HUNGARICA ACTA MATHEMATICA

AUCTORITATE

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

EDIDIT

E. EGERVÁRY

VOL. I., NO. 2

BUDAPESTINI

MCMXLVII

The HUNGARICA ACTA MATHEMATICA are being published by the *Hungarian Academy of Sciences* in Budapest, edited by Prof. E. Egerváry (Budapest).

The HUNGARICA ACTA MATHEMATICA will be issued in fascicles not tied to any fixed dates; 6 fascicles will go to a volume. The HUNGARICA ACTA MATHEMATICA are obtainable through all booksellers.

Manuscripts in a form ready for printing should be sent to Prof. E. Egerváry, Műegyetem rakpart 3., Budapest, XI. Only papers not published as yet elsewhere, written in English, French or German, and dealing with subjects belonging to the field of Mathematics or to neighbouring fields will be accepted for publication.

Of their papers to be published, authors will receive galley-proofs. Subsequent alterations of text, in so far as they exceed 10% of the typesettng cost, will be charged to the author.

Authors will receive 100 reprints of their papers free of cost.

THE ADMINISTRATION OF THE ACADEMY
Budapest, V., Akadémia-utca 2.

HUNGARICA ACTA MATHEMATICA, éditées par *l'Académie Hongroise des Sciences* de Budapest, sont dirigées par E. Egerváry, professeur à l'Université de Budapest.

HUNGARICA ACTA MATHEMATICA apparaîssent périodiquement; six fascicules forment un volume. HUNGARICA ACTA MATHEMATICA sont accessibles par chaque librairie.

Les manuscrits prêts à tirer en anglais, en français ou en allemand doivent être envoyés à M. E. Egerváry, professeur à l'Université de Budapest, Budapest, XI., Műegyetem rakpart 3.,

Des oeuvres inédites du domaine de la mathématique et des sciences apparentées y seront admises.

Les auteurs reçoivent l'épreuve de leur ouvrage. Si les frais des changements ultérieurs du texte dépassent 10% des frais de composition, ils seront supportés par l'auteur.

Les auteurs reçoivent de leur ouvrage à titre gratuit 100 tirages.

L'ADMINISTRATION DE L'ACADÉMIE
Budapest, V., Akadémia-utca 2.

Die HUNGARICA ACTA MATHEMATICA werden durch die *Ungarische Akademie der Wissenschaften* in Budapest herausgegeben und von Prof. E. Egerváry (Budapest) redigiert.

Die HUNGARICA ACTA MATHEMATICA erscheinen zwangslos in Heften; 6 Hefte bilden einen Band. Die HUNGARICA ACTA MATHEMATICA sind durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Druckfertige Manuskripte sind an Prof. E. Egerváry, Budapest, XI., Műegyetem rakpart 3., zu senden. Aufgenommen werden Arbeiten in englischer, französicher oder deutscher Sprache aus dem Gebiet der Mathematik und aus den Nachbargebieten, die vorher nicht veröffentlicht wurden.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten eine Fahnenkorrektur. Nachträgliche Textänderungen werden, soweit sie 10% der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten 100 Sonderdrucke unengeltlich.

DIE GESCHÄFTSFÜHRUNG DER AKADEMIE
Budapest, V., Akadémia-utca 2.

ON THE GAP-THEOREM OF FABRY.

P. TURÁN IN BUDAPEST.

1. In what follows let us denote by $f(z)$ a function regular for $|z| < 1$, for which

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{\lambda_\nu}; \tag{1,1}$$

without loss of generality we suppose that the radius of its circle of convergence is 1.

One of the most exciting parts of the Weierstrassian theory of functions is the group of those theorems which draw conclusions from the lacunary distribution of the exponents λ_ν to the impossibility of the analitical continuation over the convergence-circle i. e. the group of the so-called gap-theorems. Two essential steps were made in this part of the theory. The first by Hadamard,[1] who showed that the gap-condition

$$\frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu} \geqq q > 1 \tag{1,2}$$

(q independent of ν) is alone sufficient for the non-continuability of $f(z)$; the second by Fabry,[2] who replaced (1,2) by the much weaker condition

$$\frac{\lambda_\nu}{\nu} \longrightarrow \infty \text{ for } \nu \longrightarrow \infty \tag{1,3}$$

It is worth-while to mention a condition intermediär between (1,2) and (1,3):

$$\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \longrightarrow \infty \text{ for } \nu \longrightarrow \infty \tag{1,4}$$

In this case (1,3) is surely satisfied, but not conversely.

[1] *J. Hadamard:* Essai sur l'étude des fonctions données par leur developpement de Taylor. Journal de Math. pures et appliquées. Ser. 4. Tom. 8. pp. 101—186.

[2] *E. Fabry:* Sur les series de Taylor qui ont une infinité de points singuliers. Acta Math. 1899. p. 65—87.

It is known for a long time (though I cannot quote any definit place) that the „real“ ground of Hadamard's theorem is the inequality

$$\max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{n}{}' a_\nu e^{i\lambda_\nu x} \right| \leqq C(q, \delta) \max_{\alpha \leqq x \leqq \alpha+\delta} \left| \sum_{\nu=1}^{n}{}' a_\nu e^{i\lambda_\nu x} \right| \tag{1,5}$$

The inequality of this character, which corresponds to the gap-condition (1,4), was discovered only in 1933 by N. Wiener.[3] He proved that if

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \geqq \Delta, \ \nu = 1, 2, \ldots (n-1), \\ \text{then} \quad &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{n}{}' a_\nu e^{i\lambda_\nu x} \right|^2 dx < C(\Delta, \delta) \int_\alpha^{\alpha+\delta} \left| \sum_{\nu=1}^{n}{}' a_\nu e^{i\lambda_\nu x} \right|^2 dx \end{aligned}\right\} \tag{1,6}$$

i. e. the inequality (1,5) is in the case of the gap-condition (1,4) *in a certain average-sense* true. The question arises naturally, which is the inequality corresponding to (1,5) and (1,6) in the case of the *general* gap-condition (1,3) of Fabry. After treating theorem (1,6) Wiener and Paley put this question explicitly in their excellent book entitled „Fourier-transforms in complex domain“.[4] The aim of this note is to give this inequality and deduce from it the general gap-theorem of Fabry on the postulated way. Our inequality states that for integer λ_ν's

$$\max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{n}{}' a_\nu e^{i\lambda_\nu x} \right| \leqq \left(\frac{48\pi}{\delta}\right)^n \max_{\alpha \leqq x \leqq \alpha+\delta} \left| \sum_{\nu=1}^{n}{}' a_\nu e^{i\lambda_\nu x} \right| \tag{1,7}$$

A proof and discussion of this inequality, which is in close connection with some investigations of Littlewood[5] and myself[6] in the analitical

[3] *N. Wiener:* A class of gap-theorems. Ann. di Pisa 1934. p. 367—372 and also his book with Paley: „Fourier-transforms in complex domain“. 1933. For a simpler proof see *A. Zygmund and J. Marcinkievic:* Proof of a gap-theorem, Duke Journal 1938. p. 469—472. I found for this inequality (1,6) some years ago during my labour-camp service a very simple proof and extensions (e. g. to a general class of orthogonal systems) which I intend to publish elsewhere.

[4] On p. 125. they write „. . . Wiener has made an attempt to use methods of this type to prove the celebrated Fabry gap-theorem. This theorem yields the cirle of convergence as a natural boundary on the lighter hypothesis not that $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$, but that $\frac{\lambda_n}{n} \to \infty$. So far he has had no success . . .“

[5] *J. E. Littlewood:* Mathematical Notes (12). An inequality for a sum of consines. Journ. of the London Math. Soc. (1937). Vol. 12 p. 217—222.

[6] To be published in the Rec. Math. Mosc.

theory of numbers, I publish elsewhere;[7] however, for the sake of completeness, I will give a proof of (1,7) prepared to the aims of this paper in 3.

2. Here I shall deduce Fabry's gap-theorem from inequality (1,7). Let

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{\lambda_\nu} \tag{2,1}$$

regular for $|z| < 1$, where

$$\frac{\lambda_\nu}{\nu} \longrightarrow \infty \tag{2,2}$$

and we suppose in contrary to Fabry's statement that $f(z)$ has a point of regularity on $|z| = 1$; we may assume this without loss of generality for $z = 1$. This means that there exist positive numbers $\eta_2 \leqq \eta_1 \leqq \frac{1}{10}$ such that $f(z)$ is regular in the closed interior of l_1, which is defined

$$\left.\begin{array}{lll} \text{for} & |\operatorname{arc} z| < \eta_1 & \text{by } |z| = 1 + \eta_2 \\ \text{for} & |\operatorname{arc} z| = \pm\eta_1 & \text{by } 1 - \eta_2 \leqq |z| \leqq 1 + \eta_2 \\ \text{for} & \eta_1 < |\operatorname{arc} z| \leqq \pi & \text{by } |z| = 1 - \eta_2 \end{array}\right\} \tag{2,3}$$

further there is an M such that on l_1 the inequality

$$|f(z)| \leqq M \tag{2,4}$$

holds. We denote futher by l_2 that curve, which is defined

$$\begin{array}{lll} \text{for} & |\operatorname{arc} z| < \frac{\eta_1}{2} & \text{by } |z| = 1 \pm \frac{\eta_2}{2} \\ \text{for} & |\operatorname{arc} z| = \pm\frac{\eta_1}{2} & \text{by } 1 - \frac{\eta_2}{2} \leqq |z| \leqq 1 + \frac{\eta_2}{2} \end{array} \tag{2,5}$$

If z_0 lies in the closed interior of l_2 and z describes the curve l_1, the quotient $\zeta = \frac{z_0}{z}$ lies surely in the closed interior of l_3, which is defined

$$\left.\begin{array}{l} \text{for } \frac{\eta_1}{2} < |\operatorname{arc} \zeta| \leqq \pi \text{ by } |\zeta| = \left(1 + \frac{\eta_2}{2}\right)(1 - \eta_2)^{-1} \\ \text{for } \operatorname{arc} \zeta = \pm\frac{\eta_1}{2} \text{ by } \left(1 + \frac{\eta_2}{2}\right)(1 - \eta_2)^{-1} \geqq |\zeta| \geqq \left(1 + \frac{\eta_2}{2}\right)(1 + \eta_2)^{-1} \\ \text{for } |\operatorname{arc} \zeta| < \frac{\eta_1}{2} \text{ by } |\zeta| = \left(1 + \frac{\eta_2}{2}\right)(1 + \eta_2)^{-1} \end{array}\right\} \tag{2,6}$$

[7] It will appear in the Journ. of. London Math. Soc.

After fixing η_1 we may obviously choose η_2 so small that l_3 should lie in a half-plane

$$R\,\zeta \leq 1 - \eta_3,\ \frac{1}{4} > \eta_3 > 0.$$

If ω denotes any positive number, we have the identity

$$\frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{1+\omega}\left[1 + \frac{\zeta+\omega}{1+\omega} + \left(\frac{\zeta+\omega}{1+\omega}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\zeta+\omega}{1+\omega}\right)^n\right] +$$
$$+ \frac{1}{1-\zeta}\left(\frac{\zeta+\omega}{1+\omega}\right)^{n+1} = P_n(\zeta) + \frac{1}{1-\zeta}\left(\frac{\zeta+\omega}{1+\omega}\right)^{n+1} = \tag{2,7}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu}\zeta^\nu + \frac{1}{1-\zeta}\left(\frac{\zeta+\omega}{1+\omega}\right)^{n+1};$$

since we may choose ω so large that for the points of l_3

$$\left|\frac{\zeta+\omega}{1+\omega}\right| < 1 - \eta_4,\quad \frac{1}{4} > \eta_4 > 0, \tag{2,8}$$

we obtain[8] from (2,7) and (2,8) that in the closed interior of l_3

$$\left|\frac{1}{1-\zeta} - P_n(\zeta)\right| < \frac{1}{\eta_4}(1-\eta_4)^{n+1} \tag{2,9}$$

or for every z_0 in the closed interior of l_2 and z on l_1

$$\left|\frac{1}{1-\frac{z_0}{z}} - P_n\left(\frac{z_0}{z}\right)\right| < \frac{1}{\eta_4}(1-\eta_4)^{n+1}. \tag{2,9}$$

From this, (2,7) and (2,4) follows, introducing the notation

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda_n\lambda_\nu}\, a_\nu z^{\lambda_\nu} = \sigma_{\lambda_n}(z) \tag{2,10}$$

that

$$|f(z_0) - \sigma_{\lambda_n}(z)| =$$
$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(l_1)} \frac{f(z)}{z\left(1-\frac{z_0}{z}\right)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{(l_1)} \frac{f(z)}{z}\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda_n\lambda_\nu}\left(\frac{z_0}{z}\right)^{\lambda_\nu}\right)dz\right| =$$

[8] For a simplification in the construction of $P_n(\zeta)$ I am obliged to my friend Dr. A. Rényi. The fact that $\frac{1}{1-\zeta}$ may be approximated with such exactitude in every domain lying in the plane cut along $(1, +\infty)$ is of course well-known; but we need only the special case of the text which can be treated by quite elementary tools.

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(l_1)} \frac{f(z)}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{z_0}{z}} - P_{\lambda_n}\left(\frac{z_0}{z}\right) \right) dz \right| < \tag{2,11}$$

$$< \frac{1}{2\pi} \left[2\pi (1 + \eta_2) + 2 (1 + \eta_2) \right] \frac{M}{1 - \eta_2} \cdot \frac{1}{\eta_4} (1 - \eta_4)^{\lambda_n} < \frac{10M}{\eta_4} (1 - \eta_4)^{\lambda_n}.$$

Now we apply the inequality (1,7) with $\delta = \eta_1$ to the polynomials

$$\sigma_{\lambda_{n+1}} (r_0 e^{ix}) - \sigma_{\lambda_n} (r_0 e^{ix}) = \sum_{\nu=1}^{n} (b_{\lambda_{n+1}\lambda_\nu} - b_{\lambda_n\lambda_\nu}) (a_\nu r_0^{\lambda_\nu}) e^{i\lambda_\nu x} +$$

$$+ b_{\lambda_{n+1}\lambda_{n+1}} (a_{n+1} r_0^{\lambda_{n+1}}) e^{i\lambda_{n+1} x},$$

where r_0 means any fixed number of the interval $\left(1 - \frac{\eta_2}{2}, 1 + \frac{\eta_2}{2}\right)$. Then we have

$$\Delta_n \equiv \max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} \left| \sigma_{\lambda_{n+1}} (r_0 e^{ix}) - \sigma_{\lambda_n} (r_0 e^{ix}) \right| \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{48\pi}{\eta_1} \right)^{n+1} \max_{-\frac{\eta_1}{2} \leqq x \leqq \frac{\eta_1}{2}} \left| \sigma_{\lambda_{n+1}} (r_0 e^{ix}) - \sigma_{\lambda_n} (r_0 e^{ix}) \right| <$$

$$< \left(\frac{48\pi}{\eta_1} \right)^{n+1} \left\{ \max_{-\frac{\eta_1}{2} \leqq x \leqq \frac{\eta_1}{2}} \left| \sigma_{\lambda_{n+1}} (r_0 e^{ix}) - f (r_0 e^{ix}) \right| + \right.$$

$$\left. + \max_{-\frac{\eta_1}{2} \leqq x \leqq \frac{\eta_1}{2}} \left| f (r_0 e^{ix}) - \sigma_{\lambda_n} (r_0 e^{ix}) \right| \right\} <$$

$$< \left(\frac{48\pi}{\eta_1} \right)^{n+1} \frac{10M}{\eta_4} \left\{ (1 - \eta_4)^{\lambda_{n+1}} + (1 - \eta_4)^{\lambda_n} \right\} <$$

$$< \frac{20M}{\eta_4} \left(\frac{48\pi}{\eta_1} \right)^{n+1} (1 - \eta_4)^{\lambda_n}$$

in consequence of (2,11). But for $n > n_0$ (η_1, η_4) according to Fabry's gap-condition (1,3) we have

$$\Delta_n \leqq \frac{960\pi}{\eta_1 \eta_4} \left\{ \left(\frac{48\pi}{\eta_1} \right)^{\frac{n}{\lambda_n}} (1 - \eta_4) \right\}^{\lambda_n} < \frac{960\pi}{\eta_1 \eta_4} \left(1 - \frac{\eta_4}{2} \right)^{\lambda_n},$$

which results that the polynomials $\sigma\lambda_n\ (z)$ converges uniformly for

$$1-\frac{\eta_2}{2}\leqq |z| \leqq 1+\frac{\eta_2}{2},\quad 0\leqq arc\ z\leqq 2\pi$$

to a limit function i. e. $f\ (z)$ may be analitically continued for $|z|\leqq 1+\frac{\eta_2}{2}$ in contradiction to the fact that the radius of the circle of convergence is 1. Q. e. d.

To deduce Hadamard's gap-theorem from the inequality (1,5) in a similar manner we do not need the approximation-theorem (2,11); it suffices to use Mittag-Leffler's approximation-theorem.

3. Finally we sketch the simple proof of inequality (1,7). We may suppose without loss of generality $\alpha = 0$: since $1 < 48\pi/\delta$, it is sufficient to prove the inequality

$$\max_{\delta\leqq x\leqq 2\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{i\lambda_\nu x}\right| \leqq \left(\frac{48\pi}{\delta}\right)^n \max_{0\leqq x\leqq \delta}\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{i\lambda_\nu x}\right|$$

i. e. for every ξ in $\left[1, \frac{2\pi}{\delta}\right]$ the inequality

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{i\lambda_\nu \delta\xi}\right| \leqq \left(\frac{48\pi}{\delta}\right)^n \max_{0\leqq x\leqq 1}\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{i\lambda_\nu \delta x}\right|. \tag{3,1}$$

Since $24\,\xi\leqq \frac{48\pi}{\delta}$, (3,1) is true a fortiori, if the inequality

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{i\lambda_\nu \delta\xi}\right| \leqq (24\,\xi)^n \cdot \max_{0\leqq x\leqq 1}\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{i\lambda_\nu \delta x}\right| \tag{3,2}$$

will be proved for $1\leqq \xi\leqq \frac{2\pi}{\delta}$. Writing (3,2) in the form

$$\max_{\xi-1\leqq x\leqq \xi}\left|\sum_{\nu=1}^{n} (\bar a_\nu e^{-i\lambda_\nu \delta\xi})\, e^{i\lambda_\nu \delta x}\right| \geqq \frac{1}{(24\,\xi)^n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} (\bar a_\nu e^{-i\lambda_\nu \delta\xi})\right|$$

and introducing the notation

$$\bar{a}_\nu e^{-i\lambda_\nu \delta\xi} = b_\nu, e^{i\frac{\delta\lambda_\nu}{n}} = z_\nu, nx = y, n\xi = m \quad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

we obtain that (3,2) is aequivalent to

$$M \equiv \max_{m-n \leqq y \leqq m} \left| \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu z_\nu^y \right| \geqq \left(\frac{n}{24\,m}\right)^n \left| \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \right| \tag{3,3}$$

for every

$$n \leqq m \leqq \frac{2\pi}{\delta} n. \tag{3,4}$$

We prove (3,3) with arbitrary b_ν's, with z_ν's, for which only

$$|z_\nu| \geqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \dots n) \tag{3,5}$$

is postulated and instead of (3,4) with

$$n \leqq m. \tag{3,6}$$

We may suppose without any restriction $n \geqq 2$; further we suppose at first m being an integer. We form the following expressions

$$g(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu^{(1)} z^\nu \tag{3,7}$$

$$\frac{1}{g(z)} = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_\nu}} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(2)} z^\nu \tag{3,8}$$

$$s_{m-n}\left(\frac{1}{g}\right) = 1 + \sum_{\nu=1}^{m-n} d_\nu^{(2)} z^\nu \tag{3,9}$$

$$G(z) = 1 - g(z)\, s_{m-n}\left(\frac{1}{g}\right). \tag{3,10}$$

$G(z)$ is obviously a polynomial of the degree m, *in which the coefficients of* $z^0, z^1, \dots z^{m-n}$ *vanish,*

$$G(z) = \sum_{\nu=m-n+1}^{m} d_\nu^{(3)} z^\nu \tag{3,11}$$

(3,10) and (3,7) give

$$G(z_1) = G(z_2) = \ldots = G(z_n) = 1$$

i. e. from (3,11)

$$\sum_{\nu=m-n+1}^{m} d_\nu^{(3)} z_j^\nu = 1,\ j = 1, 2, \ldots n.$$

Multiplying on the both sides by b_j and summing with respect to j we obtain

$$\left|\sum_{j=1}^{n} b_j\right| = \left|\sum_{m-n+1}^{m} d_\nu^{(3)} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu\right)\right| \leqq \tag{3,12}$$
$$\leqq \left(\sum \left|d_\nu^{(3)}\right|\right) \max_{m-n+1 \leqq \nu \leqq m} \left|\sum_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu\right| \leqq M' \sum_{m-n+1}^{m} \left|d_\nu^{(3)}\right|.$$

For the estimation of the $d_\nu^{(3)}$'s we observe that using (3,5)

$$\left|d_\nu^{(1)}\right| = \left|\sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_\nu \leqq n} \frac{1}{z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_n}}\right| \leqq \binom{n}{\nu}$$

for $\nu \leqq m-n$

$$\left|d_\nu^{(2)}\right| = \left|\sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_n=\nu \\ i_1 \geqq 0, i_2 \geqq 0, \ldots i_n \geqq 0}} \frac{1}{z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}}\right| \leqq \binom{\nu+n-1}{n-1} \leqq \binom{m-1}{n-1} <$$
$$< \frac{(m-1)^{n-1}}{(n-1)!} < \frac{1}{e}\left(\frac{6m}{n}\right)^{n-1};$$

from these and the representation

$$d_\nu^{(3)} = -\sum d_j^{(1)} d_{\nu-j}^{(2)}$$

it follows

$$\left|d_\nu^{(3)}\right| \leqq \frac{2}{e}\left(\frac{12m}{n}\right)^{n-1} < \left(\frac{12m}{n}\right)^{n-1}.$$

Putting this into (3,12) we obtain

$$\left|\sum_{j=1}^{n} b_j\right| \leqq M' . n \left(\frac{12\,m}{n}\right)^{n-1} \leqq M' \left(\frac{24\,m}{n}\right)^{n-1} < M\left(\frac{24\,m}{n}\right)^{n}, \tag{3,13}$$

which proves our supposed inequality (3,3) for m integer.

If m is non-integer, we apply (3,13) with $[m]$ instead of m. Thus we obtain

$$M \geqq \max_{m-n \leqq \nu \leqq m} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu} \right| \geqq \max_{[m]-n+1 \leqq \nu \leqq [m]} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu} \right| = M' >$$

$$> \left(\frac{n}{24\,[m]} \right)^n \left| \sum_{j=1}^{n} b_j \right| \geqq \left(\frac{n}{24\,m} \right)^n \left| \sum_{j=1}^{n} b_j \right|,$$

which proves our assertion (3,3) in its full generality.

The above method has further interesting applications in the theory of quasianalytic functions and of the roots of the quasiperiodical polinomials. These I intend to publish elsewhere.

ON THE MINIMAL NUMBER OF TERMS OF THE SQUARE OF A POLYNOMIAL.

BY A. RÉNYI IN BUDAPEST

L. Rédei proposed the following problem: Let the number of terms of a polynomial be given. Find the minimal number of terms of its square.

Let us denote the minimal number of terms of the square of a polynomial containing n terms, by $Q(n)$, and let us have

$$q(n) = \frac{Q(n)}{n}$$

In May, 1945 L. Kalmár, L. Rédei and the author discussed this problem and found the following result:

$$\liminf_{n \to \infty} q(n) = 0 \tag{1}$$

Starting from this result I found recently the following stronger theorem:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{q(1) + q(2) + \ldots + q(n)}{n} = 0 \tag{2}$$

In what follows this theorem shall be proved.

I would at this occasion express my thanks to L. Kalmár and L. Rédei for having kindly agreed to my publishing and using in this paper the results of our joint work.

It may be mentioned, that the problem is far from being exhausted. It seems likely, that

$$\lim_{n \to \infty} q(n) = 0$$

holds also, but the proof of this conjecture would require further refinements of our method. Corresponding problems arise in connection with the 3th, 4th etc. powers of polynomials. We hope to return to these problems at an other occasion.

We begin by proving a number of Lemmas.

Lemma A. $q\,(n \cdot m) \leq q\,(n) \cdot q\,(m)$

Proof: If $R_n\,(x)$ and $R_m\,(x)$ are the polynomials of n resp. m terms, for which the minimal numbers $Q\,(n)$ resp. $Q\,(m)$ of the terms of the squares, are reached, and if the degree of $R_n\,(x)$ is k_n, the polynomial

$$R_n\,(x) \cdot R_m\,(x^{k_n+1})$$

consists of $n \cdot m$ terms and its square consists of at most $Q\,(n) \cdot Q\,(m)$ terms, which proves Lemma. A.

Lemma B. $q\,(n) \leq 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}\,; \qquad n \geq 2.$

Proof: Let us have

$$\sqrt{1 + 2x} = 1 + x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{3}$$

The sum of the first n terms of this expansion shall be denoted by $S_n\,(x) \cdot S_n\,(x)$ is a polynomial of degree $n - 1$, and we have[1]

$$\sqrt{1 + 2x} = S_n\,(x) + x^n\, r\,(x)\,. \tag{4}$$

By squaring both sides of (4) we obtain

$$S_n^2\,(x) = 1 + 2x - x^n\,[2\,S_n\,(x)\,r\,(x) + x^n\, r^2\,(x)] \tag{5}$$

It can be seen from (5) that $S_n^2\,(x)$ does not contain the terms with exponents $2, 3, \ldots n - 1$. Thus $S_n^2\,(x)$ contains only $n + 1$ terms, viz. the terms with exponents $0, 1, n, n + 1, \ldots 2\,n - 2$, which proves Lemma B.

Lemma C. $q\,(2n + 1) \leq 1.$

We start again from the expansion of $\sqrt{1 + 2x}$. If $\lambda = \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}}$ (a_{n-1} and a_{n+1} have evidently the same sign) we have in

$$\sqrt{1 + 2\lambda x} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n + \\ + b_{n+1} x^{n+1} + \ldots \tag{6}$$

[1] These polynomials were used by Legendre for solving the congruence $x^2 \equiv 8r + 1 \bmod. 2^m$. See e. g. I. V. Uspensky & M. A. Heaslet Elementary Number The ry Newyork, 1939. p. 311.

$$b_{n-1} = b_{n+1} \tag{7}$$

Let us construct the following symmetrical polynomial containing $2n+1$ terms:

$$P_{2n+1}(x) = 1 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + b_n x^n + b_{n-1}x^{n+1} + \ldots + \\ + b_1 x^{2n-1} + x^{2n}. \tag{8}$$

Owing to (7) the first $n+2$ terms of $P_{2n+1}(x)$ are identical with the terms of $S_{n+2}(\lambda x)$. But, as it has been shown in the course of the proof of Lemma B, $S^2_{n+1}(\lambda x)$ does not contain the terms with exponents $2, 3, \ldots n+1$, and therefore these terms cannot occur in $P^2_{2n+1}(x)$ either. $P_{2n+1}(x)$ being symmetrical, the terms with exponents $4n-2$, $4n-3$, $4n-4, \ldots 3n-1$ do not occur in $P^2_{2n+1}(x)$ either. Thus $P^2_{2n+1}(x)$ contains only the terms $0, 1, n+2, n+3, \ldots 3n-2, 4n-1, 4n$; i. e. it contains $2n+1$ terms, which proves Lemma C.

Lemma D. $\qquad q(4n+1) \leqq \frac{28}{29}; \qquad n \geqq 7.$

Let $P_5(x)$ and $S_n(x)$ have the meanings as defined above. Let us consider the polynomial

$$A_{4n+1}(x) = P_5(x) \,.\, S_n(x^4)$$

By carrying out the multiplication all terms with exponents from 0 to $4n$ occur. Simple calculation shows that all coefficients are different from 0, i. e. $A_{4n+1}(x)$ consists exactly of $4n+1$ terms. $P^2_5(x)$ contains the five terms with exponents $0, 1, 4, 7, 8$. $S^2_n(x^4)$ contains the $n+1$ terms with exponents $4k$; $k = 0, 1, n, n+1, \ldots 2n-2$. It follows that $A^2_{4n+1}(x)$ contains the terms with the exponents $0, 1, 4, 5, 7, 8, 11, 12$, further terms with exponents from $4n$ to $8n$, excepting the terms with exponents $4n+3$, $8n-3$, and excepting those with exponents $4+4k+2$; $k = 0, 1, \ldots n-1$. Thus $A^2_{4n+1}(x)$ consists of

$$8 + 4n + 1 - n - 2 = 3n + 7 \qquad \text{terms.}$$

It follows

$$q(4n+1) \leqq \frac{3n+7}{4n+1} \leqq \frac{28}{29} \qquad \text{if } n \geqq 7.$$

Thus Lemma D has been proved.[2]

[2] At first the problem was formulated by *L. Rédei* as follows: Find a polynomial the square of which has a less number of terms than the polynomial itself. $A_{29}(x)$ is, in fact, a polynomial of this kind.

Lemma E. $$q(n) \leqq C \cdot \varrho^{V(n)}$$

where $V(n)$ denotes the number of different prime divisors of n. C is an absolute constant, ϱ an absolute constant with $0 < \varrho < 1$.

Proof: Let us consider a number n with $V(n) = r$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

First we single out the different prime factors of n: $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_u$ which are of the form $4k + 1$; $k \geqq 7$. The prime factors of n having the form $4k + 3$; $k \geqq 2$, can be coupled in pairs:

$$(\tau_1, \tau_2), (\tau_3 \tau_4), \ldots (\tau_{2\nu-1}, \tau_{2\nu}),$$

leaving aside the last one if their number is odd. Each product $\tau_{2n'-1}\, \tau_{2n'}$ is of the form $4k + 1$; $k \geqq 7$. We have according to Lemma D

$$q(\pi_j) \leqq \frac{28}{29}; \quad j = 1, 2, \ldots u; \quad q(\tau_{2i-1}\, \tau_{2i}) \leqq \frac{28}{29}; \quad i = 1, 2, \ldots \nu.$$

We have further

$$u + 2\nu \geqq r - 6 \tag{9}$$

because only the primes $2, 3, 5, 13, 17$, and if necessary one more prime of the form $4k + 3$ have been left aside. It follows from (9) a fortiori

$$u + \nu \geqq \frac{r - 6}{2} = \frac{V(n)}{2} - 3. \tag{10}$$

The product of all factors which have not been selected shall be denoted by m. We have

$$u = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_u \cdot (\tau_1 \tau_2)(\tau_3 \tau_4) \ldots (\tau_{2\nu-1} \tau_{2\nu}) \cdot m. \tag{11}$$

According to Lemma A., and with respect to (10) it follows

$$q(n) \leqq \left(\frac{28}{29}\right)^{u+\nu} \cdot q(m) \leqq \frac{3}{2}\left(\frac{28}{29}\right)^{\frac{V(n)}{2} - 3} = \frac{3}{2}\left(\frac{29}{28}\right)^3 \left(\sqrt{\frac{28}{29}}\right)^{V(n)}. \tag{12}$$

Thus Lemma E has been proved with

$$C = \frac{3}{2}\left(\frac{29}{28}\right)^3; \varrho = \sqrt{\frac{28}{29}} < 1.$$

Now we turn to the proof of the *Theorem:*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{q(1)+q(2)+q(3)+\ldots+q(N)}{N}=0.$$

Proof: According to a theorem of Hardy and Ramanujan,[3] the number of integers n not exceeding N, for which

$$V(n)<\frac{1}{2}\log\log N$$

holds, is $o(N)$.

If $V(n)\geqq\frac{\log\log N}{2}$, applying Lemma E, we have

$$q(n)\leqq C\cdot\varrho^{\frac{\log\log N}{2}}; \tag{13}$$

if $V(n)<\frac{\log\log N}{2}$ we obtain by use of Lemma B

$$q(n)\leqq\frac{3}{2}. \tag{14}$$

It follows, from the theorem of Hardy and Ramanujan, that

$$\frac{q(1)+q(2)+\ldots+q(N)}{N}\leqq\frac{3}{2}\frac{o(N)}{N}+C\cdot\varrho^{\frac{\log\log N}{2}}. \tag{15}$$

Thus we have

$$\lim_{N\to\infty}\frac{q(1)+q(2)+\ldots+q(N)}{N}=0$$

and our Theorem is therewith proved.

It may be mentioned that we used only polynomials with real coefficients. It is an open question, whether it would be possible to obtain better results by using polynomials with complex coefficients.

[3] Quart. Journal of Math. 48, 1920. p. 77. An elementary proof has been given by *P. Turán*, Journal of the London Math. Soc. 9. Part 4, p. 274—276. The theorem is much sharper in its original form, but we do not need more.

ÜBER DIE LÖSUNG DIFFERENTIALGEOMETRISCHER FRAGEN IN DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE UNTER GLEICHZEITIGER VERWENDUNG HOMOGENER UND INHOMOGENER KOORDINATEN.

VON O. VARGA IN DEBRECEN.

Bei der Behandlung differentialgeometrischer Probleme beschränkt man sich häufig auf die unmittelbare Umgebung eines Punktes und untersucht dementsprechend nur das infinitesimale Verhalten gewisser Grössen. In der euklidischen Geometrie kommt zu diesem „Nahewirkungsprinzip" oft auch das „Fernwirkungsprinzip" hinzu, das hier im wesentlichen darin besteht, dass man an gewissen Elementargebilden wie Simplexe, Kugeln usw. Grenzübergänge ausübt. So kann man ja z. B. die Krümmung einer ebenen Kurve im wesentlichen durch Grenzübergang aus einem Sehnendreieck erhalten. Seit den Untersuchungen von K. Menger über metrische Räume hat dieses Fernwirkungsprinzip noch mehr an Bedeutung gewonnen. Will man sich in einer nichteuklidischen Geometrie des Fernwirkungsprinzips bedienen, so hat man mit gewissen Elementargebilden zu operieren, diese lassen sich am einfachsten durch homogene (projektive) Koordinaten darstellen. Die durch Grenzübergang zu gewinnenden Differentialausdrücke werden aber bekanntlich nur dann Differentialinvarianten, wenn sie durch invariante Differentiation gewonnen werden. Da der invariante Differentiationsprozess nur auf inhomogene Grössen angewandt werden kann, erweist es sich als zweckmässig, gleichzeitig homogene und inhomogene Koordinaten zu verwenden.

Wird die nichteuklidische Mannigfaltigkeit durch ein euklidisches Modell (Fläche konstanter Krümmung) dargestellt, so stellt sich heraus, dass der Zusammenhang zwischen den Ableitungen der homogenen und inhomogenen Koordinaten durch die Gauss-schen Ableitungsgleichungen dieser Fläche geliefert wird.

Dieses Prinzip soll hier in der elliptischen Geometrie an zwei Fragestellungen der Kurventheorie angewandt werden. Das erste Problem besteht darin, die $n-1$ Krümmungen einer Kurve durch Grenzübergang aus den der Kurve einbeschriebenen Simplexen zu gewinnen. Dadurch wird die Krümmung im Mengerschen Sinne auf Grenzwerte von Abständen von Punktpaaren zurückgeführt. Das zweite Problem besteht in der Ermittlung der Zusammenhänge, die zwischen den Krümmungen und den Schmiegkugelradien dieser Kurve besteht. Diese beiden Fragen wurden für den Fall des euklidischen Raumes von Herrn E. Egerváry gelöst.[1] Die von uns gegebenen Ergebnisse bestehen auch für den Fall der hyperbolischen (Bolyai-Lobatschefskischen) Geometrie falls man den Radius R der Kugel die als Modell dient, mit $\sqrt{-1}$ multipliziert und die trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische Funktionen ersetzt.

Wir behandeln in § 1 den Zusammenhang zwischen den gewöhnlichen Ableitungen der homogenen und den invarianten Ableitungen der inhomogenen Koordinaten; in § 2 die Darstellung der Krümmungen einer Kurve als Grenzwert des Quotienten von Simplexrauminhalten; in § 3 die Zusammenhänge zwischen den Schmiegkugelradien und den Krümmungen einer Kurve.

§. 1. ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN GEWÖHNLICHEN ABLEITUNGEN DER HOMOGENEN UND DEN INVARIANTEN ABLEITUNGEN DER INHOMOGENEN KOORDINATEN IM ELLIPTISCHEN RAUM.[2]

Ein Punkt $\boldsymbol{x}$ des n-dimensionalen elliptischen Raumes sei durch $n+1$ homogene Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ gegeben, die der

$$\boldsymbol{x}^2 \equiv \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = R^2 \tag{1,1}$$

Normierungsbedingung unterworfen sind. Denselben Punkt können wir auch durch die n inhomogenen Koordinaten $y^1, \ldots, y^n$ darstellen. In der bekannten Deutung der elliptischen Geometrie auf einer Halbkugel besagt dies, dass wir im $n+1$ dimensionalen euklidischen Raum von der durch (1,1) gegebenen n-dimensionalen Kugel etwa die Punkte mit $x_{n+1} \geqq 0$ betrachten. Die $y^1, \ldots y^n$ sind dann die Parameter für eine Darstellung des Flächenstückes und können auch durch die bekannte

[1] *E. Egerváry:* „Über die Kurven des n-dimensionalen euklidischen Raumes". Mathemathischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Akademie der Wissensch. Bd. LIX (1940), S. 787—97. — Über die Schmiegungskugeln der Kurven des n-dimensionalen euklidischen Raumes. Ebda. LIX (1940), S. 775—86. Im Folgenden kurz als *Egerváry* I und II zitiert.

[2] Grössen, die als Vektoren im n + 1-dimensionalen euklidischen Raum gedeutet werden können, sollen durch entsprechende vektorielle Schreibweise gekennzeichnet werden.

Projektion vom Kugelmittelpunkt auf die Tangentialebene im Südpol der Kugel gedeutet werden. Es ist somit

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\,(y^1, \ldots, y^n). \tag{1,2}$$

Die Gauss-schen Ableitungsgleichungen sind dann in unserem Spezialfall

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial y^\alpha\, \partial y^\beta} = \Gamma^\varrho_{\alpha\beta} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y^\varrho} - \frac{g_{\alpha\beta}}{R^2} \tag{1,3}$$

Die $\Gamma^\varrho_{\alpha\beta}$ sind dabei die in Bezug auf

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y^\beta} \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial x_i'}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{\partial x_i'}{\partial y^\beta} \tag{1,4}$$

gebildeten Christoffelschen Symbole zweiter Art. Wir betrachten nun eine Kurve

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\Big(y^1(s), \ldots, y^n(s)\Big) \equiv \boldsymbol{x}\,(s) \tag{1,5}$$

die auf die Bogenlänge als Parameter bezogen sei. Die Funktionen in (1,5) seien k-mal stetig differentiierbar. Mit Hilfe von (1,3) können wir die Ableitungen von **x** entlang der Kurve (1,5) mit den invarianten Ableitungen der y^α nach s in Zusammenhang bringen. Aus der Definition der invarianten Ableitung folgt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{Dy^\alpha}{ds}, \\
\boldsymbol{x}'' &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{D^2 y^\alpha}{ds^2} - \frac{1}{R^2}\boldsymbol{x}, \\
\boldsymbol{x}''' &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{D^3 y^\alpha}{ds^3} - \frac{1}{R^2}\boldsymbol{x}'.
\end{aligned} \tag{1,6}$$

Aus (1,6) folgt weiter, durch vollständige Induktion

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y^\alpha} \frac{D^k y^\alpha}{ds^k} + c_0 \boldsymbol{x} + c_1 \boldsymbol{x}' + \ldots + c_{k-2}\boldsymbol{x}^{(k-2)}. \tag{1,6}$$

Im Folgenden werden häufig Produkte von Matrizen auftreten, deren Kolonnen aus den **x** und deren Ableitungen gebildet sind. Ist

$$(x, x', \ldots, x^{(k)})$$

eine solche Matrix, dann besteht zufolge (1,6) folgende Aequivalenz

$$(x, x', \ldots, x^{(k)}) \sim \left(x, \frac{\partial x}{\partial y} \frac{Dy^\alpha}{ds}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial y^\alpha} \frac{D^{(k)}y^\alpha}{ds^k}\right), \tag{1,7}$$

die natürlich im Sinne der Matrixtheorie aufzufassen ist. Aus (1,1) folgt, dass die Determinanten aus den Quadraten der äquivalenten Matrizen (1,7) gleich sind:

$$D_k = |(x, x', \ldots, x^{(k)})^2| = R^2 \left| \left(\frac{Dy^\alpha}{ds}, \ldots, \frac{D^{(k)}y^\alpha}{ds^k}\right) \left(\frac{Dy_\alpha}{ds}, \ldots, \frac{D^{(k)}y_\alpha}{ds^k}\right) \right|. \tag{1,8}$$

Auf der rechten Seite von (1,8) haben wir die Indices mit Hilfe der $g_{\alpha s}$ „heruntergezogen". Es ist also z. B.

$$\frac{Dy_\alpha}{ds} = g_{\alpha\beta} \frac{Dy^\beta}{ds}.$$

Allgemeiner als in (1,8) sind Determinantenprodukte aus den Produkten äquivalenter Matrizen gleich.

§. 2. DIE DARSTELLUNG DFR KRÜMMUNGEN EINER KURVE ALS GRENZWERT DES QUOTIENTEN VON SIMPLEXRAUMINHALTEN.

Um den geometrischen Sinn der analytischen Voraussetzungen, die wir über die, die Kurve (1,8) darstellenden Funktionen machen werden, klarzustellen, sei an folgende Tatsachen aus der nichteuklidischen Geometrie erinnert.

Der Inhalt S eines durch k Punkte bestimmten Simplex $x_1, x_2, \ldots x_k$ ist durch

$$S = \frac{1}{R(k-1)!} \sqrt{|(x_1, x_2, \ldots, x_k)^2|} \tag{2,1}$$

definiert,[3] wobei die Wurzel positiv zu ziehen ist. Ist S^2 Null, dann liegen

[3] Wir ziehen es vor statt des in älteren Darstellungen gebrauchten Sinus eines Simplex von dem Inhalt des Simplex zu sprechen. In der Tat gewinnt man durch einen einfachen Grenzübergang die übliche Integraldarstellung des Rauminhaltes. Der Sinus eines Simplex wird dabei in den älteren Darstellungen durch $(R(k-1)!S)$: $\sqrt{x_1^2} \cdots \sqrt{x_k^2}$ definiert. Siehe etwa B. Segre: Encykl. d. Math. Wissensch. III. S. 861.

die k Punkte in einer niedereren als $k-1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit und die x_i sind linear abhängig. Dazu, dass S nicht verschwindet ist notwendig und hinreichend, dass die x_i linear unabhängig sind.

Wir machen nun über die Funktionen in (1,5) die Voraussetzung, dass die Determinante aus den n-mal stetig differentiierbaren Funktionen $x\ (s)$

$$D_n = |(x, x', \ldots, x^{(n)})^2| \neq 0 \tag{2,2'}$$

sei, was nach (1,8) gleichbedeutend mit

$$G_n \equiv \left| \left(\frac{Dy^\alpha}{ds}, \frac{D^2y^\alpha}{ds^2}, \ldots, \frac{D^ny^\alpha}{ds^n} \right) \left(\frac{Dy_\alpha}{ds}, \ldots, \frac{D^ny_\alpha}{ds^n} \right) \right| \neq 0 \tag{2,2}$$

ist. Aus (2,2) und (1,2) folgt, dass auch

$$D_k = |(x, x', \ldots, x^{(k)})^2| \neq 0$$

$$G_k = \left| \left(\frac{Dy^\alpha}{ds}, \frac{D^2y^\alpha}{ds^2}, \ldots, \frac{D^{(k)}y^\alpha}{ds^k} \right) \left(\frac{Dy_\alpha}{ds}, \ldots, \frac{D^{(k)}y_\alpha}{ds^k} \right) \right| \neq 0 \tag{2,3}$$

ist. Das Verschwinden irgend eines D_k bezw. G_k würde die lineare Abhängigkeit von schon weniger als $n-1$ $x^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, n)$ bezw. weniger als n unter den $\frac{D^ky^\alpha}{ds^k}$ nach sich ziehen. (2,2) besagt, dass die $\frac{D^ky^\alpha}{ds^k}$ sämtlich linear unabhängig sind, und verbürgt die Existenz von Schmiegräumen bis zur $n-1$-ten Dimension. (2,2) bedeuten in dem $n+1$-dimensionalen euklidischen Raum die lineare Unabhängigkeit der x^i $(i = 0, \ldots n)$ und die Existenz von euklidischen Schmiegräumen bis zur n-ten Dimension.[4]

Herr E. Egerváry hat für den Fall des euklidischen Raumes gezeigt, dass sich die k-te Krümmung einer Raumkurve als das Verhältnis des Kontingenzwinkels des k-dimensionalen Schmiegraumes zum Bogenelement definieren lässt.[5] Wir Wollen nachweisen, dass diese Definition

[4] Ein k-dimensionaler Schmiegraum des n-1-dimensionalen euklidischen Raumes ergibt sich aus $|(X, x(s_1), x(s_2), \ldots, x(s_{k+1}))^2| = 0$ durch den Grenzübergang $s_i \to s_0$ in der Gestalt

(a) $$|(X, x(s_0), \ldots x^{(k)}(s_0))^2| = 0.$$

Nach (1, 8) zieht dies

(b) $$\left|\left(X, x, \frac{\partial x}{\partial y^\alpha}\frac{Dy^\alpha}{ds}, \frac{\partial x}{\partial y^\alpha}\frac{D^2y^\alpha}{ds^2} \ldots \frac{\partial x}{\partial y^\alpha}\frac{D^ky^\alpha}{ds^\alpha}\right)^2\right| = 0$$

nach sich. (b) ist die Gleichung des k-dimensionalen nichteuklidischen Schmieg raumes. Genaueres über die Ausführung des Grenzüberganges im folgenden §.

[5] *S. Egerváry*, 1, a. a. O.

der Krümmung bei sinngemässer Deutung des Kontingenzwinkels nicht nur für die nichteuklidische Geometrie, sondern auch in einem beliebigen Riemannschen Raum zu Grössen führt, die mit den von W. Blaschke auf formalem Wege eingeführten Krümmungen übereinstimmen.[6] Nach W. Blaschke sind die Krümmungen durch das Koefizientenschema der Frenetschen Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{D\mathfrak{t}_1}{ds} &= \frac{1}{\varrho_1}\,\mathfrak{t}_2 \\ \frac{D\mathfrak{t}_k}{ds} &= -\frac{1}{\varrho_{k-1}}\,\mathfrak{t}_{k-1} + \frac{1}{\varrho_k}\,\mathfrak{t}_{k+1} \qquad (k = 2,\ldots,n-1) \\ \frac{D\mathfrak{t}_n}{ds} &= -\frac{1}{\varrho_{n-1}}\,\mathfrak{t}_{n-1} \end{aligned} \tag{2,4}$$

bestimmt. Die $\mathfrak{t}_i$ bilden ein orthogonales und normiertes n-Bein von Vektoren, das durch den Prozess der Orthogonalisierung und Normierung aus den $\frac{D^k y^\alpha}{ds^k}$ hergeleitet ist. Für die ϱ_k gilt

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{\sqrt{G_{k+1}\,G_{k-1}}}{G_k}, \tag{2,5}$$

wobei gesetzt wurde

$$G_k = \left|\left(\frac{Dy^\alpha}{ds}, \frac{D^2y^\alpha}{ds^2}, \ldots, \frac{D^k y^\alpha}{ds^k}\right)\left(\frac{Dy_\alpha}{ds}, \ldots, \frac{D^k y_\alpha}{ds^k}\right)\right|. \tag{2,6}$$

Um den Kontingenzwinkel k-dimensionaler Schmiegräume definieren zu können, verfahren wir folgendermassen. Längs der Kurve sei ein Feld von parallelen k-Beinen gegeben. Wir können dasselbe dadurch erhalten, dass wir in einem beliebigen Punkt s der Kurve ein k-Bein annehmen und dieses dann längs der Kurve — im Sinne der Riemannschen Geometrie — parallel verschieben. Der so definierte Winkel ϑ ist eine Funktion von s und unsere Behauptung besagt

$$\frac{1}{\varrho_k} = \left|\frac{d\vartheta}{ds}\right|. \tag{2,7}$$

[6] *W. Blaschke*, „Frenets Formeln für den Raum von Riemann. Math. Zeitschr. 6, (1920). S. 94—99.

Zum Beweis erinnern wir zunächst an die Definition des Winkels, den zwei lineare Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension bilden, wenn sie einen gemeinsamen Punkt besitzen. Die von dem gemeinsamen Punkt ausgehenden Vektorgebilde, die die Mannigfaltigkeiten aufspannen, können wir gleich als orthogonal und normiert annehmen. Wird dann die eine Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots \mathfrak{v}_k$, die andere von $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots \mathfrak{r}_k$ aufgespannt, so gilt für den von ihnen gebildeten Winkel φ[7]

$$\cos\varphi = |(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_k)(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_k)|. \tag{2,8}$$

Das den k-dimensionalen Schmiegraum bestimmende n-Bein ist natürlich durch die Vektoren $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots \mathfrak{t}_k$ bestimmt; das andere wollen wir zweckentsprechend wählen. Sei s_0 ein beliebiger, aber fest gewählter Punkt unserer Kurve, dann betrachten wir dort das n-Bein $\mathfrak{t}_1(s_0), \ldots, \mathfrak{t}_{k-1}(s_0), \mathfrak{t}_{k+1}(s_0)$. Dieses n-Bein Feld verschieben wir nun — wie oben erwähnt, im Sinne der Riemannschen Geometrie — parallel längs der Kurve, und erhalten so längs dieser ein normiertes und orthogonales n-Bein-Feld.[8] Wir bezeichnen die Feldvektoren mit $\mathfrak{v}_1(s), \mathfrak{v}_2(s), \ldots, \mathfrak{v}_k(s)$. Der Winkel der k-dimensionalen Räume in dem beliebigen Punkt s ist dann durch

$$\cos\vartheta = |(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_k)(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_k)| \tag{2,8'}$$

bestimmt. Wir bilden nun die invariante Ableitung von (2,8') und beachten, dass diese für einen Skalar mit der gewöhnlichen Ableitung übereinstimmt, dann wird, weil die $\mathfrak{v}_i$ parallel verschobene Vektoren sind, für die die invariante Ableitung den Nullvektor liefert, bei Berücksichtigung von (2,4)

$$-\sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho_k} |(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{k-1}, \mathfrak{t}_{k+1})(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_k)|. \tag{2,9}$$

Im Punkte s_0 erhält man wegen der Wahl der $\mathfrak{v}_i$

$$\left|\frac{d\vartheta}{ds}\right| = \frac{1}{\varrho_k} \tag{2,10}$$

w. z. b. w.

[7] Zu dem Ausdruck (2,8) der Winkeldefinition gelangt man auf Grund folgender Festsetzung: die $\mathfrak{v}_i$ bezw. $\mathfrak{r}_i$ bestimmen bezw. die Simplexe S_1 und S_2. Projiziert man S_1 auf die den S_2 enthaltende lineare Mannigfaltigkeit, dann wird unter $\bar{S}_1$ diese Projektion und $V(S)$ der Simplexinhalt verstanden

$$\cos\varphi = V(\bar{S}_1) : V(S_1).$$

Vgl. B. Segre: Encykl. d. math. Wissensch. III., insbes. S. 801. Hieraus ergibt sich unmittelbar die Gleichung (2,8).

[8] Aus der bekannten Tatsache, dass die Parallelverschiebung auch im Riemannschen Raume metrisch ist, d. h. die Länge und den Winkel von Vektoren ungeändert lässt, folgt, dass das n-Bein-Feld normiert und orthogonalisiert ist.

Es soll nun gezeigt werden, wie die Krümmungen unserer Kurve durch Grenzwertbildung aus dem Quotienten der Inhalte gewisser Sehnensimplexe erhalten werden können. Zu r verschiedenen Werten $s_1, s_2, \ldots s_r$ von s mögen die Punkte $\boldsymbol{x}(s_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ der Kurve gehören. Wir wollen nun den Grenzwert aus dem Quotienten des Simplexinhaltes und dem Produkte sämtlicher $s_i - s_j$ $(i \neq j)$ bilden für den Fall, dass sämtliche s_i nach s_0 konvergieren. Dabei können wir uns mit Vorteil eines Satzes von Herrn E. Egerváry bedienen:[9]

$$\lim_{s_k \to s_0} \frac{S(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r)}{\Pi(s_i - s_j)} = \frac{1}{1!\,2!\ldots(r-1)^2!}\sqrt{D_{r-1}}\,.$$

Wegen (1,8) erhält man aus dieser Gleichung

$$\lim_{s_k \to s_0} \frac{S(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r)}{\Pi(s_i - s_j)} = \frac{R}{1!\,2!\ldots[(r-1)!]^2}\sqrt{G_{r-1}}\,. \tag{2,11}$$

Bezeichnen wir den Abstand der Punkte $\boldsymbol{x}(s_{k+2})$ und $\boldsymbol{x}(s_1)$ mit $\overline{P_1P}_{k+2}$ so führt die Gleichung (2,11) wegen (2,5) zu

$$\lim_{s_k \to s_0} \frac{(k+1)^2}{k}\,\frac{1}{\overline{P_1P}_{k+2}}\,\frac{S(\boldsymbol{x}(s_1), \ldots \boldsymbol{x}(s_{k+2}))\,S(\boldsymbol{x}(s_2), \ldots \boldsymbol{x}(s_{k+1}))}{S(\boldsymbol{x}(s_1), \ldots \boldsymbol{x}(s_{k+1}))\,S(\boldsymbol{x}(s_2), \ldots \boldsymbol{x}(s_{k+2}))} =$$
$$= \frac{1}{\varrho_k(s_0)}\,. \tag{2,12}$$

(2,12) gibt die in Aussicht gestellte Formel, die die Krümmung auf Grenzwerte eines nur von Abständen abhängenden Ausdrucks zurückführt. Wir können entsprechend den Ergebnissen im euklidischen Raum[10] auch in unserem Fall die Grösse auf der rechten Seite von (2,12) noch auf

[9] Ist die eindeutige reelle Funktion einschliesslich ihrer $n-1$ partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^{i+j} f(s,t)}{\partial s^i\,\partial t^j}$ $(i = 1, \ldots, n-1, j = 1, \ldots, n-1)$ stetig, dann gilt

$$\lim_{\substack{s_r \to s_0 \\ t_r \to t_0}} \frac{\begin{vmatrix} f(s_1, t_1) & \ldots & f(s_1, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f(s_n, t_1) & \ldots & f(s_n, t_n) \end{vmatrix}}{\Pi(s_i - s_j)\,\Pi(t_i - t_j)} = \frac{\begin{vmatrix} f(s_0, t_0) & \ldots & \dfrac{\partial^{(n-1)} f}{\partial t^{n-1}}(s_0, t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^{n-1} f(s_0, t_0)}{\partial s^{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial^{(n-1)} f(s_0, t_0)}{\partial t^{n-1}\,\partial s^{n-1}} \end{vmatrix}}{[1!\,2!\ldots(n-1)!]^2}$$

Vgl. *E. Egerváry* 2 a. a. O. S. 779.

[10] *E. Egerváry:* 1. S. 794.

eine andere Weise geometrisch deuten. Wir gehen dazu auf die Deutung des nichteuklidischen Raumes mit Hilfe des euklidischen Modelles zurück, wie dies in § 1. auseinandergesetzt wurde. Beachtet man, dass $S(x_1, \ldots, x_k)$ bis auf einen unwesentlichen Zahlenfaktor der Inhalt eines um eine Dimension höheren Simplex (zu dem auch der Ursprung des Koordinatensystems gehört), im n—1-dimensionalen euklidischen Raum darstellt, so kann man auf Grund einer Formel der euklidischen Geometrie[11] den Sinus des Winkels zweier k-dimensionaler Ebenen, die durch die Vektoren $x_1\ x_2 \ldots x_{k+1}$ bezw. $x_2 \ldots x_{k+1}\ x_{k+2}$ bestimmt sind, folgendermassen darstellen:

$$\sin \alpha_k = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \cdot \frac{S(x(s_1), \ldots, x(s_{k+2}))\, .\, S(x(s_2), \ldots, x(s_{k+1}))}{S(x(s_1), \ldots, x(s_{k+1}))\, S(x(s_2), \ldots, x(s_{k+2}))}. \tag{2,13}$$

Nach (2,12) ist daher

$$\frac{1}{\varrho_k} = \lim_{P_i \to P_0} (k+2) \frac{\sin \alpha_k}{P_1 P_{k+2}} \tag{2,14}$$

P_i ist dabei der Endpunkt des Radiusvektors x_i.

§. 3. ZUSAMMENHÄNGE ZWISCHEN DEN SCHMIEGKUGELRADIEN UND DEN KRÜMMUNGEN EINER KURVE IM NICHTEUKLIDISCHEN RAUM.

Für eine Kugel vom Radius r mit dem Mittelpunkt x_0 gilt in laufenden Koordinaten x die Gleichung

$$x_0\, x = R^2 \cos \frac{r}{R} \tag{3,1}$$

Der Radius einer k—1-dimensionalen Kugel, die durch die $k+1$ Punkte i $(i = 1, 2, \ldots, k+1$ bestimmt ist, ergibt sich folgendermassen. Die $k+2$ Punkte x_0, x_i liegen in derjenigen k-dimensionalen Ebene, die die zu bestimmende Kugel enthält. Aus der linearen Abhängigkeit dieser Punkte folgt

$$|(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}, x_0)^2| = 0 \tag{3,2}$$

Beachten wir, dass wir sämtliche x_i in die Gleichung (3,1) an Stelle x einsetzen dürfen, so folgt aus (3,2)

[11] S. W. Fr. Meyer: Über die Anwendung eines Sylvesterschen Determinantensatzes auf ein metrisches Problem des R_n Deutsche Math. Ver. 20 (1911) S. 211—16

$$\begin{vmatrix} (x_1 x_1), \ldots, (x_1 x_{k+1}), R^2 \cos \frac{r_{k-1}}{R} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_{k+1}, x_1), \ldots, (x_{k+1} x_{k+1}), R^2 \cos \frac{r_{k-1}}{R} \\ R^2 \cos \frac{r_{k-1}}{R}, \ldots, R^2 \cos \frac{r_{k-1}}{R}, R^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3,3'}$$

(3,3') können wir auch so schreiben

$$R^2 \cos^2 \frac{r_{k-1}}{R} = -\frac{|(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})^2|}{\begin{vmatrix} (x_1 x_1), \ldots, (x_1 x_{k+1}) & 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (x_{k+1} x_1), \ldots, (x_{k+1} x_{k+1}) & 1 \\ 1 \quad , \ldots, \quad 1 & 0 \end{vmatrix}} \tag{3,3}$$

(3,3) ist die gesuchte Gleichung für den Radius r, der durch x_i bestimmten $k-1$-dimensionalen Kugel. Wir wählen nun die $k+1$ Punkte x_i auf der Kurve (1,5) d. h.

$$x_i = x(s_i). \tag{a}$$

Lassen wir nun die $k+1$ Punkte durch den Grenzübergang $s_i \to s_0$ unabhängig voneinander nach (s_0) konvergieren, so ergibt sich unter Benutzung des im vorangehenden § erwähnten Egerváryschen Grenzwertsatzes

$$R^2 \cos^2 \frac{r_{k+1}}{R} = \frac{D_k}{\bar{G}_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3,4}$$

wobei

$$D_k = |(x, x', \ldots, x^{(k)})^2|$$

und

$$\bar{G}_k = |(x', x'', \ldots, x^{(k)})^2| \tag{3,5}$$

gesetzt wurde. Durch (3,4) erklären wir den Radius der r_{k-1} dimensionalen Schmiegkugel unserer Kurve. Um die Schmiegkugel vollständig zu charakterisieren, müssen wir noch die Koordinaten ihres Mittelpunktes kennen.

Der gesuchte Mittelpunkt lässt sich aus den x_i $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$ linear kombinieren:

$$\boldsymbol{x}_0 = c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1} . \tag{3,6}$$

Wegen (3,1) erhält man aus (3,6)

$$R^2 \cos \frac{r_{k-1}}{R} = \sum_{i=1}^{k+1} c_i (\boldsymbol{x}_s \boldsymbol{x}_i) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k+1). \tag{3,7}$$

Aus (3,7) können die unbekannten Grössen c_i berechnet werden. Führt man diese wieder in (3,6) ein und bezeichnet die Koordinaten von $\boldsymbol{x}_r$ mit $x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn+1}$ diejenigen von $\boldsymbol{x}_0$ mit $x_{01}, \ldots, x_{0n+1}$, so erhält man in

$$x_{0i} = -R^2 \cos \frac{r_{k-1}}{R} \frac{\begin{vmatrix} 0\; x_{1i} & , x_{2i} & , \ldots x_{k+1i} \\ 1\; (\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1) & , (\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2) & , \ldots (\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_{k+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1\; (\boldsymbol{x}_{k+1} \boldsymbol{x}_1), & (\boldsymbol{x}_{k+1} \boldsymbol{x}_2), & \ldots (\boldsymbol{x}_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1) & , (\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2) & , \ldots (\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_{k+1}) \\ (\boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_1) & , (\boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_2) & , \ldots (\boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_{k+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\boldsymbol{x}_{k+1} \boldsymbol{x}_1), & (\boldsymbol{x}_{k+1} \boldsymbol{x}_2), & \ldots (\boldsymbol{x}_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}) \end{vmatrix}} \tag{3,8}$$

die Koordinaten des Mittelpunktes.

Wählt man die Punkte i auf der Kurve gemäss (a), so ergibt der Grenzübergang $s_i \to s_0$ den Mittelpunkt der Schmiegkugel. Bei der Bildung des Grenzwertes hat man nach demselben Schema zu verfahren, wie in den früheren Fällen. Man erhält so in nicht zu missverstehender Schreibweise

$$\underset{n-1)}{\boldsymbol{x}_0} = -R^2 \cos \frac{r_{k-1}}{R} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0, \boldsymbol{x} & , \boldsymbol{x}' & , \ldots \boldsymbol{x}^{(k)} \\ 1, (\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}) & , (\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}') & , \ldots (\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}^{(k+1)}) \\ 0, (\boldsymbol{x}'\,\boldsymbol{x}) & , (\boldsymbol{x}'\,\boldsymbol{x}') & , \ldots (\boldsymbol{x}'\,\boldsymbol{x}^{(k+1)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, (\boldsymbol{x}^{(k)}\,\boldsymbol{x}), & (\boldsymbol{x}^{(k)}\,\boldsymbol{x}'), & \ldots (\boldsymbol{x}^{(k)}\,\boldsymbol{x}^{(k+1)}) \end{vmatrix}}{D_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3,9}$$

Durch (3,4) und (3,9) ist die $k-1$-dimensionale Schmiegkugel eindeutig bestimmt. Wir wollen jetzt die Lage der Schmiegkugel auch geometrisch veranschaulichen. Dabei wollen wir ihre Lage in Bezug auf den $n+1$-dimensionalen euklidischen Raum angeben. Im euklidischen Raume bedeuten $\boldsymbol{x}', \ldots \boldsymbol{x}^{(k)}$ k Vektoren, die den Schmiegraum der Kurve, aufgefasst als Kurve des euklidischen Raumes, bestimmen. Aus (3,9) folgt

$$\underset{(k-1)}{\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{x}^{(r)} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k),$$

d. h. der Vektor der zu dem nichteuklidischen Mittelpunkt der Kugel führt, steht auf den Vektoren $x' \ldots x^{(k)}$ senkrecht. Der Ortsvektor $\underset{(k-2)}{x_0^*}$ der zu dem Fusspunkt des Lotes auf diese Schmiegebene führt, ist offensichtlich

$$\underset{(k-1)}{x_0^*} = \cos\frac{r_{k-1}}{R}\underset{(k-1)}{x_0}\,. \tag{3,10}$$

Wir werden nun nachweisen, dass diejenige k—1-dimensionale Kugel, die der k-dimensionale euklidische Schmiegraum aus der Kugel (1,1) herausschneidet und deren Mittelpunkt $\underset{(k-2)}{x_0^k}$ ist, die $(k-1)$-dimensionale Schmiegkugel der Kurve im euklidischen Raum ist und dass ferner diese Kugel als Kugel des nichteuklidischen Raumes mit der durch (3,4) und (3,9) bestimmten identisch ist. Um den Nachweis bequem führen zu können, wollen wir in der durch (3,9) und (3,10) bestimmten Darstellung von $\underset{(k-2)}{x_0^k}$ an Stelle der $x', \ldots, x^{(k)}$ die aus diesen Vektoren durch Orthogonalisierung und Normierung bestimmbaren $t_1, t_2, \ldots, t_k$ einführen. Nach dem Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt[12] erhält man für diese Vektoren

$$\bar{t}_r = \frac{\bar{G}_{(r)1}\, x' + \bar{G}_{(r)2}\, x'' + \ldots + \bar{G}_{(r)r}\, x^{(r)}}{\sqrt{\bar{G}_{r-1}\,\bar{G}_r}}\,. \tag{3,11}$$

In (3,11) bedeutet $\bar{G}_{(r)s}$ das algebraische Komplement der r-ten Zeile und s-ten Spalte in $\bar{G}_r$. Insbesondere ist hiernach

$$\bar{G}_{(r)r} = \bar{G}_{r-1} \tag{3,12}$$

Das durch (3,10) bestimmte $\underset{(k-1}{x_0^*}$ können wir wegen (3,4) auch durch

$$\underset{(k-1)}{x_0^*} = -\frac{\begin{vmatrix} 0, x & , x' & , \ldots x^{(k)} \\ 1, (x\,x) & , (x\,x') & , \ldots (x\,x^{(k)}) \\ 0, (x'\,x) & , (x'x') & , \ldots (x'\,x^{(k)}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0, (x^{(k)}\,x), & (x^{(k)}\,x'), & \ldots (x^{(k)}\,x^{(k)}) \end{vmatrix}}{\bar{G}_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3,13}$$

[12] Vgl. etwa G. *Kowalewski*, Determinantentheorie. Leipzig, 1909. S. 423—426.

Wenn wir in der, in (3,13) explicit angegebenen Determinante die $s+2$-te Spalte mit $\bar{G}_{(s)k}$ $(s = 1, 2, \ldots, k-1)$ multiplizieren und dieselbe zu der mit $\bar{G}_{(k)k}$ multiplizierten $k+2$-ten Spalte addieren und eine entsprechende Umformung mit der $k+1$-ten bis 2-ten Spalte vornehmen, so ergibt sich

$$\underset{(k-1)}{\overset{*}{\boldsymbol{x}_0}} = \boldsymbol{x} + \Delta_1 \bar{\boldsymbol{t}}_2 + \Delta_2 \bar{\boldsymbol{t}}_3 + \ldots + \Delta_{k-1} \bar{\boldsymbol{t}}_k , \tag{3,14}$$

wobei

$$\Delta_r = (-1)^r \frac{|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(r-1)})\,(\boldsymbol{x}' \ldots \boldsymbol{x}^{(r)})|}{\sqrt{\bar{G}_r \bar{G}_{r+1}}} \tag{3,15}$$

gesetzt wurde. Aus (3,14) ergibt sich als Radius R_{k-1} der Kugel

$$(\underset{(k-1)}{\overset{*}{\boldsymbol{x}_0}} - \boldsymbol{x})^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_{k-1}^2 . \tag{3,16}$$

Der Radius der Kugel den die k-dimensionale Schmiegebene aus (1,1) herausschneidet, ist offensichtlich durch

$$R_{k-1} = R \sin \frac{r_{k-1}}{R} \tag{3,17}$$

bestimmt.

Betrachten wir nun die Differenz der Quadrate der Radien zweier derartiger Kugeln und beachten (3,4), so ergibt sich

$$R_k^2 - R_{k-1}^2 = R^2 \left(\cos^2 \frac{r_{k-1}}{R} - \cos^2 \frac{r_k}{R} \right) =$$

$$= \frac{|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})^2|\,|(\boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k+1)})^2| - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k+1)})^2|\,|(\boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})^2|}{\bar{G}_k \bar{G}_{k+1}} . \tag{3,19'}$$

Den ersten Posten im Zähler dieses Ausdruckes können wir auf Grund der Beziehung

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})^2|\,|(\boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k+1)})^2| - |(\boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k+1)})\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})|^2 =$$
$$= |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k+1)})^2|\,|(\boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})^2| \tag{3,18}$$

umformen. Die Umformung (3,18) ist ein Spezialfall der Jakobischen Sätze über Determinanten, deren Elemente Minoren der Reziproken Determinante sind.[13] Aus (3,18) folgt nun

[13] Vgl. etwa G. *Kowalewski*, Determinantentheorie. A. a. O.

$$R_k^2 - R_{k-1}^2 = \frac{|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})\ (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k+1)})|^2}{\bar{G}_k \ . \ \bar{G}_{k+1}} . \tag{3,19}$$

Vergleicht man (3,19) mit (3,15), so hat man

$$R_r^2 - R_{r-1}^2 = \Delta_r^2 . \tag{3,20}$$

Auf Grund von (3,16) ergibt sich nun in der Tat

$$R_{k-1}^2 = (\underset{(k-1)}{\boldsymbol{x}_0{}^k} - \boldsymbol{x})^2 \tag{3,21}$$

w. z. b. w.

Um nachzuweisen, dass unsere Kugel (des euklidischen Raumes) auch Schmiegkugel der Kurve ist, genügt es, ihren Radius und Mittelpunkt auf eine bekannte Darstellung derselben zu bringen. Setzt man

$$q^{(r)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^r}{\partial s^r} (\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(t))^2_{t=s} ,$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{x}^2)^{(r)} = q^{(r)} + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}^{(r)}) ,$$

was wegen der Konstanz von $\boldsymbol{x}^2$

$$q^{(r)} = -(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}^{(r)}) \tag{3,22}$$

gibt. Bezeichnen wir das algebraische Komplement der $k+2$-ten Zeile und ersten Spalte von

$$Q_{k+1} = \begin{vmatrix} q & , q' & , \ldots q^{(k+1)} \\ q' & , (\boldsymbol{x}' \boldsymbol{x}') & , \ldots (\boldsymbol{x}' \boldsymbol{x}^{(k+1)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q^{(k+1)}, & (\boldsymbol{x}^{(k+1)} \boldsymbol{x}'), & \ldots (\boldsymbol{x}^{(k+1)} \boldsymbol{x}^{(k+1)}) \end{vmatrix} \tag{3,23}$$

mit $\dfrac{\partial Q_{k+1}}{\partial q^{(k+1)}}$ so ergibt sich

$$\frac{\partial Q_{k+1}}{\partial q^{(k+1)}} = (-1)^{k+1} |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})\ (\boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k+1)})| , \tag{3,24}$$

und hieraus wegen (3,15)

$$\Delta_k = \frac{\dfrac{\partial Q_{k+1}}{\partial q^{(k+1)}}}{\sqrt{\bar{G}_{k+1}\bar{G}_k}} \,. \tag{3'25}$$

(3,25) besagt wegen (3,20) und Egerváry (2) S. 780, dass der Radius der Kugel mit dem der Schmiegungskugel übereinstimmt. Aus der Darstellung (3,14) und (3,25) folgt ebenso, dass auch der Mittelpunkt der Kugel mit dem der Schmiegungskugel zusammenfällt.[14] Dadurch ist die Lage der Schmiegkugel im euklidischen Raum vollständig bestimmt, ihr nichteuklidischer Mittelpunkt ergibt sich aus (3,10). Geometrisch bedeutet dies, dass wir den Vektor $\underset{(k-1)}{\boldsymbol{x}_0^*}$ soweit zu verlängern haben, bis er die Oberfläche der Kugel (1,1) trifft.

Jetzt wollen wir den Zusammenhang der Schmiegkugelradien r_k und der Krümmungen $\dfrac{1}{\varrho_k}$ ermitteln. Zunächst folgt durch eine einfache Umformung aus (3,19′) und (3,19)

$$\frac{1}{R^2}\left[\left(\frac{1}{\cos\dfrac{r_k}{R}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\cos\dfrac{r_{k-1}}{R}}\right)^2\right] = \frac{|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})\,(\boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k+1)})|^2}{D_{k+1}\cdot D_k} \cdot \tag{3,26}$$

Ableitung von (3,4) gibt

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\cos^2\dfrac{r_{k-1}}{R}}\right) = \frac{2R^2}{D_k^2}\,[\,|(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})\,(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k-1)}, \boldsymbol{x}^{(k+1)})|\,\cdot$$
$$\cdot\,|(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})^2| - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k-1)}, \boldsymbol{x}^{(k+1)})|\,\cdot$$
$$\cdot\,|(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})^2|\,]$$

Die rechte Seite dieser Gleichung formen wir unter Benützung der zu gleichen Zwecken bei (3,18) verwendeten Jakobischen Determinantenidentität um, woraus sich

$$\frac{d}{ds}\left|\frac{1}{\cos^2\dfrac{r_{k-1}}{R}}\right| = \frac{2R^2}{D_k^2}\,|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})\,(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k+1)})|\,\cdot$$
$$\cdot\,|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k-1)})\,(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)})| \tag{3,27}$$

[14] Vgl. *E. Egerváry* (2) A. a. O., insbes. S. 783, wo zwar der Mittelpunkt nicht durch eine explizite Formel der Gestalt (3,14) angegeben ist, dieselbe aber aus den dort angestellten Überlegungen leicht folgt.

ergibt. Aus (3,26) und (3,27) erhält man unter Berücksichtgung des durch (2,5) angegebenen Ausdruckes für die Krümmung

$$\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{r_k}{R}}\right)\right]^2=\frac{4}{\varrho_{k+1}^2}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{r_{k+1}}{R}}-\frac{1}{\cos^2\frac{r_k}{R}}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\frac{r_k}{R}}-\frac{1}{\cos^2\frac{r_{k-1}}{R}}\right) \tag{3,28}$$

$$(k=1,2,\ldots,n-2)$$

(3,28 gibt den gesuchten Zusammenhang zwischen Krümmungen und Schmiegkugelradien. Den Fall $k=n-1$ müssen wir noch durch eine gesonderte Überlegung behandeln.

Aus (3,27) folgt wegen (2,5) und (3,26) für $k=n-1$

$$\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{r_{n-1}}{R}}\right)\right]^2= \tag{3,29}$$

$$=4\left[\frac{1}{\cos^2\frac{r_{n-1}}{R}}-\frac{1}{\cos^2\frac{r_{n-2}}{R}}\right]\frac{R^2D_{n-1}}{D_n^3}\left|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\ldots,\boldsymbol{x}^{(n)})(\boldsymbol{x}',\ldots,\boldsymbol{x}^{(n+1)})\right|^2$$

Es handelt sich also darum, den Ausdruck

$$\frac{R^2D_{n-1}}{D_n^3}\left|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\ldots,\boldsymbol{x}^{(n)})(\boldsymbol{x}',\ldots,\boldsymbol{x}^{(n+1)})\right|^2 \tag{b}$$

geometrisch zu deuten. Wir betrachten die „Polkurve“, die der geometrische Ort der Mittelpunkte der $(n-1)$-dimensionalen Schmiegkugeln ist. Sie ist durch (3,10) und (3,14) mit $k=n$ bestimmt. Der Ausdruck (b) wird dann im wesentlichen der Grenzwert entsprechender Bogenelemente der Polkurve und der gegebenen Kurve sein, d. h. $\sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{x}_0}{ds}\right)^2}$.

Aus (3,10) ergibt sich

$$\frac{d\boldsymbol{x}_0}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\cos\frac{r_{n-1}}{R}}\right)\boldsymbol{x}_0^*+\frac{1}{\cos\frac{r_{n-1}}{R}}\frac{d\boldsymbol{x}_0^*}{ds} \tag{3,30}$$

Aus (3,14) berechnen wir die Ableitung von $\boldsymbol{x}_0^*$ wobei wir die Beziehungen

$$\frac{d\Delta_k}{ds}=-\frac{\Delta_{k-1}}{\varrho_k}+\frac{\Delta_{k+1}}{\varrho_{k+1}}\qquad(k=1,2,\ldots,n-1) \tag{3,31}$$

$$\Delta_0=0\qquad\Delta_1=\varrho_1$$

beachten.[15] In (3,31) bedeuten die $\frac{1}{\bar{\varrho}_k}$, die euklidischen Krümmungen der Kurve, die entsprechend dem nichteuklidischen Fall durch Formeln der Gestalt (2,5) gegeben sind, aber die Ausdrücke G_k durch die überstrichenen Grössen $\bar{G}_k$ — durch (3,5) bestimmt — zu ersetzen sind. Aus den Formeln (3,31) erhält man

$$\frac{d\boldsymbol{x}_0^*}{ds} = \frac{\Delta_n}{\bar{\varrho}_n} \bar{\boldsymbol{t}}_n + \frac{\Delta_{n-1}}{\bar{\varrho}_n} \bar{\boldsymbol{t}}_{n+1}, \tag{3,32}$$

und daher für (3,30)

$$\frac{d\boldsymbol{x}_0}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\cos\frac{r_{n-1}}{R}}\right)\boldsymbol{x}_0^* + \frac{1}{\cos\frac{r_{n-1}}{R}}\left[\frac{\Delta_n}{\bar{\varrho}_n}\bar{\boldsymbol{t}}_n + \frac{\Delta_{n-1}}{\bar{\varrho}_n}\bar{\boldsymbol{t}}_{n+1}\right]. \tag{3,30'}$$

Wegen der Konstanz von $\boldsymbol{x}_0$ folgt aus

$$\frac{d\boldsymbol{x}_0}{ds}\,\boldsymbol{x}_0 = 0$$

und (3,30) unmittelbar

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\cos\frac{r_{n-1}}{R}}\right) = -\frac{1}{R\cos^2\frac{r_{n-1}}{R}}\cdot\frac{\Delta_{n-1}}{\bar{\varrho}_n}. \tag{3,31}$$

Bildet man das skalare Quadrat von (3,30) und beachtet dass

$$(\boldsymbol{x}_0\,\bar{\boldsymbol{t}}_n) = 0$$
$$(\boldsymbol{x}_0\,\bar{\boldsymbol{t}}_{n+1}) = R$$

ist, so kommt schliesslich

$$\left(\frac{d\boldsymbol{x}_0}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{r_{n-1}}{R}}\cdot\frac{\Delta_n^2}{\bar{\varrho}_n^2}. \tag{3,32}$$

Wegen (3,20), (3,24) und (3,29) hat man dann für den Ausdruck (b)

[15] Vgl. *Egerváry* (2). A. a. O. S. 783, Formel (19). Es muss aber beachtet werden, dass unser euklidischer Raum $n+1$-dimensional ist, während *Egerváry* einen n-dimensionalen Raum betrachtet.

$$\frac{\cos^2 \frac{r_{n-2}}{R}}{R^2 \cos^4 \frac{r_{n-1}}{R}} \cdot \left(\frac{d x_0}{ds}\right)^2 =$$
$$= \frac{R^2 . D_{n-1}}{D_n^3} \,|\, (x, x', \ldots, x^{(n)})\, (x', \ldots, x^{(n+1)}) \,|^2. \tag{3,33}$$

Dies eingeführt in (3,29) gibt die gesuchte Beziehung

$$\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{1}{\cos^2 \frac{r_{n-1}}{R}}\right)\right]^2 = 4\left[\frac{1}{\cos^2 \frac{r_{n-1}}{R}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{r_{n-2}}{R}}\right]\left(\frac{d x_0}{ds}\right)^2 \frac{\cos^2 \frac{r_{n-2}}{R}}{R^2 \cos^4 \frac{r_{n-1}}{R}}, \tag{3,34}$$

die man auch in der Gestalt

$$\left[\frac{d}{ds}\left(\cos \frac{r_{n-1}}{R}\right)\right]^2 = \frac{1}{R^2}\left[\cos^2 \frac{r_{n-2}}{R} - \cos^2 \frac{r_{n-1}}{R}\right]\left(\frac{d x_0}{ds}\right)^2 \tag{3,35}$$

schreiben kann.

ON A GENERALISATION OF A THEOREM OF SYLVESTER.

BY E. EGERVÁRY
MEMBER OF THE ACADEMY

(RECEIVED 1. MARCH 1947.)

One of the well-known geometrical constructions[1] for finding the centre of gravity of a plane quadrilateral may be described as follows.

Let the intersection C of the diagonals be called *the cross-centre,* the centre of gravity M of the four angles viewed as equal weights the *mid-centre.* Then the centre of gravity G is in the line joining these two centres produced past the mid-centre, and at a distance from it equal to one-third of the distance between the two centres (i. e. $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$).

In a paper „On the centre of gravity of a truncated triangular pyramid, and on the principles of barycentric perspective"[2] J. J. Sylvester has given a method for finding the centre of gravity of the frustum of a triangular pyramid, which may be summarised as follows:

If we define

as mid-centre M the centre of gravity of the six angles of the frustum regarded as of equal weights, and

as cross-centre C the intersection of *either* of two distinct ternary systems of cross-triangles (a cross-triangle is such one which has its apices at the centre of either diagonal of any quadrilateral face and of the two edges coterminous but not in the same face with that diagonal),

further if we join the cross-centre C with the mid-centre M and produce CM to G making $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$,

G will be the centre of gravity of the frustum.

By the remarkable analogy between the two constructions Sylvester has been led to the following conclusion:

„The frustum of a pyramid is the nearest analogue in space to a quadrilateral in plano, since the latter may be regarded as the frustum

[1] See e. g. Encykl. d. math. Wiss. IIIAB9. *M. Zacharias,* Elementargeometrie. S. 1007.

[2] Phil. Mag. XXVI. (1863), pp. 167—183 = Coll. Math. Papers, Vol. II. pp. 342—357.

of a triangle. The analogy, however, is not perfect, inasmuch as a quadrilateral may be regarded as a frustum of either of two triangles, but the pyramid to which a given frustum belongs is determinate. Hence à priori reasonable doubts might have been entertained as to the possibility of extending the geometrical method of centering the plane quadrilateral. The investigation subjoined dispels this doubt, and will be found to lead to the perfect satisfaction, under a somewhat unexpected form, of the hoped-for analogy."

In the present short note I wish to indicate that it is the octahedron which is to be regarded as a true three-dimensional analogon to the quadrilateral, justifying in this way Sylvester's doubt about the „perfect" analogy between the frustum of a pyramid and the quadrilateral. On the other hand I shall prove that Sylvester's frustum may be regarded in two different ways as a degenerating octahedron, which explains that Sylvester's investigations led „to the perfect satisfaction of the hoped-for analogy".

The main object of this note is to establish a simple construction of the centre of gravity of a (convex) octahedron, which contains Sylvester's method as a particular case. The „unexpected" form of Sylvester's results becomes at once obvious if his polyhedron will be regarded as an octahedron and not as a pyramidal frustum.

Our construction may be described as follows:

The centres of gravity of the faces of an octahedron form an inscibed parallelepipedon,

the smallest parallelepipedon which contains the octahedron and whose faces are parallel to those of the former one, is a circumscribed parallelepipedon,

the two parallelepipedons are similars and their interior point of similarity is the centre of gravity of the octahedron.

It may be seen immediately that our construction is a perfect analogon to E. Henry's well-known construction[3] for finding the centre of gravity of a quadrilateral.

A convex quadrilateral may be regarded

1. as the smallest convex domain which contains two given, intersecting segments of lines (the diagonals of the quadrilateral);

2. as the common part of two convex angular domains.

According to this double generation, we are led to the following three-dimensional analogons of the quadrilateral:

[3] Rev. scient. 47 (1891) p. 731.

1. the octahedron, as the smallest convex domain which contains three given, not coplanar segments of lines (the diagonals of the octahedron);

2. the hexaedron, as the common part of three convex dihedrons.

In the present note we shall confine ourselves to the investigation of the octahedron.

Denote the three diagonals of the octahedron by P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3'. In order to agree with Sylvester's denomination I define the crossplane σ_1 as the plane, which is parallel and equidistant to P_2P_2' and P_3P_3' and similarly the cross-plains σ_2, σ_3. The intersection of these cross-plains will be the cross-centre of the octahedron. (In the case of concurrent diagonals the cross-plains are obviously the diagonal plains of the octahedron).

Let us take the cross-plains as plains of coordinates ($\sigma_1 = yz$, $\sigma_2 = zx$, $\sigma_3 = xy$ plain), and denote the coordinates of P_i resp. P_i' by $x_iy_iz_i$ resp. $x_i'y_i'z_i'$ $(i = 1, 2, 3)$, $x_1 < x_1'$, $y_2 < y_2'$, $z_3 < z_3'$. Then, owing to the definition of the crossplains,

$$x_2 = x_2' = -x_3 = -x_3' = x_0,$$

where x_0 is introduced to denote the common value of the four coordinates. Similarly

$$y_3 = y_3' = -y_1 = -y_1' = y_0$$
$$z_1 = z_1' = -z_2 = -z_2' = z_0$$

Thus the coordinates of P_i, P_i' $(i = 1, 2, 3)$ are

$$\begin{aligned} &P_1\ (x_1, y_0, -z_0)\,;\ P_1'\ (x_1', y_0, -z_0) \\ &P_2\ (-x_0, y_2, z_0)\,;\ P_2'\ (-x_0, y_2', z_0) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ &P_3\ (x_0, -y_0, z_3)\,;\ P_3'\ (x_0, -y_0, z_3'). \end{aligned}$$

By this choice of coordinates the cross-centre C coincides with the origin:

$$C\,(0, 0, 0).$$

Using (1) we get immediately the coordinates of the mid-centre (céntre of gravity of equal weights at $P_i\,P_i'$)

$$M\left(\frac{x_1 + x_1'}{6}, \frac{y_2 + y_2'}{6}, \frac{z_3 + z_3'}{6}\right). \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

The octahedron may be resolved in three different ways into four tetrahedrons. One of the decompositions leads to the tetrahedrons:

$$P_1P_1'P_2P_3; \text{ coord. of the centre of gr. } \left(\frac{x_1+x_1'}{4}, \ldots, \ldots\right).$$

$$P_1P_1'P_3P_2'; \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \left(\frac{x_1+x_1'}{4}, \ldots, \ldots\right)$$

$$P_1P_1'P_2'P_3'; \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \left(\frac{x_1+x_1'}{4}, \ldots, \ldots\right)$$

$$P_1P_1'P_3'P_2; \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \left(\frac{x_1+x_1'}{4}, \ldots, \ldots\right).$$

This proves that the centres of gravity of the four tetrahedrons are coplanar, each lying in the plain $x = \frac{x_1 + x_1'}{4}$. Hence, by symmetry, the coordinates of the centre of gravity G of the octahedron are found to be

$$G\left(\frac{x_1+x_1'}{4}, \frac{y_2+y_2'}{4}, \frac{z_3+z_3'}{4}\right). \qquad (3)$$

The coordinates of the centres of gravity of the faces are

$$\frac{x_1}{3}, \frac{x_1'}{3}, \frac{y_2}{3}, \frac{y_2'}{3}, \frac{z_3}{3}, \frac{z_3'}{3};$$

i. e. they are the angles of the inscribed parallelepipedon

$$\frac{x_1}{3} \leqq x \leqq \frac{x_1'}{3}, \quad \frac{y_2}{3} \leqq y \leqq \frac{y_2'}{3}, \quad \frac{z_3}{3} \leqq z \leqq \frac{z_3'}{3}.$$

The angles of the circumscribed parallelepipedon

$$x_1 \leqq x \leqq x_1', \quad y_2 \geqq y \leqq y_2', \quad z_3 \leqq z \leqq z_3'$$

have the coordinates

$$x_1, x_1', y_2, y_2', z_3, z_3'.$$

Consequently the interior point of similarity of these parallelepipedons has the coordinates

$$\left(\frac{x_1+x_1'}{4}, \frac{y_2+y_2'}{4}, \frac{z_3+z_3'}{4}\right)$$

i. e. it coincides with the centre of the gravity G of the octahedron. Q. E. D.

We prepare now the verification of Sylvester's results by the following remarks.

The relativ position of C, M and G is determined by the equation

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GG} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

which is a consequence of (2) and (3).

The cross-plains belonging to any paire of diagonals may be defined as that plain which bissects each side of the quadrilateral formed by the endpoints of these diagonals.

A frustum of a triangular pyramid may be regarded in two different ways as a degenerated octahedron. This is immediately seen if the diago nals of the quadrilateral faces are distributed in two ternary systems such that the diagonals belonging to the same system are not coterminous. Either of these systems may be regarded as the system of diagonals of the octahedron, while the other system together with the edges of the frustum constitute the edges of the octahedron.

If we construct now the six cross-plains of the two octahedrons (derived from the same frustum), i. e. the plains which bissect each side of the quadrilateral belonging to the corresponding paire of diagonals, it is evident that these plains contain Sylvester's cross-triangles.

Indeed, if from each of the six quadrilaterals which served to define the cross-plains, we remove its only lateral edge, we get exactly the six ternary systems of lines, which have been used by Sylvester in order to define the cross-triangles.

The identity of Sylvester's cross-centre to C being thus proved, his construction follows immediately from the equation (4).

A szerkesztésért Egerváry Jenő, a kiadásért Szent-Györgyi Albert felelős.

46.743. — Egyetemi Nyomda, Budapest. (F.: Tirai Richárd.)