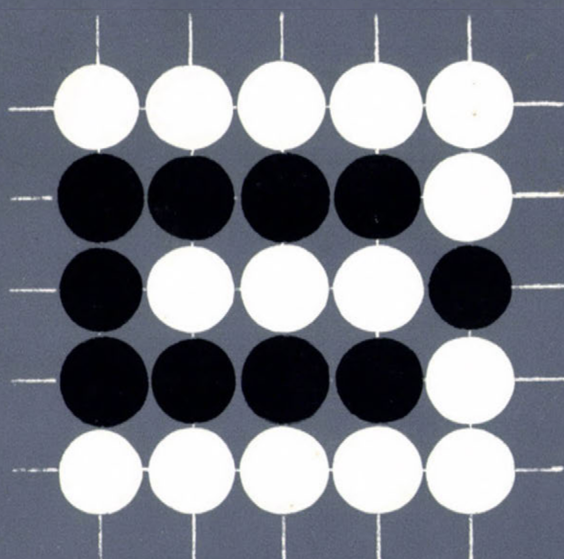
közlemények

10/1973

TA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET

közlemények

1973. szeptember

Felelős kiadó:

Dr. VÁMOS TIBOR
igazgató

Technikai szerkesztő:
RÉVÉSZ GYÖRGYI

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete

MTA KESZ Sokszorosító. F.v.: Szabó Gyula

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

AZ INPUT-OUTPUT TÁBLA ELŐREBECSLÉSÉRŐL*

Klafszky Emil

BEVEZETÉS

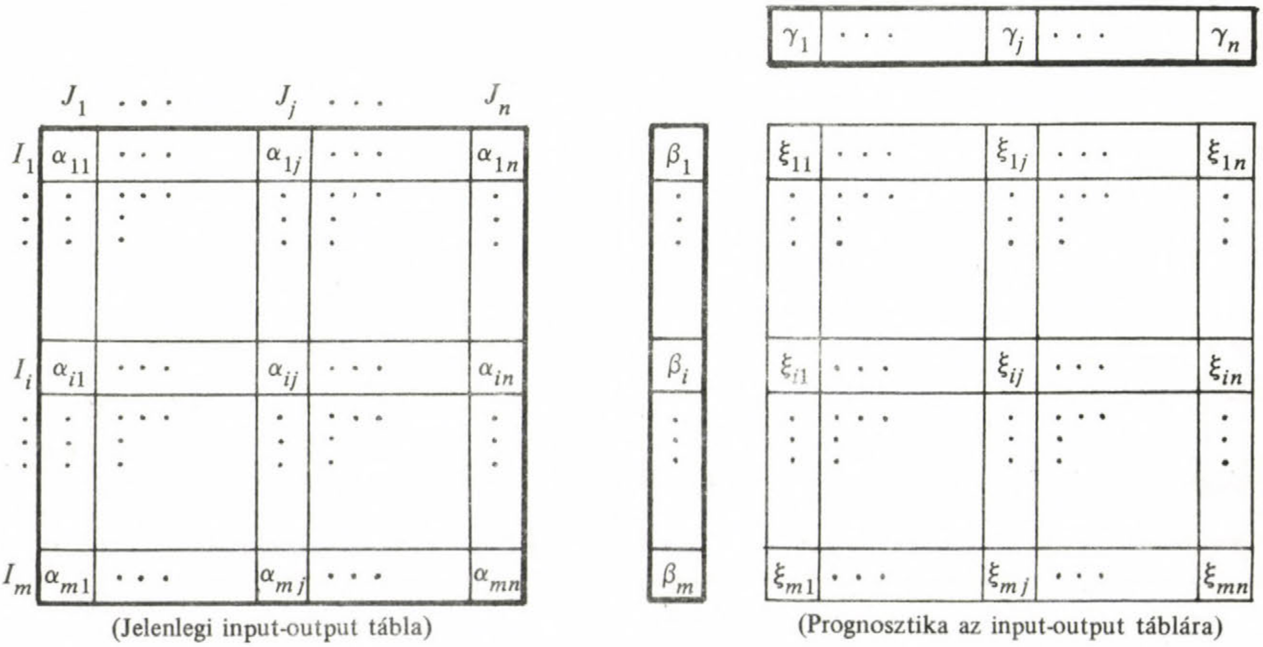
Jelöljön az $I_1, I_2, \ldots, I_i, \ldots, I_m$ kibocsátóhelyeket, a $J_1, J_2, \ldots, J_j, \ldots, J_n$ pedig fogadóhelyeket. Az $\alpha_{ij} \geqslant 0$ szám jelölje azt a mennyiséget, amely az I_i helyről a J_j helyre megy, vagy másképpen szólva, amelyet az I_i helyen termeltből a J_j hely elfogyaszt. Tömören az α_{ij} számokat az $A = (\alpha_{ij})$ mátrixba foglalhatjuk össze és ezt nevezzük *input-output táblázatnak*. A $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$ mennyiség az I_i hely teljes kibocsátása, a $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}$ mennyiség a J_j hely összes befogadása. Ezeket nevezzük az *input-output marginális értékeinek*.

A feladat az, hogy amennyiben ismerjük a jelenlegi $A = (\alpha_{ij})$ input-output mátrixot és ismerjük a megváltozott

$$b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_m) > 0$$
$$c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j, \ldots, \gamma_n) > 0$$

marginális input és az output értékeket, akkor milyen prognózist adhatunk az új $X = (\xi_{ij})$ input-output tábláról.

A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:



(Jelenlegi input-output tábla) (Prognosztika az input-output táblára)

* A dolgozatot a szerző a Bólyai János Matematikai Társulat 1972-évi "Vándorgyűlésen" és az IFIP (1973. Róma) konferencián bemutatta.

1. A RAS MÓDSZER

A feladat megoldására elterjedt eljárás az úgynevezett RAS módszer* [3-11], amelyeknek a lényege a következő: olyan $\xi_{ij} \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$, $\rho_i > 0, (i = 1, 2, \ldots, m)$ és $\sigma_j > 0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ számokat keresünk, melyre

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} = \beta_i, & (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} = \gamma_j, & (j = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

és

$$(2) \qquad \xi_{ij} = \rho_i \alpha_{ij} \sigma_j .$$

A (2) feltevés – az, hogy ξ_{ij} értékét ilyen szorzat alakban keressük – adja az eljárás nevét. Ugyanis, ha a ρ_i számokból alkotott diagonál mátrixot R-rel, a σ_j számokból képzettet S-sel jelöljük, akkor a (2) feltétel az

$$X = RAS$$

formát ölti.

Azonnal adódik, hogy: ha az (1) (2) egyenletrendszer megoldható, akkor az (1) egyenletrendszerszernek van olyan megoldása, hogy

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi_{ij} = 0, & \text{ha} \quad \alpha_{ij} = 0, \quad \text{és} \\ \xi_{ij} > 0, & \text{ha} \quad \alpha_{ij} > 0. \end{cases}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ez a feltétel elégséges is és a ξ_{ij} megoldásra unicitást is biztosít, azaz a RAS modellre fennáll az alábbi:

1. Tétel. *Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az* (1) (2) *rendszer megoldható legyen az, hogy az* (1) *rendszernek legyen* (3) *tipusú megoldása, és a feltétel fennállása esetén a megoldás* ξ_{ij}*-ben egyértelmű.*

A tételt majd a 2. fejezetben oly módon fogjuk igazolni, hogy a RAS modellt egy a szokásostól eltérő más módon, *mint egy matematikai programozási feladatot vezetjük be.*

Mielőtt azonban erre rátérnénk, a RAS modell egy fontos tulajdonságát mutatjuk meg, amely a fenti tétel következménye.

Tegyük fel, hogy az A kezdeti input-output érték valamint a b,c margiális értékek olyanok, hogy a tétel feltételét teljesítik. Ekkor a RAS módszer szerint egyértelműen adódik az új input-output X mátrix, amelyet a következőképpen jelöljük:

* A módszert az első alkalmazókról *Selejkovszkij*, illetve *Fratar* módszernek is nevezik, valamint a módszer indoklására elterjedt gravitációs elvről *Graviti* modellnek is.

$$X = \mathscr{R}(A,b,c)$$

A tétel következménye. *Legyenek* A,b,c; b^*,c^* *olyanok, hogy a tétel feltétele az* A, b,c,*-re és az* A,b^*,c^**-ra is teljesül, akkor*

$$\mathscr{R}(A,b,c) = \mathscr{R}(\mathscr{R}(A,b^*,c^*),b,c).$$

Azaz, lépésenkénti előrebecslés ugyanazt eredményezi, mint az egy lépésben történő előrebecslés.

A következmény bizonyítása. Az állítás jobb oldala az alábbi formába írható:

$$\mathscr{R}(\mathscr{R}(A,b^*,c^*),b,c) = \mathscr{R}(R^*AS^*,b,c) = R^{**}(R^*AS^*)S^{**} = (R^{**}R^*)A(S^*S^{**}).$$

A bal oldalból kapjuk, hogy

$$\mathscr{R}(A,b,c) = RAS.$$

De az *unicitás miatt*

$$RAS = (R^{**}R^*)A(S^*S^{**}).\ \blacksquare$$

2. A RAS MINT GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSI FELADAT

A továbbiakban a számolás egyszerűsítése érdekében, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j = 1.$$

Ezenkívül feltehetjük, hogy $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} > 0$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ és $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, mert ellenkező esetben sor illetve oszlop redukcióval a feladat ilyenné tehető.

Az előrebecslésre az alábbi *hipotézist* tesszük:

Akkor tartjuk "jónak" az $X = (\xi_{ij})$ *előrebecslést, ha – természetesen az* (1) *egyenletrendszer kielégítése mellett – az információnyereség (I-divergencia), amelyet az* X *tábla az* A *táblához képest ad, minimális, azaz, ha a*

(4) $$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}}$$

függvény értéke minimális.

A $\xi_{ij} \ln \dfrac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}}$ függvényt folytonos kiterjesztéssel a zárt pozitív ortánson értelmezzük úgy, hogy ha $\xi_{ij} = 0$, akkor $\xi_{ij} \ln \dfrac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} = 0$ legyen.

A (4) függvénynek a feltételi halmazon akkor lehet csak véges infimuma, ha $\alpha_{ij} = 0$ esetén $\xi_{ij} = 0$.

Jelöljük Q-val azon (i,j) index párok (cellák) halmazát, ahol $\alpha_{ij} > 0$ azaz:

$$Q = \{(i,j) \mid \alpha_{ij} > 0\}.$$

Igy feladatunk olyan $X = (\xi_{ij})$ értékek meghatározása, melyekre:

$$\xi_{ij} \geq 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m\,;\ j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\xi_{ij} = 0, \quad \text{ha} \quad (i,j) \notin Q$$

$$\sum_{j \mid (i,j) \in Q}' \xi_{ij} = \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{i \mid (i,j) \in Q}' \xi_{ij} = \gamma_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

és

$$\varphi(X) = \sum_{(i,j) \in Q}' \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} \tag{6}$$

minimális.

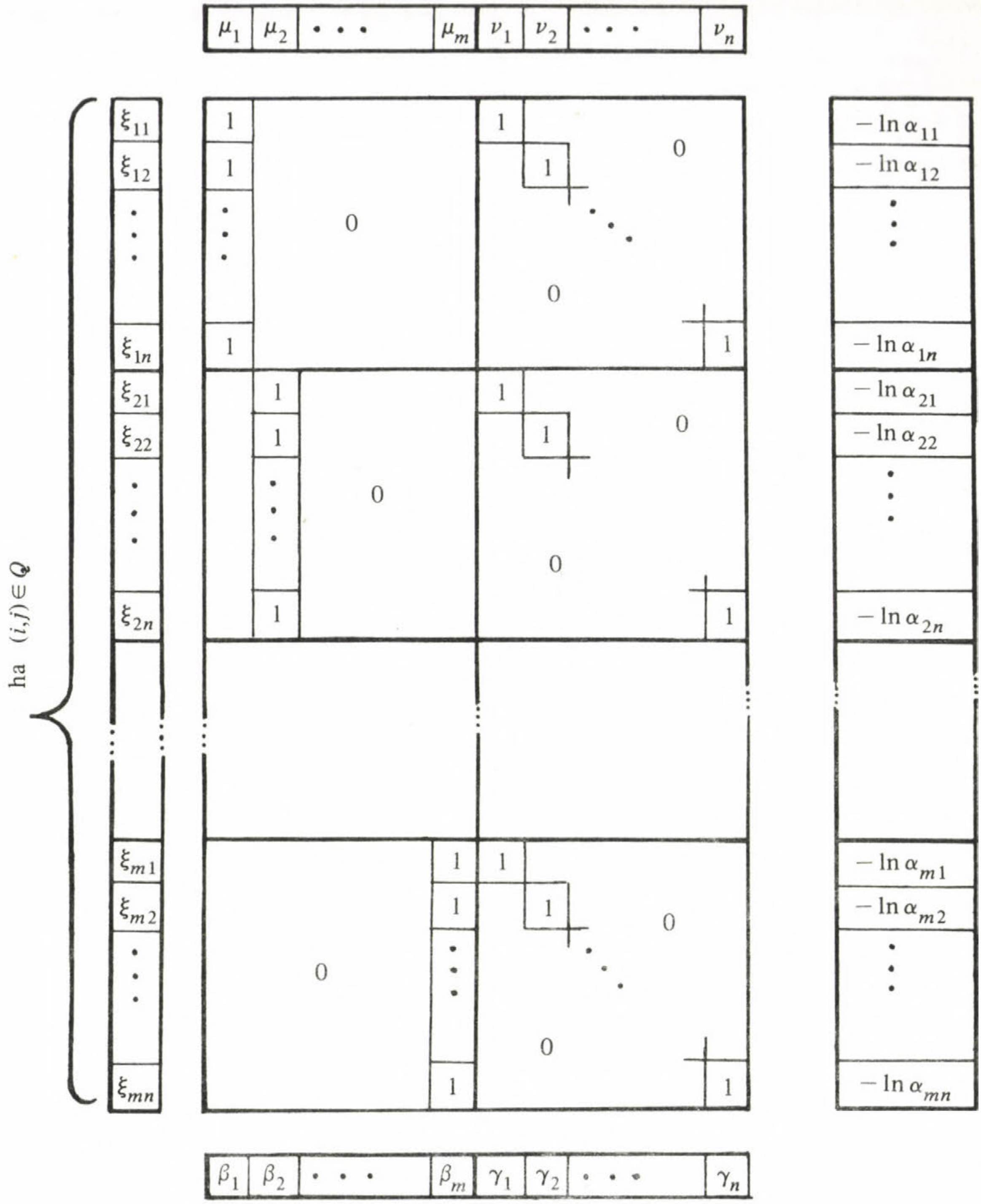
Az (5),(6) által leírt matematikai programozási feladat egy *geometriai programozási duál feladat* [1,2]. Hogy pontosabban lássuk ennek struktúráját, átírjuk a (6)-os célfüggvényt:

$$\varphi(X) = \sum_{(i,j) \in Q}' \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} = \sum_{(i,j) \in Q}' \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\sum\limits_{(i,j) \in Q}' \xi_{ij}} \cdot \frac{1}{\alpha_{ij}} = \sum_{(i,j) \in Q}' \xi_{ij} (-\ln \alpha_{ij}) + \tag{7}$$

$$+ \ln \frac{\prod\limits_{(i,j) \in Q} \xi_{ij}^{\xi_{ij}}}{\left(\sum\limits_{(i,j) \in Q}' \xi_{ij} \right)^{\sum\limits_{(i,j) \in Q} \xi_{ij}}}$$

Amennyiben az (5) által meghatározott feltételi halmaz nem üres (konzisztens a feladat), akkor a (7) célfüggvény felveszi minimumát, ugyanis a feltételi halmaz korlátos.

Irjuk fel ezen geometriai programozási duál feladat primál párját. Legyen a primál változók μ_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ és ν_j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$. A feladat együtthatóit az alábbi sémán szemleltetjük:



μ_1 μ_2 . . . μ_m ν_1 ν_2 . . . ν_n
ha $(i,j) \in Q$
ξ_{11}
ξ_{12}
ξ_{1n}
ξ_{21}
ξ_{22}
ξ_{2n}
ξ_{m1}
ξ_{m2}
ξ_{mn}
1
0
$-\ln \alpha_{11}$
$-\ln \alpha_{12}$
$-\ln \alpha_{1n}$
$-\ln \alpha_{21}$
$-\ln \alpha_{22}$
$-\ln \alpha_{2n}$
$-\ln \alpha_{m1}$
$-\ln \alpha_{m2}$
$-\ln \alpha_{mn}$
β_1 β_2 . . . β_m γ_1 γ_2 . . . γ_n

A primál geometriai programozási feladat: Meghatározandó a μ_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ és ν_j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ változók értéke úgy, hogy a

$$(8) \qquad \sum_{(i,j)\in Q} e^{\mu_i+\nu_j+\ln \alpha_{ij}} \leqslant 1$$

feltétel teljesüljön és a

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu_i + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \nu_j$$

célfüggvényérték maximális legyen.

A következőkben a feladatot egyrészt a "kanonikusság" feltételezésével, majd e nélkül tárgyaljuk.

A. Tegyük fel, hogy az (5),(7) által adott geometriai programozási duál feladat *kanonikus*, azaz, hogy az (5) egyenletrendszernek van $\xi_{ij} > 0$ (ha $(i,j)\in Q$) megoldása. Ez pontosan azzal equivalens, hogy a (3) feltétel teljesül.

A geometriai programozás eredményeit használva a következő megállapításokat tehetjük:

(i) *a geometriai programozási duál feladat kanonikus, így konzisztens és mivel feltételi halmaza korlátos, ezért van a* (7)*-es célfüggvényt minimalizáló*

$$\xi^*_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m\,; j = 1, 2, \ldots, n)$$

megoldása (5)*-nek. Mivel a* (7)*-es célfüggvény szigorúan konvex, így csak egy minimumpont van.*

(ii) *A feladat kanonikus és a duál célfüggvény korlátos,* ((*i*) *miatt*) *így van a primál feladatnak optimális*

$$\mu^*_i \ (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{és} \quad \nu^*_j, \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

megoldása (*pl.* [2], 54. *old.*).

(iii) *A* μ_i, ν_j, ξ_{ij} *megoldáspár akkor és csak akkor optimális, ha*

$$e^{\mu_i+\nu_j+\ln \alpha_{ij}} \sum_{(i,j)\in Q} \xi_{ij} = \xi_{ij}$$

minden $(i,j)\in Q$ *esetén* (*lásd pl.* [2] 47. *és* 59. *old.*).

Azaz

$$(10) \qquad \xi_{ij} = e^{\mu_i+\nu_j} \alpha_{ij}$$

minden $(i,j)\in Q$ *esetben.*

A fentiekből a RAS módszerrel és az *I*-divergencia minimalizálásával való előrebecslésekre az alábbi equivalenciát lehet kimondani.

2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az A,b,c paraméterű előrebecslési feladat a (3) feltételt ("kanonikussági feltétel") teljesiti. Akkor a RAS módszerrel és az I-divergencia minimalizálásával kapott előrebecslések megegyeznek.*

Bizonyıtás. a/ Ha $X = (\xi_{ij})$ és ρ_i, σ_j RAS módszerrel kapott, akkor legyen $\mu_i = \ln \rho_i$, $\nu_j = \ln \sigma_j$. A ξ_{ij} értékek (5)-öt teljesítik. Ugyszintén a ξ_{ij}, μ_i, ν_j értékek (10)-et is teljesítik. Egyszerűen adódik, hogy μ_i, ν_j (8)-at is teljesíti, ugyanis

$$\sum_{(i,j)\in Q}{}' e^{\mu_i+\nu_j+\ln \alpha_{ij}} = \sum_{i,j}{}' \xi_{ij} = 1.$$

Igy ξ_{ij}, μ_i, ν_j optimális megoldáspár.

b/ Ha $X = (\xi_{ij})$ és μ_i, ν_j a minimalizálással kapott, akkor legyen $\rho_i = e^{\mu_i}$, $\sigma_j = e^{\nu_j}$. Mivel ezek optimális megoldáspárok, ezért (10)-et teljesítik, azaz $\xi_{ij} = \rho_i \alpha_{ij} \sigma_j$. ∎

A 2. tételből az (1) megállapitást is figyelembevéve nyilvánvalóan adódik az 1. tétel bizonyitása.

B. Tegyük fel, hogy az (5) feltételi halmaz konzisztens.

Mielőtt ezt az esetet tárgyalnánk, megjegyezzük, hogy (5) konzisztenciájára a *Kõnig-Hall* tétel egy, számítástechnikailag is könnyen kezelhető, szükséges és elégséges feltételt ad: Jelentse Q a qualifikációt olyan értelemben, hogy I_i qualifikált J_j-hez akkor és csak akkor, ha $\alpha_{ij} > 0$. Jelöljön $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ és $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ index halmazokat. Valamely $P \subset I$ index halmazhoz a Q által kvalifikált $j \in J$ indexek halmazát jelöljük $J(P)$-vel. Ekkor az (5) konzisztenciájára szükséges és elégséges feltétel az, hogy bármely $P \subset I$ esetén a

$$\sum_{i\in P}{}' \beta_i \leqslant \sum_{j\in J(P)}{}' \gamma_j$$

egyenlőtlenség teljesüljön.

Jelöljön $E = (e_i) = (e^{(j)}) = (\epsilon_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrixot, ahol

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \alpha_{ij} > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad \alpha_{ij} = 0. \end{cases}$$

Legyen $\|E\| = \sum_{i,j}{}' \epsilon_{ij}$, $\|e_i\| = \sum_j{}' \epsilon_{ij}$, $\|e^{(j)}\| = \sum_i{}' \epsilon_{ij}$. Nyilván $\|E\| = \sum_i{}' \|e_i\| = \sum_j{}' \|e^{(j)}\|$.

Tekintsük a módosított $A, b_\epsilon, c_\epsilon$ előrebecslési feladatot, ahol

$$(11) \quad \begin{cases} \beta_i^{(\epsilon)} = \dfrac{\beta_i + \|e_i\|\epsilon}{1 + \|E\|\epsilon} \\ \\ \gamma_j^{(\epsilon)} = \dfrac{\gamma_j + \|e^{(j)}\|\epsilon}{1 + \|E\|\epsilon} \end{cases}$$

és $\epsilon \geqslant 0$ tetszőleges, de rögzített szám.

Nyilvánvaló, hogy $\epsilon \to 0$ esetén $\beta_i^{(\epsilon)} \to \beta_i^{(0)}$ $(\beta_i^{(0)} \equiv \beta_i)$ és $\gamma_j^{(\epsilon)} \to \gamma_j^{(0)}$ $(\gamma_j^{(0)} \equiv \gamma_j)$.

A módosított feladat minden $\epsilon > 0$ esetén *kanonikus* és így RAS formában előállítható az optimális $\xi_{ij}^{(\epsilon)}$ megoldás. (2. tétel).

Megmutatjuk, hogy ha "kicsit" módositjuk a feladatot, akkor az optimális megoldás is kicsit módosul, azaz fennáll az alábbi:

3. Tétel. *Az optimum hely folytonosan változik, azaz ha* $\epsilon \to 0$, *akkor* $X_\epsilon^* \to X_0^*$ $(X_0^* = X^*)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k, \ldots, \to 0$ sorozat, hogy $X_{\epsilon_k}^* \to \overline{X}$ és $\overline{X} \neq X_0^*$. Ekkor

(12) $\qquad \varphi(X_0^*) < \varphi(\overline{X}),$

mivel az eredeti $(\epsilon = 0)$ feladatnak csak egy minimum helye van.

A φ függvény folytonossága miatt:

$$\varphi(X_0^* + \epsilon_k E) \to \varphi(X_0^*), \qquad \text{ha} \quad \epsilon_k \to 0,$$

és

$$\varphi(X_{\epsilon_k}^*) \to \varphi(\overline{X}), \qquad \text{ha} \quad \epsilon_k \to 0.$$

De ekkor (12) miatt kell, hogy legyen olyan k_0 index, melyre már

(13) $\qquad \varphi(X_0^* + \epsilon_{k_0} E) < \varphi(X_{\epsilon_{k_0}}^*)$

Azonban $X_0^* + \epsilon_{k_0} E$ megengedett megoldása az ϵ_{k_0}-ás módosított feladatnak és (13) ellentétes azzal, hogy $X_{\epsilon_{k_0}}^*$ az optimális megoldás az ϵ_{k_0}-ás feladatra. ∎

A tételnek számítástechnikai jelentősége van. Ugyanis, mint említettük, a konzisztencia a Kőnig-Hall tétel feltételével egyszerűen ellenőrizhető, majd a kicsi pozitív ϵ számmal módosított feladat megoldása RAS formában kereshető.

3. ALGORITMUS

Tegyük fel, hogy az (5) feltételi halmaz konzisztens. Ekkor a RAS modell megoldására, azaz a

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} &= \beta_i, \qquad (i = 1, \ldots, m), \\ \sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} &= \gamma_j, \qquad (j = 1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \qquad (1^*)$$

$$\xi_{ij} = \rho_i \alpha_{ij} \sigma_j, \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n), \tag{2*}$$
$$\rho_i > 0, \quad (i = 1, \ldots, m),$$
$$\sigma_j > 0, \quad (j = 1, \ldots, n),$$

egyenletrendszer ξ_{ij} megoldására kézenfekvő eljárás az, hogy a (2*) kifejezést (1*)-ba helyettesítve adódó

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \sigma_j}$$

$$\sigma_j = \frac{\gamma_j}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \alpha_{ij}}$$

egyenletrendszerre *iterációt* alkalmazunk:

az iteráció kezdő lépése:

$\rho_i^{(0)}$ = tetszőleges pozitív szám. (szokásos például a $\rho_i^{(0)} = 1$, $(i = 1, \ldots, m)$ illetve a $\rho_i^{(0)} = \beta_i$, $(i = 1, \ldots, m)$ választás)

az iteráció k-adik lépése:

$$\sigma_j^{(k)} = \frac{\gamma_j}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i^{(k)} \alpha_{ij}}, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\rho_i^{(k)} = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \sigma_j^{(k-1)}}, \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\xi_{ij}^{(k)} = \rho_i^{(k)} \alpha_{ij} \sigma_j^{(k)}, \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n).$$

A fenti eljárást a megoldást adó ξ_{ij} előállítására már Selejkovszkij alkalmazta a 30-as években [11]. Ugy szintén ezt az eljárást javasolják D' Esopo-Lefkowitz [12], és dolgozatunkban az eljárás gyorsaságára és konvergenciájára vonatkozóan kedvező számítástechnikai tapasztalatokról számolnak be. *Az eljárás konvergenciájának bizonyitását* azonban *csak később Bregman* [13] *adta.* Természetesen azon feltevés, hogy az (5) feltételi halmaz konzisztens, a $\rho_i^{(k)}$ és $\sigma_j^{(k)}$ konvergenciáját nem biztosítja. Azonban számos – főleg közlekedési áramlási – előrebecslési feladatnál szükséges a ρ_i, σ_j értékeknek ismerete is, ezek ugyanis közlekedési modelleknél "taszítási", illetve "vonzási" együttható szerepet töltenek be, és a kibocsátó, illetve fogadó helyekre jellemzőül szolgálnak. Ilyenkor célszerű a fenti, 2.B. alatt leírt módosítást kicsi $\epsilon > 0$ pozitív számmal elvégezni. A 3. tétel szerint ekkor a ξ_{ij} megoldás is csak kicsit tér el a ténylegestől, és ebben az esetben már módunk van a ρ_i, σ_j közelítő értékének meghatározására is.

Az elmúlt években az Intézetben több különböző megbízásként (ÉVM Pécsi Tervező Iroda, UVATERV, VÁTI, KÖTUKI) foglalkoztunk a RAS modellel, mint a közlekedési és a tömegáramlási modellek részfeladatával és a modell megoldó algoritmus gépi programjának elkészítésével.

Irodalom

[1] R.I. Duffin, – E.L. Peterson, – C. Zener "Geometric Programming", John Wiley, New York, 1966.

[2] Klafszky E., "Geometriai Programozás" MTA Számítástechnikai Központ Közlemények 8. (1972) pp. 41-65.

[3] Alan M. Voorhees, "A General Theory of Traffic Movement" Proc. Inst. Traffic Eng. (1955) pp. 46-56.

[4] Gerald A.P. Carruthers, "An Historical Review of the Gravity and Potential Concepts of Human Interaction" J. Am. Inst. of Planners 22 (1956)

[5] Fratar, Thomas J., "Vehicular Trip Distribution by Successive Approximations Traffic Ouartely pp. 53-65 (January 1954)

[6] R. Stone, – J. Bates, – M. Bacharach "A programme for Growth Input-output relationsships 1954-66" University of Cambridge, 1963.

[7] R. Stone, – A. Brown "A long term growth model for the British Economy" (Az "Europes Future in Figures" c. könyvében. Szerk: R.C. Geary)

[8] Németh S., – Pór A., "Az ÁKM koefficiens-számításainak egyik Módszeréről". Országos Tervhivatal, Budapest, 1968.

[9] Glattfelder O., – Váczi P., "Néhány megjegyzés a RAS módszer elméletéhez". II. Magyar ÁKM konferencia, Siklós 1971 okt.

[10] Г.В.Шелейховский "Транспортные основания композиции городского плана". Гипрогор, Л., 1963.

[11] А.Г.Дынкин – Э.П.Мовчан "Методология расчета перспективных пассажиропотоков" /А "Применение матем. методов и ЭВМ в градостроительстве"
Киев, Будивельник, 1966./

[12] D.A. D'Esopo, – B. Lefkowitz, "An algorithm for computing intersonal transfers using the gravity model". Oper. Res., 1963, 11. No. 6, pp. 901-907.

[13] Л.Брэгман "Доказательство сходимости метода Г.В. Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями"
Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики, 1967. No.1., 147-156.

Beérkezett: 1972. dec. 6.

Summary

ON THE PREDICTION OF THE INPUT-OUTPUT TABLE

In this paper we are going to show that the RAS method of prediction of the input table can be considered as a task of mathematical programming. From this fact the existence and the uniqueness of the solution of the RAS simply follow.

Р е з ю м е

О ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ ТАБЛИЦЫ ВВОДА – ВЫВОДА

В этой работе мы покажем, что модель RAS, служащую для предварительной оценки таблицы ввода – вывода, можно рассматривать, как задачу математического программирования. Использование этого факта дает возможность легко получить существование и единственность решения модели RAS.

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

EGY FOLYAMATOS NYILVÁNTARTÁS SZTOCHASZTIKUS KÉSZLETGAZDÁLKODÁSI MODELL ISMERTETÉSE ÉS ÉRZÉKENYSÉGI VIZSGÁLATA

dr. Gerencsér László

BEVEZETÉS

Folyamatos nyilvántartású készletgazdálkodáson azt értjük, hogy a készletek szintje, és az azokban bekövetkező változások állandó ellenőrzés allatt állnak, szemben a korábbi gyakorlattal, amikor a készletek felülvizsgálata meghatározott időközönként (pl. negyedévenként) történt. A modell szokásos elnevezése: r,Q modell, ahol r egy alsó biztonsági szint, Q a tételnagyság. A modell alkalmazásának előfeltétele a teljesen gépesített adatfeldolgozás. Ez a feltétel számos külföldi vállalatnál adva van, s ezért a folyamatos nyilvántartási készletgazdálkodási modellek alkalmazása elterjedt, amennyire ezt a szakirodalom tükrében megítélhetjük. A modell a hazánkban is alkalmazott s,S modell egy továbbfejlesztése és több előnyös új tulajdonsággal bír. A dolgozatban a modell leírásán túl a költségfüggvény vizsgálatára összpontosítjuk figyelmünket. Megmutatjuk, hogy ez jó közelítéssel konvex függvény. Diszkutáljuk az optimális r_0,Q_0 paraméterekre kapott egyenleteket, valamint r_0,Q_0 függését a modell bemenő paramétereitől.

1. A MODELL LEIRÁSA

A modell egyetlen cikk készletezésével foglalkozik. A cikkel szemben jelentkező igényeket egy független és stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat írja le.

Felsoroljuk a modell előre megadott jellemzőit:

$f(x,t)$	a t idő alatt beérkező igény sűrűségfüggvénye
λ	az igények átlagos sebessége
τ	szállítási idő
A	rendelési költség
IC	idő- és mennyiségarányos készletezési költség
$\hat{p}$	idő- és mennyiségarányos hiányköltség.

A folyamat ellenőrzésen azt értjük, hogy amint a készletállapot elér egy általunk előírt r alsó szintet, feladunk egy rendelést Q nagyságú tételre. A feladott rendelés fix τ fix idő után érkezik meg.

Jelölje D az időegységre eső átlagkészletet, B az időegységre eső átlaghiányt. Mivel a rendelés feladásának gyakorisága átlagosan $\frac{\lambda}{Q}$, az egy időegységre eső átlagos költségre a

(1.1) $$K(r,Q) = \frac{\lambda}{Q} A + ICD + \hat{p} B$$

kifejezést írhatjuk fel. A B átlaghiány kiszámításához megjegyezzük, de nem bizonyítjuk, hogy a készletállapot eloszlása r és $r+Q$ között egyenletesnek tekinthető bármely időpillanatban, ha a folyamat már hosszú ideje tart. Ezért

(1.2) $$B = \frac{1}{Q} \int_r^{r+Q} b(x)dx$$

ahol $b(x)$ az x készletállapothoz tartozó átlaghiány. Ezt a következőképpen kell értenünk. Az x készletállapot τ idő után realizálódik fizikai készletként. A τ idő alatt jelentkező igényt jelölje y. A hiány kiszámítását a τ időpontra vonatkoztatva írhatjuk, hogy ennek nagysága

(1.3) $$b(x) \equiv E(y-x)^+$$

ahol z^+ a z pozitív részét jelöli. Integrálalakban írva

(1.4) $$b(x) = \int_x^\infty (y-x) f(y,\tau) dy$$

Az (r,Q) modellre az átlag hiány számításánál elfogadott közelítés a következő

(1.5) $$B = \frac{1}{Q} \int_r^\infty b(x)dx$$

Ennek jogosságát természetesen ellenőrizni kell. Az integrálkifejezésre bevezetjük a

(1.6) $$\beta(r) = \int_r^\infty b(x)dx$$

jelölést.

Ami az átlagkészletet illeti, könnyen bebizonyítható a következő állítás:

(1.7) $$D = B + \frac{Q}{2} + r - \mu$$

ahol

(1.8) $\mu = \lambda\tau$

a szállitási idő alatt jelentkező igény várható értéke. A B-re és D-re adott új kifejezések alapján költségfüggvényként a következő kifejezést használjuk

(1.9) $$K(r,Q) = \frac{\lambda}{Q}A + IC(\frac{Q}{2} + r - \mu) + (IC + \hat{p})\frac{\beta(r)}{Q}$$

2. AZ ELSŐ DERIVÁLTAK KISZÁMITÁSA

A költségfüggvény vizsgálatának egyik lehetséges módja az (s,S) modellre ismert eredmények alkalmazása. Az (s,S) modell ugyanis átmegy az (r,Q) modellbe, ha a felülvizsgálások között eltelt idő zérushoz tart. Mi ettől különböző utat választunk, hogy elkerüljük a (s,S) modellre való hivatkozást, főleg pedig azért, hogy kiaknázzuk a modell speciális vonásait.

Számítsuk ki a parciális deriváltakat:

(2.1) $$\frac{\partial K}{\partial r} = IC + (IC + \hat{p})\frac{\beta'(r)}{Q}$$

(2.2) $$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{-\lambda A + (IC + \hat{p})\beta(r)}{Q^2} + \frac{IC}{2}$$

A parciális deriváltakat 0-val egyenlővé téve a következő két egyenletet kapjuk

(2.3) $$Q = -\frac{IC + \hat{p}}{IC} \cdot \beta'(r)$$

(2.4) $$Q^2 = \frac{2\lambda A}{IC} + \frac{2(IC + \hat{p})}{IC}\beta(r)$$

Ezen egyenletek megoldásai szolgáltatják az optimális r_0, Q_0 értékeket.

Még egy megjegyzés az r szerinti deriváltakról.
Az átlaghiány (1.2) kifejezésben elvégezve az $y = x - r$ helyettesítést $\frac{\partial K}{\partial r} = 0$-ból egyszerű számolás után a következő ismert alakú eredményre jutunk:

(2.5) $$\frac{1}{Q}\int_{\partial}^{Q} F(y + r,\tau)dy = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}}$$

ahol $F(y,\tau)$ az $f(x,\tau)$ sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvény. A baloldalon egy keverékeloszlás áll, amit $H(r)$-rel jelölhetünk és az optimális r szintre a

(2.6) $$H(r) = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}}$$

egyenletet kapjuk.

3. A KONVEXITÁS FELTÉTELE

Vizsgáljuk az r,Q változókat továbbra is külön-külön. A második deriváltakra a

(3.1) $$\frac{\partial^2 K}{\partial r^2} = \frac{(IC + \hat{p})}{Q} \cdot \beta''(r)$$

(3.2) $$\frac{\partial^2 K}{\partial Q^2} = \frac{2\lambda A + 2(IC + \hat{p})\beta(r)}{Q^3}$$

egyenleteket kapjuk. Mindjárt látjuk, hogy K Q-ban konvex függvény. Számítsuk még ki β''-t. (1.6) alapján:

(3.3) $$\beta'(r) = -\, b(r)$$

Felhasználva $b(r)$ formuláját, (1.3)-t, kapjuk, hogy

(3.4) $$b'(x) = F(x,\tau) - 1$$

A két eredményt összevetve adódik, hogy

(3.5) $$\beta''(r) = 1 - F(r,\tau)$$

$F(x,\tau)$ eloszlásfüggvény lévén a jobboldal mindig nemnegatív. Kimondhatjuk tehát, hogy $K(r,Q)$ külön-külön mindkét változójában konvex.

A két változóban való együttes konvexitásához kiszámítjuk a költségfüggvény második deriváltjaiból alkotott mátrix determinánsát. Ez bármilyen költségtényezők mellett pozitív, ha teljesül a következő feltétel:

(3.6) $$2\beta \geqslant \frac{(\beta')^2}{\beta''}$$

E feltétel teljesülését illetően első megjegyzésünk az, hogy az egyenlőtlenség két oldalán szereplő függvények deriváltjaira fordított irányú egyenlőtlenség érvényes. Deriválás és rendezés után ugyanis a

(3.7) $\beta''' \leqslant 0$

egyenlőtlenségre jutunk, ami nem más, mint

(3.8) $-f(x,\tau) \leqslant 0$

Mármost $\beta(r)$ zérushoz tart, midőn r tart végtelenhez. Ha ugyanezt sikerül megmutatni a jobboldalról is, akkor a (3.6) egyenlőtlenségnek minden r-re fenn kell állnia.

A jobboldal négyzetgyöke

(3.9) $$\frac{\int_x^\infty (y-x)f(x,\tau)dx}{\sqrt{1-F(x,\tau)}}$$

A L' Hospital szabály alkalmazásával elegendő a zérushoz tartást az

(3.10) $$\frac{f(x,\tau)}{\sqrt{1-F(x,\tau)}}$$

hányadosról igazolni. A L' Hospital szabályt e tört négyzetére alkalmazva az

(3.11) $f'(x,\tau) \longrightarrow 0$

feltételt kapjuk. Ez tehát $K(r,Q)$ konvexitásának elégséges feltétele. A feltétel a gyakorlati eloszlások mindegyikére teljesül.

Az eddig elmondottak illusztrálására megvizsgáljuk a normális eloszlással való közelítés esetét.

4. KÖZELITÉS NORMÁLIS ELOSZLÁSSAL

Jelölje $\varphi(x)$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét, $\phi(x)$ az eloszlásfüggvényt, $\phi^c(x)$ a kiegészítő eloszlásfüggvényt:

(4.1) $$\phi^c(x) = \int_x^\infty \varphi(x)dx$$

Először közöljük azokat a formulákat, amelyeket az

(4.2) $$F(x,\tau) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

esetére kapunk,

(4.3) $$\beta''(r) = \phi^c\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)$$

(4.4) $\beta'(r) = \sigma\varphi(\frac{r-\mu}{\sigma}) + (r-\mu)\,\phi^c(\frac{r-\mu}{\sigma})$

(4.5) $\beta(r) = \frac{1}{2}\left[\sigma^2 + (r-\mu)^2\right]\phi^c(\frac{r-\mu}{\sigma}) - \frac{1}{2}\sigma(r-\mu)\varphi(\frac{r-\mu}{\sigma})$

A normális eloszlással való közelítés különböző vizsgálatai (3.6)-hoz hasonló alakú egyenlőtlenségek vizsgálatára vezettek. Az ezzel kapcsolatos eredményeket egy segédtételben foglaljuk össze. Közvetlen alkalmazására itt nem kerül sor, ez többnyire rutinfeladat, megfogalmazását mégis hasznosnak gondoljuk.

Segédtétel. *A*

(4.6) $\phi^c(x) \geqslant \frac{\varphi(x)}{\nu(x)}$

egyenlőtlenség teljesüléséhez elegendő, ha a jobboldal zérushoz tart, ha $x \to \infty$, *feltéve, hogy*

(4.7) $x \cdot \nu(x) + \nu'(x) \leqslant \nu^2(x)$

A bizonyitáshoz irjuk fel az

(4.8) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} k(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\nu(x)}$

egyenlőséget, ahol $k(x)$ *egyenlőre ismeretlen függvény. Ha meg tudjuk mutatni, hogy*

(4.9) $k(x) \leqslant 1$

akkor a (4.6) *egyenlőség helyes.*
Differenciálva (4.8) *mindkét oldalát az*

(4.10) $x\nu + \nu' = \nu^2 k$

egyenletet kapjuk. (4.7) *alapján itt* $k(x)$ *kisebb egynél. A* (4.10) *alapján bevezetett* $k(x)$ *függvénnyel* (4.8) *jobb és baloldalának deriváltjai egyenlők, továbbá mindkét oldal zérushoz tart, ha* $x \to \infty$, *ezért* (4.8) *érvényes.*
A segédtételt ezzel bebizonyitottuk.

Példaként megemlítjük, hogy a (3.6) feltétel vizsgálatához a segédtételt alkalmazhatjuk a

(4.11) $\nu(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$

függvénnyel.

5. AZ ALAPEGYENLETEK DISZKUSSZIÓJA

Nem nehéz belátni, hogy $K(r,Q)$ a végesben veszi fel minimumát. A jobb megérthetőség kedvéért itt újra felírjuk azt a két egyenletet, amelyből az optimális r_0, Q_0 szinteket kiszámítjuk.

$$Q = -\frac{IC + \hat{p}}{IC}\beta'(r) \tag{5.1}$$

$$Q^2 = \frac{2\lambda A}{IC} + \frac{2(IC + \hat{p})}{IC}\beta(r) \tag{5.2}$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$z = Q^2$$

$$a = \frac{2\lambda A}{IC} \tag{5.3}$$

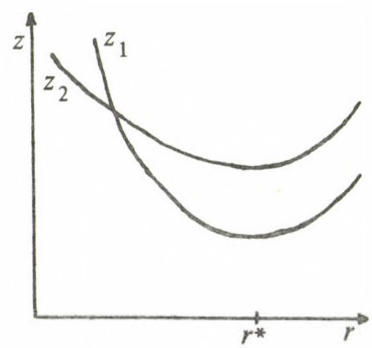
$$k = \frac{IC + \hat{p}}{IC}$$

Ezekkel egyenleteink a következőképpen módosulnak:

$$z = k^2(\beta')^2 \tag{5.4}$$

$$z = a + 2k\beta \tag{5.5}$$

A két egyenlet által definiált $z_1(r)$ és $z_2(r)$ görbék relatív elhelyezkedését fogjuk először megvizsgálni. Meggondolásainkat az ábrán követhetjük, ahol a szemléletesség kedvéért egy lineáris tagot adtunk mindkét függvényhez.



Vezessük be az r^* szintet az

$$(5.6)\qquad F(r^*,\tau) = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}}$$

egyenlet alapján. Azt állítjuk, hogy

$$(5.7)\qquad \frac{dz_1}{dr} < \frac{dz_2}{dr} \quad \text{ha} \quad r < r^*$$

A fordított irányú egyenlőtlenség érvényes, ha $r > r^*$.

A bizonyításhoz végezzük el a deriválást. A lehetséges egyszerűsítések után a

$$(5.8)\qquad \beta''k > 1$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mármost $r < r^*$ miatt

$$(5.9)\qquad \beta'' = 1 - F(r,\tau) > \frac{IC}{IC + \hat{p}}$$

ezért (5.7) érvényes. Hasonlóan okoskodunk $r > r^*$ esetén is.

Most megmutatjuk, hogy az (5.4),(5.5) egyenletrendszer r_0 megoldására teljesül az

$$(5.10)\qquad r_0 < r^*$$

egyenlőtlenség, feltéve, hogy $K(r,Q)$ konvex.

Az állítást először az $a = 0$ esetre igazoljuk. Ekkor az (5.4),(5.5) egyenletekből a

$$(5.11)\qquad \beta'^2(r_0) \cdot k = 2\beta(r_0)$$

egyenletet kapjuk r_0-ra. Tegyük fel, hogy $r_0 > r^*$, ami (5.8)-hoz hasonlóan

$$(5.12)\qquad \beta''(r_0)\, k < 1$$

alakban írható. Az előbbi egyenletből k-t kifejezve a

$$(5.13)\qquad \frac{2\beta'' \cdot \beta}{\beta'^2} < 1$$

eredményt kapjuk. Ez azonban ellentétben áll a költségfüggvény konvexitásával egyenértékű (3.6) feltétellel. Mármost növekvő a esetén a $z_2(r)$ görbe a z tengely irányában párhuzamos eltolással mozdul el. Amennyiben kellő elmozdulás esetén a $z_1(r)$ és $z_2(r)$ görbék r^*-tól balra eső ágai megszünnének egymást metszeni, úgy volna olyan a érték, amely mellett a két görbe éppen érintené egymást. Ez azonban (5.7) alapján nem lehetséges.

6. ÉRZÉKENYSÉGI VIZSGÁLATOK

Vizsgáljuk meg végül az optimális r_0, Q_0 értékek függését a modell bemenő paramétereitől. Az ábráról is leolvashatunk kvalitatív összefüggéseket, de nem minden irányban. A bemenő paramétereket rögzítsük a már (5.3)-ban definiált a-ban és a megbízhatósági szintet jellemző

$$(6.1) \qquad \gamma = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}}$$

tényezőben. A korábbi k-val a következő kapcsolat áll fenn:

$$(6.2) \qquad \gamma = \frac{1}{1 - k}$$

Az (5.4),(5.5) egyenletek alapján vizsgáljuk az $r_0(a,\gamma)$, $Q_0(a,\gamma)$ függvényeket. Először a γ szerinti parciális deriváltakat adjuk meg:

$$(6.3) \qquad \frac{\partial r_0}{\partial \gamma} = \frac{\beta'^2 - \beta(1-\gamma)}{(1-\gamma)\beta'(1-\gamma-\beta'')}$$

$$(6.4) \qquad \frac{\partial Q_0}{\partial \gamma} = \frac{\beta'^2 - \beta\beta''}{\beta'(1-\gamma)(1-\gamma-\beta'')}$$

Mindkét kifejezésről megmutatható, hogy pozitívak, amennyiben K-ra a konvexitási feltétel teljesül. Ez r esetén szemléletes is könnyen bizonyítható.

Kevésbé szemléletes Q_0-nak γ-ban való monotonitása és annak bizonyítása a segédtétel egy nem éppen könnyű alkalmazását igényli.

A teljesség kedvéért megadjuk az a szerinti deriváltakat is:

$$(6.5) \qquad \frac{\partial r_0}{\partial a} = \frac{(1-\gamma)^2}{-2\beta'(1-\gamma-\beta'')}$$

$$(6.6) \qquad \frac{\partial Q_0}{\partial a} = \frac{1-\gamma}{-2(1-\gamma-\beta'')}$$

Egészen könnyű megmutatni, hogy az első kifejezés negatív, a második pozitív. Ez az az eredmény, amelyet az ábráról is leolvashatunk.

Az optimális paraméterek érzékenységének birtokában további karakterisztikák érzékenysége is kiértékelhető. A kapott kifejezésekben szereplő függvények jól számíthatók, ezért az eredmények a gyakorlat számára sem közömbösek.

Irodalom

G. Hadley – T. Whitin   Analysis of inventory systems.
Prentice Hall, 1968.

Beérkezett: 1972. szept. 25.

Summary

DESCRIPTION OF A TRANSACTION REPORTING STOCHASTIC INVENTORY MODEL AND ITS SENSITIVITY ANALYSIS

We describe the well-known (r,Q) model, which is introduced in the book of Hadley and Whitin. We find a sufficient condition for the convexity of the cost functions. The optimal values r_0, Q_0 of the parameters r, Q are found by solving an algebraic equation of one variable. We give estimations of r_0, Q_0 and obtain formulas for the derivatives of r_0, Q_0 with respect to the cost of placing an order and a certain security factor.

Р е з ю м е

ОПИСАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО МОДЕЛЯ С ПОСТОЯННЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ И АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Опишем известный (r,Q) модель, который введен в книге Хедли и Уайтин. Найдем достаточное условие для выпуклости функции стоимости. Оптималные значения r_0, Q_0 параметров r, Q найдены решением алгебрайческого уравнения одного переменного. Найдем оценки для r_0, Q_0 и выведем формулы производных r_0, Q_0 по стоимости транспорта и по некоторым факторам надежности.

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

KÉTSZERESEN FOKOZATOS KÖZELITÉS

Balla Katalin

Véges számú aritmetikai művelettel nem előállítható függvények gyöke az ismert iterációs módszerekkel csak előre jól nem becsülhető képlethibával és műveletszámmal számítható ki. Az alábbi tétel lehetőséget ad az egyenletek tetszőleges pontosságú megoldására, alkalmazásaiban pedig a műveletszám becslésére.

Legyen M teljes metrikus tér, $\{A_n\}$ operátorsorozat, amely az

$N = \{x \in M : \rho(x,a) \leq r, a, r$ rögzített$\}$ zárt gömbben kielégíti a következő feltételeket:

1. Létezik N-ben olyan A operátor, hogy

$$\rho(A_n x, Ax) \leq L^n \cdot C \qquad x \in N,\ 0 < L < 1$$

teljesül (C-konstans).

2. Tetszőleges $x, y \in N$-re

$$\rho(A_n x, A_n y) \leq K \cdot \rho(x,y) \qquad 0 < K < 1$$

3. Az $a \in N$ pontban

$$\rho(A_n a, a) \leq (1 - K) \cdot r$$

K és L közös az egész sorozatra.

Tétel. *Az* 1.-3. *feltételek mellett az* $x_{n+1} = A_n x_n$ *sorozat tetszőleges* $x_0 \in N$ *esetén konvergens.*
Ha $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$, *akkor* $\alpha = A\alpha$ *és N-ben ez az egyetlen fixpont.*

Bizonyítás.

1/ 1. miatt az $\{A_n\}$ operátorsorozat egyenletesen konvergens: tetszőleges $\epsilon > 0$-ra ha n elég nagy, akkor

$$\rho(A_n x, Ax) \leq \epsilon \quad \text{minden } x \in N\text{-re.}$$

Ezért

$$\rho(Ax, Ay) \leq \rho(Ax, A_n x) + \rho(A_n x, A_n y) + \rho(A_n y, Ay) \leq 2\epsilon + K \cdot \rho(x,y)$$

valamint

$$\rho(Aa, a) \leq \rho(Aa, A_n a) + \rho(A_n a, a) \leq \epsilon + (1 - K) \cdot r$$

Mivel ϵ tetszőlegesen kicsinynek választható, így A eleget tesz a

2*. $(Ax,Ay) \leqslant K \cdot (x,y)$

3*. $(Aa,a) \leqslant (1 - K) \cdot r$

egyenlőtlenségeknek N-ben. Igy A-ra alkalmazható a közismert kontrakciós tétel: az $x = Ax$ egyenletnek N-ben létezik egyetlen megoldása. Jelöljük α-val.

2/ Jelölje F_k az $A_k \circ A_{k-1} \circ \ldots \circ A_1 \circ A_0$ kompozíciót.

$$\begin{aligned}\rho(\alpha,x_{n+1}) &= \rho(A\alpha,F_n x_0) \leqslant \rho(A\alpha,A_n\alpha) + \rho(A_n\alpha,F_n x_0) \leqslant L^n \cdot C + \\ &+ K \cdot \rho(\alpha,F_{n-1}x_0) = L^n \cdot C + K \cdot \rho(A\alpha,F_{n-1}x_0) \leqslant \ldots \leqslant \\ &\leqslant (L^n + K \cdot L^{n-1} + K^2 \cdot L^{n-2} + \ldots + K^{n-1} \cdot L) \cdot C + \\ &+ K^n \cdot \rho(A\alpha,A_0 x_0)\end{aligned}$$

Legyen $M = \max(L,K)$ $\quad d = \max(C, \rho(\alpha,A_0x_0))$

Innen $\rho(\alpha,x_{n+1}) \leqslant (n+1) \cdot M^n \cdot d$

Mivel pedig $M < 1$, ez a különbség tetszőlegesen kicsinnyé tehető.

Megjegyzések.

a) Az 1. feltétel nem lényegesen erősebb az egyenletes konvergencia feltételénél. Igaz ugyanis a következő: Ha az $\{A_n\}$ operátorsorozat valamely D tartományban egyenletesen konvergál A-hoz, akkor létezik olyan részsorozata, amely kielégíti a $\rho(A_n x,Ax) \leqslant L^n \cdot C$ $0 < L < 1$ feltételt. Elegendő az $\epsilon_n = L^n \cdot C$ értékekhez tartozó $\{A_n\}$ operátorsorozatot kiválasztani.

b) A 2. -3. feltétel még egyenletes konvergencia esetén sem helyettesithető a 2*. -3*. feltétellel. Pontosabban: A 2*. 3*. feltételt kielégítő A operátorra nézve még nem feltétlenül igaz, hogy a tetszőleges, hozzá egyenletesen konvergáló $\{A_n\}$ operátorsorozatnak létezne olyan részsorozata, amely valamely K'-vel teljesitené 2. -3.-t.

Triviális ellenpélda:

$M = R$ – a számegyenes a szokásos metrikával, $N_r = \{x : |x - 1| \leqslant r\}$, r – tetszőleges

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x & \text{ha} \quad 1 - \frac{1}{2^n} \geqslant x \quad \text{és} \quad 1 < x \\ 1 + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{ha} \quad 1 - \frac{1}{2^n} < x \leqslant 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 2 - x & \text{ha} \quad 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál a $\varphi(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ függvényhez. Tetszőleges K-val teljesül 3. és 3*. $a = 1$-ben. Továbbá $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

Ugyanakkor a $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat valamennyi eleme csupán a $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq |x - y|$ egyenlőtlenséget teljesíti, amely semmilyen r-nél nem élesíthető tovább.

c) Nyilvánvaló, hogy $A_n \equiv A$ esetén az ismert fokozatos közelítések módszeréhez jutunk. Egyébként az iterációs eljárás nem stacionárius.

Alkalmazások.

1. (Mint az előbbi példában) $M = R$ a valós számegyenes, $N = \{x : |x - a| \leq r\}$ zárt intervallum $\{\varphi_n(x)\}$ megfelelő tulajdonságú valós függvénysorozat.
Az $\{x_{n+1} = \varphi_n(x_n)\}$ sorozat határértéke $x_0 \in N$ esetén az $x = \varphi(x)$ egyenlet gyöke.

2. A metrikus tér a komplex sík, N-zárt körlap, $\{\psi_n(x)\}$ – komplex függvénysorozat.

Summary

ON THE DOUBLE SUCCESSIVE APPROXIMATION

The convergence of the "double" successive iterative process is proved when the conditions (1)-(3) are satisfied. The theorem can be applied for solving the equation $x = Ax$ and it allows us to estimate the error and the number of the operations.

Резюме

О ДВАЖДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В статье доказывается сходимость "дважды" последовательного итерационного процесса при выполнении условий (1) - (3) . Указывается, что теорема может применяться для вычисления корня уравнения x=Ax с оценимым числом операций и заданной точностью.

Beérkezett: 1972 nov. 9.

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

MAGNETOTELLURIKUS IMPEDANCIATENZOR MEGHATÁROZÁSA

dr. Verő József – dr. Varga Gyula

Az MTA Geodéziai és Geofizikai Intézetében kutatások folynak a magnetotellurikus impedanciatenzor numerikus meghatározására. A módszert, amely részben a szakirodalomban már meglévő eljárások figyelembe vételével lett kidolgozva, az alábbiakban ismertetjük, vázlatosan, csupán a feladatát és koncepcióját fejtve ki.

Az eljárás a következő részekre bontható:

1/ A különböző frekvenciájú jelek szétválasztása

2/ A tenzor meghatározására felhasználható információk kiválasztása

3/ Az impedancia-tenzor elemeinek kiszámítása

4/ Az impedancia és a látszólagos fajlagos ellenállás értékeinek különböző irányokba való megadása.

Ezeknek a lépéseknek a feladata röviden a következő:

1/ A terepen készült mágneses és tellirikus regisztrátumokban nagyon nagy frekvenciatartományban találhatók variációk. Elvileg többezer HZ-től az évszázados változás 10^{-10} HZ körüli frekvenciájú komponenséig diszkrét (pl. nap-napi és holdnapi hullám) és bizonyos sávra szétosztott energiájú összetevők egyaránt előfordulnak. A regisztrátumon azonban az észlelési idő és a digitalizálási köz által megszabott határok között ennek a tartománynak csak egy kisebb része értékesíthető. Az értékesíthető tartomány maximálisan a digitalizálás kétszeres hosszának megfelelő Nyqvist-periódustól a regisztrátum hosszának megfelelő periódusig tart, gyakorlatilag azonban ennél csak kisebb tartományt tudunk hasznositani. Az egyes periódusok szétválasztását a jelen esetben szűrők segítségével végezzük el. Az eljárás programja a megadott periodushatárok között elkészíti a szűrőt, majd a megadott adatsorral elvégzi a szűrés műveletét is.

2/ A gyakorlati tapasztalatok azt mutatják, hogy általában nem minden időszak használható fel az impedanciatenzor meghatározására. Feltehetőleg a mikropulzációk (vagy más variációk) forrásának helyzetétől függően bizonyos időszakokban az impedanciatenzor által megszabott összefüggés a mágneses és az elektromos komponensek között elveszti szigorú érvényét [1]. Ezen kívül esetleg időszakosan fellépő kóboráramok, a digitalizálás hibái vagy egyszerűen bizonyos periódusok időnkénti hiánya is okozhatja azt, hogy a korreláció mértéke csökken. Az ilyen szakaszokat a feldolgozásból ki kell zárni.

3/ Az impedanciatenzor elemeinek kiszámitására a legszemléletesebb képleteket Swift [2] adta meg, de hasonló képletek más szerzőknél is megtalálhatók. A képletek a tenzor elemeit az egyes komponensek átlagamplitúdója és a közöttük lévő koherencia segítségével fejezik ki.

Az impedanciatenzor elemeit a mágneses és elektromos komponensek 2-2, összesen tehát 4 különböző variációjában lehet kiszámítani; ezek közül a közvetlenül és az admittanciatenzor elemeiből kiszámított tenzorelemek a legstabilisabbak. (A legkevésbé érzékenyek a véletlen hibákra.) Azonban ezek sem adják a helyes értéket, hanem a kiegyenlítő számítás nyelvén kifejezve pl. az impedanciatenzor elemeinek közvetlen kiszámításakor csak a H komponens értékeit látják el javítással. Ez arra vezet, hogy a meghatározott Z tenzorelemek a helyes értéknél kisebbek lesznek. Szigorú eljárás csak az volna, ha az E komponens értékeit is ellátnánk javítással. Tekintettel arra, hogy ez a módszer sokkal bonyolultabb, ettől eltekintettünk, viszont helyette ugyanezzel a módszerrel meghatároztuk az A admittanciatenzor elemeit is, vagyis ekkor csak az E komponenseket látjuk el javítással:

$$H = A \cdot E$$

A Z tenzor elemeihez hasonlóan az A tenzor elemei is kisebb abszolút értékűek a helyes értéknél. Ez a megfelelő matematikai összefüggésekből látható be. Ennek következtében az $A \cdot Z$ szorzat nem lesz egyenlő az egységtenzorral. Iterációs úton a helyes nagyság elérése, illetve a szisztematikus hiba elkerülése céljából az A és a Z tenzort úgy változtatjuk, hogy szorzatuk az egységtenzort megközelítse. Ez a következőképpen történhetik:

Tekintsük az

$$A_1 = A \qquad\qquad A_{i+1} = \frac{1}{2}(A_i + Z_i^{-1})$$

$$\left.\begin{array}{ll} Z_1 = Z \qquad\qquad & \\ \end{array}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$Z_1 = Z \qquad\qquad Z_{i+1} = \frac{1}{2}(Z_i + A_i^{-1})$$

mátrixsorozatpárt. Legyen $A_i \cdot Z_i = E + \Delta_i$, ahol a Δ_i az egységmátrixtól való eltérés mátrixa. Mármost, ha a Δ_i mátrix normája 1-nél kisebb (amit feltételezünk), akkor

$$A_{i+1} \cdot Z_{i+1} = E + \frac{1}{4}\Delta_i^2 \cdot (E + \Delta_i)^{-1}$$

Ebben az esetben tehát

$$\frac{\|A_{i+1} \cdot Z_{i+1} - E\|}{\|A_i \cdot Z_i - E\|^2} \longrightarrow C \qquad (C \neq 0)$$

vagyis $A_i \longrightarrow A^*$

és $Z_i \longrightarrow Z^*$ amelyekre $A^* \cdot Z^* = E$.

A konvergencia másodrendű. Ez az eljárás az eddig ismertek közül egyike a leghatékonyabbaknak a zajok kiküszöbölésére.

Ez a közelítés azt jelenti, hogy a zajokat teljesen inkoherensnek tekintjük, s ennek megfelelően küszöböljük ki. Koherens zajok számításos kiküszöbölésére ez az út nem alkalmas.

Az elmondottakkal kapcsolatban azt jegyezzük meg, hogy az elsőként említett közelítés körülbelül a megszabott koherenciahatár négyzetének megfelelően csökkenti a tenzorelemeket, pl. az általunk gyakorlati tapasztalatok alapján gyakran alkalmazott 0,95-ös koherenciahatár esetében a főimpedanciákban kb. $(1-0{,}95^2)$. 100 % ≈ 10 %-os csökkenések adódnak maximálisan; a mellékimpedanciaelemek változásainak abszolút értéke is legfeljebb ekkora.

4/ Az impedanciatenzor különböző irányokban vett értékeit a Berdicsevszkij [3] által közölt képletekkel számoltuk, a főimpedancia értékeiből pedig meghatároztuk a látszólagos ellenállást is.

Az eljárás programja az MTA CDC 3300-as gépére készült ALGOL-ban. A regisztrátumok digitalizátoron kapott papírszalagjait a PTCONVRT FORTRAN szubrutin segítségével olvastuk be a gépbe és alakítottuk át, hogy azokat az ALGOL program felhasználhassa.

Irodalom

[1] Зилахи-Шебеш, Л. - Вере, Й.: Дигитальная частотная фильтрация и ее применение при обработке магнито-теллурических измерений. Acta Geod. Geoph. Mont. Hung. 4. (1969) 321.

[2] Swift, C.M., A Magnetotelluric Investigation of an Electrical Conductivity Anomaly in the Southwestern United States: Pb.D. thesis, M.I.T (1967)

[3] Методика магнитотеллурического профилирования, Москва, 1965.

Beérkezett: 1972 nov. 1.

Summary

NUMERICAL EVALUATION OF THE MAGNETOTELLURIC IMPEDANCE TENSOR

The paper describes a numerical procedure to determine from magnetic and telluric registrations, got on the field, the magnetotelluric impedance tensor. Further, from the principal impedance values the programme calculates the virtual specific resistance too.

Р е з ю м е

Определение магнитотеллурического тензора импеданции. Статья дает описание вычислительного метода, с помощью которого на основании магнитотеллурических измерений, произведенных на открытом месте, определяется магнитотеллурический тензор импеданции, а также, исходя из значений главных импеданций, определяется кажущееся специфическое сопротивление.

A FOLYTONOS IDEJŰ MÁSODRENDŰ AUTOREGRESSZIÓS FOLYAMAT PARAMÉTERBECSLÉSÉRŐL

Gy. Németh Teréz

A természet véletlen folymatai általában folytonos időben játszódnak le, de megfigyeléseket csak diszkrét időpontokban tehetünk.

A megfigyelések statisztikai kiértékelésekor, pl. a folyamat paramétereinek becslésekor gyakran már magát a véletlen folyamatot is diszkrét időben lejátszódóként kezelik. Ha a megfigyelések elvben tetszőlegesen sűríthetők, természetesebb az a megközelítés, amelynek során a folyamatot folytonos idejűnek tekintjük. Jelen dolgozatban példát adunk ennek az elvnek a következetes megvalósítására. Szimulációs módszerrel táblázatokat szerkesztünk a folytonos másodrendű autoregressziós folyamat paraméterei becslésének eloszlására.

A dolgozat végén az így nyert eredményeket alkalmazzuk a napfolttevékenység periódusának becslésére.

Tegyük fel, hogy a $\xi(t)$ folytonosan differenciálható realizációjú stacionárius folyamat a $0 \leqslant t \leqslant 1$ intervallumban eleget tesz a

(1) $$d\xi'(t) + (a_1 \xi'(t) + a_0 \xi(t))dt = dw(t)$$

másodrendű sztochasztikus differenciálegyenletnek, ahol $a_1 > 0$, $4a_0 > a_1^2$ valós számok, $w(t)$ pedig a standard Wiener-folyamat. (A sztochasztikus differenciálegyenlet matematikailag korrekt értelmezését lásd [4]-ben.)

Az (1.) másodrendű egyenlet a szokásos módon

$$\xi_1(t) = \xi(t), \quad \xi_2(t) = \xi'(t)$$

helyettesítéssel átírható elsőrendű egyenletrendszerré:

(2) $$\begin{aligned} &d\xi_1(t) - \xi_2(t)dt = 0 \\ &d\xi_2(t) + (a_1 \xi_2(t) + a_0 \xi_1(t))dt = dw(t) \end{aligned}$$

Az áttekinthetőség kedvéért írjuk (2.)-t vektoralakba:

(2a) $$d\underline{\xi}(t) - A\underline{\xi}(t)dt = d\underline{w}(t)$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$$

és $\underline{w}(t)$ a

$$B_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kovariancia mátrixú elfajult kétdimenziós Wiener-folyamat.

Az a_0, a_1 együtthatókra tett feltevés azt jelenti, hogy az A mátrix-nak sajátértékei negatív valósrészű komplex számok:

$$\lambda \pm i\omega = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

Ismeretes, hogy a (2.) egyenletnek elegettevő, folytonos idejű kétdimenziós vektor folyamat stacionárius Gauss-Markov folyamat $B(t) = e^{A|t|}B(0)$ kovariancia mátrixszal, ahol $B(0)$ az

(3) $$A \cdot B(0) + B(0)A^* = -B_w$$

összefüggésből határozható meg. A számításokat elvégezve nyerjük, hogy

(4) $$B(t) = \frac{e^{\lambda|t|}}{\omega} \begin{pmatrix} \omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega|t| & \sin \omega|t| \\ -(\lambda^2 + \omega^2) \sin \omega|t| & \omega \cos \omega t + \lambda \sin \omega|t| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{4\lambda(\lambda^2 + \omega^2)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\lambda} \end{pmatrix}$$

A (4.) összefüggésből leolvasható az ω és λ szemléletes jelentése: az (1.) egyenletnek elegettevő $\xi(t)$ folyamat kovariancia függvénye egy ω periódusú, λ csillapodási együtthatójú csillapított rezgőmozgást ír le.

A $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ $0 \leq t \leq 1$ kétdimenziós folyamat a $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = 0$ feltétel mellett a Kolmogorov-féle alaptétel értelmében valamilyen X mérhető téren egy P_A valószínűségi mértéket generál. Minthogy a kezdeti feltételek és a $\xi_1'(t) = \xi_2(t)$ összefüggés alapján $\xi_2(t)$ egyértelműen meghatározza $\xi_1(t)$-t, X mérhető teret választhatjuk a [0,1] intervallumon folytonos, $x_2(0) = 0$ feltételnek elegettevő függvények terének.

J.L. Doob (lásd [5]) bebizonyította, hogy P_A abszolút folytonos ugyanezen az X téren értelmezett P_w standard Wiener mértékre nézve.

A $\frac{dP_A}{dP_w}$ Radon-Nikodym derivált ismeretében az a_0, a_1 – vagy ami ugyanaz λ, ω – paraméterek becslése történhet a maximum-likelihood módszer segítségével.

Konkrét számításokra is alkalmazható, pontos formulák találhatók Arató [2] dolgozatában.

Ezek alapján

$$\text{(5)}\qquad \frac{dP_A}{dP_w} = \exp\left\{-\frac{a_0^2}{2}\int_0^1 x_1^2(t)dt - \frac{a_1^2-2a_0}{2}\int_0^1 x_2^2(t)dt + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{2}(x_2^2(1)-x_2^2(0)) - \right.$$

$$\left. - a_0a_1(x_1^2(1)-x_1^2(0)) - \frac{a_0a_1}{2}(x_1(1)-x_1(0)) - a_0(x_1(1)x_2(1)-x_1(0)x_2(0))\right\}$$

Innen az $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ becslésekre egyetlen realizáció alapján a következő közelítő formulák adódnak:

$$\text{(6)}\qquad \begin{aligned} \hat{a}_0 &= \int_0^1 x_2^2(t)dt \Big/ \int_0^1 x_1^2(t)dt \\ \hat{a}_1 &= 1\Big/ 2\int_0^1 x_2^2(t)dt \end{aligned}$$

Az $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ becslések aszimptótikus kovarianciája $\frac{B(0)^{-1}}{\mathrm{T}}$ ha $[0,\mathrm{T}]$-ben van a megfigyegyelés és $\mathrm{T} \to \infty$ (lásd Arató [2]).

Esetünkben $B^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -4\lambda(\lambda^2+\omega^2) & 0 \\ 0 & -4\lambda \end{pmatrix}$

A gyakorlatban az $\underline{x}(t)$ realizációt csak véges sok időpontban ismerjük ezért a (6.) képletben szereplő integrálokat integrálközelítő összegekkel helyettesítjük.

Tegyük fel, hogy a $\xi(t)$ folyamat értékeit a $t_k = k\delta$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ időpontokban ismerjük. Minthogy a (2.) egyenletnek elegettevő folytonos idejű kétdimenziós $\underline{\xi}(t)$ vektorfolyamat stacionárius Gauss-Markov folyamat $B(t) = e^{A|t|}B(0)$ kovariancia mátrix-szal (lásd (4.)), a $\underline{\xi}(k\delta)$ diszkrét idejű folyamat is stacionárius Gauss-Markov folyamat $B(k\delta) = e^{Ak\delta}B(0)$ kovariancia mátrixszal és megoldása a

$$\text{(7)}\qquad \underline{\xi}(n\delta) = e^{A\delta}\xi((n-1)\delta) + \underline{\epsilon}(n\delta)$$

differencia egyenletnek, ahol $\underline{\epsilon}(n\delta)$ független normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó sorozat $\underline{0}$ várhatóértékkel, B_ϵ kovariancia mátrixszal.

B_ϵ a

$$\text{(8)}\qquad B(0) = e^{A\delta}B(0)e^{A^*\delta} + B_\epsilon$$

egyenletből határozható meg.

Korábban diszkrét időpontokban végzett megfigyelések esetében a $\underline{\xi}(t)$ folyamat λ és ω paramétereit úgy becsülték, hogy a folyamat $\xi_1(n\delta)$ komponensét másodrendű autoregressziós folyamatnak tekintették. (A $\xi_2(n\delta)$ általában nem figyelhető meg.)

Tehát feltételezték, hogy $\xi_1(n\delta)$ kielégíti a

(9) $$\xi_1(n\delta) - b_1\xi_1((n-1)\delta) - b_0\xi_1((n-2)\delta) = \delta\epsilon(n)$$

másodrendű sztochasztikus differenciaegyenletet. ($\epsilon(n)$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változó sorozat.) A λ és ω paraméterek

(10) $$z^2 - b_0 z - b_1 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökeiből nyerhetők:

$$\lambda = Re \log z$$

$$\omega = Im \log z$$

A (9.) egyenlet $\xi_2((n-1)\delta) = \dfrac{\xi_1((n-1)\delta) - \xi_1((n-2)\delta)}{\delta}$ és $b_0 = 1 - a_1\delta + a_0\delta^2$,

$b_1 = a_1\delta - 2$ helyettesítésekkel a

$$\underline{\xi}(n\delta) = B\underline{\xi}((n-1)\delta) + \delta\underline{\epsilon}(n\delta)$$

elsőrendű differenciaegyenletbe megy át, ahol

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ -a_0\delta & 1 - a_1\delta \end{pmatrix}$$

és $\underline{\epsilon}(n)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kovariancia mátrixú normális eloszlású független valószínűségi vektorváltozó folyamat.

Mint tudjuk a valóságban a B mátrix $e^{A\delta}$ alakú, itt pedig csak ennek első közelítése, $I + A\delta$ szerepel, és B_ϵ sem $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}$ alakú, tehát a $\xi_1(n\delta)$ folyamat nem tekinthető másodrendű autoregressziós folyamatnak – emellett, ha z gyöke (10.) karakterisztikus egyenletnek, $\log z$ csak közelítőleg sajátértéke az A – mátrixnak.

Figyelembe véve, hogy a Radon-Nikodym deriváltban szereplő $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ statisztikák csak közelítőleg számíthatók ki, a teljesen korrekt eljárás az lenne, hogy a $\underline{\xi}(n\delta)$ folyamatot eleve $e^{A\delta}$ együtthatómátrixú elsőrendű diszkrét autoregressziós folyamatként kezelnénk, és az általa definiált végesdimenziós valószínűségi eloszlásra alkalmaznánk a maximum-likelihood módszert. Ez azonban a gyakorlatban legtöbbször nem kivitelezhető, mert nem ismerjük a folyamat $\xi_2(n\delta)$ komponensét.

A tapasztalat azt mutatja, hogy az így nyert (bonyolultabb képletekkel megadott) becslések nem is jobbak a fentieknél.

Az MTA CDC 3300 gépén szimulációs módszer segítségével a $\hat{\lambda},\hat{\omega}$ becslések eloszlásaira táblázatok készültek. A szimulációs modell megválasztásánál a következő elveket vettük figyelembe. (Nyilvánvaló, hogy akár a valódi, akár a szimulált folyamat realizációit dolgozzuk fel, a realizációnak csak véges sok t_i $(i = 1, \ldots, N)$ időpontban felvett értékeit vehetjük figyelembe.) Az A, $B(0)$, B_ϵ mátrixok ismeretében a szimuláció menete a következő: véletlenszám-generátor segítségével a (7.) összefüggés alapján stacionárius indítással rekurzíve előállítjuk az $\underline{x}(k\delta)$ realizációt $k = 1, 2, \ldots, N$. A stacionárius indítást egy $B(0)$ kovarianciamátrixú, 0-várható értékű normális eloszlású $\underline{x}(0)$ véletlen vektor generálásával biztosítjuk.

A gyakorlatban előfordulhat, hogy a $\underline{\xi}(t)$ vektorváltozónak csak az első komponense figyelhető meg és ilyenkor a becslés során a folyamat második komponensét az

$$x_2^*(i\delta) = \frac{x_1((i+1)\delta) - x_1(i\delta)}{\delta}$$

differenciahányadossal helyettesítjük. Szükségünk lehet az ílymódon nyert becslések eloszlásaira is. Ezért az $\underline{x}(k\delta)$ realizációval párhuzamosan generálunk egy $\underline{x}^*(k\delta)$ sorozatot is, ahol

$$x_1^*(k\delta) = x_1(k\delta)$$

$$x_2^*(k\delta) = \frac{x_1((k+1)\delta) - x_1(k\delta)}{\delta}$$

Az $\underline{x}(k\delta)$ ill. $\underline{x}^*(k\delta)$ realizációk alapján (6.)- összefüggésből számítottuk az $\hat{a}_0,\hat{a}_1,\hat{a}_0^*,\hat{a}_1^*$ becsléseket, illetve a nekik mehfelelő $\hat{\lambda},\hat{\omega},\hat{\lambda}^*,\hat{\omega}^*$ becsléseket, ahol

$$\hat{\lambda} = -\frac{\hat{a}_1}{2} \qquad \hat{\omega} = \sqrt{\hat{a}_0 - \frac{\hat{a}_1^2}{4}}$$

Minden rögzített λ,ω paraméterpárra kiszámítottuk a becslések

$$\hat{\lambda}_i,\ \hat{\omega}_i,\ \hat{\lambda}_i^*,\ \hat{\omega}_i^* \qquad (i = 1, \ldots, 100)$$

sorozatát és meghatároztuk empirikus eloszlásaikat. A $\hat{\lambda}, \hat{\lambda}^*$ eloszlásának 1, 5, 10, 90, 95 és 99% kvantiliseire az 1. táblázatot állítottuk össze. A táblázatban megadtuk az empirikus eloszlások átlagait és szórásait is. Az egy realizációhoz tartozó beosztások száma 50-től 1000-ig változott (lásd a megjegyzéseket).

Meghatároztuk az

(11) $$\omega_{st} = (\hat{\omega} - \omega)(\int_0^1 x_1^2(t)dt + \int_0^1 x_2^2(t)dt)^{1/2}$$

standardizált becslések eloszlásainak várható értékét, szórását, ferdeségét, lapultságát is:

λ	ω	$M\omega_{st}$	$D\omega_{st}$	Ferdeség	Lapultság
0.1	10	0.08	0.95	1.1	4.1
0.1	5	0.29	1.3	0.19	2.37
0.5	10	0.16	0.65	0.34	2.4
2	30	0.017	0.54	0.38	3.2
1	100	–0.097	1.17	0.016	2.899
40	100	0.06	0.6	3.4	2.71

A napfoltttevékenység közel 2 évszázados (N = 174 év) adatai (1. Anderson [1]) alapján kiszámítottuk a λ,ω paraméterek becsléseit. Itt az (1.) egyenletben szereplő $w(t)$ Wiener folyamat lokális szórása nem 1, hanem valamilyen ismeretlen σ paraméter. A σ becslése egyetlen realizáció alapján a következő összefüggésből számítható ki:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(d\xi'(t_i)\right)^2 \longrightarrow \sigma^2$$

Megfelelő normálások elvégzése után a következő becslések adódtak:

$\hat{\lambda} = -44{,}7$ $\quad\hat{\omega} = 97{,}59$ $\quad\hat{T} = \dfrac{2\pi N}{\hat{\omega}}$ összefüggés alapján a $\hat{T}$ periódushosszra pedig 11.3 év.

A $\hat{\lambda}$ becsléshez szerkesztett konfidenciaintervallumok Arató M [3] táblázata alapján:

$\lambda_{0.9} = 55.5$ $\quad\lambda_{0.95} = 59.0$ $\quad\lambda_{0.99} = 65.0$

$\lambda_{0.1} = 31.0$ $\quad\lambda_{0.05} = 28.0$ $\quad\lambda_{0.01} = 21.5$

az $\hat{\omega}$ becsléshez szerkesztett konfidenciaintervallumok pedig, feltételezve ω_{st} normalitását

$\omega_{0.9} = 115.89$ $\quad\omega_{0.95} = 121.0$ $\quad\omega_{0.99} = 130.9$

$\omega_{0.1} = 79.29$ $\quad\omega_{0.05} = 74.2$ $\quad\omega_{0.01} = 64.3$

Megjegyzés.

1. Rögzített λ,ω paraméterpár esetén a δ lépésközt válasszuk meg úgy, hogy $\delta \ll \omega^{-1}$ legyen.
2. A $\dfrac{\lambda}{\omega} \gg 1$ eset alig különböztethető meg az elsőrendű sztochasztikus differenciálegyenletnek elegettevő folyamat esetétől.

3. Ismeretes (ld. A. Novikov [5]), hogy a kétdimenziós (komplex) stacionárius Gauss-Markov folyamat esetében a megfelelően standardizált $\hat{\omega}$ becslés aszimptotikusan normális eloszlású. Az empirikus eloszlás ferdeségére és lapultságára nyert jó értékek azt a hipotézist látszanak alátámasztani, hogy a mi esetünkben is ω (11.) szerint standardizált becslése aszimptotikusan normális eloszlású.

4. A $\hat{\lambda}$ becslés eloszlásának viselkedése szintén feltűnő hasonlóságot mutat a kétdimenziós (komplex) stacionárius Gauss-Markov folyamat megfelelő paramétere becslésének eloszlásával, melyre Arató M. (ld. [3]) közölt táblázatot.

Befejezésül a szerző köszönetet mond Arató Mátyásnak a probléma fölvetéséért, Tusnády Gábornak és Krámli Andrásnak értékes tanácsaiért és segítségéért.

1. Táblázat

100 minta alapján számított empirikus átlagok, szórások a $\hat{\lambda}$, $\hat{\lambda}^*$, $\hat{\omega}$, $\hat{\omega}^*$ becslések esetén (*-os becslésekre a 2. sor adatai használhatók adott ω,λ esetén). $\hat{\lambda},\hat{\lambda}^*$ kvantilisei.

$-\lambda$	ω	$-M\lambda$	$M\omega$	$D\lambda$	$D\omega$	1 %	5 %	10 %	90 %	95 %	99 %
		0.23	5.2	0.36	0.88	2.2	0.68	0.51	0.043	0.037	0.03
	5	0.23	5.1	0.37	0.87	2.1	0.70	0.51	0.043	0.037	0.031
		0.25	10.3	0.36	0.91	1.8	0.93	0.57	0.043	0.035	0.027
	10	0.25	10.2	0.37	0.88	1.9	0.96	0.58	0.043	0.035	0.027
0.1		0.2	30.09	0.26	0.83	1.7	0.69	0.53	0.047	0.0381	0.026
	30	0.21	29.8	0.27	0.84	1.7	0.72	0.55	0.048	0.0387	0.026
		0.281	50.2	0.45	0.92	2.64	1.28	0.84	0.044	0.032	0.029
	50	0.318	47.5	0.52	2.63	2.99	1.50	0.96	0.050	0.036	0.032
		0.87	5.1	0.95	1.2	4.9	2.8	2.0	0.21	0.16	0.13
	5	0.88	5.1	0.97	1.2	5.1	2.8	2.1	0.21	0.16	0.13
		0.96	10.27	1.0	1.25	3.8	3.4	2.6	0.19	0.17	0.12
	10	0.99	10.14	1.1	1.19	4.2	3.4	2.7	0.2	0.17	0.12
0.5		1.05	30.2	1.26	1.29	6.7	3.17	2.30	0.27	0.22	0.17
	30	1.09	29.8	1.35	1.32	7.7	3.27	2.45	0.28	0.23	0.18
		0.93	50.14	1.20	1.18	7.4	2.9	1.7	0.23	0.19	0.17
	50	0.98	49.16	1.31	1.43	8.2	3.2	1.8	0.24	0.207	0.17
		1.7	9.9	1.5	1.3	6.9	4.4	3.2	0.54	0.42	0.30
	10	1.7	9.8	1.5	1.3	7.5	4.6	3.4	0.56	0.42	0.31
		1.65	30.3	1.57	1.53	7.1	5.47	3.57	0.50	0.38	0.24
1.	30	1.69	30.03	1.63	1.48	7.3	5.72	3.7	0.51	0.39	0.25
		1.48	50.00	1.19	1.76	6.6	3.25	2.64	0.56	0.42	0.307
	50	1.56	48.9	1.31	1.90	7.09	3.55	2.74	0.59	0.43	0.318
		1.7	100.1	1.6	3.5	11.2	4.4	3.1	0.54	0.44	0.3
	100	2.5	82.4	2.6	18.2	16.1	6.6	4.7	0.79	0.61	0.43
		2.9	10.0	1.9	1.9	9.2	6.7	5.8	1.2	0.94	0.76
	10	2.9	10.0	1.9	1.9	9.4	6.5	5.7	1.2	0.94	0.77
		2.62	30.04	1.58	1.93	8.3	5.35	4.48	1.14	1.07	0.92
2.	30	2.66	29.84	1.65	1.93	8.8	5.50	4.65	1.15	1.07	0.93

		2.67	49.8	1.73	2.09	8.5	5.8	5.01	1.05	0.85	0.71
	50	2.75	49.1	1.83	2.18	8.9	5.98	5.2	1.06	0.86	0.73
		6.07	29.6	2.79	2.66	19.2	10.48	9.3	3.39	2.8	2.3
	30	6.1	29.4	2.9	2.7	20.	10.8	9.5	3.4	2.9	2.4
5.		5.88	50.29	2.84	2.61	14.45	12.16	9.85	3.29	2.51	2.1
	50	6.0	49.78	2.98	2.56	14.99	12.67	10.2	3.30	2.54	2.1
		5.8	100.2	2.7	5.8	14.1	12.2	9.4	3.0	2.6	1.9
	100	9.0	80.1	5.8	20.3	25.2	18.1	14.3	4.4	3.8	2.9
		10.85	100.6	3.1	4.2	19.	16.	15.	7.0	6.6	4.8
10.	100	11.9	96.	3.9	5.4	21.	18.	17.	7.7	7.2	5.1
		15.9	99.3	4.4	4.8	28.1	25.1	21.8	10.9	10.0	9.3
15.	100	16.7	96.8	5.0	5.7	30.9	25.9	23.1	11.3	10.4	9.6
		20.7	100.2	4.3	4.5	30.	28.3	26.4	14.7	13.8	12.9
20.	100	21.2	98.7	4.6	4.6	31.	30.5	29.2	27.4	14.1	13.3
		41.22	100.6	6.31	7.87	59.35	52.63	48.53	33.65	32.07	30.52
40.	100	42.82	97.68	7.18	8.3	62.25	55.55	51.08	34.81	32.94	31.08
		–50.91	100.7	6.56	9.05	70.33	60.36	58.97	42.70	39.31	38.66
50.	100	–53.29	96.55	7.82	9.97	74.42	64.53	62.49	44.44	40.69	39.63

Beérkezett: 1973. április 5.

Irodalom

[1] Anderson T.W., The Statistical Analysis of Time Series (1970)

[2] Арато М.: Точные формулы для платностей мер элементарных гауссовских процессов. Studia Sci. Math. Hung. 5(1970) 17-27.

[3] Арато М.-Бенцур А.: Функция распределения оценки параметра затухания стационарного гауссовского марковского процесса Studia Sci. Math. Hung. 5(1970) 445-456.

[4] Bartlett M.S., An introduction to stochastic processes with special reference to methods and applications. Cambridge 1960.

[5] Doob J.L., The elementary Gaussian processes Ann. Math. Stat. 15 (1944) 229-281.

[6] Новиков А.А.: Об оценках параметров диффузионных процессов

Summary

ON ESTIMATES OF PARAMETERS OF THE SECOND ORDER AUTOREGRESSIVE PROCESS WITH CONTINUOUS TIME

In the present paper tables are given for empirical distributions of estimates of the damping parameter $\hat{\lambda}$ and of the period $\hat{\omega}$ of the process in question by the Monte Carlo method.

Estimates are based on the maximum likelihood principle referring to the process with continuous time, and statistics in them are computed by approximative formulas from discrete observations.

Inferences:

1/ The behavior of the distribution of estimate $\hat{\lambda}$ is similar to the behavior of the distribution of the estimate of the corresponding parameter of two-dimensional stationary Gaussian-Markovian process.

2/ Standardization (by Arató-Novikov) of the estimate $\hat{\omega}$ is distributed approximately normally.

Р е з ю м е

ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИОННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В настоящей работе даются таблицы для эмпирических распределений оценок параметра затухания $(\hat{\lambda})$ и периода $(\hat{\omega})$ методом Монте-Карло.

Оценки определяются по принципу наибольшего правдоподобия для процесса с непрерывным временем, а статистики, входящие в них, вычисляются приближенными формулами по дискретным наблюдениям.

<u>Выводы</u>:

1. Поведение распределения оценки $\hat{\lambda}$ сходно с поведением распределения оценки соответственного параметра двумерного стационарного гауссовского марковского процесса.

2. Стандартизация /по Арато-Новикову/ оценки $\hat{\omega}$ распределена приблизительно по нормальному закону.

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

GAUSS FOLYAMATOK EGY STATISZTIKAI PROBLÉMÁJÁRÓL

Pham Ngoc Phuc

1. BEVEZETÉS

Vizsgáljuk az

(1) $x(j) = \xi(j) + \Theta \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

folyamatot, ahol a $\xi(1), \ldots, \xi(n)$ valószínűségi változók (általában nem függetlenek) eleget tesznek az $E\xi(j) = 0$, $E\xi^2(j) < \infty$ feltételeknek.

Legyen a Θ paraméter $(\Theta \epsilon R^1)$ legjobb lineáris torzítatlan becslése az

$$\hat{l} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 x(j) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^0 = 1 \right) \quad \text{statisztika.}$$

Felmerül a kérdés, hogy az $\hat{l}$ becslés megengedhetősége a Θ torzítatlan becslései osztályában jellemző-e Gauss-folyamatokra?

A.M. Kagan, Ju.V. Linnik, C.R. Rao a [2] könyvben vizsgálják ezt a problémát abban az esetben, amikor $\xi(j)$ elsőrendű autoregressziós folyamat.

Az eredmény a következő (lásd [2], 341.o.):

Tétel. *Legyenek az* $x(1), \ldots, x(n)$, $n \geqslant 3$ *megfigyelések* (1) *alakúak, és* $\xi(j)$ *a következő elsőrendű autoregressziós folyamat:*

(2) $\xi(1) = \epsilon(1)$

$\xi(j) = \lambda\xi(j-1) + \epsilon(j) \qquad j = 2, \ldots, n,$

ahol az $\epsilon(1), \ldots, \epsilon(n)$ *valószínűségi változók függetlenek,* $F_j(x)$ *eloszlással (az* $F_j(x)$ *eloszlások nem szükségképpen azonosak),* $E\epsilon(j) = 0$, $E\epsilon^2(j) = \sigma_j^2$, $0 < \sigma_j^2 < \infty$.

Ha $\lambda \neq 1$, *akkor az* $\hat{l} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 x(j)$ *becslés megengedhetősége a* Θ *torzitatlan becslései osztályában jellemző tulajdonsága az* $\epsilon(1), \ldots, \epsilon(n)$ *Gauss-féle valószinűségi változóknak, egyben az* $x(j)$ *Gauss-folyamatnak.*

A következőkben a $\xi(j)$ p-edrendű autoregressziós folyamat esetén vizsgáljuk a problémát. Megmutatjuk, hogy bizonyos egyszerű feltételek mellett az elsőrendű autoregressziós sémára vonatkozó eredmény általánosítható.

A probléma felvetése Arató Mátyástól ered. Munkám során segítséget kaptam a Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Valószínűségszámítási és statisztikai osztálya munkatársaitól. Ezúton fejezem ki köszönetemet nekik.

2. Legyen $\xi(t)$ stacionárius folyamat, és elégítse ki a

(3) $$\xi(t) + a_1 \xi(t-1) + \ldots + a_p \xi(t-p) = \epsilon(t)$$

sztochasztikus differenciálegyenletet, ahol $\epsilon(t)$ $(E\epsilon(t) = 0,\ \ E\epsilon^2(t) = \sigma_\epsilon^2)$ azonos eloszlású független sorozat, melyre $\epsilon(t)$ független $\xi(t-1), \xi(t-2), \ldots$, -től is.

Feltesszük, hogy $x(t)$ Gauss-folyamat. $n \geqslant 2p+1$ esetén $x(1), \ldots, x(n)$ együttes sűrűségfüggvényét a következőképpen határozhatjuk meg.

Figyelembe véve, hogy a $\xi(1), \ldots, \xi(p)$ változók függetlenek az $\epsilon(p+1), \ldots, \epsilon(n)$ változóktól, kapjuk, hogy

(4) $$p_{\xi(1),\ldots,\xi(p),\epsilon(p+1),\ldots,\epsilon(n)}(u_1, \ldots, u_p, z_{p+1}, \ldots, z_n) = (2\pi)^{-n/2} |R_p|^{-1/2} \sigma_\epsilon^{-(n-p)} \cdot$$
$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{U}_p R_p^{-1} \underline{U}_p^* + \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{p+1}^{n} z_i^2\right)\right]$$

ahol R_p jelöli a $\xi(1), \ldots, \xi(p)$ változók kovarianciamátrixát, R_p^{-1} ennek inverze,

$$\underline{U}_p = (u_1, \ldots, u_p), \qquad \underline{U}_p^* = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_p \end{pmatrix}$$

Felhasználva a

$$\begin{aligned} &\xi(1) = \xi(1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (5) \qquad &\xi(p) = \xi(p) \\ &\xi(p+1) + a_1 \xi(p) + \ldots + a_p \xi(1) = \epsilon(p+1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\xi(n) + a_1 \xi(n-1) + \ldots + a_p \xi(n-p) = \epsilon(n) \end{aligned}$$

leképezést, melynek determinánsa 1, (4)-ből belátható, hogy

(6) $$p_{\xi(1),\ldots,\xi(n)}(u_1, \ldots, u_n) = (2\pi)^{-n/2} |R_p|^{-1/2} \sigma_\epsilon^{-(n-p)} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\underline{U}_p R_p^{-1} \underline{U}_p^* + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=p+1}^{n} (u_i + a_1 u_{i-1} + \ldots + a_p u_{i-p})^2 \right]\right\}$$

Innen $x(1), \ldots, x(n)$ együttes sűrűségfüggvénye a következő:

(7) $$p_{x(1),\ldots,x(n)}(x_1, \ldots, x_n; \Theta) = (2\pi)^{-n/2} |R_p|^{-1/2} \sigma_\epsilon^{-(n-p)} \exp -\frac{1}{2}\left\{(\underline{X}_p - \underline{\Theta}) R_p^{-1} (\underline{X}_p - \underline{\Theta})^* + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{p+1}^{n} \left| (x_i - \Theta) + a_1(x_{i-1} - \Theta) + \ldots + a_p(x_{i-p} - \Theta) \right|^2 \right\}$$

ahol

$$\underline{X}_p - \underline{\Theta} = (x_1 - \Theta, \ldots, x_p - \Theta), \qquad (\underline{X}_p - \underline{\Theta})^* = \begin{pmatrix} x_1 - \Theta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p - \Theta \end{pmatrix}$$

Ismeretes (lásd [1]), hogy $(a_0 = 1)$

$$R_p^{-1} = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \begin{pmatrix} a_0^2 & a_0 a_1 & a_0 a_2 \ldots a_0 a_{p-1} \\ a_0 a_1 & a_0^2 + a_1^2 & a_0 a_1 + a_1 a_2 \ldots a_0 a_{p-2} + a_1 a_{p-1} \\ a_0 a_2 & a_0 a_1 + a_1 a_2 & a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 a_{p-1} & a_0 a_{p-2} + a_1 a_{p-1} & \ldots a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{p-1}^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Innen

$$\begin{aligned}(\underline{X}_p - \underline{\Theta}) R_p^{-1} (\underline{X}_p - \Theta)^* &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \Big[a_0^2 (x_1 - \Theta)^2 + a_0 a_1 (x_1 - \Theta)(x_2 - \Theta) + \ldots + a_0 a_{p-1} \cdot \\ &\cdot (x_1 - \Theta)(x_p - \Theta) + a_0 a_1 (x_2 - \Theta)(x_1 - \Theta) + (a_0^2 + a_1^2)(x_2 - \Theta)^2 + \\ &+ \ldots + (a_0 a_{p-2} + a_1 a_{p-1})(x_2 - \Theta)(x_p - \Theta) + \ldots + \\ &+ (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{p-1}^2)(x_p - \Theta)^2 \Big] \\ &= -\frac{2\Theta}{\sigma_\epsilon^2} \Big[x_1 (a_0^2 + a_0 a_1 + \ldots + a_0 a_{p-1}) + x_2 (a_0 a_1 + a_0^2 + a_1^2 + \\ &+ \ldots + a_0 a_{p-2} + a_1 a_{p-1}) + \ldots + x_p (a_0 a_{p-1} + a_0 a_{p-2} + \\ &+ a_1 a_{p-1} + \ldots + a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{p-1}^2) \Big] + f_1(x_1, \ldots, x_n) + \\ &+ g_1(\Theta)\end{aligned}$$

ahol $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ és $g_1(\Theta)$ értelmezése leolvasható.
Ily módon,

$$(\underline{X}_p - \underline{\Theta}) R_p^{-1} (\underline{X}_p - \underline{\Theta})^* = -\frac{2\Theta}{\sigma_\epsilon^2} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p) + f_1(x_1, \ldots, x_n) + g_1(\Theta) \tag{9}$$

ahol

$$\alpha_1 = a_0^2 + a_0 a_1 + \ldots + a_0 a_{p-1}$$

$$(10) \qquad \alpha_2 = a_0 a_1 + (a_0^2 + a_1^2) + \ldots + (a_0 a_{p-2} + a_1 a_{p-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_p = a_0 a_{p-1} + (a_0 a_{p-2} + a_1 a_{p-1}) + \ldots + (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{p-1}^2)$$

Másrészt

$$(11) \quad \sum_{i=p+1}^{n} \left[(x_i - \Theta) + a_1 (x_{i-1} - \Theta) + \ldots + a_n (x_{i-p} - \Theta) \right]^2 = \sum_{i=p+1}^{n} \Big[(x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p}) - \Theta \cdot (1 + a_1 + \ldots + a_p) \Big]^2$$

$$= \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p})^2 - 2\Theta (1 + a_1 + \ldots + a_p) \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p}) + \Theta^2 (n-p)(1 + a_1 + \ldots + a_p)^2$$

$$= -2\Theta (1 + a_1 + \ldots + a_p) \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p}) + f_2(x_1, \ldots, x_n) + g_2(\Theta)$$

(9) és (11) behelyettesítésével $x(1), \ldots, x(n)$ (7) alatti együttes sűrűségfüggvényét a következő alakban írhatjuk:

$$(12) \quad p_{x(1), \ldots, x(n)}(x_1, \ldots, x_n; \Theta) = F(x_1, \ldots, x_n) G(\Theta) \exp \frac{\Theta}{\sigma_\epsilon^2} \Big\{ \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p + (1 + a_1 + \ldots + a_p) \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p}) \Big\}$$

Tekintsük az

$$(13) \quad l = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p + (1 + a_1 + \ldots + a_p) \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p})$$

$$= \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p + (1 + a_1 + \ldots + a_p) \Big[\sum_{j=1}^{p} (a_p + \ldots + a_{p-j+1}) x_j + \sum_{j=p+1}^{n-p} (1 + a_1 + \ldots + a_p) x_j + \sum_{j=n-p+1}^{n} (1 + a_1 + \ldots + a_{n-j}) x_j \Big]$$

lineáris statisztikát.

Látható, hogy

$$l = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

alakú, ahol

$$\begin{aligned} &\lambda_j = \alpha_j + (1 + a_1 + \ldots + a_p)(a_{p-j+1} + \ldots + a_p) && \text{ha} \quad j = 1, \ldots, p \\ (14) \quad &\lambda_j = (1 + a_1 + \ldots + a_p)^2 && \text{ha} \quad p + 1 \leqslant j \leqslant n - p \\ &\lambda_j = (1 + a_1 + \ldots + a_p)(1 + a_1 + \ldots + a_{n-j}) && \text{ha} \quad n - p + 1 \leqslant j \leqslant n. \end{aligned}$$

(12)-ből nyilvánvaló, hogy az l statisztika elégséges az $x(1), \ldots, x(n)$ együttes sűrűségfüggvényeinek összességére nézve. Továbbá könnyű megmutatni, hogy az l lineáris statisztika egyben teljes is.

Vizsgáljuk most az $\hat{l} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 x_j$ statisztikát.

Mivel $\hat{l}$ a legjobb lineáris torzítatlan becslése Θ-nak, és a vizsgálandó esetben létezik az l elégséges statisztika, akkor $\hat{l}$ szükségképpen csak l-től függ, másszóval $\hat{l}$ függvénye l-nek.

Valójában, ellenkező esetben $\hat{l}$ nem volna függvénye l-nek. Vizsgáljuk a $g(l) = E(\hat{l} \mid l)$ függvényt. Minthogy $x_1, \ldots, x_n$ Gauss-eloszlásúak, ennélfogva $\hat{l}$ és l szintén Gauss-eloszlású. Igy

$$g(l) = E(\hat{l} \mid l) = \alpha l + \beta$$

alakú, azaz $g(l)$ lineáris függvénye l-nek, ebből következik, hogy $E(\hat{l} \mid l)$ lineáris függvénye $x_1, \ldots, x_n$-nek.

A Blackwell-Kolmogorov-Rao-tétel szerint $E(\hat{l} \mid l)$ torzítatlan becslése Θ-nak (így $E(\hat{l} \mid l)$ lineáris torzítatlan becslése Θ-nak), és

$$(15) \qquad E_\Theta (\hat{l} - \Theta)^2 \geqslant E_\Theta \left[E(\hat{l} \mid l) - \Theta \right]^2 \qquad \text{minden } \Theta \epsilon R^1\text{-ra.}$$

A feltevés szerint $\hat{l}$ legjobb lineáris torzítatlan becslése Θ-nak, ezért a (15) relációban szükségképpen teljesül az egyenlőség:

$$(16) \qquad E_\Theta (\hat{l} - \Theta)^2 = E_\Theta \left[E(\hat{l} \mid l) - \Theta \right]^2 \qquad \text{minden } \Theta \epsilon R^1\text{-ra.}$$

Ha visszaemlékszünk a Blackwell-Kolmogorov-Rao-tétel bizonyítására (lásd pl. [3]), (16) akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\hat{l} = E(\hat{l} \mid l) = g(l) \qquad \text{m.m. } P_\Theta, \ \Theta \epsilon R^1,$$

ami ellentmond a feltevésünknek, hogy $\hat{l}$ nem függ l-től. Ezzel igazoltuk állításunkat.

Az l statisztika teljessége miatt $\hat{l}$ Θ-nak egyetlen olyan torzítatlan becslése, amely függvénye l-nek, így $\hat{l}$ legjobb torzítatlan becslés Θ-ra.

A fenti eredményeket összefoglalva a következő állítást kapjuk:

1. Tétel. *Ha $x(j)$ Gauss-folyamat és $x(j) = \xi(j) + \Theta$ alakú, ahol $\xi(j)$ stacionárius folyamat és kielégiti a (3) sztochasztikus differenciálegyenletet, akkor az*

$$\hat{l} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 x_j \qquad (n \geqslant 2p + 1)$$

legjobb lineáris torzitatlan becslés megengedhető – sőt optimális – a Θ torzitatlan becsléseinek osztályában.

3. Tegyük most fel, hogy a Θ paraméter legjobb lineáris torzítatlan becslése $\hat{l} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 x_j$ megengedhető a Θ torzítatlan becslései osztályában.

Legyen $\underline{y} = (x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1)$

Bevezetjük a

$$\hat{\Theta} = \hat{l} - E_0(\hat{l} \mid \underline{y}) \tag{17}$$

Pitman-féle becslést.

A $\xi(t)$ elsőrendű autoregressziós folyamat esetén teljesülnek az alábbi 1. és 2. lemmák (lásd [2]), amelyek érvényben maradnak a $\xi(t)$ p-edrendű autoregressziós folyamatra is.

1. Lemma. *A Θ paraméter (17) becslése torzitatlan és*

$$E_\Theta(\hat{\Theta} - \Theta)^2 \leqslant E_\Theta(\hat{l} - \Theta)^2,$$

az egyenlőség minden $\Theta \epsilon R^1$-ra akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$E_0(\hat{l} \mid \underline{y}) = 0.$$

Az 1. lemmából következik, hogy az $\hat{l}$ becslés akkor és csak akkor megengedhető a Θ torzítatlan becslései osztályában ha

$$E_0(\hat{l} \mid \underline{y}) = 0.$$

Legyenek

$$f(t) = E\exp it\epsilon_j, \qquad g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$\Phi(t_1, \ldots, t_n) = E\exp i \sum_{j=1}^{n} t_j \xi_j = E_0 \exp i \sum_{j=1}^{n} t_j x_j$$

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \log \Phi(t_1, \ldots, t_n)$$

ahol $t_1, \ldots, t_n$ valós számok, a $g(t)$ függvény a $t = 0$ pont valamilyen környezetében, $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ pedig a $(0, \ldots, 0)$ pont egy környezetében van értelmezve.

2. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $E_0(\hat{l} \mid \underline{y}) = 0$ *akkor a* $(0, \ldots, 0)$ *pont valamilyen környezetében*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^0 \frac{\partial \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)}{\partial \tau_j} = 0, \quad ha \quad \sum_{j=1}^{n} \tau_j = 0. \tag{18}$$

Legyen $\xi(k)$ a következő p-edrendű autoregressziós folyamat:

$$\begin{aligned} \xi(1) &= \epsilon(1) \\ \xi(2) + a_1 \xi(1) &= \epsilon(2) \\ &\cdots\cdots \\ \xi(p) + a_1 \xi(p-1) + \ldots + a_{p-1} \xi(1) &= \epsilon(p) \\ \xi(K) + a_1 \xi(K-1) + \ldots + a_p \xi(K-p) &= \epsilon(K), \quad \text{ha} \quad K \geqslant p+1 \end{aligned} \tag{19}$$

ahol $\epsilon(1), \quad \epsilon(2), \ldots (E\epsilon(k) = 0, \quad E\epsilon^2(k) = \sigma_\epsilon^2)$ független, azonos eloszlású sorozat. Irjuk fel a (19) egyenleteket $k = n, \quad n-1, \ldots, 2, 1$ estén, azután szorozzuk meg azokat rendre a $b_0 (b_0 = 1), \quad b_1, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}$ számokkal, majd adjuk össze őket. A kapott összefüggésben $\xi(n-1), \ldots, \xi(2), \xi(1)$ akkor és csak akkor nem szerepel, ha

$$\begin{aligned} a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ a_0 b_p + a_1 b_{p-1} + \ldots + a_p b_0 &= 0 \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{20}$$

$$a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \ldots + a_p b_{n-(p+1)} + a_{p+1} b_{n-(p+2)} + \ldots + a_{n-1} b_0 = 0$$

ahol $a_0 = b_0 = 1$, és $a_k = 0$ ha $k \geqslant p + 1$.

(20) teljesülése esetén kapjuk, hogy

$$\xi(n) = \epsilon(n) + b_1 \epsilon(n-1) + \ldots + b_{n-1} \epsilon(1) = \sum_{K=0}^{n-1} b_k \epsilon(n-k). \tag{21}$$

Ily módon a $\xi(n)$ sorozat előállítható a (21) alakban, ahol a b_k együtthatók (20)-ból határozhatók meg.

3. Lemma. *A* (19) $\xi(t)$ *p-edrendű autoregressziós folyamat esetén*

$$\Phi(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1 + b_1 t_2 + \ldots + b_{n-1} t_n) \ldots f(t_{n-1} + b_1 t_n) \cdot f(t_n). \tag{22}$$

Bizonyítás. Valóban (21) szerint $\xi(k) = b_{k-1} \epsilon(1) + b_{k-2} \epsilon(2) + \ldots + \epsilon(k)$, $k = 1,2, \ldots, n$,

ekkor,

$$\begin{aligned}
\Phi(t_1, \ldots, t_n) &= E \exp i \sum_{j=1}^{n} t_j \xi(j) \\
&= E \exp i \big[t_1 \epsilon_1 + t_2(b_1 \epsilon_1 + \epsilon_2) + \ldots + t_n(b_{n-1} \epsilon_1 + \ldots + b_1 \epsilon_{n-1} + \\
&\qquad + \epsilon_n)\big] \\
&= E \exp i \big[(t_1 + b_1 t_2 + \ldots + b_{n-1} t_n)\epsilon_1 + \ldots + (t_{n-1} + b_1 t_n)\epsilon_{n-1} + \\
&\qquad + t_n \epsilon_n\big] \\
&= E e^{i(t_1 + b_1 t_2 + \ldots + b_{n-1} t_n)\epsilon_1} \cdot E e^{i(t_{n-1} + b_1 t_n)\epsilon_{n-1}} \cdot E e^{i t_n \epsilon_n} \\
&= f(t_1 + b_1 t_2 + \ldots + b_{n-1} t_n) \ldots f(t_{n-1} + b_1 t_n) \cdot f(t_n).
\end{aligned}$$

A 3. lemma alapján

$$\begin{aligned}
\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \log \Phi(t_1, \ldots, t_n) &= \log f(t_1 + b_1 t_2 + \ldots + b_{n-1} t_n) + \ldots + \\
&+ \log f(t_{n-1} + b_1 t_n) + \log f(t_n)
\end{aligned}$$

Innen könnyen belátható, hogy a p-edrendű autoregressziós folyamat esetén a (18) összefüggés felírható a következő alakban:

$$c_n^0\left\{\frac{f'(t_n)}{f(t_n)} + b_1\frac{f'(t_{n-1}+b_1t_n)}{f(t_{n-1}+b_1t_n)} + \ldots + b_{n-1}\frac{f'(t_1+b_1t_2+\ldots+b_{n-1}t_n)}{f(t_1+b_1t_2+\ldots+b_{n-1}t_n)}\right\} +$$

$$+ c_{n-1}^0\left\{\frac{f'(t_{n-1}+b_1t_n)}{f(t_{n-1}+b_1t_n)} + b_1\frac{f'(t_{n-2}+b_1t_{n-1}+b_2t_n)}{f(t_{n-2}+b_1t_{n-1}+b_2t_n)} + \ldots +\right.$$

$$\left.+ b_{n-2}\frac{f'(t_1+b_1t_2+\ldots+b_{n-1}t_n)}{f(t_1+b_1t_2+\ldots+b_{n-1}t_n)}\right\} + \ldots + c_1^0\frac{f'(t_1+b_1t_2+\ldots+b_{n-1}t_n)}{f(t_1+b_1t_2+\ldots+b_{n-1}t_n)} = 0$$

vagy,

$$c_n^0 g(t_n) + (b_1c_n^0 + c_{n-1}^0)g(t_{n-1}+b_1t_n) + \ldots + (b_{n-1}c_n^0 + b_{n-2}c_{n-1}^0 + \ldots + c_1^0)\cdot$$
$$\cdot\, g(t_1+b_1t_2+\ldots+b_{n-1}t_n) = 0, \tag{23}$$

$$\text{ha} \quad \sum_{j=1}^{n} t_j = 0$$

Legyenek

$$\begin{aligned} \gamma_n &= c_n^0 \\ \gamma_{n-1} &= b_1c_n^0 + c_{n-1}^0 \\ \gamma_{n-2} &= b_2c_n^0 + b_1c_{n-1}^0 + c_{n-2}^0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1 &= b_{n-1}c_n^0 + b_{n-2}c_{n-1}^0 + \ldots + c_1^0 \end{aligned} \tag{24}$$

Vezessük be a

$$\begin{aligned} z_n &= t_n \\ z_{n-1} &= b_1t_n + t_{n-1} \\ z_{n-2} &= b_2t_n + b_1t_{n-1} + t_{n-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 &= b_{n-1}t_n + b_{n-2}t_{n-1} + \ldots + t_1 \end{aligned} \tag{25}$$

új változókat, akkor (23) a

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j g(z_j) = 0 \tag{26}$$

alakra hozható.

Legyen $\beta_i = -b_i \quad i = 1,2,\dots,n-1$, (25)-ből következik, hogy

$$
(27) \quad
\begin{aligned}
t_n &= \nu_0 z_n \\
t_{n-1} &= \nu_1 z_n + \nu_0 z_{n-1} \\
&\dots\dots\dots\dots \\
t_{n-k} &= \nu_k z_n + \nu_{k-1} z_{n-1} + \dots + \nu_0 z_{n-k} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
t_1 &= \nu_{n-1} z_n + \nu_{n-2} z_{n-1} + \dots + \nu_0 z_1
\end{aligned}
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
\nu_0 &= 1 \\
\nu_1 &= \beta_1 \\
\nu_2 &= \beta_1^2 + \beta_2 \\
\nu_3 &= \beta_1^3 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_3 \\
\nu_4 &= \beta_1^4 + 3\beta_1^2\beta_2 + 2\beta_1\beta_3 + \beta_2^2 + \beta_4
\end{aligned}
$$

és általában

$$
(28) \quad \nu_{k+1} = \beta_1\nu_k + \beta_2\nu_{k-1} + \dots + \beta_{k+1}\nu_0 .
$$

Ily módon, a $\sum_{j=1}^{n}{}' t_j = 0$ feltételt átírhatjuk $z_1, z_2, \dots, z_n$ segítségével az

$$
(1 + \nu_1 + \dots + \nu_{n-1})z_n + (1 + \nu_1 + \dots + \nu_{n-2})z_{n-1} + \dots + (1 + \nu_1)z_2 + \\
+ z_1 = 0
$$

alakba.

A fentieket a következőképpen foglalhatjuk össze:

Ha az $\hat{l} = \sum_{j=1}^{n}{}' c_j^0 x_j$ legjobb lineáris torzítatlan becslés megengedhető a Θ paraméter torzítatlan becslései osztályában, akkor

$$
(29) \quad \sum_{j=1}^{n}{}' \gamma_j g(z_j) = 0
$$

ahol $(1 + \nu_1 + \dots + \nu_{n-1})z_n + \dots + (1 + \nu_1)z_2 + z_1 = 0.$

4. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $\hat{l} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 x_j$ *legjobb lineáris torzitatlan becslése* Θ*-nak, akkor*

a c_j^0 *együtthatók a következők:*

$$
\begin{aligned}
&c_j^0 = c\left[\alpha_{p-j+1} + (1 + a_1 + \ldots + a_p)(a_{p-j+1} + \ldots + a_p)\right] && \text{ha} \quad 1 \leqslant j \leqslant p \\
(30) \qquad &c_j^0 = c(1 + a_1 + \ldots + a_p)^2 && \text{ha} \quad p + 1 \leqslant j \leqslant n - p \\
&c_j^0 = c(1 + a_1 + \ldots + a_p)(1 + a_1 + \ldots + a_{n-j}) && \text{ha} \quad n - p + 1 \leqslant j \leqslant n,
\end{aligned}
$$

ahol a c *állandó a* $\sum_{j=1}^{n} c_j^0 = 1$ *reláció segitségével,* $\alpha_j (j = 1,2,\ldots,p)$ *pedig* (10)*-ből határoz-*

ható meg.

Bizonyítás. Mivel a c_j^0, $j = 1,\ldots,n$ konstansok az $x(j)$ folyamatnak csupán első és másodrendű momentumaitól függenek, a c_j^0 értékének kiszámításakor jogunk van $x(j)$ folyamatot Gauss-folyamatnak tekinteni.

Abban az esetben, amikor $x(j) = \xi(j) + \Theta$, ahol $\xi(j)$ (19) alakú p-edrendű autoregressziós folyamat, könnyű megmutatni, hogy az

$$l^* = \lambda_1^* x_1 + \lambda_2^* x_2 + \ldots + \lambda_n^* x_n$$

lineáris statisztika, ahol

$$
\begin{aligned}
&\lambda_j^* = \alpha_{p-j+1} + (1 + a_1 + \ldots + a_p)(a_{p-j+1} + \ldots + a_p) && \text{ha} \quad 1 \leqslant j \leqslant p \\
&\lambda_j^* = (1 + a_1 + \ldots + a_p)^2 && \text{ha} \quad p + 1 \leqslant j \leqslant n - p \\
&\lambda_j^* = (1 + a_1 + \ldots + a_p)(1 + a_1 + \ldots + a_{n-j}) && \text{ha} \quad n - p + 1 \leqslant j \leqslant n
\end{aligned}
$$

elégséges, és egyben teljes is a $p_{x(1),\ldots,x(n)}(\underline{X},\Theta)$ sűrűségfüggvényének összeségére nézve.

Másrészt feltevésünk szerint az $\hat{l} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 x_j$ statisztika legjobb lineáris torzítatlan becslés Θ-ra, tehát $\hat{l}$ szükségképpen függvénye l-nek, amiből adódik, hogy c_j^0 és λ_j^*, $j = 1,\ldots,n$ arányosak egymással, tehát fennállnak a (30) összefüggések.

Térjünk vissza most a (29) relációra, mely szerint

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j g(z_j) = 0, \quad \text{ha} \quad (1 + \nu_1 + \ldots + \nu_{n-1}) z_n + \ldots + (1 + \nu_1) z_2 + z_1 = 0$$

ahol (24) és 4. lemma alapján $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ kifejezhető $a_1,\ldots,a_p$ segítségével.

Tegyük fel, hogy

(31) $$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(1+\nu_1) > 0.$$

Legyen $z_3 = \ldots = z_n = 0$, $z_2 = t$ szabad változó, és $z_1 = -(1+\nu_1)z_2$.

Mivel $g(z_3) = \ldots = g(z_n) = g(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = 0$, (29)-ből adódik $\gamma_2 g(t) = -\gamma_1 g(z_1)$.

t szerint differenciálva

(32) $$g'(t) = \frac{\gamma_1(1+\nu_1)}{\gamma_2} g'(z_1) \text{ -hez}$$

jutunk.

Vegyük figyelembe, hogy $g'(0) = -\sigma_\epsilon^2 < 0$, $g'(t)$ folytonos $t = 0$ környezetében és feltevésünk szerint
$\frac{\gamma_1(1+\nu_1)}{\gamma_2} > 0$, így (32) miatt

$$g'(t) = \text{const.} = -S^2 < 0$$

ha $|t|$ eléggé kicsiny, amiből következik, hogy $f(t) = e^{-\frac{S^2}{2}t^2}$ a $t = 0$ pont valamilyen környezetében. A karakterisztikus függvények tulajdonságaira vonatkozó tétel alapján (lásd pl. [4]) megállapíthatjuk, hogy $\epsilon(j)$ Gauss-eloszlású.

Ily módon igazoltuk a következő állítást:

2. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $x(j) = \xi(j) + \Theta$, *ahol* $\xi(j)$ (19) *alakú p-edrendű autoregressziós folyamat és teljesül a*

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(1+\nu_1) > 0$$

feltétel. Ha az $\hat{l} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 x_j$ *legjobb lineáris becslés megengedhető a* Θ *torzitatlan becsléseinek osztályában, akkor az* $x(j)$ *folyamat Gauss-folyamat.*

Irodalom

[1] Arató M., Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról. IV. A Magy. Tud. Akad. III Osztály Közleményei 15 (1965) 107-124.

[2] А.М.Каган, Ю.В.Линник, С.Р.Рао: Характеризационные задачи математической статистики. Москва 1972.

[3] C.R. Rao, Linear statistical inference and its applications, N.-Y., Wiley, 1965.

[4] Rényi A., Valószınűségszámítás, Budapest, 1968.

Beérkezett: 1973. március 14.

Summary

ON A STATISTICAL PROBLEM OF GAUSSIAN PROCESSES

In the paper the $X(j) = \xi(j) + \Theta$ process is investigated where $\xi(j)$ is a p-order autoregressive process.
It is shown that when $X(j)$ is gaussian, the best linear estimate $\hat{l} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 x_j$ $\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^0 = 1 \right)$, $n \geq 2p + 1$, is an admissible estimate of the location parameter Θ in the class of all unbiased estimates of Θ.
The inversion of the statement is also proved.
For case $p = 1$ the result is in the book of Kagan, Linnik, Rao [2].

Резюме

ОБ ОДНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

В данной работе рассматривается процесс $X(j) = \xi(j) + \Theta$, где $\xi(j)$ - авторегрессионный процесс порядка p.

Показано, что если процесс $X(j)$ гауссовский, то наилучшая линейная оценка $\hat{l} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 x_j$, $\sum_{j=1}^{n} c_j^0 = 1$, $n \geq 2p + 1$ является допустимой оценкой параметра θ в классе несмещенных оценок.

В работе рассмотрено также обратное утверждение. Для случая p=1 этот результат рассмотрен в книге Кагана, Линника, Rao [2].

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

STACIONÁRIUS FOLYAMATOK PARAMÉTERÉNEK BECSLÉSÉRŐL

Pham Ngoc Phuc

Legyen $\xi(t)$ valós $(0 \leq t \leq T)$ stacionárius folyamat, $E\xi(t) = 0$; $D^2\xi(t) = E\xi^2(t) = \sigma^2 = S$ ismeretlen. Adott S esetén a folyamathoz tartozó valószínűségi mértéket, ill. várható értéket jelölje P_S, ill. E_S.

Sztochasztikus folyamatok esetén az $E\xi(n) = \Theta$ paraméter korrekt becslésével foglalkozik Arató [1] dolgozata. Független megfigyeléssorozat esetén a skála paraméter szabályos becslésének definícióját Kagan és Ruhin adta meg [3]. A dolgozatban megvizsgáljuk e fogalom hasznosságát sztochasztikus folyamatokra.

1. SZABÁLYOS BECSLÉSEK

Definíció. Az $\hat{S}(\xi(t))$ funkcionált szabályos becslésnek nevezzük, ha tetszőleges $-\infty < \lambda < +\infty$ esetén

(1) $$\hat{S}(\lambda\xi(t)) = \lambda^2 \hat{S}(\xi(t))$$

Könnyen belátható, hogy pl. az $\hat{S} = \frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)dt$; $\hat{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi^2(t_i)$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T$; $\hat{S} = \xi^2(0)$ funkcionálok szabályos becslések.

Jelölje $\mathscr{S}$ a szabályos becslések osztályát. Ha $\hat{S} \in \mathscr{S}$, akkor

(2) $$E_S(\hat{S} - S)^2 = S^2 E_1(\hat{S} - 1)^2$$

Nyilvánvaló ugyanis, hogy

$$E_S(\hat{S} - S)^2 = E_S(\hat{S}(\xi(t)) - S)^2 = S^2 E_S\left[\hat{S}\left(\frac{\xi(t)}{\sqrt{S}}\right) - 1\right]^2 = S^2 E_1\left[\hat{S}(\xi(t)) - 1\right]^2$$

Jelöljük B_0^T-vel a $\frac{\xi(t)}{\xi(0)}$ $(0 \leq t \leq T)$ változók által generált σ-algebrát.

(Tegyük fel, hogy $\xi(0) \neq 0 \pmod{P_1}$).

Legyen $\hat{S} \in \mathscr{S}$ és

(3) $$\hat{U}(\xi(t)) = \hat{S}(\xi(t)) \cdot \frac{E_1(\hat{S}(\xi(t)) | B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2(\xi(t)) | B_0^T)}$$

Nyilván $\hat{U} \in \mathscr{S}$ és megmutatjuk, hogy igaz a következő

1. Lemma. *Tetszőleges* $\hat{S}_1, \hat{S}_2 \in \mathcal{S}$*-re*

$$(4) \qquad \hat{S}_1 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_1 \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}_1^2 \mid B_0^T)} = \hat{S}_2 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_2 \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}_2^2 \mid B_0^T)} \qquad (\operatorname{mod} P_1)$$

azaz tetszőleges $\hat{S} \in \mathcal{S}$*-re az* $\hat{U} = \hat{S} \cdot \dfrac{E_1(\hat{S} \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2 \mid B_0^T)}$ *becslés ugyanaz.*

Bizonyítás. Valóban,

$$\frac{\hat{S}_1(\xi(t))}{\hat{S}_2(\xi(t))} = \frac{\hat{S}_1\left(\frac{\xi(t)}{\xi(0)}\right)}{\hat{S}_2\left(\frac{\xi(t)}{\xi(0)}\right)} = f\left(\frac{\xi(t)}{\xi(0)}\right)$$

és így, $\dfrac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2}$ a $\dfrac{\xi(t)}{\xi(0)}$ funkcionálja, melyet f-fel jelölünk.

Másrészt $\dfrac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2}$ B_0^T-mérhetősége miatt a feltételes várható érték jól ismert tulajdonsága alapján

$$E_1(\hat{S}_1 / B_0^T) = E_1(\hat{S}_1 \cdot \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_2} \mid B_0^T) = \frac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2} E_1(\hat{S}_2 \mid B_0^T)$$

$$E_1(\hat{S}_1^2 \mid B_0^T) = E_1(\hat{S}_1^2 \cdot \frac{\hat{S}_2^2}{\hat{S}_2^2} \mid B_0^T) = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} E_1(\hat{S}_2^2 \mid B_0^T)$$

ahonnan következik, hogy

$$\hat{S}_1 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_1 \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}_1^2 \mid B_0^T)} = \hat{S}_1 \cdot \frac{\frac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2} E_1(\hat{S}_2 \mid B_0^T)}{\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} E_1(\hat{S}_2^2 \mid B_0^T)} = \hat{S}_2 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_2 \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}_2^2 \mid B_0^T)} \qquad (\operatorname{mod} P_1)$$

és ezzel az 1. lemmát bebizonyitottuk.

2. Lemma. *A szabályos becslések osztályában*

$$\hat{U} = \hat{S} \cdot \frac{E_1(\hat{S} \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2 \mid B_0^T)}$$

ahol $\hat{S} \in \mathcal{S}$, *minimális szórású becslése* σ^2*-nek.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha\left(\frac{\xi(t)}{\xi(0)}\right) = \frac{E_1(\hat{S}|B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2|B_0^T)}$, akkor $\hat{U} = \alpha\hat{S}$ továbbá

$$E_S(\hat{S} - S)^2 = E_S(\hat{S} - \hat{U} + \hat{U} - S)^2 = E_S(\hat{S} - \hat{U})^2 + E_S(\hat{U} - S)^2 + 2E_S(\hat{S} - \hat{U})(\hat{U} - S)$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
E_S(S - \hat{U})(\hat{U} - S) &= E_S\left(\hat{S}(\xi(t)) - \alpha \cdot \hat{S}(\xi(t))\right)\left(\hat{U}(\xi(t)) - S\right) \\
&= S^2 E_S\left[\hat{S}\left(\frac{\xi(t)}{\sqrt{S}}\right) - \alpha \cdot \hat{S}\left(\frac{\xi(t)}{\sqrt{S}}\right)\right]\left[\hat{U}\left(\frac{\xi(t)}{\sqrt{S}}\right) - 1\right] \\
&= S^2 E_1(\hat{S} - \alpha \cdot \hat{S})(\hat{U} - 1) \\
&= S^2 E_1\left[\hat{S}(1 - \alpha)(\hat{U} - 1)\right] \\
&= S^2 E_1\left\{(1 - \alpha)E_1\left[\hat{S}(\hat{U} - 1)|B_0^T\right]\right\} \\
&= S^2 E_1\left[(1 - \alpha)E_1(\hat{S} \cdot \hat{U} - \hat{S}|B_0^T)\right] \\
&= S^2 E_1\left[(1 - \alpha)E_1(\hat{S}^2\alpha - \hat{S}|B_0^T)\right] \\
&= S^2 E_1\left\{(1 - \alpha)\left[\alpha \cdot E_1(\hat{S}^2|B_0^T) - E_1(\hat{S}|B_0^T)\right]\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

amiből

(5) $$E_S(\hat{S} - S)^2 = E_S(\hat{S} - \hat{U})^2 + E_S(\hat{U} - S)^2 \geqslant E_S(\hat{U} - S)^2$$

adódik. Az 1. lemma alapján (5)-ből következik a 2. lemma helyessége.

3. Lemma. *Legyen $\hat{S} \in \mathcal{S}$ és $\hat{S}$ torzitatlan becslése S-nek. Legyen továbbá*

(6) $$\hat{U}^* = C\hat{S}\,\frac{E_1^2(\hat{S}|B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2|B_0^T)} = C \cdot \hat{U} = C\alpha S$$

ahol a C állandó úgy határozható meg, hogy

$$C \cdot E_1\left\{\frac{E_1(\hat{S}|B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2|B_0^T)}\right\} = 1.$$

Akkor $\hat{U}^* \in \mathcal{S}$ és $\hat{U}^*$ torzitatlan becslés S-re.

Bizonyítás. Definíció szerint $\hat{U}^* \epsilon \mathcal{S}$, továbbá

$$E_S(\hat{U}^*) = C \cdot E_S(\alpha \cdot \hat{S}) = C \cdot S \cdot E_1(\alpha \hat{S})$$

$$= C \cdot S \cdot E_1\left[\alpha \cdot E_1(\hat{S} | B_0^T)\right] = C \cdot S \cdot E_1\left[\frac{E_1^2(\hat{S} | B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2 | B_0^T)}\right] = S$$

Megjegyzés. A 3. lemma bizonyításából azt is kapjuk, hogy

(7) $\qquad C \cdot E_1(\hat{U}) = 1$

2. PITMAN-FÉLE BECSLÉS.

Legyen $\hat{S}_1, \hat{S}_2 \epsilon \mathcal{S}$ és $\hat{U}_1^* = C_1 \hat{S}_1 \alpha_1 = C_1 \hat{U}_1$; $\hat{U}_2^* = C_2 \hat{S}_2 \alpha_2 = C_2 \hat{U}_2$.

Az 1. lemma szerint

$$\hat{U}_1 = \hat{S}_1 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_1 | B_0^T)}{E_1(\hat{S}_1^2 | B_0^T)} = \hat{S}_2 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_2 | B_0^T)}{E_1(\hat{S}_2^2 | B_0^T)} = \hat{U}_2 \qquad (\mathrm{mod}\, P_1)$$

Másrészt (7)-ből $C_1 E_1(\hat{U}_1) = 1$, $\quad C_2 E_1(\hat{U}_2) = 1$, amikből következik, hogy $C_1 = C_2$ és

(8) $\qquad \hat{U}_1^* = \hat{U}_2^*$

tehát minden $\hat{S} \epsilon \mathcal{S}$-ra $\hat{U}^*$ ugyanaz.

A 2. lemma bizonyításához hasonló módon belátható, hogy minden $\hat{S} \epsilon \mathcal{S}$-ra

(9) $\qquad E_S(\hat{S} - S)^2 \geqslant E_S(\hat{U}^* - S)^2$

A 3. lemmából, (8)-ból és (9)-ből adódik a következő állítás:

1. Tétel. *Ha $\hat{S} \epsilon \mathcal{S}$ és $\hat{S}$ torzítatlan becslése S-nek, akkor $\hat{U}^*$ legjobb torzítatlan becslése S-nek a szabályos becslések osztályában.*

Definíció. Pitman-féle becslésnek nevezzük azt az $\hat{U}^*$ becslést, amely legkisebb szórású, torzıtatlan becslése $S = \sigma^2$-nek a szabályos becslések $\mathcal{S}$-osztályában.

Tekintsük az $\hat{S} = \xi^2(0)$ becslést. Nyilvánvaló, hogy $\hat{S} \epsilon \mathcal{S}$ és $E_S(\xi^2(0)) = \sigma^2 = S$, azaz $\xi^2(0)$ torzítatlan becslése S-nek.

Az 1. tétel szerint az $\hat{U}^* = C \cdot \xi^2(0) \dfrac{E_1(\xi^2(0) | B_0^T)}{E_1(\xi^4(0) | B_0^T)}$ becslés, ahol C meghatározható a

$$C \cdot E_1\left\{\frac{E_1^2(\xi^2(0) | B_0^T)}{E_1(\xi^4(0) | B_0^T)}\right\} = 1$$ összefüggésből, legjobb torzítatlan becslése S-nek az $\mathcal{S}$ osztályban.

Tehát

$$\hat{U}^* = C \cdot \xi^2(0) \frac{E_1(\xi^2(0)|B_0^T)}{E_1(\xi^4(0)|B_0^T)}$$

Pitman-féle becslés.

Tegyük most fel, hogy $\xi_1, \ldots, \xi_n$ azonos eloszlásúak, de nem szükségképpen függetlenek, és $\xi_1 = \xi(0) \neq 0 \pmod{P_1}$.

Legyen $p_0(x_1, \ldots, x_n)$ a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ változók együttes sűrűségfüggvénye, legyen továbbá $\eta = \xi_1$, $\eta_2 = \dfrac{\xi_2}{\xi_1}, \ldots, \eta_n = \dfrac{\xi_n}{\xi_1}$ akkor az $\eta, \eta_2, \ldots, \eta_n$ együttes sűrűségfüggvénye a következő:

$$p(z, y_2, \ldots, y_n) = p_0(z, zy_2, \ldots, zy_n) \cdot z^{n-1}$$

Innen belátható, hogy

$$E_1(\xi_1^2 \mid \frac{\xi_2}{\xi_1}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_1}) = E_1(\eta^2 \mid \eta_2, \ldots, \eta_n) = \frac{\int z^{n+1} p_0(z, z\eta_2, \ldots, z\eta_n) dz}{\int z^{n-1} p_0(z, z\eta_2, \ldots, z\eta_n) dz} \tag{10}$$

és

$$E_1(\xi_1^4 \mid \frac{\xi_2}{\xi_1}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_1}) = E_1(\eta^4 \mid \eta_2, \ldots, \eta_n) = \frac{\int z^{n+3} p_0(z, z\eta_2, \ldots, z\eta_n) dz}{\int z^{n-1} p_0(z, z\eta_2, \ldots, z\eta_n) dz} \tag{11}$$

Jelölje B_2^n a $\dfrac{\xi_k}{\xi_1}$, $(2 \leqslant k \leqslant n)$ változók által generált σ-algebrát.

Mivel az $\hat{S} = \xi^2(0) = \xi_1^2$ statisztika szabályos, torzítatlan becslése S-nek, a Pitman-féle becslés a következő:

$$\hat{U}^* = C \cdot \xi^2(0) \cdot \frac{E_1(\xi^2(0) \mid B_2^n)}{E_1(\xi^4(0) \mid B_2^n)} \tag{12}$$

(10), (11), (12) alapján $z = t\xi_1$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$\hat{U}^* = C \cdot \xi_1^2 \frac{\int t^{n+1} \xi_1^{n+1} p_0(t\xi_1, t\xi_2, \ldots, t\xi_n) dt}{\int t^{n+3} \xi_1^{n+3} p_0(t\xi_1, t\xi_2, \ldots, t\xi_n) dt}$$

$$= C \cdot \frac{\int t^{n+1} p_0(t\xi_1, t\xi_2, \ldots, t\xi_n) dt}{\int t^{n+3} p_0(t\xi_1, t\xi_2, \ldots, t\xi_n) dt} \tag{13}$$

$$\text{ahol} \quad C \cdot E_1 \frac{E_1^2(\xi^2(0) \mid B_2^n)}{E_1(\xi^4(0) \mid B_2^n)} = 1 .$$

3. PÉLDA Vegyük észre, hogy a fenti eredmények érvényesek maradnak abban az esetben is, amikor $\xi(t)$ stacionárius, $E\xi(t) = 0$, $E\xi^2(t) = q\sigma^2 = qS$ ahol q egy ismert állandó, és $S = \sigma^2$ ismeretlen paraméter (jelentését alább megadjuk).

Tekintsük most a

$$\xi(t) + a_1 \xi(t-1) + \ldots + a_p \xi(t-p) = \epsilon(t) \tag{15}$$

sztochasztikus egyenletnek eleget tevő $\xi(t)$ p-edrendű autoregressziós folyamatot, ahol $\epsilon(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ független Gauss sorozat, $E\epsilon(t) = 0$, $E\epsilon^2(t) = \sigma^2$.
Ismeretes (lásd [4]), hogy $\xi(t)$ felírható $\epsilon(t)$ segítségével a

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \, \epsilon(t-k) \tag{16}$$

alakban, ahol a b_k-együtthatók meghatározhatók $a_1, \ldots, a_p$ segítségével a következőképpen.
Legyen

$$A(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k$$

és tegyük fel, hogy $z_1, \ldots, z_p$ az $A(z)$ polinom p különböző gyöke, továbbá

$$\frac{a_0 b_0}{A(z)} = \frac{\rho_1}{z_1 - z} + \ldots + \frac{\rho_p}{z_p - z} \qquad (a_0 = b_0 = 1)$$

akkor

$$b_K = \rho_1 \cdot z_1^{-k-1} + \ldots + \rho_p z_p^{-k-1} \tag{17}$$

Tegyük fel, hogy $|z_j| > 1$, $j = 1, \ldots, p$, amiből következik, hogy $\sum_k b_k^2 < \infty$ és a $\xi(t)$ folyamat stacionárius, $E\xi(t) = 0$, $E\xi^2(t) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2$. A következőkben a $\sigma^2 = S$ paraméter becslésével kapcsolatos problémát vizsgáljuk.

σ^2 maximum likelihood becslése. Ismeretes (lásd [2]), hogy $\xi(1), \ldots, \xi(n)$ együttes sűrűségfüggvénye a következő

$$p_{\xi(1), \ldots, \xi(n)}(x_1, \ldots, x_n, \sigma) = p(\underline{X}, \sigma) = (2\pi)^{-n/2} |Q_p|^{-1/2} \sigma^{-n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\underline{X}_p Q_p^{-1} \underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p})^2 \right] \right\} \tag{18}$$

ahol

$$(19)\qquad Q_p^{-1} = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_0a_1 & a_0a_2 \dots a_0a_{p-1} \\ a_0a_1 & a_0^2 + a_1^2 & a_0a_1 + a_1a_2 \\ a_0a_2 & a_0a_1 + a_1a_2 & a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_0a_{p-1} & & & a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{p-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = (x_1, \dots, x_n), \qquad \underline{X}_p = (x_1, \dots, x_p), \qquad \underline{X}_p^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Jelölje $R_p^{-1}\xi(1), \dots, \xi(p)$ kovarianciamátrixának inverzét, akkor $R_p^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}Q_p^{-1}$.

Legyen

$$L(\underline{X},\sigma) = \log p(\underline{X},\sigma) = C_n - n\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1}\underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}(x_i + a_1x_{i-1} + \right.$$
$$\left. + \dots + a_px_{i-p})^2\right]$$

ahol

$$C_n = \log\left[(2\Pi)^{-n/2}|Q_p|^{-1/2}\right]$$

A maximum likelihood egyenlet a következő

$$\frac{\partial L(\underline{X},\sigma)}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1}\underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}(x_i + a_1x_{i-1} + \dots + a_px_{i-p})^2\right] = 0$$

innen adódik $\sigma^2 = S$ maximum likelihood becslése

$$(20)\qquad \hat{S} = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1} X_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}(x_i + a_1x_{i-1} + \dots + a_px_{i-p})^2\right]$$

Megmutatjuk, hogy a (20) maximum likelihood becslés szabályos, egyben torzítatlan. Valóban, (20)-ból következik, hogy

$$\hat{S}(\lambda\xi(t)) = \lambda^2\hat{S}(\xi(t)),$$

továbbá

$$E(\hat{S}) = \frac{1}{n}\left[E(\underline{X}_p Q_p^{-1} \underline{X}_p^*) + \sum_{i=p+1}^{n} E(\epsilon_i^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[TrQ_p^{-1}R_p + E(\underline{X}_p)\cdot Q_p^{-1}E(\underline{X}_p^*) + (n-p)\sigma^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[Tr\sigma^2 I_p + (n-p)\sigma^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[p\sigma^2 + (n-p)\sigma^2\right]$$

$$= \sigma^2$$

ahol TrA az A mátrix nyomát jelöli.

A (18) összefüggésből belátható, hogy az

$$\hat{S} = \frac{1}{n}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1}\underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}(x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p})^2\right]$$

statisztika elégséges a $p(\underline{X},\sigma)$ sűrűségfüggvények összegére nézve. Tekintsük most az

$$\hat{S} = \frac{1}{n}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1}\underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}(x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}(\sigma^2 \underline{X}_p R_p^{-1}\underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}\epsilon_i^2)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}(\underline{X}_p R_p^{-1}\underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}\zeta_i^2)$$

statisztikát, ahol $\zeta_i = \frac{\epsilon_i}{\sigma}$ független, $N(0,1)$ normális eloszlású sorozat.

Figyelembe véve, hogy $\underline{X}_p R_p^{-1}\underline{X}_p^*$ illetve $\sum_{i=p+1}^{n}\zeta_i^2$ $\chi^2(p,0)$ illetve $\chi^2(n-p,0)$ eloszlású, és $\underline{X}_p R_p^{-1}\underline{X}_p^*$ független $\sum_{i=p+1}^{n}\zeta_i^2$-től, $\hat{S}$ sűrűségfüggvényét a következő alakban kapjuk:

$$\Pi(\hat{S},\sigma) = \frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\frac{1}{2^{n/2}}\cdot\left(\frac{n}{\sigma^2}\hat{S}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\hat{S}} \tag{21}$$

Innen a Lehmann-tétel (lásd [5]) alapján következik, hogy $\hat{S}$ teljes elégséges statisztika. Ily módon a (20) maximum likelihood becslés az egyetlen minimális szórású torzítatlan becslés.

PITMAN-FÉLE BECSLÉS.

Az

$$\hat{S} = \frac{1}{n}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1} \underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p})^2\right]$$

becslés szabályos, torzítatlan. Egyrészt az 1. tétel szerint az

$$\hat{U}^* = C\hat{S} \cdot \frac{E_1(\hat{S} \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2 \mid B_0^T)}$$

Pitman-féle becslés legkisebb szórású torzítatlan becslés az $\mathcal{S}$ osztályban, másrészt $\hat{S}$ az egyetlen legkisebb szórású torzıtatlan becslés, ebből adódik, hogy

$$\hat{U}^* = \hat{S}$$

tehát igaz a következő állıtás:

2. Tétel. *σ^2-nek maximum likelihood becslése és Pitmann-féle becslése megegyezik egymással, és az egyetlen legjobb torzitatlan becslés σ^2-re.*

Köszönetemet fejezem ki Arató Mátyásnak segítségéért és értékes tanácsaiért.

Irodalom

[1] Arató Mátyás, Racionális spektrál sűrűségfüggvényű stacionárius folyamatok várható értékének megengedhető becsléséről. A Magy. Tud. Akad. III. Osztály Közleményei 19 (1969). 89-99.

[2] Arató Mátyás, Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálatáról IV. A Magy. Tud. Akad. III. Osztály Közleményei 15 (1965) 107-124.

[3] А.М.Каган, А.Л.Рухин: К теории оценивания параметра масштаба
Теория вероятн. и ее примен. XII, 4 /1967/ 735-741.

[4] W. Feller, An introduction to Probability theory and its applications. Volume II. John Wiley-New York. 1966.

[5] E.L. Lehmann, Testing Statistical Hypotheses. John Wiley-New York. 1960.

Summary

ON THE ESTIMATION OF PARAMETER OF STATIONARY PROCESS

The problem of estimating of the variance of a stationary process is considered. There is given the definition of the Pitman estimation. It is shown that in the case of a p-order autoregressive process the maximum likelihood and Pitman estimates are equivalent.

Резюме

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРОВ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассматривается проблема оценивании стационарных процессов. Дается определение оценки Питмена.

В работе показано, что в случае авторегрессионных процессов порядка p оценка максимального правдоподобия и оценка Питмена эквивалентны.

Beérkezett: 1973. március 14.

TARTALOMJEGYZÉK