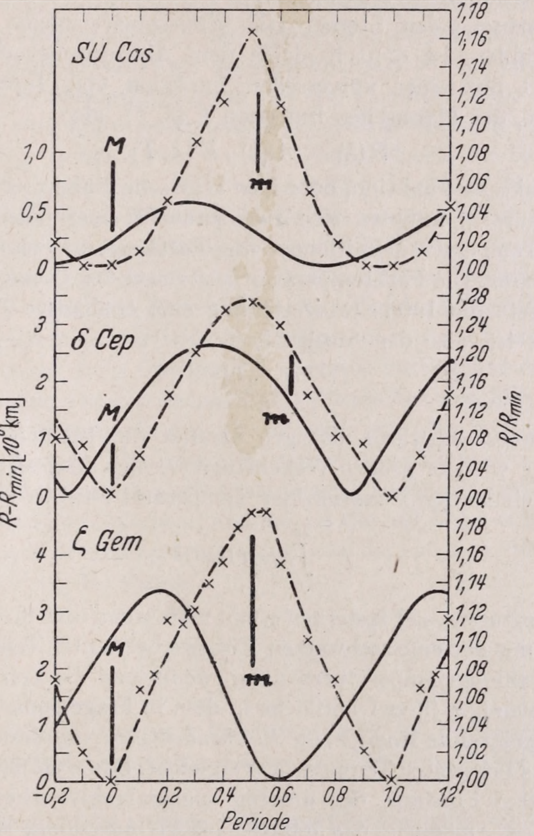


Abb. 6. Die periodischen Schwankungen des Radius bei drei δ Cephei-Sternen. Ausgezogene Kurve $R—R_{min}$ (linke Ordinate); gestrichelte Kurve R/R_{min} (rechte Ordinate). Unter Benutzung der Farbtemperaturen. Die Senkrechten Striche geben jeweils die Lage des Maximum (M) und Minimum (m) der Lichtkurve und Temperaturkurve an. (Nach W. Becker, Z. f. Astrophys. *19*, S. 292, 1940.)

hineingesteckt worden, die nicht realisiert ist und uns deshalb unsere Rechnungen verdorben hat? Es ist in der Tat so, und um das zu verstehen, müssen wir hier einen wichtigen Exkurs über die Sterntemperaturen einschalten, der uns dann die weiteren Mittel an die Hand geben wird, unser Vorhaben zu einem guten Ende zu führen.

3. Exkurs über die Sterntemperaturen und Ableitung einer empirischen Bezie hungzwischen Farb- und Strahlungstemperatur.

Die astronomische Methode der Temperaturbestimmung beruht auf der Anwendung des Kirchhoffschen Gesetzes auf die als Temperaturstrahler anzusehenden Sterne. Das Emissionsvermögen $E(\lambda)$ eines solchen Strahlers ist danach gleich dem Absorptionsvermögen $A(\lambda)$ multipliziert mit einer universellen Funktion von Temperatur und Wellenlänge, der Plankschen Funktion $E(\lambda, T)$, also

$$E(\lambda) = A(\lambda) \,.\, E(\lambda, T) \tag{5}$$

An die Planksche Funktion, oder ihre Wiensche Näherung, die wir hier überall benutzen, knüpfen sich zwei zunächst methodisch grundverschiedene Temperaturdefinitionen, die *Farbtemperatur* und die *Strahlungstemperatur*. Die Farbtemperatur basiert auf der Tatsache, daß nach diesem Gesetz die Intensitätsverteilung eine eindeutige Funktion der Temperatur ist, also der Ausdruck

$$\frac{dE(\lambda,T)}{d\lambda}$$

Die Strahlungstemperatur dagegen benutzt die Tatsache, daß die in einem mehr weniger großen Wellenlängenbereich ausgestrahlte Energie selbst eine eindeutige Funktion der Temperatur ist, also der Ausdruck

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E(\lambda,T) d\lambda.$$

Farbtemperaturen von Fixsternen erhält man, wenn man ihre Intensitätsverteilung mit der eines schwarzen Körpers bekannter Temperatur vergleicht, Strahlungstemperaturen dann, wenn man die von den Sternen pro Flächeneinheit ihrer Oberfläche in dem in Frage stehenden Wellenbereich ausgestrahlte Energie, die *Flächenhelligkeit*, mit der eines schwarzen Körpers bekannter Temperatur vergleicht. Das erste ist ohne weiteres bei jedem Fixstern, der unseren spektralanalytischen Apparaten zugänglich ist, möglich, das letztere jedoch nur dann, wenn wir die Größe der strahlenden Fläche kennen, also den Radius des Sterns. Das ist jedoch nur bei der Sonne und bei ganz wenigen anderen Sternen (manchen Bedeckungsveränderlichen) der Fall und deshalb muß man sich in der Astronomie, also auch bei unseren δ Cephei-Sternen, auf die Ermittlung von Farbtemperaturen beschränken. Das wäre in keiner Weise eine Beschränkung, wenn die Sterne schwarze Strahler wären, wenn also $A(\lambda) = 1$ wäre. Denn dann würden Farbtemperatur und Strahlungstemperatur zahlenmäßig miteinander übereinstimmen. Eine große Schwierigkeit erwächst aber daraus, daß die Sterne offenbar keine exakten schwarzen Strahler sind, was sich schon allein an der Existenz von Fraunhoferlinien in ihren Spektren ergibt. Es ist also

$A(\lambda) \neq 1$ und wir müssen den Absorptionskoeffizienten bei der Berechnung von Temperaturen aus dem beobachteten Emissionsvermögen $E(\lambda)$ und dem Wienschen Gesetz $E(\lambda, T)$ mit berücksichtigen. Das können wir aber in Wirklichkeit nicht, weil wir den Absorptionskoeffizienten und seinen spektralen Verlauf bei der Sternmaterie garnicht genau kennen. Die Theorie bemüht sich zwar intensiv darum, ihn für ein plausibles Mischungsverhältnis der Elemente und bei den physikalischen Bedingungen in Sternatmosphären aus der Quantentheorie rechnerisch zu ermitteln, aber über qualitative Ergebnisse ist sie noch nicht hinausgekommen. Wir stehen damit vor der Unmöglichkeit, die Farbtemperaturen der Fixsterne aus den beobachteten Intensitätsverteilungen zu berechnen. In dieser Situation bleibt uns, wenn wir auf Sterntemperaturen nicht einfach verzichten wollen, nichts anderes übrig, als wider besseres Wissen anzunehmen, die Sterne seien doch schwarze Strahler und $A(\lambda) = 1$ zu setzen. Dan müssen wir aber darauf gefaßt sein, daß einerseits Farbtemperatur und Strahlungstemperatur bei ein und demselben Stern nicht mehr miteinander übereinstimmen und daß andererseits die aus den verschiedenen Spektralbereichen des gleichen Sterns abgeleiteten Farbtemperaturen ebensowenig wie die Strahlungstemperaturen verschiedener Bereiche miteinander übereinstimmen. Die Sterntemperatur ist daher im allgemeinen keine eindeutige Größe. Es gibt nur **eine** eindeutige Definition und das ist die auf den *ganzen* Spektralbereich bezogene Strahlungstemperatur, also die auf dem Stefan—Boltzmannschen Gesetz beruhende:

$$\int_0^\infty E(\lambda, T)\, d\lambda = \sigma \,.\, T^4, \tag{6}$$

die man effektive Temperatur bezeichnet, aber bei Fixsternen im allgemeinen natürlich ebensowenig bestimmt werden kann wie die Strahlungstemperatur.

Die Situation ist deswegen so unerfreulich, weil wir zur Berechnung anderer Zustandsgrößen von Fixsternen wie Leuchtkraft, Radius, Dichte und Schwerebeschleunigung immer die Temperatur brauchen und zwar die Strahlungstemperatur, weil nur diese die Flächenhelligkeit bestimmt, die in die Rechnungen eingeht. Wir besitzen sie jedoch nicht und müssen an ihre Stelle die Farbtemperatur nehmen, von der wir wissen, daß sie nicht mit der Strahlungstemperatur übereinzustimmen braucht. Wir müssen daher darauf gefaßt sein, daß wir bei solchen Rechnungen Überraschungen erleben und auf Unstimmigkeiten stoßen, die wir uns nicht erklären können, wenn nicht durch Verschiedenheit von Farb- und Strahlungstemperatur. Liegt eine solche Unstimmigkeit vielleicht auch bei dem Scheitern unseres Versuchs vor, die Richtigkeit der Pulsationsvorstellung zu beweisen? Wir können das erst entscheiden, wenn wir an die Stelle der Farbtemperaturen Strahlungstemperaturen in die Rechnung einführen würden. Woher sollen wir aber diese Strahlungstemperaturen nehmen?

Aus diesem Dilemma helfen uns die δ Cephei-Sterne selbst hinaus, denn sie gestatten uns die Ableitung einer allgemeinen Beziehung zwischen Farb- und Strahlungstemperatur auf eine äußerst einfache Art und Weise. Diese Beziehung können wir dann benutzen, um unsere beobachteten Farbtemperaturen in Strahlungstemperaturen umzuwandeln, bevor wir aus ihnen die Flächenhelligkeiten berechnen.

Wenn die Radialgeschwindigkeit der δ Cephei-Sterne als Pulsation aufzufassen ist, dann geht aus der Integration der Kurve der Radialgeschwindigkeiten hervor, daß ganz allgemein nahe dem Maximum und Minimum von Helligkeit und Temperatur der Veränderliche fast genau den gleichen Radius hat. Wenn der Radialgeschwindigkeit *keine* Pulsation zugrundeliegt, dann hat der Veränderliche so wie so in diesen beiden Phasen den gleichen Radius. In jedem Falle ist also deshalb die Differenz der beobachteten Helligkeiten, die zwischen Maxima und Minima besteht, identisch mit der Differenz der Flächenhelligkeiten, weil die leuchtenden Flächen die gleichen geblieben sind. Diese ist ihrerseits bestimmt durch die Differenz der reziproken Strahlungstemperaturen

$$\left(\frac{C_2}{T_{min}} - \frac{C_2}{T_{max}}\right)_{St}$$

in diesen beiden Phasen. Wir können also aus der beobachteten Helligkeitsampitude mit Hilfe des Strahlungsgesetzes sofort die Differenz der reziproken Strahlungstemperaturen $\Delta\frac{C_2}{T_{St}}$ berechnen. Die Beobachtung liefert uns außerdem direkt die zugehörige Differenz der reziproken Farbtemperaturen $\Delta\frac{C_2}{T_F}$ und die Farbtemperaturen selbst. Wir kennen also die Ausdrücke $\frac{C_2}{T_F}$, $\Delta\frac{C_2}{T_F}$ und $\Delta\frac{C_2}{T_{St}}$, also auch $\Delta\frac{C_2}{T_F}/\Delta\frac{C_2}{T_{St}}$. Wenn wir diese Daten bei einer Reihe von Veränderlichen verschiedener Farbtemperatur ermitteln, dann sind wir im Besitze aller nötigen Unterlagen, um uns eine allgemeine Beziehung zwischen Farb- und Strahlungstemperatur herzustellen, falls eine solche überhaupt existiert. In Abb. 7 unten sind die Werte $\Delta\frac{C_2}{T_F}/\Delta\frac{C_2}{T_{St}}$ als die Neigungswinkel der Beziehung für eine Anzahl Veränderlicher verschiedener Farbtemperatur dargestellt. Durch Verschiebung der Neigungsgeraden in Richtung der Ordinatenachse $\frac{C_2}{T_{St}}$ (denn die gemessenen Farbtemperaturen dürfen natürlich nicht verändert werden) müssen wir nun versuchen, aus ihnen eine einheitliche Kurve herzustellen. Dieses gelingt in der Tat sehr leicht, wie die Abb. zeigt. Der Betrag der Verschiebung ist allerdings noch um eine Konstante unbestimmt. Diese können wir uns vorläufig bei der Sonne besorgen, für die wir ja Farb- und Strahlungstemperatur kennen. Die Kurve in Abb. 7 ist bereits so gelegt, daß sie durch den Bildpunkt der Sonne hindurchgeht. Es existiert also in der Tat eine allgemeine Beziehung zwischen der Farb- und der Strahlungstemperatur zum mindestens für

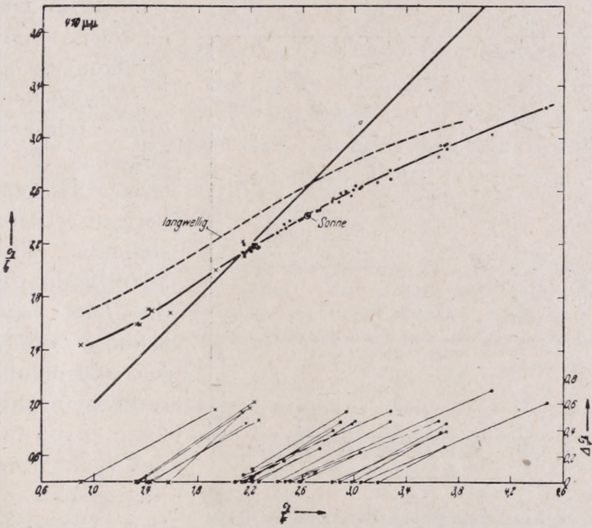


Abb. 7. Empirische Beziehung zwischen der Farbtemperatur C_2/T_F und der Strahlungstemperatur C_2/T_{St} für den langwelligen und für den kurzwelligen Spektralbereich. Kreuze sind RR Lyrae-Sterne, Punkte δ Cephei-Sterne. Am Fusse jeder Abbildung (Ordinate rechts) sind von einem willkürlichen Niveau aus die Differenzenquotienten $\frac{\Delta\, C_2/T_F}{\Delta\, C_2/T_{St}}$ aufgetragen. Wo «Gedränge» herrscht, sind einzelne Punkte etwas über dem Niveau angesetzt worden. (Nach W. Becker, Z. f. Astrophys. 19, S. 276, 1940.)

Riesensterne wie wir gehofft hatten und die δ Cephei-Sterne haben uns selbst zu ihr verholfen. Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß die Beziehung ihrer ganzen Ableitung nach unabhängig von irgendwelchen Vorstellungen hinsichtlich der Natur des Lichtwechsels ist. Ihre Bedeutung dürfte weit über den Rahmen des hier behandelten Problems hinausreichen.

Aus der Abbildung entnehmen wir, daß auf ein bestimmtes Intervall von $\frac{C_2}{T_F}$ ein viel kleineres von $\frac{C_2}{T_{St}}$ kommt. Es ergibt sich beispielsweise der folgende Zahlenzusammenhang:

T_F	T_{St}	$T_F - T_{St}$
14500°	9000°	+ 5500°
4100	4700	— 600
10400°	4300°	

Wir sehen, daß bei hohen Farbtemperaturen die Farbtemperatur über der Strahlungstemperatur liegt und daß es bei niedrigen Farbtemperaturen umgekehrt ist. Auf ein Intervall von 10400° in Farbtemperatur kommt nur ein solches von 4300° in Strahlungstemperatur!

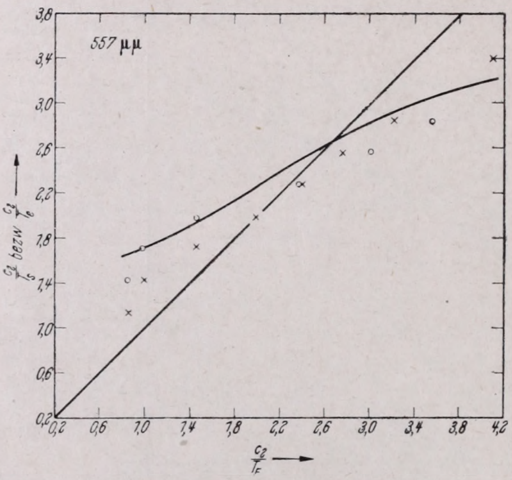


Abb. 8. Vergleich der empirischen Beziehung zwischen Farb- und Strahlungstemperatur mit der von der Theorie des stellaren Absorptionskoeffizienten gelieferten.
× Wasserstoff : Metalle = 13, 7 nach UNSÖLD;
○ Wasserstoff : Metalle = 1000 nach PANNEKOEK
(Aus W. BECKER, Z. f. Astrophys. 19, S. 286, 1940.)

Vergleichen wir mit diesem rein empirischen Ergebnis die qualitativen Aussagen der bisherigen Theorie vom stellaren Absorptionskoeffizienten, die auch in die Form einer Beziehung zwischen Farb- und Strahlungstemperatur gebracht werden kann, dann finden wir, daß zwischen beiden eine ausgezeichnete qualitative Übereinstimmung herrscht (Abb. 8). Dies und das gute Aussehen der empirischen Beziehung gibt uns die Gewißheit, daß wir auf unserem Wege zu einer echten und zuverläßigen Beziehung gelangt sind, die wir uns gleich bei der Prüfung der Pulsationsvorstellung zu nutze machen wollen.

4. Die Prüfung der Pulsationsvorstellung unter Verwendung von Strahlungstemperaturen.

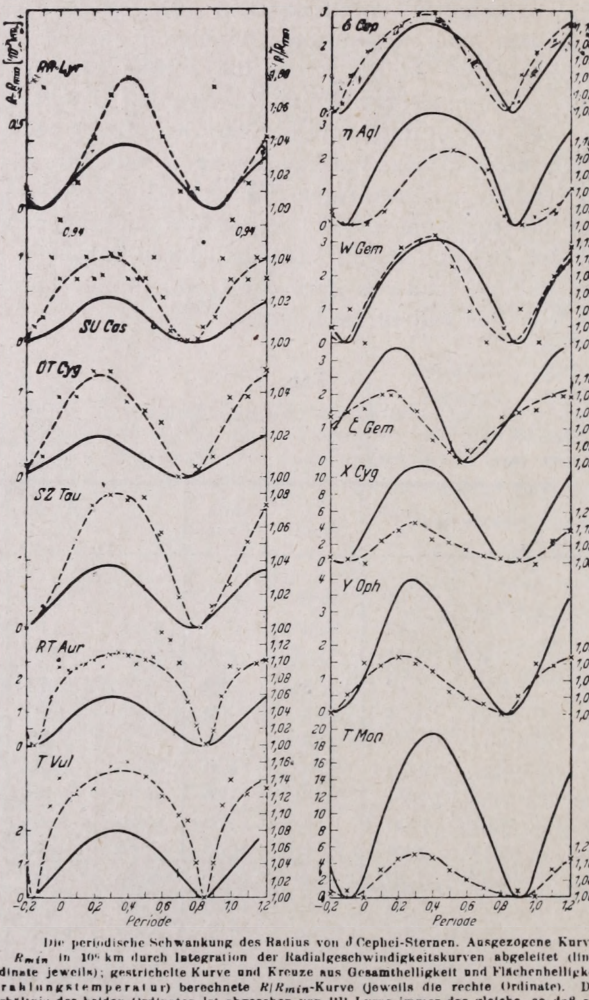
Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, daß auf ein vorgegebenes Intervall $\Delta \frac{C_2}{T_F}$ ein bedeutend kleineres von $\Delta \frac{C_2}{T_{St}}$ kommt, weil $\Delta\frac{C_2}{T_F} / \Delta\frac{C_2}{T_{St}} > 1$ ist. Das zeigt uns, daß wir in der Tat bei der Rechnung der R_1/R_{min}-Werte nach Gleichung (4) für $\left(\frac{C_2}{T_1} - \frac{C_2}{T_{min}}\right)$ einen viel zu großen Wert eingeführt haben, indem wir anstelle der uns damals noch unbekannten Strahlungstemperaturen die Farbtemperaturen verwendeten. Unsere durch die merkwürdige Lage des Maximum und Minimum von R_1/R_{min} veranlaßte Vermutung trifft also das Richtige und wir sind im Besitze einer allgemeinen Beziehung zwischen Farb- und Strahlungstemperatur, in der Lage, die ganzen Berechnungen von R_1/R_{min} nun in einwandfreier Weise, nämlich mit den Strahlungstemperaturen, noch einmal durchzuführen. Zu dem Zweck verwandeln wir zunächst alle beobachteten Farbtemperaturen mit Hilfe der Kurve in Abb. 7 in Strahlungstemperaturen. Die sich dann ergebenden Temperaturen für das Maximum und die Temperaturamplituden sind im Vergleich mit den früheren für 13 Veränderliche in **Tabelle** 1 angegeben. Wir sehen, daß die letzteren nach der Umwandlung durchschnittlich nur etwas mehr als halb so groß sind.

Tab. 1.

Farbtemperaturen und visuelle Strahlungstemperaturen einiger RR Lyrae- und δ Cephei-Sterne im Maximum, die Amplituden der Temperaturschwankungen und die Spektraltypen im Maximum und im Minimum

Stern	Periode	Ampl. vis.	T_F Grad	Ampl. Grad	T_{St} Grad	Ampl. Grad	Spektr.
	d	m					
RR Lyr . .	0,57	0,80	9850	3480	7380	1490	A0—A6
SU Cas . . .	1,94	0,37	6050	810	5700	410	A0—F5
DT Cyg . . .	2,50	0,23	8070	730	6690	320	—
SZ Tau . . .	3,15	0,37	7060	1060	6230	550	A9—F8
RT Aur . . .	3,73	0,74	7500	1900	6420	970	A9—F9
T Vul	4,44	0,68	6240	1080	5820	580	A9—F9
δ Cep	5,37	0,79	6810	1490	6070	740	F1—G3
η Aql	7,18	0,64	6000	1560	5680	780	F0—G4
W Gem . .	7,91	0,70	7330	1780	6370	920	F1—F9
ζ Gem . . .	10,15	0,46	6140	1090	5770	580	F5—G3
X Cyg . . .	16,38	0,77	5600	1660	5470	780	F8—G9
Y Oph	17,12	0,58	5470	1020	5400	500	F8—G3
T Mon . . .	27,01	1,00	6530	2150	6000	1130	F5—G5

Wie steht es nun mit der Erfüllung unserer beiden Bedingungen? Die Kurven für $R_1—R_{min}$ und die nunmehr neu gewonnenen für R_1/R_{min} sind für die gleichen 13 Veränderlichen in Abb. 9 dargestellt. Wir erkennen sofort, daß für jeden Stern die beiden Kurven innerhalb der zu erwartenden Fehlergrenzen formgleich und phasengleich sind. Die erste Bedingung, die bei Richtigkeit der Pulsationsvorstellung erfüllt sein muß, ist demnach jetzt erfüllt! Bei drei hier nicht aufgeführten Veränderlichen fand dagegen keine Erfüllung der Bedingung statt, was aber nicht so schwer wiegt, da es sich um solche mit stark veränderlichen



Die periodische Schwankung des Radius von δ Cephei-Sternen. Ausgezogene Kurven $R - R_{min}$ in 10^6 km durch Integration der Radialgeschwindigkeitskurven abgeleitet (linke Ordinate jeweils); gestrichelte Kurve und Kreuze aus Gesamthelligkeit und Flächenhelligkeit (Strahlungstemperatur) berechnete R/R_{min}-Kurve (jeweils die rechte Ordinate). Das Verhältnis der beiden Ordinaten ist abgesehen von RR Lyrae immer das gleiche, so daß aus dem Verhalten der Amplituden von $R - R_{min}$ und R/R_{min} unmittelbar die Zunahme des Radius mit wachsender Periode, in der die Sterne der Reihe nach angeordnet sind, hervorgeht. Der Strich auf der ausgezogenen Kurve zeigt die Phase des Helligkeitsminimums an.

Abb. 9. (Aus W. Becker, Z. f. Astrophys. *19*, S. 295, 1940.)

Licht-, Temperatur- und Radialgeschwindigkeitskurven handelt und nur synchrome Beobachtungen derselben zum Ziele führen würden, die es aber leider noch nicht gibt.

Da die erste Bedingung erfüllt ist, können wir aus den für jeden Veränderlichen und für jede Phase bekannten Werten $R_1 - R_{min}$ bzw. R_1/R_{min} den kleinsten Radius R_{min} bzw. für den mittleren Radius $\overline{R} = R_{min} + 0{\cdot}5\,(R_{max} - R_{min})$ berechnen. Diese sind in **Tabelle 2** angegeben, in der außerdem noch Zahlenangaben über $R_{max} - R_{min}$ bzw. R_{max}/R_{min} und $\frac{R_{max} - R_{min}}{\overline{R}}$ gemacht sind. Wir sehen, daß die Radien zwischen rund 5×10^6 und 100×10^6 km also zwischen rund 7 und 140 Sonnenradien ($0{\cdot}7 + 10^6$ km) liegen und damit sehr plausible Werte haben. Wir sehen weiter, daß die Radien mit der Periode zunehmen, eine Beziehung, die sich durch die Interpolationsformel

$$\overline{R}_{\mathrm{km}} = 4.10^6\,P_{\mathrm{Tage}} \tag{7}$$

darstellen läßt (Abb. 10).

Tab. 2.

Radien R und absolute Helligkeiten M einiger RR Lyrae- und δ Cephei-Sterne.

Stern	P	$R_{max}-R_{min}$ 10^6 km	R_{max}/R_{min}	$\overline{R}$ 10^6 km	$\frac{R_{max}-R_{min}}{\overline{R}}$	M_{vis} ber[1]	M_{vis} beob[2]
	d					m	m
RR Lyr ..	0,57	0,39	1,072	5,6	0,069	— 0,1	— 0,1
SU Cyg ..	1,94	0,55	1,041	13,7	0,040	— 1,1	— 0,9
DT Cyg...	2,50	0,47	1,049	9,7	0,048	— 1,4	— 1,1
SZ Tau ...	3,15	0,94	1,082	12,0	0,078	— 1,3	— 1,4
RT Aur...	3,73	1,46	1,111	13,8	0,106	— 1,4	— 1,5
T Vul	4,44	2,00	1,152	14,1	0,142	— 1,3	— 1,8
δ Cep.....	5,37	2,62	1,119	23,3	0,113	— 2,4	— 2,0
η Aql.....	7,18	3,37	1,091	38,8	0,087	— 2,9	— 2,4
W Gem ..	7,91	3,10	1,124	26,5	0,113	— 2,8	— 2,6
ζ Gem ...	10,15	3,35	1,085	40,9	0,082	— 3,4	— 3,0
X Cyg ...	16,38	11,40	1,181	68,7	0,167	— 4,0	— 3,6
Y Oph....	17,12	3,75	1,066	58,9	0,063	— 3,7	— 3,8
T Mon....	27,01	20,10	1,211	105,0	0,191	— 5,2	— 4,4

[1] Aus Strahlungstemperatur und Helligkeit berechnet.
[2] Aus der SHAPLEYschen Perioden-Helligkeitsbeziehung.

Die Werte für $\overline{R}$ wurden nicht unmittelbar aus den Werten der beiden vorhergehenden Spalten berechnet, sondern sind Mittelwerte über die Ergebnisse dieser Rechnung bei verschiedenen Phasen.

Jetzt tun wir den letzten Schritt und berechnen aus mittleren Radius und Flächenhelligkeit, die wir den mittleren Strahlungstempe-

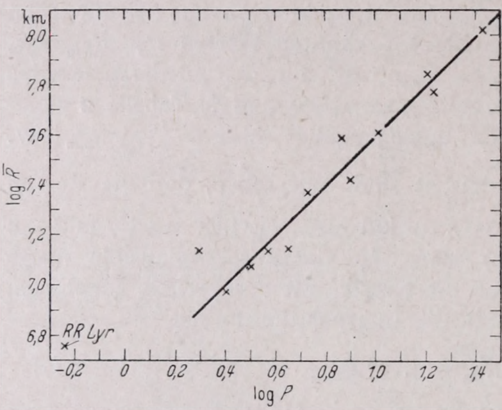


Abb. 10. Beziehung zwischen Radius und Periode bei langperiodischen δ Cephei-Sternen. (Nach W. BECKER, Z. f. Astrophys. *19*, S. 300, 1940.)

raturen entnehmen, die mittlere (visuelle) Leuchtkraft M_{var} der Veränderlichen aus der einfachen Beziehung:

$$\frac{I_{var}}{I_{\odot}} = \frac{R^2_{var}}{R^2_{\odot}} \cdot \frac{E(\lambda, T_{var})}{E(\lambda, T_{\odot})}$$

oder

$$M_{var} = M_{\odot} - 5 \log \frac{R_{var}}{R_{\odot}} + $$

$$+ \frac{2{\cdot}5 \log e}{\lambda} \left(\frac{c_2}{T_{var}} - \frac{c_2}{T_{\odot}}\right)_{st.}$$

wo $M_{\odot} = +\,4{\cdot}73^m$ ist. Das Ergebnis der Rechnung steht in **Tabelle 2**, Spalte 7, während in Spalte 8 die aus der geometrischen Entfernungsbestimmung abgeleiteten mittleren, für die jeweilige Periodenlänge gültigen Leuchtkräfte, stehen, die also einer ganz unabhängigen Quelle entstammen. Wir finden, daß beide in ausgezeichneter Übereinstimmung miteinander stehen und denken daran zurück, daß wir bei der Benutzung der Farbtemperaturen — ganz abgesehen davon, daß wir diese Rechnung eigentlich garnicht durchführen durften, weil bereits die erste Bedingung nicht erfüllt war — die berechneten Leuchtkräfte um 1·5 bis 3 Größenklassen zu gering herausgekommen waren. Hier haben wir überall Abweichungen unter $0{\cdot}5^m$. Die Güte des Ergebnisses geht noch klarer aus Abb. 11 hervor, in der unsere berechneten Leuchtkräfte nicht mit den mittleren, sondern mit den indivi-

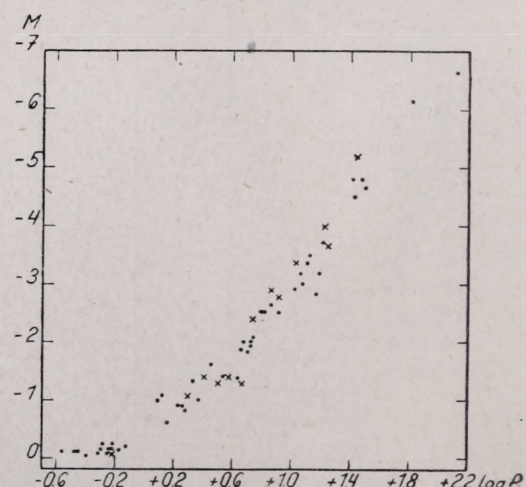


Abb. 11. *Perioden-Helligkeits-Beziehung* bei den RR Lyrae- und den δ Cephei-Sternen (●) beobachtete absolute Helligkeiten nach SHAPLEY, (×) auf Grund der Pulsationsvorstellung berechnete absolute Helligkeiten nach W. BECKER (Aus W. BECKER Sterne und Sternsysteme S. 103.)

duellen, geometrisch ermittelten Leuchtkräften verglichen sind. Die Abbildung zeigt auch sehr schön, daß die von uns berechneten Leuchtkräfte das bekannte Perioden-Leuchtkraft-Gesetz erfüllen.

Damit sind wir am Ziel unserer Untersuchungen angelangt, das in einem eindrucksvollen, rein aus Beobachtung gewonnenen Beweis für die Richtigkeit der Pulsationsvorstellung bei den δ Cephei-Veränderlichen besteht. Damit sind die unerläßlichen Voraussetzungen für ein weiteres detaillierteres Studium dieser Veränderlichen gegeben und in Gestalt der jetzt bekannten Zustandsgrößen: Strahlungstemperatur, Radius und Leuchtkraft die Vorbedingungen für eine quantitative Spektralanalyse ihrer Atmosphären gewonnen. Auf dem Wege dahin haben wir außerdem noch eine empirische Beziehung zwischen Farb- und Strahlungstemperatur ableiten können, die, des weiteren Ausbaus fähig, nicht nur von großer praktischer Bedeutung ist, wovon wir uns hier überzeugen konnten, sondern auch als eines der wenigen Bindeglieder zwischen Beobachtung und Theorie von großer Wichtigkeit werden wird.

PULZÁLÓ CSILLAGOK*

Irta: *W. Becker*

(Összefoglalás)

Ha ma pulzáló csillagokról beszélünk, úgy ez alatt a Cephei tipusú változó csillagokat értjük. Két különféle feltevéssel próbálkoztak ezen u. n. Cephei csillagoknál a fényváltozás okát megmagyarázni: a kettős csillag-, ill. a pulzáció elmélettel. Az észlelések egyik csoportját jól lehetett értelmezni a kettős csillag elképzeléssel, míg másokat egyáltalán nem. Ugyanígy volt a pulzáció elmélettel is; egy döntő pontnál ellentmondásba kerültünk a megfigyelésekkel.

Az utóbbi években sikerült azonban a kérdést tisztázni és éppen ezen eredmények összefoglalását — amelyek végül is a pulzáció elmélet mellett tettek bizonyságot — tartalmazza jelen dolgozat.

Az 1. rész a Cephei csillagokra vonatkozó ismereteinket foglalja össze nagy általánosságban.

* Budapesten Szakosztályunk keretén belül, valamint Kolozsvárt az egyetemi fizikai kollokviumok kapcsán 1943. októberében tartott két (német nyelvű) előadás nyomán.

A 2. rész tartalmazza azt, hogy hogyan lehet a pulzáció elmélet helyességét bizonyítani, és egyben rámutat arra, hogy ez a bizonyítás kezdetben nem sikerült. Ha pulzációt tételezünk fel tehát, hogy a csillag sugara *(R)* változik, úgy a mért radiális sebességekből: R/R_{min}; míg a látszólagos fényesség és a hőmérséklet változásából: $R—R_{min}$ ingadozásai határozhatók meg. Amennyiben a pulzáció feltevés igaz, úgy az így adódó két görbe alakjának és fázisának meg kell egyezni és a belőlük kiszámítható R_{min} értékeknek reálisnak kell lenni és a hőmérséklet segítségével ugyanakkora abszolút fényességet kell, hogy kapjunk, mint amekkora a geometriai távolságmeghatározásból adódik. Megfordítva, ha ez bekövetkezik, úgy a pulzációelmélet is igaz. A potsdami asztrofizikai obszervatorium spektrálfotometriai mérései szolgáltattak alapot a bizonyításhoz szükséges hőmérséklet meghatározásokhoz.

A 3. rész a csillagokra vonatkozó hőmérséklet definiciókat tárgyalja és rámutat arra, hogy a csillag-hőmérséklet a gyakorlatban általában nem egyértelmű állapothatározó. Színi hőmérséklet nem egyezik meg a sugárzási hőmérséklettel. A cephei csillagoknál azonban sikerült levezetni egy általános empirikus összefüggést e két különböző fajta hőmérséklet között.

A 4. rész most már a sugárzási hőmérsékletek segítségével a pulzáció elmélet helyességét bizonyítja. A hőmérsékletek u. i. a felületi fényességek kiszámításához szükségesek, de ehhez tulajdonképpen csak sugárzási hőmérsékletet szabadna felhasználni. Kezdetben a bizonyítás nem sikerült, mivel a közvetlenül észlelhető színi hőmérsékletekkel számoltak. A 3. pontban előadottak azonban módot adtak, hogy színi hőmérsékletről áttérjünk sugárzási hőmérsékletre.

A GYAKORLATI MATEMATIKA INTEGRÁLÓ MŰSZEREIRŐL

Irta : *Borbély Samu* (Kolozsvár)

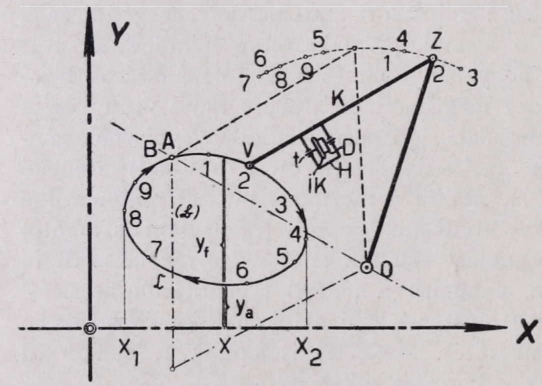
A következőkben a gyakorlati matematika számoló műszereinek egy speciális fejezetéről, az ú. n. integráló műszerekről szeretnék szemelvényes áttekintést nyujtani. A matematikai műszerek célszerű felhasználása az alkalmazott matematikának szinte összes kérdéseinél — amelyeknél a probléma megoldása a tényleges számérték konkrét meghatározásával fejeződik be — mind fontosabbá és nélkülözhetetlenebbé válik. Az alkalmazott matematikai meggondolások a finommechanika fejlődő technikájával karöltve mindinkább utat és módot keresnek arra, hogy bonyolult és fárasztó számítások bizonyos, gyakorlatilag sokszor megismétlődő típusát művi úton végezzék el. A sokszor megismétlődő egytípusú feladat elvégzésének gondolatban és figyelemben mechanikus (és ezért fárasztó) szellemi robotjától mentesülünk, ha sikerül a megfelelő műszer matematikai elvére és finommechanikai kivitelére egyszeri (és nagyon is alkotó) szellemi munka árán megoldást találnunk. E műszerek célszerű és főleg átfogó alkalmazása, valamint a fellépő hibahatárok becslése[1] szükségszerűen feltételezi e műszerek elvi alapjainak és konstruktív kivitelezési formáinak ismeretét. Ezek az ismeretek a gyakorlati matematika módszereinek egy részét alkotják.

A gyakorlati matematika (nem tévesztendő össze az alkalmazott matematika sokkal átfogóbb egységével) a matematikának az az ága, amely a legkülönbözőbb matematikai műveletekkel már egyértelműen determinált elméleti eredménynek, a konkrét számértékig terjedő tényleges meghatározásával foglalkozik. H. v. SANDEN a gyakorlati matematikát igen jellemzően «die mathematische Exekutive»-nek nevezi.

Amennyiben természettudományi vizsgálatok a matematikai analízis módszereivel egyáltalán értelmesen tárgyalhatók (erre a fizika és elméleti technika legkifejlettebb példa, a kémia már kevésbbé, biológia, orvostudomány és rokonszakok pedig a kezdet formáin is még alig jutottak túl), az elméletből származó eredmények integrálok,

[1] E dolgozat keretében nem bocsátkozunk bele az integráló műszerek hibavizsgálatának a kiegyenlítő számítás alapján való tárgyalásába. Szabad legyen itt a meglevő igen kiterjedt irodalomra utalnunk, amely az Archiv für technisches Messenben (A. T. M. Berichte) F. A. WILLERS-nek szisztematikus összeállításában megjelent közleményei alapján könnyen megtalálható. Ezenkívül irodalmi utalásként lásd: MEYER ZUR CAPELLEN, Mathematische Instrumente (Akad. Vlg., Leipzig 1941) c. összefoglaló modern könyvét.

differenciál- és integrálegyenletek, sorok, egyenletrendszerek stb. alakjában adódnak. Ha az elméletből származtatott eredmények numerikus értékeit is meg akarjuk határozni,[2] akkor az integrálokat ki kell számítani, a differenciál- és integrálegyenleteket meg kell oldani, a sorok által definiált függvények tabelláit fel kell állítani stb. Ezen feladatok kiszámításának (vagy általánosabban : a célszerű számítás módszereinek) elméletét és gyakorlatát tárgyalja a gyakorlati matematika. Módszereit általában numerikus és grafikus részre szokás bontani. Mindkét irány módszerének meg van a jellemző előnye és hátránya. A konkrét problémához igazodó megoldási módszerek célszerű kombinációinak felismerése, vagy e módszerek megalkotása jellemzi az alkalmazott matematikust.



1. ábra.

Mind a numerikus, mind a grafikus megoldásnak nélkülözhetetlen segédeszközei a matematikai műszerek. Ilyenek (hogy csak egynéhányat említsünk) a legegyszerűbb logarléc és addiátortól kezdve a teljes automata számológépig ; egyenletrendszerek megoldására, egyszerű vagy összetett függvényi összefüggések előállítására szolgáló kinematikai, elektromos, vagy más fizikai elvet felhasználó műszerek ; szerkesztések megkönnyítésére, vagy elvégzésére szolgáló geometriai műszerek ; differenciálegyenletek megoldására szerkesztett berendezések, amelyek a technikai nehézségek kiküszöbölésében valóban bámulatraméltóak.[3]

Ebben a dolgozatban csak az integrálszámítás egyes feladatait elvégző műszerekkel foglalkozunk, tehát olyanokkal, melyek lényegében felszín meghatározására szolgálnak.

E műszerek működési elve a következő. Ha a műszer K integráló karjának V vezetett pontját (1. ábra) a $\mathfrak{B}$ tartomány $\mathfrak{C}$ határgörbéje

[2] Nem felesleges talán az a megjegyzés, hogy épp ezeknek a számértékeknek a fizikai világképünk jelenségeihez való hozzárendelése (tehát ezen értékeknek eo ipso konkrét ismerete) jellemzi lényegesen mai civilizációnkat, — sőt talán kultúránkat is.

[3] Modern államszervezet hitelgazdaság és előállító ipar nélkül nem képzelhető el. Mindkettőnek racionális munkájához a matematikai műszer (legátfogóbb értelemben) nélkülözhetetlen. A tudományos megismerés ideálisabb követelményeiről nem is szólva. Csodálatos, hogy ily alapelemeket nálunk a köztudat mennyire elhanyagol.

mentén a tetszőleges A kezdőponttól a B $(= A)$ végpontig végigvezetjük (ezt nevezzük leköröözésnek), akkor az

$$F = \iint\limits_{(\mathfrak{B})} dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_a(x)}^{y_f(x)} dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} \big(y_f(x) - y_a(x)\big)\,dx = \oint\limits_{(\mathfrak{C})} y(x)\,dx$$

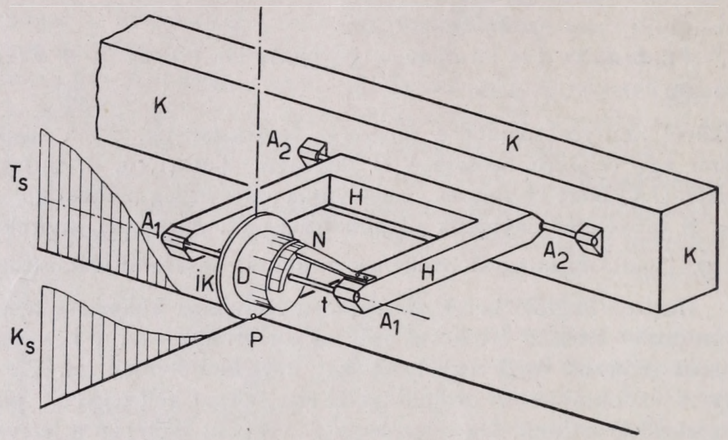
értékével arányos számot a műszeren leolvashatjuk. Ez a szám a műszer egy célszerű beosztású D tárcsával ellátott, ú. n. integráló kerekén (IK) mért kezdeti és végleolvasás (elméletileg pontos) különbsége. E műveletet nevezzük planimetrálásnak. A műszer kivitele az $I = \oint f\big(y(x)\big)\,dx$ integrál értékének meghatározására általánosítható.

Ha az integráló kerék tárcsáján a leolvasási különbség a meghatározandó integrál értékével csak akkor arányos, ha a V vezetett pontnak A kezdő- és B véghelyzete egy mellékfeltételnek (pl. $A = B$, vagy A ordinátája $=$ B ordinátájával stb.) eleget kell tegyen : planimeterekről beszélünk. Ha tetszőleges B végpont esetében a leolvasás különbsége $I(x) = \int\limits_a^x f\big(y(x)\big)\,dx$ értékével minden ily mellékfeltétel nélkül arányos : integrimeternek hívjuk műszerünket. Mindkét esetben a meghatározandó integrálérték a leolvasás különbségének numerikus értékével arányos. Célszerű az arányossági tényezőt esetről esetre, a gyártól megadott állandók figyelmen kívül hagyásával, egy a számításra alkalmas egyszerű idom (pl. négyzet, vagy körlap) planimetrálásával meghatározni.

Ha műszerünk a integrál értékét fel is rajzolja, akkor integráf a neve. Szűkebb értelemben ezek már nem planimetriai integráló műszerek, hanem differenciálegyenletek megoldására szerkesztett készülékek.

1. **Az integráló kerék és működése.** Már az előbbiből kitűnik, hogy a planimeterek és integrimeterek elméletileg legfontosabb konstruktív egysége az ú. n. integráló kerék (a továbbiakban IK-nak rövidítve). Ennek működését, bármily egyszerű elveken is alapuljon az, a továbbiak teljes átértése céljából részletesen ismertetjük.

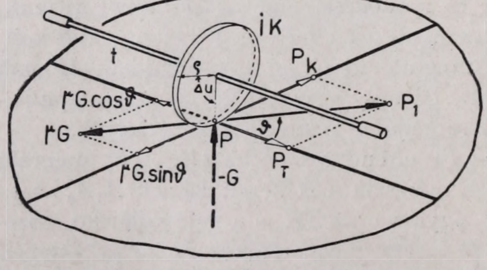
A 2. ábrán látható elvi elrendezésben az IK. A K integráló kar A_2 csapágy- és tengelyén nyugszik a H keret. Ennek A_1A_1 csapágyaiban van a t tengellyel ágyazva az IK, s a vele szilárdul összekötött, leolvasást szolgáló D tárcsa. Ezen elrendezés következtében az integráló kerék H, IK, D és t önsúlyának G eredőjével nyugszik a P pontban az alap xy-síkján. A D tárcsa egyenletes beosztásának és a vele szemben álló H kerethez rögzített N nóniusznak segítségével az IK pillanatnyi állását (a változó kivitel szerint 4 . . . 5 számjegyig terjedő pontossággal) le lehet olvasni. Az IK kivitelének és a t tengely-ágyazás beállításának olyannak kell lennie, hogy a kerék K_s sikja és a tengely T_s síkja egymásra és az alap xy-síkjára párosával merő-



2. ábra.

leges legyen. Úgyszintén, hogy az IK P «érintési pontja» e három síknak közös pontja legyen.

Ha az IK-et $\overline{PP}_1$ eltolásnak vetjük alá (ez eltolást a P érintési pont «gördülési útjának» nevezzük), miközben a t tengelyt eredeti irányához párhuzamosan vezetjük (3. ábra), akkor az IK-re ható $-G$ reakciós erő az eltolás irányával szemben működő $\mu\, G$ surlódási erőt kelti. Ennek a kerék síkjába eső komponense a tengely ágyazási ellenállásával szemben létrehozza az IK gördülését. Természetesen feltételezzük (s ez a valódi kivitel egyik nehézsége), hogy az ágyazási ellenállás olyan kicsiny, hogy az IK tengelysíkjának nyomvonalától eltérő legkisebb elmozdulásakor is a surlódási erőnek a kerék síkjába eső nyomatéka legyőzi az ágyazásnak az ellenállását. Feltételezzük tehát, hogy az IK a kerék síkjában csúszásmentesen gördül.

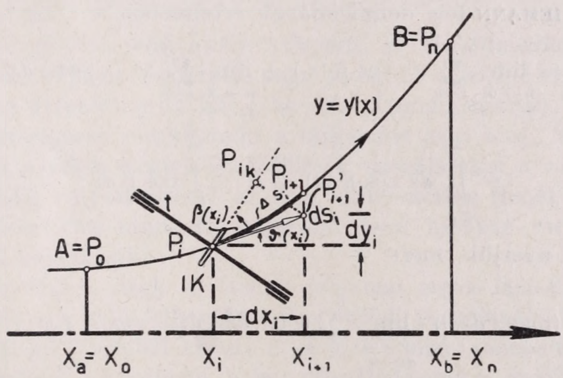


3. ábra.

Mivel minden eltolás tetszőleges komponensek összegére bontható, a $\overline{PP}_1$ eltolást felbontjuk a $\overline{PP}_K$ és $\overline{PP}_T$ komponensre. Az utóbbi elmozdulásnál támadó surlódás ereje a tengely síkjába hat, tehát nem ad gördülési nyo-

matékot, az előbbi elmozdulás surlódási ereje a kerék síkjában támad, s az IK-nek ezen gördülési útkomponenssel azonos $|\overline{PP_K}| = \varrho\, \Delta\, u = \Delta\, h$ elforgatását (gördülését) eredményezi. Tekintettel arra, hogy az IK-el összekötött D tárcsa beosztása arányos a teljesszög szögbeosztásával, a gördülés Δu szöge arányos a beosztás kezdeti- (U_1) és végleolvasásának (U_2) különbségével, azaz
I . . . $\Delta u = C\, (U_2 - U_1)$ és ebből $|\overline{PP_K}| = \varrho C \Delta u = k \Delta U = \Delta h$.

Vezessük most az IK P érintési pontját egy megadott $y = y\,(x)$ görbe mentén a kezdeti $A = P_0$ ponttól a $B = P_n$ végpontig úgy, hogy eközben a kerék síkjának nyomvonala a görbe érintőjével megadott $\beta\,(x)$ szöget zárjon be (4. ábra) és határozzuk meg az IK ezen eltolásához (gördülési útjához) tartozó Δh gördülését.



4. ábra.

E célból vegyük fel az x_a és x_b között egy tetszőleges intervallumfelosztás $x_i \ldots x_{i+1} = x_i + dx_i$ $(i = 0 \ldots n - 1)$ részintervallumát. Ha a P pontot P_i-től P_{i+1}-ig a görbe Δs_i íve mentén vezetjük végig az ehhez tartozó exact gördülés $\Delta h_i = \Delta s_i \cos \overline{\beta}_i$, ahol $s\,(x)$ a görbe ívhosszát, $\Delta s_i = s\,(x + dx_i) - s\,(x_i)$ és $\overline{\beta}_i = \beta\,(x_i + \vartheta_i dx_i)$, $(0 \leqq \vartheta_i \leqq 1)$ a $\beta\,(x)$ szögnek ehhez az intervallumhoz tartozó megfelelő középértékét jelöli. Ha a P pontot P_i-től P'_{i+1}-ig a görbe ds_i íveleme mentén vezetjük, az ehhez tartozó gördülés $dh_i = ds_i \cos\, \beta\,(x_i)$, mivel az elmozdulás $\overline{P_iP'_{i+1}} = \overline{P_iP_{iK}} + \overline{P_{iK}P'_{i+1}}$ elmozdulások összegére bontható. Ezek közül az első dh_i, a második nulla gördülést eredményez. A középértéktétel szerint[4] $\Delta s_i = ds_i + \psi_1\,(x_i, dx_i)\, dx_i^2$, úgyszintén

[4] A középértéktétel alkalmazhatóságának feltételei, épúgy, mint a Riemann-féle integrabilitásé legalább szakaszonként gyakorlatilag mindig érvényesek.

$$\cos \beta_i = \cos \beta (x_i) + \psi_2 (x_i, dx_i)\, dx_i$$

s ebből $\Delta h_i = \Delta s_i \cos \beta_i =$

$$= ds_i \cos \beta (x_i) + \psi (x_i, dx_i)\, dx_i^2 = dh_i + \psi (x_i, dx_i)\, dx_i^2 .$$

Az A-tól B-ig való gördülés ezek szerint

$$h \Big|_A^B = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta h_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ ds_i \cos \beta (x_i) + \psi (x_i, dx_i)\, dx_i^2 \right\},$$

ahol $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \psi (x_i, dx_i)\, dx_i^2$ a gördülés azon különbségét jelöli, amely fellép, ha gördülési útként a tényleges ívet, ill. az ívelemek összegét vesszük. Ez az egyenlet minden dx_i felosztásra, s így az $n \to \infty$ és $dx_i \to 0$ határértékében is érvényes marad, s ebből a határozott integrál RIEMANN-féle definiciójának értelmében a

$$h \Big|_A^B = \lim_{\substack{n \to \infty \\ dx_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} ds_i \cos \beta (x_i) + \lim_{\substack{n \to \infty \\ dx_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} \psi (x_i, dx_i)\, dx_i^2 =$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} ds \cos \beta (x) + R \equiv \int_{x_a}^{x_b} \cos \beta\, ds$$

egyenletet nyerjük, mert

$$|R| \leq \lim_{dx_i \to 0} (\max |dx_i|) \cdot \lim_{\substack{n \to \infty \\ dx_i \to 0}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \psi (x_i, dx_i)\, dx_i \right| = 0 \cdot \left| \int_{x_a}^{x_b} \psi (x, 0)\, dx \right| = 0.$$

$$2 \ldots \quad h \Big|_A^B = \Delta h = \int_{A\,(\mathfrak{L})}^{B} \cos \beta\, ds$$ egyenlet a planimeterek működésének alapegyenlete[5], amely kimondja, hogy a P érintési pont gördülési útjának íveleméből és a kerék síkjának ezen ívelemmel bezárt szög cosinusának szorzatából képezett vonalment integrál egyenlő az IK gördülésével.

Ezen az alapon az egyes planimeterkivitelek működésének alapegyenleteit a következőképpen nyerhetjük. A K integráló kar V vezetett pontját a megadott integrálandó görbe ds_v íveleme mentén elmozdítjuk. A K karnak egy meghatározott másik Z «vezérlő pontja»

[5] Közönséges differenciálegyenletek megoldására szerkesztett modern gépek egyrésze lényegében szintén az IK gördülésének ezen egyenletét használják fel. Az IK h gördülése azonban ezeknél kapcsolt kinematikai műveket kell a h függvénye szerint vezéreljen. Ehhez szükséges a gördülést előidéző igen kicsiny nyomatéknak 6000 . . . 8000-szeres minden praktikus torzítástól és rezgéstől mentes (!) megerősítése. Nem csoda, hogy eddig csak egynéhány ilyen nagyobb gép létezik, éspedig tudtommal Oslo, Manchester, Cambridge (U. S. A.), Leningrad, Belfast-ban.

kinematikai kényszervezérléssel mozog egy konstruktíve előírt pálya ds_z megfelelő ívelemén, amelyet az integrálandó görbe változójának (pl. τ-nak) függvényeként meghatározhatunk. A P és Z pont ezen elmozdulásából meghatározható a P érintési pont gördülési útjának $ds(\tau)$ íveleme és a kerék síkjának $\beta(\tau)$ szöge. Az IK ezen differenciális elmozdulásához tartozó differenciális gördülése $dh = \cos\beta(\tau)\, ds(\tau)$. Ha V-t az A ponttól ($\tau = \tau_a$) a B pontig ($\tau = \tau_b$) vezetjük, az IK rezultáns gördülése

$$\Delta h = \int_{\tau_a}^{\tau_b} dh = \int_{\tau_a}^{\tau_b} f(\tau)\, d\tau.$$

A Z pont vezérlésének célszerű megválasztásával elérhető, hogy az IK gördülése a legkülönbözőbb típusú $f(\tau)$ függvény integráljainak értékét mérje.

E tárgyalási mód akkor célszerű, ha az elmozdulási utakat analitikusan explicite ismerjük, vagy pedig, ha a fellépő elmozdulások egyszerűen áttekinthetők (pl. a lineáris planimetereknél). A második esetben lényegesen megkönnyíti a tárgyalást az a tény, hogy elmozdulások és a nekik megfelelő gördülések vizsgálatakor a valódi elmozdulás mindig helyettesíthető az ú. n. differenciális (tehát linearizált) elmozdulással, ha utána a magasabb fokú hibákat megsemmisítő integráció következik.

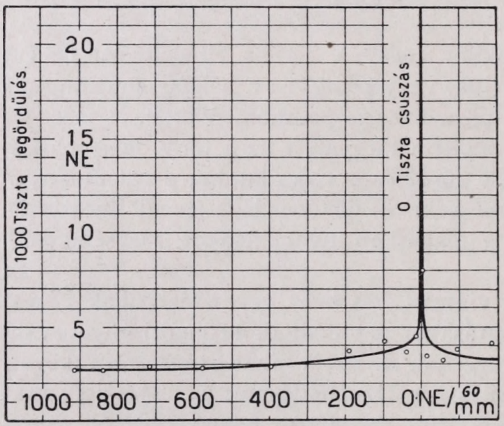
Természetes, hogy a vizsgált folyamat egyes fázisainak véges[6] differenciálokra való felbontásakor a valódi (kontinuált) folyamattal szemben általában hibát követünk el. Ezt a hibát azonban a rákövetkező integráció kiküszöböli, s így vizsgálódásunk a valódi folyamat pontos képés adja, ha csak arra ügyelünk, hogy a fellépő összes lineáris differenciálokkal egybekötött behatásokat mind figyelembe vegyük.

Sok esetben az elmozdulások vizsgálata s z a b a t o s fogalmazásban bonyolult (pl. az ú. n. poláris planimetereknél). Ily esetekben célszerű a 4. alatt röviden ismertetett tisztán analitikai megfontolás útját követni.

Bármely tárgyalásnak azonban alapja az 1. és 2. egyenlet. Ezeknek érvényessége szükségszerűen feltételezi a μ surlódási együttható állandóságát, valamint az xy, K_s, T_s síkoknak az IK pontos művi kivitelével és beállításával való megvalósítását, mivel a ΔU leolvasási különbség k arányossági tényezője ezeknek függvénye. Ez az arányossági tényező (kicsiny, de jól észlelhető határok között) változik aszerint, hogy az IK mily minőségű alapon és hányszor gördül végig azonos úton. Természetes, hogy csúszásmentes gördülés

[6] Pl. R. ROTHE. Höhere Mathematik. Teubner, Berlin.

($\beta = o$) alkalmával a véletlen hibák hatása az eredményre lényegesen kisebb, mint akkor, amikor a kerék csak csúszik, de nem gördül ($\beta = \pi/2$). Az 5. ábrán feltüntetjük BAER nyomán[7] egy-egy ötvenes művileg exaktul vezetett mérési sorozat nóniusz egységekben megadott szórását, mint az *IK* 60 mm-es úton való gördülésének (nóniuszegységekben mért) függvényét. 1000 NE/60 mm csúszásmentes gördülést, *0* NE/60 mm gördülésmentes csúszást jelez. Ebből az ábrából látható, hogy a gördülésmentes csúszás (tehát $\beta = \pi/2$) közvetlen szomszédságának kivételével az *IK* gördülése meglepően állandó. A szórás középértékben 3, maximum 4 nóniuszegység. Ha a mérés ismétlésekor (s ez minden esetben szükséges) ennél nagyobb eltérés is fellép, akkor azt (a kiegyenlítőszámítás terminológiájával) egyszeri szisztematikus hibának tulajdoníthatjuk. Ebben az esetben a többitől lényegesen eltérő mérést újra kell elvégezni.



5. ábra.

A μ surlódási tényező növelésére az *IK* peremét finoman érdessé teszik. Emiatt az ellentett irányú körfutások arányossági tényezője is egymástól kissé különböző lehet. Az *IK* peremének kézzel való érintése az utána idővel szükségszerűen beálló rozsdásodás miatt legszigorúbban elkerülendő, mivel az érintett helyen μ értékei ugrásszerűen megváltoznak. Ugyanebből az okból óvni kell műszerünket attól, hogy planimetrálás közben az *IK* az alapsík két különböző (papír) lapjáról le-, vagy lapjára felgördüljön, nem is szólva természetesen arról, hogy megfelelő alátétlap nélkül való planimetrálás a műszer eredeti precizitását szinte pillanatok alatt végérvényesen tönkre teheti.

2. A Harvey-féle harmonikus analizátor. Ez a műszer jó példa az integráló kerék gördülésére levezetett 2. egyenlet alkalmazására.

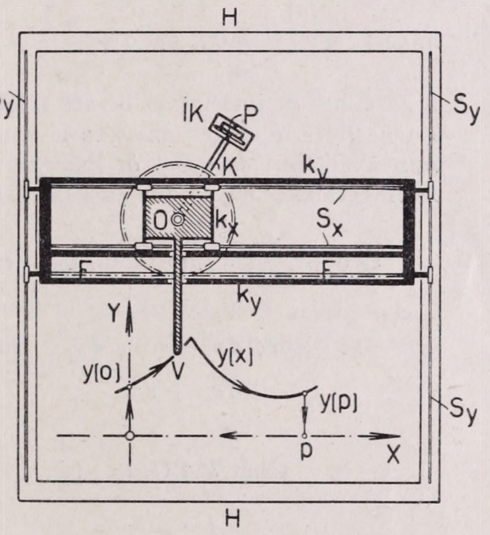
Legyen $y(x)$ az analizálandó függvény. p jelölje e függvény primitív periodusát. A függvény F o u r i e r együtthatóinak egyenlete

[7] Ztschr. f. Instr.-Kunde. (1937, 5. füzet, 177. oldal.)

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{2}{p} \int_0^p y(x) \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right. \left(\frac{2\pi n}{p} x\right) dx.$$

Célunk a megadott $y(x)$ függvényből ezeknek az integráloknak művi kiszámítása. Ezt a következő mechanikai rendszerrel érhetjük el (6. ábra).

Egy H kereten az S_y sínpár az y-iránnyal párhuzamosan vezeti a k_y kocsit és ezzel a kocsival összekötött S_x sínpár pedig az x-iránnyal párhuzamosan vezeti a k_x integráló kocsit. Az integráló kocsi egy vele szilárdul összekötött OV vezető kar segítségével a keret síkjában, tehát szabadon eltolható. A k_x kocsi O (függőleges) tengelyén egy R sugarú fogaskerék van elhelyezve. Ez a fogaskerék a k_y kocsival szilárdan összekötött F fogasrúdba kapcsolódik. A fogaskerék egy radiális K karral van összekötve, amely az IK integráló kereket hordozza. Az IK a P pontban nyugszik az alapsíkon, tengelye $\overline{OP}$ egyenessel egybeesik, $|\overline{OP}| = l$ és $|\overline{VO}| = m$.



6. ábra.

Ezen elrendezés következtében, ha a vezető kar V végpontját egy az x-tengellyel párhuzamos egyenes mentén vezetjük, akkor a P pont az ordináta irányában m-mel eltolt cikloist írja le, ha V-t az y-tengellyel párhuzamosan mozgatjuk, akkor P is az y-tengellyel párhuzamos egyenest ír le. A fogaskerék sugarát válasszuk meg úgy, hogy a fogaskerék (s vele a K kar is) a p periodushosszon n teljes körforgást végezzen, tehát $2R\pi n = p$ legyen. Ha a dx elmozdulásnak a fogaskerék (ill. K kar) $d\varphi$ szögelfordulása felel meg, akkor $dx = Rd\varphi$, azaz $\varphi = \frac{2\pi n}{p} x + \varphi_0$, ahol φ_0 a K kar kezdeti ($x = o$-hoz tartozó) szögbeállítását jelöli. Ha a vezető kar V végpontját az analizálandó görbe mentén $x = o$-tól $x = p$-ig vezetjük, akkor a P pont gördülési útjának egyenlete

$$x_p = x + l \cos\left(\frac{2\pi n}{p} x + \varphi_o\right),$$

$$y_p = y(x) + m + l \sin\left(\frac{2\pi n}{p} x + \varphi_o\right).$$

Ezen az úton az IK a $k \Delta U = \int\limits_{x=0}^{p} \cos \beta \, ds_p = \int\limits_{x=0}^{p} \sin \delta \, ds_p$

integrál értékét méri, ha $\delta = \frac{\pi}{2} - \beta$ az integráló kerék tengelyének a gördülési út ívelemével bezárt szögét jelöli. Mivel ez az ívelem az x-tengellyel ϑ szöget alkot, s a tengely iránya megegyezik a kar irányával, azért $\varphi = \vartheta + \delta$. Eszerint és az x_p, y_p függvények szerint az integrálban fellépő kifejezéseket explicite meg tudjuk adni:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy_p}{dx_p}, \quad \sin \delta = \sin(\varphi - \vartheta) = \frac{\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta}} =$$

$$= \frac{\sin \varphi \, d x_p - \cos \varphi \, d y_p}{\sqrt{d x_p^2 + d y_p^2}} = \frac{\sin \varphi \, d x_p - \cos \varphi \, d y_p}{ds_p},$$

$$\text{tehát } k \Delta U_1 = \int\limits_{x=0}^{p} (\sin \varphi \, dx_p - \cos \varphi \, dy_p) =$$

$$= -\int\limits_{x=0}^{p} \left(l \frac{d\varphi}{dx} + \cos \varphi \frac{dy}{dx} - \sin \varphi\right) dx.$$

Ha ebből az egyenletből a F o u r i e r együtthatókat akarjuk lemérni, legelőbb is az első és harmadik tagot kell az integrálból kiküszöbölnünk. Épp azok a tagok lépnek fel azonban akkor, amikor a V pontot az x-tengelyen $(y = o)$ $x = p$-től $x = o$-ig visszavezetjük. Ebben az esetben az IK gördülése

$$k \Delta U_2 = -\int\limits_{x=p}^{o} \left(l \frac{d\varphi}{dx} - \sin \varphi\right) dx.$$

Mivel $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \varphi(o) = \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \varphi(p)$, azért K iránya mindkét végállapotban azonos és mivel $y(o) = y(p)$, azért az IK gördülése az $x = p$ ordinátaegyenesen az y (p)-től az o-ig történő eltolás közben szintén ellentetten egyenlő az ordinátatengelyen o-tól y (o)-ig való eltolás közben végzett gördüléssel. A függvény periodusának a V ponttól való teljes körfutásával eszerint az IK

$$k \Delta U = k (\Delta U_1 + \Delta U_2) = - \int\limits_{x=o}^{p} \cos \varphi \frac{d y}{d x} d x =$$

$$= - y (x) \cos \varphi (x) \Big|_{x=o}^{p} - \int\limits_{x=o}^{p} y (x) \sin \varphi (x) \frac{d\varphi}{dx} dx =$$

$$= - \frac{2 \pi n}{p} \int\limits_{x=o}^{p} y (x) \sin \left(\frac{2 \pi n}{p} x + \varphi_o \right) dx$$

integrál értékét határozza meg.

Ha a F o u r i e r együtthatók integráljait akarjuk mérni, akkor a kar kezdeti helyzetét az x- $(\varphi_o = o)$, ill. az y-tengellyel párhuzamosan $(\varphi_o = \pi/2)$ vesszük fel. Eszerint tehát

$$\pm k . \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_o \\ \Delta U \pi/_2 \end{array} \right. = \pi n . \left(\frac{2}{p} \int\limits_{o}^{p} y (x) \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right. \left(\frac{2 \pi n}{p} x \right) dx = \pi n \left\{ \begin{array}{l} b_n \\ a_n \end{array} \right. \right.$$

azaz

$$\left. \begin{array}{l} a_n \\ b_n \end{array} \right\} = \frac{\pm k}{\pi n} . \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_{\pi/2} \\ \Delta U_o \end{array} \right. .$$

Ezzel a F o u r i e r együtthatókat a leolvasási különbség értéke és a k műszerállandó meghatározza.

A k műszerállandót azáltal nyerjük, hogy egy oly függvényt analizálunk, amelynek F o u r i e r együtthatói numerikusan ismeretesek (pl. trapez, vagy félkörívekből összetett görbét). A műszer úgy van elkészítve, hogy az $n = 1, 2, 3 \ldots$ értékeknek megfelelő, K kart vezérlő $R_n = \frac{p}{2 \pi n}$ fogaskerekek a k_x kocsin kicserélhetők. Minden fogaskerék K kezdeti beállítása szerint két együtthatót határoz meg. p a műszer állandója. Ha ettől a p értéktől eltérő periodusú függvényt akarunk analizálni, szükséges, hogy a függvényt a p állandó periodushosszára átrajzoljuk.

3. A lineáris planimeterek. Lineárisnak nevezzük planimeterünket, ha az integráló kart vezérlő Z pont[8] kényszervezérléssel egy egyenes mentén mozog. E vezérlésnek három gyakorlatilag jól bevált formája használatos: 1. A csúszószeges vonalzós vezérlés-t az jellemzi, hogy a K kar Z pontján rögzített csúszószeg belenyúlik egy fémvonalzó kimart egyenesvonalú csatornájába és ebben elmozdulhat, 2. a vonalzós kocsivezérlés a fémvonalzó csatornájába két konikusan élezett peremű kereken nyugvó kocsival egybekötött kar segítségével a kocsi mozgásirányával párhuzamosan vezeti a Z pontot, 3. a hengerkerekes kocsivezérlés-nél a kocsi (s vele az összekötött Z pont) egyenesvonalú elmozdulását a kocsit hordozó két szélesperemű, érdes és egymással szilárdul összekötött hengerkereke biztosítja.

A 7. ábra egy vonalzós kocsivezérlésű lineáris felület-planimeter vázlatát, valamint a V és P pont elmozdulásának differenciáljait ábrázolja.

Szemléljük először a V pont ds mentén való $V \to V'$ elmozdulását. Ez az elmozdulás felbontható 1. a K karnak dx eltolására (az eltolás alatt a karnak az x-tengellyel bezárt α szöge nem változik), 2. egy olyan dx_1 eltolásra, amelynek nagyságát úgy válasszuk meg, hogy K vezetett pontja, 3. a Z $(x + dx + dx_1)$ pont körül $d\alpha$-val való elforgatással ds-nek V' végpontjába jusson. Ezalatt az elforgatás alatt a V vezetett pont az $ld\alpha$, P pedig a $pd\alpha$ differenciált írja le. Eszerint

$$V \to V' = \overline{dx} + \overline{dx_1} + \overline{ld\alpha}\,.$$

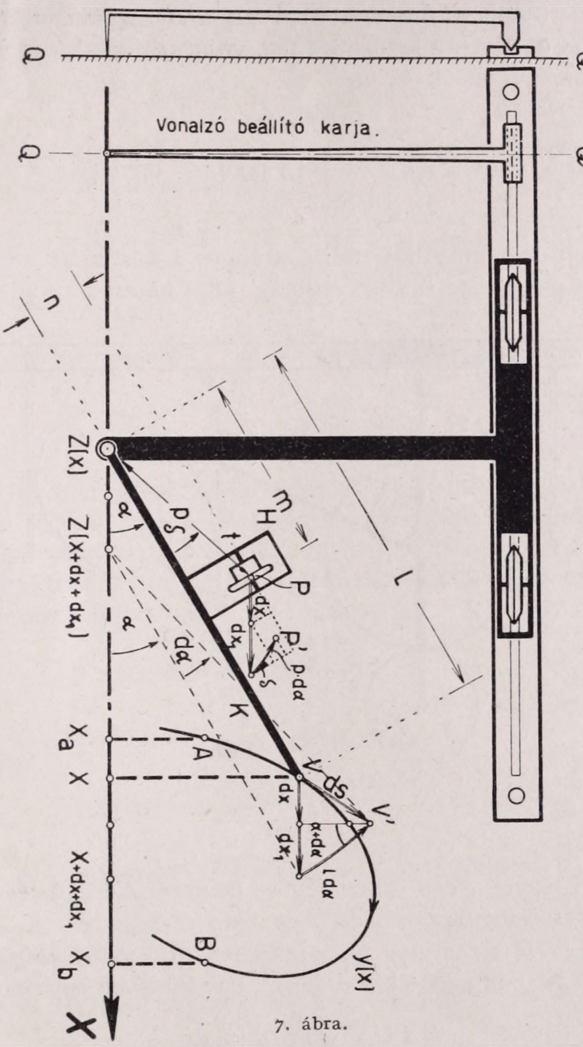
Az IK P érintési pontjának megfelelő elmozdulása (a gördülési út differenciáljai)

$$P \to P' = \overline{dx} + \overline{dx_1} + \overline{p\,d\,\alpha}\,,$$

s így az IK gördülése $P \to P'$ mentén $dh_{res} = dh + dh_1 + dh_2$, ahol $dh = dx \sin\alpha$, $dh_1 = dx_1 \sin\alpha$, $dh_2 = -p \cos\delta\, d\alpha = -m\,d\,\alpha$. Mivel $dx_1 = ld\alpha \sin\alpha$, azért a rezultáns differenciális gördülés

$$dh_{res} = \sin\alpha\, dx + l \sin^2\alpha\, d\,\alpha - m\, d\,\alpha.$$

[8] A továbbiakban általában a következő jelöléseket használjuk. K jelöli az integráló kart, amelyhez az IK integráló kerék H keret segítségével van erősítve. K egyik végén helyezkedik el a görbe mentén való vezetésre kiképzett V vezetett pont, a másikon az integráló kart vezérlő Z pont, amely kinematikai kényszervezérléssel meghatározott görbe mentén mozog. $\overline{VZ}$ párhuzamos az IK t tengelyéhez, s mindkettő minden helyzetben párhuzamos az alapsíkkal. $|\overline{VZ}| = l$, $|\overline{ZP}| = p$, ahol P az IK-nek az alapsíkkal való érintéspontját jelöli. $\overline{ZP}$-nek a $\overline{ZV}$-re való párhuzamos vetülete m, a $\overline{ZV}$-re való merőleges vetülete pedig n, tehát $\operatorname{tg}\delta = \frac{n}{m}$, $\cos\delta = \frac{m}{p}$.



7. ábra.

Ha V-t a görbe mentén P'-től P''-ig vezetjük, a gördülés

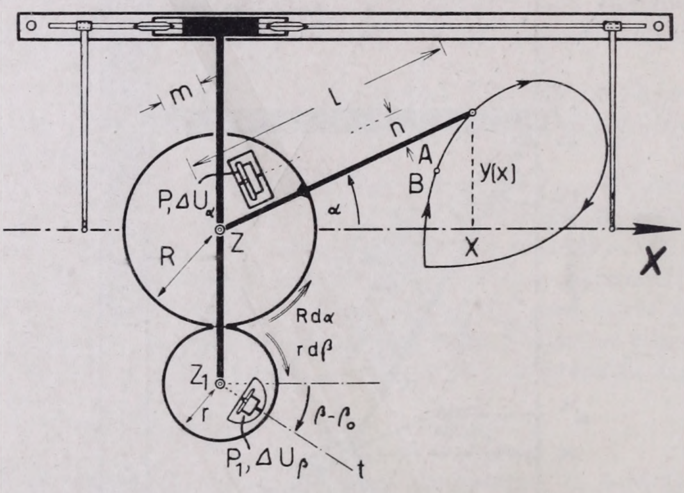
$$3 \ldots \qquad h\Big|_{P'}^{P''} = k\,\Delta U = \int_{P'}^{P''} dh_{rcs} =$$

$$= \int_{P''}^{P'} \sin\alpha\, d\,x + \left\{\frac{l}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\,\alpha\right) - m\,\alpha\right\}\Bigg|_{P'}^{P''}.$$

Ha a kezdeti A pont ordinátája egyenlő a B végpont ordinátájával, akkor $\alpha_A = \alpha_B$ lévén a két utolsó tag, mint azonos alsó és felső határ értékkülönbsége, kiesik és így

$$k\,U\Big|_A^B = k\,\Delta\,U = \int_{x_A}^{x_B} \sin\alpha\,d\,x = \frac{1}{l}\int_{x_A}^{x_B} y\,(x)\,dx \qquad \text{mivel } \sin\alpha = \frac{y\,(x)}{l}\,.$$

A $\Delta\,U$ leolvasási különbség tehát arányos a görbe, az x-tengely és az A és B pontokhoz tartozó ordináta által határolt területtel. A kl



8. ábra.

arányossági tényezőt egy ismert felület (négyzet, körlap) planimetrálásával határozzuk meg.

Ha az IK t tengelye az x-tengellyel $\beta = \beta\,(\alpha)$ szöget alkot, akkor, amikor az integráló kar α szöget, úgy könnyen belátható, hogy

$$4\ldots \qquad k\,\Delta\,U = \oint \sin\,\beta\,(\alpha)\,dx$$

egyenlet érvényes.[9] Ez az egyszerű elv az alapja a lineáris nyomaték-planimetereknek.

[9] Azokban az esetekben, amelyekben az elmozdulások felbontása az előbbivel azonos, nem tüntetem fel az összes útelemeket és a hozzájok tartozó gördülési differenciálokat, csupán a lényeges gördülési differenciált adom meg, mert az előbbiek alapján könnyen meghatározhatjuk azokat, amelyeknek integráljai zárt körfutás esetében úgyis eltűnnek.

Állítsuk pl. a $\beta = \beta(\alpha)$ szögátvitelt a 8. ábrán vázolt R és r sugarú fogaskerék áttétellel elő,[10] akkor $R d\alpha = r d\beta$, azaz

$$\beta(\alpha) = \frac{R}{r}\alpha + \beta(o).$$

Ha a R/r áttételi viszonyt és a t tengely $\beta(o)$ kezdeti szögét az alábbiak szerint választjuk :

$\frac{R}{r}$	$\beta(o)$	$\sin\beta(\alpha)$
1	o	$\sin\alpha$
2	$-\pi/2$	$\sin(2\alpha - \pi/2) = 2\sin^2\alpha - 1$
3	o	$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
4	$+\pi/2$	$\sin(4\alpha + \pi/2) = 8\sin^4\alpha - 8\sin^2\alpha + 1$

akkor a felsorolt egyszerű trigonometriai átalakítások és a 4. egyenlet, valamint $y(x) = l\sin\alpha$ összefüggés segítségével könnyen belátható, hogy az egyes integráló kerekek leolvasási különbsége az $y(x)$ zárt görbe által határolt felület nyomatékintegráljaival a következő egyenletek szerint fejezhető ki :

$$k_1\Delta U_1 = \frac{1}{l}\oint y(x)\,dx = \frac{1}{l}\iint dx\,dy$$

$$k_2\Delta U_2 = \frac{2}{l^2}\oint y^2(x)\,dx = \frac{4}{l^2}\iint y\,dx\,dy$$

$$k_3\Delta U_3 = \frac{3}{l}\oint y(x)\,dx - \frac{4}{l^3}\oint y^3(x)\,dx = \frac{3}{l}\iint dx\,dy - \frac{12}{l^3}\iint y^2\,dx\,dy$$

$$k_4\Delta U_4 = \frac{8}{l^4}\oint y^4(x)\,dx - \frac{8}{l^2}\oint y^2(x)\,dx = \frac{32}{l^4}\iint y^3\,dx\,dy - \frac{16}{l^2}\iint y\,dx\,dy.$$

Ebből a nyomatékok (a leolvasási különbségekkel) kifejezve a következő egyenleteket szolgáltatják :

$$5\ldots\quad \begin{aligned} F &= M_{0,0} = \iint dx\,dy = lk_1\Delta U_1 = a\Delta U_1 \\ S_x &= M_{0,1} = \iint y\,dx\,dy = \frac{l^2 k_2}{4}\Delta U_2 = b\Delta U_2 \\ T_x &= M_{0,2} = \iint y^2\,dx\,dy = \frac{l^3}{4}\left(k_1\Delta U_1 - \frac{k_3}{3}\Delta U_3\right) = c_1\Delta U_1 - c_3\Delta U_3 \\ M_{0,3} &= \iint y^3\,dx\,dy = \frac{l^4}{32}\left(k_4\Delta U_4 - \frac{k_2}{4}\Delta U_2\right) = d_4\Delta U_4 - d_2\Delta U_2. \end{aligned}$$

10 A. Amsler; fogaskerékáttétellel és az *IK* gömbön való preciziós gördítésével : *G. Coradi;* csúszósvezérlésű csuklós áttétellel : *A. Ott.*

Ha a műszer Z pontjának útjaként az y-tengelyt választjuk, akkor az előbbi $M_{\bullet, i}$ nyomatékok helyett nyilvánvalóan az $M_{i, o}$ nyomatékok értékét nyerjük. Egy ponton átmenő $i + k + 1$ különböző irányú tengelyekre vonatkoztatott $M_{0, i+k}$ nyomatékok meghatározása után az $M_{i,k} = \iint x^i y^k \, dx \, dy$ nyomatékok értékeit számítással szintén könnyen meghatározhatjuk. Megemlítendő, hogy míg az első két nyomaték arányossági tényezője egy ismert nyomatékú felület planimetrálása útján adódik, addig a két utolsó nyomaték planimeteregyenlete két arányossági tényezőt tartalmaz, s így meghatározásuk két ismert nyomatékú felület planimetrálásával kell megtörténjen.

Tekintettel arra, hogy egy mérés egyszeri leolvasásának értéke nagy mértékben függ a V pontot vezető kéz és szem gyakorlatától és a pillanatnyi diszpozíciótól, a hibaforrások lehető csökkentésére a planimetrálás minden esetében többszöri körfutás leolvasásainak (esetleg a kiegyenlítő számítás alapján nyert) középértéke veendő.

Meg kell említenünk még azt a gyakorlatilag sokszor megfigyelhető (és csak kivételesen helyes) kezelési elvet, amely szerint a planimetrálandó görbéről véletlenül letérő téves vezetést, akaratlagos ellentett letéréssel igyekszik kiegyenlíteni. Ez felszínmeghatározásnál helyes. Tényleges nyomatékok planimetrálásánál viszont általában hibás eredményekhez vezet, amennyiben a tengelytől különböző távolságban elhelyezkedő egybevágó terület nyomatékai különbözőek.

A lineáris nyomatékplanimeterek alapelve az α szög többszörösének művi áttétele az IK t tengelyére. Természetes, hogy az IK tengely irányának ezen vezérlését a fogaskerekekkel megvalósított szögátvitel helyett más kinematikai vezérléssel is megoldhatjuk.

A 9. ábra szemlélteti pl. A. OTT egyesített és gyakorlatilag jól bevált $\oint y^2 dx, \oint y \, dx, \oint \sqrt{y} \, dx$ hatványplaniméterének elvét.

A párhuzamos vezérlés kocsijának $Z_1 Z_2$ tengelypontjain $V_1 Z_1 Q$ és $V_2 Z_2 Q$ integráló karok vannak megerősítve, s ezek egymáshoz a Q csúszóágyazással kapcsolódnak. Mivel konstruktive $|\overline{Z_1 Z_2}| = |\overline{Z_2 Q}|$, azért a $Z_1 Z_2 Q$ háromszög Z_2-nél fellépő külső szöge a Z_1-nél fellépő α belső szögnek kétszerese. Ha a V_1 pontot a Z_1 és Z_2 pontokon átmenő x_1 abszcisszatengelyre vonatkoztatott $y_1(x_1)$ görbén vezetjük, az IK_1 integráló kerék a

$$k_1 \Delta U_1 = \oint \sin \alpha \, dx_1 = \frac{1}{l} \oint y_1(x_1) \, dx_1,$$

felületet, az IK_2 pedig a

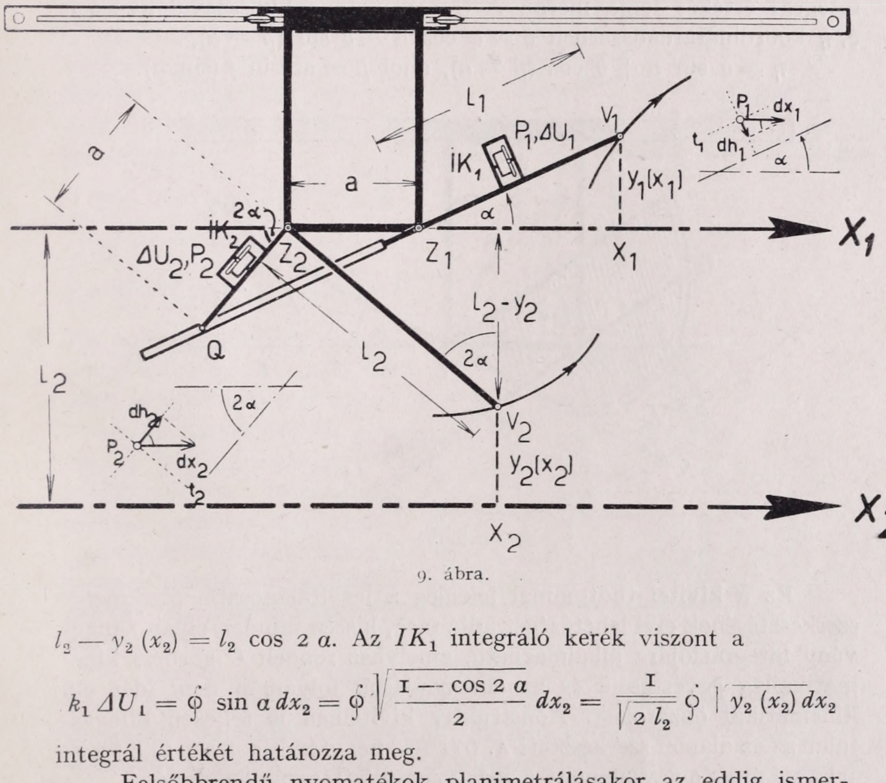
$$k_2 \Delta U_2 = - \oint \cos 2\alpha \, dx_1 = \oint (2 \sin^2 \alpha - 1) \, dx_1 = \frac{2}{l^2} \oint y_1^2 (x_1) \, dx_1,$$

statikus nyomatékot méri. (Eközben V_2 pont egy oly görbét ír le, amelynek ordinátája az x_1-től l_2 távolságban lévő x_2-tengelyre vonatkoztatva $y_2 = 2 \frac{l_2}{l_1^2} y_1^2$.)

Ha a V_2 ponttal az x_2 abszcisszára vonatkoztatott $y_2(x_2)$ görbét követjük, akkor az IK_2 a

$$k_2 \Delta U_2 = -\oint \cos 2\alpha\, dx_2 = -\frac{1}{l_2}\oint \left(l_2 - y_2(x_2)\right) dx_2 = \frac{1}{l_2}\oint y_2(x_2)\, dx_2$$

felületet méri, mivel, mint az a 9. ábrából könnyen leolvasható,



9. ábra.

$l_2 - y_2(x_2) = l_2 \cos 2\alpha$. Az IK_1 integráló kerék viszont a

$$k_1 \Delta U_1 = \oint \sin\alpha\, dx_2 = \oint \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\, dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\, l_2}} \oint \sqrt{y_2(x_2)}\, dx_2$$

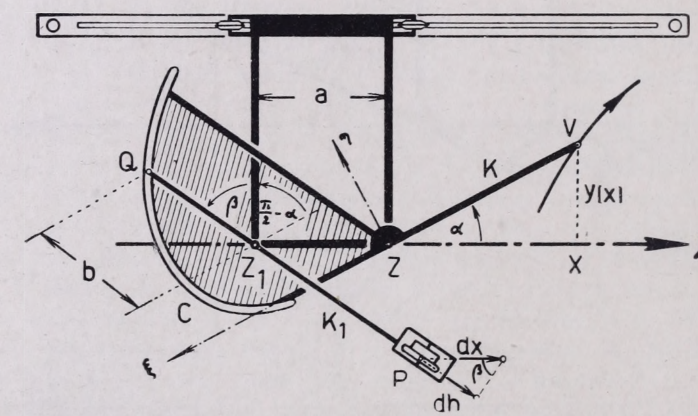
integrál értékét határozza meg.

Felsőbbrendű nyomatékok planimetrálásakor az eddig ismertetett planimeterek közös hibája az, hogy a keresett eredményt az 5. egyenletekkel két vagy több (hibás) megfigyelési eredményből, t. i. a leolvasási különbségekből kell kiszámítanunk. A mérési technikában (a hibaátöröklés miatt) lehetőleg elkerülünk oly műszereket, melyek nem szolgáltatják közvetlenül a keresett értékeket, hanem közvetve csak oly értékeket adnak meg, amelyekből a keresett érték további számítással határozandó meg. Ezt a nehézséget és a preciziós kivitelben költséges fogaskerékáttételt A. OTT egy igen egyszerű ötlettel küszöböli ki (10. ábra). A Z körül forgó K integráló kar egy (a rajzban sraffozott) kulisszával van egybekötve. E kulisszának meghatározott alakban kivágott C csatornájába a Z_1 körül forgó és az integráló kereket hordozó K_1 kar Q csúszószege nyúlik be. $|\overline{Z_1 Q}| = b$, $|\overline{ZZ_1}| = a$. V-nek dx elmozdulásakor az IK gördülése $dh = dx \cdot \sin \beta$. Ha a C csatornát $\sin \beta = f(\sin \alpha)$ egyenlet szerint készítjük el, akkor az IK

$$k\,\Delta U = \oint f(\sin \alpha)\,dx = \oint f\left(\frac{y(x)}{l}\right) dx$$

integrál értékét fogja mérni. A C egyenlete a kulisszával kapcsolt ξ, η koordinátarendszerben $\xi = a \cos \alpha - b \sin (\beta - \alpha)$,

$$\eta = a \sin \alpha + b \cos (\beta - \alpha), \text{ ahol } \beta = \arcsin f(\sin \alpha).$$

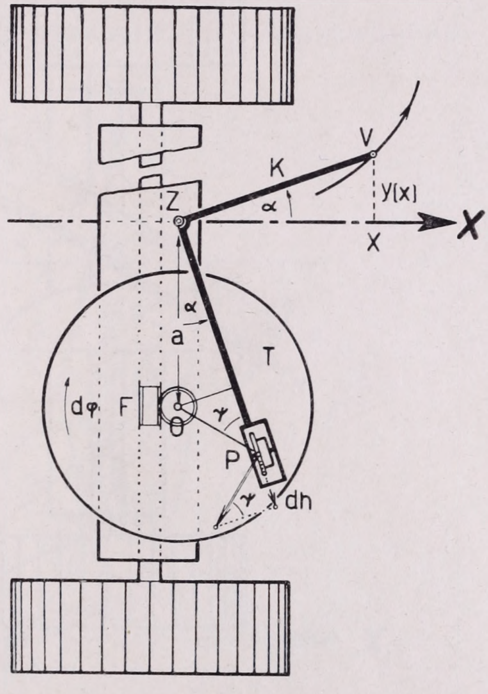


10. ábra.

Ez a kivitel tudtommal jelenleg a legáltalánosabb planimeter szerkesztésének elvi lehetőségét adja meg, hiszen minden olyan f függvény integrációjára alkalmazható, amelyhez rendelt C görbeív kinematikailag egyértelmű és az elmozdulások folyamán nem idéz elő kinematikai önzárolást. Konstruktív kivitelben is teljesen kifogástalan az ez alapon szerkesztett A. OTT-féle négytárcsás nyomatékplaniméter, valamint a már ismertetett gyökplaniméter.

Az ú. n. preciziós planimeterek a leolvasás pontosságát a gördülési út művi sokszorosításával növelik. Ezeknél az IK a műszerhez tartozó tárcsán, vagy gömbfelületen gördül. Ezzel (a technikai kivitel lehetőségein belül) kiküszöbölik az alapsík egyenletlenségéből származó hibákat, megmarad azonban az IK gördülésmentes csúszásakor fellépő aránylag nagy szórós lehetősége. Ha az IK helyett gömbön csúszásmentesen gördülő hengert veszünk integráló mechanizmusként, akkor ez utóbbi hibaforrás is gyakorlatilag kiküszöbölhető. A tárcsás gördülő planimeter egy hengerkerekes kocsiból áll (11. ábra), amelyen a VZP integráló kar a Z függőleges tengely körül elfordulhat. Az IK a kocsi O pontjában függőleges tengely körül ágyazott T tárcsán nyugszik. E tárcsa az F fogaskerékáttétellel kapcsolódik a hengerkerekek tengelyéhez, úgyhogy a kocsi dx elmozdulása a tárcsa arányos $vdx = d\varphi$ elfordulását idézi elő. A V pont dx elmozdulása tehát az IK P érintési pontjának $|\overline{OP}|\, d\varphi$ relatív elmozdulását eredményezi, amelyhez $dh = \sin\psi\, |\overline{OP}|\, d\varphi$ gördülés tartozik. A ZOP háromszögből

$$|\overline{OP}| \sin\psi = |\overline{ZO}| \sin\alpha = a \sin\alpha \quad \text{tehát} \quad k\Delta U = \oint a \sin\alpha\, d\varphi = \frac{av}{l} \oint y(x)\, dx.$$



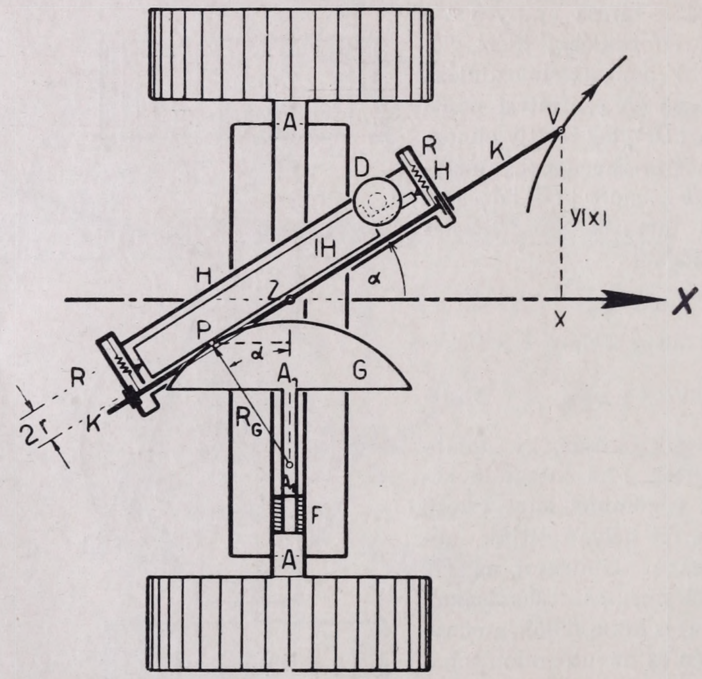
11. ábra.

Ha a sík tárcsát egy gömbfelülettel, s az integráló kereket e gömbfelületet érintő hengerrel helyettesítjük, akkor ez a planimeter az IK gördülésmentes csúszásának hibáját is kiküszöböli, amenynyiben ez az integrálómechanizmus minden mozgásállapotban csúszásmentesgördülést végez.

Ilyen pl. a hengerkerekes gömbplanimeter (12. ábra), amely egy hengerkerekes vezérlésű kocsiból áll, melyen a G gömbsüveg az A_1A_1 vízszintes tengely mentén van ágyazva. Az A_1A_1 tengely az F fogaskerékáttétellel kapcsolódik a henger kerekek vele párhuzamos AA tengelyéhez. A gömbsüvegnek az A_1A_1 tengely körül való $d\varphi$ szögelmozdulása tehát arányos a kocsi, s így a V vezetett pont dx elmozdulásával.

A Z pontban ágyazott K integráló karral egy H keret van egybekötve, amelyen a ZV-vel párhuzamos tengely mentén ágyazva helyezkedik el az IH integráló henger. Ennek szögelmozdulását egy D dob beosztása és egy nóniusz regisztrálja. Az IH integráló henger és a

G gömbfelület a gömbfelület vízszintes főkörének P pontjában érinti egymást, a H keret csúszós ágyazása és az R rúgók segítségével. A V pont dx elmozdulásánál G $vdx = d\varphi$ szöggel fordul el, a P pontnak az A_1A_1 tengelyre vonatkoztatott relatív elfordulása tehát $R_G \sin \alpha d\varphi$. Ha az IH átmérője $2r$, akkor az IH G-nek ezen elmoz-



12. ábra.

dulásakor $d\psi$ szöggel fordul el, vagyis $R_G \sin \alpha d\varphi = rd\psi$. Ebből következik, hogy

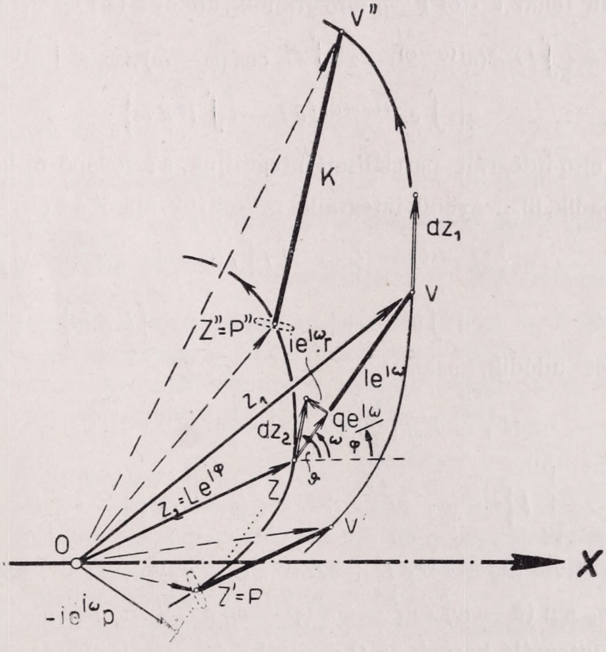
$$k \varDelta U = \frac{R_G \cdot v}{r} \oint \sin \alpha \, dx = \frac{R_G \cdot v}{r \cdot l} \oint y(x) \, dx.$$

Ugyanezen az elven alapszik *Coradi* precíziós nyomatékplanimetere. Ez a kivitel azonban integráló henger helyett a gömböt érintő integráló kerekeket használ.

4. **Az általános planimeteregyenlet.** Az általános planimeterek a Z vezérlő pontot mozgása közben egy meghatározott $z_2 = Le^{i\varphi}$ pályán tartják, miközben a V vezetett ponttal a megadott és integrá-

landó $z_1 = z_2 + l\,e^{i\omega}$ pályát követjük. (13. ábra) L és l a póluskar, ill. az integráló kar (változó) hosszát, φ, ω e karoknak az x-tengellyel bezárt szögét jelöli. Ha $\varphi = o$, l állandó és L változó,akkor a már tárgyalt lineáris planimetereket nyerjük. Ha L és l állandó és φ változó, akkor Z az ú. n. póluskörön mozog (e kör középpontját nevezzük a pólusnak), s planimeterünket p o l á r i s planimeternek hívjuk. Ha z_2 görbe ponttá zsugorodik és l változó, akkor a r a d i á l i s planimeterek határesetét nyerjük.

Az általános esetben az integráló kar Z és V pontja kinematikai-



13. ábra.

lag kapcsolja a z_1 és z_2 görbét. Ebben az esetben az integráló kar elmozdulásával fellépő elmozdulási és gördülési differenciálok célszerű felbontása általában komplikáltabb az előbb ismertetetteknél. Célszerűbb emiatt az általános planimeteregyenletet más úton, t. i. a kinematikailag kapcsolt z_1 és z_2 görbék szektorfelületei között fennálló összefüggésből levezetni.

Ha V-t a megadott z_1 görbe mentén V'-től V''-ig vezetjük (13. ábra), akkor Z a pólusgörbén Z'-től Z''-ig tolódik el. Jelölje F_1 az $OV'V''$, F_2 az $OZ'Z''$ szektorfelületet. A LEIBNIZ-féle szektorképlet komplex alakban $F = -Im\int z\,d\bar{z}$, ahol z az integrálandó síkgörbe[11] komplex egyenletét jelöli. Eszerint, mivel

$$d\bar{z}_1 = d\bar{z}_2 + e^{-i\omega}\,dl - i\,l\,e^{-i\omega}\,d\omega,\quad d\bar{z}_2 = e^{-i\varphi}\,dL - i\,L\,e^{-i\varphi}\,d\varphi,$$

azért

$$z_1\,d\bar{z}_1 - z_2\,d\bar{z}_2 = z_2\,(e^{-i\omega}\,dl - i\,l\,e^{i\omega}\,d\omega) + l\,e^{i\omega}\,d\bar{z}_2 + l\,dl - i\,l^2\,d\omega =$$
$$= i\,l\,L\,e^{i(\varphi-\omega)}\,d(\varphi-\omega) - i\,l\,L\,[e^{i(\varphi-\omega)} + e^{-i(\varphi-\omega)}]\,d\varphi +$$
$$+ L\,dl\,e^{i(\varphi-\omega)} + l\,dL\,e^{-i(\varphi-\omega)} - i\,l^2\,d\omega + l\,dl.$$

Ha tehát V'-től V''-ig integrálunk, akkor $2\,(F_1 - F_2)\,\Big|_{V'}^{V''} =$

$$= -Im\Big\{\int l\,L\,d(e^{i(\varphi-\omega)}) - 2i\int l\,L\cos(\varphi-\omega)\,d\varphi + \int e^{i(\varphi-\omega)}\,L\,dl +$$
$$+ \int e^{-i(\varphi-\omega)}\,l\,dL - i\int l^2\,d\omega\Big\}.$$

Ha az első integrált parciálisan integráljuk, s a fellépő új integrálokat a harmadik, ill. negyedik integrállal egyesítjük, akkor a $2\,(F_1 - F_2)\,\Big|_{V'}^{V''} =$

$$= -Im\Big\{l\,L\,e^{i(\varphi-\omega)}\,\Big|_{V'}^{V''} - \int l\Big[e^{i(\varphi-\omega)} - e^{-i(\varphi-\omega)}\Big]\,dL -$$
$$-2i\int l\,L\cos(\varphi-\omega)\,d\varphi - i\int l^2\,d\omega\Big\}$$

egyenlet adódik, azaz

$$2\,(F_1 - F_2)\,\Big|_{V'}^{V''} = -Im\Big\{l\,L\,e^{i(\varphi-\omega)}\,\Big|_{V'}^{V''} -$$
$$-2i\int_{V'}^{V''} l\Big[\sin(\varphi-\omega)\,dL + L\cos(\varphi-\omega)\,d\varphi\Big] - i\int_{V'}^{V''} l^2\,d\omega\Big\}.$$

Mivel $dz_2 = e^{i\varphi}\,dL + i\,L\,e^{i\varphi}\,d\varphi = q\,e^{i\omega} + r\,i\,e^{i\omega}$, azért

$$ds_2\,\sin(\vartheta-\omega) = r = \sin(\varphi-\omega)\,dL + L\cos(\varphi-\omega)\,d\varphi.$$

Ha az integráló karnak az O ponttól mért merőleges távolságát p-vel jelöljük, akkor $L\,e^{i\varphi} + \lambda\,e^{i\omega} = -p\,i\,e^{i\omega}$, tehát $Im\,\{L\,e^{i(\varphi-\omega)}\} =$

$$= Im\,\{-\lambda - ip\} = -p.$$

Ezzel fenti egyenletünk az

$$6\ldots\ (F_1 - F_2)\,\Big|_{V'}^{V''} = \frac{1}{2}\,l\,p\,\Big|_{V'}^{V''} + \int_{V'}^{V''} l\sin(\vartheta-\omega)\,ds_2 + \frac{1}{2}\int_{V'}^{V''} l^2\,d\omega$$

[11] Gömbön, vagy tetszőleges görbületű felületeken határolt területek meghatározására is ismeretesek exakt, vagy csak közelítő működésű planimeterek.

alakot ölti. Ezt az egyenletet nevezzük az általános planimeteregyenletnek. Ha az integráló kereket úgy helyezzük el a K karon, hogy az IK-nak az alapsíkkal való P érintési pontja a Z pont vetületébe essék (tehát P a z_2 pólusgörbén mozogjon), miközben az IK tengelye K-val párhuzamos, akkor az IK differenciális elmozdulása

$$dh = \sin(\vartheta - \omega)\, ds_2 = k\, d\, U$$

differenciális gördülést méri.

Ha az IK-et a fentiek szerint helyezzük el és ha L és l állandó (poláris planimeter), akkor a 6. egyenlet az

$$7 \ldots \qquad (F_1 - F_2)\Big|_{V'}^{V''} = \frac{1}{2}\, l p\,\Big|_{V'}^{V''} + \frac{1}{2}\, l^2 \omega\,\Big|_{V'}^{V''} + l k \Delta U$$

egyenletbe megy át.

V teljes körfutása esetében $F_2 = \left\{\begin{matrix} 0 \\ L^2 \pi \end{matrix}\right.$, aszerint, amint a pólus a mért felületen $\begin{matrix}\text{kívül}\\ \text{belül}\end{matrix}$ van, mivel az első esetben a póluskar a póluskör $\begin{matrix}\text{szektorfelületét kétszer ellentett}\\ \text{teljes körfelületét egyszer azonos}\end{matrix}$ irányban írja le. Mindkét esetben F_1 az integrálandó F területtel azonos. Ha a pólus F-en belül helyezkedik el, akkor ez természetes, ha a pólus F-en kívül fekszik, akkor a kétszer ellentett előjellel fellépő szektorfelületek összege épp F. Teljes körfutás esetében azonkívül $p_A = p_B$, $\omega_A = \omega_B$, tehát

$$8 \ldots \quad F = l \oint \sin(\vartheta - \omega)\, ds_2 + \left\{\begin{matrix} 0 \\ L^2 \pi \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} lk \Delta U \\ lk \Delta U + C \end{matrix}\right.$$

Eszerint az állandók meghatározásához két független planimetrálás szükséges, ha a pólus F-en belül fekszik, az ellenkező esetben egy ismert felület planimetrálásával kapjuk lk értékét.

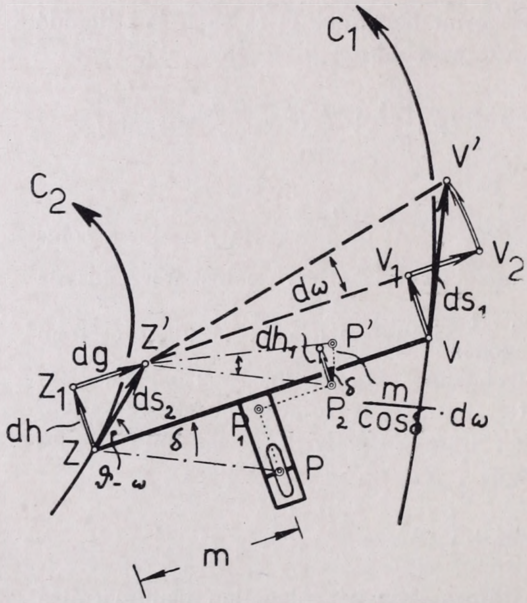
Szerkezetileg nehézségeket okozna az IK P érintési pontjának Z vetületébe való elhelyezése. Az IK tényleges elhelyezése a K karon olyan, hogy P (m, n) távolságban fekszik a Z ponttól (pl. 7. ábra). A megadott görbe teljes befutása esetében ez az eltolás azonban nem játszik szerepet. Ezt a 14. ábrából könnyen leolvashatjuk. C_2 jelöli a pólusgörbét, C_1 az integrálandó görbét. Legyen $\overline{VV'}$ a C_1 görbén V differenciális elmozdulása. Ennek a pólusgörbén $\overline{ZZ'}$ elmozdulás felel meg. Ez utóbbit felbonthatjuk $\overline{ds_2} = \overline{dh} + \overline{dg}$ elmozdulásokra, s ezzel az integráló kar elmozdulását a $\overline{ZV} \to \overline{Z_1 V_1}$, $\overline{Z_1 V_1} \to \overline{Z' V_2}$, $\overline{Z' V_2} \to \overline{Z' V'}$ elmozdulásokra, amelyeknek az IK $dh, o, dh_1 = \left(\frac{m}{\cos\delta} d\omega\right) \cos\delta$ gördülései felelnek meg. Az (m, n)-el eltolt

IK-nak $\overline{ZV} \rightarrow \overline{Z'V'}$-hez tartozó rezultáns gördülése tehát

$$dh_{res} = kdU = dh + o + md\omega = \sin\ (\vartheta - \omega)\ ds_2 + m\ d\ \omega\ .$$

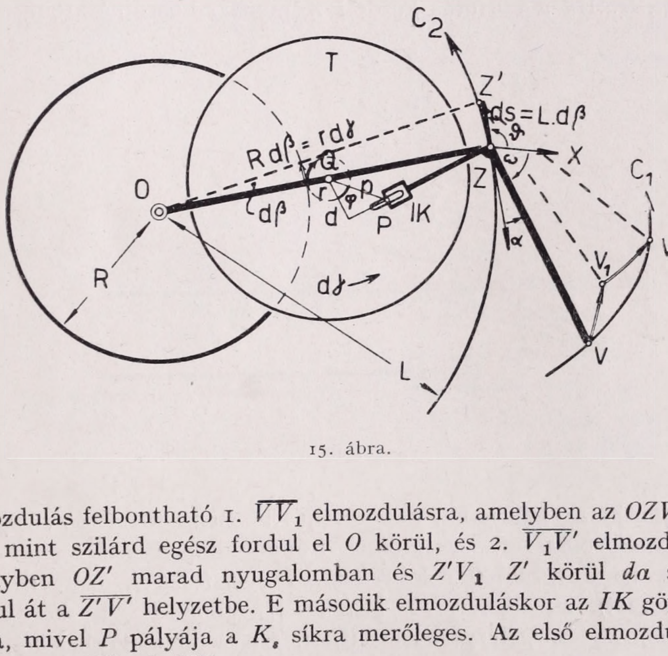
V teljes körfutása esetében a második tag integrálja kiesik, s újból az előbbi egyszerű planimeteregyenletet nyerjük.

Lényegesen fontos és a poláris planimeterek elterjedéséhez nagyban hozzájárult az a (jelenleg) gyakorlatilag igen ritkán kihasznált tény, hogy ezekkel a planimeterekkel az ú. n. kompenzációs kivitelben az IK tengelyének K-hoz viszonyított esetleges ferdeségéből (tehát a gyári beállítás kis határokon belül szinte elkerülhetetlen hibájából) származó hibás értékadatoknak igen egyszerű hibakompenzációja lehetséges. A kompenzációs planimetert a pólusrögzítés változtatása nélkül lehet a pólus és a planimetrálás A kezdeti pontját összekötő egyeneshez ennek mindkét oldalán szimmetrikusan felállítani (1. ábra), s vagy az egyik, vagy a másik kezdeti helyzetből kiindulva planimetrálni. Az első beállításnál (a planimeter pl. OA egyenes «bal» oldalán fekszik) az IK tengelyének a K karral bezárt szögferdesége $+ \varepsilon$, a másik beállításnál (a planimeter az OA egyenes «jobb» oldalán fekszik) e tengelyferdeség $- \varepsilon$. E két kezdeti helyzetből kiinduló két planimetrálás középértékéről könnyű kimutatni, hogy a hibátlan (tehát tengelyferdeség nélküli) leolvasási értéktől ε-nek csak négyzetes és magasabbrendű tagjaival arányosan különbözik, míg az egyes leolvasások hibája ε-nek első hatványával arányos. Annak ellenére, hogy ε kicsiny, ε első hatványa még befolyásolhatja a mérési eredményt, a második hatvány általában már nem. A két szimmetrikus beállításra vonatkozó mérés középértéke tehát gyakorlatilag a gyári beállítás ezen hibájától mentes.



14. ábra.

A közönséges poláris planimeterrel szemben kb. tízszeres pontosságú az ú. n. t á r c s á s p o l á r i s p l a n i m e t e r. Ennek kivitele természetszerűleg kissé komplikáltabb (15. ábra). A rögzített O pólus körül forog az OZ póluskar és ehhez a Z pontban függőleges ágyazással kapcsolódik a VZP integráló kar. Az IK a T tárcsán nyugszik, e tárcsa viszont a póluskaron megerősített Q függőleges tengely körül forog. A T tárcsával szilárdul van egybekötve az r sugarú érdes peremű kerék, amely a pólusalaphoz rögzített R sugarú kerék szintén érdes peremével surlódás által csúszásmentesen kapcsolódik. Eszerint OZ $d\beta$ szögelmozdulásának a T tárcsa Q középpont körüli $d\gamma$ relatív szögelmozdulása felel meg és $Rd\beta = rd\gamma$. Z pont pályája az L sugarú póluskör, amelynek íveleme $ds_2 = Ld\beta$. Ha V az integrálandó C_1 görbén $\overline{VV'}$ elmozdulásnak lesz alávetve, akkor ez az



15. ábra.

elmozdulás felbontható 1. $\overline{VV_1}$ elmozdulásra, amelyben az OZV rendszer mint szilárd egész fordul el O körül, és 2. $\overline{V_1V'}$ elmozdulásra, amelyben OZ' marad nyugalomban és $Z'V_1$ Z' körül $d\alpha$ szöggel fordul át a $\overline{Z'V'}$ helyzetbe. E második elmozduláskor az IK gördülése nulla, mivel P pályája a K_s síkra merőleges. Az első elmozduláskor viszont az IK gördülése

$$dh = p \cos\varphi\, d\gamma = d\gamma \,.\, d = d \,.\, \frac{R}{r}\, d\beta = \frac{d\,.\,R}{r\,.\,L}\, ds_2.$$

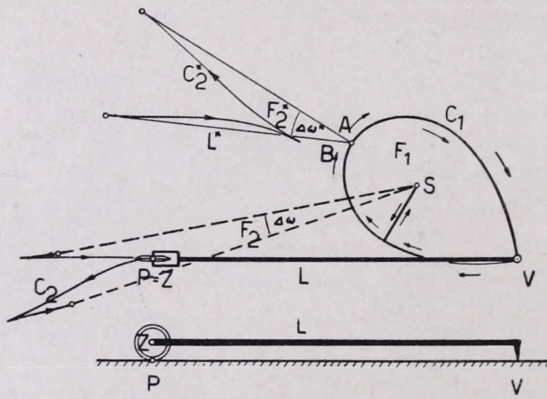
Mivel $d = \left[L - (R + r)\right] \sin\alpha$, azért $dh = \dfrac{R}{rL}\,(L - R - r)\sin\alpha\, ds_2$.

Tekintettel arra, hogy $\vartheta - \omega = \pi - \alpha$, azért $\sin\alpha = \sin(\vartheta - \omega)$,

azaz $dh = kdU = \dfrac{R}{r\,L}\,(L - R - r)\sin(\vartheta - \omega)\, ds_2$, tehát teljes körfutás esetében $F = F_2 + k \dfrac{rlL}{R\,(L - R - r)}\, \Delta\, U = F_2 + K \Delta\, U.$

(F_2 szerepe ugyanaz, mint a közönséges poláris planimetereknél.)

A 7. planimeteregyenletből könnyen származtatható az integráló kerék nélkül működő Pritz-féle planimeter. Ez gyakorlatilag alig ér el 2 . . . 4% pontosságot, s emiatt inkább csak elvileg érdekes. E planimeter csak az integráló karból áll (16. ábra), amelynek Z pontjában egy éles peremű nehéz kerék úgy van megerősítve, hogy a kerék síkja az alapsíkra merőleges és a ZV egyenesbe esik. A P pont tehát csakis ZV irányában mozdulhat el, P a V-vel körülfutott C_1 görbéhez és l vonszoló távolsághoz tartozó C_2 vonszoló görbét írja le. Ha a körfutás kezdeti A pontját koordinátarendszerünk



16. ábra.

kezdőpontjának válasszuk, akkor teljes körfutás után $p_A = p_B = 0$. Mivel a C_2 pólusgörbe érintőinek iránya minden helyzetben megegyezik az integráló kar irányával, vagyis $\vartheta \equiv \omega$, azért (l. 7. és 8. egyenlet) $F_1 = F_2 + \frac{1}{2}\, l\, \omega\, \Big|_B^A$, ahol F_1 a körülfutott görbével, F_2 a pólusgörbével (t. i. C_1 vonszológörbéjével) határolt tartomány területét jelent. l, $\omega_A \neq \omega_B$ értékeit a kezdeti és végállapot megjelölésével könnyen meghatározhatjuk. Eddig a pontig planimeterünk működési egyenlet pontos, sajnos, azonban a meghatározandó területet a vonszoló görbével határolt szektornak szintén ismeretlen területével helyettesíti. C. Runge kimutatta, hogy ha a körfutás kezdeti A pontja a planimetrálandó felület S súlypontjával megegyezik és ha két, egymással 180°-kal elforgatott kezdeti beállítás mérésével meghatározott $\Delta\omega$ értékekből képezzük a középértéket, akkor nagy l értékekre F_2 megközelítőleg $\frac{1}{2}\, l \Delta\omega$, tehát $F \approx l \Delta\omega$. Ez a megközelítés r/l kb. harmadik hatványával arányos, ahol r az F-et határoló görbe S-től számított rádiuszvektorainak egy középértékét jelenti. Ennek ellenére l-hez viszonyítottan igen kis átmérőjű felületek mérése sem adhat kielégítően pontos eredményeket, mivel ebben az esetben a lemérendő $\Delta\omega$ lesz igen kicsiny, s ezzel a mérés relatív hibája igen nagy. Pontos felületmeghatározás gyakorlati műszeréül e planimeter nem alkalmas, viszont úgy látszik, hogy közönséges differenciálegyenletek gyakorlati megoldására célszerű segédműszernek bizonyul.[12]

Mielőtt a planimeterek további tárgyalását folytatnók, szeretnék megemlíteni egy gyakorlatilag igen elterjedt segédműszert, az ú. n. MADER—OTT-féle harmonikus analizátort. Ez a műszer tulajdonképpen nem tartozik a planimeterek közé, csupán felületplanimeter elé csatolt segédműszer. Célja, hogy egy mechanikailag vezérelt P_a mozgó ponttal a planimeter V pontját úgy vezesse, hogy az az

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{2}{p}\int_0^p y(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\frac{2\pi n}{p} x\right) dx$$

értékét mérje, ha az analizátor V_a vezetett pontjával az $y(x)$ görbe p periódusát körülfutjuk. A MADER—OTT-analizátor e célt úgy éri el, hogy az $y(x)$ görbét művileg olyan $\bar{y}(\xi)$ zárt görbévé transzformálja, amelynek felszíne arányos a Fourier együtthatókkal.

E műszer három lényeges alkatrészből áll (17. ábra):

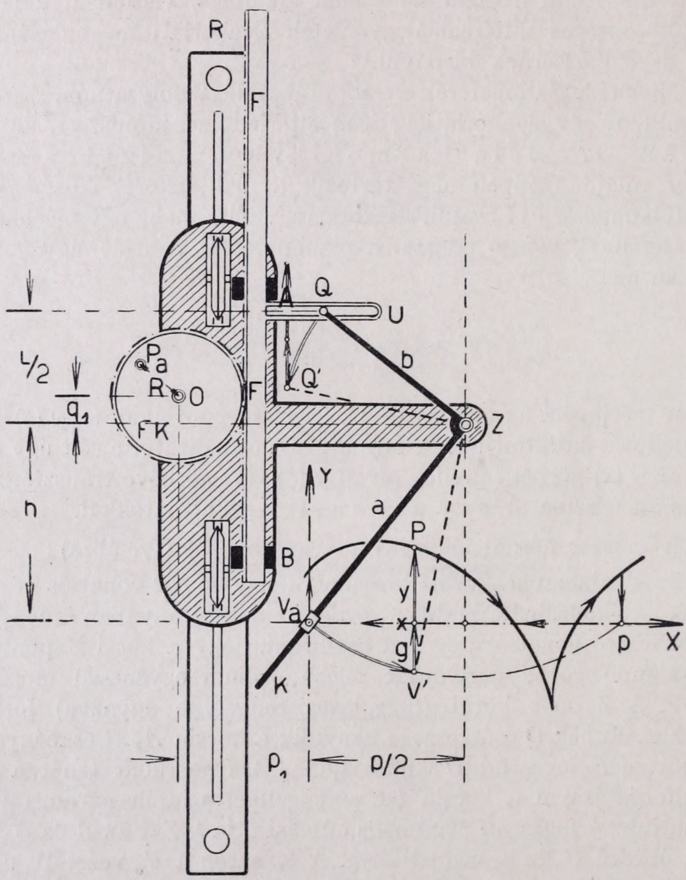
1. A rajzban sraffozott kocsiból, amely az RR vonalzós vezérléssel az xy-koordinátarendszer ordinátáinak irányában mozoghat. Az RR vezető vonalzót úgy kell beállítani, hogy a kocsi Z pontja az analizálandó görbe periodusát felező ordinátaegyenesen mozogjon.

2. A Z pont körül (függőleges tengelybe ágyazva) forog a QZK kar. Ennek Q csúszószege benyúlik a kocsin A, B csapágyakkal ágyazott FF fogasrúd U kulisszájába. A fogasrudat tehát a KZQ kar elforgatásával a kocsin (az y-tengellyel szintén párhuzamosan) eltolhatjuk. A fogasrúd maximális eltolási útja l. Ezt az A és B ágyazásba ütköző U kulissza biztosítja. A K karon a V_a vezetett pontot tetszőleges helyzetben rögzíthetjük. V_a-t úgy kell beállítani, hogy ha a fogasrúd legfelső helyzetében áll (U ütközik A-val), akkor V_a az x-tengelyen a periodus kezdőpontjával összeessék. Természetes, hogy ha a fogasrudat (Z pont eltolása nélkül) a K kar elforgatásával legalsó helyzetébe toljuk el (U ütközik B-vel), akkor V_a-nak az X-tengelyen a periodus végpontjába kell esnie. Eközben az elforgatás közben V_a a $V_aV'p$ «alapkört» írja le.

[12] VIETORIS, Ztsch. f. angw. Math. u. Mech. 15. kötet (1935), 238. lap.

V_a ezen beállítása miatt a konstruktív kivitel határain belül a műszer tetszőleges periodusra állítható be, s FF minden egyes esetben azonos l utat tesz meg.

3. Az FF fogasrúdba kapcsolódik a kocsin O tengellyel megerősített r sugarú FK fogaskerék. r úgy van meghatározva, hogy



17. ábra.

az l úton n teljes körforgást végezzen, tehát $r = \dfrac{l}{2\pi n}$ · Az FK fogaskereken, a középponttól R távolságban van a P_a pont, mely a transzformált görbét írja le.

Helyes beállítás után a kezdeti helyzetben tehát Z koordinátái $\left(\dfrac{p}{2}, h\right)$, O koordinátái $(-p_1, h + q_1)$. Jelölje az XOP_a szöget φ és a kezdeti helyzet szögét φ_0.

Határozzuk most meg P_a útját, ha V_a-val az analizálandó görb t követjük. Mivel V_a és P_a között a kinematikai kapcsolás egyértelmű, azért, ha V_a-t a kezdőpontból különböző utakon vezetjük a görbén fekvő P pontba, P_a útja is más és más lesz, e különböző utak végpontjai azonban $V_a = P$ esetében azonosak. Eszerint P_a helyzetét, ha V_a-t O-tól P-ig vezetjük, a következő speciális út segítségével határozhatjuk meg: 1. $V_a \rightarrow V'$ (Z nyugalomban marad, QZK elfordul $Q'ZV'$ helyzetbe, V_a az alapkörön mozog) és 2. $V_a = V' \rightarrow P$ (a $Q'ZV'$ kar szögváltozás nélkül párhuzamosan tolódik el az ordinátairányban $g(x, p) + y(x)$-el.) Ha V_a-nak az alapkőr p útján a fogas kerék $2\pi n$-el fordul el, akkor a V'-ig terjedő x úton $\frac{2\pi n}{p}x$ szöggel, azaz $\varphi = \frac{2\pi n}{p}x + \varphi_o$. Eszerint P_a helyzete a $V_a \rightarrow V' \rightarrow P$ elmozdulás után

$$\xi_{y(x)} = -p_1 + R\cos\varphi$$

$$\eta_{y(x)} = h + q_1 + g(x, p) + y(x) + R\sin\varphi$$

Ha V_a-val az x-tengely mentén haladunk végig az (x, o) pontig, P_a útjának végpontja

$$\xi_{o(x)} = -p_1 + R\cos\varphi$$

$$\eta_{o(x)} = h + q_1 + g(x, p) + R\sin\varphi$$

A görbe, az x-tengely és a teljes periódushoz tartozó két ordináta által határolt tartomány a

$$\eta_{y(x)} - \eta_{o(x)} = y(x),\ \xi = -p_1 + R\cos\left(\frac{2\pi n}{p}x + \varphi_o\right)$$

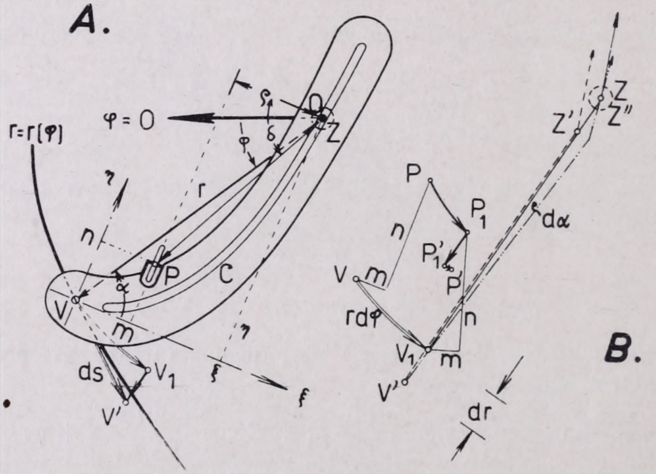
tartományba transzformálódik. Ennek területe

$$F = \int_{x=o}^{p} (\eta_{y(x)} - \eta_{o(x)})\, d\xi = \left(-\frac{2}{p}\int_0^p y(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{p}x + \varphi_o\right) dx\right)\pi n R$$

Ha $\varphi_o = \begin{cases}\pi\\ \pi/2\end{cases}$, akkor $F_{\pi,\pi/2} = \pi n R\begin{cases}b_n\\ a_n\end{cases}$. A P_a ponttól vezetett planimeter tehát a Fourier együtthatókkal arányos területet mér. Megemlítendő, hogy a gyakorlati kivitel 2·5 . . . 72 cm periodushosszúságú függvények 25 koeffiziensének analizálását teszik lehetővé. Több fogaskerék, s ugyanannyi planimeter egyidejű alkalmazásával el lehet érni, hogy egy körfutással egyszerre 14 együttható értékét tudjuk meghatározni.

A radiális planimetereknél C_2 ponttá zsugorodik. Ezt a pontot a poláris koordinátarendszerünk kezdőpontjának válaszszuk. $r = r(\varphi)$ az adott integrálandó görbe. A legáltalánosabb esetben, midőn planimeterünkkel a $k\Delta U = \oint f\big(r(\varphi)\big)\, d\varphi$ integrált határozzuk meg (a többi gyakorlatilag fontos eset ebből könnyen származtatható), az integráló kar Z pontját, amely az alapsíkhoz rögzített O kezdőponttal egybeesik egy meghatározott C görbe mentén (bemart csatorna, vagy kulissza által) vezetjük, miközben V az $r(\varphi)$ görbét írja le. Ha az általános planimeteregyenletet akarnánk alkalmazni, akkor a P pontnak e kényszervezérlés által meghatározott pályáját és a 6. egyenletben fellépő többi adatokat kellene kiszámítanunk.

Az IK gördülését ebben az esetben is sokkal könnyebben hatá-



18. ábra.

rozhatjuk meg az elmozdulási differenciálok szemlélete alapján. A 18*a*. ábrán *A*. *Ott* kivitelében látható a sablonnak kiképzett integráló kar, ennek C kivágásába nyúlik be az O kezdőpontnak az alapsíkhoz rögzített csúszó szege. A V ponttól az IK P érintési pontja (m, n) távolságban van. A K_s, T_s síkok vetületével legyen párhuzamos a sablonnal összekötött ξ, η derékszögű koordinatarendszer. Ebben a rendszerben $\xi = \xi(r)$, $\eta = \eta(r)$ a C csatorna középvonalának egyenlete. Ezeket a

$$9\ldots \qquad \xi = \varrho + m, \; \xi^2 + \eta^2 = r^2$$

egyenletekből határozhatjuk meg, föltéve, hogy ϱ mint r függvény e ismeretes. A V vezetett pontnak az $r(\varphi)$ görbe mentén való $V \rightarrow V'$ elmozdulását a $|\overline{VV_1}| = rd\varphi$ és $|\overline{V_1V'}| = dr$ elmozdulásokra bontjuk fel. A $V \to V_1$ elmozdulás a K integráló karnak O pont körüli elfordulását jelenti,ezalatt P útja $|\overline{OP}|\, d\varphi$ az IK gördülése pedig

$$dh_1 = |\overline{OP}|\, d\varphi \cos \delta = \varrho d\varphi .$$

A $V_1 \to V'$ el mozdulást felbonthatjuk két virtuális elmozdulás összegére: 1. a $\overline{VZ}$ iránnyal párhuzamos dr nagyságú $\overline{V_1 Z} \to V'Z'$ elmozdulásra, mintha a sablon kivágása és a csúszó szeg nem gátolná az integráló kart mozgásában és 2. V' körül egy olyan $d\alpha$ szöggel való $\overline{V'Z'} \to \overline{V'Z''}$ elfordulásra, amelyet az jellemez, hogy a sablon kivágása újból a csúszó szeggel fedésbe jut. Mivel differenciális elmozdulásokról van szó, a C görbe a Z ponthoz tartozó ívelemével helyettesíthető (18*b*. ábra).

Az 1. elmozdulásnál az IK gördülése $dh_2 = -dr \sin \alpha = -\frac{\eta(r)}{r} dr$

a 2.-nél $dh_3 = |\overline{V'P}|\, d\alpha \cos \delta = m d\alpha = m \frac{\operatorname{tg} \vartheta(r)}{r} dr$. A rezultáns differenciális gördülés tehát

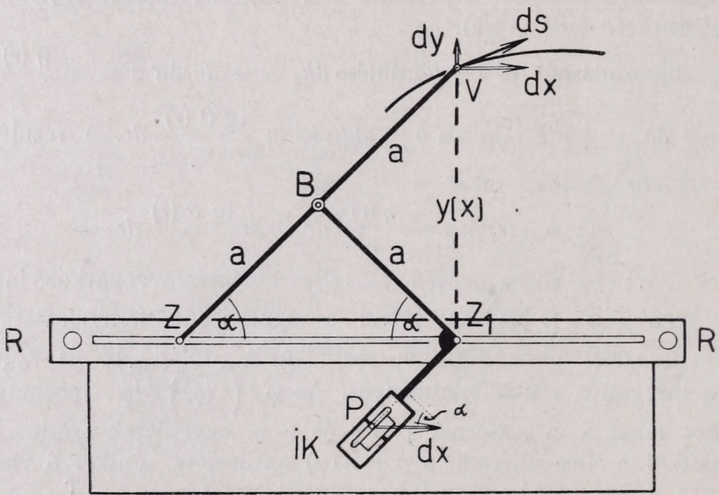
$$dh = \varrho(r)\, d\varphi - \frac{\eta(r)}{r} dr - m \frac{\operatorname{tg} \vartheta(r)}{r} dr$$

Ennek a zárt $r(\varphi)$ görbe mentén való teljes körfutásra vonatkozó integrálja $k \Delta U = \oint \varrho\big(r(\varphi)\big)\, d\varphi$, mivel a regulárisnak feltételezett két utolsó integrál teljes körfutás esetében r_{max}-tól r_{min}-ig és r_{min}-től r_{max}-ig integrálva nullát eredményez. Az $\oint f\big(r(\varphi)\big)\, d\varphi$ meghatározásakor tehát a C csatornát $f = \varrho$ és a 9. egyenletek szerint kell kialakítani.[13] Megemlítendő a $\varrho = r(\varphi)$ határesete, amikor a vezető C görbe a VZ egyenesbe megy át. Ez a planimeter az $\int r(\varphi)\, d\varphi$ értékét méri. Ekkor $m = 0$, $\eta = 0$, a gördülés két utolsó komponense teljes körfutás nélkül is eltűnik, és a leolvasási különbség bármely kezdeti és végpont között az $\int^{\varphi} r(\varphi)\, d\varphi$ értékét, tehát a határozatlan radiális integrált méri.

5. **Integrimeterek.** Azokat a planimetereket, amelyek határozatlan integrálokat mérnek, integrimetereknek nevezzük. Szüksége, hogy az integrimeterekre érvényes planimeteregyenlet szabad tagjai (teljes körfutás nélkül is) identikusan eltűnjenek. E feltétel oly kivitellel valósítható meg, amelyben az IK K_s síkja minden helyzetben merőleges azokra az elmozdulásokra, amelyek a közönséges planimetereknél a csak teljes körfutás esetében eltűnő szabad tagokat állítják elő.

[13] Az összes lineáris hatvány- és függvényplanimeterekkel mérhető integrálókhoz a megfelelő radiális planimeterek is mind ismeretesek.

Ezt az elvet egyszerűen valósítja meg A. OTT **lineáris alapintegrimetere**. Ez egy lineáris planimeter az IK oly célszerű elhelyezésével, hogy V-nek dy mentén való eltolása nem okoz gördülést, a dx elmozdulás viszont $dh = dx \,.\, \sin \alpha$ gördülést hoz létre (19. ábra). A műszer elvi kivitele a következő. A ZV integráló kar a B csuklópontban kapcsolódik a BZ_1P integráló kereket hordozó könyökhöz. E csuklórendszer Z és Z_1 pontját csúszószeg vezeti az RR vonalzó (x-tengelynek megfelelő) csatornájában. E csuklórendszer a vonalzótól vezetve V-nek dx elmozdulásakor mint szilárd egész csúszik el az x-tengely mentén, az IK P érintési pontja eszerint



19. ábra.

szintén dx elmozdulást végez, gördülése tehát $dh = dx \,.\, \sin \alpha$. V-nek dy elmozdulásakor a csuklórendszer $d\alpha$ szöggel összébb csukódik. Z közeledik Z_1-hez, Z_1 azonban nyugalomban marad. Eszerint az IK a Z_1 pont körül $|\,\overline{Z_1P}\,|\; d\alpha$ elfordulást végez. Ez az elfordulás a kerék síkjára merőleges, tehát nem ad gördülési komponenst. E műszer teljes planimeteregyenlete eszerint

$$k\Delta U = \int^{x} \sin \alpha \, dx = \frac{1}{l} \int^{x} y\,(x)\, dx.$$

A tetszőleges kezdeti és végpont közötti határozatlan integrál értéke tehát arányos e két pont között fellépő leolvasási különbséggel.

Közelfekvő az a gondolat, hogy az IK-et hordozó Z_1P kart ne kössük össze szilárdul a BZ_1 karral, hanem úgy szerkesszük meg a készüléket, hogy a V pont a Z_1 pont körül pl. kulisszák segítségével vezesse a Z_1P kart, függetlenül a BZ_1 kartól. A kulissza görbéjének megfelelő választásával általános függvényintegrimeterek szerkeszthetők. E gondolat elvileg helyes, gyakorlatilag azonban magasabb hatványintegrimeterek esetében kinematikai zárolások elkerülése végett a Z_1P kar szögváltozását mind kisebbnek kell vennünk, s ez a mérési eredmény pontosságának nagyfokú csökkenésével jár. Megadott $y(x)$ függvény négyzetének, négyzetgyökének vagy reciprok értékének közvetlen határozatlan integrációjára célszerűbb a lineáris alapintegrimeter elé egy segédműszert iktatni, amely a megfelelő transzformációt elvégzi. Az említett két első esetben ily segédműszer lehet a már ismertetett OTT-féle hatványplanimeter vezérlése.

Az integrimeterekkel összefüggően — különöskép a lineáris felületplanimeterek teljes kihasználásához — lényeges, hogy minden lineáris felületplanimeter egyszerű korrektúra segítségével alapintegrimeterként is felhasználható.

Szemléljük e célból még egyszer a lineáris felületplanimeter alapegyenletét:

$$lkU \Big|_{P'}^{P''} = \int_{P'}^{P''} y(x)\,dx + \frac{1}{2}(l^2 - 2l\,m)\,\alpha \Big|_{P'}^{P''} - \frac{l^2}{4}\sin 2\alpha \Big|_{P'}^{P''} \equiv$$

$$\equiv \int_{P'}^{P''} y(x)\,dx + \psi\big(y(x)\big)\Big|_{P'}^{P''}$$

ahol $\psi(y) = \frac{1}{2}(l^2 - 2lm)\arcsin\frac{y}{l} - \frac{y}{2}\sqrt{l^2 - y^2}$ mivel $\sin\alpha = \frac{y}{l}$.

Eszerint tetszőleges kezdeti és végpont között

$$\int_{P}^{Q} y(x)\,dx = lkU\Big|_{P}^{Q} - \psi(y)\Big|_{y_P}^{y_Q}.$$

Ha a $\psi(y)$ korrektúrafüggvény egyszeri helyes meghatározása után[14]

[14] A $\psi(y)$ függvény meghatározásakor azonban az a nehézség adódik, hogy ψ-ben a planimeter l, k, m ismeretlen konstrukciós adatai is fellépnek, melyeknek értékei nélkül a planimeterhez tartozó korrektúrafüggvényt nem tudjuk kiszámítani.

Ezeknek az állandóknak az értékeit ismert felületek planimetrálása útján nyerhetjük, mégpedig, mivel a planimetrált értékek mindig csak bizonyos szórás hibáival határozhatók meg, azért ezeket az állandókat a kiegyenlítő számítás elvei alapján kell kiszámítanunk.

E számítás (amelyet egy planimeterre vonatkozólag csak egyszer kell elvégezni) meglehetősen bonyolult, s ezért főbb vonásaiban vázolom.

Integráljuk az $y = \operatorname{tg}\vartheta\,(x - a)$ egyenest a P_0 $(x = a,\ y = 0)$ ponttól a

4*

az lk-val szorzott leolvasási különbséget e korrektúrával helyesbbítjük, akkor az integrál tetszőleges P és Q közötti értékét nyerjük. Lineáris planimeterünket így integrimeterként is felhasználhatjuk.

Míg a lineáris alapintegrimeter ismertetett kivitele legújabb keletű, a preciziós **tárcsás lineáris integrimeter** elve (GONELLA-mechanizmus) több mint 100 éves (20. ábra). Ez az integrimeter egy T tárcsát megfelelő kocsi, vagy sínvezetés segítségével az x-tengellyel párhuzamosan és úgy vezet, hogy a kocsi dx elmoz-

P_i $(a + hi, \operatorname{tg}\vartheta\, hi)$ pontig. A P_0-tól P_i-ig terjedő terület számértéke $\int_{P_0}^{P_i} y dx = \frac{1}{2} h^2 i^2 \operatorname{tg}\vartheta$, az ehhez tartozó $\varkappa$-adik mérési sorozatból leolvasott érték pedig $\varDelta U_{i,\varkappa}$. A három ismeretlen állandó meghatározására tehát a következő $3n$ egyenlet ($\varkappa = 1 \ldots n$, $i = 1, 2, 3$)

$$lk \varDelta U_{i,\varkappa} = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{tg}\vartheta\, i^2 + \frac{1}{2}(l^2 - 2lm) \arcsin\left(\frac{h \operatorname{tg}\vartheta}{l} i\right) - \frac{l^2}{2}\left(\frac{h \operatorname{tg}\vartheta}{l} i\right)\sqrt{1 - \left(\frac{h \operatorname{tg}\vartheta}{l} i\right)^2}$$

áll rendelkezésünkre. Jelöljék $lk = \alpha$, $\frac{1}{2}(l^2 - 2lm) = \beta$, $\frac{h \operatorname{tg}\vartheta}{l} = \gamma$ az előbbi egyenlet ismeretlenjeit, $\varDelta U_{i,\varkappa}$, $h \operatorname{tg}\vartheta = a$ és h pedig az ismert értékeket.

Ha most $2\gamma\alpha = \overline{\alpha}$, $2\beta\gamma^2 = \overline{\beta}$ jelölést vezetjük be, akkor

$$\overline{\alpha}\, \varDelta U_{i,\varkappa} = i^2 \mathrm{h\, a}\, \gamma + \overline{\beta}\, i \frac{\arcsin(\gamma i)}{\gamma i} - a^2 i \sqrt{1 - \gamma^2 i^2}\,.$$

Tekintettel arra, hogy hibás mérési eredményekből a három ismeretlen úgysem határozható meg pontosan, előbb egy megközelítő értékrendszert számítunk ki, s ezt javítjuk majd a kiegyenlítő számítás elvei alapján. Ha h-t és $\operatorname{tg}\vartheta$-át úgy vesszük fel, hogy nemcsak γ, de 3γ is jóval kisebb az egységnél és ha $\varDelta U_i$ jelöli az i-edik felület mérésekor végzett n leolvasás középértékét, vagyis $\varDelta U_i = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} \varDelta U_{i,\varkappa}$, akkor az előbbi egyenletrendszer négyzetes közelítéssel az

$$\overline{\alpha}_0\, \varDelta U_i = i^2 h\, a\, \gamma_0 + i \overline{\beta}_0 - a^2 i + \frac{a^2}{2} i^3 \gamma_0^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

egyenletrendszerbe megy át. Ennek megoldása

$$\gamma_0 = -\frac{h}{a} p_1,\ \overline{\alpha}_0 = 2h^2 \frac{p_1}{q_2},\ \overline{\beta}_0 = a^2 + \frac{1}{6} \alpha_0 q_3\,,$$

ahol

$$p_1 = \frac{2}{3} \frac{q_1}{q_2},\ q_1 = 3\varDelta U_1 - 3\varDelta U_2 + \varDelta U_3$$

$$q_2 = 5\varDelta U_1 - 4\varDelta U_2 + \varDelta U_3,\ q_3 = 15\varDelta U_1 - 9\varDelta U_2 + 2\varDelta U_3.$$

Ha a $3n$ mérés felhasználásával kiegyenlített gyökértékek

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_0 + \tau_\alpha,\ \overline{\beta} = \overline{\beta} + \tau_\beta,\ \gamma = \gamma_0 + \tau_\gamma,$$

akkor ezeket a korrektúrákat az

$$\overline{\alpha}_0\, \varDelta U_{i,\varkappa} + B_i(\overline{\beta}_0, \gamma_0) = -\varDelta U_{i,\varkappa} \tau_\alpha + \frac{\arcsin(\gamma_0 i)}{\gamma_0} \tau_\beta - \tau_\gamma \left(\frac{\partial B_i}{\partial \gamma_0}\right)_{\overline{\beta}_0, \gamma_0}$$

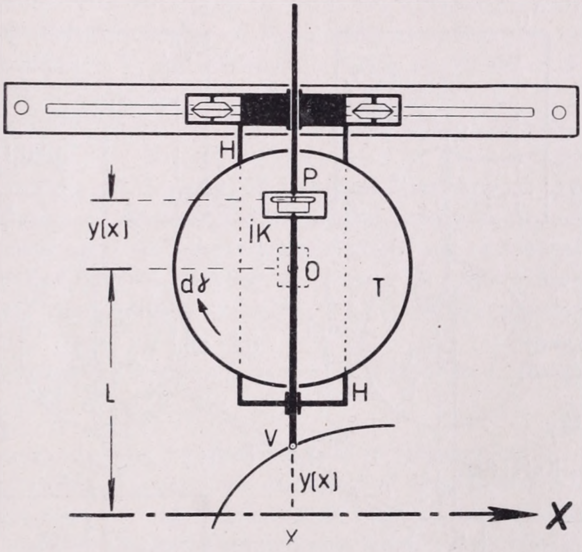
egyenletrendszerből, ahol

$$B_i(\overline{\beta}_0, \gamma_0) = -\left[i^2 ha\, \gamma_0 + \overline{\beta}_0 \frac{\arcsin(\gamma_0 i)}{\gamma_0} - a^2 i \sqrt{1 - \gamma_0^2 i^2}\right]$$

a GAUSS-féle kiegyenlítés normálegyenletei segítségével határozhatjuk meg. Miután az állandókat ilymódon kiszámítottuk, a $\psi(y)$ korrektúrafüggvényt mint »műszerállandót« tabelláris, vagy grafikus úton rögzítjük.

dulásának a tárcsa $d\gamma = vdx$ elfordulása feleljen meg. A tárcsán csúszósvezérlésű H keretben ágyazva nyugszik az IK, tengelye a tárcsa O csapágyközéppontján megy át és merőleges az x-irányra. A tengelynek V végpontját vezetjük (elvileg) a megadott görbe mentén. Az IK gördülése dy elmozduláskor nulla, dx elmozduláskor $dh = |\,\overline{OP}\,|\,d\gamma = y\,(x)\,vdx$, azaz

$$k\Delta U = v\int^{x} y\,(x)\,dx$$



20. ábra.

6. **Az általános integráló műszer elve és az integráf.** Újabban az előbbi integráló berendezés (amely az erők inverz bevezetésével pifferenciálást végez) közönséges differenciálegyenletek és az infinitezimális számítás más feladatainak művi megoldására szerkesztett gépek[15] alapelemévé vált, miután sikerült olyan erősítő berendezéseket szerkeszteni, amelyek az IK-re ható igen kicsiny forgató nyomatékot rezgés- és torzításmentesen annyira meg tudják erősíteni, hogy az IK a gördülésével kapcsolt műveket kinematikailag irányítani képes. Ezeknek a nyomatékerősítő és rezgéscsillapító egységeknek még vázlatos tárgyalása is túlhaladja ennek a dolgozatnak a keretét. Emiatt csak arra szorítkozunk, hogy egy egyszerű integráló gép elvi

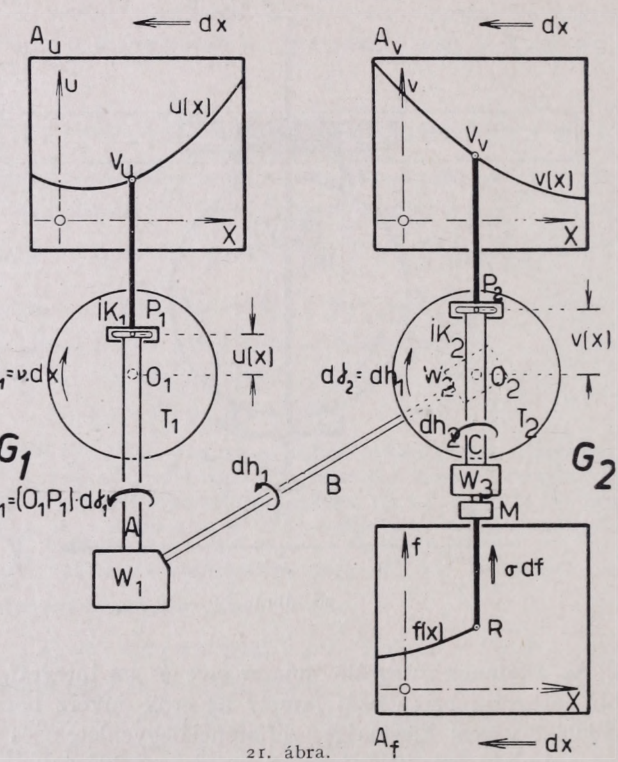
[15] Pl. a névleg olyan közismert «célirányzó készülékek» egy részének differenciálást elvégző hajtóműve.

kapcsolásán ismertessük a gyakorlati matematika ezen gazdag területeket megnyitó meggondolásainak alapját.

Az általános szorzati integráf elvét akarjuk a következőkben ismertetni. A gép grafikusan megadott $u\ (x)$ és $v\ (x)$ függvényekből az

$$f\ (x) = \int^{x} u\ (x)\ v\ (x)\ dx$$

integrálgörbéjét határozza meg (21. ábra).



21. ábra.

E géphez legelőször is három ú. n. asztal szükséges (azaz kifeszített rajzlappal borított és a síkjába felvett x-tengely irányában párhuzamosan mozgatható három rajztábla).[16] A két megadott függvénynek a gépbe való bevezetésére szolgálnak az ú. n. A_u és A_v «adó» asztalok, amelyekre az u és v függvényeket felrajzoltuk. Az f

[16] Az «asztal» fogalmán természetesen hengereket is érthetünk, amelyre a görbéket tartalmazó rajzlapokat ráfeszítjük. A dx eltolás ekkor a hengerek dx elforgatásával értelmezendő.

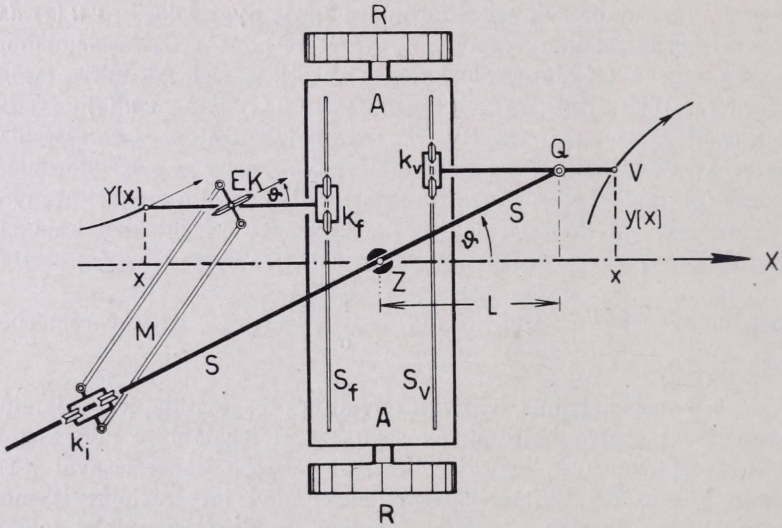
eredmény felvevésére szolgál az A_f «vevő» asztal. E három asztal (pl. elektromotoros meghajtással) a három x-tengely mentén azonos dx eltolást végez. Az eltolás közben az adó asztalok $u(x)$ és $v(x)$ görbéit a műszer V_u és V_v vezetett pontjaival kell követnünk. V_u a G_1 GONELLA-mechanizmus integráló kerekének eltolását irányítja. Ennek T_1 tárcsája arányosan forog az asztalok elmozdulásával, tehát $d\gamma_1 = \nu\, dx$. A G_1 mechanizmus egység sugarú IK_1 integráló kerekének gördülése eszerint $dh_1 = (\overline{O_1P_1})\, d\gamma_1 = \nu\, u(x)\, dx$. E gördülést (szögelmozdulást) az A és B tengely, a W_1 és W_2 nyomatékerősítő, rezgéscsillapító és áttétel segítségével bevezetjük a G_2 GONELLA-mechanizmus T_2 tárcsájába. T_2 szögelfordulása tehát $d\gamma_2 \equiv dh_1 = \nu\, u(x)\, dx$. A $v(x)$ görbe mentén vezetett V_v vezetett pont a G_2 mechanizmus egység sugarú IK_2 integráló kerekét vezeti. Ennek gördülése (szögelfordulása) eszerint $dh_2 = (\overline{O_2P_2})\, d\gamma_2 = v(x)\, dh_1 = \nu\, u(x)\, v(x)\, dx$. E szögelfordulást a C tengely, W_3 nyomatékerősítőn és rezgéscsillapítón át vezeti az M mozgásátalakítóba, amely a dh_2 elfordulási szöget (pl. csigakerék és fogasrudas áttétellel) ezzel a szöggel arányos hosszúsággá ($dh_2 = \sigma df$) alakítja át. Ezzel a készülékkel kapcsolt R irón az A_f vevőasztalon a $\sigma df = \nu\, u(x)\, v(x)\, dx$ egyenlet szerint mozdul el, tehát az irón az $f(x) = \frac{\nu}{\sigma}\int^{x} u(x)\, v(x)\, dx$ integrálgörbét rajzolja fel.

A G-mechanizmus, nyomatékerősítő és rezgéscsillapító, valamint összeadó és szorzó hajtóművek segítségével legalább n adó asztal, n G mechanizmus és egy vevő asztal célszerű kapcsolásával n-ed rendű közönséges differenciálegyenletek művi integrációját is meg lehet oldani. Ezzel a kérdéssel azonban itt annál kevésbbé foglalkozunk, mert a technikai kivitel nagy nehézségeinek részletes ismertetése nélkül az elvi kapcsolások relatív egyszerűsége az olvasónak hamis képet adhatna e gépekről.[17]

Differenciálegyenletek művi megoldására irányuló régebbi kísérletek egész más elvi alapokból indultak ki, t. i. az élesperemű kerék konstruktív egységéből. Ezen elv csakis a határozatlan integrál felrajzolására szolgáló (tehát a legegyszerűbb $\frac{dY}{dx} = y(x)$ differenciálegyenletet megoldó) gyakorlatilag sokoldalúan bevált ABDANK—ABAKANOWICZ-féle integráfban terjedt el (G. CORADI, A. OTT).

[17] Különböző (legfeljebb másodrendű) feladatok elvégzésére szolgáló kapcsolási sémák tárgyalása megtalálható: MEYER ZUR CAPELLEN: Das Reibradgetriebe als Integrator c. kitűnő összefoglalásában. Ztsch. f. Instr.-Kunde. (1943, 7. füzet, 241. oldal.)

Ennek a műszernek működési elve nagyon egyszerű. Az RR hengerkerekektől egyenesvonalon vezérelt A alapkocsi Z pontja az x-tengely mentén mozog (22. ábra). Az alapkocsinak S_v és S_f csatornája az y-iránnyal párhuzamosan vezérli a k_v és k_f adó és vevő kocsikat. Az adó kocsi vezető karjának V végpontját az integrálandó $y(x)$ görbe mentén vezetjük végig. A vezető kar Q (függőleges) tengelyében ágyazva fekszik az SS sín, amelynek második rögzített pontja a Z-ben függőleges tengely körül forgatható csúszó ágyazás.



22. ábra.

Ennek a sínnek az x-tengellyel bezárt ϑ szögére áll $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{y(x)}{l}$.

Az SS sínen mozog egy k_i irányító kocsi, amelynek az a szerepe, hogy az éles peremű, nehéz EK keréknek K_s síkját az M parallelogramma vezérléssel SS-hez párhuzamosan vezesse. Az EK-t a k_f kocsi hordozza. k_f az EK miatt csakis a ϑ irányában tud elmozdulni. Ha V-t $y(x)$ mentén vezetjük, k_f és a vele összekötött irón eszerint egy olyan $Y(x)$ görbét ír le, amelynek iránytangense $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{dY}{dx} = \frac{1}{l}\, y(x)$.

A felrajzolt görbe tehát $Y(x) = \frac{1}{l}\int^{x} y(x)\, dx + C$ egyenletet elégíti ki.

ÜBER INTEGRIERGERÄTE DER PRAKTISCHEN MATHEMATIK

von *S. v. Borbély* (Kolozsvár)

In dieser Arbeit wird eine Übersicht über die gebräuchlichsten Integriergeräte der praktischen Mathematik gegeben, Theorie, Wirkungsweise und der Prinzipaufbau der verschiedensten Planimeterausführungen und einiger Integriermechanismen kurz zusammengestellt.

Nach Beschreibung der Wirkungsweise des einfachen Integrierrädchens wird die Rollenabwicklung bei allgemeiner Verschiebung des Integrierrädchens hergeleitet und kurz auf die Fehlermöglichkeiten und deren Einfluss hingewiesen. Als Beispiel zum Vorigen wird die Theorie des Harvey-schen Harmonischen Analysators dargestellt. Der Hauptteil der Arbeit ist den Planimetern gewidmet : Grundplanimeter, Momentenplanimeter, Wurzelplanimeter, Funktionsplanimeter, Scheiben- und Kugelrollplanimeter, wird im Abschnitt über Linearplanimeter behandelt. Danach wird die allgemeine Planimetergleichung hergeleitet, Kompensations- und Präzisionspolarplanimeter, sowie radiale Planimeter besprochen. Als Beispiel eines Vorgelegegetriebes wird der Mader—Ott-sche Harmonische Analysator näher dargestellt. Das Prinzip des Grund- und Funktionenintegrimeters, sowie des Gonella-schen Mechanismus folgen. Danach wird das Prinzip eines allgemeinen Integriermechanismus und das des Integraphen besprochen.

AZ ATOM HULLÁMMECHANIKAI ÉS STATISZTIKUS ELMÉLETÉNEK KAPCSOLATA

Irta : *Fényes Imre*

III. A kinetikus energia korrekciói.

Bevezetés. Előző dolgozatomban[1] kimutattam, hogy az atom statisztikus elméletének alapegyenleteit egyszerűen — minden külön feltevés nélkül — levezethetjük a «*self-consistent field*»[2] megfelelő egyenleteiből. A levezetésben a következő közelítések szerepelnek :

[1] FÉNYES I., Az atom hullámmechanikai és statisztikus elméletének kapcsolata. (I. A «*self-consistent field*» módszere és a statisztikus atommodell. II. A valenciaelektront is tartalmazó atomok hullámmechanikai és statisztikus elméletének kapcsolata.) *Csillagászati Lapok* 6, 49—69 (2. sz.), 1943. További hivatkozásoknál az első részt I.-el, a második részt II.-vel jelöljük.

[2] Id. az I. (3, 1) és (3, 2), valamint az 5. szakasz formuláit.

1°. *A «self-consistent field»* egyenleteit a W. K. B.[3] módszerrel oldjuk meg, de

a) csak a nulladik közelítést vesszük figyelembe és

b) a sajátfüggvénynek a klasszikus pályatartományon kívül eső részét zérusnak vesszük.

2°. A kvantumállapotokra való összegezés helyett integrálunk.

Jelen dolgozatban azt mutatom ki, hogy a kinetikus energia HELLMAN-[4] és WEIZSÄCKER-[5]féle korrekciója ezzel a módszerrel szintén egyszerűen levezethető. Lényegesen egyszerűbben, mint ahogyan azt HELLMANN és WEIZSÄCKER végezte el.

A HELLMANN- és WEIZSÄCKER-féle energiakifejezésekhez ugyanúgy jutunk, mint a THOMAS—FERMI-féléhez,[6] azzal a különbséggel, hogy a HELLMANN-féle kifejezés levezetésénél a mellékkvantumszám szerinti összegezést nem alakítjuk át integrállá, a WEIZSÄCKER-féle korrekció levezetésénél pedig részben a sajátfüggvény első közelítését használjuk.

I. Hellmann-féle korrekció. Az előző dolgozatban[7] tárgyalt statisztikus atommodellekben a mellékkvantumszám nem szerepelt. HELLMANN-nak sikerült olyan statisztikus energiakifejezést levezetnie, amelyikben a mellékkvantumszám, l, is szerepel. Ez a kifejezés tartalmazza az elektronoknak önmagukra gyakorolt elektrosztatikus kölcsönhatását is:[8]

$$E+E_{sc}=\sum_l \int \left[\frac{h^2\pi^2}{6m(2l+1)} r^4 \nu_l^3 + \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{l(l+1)}{r^2} \nu_l - e\left(V_k+\tfrac{1}{2}V_e\right)\nu_l \right] d\tau \tag{1, 1}$$

$$\sum_l \int \nu_l \, d\tau = \sum_l N_l = N, \tag{1, 2}$$

ahol ν_l az l mellékkvantumszámú elektronok sűrűsége és N_l ezeknek a száma. Alábbiakban a HELLMANN-féle kifejezést a HARTREE-módszerből[9] fogjuk levezetni, a bevezetésben említett közelítő eljárással. Ha az elektronoknak önmagukra gyakorolt elektrosztatikus kölcsönhatását is figyelembe vesszük, akkor az atom energiája a HARTREE-módszerben

$$E+E_{sc}=\sum_j \int \psi_j^* \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta - e\left(V_k+\tfrac{1}{2}V_e\right) \right] \psi_j \, d\tau, \tag{1, 3}$$

[3] Id. I. 2.

[4] HELLMANN H., *Acta Physicochim. URSS.* **2**, 225, 1936.

[5] WEIZSÄCKER C. F., *Zs. f. Phys.* **96**, 431, 1935.

[6] Id. I., 2. és 3.

[7] Id. I.

[8] Eltérőleg az I. és II.-től: most nem atomi egységeket használunk. Különben a jelölések ugyanazok.

[9] Id. I. (3, 3).

ahol j a négy kvantumszámmal (radiális : n_r, mellék : l, mágneses : m és spin : $\pm \frac{1}{2}$) jellemzett kvantumállapotot jelenti. Mivel az l mellékkvantumszámú elektronok sűrűsége

$$\nu_l = 2 \sum_{n_r, m} \psi_j^* \psi_j \qquad (1, 4)$$

továbbá

$$\left.\begin{aligned} \Delta \sim -\frac{4\pi^2}{h^2} p^2 &= -\frac{4\pi^2}{h^2}\left(p_r^2 + p_l^2\right), \\ p_l^2 &= \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{l(l+1)}{r^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (1, 5)$$

tehát az (1, 3) így is írható :

$$E + E_{sc} = \sum_l \int \left[2 \sum_{n_r, m} \frac{p_{rj}^2}{2m} \psi_j^* \psi_j + \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{l(l+1)}{r^2} \nu_l - e\left(V_k + \tfrac{1}{2} V_e\right)\nu_l \right] d\tau. \qquad (1, 6)$$

A W. K. B. módszer nulladik közelítése szerint egy kis $d\tau$ térfogatelemben a normált sajátfüggvény

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{(d\tau)^{1/2}} R(r)\, \Theta(\vartheta)\, \Phi(\varphi), \\ R &= e^{\frac{2\pi i}{h}\int p_r\, dr}, \\ \Theta &= e^{\frac{2\pi i}{h}\int p_\vartheta\, r\, d\vartheta}, \\ \Phi &= e^{\frac{2\pi i}{h}\int p_\varphi\, r \sin\vartheta\, d\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (1, 7)$$

Legyen az (1, 6)-ban

$$2 \sum_{n_r, m} \frac{p_{rj}^2}{2m} \psi_j^* \psi_j = U_l. \qquad (1, 8)$$

Ide az (1, 7) sajátfüggvényeket helyettesítjük be és az összegezés helyett integrálunk. Az általánosított kvantumfeltételekből[10] következik, hogy a kvantumállapotok számosságának megváltozása nulladik közelítésben

$$dn = 2\, dn_r\, dn_\vartheta\, dm = \frac{2\pi}{h^3} d\tau\, dp_r\, dp_l\, dp_\varphi \qquad (1, 9)$$

Ha innen a mellékkvantumszám megváltozását kihagyjuk, akkor a kvantumállapotok számosságának megváltozása

$$dn' = \frac{dn}{dl} = \frac{2\pi}{h^3} d\tau \frac{dp_l}{dl} dp_r\, dp_\varphi \qquad (1, 10)$$

[10] Id. I. 2. (54. old.)

tehát

$$U_l = \frac{2\pi}{2mh^3}\int\int p_r^2 \frac{dp_l}{dl} dp_r\, dp_\varphi \tag{1, 11}$$

A p_φ szerinti integrálás — p_l-től $+ p_l$-ig, a p_r szerinti pedig $-\sqrt{p_\mu^2 - p_l^2}$-től $+\sqrt{p_\mu^2 - p_l^2}$-ig terjed. Igy

$$U_l = \frac{2l+1}{6m\pi h r^2}\sqrt{(p_\mu^2 - p_l^2)^3} \tag{1, 12}$$

Az l mellékkvantumszámú elektronok sűrűsége, ha (1, 8)-ban az összegezést integrálással cseréljük fel és az (1, 7) sajátfüggvényeket használjuk:

$$\nu_l = \frac{2\pi}{h^3}\int\int\frac{dp_l}{dl} dp_r\, dp_\varphi, = \frac{2l+1}{\pi h r^2}\sqrt{p_\mu^2 - p_l^2}. \tag{1, 13}$$

Ezt az értéket bevezetve (1, 12)-be

$$U_l = \frac{h^2\pi^2}{6m(2l+1)^2} r^4 \nu_l^3. \tag{1, 14}$$

Ha U_l-nek ezt az értékét az (1, 6)-ba tesszük: a HELLMANN-féle (1, 1) energiakifejezést nyerjük.

Az (1, 13)-ban szereplő p_μ^2-et HELLMANN abból a követelményből határozza meg, hogy normált ν_l-ek mellett az (1, 1) energia minimális legyen. Igy

$$p_\mu^2 = 2me(V - V_l), \tag{1, 15}$$

ahol e az elektron töltése, V_l az l-től függő LAGRANGE-multiplikátor.

2. A Thomas—Fermi- és Hellmann-féle modell kapcsolata. Egyszerűen belátható, hogy a kétféle modell csak abban különbözik egymástól, hogy az egyikben l szerint integrálunk, a másikban pedig összegezünk. Ugyanis, ha az (1, 1)-ben összegezés helyett l szerint is integrálunk O-tól L-ig, ahol L-et az

$$\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{L(L+1)}{r^2} = p_\mu^2 \tag{2, 1}$$

egyenlettel definiáljuk, akkor az (1, 1) HELLMANN-féle kifejezés átmegy a THOMAS—FERMI-féle energiakifejezésbe, továbbá az (1, 13) alatt megadott ν_l sűrűségnek l szerinti integrálja szintén a THOMAS—FERMI-féle sűrűséggel egyenlő. Az integrálás elvégzésénél l helyett célszerű a p_l-et bevezetni és így (2, 1) alapján a p_l szerinti integráció O-tól p_μ-ig terjed:

$$U = \int_0^L \left[U_l + \frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{l(l+1)}{r^2}\nu_l\right] dl = \frac{4\pi}{5mh^3}p_\mu^5 \tag{2, 2}$$

Továbbá

$$\nu = \int_0^L \nu_l \, dl = \int_0^{p_\mu} p_l \sqrt{p_\mu^2 - p_l^2} \, dp_l, = \frac{8\pi}{3h^3} p_\mu^3 \qquad (2,\ 3)$$

Ezek valóban a THOMAS—FERMI-féle kifejezések.

Megjegyzendő, hogy a HELLMANN-féle modell levezethető tisztán statisztikai úton is. Sőt ν_l-et — jóval HELLMANN előtt — FERMI már meg is határozta.[11] Erre FERMI külön nem mutatott rá, mivel Őt a ν_l térfogati integrálja: az l mellékkvantumszámú elektronok száma érdekelte. A HELLMANN- és FERMI-féle kifejezés formailag teljesen megegyezik:

$$\nu_l = \frac{2\,l + 1}{h\,\pi\,r^2} \sqrt{p_\mu^2 - p_l^2} \qquad (2,\ 4)$$

de a p_l és p_μ értéke a két szerzőnél kissé eltér egymástól. A p_l-ben fennálló különbség nem elvi fontosságú. Ugyanis HELLMANN az exakt

$$p_l = \frac{h}{2\,\pi\,r} \sqrt{l\,(l+1)}$$

FERMI pedig a közelítő

$$p_l = \frac{h}{2\,\pi\,r} (l + \tfrac{1}{2})$$

kifejezést használja. Elvi fontosságú különbség a p_μ^2-ben szereplő LAGRANGE-multiplikátor[12] meghatározásában van. FERMI szerint

$$p_\mu^2 = 2\,m\,e\,(V - V_0),$$

HELLMANN szerint

$$p_\mu^2 = 2\,m\,e\,(V - V_l).$$

Ez a különbség onnan származik, hogy FERMI csak a ν-t normálja és N_l-et keresi, HELLMANN pedig a normált ν_l-et határozza meg. Igy FERMI-nél V_0 minden l-nél ugyanaz; HELLMANN-nál a V_l az l-től függően más és más.

A lényegileg azonos két kifejezésnek fő hibája, hogy az elektronsűrűség nem folytonos, sőt FERMI-nél $\sum_l \nu_l \neq \nu$ és $\sum_l N_l \neq N$.

3. **A Weizsäcker-féle korrekció.** WEIZSÄCKER[13] a THOMAS—FERMI-atom energiáját a következőkép korrigálta:

$$E + E_{sc} = \int \left[\frac{h^2}{32\,\pi^2 m} \frac{(\nabla \nu)^2}{\nu} + \frac{3}{40} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m} \nu^{5/3} - e\,(V_k + \tfrac{1}{2} V_e)\,\nu \right] d\tau$$

(3, 1)

HELLMANN[14] ezt a kifejezést szintén levezette. Alábbiakban lénye-

[11] FERMI E., *Zs. f. Phys.* 48, 73, 1928.

[12] Most a THOMAS—FERMI-modellnek a JENSEN-féle (*Zs. f. Phys.* 77, 722, 1932) levezetésére kell gondolnunk.

[13] WEIZSÄCKER C. F., l. c.

[14] HELLMANN H., l. c.

gesen egyszerűbb levezetést adunk. Itt szintén az (1, 3) hullámmechanikai kifejezésből indulunk ki, amelyet ilyen alakban is írhatunk

$$E + E_{sc} = \sum_j \int \left[\frac{h^2}{8\pi^2 m} (\nabla \psi_j)^2 - e(V_k + V_e)\psi_j^* \psi_j \right] d\tau$$

$$E + E_{sc} = \int \left[U_k' + U_k'' - e(V_k + \tfrac{1}{2} V_e)\nu \right] d\tau \qquad (3, 2)$$

ahol

$$U_k' + U_k'' = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \sum_j (\nabla \psi_j)^2 \qquad (3, 3)$$

Az összegezést szintén a

$$dn = \frac{2}{h^3} d\tau \, dp_x \, dp_y \, dp_z = \frac{2}{h^3} d\tau \, dw \qquad (3, 4)$$

szerinti integrálással[15] helyettesítjük, de a sajátfüggvényeknek most már nem a nulladik, hanem az első közelítését alkalmazzuk. Ezek normált alakja

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{(d\tau)^{1/2}} \psi(x)\,\psi(y)\,\psi(z) \\ \psi(x) &= p_x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i}{h}\int p_x dx} \end{aligned}\right\} \qquad (3, 5)$$

stb. Innen

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \left(-\frac{1}{2}\frac{p'_x}{p_x} + \frac{2\pi i}{h} p_x \right) \psi(x), \qquad (3, 6)$$

stb., tehát

$$\left.\begin{aligned} (\nabla\psi)^2 &= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{p'_x}{p_x}\right)^2 + . + . \right] \psi^* \psi + \frac{4\pi^2}{h^2} (p_x^2 + . + .)\, \psi^* \psi, \\ &= \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{d \ln p_x}{dx} \right)^2 + . + . \right] + \frac{4\pi^2}{h^2} p^2 \right\} \psi^* \psi. \end{aligned}\right\} \qquad (3, 7)$$

Ha $dw = dp_x \, dp_y \, dp_z$ alapján a $w = p_x \, p_y \, p_z$ jelölést használjuk, akkor a (3, 7) így írható:

$$\left(\nabla\psi\right)^2 = \left[\frac{1}{4} \left(\nabla \ln w \right)^2 + \frac{4\pi^2}{h^2} p^2 \right] \psi^* \psi \qquad (3, 8)$$

Feltételezhetjük, hogy a sajátfüggvény nulladik közelítése átlagosan követi az első közelítés menetét. Igy a kétféle közelítésnél csak akkor áll elő lényeges különbség, ha differenciáljuk őket. Mivel itt a ψ-re már nem kell differenciáloperátort alkalmazni: ismét vehetjük a nulladik közelítést.[16] Igy

$$U_k' + U_k'' = \frac{h^2}{32\pi^2 m} \frac{1}{d\tau} \sum_i \left(\nabla \ln w_i \right)^2 + \frac{1}{2m} \frac{1}{d\tau} \sum_i p_i^2 \qquad (3, 9)$$

[15] Id. I. (2, 1).

[16] Hasonló meggondolás szerepel II.-ban. (66. old. utolsó bekezdésétől a (3, 10) formuláig.)

A második tag a THOMAS—FERMI-féle kinetikus energia

$$U_k'' = \frac{1}{2m}\frac{1}{d\tau}\sum_j p_j^2 = \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m}\nu^{5/3}. \tag{3, 10}$$

Az első tag

$$U_k' = \frac{h^2}{32\pi^2 m}\frac{1}{d\tau}\int\left(\nabla \ln w\right)^2 dn = \frac{h^2}{32\pi^2 m}\int\limits_0^{w_\mu}\left(\nabla \ln w\right)^2\frac{2}{h^3}dw \tag{3, 11}$$

Ha itt ($\nabla \ln w$)-t állandónak tekintjük adott w-nél, akkor

$$U_k' = \frac{h^2}{32\pi^2 m}\frac{(\nabla w_\mu)^2}{w_\mu}\frac{2}{h^3} \tag{3, 12}$$

A sűrűség

$$\nu = \frac{1}{d\tau}\int dn = \frac{2}{h^3}\int\limits_0^{w_\mu} dw = \frac{2}{h^3}w_\mu \tag{3, 13}$$

Igy végül

$$U_k' = \frac{h^2}{32\pi^2 m}\frac{(\nabla\nu)^2}{\nu} \tag{3, 14}$$

Behelyettesítve (3, 10)-et és (3, 14)-et a (3, 2)-be : a (3, 1) WEIZSÄCKER-féle kifejezést nyerjük.

Összefoglalás. Mint ismeretes : DIRAC[17] és BRILLOUIN[18] már foglalkoztak a THOMAS—FERMI- és THOMAS—FERMI—DIRAC-féle statisztikus atommodell hullámmechanikai levezetésével. Itt vázlatosan összehasonlítom DIRAC és BRILLOUIN levezetését az enyémmel.

Mindegyik tárgyalás a *«self-consistent field»* egyenleteiből indul ki. DIRAC eleve feltételezi, hogy a h^3 nagyságú fáziscellákba maximálisan két antiparallel spinű elektron juthat. Azonban ez a feltevés önmagában elegendő arra, hogy a THOMAS—FERMI-féle modellhez jussunk. Tehát DIRAC tulajdonképen csak a kicserélődési energia statisztikai alakját vezeti le hullámmechanikailag. Továbbá mindkét szerző az ú. n. *«vegyes»*

$$\nu(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') = \sum_j \psi_j^*(\mathfrak{r}')\,\psi(\mathfrak{r})$$

sűrűséggel operál, ami — fölöslegesen — nagy mértékben komplikálja a számításokat.

BRILLOUIN a *«self-consistent field»* egyenleteit a W. K. B. módszerrel oldja meg, de eltérőleg az I.-ben közöltektől : a sajátfüggvény első közelítését használja. Ebből mégis arra az eredményre

[17] DIRAC P. A. M., *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **26**, 376, 1930.

[18] BRILLOUIN L., *L'atome de Thomas—Fermi . . .*, Actualités scientifiques et industrielles 160, Paris, 1934, Hermann.

jut, amelyikre I.-ben a nulladik közelítéssel jutottam. Ez a látszólagos ellentmondás onnan származik, hogy BRILLOUIN különféle feltevések alapján, burkoltan áttér a nulladik közelítésre. Ez szintén nagy mértékben komplikálja a számításokat és így a hullámmechanika és statisztika különben egyszerű kapcsolata nem látható tisztán.

Ezekkel szemben az általam alkalmazott eljárás egységes és egyszerűen áttekinthető módot ad valamennyi statisztikus atommodell hullámmechanikai levezetésére.

* * *

Dolgozatom a kolozsvári Ferenc József Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében készítettem. Hálásan köszönöm az intézet igazgatójának, DR. GOMBÁS PÁL egyetemi ny. r. tanár úrnak, munkámban való állandó segítő támogatását.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DER WELLENMECHANISCHEN UND STATISTISCHEN THEORIE DES ATOMS*

von *I. Fényes*

(Zusammenfassung)

III. Die Korrektionen der kinetischen Energie.

In dieser Arbeit werden die HELLMANN-schen und WEIZSÄCKER-schen Korrektionen der kinetischen Energie aus den Gleichungen den *«self-consistent field»* mit Hilfe der Methode von WENTZEL—KRAMERS-BRILLOUIN hergeleitet und zwar auf eine bedeutend einfachere Weise als von HELLMANN und WEIZSÄCKER.

Institut für Theoretische Physik der Universität Kolozsvár.

* Der I. und II. Teil ist in *Csillagászati Lapok* 6. Jahrg. S. 49—69, (Nr. 2) 1943 erschienen.

Felelős szerkesztő: Dr. DEZSŐ LORÁNT, felelős kiadó: Dr. GOMBOCZ ENDRE.

Stephaneum nyomda Budapest. Felelős: ifj. Kohl Ferenc.


Csillagászati műszerek
Refraktorok
Tükörteleszkópok
Asztrográfok
Mellékkészülékek
Kupolák
Mozgópadlók
Kilátó-távcsövek
Planetáriumok
CARL ZEISS
JENA
A VILÁG MINDEN RÉSZÉBEN
ÉS MINDENÜTT, AHOL NAGYTELJESITMÉNYŰ OPTIKAI ÉS FINOMMECHANIKAI MŰSZEREKET HASZNÁLNAK, ISMERIK ÉS NAGYRABECSÜLIK A ZEISS-NEVET, MELY VALÓSÁGGAL EGYBEFONÓDOTT A TÖKÉLETES PRECIZITÁS FOGALMÁVAL.
ZEISS
CARL ZEISS – JENA
Magyarországi vezérképviselet: RÁD MIKLÓS
Budapest, VI., Andrássy-út 52. Telefon: 116—640.

CSILLAGÁSZATI LAPOK

VIERTELJÄHRLICH ERSCHEINENDE ZEITSCHRIFT D. ASTRONOMISCHEN ABT. DES KÖN. UNG. NATURWISSENSCHAFTLICHEN VEREINS

REDIGIERT VON

QUARTERLY JOURNAL OF THE ASTRONOMICAL SECTION OF THE ROYAL HUNGARIAN SOCIETY OF SCIENCE

EDITED BY

L. DEZSŐ

Universitäts-Sternwarte || University Observatory
Kolozsvár

7. Jahrg. — Vol. 1944 Nr. 1

INHALT — CONTENTS

BUDAPEST

Stephaneum Buchdruckerei — Stephaneum Press.

CSILLAGÁSZATI LAPOK

A KIR. MAGY. TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT
CSILLAGÁSZATI SZAKOSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

DEZSŐ LORÁNT

7. évfolyam **1944** **2—3. szám**

TARTALOM

BUDAPEST.
STEPHANEUM NYOMDA

CSILLAGÁSZATI LAPOK

A KIR. M. TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT CSILLAGÁSZATI SZAKOSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

MEGJELENIK NEGYEDÉVENKÉNT

Szerkeszti

DEZSŐ LORÁNT

A szerkesztőség címe: Csillagvizsgáló Intézet, Kolozsvár, Majális-u. 109. Tel.: 17-20. vagy Csillagvizsgáló Intézet, Bpest-Svábhegy, Konkoly Thege Miklós-út 2. Tel.: 365-187.

A folyóiratot a Csillagászati Szakosztály tagjai illetmény gyanánt kapják. Tagdíj 8 P. A Szakosztály tagja bárki lehet, ki egyúttal a Természettudományi Társulat tagja.

Nem tagok részére a Csillagászati Lapok évi előfizetési díja 9 pengő. Az előfizetési díjak a Természettudományi Társulat (a Csillagászati Lapok Kiadóhivatala) címére Budapest, VIII., Esterházy-utca 16. sz. küldendők. Postatakarékpénztári csekkszámla sz. 32.399.

Előzetes megbeszélés nélkül beküldött cikkek megjelenését a szerkesztőség nem biztosíthatja.

Közleményeikért a szerzők sajátmaguk kötelesek felelősséget vállalni.

Az ábrákat a szerzők klisírozásra alkalmas módon küldjék be.

A cikkek magyar, német, angol, francia és olasz nyelven küldhetők be. Idegennyelvű cikkhez magyar, magyarnyelvű cikkhez idegennyelvű összefoglalás irandó.

Az irói tiszteletdíj oldalankint 6 P, sűrűbben szedett szöveg esetén 7 P. Doktori értekezések szerzői a tiszteletdíj helyett 150 példány ingyen különlenyomatot kapnak. Egyébként a szerzők cikkeikből 50 különlenyomatot kapnak ingyen, de saját költségükön tetszőleges számú példányt rendelhetnek.

CSILLAGÁSZATI LAPOK

7. évfolyam 1944 2—3. szám

ZEITLICHE ÄNDERUNG DER PHYSIKALISCHEN MENGEN UND IHRE FOLGEN

von *J. Barnóthy* in Budapest.

In einer in der *Zeitschrift für Physik* erschienenen Arbeit[1] wurde auf das Bestehen folgender zwei Postulate geschlossen:

1. Der meßbare Wertebereich der physikalischen Mengen ist endlich (Endlichkeitsprinzip).

2. Die Form der physikalischen Gesetze und der Zahlenwert der physikalischen Konstanten können im Laufe der Zeit keine dauernde meßbare Veränderung erleiden (Konstanzprinzip).

Ausgehend aus diesen Postulaten ergibt sich unter anderen die Folgerung, daß die Ablaufgeschwindigkeit derjenigen Naturvorgänge mit deren Hilfe eine andauernde Zeitmessung ausführbar ist (wie z. B. Pendelschwingung, radioaktiver Zerfall usw.), von der Vergangenheit nach der Zukunft hin sich beschleunigt und die Beschleunigung eine Exponentialfunktion der verflossenen Zeit ist.

Weiterhin wurde darauf geschlossen, daß bei Naturvorgängen die zu keiner unbegrenzten Zeitmessung verwendbar sind, wie z. B. die periodischen Schwankungen des elektromagnetischen Feldes, keine zeitliche Änderung der Ablaufgeschwindigkeit, also der Frequenz erforderlich ist. Wir konnten deshalb die Voraussetzung machen, daß *die Frequenz der elektromagnetischen Wellen als zeitlich invariant zu betrachten ist.*

Die Ablaufgeschwindigkeit eines Naturvorganges ist eine Funktion der in dem Naturvorgang beteiligten Mengen und physikalischen Konstanten. Eine zeitliche Änderung der Ablaufgeschwindigkeit kann folglich nur durch die zeitliche Änderung des Wertes einer oder mehrerer dieser Mengen bedingt sein. Aus dem Konstanzprinzip folgt jedoch, daß sämtliche miteinander vergleichbare Mengen unseres Weltsystems nur gleichgroße zeitliche Veränderungen erfahren können.

Von den Mengen die bei den elektromagnetischen Wellen in Frage kommen, wie Wellenlänge, Energie bzw. Masse der Photonen, Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Gravitationskonstante ist vorläufig nur

[1] J. Barnóthy, Z. f. Phys. 120, 148, 1943.

soviel bekannt, daß diese Mengen, im Augenblick der Emission des Photons, mit den entsprechenden Mengen, bzw. den Maßeinheiten des emittierenden Atoms übereinstimmen und daß das Verhältnis der Wellenlänge zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit — mit Hinsicht auf unsere obige Voraussetzung — zeitlich invariant ist. Indem wir jedoch Photonen die aus längst vergangenen Zeiten stammen, mit Photonen die in der Gegenwart emittiert werden vergleichen, ist uns die Möglichkeit gegeben, die relative zeitliche Änderung der Mengen der Photonen, gegenüber den Mengen der übrigen Naturvorgänge, zu bestimmen. Leider konnten solche Messungen aus experimentellen Gründen bis jetzt nicht ausgeführt werden.

Um jedoch mit der speziellen, sowie der allgemeinen Relativitätstheorie nicht in Widerspruch zu geraten, muß angenommen werden, daß der Wert der Lichtgeschwindigkeit und der Gravitationskonstante der Photonen nicht nur im Augenblick der Emission, sondern auch später mit dem Wert der Grenzgeschwindigkeit, bzw. dem Wert des Verhältnisses der trägen zur gravitierenden Masse der übrigen Massen unseres Weltsystems übereinstimmt. Wir kommen so zu dem Ergebnis, daß: *Lichtgeschwindigkeit und Gravitationskonstante aller Naturvorgänge zeitlich invariant ist.* Weiterhin folgt aus der Dimension von c und f daß einerseits — mit Hinsicht auf die Invarianz der Frequenz — *bei den Photonen Wellenlänge und Masse (Energie) zeitlich invariant sind;* und anderseits — mit Hinsicht auf die Beschleunigung der Naturvorgänge — daß *sämtliche Längen und Massen unseres Weltsystems eine ebenso große zeitliche Änderung ihrer Größe erleiden, wie die Zeiteinheiten.* Bezeichnet τ, l, m den Wert einer beliebigen Zeitdauer, Länge bzw. Masse in der Gegenwart, so war ihr Wert in den gleichen Einheiten gerechnet, zu einer früheren Zeit $-t$:

$$\begin{aligned} \tau_t &= \tau e^{it} \\ l_t &= l e^{it} \\ m_t &= m e^{it} \end{aligned} \qquad 1.$$

wenn i die Zeitbeschleunigungskonstante: $= -(1{,}79 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-17}\,\mathrm{sec}^{-1}$ bezeichnet. Eine Änderung der Mengen kann nur durch Vergleich mit den entsprechenden Mengen der Photonen meßbar festgestellt werden.

Unsere sämtlichen Längen-, Massen- und Zeitmaßstäbe erleiden eine den Gleichungen (1) entsprechende Kontraktion mit der Zeit. Da jedoch die relative Änderung für alle Maßstäbe gleich groß ist und so das Verhältnis sämtlicher Maßstäbe unverändert bleibt (Konstanzprinzip), kann hierauf ein Maßsystem gegründet werden, welches wir im Folgenden das *natürliche Maßsystem* nennen wollen. Die Mengen der Photonen werden sich, aus dem natürlichen Maßsystem aus betrachtet, meßbar vergrößern. Ein Photon das zu einer Zeit $-t$ emittiert wurde, besitzt in der Gegenwart eine Wellenlänge $\lambda = \lambda_t e^{it}$, eine Energie $E = E_t e^{it}$ und eine Planckkonstante $h = h_t e^{2it}$.

Man kann aus der Größe ihrer Planckkonstante in jedem Falle das Lebensalter des Photons berechnen. Um mit dem Endlichkeitsprinzip nicht in Widerspruch zu geraten, darf das so berechenbare Lebensalter des Photons die obere Grenze des Wertebereiches der berechenbaren Zeit $t_{max} = T ln\, \gamma = 5{,}24.10^{18}$ sec (l. c. Seite 162) in keinem Fall überschreiten. Dise Forderung wird erfüllt, wenn die Lebensdauer des Photons kleiner als t_{max} ist und es nach Ablauf dieser Zeit eine solche Änderung erleidet, die einen Rückschluß auf ihr Lebensalter ausschließt. Am naheliegendsten wäre es anzunehmen, daß ein spontaner Zerfall in Elementarteilchen eintritt, wie es z. B. bei den Mesonen zu beobachten ist. Aus dem Energie- und Impulssatz folgt aber, daß bei einem «Zerfall» des Photons nur ein einziges Teilchen ohne Ruhemasse entstehen kann. Nach unseren heutigen Kentnissen kann das entstehende Teilchen nur wiederum ein Photon sein, dessen Planckkonstante jedoch — um die Möglichkeit einer Lebensalterbestimmung zu verhindern — durchschnittlich um $e^{2i\tau_f}$, kleiner sein muß, als der Wert vor dem «Zerfall», wenn τ_f die mittlere Lebensdauer des Photons bezeichnet. Es ist wohl berechtigt anzunehmen, daß auch die Lebensdauer des Photons den Wahrscheinlichkeitsgesetzen unterworfen ist. Bei der Berechnung der mittleren Lebensdauermuß man so von der Forderung ausgehen, daß von den Photonen die vor einer Zeit t_{max} entstanden sind, bis zur Gegenwart, der Wahrscheinlichkeit nach sämtliche schon wenigstens einen «Zerfall» erlitten haben. Aus späteren (siehe Seite 10), auf astronomischen Messungen beruhenden Berechnungen entnehmen wir, daß in jedem cm^3 des Weltraumes durchschnittlich $f = 8{,}0.10^{-20}$ Photonen in der Sekunde entstehen ; und die Ausdehnung unseres Weltraumes $V_u = 8{,}6.10^{84}$ cm^3 beträgt. Mit Hinsicht auf die Verminderung der natürlichen Zeiteinheiten berechnet sich die Gesamtzahl der vor einer Zeit t_{max} entstandenen Photonen

$$N_f = f\, V_u \int_{t_{max}}^{\infty} e^{it}\, dt = 8{,}6.10^{41} \sim \gamma \qquad 2.$$

Unter diesen N_f Photonen werden sich $n = N_f e^{-t_{max}/\tau_f}$ Photonen finden, die keinen «Zerfall» erlitten haben. Aus der Forderung, daß $n \leqq 1$ sei, folgt für die mittlere Lebensdauer des Photons

$$\tau_f = \frac{t_{max}}{ln\, N_f} = \frac{T\, ln\, \gamma}{ln\, N_f} \sim T = \frac{1}{i} \qquad 3.$$

Die mittlere Lebensdauer des Photons ist gleich dem reziproken Wert der Zeitbeschleunigung. Während der mittleren Lebensdauer vergrößert sich im natürlichen Maßsystem gemessen die Wellenlänge, sowie die Energie auf das e-fache und die Planckkonstante auf das e^2-fache. Nach jedem «Zerfall» muß so die Planckkonstante des entstehenden Photons durchschnittlich um e^2 kleiner sein als vor dem «Zerfall».

Bei den üblichen physikalischen Experimenten ist der Prozentsatz der zerfallenden Photonen verschwindend klein. Bei den astronomischen Beobachtungen muß jedoch schon in Betracht gezogen werden, daß die Helligkeit entfernter Nebel, außer der Rotverschiebung, auch deswegen abnehmen kann, weil ein Teil der emittierten Photonen auf dem Weg zu uns zerfallen ist, und die hierbei entstehenden neuen Photonen werden, wegen ihrer kleineren Wellenlänge in den obersten Luftschichten absorbiert. (Die Wellenlänge ist nach dem «Zerfall» um e^2 kleiner, da die Energie sich während des Zerfalles nicht ändern kann.)

Die Rotverschiebung der Nebelspektren.

Wie in der zitierten Arbeit gezeigt wurde, steht eine beobachtbare Expansion in Widerspruch mit dem Konstanzprinzip: die Rotverschiebung kann infolgedessen nicht als Dopplereffekt gedeutet werden. Sie ergibt sich aber als eine Folgeerscheinung der Abnahme der natürlichen Maßeinheiten.

Die Wellenlängen von Photonen entfernter Sterne erscheinen — vorausgesetzt, daß inzwischen kein «Zerfall» des Photons eingetreten ist— mit den inzwischen verkleinerten natürlichen Längeneinheiten des Beobachters gemessen, länger als die Wellenlänge von Photonen derselben Atomart an der Beobachtungsstelle. Die Wellenlängenänderung beträgt.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = e^{\frac{D}{Tc}} - 1 \sim \frac{D}{Tc} + \frac{1}{2}\left(\frac{D}{Tc}\right)^2 \qquad 4.$$

wenn D den Abstand des Sternes vom Beobachter bezeichnet. *Die Rotverschiebung ist demzufolge keine lineare Funktion der Entfernung,* sondern nimmt stärker als linear zu. Leider ist diese Abweichung von der Linearität experimentell nur schwer nachprüfbar, da sie auch bei den größten bis jetzt erreichten Entfernungen von 200 Millionen Lichtjahren nur 6,5% beträgt und noch in der Größenordnung der Meßfehler liegt.

Bei der Berechnung der Nebelentfernungen sind nach den Untersuchungen von HUBBLE[1] die Magnituden der Sterne bei der Umrechnung auf die bolometrische Helligkeit, wegen der *selektiven* Empfindlichkeit

[1] E. HUBBLE, Astrophys. Journ. *84*, 517, 1936.

der Photographischen Platten mit einer Korrektion $- 2 \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ zu versehen. Die so berechneten Nebelabstände (D_H) sind in Spalte 4 der Tabelle I angeführt.

Infolge Abnahme der natürlichen Zeiteinheiten emittieren weitentfernte Sterne scheinbar weniger Photonen in der Zeiteinheit, als Sterne der gleichen Größe in unserer Nachbarschaft. Bezeichnet Z_0 die Zahl der emittierten Photonen eines beliebigen Sternes in der Zeiteinheit zur Zeit der Emission, so wird ein Beobachter im Abstand D, $Z = Z_0\, e^{-\frac{D}{Tc}}$ Photonen in seinen Zeiteinheiten beobachten. Infolge der Abnahme der natürlichen Energieeinheiten, werden jedoch diese Photonen eine Energie $E = E_0\, e^{\frac{D}{Tc}}$ besitzen, wenn E_0 die Energie von Photonen derselben Atomart am Beobachtungsort bezeichnet. Die von einem Fixstern dem Beobachter zugestrahlte Gesamtenergie ist somit unabhängig von dem Abstand des Sternes ; die Abnahme der natürlichen Maßeinheiten beeinflußt die bolometrische Helligkeit und die hieraus berechneten Nebelabstände nicht.

Auf dem Weg zu dem Beobachter zerfällt jedoch ein Teil der Photonen wegen ihrer begrenzten Lebensdauer. Die Zunahme der Wellenlänge des Photons auf seiner Laufbahn, infolge Abnahme der natürlichen Längeneinheiten, beträgt auch bei den bis jetzt erreichten größten Entfernungen von 200 Millionen Lichtjahren nur 14%, was gegenüber der Wellenlängenabnahme um e^2 bei dem «Zerfall» unbeträchtlich ist. Die ursprüngliche Wellenlänge von ungefähr 5000 Å wird sich bei dem «Zerfall» auf ungefähr 700 Å vermindern. So kurzwelliges Licht gelangt aber wegen Zerstreuung in den obersten Luftschichten nicht mehr zu dem Beobachter. Infolge dieses Verlustes ist die zur Beobachtung kommende Intensität J kleiner als die ausgestrahlte Intensität J_0

$$J = J_0\, e^{-\frac{D}{Tc}} = J_0 \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} \qquad 5.$$

und die aus der bolometrischen Helligkeit bestimmte Distanz der Nebel D_H ist auf die wahre Distanz D umzurechnen

$$D = D_H \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}}} \qquad 6.$$

Die so korrigierten Nebelabstände sind in der 5-ten Spalte der Tabelle angeführt.

Tabelle I.

	Gevicht	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$	D_H	D
Virgo	32	0,0041	0,0244	0,0243
Pegasus	5	0127	0738	0733
Perseus	4	0174	0977	0969
Coma	8	0245	1387	1370
U. Ma. I.	0,5	0517	3357	3273
Leo	1	0653	3715	3599
Cor. Bor.	1	0707	4112	3974
Gemini	0,5	0780	3664	3529
Bootes................	1	1307	7870	7401
U. Ma. II.	0,5	1403	7345	6870

Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhalten wir

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \underset{\pm\,0{,}008}{0{,}179\,D} + \underset{\pm\,0{,}008}{0{,}007\,D^2} \qquad 7.$$

(D in 10^8 parsec Einheiten). Die Abweichung von der Linearität besitzt das richtige Vorzeichen, liegt aber innerhalb der Fehlergrenzen. Nach (4) müßten wir für den Koeffizienten des quadratischen Gliedes + 0,016 erwarten. Hoffentlich wird die Entwicklung der astronomischen Meßtechnik, insbesonders das auf dem Mt. Palomar befindliche Riesen-Spiegelteleskop, die Ausdehnung der Messungen auf solche Entfernungen ermöglichen, bei denen die Abweichung von der Linearität die Fehlergrenzen schon erheblich übersteigen wird.

Aus obigem, neuberechneten Wert der Rotverschiebung berechnet sich die Zeitbeschleunigung zu

$$i = (1{,}74 \pm 0{,}08) : 10^{-17}\ \text{sec}^{-1} \text{ und } T = (5{,}75 \pm 0{,}26)\,.\,10^{16}\ \text{sec.}$$

Das raumzeitliche Homogenitätspostulat.

Wenden wir uns nun der Frage zu, wie sich der «Zerfall» der Photonen auf die Bestimmung der Nebelverteilung auswirkt.[1] In Tabelle II Spalte 3 ist die Anzahl der innerhalb der Entfernung D_H befindlichen Feldnebel pro Quadratgrad, in Spalte 4 die nach Hubble korrigierten Entfernungen und in Spalte 6 die hieraus berechneten Nebeldichten (Nebelzahl in einem Würfel von 10^6 parsec Seitenlänge) angeführt. Wie ersichtlich nehmen die Nebeldichten mit wachsendem Abstand stark ab. Dieser Umstand läßt sich sowohl nach Hubble,[2] wie auch nach Heck-

[1] Herr L. Detre war so liebenswürdig unsere Aufmerksamkeit auf diese Frage zu lenken.
[2] E. Hubble, Astrophys. Journ. 84, 517, 1936.

MANN[1] nur mit Hilfe einer sehr starken Raumkrümmung ($R = 1{,}6.10^8$ parsec) erklären ; doch würde hieraus ein den experimentellen Befunden wiedersprechend hoher Wert der Massendichte ($5{,}4.10^{26}$ g/cm^3) im Weltraum folgen.

Tabelle II.

	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$	N/Quadratgard	D_B	D	N/10^{18} parsec^3	
a ...	0,007	0,0415	0,039	0,039	6,92	6,92
b ...	077	51,6	447	431	5,69	6,40
c ...	086	76,9	501	481	6,02	6,80
d ...	106	145	628	597	5,76	6,71
e ...	124	220	741	699	5,32	6,34
f ...	157	485	951	884	5,55	6,91
g ...	229	1452	1,426	1,286	4,93	6,73

Werden nun die Nebelabstände mit Berücksichtigung des Photonenzerfalles nach Gleichung (6) korrigiert, so ergeben sich die in Spalte 5 bzw. 7 angeführten Werte. Wie ersichtlich ist jetzt die Nebeldichte von der Entfernung unabhängig ; der Mittelwert beträgt $6{,}7 \pm 0{,}1$ Nebel pro 10^{18} parsec^3, oder $2{,}3.10^{-73}$ Nebel pro cm^3.

Nach astronomischen Schätzungen[2] beträgt die durchschnittliche Masse eines Nebels 10^{44} g, woraus sich die Massendichte im Weltraum zu $2{,}3.10^{-22}$ g/cm^3 und der Krümmungsradius eines statischen Weltsystems zu $R = 7.10^{27}$ cm berechnet. (Aus der Gleichung $V_u/V_0 = \gamma^3$ (in l. c. Seite 163), folgt $R = 7{,}5.10^{27}$ cm.) Dieser Wert von R erklärt warum kein Einfluß der Raumkrümmung auf die Nebelverteilung zu beobachten ist. Das Volumen einer sphärischen Kugel ist, auch für die in Tabelle II vorkommende größte Entfernung, nur um 0,017% kleiner als das Volumen einer Kugel vom gleichen Radius bei euklidischer Metrik.

Das Endlichkeitsprinzip erlaubt nur eine endliche Ausdehnung des Weltraumes. Nach unserem heutigen Wissen kann diese Forderung nur von den kosmologischen Lösungen der allgemeinen Relativitätstheorie erfüllt werden. Auf Grund unseres oben gewonnenen Ergebnisses, demnach die Nebelverteilung im Weltraum gleichmäßig ist, führt die allgemeine Relativitätstheorie zu kosmologischen Lösungen die dem räumlichen Homogenitätspostulat genüge leisten : die Welt bietet überall denselben Anblick.

Das in der zitierten Arbeit abgeleitete Konstanzprinzip, demnach die physikalischen Umstände keine andauernde, meßbare Veränderung

[1] O. HECKMANN : Theorie d. Kosmologie, Fortschr. d. Astronomie, Springer 1942.
[2] ZWICKY, Astrophys. J. 86, 217, 1937.

erleiden können, ist mit einem zeitlichen Homogenitätspostulat identisch: Die Welt bietet jederzeit denselben Anblick.

Diese beiden Feststellungen können in ein allgemeines, raumzeitliches Homogenitätspostulat des 4-dimensionalen Kontinuums zusammengefaßt werden:

Die Welt bietet überall und zu jederzeit denselben Anblick.

Das Homogenitätspostulat bezieht sich selbstverständlich nur auf die physikalischen Gesetze und physikalischen Konstanten und schließt die aus der Kombinationsmöglichkeit der Grundgesetze folgende und somit in den Grundgesetzen inbegriffene Zustandsänderungen oder Evolutionen nicht aus.

Bekanntlich gründet sich die MILNE'sche[1] Kosmologie auf die Voraussetzung, daß ein räumliches Homogenitätspostulat besteht. Ein zeitliches Homogenitätspostulat ist in dieser Kosmologie nicht gültig. Denn nach der Auffassung von MILNE beschleunigen sich die Ablaufgeschwindigkeiten der mikrodynamischen Erscheinungen, wie radioaktiver Zerfall, Atomvorgänge im Vergleich zu den Ablaufgeschwindigkeiten der makrodynamischen Erscheinungen wie Erdumdrehung, Pendelschwingung usw. Zu verschiedenen Zeiten lebende Beobachter würden demzufolge eine andere Zerfallszeit für die radioaktiven Elemente beobachten, auch wenn sie dasselbe Pendel zur Zeitmessung verwenden. Die MILNE'sche Welt bietet zu verschiedenen Zeiten nicht denselben Anblick.

Die kosmische Strahlung.

Im Augenblick der Emission entspricht die Energie des Photons den Energieeinheiten des natürlichen Maßsystems und behält seinen Wert während seiner Laufbahn. Photonen von entfernten Sternen, die vor längst vergangenen Zeiten emittiert wurden, besitzen Energien, die mit unseren mittlerweilen zusammengeschrumpften Energieeinheiten gemessen, größer erscheinen als sie zur Zeit der Emission waren. Bei Photonen die aus gegenüber $T = 1{,}8.10^9$ Lichtjahre großen Entfernungen zu uns gelangen, ist die Energieerhöhung sehr beträchtlich. Bei einem einmaligen Umlauf des Weltraumes erhöht sich die Anfangsenergie des Photons auf das nahezu billionenfache, so daß Photonen des sichtbaren Spektralgebietes bei ihrer Rückkehr Energien besitzen, die mit den kosmischen Strahlenteilchen größter Energie vergleichbar sind. Diese Erscheinung wird auch davon nicht beeinflußt, daß die Planckkonstante des Photons sich nach Ablauf jeder T Zeitdauer, bei jedem «Zerfall», auf das e^{-2}-fache vermindert, wodurch die Planckkonstante von Photonen aus großen Entfernungen nicht wesentlich von dem Wert der Planckkonstante

[1] E. A. MILNE, Proc. Roy. Soc. London A 158, 328, 1937.

des natürlichen Maßsystems abweicht. Die Energieerhöhung ist ebenso groß, als wenn das Photon die Strecke ohne «Zerfall» zurückgelegt hätte

$$E = E_0 e^{\frac{D}{Tc}} \qquad 8.$$

Nach den Beobachtungen von HUBBLE,[1] kann die Licht- und Wärmestrahlung extragalaktischer Nebel, in erster Näherung mit der Strahlung eines Schwarzen-Körpers von 6000° C Temperatur verglichen werden. Die mittlere Energie der in den Weltraum ausgestrahlten Photonen ist mit Hinsicht, daß die Energiedichte der schwarzen Strahlung

$$U = \frac{48\,\pi\,h}{c^3}\left(\frac{k\,T}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{90}$$

und die Zahl der Photonen in der Volumeneinheit

$$n = \frac{16\,\pi}{c^3}\left(\frac{k\,T}{h}\right)^3 \frac{\pi^3}{25{,}79}$$

ist :

$$E_0 = \frac{U}{n} = 2{,}70\ kT = 2{,}22.10^{-12}\ \text{erg} = 1{,}4\ eV \qquad 9.$$

wo k die Boltzmannkonstante und $T = 6000°$ C bedeutet. Wir wollen im weiteren die vereinfachende Annahme machen, daß die Strahlung der Nebel monochromatisch ist, d. h. aus Photonen der Energie $E_0 = 1{,}4\ eV$ besteht.

Aus den Messungen von HUBBLE[2] entnehmen wir für die durchschnittliche, absolute photographische Helligkeit der Nebel $M = -15{,}15 + 0{,}05$. Zur Berechnung der gesamten pro Nebel ausgestrahlten Energie kann die Sonne als Vergleichsobjekt herangezogen werden, da ihre Oberflächentemperatur gleichfalls sehr nahe 6000° C beträgt. Die absolute photographische Helligkeit der Sonne ist $M_0 = 5{,}64$ und die Solarkonstante nach Bernheimer[3] $1{,}322.10^6$ erg/cm² sec an der Atmosphäregrenze. Mit diesen Werten berechnet sich die gesamte in den Weltraum ausgestrahlte Energie eines Nebels zu $L = 7{,}7.10^{41}$ erg/sec. Die mittlere Nebeldichte beträgt nach unseren Ergebnissen $N = 2{,}3.10^{-73}/\text{cm}^3$ und ist im ganzen Weltraum gleichmäßig. Da die Entfernungen auf die sich unsere folgenden Betrachtungen beziehen vielfache von $Tc = 1{,}72.10^{27}$ cm und somit groß im Verhältnis zu der gegenseitigen Entfernung der Nebel $l = 1{,}63.10^{24}$ cm sind, dürfen wir

[1] E. HUBBLE, Astrophys. Journ. 74, 43, 1931.

[2] E. HUBBLE, Astrophys. Journ. 84, 158, 1936.

[3] W. BERNHEIMER, Handb. d. Astrophys. VII. 343, 1936.

die Verteilung der Strahlenquellen im Weltraum als gleichmäßig betrachten. An jedem Ort des Weltraumes entstehen

$$f = \frac{LN}{E_0} = 8{,}0 \,.\, 10^{-20}\mathrm{cm}^{-3}\ \mathrm{sec}^{-1} \qquad 10.$$

Photonen. Die Zahl der Photonen die aus einer um den Beobachter geschriebenen Kugelschale vom Radius D und der Dicke dD kommen ist, auch in einem nichteuklidischen Raum, vom Radius der Kugelschale unabhängig. (Denn im gleichem Maße wie sich die Oberfläche, entfernterer Kugelschalen entsprechend der Raumkrümmung verkleinert, wird auch das im Zentrum gelegene Flächenelement von einem Punkt der Kugelschale aus in einem größeren Raumwinkel gesehen.) Wird auch die Verminderung der Zeiteinheit in Betracht gezogen, so erhalten wir für die spezifische Intensität[1] der Photonen aus der Kugelschale:

$$\frac{dF}{dD} = \frac{f}{4\pi} e^{-\frac{D}{Tc}} \qquad 11.$$

Die Anzahl der Photonen die aus Entfernungen größer als D ankommen bzw. die Energien größer als E besitzen ist mit Hinsicht auf (8)

$$F = \frac{f}{4\pi} Tce^{-\frac{D}{Tc}} = \frac{f}{4\pi} Tc \frac{E_0}{E} \qquad 12.$$

In jedem Kubikcentimeter des Weltraumes befinden sich

$$z = \frac{4\pi}{c} F = f\,T \frac{E_0}{E} \qquad 13.$$

Photonen mit Energie größer als E, und insgesamt $Z = fT = 0{,}0046$ Photonen pro cm^3.

Mit Hinsicht auf diese große Photonendichte, dürfen wir die Möglichkeit des Zusammentreffens zweier Photonen im Weltraum, nicht außer Betracht lassen. Es können nämlich bei diesem Vorgang, falls die Photonen genügend große Energien besitzen, Elektronenpaare (vielleicht auch schwerere Teilchen) entstehen.[2] Bezeichnet E bzw. E' (wo $E' > E$ ist) die Energien der sich begegnenden Photonen, so ist die Gesamtenergie der entstehenden Teilchen (des Elektronenpaares)

$$E' + E = \frac{2\,m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad 14.$$

und der mittlere Gesamtimpuls:

$$\frac{E}{c} = \frac{2\,m\,\beta\,c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad 15.$$

[1] Zahl der Teilchen die aus der natürlichen Raumwinkeleinheit senkrecht auf eine Oberfläche von 1 cm^2 in der Sekunde auftreffen.

[2] Siehe W. HEITLER: Quantum Theory of Radiation, Oxford 1936.

Ein Elektronenpaar kann entstehen, falls

$$E\,E' \geqq 2\,(m_0\,c^2)^2 = 1{,}34.10^{-12}\ \mathrm{erg}^2 \sim 5.10^{11}\,(eV)^2 \qquad 16.$$

ist. Die Wahrscheinlichkeit daß ein Photon der Energie E', bzw. ein Photon das aus der Entfernung D kommt, auf 1 cm seines Weges ein anderes Photon begegnet, dessen Energie gleich oder größer als die zur Paarerzeugung erforderliche Energie ist, wird mit Hinsicht auf (13), (16) und (8)

$$\pi = \Phi\,z = \Phi\,f\,T\,\frac{E_0\,E'}{2\,(m_0\,c^2)^2} = \Phi\,f\,T\,\frac{E_0^2}{2\,(m_0\,c^2)^2}\,e^{\frac{D}{Tb}} \qquad 17.$$

Wir wollen nun den Ansatz machen, daß der Wirkungsquerschnitt Φ für die Elektronenpaarerzeugung gleich dem Querschnitt des Elektrons ist :

$$\Phi = r_0^2\pi = 2{,}5.10^{-25}\mathrm{cm}^2$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Photon aus der Entfernung D kommend infolge Erzeugung eines Elektronpaares absorbiert wird, ist

$$\mathrm{W} = \int_0^D w\,d\,D = \Phi\,f\,T^2\,c\,\frac{E_0^2}{2\,(m_0c^2)^2}\,(e^{\frac{D}{T_c}} - 1) \sim A\,\frac{E}{E_0} \qquad 18.$$

wo

$$A = \Phi\,f\,T^2\,c\,\frac{E_0^2}{2\,(m_0\,c^2)^2} = 7.10^{-12}$$

Bei Photonen deren Energie kleiner als $E = 10^4 m_0c^2$ ist, beträgt die Absorption schon weniger als 2,5%, wir dürfen daher die durch Paarerzeugung bedingte Absorption der Komponente mit der kleineren Energie ($E < \sqrt{2\,m_0c^2}$) vernachlässigen. Für die Komponente mit der größeren Energie muß hingegen auch die Absorption durch Paarerzeugung berücksichtigt werden ; hierdurch erhält Gleichung (11) die Form :

$$\frac{dF'}{dD} = \frac{f}{4\pi}\,e^{-\frac{D}{Tc}}\,e^{-Ae^{\frac{D}{Tc}}} \qquad 19.$$

oder wenn wir $W = E/2.10^{11}\,eV$ setzen (E in eV) :

$$\frac{dF'}{dW} = \frac{f}{4\pi}\,A\,T\,c\,\frac{e^{-W}}{W^2} \qquad 20.$$

Die Zahl der Photonen mit Energien größer als W, das sogenannte integrale Spektrum ist : (Ei = Exponentialintegral)

$$F = \frac{f}{4\pi}\,ATc\left[\frac{e^{-W}}{W} - Ei\,(\text{-}W)\right] = 7{,}7.10^{-5}\left[\frac{e^{-W}}{W} - Ei\,(\text{-}W)\right] \qquad 21.$$

In jeder Volumeneinheit des Weltraumes entstehen aus der Begegnung der Photonen

$$\frac{dn}{dW} = 4\,\pi w \frac{dF'}{dW} = f A \frac{e^{-W}}{W} \qquad 22.$$

Elektronenpaare mit Energien zwischen W und $W + dW$, die spezifische Intensität der Elektronenpaare im Energieintervall dW ist:

$$\frac{dF_\varepsilon}{dW} = \frac{1}{4\pi}\frac{dn}{dW}\int_0^\infty e^{-\frac{D}{Tc}} dD = \frac{f}{4\,\pi} ATc \frac{e^{-W}}{W} \qquad 23.$$

und die Zahl der Elektronenpaare mit Gesamtenergien größer als W, d. h. das integrale Spektrum der Elektronenpaara ergibt sich zu

$$F_\varepsilon = \frac{f}{4\pi} ATc\, Ei\,(-W) = 7{,}7.10^{-5}\, Ei\,(-W) \qquad 24.$$

Wir gelangen so zu dem Ergebnis, daß aus dem Weltraum eine teilweise aus Photonen, teilweise aus Elektronen und Positronen bestehende Strahlung auf unser Milchstraßensystem zukommt, dessen kontinuierliches Energiespektrum sich ungefähr bis $10^{12}\, eV$ erstreckt.

Die gesamte aus dem Weltraum zugestrahlte Energie beträgt

$$\int_{7.10^{-12}}^{\infty} W \left(\frac{dF'}{dW} + \frac{d\,F_\varepsilon}{dW}\right) dW = 5{,}9.10^{-4} \qquad 25.$$

erg. pro cm^2 sec. und Raumwinkeleinheit.

Die Strahlenquellen dieser Photonen und Elektronenstrahlung sind die im Weltraum zerstreuten Nebel. Unter ihnen müssen wir eines, unsere eigene Galaktik, das Milchstraßensystem gesondert betrachten. Das Endlichkeitsprinzip erfordert die Endlichkeit des Weltraumes, das Konstanzprinzip eine statische kosmologische Lösung. Beide Forderungen können bekanntlich nur bei positiver Raumkrümmung erfüllt werden. Die gleichmäßige Verteilung der Nebel im Weltraum bewirkt eine konstante Raumkrümmung. In einem Raum von konstanter positiver Raumkrümmung kehren alle elektromagnetischen und korpuskularen Strahlen, die aus einem Punkt des Raumes ausgehen — sofern sie keine Absorption, oder Streuung während ihres Weges erleiden — wieder in dem selben Punkt zurück. Jede Strahlenquelle liegt in ihrem eigenem Bildpunkt, dem Brennpunkt ihrer Strahlen.

Die Absorption und Streuung der Photonen an der im Weltraum zerstreuten Materie ist vernachläßigbar. (Denn angenommen, daß die gesamte Masse unseres Universums in Gasform in dem Weltraum verteilt wäre, entspricht ihr bei einer einmaligen Umkreisung des Weltraumes, nur eine Materieschicht von $1\ g/cm^2$; was weder vom Standpunkt der Ionisation noch der Paarerzeugung von Belang ist.) Des weiteren kann angenommen werden, daß die Begegnung der Photonen unterhalb der zur

Paarerzeugung nötigen Energie mit keinerlei Konsequenzen verbunden ist und so auch keine Streuung der Strahlen verursacht. In einem Raum von konstanter Krümmung kann sich die Strahlungsquelle während des Umlaufes des emittierten Photons, gegenüber seinen eigenen Bildpunkt nicht verlagern, da dies einer absoluten Bewegung gleichwertig wäre.

Wesentliche Streuung verursachen jedoch die Unebenheiten der Raumkrümmung in der Nachbarschaft der Nebel. Denken wir uns sämtliche 2.10^{12} Nebel des Weltraumes auf eine, auf die Strahlungsrichtung senkrechte, Fläche projiziert und diese Fläche in Kreisringe von der gleichen Breite Δ so aufgeteilt, daß auf dem ersten Kreisring 1, auf dem zweiten 2 usw. Nebel entfallen. Da in jedem Würfel von der Seitenlänge $l = 1{,}63.10^{24}$ cm sich durchschnittlich ein Nebel befindet wird die Zahl der Kreisringe 2.10^6 und ihre Breite $\Delta = 3{,}2.10^{21}$ cm sein. Mit einer Nebelmasse von 10^{44} g gerechnet beträgt der Gravitationsradius eines Nebels $\alpha = 7.10^{15}$ cm. Ein Photon das in der Entfernung r an einem Nebel vorbeifliegt erleidet[1] in dessen Gravitationsfeld eine Richtungsänderung von $4\ \alpha/r$ und so während seines ganzen Umlaufes im Weltraum eine mittlere Richtungsänderung von

$$\vartheta = 4\frac{\alpha}{\Delta}\sqrt{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = 4\ \frac{\alpha}{\Delta}\sqrt{0{,}577 + \ln n} = 3{,}4.10^{-5}$$

Dies verursacht zwischen Emissionsort und Rückkehrstelle eine mittlere Abweichung von 0,8 Millionen Lichtjahre. Zwei Drittel der aus dem Milchstraßensystem in der Form von Photonen des sichtbaren Spektralgebietes in den Weltraum ausgestrahlten Energie gelangt wieder in eine, das Milchstraßensystem umgebende Kugel vom Radius 0,8 Millionen Lichtjahre zurück. Der Durchmesser des Milchstraßensystems wird auf 100.000 Lichtjahre, und seine größte Breite auf 30.000 Lichtjahre geschätzt. Aus dem Verhältnis des Rauminhaltes der umschriebenen Kugel zu dem Volumen des Milchstraßensystems berechnet sich die Energiedichte der zurückkehrenden Strahlen als rund 20.000-mal kleiner, als wie die Energiedichte der Licht- und Wärmestrahlen innerhalb des Milchstraßensystems; letztere wird von VAN RHIJN[2] zu $K = 7{,}10^{-3}$ erg/cm^2 sec angegeben. Indem wir noch die Absorption durch Paarerzeugung in Betracht ziehen, erhalten wir für die spezifische Intensität der aus dem Milchstraßensystem ausgestrahlten und dorthin wieder zurückkehrenden Photonen (R = Raumkrümmung)

$$F = 5.10^{-5}\frac{K}{E_0}\ e - \frac{2\pi R}{Tc} - A\, e^{\frac{2\pi R}{Tc}} = 8.10^{-10} \qquad 26.$$

während die Energie der zurückkehrenden Photonen

$$E = E_0\, e^{2\pi R/Tc} = 8{,}7.10^{11}\, E_0 = 1{,}2.10^{12}\, eV \qquad 27.$$

[1] M. V. LAUE: Die Relativitätstheorie, Vieweg Verl.

[2] P. J. VAN RHIJN, Groningen Publ. 31, 1921.

ist. Die Strahlung des Milchstraßensystems, die bei ihrer Aussendung der Strahlung eines schwarzen Körpers von 6000° C Temperatur entsprach, ist während seines Umlaufes im Weltraum, in die Strahlung eines schwarzen Körpers von 5000 Billionen Grad Temperatur verwandelt worden.

Nach astronomischen Beobachtungen übersteigt die Massendichte im interstellaren Raum nicht den Wert von $4{,}10^{-26}$ g/cm^3; dem entspricht — auch in der Richtung der größten Ausdehnung des Milchstraßensystems — blos eine Materieschicht von $4{,}10^{-3}$ g/cm^2 so, daß im interstellaren Raum das Strahlengemisch wohl kaum Veränderungen erleiden wird. Es ist freilich eine andere Frage ob in dem Raum zwischen den Planeten, oder in der unmittelbaren Nachbarschaft unseres Sonnensystems keine größeren Gasmengen angehäuft sind; doch wissen wir vorläufig zu wenig hierüber um es in Rechnung ziehen zu können. Jedenfalls wird aber die Strahlung bei dem Durchgang durch unsere Atmosphäre infolge Ionisation, Bremsstrahlung, Paarerzeugung, Mesonenauslösung, Atomzertrümmerung und ähnliche Vorgänge eine erhebliche Änderung erleiden. Leider sind unsere Kenntnisse, insbesonders über die Mesonenauslösung noch zu lückenhaft; auch würde eine in die Einzelheiten gehende Behandlung dieser Frage den Rahmen dieser Arbeit übersteigen. Trotz dieser Schwierigkeiten wollen wir versuchen die zu erwartenden Erscheinungen zu skizzieren. Es ist aber selbstverständlich, daß man von irgend einer Annahme bezüglich der Entstehung der Mesonen ausgehen muß. Wir machen den Ansatz, daß *Photonen deren Energie größer als* 10^9 *eV ist, mit einem Wirkungsquerschnitt gleich dem Kernquerschnitt* ($\sim A^{2/3}\,\Phi \sim 6\,\Phi = 1{,}5.10^{-24}$ cm^2) *in einem Akt mehrere Mesonen auslösen.* Wir werden bei größeren Energien mit durchschnittlich 3 Teilchen pro Kerntreffer rechnen.[1] An Hand der gemachten Annahme lassen sich in der Luftschicht folgende Vorgänge erwarten:

Infolge der abschirmenden Wirkung des erdmagnetischen Feldes können in unseren Breiten Elektronen nur oberhalb 3.10^9 *eV* (am Äquator oberhalb 2.10^{10} *eV*) die Erdatmosphäre erreichen. Die Bremsstrahlung dieser primären Elektronen erzeugt Mesonenpaare, von denen die mit kleinerer Energie schon in den obersten Luftschichten zerfallen und zu der Entstehung von Kaskadenschauern beitragen. Die Mesonen mit mehr als 2.10^9 *eV* Energie erreichen die Meereshöhe und dringen auch in tiefere Erdschichten ein. Da die auslösende Strahlung dieser Mesonen und Kaskad-Elektronen schon aus dem Weltraum in Form von elektrisch geladenen Teilchen ankommt, werden sie einen Breiten-Effekt aufweisen.

[1] L. W. Nordheim u. M. H. Hebb, Phys. Rev. *56*, 494, 1939; V. C. Wilson Phys. Rev. *53*, 337, 1938; L. Jánossy u. P. Ingleby, Nature *145*, 511, 1940 és *147*, 56, 1941; L. Fussell, Phys. Rev. *51*, 1005, 1936.

Eine wesentlich größere Intensität besitzen jedoch die Sekundärstrahlen der aus dem Weltraum kommenden Photonenspektrums. Die Photonen mit Energien zwischen 10^6 und 10^9 *eV* lösen in den obersten Luftschichten Elektronenpaare, bzw. Kaskadenschauer aus, wobei die maximale Teilchenzahl bei ungefähr 60 Torr = 20 km Höhe erreicht wird. Die Photonen mit mehr als 10^9 *eV* Energie lösen zum größten Teil schon oberhalb 12 Torr Mesonenpaare aus, von denen die mit kleinerer Energie bald zerfallen und zur Entstehung von Kaskadenschauern führen; die Mesonen mit mehr als 2.10^9 *eV* Energie erreichen die Meereshöhe und dringen auch in größere Tiefen ein.

Die Zahl der aus den primären Photonen [Gleichung (21)] entstehenden Mesonen ist 3-mal so groß und ihre Energie 3-mal kleiner wie die Zahl bzw. Energie der auslösenden Photonen.

$$F_M^{Ph} = 2{,}3.10^{-4}\left[\frac{e^{-3w}}{3W} - Ei\,(-3W)\right] \qquad 28.$$

Während die Zahl der von der Bremsstrahlung der primären Elektronen (24) ausgelösten Mesonen ungefähr 6-mal größer und ihre Energie 6-mal kleiner als die Zahl bzw. Energie der auslösenden primären Elektronenpaare ist.

$$F_M^B = 4{,}6.10^{-4}\,Ei\,(-6W) \qquad 29.$$

Das integrale Spektrum der harten Mesonenkomponente wird somit:

$$F_M = 2{,}3.10^{-4}\left[\frac{e^{-3W}}{3W} - Ei\,(-3W) + 2\,Ei\,(-6W)\right] \qquad 30.$$

Die Intensität fällt von 2.10^8 bis 2.10^9 mit der ersten, von 10^{10} bis 7.10^{10} *eV* mit der 1,8-ten Potenz der Energie, und für größere Energien exponentiel ab. Dieser Intensitätsverlauf erklärt erstens, den von Schein, Jesse und Wollan[1] beobachteten Anstieg der Intensität der harten Komponente bis zu 20 Torr; zweitens den von Ehmert[2] gefundenen Intensitätsabfall mit der 1,87-ter Potenz der Tiefe zwischen 45 und 243 m Wasser; drittens den von V. C. Wilson[3] gefundenen Knick in der Absorptionskurve bei ungefähr 300 m. W. Ä. und viertens die von Barnóthy und Forró[4] gemachte Beobachtung, nach der in 1000 m. W. Ä. Tiefe keine ionisierenden Primärstrahlen mehr vorhanden sind.

[1] M. Schein, W. P. Jesse u. E. O. Wollan, Phys. Rev. 59, 615, 1941.
[2] A. Ehmert, Zeitsch. f. Phys. 106, 751, 1937.
[3] V. C. Wilson, Phys. Rev. 53, 337, 1938.
[4] J. Barnóthy u. M. Forró, Zeitschr. f. Phys. 104, 744, 1937; Phys Rev. 55, 870, 1939; Zeitschr. f. techn. Phys. Nr. 12, 290, 1940; Phys. Rev. 58, 844, 1940.

In Tabelle III. haben wir die nach unserer Theorie zu erwartende Absolutintensitäten der harten Komponente für einige Tiefen berechnet und sie mit den experimentell bestimmten Intensitäten der kosmischen Strahlung verglichen. Hierbei sind für 20 Torr der Wert von SCHEIN, JESSE u. WOLLAN und für Tiefen unterhalb Meereshöhe die Ergebnisse von Wilson angeführt; indem die relativen Meßwerte dem von EHMERT und TROST[1] für Meereshöhe bestimmten Absolutwert der Intensität (0,0102 Teilchen pro cm^2 sec. Raumwinkeleinheit) angeschlossen wurden. In Meereshöhe beträgt der Anteil der harten Komponente 75%[2]. Der Energieverlust durch Ionisation ist nach den Berechnungen von LYONS[3] ($R = 0,5 \cdot E^{0,96}$) und der durch Bremsstrahlung nach den Berechnungen von BHABHA[4] in Betracht gezogen.

Tabelle III.

Tiefe in m W. Ä.	Energieverlust in 10^9 *eV*	Intensitäten berechnet	Intensitäten gemessen
0,3	0,2	$7,7 \cdot 10^{-2}$	$9,0 \cdot 10^{-2}$
10	2,3	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$
50	12,0	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$
100	26,0	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$
200	55,0	$9,1 \cdot 10^{-5}$	$8,0 \cdot 10^{-5}$
300	89,0	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$
500	156,0	$3,2 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$

Wir können aus der Tabelle ersehen, daß die berechnete absolute Intensität bis zu 300 m W. Ä. Tiefen sich sehr gut den experimentellen Ergebnissen anschmiegt. Man möge beachten, daß in der Berechnung der Absolutintensität nur der Wirkungsquerschnitt der Photonen-Begegnung eine nicht aus Messungen entnommene Größe ist. Wäre der Wert von Φ in Wirklichkeit 10-mal größer oder beliebig kleiner, als der von uns angenommene Wert, so würde es die berechnete Intensität in Meereshöhe und in größeren Höhen noch immer nicht wesentlich ändern.

In größere Tiefen als 500 m W. Ä. sind praktisch keine Mesonen mehr vorhanden. Die hier anzutreffenden Strahlen bestehen unserer Ansicht nach[5] aus Neutrinos (oder Neutronen) die bei dem Zerfall der Mesonen in der Luftschicht entstehen.[6] Leider ist über den Energie-

[1] A. EHMERT und A. TROST. Zeitschr. f. Phys. 100, 553, 1935.
[2] J. E. STREET u. R. H. WOODWARD. Phys. Rec. 49, 196 1936.
[3] D. LYONS. Phys. Zeitschr. 42, 166, 1941.
[4] H. J. BHABHA. Proc. Roy Soc. A. 164, 257, 1928.
[5] J. BARNÓTHY und M. FORRÓ, Zeitschr. f. Phys. 104, 744, 1937; Phys. Rev. 55, 870, 1939; Phys. Rev. 58, 844, 1940; Zeitschr. f. techn. Phys. Nr. 12, 290, 1940.
[6] J. BARNÓTHY, Zeitschr. f. Phys. 115, 140, 1940.

verlust dieser nicht ionisierenden Teilchen so wenig bekannt, daß eine Berechnung der Intensitäten unterhalb 500 m W. Ä. vorläufig nicht ausführbar ist.

Den Einfluß des erdmagnetischen Feldes in Betracht gezogen, berechnet sich die Intensität der von den primären Elektronen erzeugten Mesonenkomponente in Meereshöhe am Äquator zu $4{,}1.10^{-4}$ und in 40° geogr. Breite zu $9{,}7.10^{-4}$ Teilchen pro cm² sec und Raumwinkeleinheit. Der hierdurch bedingte Unterschied in der Gesamtintensität ist 6%, während nach den Messungen[1] der Breiteneffekt der harten Komponente in Meereshöhe 7% beträgt.

Das fast monochromatische Energieband der Photonen, die unserem Milchstraßensystem entstammen, löst in den obersten Luftschichten Mesonen von 10^{11}—10^{12} eV Energie aus. Obzwar die Intensität (26) im Verhältnis zu der gesamten Mesonenintensität vernachlässigbar ist, können Mesonen so hoher Energie nach EULER und HEISENBERG[2] durch Kerntreffer zur Entstehung von Mesonenschauern führen, in denen die mittlere Energie der Mesonen ungefähr 10^8 eV ist. Ein primäres Photon der Energie $1{,}2.10^{12}$ eV kann auf dieser Weise einen Mesonenschauer mit mehr als 10.000 Teilchen erzeugen ; sie dürften auch zur Erklärung der größten Hoffmann-Stöße ausreichen. Durch Zerfall der Mesonen in der Luft gesellen sich zu diesen großen Mesonenschauern noch kleine Elektronenschauern, wodurch die Zahl der Teilchen in einem einzigen Schauer auf 20.000—50.000 ansteigen kann. Löst jedes primäre Photon, das aus unserem Milchstraßensystem stammend nach Umkreisung des Weltraumes in unsere Luftschicht gelangt, einen solchen Riesenschauer aus, so wären auf einer Fläche von 1 m² pro Stunde 0,03 Schauer zu erwarten. GEIGER und STUBBE[3] beobachteten pro m² und Stunde 0,006 ausgedehnte Luftschauer mit einer mittleren Teilchenzahl von 86.000 Teilchen. Falls diese Mesonen von 10^{11}—10^{12} eV Energie nicht durch Kerntreffer in der Luftschicht absorbiert werden, dringen sie in größere Tiefen ein und erzeugen dort Hoffmann-Stöße ; in Übereinstimmung mit den Beobachtungen von F. WEISCHEDEL[4] der in 235 m W. Ä. Tiefe noch eine auffallend große Anzahl von Hoffmann-Stöße beobachtete.

Eine Lokalisation der Quellen der primären Strahlung ist wegen der großen Anzahl der Strahlungsquellen ($\sim 10^7$ Nebel pro Grad[2]), vollständig aussichtlos und erklärt die Erfolglosigkeit der Bemühungen zur Auffindung einer Sternzeitperiode der kosmischen Strahlung. Da jedoch die Strahlungsquellen außerhalb unseres Milchstraßensystems

[1] A. H. COMPTON u. R. N. TURNER, Phys. Rev. 52, 799, 1937.
[2] H. EULER und W. HEISENBERG, Ergebn. d. Exakt. Naturwiss. 17, 27, 1938.
[3] H. GEIGER und W. STUBBE, Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Nr. 10, 1941.
[4] F. WEISCHEDEL, Zeitschr. f. Phys. 101, 732, 1936.

liegen, ist eine Beeinflußung der Intensität durch den, infolge der galaktischen Rotation zustandekommenden Dopplereffekt zu erwarten, in Übereinstimmung mit dem beobachteten Compton—Getting-Effekt.[1]

Aus obigen Beispielen können wir sehen, daß die Strahlung, die nach unserer Theorie infolge Verminderung der Einheiten des natürlichen Maßsystems aus der Licht- und Wärmestrahlung der Fixsterne entsteht, in allen wichtigeren Zügen mit den Eigenschaften der kosmischen Strahlung übereinstimmt. Das Licht der Fixsterne erreicht uns von Sternen in unserer Umgebung als Licht- und Wärmestrahlung und von weitentfernten Sternen, nach Umkreisung des größten Teiles des Weltraumes, als kosmische Strahlung.

Es soll an dieser Stelle an eine Arbeit erinnert werden, die im Jahre 1931 in den Naturwissenschaften erschienen ist. E. Regener schreibt darin :

«Wenn der nach Einstein gekrümmter Weltraum geschlossen ist, kann das Licht eines benachbarten Fixsternes auf zweierleiweise zu uns gelangen : einmal direkt, das anderemal, roh gesprochen : auf der anderen Seite der Weltraumkugel herum . . . Darf es sich bei dieser Sachlage nicht lohnen, die Annahme zu machen, daß das was wir in der Ultrastrahlung beobachten, jene Strahlung ist, die von unserem Fixsternsystem . . . zu einer Zeit ausgestrahlt ist, die um die Zeit eines Umlaufes der Strahlung zurück liegt? Wir könnten dann verstehen, daß wir jetzt nach den Entstehungsprozessen der Ultrastrahlung vergeblich suchen, denn in der Zeit eines Umlaufes der Strahlung können sich die physikalischen Bedingungen der Größenordnung nach so stark geändert haben, daß wir wenigstens in unserer näheren Umgebung im Weltraum, die zur Entstehung der Ultrastrahlung notwendigen Verhältnisse jetzt nicht mehr vorfinden».

Kreislauf der Energie.

Im Sinne des II. Hauptsatzes der Thermodynamik, werden die in der Natur vorkommenden Energien in den Naturvorgängen abgewertet. Der Temperaturunterschied zwischen den Energiereservoiren nimmt beständig ab und führt bei einem Universum mit endlicher Gesamtenergie, letzten Endes zum Versiegen der zur Aufrechterhaltung der Naturvorgänge erforderlichen freien Energie : zu dem Wärmetod.

Die Abnahme der Energieeinheiten des natürlichen Maßsystems, läßt diesen Zustand nie eintreten, denn sie verhindert den Ausgleich der Temperaturen. Die Temperatur weitentfernter Sterne wird immer höher erscheinen als die der Strene in unserer Umgebung. Die zur Aufrechterhaltung der Naturvorgänge nötige freie Energie wird uns in der Form von kosmischer Strahlung zugeführt. Ein Nebel strahlt im Mittel $7{,}7 . 10^{41}$ erg pro Sekunde in der Form von Wärme und Licht in den Weltraum aus (Seite 9) und erhält — mit einem Durchmesser von 15.000 Licht-

[1] A. H. Compton und J. A. Getting, Phys. Rev. 47, 817, 1935 und J. Barnóthy und M. Forró, Nature 193, 1064, 1937; Math. Term. Tud. Értesitő 56, 410, 1937.

jahren gerechnet nach Gleichung (25) — 12.10^{41} erg. Energie aus dem Weltraum in der Form von Licht-, ultravioletter und kosmischer Strahlung zugestrahlt.

Unser Weltsystem ist ein Perpetuum mobile zweiter Art. Die Schrumpfung der natürlichen Energieeinheiten bildet den Vorgang, der ohne mit dem II. Hauptsatz der Thermodynamik in Widerspruch zu stehen, die Temperatur der Energiereservoire der Gegenwart, gegenüber der Temperatur der Energiereservoire der Vergangenheit, vermindert und hierdurch einen Ausgleich der Temperaturen verhindert. Unser Universum schöpft die zur Aufrechterhaltung seiner Naturvorgänge nötige Energie, aus seiner eigenen Vergangenheit. Doch steht dies in keinem Widerspruch mit dem Erhaltungssatz der Energie : denn soviel Energie wir in der Form einer großen Zahl von Photonen kleiner Energie, so zu sagen der Zukunft überliefern, ebensoviel Energie erhalten wir in Form einer kleinen Zahl von Photonen großer Energie, von der Vergangenheit zurück, um in den Naturvorgängen der Gegenwart abgewertet, ihren Kreislauf wieder von neuem zu beginnen.

Inst. f. Exp. phys. d. Universität
Budapest, den 24. *Dezember* 1943.

A FIZIKAI MENNYISÉGEK IDŐBELI VÁLTOZÁSA

Egy korábban közölt dolgozatban[1] azon következtetésre jutottunk, hogy mindazon természeti folyamatok lejátszódási sebessége, melyek folyamatos időmérésre felhasználhatók, a multból a jövő felé haladván gyorsul ; és ezen gyorsulás az idő exponenciális függvénye. Ezzel szemben az elektromágneses tér rezgéseinek szaporasága az idő folyamán nem változik. Miután a természeti jelenségek lejátszódásának sebessége a folyamatokban résztvevő mennyiségek és fizikai állandók függvénye, a fizikai mennyiségek : a hossz, tömeg (energia) nagysága is változik az idő folyamán. A meggondolások arra a következtetésre vezetnek, hogy világegyetemünkben előforduló minden hossz és minden tömeg (energia) az idő folyamán ugyanoly mérvű csökkenést szenved, mint az időegységek. Csupán az elektromágneses tér rezgései képeznek ismét kivételt : a fotonok hullámhossza és energiája az idő folyamán nem változik, mindenkor ugyanakkora mint kibocsátása időpillanatában.

Ezen jelenség következményeként távoli csillagokból hozzánk

[1] J. Barnóthy Zeitschr. f. Phys. 120, 148, 1943.

érkező fotonok hullámhosszát ugyanoly atomfajta által itt kibocsátott fotonok hullámhosszával összehasonlítva, megnövekedettnek találjuk: távoli ködök színképe vöröseltolódást mutat.

Hasonlóképen távoli csillagokból érkező fotonok energiáját mi, időközben lecsökkent energiamennyiségeinket használva mértékegységül, nagyobbnak találjuk. Igen nagy távolságból jövő fotonok esetében ezen látszólagos energianövekedés igen nagymérvű lehet, pl. tejútrendszerünkből fénysugarak alakjában kiinduló és a világegyetem megkerülése után ismét ide visszaérkező fotonok energiája 10^{12}eV rendű. E nagy energiájú fotonok légrétegünkben szekunder sugarakat váltanak ki, melyek úgy intenzitásuk, mint energiaspektrumuk és egyéb lényeges tulajdonságuk tekintetében megfelelnek a kozmikus sugárzás részecskéinek.

Világegyetemünk egy másodosztályú perpetuum mobile; az energia egységek csökkenése képezi a folyamatot, mely világegyetemünkben a hőmérsékletkülönbségek fenntartásáról gondoskodik: távoli sugárforrások mindenkor magasabb hőmérsékletűeknek látszanak, mint a közelben lévők. Világegyetemünk a benne lefolyó természeti folyamatok fenntartásához szükséges szabad energiát mintegy saját multjából meríti.

RR LYRAE PERIÓDUS- ÉS FÉNYGÖRBE VÁLTOZÁSAI

Irta: *Guman István.*

I. Bevezetés.

Az úgynevezett pulzációelmélet a változócsillagok egy részénél a csillag állapothatározóinak változását a csillag egyensúlyi helyzete körüli rezgésekkel magyarázza. A rezgések megindulásának okára az elmélet nem tér ki, de a változócsillagoknak a Russel-diagrammban elfoglalt különleges helyzete kétségtelenné teszi, hogy az egyensúlyi állapot megzavarása a csillag belsejéből indul ki, valószínűleg az energiatermelésben beálló ugrásszerű változások következtében.

A pulzációelmélet elsősorban a periódusos változókra alkalmazható, itt is leginkább a legszabályosabb típusra, a δ Cephei-csillagokra. A radiális sebesség, a hőmérséklet és a fényesség ingadozásainak az összehasonlításából több kritériumot vezethetünk le a megfigyelésekből annak eldöntésére, hogy tényleg a csillag rezgése okozza-e ezeket a változásokat. Igy nemrég W. Beckernek[1] sikerült kvantitatíve is igazolni, hogy a δ Cephei-csillagok radiálisan pulzáló csillagok.

A rezgés periódusa, amely a megfigyelésekből a szükségesnél lényegesen nagyobb pontossággal határozható meg, a pulzációelmélet fölhasználásával már következtetést enged a csillag belső szerkezetére is.

Valamely csillag szabad pulzációjának a vizsgálatához a következő alapegyenletek állnak rendelkezésre :

1. A folytonossági egyenlet[2]

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \operatorname{div} \mathfrak{v} = o \tag{1}$$

ahol $\mathfrak{v}$ a sebesség-vektor, ϱ a sűrűség és $\frac{D}{Dt}$ a következő operátor

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathfrak{v} \operatorname{grad}) \tag{1a}$$

2. A hidrodinamikai alapegyenlet

$$\varrho \frac{D\mathfrak{v}}{Dt} = \varrho \operatorname{grad} \Phi - \operatorname{Div} \mathfrak{P} \tag{2}$$

hol Φ a gravitációs potenciál, $\mathfrak{P}$ pedig a belső feszültség tenzora. Div tenzordivergenciát jelent.

3. Az energiaegyenlet

$$\frac{\partial E}{\partial t} + p \operatorname{div} \mathfrak{v} = \varepsilon - \operatorname{div} (E\, \mathfrak{v} + \mathfrak{F}) \tag{3}$$

Ez kifeje i, hogy valamely egységnyi térfogatú térrészben a hő és sugárzási energia összegének, E-nek az időegység alatt való változása a következő tagokból tevődik össze : *a)* Az időegység alatt felszabaduló szubatomáris energia, ε, *b)* A pulzáció következtében mehanikai energia hőenergiává alakul. Ez $-p\operatorname{div}\mathfrak{v}$, ha p a hidrosztatikai nyomás. *c)* Az energiafluxus összetevődik a konvektív $E\mathfrak{v}$ tagból és a sugárzásfluxusból, $\mathfrak{F}$-ból. A térrészbe bekerülő és onnét kikerülő energiamennyiség különbsége $-\operatorname{div}\,(E\mathfrak{v} + \mathfrak{F})$

Az (1)—(3) egyenletekből meg kell határozni a csillag bármely tömegelemének az egyensúlyi helyzetből való elmozdulását, vagyis az

$$\mathfrak{y} = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{v}\, dt \tag{4}$$

vektort.

[1] W. Becker : Ein Beitrag zur Prüfung der Pulsationstheorie der δ Cephei-Veränderlichen durch die Beobachtung und eine unabhängige Ableitung der Perioden-Helligkeitsbeziehung. Z. f. Ap. 19. 299. 1940.

[2] Részletes tárgyalását l. Rosseland : Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage. Berlin, 1931. p. 60—63.

Ha első közelítésben $\mathfrak{y}$ magasabb hatványait elhanyagoljuk (infinitezimális pulzáció), akkor t elkülöníthető a többi független változótól (ezek általános esetben a sugár, a szélesség és hosszúság) és a megoldás ilyen alakban írható

$$\mathfrak{y} = Re\, \mathfrak{p}\,(r, \ldots)\, e^{i \sigma t} \tag{5}$$

A Re azt jelenti, hogy $\mathfrak{y}$-ra a jobboldali kifejezés valós részét kell venni. Minthogy W. Becker eredményei szerint elég radiális pulzációkra szorítkozni, $\mathfrak{p}$ csak az r függvénye.

Legyen $\sigma = \alpha + \beta i$, akkor

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{p}\,(r)\, e^{-\beta t} \cos \alpha t \tag{6}$$

Az energiaegyenletben az energiatermelésnek és a netto sugárzási fluxus gradiensének a pulzáció következtében beálló változásai a csillag belsejében rendkívüli kcsinyek E mellett és csupán a csillag felületének közelében játszanak szerepet, ahol E már kicsiny. Ezért a pulzációt első közelítésben adiabatikusnak tekinthetjük. Ekkor (6)-ban $\beta = o$ és a rezgés minden helyen tiszta harmonikus. A pulzáció közben minden részecskére érvényes a $P \sim \varrho^{\gamma}$ összefüggés, ahol P az össznyomás (gáz + sugárnyomás) és γ a fajhőhányados a gázra és a sugárzásra együttesen. Ennek értéke a csillagok esetében mindig $^4/_3$ és $^5/_3$ között van.[3]

Adiabatikus radiális pulzációk frekvenciáját, α-t és amplitudóját x-et ($\mathfrak{p} = x \frac{\mathfrak{r}}{r}$) a következő határprobléma megoldása adja. Keresnünk kell az

$$Lx + \alpha^2 h(r)\, x = o \tag{7}$$

differenciálegyenletnek[4] a (o, R) tartományban (R a csillag sugara) véges, nem mindenütt eltűnő megoldásait, melyekre

$$\frac{dx}{dr} + 2 \frac{x}{r} = o \qquad \text{ha} \quad r = R \tag{7a}$$

L az úgynevezett Sturm—Liouville-féle operátor[5]

$$L = \frac{d}{dr} \left[p\,(r) \frac{d}{dr} \right] + q\,(r) \tag{7b}$$

Ki lehet mutatni, hogy a sajátértékek $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ mind valósak,

[3] Pl. Eddington: Der innere Aufbau der Sterne. P. 232.

[4] Ennek részletes levezetését lásd: Detre: δ Cephei-csillagok szekundér periodusai és a pulzációelmélet. Csill. Lapok II. évf. 4. sz.

[5] L. Hilbert-Courant: Methoden der mathematischen Physik I. p. 250—253. (II. Aufl.) A sajátértékek valósságára a $\gamma > \frac{4}{3}$ feltételt l. *Csill. Lapok* 2. évf. 4. sz.

ha $\gamma > \frac{4}{3}$ és a sajátfüggvények $x_1, x_2, \ldots$ teljes ortogonális rendszert képeznek, vagyis ha normáljuk őket

$$\int_0^R \varrho_0 r^2 x_i x_k \, dr = \delta_{ik} \tag{8}$$

hol $\delta_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & \text{ha} & i = k \\ 0 & & i \neq k \end{vmatrix}$

Csillagokra való alkalmazásnál $\frac{4}{3} < \gamma < \frac{5}{3}$ éspedig inkább közelebb a felső határhoz. A pulzációegyenlet sajátértékei tehát pozitívek. A Sturm—Liouville-féle határértékprobléma megoldásainak általános tulajdonságai szerint, ha a sajátértékeket növekvő sorrendben rendezzük, az első sajátértéknek megfelelő sajátfüggvénynek a csillag belsejében csak a középpontban van zéróhelye. Az alaprezgésnél így nincs csomófelület, csupán a középpont csomópont és a kitérés előjele adott időben mindenütt ugyanaz. Az l-ik sajátértékének megfelelő rezgésnél a csillag belsejében l-1 csomófelület van.

A sajátértékek γ-val egyértelműleg változnak és így növekedésével a rezgések periódusai (T_e) a

$$T_e = \frac{2\pi}{\alpha_e} \tag{9}$$

összefüggés szerint csökkennek.

II. Változócsillagok több periódussal. BECKER vizsgálatai csak azt bizonyították, hogy a csillag állapotváltozásait a csillag radiális pulzációja okozza. Az elméletnek számot kell adnia a periódus, illetve periódusok értékéről is. Ezek megállapításához ismernünk kell a csillag felépítését egyensúlyi helyzetében. Ehhez legcélszerűbb a sűrűséget megadni, mint a sugár függvényét. Természetesen a periódusok értékei γ-tól is függenek, viszont maga γ szintén a csillag belső összetételétől függ (a kémiai összetételtől és a sugárnyomásnak a gáznyomáshoz való viszonyától). A (7) egyenlet sajátértékeit és a sajátfüggvényeket teljes általánosságban a következő modellekre ismerjük :[6]

1. ϱ = konst. 2. $\varrho \sim r^{-2}$. 3. Pontszerű véges tömeget egyenletes sűrűségű, igen kis tömegű burok vesz körül. Ezek mindegyike távolesik az elfogadható csillagmodellektől, de a tárgyalásuk felvilágosítást nyujt arra nézve, hogyan változnak az eredmények a csillaganyag legkülönbözőbb centrális sűrűsödése mellett.

A standard-modellre, amely a 3 indexü politrop gázgömbnek

[6] T. E. STERNE : Modes of radial oscillations. *MN.* 97. 582. 1937.

felel meg, numerikus integrálással Schwarzschild számította ki az alaprezgés és az első négy felrezgés periódusát, éspedig $\gamma = 1{\cdot}33$, $1{\cdot}43$, $1{\cdot}54$, $1{\cdot}67$ értékére.[7]

Az eddig említett vizsgálatokba γ értékét az egész csillagra konstansnak vették. Általánosságban csak jó közelítő formulát ismerünk[8] az alaprezgés periódusára:

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{I}{-(3\,\overline{\gamma} - 4)\,\Omega}}, \tag{10}$$

ahol I a csillag tehetetlenségi nyomatéka, Ω a gravitációs potenciál a csillag felületén, $\overline{\gamma}$ a γ középértéke a csillag belsejében.

A pulzációelméletnek, azaz a most ismertetett vizsgálatoknak a megfigyelésekre való alkalmazásánál a gyenge pont a csillagok belső szerkezetéről való hiányos ismeretünk, azaz a bizonytalanság arra nézve, hogy melyik csillagmodellt vegyük alapul az összehasonlításnál. Igy bizonytalan a $\varrho\,(r)$ függvény alakja, de amellett γ értéke is változhat a $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ határokon belül. Ha valamely változócsillagnak csak egy periódusa van, akkor γ kellő megválasztásával végtelen sok modellre egyezést érhetünk el. Ellenben ha több periódus is fellép, a modellre is következtethetünk ebből. Ezekből nyilvánvaló, hogy milyen nagy fontosságuk van az olyan változócsillagoknak, amelyeknek fényváltozásában (legtöbbször csak ez figyelhető meg, — a radiális sebesség változásait csak nagyon kevés fényes változócsillagnál sikerült észlelni) több periódus mutatkozik.

Ilyen változócsillagok észleléséből még ennél sokkal több következtetés is vonható. Míg az elmélet, amint eddig ismertettük, csak végtelen kicsi rezgésekre van kidolgozva, a megfigyelések szerint a sugár változása néhány csillagnál 5—6%-ot is kitesz. Amíg a végtelen kis, tisztán harmonikus rezgéseknél, ha egyszerre több sajátrezgés van gerjesztve, azok lineárisan tevődnek össze, addig véges rezgéseknél a sajátfüggvények nem tisztán harmonikusak t-ben és az egyes rezgések többé nem additívek és emiatt az eredő pulzáció meglehetősen bonyolult. Az $\mathfrak{y}$ vektor abszolút értékére, y-ra $\left(\mathfrak{y} = y\,\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)$

[7] M. Schwarzschild: Overtone pulsations for the standard model. *Ap. J. 94.* 245—251. 1941. — L. Feinstein and M. Schwarz-child: Automatic integration of linear second-order diferential equations by means of punched card machines. *Rev. Sc. Instr. 12.* 405—408. 1941. Ez a két értekezés nem áll rendelkezésünkre. A régebbi kevésbbé részletes számítások közül megemlítendők H. A. Kluyver (*B. A. N. 7.* 313. 1936.), Edgar (*M. N. 93.* 422. 1933.) és Eddington (Der innere Aufbau der Sterne) számításai. Utóbbinak a számításai alapján ismerjük a 3 indexű politropra az alaprezgés periódusait $\gamma = 1{\cdot}38$ és $1{\cdot}45$-re.

[8] P. Ledoux and C. L. Pekeris: Radial pulsations of stars. *AP. J. 94.* 124—135. 1941. (*Phys. Ber.* után.)

véges adiabatikus pulzáció esetén ilyen alakú differenciálegyenlet áll fenn :

$$L\, y - h\,(r)\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f\,(y), \tag{11}$$

ahol $f\,(y)$ az y-ban egynél magasabbrendű tagokat foglalja össze. y-t kifejthetjük (7) sajátfüggvényei szerint :

$$y\,(t, r) = \Sigma\, c_n\,(t)\, x_n\,(r) \tag{12}$$

ugyanígy $f\,(y)$-t is. Akkor a $c_1\,(t)$, $c_2\,(t)$, ... , függvényekre kapunk egy másodrendű differenciálegyenletet, amely kanonikus alakra hozható.[9]

A csillagmodell bizonytalansága ma még nem engedi meg az itt vázolt számításoknak az észlelésekkel való összehasonlítását. Inkább a megfigyelésekből kell megállapítanunk, hogyan tevődnek össze többperiódusú változócsillagoknál a véges rezgések és az így nyert empirikus anyagból lehet következtetni a csillag belső szerkezetére.

Mindezekből nyilvánvaló az olyan változócsillagok megfigyelésének fontossága, amelyeknek fényváltozásában több periódus mutatkozik. A svábhegyi csillagvizsgálóban 1934 óta folyik ezen csillagok tüzetes tanulmányozása. A munka első része annak a megállapítása volt, hogy mely csillagnál mutatkozik több periódus. Kiderült, hogy a hosszúperiódusú δ Cephei-csillagok mindegyikénél csak egy periódus mutatható ki, ellenben a rövidperiódusú δ Cephei-csillagok kb. 5%-nál kimutathatók szekundér periódusok.[10]

A legfontosabb ilyen rövidperiódusú δ Cephei-csillag RR Lyrae, mivel ez a legfényesebb képviselője az összes rövidperiódusú δ Cephei-csillagoknak is, úgyhogy ezeket RR Lyrae-csillagoknak is nevezik. Ezen csillag fénye körülbelül 7 és 8 magnitudó között változik és így remény van rá, hogy a fényváltozás mellett a nagyobb amerikai teleszkópokkal a radiális sebesség változása is észlelhető. Ez a többi hasonló csillagnál — kis fényességük miatt — teljesen lehetetlen.

Az RR Lyrae periódusáról a mult évben kimerítő vizsgálat jelent meg Detré-től,[11] aki az eddigi összes, rendelkezésére álló anyagot egységesen feldolgozta. A csillag fényváltozását Balázs és Detre 6512 felvételük alapján szintén vizsgálta,[12] de észleléseik csak

[9] J. Woltjer : On periodic solutions in adiabatic starpulsations. *M. N.* *95* 260. 1935.

[10] J. Balázs und L. Detre : Untersuchungen über die Perioden- und Lichtkurvenänderungen von kurzperiodischen δ Cephei-Sternen. I—IV. *Bud. Mitt.* *5*. 1938. *8*. 1939. *17—18*. 1942.

[11] dto. Untersuchungen . . . III.

[12] dto. Untersuchungen . . . IV.

a fényváltozás maximumának vidékére terjedt ki. A periódusok megállapítására ugyan ez a fénygörbe leglényegesebb része, de teljes képet csak úgy kaphatunk az egyes rezgések összetevődésére, ha a megfigyeléseket az egész fénygörbére kiterjesztjük. Jelen dolgozat célja az RR Lyrae fénygörbeváltozásának a teljes vizsgálata, új megfigyelési anyag alapján, amelyet a szerző az 1942. évben a svábhegyi csillagvizsgálóban készített. Mint látni fogjuk, az új anyag feldolgozásából a periódusokra is lényeges új eredményeket kapunk.

III. A felvételek. Kimérésük és redukálásuk. Az RR Lyrae tanulmányozására a felvételek a svábhegyi Csillagvizsgáló Intézet 16 cm-es asztrográfján készültek. Ez a műszer egy 18 cm-es vizuális vezetőtávcsőre szerelt 16 cm-es fotografiai dublettből áll. Ennek fokusztávolsága 220 cm, úgyhogy a lemezen 1°-nak kb. 4 cm felel meg. A kazetta a deklinációs körök irányában csavarral kb. 3 cm hosszúságban eltolható és így, ha két felvétel között ½—½ mm-es eltolást számítunk, nem nagyon csillagdús vidékről ugyanazon lemezre akár 60 felvétel is készülhet. A felvételek fokálisak.

A felvételek a Kodak-féle Eastman 40 lemezfajtára készültek. Ezt a lemezfajtát nagy érzékenység mellett rendkívül egyenletes emulziósréteg jellemzi és így fotométriai felvételek készítésére különösen alkalmas. Az említett optikával ezen a lemezen 1 perc kintartással kb. a 12. nagyságrendű csillagokig lehet eljutni. Igy RR Lyrae-re, melynek fényváltozása nagyjából a 7. és 8. nagyságrend között történik, a választott ½ perces kintartási idő mellett igen erős képeket kapunk.

Minthogy a 16 cm-es asztrográf objektive közönséges akromátlencse, igen nagy látmezőkorrekcióval kell számolnunk. Evégből szükséges, hogy a változó és az összehasonlító csillagok lehetőleg az optikai tengely közelébe essenek és minden felvételnél szigorúan kell ügyelni arra, hogy az optikai tengelyhez képest a csillagok mindig ugyanazt a helyet foglalják el. Ezért a vezető csillagot a vezetőtávcsőre szerelt fonálmikrométernek mindig ugyanazon fonalaira kell helyezni.

Mivel a ½ perces expozíció mellett, ha a felvételek egymásután készülnek, a csillag fényváltozásának aránylag nem gyors szakaszában a fénygörbe felesleges sűrűn volna befedve és ez a kimérésben és redukálásban felesleges nagy munkamegterhelést jelentene, a fénygörbe leszálló ágában néhány egymásután készült felvétel után hosszabb, 10—15 perces szünetet tartottam. A felszálló ágban és a maximum körül azonban a felvételeket egymásután folyamatosan készítettem.

A lemezeket metol-hydrokinon előhívóban hívtam elő 3 percig.

Ez az előhívó nagy gradációt biztosít és így a fotometriai kiértékelésnél nagy pontosság érhető el.

Az 1943 május 16—1943 november 1 időközben 113 lemezen összesen 4021 felvételt készítettem. Egy lemezre holdvilágos éjszakákon lényegesen kevesebb felvétel készült, mint sötét éjszakákon, hogy a lemezalap ne legyen sohasem fátyolos. Ezen felvételek közül — különböző lemezhibák, nem pontszerű képek és más okok miatt — 257-et kellett kiselejtezni.

Az előhívott lemezek kimérése az intézet fotocellás mikrofotométerén történt. Az RR Lyrae mellett még három összehasonlító csillagot mértem ki, mégpedig :

B. D. + 42,°3325	Spektrum A0	Fényrend	$6^m_,69$
+ 42,3340	A2		$7^m_,82$
+ 42,3331	G0		$8^m_,25$

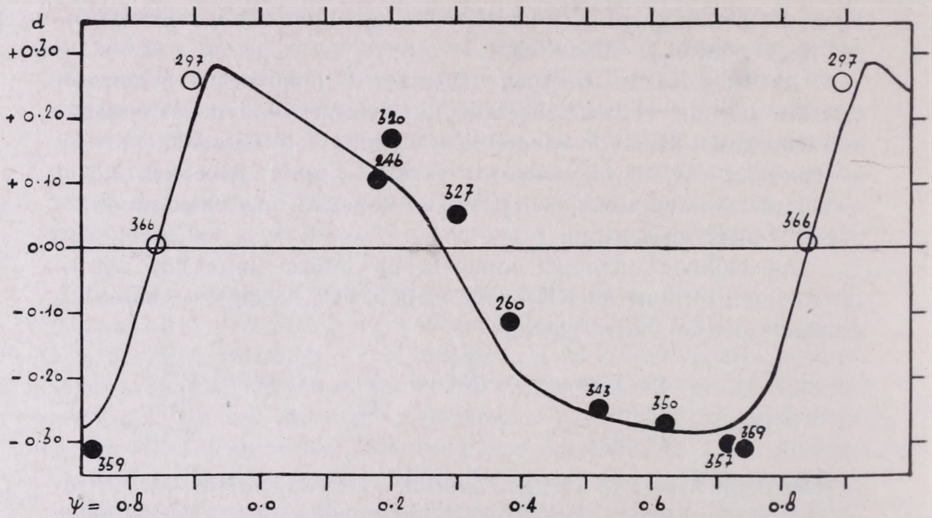
A fényrendre átvettem a leideni észlelők[13] meghatározását. Az asztrográffal önálló meghatározásuk nehéz lett volna, mivel az északi pólus körül alapul vett csillagok közül a fényesebbek igen nagy területen oszlanak el és így a nagy látmezőkorrekció miatt ezek a 16 cm-es asztrográfon nem használhatók fel. A leideni fényrendek az internacionális skálában vannak kifejezve. Minthogy a használt összehasonlítók mind igen közel feküsznek az optikai tengelyhez, látmezőkorrekciót nem kell figyelembe venni.

A mikrofotométeren minden csillagnak a diafragmába történt beállítása után egy ékkel kompenzáljuk az elektrométerfonál kitérését. Ugyanezt tesszük a csillag mellett a lemezalap beállítása után. A csillagra és a lemezalapra kapott ékleolvasások különbsége szolgál mértékül a csillag sötétedésére és átmérőjére együttesen. Mindkettő a csillag fényességétől és az expozíciós időtől függ.

A csillagok fényrendje és az ékleolvasáskülönbségek logaritmusa közt az összefüggés tapasztalat szerint közel lineáris. Ezért minden felvételhez megszerkesztettem az ú. n. sötétedési görbét olyképen, hogy abszcisszának vettem az összehasonlító csillagokra kapott ékleolvasáskülönbségnek logaritmusát, ordinátának pedig ugyanezen csillagok fényrendjét. A változócsillagra kapott ékleolvasáskülönbségből kaptam ennek alapján a változócsillag mindenkori fényrendjét.

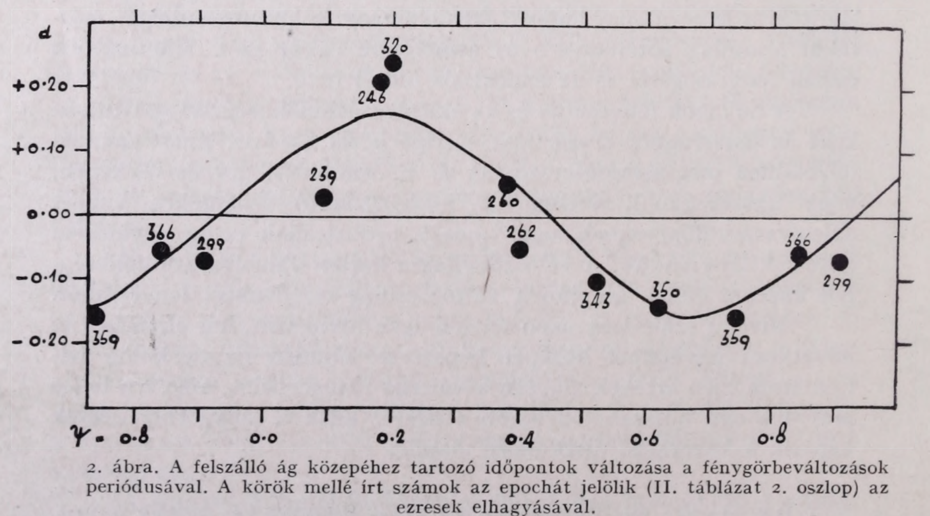
Mivel a szükséges expozícióidő igen rövid volt, két egymásután következő felvételből közepet képeztem. Minden napra külön felrajzoltam ezen értékek alapján a változó fénygörbéjét, amely a teljes periódus egy hosszabb-rövidebb részlete. Ezek a fénygörberészletek képezik a következő diszkusszió alapját.

[13] R. Prager : Der Veränderliche RR Lyrae. *Babelsberg Ver. V. Heft. 4.* 1926.

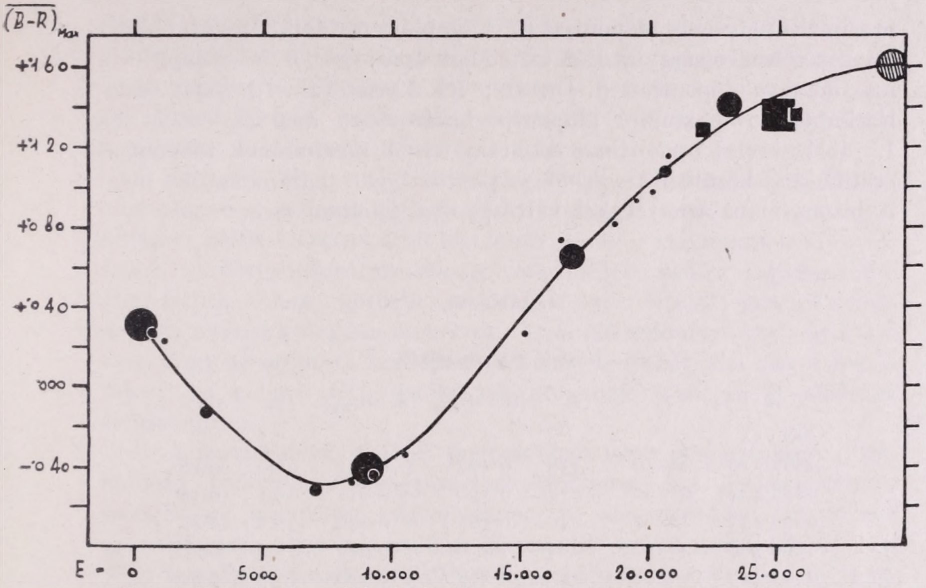


1. ábra. A maximum időpontjának változása a fénygörbeváltozások periódusával. Üres körök bizonytalan értékeket jelölnek. A körök mellé írt számok az egyes maximumok epocháját (I. táblázat 2. oszlop) jelentik az ezresek elhagyásával.

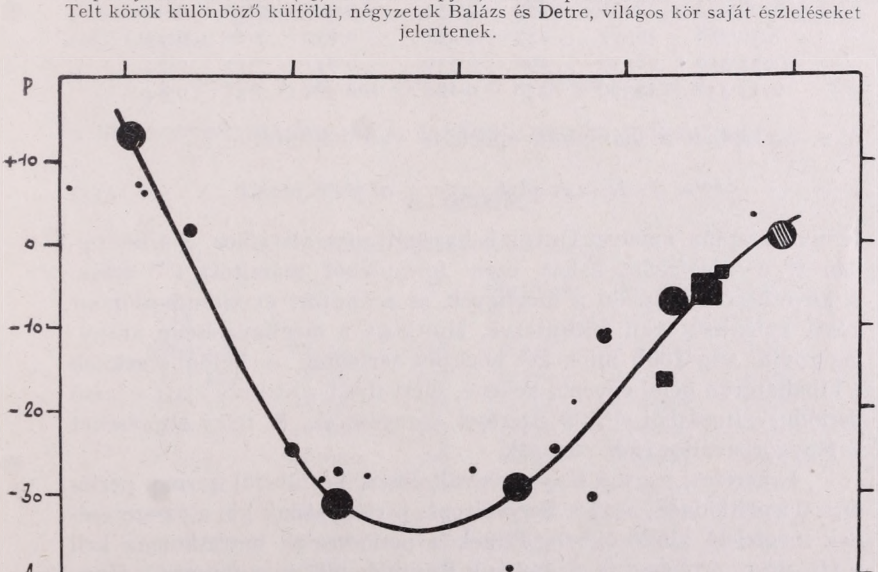
IV. **A fényváltozás periódusának változása és a fénygörbeváltozás periódusa.** Mint már régebbi vizsgálatokból ismeretes, az RR Lyrae fényváltozásának periódusa lassan változik. A periódus értékének és a periódus változásának vizsgálata legegyszerűbben a



2. ábra. A felszálló ág közepéhez tartozó időpontok változása a fénygörbeváltozások periódusával. A körök mellé írt számok az epochát jelölik (II. táblázat 2. oszlop) az ezresek elhagyásával.



3. ábra. A fényváltozás periódusának változása. Az ordináta adja az észlelt maximumok időpontjának eltérését a (13) formula alapján, állandó periódussal számított értékektől. Telt körök különböző külföldi, négyzetek Balázs és Detre, világos kör saját észleléseket jelentenek.



4. ábra. A fénygörbeváltozás periódusának változása. Az ordináták az észlelt E értékeknek a 71·98 periódustól való eltérését adják.

maximális fényesség időpontjai (t^{max}) alapján történik. DETRE idézett értekezésében összegyüjtötte az eddigi észlelésekből megállapítható maximumok időpontjait (l. DETRE : RR Lyrae Tab. I.). Saját észleléseimből 10 maximum időpontja határozható meg és ezeket az I. táblázat első oszlopában soroltam fel. A maximumok időpontjai grafikusan körülbelül + $0^d.003$ pontossággal határozhatók meg. A bizonytalanabb értékeket kettősponttal jelöltem meg.

I. táblázat.

Észlelt maximumok.

B	E	R	$(B-R)_{max}$	$(B-R)_{max}$	m	ψ
243 . . .			d	d		
0867·510	28246	. 338	0·172	+ 0·011	6·90	0·18
0875·424	28260	. 274	0·150	— 0·011	6·91	0·38
0896·433 :	28297	. 246	0·187 :	+ 0·026 :	7·28 :	0·89
0909·462	28320	. 284	0·178	+ 0·017	7·04	0·20
0913·419	28327	. 252	0·167	+ 0·006	6·95	0·30
0922·457	28343	. 321	0·136	— 0·025	7·02	0·52
0926·423	28350	. 289	0·134	— 0·027	7·12	0·62
0930·388	28357	. 257	0·131	— 0·030	7·20	0·72
0931·510	28359	. 390	0·130	— 0·031	7·17	0·74
0935·532	28366	. 358	0·162 :	+ 0·001 :	7·35 :	0·84

A 2. oszlopban a maximum epochája van feltüntetve a

$$t^{max} = J.\ D.\ 241\,4856\,.\,450 + 0^d.5668\,3735\,E \qquad (13)$$

formula alapján, amelyet DETRE is használt vizsgálataihoz. A 3. oszlopban R a megfelelő E-hez ezen formulából számított t^{max} érték. A következő oszlopban a megfigyelt és számított maximum-időpont közti különbség van feltüntetve. Minthogy a megfigyeléseim aránylag rövid, alig több mint két hónapra terjedtek, a különbségeknek a hibahatáron belül egyezni kellene, mert ilyen rövid idő alatt a lassú periódusváltozásból előálló eltérések elenyésző́ek. A nagy eltéréseket a fénygörbeváltozások okozzák.

Ismeretes, hogy a fénygörbeváltozások körülbelül 41 nap periódussal ismétlődnek, azaz a fényváltozás periódusának kb. a 72-szeresének megfelelő időközökben. Ennek a periódusnak mutatkoznia kell a $(B-R)_{max}$ értékben is. Számítsuk ki mindegyik maximumra a fénygörbeváltozás fázisát, ψ-t a 41 napos periódus törtrészeiben kifejezve, éspedig a DETRE által is használt

$$E_0 = 78 \pm 71{\cdot}98\ e \qquad (14)$$

formula alapján. Itt e a fénygörbeváltozás periódusának tetszőleges E értéktől eltelt számát jelenti. Az $E = E_0$ epochához tartozzék $\psi = 0$. Akkor tetszőleges E epochához ψ értékét úgy kapjuk, hogy az $(E - E_0)/71{\cdot}98$ mennyiség törtrészét vesszük. ψ-re kapjuk az I. táblázat utolsó oszlopában levő értékeket.

Ha a $(B-R)_{max}$ értékeket mint ψ függvényét felrajzoljuk, Detre eredményeivel teljesen egyező összefüggést kapunk. Az 1. ábrán a kihúzott görbe a Detre által levezetett görbe a maximumok időpontjának a fénygörbeváltozások következtében beálló ingadozására. Mint látjuk, ehhez a görbéhez az általam nyert értékek igen jól simulnak, az eltérések nagyon csekélyek. Az ábrát különben úgy rajzoltam meg, hogy az ordináta kezdőpontja felezze a görbét. Ezt akkor érhetjük el, ha a $(B - R)_{max}$ értékekből kivonunk $0^d{\cdot}161$-et. (I. táblázat 5. oszlop.)

A maximumok idejénél pontosabban lehet megállapítani a felszállóág valamely részéhez tartozó időpontot. Igy legcélszerűbb a felszálló ág közepéhez tartozó időpontot meghatározni, vagyis azt az időpontot, amikor a csillag fényrendje a fényesedés alkalmával $7^m{\cdot}59$ lesz. Saját észleléseimből 10 ilyen időpontot tudtam megállapítani és ezeket a II. táblázat 1. oszlopában tüntettem fel. A 2. oszlopban van a megfelelő epocha, a 3-ban a következő formulával számított időpont :

$$t^{köz} = J.\ D.\ 241\ 4856 . 408 + 0^d{\cdot}5668\ 3735\ E, \qquad (15)$$

a többi oszlop értelme az I. táblázat alapján nyilvánvaló.

II. táblázat.

Észlelt közepes fényességek.

B	E	R	(B—R)köz	$\overline{(B-R)köz}$	ψ
243 . . .					
0863·476	28239	. 328	0ᵈ·149	+ 0ᵈ·003	0·09
0867·463	28246	. 296	0·176	+ 0·021	0·18
0875·383	28260	. 232	0·151	+ 0·005	0·38
0876·506	28262	. 365	0·141	— 0·005	0·40
0897·477	28299	. 338	0·139	— 0·007	0·91
0909·412	28320	. 242	0·170	+ 0·024	0·20
0922·415	28343	. 279	0·136	— 0·010	0·52
0926·379	28350	. 247	0·132	— 0·014	0·62
0931·478	28359	. 348	0·130	— 0·016	0·74
0935·456	28366	. 316	0·140	— 0·006	0·84

Ha a $(B - R)_{köz}$ értékeket ψ függvényeként rajzoljuk fel és az ordináták kezdőpontját 0·146-nál vesszük fel, kapjuk a 2. ábrát.

Az egyes értékeket itt is kielégítően kiegyenlíthetjük a DETRE által kapott görbével, úgyhogy az egyezés az ő vizsgálataival itt is tökéletesnek mondható.

Homogén anyag birtokában a periódusváltozás vizsgálatára feltétlen megfelelőbb a közepes fényességet alapul venni. Ellenkező esetben azonban előnyt kell adni a maximumok időpontjának. Ez ugyanis jól definiálható, míg a közepes fényesség különböző helyekről származó anyagokban a fénygörbe más-más pontját jelentheti. Mindenesetre utóbbi jó kiegészítést adhat, különösen ha kevés jól átészlelt maximum van az anyagban. Mi a következőkben csak a t^{max}-okat használjuk.

Az eddigiek alapján vizsgáljuk meg először a fényváltozás periódusának változását. Evégből a $(B - R)_{max}$ értékekből eliminálni kell a fénygörbeváltozásokból eredő részt. Más észlelők megfigyeléseire ez már DETRE vizsgálatában megtörtént, mégpedig úgy, hogy minden észlelőnél megállapította az 1. ábrában berajzolt görbe felezőjéhez tartozó $(B - R)_{max}$ értékeket. Mint már láttuk, saját észleléseimből erre $0^d.161$ adódik.

Ha felrajzoljuk a rendelkezésünkre álló anyagból kapott ilyen értékeket, mint E függvényét, kapjuk a 3. ábrát. Az egyes értékek súlya szerint különböző nagyságú jeleket használtam. A legutolsó világosabb kör felel meg a saját észleléseimnek.

DETRE eredményeivel szemben lényeges eltérés, hogy a $(B - R)_{max}$ értékek továbbra is nőnek. DETRE ugyanis az utolsó értékekből arra következtetett, hogy a $(B - R)_{max}$ értékek kb. $E = 22\,000$-től kezdve fogyni kezdenek. Mint az ábrákon láthatjuk, az ő rendelkezésére álló utolsó értékek tényleg erre látszanak mutatni. Viszont most már nyilvánvaló, hogy a $(B - R)_{max}$ növekedése még mindig tart, bár lanyhuló ütemben.

Ha a 4. ábra görbéjét az $y = f(E)$ függvényt ábrázolja, a periódus P_1 értéke az E epochához tartozó időpontban

$$P_1(E) = 0^d.5668\,3735 + f(E + 1) - f(E). \tag{16}$$

Vagy kellő pontossággal

$$P_1(E) = 0^d.5668\,3735 + f'(E), \tag{17}$$

ahol a vessző differenciálást jelent. A periódus nő vagy csökken, aszerint, hogy $f'(E)$ nő vagy csökken. Mint ábránkból láthatjuk, a csillag megfigyelésének a kezdete óta kb. $E = 17\,000$-ig a periódus nőtt. Grafikusan megállapítható az ábrából, hogy a periódus $E = 0$-ban $0^d.566817$ volt és ez $E = 17\,625$-ig $0^d.566852$-re nőtt. Ezen túl a mai napig a periódus csökkent és jelenleg kb. $0^d.566837$. Az eddigi változás amplitudója $0^d.000035$ volt, azaz kb. 3 másodperc (lásd 10. ábrát).

A $P_1(E)$ görbe pontosabb megállapításának valamely interpolációs formulával nem sok értelme van. A változás valószínűleg periódusos, de még egy periódus nem telt el azóta, amióta a csillagot észlelik. Az eddig felállított interpolációs formulák későbbi észlelések alapján sohsem nyertek megerősítést. Érdekes, hogy minden feldolgozásnál hosszabb periódus adódott, mint a megelőzőnél. Igy Prager és Shapley 1915-ben[14] a periódusváltozás periódusára a fényváltozás periódusának a *12 000*-szeresét kapta. Schütte 1923-ban[15] már *16 000*, Zacharov 1925-ben[16] *23 000*, Prager 1926-ban[17] *23 230*-szoros értéket kapott. A

$$P_1(E) = 0^d.5668\,350 + 0^d.0000\,200 \,.\, \cos 0^\circ.00989\,(E - 15500) \quad (18)$$

formula szerint a periódus *36 400*-szorosa a fényváltozásnak, azaz 56·5 év. Ha saját észleléseim tekintetbevételével most újból tisztán harmonikus formulát használnánk, 70 évnél is hosszabb periódus adódna.

A fénygörbeváltozás periódusának vizsgálatára azokat az epochákat (E_0 értékeket) használjuk, amelyek a maximumokra érvényes $(B - R)_{max}$ értékeket ábrázoló görbe (1. ábra) felszálló ágának a közepére esnek. A 4. ábrában felrajzoltam a különböző megfigyelőktől rendelkezésünkre álló adatokat. Az e értékeket a (14) formula alapján kell venni. Ha az E értékeket a (14) formula alapján állandó periódussal kíséreljük meg ábrázolni, a 4. ábrában feltüntetett eltéréseket kapjuk.

Ez az ábra mutatja, hogy a fénygörbeváltozás periódusa, p változik, éspedig folytonosan. Grafikusan meghatározhatjuk a különböző e-khez tartozó periódusértékeket. Eszerint a fénygörbeváltozás periódusa, amióta a csillagot észlelik, $71^P.5$-ről $e = 300$-ig $72^P.2$-re emelkedett, majd az utóbbi időben $72^P.1$-re csökkent.

V. A fénygörbe változása. A fénygörbe változásainak megállapítására a fényváltozás minden fázisára felrajzoljuk a különböző ψ-re, azaz a fénygörbeváltozás különböző fázisaira kapott fényességértékeket. A fényváltozás fázisainak a megállapítására a (13) formulát használtam, de a lassú periódusváltozás, azaz a $+ 0^d.161$ korrekció tekintetbevételével. A fényváltozás így számított fázisát, a periódus egységeiben kifejezve, f-fel jelöljük.

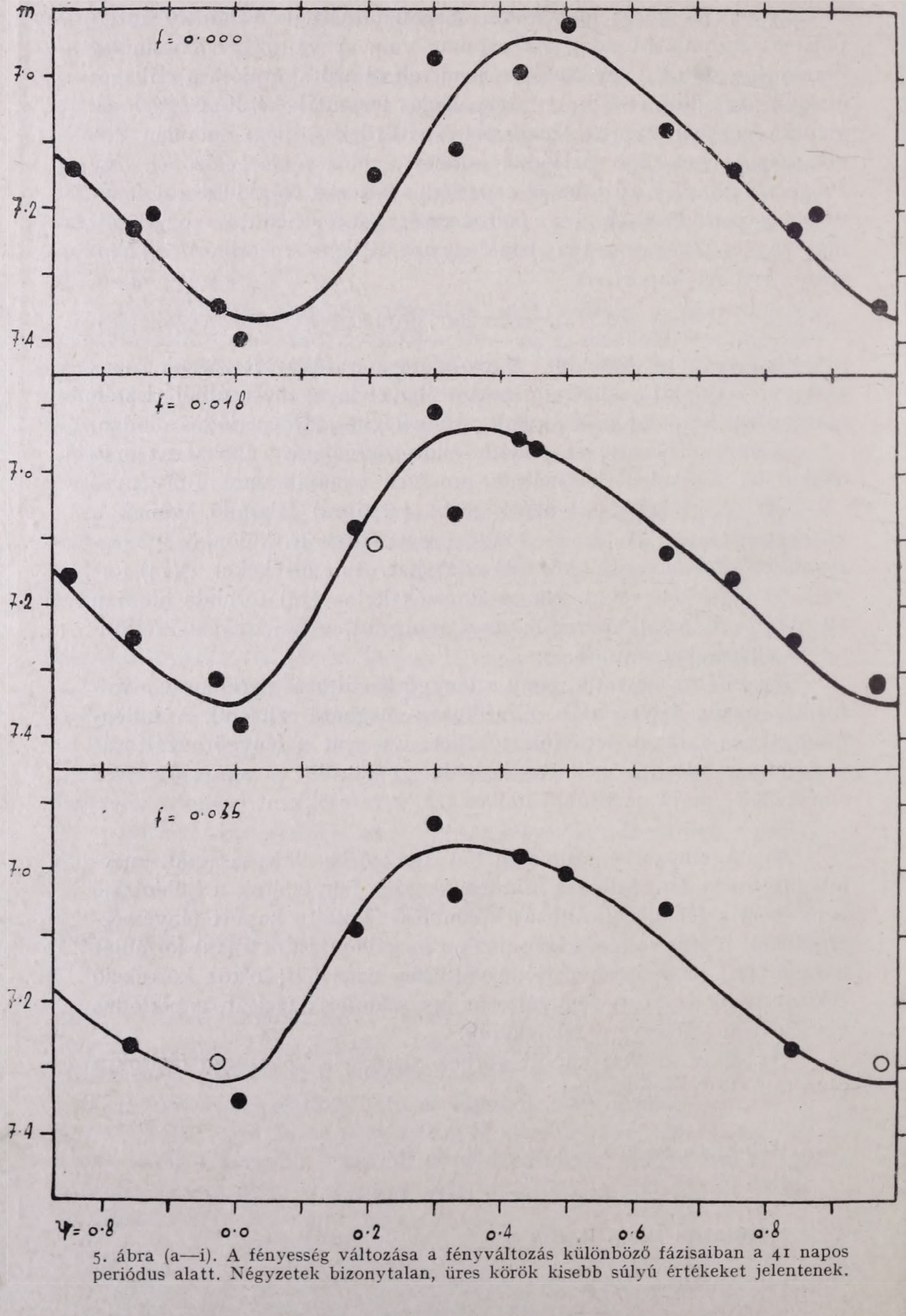
Az egyes estékre kapott görbék alapján a következő fázisokra olvastam le a fényességet :

[14] *Sitzb. Ak. Berlin 8.* 216. és *Ap. J. 43.* 217.

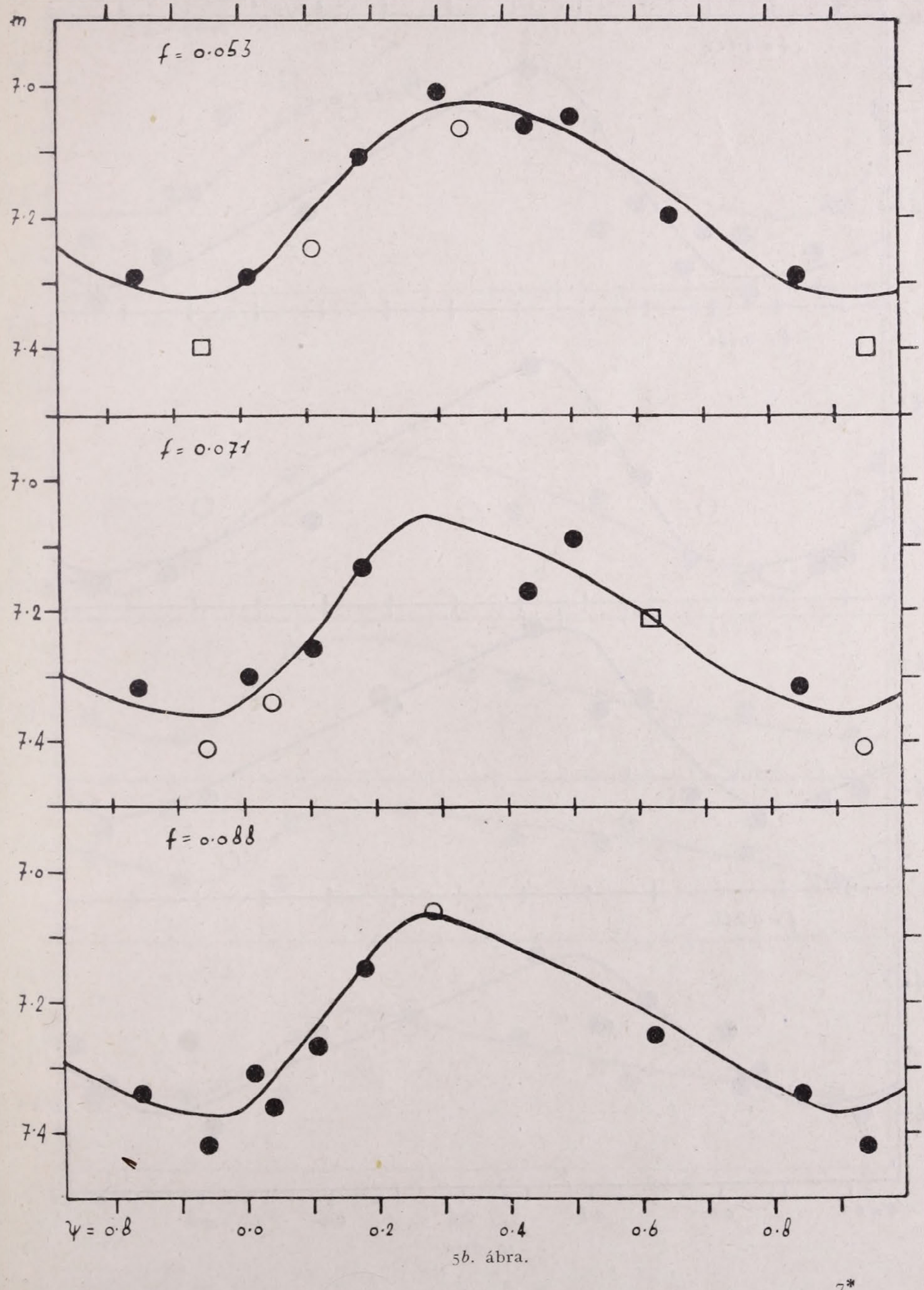
[15] *A. N. 218.* 161.

[16] *A. N. 225.* 131.

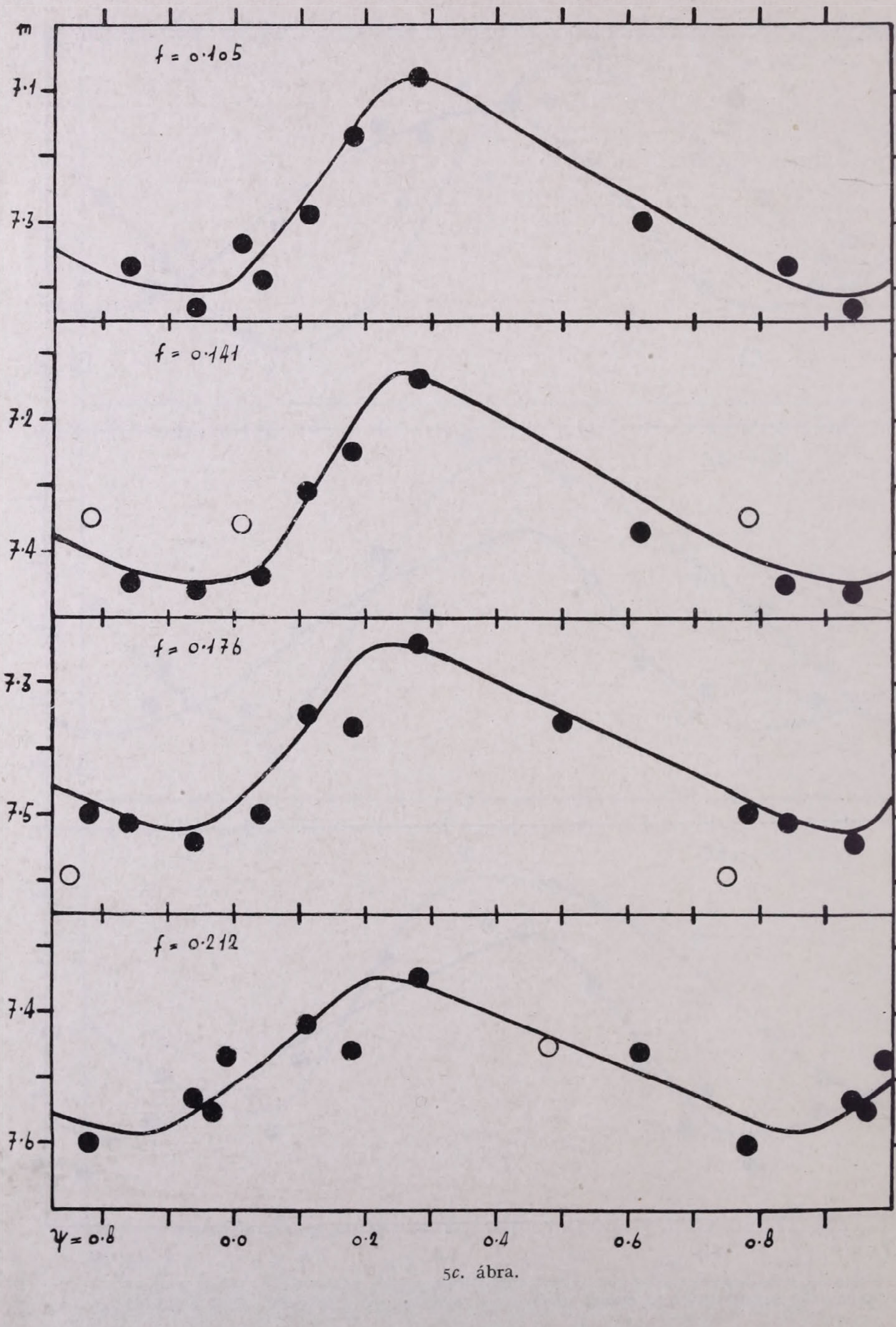
[17] *Babelsberg. Veröff. V. Heft 4.*



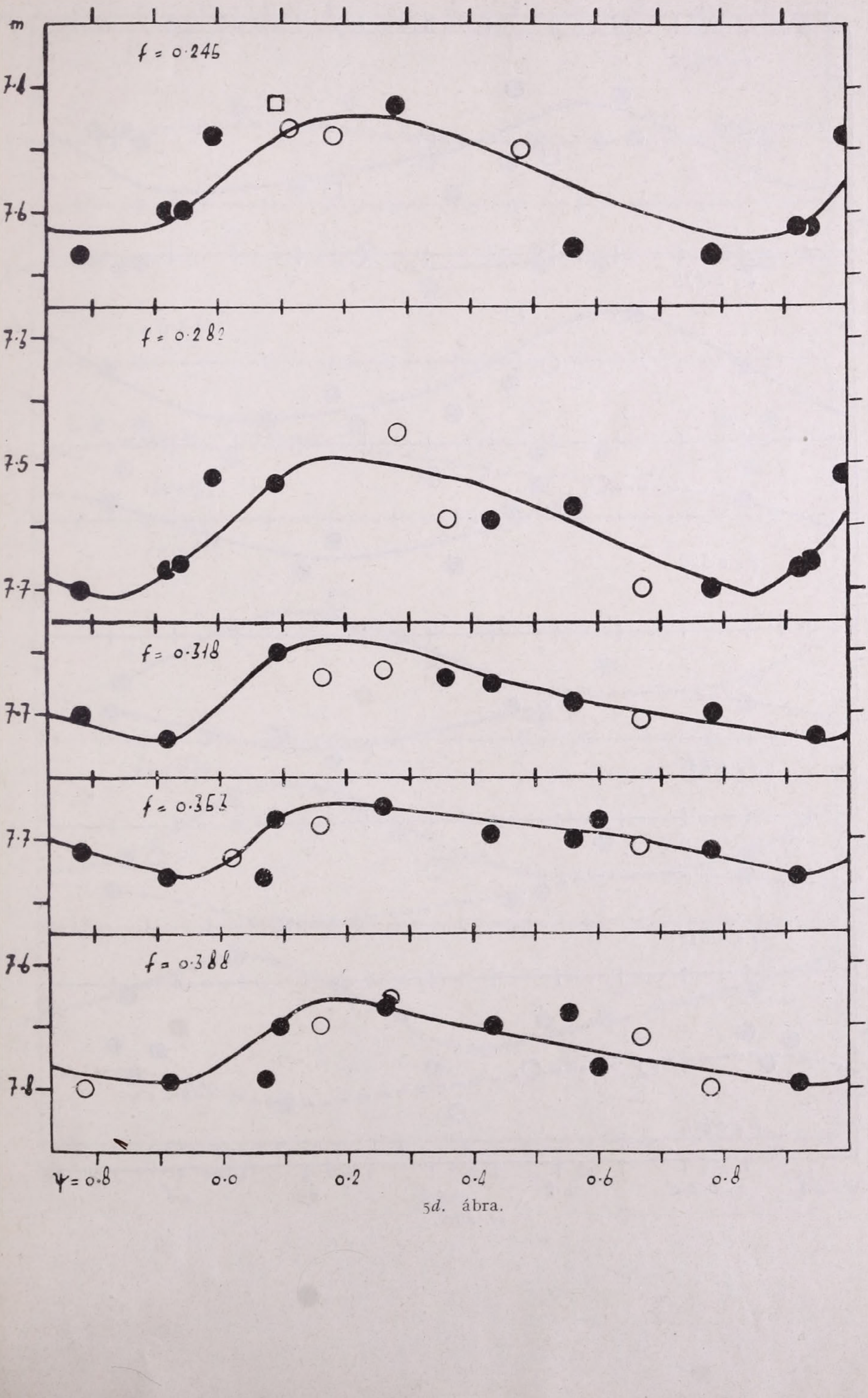
5. ábra (a—i). A fényesség változása a fényváltozás különböző fázisaiban a 41 napos periódus alatt. Négyzetek bizonytalan, üres körök kisebb súlyú értékeket jelentenek.



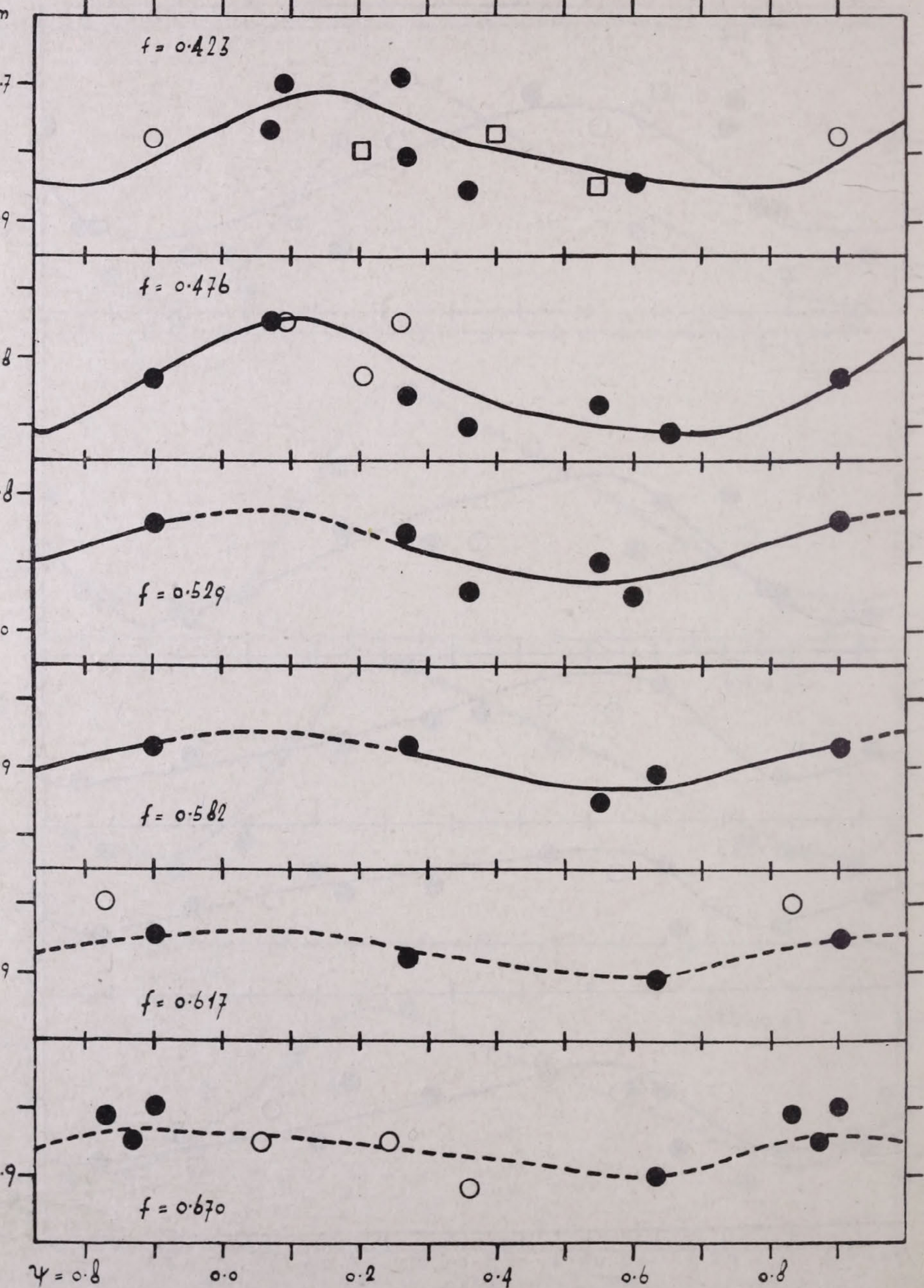
5*b*. ábra.


m
f = 0·105
7·1
7·3
f = 0·141
7·2
7·4
f = 0·176
7·3
7·5
f = 0·212
7·4
7·6
ψ = 0·8
0·0
0·2
0·4
0·6
0·8

5*c*. ábra.

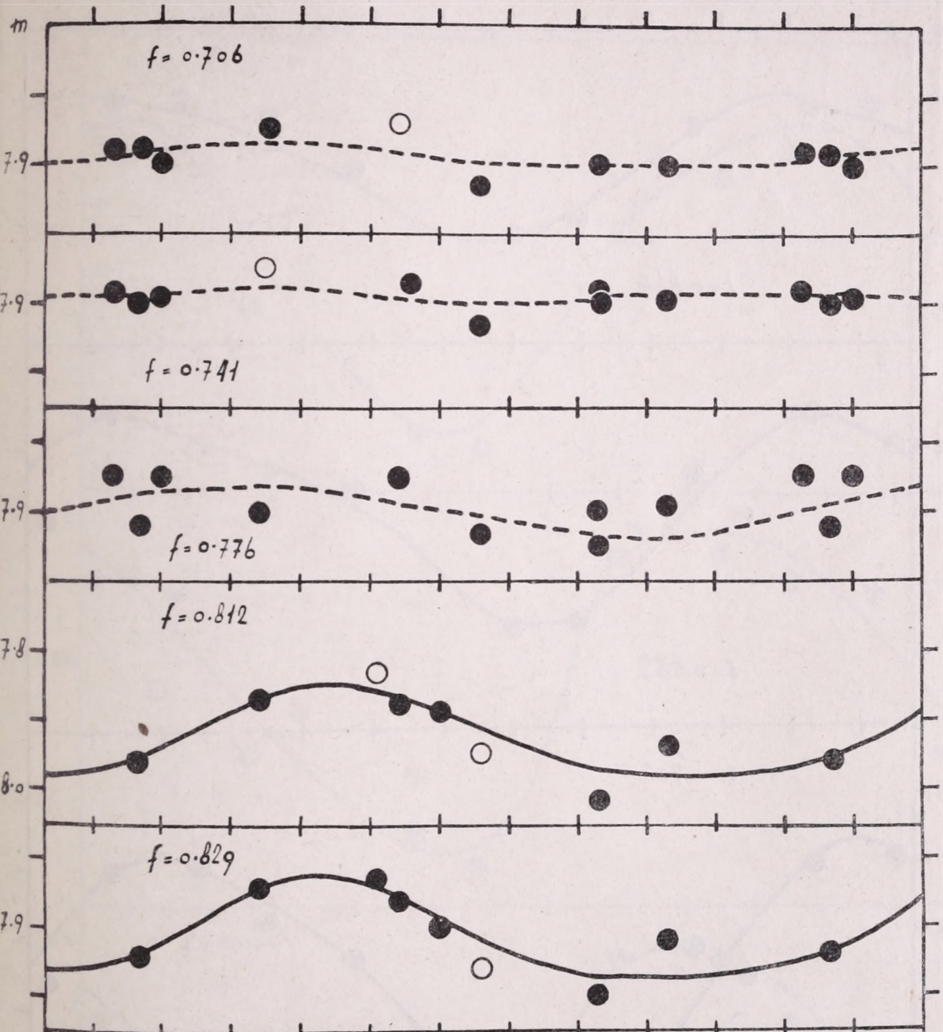

m
f = 0·246
7·4
7·6
f = 0·282
7·3
7·5
7·7
f = 0·318
7·7
f = 0·353
7·7
f = 0·388
7·6
7·8
ψ = 0·8
0·0
0·2
0·4
0·6
0·8

5*d*. ábra.

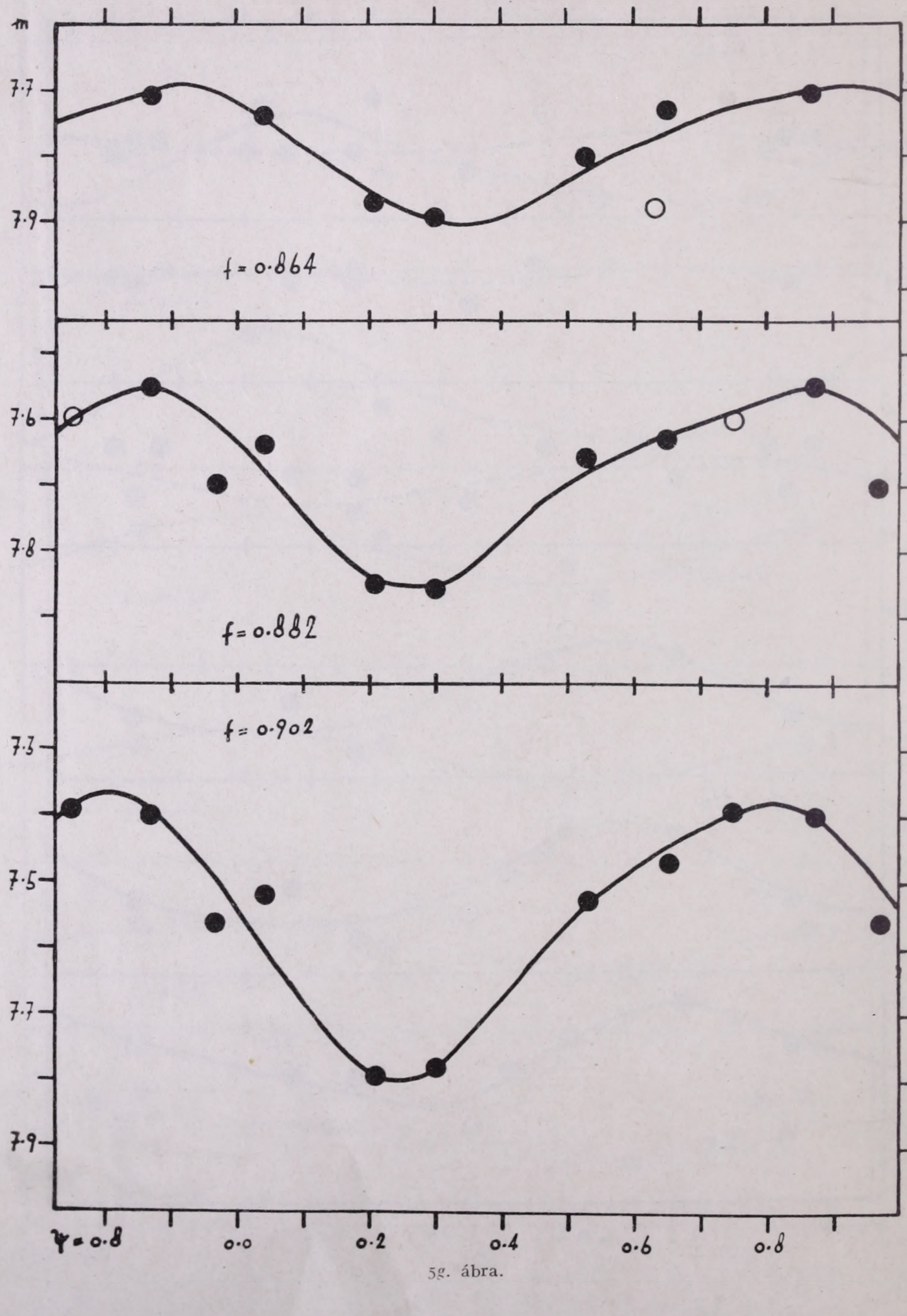


m
f = 0·423
7·7
7·9
f = 0·476
7·8
7·8
f = 0·529
8·0
7·9
f = 0·582
7·9
f = 0·617
7·9
f = 0·670
ψ = 0·8
0·0
0·2
0·4
0·6
0·8

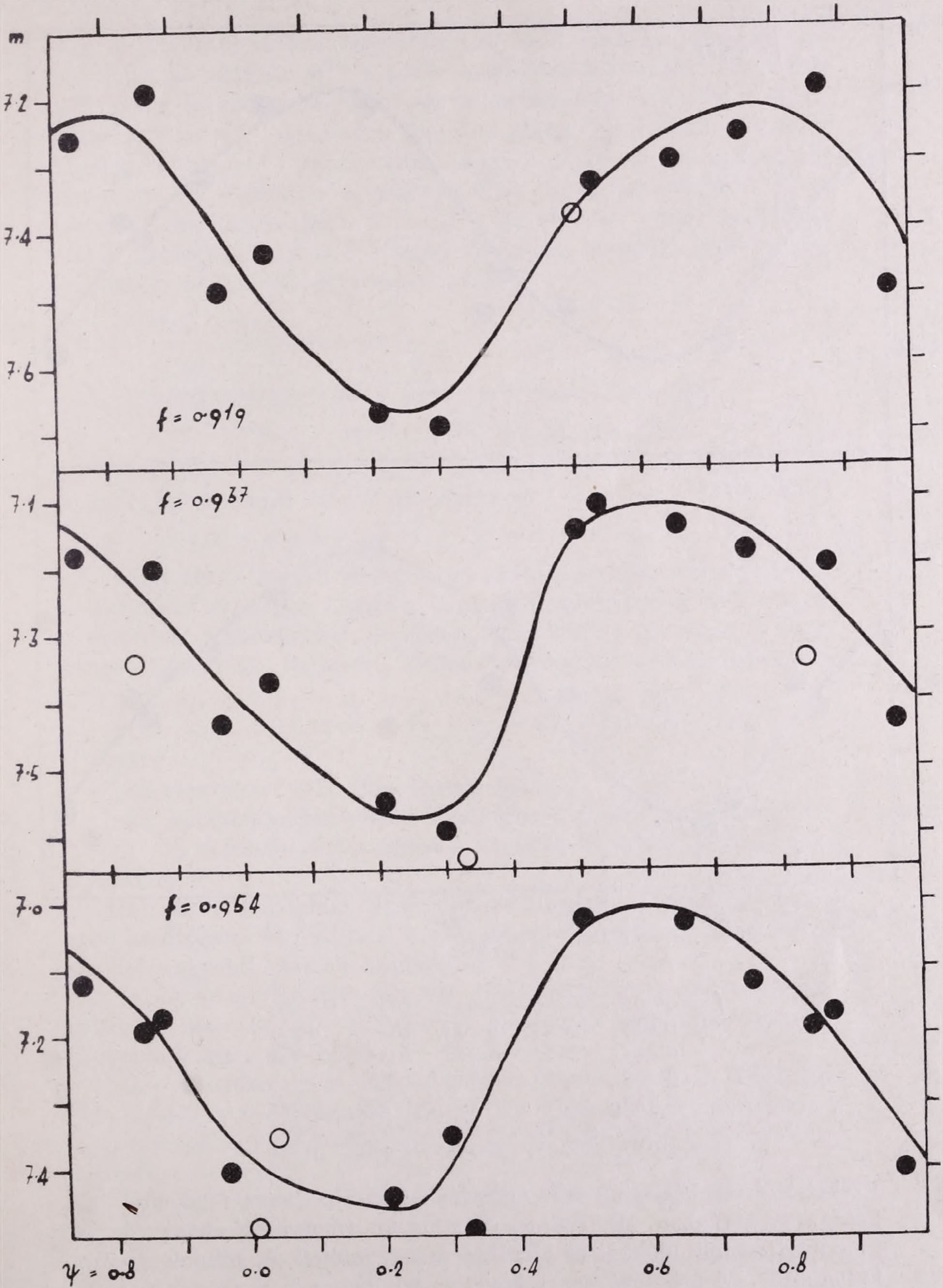
5e. ábra.


m
f= 0.706
7.9
7.9
f= 0.741
7.9
f= 0.776
f= 0.812
7.8
8.0
f= 0.829
7.9
7.8
8.0
f= 0.847
ψ= 0.8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8

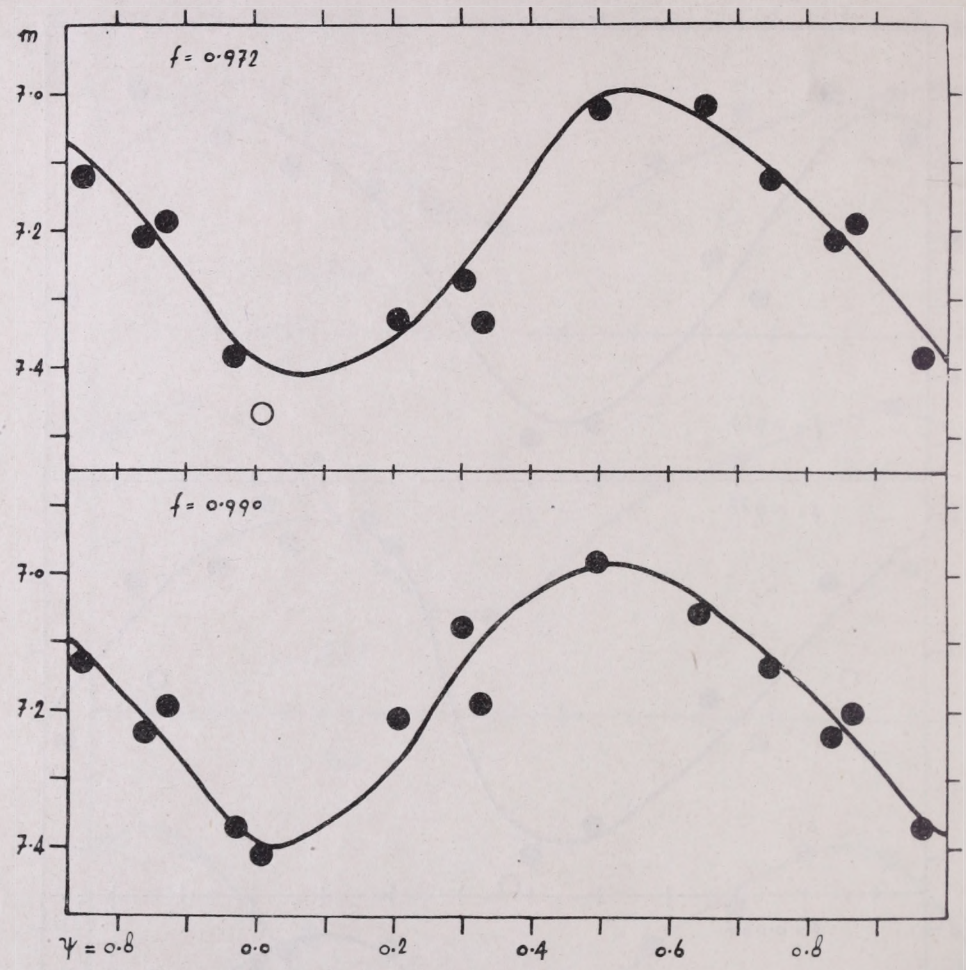
5*f*. ábra.



59. ábra.



5*h*. ábra



5*i*. ábra.

$f =$ *0·000,*	*0·018,*	*0·035,*	*0·053,*	*0·071,*
0·088,	*0·105,*	*0·141,*	*0·176,*	*0·212,*
0·245,	*0·282,*	*0·318,*	*0·353,*	*0·388,*
0·423,	*0·476,*	*0·529,*	*0·582,*	*0·617,*
0·670,	*0·706,*	*0·741,*	*0·776,*	*0·812,*
0·829,	*0·847,*	*0·864,*	*0·882,*	*0·902,*
0·919,	*0·937,*	*0·954,*	*0·972,*	*0·990.*

Ezeket az értékeket aztán mint ordinátákat felrajzoltam ψ függvényeként a 5. ábrákban. Minden f-re egyszeri hullámgörbét kapunk, de különböző amplitudókkal és amellett a maximumok és minimumok különböző f-re más-más ψ-nél következnek be.

A III. táblázatban összeállitottuk az 5. ábrában berajzolt görbék jellemző adatait. m^{max} a görbe maximumához tartozó fényrend, ψ^{max} pedig megadja, hogy milyen ψ mellett következik be a maximum. m^{min} és ψ^{min} ugyanilyen adatok a görbe minimumára vonatkozólag. I^{max} és I^{min} intenzitásban adja a görbe maximumát és minimumát. Az intenzitás egységének $6^m 90$ fényrendet vettük. ΔI az intenzitásamplitudó, azaz $\Delta I = I^{max} - I^{min}$. Az utolsó oszlop a $\Delta I / A$ hányados, ahol A a közepes fénygörbe intenzitásamplitudója. A közepes fénygörbét egyszerűen az

$$\bar{I} = \frac{I^{max} + I^{min}}{2}$$ értékek adják.

A közepes fénygörbét a következő adatok jellemzik:

$$m^{max} = 7^m.12, \qquad m^{min} = 7^m.91, \qquad A_{phg} = 0^m.79.$$

A maximumot $f = 0^P.037$-nél, a minimumot $f = 0^P.821$-nél éri el, melyből a következő adatok következnek:

$$(M - m)/P1 = 0{\cdot}216 \qquad M - m = 0^d.122.$$

Az 5. ábrák alapján könnyen megszerkeszthetjük a fénygörbéket ψ különböző értékeire. Ehhez a kiegyenlítő görbéken le kell olvasni a megfelelő fényességeket és ezeket különböző ψ-kre mint f függvényét felrajzolni. Ilymódon megszerkeszthetjük a fénygörbéket a

$$\psi = 0{\cdot}00,\ 0{\cdot}05,\ 0{\cdot}10,\ 0{\cdot}15,\ 0{\cdot}20,\ 0{\cdot}25,\ 0{\cdot}30,\ 0{\cdot}40,\ 0{\cdot}45,$$
$$0{\cdot}50,\ 0{\cdot}55,\ 0{\cdot}60,\ 0{\cdot}65,\ 0{\cdot}75,\ 0{\cdot}80,\ 0{\cdot}85,\ 0{\cdot}90,\ 0{\cdot}95.$$

értékekre.

Az eredményt a 6. ábra tünteti fel.

Az ábrákból a következő törvényszerűségeket olvashatjuk le:

1°. A minimum fényességének a változása sokkal kisebb, mint a maximumé.

2°. Ha a maximum fényesebb az átlagnál, a minimum gyengébb az átlagnál és fordítva. A maximum változásának amplitudója 3·9-szer nagyobb, mint a minimumé.

3°. A fotografiai fényváltozás amplitudója $0^m.57$ és $1^m.03$ között változik. Intenzitásban kifejezve a maximális amplitudó 2·09-szer nagyobb, mint a minimális.

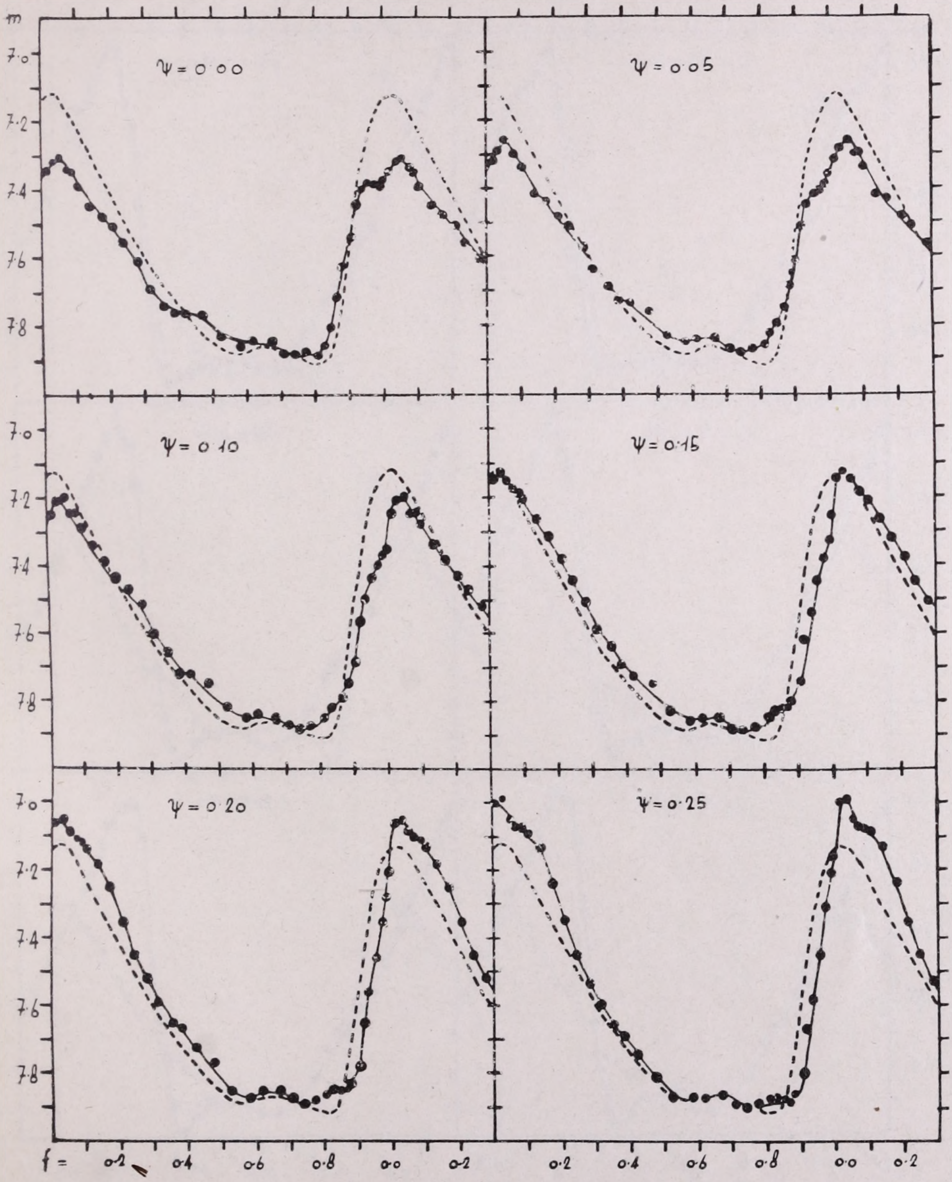
4°. A minimum és a rákövetkező maximum közti időtartam $(M - m)$ $0^d.13$ és $0^d.30$ között változik. Ez a változás főleg a maximum időpontjának a változásából ered, mert a minimum fázisa keveset változik.

5°. A fényesség változása különböző f-re igen különbözik, mint azt a 7. ábra is mutatja. Legnagyobb a változás a maximum környékén, éspedig valamivel a fényváltozás maximuma előtt és után két maximuma is van a $\Delta I / A$ görbének.

III. táblázat.

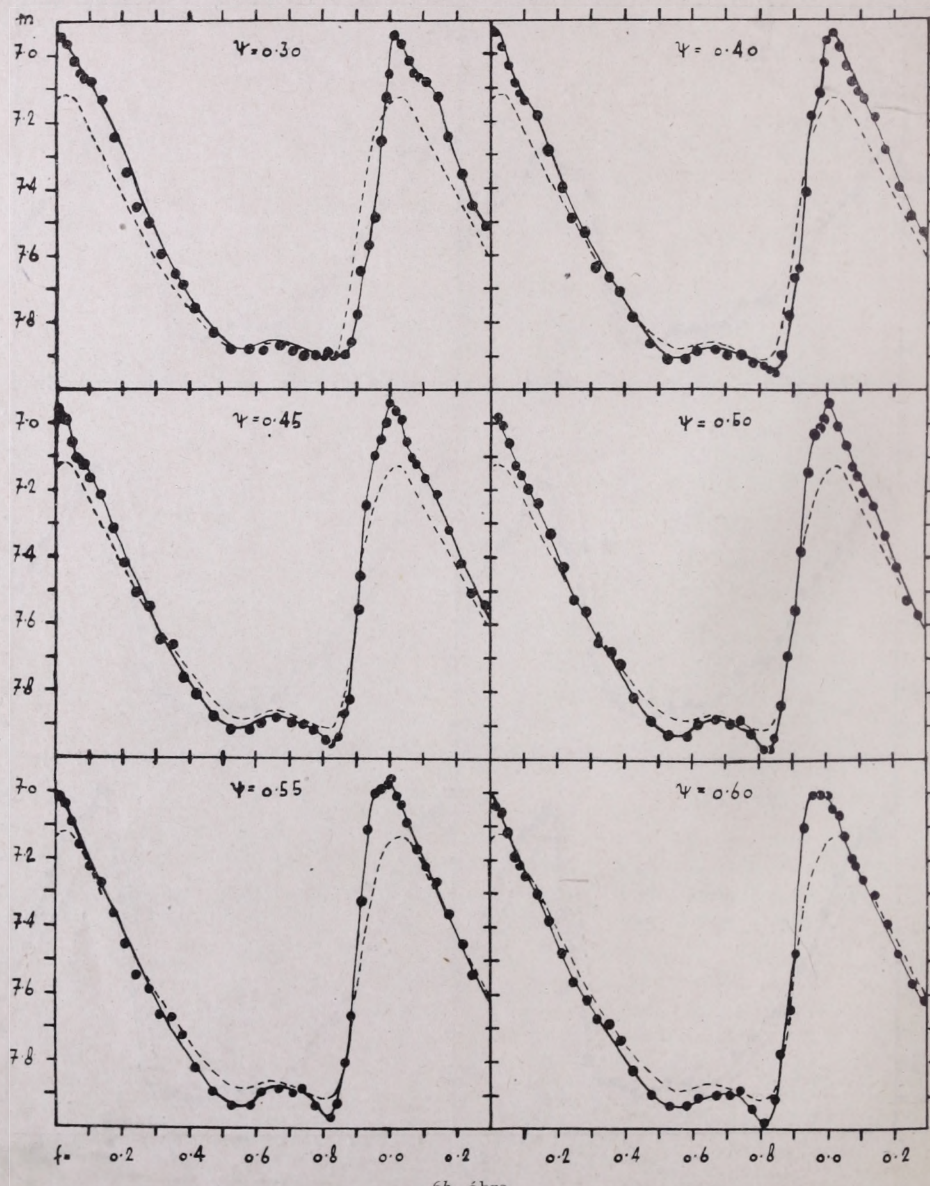
A fénygörbeváltozás jellemző adatai

t	m^{max}	ψ^{max}	m^{min}	ψ^{min}	I^{max}	I^{min}	ΔI	$\Delta I/A$
0·000	6·94	0·45	7·37	0·03	0·96	0·65	0·31	0·70
0·018	6·93	0·46	7·35	0·99	0·97	0·66	0·31	0·70
0·035	6·96	0·36	7·32	0·98	0·95	0·68	0·27	0·61
0·053	7·03	0·33	7·33	0·93	0·89	0·67	0·22	0·50
0·071	7·06	0·27	7·36	0·94	0·86	0·65	0·21	0·48
0·088	7·07	0·28	7·37	0·95	0·86	0·65	0·23	0·52
0·105	7·08	0·27	7·41	0·96	0·85	0·63	0·22	0·50
0·141	7·13	0·25	7·45	0·95	0·81	0·60	0·21	0·48
0·176	7·24	0·24	7·52	0·92	0·73	0·56	0·17	0·39
0·212	7·35	0·22	7·58	0·86	0·66	0·53	0·13	0·30
0·245	7·45	0·22	7·64	0·82	0·60	0·51	0·09	0·20
0·282	7·49	0·17	7·72	0·85	0·58	0·47	0·11	0·25
0·318	7·58	0·20	7·74	0·92	0·53	0·46	0·07	0·15
0·353	7·64	0·17	7·76	0·95	0·51	0·45	0·06	0·14
0·388	7·65	0·18	7·80	0·92	0·50	0·44	0·06	0·14
0·423	7·72	0·15	7·85	0·71	0·47	0·42	0·05	0·11
0·476	7·75	0·12	7·91	0·68	0·46	0·39	0·07	0·15
0·529	7·82	0·08 :	7·94	0·56	0·43	0·38	0·05	0·11
0·582	7·85	0·06 :	7·94	0·58	0·42	0·38	0·04	0·09
0·617	7·84	0·07 :	7·91	0·60 :	0·42	0·39	0·03	0·07
0·670	7·84	0·90 :	7·90	0·62 :	0·42	0·40	0·02	0·05
0·706	7·87	0·08 :	7·90	0·60 :	0·41	0·40	0·01	0·04
0·741	7·88	0·06 :	7·90	0·36 :	0·41	0·40	0·01	0·04
0·776	7·87	0·05 :	7·94	0·60 :	0·41	0·38	0·03	0·07
0·812	7·85	0·13	7·98	0·65	0·42	0·37	0·05	0·11
0·829	7·82	0·13	7·97	0·63	0·43	0·37	0·06	0·14
0·847	7·80	0·04	7·95	0·42	0·44	0·38	0·06	0·14
0·864	7·69	0·92	7·91	0·34	0·48	0·39	0·09	0·20
0·882	7·55	0·87	7·86	0·29	0·55	0·41	0·14	0·32
0·902	7·37	0·80	7·80	0·24	0·65	0·44	0·21	0·48
0·919	7·22	0·78	7·67	0·25	0·74	0·49	0·25	0·57
0·937	7·11	0·63	7·58	0·27	0·82	0·53	0·29	0·66
0·954	7·01	0·58	7·46	0·22	0·90	0·60	0·30	0·68
0·972	7·00	0·54	7·41	0·08	0·91	0·63	0·28	0·64
0·990	6·99	0·52	7·40	0·03	0·92	0·63	0·29	0·66

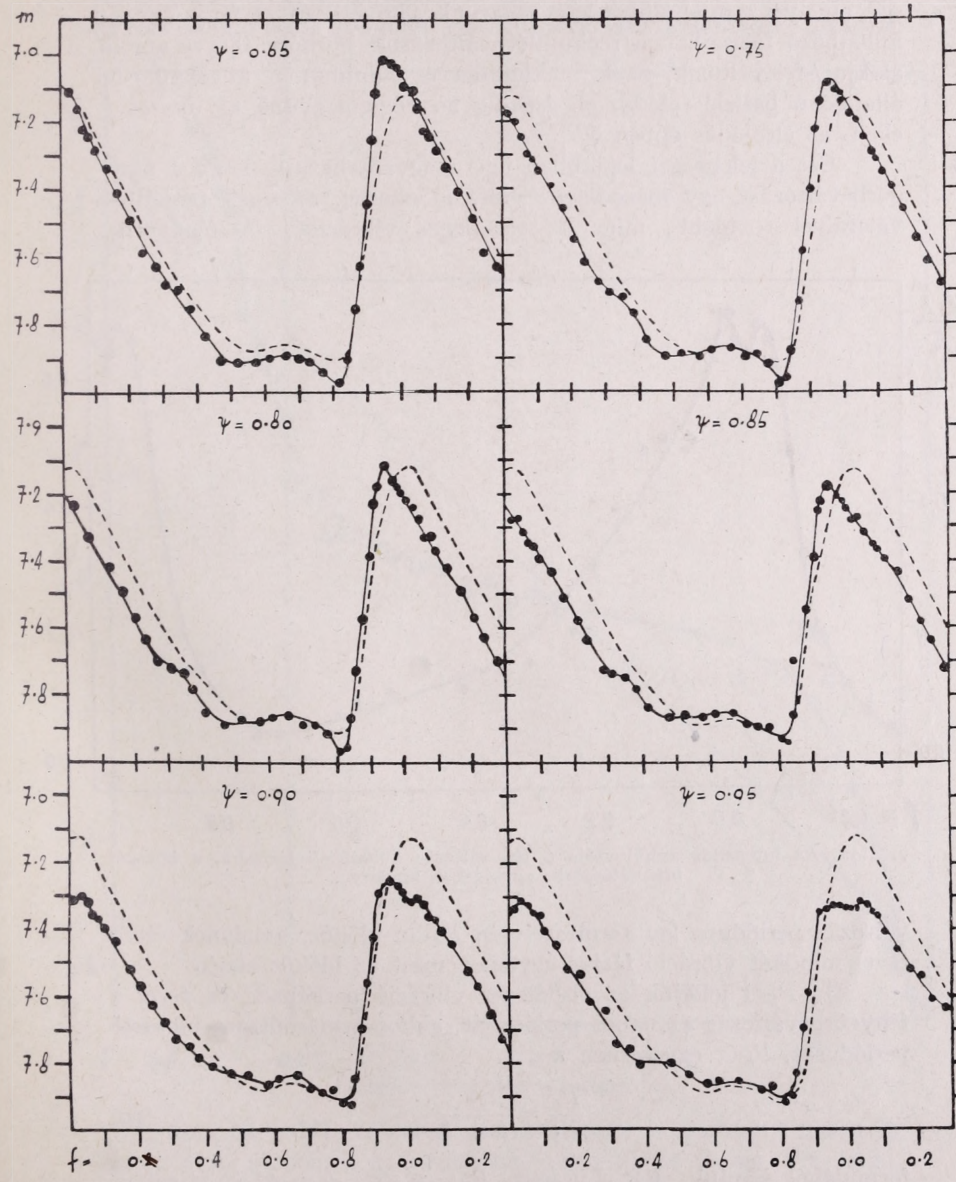


6*a*. ábra.

6. ábra (a—c). A fénygörbe változása a 41 napos periódus folyamán. A szaggatott görbe a közepes fénygörbét jelzi.


m
7·0
7·2
7·4
7·6
7·8
ψ = 0·30
ψ = 0·40
ψ = 0·45
ψ = 0·50
ψ = 0·55
ψ = 0·60
f = 0·2 0·4 0·6 0·8 0·0 0·2
0·2 0·4 0·6 0·8 0·0 0·2

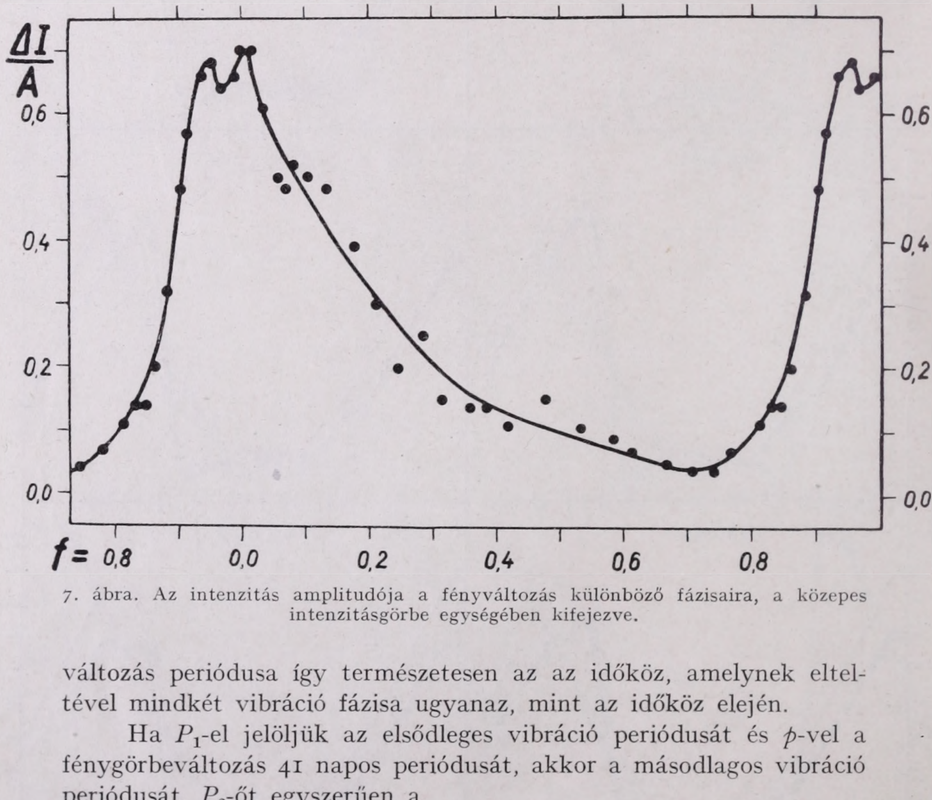
6*b*. ábra.


m
7·0
7·2
7·4
7·6
7·8
ψ = 0·65
ψ = 0·75
7·9
ψ = 0·80
ψ = 0·85
ψ = 0·90
ψ = 0·95
f = 0·2 0·4 0·6 0·8 0·0 0·2
0·2 0·4 0·6 0·8 0·0 0·2

6c. ábra.

VI. A fénygörbeváltozás és interpretációja. A legfontosabb jelenség, amelyet a 6. ábrákból leolvashatunk, a következő : A fényváltozás különböző fázisaiban a szekundér változások görbéje, illetve annak alakja f-fel változik, azok maximuma és minimuma növekvő f-fel állandóan balfelé tolódik el, éspedig ha végigmegyünk az összes f-eken, az eltolódás éppen $\psi = 1$.

Ezt a jelenséget legjobban úgy magyarázhatjuk, hogy a fénygörbeváltozást egy másodlagos vibráció okozza, melynek periódusa valamivel rövidebb, mint az elsődleges vibrációé. A fénygörbe-



7. ábra. Az intenzitás amplitudója a fényváltozás különböző fázisaira, a közepes intenzitásgörbe egységében kifejezve.

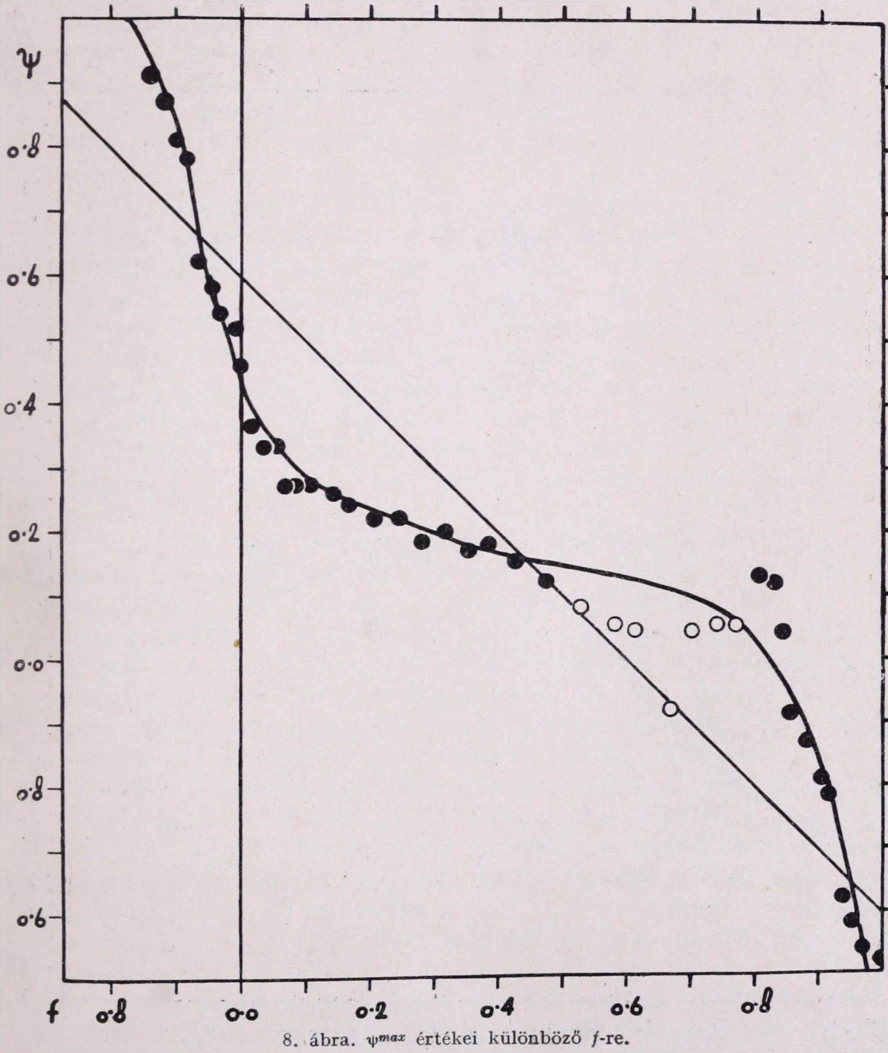
változás periódusa így természetesen az az időköz, amelynek elteltével mindkét vibráció fázisa ugyanaz, mint az időköz elején.

Ha P_1-el jelöljük az elsődleges vibráció periódusát és p-vel a fénygörbeváltozás 41 napos periódusát, akkor a másodlagos vibráció periódusát, P_2-őt egyszerűen a

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{p}{p+1} \tag{19}$$

formulából kapjuk. RR Lyrae-re $P_1 = 0^d.567$, $p = 40^d.8$, átlagban tehát $P_2 = 0^d.559$ adódik, P_2 tehát alig 11 perccel rövidebb, mint P_1.

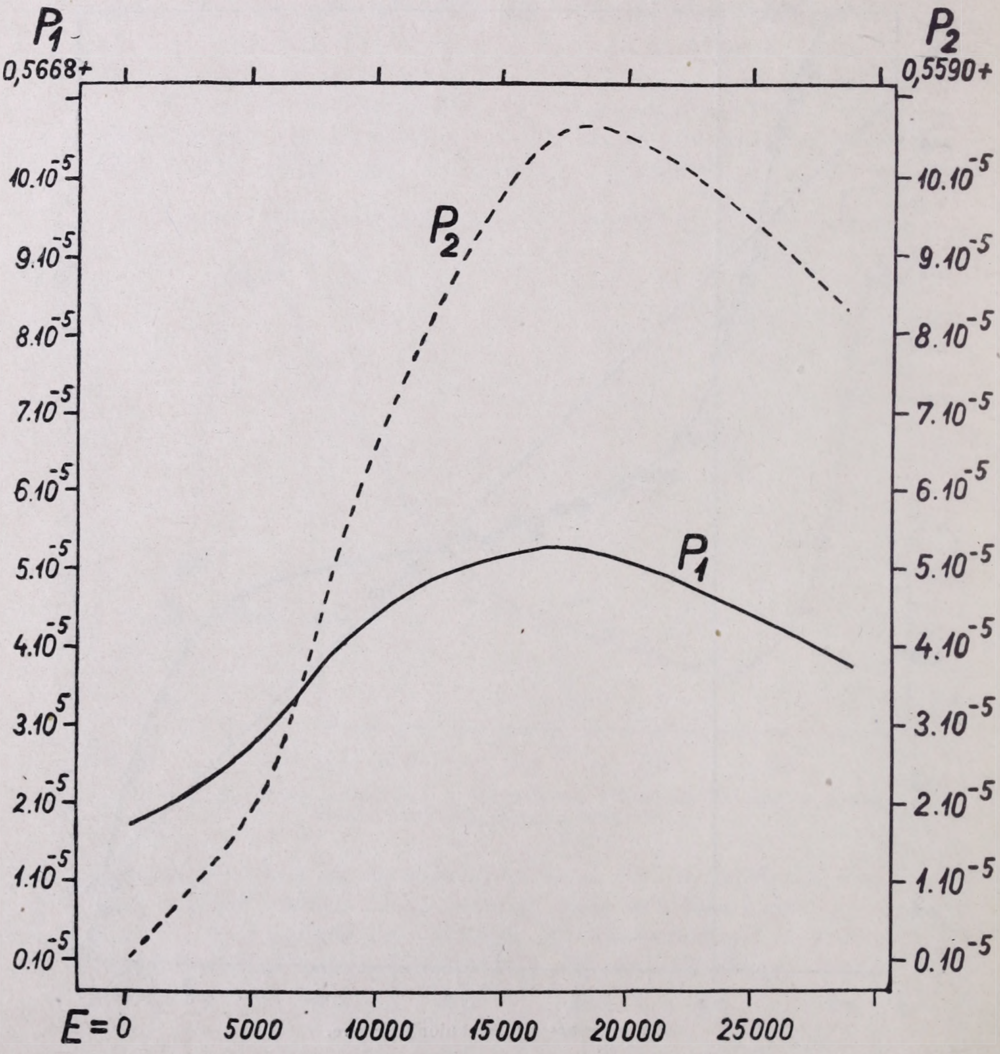
A két vibráció összetevődése igen bonyolult. Ez nem is várható másképp, mert hiszen a két vibráció nem független egymástól. Teljesen független összetevődés csak végtelen kicsiny variációknál volna lehetséges. Ekkor a másodlagos ingadozás a P_1 minden fázisában ugyanakkora volna, ezzel szemben a valóságban igen különböző, mint ezt



8. ábra. ψ^{max} értékei különböző f-re.

a 7. ábra és a III. táblázat utolsó oszlopa is mutatja. Azonfelül az 5. ábra görbéinek az eltolódása is egyenletes volna. Ha felrajzoljuk a 8. ábrában a ψ^{max}-okat, azaz ψ ama értékeit, amelyekre különböző f-re a maximális fényesség esik, akkor a két variáció egyszerű összetevődése esetén a ψ^{max} értékei egy a vízszinteshez 45°-

kal hajló egyenesen lennének. A valóságban ezen egyenes körül tetemes eltérések adódnak. Az eltérések mind az amplitudóban, mind az időben az $f = o$ fázis körül a legnagyobbak.



9. ábra. P_1 és P_2 változása.

A pulzációelmélet mai alakja nem alkalmas e jelenségek megmagyarázására. A ma ismeretes csillagmodellekre, ami a radiális pulzációkat illeti, sokkal különbözőbb periódusok adódnak, mint amilyeneket mi kaptunk RR Lyrae-re. Tehát már a periódusok értékének a megmagyarázására is igen különleges csillagmodelleket kell felvennünk. Tekintve, hogy a két periódusérték nem határozza meg egyértelműleg a csillagmodellt, reménytelennek látszik egyelőre ezek alapján következtetéseket vonni a modellre.

A megfigyelések jelenleg tehát messze előbbre vannak az elméletnél. Hiszen nemcsak a periódusnak értékeit állapítottuk meg, hanem teljes képet nyertünk a két vibráció által okozott fényváltozások összetevődéséről is.

Természetesen arról is lehet szó, hogy az egyik periódus nem radiális, hanem valamely zonális pulzációhoz tartozik. A zonális pulzációk tárgyalása igen nagy matematikai nehézségekbe ütközik, teljesen csak homogén gázgömbre sikerült eddig a megoldás. Igy az elmélettel való összehasonlítás ezirányban se lehetséges. Különben is előzőleg el kellene dönteni, hogy a P_2 periódussal történt pulzáció tényleg nem radiális. Ehhez spektrálfotometriai és radiális sebességmérések lennének szükségesek a csillagról. Az itthoni felszereléssel az előbbi is csak nagy nehézségekkel volna lehetséges, utóbbi pedig csak az amerikai nagy tükörteleszkópokkal volna keresztülvihető.

Arra is lehet gondolni, hogy a csillag tengelykörüli forgása okozza a szekundér periódus fellépését. Ha a zonális pulzációkat is tekintetbe vesszük, lehetséges, hogy gömbalakú csillagra a különbözőfajta pulzációk periódusa megegyezik, azaz a pulzációegyenlet sajátértékei többszörösek. Tengelyforgás esetén aztán a sajátértékek szétválnak, azaz különböző periódusok lépnek fel. Igy könnyen érthető volna, hogy miért olyan kicsi a két periódus különbsége, hiszen ez a különbség a tengelyforgás gyorsasága szerint akármekkora lehet. E kérdésnek elméleti tárgyalása ma még főleg azért nem időszerű, mert nem lehet eldönteni, milyen csillagmodellt vegyünk a számítás alapjául. Azután, ha nem forgó csillagokra a modellt ismernők is, nagyon nehéz volna megállapítani, hogyan változik a csillag felépítése a tengelyforgás következtében, annál is inkább, mivel a tengelyforgás a csillagnál változik a középponttól való távolsággal és a szélességgel.

Az a lehetőség, hogy RR Lyrae kettőscsillag és mindkét komponens pulzáló csillag, az egyik P_1, a másik P_2 periódussal, elesik azáltal, hogy akkor a két pulzáció egymástól független volna és így lineárisan tevődne össze, hacsak nem nagyon szoros csillagpárról van szó, amikor is a két komponens az árapályerők következtében megnyúlt és a pulzáció következtében beálló alakváltozások az árapályerőkben változásokat hoznak létre, amely ismét kihat a csillagok alakjára, ez pedig a pulzációra.

VII. P_2 változása. Mint láttuk, P_1 és p változik. Felírtuk a P_1 és p értékeit E különböző értékeire. Aztán kiszámítottuk a (19) képlet alapján P_2 értékeit is. A kapott eredményeket a 9. ábra tünteti fel.

Mint az ábrából látjuk, P_1 és P_2 párhuzamosan változik egymással, csupán az utóbbi amplitudója körülbelül háromszor nagyobb. P_2 az észlelések megindulásakor $0^d.55900$ volt, $E = 17\,500$-ig $0^d.56008$-ra emelkedett, majd $0^d.55982$-re csökkent. A változás eddigi amplitudója kb. 10 másodperc.

A legfontosabb eredmény természetesen, hogy P_1 és P_2 változása párhuzamosan történik. Nyilván a pulzáció periódusának változása a csillag belső szerkezetének a változásából ered. A belső változásoknak egy irányban kell változtatni a különböző felrezgéseket és így P_2-t is mint valamely pulzáció felrezgését foghatjuk fel. Ezzel újabb bizonyítékot nyertünk arra nézve, hogy a p periódust, mint a P_1 és P_2 periódusnak az interferenciájából származó lebegés periódusát kell felfognunk, nem pedig mint valamely valódi periódust.

Eredményeinket így foglalhatjuk össze :

1. RR Lyrae fényváltozásában két egymástól keveset különböző periódus mutatkozik.

2. A rövidebb periódussal járó fényváltozások lényegesen kisebbek, mint a hosszabb periódussal járók.

3. Mindkét periódus egymással párhuzamosan néhány másodpercen belül lassan, valószínűleg periódikusan változik, éspedig a rövidebb periódus nagyobb amplitudójú, mint a hosszabb.

Érdekes, hogy az 1. és 2. pontban foglaltak érvényesek a többi eddig észlelt olyan periódusú δ Cephei-csillagra, amelyek fénygörbéje változásokat mutat. A svábhegyi eredmények szerint áll ez az AR Herculisra, XZ és RW Draconisra, XZ Cygnire, sőt a β Canis Maioris típushoz tartozó δ Scutira is.

Kérdés, mi okozza a P_1 és P_2 változását. A fényváltozás periódusának változása olyan változócsillagoknál se ritka, amelyeknél csak egy periódus van. A periódusváltozás tulajdonságai nem különböznek a többszörös periódusú csillagokétól és így valószínűleg közös okra vezethetők vissza. Éppen RR Lyrae-vel kapcsolatban felvetették már azt a magyarázatot, hogy a P_1 változása (a P_2 változását még nem ismerték) attól van, hogy RR Lyrae kettőscsillag és a pulzáló komponens a másik komponens körüli keringése következtében hol közeledik, hol távolodik tőlünk és ezáltal a periódus hol nő, hol csökken. A változás amplitudójából a tömegekre plauzibilis értékek adódtak. E feltevés szerint P_1 változása csak látszólagos, maga a pulzáció periódusa állandó.

A mi eredményeink ezt a feltevést egyértelműleg megcáfolják.

Ha ugyanis a P_1 és P_2 ugyanazon csillagnak a periódusai, a pályamozgás következtében teljesen egyformán kellene változniok. A valóságban a P_1 és P_2 változásainak amplitudója igen különbözők. Ha pedig P_1 és P_2 két különböző, egymás körül keringő csillaghoz tartozik, akkor a pályamozgás következtében a P_1 és P_2 amplitudói különbözők lehetnek ugyan, de a változás menetének ellentétesnek kellene lenni.

A periódusváltozások tehát feltétlenül valódiak és így okuk csak a csillag fizikai állapotában beálló változások lehetnek.

Számítsuk ki a legegyszerűbb modellre, a homogén sűrűségű gázgömbre, hogy milyen változásoknak kell beállni, hogy a periódusnak az RR Lyrae-re észlelt változása álljon elő. A (10) képlet szerint az alapperiódusra, ha $\bar{\gamma}$-t időben állandónak vesszük:

$$2\frac{dT}{T} = \frac{dI}{I} - \frac{d\Omega}{\Omega} \tag{20}$$

RR Lyrae-re $\frac{dT}{T}$ maximális értéke:

$$\left(\frac{dT}{T}\right)_{max} = \frac{0{\cdot}000035}{0{\cdot}566837} \sim 0{\cdot}00007,$$

tehát

$$\frac{dI}{I} - \frac{d\Omega}{\Omega} = 0{\cdot}00014, \tag{21}$$

A gravitációs potenciál

$$\Omega = \text{const.}\, R^{-1},$$

ebből

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{dR}{R} \tag{22}$$

A tehetetlenségi nyomaték, ha $M(r)$ a csillag r sugarán belüli tömege

$$I = \int_0^R r^2\, dM(r) = \int_0^R r^2 \,.\, 4\pi\varrho r^2\, dr = 4\pi\varrho \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\varrho}{5} R^5.$$

ϱ-t a sugárral és tömeggel kifejezve

$$I = \frac{3}{5} MR^2.$$

Ebből, mivel a tömeg állandó (a sugárzás által okozott tömegváltozás ilyen kis időn belül nem jön számításba)

$$\frac{dI}{I} = 2\frac{dR}{R}. \tag{23}$$

(21), (22) és (23) képletekből RR Lyrae-re

$$\frac{3\,dR}{R} \sim 0{\cdot}00014,$$

vagyis a sugár változása

$$dR \sim 0{\cdot}00005\ R.$$

Nagyságrendileg ilyen értéket kapunk más modellre is. Tehát, ha a fényváltozás lassú periódusváltozását a csillagnak egy ilyen hosszúperiódusú pulzációja okozza, igen kis pulzáció elegendő ennek megmagyarázására.

* * *

Munkám befejeztével kötelességemnek tartom, hogy hálás köszönetet mondjak dr. Detre László igazgató úrnak, aki a probléma iránt érdeklődésemet felkeltette, lehetővé tette, hogy intézetében dolgozhassam és tanácsaival munkámban elősegített.

Svábhegyi Csillagvizsgáló Intézet, 1944. július.

NÉHÁNY ADAT A CSILLAGÁSZAT HAZAI TÖRTÉNETÉHEZ.

Irta: *Jelitai József.*

A krakkói egyetem kéziratainak latinnyelvű jegyzékében két Ilkusz szerepel: Johannes és Martinus. A fiatalabbik: Ilkusz Márton, budai plébános volt és Mátyás király asztrológusa «Martinus dr. medicine de Ilkusch, regis Vngarie astrologus.» (180.)

A nagy király az Ilkusz készítette csillagászati eszközöket küldötte ajándékba a krakkói egyetemnek: «promotus ad magisterii gradum a. 1459, postea plebanus Budensis, cuius opera Academia habet globum ex metallo aliaque instrumenta, a Mathia rege Vngariae, donata». (188.) Több kézirata maradt fenn.

Későbbi adatok felsorolása előtt legyen szabad megjegyeznem, hogy a csillagászat magyarországi történetének részletes és beható ismeretét mozdítaná elő az idevágó kéziratos anyag valamilyen rendszerbe foglalt jegyzékének összeállítása. Mintául szolgálhatna E. Zinner kitűnő munkája: Verzeichnis d. astr. Handschriften des deutschen Kulturgebietes (Beck, München, 1925). Ez 369 oldalon 12.563 adatot sorol fel 230 levéltárból. Természetesen magyar vonatkozású anyag is szerepel benne. A 239—240. oldalon 7 Pasquich-kézirat van felsorolva. Az egyik hosszúságmeghatározásra vonatkozik (München, Sternwarte, 1822). Egy Pasquich-levél a berlini állami könyvtárban volt. A babelsbergi egyetemi csillagvizsgáló őrzi Pasquich levelét Encke-hez. Gauss-hoz 8 levelet írt Pasquich. Ezek Göttingában voltak a Gauss-levelezés 108. tokjában, 1811 és 1823 közti keltezésűek. A Kästner-hez 1798-ban írt Pasquich-levél a Lessing-könyvtárban volt (Meseberg i. Brandenburg). A müncheni Deutsches Museum 1805-től keltezett 56 Pasquich-levelet őrzött. A berlini állami könyvtár Schumacher-gyüjteményében is volt egy Pasquich-levél H. C. Schumacher-hez.

F. Triesnecker (a bécsi csillagvizsgáló egykori igazgatója) 1787 és 1816 közti keltezésű 36 leveléből is kerülhet elő magyarországi vonatkozású adat. Hasonlókép X. Zach 1784 és 1829 közt kelt 40 leveléből.

A Gauss-hoz írt 8 Pasquich-levelet Göttingában lemásoltam. Az előbbiekben felsorolt többi kéziratos anyagot, sajnos, még nem volt alkalmam megismerni.

Ezzel szemben áttanulmányoztam a M. Tud. Akadémia kézirattárában lévő anyagot. Pasquich leveleit Schedius-hoz (1799, 1810). Zach 1798 és 1802 közt kelt leveleit Schedius-hoz. Ezekből a levelekből kiderül, hogy Pasquich 1799 táján súlyos belső vívódáson ment át: független polgári életet akart volna élni külföldön.

KÖNYVISMERTETÉS.

Sztrókay Kálmán: *Az ember és a csillagok.* Say Kornél rajzaival, 24 műmelléklettel és 2 csillagtérképpel. 264 oldal. Budapest, Athaeneum 1943.

Szerzőnek ezen újabb könyvéről nagyjából ugyanazt mondhatjuk mint a két évvel előbb megjelent «A kis csillagász» című könyvéről. (l. Csill. Lapok 6. évf. 79. o.). A súlyos tévedések, amelyekre annak idején rámutattunk, itt is megtalálhatók, de ezenkívül vannak újabbak is szép számmal. Igy pl. a sarkifényt és a földmágnesség viharait Sztrókay a napfoltok mágneses mezejének tulajdonítja (91 o.). Az üstököscsóvák keletkezését a Nap elektromos taszítóerejével magyarázza (191 o.) bár megemlíti, hogy «legújabban» felmerült, nem játszik-e szerepet a fény nyomása *is* a csóvaképződésben. Általában az asztrofizikával, illetve ennek fizikai elemeivel igen hadilábon áll, ami különösen «A Nap, mint csillag» és «A csillagok szine» fejezetekből tünik ki. De súlyos baklövéseket követ el olyan fejezetekben is, amelyekhez nem szükségesek fizikai alapismeretek. Igy pl. a 253. oldalon összezavarja a Napnak a Tejútrendszer központja körül való keringését a szomszédos csillagokhoz viszonyított mozgásával. Ezek után azon, hogy sok helyütt teljesen elavult elméleteket tárgyal (pl. a csillagok energiaforrásáról a 259—260. oldalon), már nem is ütközünk meg. *Detre.*

SZAKOSZTÁLYI ÜGYEK.

A Csillagászati Szakosztály mérlege

Bevétel 1943. december 31-én. *Kiadás*

	P		P
Maradvány 1942-ről ..	18.640·26	Irói és szerkesztői díjak.	1.539·90
10 Lesz. Bank részv.	980·—	Jegyzői tiszteletdíj....	200·—
30 Ker. » »	7.185·—	Kisnyomtatványok ...	56·34
2 M. Nemz. Bank »	864·—	Kezelési tiszteletdíj ...	247·20
3 Műtrágya »	900·—	Nyomtatás	1.905·14
5 Hazai Tak. »	843·75	Postaköltség	68·47
Adomány	1.100·—	Egyenleg :	
Szakosztályi díjakból befolyt 1943-ban (benne a Társulattól kapott 2.000·— P és az Államtól kapott 300·— P segély)....	5.638·64	készpénz 22.001·16 értékpap. 10.772·75	32.773·91
Értékpapírszelvény kamata.............	266·50		
1942 évi kp. maradvány kamata 1943-ban	372·81		
Összesen ..	36.790·96	Összesen ..	36.790·96

Budapest, 1943. december 31-én.

Dr. Schütz Béla s. k.
a K. M. Természettudományi
Társulat pénztárnoka.

Felelős kiadó : Dr. Gombocz Endre.
Stephaneum nyomda Budapest. Felelős : ifj. Kohl Ferenc.

Csillagászati műszerek
Refraktorok
Tükörteleszkópok
Asztrográfok
Mellékkészülékek
Kupolák
Mozgópadlók
Kilátó-távcsövek
Planetáriumok
CARL ZEISS
JENA
A VILÁG MINDEN RÉSZÉBEN
ÉS MINDENÜTT, AHOL NAGYTELJESITMÉNYŰ OPTIKAI ÉS FINOMMECHANIKAI MŰSZEREKET HASZNÁLNAK, ISMERIK ÉS NAGYRABECSÜLIK A ZEISS-NEVET, MELY VALÓSÁGGAL EGYBEFONÓDOTT A TÖKÉLETES PRECIZITÁS FOGALMÁVAL.
ZEISS
CARL ZEISS – JENA
Magyarországi vezérképviselet: RÁD MIKLÓS
Budapest, VI., Andrássy-út 52. Telefon: 116—640.

CSILLAGÁSZATI LAPOK

VIERTELJÄHRLICH ERSCHEINENDE ZEITSCHRIFT D. ASTRONOMISCHEN ABT. DES KÖN. UNG. NATURWISSENSCHAFTLICHEN VEREINS. REDIGIERT VON

L. DEZSŐ

Universitäts-Sternwarte, Kolozsvár

7. Jahrg. 1944 Nr. 2—3.

INHALT

BUDAPEST

Stephaneum Buchdruckerei — Stephaneum Press.