A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

III. ÉVFOLYAM, 1—2. FÜZET
1958

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ III., ВЫПУСК 1—2.
1958

★

PUBLICATIONS

OF THE

MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME III., FASC. 1—2.
1958

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1958

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

III. ÉVFOLYAM
1958

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ III.,
1958

★

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME III.
1958

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

1959

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

„A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI" című kiadványsorozat folytatása

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden évfolyama 4 füzetből áll és körülbelül 30 nyomdaív terjedelmű. A dolgozatok vagy valamelyik világnyelven jelennek meg, magyar és még egy világnyelven írt részletes kivonattal, vagy pedig magyarul, két világnyelven írt részletes kivonattal. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük 2 gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15.).

A folyóirat, amelynek első évfolyama 1956-ban jelent meg, folytatása a „Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei" című kiadványsorozatnak, amelynek összesen három kötete jelent meg: I. kötet (1952), II. kötet (1953), III. kötet (1954).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára évfolyamonként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. *Belföldi* megrendelések az Akadémiai Kiadón keresztül adhatók fel (Budapest V. Alkotmány u. 21., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 15.915.111—46), *külföldi* megrendelések a Posta Központi Hírlap Iroda útján eszközölhetők (Budapest V. József nádor tér 1., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 61.257). A folyirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V. Váci u. 22.) Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15.)

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

Продолжение издания

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР: TAMÁS LIPTÁK

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала выходит в 4 выпусках и содержит приблизительно 30 печатных листов. Статьи публикуются либо на каком-нибудь мировом языке с подробным резюме на венгерском и каком-нибудь другом мировом языке, либо на венгерском языке с подробным резюме на двух мировых языках. Работы, предназначенные для опубликования, просим посылать в двух напечатанных на машинке экземплярах вместе с резюме в адрес редакции (Budapest, V. Reáltanoda u. 13/15.).

Журнал, первый том которого вышел в 1956 году, является продолжением издания «A Magyar Tndományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közlemenye» (Труды Института Прикладной Математики Академии Наук Венгрии) вышедшего в трёх томах: Том I. (1952), Том II. (1953), Том III. (1954).

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов за каждый том. Местные заказы принимает Издательство Академии Наук (Budapest V., Alkotmány u. 21., счёт Венгерского Национального Банка 15.915.111—46), заграничные заказы принимает Центральная Журнальная Контора Почты (Budapest V. József nádor tér 1., счёт Венгерского Национального Банка 61.257). По поводу отнощения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

continuing the series

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITOR: TAMÁS LIPTÁK

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers and papers on the practical applications of mathematics. The journal is published quarterly, 4 fasciculi are forming a volume consisting of about 30 printed lists. The papers appear either in a world-language with abstract in Hungarian and in an other world-language, or in Hungarian with abstracts in two world-languages. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The journal, the first-volume of which appeared in 1956, continues the series «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» (Publications de l'Institut des Mathématiques Appliquées de l'Adadémie des Sciences de Hongrie) of which 3 volumes were published altogether: Volume I. (1952), Volume II. (1953), Volume III. (1954).

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft to abroad. Subscriptions can be made at the Academic Publishing House in Hungary (Budapest V. Alkotmány u. 21., single account number in the Hungarian National Bank 15.915.111—46) resp. at the Posta Központi Hírlap Iroda from abroad (Budapest V. József nádor tér 1., single-account number in the Hungarian National Bank 61.257). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

TARTALOMJEGYZÉK

СОДЕРЖАНИЕ

INDEX

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

III. ÉVFOLYAM, 1—2. FÜZET
1958

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ III., ВЫПУСК 1—2.
1958

★

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME III., FASC. 1—2.
1958

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1958

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETNEK

KÖZLEMÉNYEI

»A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI« című kiadványsorozat folytatása

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD
TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS
A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V. REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden évfolyama 4 füzetből áll és körülbelül 30 nyomdaív terjedelmű. A dolgozatok vagy valamelyik világnyelven jelennek meg, magyar és még egy világnyelven írt részletes kivonattal, vagy pedig magyarul, két világnyelven írt részletes kivonattal. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük 2 gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15.).

A folyóirat, amelynek első évfolyama 1956-ban jelent meg, folytatása a „Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei" című kiadványsorozatnak, amelynek összesen három kötete jelent meg: I. kötet (1952), II. kötet (1953), III. kötet (1954).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára évfolyamonként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. *Belföldi* megrendelések az Akadémiai Kiadón keresztül adhatók fel (Budapest V. Alkotmány u. 21., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 15.915.111—46), *külföldi* megrendelések a Posta Központi Hírlap Iroda útján eszközölhetők (Budapest V. József nádor tér 1., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 61.257). A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V. Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15.)

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

Продолжение издания
»A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI«

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI
ТЕХНИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР: TAMÁS LIPTÁK
АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V. REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала выходит в 4 выпусках и содержит приблизительно 30 печатных листов. Статьи публикуются либо на каком-нибудь мировом языке с подробным резюме на венгерском и каком-нибудь другом мировом языке, либо на венгерском языке с подробным резюме на двух мировых языках. Работы, предназначенные для опубликования, просим посылать в двух напечатанных на машинке экземплярах вместе с резюме в адрес редакции (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15.).

Журнал, первый том которого вышел в 1956 году, является продолжением издания »A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei« (Труды Института Прикладной Математики Академии Наук Венгрии) вышедшего в трёх томах: Том I. (1952), Том II. (1953), Том III. (1954).

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов за каждый том. Местные заказы принимает Издательство Академии Наук (Budapest V. Alkotmány u. 21., счёт Венгерского Национального Банка 15.915.111-46), заграничные заказы принимает Центральная Журнальная Контора Почты (Budapest V. József nádor tér 1., счёт Венгерского Национального Банка 61.257). По поводу отнощения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

continuing the series
»A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI«

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI
TECHNICAL EDITOR: TAMÁS LIPTÁK
ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V. REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers and papers on the practical applications of mathematics. The journal is published quarterly, 4 fasciculi are forming a volume consisting of about 30 printed lists. The papers appear either in a world-language with abstract in Hungarian and in an other world-language, or in Hungarian with abstracts in two world-languages. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The journal, the first volume of which appeared in 1956, continues the series „A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei" (Publication de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Académie des Sciences de Hongrie) of which 3 volumes were published altogether: Volume I. (1952), Volume II. (1953), Volume III. (1954).

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft to abroad. Subscriptions can be made at the Academic Publishing House in Hungary (Budapest V. Alkotmány u. 21., single-account number in the Hungarian National Bank 15.915.111—46) resp. at the Posta Központi Hírlap Iroda from abroad (Budapest V. József nádor tér 1., single-account number in the Hungarian National Bank 61.257). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

REMARQUE SUR LA SOMMABILITÉ DES SÉRIES DE TAYLOR SUR LEURS CERCLES DE CONVERGENCE, I.

par

LÁSZLÓ ALPÁR

1. Le comportement de la série de Taylor sur son cercle de convergence a été l'objet de nombreuses recherches. Un résultat particulièrement intéressant a été récemment obtenu à ce sujet par M. P. TURÁN [1].

Il envisage notamment une fonction $f_1(z)$ régulière dans le cercle $|z| < 1$, telle que la fonction

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right)$$

est également régulière dans le cercle-unité, si le nombre complexe $\zeta_0 \neq 0$ est inférieur à 1 en valeur absolue. Il range les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ dans une même classe, et les considère comme »équivalentes du point de vue de la théorie des fonctions«; il soulève ensuite le problème tout naturel: sont-elles »équivalentes du point de vue de la théorie des séries«. Pour expliquer ce qu'on entend par cette équivalence il faut formuler la question d'une manière plus précise: La fonction $f_1(z)$ étant régulière dans le cercle-unité, elle peut être développée en série de Taylor pour $|z| < 1$, soit

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu .$$

La question s'énonce alors ainsi: La convergence de cette série au point $z = 1$ a-t-elle pour conséquence nécessaire la convergence de la série

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu,$$

au point

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} = e^{i\gamma} \qquad (\gamma \text{ réel})$$

solution de l'équation

$$\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z} = 1 .$$

Sa réponse négative s'exprime par le théorème suivant:

Étant donné un nombre complexe $\zeta_0 \neq 0$ *dans le cercle-unité on peut trouver une fonction*

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1.1}$$

régulière dans le cercle $|z| < 1$, *telle que la série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{1.2}$$

soit convergente et que la série déterminée par la relation

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu \tag{1.3}$$

soit divergente au point

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}.$$

En d'autres termes, malgré la convergence de la série (1.2), la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu \tag{1.4}$$

est divergente, pourvu que la fonction $f_1(z)$ soit convenablement choisie.

M. Turán a démontré encore que la sommabilité au sens d'Abel de la série (1.1) au point $z = 1$ a pour conséquence la sommabilité au sens d'Abel de la série (1.3) au point $z = (1+\zeta_0)\,(1+\bar{\zeta}_0)$. En outre, il pose dans son article différents problèmes à résoudre dans le même ordre d'idées, en particulier : peut-on conclure de la sommabilité $(C, 1)$ de la série (1.2) la sommabilité $(C, 1)$ de la série (1.4)?

C'est ce dernier problème qui nous intéresse, mais nous traitons une question un peu plus générale en examinant la sommabilité (C, k) des deux séries mentionnées ci-dessus, k étant un nombre entier positif. Nous allons prouver que la sommabilité (C, k) de la série (1.2) n'entraîne pas nécessairement la sommabilité (C, k) de la série (1.4).

2. Dans ce qui suit nous gardons les notations précédentes et nous désignons de plus la n-ième moyenne (C, k) de la série (1.2) par $\alpha_n^{(k)}$ et par $\beta_n^{(k)}$ celle de la série (1.4). Le théorème que nous venons d'énoncer peut donc être formulé d'une façon plus précise.

Théorème. *Étant donné un nombre complexe* $\zeta_0 \neq 0$ *dans le cercle-unité, on peut trouver une fonction*

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{2.1}$$

régulière dans le cercle $|z| < 1$, *telle que la série* $\sum_\nu a_\nu$ *soit sommable* (C, k), *c'est-à-dire que la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(k)} = A < \infty \tag{2.2}$$

existe, et que la série déterminée par la relation

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu \tag{2.3}$$

ne soit pas sommable (C, k) *au point*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0},$$

autrement dit, que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^{(k)} \tag{2.4}$$

n'existe pas.

Démonstration. L'idée de notre raisonnement est de prouver qu'entre les $\alpha_n^{(k)}$ et $\beta_n^{(k)}$ on peut établir une relation de la forme

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)} , \tag{2.5}$$

où les $c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ ne dépendent que de n, ν, k et ζ_0. La relation (2.5) définit un procédé de sommation qui serait régulier si les conditions de Toeplitz—Schur étaient remplies. Or, nous allons constater qu'il n'existe pas de constante K telle que l'inégalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| < K$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs de n. Il existe donc des suites convergentes $\{\sigma_n\}$ qui se transforment par la matrice $[c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ en suites divergentes $\{\tau_n\}$. Posons donc

$$a_n = \triangle^{k+1}\left[\binom{n+k}{k}\sigma_n\right] \qquad n = 1, 2, \ldots$$

alors

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

est convergente pour $|z| < 1$ et $\alpha_n^{(k)} = \sigma_n$, $\beta_n^{(k)} = \tau_n$. Par conséquent la fonction $f_1(z)$ satisfait aux conditions du théorème.

Pour arriver à cette fin nous partons d'une relation classique valable pour tous les $|s| < 1$ et qui lie entre elles les suites $\{a_n\}$ et $\{\alpha_n^{(k)}\}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \alpha_n^{(k)} s^n = \frac{1}{(1-s)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \frac{f_1(s)}{(1-s)^{k+1}} = P_k(s) , \tag{2.6}$$

d'où

$$f_1(s) = (1-s)^{k+1} P_k(s) . \tag{2.7}$$

De même

$$
(2.8)\quad \begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \beta_n^{(k)} s^n = \\
&= \frac{1}{(1-s)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n s^n = \frac{f_2\left(\dfrac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} s\right)}{(1-s)^{k+1}} = Q_k(s)
\end{aligned}
$$

ou en tenant compte de (2.3)

$$
(2.9)\quad \begin{aligned}
Q_k(s) &= \frac{1}{(1-s)^{k+1}} f_1\left(\frac{\dfrac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} s - \zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 \dfrac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} s}\right) = \\
&= \frac{1}{(1-s)^{k+1}} f_1\left(\frac{(1+\zeta_0)s - \zeta_0(1+\bar{\zeta}_0)}{1+\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s}\right)
\end{aligned}
$$

qui s'écrit, en vertu de la relation (2.7) :

$$
(2.10)\quad \begin{aligned}
&Q_k(s) = \\
&= \frac{1}{(1-s)^{k+1}} \left[1 - \frac{(1+\zeta_0)s - \zeta_0(1+\bar{\zeta}_0)}{1+\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s}\right]^{k+1} P_k\left(\frac{(1+\zeta_0)s - \zeta_0(1+\bar{\zeta}_0)}{1+\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s}\right) = \\
&= \frac{|1+\zeta_0|^{2(k+1)}}{[1+\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s]^{k+1}} P_k\left(\frac{(1+\zeta_0)s - \zeta_0(1+\bar{\zeta}_0)}{1+\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s}\right).
\end{aligned}
$$

Les expressions (2.8) et (2.10) nous permettent d'exprimer $\beta_n^{(k)}$ à l'aide du théorème de Cauchy :

$$
(2.11)\quad \binom{n+k}{k} \beta_n^{(k)} = \frac{|1+\zeta_0|^{2(k+1)}}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{P_k\left(\dfrac{(1+\zeta_0)s - \zeta_0(1+\bar{\zeta}_0)}{1+\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s}\right)}{[1+\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s]^{k+1}} \frac{ds}{s^{n+1}},
$$

où (l) est un contour fermé entourant l'origine dans le sens positif et situé entièrement à l'intérieur du cercle-unité. Le changement de variable

$$
s = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} w
$$

conduit à l'expression

$$
(2.12)\quad \binom{n+k}{k} \beta_n^{(k)} = \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{2\pi i} \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0}\right)^n \int_{(l_1)} \frac{P_k\left(\dfrac{w-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 w}\right)}{(1-\bar{\zeta}_0 w)^{k+1}} \frac{dw}{w^{n+1}} .
$$

Soit encore

$$\frac{w - \zeta_0}{1 - \zeta_0 w} = \omega ,$$

il en résulte

$$(2.13) \qquad \begin{aligned} &\binom{n+k}{k} \beta_n^{(k)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \int_{(l_2)} P_k(\omega) \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0 \omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1} (1+\bar{\zeta}_0 \omega)^{k-1} d\omega \end{aligned}$$

(l_2) est une courbe fermée dans le cercle $|\omega| < 1$ entourant le point $\omega = -\zeta_0$. Nous pouvons prendre pour (l_2) le cercle $1 > |\omega| = \varrho > |\zeta_0|$, ϱ étant une constante.

Remplaçons maintenant dans (2.13) $P_k(\omega)$ par son expression donnée sous (2.6) :

$$P_k(\omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \alpha_n^{(k)} \omega^\nu ,$$

et nous obtenons $\binom{n+k}{k} \beta_n^{(k)}$ sous la forme

$$(2.14) \qquad \binom{n+k}{k} \beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \alpha_\nu^{(k)} p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) ,$$

où

$$(2.15) \quad p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \int_{|\omega|=\varrho} \omega^\nu \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0 \omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1} (1+\zeta_0 \omega)^{k-1} d\omega$$

et par suite

$$(2.16) \qquad \beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k}{k}} p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_\nu^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_\nu^{(k)}$$

sera le procédé de sommation cherché dont nous avons fait allusion avec la formule (2.5). Si toutes les conditions de la régularité étaient satisfaites, il existerait une constante K telle que l'inégalité

$$(2.17) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| < K$$

soit vérifiée indépendamment de n. Nous allons démontrer que ce n'est pas le cas.

Désignons pour cela par x un nombre différent de zéro et inférieur à 1 en valeur absolue, soit $\zeta_0 = |\zeta_0| e^{i\alpha}$ et considérons la fonction suivante:

$$
\begin{aligned}
H_{nk}(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, e^{-i\nu\alpha}\, x^\nu = \\
&= \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\nu+k}{k} p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, e^{-i\nu\alpha} x^\nu = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \int\limits_{|\omega|=\varrho} \frac{(1+\zeta_0\,\omega)^{n+k}}{(\omega+\zeta_0)^{n+1}} \frac{d\omega}{(1+e^{-i\alpha} x\,\omega)^{k+1}},
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

où la dernière égalité s'obtient à l'aide de la relation

$$
\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} (-e^{-i\alpha}\, x\,\omega)^\nu = \frac{1}{(1+e^{-i\alpha}\, x\,\omega)^{k+1}}.
$$

L'intégrale qui figure dans la formule (2.18) peut être calculée d'une manière explicite. Soit $\omega = 1/u$, alors le cercle $|\omega| = \varrho$ se transforme en le cercle $|u| = 1/\varrho$ et nous arrivons à l'expression nouvelle

$$
\begin{aligned}
H_{nk}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \times \\
&\times \int\limits_{|\ |=\frac{1}{\varrho}} \left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k} (1+\zeta_0 u)^{k-1} \frac{du}{(u+e^{-i\alpha} x)^{k+1}}.
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

La fonction à intégrer a un pôle d'ordre $k+1$ au point $u = -e^{-i\alpha} x$ dans le cercle $|u| = 1/\varrho$; le pôle $u = -1/\zeta_0$ se trouve en dehors de ce cercle, car nous avons supposé $1 > \varrho > |\zeta_0|$. L'intégrale (2.19) peut donc être déterminée par le théorème du résidu. Ainsi

$$
\begin{aligned}
H_{nk}(x) &= \\
&= \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{du^k} \left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k} (1+\zeta_0 u)^{k-1}\right]_{u=-e^{-i\alpha}x}.
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Il est facile de prouver par récurrence par rapport à k que

$$\frac{d^k}{du^k}\left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k}(1+\zeta_0 u)^{k-1}\right]= \tag{2.21}$$

$$=(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)\frac{(1-|\zeta_0|^2)^k}{(1+\zeta_0 u)^{k+1}}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^n.$$

En effet, pour $k=1$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+1}=(n+1)\frac{1-|\zeta_0|^2}{(1+\zeta_0 u)^2}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^n.$$

Supposons maintenant la relation (2.21) vérifiée pour $1, 2, \ldots, k$, et nous pouvons écrire:

$$\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}}\left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k+1}(1+\zeta_0 u)^k\right]=$$

$$=\frac{d}{du}\left\{\frac{d^k}{du^k}\left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k}(1+\zeta_0 u)^{k-1}\cdot(u+\bar{\zeta}_0)\right]\right\}=$$

$$=\frac{d}{du}\left\{(n+k)\ldots(n+1)\frac{(1-|\zeta_0|^2)^k}{(1+\zeta_0 u)^{k+1}}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^n(u+\bar{\zeta}_0)+\right.$$

$$\left.+\binom{k}{1}\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k}(1+\zeta_0 u)^{k-1}\right]\right\}=$$

$$=(n+k)\ldots(n+1)(1-|\zeta_0|^2)^k\frac{d}{du}\left[\frac{1}{(1+\zeta_0 u)^k}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+1}\right]+ \tag{2.22}$$

$$+k\frac{d^k}{du^k}\left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k}(1+\zeta_0 u)^{k-1}\right]=$$

$$=(n+k)\ldots(n+1)(1-|\zeta_0|^2)^k\left\{\frac{d}{du}\left[\frac{1}{(1+\zeta_0 u)^k}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+1}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{k}{(1+\zeta_0 u)^{k+1}}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^n\right\}=$$

$$=(n+k+1)(n+k)\ldots(n+1)\frac{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}{(1+\zeta_0 u)^{k+2}}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^n.$$

La relation (2.21) est donc vérifiée. Nous en déduisons pour $H_{nk}(x)$ sa forme définitive :

$$H_{nk}(x) = \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \left(\frac{1+\zeta_0}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^{k+1} \left(\frac{-e^{-i\alpha}x + |\zeta_0|\,e^{-i\alpha}}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^n = \tag{2.23}$$
$$= (-1)^n e^{-in\alpha} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \left(\frac{1+\zeta_0}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^{k+1} \left(\frac{x-|\zeta_0|}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^n.$$

Par la suite la fonction

$$\left(\frac{x-|\zeta_0|}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{n\nu}(|\zeta_0|)\, x^\nu \tag{2.24}$$

jouera un rôle important. C'est M. B. M. BAJŠANSKI [2] qui s'est occupé des fonctions de ce genre, données par cette dernière formule, et la relation

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\lambda_{n\nu}(|\zeta_0|)| = +\infty \tag{2.25}$$

est une conséquence directe du théorème 3. de son essai.

Pour pouvoir profiter de cette circonstance nous devons développer $(1-|\zeta_0|\,x)^{k+1} H_{nk}(x)$ selon les puissances de x. Or, un calcul simple nous conduit à l'identité

$$(1-|\zeta_0|\,x)^{k+1} H_{nk}(x) =$$
$$= \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[\sum_{l=0}^{\nu} \binom{k+\nu-l}{k} \binom{k+1}{l} |\zeta_0|^l e^{li\alpha} p_{n,\nu-l}^{(k)}(\zeta_0)\right] e^{-i\nu\alpha} x^\nu = \tag{2.26}$$
$$= (-1)^n e^{-in\alpha} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n (1+\zeta_0)^{k+1} \left(\frac{x-|\zeta_0|}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^n.$$

Il faut remarquer que $\binom{k+1}{l} = 0$ pour tous les $l > k+1$. Par conséquent d'après (2.25)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \sum_{l=0}^{\nu} \binom{k+\nu-l}{k} \binom{k+1}{l} |\zeta_0|^l e^{li\alpha} p_{n,\nu-l}^{(k)}(\zeta_0) \right| = \tag{2.27}$$
$$= \lim_{n\to\infty} L_n = +\infty\ .$$

Mais

$$L_n \leqq \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\nu} \binom{k+\nu-l}{k} \binom{k+1}{l} |\zeta_0|^l \, |p_{n,\nu-l}^{(k)}(\zeta_0)| = \tag{2.28}$$

$$= (1+|\zeta_0|)^{k+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k}{k}} |p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| \, .$$

Et par suite

$$\lim_{n\to\infty} L_n \leqq (1+|\zeta_0|)^{k+1} \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k}{k}} |p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| = \tag{2.29}$$

$$= (1+|\zeta_0|)^{k+1} \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| = +\infty \, .$$

La condition (2.17) ne peut donc pas être remplie. Il n'existe pas de constante K telle que l'inégalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| < K$$

soit vérifiée pour chaque valeur du nombre n. Ce qui prouve notre théorème.

(Reçule 20 Février 1958.)

LITTÉRATURE

[1] TURÁN, P.: „A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence-circle". *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **12** (1958) (à paraître).

[2] BAJŠANSKI, B. M.: „Sur une classe générale de procédés de sommations du type Euler-Borel". *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **10** (1956) 131—152.

MEGJEGYZÉS A TAYLOR-SOR SZUMMABILITÁSÁRÓL A KONVERGENCIAKÖRÖN, I.

ALPÁR L.

Kivonat

A szerző egy TURÁN PÁL által felvetett kérdésre ad választ. TURÁN kimutatja (sajtó alatt levő [1] dolgozatában), hogy ha $0 < |\zeta_0| < 1$, akkor található olyan, a $|z| < 1$ körben reguláris

(1) $$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu ,$$

függvény, melynél a

(2) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

sor konvergenciája ellenére, a $\dfrac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}$ transzformáció segítségével előállított

(3) $$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu$$

és az egységkörben szintén reguláris függvény hatványsora a $(z-\zeta_0)/(1-\bar{\zeta}_0 z)=1$ egyenlet megoldás-pontjában, a $z = (1+\bar{\zeta}_0)/(1+\zeta_0)$ pontban divergens. TURÁN még azt is bebizonyítja, hogy ha az (1) sor a $z = 1$ pontban Abel-szummálható, akkor a (3) sor a $z = (1+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0)$ pontban ugyancsak Abel-szummálható. Kérdése az, hogy a (2) sor $(C, 1)$ szummálhatóságából feltétlenül következik-e a (3) sor $(C, 1)$ szummálhatósága is a $z = (1+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0)$ pontban.

A szerző azt az általánosabb tételt mutatja ki, hogy ha k tetszőleges pozitív egész szám, akkor a (2) sor (C, k) szummálhatóságából nem feltétlenül következik a

(4) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu$$

sor (C, k) szummálhatósága.

A bizonyítás lényege a következő: Jelölje $\alpha_n^{(k)}$ a (2) és $\beta_n^{(k)}$ a (4) sor n-edik (C, k) közepét. Kimutatjuk, hogy az $\alpha_n^{(k)}$-ek és $\beta_n^{(k)}$-ek között található olyan

(5) $$\beta_n^{(k)} = \sum_{=\nu 0}^{\infty} c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)}$$

alakú kapcsolat, ahol $c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ csak az n, ν, k és ζ_0 értékektől függ. Az (5) összefüggés szummációs eljárást definiál, amely permanens, ha $[c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ mátrixa

kielégíti a TOEPLITZ—SCHUR-féle feltételeket. Bebizonyítjuk, hogy ennek ellenkezője igaz, amennyiben igazoljuk, hogy nincs olyan K állandó, amelyre a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| < K$$

egyenlőtlenség minden n-re teljesülne. Van tehát olyan konvergens $\{\sigma_n\}$ sorozat, amelynek $\{\tau_n\}$ transzformáltja divergens. Legyen ezután

$$a_n = \triangle^{k+1}\left[\binom{n+k}{k}\sigma_n\right],$$

akkor az

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

sor konvergens a $|z| < 1$ körben és $\alpha_n^{(k)} = \sigma_n$, $\beta_n^{(k)} = \tau_n$, azaz $f_1(z)$ éppen a tétel követelményeinek megfelelő függvény.

ЗАМЕЧАНИЕ О СУММИРУЕМОСТИ РЯДА TAYLOR-A НА ОКРУЖНОСТИ СХОДИМОСТИ, I.

L. ALPÁR

Резюме

Автор дает ответ на один вопрос, поставленный P. TURÁN-ом. TURÁN показал (в одной находящейся в печати работе [1]), что если $0 < |\zeta_0| < 1$, то существует такая, регулярная в круге $|z| < 1$ функция

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1}$$

что, несмотря на сходимость ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{2}$$

степенной ряд полученной с помощью преобразовании $(z - \zeta_0)/(1 - \bar{\zeta}_0 z)$ в единичном круге также регулярной функции

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu \tag{3}$$

расходится в точке $z = (1+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0)$ где z такая точка, что $(z-\zeta_0)/(1-\bar{\zeta}_0 z) = 1$. TURÁN доказал также, что если ряд (1) суммируем по Abel-ю в точке $z = 1$, то то же самое имеет место в точке $z = (1+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0)$ для ряда (3). Он спрашивает: обязательно следует ли из суммируемости $(C, 1)$ ряда (2) суммируемость $(C, 1)$ ряда (3) в точке $z = (1+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0)$?

Автор доказывает более общую теорему, согласно которой при любом целом положительном k из суммириемости (C, k) ряда (2) не обязательно следует суммируемость (C, k) ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu . \tag{4}$$

Сущность доказательства такова: Пусть $\alpha_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k)}$ обозначает n-ые средние (C, k) рядов (2) и (4) соответственно. Доказывается, что между $\alpha_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k)}$ имеет место соотношение типа

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)}) \ , \tag{5}$$

где $c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ зависит лишь от n, ν, k и ζ_0. Соотношение (5) определяет процесс суммирования, которыи регулярный если матрица $[c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ удовлетворяет условию TOEPLITZ—SCHUR-а. Доказывается, что имеет место противное: не существует такой постоянной K для которой неравенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| < K$$

имел бы место для всех n. Таким образом, существует такая сходящаяся последовательность $\{\sigma_n\}$, преобразованная которой — $\{\tau_n\}$ расходится. Пусть

$$\alpha_n = \triangle^{k+1}\left[\binom{n+k}{k}\sigma_n\right] \quad \text{тогда ряд} \quad f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

сходится в круге $|z| < 1$ и $\alpha_n^{(k)} = \sigma_n$, $\beta_n^{(k)} = \tau_n$ т. е. функция $f_1(z)$ удовлетворяет требованиям теоремы.

EXTENSION OF CERTAIN THEOREMS OF THE STURMIAN TYPE TO NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

by

IMRE BIHARI[1)]

Introduction

M. BÔCHER [1], [2] (pp. 44—52) added a series of new results to those of CH. STURM [3] concerning the linear combination of a solution and its derivative, of a second order linear differential equation. The present paper gives some new contributions to these investigations concerning certain nonlinear equations.

I thank J. CZIPSZER for his valuable criticism and remarks.

§ 1

In a preceding paper [4] of the author the equation

$$\frac{d}{dx}\big(P(x)\,v'\big) + Q(x,\lambda)\,f(v,v') = 0$$

was discussed from the point of view of oscillation and comparison of the solutions. In the present paper we deal with solutions of the equation

$$\frac{d}{dx}\big(P(x)\,v'\big) + Q(x)\,f(v,v') = 0 \quad . \tag{1}$$

Let the following conditions be assumed throughout this paper:

1. $P(x) > 0$ and $P(x) \in C_0$, $Q(x) \in C_0$ in $[a, b]$,

2. $f(v, w)$ is defined for arbitrary v, w and $f(v, w) \in \mathrm{Lip}\,(1)$ in any bounded domain,

3. $f(\lambda v, \lambda w) = \lambda f(v, w)$, $f(0, w) \equiv 0$ and $\operatorname{sgn} f(v, w) = \operatorname{sgn} v$.

Let us take two linearly independent solutions (v_1, v_2) of (1). They have no zero in common. (See [4], § 1.). We conclude herefrom that

$$\varDelta(x) = v_2' v_1 - v_2 v_1' \neq 0 \quad \text{in} \quad [a, b] \ .$$

Namely regard a point c with $a \leqq c \leqq b$ where $v_1(c) \neq 0$, $v_2(c) \neq 0$ but $\varDelta(c) = 0$, i. e.

$$\frac{v_1'(c)}{v_1(c)} = \frac{v_2'(c)}{v_2(c)} .$$

---

1) Polytechnic University of Budapest, Ist Department of Mathematics.

Hence $v_2(c) = \lambda v_1(c)$, $v_2'(c) = \lambda v_1'(c)$ $(\lambda \neq 0)$ and this involves $v_2 \equiv \lambda v_1$ in $[a, b]$. On the other hand if $v_1 = 0$, $\Delta(x) = v_1' v_2 \neq 0$; for $v_1' \neq 0$ (except $v_1 \equiv 0$) and $v_2 \neq 0$. It is a simple well known fact that v (if different from $v \equiv 0$) cannot have an infinity of zeros in $[a, b]$. For this would imply $v(c) = v'(c) = 0$ at a limiting point c of these zeros, and this contradicts $v \not\equiv 0$. Consider now the linear expression of v and v' $(v \not\equiv 0)$

$$\Phi(x) = \varphi_1 v - \varphi_2 P v' \ . \tag{2}$$

Assuming suitable conditions $\Phi(x)$ cannot oscillate in $[a, b]$ infinitely often. This is expressed by

Theorem 1. *Let* φ_1, φ_2 *and* $f(v, w)$ *satisfy in* $[a, b]$ *the conditions*

1. $\varphi_1(x)$ *and* $\varphi_2(x)$ *are derivable,*
2. $\{\varphi_1, \varphi_2\} = \varphi_1'\varphi_2 - \varphi_2'\varphi_1 + \dfrac{\varphi_1^2}{P} + \dfrac{\varphi_2 Q}{P} f(\varphi_2 P, \varphi_1) \neq 0$,

then Φ *cannot have an infinity of zeros in* $[a, b]$.[2]

Proof. In the opposite case there would exist again a point c in $[a, b]$ where

$$\Phi(c) = \Phi'(c) = 0 \ .$$

With regard to (1) and (2) we have herefrom

$$\varphi_1 v - \varphi_2 P v' = 0 \tag{3}$$

$$\varphi_1' v + (\varphi_1 - \varphi_2' P) v' + \varphi_2 Q f(v, v') = 0 \ , \tag{4}$$

whence being $v(c) \neq 0$ or $v'(c) \neq 0$

$$\frac{v'}{v} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2 P} \quad \text{or} \quad \frac{v}{v'} = \frac{\varphi_2 P}{\varphi_1} \ .$$

(Namely owing to the first equation if $v \neq 0$, then $\varphi_2 \neq 0$, if $v' \neq 0$, then $\varphi_1 \neq 0$.) Putting this in (4) we get

$$\frac{v}{\varphi_2}\{\varphi_1, \varphi_2\} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{v'}{\varphi_1}\{\varphi_1, \varphi_2\} = 0 \qquad \text{at } x = c$$

what is impossible.

§ 2

The zeros of two linearly independent solutions (v_1, v_2) of (1) separate each other (see [4] § 2.). — We raise the problem of finding suitable conditions for the same behaviour of the functions

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi_1 v_1 - \varphi_2 P v_1' \\ \Phi_2 &= \varphi_1 v_2 - \varphi_2 P v_2' \ . \end{aligned} \tag{5}$$

---

[2] Theorems 1. and 3. reduce to Bôcher's theorems provided that $f(v, v') \equiv v$.

We can give such conditions only for the special case where $f(v, w) = v^3/(v^2 + w^2)$, i. e. for the equation

$$(Pv')' + Q \frac{v^3}{v^2 + v'^2} = 0 \tag{6}$$

discussed several times in [4]. In the linear case — where $f(v, w) = v$ — the function $\Phi(x) = \varphi_1 v - \varphi_2 Pv'$ satisfies the second order linear homogeneous equation

$$P\{\varphi_1, \varphi_2\}(P\Phi')' = A\Phi + B\Phi'$$

A and B depending on φ_1, φ_2, P, Q by intricate formulae. This equation is not singular provided that $P \neq 0$, $\{\varphi_1, \varphi_2\} \neq 0$. As $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 > 0$, the functions Φ_1, Φ_2 are linearly independent such as v_1 and v_2, consequently their zeros separate each other, thus Bôcher's theorem ([2], p. 48.) — relative to linear equations — is not very far reaching.

However, assuming $f(v, w)$ to be nonlinear, a nonlinear second order equation is obtained for Φ not belonging to types, for which it is known that zeros of their "independent" solutions separate each other; moreover we cannot establish whether Φ_1, Φ_2 are independent, for we do not know whether they have zeros in common or not.

It is in the esentially nonlinear case where the separation theorem concerning Φ_1, Φ_2 claims for a "separate" proof.

The actual proof shows just the fact that Φ_1 and Φ_2 are linearly independent.

In order that Φ_1 and Φ_2 should not have an infinite number of zeros in $[a, b]$ we assume here too that

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} = \frac{\varphi_1^2}{P} + \varphi_1'\varphi_2 - \varphi_2'\varphi_1 + \frac{\varphi_2^4 P^2 Q}{\varphi_2^2 P^2 + \varphi_1^2} \neq 0 \quad \text{in} \quad [a, b] .$$

Let x_1, x_2 be two consecutive zeros of Φ_1 in $[a, b]$. Further — for the sake of brevity — we introduce the notations

$$A = \varphi_1^2 + P(\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_2'\varphi_1) = \varphi_1^2\left[1 - P\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right], \quad B = -\varphi_1\varphi_2 Q, \; C = \varphi_2^2 QP .$$

Now we can formulate

Theorem 2. *If*

1) φ_1, φ_2 *are derivable,* $P > 0$, $P \in C_0$, $Q \in C_0$, $\{\varphi_1, \varphi_2\} \neq 0$,

2) $A > 0$, $A + C > 0$, $B^2(A + C) < 3AC(4A + C)$

then Φ_2 *has a zero (and only one) in* (x_1, x_2) *and conversely:* Φ_1 *has a unique zero between two successive roots of* Φ_2.

In particular, in order to satisfy the conditions 1) and 2) it is sufficient to assume the following hypotheses:

$$1')\ P>0\,,\quad Q>0\,,\quad \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' < \frac{3P-Q}{3P^2}\,,\quad \varphi_1 \neq 0,\ \varphi_1,\ \varphi_2$$

are derivable, $P \in C_0$, $Q \in C_0$.

Viz. condition 1') *involves*

$$A = \varphi_1^2\left[1 - P\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right] > \frac{Q}{3P}\varphi_1^2 > 0\,,\quad A + C > 0\,,\quad \{\varphi_1, \varphi_2\} =$$

$$= \frac{1}{P}A + \frac{\varphi_2^4 P^2 Q}{\varphi_2^2 P^2 + \varphi_1^2} > 0$$

and — as it may be easily seen —

$$B^2 < 3AC\ .$$

But this implies

$$B^2(A+C) < 3AC(A+C) < 3AC(4A+C)\ .$$

Proof. If the theorem were false, Φ_2 would not vanish in (x_1, x_2). Φ_2 cannot vanish at any one of x_1 and x_2, for Φ_1 and Φ_2 have no zero in common at all; otherwise we should have $v_1' v_2 - v_2' v_1 = 0$ as at this point $\varphi_1^2 + P^2\varphi_2^2 > 0$ (see (5)). Consequently the function Φ_1/Φ_2 is derivable in $[x_1, x_2]$ and vanishes at x_1 and x_2, therefore by the theorem of Rolle there is a point c with $x_1 < c < x_2$ such that

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \Phi_1'\Phi_2 - \Phi_2'\Phi_1 = 0\ .$$

Writing this out in detail

$$\left(\varphi_1' v_1 + \varphi_2 Q\frac{v_1^3}{v_1^2 + v_1'^2} + (\varphi_1 - \varphi_2' P)\, v_1'\right)(\varphi_1 v_2 - \varphi_2 P v_2') -$$

$$-\left(\varphi_1' v_2 + \varphi_2 Q\frac{v_2^3}{v_2^2 + v_2'^2} + (\varphi_1 - \varphi_2' P)\, v_2'\right)(\varphi_1 v_1 - \varphi_2 P v_1') =$$

$$= \left[\varphi_1^2 + (\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_2'\varphi_1)P - \varphi_1\varphi_2 Q v_1 v_2 \frac{v_1' v_2 + v_2' v_1}{(v_1^2 + v_1'^2)(v_2^2 + v_2'^2)} + \right.$$

$$\left. + \varphi_2^2 QP\frac{v_1^2 v_2^2 + v_1^2 v_2'^2 + v_1 v_2 v_1' v_2' + v_1'^2 v_2^2}{(v_1^2 + v_1'^2)(v_2^2 + v_2'^2)}\right]\cdot \Delta = 0$$

where $\Delta = v_1' v_2 - v_2' v_1$. Therefore the expression in the square bracket[3])

[3]) Let us denote this expression by E.

has to vanish at $x = c$. We state that neither v_1 nor v_2 vanishes at c. Supposing e. g. $v_2(c) = 0$, then $v_1(c) \neq 0$ and we have at $x = c$

$$\varphi_1^2 + (\varphi_1' \varphi_2 - \varphi_2' \varphi_1) P + \varphi_2^2 QP \frac{1}{1 + z_1^2} = 0 \quad \text{where} \quad z_1 = \frac{v_1'}{v_1} .$$

By our notations this can be written as

$$A + C \frac{1}{1 + z_1^2} = 0 \qquad \text{or} \quad z_1^2 = - \frac{A + C}{A} . \tag{7}$$

In view of $(A + C)/A > 0$ we obtained a contradiction. Putting

$$\frac{v_1'}{v_1} = z_1 , \qquad \frac{v_2'}{v_2} = z_2$$

the expression

$$E = A + \frac{B(z_1 + z_2) + C(1 + z_1 z_2 + z_1^2 z_2^2)}{(1 + z_1^2)(1 + z_2^2)} \tag{8}$$

has to vanish according to our assumptions. Introducing the notations

$$z_1 + z_2 = \xi \qquad z_1 z_2 = \eta$$

we obtain the equation as follows

$$A + \frac{B\xi + C(1 + \eta + \eta^2)}{1 + \xi^2 - 2\eta + \eta^2} = 0$$

or

$$A\xi^2 + B\xi + [(A + C)\eta^2 + (C - 2A)\eta + A + C] = 0 . \tag{9}$$

Considering this as a second order equation in ξ the discriminant is

$$f(\eta) = B^2 - 4A[(A + C)\eta^2 + (C - 2A)\eta + A + C] = -4A(A + \\ + C)\eta^2 - 4A(C - 2A)\eta + B^2 - 4A(A + C) .$$

But this is not capable to assume nonnegative values because its discriminant

$$16A[B^2(A + C) - 3AC(4A + C)] < 0$$

and $-4A(A + C) < 0$. Therefore (9) has no real roots and so z_1, z_2 cannot be real. This contradiction proves the theorem.

§ 3

Taking a unique not identically vanishing solution v of (1) we shall investigate the zeros of the two expressions

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi_1 v - \varphi_2 P v' \\ \Psi &= \psi_1 v - \psi_2 P v' . \end{aligned} \tag{10}$$

We ask whether one can obtain similar results as we got in the previous §? The answer turned out to be affirmative (as for linear equations). This is the content of

Theorem 3. *If* $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ and ψ_2 *are derivable, and* $\{\varphi_1, \varphi_2\} \neq 0, \{\psi_1 \psi_2\} \neq 0$, $D = \varphi_1 \psi_2 - \psi_1 \varphi_2 \neq 0$ *in* $[a, b]$, *then the zeros of* Φ *separate those of* Ψ *and conversely.*

This theorem is meaningless unless one at least of Φ and Ψ has several zeros in $[a, b]$.

Proof. A differential equation will be deduced satisfied by Φ and Ψ (resp. by Φ/Ψ). — We start from the identity

$$\Phi(\psi_1 v - \psi_2 P v') - \Psi(\varphi_1 v - \varphi_2 P v') = 0$$

what can be brought to the form

$$(\psi_1 \Phi - \varphi_1 \Psi) v - (\psi_2 \Phi - \varphi_2 \Psi) P v' = 0 \; . \tag{11}$$

With regard to equation (1) we get by derivation herefrom

$$\begin{aligned}(\psi_1 \Phi' - \varphi_1 \Psi' + \psi_1' \Phi - \varphi_1' \Psi) v + [\psi_1 \Phi - \varphi_1 \Psi - (\psi_2' \Phi - \varphi_2' \Psi +\\ + \psi_2 \Phi' - \varphi_2 \Psi') P] v' + (\psi_2 \Phi - \varphi_2 \Psi) Q f(v, v') = 0 \; .\end{aligned} \tag{12}$$

From (11) identically

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{P} \frac{\psi_1 \Phi - \varphi_1 \Psi}{\psi_2 \Phi - \varphi_2 \Psi} \; . \tag{13}$$

Putting this into (12)

$$(\psi_1 \Phi' - \varphi_1 \Psi' + \psi_1' \Phi - \varphi_1' \Psi) + [\psi_1 \Phi - \varphi_1 \Psi - (\psi_2' \Phi - \varphi_2' \Psi +$$

$$+ \psi_2 \Phi' - \varphi_2 \Psi') P] \frac{1}{P} \frac{\psi_1 \Phi - \varphi_1 \Psi}{\psi_2 \Phi - \varphi_2 \Psi} + (\psi_2 \Phi - \varphi_2 \Psi) Q f\left(1, \frac{1}{P} \frac{\psi_1 \Phi - \varphi_1 \Psi}{\psi_2 \Phi - \varphi_2 \Psi}\right) = 0 \, .$$

As $D = \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 \neq 0$, we can express Φ' from this equation at a point where $\Phi = 0$ and Ψ' at a point where $\Psi = 0$, obtaining

$$\Phi' = -\frac{\{\varphi_1, \varphi_2\}}{D} \Psi$$

$$\Psi' = \frac{\{\psi_1, \psi_2\}}{D} \Phi \; ,$$

where $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ and $\{\psi_1, \psi_2\}$ are the functions defined in § 1. The functions Φ and Ψ — as (10) shows — cannot vanish simultaneously. The remainder of the proof proceeds perfectly on the lines followed by Bôcher (see [1], p. 430) and we omit its mere reproduction. The rest of Bôcher's results in [1] may also be extended to equation (1). We mention only this : If we assume furthermore that $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ and $\{\psi_1, \psi_2\}$ have opposite signs in $[a, b]$, then one at most of Φ and Ψ can vanish and moreover only once.

Application to equation (6). Take $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = 1$, $\psi_1 = 1, \psi_2 = 0$, then $\Phi = \varphi v - Pv'$, $\Psi = v$ and

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} = \varphi' + \frac{\varphi^2}{P} + \frac{QP^2}{\varphi^2 + P^2}, \qquad \{\psi_1, \psi_2\} = \frac{1}{P} > 0 .$$

Therefore if we choose φ so that

$$\varphi' + \frac{\varphi^2}{P} + \frac{QP^2}{\varphi^2 + P^2} < 0 \qquad \text{in } [a, b] , \tag{14}$$

then only one of v and $\varphi v - Pv'$ can vanish in $[a, b]$ and at most once, i. e. equation (6) is non-oscillatory (no solution of (6) can have several zeros in $[a, b]$). Specializing φ in (14) we obtain various sufficient conditions for the non-oscillatory character of (6). — E. g. $\varphi \equiv 0$ results in $Q < 0$. In this case v and v' together can have at most one zero in $[a, b]$.

§ 4

Suppose that in (6) $Q = \text{const.}$, $P = \text{const.} > 0$, $\dfrac{Q}{P} = \lambda$, then we have the equation

$$v'' + \lambda \frac{v^3}{v^2 + v'^2} = 0 . \tag{15}$$

— As known (see [4] § 3) — every solution of (15) is periodic with the period

$$P_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u, \lambda)}{u} du , \qquad f(u, \lambda) = \frac{u(1 + u^2)}{u^2(1 + u^2) + \lambda} .$$

Replacing in (6) P by a smaller, Q by a larger function, the oscillation will be more rapid (see [4] § 2). Therefore *if*

$$\frac{\max Q}{\min P} = \lambda_1$$

(maximum and minimum are taken in $[a, b]$) *and* $P_{\lambda_1} > 2(b - a)$, *then (6) is non-oscillatory.* — Denoting $\min Q / \max P$ by λ_2 and by k a positive integer, *every solution of (6) has at least k zeros in $[a, b]$ provided that*

$$kp_{\lambda_2} \leqq 2\,(b - a) .$$

Remark. The second (resp. kth) order partial differential equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, \lambda)\, f \left(\frac{\partial^k u}{\partial y^k}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

($k > 0$ integer and $f(\mu p, \mu q) = \mu f(p, q)$) leads by the substitution $u = e^y v(x)$ to the equation

$$v'' + Q(x, \lambda)\, f(v, v') = 0 .$$

Therefore the results obtained here and in [4] relative to this last equation may be applied in the qualitative investigation of certain solutions of the preceding equation.

(Received at 26 February, 1958. — In revised form at 24 March, 1958.)

REFERENCES

[1] Bôcher, M.: „On certain pairs of transcendental functions whose roots separate each other". *Transactions of the American Mathematical Society* **2** (1901) 428—436.
[2] Bôcher, M.: *Leçons sur les méthodes de Sturm.* Gauthier—Villars, Paris, 1917.
[3] Sturm, Ch.: „Sur les équations différentielles linéaires de deuxième ordre". *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **1** (1836) 149—164.
[4] Bihari, I.: „Ausdehnung der Sturmschen Oscillations- und Vergleichssätzen auf die Lösungen gewisser nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung". *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **2** (1957) 159—173.

BIZONYOS STURM-TIPUSÚ EREDMÉNYEK KITERJESZTÉSE MÁSODRENDŰ NEMLINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEKRE

BIHARI I.

Kivonat

A dolgozat célja Bôcher [1], [2] és Sturm [3] bizonyos lineáris területen nyert eredményeinek a kiterjesztése nemlineáris területre. Ezek az eredmények nemlineáris egyenletek lineárisan független megoldásaiból és azok deriváltjaiból képezett függvénypárok zérushelyeinek szétválasztására, az egyenlet oszcilláló vagy nem oszcilláló voltának, e zérushelyek közül egy adott véges intervallumba esők száma végességének megállapítására vonatkoznak. Hasonló eredmények szerepelnek *egy* megoldásból és deriváltjából képzett két és több lineáris kifejezésre.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ТИПА STURM-A НА ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

I. BIHARI

Резюме

Цель работы — распространение на нелинейную случай некоторых результатов Bôcher-a [1], [2] и Sturm-a [3] полученных в линейной случае. Эти результаты относятся к отделению нулей пар функций, образованных из линейно независимых решений уравнений и их производных, к определению осциллируемости или неосциллируемости уравнения, конечности числа нулей в данном конечном отрезке. Аналогичные результаты фигурируют для двух и большего числа линейных выражений, полученных из *одного* решения и его производных.

ÜBER DAS THOMSONSCHE PRINZIP

von

GÉZA FREUD

In elektrischer Formulierung leutet das Thomsonsche Prinzip bekanntlich folgendermassen: E_0 sei ein elektrostatisches Feld, das von den Ladungen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ erzeugt wird, welche auf den sich paarweise nicht berührenden und nicht durchdringenden elektrisch leitenden Körpern $K_1, K_2, \ldots, K_n$ mit den Oberflächen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ verteilt sind. Die Ladung auf F_i sei Q_i. Es sei $\boldsymbol{E}$ ein anderes Vektorfeld, welches, sowohl wie $\boldsymbol{E}_0$ die Eigenschaft

$$\int_F \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{f} = \Sigma Q_i \tag{1a}$$

besitzt. Hier muss an der rechten Seite über alle Indices i summiert werden, für die K_i innerhalb des von der geschlossenen Fläche F begrenzten endlichen Gebietes liegt. (1a) soll für jede solche geschlossene Fläche $\boldsymbol{F}$ gelten, welche keines der K_i schneidet. Erstreckt sich der Raum ausserhalb der K_i ins Unendliche, dann wird auch die Gültigkeit von

$$|\boldsymbol{E}| = O(r^{-2})$$

vorausgesetzt. Wie üblich, bedeutet r den Abstand von einen festen Aufpunkt.

Die rechte Seite in (1a) bedeutet hier die Summe der Ladungen innerhalb der geschlossenen Fläche F mit dem Flächenelement $d\boldsymbol{f}$. Dann ist die elektrostatische Energie des tatsächlich auftretenden Feldes $\boldsymbol{E}_0$ die kleinste, die bei verschiedener Wahl des fiktiven Feldes $\boldsymbol{E}$ entsteht:

$$\frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}_0^2\, d\tau \leqq \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}^2\, d\tau \tag{2a}$$

($d\tau$ ist das Volumenelement).

Es gibt auch eine gleichwertige Formulierung dieses Prinzipes für stationäre Ströme. $K_1, K_2, \ldots, K_n$ seien vollkommene Leiter, denen also keine Potentialunterschiede infolge Leitungsströme entstehen. Diese Leiter seien in ein homogenes Medium endlicher Leitfähigkeit eingebettet und auf fest gehaltenen Spannungen gehalten. Das Feld der Stromdichte des entstehenden stationären Stromes sei $\boldsymbol{i}_0$. Dies soll mit einem Felde $\boldsymbol{i}$ verglichen werden, welche dieselben Quellen und Senken wie $\boldsymbol{i}_0$ besitzt. In Formeln heisst es

$$\oint_F \boldsymbol{i}\, d\boldsymbol{f} = \oint_F \boldsymbol{i}_0\, d\boldsymbol{f} \tag{1b}$$

für jede geschlossene, die K_i nicht schneidende Fläche F. Anschaulich bedeutet dass dass aus jedem Leiter derselbe Gesamtstrom fliesst und im Felde keine weiteren Quellen und Senken vorhanden sind. Dann ist der Wärmeverlust bei $\boldsymbol{i}_0$ am niedrigsten. Nach Unterdrücken konstanter Faktoren, lautet das formelmässig

(2b) $$\int \boldsymbol{i}_0^2 \, d\tau \leqq \int \boldsymbol{i}^2 \, d\tau \ .$$

Der gemeinsame mathematische Inhalt dieser Behauptungen besteht darin, dass unter Feldern mit gleichen Quellen und Senken das Wirbelfreie das kleinste Quadratintegral besitzt.[1]

In der praktischen Elektrotechnik hat es eine immer wachsende Bedeutung, die Stromverteilung in Leitern zu studieren, in welchen zwischen Strom und Spannung ein nichtlinearer Zusammenhang besteht. Meistens ist die Spannung gleich einer Potenz der Stromstärke. Das Thomsonsche Prinzip ist in der oben formulierten Allgemeinheit leider falsch. Doch werden wir zeigen, dass unter weiterer Einchränkungen der Konkurenzfelder eine Variante des Prinzipes gültig bleibt.

Satz. *Die vollkommenen Leiter $K_1, K_2, \ldots, K_n$ seien an fest gehaltenen Spannungen gelegt und in ein homogenes Medium eingebetett, in welchem das Potenzgesetzt*

(3) $$\boldsymbol{E} = \alpha \, i^{\beta-1} \boldsymbol{i} \qquad (\alpha > 0 \ , \ \beta > 0)$$

zwischen den Vektoren der Stromdichte und dem Vektor des elektrischen Feldes besteht, wobei $\boldsymbol{E}$ der Vektor der elektrischen Feldstärke ist, $\boldsymbol{i}$ der Vektor der elektrischen Stromdichte, und i der Betrag des letzteren. Es entstehe im Medium das elektrische Feld $\boldsymbol{E}_0$ und der Stromverlauf $\boldsymbol{i}_0$. Wir betrachten nun solche Konkurrenzverteilungen $\boldsymbol{i}$ des Stromes, welche die Gleichung (1b) *befriedigen und denselben Stromlinienverlauf wie i_0 besitzen, d. h. $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{i}_0$ sind in jedem Punkte parallel und gleichgerichtet. Wir berechnen aus i ein fiktives elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ nach* (3). *Behauptet wird, dass der Ausdruck der Verlustleistung*

(4) $$W = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{E} \, \boldsymbol{i} \, d\tau$$

fü $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_0$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0$ am kleinsten ausfällt.

Dieses Prinzip scheint geeignet zu sein, die Stromverteilung angenähert zu berechnen, falls das Stromlinienbild in guter Näherung vorhanden ist. Bezüglich Anwendungen sei auf eine folgende Arbeit von Herrn J. Rinagel verwiesen.

Beweis. Das tatsächlich entstandene Feld E_0 besitzt ein Potential:

(5) $$\boldsymbol{E}_0 = - \operatorname{grad} \Phi \ .$$

Nach Voraussetzung ist:

$$\boldsymbol{i} = (1 + x) \, \boldsymbol{i}_0 \ ,$$

[1] Es werden auch Oberflächenwirbel mitberücksichtigt, d. h. die Komponente von $\boldsymbol{E}$ entlang der Oberfläche muss in jedem Punkte der F_i verschwinden.

wobei $x > -1$ eine skalare Ortsfunktion mit $\operatorname{div}(x\boldsymbol{i}_0) = 0$ bedeutet. Wir bilden eine einparametrige Schar von zugelassenen fiktiven Stromverteilungen

$$\boldsymbol{i}(\varepsilon) = (1 + \varepsilon x)\,\boldsymbol{i}_0 \qquad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \tag{6}$$

bilden hieraus $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ nach (3) und zeigen, dass der Ausdruck

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}(\varepsilon)\,\boldsymbol{i}(\varepsilon)\,d\tau \tag{7}$$

seinen kleinsten Wert für $\varepsilon = 0$ annimmt. Man erhält nach einigen Rechnungen

$$\left(\frac{dW}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{\beta+1}{2}\int \boldsymbol{E}_0(x\,\boldsymbol{i}_0)\,d\tau = -\frac{\beta+1}{2}\int \operatorname{grad}\Phi(x\,\boldsymbol{i}_0)\,d\tau =$$

$$= -\frac{\beta+1}{2}\int \operatorname{div}(\Phi\,x\,\boldsymbol{i}_0)\,d\tau + \frac{\beta+1}{2}\int \Phi \operatorname{div}(x\,\boldsymbol{i}_0)\,d\tau\,.$$

Nach (1b) ist $\operatorname{div}(x\,\boldsymbol{i}_0) = 0$, daher verschwindet das zweite Glied. Das Integral im ersten Gliede ist gleich

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu \oint_{F_\nu} x\,\boldsymbol{i}_0\,\boldsymbol{dt}\,,$$

wobei $\boldsymbol{F}_\nu$ die Oberfläche von K_ν bedeutet und Φ_ν der konstante Wert von Φ auf K_ν ist. Nach (1b) müssen nun alle Integrale über die einzelnen $\boldsymbol{F}_\nu$ verschwinden. Es ergab sich also

$$\left(\frac{dW}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \tag{8}$$

Es ist weiter

$$\frac{d^2W}{d\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2}(\beta+1)\,\beta\int (1+\varepsilon x)^{\beta-1}\,x^2\,i_0^{\beta+1}\,d\tau > 0 \tag{9}$$

falls x nicht identisch verschwindet. Aus (8) und (9) ersieht man, dass $W(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ tatsächlich am kleinsten wird, w. z. b. w.

(Eingegangen 20. May. 1958.)

A THOMSON-ELVRŐL

FREUD G.

Kivonat

A $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ideális vezetők olyan elektromosan vezető közegbe vannak ágyazva, melyben az $\boldsymbol{E}$ elektromos térerősség vektor és az $\boldsymbol{i}$ áramsűrűség vektor között az

$$\boldsymbol{E} = \alpha\,i^{\beta-1}\,\boldsymbol{i} \qquad \alpha > 0\,,\ \beta > 0$$

nem-lineáris kapcsolat áll fenn. Legyen $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{i}_0$ az a ténylegesen kialakuló elektromos tér és áramelosztás, amelynél a K_j vezetőből $\boldsymbol{I}_j$ áram lép ki ($j = 1, 2, \ldots, n$). Tekintsük az olyan fiktív $\boldsymbol{i}$ árameloszlásokat, melyeknek forrásai és nyelői $\boldsymbol{i}_0$-lal azonosak, azaz amelyeknél minden zárt $\boldsymbol{F}$ felületre

$$\oint_F \boldsymbol{i}\, d\boldsymbol{f} = \oint_F \boldsymbol{i}_0\, d\boldsymbol{f}$$

teljesül és az $\boldsymbol{i}$ vektor minden pontban ugyanolyan irányú, mint $\boldsymbol{i}_0$. Ebből az $\boldsymbol{i}$ fiktív árameloszlásból az

$$\oint_F \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

és

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{i}\, d\tau$$

képletekkel számított fiktív wattveszteség akkor a legkisebb, ha $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_0$.

О ПРИНЦИПЕ THOMSON-A

G. FREUD

Резюме

Идеальные проводники $K_1, K_2, \ldots, K_n$ помещены в такую электрически проводящую среду, в которой между вектором электрической силы поля $\boldsymbol{E}$ и вектором плотности тока $\boldsymbol{i}$ имеет место нелинейная связь

$$\boldsymbol{E} = \alpha\, i^{\beta-1}\, \boldsymbol{i} \qquad \alpha > 0\,, \ \beta > 0\,.$$

Пусть $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{i}_0$ суть действительно возникающие электрическое поле и распределение тока, при котором из проводника K_j выходит ток $\boldsymbol{I}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Рассмотрим такие фиктивные распределения тока $\boldsymbol{i}$, для которых для всякой замкнутой поверхности $\boldsymbol{F}$ имеет место

$$\oint_F \boldsymbol{i}\, d\boldsymbol{f} = \oint_F \boldsymbol{i}_0\, d\boldsymbol{f}$$

и направление вектора $\boldsymbol{i}$ в каждой точке совпадает с направлением $\boldsymbol{i}_0$. Для этого фиктивного распределния тока $\boldsymbol{i}$ фиктивная ваттовая потера, вычисляемая формулами

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

и

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{i}\, d\tau$$

наименьшая тогда, когда $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_0$.

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Оттó KIS

В настоящей работе изучается сходимость интерполяционного метода для решения линейных интегральных уравнений второго рода и граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты общее и лучше известных.

В § 1 перечисляются полученные до сих пор факты об интерполяционном методе. § 2 и § 3 содержат некоторые новые результаты для случая интегральных и дифференциальных уравнений соответственно. В двух последних §-ах приведены их доказательства.

В дальнейших сообщениях будет изучено решение интерполяционным методом задач о собственных значениях и уравнений с частными производными.

§ 1

Интерполяционный метод, о котором идет речь, был предложен Л. В. Канторовичем для приближенного решения уравнений с частными производными (см. [1]). Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений этот метод впервые был применен в [2].

Если ограничиться случаем уравнения

$$y^{(2m)}(x) = \sum_{k=0}^{2m-1} f_k(x)\, y^{(k)}(x) + f(x) \tag{1}$$

и граничных условий

$$y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1)\ , \tag{2}$$

то метод состоит в том, что приближенное решение ищется в виде линейной комбинации функций, удовлетворяющих граничным условиям, например, в виде

$$z(x) = (b-x)^m\,(x-a)^m \sum_{k=1}^{n} c_k\, x^{k-1}\,, \tag{3}$$

а коэффициенты c_k определяются из уравнений

$$z^{(2m)}(x_i) = \sum_{k=}^{2m-1} f_k(x_i)\, z^{(k)}(x_i) + f(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\ , \tag{4}$$

где узлы x_i суть некоторые точки отрезка $[a, b]$, т. е. требуется чтобы (3) удовлетворяло дифференциальному уравнению в узлах.

В [2] и [3] утверждается, что интерполяционный метод сходится одновременно с методом моментов. Э. Б. Карпиловская в работе [4] доказала, что это утверждение ошибочно. Опираясь на общую теорию приближенных методов анализа, развитую Л. В. Канторовичем в работе [5], она доказала, что если $\lambda = 1$ не является собственным значением уравнения

$$y^{(2m)}(x) = \lambda \sum_{k=0}^{2m-1} f_k(x)\, y^{(k)}(x)$$

при граничных условиях (2), то уравнения (4) имеют единственное решение для достаточно больших n в предположении, что $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{2m-1}(x)$ непрерывно дифференцируемы, и

$$\|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C = O\left(\frac{\log^2 n}{n^{r+\alpha}}\right) \quad \text{или} \quad O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m) \tag{5}$$

в предположении, что $f(x), f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{2m-1}(x)$ имеют r-ую производную, удовлетворяющую условию Lipschitz-а с показателем α, а узлы, соответственно, суть абсциссы Чебышева или Gauss-а, относящиеся к отрезку $[a, b]$.

Применение интерполяционного метода для решения интергальных уравнений было предложено Л. В. Канторовичем в [5].

В случае уравнений

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt + f(x) \tag{6}$$

метод заключается в том, что приближенное решение ищется в виде линейной комбинации известных функций, например в виде

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1} \tag{7}$$

или, в случае отрезка [0,1],

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cos \pi(k-1)\, x\ , \tag{8}$$

а коэффициенты c_k определяются из уравнений

$$\psi(x_k) = \lambda \int_a^b K(x_k, t)\, \psi(t)\, dt + f(x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\ , \tag{9}$$

т. е. требуется, чтобы приближенное решение удовлетворяло интегральному уравнению в узлах.

В [5], опираясь на уже упоминавшуюся общую теорию приближенных методов анализа, доказано, что если λ не есть собственное значение для (6),

$$x_k = \frac{2k-1}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

и

$$E_n[K] \log^2 n \to 0, \quad E_n[f] \log^2 n \to 0, \tag{11}$$

то при достаточно больших n (9) имеет единственное решение, а (8) равномерно сходится к решению интегрального уравнения. Здесь $E_n[f]$ и $E_n[K]$ обозначают наилучшее приближение $f(x)$ и $K(x, t)$ функциями вида (8), где коэффициенты постоянны или функции переменной t соответственно. (В [5] второе из условий (11) отсутствует, что возможно лишь в случае, когда приближенное решение ищется в виде $f(x) + \psi(x)$). Из рассуждений Л. В. Канторовича следует также, что при сделанных предположениях

$$\|\varphi - \psi\|_C = O\{(E_n[K] + E_n[f]) \log^2 n\}. \tag{12}$$

Эта формула не может быть применена для эффективной оценки погрешности, так как справа фигурируют и неизвестные постоянные. Автор приводит также формулу, с помощью которой эффективная оценка погрешности может быть проведена.

В дальнейшем нам потребуется один результат М. К. Гаврина. Ограничиваясь случаем (7), он может быть сформулирован так: условия (9) выполняются для (7) в том и только в том случае, если (7) является решением интегрального уравнения

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b P[K(x, t)]\, \psi(t)\, dt + P[f(x)], \tag{13}$$

где $P[K(x, t)]$ и $P[f(x)]$ обозначают интерполяционные многочлены Lagrange-а функций $K(x, t)$ и $f(x)$ по узлам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (коэффициенты первого из них суть функции переменной t), т. е. интерполяционный метод есть частный случай следующего общего метода: в качестве приближенного решения (6) берется решение интегрального уравнения

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b L(x, t)\, \psi(t)\, dt + g(x) \tag{14}$$

с вырожденным ядром, где $g(x)$ и $L(x, t)$ в каком-нибудь смысле близки к $f(x)$ и $K(x, t)$ соответственно.

Этот факт еще не был опубликован. С разрешением автора ниже приводится его доказательство.

§ 2

Сейчас мы для случая интегральных уравнений приведем некоторые новые результаты. Ограничимся случаем, когда приближенное решение ищется в виде (7). Будем предполагать, что λ не есть собственное значение уравнения (6), а функции $K(x, t)$ и $f(x)$ непрерывны.

Введем для остатка от интерполирования некоторой функции F обозначение $R[F]$, т. е. пусть

$$R[F] = F - P[F] \quad (15)$$

Теорема 1. *Если интерполяционный процесс для $f(x)$ и $K(x, t)$ равномерно сходится, то для достаточно больших n* (9) *имеет единственное решение, $\psi(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ и*

$$\|\varphi - \psi\|_C = O(\|R[K]\|_C + \|R[f]\|_C) \quad (16)$$

Обозначим наилучшее приближение некоторой функции $F(x)$ многочленами n-ой степени через $E_n[f]$. Если функция зависит еще и от переменной t, то и коэффициенты многочленов суть функции этой переменной. λ_n обозначает постоянную Lebesgue-а интерполирования по узлам $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Следствие 1. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n E_n[K] = \lim_{n\to\infty} \lambda_n E_n[f] = 0 , \quad (17)$$

то

$$\|\varphi - \psi\|_C = O\{\lambda_n(E_n[K] + E_n[f])\} . \quad (18)$$

Следствие 2. *В случае отрезка* $[-1, +1]$ *и узлов Чебышева*

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (19)$$

в (17 *и* 18) *вместо* λ_n *можно писать* $\log n$.

Теорема 2. *Если интерполяционный процесс сходится для $K(x, t)$ и $f(x)$ в среднем, то для достаточно больших n* (9) *имеет единственное решение, $\psi(x)$ сходится $\varphi(x)$ в среднем и*

$$\|\varphi - \psi\|_{L^2} = O(\|R[K]\|_{L^2} + \|R[f]\|_{L^2}) . \quad (20)$$

Следствие 3. *Если узлы суть корни многочленов, ортогональных на отрезке $[a, b]$ по весу $p(x)$, удовлетворяющему условию*

$$p(x) \geqq m > 0 , \quad (21)$$

то для достаточно больших n $\psi(x)$ существует, единственно, сходится в среднем к $\varphi(x)$ и

$$\|\varphi - \psi\|_{L^2} = O(E_n[K] + E_n[f]) . \quad (22)$$

Замечание 1. В (16), (18), (20) и (22) вместо K можно писать

$$\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt . \quad (23)$$

Замечание 2. Результаты, аналогичные приведенным выше, имеют место и в случае, когда приближенное решение ищется не в виде рационального, а в виде тригонометрического или четного тригонометрического многочлена. Так, напимер, в случае, исследованном Л. В. Канторовичем, приведенный выше результат может быть улучшен: в (11) и (12) вместо $\log_2 n$ можно писать $\log n$.

Замечание 3. Если многочлен $(2n-1)$-ой степени $\psi(x)$ удовлетворяет условиям (9) и

$$\psi'(x_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) ,$$

то в случае отрезка $[-1, +1]$ и узлов (19) для равномерной сходимости $\psi(x)$ достаточно требовать от $f(x)$ и $K(x, t)$ их непрерывности.

На этот факт обратил мое внимание P. Turán.

Замечание 4. Формулы (16), (18), (20) и (22) дают информацию о порядке сходимости, но не могут быть использованы для эффективной оценки погрешности, так как в них фигурируют неизвестные постоянные Такая оценка может быть произведена с помощью следующего факта: пусть (13) имеет резольвенту $\gamma(x, t, \lambda)$,

$$h = \left\| \int_a^b |R[K(x,t)]|\, dt \right\|_C , \qquad B = \left\| \int_a^b |\gamma(x, t, \lambda)|\, dt \right\|_C ;$$

если

$$|\lambda|\, h(1 + |\lambda|\, B) < 1 ,$$

то λ не является собственным значением для (6) и

$$\|\varphi - \psi\|_C \leqq \frac{(|\lambda|\ \|\psi\|_C h + \|R[f]\|_C)\,(1 + |\lambda|\, B)}{1 - |\lambda|\, h(1 + |\lambda|\, B)} .$$

§ 3

В этом §-е приводятся некоторые новые результаты для случая дифференциальных уравнений.

Ограничимся случаем уравнения

$$y^{(2m)}(x) = \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x) + f(x) \tag{24}$$

(как известно, всякое уравнение вида (1) может быть приведено к такому виду), граничных условий (2) и приближенного решения (3).

Предполагается, что коэффициенты уравнения (24) непрерывны, а $\lambda = 1$ не есть собственное значение уравнения

$$y^{(2m)}(x) = \lambda \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x) \tag{25}$$

при граничных условиях (2).

Теорема 3. *Если узлы удовлетворяют условию следствия* 3, *то для достаточно больших* n $z(x)$ *существует, единственно, и вместе с* $2m-1$

первыми производными равномерно сходится к $y(x)$, $z^{(2m)}(x)$ *сходится к* $y^{(2m)}(x)$ *в среднем,*

$$(26)\qquad \|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C = O\left(E_n\left[\sum_{k=0}^{2m-2} f_k y^{(k)}\right] + E_n[f]\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1),$$

$$(27)\qquad \|y^{(2m)} - z^{(2m)}\|_{L^2} = O\left(E_n\left[\sum_{k=0}^{2m-2} f_k y^{(k)}\right] + E_n[f]\right).$$

Следствие 4. *Если* $f(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots, f_{2m-2}(x)$ *имеют* r*-ую производную, удовлетворяющую условию Lipschitz-а с показателем* α, *то*

$$(28)\qquad \|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1),$$

$$(29)\qquad \|y^{(2m)} - z^{(2m)}\|_{L^2} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Замечание 5. Если

$$(30)\qquad \lim_{n\to\infty} n\lambda_n = O,$$

$$(31)\qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n E_n\left[\sum_{k=0}^{2m-2} f_k y^{(k)}\right] = \lim_{n\to\infty} \lambda_n E_n[f] = 0,$$

то

$$\|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C = O\left\{\lambda_n\left(E_n\left[\sum_{k=0}^{2m-2} f_k y^{(k)}\right] + E_n[f]\right)\right\} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m).$$

Если выполняется условие следствия 4 и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n^{r+\alpha}} = 0,$$

то

$$\|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C = O\left(\frac{\lambda_n}{n^{r+\alpha}}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n).$$

Следствие 5. *Если выполнено условие следствия* 4, *то в случае отрезка* $[-1, +1]$ *и узлов Чебышева* (19)

$$(32)\qquad \begin{aligned} \|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C &= O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots 2m-1), \\ \|y^{(2m)} - z^{(2m)}\|_C &= O\left(\frac{\log n}{n^{r+\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Для узлов Gauss-а (32) *также имеет место и*

$$\|y^{(2m)} - z^{(2m)}\|_C = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1/2}}\right).$$

(*Если* $r = 0$, *то* $\alpha > 1/2$).

Эти оценки лучше, чем (5).

§ 4

Переходим к доказательству утверждений, относящихся к случаю интегральных уравнений.

Сначала докажем теорему М. К. Гавурина.

Предположим, что для (7) выполнены условия (9). Умножим эти уравнения на $l_k(x)$ — фундаментальные многочлены интерполирования и сложим полученные равенства. Мы придем к тождеству

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k)\, l_k(x) = \lambda \int_a^b \psi(t) \sum_{k=1}^{n} K(x_k, t)\, l_k(x)\, dt + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x) \; . \tag{33}$$

Оно совпадает с уравнением (13), так как стоящая слева сумма, очевидно, совпадает с (7), а стоящие справа суммы суть интерполяционные многочлены $K(x, t)$ и $f(x)$ соответственно. Таким образом (13) есть следствие (9). Обратное заключение очевидно : достаточно подставить в (13) x_k на место x и сразу приходим к (9). Следовательно, (7) в том и только в том случае удовлетворяет уравнениям (9), когда оно удовлетворяет уравнению (13), а именно это и требовалось доказать.

Теперь мы докажем теорему 1.

Согласно замечанию на стр. 159 [6], если $K_n(x, t)$ и $f_n(x)$ равномерно сходятся к $K(x, t)$ и $f(x)$ соответственно, *а* λ не является собственным значением уравнения (6), то для достаточно больших n уравнение

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, t)\, \varphi_n(t)\, dt + f_n(x)$$

имеет единственное решение, равномерно сходящееся к решению уравнения (6). Фигурирующая в [6] на стр. 158 формула (16) может быть переписана в форме

$$\|\varphi - \varphi_n\|_C = \frac{O(\|K - K_n\|_C)}{1 - O(\|K - K_n\|_C)} + O(\|f - f_n\|_C) \; , \tag{34}$$

следовательно

$$\|\varphi - \varphi_n\|_C = O(\|K - K_n\|_C + \|f - f_n\|_C) \; . \tag{35}$$

Для случая

$$K_n = P[K], f_n = P[f]$$

из сказанного следует, что уравнение (13) при достаточно больших n имеет единственное решение, равномерно сходящееся к решению уравнения (6), и имеет место формула (16), откуда, в силу теоремы М. К. Гавурина, следует утверждение теоремы 1.

Как известно (см., например, [7], стр. 539)

$$|R[F]| \leq (\lambda_n + 1)\, E_n[F] \; .$$

Отсюда и из теоремы 1 сразу следует заключение следствия 1.

Так как в случае узлов Чебышева (19)

$$\lambda_n = O(\log n) \tag{36}$$

(см., например, [7], стр. 540), то отсюда следует справедливость следствия 2.

Доказательство теоремы 2 совершенно аналогично доказательству теоремы 1, только вместо нормы пространства C надо писать норму пространства L^2 и вместо равномерной сходимости говорить о сходимости в среднем.

Следствие 3 получается из теоремы 2, если принять во внимание, что согласно теореме P. Erdős-а и P. Turán-а (см. [8]) интерполяционный процесс сходится в среднем для всякой R-интегрируемой функции и

$$\|R[F]\|_{L^2} = O(E_n[F]) ,$$

если узлы интерполирования суть корни многочленов, ортогональных по положительному весу. (Эта теорема имеет место и в случае, если интерполируемая функция непрерывно зависит еще и от переменной t).

Из доказательства теоремы на стр. 157 [6] видно, что в (34) в числителе вместо $K - K_n$ можно писать

$$\int_a^b [K(x,t) - K_n(x,t)]\,\varphi(t)\,dt .$$

Это дает возможность в формулах (16) и (18), являющимися ее следствиями, произвести аналогичную замену. Аналогичным образом можно обосновать закономерность такой замены для формул (20) и (22).

Замечание 2 имеет место, так как все использованные свойства интерполирования по Lagrange-у имеют аналоги в теории тригонометрического и четного тригонометрического интерполирования. Случай, исследованный Л. В. Канторовичем, является аналогом случая, рассмотренного в следствии 3.

Утверждение замечания 3 может быть доказано также, как и теорема 1. Надо лишь заметить, что вместо интерполяционных многочленов Lagrange-а мы будем иметь дело с интерполяционными многочленами Fejér-a, которые, как известно (см., например, [7], стр. 549) равномерно сходятся к каждой непрырывной функции, если узлы суть абсциссы Чебышева.

Оценка погрешности, о которой идет речь в замечании 4, является перефразировкой формулы (21) со стр. 159 [6].

5. §.

Докажем, наконец, утверждения, относящиеся к случаю дифференциальных уравнений.

Начнем с доказательства теоремы 3.

Обозначим через $G(x, t)$ функцию Green-а дифференциального оператора

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \tag{37}$$

при граничных условиях (2). Пусть

(38) $$\varphi(x) = y^{(2m)}(x) \;,$$

(39) $$G^{(k)}(x, t) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x, t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1) \;,$$

(40) $$K(x, t) = \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, G^{(k)}(x, t) \;.$$

Так как

(41) $$y^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} \int_a^b G(x, t)\, \varphi(t)\, dt = \int_a^b G^{(k)}(x, t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1),$$

то

(42) $$\sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x) \int_a^b G^{(k)}(x, t)\, \varphi(t)\, dt = \\ = \int_a^b \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, G^{(k)}(x, t)\, dt = \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt \;.$$

Из (38) и (42) следует, что уравнение (24) может быть записано и в виде интегрального уравнения

(43) $$\varphi(x) = \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt + f(x) \;.$$

Легко видеть, что, если (3) удовлетворяет уравнениям

(44) $$z^{(2m)}(x_i) = \sum_{k=0}^{2m-2} f(x_i)\, y^{(k)}(x_i) + f(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \;,$$

то

(45) $$\psi(x) = z^{(2m)}(x)$$

есть многочлен $(n-1)$-ой степени (7), для которого выполнены условия

(46) $$\psi(x_i) = \int_a^b K(x_i, t)\, \psi(t)\, dt + f(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \;,$$

и наоборот: если для (7) выполнены условия (46), то

(47) $$z(x) = \int_a^b G(x, t)\, \psi(t)\, dt$$

есть многочлен вида (3), удовлетворяющий уравнениям (44).

Действительно, (3) есть многочлен $(n + 2m - 1)$-ой степени, следовательно (45) будет многочленом $(n - 1)$-ой степени ; из (47), очевидно, следует (45) и поэтому (47) есть многочлен $(n + 2m - 1)$-ой степени, если $\psi(x)$-многочлен $(n - 1)$-ой степени, в то же время (47), очевидно, удовлетворяет условиям (2) и, следовательно, имеет вид (3) ; тождественность условий (44) и (46) может быть доказана также, как тождественность уравнений (24) и (43).

Мы предположили, что коэффициенты $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\ldots$, $f_{2m-2}(x)$ непрерывны, как известно, функции $G^{(k)}(x, t)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2m - 2)$ также непрерывны, следовательно, ядро (40) непрерывно. Функция $f(x)$ таже предполагается непрерывной. Так как $\lambda = 1$ не является собственным числом уравнения (25) при граничных условиях (2), оно не может быть и собственным числом уравнения (6). В теореме 3 узлы предполагаются такими же, как и в следствии 3. Таким образом, все условия следствия 3 выполнены и поэтому при достаточно больших n уравнения (46) имеют единственное решение, (7) сходится в среднем к решению уравнения (43) и, в силу замечания, имеет место формула

$$\|\varphi - \psi\|_{L^2} = O\left(E_n\left[\int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt\right] + E_n\,[f]\right) . \tag{48}$$

В силу сказанного выше отсюда следует, что при достаточно больших n (47) есть единственное решение вида (3) уравнений (44), $z^{(2m)}(x)$ сходится в среднам к $y^{(2m)}(x)$ и имеет место (27).

Легко видеть, что (26) также есть следствие (48). Действительно, согласно (47)

$$z^{(k)}(x) = \int_a^b G^{(k)}(x, t)\, \psi(t)\, dt \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m - 1),$$

отсюда и из (41) следует, что

$$y^{(k)}(x) - z^{(k)}(x) = \int_a^b G^{(k)}(x, t)\, [\varphi(t) - \psi(t)]\, dt \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m - 1),$$

откуда, в силу неравенства Буняковского, следует соотношение

$$\|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C \leq \sqrt{\left\| \int_a^b [G^{(k)}(x, t)]^2\, dt\right\|_C}\, \|\varphi - \psi\|_{L^2} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m - 1),$$

сопоставив которое с (48), получаем (26).

Тот факт, что $z(x)$ вместе с $2m - 1$ первыми производными равномерно сходится к $y(x)$, очевидно, есть следствие соотношений (26).

Таким образом, мы доказали утверждения теоремы 3.

Переходим к доказательству следствия 4.

Так как мы предположили r-кратную дифференцируемость коэффициентов уравнения (24), то, как известно, решение $y(x)$ уравнения (24) имеет $(2m + r)$-ую производную и поэтому $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2m - 2)$ r. раз дифференцируемы и их r-ые производные удовлетворяют условию Lipschitz-а с любым показателем $\alpha \leqq 1$. Отсюда и из условия следствия 4, очевидно, следует, что

$$\sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x)$$

и $f(x)$ имеют r-ую производную, удовлетворяющую условию Lipschitz-а с фигурирующим в условии следствия показателем α. Но тогда по теореме Jackson-а (см., например, [7], стр. 164)

$$E_n\left[\sum_{k=0}^{2m-2} f_k\, y^{(k)}\right] = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),\ E_n\,[f] = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Отсюда, из (26) и (27) следуют (28) и (29).

Утверждения замечания 5 могут быть получены на основании следствия 2 также, как и теорема 3 и следствие 4 из следствия 3. Условие (30) нужно потому, что производная функции $G^{2m-2}(x, t)$ как известно, разрывна, поэтому в силу теоремы Jackson-а (см., например, [7], стр. 162) мы можем лишь утверждать, что

$$E_n\,[G^{(k)}] = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m-2),\ E_n\,[K] = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и, следовательно,условие (17) выполнено лишь если (30) имеет место.

Утверждения следствия 5 следуют из следствия 4 и замечания 5, так как узлы, о которых идет речь, удовлетворяют их условиям и имеют место соотношения (36) и

$$\lambda_n = O\left(\sqrt{n}\right) \tag{48}$$

соответственно. ((48) доказано в [9]).

(Поступила в редакуию 9. IV. 1958.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Канторобич, Л.В.: „Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных". *Доклады Академии Наук СССР* **2** (1934) 532—536.

[2] Frazer, R.A.—Gones, W.P.—Skan, S.W.: „Approximations to functions and to the solutions of differential equations". *Reports and Memoranda of the Aeronautical Research Committee* **1799** (2913) (1937).

[3] Frazer, R.A.—Duncan, W.J.—Collar, A.R.: *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations*. Cambridge University, Press, Cambridge, 1938.

[4] Карпиловская, Э.Б.: „О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений". *Успехи Математических Наук* **8**: 3 (55) (1953) 111—118.

[5] Канторович Л. В.: „Функциональный анализ и прикладная математика". *Успехи Математических Наук* **3**: 6 (28) (1948) 89—185.

[6] Канторович Л.В.—Крылов, В.И.: *Приближенные методы высшего анализа.* Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1950.
[7] Натансон, И.П. : *Конструктивная теория функций.* Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1949.
[8] Erdős, P.—Turán, P.: „On interpolation, I". *Annals of Mathematics* **38** (1937) 142—155.
[9] Szegő, G.: *Ortogonal polynomials.* American Mathematical Society (Colloquium Publications, XXIII.), New York, 1939.

MEGJEGYZÉSEK DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁLEGYENLETEK INTERPOLÁCIÓS MÓDSZERREL VALÓ MEGOLDÁSÁRÓL

KIS O.

Kivonat

A szerző a differenciál-, illetve integrálegyenletek közelítő megoldására L. V. Kantorovics által [1]-ben illetve [5]-ben ajánlott interpolációs módszer konvergenciájáról [4] és [5] eredményeinél jobb és általánosabb eredményeket vezet le elemi úton.

A dolgozat azzal az esettel foglalkozik, amikor az

$$y^{(2m)}(x) = \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x) + f(x) \tag{1}$$

differenciálegyenlet

$$y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2}$$

peremfeltételeknek eleget tevő megoldását

$$z(x) = (b-x)^m (x-a)^m \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

alakú polinommal közelítjük meg és a ck állandókat a

$$z^{(2m)}(x_i) = \sum_{k=0}^{2m-2} f(x_i)\, z^{(k)}(x_i) + f(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenletekből határozzuk meg, illetve a

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, \varphi(t)\, dt + f(x) \tag{3}$$

integrálegyenlet közelítő megoldását

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x^{k-1} \tag{4}$$

alakban keressük és megköveteljük a

$$\psi(x_k) = \lambda \int_a^b K(x_k, t)\, \psi(t)\, dt + f(x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

egyenlőségek teljesülését.

Fel van tételezve, hogy az összes adott függvények folytonosak és λ nem sajátértéke (3)-nak, illetve $\lambda = 1$ az

$$y^{(2m)}(x) = \lambda \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x)$$

differenciálegyenletnek (2) peremfeltételek mellett.

Az 1. tétel — feltételezve $f(x)$ és $K(x, t)$ Lagrange-féle interpolációs polinomjainak egyenletes konvergenciáját — azt állítja, hogy

(6) $$\|\varphi - \psi\|_C = O(\|R\,[K]\|_C + \|R\,[f]\,\|_C\,,$$

ahol $R[F]$ valamely F függvény és interpolációs polinomja közti különbséget jelenti. A tételből következik, hogy

(7) $$\|\varphi - \psi\|_C = O\{\lambda_n(E_n[K]) + E_n[f])\}\,,$$

ha

(8) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_n E_n[K] = \lim_{n\to\infty} \lambda_n E_n[f] = 0\,.$$

Itt λ_n az interpoláció Lebesgue-féle állandója, $E_n[F]$ pedig F legjobb megközelítése n-ed fokú polinomokkal. A $[-1, +1]$ alapintervallum és az

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

alappontok esetében (7) és (8)-ban λ_n helyett $\log n$ írható.

A 2. tétel, az interpolációs polinomok négyzetes konvergenciáját feltételezve, azt állítja, hogy

(9) $$\|\varphi - \psi\|_{L^2} = O(\|R[K]\|_{L^2} + \|R[f]\|_{L^2})\,.$$

Folyományaként adódik, hogy

(10) $$\|\varphi - \psi\|_{L^2} = O(E_n[K] + E_n[f])\,,$$

ha az alappontok egy, a

$$p(x) \geq m > 0$$

feltételeknek eleget tevő súlyra ortogonális polinomok gyökei.

Az 1. megjegyzés azt állítja, hogy (6), (7), (9) és (10)-ben K helyébe

$$\int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

is írható.

A 3. tétel értelmében a most említett alappontok esetében

$$\|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C = O\left(E_n\left[\sum_{k=0}^{2m-2} f_k\, y^{(k)}\right] + E_n[f]\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1),$$

$$\|y^{(2m)} - z^{(2m)}\|_{L^2} = O\left(E_n\left[\sum_{k=0}^{2m-2} f_k\, y^{(k)}\right] + E_n[f]\right)\,.$$

A tétel folyománya szerint, ha (1) együtthatói r-szer differenciálhatók és az r-ik deriváltak eleget tesznek egy α kitevős Lipschitz-feltételnek, akkor

$$\|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \qquad (k = 0, 1, \dots, 2m-1),$$

$$\|y^{(2m)} - z^{(2m)}\|_{L^2} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Az 1. tétel folyománya [6] 157. oldalán levő tételnek és M. K. Gavurin következő észrevételén alapul: (4) akkor és csak akkor tesz eleget (5)-nek, ha kielégíti a

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b P[K(x,t)]\,\psi(t)\,dt + P[f(x)]$$

integrálegyenletet, ahol $P[F]$ jelöli F interpolációs polinomját.

A 2. tétel ugyanúgy bizonyítható, mint az 1. Folyományát megkapjuk, ha felhasználjuk Erdős és Turán tételét (lásd: [8]).

A tételekhez fűzött megjegyzés folyománya annak, hogy megfelelően módosítani lehet [6] fent említett tételét.

A 3. tétel következik a 2. tétel folyományából és az 1. megjegyzésből. Bizonyítása azon alapul, hogy (1) azonos a

$$\varphi(x) = \int_a^b \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x,t)\,\varphi(t)\,dt + f(x)$$

integrálegyenlettel, ahol $G(x,t)$ a d^{2m}/dx^{2m} differenciáloperátor Green-függvénye (2) peremfeltételek mellett és

$$\varphi(x) = y^{(2m)}(x),$$

továbbá

$$\psi(x) = z^{(2m)}(x)$$

azonos ezen integrálegyenlet interpolációs módszerrel nyert közelítő megoldásával.

NOTES ABOUT CONVERGENCE OF THE INTERPOLATORY METHOD FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS

by

O. KIS

Abstract

The author obtains by an elementary method sharper and more general results as those contained in [4] and [5], concerning the approximate solution of differential- resp. integral equations by the interpolatory method suggested by L. V. Kantorovič in [1] and [5].

The paper considers the case when the approximate solution of the differential equation

$$y^{(2m)}(x) = \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x) + f(x) \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2}$$

is sought in the form

$$z(x) = (b-x)^m (x-a)^m \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

and the coefficients c_k are determined by the equations

$$z^{(2m)}(x_i) = \sum_{k=0}^{2m-2} f(x_i)\, y^{(k)}(x_i) + f(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

further the case, when the approximate solution of the integral equation

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt + f(x) \tag{3}$$

is sought in the form

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1} \tag{4}$$

and the coefficients c_k are determined by the equations

$$\varphi(x_k) = \lambda \int_a^b K(x_k, t)\, \psi(t)\, dt + f(x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\ . \tag{5}$$

It is supposed that all given functions are continuous, further λ is not an eigenvalue of (3) nor $\lambda = 1$ of the differential equation

$$y^{(2m)}(x) = \lambda \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x)$$

with the boundary conditions (2).

Theorem 1. asserts that

$$\|\varphi - \psi\|_C = O(\|R[K]\|_C + \|R[f]\|_C) \tag{6}$$

in case when the interpolatory polynominals of $f(x)$ and $K(x, t)$ are uniformly convergent. Here $R[F]$ denotes the difference between a function F and its interpolatory polynominal. It follows from this theorem that

$$\|\varphi - \psi\|_C = O\{\lambda_n(E_n[K] + E_n[f])\}\ , \tag{7}$$

if

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n E_n[K] = \lim_{n\to\infty} \lambda_n E_n[f] = 0\ . \tag{8}$$

Here λ_n is the Lebesgue constant of the interpolation process and $E_n[F]$ is the error of the best uniform approximation of F by means of a polynomial of degre n. In case of the interval $[-1, +1]$ and the fundamental points

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$$

λ_n may be replaced in (7) and (8) by $\log n$.

Theorem 2. asserts that

$$\|\varphi - \psi\|_{L^2} = O(\|R[K]\|_{L^2} + \|R[f]\|_{L^2}) \tag{9}$$

takes place in case of the mean convergence of the interpolatory polynomials. It follows that

$$\|\varphi - \psi\|_{L^2} = O(E_n[K] + E_n[f]) \ , \tag{10}$$

if the fundamental points of interpolation are the roots of the polynomials orthogonal with respect to a weight function $p(x)$ satisfying the condition

$$p(x) \geqq m > 0 \ .$$

It is pointed out that K can be replaced in (6), (7), (9) and (10) by the expression

$$\int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt \ .$$

Theorem 3. states that

$$\|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C = O\left(E_n\left|\sum_{k=0}^{2m-2} f_k y^{(k)}\right| + E_n[f]\right) (k = 0, 1, \ldots, 2m-1),$$

$$\|y^{(2m)} - z^{(2m)}\|_{L^2} = O\left(E_n\left[\sum_{k=0}^{2m-2} f_k y^{(k)}\right] + E_n[f]\right)$$

hold in case when the fundamental points are chosen as mentioned above. It follows that if the coefficients of equation (1) are r times derivable and their rth derivatives satisfy Lipschitz's condition of order α then

$$\|y^{(k)} - z^{(k)}\|_C = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1) \ ,$$

$$\|y^{(2m)} - z^{(2m)}\|_{L^2} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

The proof of the theorem 1. is based on the theorem of [6] p. 157 and the following remark of M. K. Gavurin: The polynomial $\psi(x)$ satisfies equations (5) if and only if it satisfies the integral equation

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b P[K(x, t)]\, \psi(t)\, dt + P[f(x)] \ ,$$

where $P[F]$ denotes the interpolatory polynomial of F.

Theorem 2. may be proved just as Theorem 1. In proving the corollary of Theorem 2. a theorem of P. ERDŐS and P. TURÁN [8] is used.

The remark made in connection with Theorem 1. and 2. can be proved by modifying accordingly the theorem of [6] mentioned above.

Theorem 3. is a consequence of the corollary to the Theorem 2. and Remark 1. Its proof based on the fact that (1) is identical with the integral equation

$$\varphi(x) = \int_a^b \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x, t)\, \varphi(t)\, dt + f(x) ,$$

where $G(x, t)$ is the Green's function corresponding to the differential operator d^{2m}/dx^{2m} under condition (2) and

$$\varphi(x) = y^{(2m)}(x) ,$$

further

$$\psi(x) = z^{(2m)}(x)$$

is identical with the approximate solution of this integral equation obtained by the interpolatory method.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАТРИЦ К РАСЧЕТУ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

PÁL RÓZSA и GÉZA TASSI[1]

Для расчета статически неопределимых стержневых систем в упруго-пластической стадии А. А. Гвоздевым разработаны два метода [4]. Один из них *метод непосредственного учета пластических деформаций*, весьма удобен для проанализирования усилий и вообще проще, чем другие способы, но как А. А. Гвоздев отмечает: *«Детали метода, насколько нам известно, не подвергались обстоятельной проработке»*. Главной причиной этого является то, что проблема с полагающейся четкостью математически до сих пор не была поставлена. В статье мы ставим себе целью пополнить эти пробелы и разрешить задачу с помощью теории матриц.

В статье разрабатывается метод расчета для случая сооружений, состоящих из изгибаемых стержней, но принцип применим также и для таких конструкций, как фермы, если исключна возможность продольного изгиба.

В сущности проблема приводит к линейной системе уравнений, ранг матрицы которой на единицу меньше, чем ее порядок. Параметр разрушающей нагрузки определяется на основе совместности системы уравнений решением задачи нахождения минимума. Для определения всех напряженно-деформационных состояний требуется обращение определенных миноров коэффициентной матрицы, которое может быть получено повторным вычитанием диадов.

§ 1. Основная система уравнений. Определение механизма течения и параметра разрушающей нагрузки

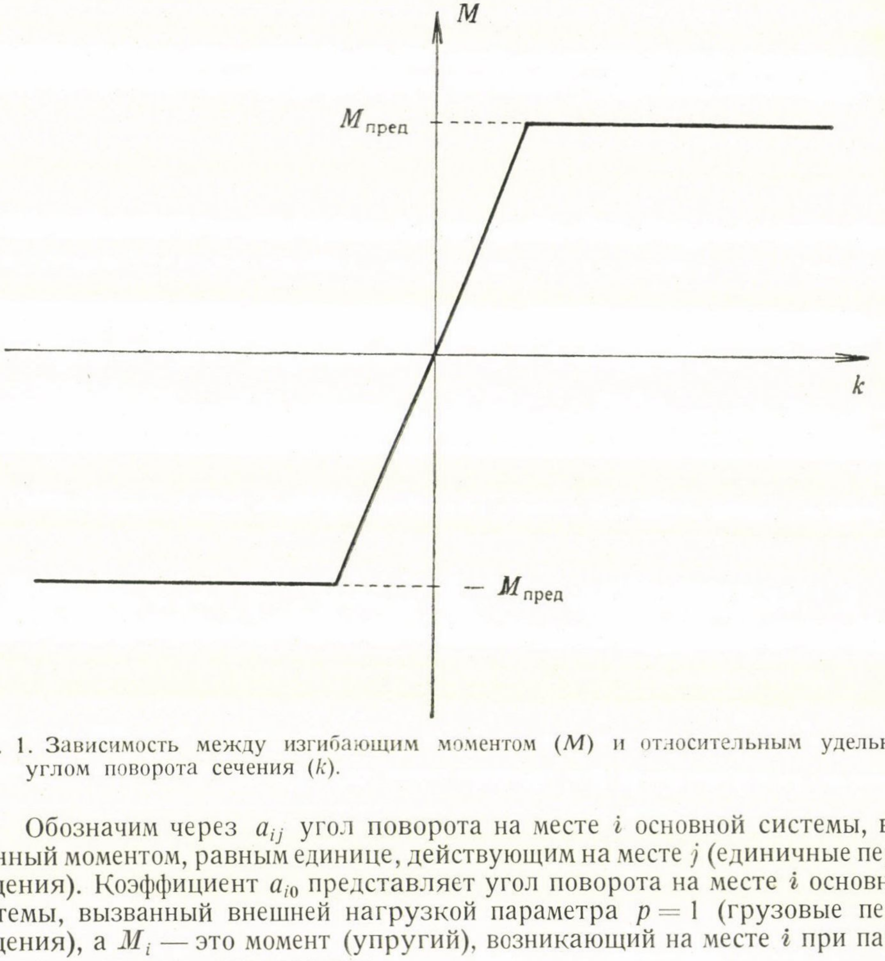
Рассмотрим статически неопределимое сооружение с n лишними связями с нагрузкой, зависящей от одного параметра. Нашей задачей является определить *механизм течения* и *параметр разрушающей нагрузки*, а также описание *напряженно-деформационного состояния при любом значении параметра нагрузки.*

Предположим, что изгибающий момент зависит от угла поворота по фиг. 1., места максимальных значений моментов и пластических шарниров не меняются, и угол поворота шарниров является монотонно неубывающей функцией от параметра нагрузки.

---

[1] Технический Университет Инженеров Строительства и Транспорта, Кафедра Мостовых Конструкций № II.

Напишем систему уравнений для решения упругого статически неопределимого сооружения, применяя метод сил. Целесообразно в качестве неизвестных усилий принять моменты, возникающие на предполагаемых местах пластических шарниров. (Возможен и другой выбор неизвестных усилий.)



Фиг. 1. Зависимость между изгибающим моментом (M) и относительным удельным углом поворота сечения (k).

Обозначим через a_{ij} угол поворота на месте i основной системы, вызванный моментом, равным единице, действующим на месте j (единичные перемещения). Коэффициент a_{i0} представляет угол поворота на месте i основной системы, вызванный внешней нагрузкой параметра $p = 1$ (грузовые перемещения), а M_i — это момент (упругий), возникающий на месте i при параметре нагрузки, равном единице.

Вводя обозначения

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{a}_0 = [a_{i0}] \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

и

$$\boldsymbol{M} = [M_i] \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

(матрица $\mathbf{A}$ симметрична в следствии взаимности перемещений) систему уравнений можно написать в форме матричного уравнения

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a}_0 \, .$$

Матрица $\mathbf{A}$ неособая и, поэтому обратимая.

Пусть $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{Z}$, элемент z_{ij} которой определяет изгибающий момент на месте i, соответствующий единичному углу поворота на месте j в статически неопределимом сооружении. (См. [6] стр. 66.) Обозначим абсолютную величину предельного момента сечения i через $M_{\text{пред}_i}$, и предположим, что величина положительного и отрицательного предельного момента тождественна (расчет может быть совершен при надлежащем рассуждении и в случае разного абсолютного значения предельного момента).

Влияние пластических шарниров можно учитывать методом непосредственного учета пластических деформаций (см. [4] стр. 119.). Упругое сооружение, кроме внешней нагрузки, нагружается углами поворота, появляющимися на местах пластических шарниров, учитывая, что момент не может превышать предельного значения $M_{\text{пред}_i}$. Для составления системы уравнений к выбранным n местам необходимо добавить все места, в которых пластический шарнир может образоваться (места максимальных значений изгибающего момента, ослаблений поперечного сечения). Всего исследуем m мест. Дополняя матрицу $\mathbf{Z}$ значениями z_{ij}, соответствующими этим местам, получаем матрицу $\mathbf{Z}_m$ порядка m. Очевидно, что $n+1$, $n+2, \ldots, m$-я строка (и $n+1$, $n+2, \ldots, m$-й столбец) матрицы $\mathbf{Z}_m$ дается путем линейной комбинации n строк (и n столбцов) матрицы $\mathbf{Z}$ (см. [6] стр.). То-есть матрица $\mathbf{Z}_m$ запишется в следующем виде:

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{CZC^*} \ ,$$

где

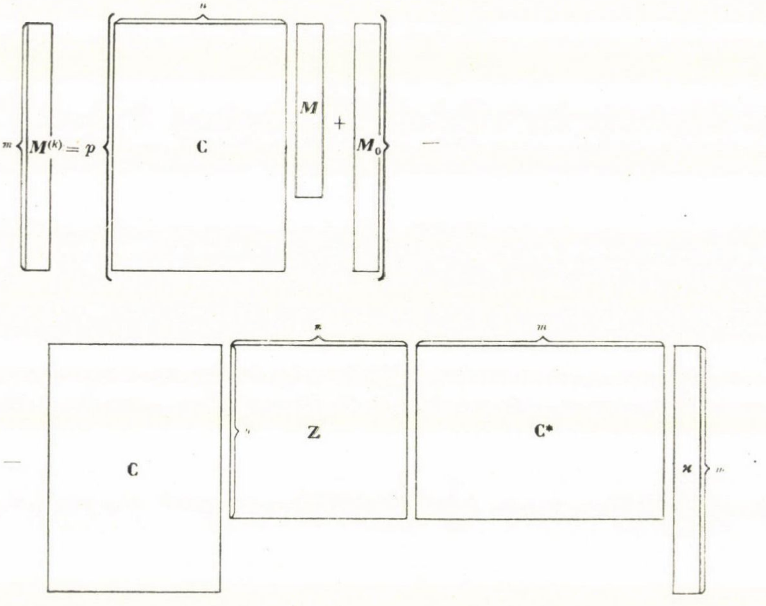
$$\mathbf{C} = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & & & & n \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & 1 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & & \cdot & \cdot & 1 \\ c_{n+1,1} & & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n+1,n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & & \cdot & \cdot & \cdot & c_{mn} \end{array}\right] & \begin{array}{l} (1 \\ (2 \\ \\ \\ \\ \\ (n \\ (n+1 \\ \\ (m \end{array} \end{array}$$

Подобным соображением вектор, элементами которого являются моменты (упругие) в этих m местах, относящиеся к единичному значению параметра нагрузки, получается в форме:

$$\boldsymbol{M}_m = \mathbf{C}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_0 \ ,$$

(См. [1] стр. 233).

Предположим, что при определенном значении параметра нагрузки p на местах сооружения знака $\nu_1, \nu_2 \ldots, \nu_k$, образовались пластические шарниры. В этом случае для напряженного состояния сооружения может быть написана следующая система уравнений:



(1)

Здесь элементы вектора $\boldsymbol{M}^{(k)}$ обозначают значения моментов, действующих на некоторых местах i при параметре нагрузки p:

$$M_i^{(k)} < M_{\text{пред}_i}, \quad \text{если } i \neq \nu_l \qquad l = 1, 2, \ldots, k$$

и

$$M_i^{(k)} = M_{\text{пред}_i}, \quad \text{если } i = \nu_l \qquad l = 1, 2, \ldots, k.$$

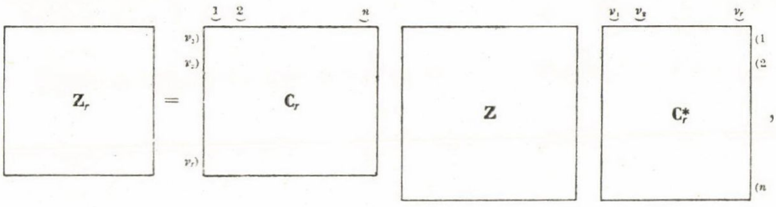
(Вопрос идет ли речь о положительном или отрицательном предельном моменте будет выяснен в дальнейшем.)

Уравнения $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ системы уравнений (1) выражают, что *на местах $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ возникает предельный момент вследствие внешней нагрузки параметра p и нагружающих углов поворота, возникающих в пластических шарнирах; другие уравнения дают моменты на тех местах, где пластический шарнир еще не образовался, то-есть изгибающий момент меньше предельного значения и угол поворота равен нулю.*

Система уравнений (1) только редко может быть без дальнейшего изучения написана конкретно, так как последовательность образования пластических шарниров вообще неизвестна, ведь в большинстве случаев и механизм течения неизвестен. Поэтому следует разыскать образующийся механизм течения и параметр вызывающей его нагрузки. Механизм течения получается следующим образом:

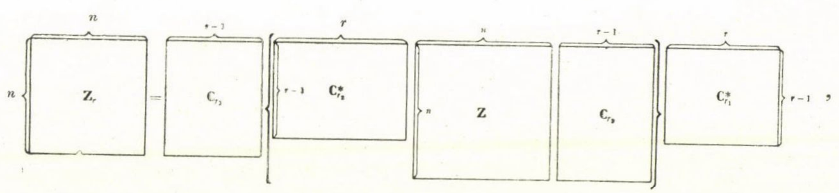
Выбираем все главные миноры матрицы $\mathbf{Z}_m$, ранг которых на один шеньте их порядка r. Из условия *совместности*, определенных ими систем уравнений получаем несколько значений p. *Наименьшее* из них является параметром разрушающей нагрузки. Соответствующая же система уравнений покажет, на каких местах образуются пластические шарниры при возникновении механизма течения. (Это соответствует тому, что надо иметь в виду только кинематически возможные состояния одной степени свободы (см. [4] стр. 226).

Пусть $\mathbf{Z}_r$ обозначает любой главный минор порядка r матрицы $\mathbf{Z}_m$, ранг которого $r - 1 \leqq n$. Если $\mathbf{Z}_r$ — минор, созданный из строк и столбцов с номерами $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ матрицы $\mathbf{Z}_m$, то его можно написать в следующей форме:



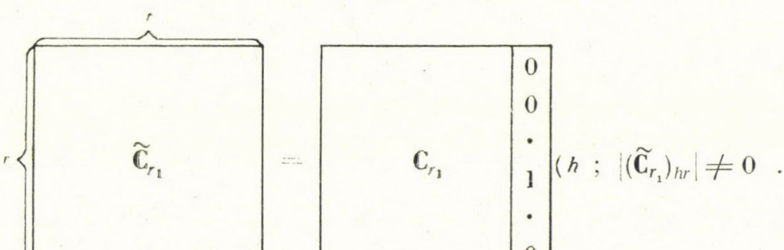
где $\mathbf{C}_r$ — минор, созданный из строк и столбцов с номерами $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ матрицы $\mathbf{C}$, ранг которого равняется $r - 1$.

Если $r \leqq n$, разлагаем матрицу $\mathbf{C}_r$ типа $r \times n$ на произведение матрицы $\mathbf{C}_{r_1}$ типа $r \times (r-1)$ и матрицы $\mathbf{C}^*_{r_2}$ типа $(r-1) \times n$ (см. [2]). В этом случае получается, что

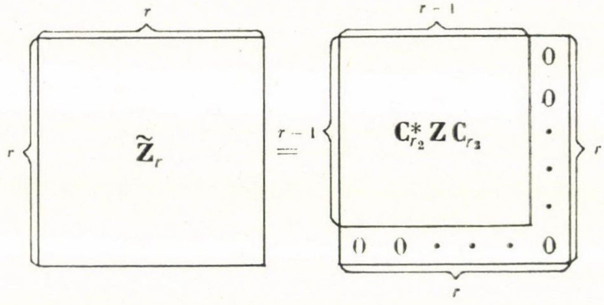


где произведение в скобках — квадратная матрица порядка $r - 1$.

Это выражение не изменится, если добавить к матрице $\mathbf{C}_{r_1}$ r-ю строку, один из элементов которой равняется единице, остальные — нулю. (Место отличающегося от нуля элемента определяется из условия, что определитель дополненной матрицы должен отличаться от нуля. Это всегда достигается, так как ранг матрицы $\mathbf{C}_{r_1}$ равен $r - 1$, то-есть матрица $\mathbf{C}_{r_1}$ имеет неисчезающий минор порядка $r - 1$.) Дополненную матрицу $\mathbf{C}_{r_1}$ обозначаем через $\widetilde{\mathbf{C}}_{r_1}$.

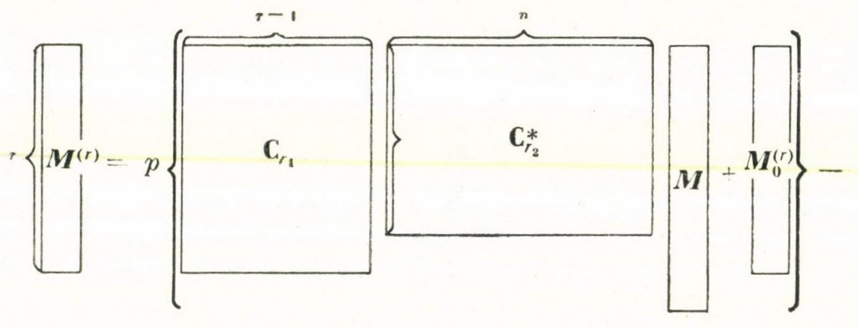


Матрица $\mathbf{C}^*_{r_2}\mathbf{Z}\mathbf{C}_{r_2}$ порядка $r-1$ дополняется r-ой строкой и столбцом, содержащим только нули. Обозначение полученной таким образом матрицы — $\widetilde{\mathbf{Z}}_r$.

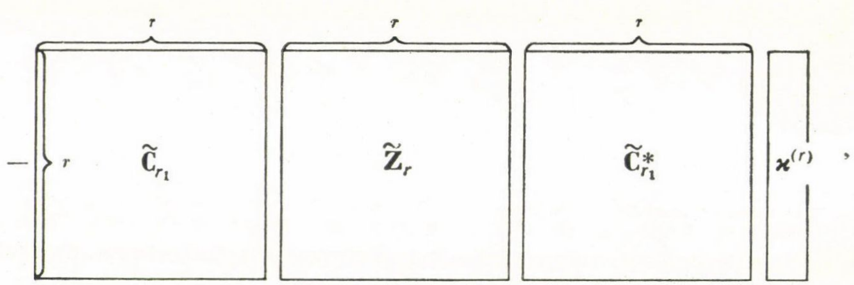


Согласно вышесказанному в стадии образования механизма течения из системы уравнений (1) получается такая система уравнений, в которой *все* моменты равны предельному моменту, значения неизвестных же углов поворота — за исключением одного — не равны нулю. (Точнее говоря, число значений равных нулю равно числу пластических шарниров, образующихся в момент возникновения механизма течения.)

Итак, имеем следующую систему уравнений:



(2)



где

$$\boldsymbol{M}^{(r)} = [M_{\text{пред}_{\nu_i}}] \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

$$\boldsymbol{\varkappa}^{(r)} = [\varkappa_{\nu_i}] \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

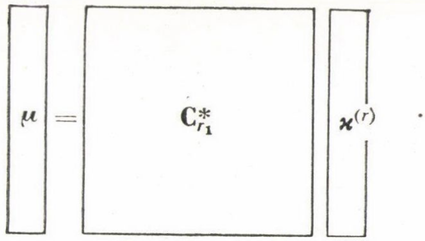
и

$$M_0^{(r)} = [M_{\nu_i 0}] \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

Полученное выражение (2) — неоднородная линейная система уравнений с особенной коэффициентной матрицей для неизвестных $\varkappa_{\nu_i}$. Наша задача — вычислить то значение параметра нагрузки p, для которого система уравнений совместна, и выбрать тот, только что образовавшийся пластический шарнир, в котором угол поворота может равняться нулю.

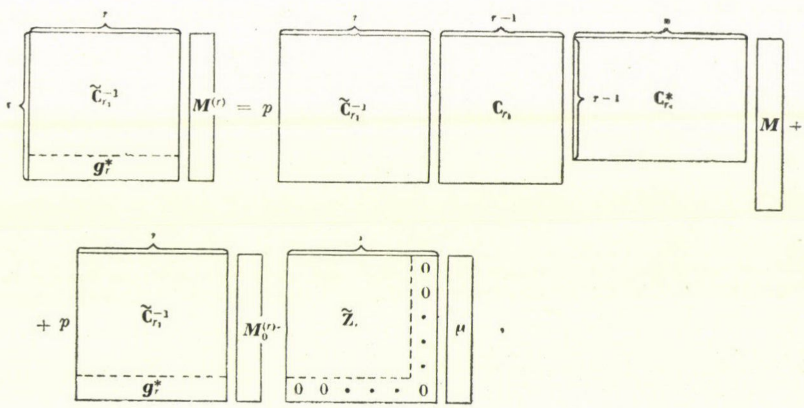
Умножим слева уравнение (2) на матрицу $\tilde{\mathbf{C}}_{r_1}^{-1}$ и введем обозначение

(3)

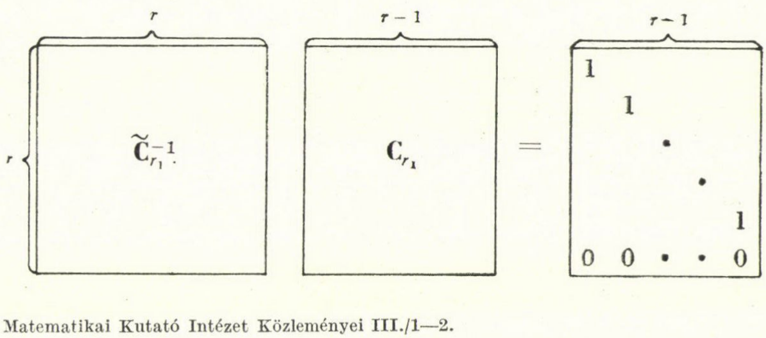


Получаем

(4)



Имея в виду, что



и, что в последней строке матрицы $\widetilde{\mathbf{Z}}_r$ каждый элемент равен нулю, и, обозначая последнюю (r-ю) строку матрицы $\widetilde{\mathbf{C}}_{r_1}^{-1}$ через $\boldsymbol{g}_r^*$, условие совместности выражается последним уравнением системы уравнений (4):

$$\boldsymbol{g}_r^* \boldsymbol{M}^{(r)} = p\, \boldsymbol{g}_r^* \boldsymbol{M}_0^{(r)}$$

(см. [5]), откуда

$$p = \frac{\boldsymbol{g}_r^* \boldsymbol{M}^{(r)}}{\boldsymbol{g}_r^* \boldsymbol{M}_0^{(r)}} .$$

(Если $\boldsymbol{g}_r^* \boldsymbol{M}_0^{(r)} = 0$, то образование соответствующей системы пластических шарниров не влечет за собой возникновение механизма течения.) Каждый член суммы в числителе этого выражения по необходимости *одинакового знака* (см. [5]) и, так как параметр p по определению считаем положительным, *знак каждого члена числителя соответствует знаку знаменателя.* Это требование однозначно определяет знак значений $M_{\text{пред}_{\nu_i}}$:

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{sgn} M_{\text{пред}_{\nu_i}} = \operatorname{sgn} g_{r_i} \cdot \operatorname{sgn} (\boldsymbol{g}_r^* \boldsymbol{M}_0^{(r)}) .$$

Разрушающую нагрузку получаем отысканием *наименьшего* из значений p, принадлежащих всем возможным системам, составленным из r уравнений, выбираемых упомянутым способом из системы уравнений (1) (см. [7] стр. 251.):

$$p_{\text{разр}} = \min_{(r)} \left| \frac{\boldsymbol{g}_r^* \boldsymbol{M}^{(r)}}{\boldsymbol{g}_r^* \boldsymbol{M}_0^{(r)}} \right| .$$

Очевидно, образуется соответствующий этому механизм течения.

§ 2. Расчет углов поворота, возникающих в пластических шарнирах

На основе предыдущей главы нам известны места, на которых образуются пластические шарниры, создающие механизм течения. Обозначим через (4) соответствующую систему уравнений. Как было видно, последнее уравнение этой системы уравнений выражает условие совместности. Поэтому впоследствии мы решим систему, состоящую из первых $r-1$ уравнений. Ввиду того, что все элементы последнего столбца матрицы $\mathbf{Z}_r$ равняются нулю, последний элемент (μ_r) вектора $\boldsymbol{\mu}$ не входит в систему. Следовательно, он является «свободным неизвестным» системы, функциями которого можно выразить другие так называемые «обусловленные» неизвестные.

Обозначим через $\mathbf{C}_{r_1}^{(-1)}$ матрицу, созданную минуя последнюю строку матрицы $\widetilde{\mathbf{C}}_{r_1}^{-1}$, которая, по сути дела, является обратной матрицей левой стороны матрицы $\mathbf{C}_{r_1}$, а через $\boldsymbol{\mu}^{(r-1)}$ — вектор, полученный минуя последний элемент вектора $\boldsymbol{\mu}$:

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{r_1}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{r_1}^{(-1)} \\ \boldsymbol{g}_r^* \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(r-1)} \\ \mu_r \end{bmatrix}.$$

Первые $r-1$ уравнения системы (4) можно написать тогда в следующем виде:

$$r-1\left\{ \overbrace{\mathbf{C}_{r_1}^{(-1)}}^{r} \right. \boldsymbol{M}^{(r)} = -\overbrace{\mathbf{C}_{r_2}^{*}\mathbf{Z}\,\mathbf{C}_{r_2}}^{r-1}\,\boldsymbol{\mu}^{(r-1)} +$$

$$+\, p_{\text{разр}}\overbrace{\mathbf{C}_{r_2}^{*}}^{n}\,\boldsymbol{M} + p_{\text{разр}}\overbrace{\mathbf{C}_{r_1}^{(-1)}}^{r}\,\boldsymbol{M}_0^{(r)},$$

откуда

$$r-1\left\{\boldsymbol{\mu}^{(r-1)}\right. = \overbrace{(\mathbf{C}_{r_2}^{*}\mathbf{Z}\,\mathbf{C}_{r_2})^{-1}}^{r-1}\left\{ p_{\text{разр}}\overbrace{\mathbf{C}_{r_2}^{*}}^{n}\,\boldsymbol{M} + \overbrace{\mathbf{C}_{r_1}^{(-1)}}^{r}\left(p_{\text{разр}}\,\boldsymbol{M}_0^{(r)} - \boldsymbol{M}^{(r)}\right)\right\} \tag{6}$$

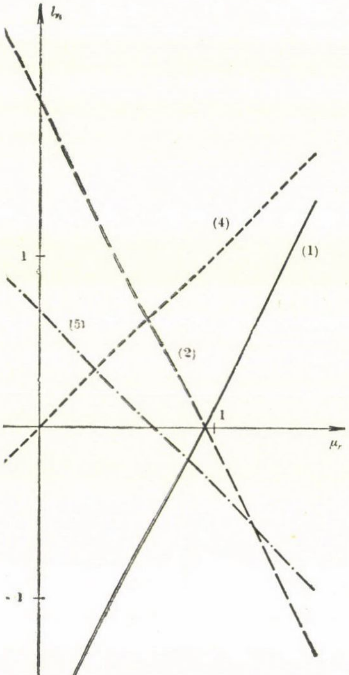
Углы поворота, возникающие в пластических шарнирах в стадии сформирования механизма течения, из уравнения (3) равны:

$$\boldsymbol{\varkappa}^{(r)} = \widetilde{\mathbf{C}}_{r_1}^{*-1}\,\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{r_1}^{*(-1)} & \boldsymbol{g}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(r-1)} \\ \mu_r \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{r_1}^{*(-1)}\,\boldsymbol{\mu}^{(r-1)} + \mu_r\,\boldsymbol{g}_r, \tag{7}$$

Ввиду того, что μ_r — параметр, избираемый свободно, каждый элемент вектора $\varkappa^{(r)}$ будет линейной функцией от параметра μ_r. (Коэффициент пареметра μ_r ни в одной из всех линейных функций не может быть равным нулю, ибо это означало бы, что угол $\varkappa$ в соответствующем шарнире был бы постоянным, но такой шарнир не может участвовать в механизме течения.) Эти линейные функции обозначим через $\varkappa_{\nu_i} = l_{\nu_i}(\mu_r)$. Место, на котором в процессе образования механизма течения последним появляется пластический шарнир, может быть определено с учетом того, что там $\varkappa = 0$, и знаки остальных углов поворота $\varkappa_{\nu_i}$ равняются знакам соответствующих предельных моментов $M_{\text{пред}_{\nu_i}}$. Последние же зависят — на основании выражения (5) — от знака коэффициентов параметра μ_r в линейных функциях $l_{\nu_i}(\mu_r)$. Возможны два случая. Если $\boldsymbol{g}_r^* \boldsymbol{M}_0^{(r)} > 0$, то $\operatorname{sgn} \varkappa_{\nu_i} = \operatorname{sgn} g_{r_i}$. Это возможно, очевидно, только при таких значениях параметра μ_r, которые *не меньше наибольшей из абсцисс пересечений линейных функций $l_{\nu_i}(\mu_r)$ с осью μ_r.* Если, наоборот, $\boldsymbol{g}_r^* \boldsymbol{M}_0^{(r)} < 0$, то $\operatorname{sgn} \varkappa_{\nu_i} = -\operatorname{sgn} g_{\,i}$, что возможно только для таких значений μ_r, которые *не больше наименьшей из абсцисс пересечений линейных функций $l_{\nu_i}(\mu_r)$ с осью μ_r.* Если соответствующая линейная функция экстремальной нулевой точки имеет индекс ν_{s_r}, то — вследствие выполнения условия $\varkappa_{\nu_{s_r}} = 0$ — на месте ν_{s_r} создается последним пластический шарнир (см. фиг. 2.). Углы поворота, возникающие в пластических шарнирах в стадии образования механизма течения, определяются на основе зависимости (7) следующим выражением:

$$\varkappa^{(r)} = \mathbf{C}_{r_1}^{*(-1)} \mu^{(r-1)} + \mu_{0r} \boldsymbol{g}_r ,$$

где $\boldsymbol{g}^{(r-1)}$ может быть рассчитано по зависимости (6), а μ_{0r} — экспериментальная нулевая точка, определенная на основании предыдущего.



Фиг. 2. Линейные функции, на основе которых определяется место последнего образующегося шарнира. (См. пример.)

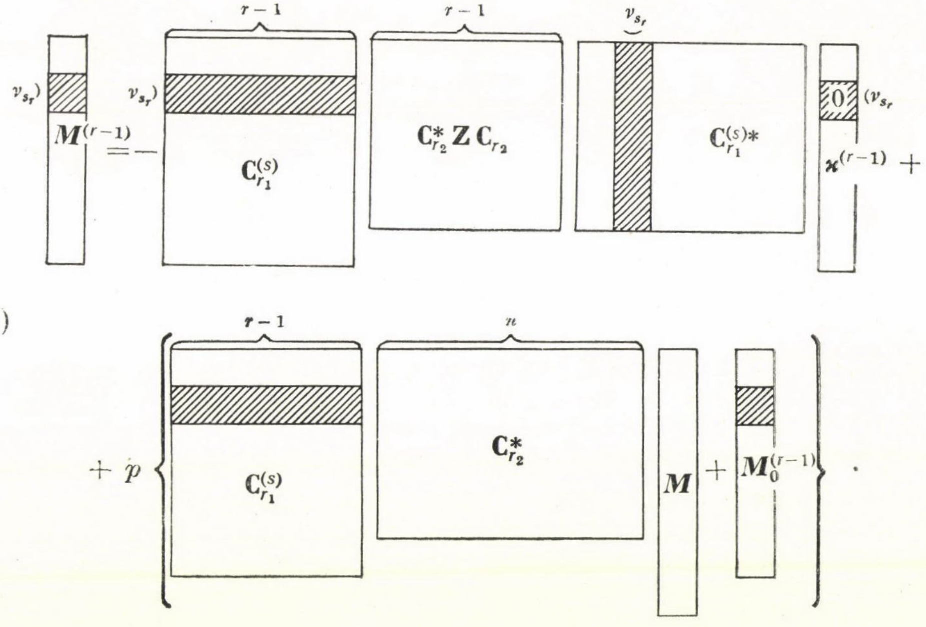
В дальнейшем необходимо определить порядок образования пластических шарниров и значение параметра нагрзуки, а также изменение углов поворота $\varkappa$ и моментов M как функции параметра p в процессе образования какого-то пластического шарнира в различных степенях нагрузки, то-есть между образованием отдельных пластических шарниров. С этой целью исследуем вопрос, на каком месте и при каком параметре нагрузки $p_{r-1} < p_{\text{разр}}$ образовался последний пластический шарнир прежде, чем возник механизм течения.

Рассмотрим поэтому систему уравнений, полученную из системы (2), отбрасывая ее ν_{s_r}-е уравнение.

Пусть $\boldsymbol{M}^{(r-1)}$ — вектор, имеющий $r-1$ элементов, полученный из вектора $\boldsymbol{M}_{(r)}$, минуя его ν_{s_r}-й элемент. Вычеркивая ν_{s_r}-ю строку матрицы $\mathbf{C}_{r_1}$, имеем квадратную матрицу $\mathbf{C}_{r_1}^{(s)}$, а вычеркивая ν_{s_r}-й элемент вектора $\varkappa^{(r)}$ — вектор $\varkappa^{(r-1)}$ (при $p < p_{\text{разр}}$ вычеркнутый элемент всегда равен нулю).

Таким образом, в интервале от образования $\nu_{s_{r-1}}$-го шарнира до образования ν_{s_r}-го углы поворота пластических шарниров определяются следующей системой уравнений:

(8)



(Штрихованные места обозначают элементы, опущенные из системы уравнений (2) с целью получения системы (8). В выражении (8) коэффициентная матрица вектора $\varkappa^{(r-1)}$ неособая, ибо определитель матрицы $C_{r_1}^{(s)}$ — невзирая на постоянный множитель — является элементом (с индексом ν_{s_r}) вектора g_r^*, и он, как раньше показано, не может равняться нулю.

Ради краткости введем следующие обозначения:

$$C_{r_1}^{(s)}(C_{r_2}^* Z C_{r_2})\, C_{r_1}^{(s)*} = Z^{(r-1)} = (A^{(r-1)})^{-1}$$

$$C_{r_1}^{(s)}\, C_{r_2}^*\, M + M_0^{(r-1)} = M_{r-1} ,$$

тогда

$$\varkappa^{(r-1)} = A^{(r-1)} \{p\, M_{r-1} - M^{(r-1)}\} . \tag{9}$$

Отсюда значение параметра p, при достижении которого пластический шарнир знака $\nu_{s_{r-1}}$ образовался, может быть получено следующим соображением. Обозначаем элементы определенного с помощью зависимости (9) вектора через выражения

$$\varkappa_{\nu_i}^{(r-1)} = p x_i^{(r-1)} - y_i^{(r-1)} ,$$

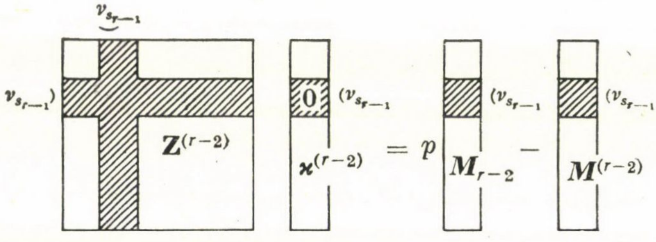
где i может равняться от 1 до $r-1$ — за исключением s_r — каждому натуральному числу. Так как при наибольшем из входящих в расчет значений p образуется предпоследний пластический шарнир, значение p_{r-1} определяется функцией, линейной относительно параметра p:

$$p_{r-1} = \max\left(\frac{y_i^{(r-1)}}{x_i^{(r-1)}}\right). \tag{10}$$

Индекс i, которому соответствует максимум вышеуказанного частного, покажет искомое место $\nu_{s_{r-1}}$.

С помощью вышеуказанного соображения можно также получить углы поворота пластических шарниров при $p < p_{r-1}$, то-есть в стадии предшествующей появлению предпоследнего пластического шарнира.

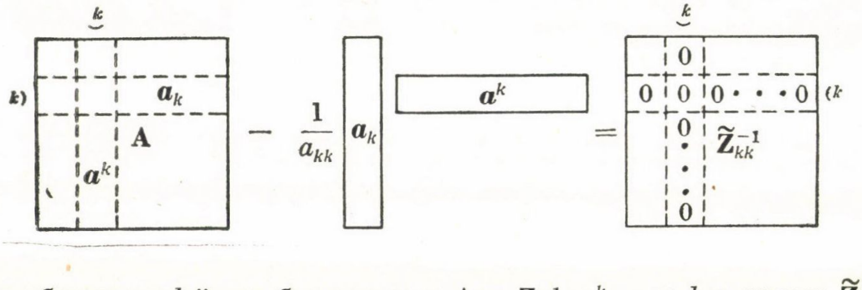
Напишем опять систему уравнений (8), минуя уравнение знака $\nu_{s_{r-1}}$, и, так как $\varkappa_{\nu_{s_{r-1}}} = 0$, вычеркнем столбец с номером $\nu_{s_{r-1}}$ коэффициентной матрицы $\mathbf{Z}^{(r-1)}$ и элемент $\varkappa_{\nu_{s_{r-1}}}$. После этого получается следующая система уравнений:



,

(Отброшенные элементы отмечены штрихованием.)

Так как в этой системе уравнений матрица $\mathbf{Z}^{(r-2)}$ является коэффициентом вектора $\boldsymbol{\varkappa}^{(r-2)}$, а также минором, относящимся к элементу со знаком $\nu_{s_{r-1}}, \nu_{s_{r-1}}$ матрицы $\mathbf{Z}^{(r-1)}$, наша задача — определить обратную этой матрицы. Из партиционированной формы обратной окаймленных матриц можно вывести (см. [3] стр. 112—115) следующую формулу для инверза минорной матрицы, порядок которой на единицу ниже исходной квадратичной матрицы:



,

где $\boldsymbol{a}_k$ обозначает k-й столбец матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{Z}^{-1}$, $\boldsymbol{a}^k$ — ее k-ю строку, $\widetilde{\mathbf{Z}}_{kk}^{-1}$ — такая матрица, в k-ой строке и в k-ом столбце которой (после отделения вышеупомянутого диада, конечно) помещаются только нулевые элементы.

Минорная матрица же $\mathbf{Z}_{kk}^{-1}$, полученная вычеркиванием этих элементов, — обратная минорной матрицы, принадлежащей к элементу индекса kk матрицы $\mathbf{Z}$, она же — обратная матрицы $\mathbf{A}$. Следовательно, при $p < p_{r-1}$ искомые углы поворота получаются из следующей зависимости :

$$
\begin{array}{r}
\\ \nu_{s_{r-1}} \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix} \\ 0 \\ \boldsymbol{\varkappa}^{(r-2)} \\ \end{bmatrix}
=
\begin{array}{r}
\\ \\ \nu_{s_{r-1}} \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} & \nu_{s_{r-1}} & \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|c|c}
 & 0 & \\ \hline
0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \hline
 & 0 & \\
 & \vdots & \mathbf{A}^{(r-2)} \\
 & 0 &
\end{array}\right]
\end{array}
\left\{ p \begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{M}_{r-1} \\ \\ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{M}^{(r-1)} \\ \\ \end{bmatrix} \right\}, \tag{11}
$$

где

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} & \nu_{s_{r-1}} & \end{array} \\
\nu_{s_{r-1}}\left[\begin{array}{c|c|c}
 & 0 & \\ \hline
0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \hline
 & 0 & \\
 & \vdots & \mathbf{A}^{(r-2)} \\
 & 0 &
\end{array}\right]
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} & \nu_{s_{r-1}} & \end{array} \\
\nu_{s_{r-1}}\left[\begin{array}{c|c|c}
 & & \\ \hline
 & & \boldsymbol{a}_{\nu_{s_{r-1}}}^{(r-1)*} \\ \hline
 & & \mathbf{A}^{(r-1)} \\
 & \boldsymbol{a}_{\nu_{s_{r-1}}}^{(r-1)} &
\end{array}\right]
\end{array}
- \frac{1}{a_{\nu_{s_{r-1}},\,\nu_{s_{r-1}}}^{(r-1)}}
\begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{a}_{\nu_{s_{r-1}}}^{(r-1)} \\ \\ \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & \boldsymbol{a}_{\nu_{s_{r-1}}}^{(r-1)*} & \end{bmatrix},
$$

(Из полученной формулы очевидно, что $\varkappa_{\nu_{s_{r-1}}}^{(r-2)} = 0$.)

Если компоненты вектора $\boldsymbol{\varkappa}^{(r-2)}$ обозначаются — подобно предыдущим — через выражения

$$
\varkappa_{\nu_i}^{(r-2)} = p\, x_i^{(r-2)} - y_i^{(r-2)} ,
$$

где i может равняться каждому натуральному числу от 1 до r — за исключением s_r и $s_{(r-1)}$, — то значение параметра p_{r-2} можно определить из максимума нулевых точек вышеупомянутых линейных функций :

$$
p_{r-2} = \max \left(\frac{y_i^{(r-2)}}{x_i^{(r-2)}} \right) .
$$

Индекс i, к которому относится этот максимум, дает результатом искомое место $\nu_{s_{r-2}}$.

Продолжая этот процесс, получаем значения параметра нагрузки, при которых образуются отдельные пластические шарниры, и получаем также углы поворота пластических шарниров.

Полагая, что места ν_{r-1}, $\nu_{r-2}, \ldots$, $\nu_{s_{r-k+1}}$ уже известны и p_{r-k+1} является таким параметром нагрузки, при котором ν_{r-k+1}-й пластический шарнир как раз образуется, при $p < p_{r-k+1}$ углы поворота получаются из выражения

$$\boldsymbol{\varkappa}^{(r-k)} = \mathbf{A}^{(r-k)} \{p \boldsymbol{M}_{r-1} - \boldsymbol{M}^{(r-1)}\} ,$$

где

$$\mathbf{A}^{(r-k)} = \mathbf{A}^{(r-1)} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\boldsymbol{a}^{(r-j)}_{\nu_{s_{r-j}}} \boldsymbol{a}^{(r-j)*}_{\nu_{s_{r-j}}}}{a^{(r-j)}_{\nu_{s_{r-j}} \nu_{s_{r-j}}}}$$

(здесь $\varkappa^{(r-k)}_{\nu_{s_{r-j}}} = 0$, если $j = 1, 2, \ldots, k - 1$).

Обозначая компоненты $\varkappa^{(r-k)}_{\nu_i}$ через выражения

$$\varkappa^{(r-k)}_{\nu_i} = p x_i^{(r-k)} - y_i^{(r-k)} ,$$

где i от 1 до $r - 1$ может равняться каждому натуральному числу, за исключением значения $s_r, s_{r-1}, \ldots, s_{r-k+1}$, значение параметра p_{r-k} получается как максимум из нулевых точек вышеупомянутых линейных функций

$$p_{r-k} = \max \left(\frac{y_i^{(r-k)}}{x_i^{(r-k)}} \right) .$$

Место, где образованием пластического шарнира начинается этот интервал, может быть определено из индекса i вышеупомянутой нулевой точки.

§ 3. Изменение моментов от начала нагружения до разрушения

В случае постепенного увеличения параметра нагрузки изгибающие моменты определяются следующим образом.

Вначале, под действием нагрузки конструкция ведет себя еще упруго. Так как уже известны места $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$, на которых образуются пластические шарниры, а также место ν_{s_r}, на котором последним появляется пластический шарнир, с опущением уравнения ν_{s_r} получается система уравнений, соответствующая системе (1):

$$\boldsymbol{M}^{(r-1)} = p \boldsymbol{M}_{r-1} - \mathbf{Z}^{(r-1)} \boldsymbol{\varkappa}^{(r-1)} , \tag{12}$$

где

$$\mathbf{Z}^{(r-1)} = \mathbf{C}^{(s)}_{r_1} (\mathbf{C}^*_{r_2} \mathbf{Z} \mathbf{C}_{r_2}) \mathbf{C}^{(s)*}_{r_1}$$

и

$$\boldsymbol{M}_{r-1} = \mathbf{C}^{(s)}_{r_1} \mathbf{C}^*_{r_2} \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_0^{(r-1)} .$$

Пока конструкция ведет себя упруго, каждый элемент вектора $\boldsymbol{\varkappa}^{(r-1)}$ равен нулю, следовательно

$$\boldsymbol{M}^{(r-1)} = p \boldsymbol{M}_{r-1} .$$

Совершим расчет, как будто углы поворота и величины параметра нагрузки, относящиеся к отдельным стадиям, то-есть последовательность образования шарниров, были бы еще неизвестны.

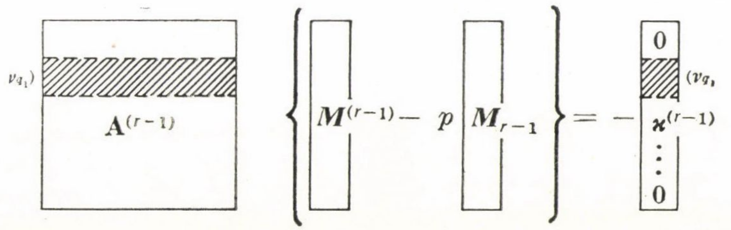
Увеличив величину параметра p мы доходим до такого значения p_1, при котором изгибающий момент на каком-то месте достигает значения предельного момента.

Очевидно,

$$p_1 = \min \left(\frac{M_{\text{пред}_{\nu_i}}}{M_{\nu_i}} \right) ,$$

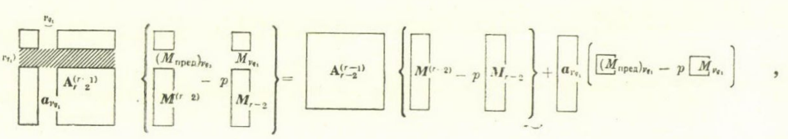
где i может равняться всем натуральным числам от 1 до r, за исключением s_r. Индекс i, к которому относится вышеуказанный минимум, указывает место ν_{q_1}, где первым возникает предельный изгибающий момент. Если параметр нагрузки превышает величину p_1, то в уравнении (12) $\varkappa_{\nu_{q_1}} \neq 0$.

Умножим с левой стороны (переставленное) уравнение (12) на матрицу $\mathbf{A}^{(r-1)}$

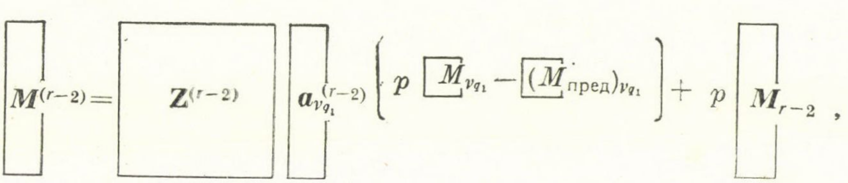
(13) 

и пропустим уравнение ν_{q_1} (места пропущенных элементов обозначены штрихованием).

Разлагая левую сторону уравнения партиционированием



и, имея в виду, что все остальные элементы вектора $\varkappa^{(r-1}$ равны нулю, для определения моментов получается следующее уравнение:

(14) 

Здесь вектор $a_{\nu_{q_1}}^{(r-2)}$ — столбец ν_{q_1}, матрицы $\mathbf{A}^{(r-1)}$, пропустив элемент ν_{q_1}; $\mathbf{A}_{r-2}^{(\ -1)}$ — минор матрицы $\mathbf{A}^{(r-1)}$, полученный с опущением строки и столбца ν_{q_1}; $\boldsymbol{M}^{(r-2)}$ — вектор моментов (без элемента $M^{(r-1)}_{\nu_{q_1}} = M_{\text{пред}_{\nu_{q_1}}}$) в случае $p > p_1$; вектор $\boldsymbol{M}_{r-2}$ равняется вектору $\boldsymbol{M}_{r-1}$ без элемента $M_{\nu_{q_1}}$; наконец, $\mathbf{Z}^{(r-1)} = (\mathbf{A}^{(r-1)}_{r-2})^{-1}$. Матрица $\mathbf{Z}^{(r-2)}$ получается из матрицы $\mathbf{Z}^{(r-1)}$ с помощью вычитания диада

$$\frac{z^{(r-1)}_{\nu_{q_1}}\, z^{(r-1)*}_{\nu_{q_1}}}{z^{(r-1)}_{\nu_{q_1}\nu_{q_1}}},$$

пропустив строку и столбец ν_{q_1}, элементы которых равны нулю. Обозначаем элементы вектора $\boldsymbol{M}^{(r-2)}$ в (14) через следующие выражения:

$$M^{(r-2)}_{\nu_i} = p\,\xi^{(r-2)}_i - \eta^{(r-2)}_i,$$

где i может равняться всем натуральным числам от 1 до r, за исключением s_r и q_1. Отсюда значение параметра p_2, при котором изгибающий момент на месте ν_{q_2} достигает значения предельного момента, равняется:

$$p_2 = \min\left(\frac{M_{\text{пред}_{\nu_i}} + \eta^{(r-2)}_i}{\xi^{(r-2)}_i}\right).$$

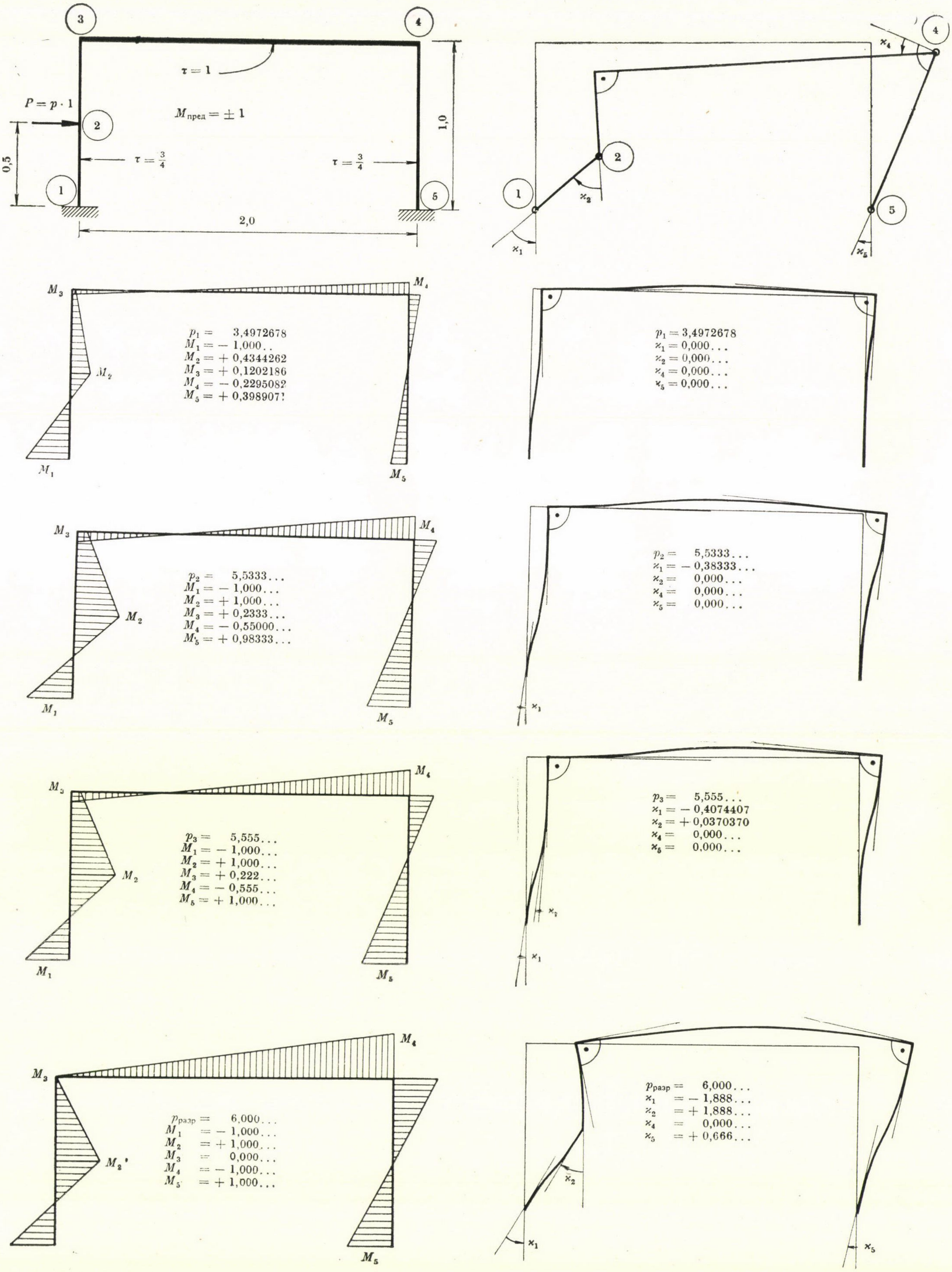
Продолжая этот метод, моменты определяются по очереди в отдельных интервалах приращения параметра нагрузки.

Предположим, что при значении параметра p_k момент в сечении k достиг предельного значения и $p > p_k$. Тогда в уравнении (12) $\varkappa_{\nu_{q_i}} = 0$, $i = 1,2,\ldots,k$. Умножим с левой стороны уравнение (12) на матрицу $\mathbf{A}^{(r-1)}$ и пропустим уравнения $\nu_{q_1},\ldots,\nu_{q_k}$. Вектор моментов имеет вид:

$$\boldsymbol{M}^{(r-k-1)} = \mathbf{Z}^{(r-k-1)}\; \mathbf{A}_{\nu_{q_1}\ldots\nu_{q_k}} \left\{ p\,\boldsymbol{M}_k - (\boldsymbol{M}_{\text{пред}})_k \right\} + p\,\boldsymbol{M}_{r-k-1} \tag{15}$$

где вектор $\boldsymbol{M}_k$ содержит элеметы $\nu_{q_1}, \nu_{q_2},\ldots,\nu_{q_k}$ вектора $\boldsymbol{M}_{r-1}$, а вектор $\boldsymbol{M}_{r-k-1}$ другие элементы вектора $\boldsymbol{M}_{r-1}$. Вектор $\boldsymbol{M}_{\text{пред}_k}$ образуется из элементов $M_{\text{пред}_{\nu_1}},\ldots, M_{\text{пред}_{\nu_k}}$, и $\mathbf{A}_{\nu_{q_1}\ldots\nu_{q_k}}$ — минор, составленный из столбцов $\nu_{q_1}, \nu_{q_2},\ldots,\nu_{q_k}$ матрицы $\mathbf{A}^{(r-1)}$, пропустив строки $\nu_{q_1}, \nu_{q_2},\ldots,\nu_{q_k}$. Наконец, $\mathbf{Z}^{(r-k-1)}$ — обратная матрица минора матрицы $\mathbf{A}^{(r-1)}$, полученного с опущением строк и столбцов $\nu_{q_1}, \nu_{q_2},\ldots,\nu_{q_k}$. Матрица $\mathbf{Z}^{(r-k-1)}$ получается из матрицы, вычисленной с помощью вычитания k диадов

$$\mathbf{Z}^{(r-1)} - \sum_{j=1}^{k} \frac{z^{(r-j)}_{\nu_{q_j}}\, z^{(r-j)*}_{\nu_{q_j}}}{z^{(r-j)}_{\nu_{q_j}\nu_{q_j}}},$$



Фиг. 3. — Расчетная схема конструкции ($\tau = J/J_c$); механизм течения; эпюры моментов и эпюры деформаций при образовании отдельных пластических шарниров (углы поворота ($\varkappa$) показаны с умножением на EJ_c).

пропустив строки и столбцы $\nu_{q_1}, \nu_{q_2}, \ldots, \nu_{q_k}$, элементы которых равны нулю. Обозначим элементы вектора $\boldsymbol{M}^{(r-k-1)}$ в (15) через следующие выражения:

$$M^{(r-k-1)} = p\,\xi_i^{(r-k-1)} - \eta_i^{(r-k-1)},$$

где i может равняться всем натуральным числам от 1 до r, за исключением $s_r, q_1, q_2, \ldots, q_k$. Тогда значение параметра нагрузки p_{k+1}, при котором на следующем месте $\nu_{q_{k+1}}$ момент достигает предельной величины, определяется формулой

$$p_{k+1} = \min\left(\frac{M_{\text{пред}_{\nu_i}} + \eta_i^{(r-k-1)}}{\xi_i^{(r-k-1)}}\right).$$

Продолжая этот метод до $k = r - 2$, получаем моменты и значения параметра, при которых моменты достигают значения предельного изгибающего момента, а также последовательность возникновения предельных моментов.

В интервале предшествующем разрушению, то-есть в случае $p_{r-1} < p < p_{\text{разр}}$, изгибающий момент только на месте ν_{s_r} не равняется предельному моменту. Значение момента определяется уравнением ν_{s_r} системы уравнений (2). Обозначая строку ν_{s_r} матрицы $\mathbf{C}_{r_1}$ через $\boldsymbol{c}_s^*$ и подставляя выражение (9) вектора $\boldsymbol{\varkappa}^{(r-1)}$, значение момента получается в следующем виде:

$$M_{s_r} = \boldsymbol{c}_s^* (\mathbf{C}_{r_1}^{(s)})^{-1} (\boldsymbol{M}^{(r-1)} - p\,\boldsymbol{M}_0^{(r-1)}) + p\,M_{\nu_{s_r}0}.$$

В качестве примера покажем исходные данные и численное решение задачи фиг. 3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{14}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{11}{9} & \frac{26}{9} & \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (3 \\ (5 \end{matrix}; \quad \boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{23}{36} \\ \frac{23}{36} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (3 \\ (5 \end{matrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (3 \\ (5 \\ (2 \\ (4 \end{matrix}; \quad \boldsymbol{M}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (3 \\ (5 \\ (2 \\ (4 \end{matrix}.$$

(Поступила в редакцию 22. IV. 1958.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дарков, А. В.—Кузнецов, В. И. : *Статика сооружений*. Трансжелдориздат, Москва, 1951. (4-е перераб. изд.)
[2] Egerváry, E.: „On a property of the projector matrices and its applications to the canonical representation of matrix functions". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **15** (1953) 1—6.
[3] Frazer, R. A.—Duncan, W. J.—Collar, A. R.: *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations*. Cambridge University Press, 1935.
[4] Гвоздев, А. А. : *Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Выпуск I.* Стройиздат, Москва, 1949.
[5] Halász O.—Kaliszky S.—Kollár L.: *Rúdszerkezetek méretezése a képlékenységtan alapján.* Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1958.
[6] Korányi I.: *Tartók sztatikája. II. kötet, 1. füzet.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[7] Prager, W.—Hodge, P. G.: *Theorie ideal plastischer Körper.* Springer, Wien, 1954

A MÁTRIXELMÉLET ALKALMAZÁSA RUGALMAS-PLASZTIKUS ÁLLAPOTÚ SZTATIKAILAG HATÁROZATLAN RÚDSZERKEZETEK SZÁMÍTÁSÁRA

RÓZSA P. és TASSI G.

Kivonat

A dolgozat sztatikailag határozatlan rúdszerkezetek törőterhelésének, valamint tetszőleges terheléshez tartozó igénybevételi és alakváltozási állapotának meghatározásával foglalkozik.

Feltéve, hogy a terhelés egy paramétertől függ, a nyomaték és elfordulás az 1. ábra szerint függ össze, a nyomatéki csúcspontok és kialakult plasztikus csuklók nem vándorolnak, s a kialakult plasztikus csuklókon tehermentesítés nem lép fel, A. A. Gvozgyev [4] módszerét továbbfejlesztve a következőképpen járhatunk el :

A tartó erőmódszerrel való megoldásából kiindulva felírunk egy mátrixegyenletet, amely azt fejezi ki, hogy azokon a helyeken, ahol plasztikus csukló kialakult, a külső terhelés és a plasztikus csuklókon fellépő terhelő elfordulások hatására éppen a határnyomaték hat, a többi helyen pedig a nyomaték kisebb annál.

Törőterhelés esetén a megfelelő helyeken mindenütt a határnyomaték lép fel, s ekkor az elfogulásokra olyan inhomogén lineáris egyenletrendszert kapunk, amely együttható mátrixának rangja eggyel kisebb, mint a rendszáma. A cikk automatikus módszert ad a terhelési paraméter ama értékének meghatározására, amelyre az egyenletrendszer kompatibilis. Minthogy a folyási mechanizmust előre általában nem ismerjük, azokat a helyeket, ahol a plasztikus csuklók kialakulnak, valamint a törőterhelés paraméterét minimum feladattal határozzuk meg.

A törőterhelés fellépésének pillanatában az elfordulások értékét az említett egyenletrendszer egy szabad paramétertől függő lineáris megoldásai szolgáltatják. A dolgozat kimutatja, hogy az lesz a legutoljára kialakuló plasztikus csukló, amelyen fellépő elfordulásnak, mint a szabad paraméter

lineáris függvényének zérushelye az összes többi ilyen lineáris függvény zérushelye közül extrémális.

A plasztikus csuklók kialakulási sorrendjét, az ezeken fellépő elfordulásokat és a tartó nyomatéki ábráit ugyancsak egy szélsőérték feladat szolgáltatja, amelyekhez az egyenletrendszer együttható mátrixa bizonyos minormátrixainak invertálása szükséges. Ezeknek kiszámítása egy-egy diád ismételt leválasztásával történik, ami az eljárást könnyen áttekinthetővé, egyszerűen kivitelezhetővé és gépi úton való számításra alkalmassá teszi.

CALCUL DES CONSTRUCTIONS DES BARRES STATIQUEMENT INDÉTERMINÉES DANS L'ÉTAT ÉLASTIQUE-PLASTIQUE PAR LE CALCUL DES MATRICES

P. RÓZSA et G. TASSI

Extrait

L'article traite de la détermination de la charge critique ainsi que celle des changements des moments et des états de déformation des constructions des barres.

Supposons, que la charge dépend d'un seul paramètre, que le moment et la déformation angulaire dépendent l'un de l'autre comme le montre la figure 1, que les sommets des moments et les articulations plastiques développées ne se déplacent pas, et enfin que la diminution des charges ne se produit pas sur les articulations plastiques développées. Nous pouvons alors perfectionner la méthode de A. A. Gvozdev de la façon suivante :

En pattant de la solution du problème des poutres par la méthode des charges, nous obtenons un dystème d'équations linéaires qui exprime qu'aux endroits mêmes où les articulations plastiques viennent de se former, précisément les moments limites se produisent sous l'influence de la charge extérieure et celle des déformations angulaires imposées aux articulations plastiques, tandis qu'aux autres endroits les moments deviennent plus petits que les moments limites.

Dans le cas de la charge critique, des moments limites se produisent partout et nous obtenons alors pour les déformations angulaires un système d'équations linéaires inhomogènes, dont le rang de la matrice de ses coefficients est inférieur d'une unité à celui de son ordre. L'article donne une méthode qui permet de déterminer immédiatement la valeur du paramètre de charge pour laquelle le système d'équations est compatible. Puisque le mécanisme des déplacements est à priori, en général inconnu, nous déterminons les endroits, où les articulations plastiques se produisent, ainsi que le paramètre de la charge critique, par la solution d'un problème des minima.

A l'instant où se produisent les charges critiques, les valeurs des déformations angulaires sont fournies par les solutions linéairement dépendantes d'un paramètre libre du système d'équations mentionné. Nous démontrons

que l'articulation plastique qui se produit à la fin est celle, pour laquelle la déformation angulaire en tant que fonction linéaire du paramètre libre a un zéro qui est le minimum respectivement le maximum absolu des zéros de toutes ces fonctions linéaires.

L'ordre dans lequel les articulations plastiques se produisent, ainsi que les déformations angulaires qui y appartiennent et les diagrammes des moments de la poutre sont fournis également par les solutions des problèmes de maxima respectivement minima, pour lesquels il feut invertir certains mineurs des matrices des coefficients. Le calcul s'effectue par la soustraction itérée des diades qui rend plus clair le procédé et permet d'effectuer un calcul simple sur les machines.

EIN BEWEIS DES WEDDERBURN—ARTINSCHEN STRUKTURENSATZES

von

OTTÓ STEINFELD

Einleitung

Unter einem *halbeinfachen Ring* verstehen wir einen assoziativen Ring, der kein von Null verschiedenes nilpotentes Linksideal besitzt und in dem für die Linksideale die Minimalbedingung gilt. In dieser Arbeit geben wir einen kurzen, elementaren Beweis des Wedderburn-Artinschen Strukturensatzes. Der Beweis benützt wesentlich nur das wohlbekannte Ergebnis von E. NOETHER (Hilfssatz 1).

Für die gefällige Hilfe in der Abfassung dieser Arbeit spreche ich meinen herzlichen Dank Herrn Professor L. FUCHS aus.

§ 1. Hilfssätze

Hilfssatz 1 (E. NOETHER). *Ein halbeinfacher Ring R besitzt ein Einselement ε und ist die direkte Summe von endlich vielen minimalen Linksidealen $R\varepsilon_1, \ldots, R\varepsilon_m$, wo $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ orthogonal idempotente Elemente mit $\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m$ sind.*[1]

Hilfssatz 2. *Die minimalen Linksideale $R\varepsilon_i$, $R\varepsilon_k$ ($\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i, \varepsilon_k^2 = \varepsilon_k$) eines (assoziativen) Ringes R sind dann und nur dann als R-Moduln operatorisomorph, wenn $\varepsilon_i R \varepsilon_k$ von Null verschieden ist.*

Beweis. Sind $R\varepsilon_i$ und $R\varepsilon_k$ operatorisomorph, und gilt bei einem gegebenen Operatorisomophismus $\varepsilon_i \to \varrho\varepsilon_k$ ($\neq 0$; $\varrho \in R$), so folgt $\varepsilon_i = \varepsilon_i\varepsilon_i \to \varepsilon_i\varrho\varepsilon_k$, also $\varepsilon_i R\varepsilon_k \neq 0$.

Es sei $\varepsilon_i\alpha\varepsilon_k \neq 0$ ($\alpha \in R$). Die Abbildung

$$\varrho\varepsilon_i \to \varrho\varepsilon_i\alpha\varepsilon_k \qquad (\varrho \in R) \tag{1}$$

ist offenbar ein Operatorhomomorphismus von $R\varepsilon_i$ in $R\varepsilon_k$. Da das Bild von $\varepsilon_i\varepsilon_i = \varepsilon_i$ in (1) das Element $\varepsilon_i^2\alpha\varepsilon_k = \varepsilon_i\alpha\varepsilon_k$ ($\neq 0$) ist, liefert (1) einen Operatorisomorphismus von $R\varepsilon_i$ auf $R\varepsilon_k$.

Hilfssatz 3. *Ist $\mathfrak{l}$ ein minimales Linksideal eines (assoziativen) Ringes R und $\varepsilon(\neq 0)$ ein idempotentes Element in $\mathfrak{l}$, so ist $\varepsilon\mathfrak{l}$ ein Schiefkörper mit dem Einselement ε.*

Beweis. $\varepsilon\mathfrak{l}$ ist ein Unterring von R mit dem linksseitigen Einselement ε. Da für ein beliebiges Element $\varepsilon\lambda$ ($\neq 0$; $\lambda \in \mathfrak{l}$) von $\varepsilon\mathfrak{l}$ die Gleichung $\mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda = \mathfrak{l}$ und deshalb $\varepsilon\mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon\mathfrak{l}$ gilt, existiert ein Element $\varepsilon\lambda'$ ($\neq 0$; $\lambda' \in \mathfrak{l}$) mit $\varepsilon\lambda' \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon$, womit Hilfssatz 3 bewiesen ist.

[1] Für den Beweis s. § 123 der *Algebra, II.* von B. L. VAN DER WAERDEN (Springer, Berlin, 1955).

§ 2. Beweis des Wedderburn-Artinschen Satzes

Der Wedderburn-Artinsche Strukturensatz. *Ein halbeinfacher Ring R ist die (ringtheoretische) direkte Summe von endlich vielen Unterringen, deren jeder einem vollen Matrizenring über einem Schiefkörper isomorph ist.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gilt

$$R = R\varepsilon_1 + \ldots + R\varepsilon_m \, , \tag{2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m \qquad (\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i \, ; \; \varepsilon_i \varepsilon_k = 0 \quad \text{für } i \neq k \, ; \; i,k = 1, \ldots, m), \tag{3}$$

wo ε das Einselement und $R\varepsilon_1, \ldots, R\varepsilon_m$ minimale Linksideale von R bezeichnen.

Offenbar kann man voraussetzen, dass in (2) die minimalen Linksideale als R-Moduln in Klassen operatorisomorpher eingeteilt sind. Da sich die nicht-operatorisomorphen Linksideale unter $R\varepsilon_1, \ldots, R\varepsilon_m$ infolge Hilfssatz 2 paarweise annullieren, bildet die direkte Summe der Linksideale, die in derselben Klasse sind, ein zweiseitiges Ideal von R und deshalb ist R die ringtheoretische direkte Summe von diesen Idealen. Nach einer geeigneten Umordnung kann man erreichen, dass z. B.

$$\mathfrak{a} = R\varepsilon_1 + \ldots + R\varepsilon_h \qquad (1 \leq h \leq m) \tag{4}$$

ein solches Ideal mit dem Einselement

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_h \qquad (\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i \, ; \; \varepsilon_i \varepsilon_k = 0 \quad \text{für } i \neq k \, ; \; i, k = 1, \ldots, h) \tag{5}$$

ist. Es genügt zu zeigen, dass $\mathfrak{a}$ einem vollen Matrizenring über einem Schiefkörper isomorph ist. Da für ein festes Element $\delta_i (\neq 0)$ von $\varepsilon_i R \varepsilon_1$ $(i = 1, \ldots, h)$ das Produkt $R\varepsilon_i \cdot \delta_i$ ein von Null verschiedenes Linksideal von R in $R\varepsilon_1$ ist, gilt $R\varepsilon_i \cdot \delta_i = R\varepsilon_1$, woraus $\varepsilon_1 R\varepsilon_i \cdot \delta_i = \varepsilon_1 R \varepsilon_1$ folgt. Dies bestätigt die Existenz eines Elementes $\delta_i^* \; (\neq 0, \in \varepsilon_1 R \varepsilon_i)$ mit

$$\delta_i^* \delta_i = \varepsilon_1 \qquad (i = 1, \ldots, h). \tag{6}$$

$\delta_i \delta_i^* \; (\in \varepsilon_i R \varepsilon_i)$ ist wegen (6) idempotent und wegen $\delta_i \delta_i^* \delta_i = \delta_i \varepsilon_1 = \delta_i \neq 0$ von Null verschieden. Da $\varepsilon_i R \varepsilon_i \; (i = 1, \ldots, h)$ nach Hilfssatz 3 ein Schiefkörper (mit dem Einselement ε_i) ist, besteht

$$\delta_i \delta_i^* = \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, h). \tag{7}$$

So kann man voraussetzen, dass die Elementepaare $\delta_i \; (\neq 0)$ und $\delta_i^* (\neq 0 \, ; \; i = 1, \ldots, h)$ mit den Eigenschaften (6) und (7) ausgewählt sind.

Betrachten wir die Abbildung

$$\alpha \to \| \delta_i^* \alpha \delta_j \| \qquad (\alpha \in \mathfrak{a} \, ; \; i,j = 1, \ldots, h), \tag{8}$$

wo die rechte Seite eine h-reihige quadratische Matrix über dem Schiefkörper $\varepsilon_1 R \varepsilon_1 = K$ bezeichnet. Nach (8) wird $\mathfrak{a}$ in den vollen Matrizenring K_h vom Range h^2 über K abgebildet und die Homomorphieeigenschaft gilt bezüglich der Addition trivialerweise. Da infolge (5), (7) und (8) für die Elemente $\alpha, \beta \; (\in \mathfrak{a})$

$$\alpha\beta \to \| \delta_i^* \alpha \beta \delta_j \| = \| \delta_i^* \alpha \varepsilon' \beta \delta_j \| = \left\| \sum_{k=1}^{h} \delta_i^* \alpha \varepsilon_k \beta \delta_j \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{h} \delta_i^* \alpha \delta_k \delta_k^* \beta \delta_j \right\| =$$

$$= \| \delta_i^* \alpha \delta_j \| \cdot \| \delta_i^* \beta \delta_j \|$$

richtig ist, ist (8) auch bezüglich der Multiplikation eine homomorphe Abbildung.

Wir zeigen jetzt, dass jede Matrix $\| \varrho_{ij} \|$ $(\varrho_{ij} \in K)$ von K_h als Bildelement in (8) vorkommt. Wegen (4), (6), (8) und der Orthogonalität der idempotenten Elemente $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$ hat $\| \varrho_{ij} \|$ in (8) das Urbild

$$\sum_{i,j=1}^{h} \delta_i \varrho_{ij} \delta_j^* \in \mathfrak{a}.$$

Ist zuletzt das Bild von $\alpha (\in \mathfrak{a})$ die Nullmatrix, so gilt $\delta_i^* \alpha \delta_j = 0$ $(i, j = 1, \ldots, h)$, woraus wegen (5), (7) die Gleichung

$$\alpha = \varepsilon' \alpha \varepsilon' = \sum_{i,j=1}^{h} \varepsilon_i \alpha \varepsilon_j = \sum_{i,j=1}^{h} \delta_i \cdot \delta_i^* \alpha \delta_j \cdot \delta_j^* = 0$$

folgt.

Damit ist der Beweis vollendet.

Bemerkung. Aus dem vorigen Ergebnis ergibt sich der zweite Wedderburn-Artinsche Strukturensatz über einfache Ringe.

(Eingegangen 20. Februar 1958.)

A FÉLIGEGYSZERŰ GYŰRŰK WEDDERBURN—ARTIN-FÉLE STRUKTÚRA-TÉTELÉNEK EGY ÚJ BIZONYÍTÁSA

STEINFELD O.

Kivonat

Egy (asszociatív) gyűrűt, amelynek nincs zérótól különböző nilpotens balideálja, és amelynek balideáljaira teljesül a minimum-feltétel, *féligegyszerűnek* nevezünk.

E dolgozatban egy olyan új, rövid bizonyítást adunk a féligegyszerű gyűrűk nevezetes WEDDERBURN—ARTIN struktúratételére, amely lényegileg csak a NOETHER-féle alaptételre támaszkodik.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СТРУКТУРНОЙ ТЕОРЕМЫ WEDDERBURN—ARTIN-A ПОЛУПРОСТЫХ КОЛЕЦ

O. STEINFELD

Резюме

Ассоциативное кольцо, которое не имеет отличных от нуля нильпотентных левых идеалов, для левых идеалов которого выполненно условие минимума, называется полупростым.

В настоящей работе дается такое новое, короткое доказательство указанной в заголовке теоремы, которое по существу опирается лишь на основную теорему NOETHER.

KÉTPÓLUSÚ ELEKTROMOS HÁLÓZATOKRÓL, II.

ÁDÁM ANDRÁS

Bevezetés

E dolgozat az azonos című, I. sorszámú dolgozat folytatása. Az ott használt terminológiát külön megállapodások nélkül tovább alkalmazzuk. Így (ha mást nem mondunk) gráfon véges gráfot értünk, amelyben kitüntettünk egy kezdőpontot és egy végpontot, és amely a T_1 és T_2 tulajdonságoknak (lásd : [1], 1. §, 213. oldal) eleget tesz. Pontok és élek egy $A_0, k_1, A_1, k_2, \ldots, A_{n-1}, k_n, A_0$ ($k \geqq 2$) sorozatát *zárt út*nak nevezzük, ha az $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ pontok páronként különböznek, és bármely k_i él ($1 \leqq i \leqq n$) a sorozatban vele szomszédos pontokat köti össze. Az A_0 pontot a zárt út *záródási pont*jának nevezzük, az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ pontokat a zárt út *belső pont*jainak.

Az összes gráfok jellemzése a soros és párhuzamos kapcsolással szemben irreducibilis gráfok leírásán múlik. Dolgozatunkban ezen irreducibilis gráfok bizonyos osztályának szerkezetébe fogunk (nem teljes) betekintést nyerni.

Az [1] dolgozat 2. tétele szerint bármely irreducibilis gráfban van kettős él. (Irreducibilis gráfon mindig egynél több élt tartalmazó irreducibilis gráfot értünk.) Ez a tény lehetőséget nyújt egy irreducibilis gráf pályáinak, éleinek, továbbá maguknak a gráfoknak a következő osztályozására.

Elsőfajú pályának nevezünk egy pályát, ha egyik éle sem kettős él ; másodfajú pályának, ha áthalad legalább egy kettős élen.

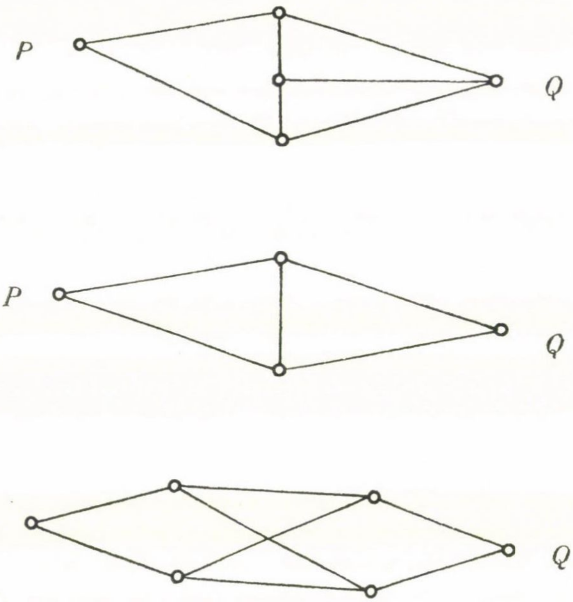
A típusú élnek nevezünk egy élt, ha bármely rajta átmenő pálya elsőfajú. B típusú élnek nevezünk egy élt, amelyen legalább egy elsőfajú és legalább egy másodfajú pálya átmegy. C típusú élnek nevezünk egy nem kettős élt, ha bármely rajta átmenő pálya másodfajú. D típusú éleknek nevezzük a kettős éleket.

Bármely irreducibilis gráf tartalmaz nem kettős élt (pl. a kezdőpontból vagy végpontból kiinduló bármely él). Az eddigiek alapján az irreducibilis gráfoknak a következő hét osztálya lehetséges.

I. osztályú egy gráf, ha A, B, C, D típusú éleket tartalmaz. Ugyanígy egy

II. osztályú gráf A, B, D ;	V. osztályú gráf A, D ;
III. osztályú gráf A, C, D ;	VI. osztályú gráf B, D ;
IV. osztályú gráf B, C, D ;	VII. osztályú gráf C, D

típusú éleket tartalmaz. (Ezeket a definíciókat úgy értjük, hogy pl. VI. osztályúnak nevezünk egy gráfot, ha van B típusú éle, van D típusú éle, nincs A típusú éle és nincs C típusú éle.) Az 1. ábrán példát adunk IV., VI. és VII. osztályú gráfra. Dolgozatunkban (4. és 6. tételek) látni fogjuk, hogy a II., III. és V. gráf-osztályok üresek. Ez a dolgozat elintézetlenül hagyja az egzisztencia-kérdést az I. gráf-osztályra. A dolgozat eredményeinek megbeszélése során Pollák György más eszközökkel bebizonyította hogy nincs olyan sorosan és párhuzamosan irreducibilis gráf, amely tartalmaz A típusú élt (lásd a következő, [2] dolgozatot); ezzel a 4. és 6. tételekre újabb igazolást, az I. gráf-osztály exisztencia-problémájára tagadó választ nyert.



1. ábra.

Az 1. §-ban értelmezzük az n-pólusú gráfokat, és megállapítunk róluk egy, a továbbiakban szükséges tényt.

A dolgozat lényeges eredményeit tartalmazó 2. §-ban a II. és VI. osztályú gráfok szerkezeti vizsgálatával foglalkozunk. Egy ilyen gráf elemzésének alapgondolata: a D típusú éleket (összefüggésük szerint) osztályokba soroljuk, és azt vizsgáljuk, hogy ezek az osztályok hogyan kapcsolódnak be a nem kettős élek által alkotott gráfba. Eredményeink erre a kérdésre pontos választ adnak, a tárgyalás végén (4. tétel) pedig azt nyerjük, hogy az előálló gráfok mindegyike VI. osztályú. A VI. osztályú gráfok teljes leírásában egyetlen hiányosság marad: a kettős élek által alkotott osztályok belső szerkezetének jellemzése. (Ez a kérdés a kettőnél több pólusú gráfok további vizsgálatával lenne megközelíthető.) A 3. §-ban a III. és V. osztályok ürességét igazoljuk az előző paragrafusok eredményeinek felhasználása nélkül.

Köszönetet mondok Pollák Györgynek számos értékes megjegyzéséért, és jelentékeny részvételéért a dolgozat (különösen a 2c) §) végső formába öntésében.

1. §. n-pólusú gráfok

Egy véges gráfot *n-pólusú gráf*nak (röviden: n-gráfnak, e paragrafuson belül egyszerűen gráfnak) nevezünk, ha ki van tüntetve n számú pontja ($n \geqq 2$), amelyeket pólusoknak nevezünk, és a gráf eleget tesz bizonyos összefüggőségi feltételnek. A gráfnak egy olyan pontját, amely nem pólus, a gráf belső pontjának nevezzük. A gráf egy útját belső útnak nevezzük, ha az út minden belső pontja a gráfnak is belső pontja. Az említett feltétel: megkívánjuk, hogy a gráf bármely élén, továbbá bármely pontján átmenjen olyan belső út, amelynek végpontjai pólusok.

Egy n-gráfot T_3 tulajdonságúnak nevezünk akkor, ha egy élből áll, vagy akkor, ha egynél több éle van, és bármely két pontját összeköti egy belső út, és nincs olyan éle, amely két pólust köt össze.[1]

Segédtétel. Soroljuk egy T_3 tulajdonságú n-gráf összes pólusait két (nem üres) diszjunkt α_1, α_2 osztályba. Ekkor a gráf bármely pontján vagy élén átmegy olyan belső út, amelynek egyik végpontja α_1-be, másik végpontja α_2-be tartozó pólus.

Bizonyítás. Egy élű gráfra nyilvánvaló a tétel. A másik esetben állításunk pontokra és élekre azonos módszerrel igazolható. A k élen menjen át az $a(AB)$ belső út, ahol A és B pólusok. Ha mind A, mind B az α_1 osztályba tartoznak, akkor legyen C az a út tetszőleges belső pontja. C belső pontja a gráfnak. D legyen egy α_2-beli pólus, $b(CD)$ legyen tetszőleges belső út. E legyen b utolsó olyan pontja, amely pontja az a útnak is. Ekkor léteznek az $a[AE] \cdot b[ED]$ és $a^{-1}[BE] \cdot b[ED]$ utak, és egyikük átmegy a k élen.

2. §. II. és VI. osztályú gráfok

a) Elnevezések, jelölések. $\mathfrak{G}$ legyen olyan irreducibilis gráf, amely tartalmaz B típusú élt, de nem tartalmaz C típusút. Jelöljük $\mathfrak{G}'$-vel azt a gráfot amely $\mathfrak{G}$-nek A és B típusú éleiből (továbbá a megfelelő pontokból) áll, $\mathfrak{G}'$ kezdőpontja és végpontja egyezzék meg $\mathfrak{G}$ kezdőpontjával, ill. végpontjával). ($\mathfrak{G}$-nek bármely olyan éle, amely P-hez vagy Q-hoz illeszkedik, nem lehet kettős él, tehát $\mathfrak{G}'$-höz tartozik.) Így kettős él nélküli gráfot kapunk, minthogy egy $\mathfrak{G}'$-beli kettős él $\mathfrak{G}$-nek is kettős éle volna. $\mathfrak{G}'$ egynél több élből áll, és nyilván rendelkezik a T_1 és T_2 tulajdonságokkal, tehát [1] 4. tétele szerint $\mathfrak{G}'$ előállítható soros és párhuzamos kapcsolással a $P\circ\!\!-\!\!-\!\!\circ Q$ alapelemből.

A $\mathfrak{H}$ gráfot a $\mathfrak{G}'$ gráf *alkatrészé*nek nevezzük, ha vannak olyan $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n = \mathfrak{H}$ ($n \geqq 0$) gráfok, melyeknél minden i-re ($1 \leqq i \leqq n$) $\mathfrak{G}_i$ soros vagy párhuzamos komponense $\mathfrak{G}_{i-1}$-nek.[2]

A $\mathfrak{G}$ gráf D típusú éleit osztályozzuk a következő ekvivalencia-reláció szerint: a k_1 és k_2 élek ekvivalensek, ha létezik olyan út vagy zárt út, amelynek első éle k_1, utolsó éle k_2, és amelynek egyetlen belső pontja sem pontja

[1] Az $n = 2$ esetben a T_3 tulajdonság a párhuzamos irreducibilitással ekvivalens. Az egy élű gráf nyilván kétpólusú.

[2] Abba, hogy $\mathfrak{G}_i$ soros komponense $\mathfrak{G}_{i-1}$-nek, beleértjük, hogy $\mathfrak{G}_i$ sorosan irreducibilis legyen. (Párhuzamos komponensnél párhuzamos irreducibilitást feltételezünk.) Ezért, ha $\mathfrak{G}_i$ soros komponense $\mathfrak{G}_{i-1}$-nek, akkor $\mathfrak{G}_{i+1}$ párhuzamos komponense $\mathfrak{G}_i$-nek (és megfordítva). Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{G}_i$ bármely alkatrészéhez egyetlen ilyen sorozat létezik. Azt, hogy $\mathfrak{H}_2$ ($\neq \mathfrak{H}_1$) tagja a $\mathfrak{H}_1$ alkatrészhez vezető sorozatnak, a $\mathfrak{H}_2 \supset \mathfrak{H}_1$ jelöléssel juttatjuk kifejezésre.

$\mathfrak{G}'$-nek.[3] A D típusú élek így elkülönített sokaságait *híd*aknak fogjuk nevezni. Minden hídhoz hozzászámítjuk az élek végpontjait is. Két hídnak közös pontja csak akkor lehet, ha az $\mathfrak{G}'$-nek is pontja.

A $\mathfrak{D}$ híd *határpont*jainak nevezzük $\mathfrak{D}$ és $\mathfrak{G}'$ közös pontjait. Minden hídnak legalább két határpontja van. Minden híd T_3 tulajdonságú n-gráf (pólusoknak a határpontokat tekintve). Minden $\mathfrak{D}$ hídhoz hozzárendelünk egy $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ alkatrészt a következő módon:

1°. Ha $\mathfrak{D}$-nek két határpontja van, és ezek egy párhuzamosan reducibilis $\mathfrak{H}$ alkatrésznek kezdőpontja, illetve végpontja, akkor[4] legyen $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}(\mathfrak{D})$.

2°. Minden más esetben legyen $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ $\mathfrak{G}'$-nek az a legszűkebb alkatrésze, amely $\mathfrak{D}$ valamennyi határpontját tartalmazza.

Legyen $\mathfrak{H}$ valamely alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek. Ekkor $\mathfrak{H}^*$ jelentse a $\mathfrak{H}$ éleiből, továbbá az $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{H}$ feltételt teljesítő hidak éleiből álló gráfot, és $\mathfrak{H}^{**}$ jelentse a $\mathfrak{H}^*$ éleiből, továbbá az $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$ feltételt teljesítő hidak éleiből (és mindkét esetben a megfelelő pontokból) álló gráfot.

Legyen a $\mathfrak{G}'$ gráf $\mathfrak{H}$ alkatrészének kezdőpontja P^*, végpontja Q^*. Ha az $a(P^*Q^*)$ út $\mathfrak{H}^{**}$-hoz tartozó élekből áll, akkor a része $\mathfrak{G}$ egy pályájának, például a $b[PP^*] \cdot a \cdot b[Q^*Q]$ pályának, ahol b $\mathfrak{G}'$-beli élekből álló, P^*-en (így Q^*-on is) átmenő tetszőleges pálya. Ebből következik, hogy $\mathfrak{H}$ egy él, amely kettős éle a P^* kezdőpontú, Q^* végpontú $\mathfrak{H}^{**}$ gráfnak, a $\mathfrak{G}$ gráfnak is kettős éle.

Ha egy gráf valamely belső pontján a gráf valamennyi pályája átmegy, akkor ezt a pontot a gráf *csomópont*jának nevezzük. Ha egy gráfnak van csomópontja, akkor a gráf sorosan reducibilis, és komponenseit éppen a csomópontok választják szét. (Vö. [1], [9] lábjegyzet.) Ha A és B csomópontok, akkor annak kifejezésére, hogy alkalmas pályán A megelőzi B-t, az $A \prec B$ jelölést használjuk (ekkor A a gráf bármely pályáján megelőzi B-t.) Legyenek $\mathfrak{H}_1$ és $\mathfrak{H}_2$ a $\mathfrak{H}$ sorosan reducibilis gráf komponensei: ha alkalmas pálya (tehát bármely pálya) előbb tartalmaz $\mathfrak{H}_1$-beli, és később $\mathfrak{H}_2$-beli éleket, akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{H}_1$ előbbi komponense $\mathfrak{H}$-nak, mint $\mathfrak{H}_2$.

A $\mathfrak{G}$ gráf $\mathfrak{D}_1$ és $\mathfrak{D}_2$ hídjait *ekvivalens hidak*nak nevezzük, ha határpontjaik megegyeznek. (Azaz: $\mathfrak{D}_1$ bármely határpontja határpontja $\mathfrak{D}_2$-nek is, és fordítva.)

Legyen $\mathfrak{H}$ párhuzamosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek, legyenek $\mathfrak{H}_\alpha$ és $\mathfrak{H}_\beta$ komponensei $\mathfrak{H}$-nak. $\mathfrak{H}_\alpha$-t és $\mathfrak{H}_\beta$-t *összetartozó komponensek*nek nevezzük, ha $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_\beta$, vagy akkor, ha van $\mathfrak{H}$ komponenseinek olyan

$$\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_\beta \qquad (n \geqq 2)$$

sorozata, hogy bármely i számhoz $(2 \leqq i \leqq n)$ van olyan $\mathfrak{D}$ híd, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$, és amelynek két alkalmas határpontja belső pontja $\mathfrak{H}_{i-1}$-nek, illetve $\mathfrak{H}_i$-nek.

b) Főtétel. 1. tétel. *Bármely $\mathfrak{D}$ hídra $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ párhuzamosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek, és $\mathfrak{D}$ bármely határpontja csomópontja $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ valamely komponensének.*

---

[3] Az osztályozás ekvivalencia-jellege könnyen igazolható. Ha $a(AB)$ a k_1 és k_2 éleket, $b(CD)$ pedig a k_2 és k_3 éleket összekapcsoló, említett tulajdonságú (esetleg zárt) út, és E a-nak első olyan belső pontja, amely b-nek is pontja, akkor $D \neq E$ esetén az $a[AE] \cdot b\,[ED]$, $D=E$ esetén pedig az $a[AE] \cdot k_3^{-1}$ (esetleg zárt) út létezése biztosítja, hogy k_1 és k_3 relációban állnak.

[4] A későbbi eredmények azt fogják kimutatni, hogy ez az eset nem fordulhat elő, pillanatnyilag azonban számolnunk kell ezzel a lehetőséggel is.

Kiegészítés. *$\mathfrak{G}'$ párhuzamosan reducibilis, és $\mathfrak{G}'$ bármely két komponense összetartozó.*

A tétel és a kiegészítés bizonyítása a következő öt állítás igazolására fog tagolódni:

1°. Van olyan híd, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{G}'$.

2°. $\mathfrak{H}$ legyen sorosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek. Legyen $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$. Ekkor $\mathfrak{D}$ bármely határpontja kezdőpontja, végpontja, vagy csomópontja $\mathfrak{H}$-nak.

3°. $\mathfrak{H}$ legyen sorosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek. Feltételezzük, hogy, az 1. tétel állításai igazak minden olyan hídra, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) \supset \mathfrak{H}$.[5] Ekkor nincs olyan híd, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$.

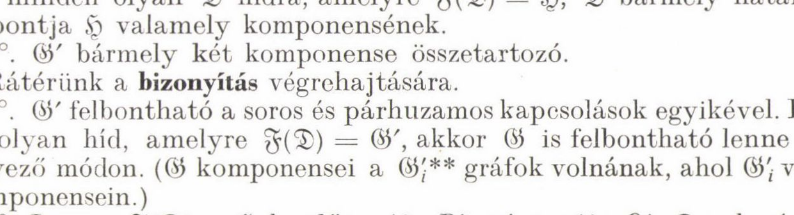
4°. $\mathfrak{H}$ legyen párhuzamosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}$-nek. Feltételezzük, hogy az 1. tétel állításai igazak minden olyan hídra, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) \supset \mathfrak{H}$.[5] Ekkor minden olyan $\mathfrak{D}$ hídra, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$ bármely határpontja csomópontja $\mathfrak{H}$ valamely komponensének.

5°. $\mathfrak{G}'$ bármely két komponense összetartozó.

Rátérünk a **bizonyítás** végrehajtására.

1°. $\mathfrak{G}'$ felbontható a soros és párhuzamos kapcsolások egyikével. Ha nem volna olyan híd, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{G}'$, akkor $\mathfrak{G}$ is felbontható lenne $\mathfrak{G}'$-vel megegyező módon. ($\mathfrak{G}$ komponensei a $\mathfrak{G}_i'^{**}$ gráfok volnának, ahol $\mathfrak{G}_i'$ végigfut $\mathfrak{G}'$ komponensein.)

2°. Legyen $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$ kezdőpontja P^*, végpontja Q^*. $\mathfrak{D}$-nek A legyen olyan határpontja, amely sem kezdőpontja, sem végpontja, sem csomópontja $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$-nek. A tehát belső pontja $\mathfrak{H}$ valamely $\mathfrak{H}_i$ komponensének. B legyen $\mathfrak{D}$-nek olyan határpontja, amely nincs $\mathfrak{H}_i$-ben. $a(AB)$ legyen $\mathfrak{D}$-nek belső útja. Szimmetria-okokból feltételezhetjük, hogy $\mathfrak{H}_i$ előbbi komponens, mint a B-t tartalmazó komponens(ek). $\mathfrak{H}_i$ kezdőpontja legyen C, végpontja D;



2. *ábra.*

$b(P^*Q^*)$ legyen $\mathfrak{H}$-beli élekből álló, B-n átmenő út. Legyenek $c(CD)$ és $d(CD)$ $\mathfrak{H}_i$ -beli élekből álló utak, c menjen át A-n, d ne menjen át A-n. E legyen $c[AD]$ első olyan pontja, amely pontja d-nek is. Ekkor léteznek a

$$b[P^*C] \cdot d[CE] \cdot c^{-1}[EA] \cdot a \cdot b[BQ^*]$$

és a

$$b[P^*C] \cdot c \cdot b[DQ^*]$$

utak, tehát $c[AE]$ kettős út, ami ellentmond annak, hogy $\mathfrak{G}'$-beli élekből áll (2. ábra).

3°. A bizonyítás előző szakasza, továbbá az indukciós feltevés értelmében ha egy $\mathfrak{G}$-beli út két szomszédos éle közül pontosan az egyik $\mathfrak{H}^*$-beli él, akkor az útnak a két él közé eső pontja $\mathfrak{H}^*$-nak kezdőpontja vagy végpontja vagy egyik

[5] A feltételt érvényesnek tekintjük akkor is, ha nincs. ilyen híd

csomópontja ; azaz $\mathfrak{H}$ bármely $\mathfrak{H}_i$ komponensének belsejét csak $\mathfrak{H}_i$ kezdőpontján vagy végpontján át lehet elhagyni.

Jelöljük A_0-lal $\mathfrak{H}$ kezdőpontját, A_1-gyel, A_2-vel, ..., A_{n-1}-gyel $\mathfrak{H}$ csomópontjait (az $\prec$ rendezési reláció szerinti sorrendben), A_n-nel $\mathfrak{H}$ végpontját. A bizonyításnak ebben a szakaszában kivételesen A_0-t és A_n-et is csomópontoknak nevezzük.

Tekintsük $\mathfrak{H}$ első olyan A_{i_0} csomópontját $(0 \leqq i_0 \leqq n-1)$, amely határpontja egy olyan $\mathfrak{D}$ hídnak, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$. $k(A_{i_0}B)$ legyen $\mathfrak{D}$-beli él. Mivel k kettős éle $\mathfrak{G}$-nek, van olyan a pálya, amelynek k^{-1} része (azaz: amely a k élen „A_{i_0} felé" halad át). Az a pályán $\mathfrak{H}$ valamely A_{k_0} csomópontja megelőzi A_{i_0}-t és $k_0 < i_0$. Tekintsük az összes olyan (i, k) $(1 \leqq i, k \leqq n-1)$ számpárokat, amelyekre az a pályán A_k előbb fordul elő, mint A_i, és $i < k$. Ezek között a párok között van olyan, amelyre a $k - i$ különbség minimális. Legyen (i', k') egy ilyen pár. Ekkor az a pálya nem megy át $\mathfrak{H}$-nak egy olyan A_j csomópontján sem, amelyre[6] $A_{i'} \prec A_j \prec A_{k'}$, és ennek következtében az $A_{i'}$ és $A_{k'}$ közötti komponensek egyetlen belső pontján sem. Így létezik az

$$a[PA_{k'}] \cdot b^{-1}[A_{k'}A_{i'}] \cdot a[A_{i'}Q]$$

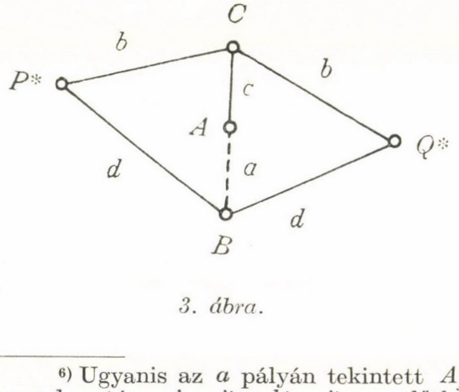
pálya — ahol $b(A_0A_n)$ $\mathfrak{H}$-beli élekből álló tetszőleges út — ezek szerint $b[A_{i'}A_{k'}]$ kettős út, értelmezésével ellentétben.

4°. $\mathfrak{H}$ legyen párhuzamosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek. Az indukciós feltevés szerint ha egy $\mathfrak{G}$-beli út két szomszédos éle közül pontosan az egyik $\mathfrak{H}^{**}$-beli él, akkor az útnak e két él közötti pontja $\mathfrak{H}$-nak P^* kezdőpontja vagy Q^* végpontja.

Legközelebbi célunk kimutatni, hogy ha $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$, akkor a $\mathfrak{D}$ hídnak sem P^*, sem Q^* nem határpontja. Ha $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}'$, akkor ez nyilvánvaló, az ellenkező esetben legyen $P^* (\neq P)$ határpontja $\mathfrak{D}$-nek. $k(P^*A)$ legyen $\mathfrak{D}$-beli él, a legyen $\mathfrak{G}$ olyan pályája, amelynek k^{-1} része. Ekkor az a pályán Q^* megelőzi P^*-ot (tehát $Q^* \neq Q$). Legyen $b(P^*Q^*)$ a $\mathfrak{H}$ gráf egy pályája. Az a pályán pontosan az $a[Q^*P^*]$ út élei $\mathfrak{H}^{**}$-beli élek, tehát létezik $\mathfrak{G}$-nek az

$$a[PQ^*] \cdot b^{-1} \cdot a[P^*Q]$$

pályája, ellentmondásban b értelmezésével. Ha Q^* lép fel a $\mathfrak{D}$ híd határpontjaként, akkor szimmetrikus módon jutunk ellentmondáshoz.



3. ábra.

A $\mathfrak{D}$ hídnak tehát bármely határpontja belső pontja $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$-nak. További feladatunk igazolni, hogy bármely határpont $\mathfrak{H}$ valamely komponensének csomópontja. A bizonyításnak ebben a részében is indirekt módon következtetünk. Legyen A olyan belső pontja $\mathfrak{H}$ valamely $\mathfrak{H}_1$ párhuzamos komponensének, amely nem csomópontja $\mathfrak{H}_1$-nek, és határpontja $\mathfrak{D}$-nek. Legyen $\mathfrak{D}$-nek a B határpontja $\mathfrak{H}$-nak $\mathfrak{H}_2$ komponensén $(\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{H}_2)$. $a(AB)$ legyen

[6] Ugyanis az a pályán tekintett A_j, $A_{k'}$, $A_{i'}$ vagy az $A_{k'}$, A_j, A_i előfordulási sorrend esetén a $j - i' < k' - i'$ egyenlőtlenség, az $A_{k'}$, $A_{i'}$, A_j sorrend esetén pedig a $k' - j < k' - i'$ egyenlőtlenség ellentmond (i', k') értelmezésének.

belső útja $\mathfrak{D}$-nek. b legyen $\mathfrak{H}_1$-nek A-n át nem menő pályája. $c(AC)$ legyen $\mathfrak{H}_1$-beli élekből álló olyan út, amelynek C $(\neq P^*, Q^*)$ az egyetlen közös pontja b-vel. (Ilyen út $\mathfrak{H}_1$ párhuzamos irreducibilitása miatt létezik.) Legyen d $\mathfrak{H}_2$-nek egy B-n átmenő pályája.

Ekkor léteznek $\mathfrak{H}$-nak a

$$d[P^*B] \cdot a^{-1} \cdot c \cdot b[CQ^*]$$

és a

$$b[P^*C] \cdot c^{-1} \cdot a \cdot d[BQ^*]$$

pályái (3. ábra), tehát c kettős út, ellentmondásban azzal, hogy $\mathfrak{H}_1$-beli élekből áll.

5°. Az összetartozás relációja ekvivalencia-reláció $\mathfrak{G}'$ komponenseire. Ha egynél több osztályra bontja ez a reláció a komponenseket, akkor $\mathfrak{G}$ ugyanannyi párhuzamos komponensre esik szét. ($\mathfrak{G}$ egy komponenséhez a következő élek tartoznak: $\mathfrak{G}'$ komponensei egy osztályának élei, továbbá azoknak a hidaknak élei, amelyeknek határpontjai a szóban forgó komponensekben vannak.)

c) További elemzés. Legyen $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{G}'$-nek valamely párhuzamosan reducibilis alkatrésze. Komponensen mindig $\mathfrak{H}$ valamely komponensét fogjuk érteni. Tekintsük mindazon hidakat, amelyekre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$. (Ha $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}'$, akkor előfordulhat, hogy nincs ilyen híd.) E pontban csupán ilyen hidakkal foglalkozunk. $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ és $\mathfrak{H}_3$ jelentsék $\mathfrak{H}$ három különböző komponensét[7]. A $\mathfrak{H}_i$ komponens $(i = 1, 2, 3)$ k-adik csomópontját $A_k^{(i)}$-val fogjuk jelölni. Ha ugyanazon $\mathfrak{H}_i$ komponensnek több $A_k^{(i)}$, $A_l^{(i)}$, $A_m^{(i)}$, $A_n^{(i)}$ csomópontjáról beszélünk, akkor megállapodunk az $A_k^{(i)} \prec A_l^{(i)} \prec A_m^{(i)} \prec A_n^{(i)}$ rendezésben.

Következő tételünk négy esetre tagolódik: négy különböző feltétel mindegyike ugyanazt a következményt vonja maga után.

2. tétel. *Legyenek $f(AB)$ és $g(CD)$ a (nem feltétlenül különböző) $\mathfrak{D}_\alpha$, illetve $\mathfrak{D}_\beta$ hidak belső útjai.*

1. feltétel. Legyen $A = A_k^{(1)}$, $B = A_n^{(2)}$, $C = A_m^{(2)}$ *és* $D = A_l^{(1)}$
2. feltétel. Legyen $A = A_k^{(1)}$, $B = A_m^{(1)}$, $C = A_l^{(1)}$ *és* $D = A_n^{(1)}$
3. feltétel. Legyen $A = A_k^{(1)}$, $B = A_m^{(1)}$, $C = A_l^{(1)}$ *és* $D = A_n^{(2)}$
4. feltétel. Legyen $A = A_k^{(1)}$, $B = A_m^{(2)}$, $C = A_l^{(1)}$ *és* $D = A_n^{(3)}$

Ha e négy feltétel valamelyike teljesül, akkor f és g nem idegenek egymástól (tehát $\mathfrak{D}_\alpha = \mathfrak{D}_\beta$).

Bizonyítás. $a(P^*Q^*)$, $b(P^*Q^*)$ és $c(P^*Q^*)$ legyenek rendre $\mathfrak{H}_1$-beli $\mathfrak{H}_2$-beli, illetve $\mathfrak{H}_3$-beli élekből álló utak (P^* a $\mathfrak{H}$ gráf kezdőpontja, Q^* pedig $\mathfrak{H}$ végpontja). Ha f és g idegenek volnának, akkor az a út valamely (nem elfajult) része kettős útnak bizonyulna. Létezne ugyanis az 1. feltétel érvényessége esetén a

$$b[P^*A_m^{(2)}] \cdot g \cdot a^{-1}[A_l^{(1)}A_k^{(1)}] \cdot f \cdot b[A_n^{(2)}Q^*] \ ,$$

a 2. feltétel érvényessége esetén az

$$a[P^*A_k^{(1)}] \cdot f \cdot a^{-1}[A_m^{(1)}A_l^{(1)}] \cdot g \cdot a[A_n^{(1)}Q^*] \ ,$$

[7] A tétel némely esetében csak egy vagy két komponensre van szükségünk, ilyenkor kettőnél több komponens létezését nem követeljük meg.

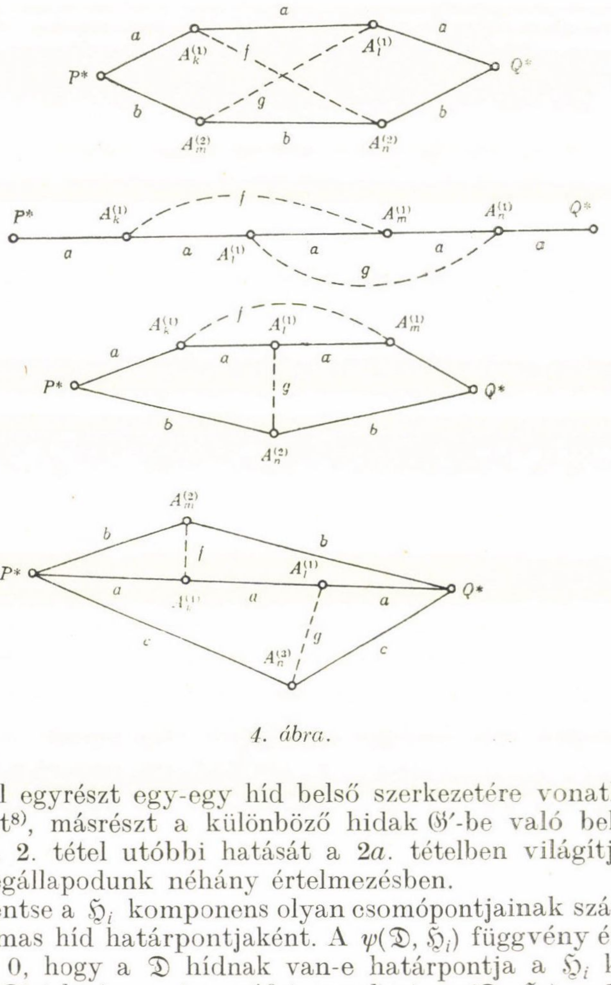
a 3. feltétel érvényessége esetén az

$$a[P^*A_k^{(1)}]\cdot f\cdot a^{-1}[A_m^{(1)}A_l^{(1)}]\cdot g\cdot b[A_n^{(2)}Q^*]\,,$$

a 4. feltétel érvényessége esetén pedig a

$$c[P^*A_n^{(3)}]\cdot g^{-1}\cdot a^{-1}[A_l^{(1)}A_k^{(1)}]\cdot f\cdot b[A_m^{(2)}Q^*]$$

út (4. ábra).



4. ábra.

A 2. tétel egyrészt egy-egy híd belső szerkezetére vonatkozóan jelent megszorításokat[8)], másrészt a különböző hidak $\mathfrak{G}'$-be való bekapcsolódását szabályozza. A 2. tétel utóbbi hatását a 2*a*. tételben világítjuk meg. Ezt megelőzően megállapodunk néhány értelmezésben.

$\varphi(\mathfrak{H}_i)$ jelentse a $\mathfrak{H}_i$ komponens olyan csomópontjainak számát, amelyek fellépnek alkalmas híd határpontjaként. A $\psi(\mathfrak{D}, \mathfrak{H}_i)$ függvény értéke aszerint legyen 1 vagy 0, hogy a $\mathfrak{D}$ hídnak van-e határpontja a $\mathfrak{H}_i$ komponensen, vagy sem. $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{D})$ jelentse azt a gráfot, amelyet a $\psi(\mathfrak{D}, \mathfrak{H}_i) = 1$ feltételt teljesítő komponensekkel összetartozó komponensekből párhuzamos kapcsolással kapunk.

---

8) Azonban a T_3 tulajdonságú legáltalánosabb n-gráfok is felléphetnek hidakként. Ha $\mathfrak{D}$ határpontjai páronként $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ különböző komponenseihez tartoznak, akkor ugyanis a 2. tétel nem jelent korlátozást $\mathfrak{D}$ szerkezetére.

Abban az esetben, mikor $\mathfrak{D}_\alpha \neq \mathfrak{D}_\beta$, a 2. tétel azt mondja ki, hogy két f és g út az ott felsorolt módok egyikén sem helyezkedhet el. A 2. tételnek ezt az esetét a következőkben α) állításnak fogjuk nevezni. A 2a. tételben az α) állításnak két ekvivalens átfogalmazását fogjuk adni.

2a. tétel. *Az α) állítás ekvivalens a következő β)* és *γ) állításokkal :*

β) Legyen A_α határpontja a $\mathfrak{D}_\alpha$ hídnak, és A_β határpontja a $\mathfrak{D}_\beta$ hídnak. Legyenek A_α és A_β csomópontjai a $\mathfrak{H}_1$ komponensnek, legyen érvényes $A_\alpha \prec A_\beta$. A'_α legyen a $\mathfrak{D}_\alpha$ hídnak valamely határpontja a $\mathfrak{H}_2(\neq \mathfrak{H}_1)$ komponensen. Ekkor $\mathfrak{D}_\beta$ bármely A'_β határpontjára igaz az $A_\alpha \preceq A'_\beta$ és $A'_\alpha \preceq A'_\beta$ megelőzések egyike. Érvényes az az állítás, amely β) eddigi részéből a $\preceq$ és $\prec$ jelek megfordításával kapható.

γ) Azok a hidak, amelyekre $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{D})$ ugyanaz, teljesítik a következő három állítást :

(1) *Ha $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ ekvivalens hidak, és határpontjaik száma legalább* 4, *akkor ezek a határpontok páronként különböző komponenseken vannak.*

(2) *Teljesüljön a $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ nem ekvivalens hidak két alkalmas A_α és A_β határpontjára $A_\alpha \prec A_\beta$. Ha A°_α és A°_β határpontjai $\mathfrak{D}_\alpha$-nak, illetve $\mathfrak{D}_\beta$-nak és ugyanazon komponensen helyezkednek el, akkor $A^\circ_\alpha \preceq A^\circ_\beta$.*

(3) *Ha $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{D})$ legalább három komponensből áll, továbbá a $\mathfrak{H}_1$ komponensére és a különböző $\mathfrak{D}_\alpha$, $\mathfrak{D}_\beta$ hidakra*

$$\psi(\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{H}_1) = 1\,, \quad \psi(\mathfrak{D}_\beta, \mathfrak{H}_1) = 1\,, \quad \text{és} \quad \varphi(\mathfrak{H}_1) > 1$$

teljesülnek, akkor a $\psi(\mathfrak{D}, \mathfrak{H}_1) = 1$ feltételt kielégítő hidaknak $\mathfrak{H}_1$-en kívüli határpontjai egyetlen $\mathfrak{H}_2$ komponensen vannak, és $\varphi(\mathfrak{H}_2) = 1$.

Bizonyítás. $\alpha) \to \beta$). Ha A'_β $\mathfrak{H}_1$-től és $\mathfrak{H}_2$-től különböző komponensnek volna csomópontja, akkor ellentmondásba jutnánk a 2. tétel 4. feltételével (összekötve A_α-t és A'_α-t $\mathfrak{D}_\alpha$ egy belső útjával, A_β-t és A'_β-t pedig $\mathfrak{D}_\beta$ egy belső útjával). Ha $A'_\beta \prec A_\alpha$ vagy $A'_\beta \prec A'_\alpha$ volna igaz, akkor hasonló módon ellentmondást nyernénk a 2. tétel 3., illetve 1. feltételével.

$\beta) \to \gamma$). Legyenek A, B és C $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ határpontjai, teljesüljön $A \prec B$, C legyen más komponensen, mint A. Feltételezhetjük, hogy az $A \prec X \prec B$ feltételt kielégítő X pontok egyike sem határpontja $\mathfrak{D}_\alpha$-nak és $\mathfrak{D}_\beta$-nak. D legyen $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ tetszőleges határpontja. Az $A = A_\alpha$, $B = A_\beta$, $C = A'_\alpha$, $D = A'_\beta$ „szereposztással" $C \preceq D$ vagy $A \preceq D$ adódik. Az $A = A_\beta$, $B = A_\alpha$, $C = A'_\alpha$, $D = A'_\beta$ szereposztás szerint (β) második részét felhasználva) pedig $D \preceq C$ és $D \preceq B$ egyike igaz. D tehát megegyezik A, B és C egyikével, azaz (1)-et igazoltuk.

Teljesüljön (2) feltétele, továbbá az $A_\alpha \prec X \prec A_\beta$ formulát teljesítő X pontok egyike se lépjen fel $\mathfrak{D}_\alpha$ vagy $\mathfrak{D}_\beta$ határpontjaként. Ha az A_α-t és A°_α-t tartalmazó komponensek különbözőek, akkor β) nyilván magában foglalja (2)-t. Hátra van még az az eset, mikor A_α, A_β, A°_α és A°_β ugyanazon $\mathfrak{H}_1$ komponens csomópontjai. Tételezzük fel, hogy $A^\circ_\beta \prec A^\circ_\alpha$. Célunk kimutatni, hogy $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ ekvivalens hidak. A β)-val való ellentmondás elkerülésére egy lehetőségünk van : igaz $A^\circ_\beta = A_\alpha \prec A_\beta = A^\circ_\alpha$, és sem $\mathfrak{D}_\alpha$-nak, sem $\mathfrak{D}_\beta$-nak nincs más határpontja a $\mathfrak{H}_1$ komponensen. Legyenek A^*_α és A^*_β $\mathfrak{H}_1$-en kívüli tetszőleges határpontjai $\mathfrak{D}_\alpha$-nak, illetve $\mathfrak{D}_\beta$-nak. Alkalmas szereposztással β) mind az $A^*_\alpha \preceq A^*_\beta$, mind az $A^*_\beta \preceq A^*_\alpha$ megelőzést biztosítja, tehát $A^*_\alpha = A^*_\beta$.

Teljesüljön (3) feltétele ; ekkor találhatóak olyan $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ hidak, hogy $\mathfrak{H}_1$-en elhelyezkedő alkalmas A_α, illetve A_β határpontjaik különböznek. Legyen $\mathfrak{D}_\alpha$-nak egy határpontja a $\mathfrak{H}_2$ komponensen, ekkor β) következtében $\mathfrak{D}_\beta$-nak minden $\mathfrak{H}_1$-en kívüli határpontja $\mathfrak{H}_2$-n helyezkedik el. Hasonló meggondolásokkal adódik, hogy $\mathfrak{D}_\alpha$-nak sincs $\mathfrak{H}_1$-en és $\mathfrak{H}_2$-n kívül határpontja. Eredményünk a $\mathfrak{H}_1$-hez csatlakozó bármely $\mathfrak{D}_\gamma$ hídra igaz, hiszen a fenti következtetés végigvihető $\mathfrak{D}_\gamma$-ra, valamint $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ egyikére. Igazolnunk kell még, hogy $\varphi(\mathfrak{H}_2) = 1$. A $\psi(\mathfrak{D}, \mathfrak{H}_2) = 1$ feltételt kielégítő hidak bármelyikének vagy összes $\mathfrak{H}_2$-n kívüli határpontjai $\mathfrak{H}_1$-en vannak, vagy pedig nincs határpontj a $\mathfrak{H}_1$-en; az $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{D})$-re tett kikötés miatt létezik az utóbbi tulajdonsággal rendelkező híd. Ha mindkét típusból kiválasztunk egy-egy hidat, akkor β) miatt ezeknek összesen egy határpontjuk van $\mathfrak{H}_2$-n. A kiválasztás tetszőlegesen történhetett, ezért $\varphi(\mathfrak{H}_2) = 1$.

$\gamma) \rightarrow \alpha)$. Ugyanis ($\mathfrak{D}_\alpha \neq \mathfrak{D}_\beta$ esetén) a 2. tétel 1., 2. és 3. esetei a γ) állítás (1) és (2) része miatt igazak, a 4. esetet pedig a (3) rész vonja maga után.

d) Általános áttekintés. A következő tételben a $\mathfrak{G}$ gráftól csupán annyit kívánunk meg, hogy bármely pontjából induljon ki él. (A T_1 és T_2 tulajdonságokat[9] és az irreducibilitást nem feltételezzük.)

3. tétel. *Legyen adva egy $\mathfrak{G}$ gráf. $\mathfrak{G}'$ legyen olyan részgráfja $\mathfrak{G}$-nek, melynél $\mathfrak{G}'$ kezdőpontja és végpontja megegyezik $\mathfrak{G}$ kezdőpontjával, illetve végpontjával, továbbá $\mathfrak{G}'$ felépíthető a P○——○Q alapelemből soros és párhuzamos kapcsolásokkal. $\mathfrak{G}$-nek $\mathfrak{G}'$-be nem tartozó éleit osztályozzuk H-osztályokba ugyanazzal az eljárással, amellyel e paragrafus a) részében a hidakat értelmeztük. Legyenek ezek a H-osztályok T_3 tulajdonságú n-gráfok. Ha az 1. és 2. tételek, valamint az 1. tétel kiegészítése érvényben maradnak, akkor $\mathfrak{G}$ vagy II. vagy VI. osztályú irreducibilis gráf, amelynek pontosan a $\mathfrak{G}'$-be nem tartozó élei kettős élek.*

Bizonyítás. $\mathfrak{G}$ irreducibilitását az 1. tétel kiegészítése biztosítja. $\mathfrak{G}$-nek bármely, $\mathfrak{G}'$-be nem tartozó k éle benne van egy $\mathfrak{D}$ H-osztálynak két határpontot összekötő belső útjában, tehát az 1. §-ban igazolt segédtétel értelmében egy olyan $a(AB)$ belső útban is, amely $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ két különböző komponenséhez tartozó határpontokat köt össze. Legyen $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ kezdőpontja P^*, végpontja Q^*; $b(P^*Q^*)$ és $c(P^*Q^*)$ legyenek A-n, illetve B-n átmenő, $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$-beli élekből álló utak. Léteznek a $b[P^*A]\cdot a\cdot c[BQ^*]$ és $c[P^*B]\cdot a^{-1}\cdot b[AQ^*]$ utak, tehát k kettős él.

A $\mathfrak{G}'$-re tett kikötésünk szerint $\mathfrak{G}'$ bármely éle egyértelmű irányítást nyer, ha a rajta átmenő, csak $\mathfrak{G}'$-beli élekből álló pályákat tekintjük. $\mathfrak{G}'$ éleit mindig ilyen irányításban fogjuk jelölni. Bizonyítani akarjuk, hogy $\mathfrak{G}'$ egyik k éléhez sincs $\mathfrak{G}$-nek olyan pályája, amely ezen az élen ,,visszafelé'' megy át (azaz: amelynek k^{-1} része). Az ellenkező esetben legyen az a pályán k az első $\mathfrak{G}'$-beli él, amelyen a visszafelé megy át. k_1 legyen az a pályán k^{-1}-et közvetlenül megelőző él.

1. eset: k_1 $\mathfrak{G}'$-beli él. $\mathfrak{G}'$-nek van egy (egyértelműen meghatározott) legszűkebb párhuzamosan reducibilis $\mathfrak{H}$ alkatrésze, amelynek Q^* végpontja k-nek is, k_1-nek is végpontja. Másrészt, az 1. tétel következtében a $\mathfrak{H}^{**}$-beli élek közvetlenül egymás után lépnek fel az a úton (mert $\mathfrak{H}^{**}$ csupán kezdőpontjánál és végpontjánál függ össze $\mathfrak{G}$ többi éleivel). Ezért bármely pálya vagy $\mathfrak{H}$-nak P^* kezdőpontjánál lép be $\mathfrak{H}$-ba és Q^*-nál lép ki onnan, vagy fordítva. a azonban egyik pályatípushoz sem tartozhat, minthogy mind Q^*-ba befutó k_1 éle, mind Q^*-ból tovább induló k^{-1} éle $\mathfrak{H}$-beli él. Ellentmondás.

[9] Lásd: [1], 1. §., 213. oldal.

2. eset: k_1 valamely $\mathfrak{D}$ H-osztály éle. A bizonyításnak ebben a részében ponton mindig az a pálya valamely oly pontját fogjuk érteni, amely $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ egy komponensének csomópontja. Az összes ilyen pontok halmaza legyen α, az α halmaz elemeinek az a úton való sorrend szerinti rendezését a $\prec$ jellel jelöljük. (Meggondolásainkban szerep fog jutni a már ismert $\prec$ rendezésnek is.)

Az 1. tétel szerint k_1-nek (és k-nek) A végpontja eleme α-nak. Először azt igazoljuk, hogy az a pálya $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$-nek P^* kezdőpontjánál lép be $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$-be, és Q^* végpontjánál lép ki onnan. Az ellenkező esetben ugyanis Q^*-t közvetlenül követően a visszafelé haladna át egy $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$-beli élen, ami k értelmezésének ellentmond.

Az $a[P^* Q^*]$ út egy rész-utját *a szakaszá*nak nevezzük, ha a rész-utnak pontosan kezdőpontja és végpontja α-beli pontok. Ha egy szakasz kezdőpontja és végpontja nem szomszédos csomópontok a $\prec$ rendezés értelmében, akkor a szakasz belső utja egy H-osztálynak. Tekintsük $a[P^*Q^*]$ első olyan $C(\in\alpha)$ pontját, melynél $a[CQ^*]$-nak alkalmas $D(\in\alpha)$ pontjára $D \prec C$. (Ilyen C pont van: tekintsük pl. a k élt tartalmazó szakasz kezdőpontját és végpontát.) Válasszuk D gyanánt a $\prec$ rendezésben utolsó ilyen pontot. Az a utnak C-t megelőző és D-t követő szakaszai minden lehetséges esetben a 2. tételnek ellentmondó módon helyezkednek el. Ezzel a 3. tételt teljesen igazoltuk.

A következő tételben gráfon ismét a T_1 és T_2 tulajdonságokkal rendelkező irreducibilis gráfot értünk.

4. tétel. *A II. gráf-osztály üres.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{G}$ C típusú él nélküli, B tipusú élt tartalmazó gráf. Célunk kimutatni, hogy $\mathfrak{G}$ nem tartalmaz A típusú élt. k legyen $\mathfrak{G}'$ tetszőleges éle. Az 1. tétel kiegészítése szerint k benne van $\mathfrak{G}'$-nek valamely $\mathfrak{G}_1'$ párhuzamos komponensében. Van olyan $a(AB)$ út, amely belső útja egy $\mathfrak{D}$ hídnak, továbbá A csomópontja $\mathfrak{G}_1'$-nek és B csomópontja a ($\mathfrak{G}_1'$-től különböző) $\mathfrak{G}_2'$ komponensnek. b és c legyenek $\mathfrak{G}'$-beli élekből álló olyan pályák, melyeknél b átmegy B-n, és c átmegy k-n (tehát A-n is). A $c[PA]\cdot a\cdot b[BQ]$ és $b[PB]\cdot a^{-1}\cdot c[AQ]$ pályák másodfajúak, egyikük átmegy a k élen, tehát k B típusú él. Ezzel a 4. tételt igazoltuk.

A 3. tétel bizonyos értelemben teljessé teszi a VI. osztályú gráfoknak e paragrafus **a)**, **b)** és **c)** részeiben kifejtett elemzését. *Eredményeink összefoglalva a következő módon interpretálhatók:* pontosan a VI. osztályú gráfok jönnek akkor létre, ha a következőképpen módosítjuk azt az eljárást, amellyel a kettős él nélküli gráfok a $P \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ Q$ alapelemből előállíthatók. Tekintsük e szintézisnek tetszőleges olyan lépését, amelyben párhuzamosan reducibilis $\mathfrak{H}_i$ gráfokat kapcsolunk sorosan. Mielőtt ezt a lépést elvégeznénk, jogunkban áll bármely $\mathfrak{H}_i$-be T_3 tulajdonságú n-gráfokat kapcsolni úgy, hogy az n-gráfok minden pólusát azonosítjuk $\mathfrak{H}_i$ valamely komponensének egy csomópontjával; megkívánva, hogy az $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}_i$ egyenlőség és az 1. és 2. tételek érvényesek legyenek a (bekapcsolással hidakká váló) n-gráfokra. A szintézis legutolsó mozzanata: legalább egy n-gráf bekapcsolása egy párhuzamosan reducibilis gráfba úgy, hogy az eddigi követelményeken túlmenően az 1. tétel kiegészítése is teljesedjék. Eljárásunk egyértelműen szolgáltatja a VI. osztályú gráfokat, eltekintve a soros kapcsolás asszociatívitásától, a párhuzamos kapcsolás kommutatívitásától és asszociatívitásától.

3. §. Üres gráf-osztályok

A 4. tételben láttuk, hogy a II. gráf-osztály üres. E §-ban célunk további két osztály ürességét kimutatni. Először a következő állítást igazoljuk:

5. tétel. *Egy irreducibilis $\mathfrak{G}$ gráf összes éleit soroljuk két (idegen, nem üres) $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ osztályba. Ekkor van a gráfnak olyan pályája, amely $\varkappa_1$-beli és $\varkappa_2$-beli élt is tartalmaz.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy bármely pálya vagy csak $\varkappa_1$-beli éleket vagy csak $\varkappa_2$-beli éleket tartalmaz. (Ennek megfelelően $\varkappa_1$-pályákról és $\varkappa_2$-pályákról fogunk beszélni.) Ez a feltevés minden lehetséges esetben ellentmondásra vezet.

1. eset. Nincs $\mathfrak{G}$-nek olyan belső pontja, amelyen $\varkappa_1$-pálya és $\varkappa_2$-pálya is átmegy. $\mathfrak{G}$ ekkor két párhuzamosan kapcsolt részgráfra bomlik, amelyek egyike a $\varkappa_1$-pályák éleit és pontjait, másika a $\varkappa_2$-pályák éleit és pontjait tartalmazza. Ez ellentmond $\mathfrak{G}$ irreducibilitásának.

2. eset. Van olyan belső pont, amelyen $\varkappa_1$-pálya és $\varkappa_2$-pálya is átmegy. Legyen A ily tulajdonságú olyan pont, amely $\mathfrak{G}$ kezdőpontjából alkalmas pályán a lehető legkevesebb él érintésével elérhető. Szimmetria-okból elég azt az esetet vizsgálnunk, mikor egy ilyen alkalmas a pálya élei $\varkappa_1$-beliek. Legyen b A-n átmenő $\varkappa_2$-pálya. Ekkor létezik az $a[PA]\cdot b[AQ]$ pálya (ha $a[PA]$-nak és $b[AQ]$-nak közös pontja volna, akkor A értelmezésével ellentmondásra jutnánk), amely feltevésünkkel ellentétben $\varkappa_1$-beli élt és $\varkappa_2$-beli élt is tartalmaz.

6. tétel. *A III. és V. gráf-osztályok üresek.*

Bizonyítás. Egy III. vagy V. osztályú gráfban (az értelmezés szerint) nincs olyan él, amelyen elsőfajú és másodfajú pálya is átmegy. Legyen a $\mathfrak{G}$ III. vagy V. osztályú gráf elsőfajú pályái éleinek halmaza $\varkappa_1$, $\mathfrak{G}$ másodfajú pályái éleinek halmaza pedig $\varkappa_2$. Az 5. tétel biztosítja olyan pálya létezését, amely $\varkappa_1$-beli és $\varkappa_2$-beli élt is tartalmaz. Ezt a pályát akár elsőfajúnak, akár másodfajúnak feltételezzük, ellentmondáshoz jutunk.

A tétel második állítása egyszerűbben is bizonyítható. Legyen a egy másodfajú pályája egy V. osztályú gráfnak. a első éle nem lehet kettős él, tehát B vagy C típusú él, ellentmondásban az V. gráf-osztály értelmezésével.

(Beérkezett: 1958. V. 5.)

IRODALOM

[1] Ádám A.: „Kétpólusú elektromos hálózatokról, I." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 211—218.

[2] Pollák Gy.: „Megjegyzés Ádám András »Kétpólusú elektromos hálózatokról, II.« című dolgozatához". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958) 81—82 (a következő dolgozat).

О ДВУХПОЛЮСНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ, II.

A. ÁDÁM

Резюме

Работа занимается в первую очередь одним классом параллельно и последовательно неприводимых графов. Рассматриваемый класс может быть охарактеризован следующим свойством: если ребро k графа $\mathfrak{G}$ простое (т. е. не является двойным), то существует цепь, проходящая через k и не содержащая двойных ребер. Это предположение обеспечивает, чтобы простые ребра графа $\mathfrak{G}$ образовали двухполюсный граф $\mathfrak{G}'$. Множество всех двойных ребер разбиваем в классы (называемые «мостами»); эта классификация может быть введена путем транзитивного распространения следующей реляции: реляция имеет силу для двух (двойных) ребер, если они сходятся в некоторой точке, не являющейся точкой графа $\mathfrak{G}'$. Результаты параграфов 2/b-c-d дают описание этого класса двухполюсных графов; неразобранным остается только внутренняя структура мостов.

Теорема 5. *Разобьем множество ребер (параллельно и последовательно) неприводимого графа $\mathfrak{G}$ в два непересекающихся непустых подмножества $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Тогда в $\mathfrak{G}$ существует цепь, содержащая ребра из обоих подмножеств.*

ÜBER ZWEIPOLIGE ELEKTRISCHE NETZE, II.

von

A. ÁDÁM

Auszug

Die Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit einer Klasse derjenigen zweipoligen Graphen, die für die Reihen- und Parallelschaltung irreduzibel sind. Die betrachtete Klasse kann folgenderweise charakterisiert werden: es gibt eine Bahn für jede nicht doppelte Kante k des Graphen $\mathfrak{G}$, die k durchläuft, und keine doppelte Kante enthält. Diese Voraussetzung versichert, dass die nicht doppelten Kanten von $\mathfrak{G}$ einen zweipoligen Graphen $\mathfrak{G}'$ bilden. Wir sondern die doppelten Kanten in Klassen (die »Brücken« genannt werden) aus; ihre Klassifikation kann wie die transitive Ausdehnung der folgenden Relation eingeführt werden: für zwei (doppelte) Kanten gilt die Relation, wenn sie einen solchen gemeinsamen Endpunkt haben, der kein Punkt von $\mathfrak{G}'$ ist. Die Resultaten der Paragraphen 2/b-c-d geben eine Beschreibung dieser Klasse der zweipoligen Graphen, nur die innere Struktur der Brücken bleibt ein unerforschtes Problem.

Satz 5. *Werden die Kanten des (durch die Reihen- und Parallelschaltung) irreduziblen Graphen $\mathfrak{G}$ in zwei fremde, nicht leere Teilmengen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zerteilt, dann hat $\mathfrak{G}$ eine Bahn, die mindestens eine Kante von $\varkappa_1$ und mindesten eine Kante von $\varkappa_2$ enthält.*

MEGJEGYZÉS
ÁDÁM ANDRÁS „KÉTPÓLUSÚ ELEKTROMOS HÁLÓZATOKRÓL, II." CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ[1]

POLLÁK GYÖRGY

ÁDÁM ANDRÁS a címben említett dolgozatában a kétpólusú gráfoknak hét típusát különbözteti meg a bennük szereplő élek típusai szerint. A hét osztály közül háromról kimutatja, hogy üres, három típusra példát ad, a hetedikre vonatkozólag a problémát nem dönti el. Az alábbi tétel lényegében azt mondja ki, hogy az említett hét osztály közül az I., II., III. és az V. üresek. A továbbiakban gráf alatt kétpólusú gráfot fogunk érteni. A kettős él, a pálya, valamint a soros és párhuzamos irreducibilitás fogalmát illetően lásd az [1] dolgozatot.

Tétel. *Legalább két élt tartalmazó, sorosan és párhuzamosan irreducibilis gráf minden élén megy át kettős élt tartalmazó pálya.*

Bizonyítás. A bizonyításban előforduló fogalmak, mint pl. a belső csillag, megkerülhető csillag, irreducibilis gráf, vezérlő (vagy külső) séma stb. definícióját az olvasó megtalálhatja TRACHTENBROT [3] dolgozatában. (E dolgozatban [3] terminológiáját követjük, „irreducibilis gráf" tehát nem sorosan és párhuzamosan irreducibilis gráfot jelent, mint [1]-ben és [2]-ben!) A [3] dolgozatnak a következő két tételére fogunk támaszkodni:

Irreducibilis gráf minden belső csillaga megkerülhető.

Sorosan és párhuzamosan irreducibilis gráf vezérlő sémája irreducibilis.

Hivatkozni fogunk még arra a ([3]-ban nem tételként bár, de kimondott) állításra, hogy egy megkerülhető csillag bármely két élén megy át közös pálya.

A tételt először irreducibilis gráfokra bizonyítjuk. Legyen e egy olyan irreducibilis gráf éle, amely teljesíti a tételben szereplő feltételeket. Akkor e-nek legalább egyik végpontja, pl. A, belső pontja a gráfnak, és A-ból legalább három él indul ki, pl. $e_1 = e$, e_2, e_3. Minthogy az A-hoz tartozó csillag megkerülhető, azért e_1, e_2 és e_3 közül bármely kettőhöz van olyan pálya, amely ezt a két élt tartalmazza. Ebből következik, hogy a három él közül legalább az egyik kettős. Ha ugyanis e_i és e_j ($i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$) nem kettős élek, és az őket tartalmazó pálya pl. e_i, A, e_j sorrendben halad át rajtuk, akkor az e_i-t és e_k-t, illetve e_j-t és e_k-t tartalmazó pályáknak (ahol e_k a harmadik él) e_i, A, e_k, illetve e_k, A, e_j sorrendben kell haladniuk s így az e_k él kettős. Minthogy pedig, amint már említettük, van olyan pálya, amely tartalmazza e-t és e_k-t ($k = 1$ esetén ez triviális), azért irreducibilis gráfra igaz a tétel.

---

[1] Lásd az előző dolgozatot.

Legyen most G sorosan és párhuzamosan irreducibilis, legalább két élből álló gráf a Γ irreducibilis vezérlő sémával. Ha most ε_k a Γ vezérlő séma valamely kettős éle és a_k a G gráf ε_k-nak megfelelő kétpólusú részgráfja, akkor világos, hogy a_k minden éle kettős él G-ben. Legyen továbbá e a G gráf valamely éle és tartalmazza e-t a Γ vezérlő séma ε élének megfelelő a kétpólusú részhálózat. Γ-ban van olyan pálya, amely tartalmazza ε-t és egy kettős élt, pl. ε_k-t. Ennek a pályának megfeleltethetjük G-nek egy olyan pályáját, amely tartalmazza e-t és a_k-nak bizonyos éleit. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

(Beérkezett: 1958. V. 5.)

IRODALOM

[1] ÁDÁM A.: „Kétpólusú elektromos hálózatokról, I." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 211—218.

[2] ÁDÁM A.: „Kétpólusú elektromos hálózatokról, II." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958) 67—79 (az előző dolgozat).

[3] Б. А. ТРАХТЕНБРОТ: „Синтез бесповторных схем". *Доклады Академии Наук СССР* **103** (1955) 973—976.

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ
А. ÁDÁM „О ДВУХПОЛЮСНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ, II."

GY. POLLÁK

Резюме

В статье доказывается следующая теорема (при доказательстве используются результаты из работы [3] ТРАХТЕНБРОТА):

Через всякое ребро параллельно и последовательно неприводимого двухполюсного графа, состоящего по меньшей мере из двух ребер, проходит цепь, содержащая двойное ребро.

BEMERKUNG
ZUR ARBEIT „ÜBER ZWEIPOLIGE ELEKTRISCHE NETZE, II." VON A. ÁDÁM

von

GY. POLLÁK

Auszug

Mit der Anwendung der Ergebnissen der Arbeit [3] von TRACHTENBROT wird der folgende Satz bewiesen:

Jede Kante eines zweipoligen Graphen, die mindestens zwei Kanten enthält und durch die Reihen- und Parallelschaltung irreduzibel ist, wird von einer Bahn durchlaufen, die mindestens eine doppelte Kante enthält.

EGY SZERSZÁMGEOMETRIAI PROBLÉMA MATEMATIKAI MEGOLDÁSA

IFJ. DRAHOS ISTVÁN,[1] HORNYIK LÁSZLÓ[1] és HOSSZÚ MIKLÓS[1]

Bevezetés

A szerszámkészítő feladatai közé tartozik csavartfelületet (pl. orsót, csigafúrót, ferde és nyilas fogazású homlokfogaskerekek stb.) előállító maró, illetve köszörülő szerszám készítése.[2] A maró szerszám (tárcsa vagy ujjmaró) élei forgásfelületen helyezkednek el. Az élek helyzete ezen a forgásfelületen a maró profiljának kialakítása szempontjából közömbös. Ugyancsak forgásfelület a köszörű felülete is. A szerszámprofil kialakításához elegendő, ha nem a szóban forgó szerszámot, hanem annak tengelye körüli forgásakor súrolt felületet, marófelületet, köszörülőfelületet — vagy mivel a továbbiakban e kettő között különbséget tennünk szükségtelen — a szerszám forgásfelületet adjuk meg. Ezzel nyilván egyenértékű, ha a szerszám és a munkadarab ún. érintkezési vagy megmunkálási vonalát adjuk meg, melynek forgatásával nyerjük a szerszám forgásfelületet. Hasonló módon elegendő a szerszám tengelyére illeszkedő síkkal való metszésvonal, az ún. profilgörbe megadása.

A dolgozat célja általában hengeren képzett állandó emelkedésű adott csavarfelületet érintő forgásfelület meghatározása. Az 1. §-ban általános vonalfelületre oldjuk meg a feladatot, a 2. §-ban a csavarfelületet és ujjmarót mint speciális esetet vizsgáljuk, és egy példán, a lapos csavarfelület esetén megmutatjuk a számítás részletezését is, s végül a 3. §-ban megadjuk a ferde fogazású hengeres fogaskerék készítéséhez szükséges szerszám érintkezési vonalának, illetve profilgörbéjének paraméteres egyenletét.

A probléma a DIMÁVAG-ban vetődött fel. Ferde fogaskerék marásával kapcsolatban a kérdés megoldásával foglalkozott SALÁNKY JÓZSEF, aki diplomatervében egy szerkesztésen alapuló számítást dolgozott ki [4]. Egy közelítő eljárást talált még előzőleg DR. SZENICZEI LAJOS; speciális csavarfelületek esetén foglalkozott a probléma megoldásával [3]. Ujjmaró szerkesztési eljárást lehet találni [2]-ben és [6]-ban.

---

[1] Miskolc, Nehézipari Műszaki Egyetem, Ábrázoló Geometriai, Gépgyártás Technológiai, illetve Matematikai Tanszék.

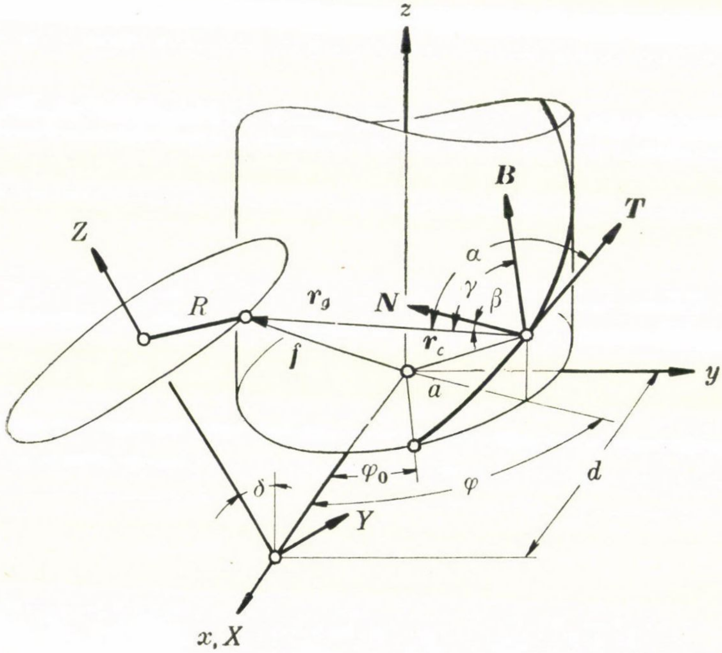
[2] Ebben a dolgozatban tisztán matematikai tárgyalásra korlátozódunk, a technikai részletek iránt érdeklődő olvasót a [2], [3], [6] alatti dolgozatokra utaljuk. Feltételezzük, hogy az olvasó tisztában van a maró és köszörülő megmunkálás lényegével, ezért ezzel nem is foglalkozunk, csupán azt emeljük ki, ami tárgyalásunk folyamán nélkülözhetetlen.

1. §. Vonalfelületet kialakító szerszám érintkezési vonala

1. Előtolással és forgatással kialakítható felületek. Vizsgáljuk meg azt a kérdést, milyen felületet lehet köszörüléssel vagy marással kialakítani, ha a hengeres munkadarabot állandó z tengelye körül állandó ω szögsebességgel forgatjuk, s egyidejűleg z irányában állandó c sebességgel előtoljuk, miközben a szerszám csupán saját tengelye körül forog. Nyilván csak olyat, mely egy a sugarú hengerre írt

$$\mathbf{r}_c = \left\{ a\cos\varphi\,;\ a\sin\varphi\,;\ \frac{c}{\omega}(\varphi-\varphi_0) \right\}, \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega t \tag{1}$$

csavarvonalon mozgatva önmagába megy át (1. ábra). Az ilyen felületet úgy származtatjuk, hogy a csavarvonal egy pontjához rögzített [1] kísérő hároméllel arányos



1. ábra.

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}_c}{d\varphi} = a\{-\sin\varphi\,;\ \cos\varphi\,;\ k\},\quad k = \frac{c}{a\,\omega}\,,$$

$$\mathbf{N} = \sqrt{1+k^3}\,\frac{d\mathbf{T}^0}{d\varphi} = a\{-\cos\varphi\,;\ -\sin\varphi\,;\ 0\}\,, \tag{2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{ka}\,\mathbf{T}\times\mathbf{N} = a\left\{ \sin\varphi\,;\ -\cos\varphi\,;\ \frac{1}{k} \right\}$$

vektorok által alkotott koordináta-rendszerben felírjuk egy

$$\mathbf{r}_g(\lambda, \varphi) = p(\lambda)\,\mathbf{T}(\varphi) + q(\lambda)\,\mathbf{N}(\varphi) + s(\lambda)\,\mathbf{B}(\varphi) \tag{3}$$

felületi görbe egyenletét, és azt a csavarvonalhoz rögzítve a z irányában c sebességgel mozgatjuk, s körülötte ω szögsebességgel forgatjuk. A görbe ekkor az

$$\mathbf{f}(\lambda, \varphi) = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_g \tag{4}$$

felületet súrolja.

Ha pl.

$$\mathbf{r}_g = \lambda\,\mathbf{N} \text{ vagy } \lambda\,\mathbf{T}, \tag{5}$$

akkor az

$$\mathbf{f}_c = a\{(1-\lambda)\cos\varphi\,;\ (1-\lambda)\sin\varphi\,;\ k(\varphi - \varphi_0)\} \tag{6}$$

lapos csavarfelületet, illetve egy ferde fogaskerék egyik fogának

$$\mathbf{f}_c = a\{\cos\varphi - \lambda\sin\varphi\,;\ \sin\varphi + \lambda\cos\varphi\,;\ k(\varphi - \varphi_0 + \lambda)\} \tag{7}$$

felületét nyerjük. Az utóbbi a $z = h$ síkokból az

$$\begin{aligned} x &= a(\cos\varphi - \lambda\sin\varphi)\,, \\ y &= a(\sin\varphi + \lambda\cos\varphi)\,,\ \lambda = \varphi_0 - \varphi_1 + \frac{h}{ka} \end{aligned} \tag{8}$$

körevolvenseket vágja ki.

2. Általános felület tengely körüli forgatása közben burkolt felület. Helyezzük el a szerszám forgástengelyét úgy, hogy az x tengely irányában d távolságra essék a z tengelytől, s vele δ szöget alkosson. Vizsgáljuk azt a kérdést, hogyan kell megválasztani a szerszám forgásfelületének profilgörbéjét, ha előírt felületet kívánunk kialakítani. E célból rögzítsünk a szerszámhoz egy koordináta-rendszert: legyen $X = x$, Z a szerszám tengelye, Y pedig velük jobb sodrású, derékszögű koordináta-rendszert alkotó tengely (1. ábra). Az X, Y, Z rendszerben pl. a csavarfelület egyenlete:

$$\begin{aligned} X_f &= x - d\,, \\ Y_f &= y\cos\delta + z\sin\delta\,,\quad \mathbf{f} = \{x\,;\ y\,;\ z\} = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_g\,, \\ Z_f &= -\,y\sin\delta + z\cos\delta\,. \end{aligned} \tag{9}$$

A maróhoz rögzített koordináta-rendszerben szemlélve a megmunkálás során fellépő mozgásokat, a csavarfelület az előtolás és z körüli forgatás alkalmával önmagába megy át, tehát úgy viselkedik, mintha mozdulatlan volna. A szerszám forgása e koordináta-rendszerben a csavarfelület Z körüli forgásában nyilvánul meg. Válasszunk ki f-en egy rögzített φ-hez tartozó $\mathbf{f}_0 = \mathbf{r}_c(\varphi) + \mathbf{r}_g(\lambda, \varphi)$ görbét, kiküszöbölve a paramétert:

$$\begin{aligned} &X = X_f(\lambda, \varphi)\,,\quad Y = Y_f(\lambda, \varphi)\,,\quad Z = Z_f(\lambda, \varphi)\,, \\ &X = F(Z, \varphi)\,,\quad Y = G(Z, \varphi)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Ezt Z körül forgatva, az

$$X^2 + Y^2 = F^2 + G^2 = R^2 \tag{11}$$

forgásfelületet nyerjük, mely azt fejezi ki, hogy forgás közben a Z-től való R távolság változatlan. Nyilván ez érvényes csavarfelületnél általánosabb felület esetén is. Különböző paraméterekhez tartozó $\boldsymbol{r}_c$-ket és $\boldsymbol{r}_g$-ket tekintve forgásfelületek egyparaméteres seregét nyerjük, melynek burkoló felülete éppen a szerszám felülete. A burkoló felületet az

$$X^2 + Y^2 = R^2 = \varrho\,, \quad \frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} = 0 \tag{12}$$

egyenletrendszer szolgáltatja, amely más szóval azt fejezi ki, hogy egy rögzített $Z = Z_0$ síkmetszeten a Z-hez legközelebb eső, tehát φ függvényeként szélsőértéket szolgáltató $\boldsymbol{r}_g$ pontja írja le Z körüli forgása közben a szerszám $Z = Z_0$ magasságú körmetszetét.

Tehát végeredményben, feltéve, hogy létezik egyáltalán a kívánt tulajdonságú szerszám, mikor is az R^2 függvénynek a kialakítandó részhez tartozó szakaszon van szélsőértéke,[3] és az ott éppen abszolút minimum, a szerszám profilgörbéjének paraméteres egyenlete:

$$X = R(\Phi, \varphi)\,, \quad Z = \Phi(\varphi)\,, \tag{13}$$

ahol $Z = \Phi(\varphi)$ az

$$F\frac{\partial F}{\partial\varphi} + G\frac{\partial G}{\partial\varphi} = 0 \tag{14}$$

egyenlet megoldása, és $R^2 = F^2 + G^2$, miközben F, G az (1), (3), (4) alatt megadott felület X, Y, Z rendszerbeli (9), (10) alatt értelmezett egyenlete.

(10) figyelembevételével rögtön felírhatjuk az érintkezési vonal

$$Z = \Phi(\varphi)\,, \quad X = F(\Phi, \varphi)\,, \quad Y = G(\Phi, \varphi) \tag{15}$$

egyenletét is, melyen a szerszám és a felület érintkezik. (15) nyilván kielégíti a (10_2) felület egyenletét és a szerszám forgásfelület egyenletét is, hiszen a (13) profilgörbe a (15) érintkezési vonal Z körüli forgatásával származtatható oly módon, hogy a forgásfelület X, Z síkmetszetét tekintjük, ami éppen (13). Az érintkezési vonal mutatja meg, hogy a csavarfelület mekkora részét lehet egy adott marótengely elhelyezéssel megmunkálni.

[3] (12_2) a lokális szélsőérték létezésének csak szükséges feltétele. Elégséges feltétel (12_2) és pl. $\partial^2\varrho/\partial\varphi^2 \neq 0$ fennállása. A lokális minimum létezése természetesen még nem biztosítja abszolút minimum létezését, vagyis előfordulhat, hogy a maró lokálisan jól alakítja ki a kívánt felületet, másutt viszont elrongálja; így nincs is minden felület és marótengely elhelyezés esetén megoldása a feladatnak. A gyakorlatban előforduló véges felületdarabok megmunkálásának lehetőségét ezen szempontok figyelembevételével kell eldönteni esetenként, alkalmasan megválasztva a marótengely helyzetét. (Lásd pl. a 3. § végén az 1. megjegyzést.)

3. Specializálás vonalfelületre. Írjuk fel pl. egy

$$X_f = x_0(\varphi) + \lambda\, x_1(\varphi)\,,$$
$$(16)\qquad Y_f = y_0(\varphi) + \lambda\, y_1(\varphi)\,,$$
$$Z_f = z_0(\varphi) + \lambda\, z_1(\varphi)$$

vonalfelület esetén a (13) megoldást.

Most a (10_2)-ben szereplő függvények:

$$(17)\qquad \begin{aligned} F(Z,\varphi) &= \frac{Zx_1}{z_1} + x_0 - \frac{z_0x_1}{z_1} = ZA_1 + B_1\,,\\ G(Z,\varphi) &= \frac{Zy_1}{z_1} + y_0 - \frac{z_0y_1}{z_1} = ZA_2 + B_2\,,\end{aligned}$$

tehát (14) a következő másodfokú egyenletre vezet:

$$(18)\qquad (ZA_1 + B_1)(Z\dot{A}_1 + \dot{B}_1) + (ZA_2 + B_2)(Z\dot{A}_2 + \dot{B}_2) = 0\,,$$

melyből $(-z_1^3)$-nal való szorzás után

$$(19)\qquad UZ^2 + VZ + W = 0\,,$$

ahol

$$U = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix}\,,$$

$$(20)\qquad V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dot{y}_0 & \dot{y}_1 \\ -y_1 & x_1 & \dot{x}_0 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & \dot{z}_0 & \dot{z}_1 \\ 0 & 0 & z_0 & z_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix}\,,$$

$$W = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & \dot{y}_0 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & \dot{x}_0 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & \dot{z}_0 & \dot{z}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 & -z_1 \end{vmatrix}\,.$$

Erről egyszerű számolással meggyőződhetünk, ha pl. az utolsó determinánst az első két oszlop szerint kifejtjük LAPLACE tételének felhasználásával [5], s figyelembe vesszük, hogy

$$z_1 B_1 z_1^2 \dot{B}_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ z_0 & z_1 \end{vmatrix} \left(z_1 \begin{vmatrix} \dot{x}_0 & x_1 \\ \dot{z}_0 & z_1 \end{vmatrix} - z_0 \begin{vmatrix} \dot{x}_1 & x_1 \\ \dot{z}_1 & z_1 \end{vmatrix} \right)$$

stb. Tehát most a (13) megoldás (19)-ből:

$$(21)\qquad \begin{aligned} x &= \sqrt{F^2 + G^2}\,, \\ Z &= \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U}\,, \end{aligned}$$

ahol F, G a (17) alatt van megadva, U, V, W a (20) alatti, míg x_i, y_i z_i a (16) vonalfelület egyenletében szereplő függvények.

(21_2)-ben a négyzetgyököt olyan előjellel kell venni, amely $\varrho(Z, \varphi)$-re minimumot ad, vagyis amelyikre fennáll

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \varphi^2} > 0\,.$$

(21) helyett sok esetben hasznosabb a (21)-et különben következményként tartalmazó

$$(22)\qquad \begin{aligned} Z &= \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U} = \Phi(\varphi)\,, \\ X &= F(\Phi, \varphi) = \frac{\Phi x_1}{z_1} + x_0 - \frac{z_0 x_1}{z_1}\,, \\ Y &= G(\Phi, \varphi) = \frac{\Phi y_1}{z_1} + y_0 - \frac{z_0 y_1}{z_1} \end{aligned}$$

érintkezési vonal egyenlete, melyen a megmunkálás történik, s melynek Z körüli forgatása adja a szerszám forgásfelületet, s e forgásfelület X, Z, síkmetszete éppen a (21) alatti profilgörbe.

2. §. A számítás menete csavarfelület, illetve ujjmaró esetén

1. A képletekben szereplő kifejezések felírása csavarfelület és speciálisan lapos csavarfelület esetén. Legyen speciálisan $\boldsymbol{r}_g$ egy egyenes, amely illeszkedik a csavarvonalra, és $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$-vel állandó α, β, illetve γ szöget zár be (1. ábra):

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{r}_g = \lambda p \boldsymbol{T} + \lambda q \boldsymbol{N} + \lambda s \boldsymbol{B}\,, \\ &p = \cos\alpha\,, \quad q = \cos\beta\,, \quad s = \cos\gamma\,, \end{aligned}$$

akkor a (9) felület:

$$(24)\qquad \begin{aligned} X_f &= a\cos\varphi - d + \lambda a\,[-(p-s)\sin\varphi - q\cos\varphi]\,, \\ Y_f &= a\sin\varphi\cos\delta + ak(\varphi - \varphi_0)\sin\delta + \\ &\quad + \lambda a\left\{[(p-s)\cos\varphi - q\sin\varphi]\cos\delta + \left(pk + \frac{s}{k}\right)\sin\delta\right\}, \\ Z_f &= -a\sin\varphi\sin\delta + ak(\varphi - \varphi_0)\cos\delta + \\ &\quad + \lambda a\left\{[-(p-s)\cos\varphi + q\sin\varphi]\sin\delta + \left(pk + \frac{s}{k}\right)\cos\delta\right\}, \end{aligned}$$

tehát a (16) vonalfelületet jellemző függvények:

$$(25)\qquad \begin{aligned} x_0 &= a\cos\varphi - d\,,\\ x_1 &= -ac_1\cos(\varphi-\varepsilon)\,,\\ y_0 &= a[\cos\delta\sin\varphi + k(\varphi-\varphi_0)\sin\delta]\,,\\ y_1 &= a[-c_1\cos\delta\sin(\varphi-\varepsilon) + c_2\sin\delta]\,,\\ z_0 &= a[-\sin\delta\sin\varphi + k(\varphi-\varphi_0)\cos\delta]\,,\\ z_1 &= a[c_1\sin\delta\sin(\varphi-\varepsilon) + c_2\cos\delta]\,, \end{aligned}$$

ahol

$$(26)\qquad c_1=\sqrt{1-2ps}\,,\quad c_2 = pk+\frac{s}{k},\quad \cos\varepsilon=\frac{a}{c_1}\,.$$

Ha pl. speciálisan lapos csavarfelületet kívánunk kialakítani, akkor

$$(27)\qquad p=s=0,\quad q=1\,,$$

tehát

$$(28)\qquad c_1=1,\quad c_2=0,\quad \cos\varepsilon=1,\quad \varepsilon=0\,.$$

Így kapjuk, hogy

$$(29)\qquad \begin{aligned} x_0 &= a\cos\varphi - d\,,\\ x_1 &= -a\cos\varphi\,,\\ y_0 &= a[\cos\delta\sin\varphi + k(\varphi-\varphi_0)\sin\delta]\,,\\ y_1 &= -a\cos\delta\sin\varphi\,,\\ z_0 &= -a[\sin\delta\sin\varphi + k(\varphi-\varphi_0)\cos\delta]\,,\\ z_1 &= a\sin\delta\sin\varphi\,, \end{aligned}$$

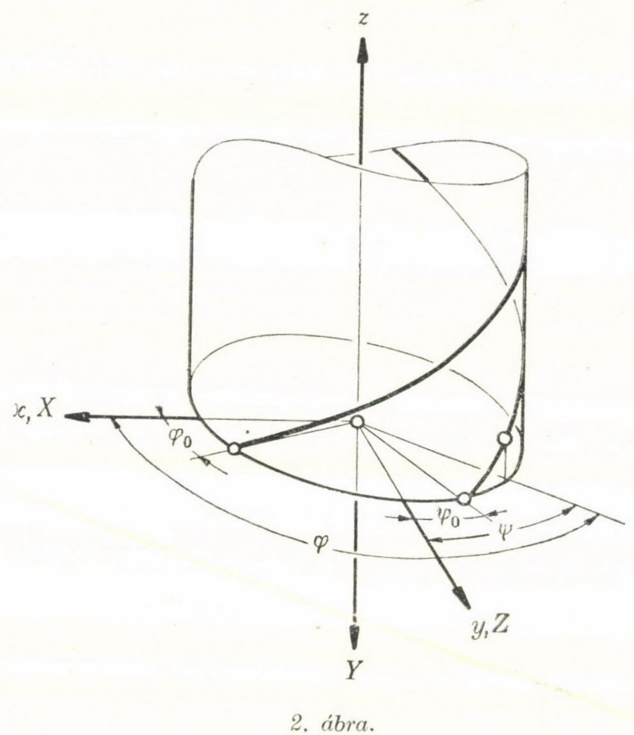
és

$$(30)\qquad \begin{aligned} \dot x_0 &= -a\sin\varphi\,,\\ \dot x_1 &= a\sin\varphi\,,\\ \dot y_0 &= a[\cos\delta\cos\varphi + k\sin\delta]\,,\\ \dot y_1 &= -a\cos\delta\cos\varphi\\ \dot z_0 &= a[-\sin\delta\cos\varphi + k\cos\delta]\,,\\ \dot z_1 &= a\sin\delta\cos\varphi \end{aligned}$$

stb.

2. Speciálizálás ujjmaróra. Lapos csavarfelületet kialakító ujjmaró profilgörbéjének paraméteres egyenlete. Az ujjmarót (2. ábra) úgy tárgyalhatjuk, mint a tárcsamaró speciális esetét, midőn

$$(31)\qquad d=0,\quad \delta=-\frac{\pi}{2},\quad \varphi_0=\frac{\pi}{2}+\psi_0,\quad \varphi=\psi+\frac{\pi}{2}\,.$$



2. ábra.

Ekkor a lapos csavar esetén a (29)—(30) alatti képleteink a következő módon alakulnak:

$$
(32) \quad \begin{aligned}
x_0 &= -a \sin \psi \\
x_1 &= a \sin \psi \\
y_0 &= ak(\psi - \psi_0) \\
y_1 &= 0 \\
z_0 &= a \cos \psi \\
z_1 &= -a \cos \psi
\end{aligned}
$$

tehát (17) szerint

$$
(33) \quad \begin{aligned}
F &= -Z \operatorname{tg} \psi \,, \\
G &= -ak(\psi - \psi_0) \,,
\end{aligned}
$$

melyekkel megalkothatjuk a (12) szerinti

$$
(34) \quad \varrho(Z, \psi) = R^2 = F^2 + G^2 = (Z \operatorname{tg} \psi)^2 + a^2k^2(\psi - \psi_0)^2
$$

függvényt. Ennek szélsőértékét ez esetben egyszerűbb közvetlenül kiszámolni, s nem az általában levezetett (20) alatti determinánsok kifejtésével. Egyéb példákban természetesen általában nem kapunk ilyen egyszerű képletet, ezért a további számítást más esetben érdemesebb úgy végezni, hogy konkrét ψ számértéket helyettesítünk, s így számítjuk a profilgörbe néhány pontjának koordinátáit. Ebben az egyszerű speciális esetben azonban kényelmesebb, ha ψ értékével általában számolunk, s nem adott helyettesítési érték mellett.

A szélsőérték létezéséhez szükséges

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \psi} = 2\,Z \operatorname{tg}\psi \frac{Z}{\cos\psi} + 2\,a^2k^2(\psi - \psi_0) = 0 \tag{35}$$

fennállása, melyből Z meghatározására a

$$Z^2 + (\psi - \psi_0)\,a^2k^2 \cos^2\psi \operatorname{cotg}\psi = 0 \tag{36}$$

egyenletet nyerjük, vagyis egyszerű számolás után a profilgörbe paraméteres egyenlete az R, Z koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} Z &= ak\cos\psi\sqrt{(\psi_0 - \psi)\operatorname{ctg}\psi}\;, \\ R &= ak\sqrt{(\psi_0 - \psi)(\psi_0 - \psi + \sin\psi\cos\psi)}\;. \end{aligned} \tag{37}$$

A (37) képletből leolvasható, hogy más hengersugarat választva, az alkalmas felület kialakító szerszám profilgörbéje a Z, R koordináta-rendszerben arányosan változik.

3. §. Ferde fogazású hengeres fogaskerék szerszámprofilja

Mint (5), (7) alatt említettük, az $\boldsymbol{r}_g = \lambda\boldsymbol{T}$ választással nyerjük a ferde fogazású fogaskerék felületet, azaz ez esetben

$$p = 1\;,\; q = s = 0\;, \tag{38}$$

tehát (26) szerint

$$c_1 = 1,\; c_2 = k,\; \varepsilon = \pi/2\;, \tag{39}$$

s következőleg (25)-ből kifolyólag

$$\begin{aligned} x_0 &= a\cos\varphi - d\,, & \dot{x}_0 &= -\,a\sin\varphi\,, \\ x_1 &= -\,a\sin\varphi\,, & \dot{x}_1 &= -\,a\cos\varphi\,, \\ y_0 &= a\,[\cos\delta\sin\varphi + k(\varphi - \varphi_0)\sin\delta]\,, & \dot{y}_0 &= a(\cos\delta\cos\varphi + k\sin\delta)\,, \\ y_1 &= a\,(\cos\delta\cos\varphi + k\sin\delta)\,, & \dot{y}_1 &= -\,a\cos\delta\sin\varphi\,, \\ z_0 &= a\,[-\sin\delta\sin\varphi + k(\varphi - \varphi_0)\cos\delta]\,, & \dot{z}_0 &= a(-\sin\delta\cos\varphi + k\cos\delta)\,, \\ z_1 &= a\,(-\sin\delta\cos\varphi + k\cos\delta)\,, & \dot{z}_1 &= a\sin\delta\sin\varphi\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Megfigyelhetjük itt az

$$\dot{x}_0 = x_1\,,\quad \dot{y}_0 = y_1\,,\quad \dot{z}_0 = z_1 \tag{41}$$

összefüggéseket, melyek, mint látni fogjuk, döntő jelentőségűek, és nagymértékben jellemzik is a ferde fogazású fogfelületeket.[4] A (41) felhasználásával igen egyszerűen számítható a (20) alatti V, W:

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_1 & x_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & z_1 & \dot{z}_1 \\ 0 & 0 & z_0 & z_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & y_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix} = -z_0 U - \Delta\,,$$

$$W = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & z_1 & \dot{z}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 & -z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & 0 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & 0 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & 0 & \dot{z}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 & -z_1 \end{vmatrix} = z_0 \Delta\,, \tag{42}$$

tehát a (21) megoldásban szereplő diszkrimináns:

$$V^2 - 4UW = z_0^2 U^2 + 2 z_0 U\Delta + \Delta^2 - 4 z_0 U\Delta = (z_0 U - \Delta)^2 = (z_1 D)^2\,, \tag{43}$$

ahol

$$D = \begin{vmatrix} x_0 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix}. \tag{44}$$

Ugyanis az első sor szerint kifejtve a Δ-t értelmező (42) alatti determinánst,

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix} = z_0 U - z_1 D\,. \tag{45}$$

Ennek felhasználásával a (21_2) megoldás:

$$Z = \frac{z_0 U + \Delta \pm (z_0 U - \Delta)}{2U} = \begin{cases} z_0\,, \\ z_0 - \dfrac{D}{U} z_1\,. \end{cases} \tag{46}$$

---

[4] Olyannyira, hogy (41)-ből már következik is $\varepsilon = \pi/2$, továbbá $q = s = 0$, vagy $p = q = 0$ $s = k^2$.

Érdemes felírni (22) alapján az érintkezési vonal egyenletét, melyen a szerszám és a csavarfelület érintkezik. A (46) alapján számítottak szerint ez

$$Z = z_0 + \lambda z_1 , \quad X = x_0 + \lambda x_1 , \quad Y = y_0 + \lambda y_1 , \tag{47}$$

ahol[5]

$$\lambda = \lambda(\varphi) = -\frac{D}{U} , \quad \text{vagy } 0 . \tag{48}$$

(20) és (44) alapján könnyen ki tudjuk számítani λ-t, ha figyelembe vesszük (40)-et:

$$\lambda(\varphi) = \frac{1}{1+k^2}\left[(1 + k\, d/a \operatorname{ctg}\delta)\operatorname{ctg}\varphi - k^2(\varphi-\varphi_0) - \frac{d/a + k\operatorname{ctg}\delta}{\sin\varphi}\right] . \tag{49}$$

A (21) szerint rögtön képezhetjük a szerszám profilgörbéjének paraméteres egyenletét is:

$$Z = z_0 + \lambda z_1 , \quad R = \sqrt{(x_0 + \lambda x_1)^2 + (y_0 + \lambda y_1)^2} . \tag{50}$$

Tehát végeredményben az érintkezési vonal egyenlete (47), míg a profilgörbéé (50), ahol λ (49) alatt van megadva, és x_i, y_i, z_i a (40_1) alatti.

Az érintkezési vonal egyenletét vektorosan összefoglalva röviden így írhatjuk:

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = \{X, Y, Z\} = \mathbf{C}\boldsymbol{f}_e - \{d\,; 0\,; 0\} , \tag{51}$$

ahol

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & \sin\delta \\ 0 & -\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \tag{52}$$

a δ szöggel való forgatás mátrixa, míg (9_2) és (5_2) szerint (7)-hez hasonlóan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_e &= \boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}_g = \boldsymbol{r}_0 + \lambda \boldsymbol{T} = \\ &= a\{\cos\varphi - \lambda\sin\varphi\,; \sin\varphi + \lambda\cos\varphi\,; k(\varphi - \varphi_0 + \lambda)\} , \end{aligned} \tag{53}$$

és itt λ a (49) alatti érték.

Ha a szerszámhoz rögzített koordináta-rendszerről visszatérünk a csavarfelülethez rögzített x, y, z rendszerre, akkor látjuk, hogy az érintkezési vonal egyenlete maga az (53) alatti $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_e$, ahol λ a (49) alatt megadott függvénye φ-nek.

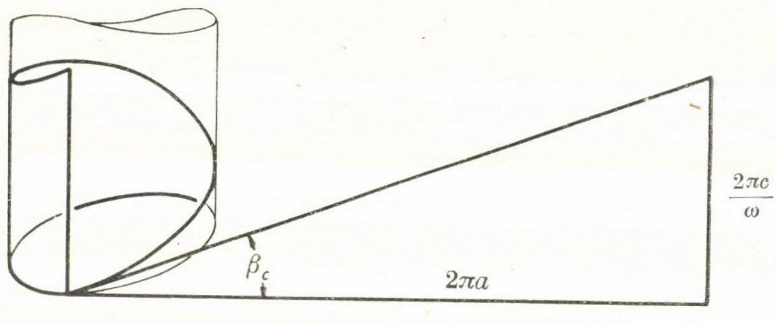
[5] $\lambda = 0$ nem jöhet számításba, mert akkor (47) a csavarvonal egyenletévé fajul.

Megjegyzések

1. A (49) alatt kiszámított λ különösen könnyen számítható, ha δ-t úgy választjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\delta = k = \operatorname{tg}\beta_c \tag{54}$$

legyen. Minthogy (2) szerint $k = c/(a\omega)$ a csavarvonal β_c emelkedési szögének tangense (3. ábra), ez akkor fog bekövetkezni, ha δ-t a csavarvonal emelkedési szögével egyenlőnek választjuk. Ekkor (49) így alakul:



3. ábra.

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi) &= \cos^2\beta_c\,[(1 + d/a)\,(\operatorname{ctg}\varphi - 1/\sin\varphi) - (\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg}^2\beta_c] = \\ &= \cos^2\beta_c\,[(1 + d/a)\,(\cos\varphi - 1)/\sin\varphi - (\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg}^2\beta_c] = \\ &= -\cos^2\beta_c\left[(1 + d/a)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + (\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg}^2\beta_c\right].\end{aligned} \tag{55}$$

Ez még tovább egyszerűsödik, ha a következőt irjuk:

$$1 + \frac{d}{a} = \gamma_c \operatorname{tg}^2\beta_c\,. \tag{56}$$

Ekkor

$$\lambda(\varphi) = -\sin^2\beta_c\left(\gamma_c\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \varphi - \varphi_0\right). \tag{57}$$

Az (57) képlet azt mutatja, hogy a $\gamma_c = \pm 2$ esetben számíthatunk legegyszerűbb képletekre, vagyis (56) szerint akkor, ha

$$d = -a\,(1 \pm 2\operatorname{tg}^2\beta_c)\,. \tag{58}$$

Ez természetesen technikailag nem minden β esetén valósítható meg

2. Hasonlóan igen egyszerűsödik a képlet ujjmaró esetén, midőn $d = 0, \delta = -\pi/2, \varphi_0 = \psi_0 + \pi/2$:

$$\lambda(\varphi) = \cos^2\beta_c\left[\operatorname{ctg}\varphi - \left(\varphi - \psi_0 - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}^2\beta_c\right]. \tag{59}$$

Ekkor (47) szerint az érintkezési vonal egyenletére egyszerű számolás után a

$$Z = \frac{a}{\sin\varphi} - A\sin\beta_c\cos\varphi\,, \qquad A = a\sin\beta_c\left[\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)-\psi_0\right],$$

$$(60) \qquad X = A\sin\beta_c\sin\varphi\,,$$

$$V = -A\cos\beta_c\,, \qquad (\operatorname{inv}\alpha = \operatorname{tg}\alpha - \alpha)$$

eredmény adódik, tehát a profilgörbe egyenlete:

$$(61) \qquad Z = \frac{a}{\sin\varphi} - A\cos\tau\,, \qquad A = a\sin\beta_c\left[\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)-\psi_0\right],$$

$$R = A\sin\tau\,, \qquad \cos\tau = \sin\beta_c\cos\varphi\,.$$

A (61) képlet alapján egyszerű grafikus szerkesztési eljárást lehet adni a megoldáshoz.

A képletekből leolvasható, hogy a-val arányosan nő a maró.

(Beérkezett: 1958. II. 25.)

IRODALOM

[1] Bermant, A. F.: *Matematikai analízis.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.
[2] Ifj. Drahos I.—Hornyik L.—Hosszú M.: „Profilozó szerszámok szerkesztése". *Gép* (sajtó alatt).
[3] Грудин, А. Н.—Лихциер, М. Б.—Полоцкий, М. С.: *Зуборезный инструмент, II.* Матгиз, Москва, 1946.
[4] Salánky J.: *Diplomaterv.* Miskolc, 1957.
[5] Szele T.: *Bevezetés az algebrába.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.
[6] Szőke B.: „A fogaskerék profilmaróinak gépi előállítása". *A Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Közlönyének Havi Füzetei* 4 (1927) 124—139.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

младш. I. DRAHOS, L. HORNYIK и M. HOSSZÚ

Резюме

Рассматриваем спиральную поверхность (24), которую одна линия генерирует. Цель работы: определение профильной кривой одной дисковой фрезы, т. е. определение X, Z плоскостного разреза, который оформляет одну конечную часть (ленту (24)). Решение (21), (17), где U, V, W и x_i, y_i, z_i даны в (20), (23) — (26).

Пальцевая фреза описывается во втором параграфе, как частный случай (31). (См. фиг. 2.) В случае одной плоской спиральной поверхности т. е. при исполнении (27), (28) решение дается (37).

Третий параграф занимается дисковой фрезой косозубого зубчатого колеса. В этом случае результатом будет (50), где λ имеет форму (49), и x_i,

y_i, z_i даны в (40). δ и также a и d выбирая так как в (54), (49) вычисление λ упрощается в (57).

В завершение рассматривается частный случай пальцевой фрезы, тогда получим профильную кривую (61).

SOLUTION OF A TOOL GEOMETRICAL PROBLEM

by

JR. I. DRAHOS, L. HORNYIK and M. HOSSZÚ

Abstract

Let us consider the helicoidal surface (24) generated by a straight line (See Fig. 1.) The object of the present paper is to determine the profile curve, i. e., the X, Z plane cut of a circular cutter which mills a finite part (a band) of the surface (24). The solution is (21), (17), where U, V, W, and x_i, y_i, z_i. are given by (20), (23)—(26).

The shank cutter is treated in §2 as the special case (31). (See Fig. 2.) Then the solution is (37) for a square-treaded screw surface (right helicoid) where we have (27), (28).

§3 deals with the circular cutter of helicoid gears. Then we get (50), where λ is of the form (49) and x_i, y_i, z_i are given by (40). By choosing δ resp. a and d as in (54), the calculation (49) of λ is simplified into (57). Finally, the special case of shank cutter is examined, then we obtain the profile curve (61).

A KUBOKTAÉDER GÖMBI HÁLÓZATÁNAK EGY SZÉLSŐÉRTÉK-TULAJDONSÁGA

HEPPES ALADÁR

A gömbfelületet n főkör legfeljebb $n(n-1)+2$ részre osztja fel. Tekintsünk ugyanis $n-1$ főkört, majd írjunk a gömbre egy n-ediket. Ennek az előzőkkel legfeljebb $2(n-1)$ metszéspontja van, más szóval az első $n-1$ főkör által meghatározott tartományok közül legfeljebb $2(n-1)$-et szel ketté. Egy főkör két részre, n főkör tehát legfeljebb $2+2(1+2+\ldots+n-1)=$ $=n(n-1)+2$ részre osztja a gömböt. Látható, hogy a fenti érték pontos minden olyan esetben, ha nincs három, közös ponttal rendelkező főkör. Mondhatjuk, hogy a keletkező részek száma mindig $n(n-1)+2$, megengedve, hogy ezek között 0 területűek is előforduljanak.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ hívta fel figyelmemet annak a kérdésnek a vizsgálatára, hogy miként kell n számú főkört a gömbön úgy elhelyezni, hogy ezek a felszínt a lehető „legegyenletesebben" osszák $n(n-1)+2$ részre. Az $n=1, 2, 3$ esetekben egy főkör, két merőleges, illetve három páronként egymásra merőleges főkör egybevágó részekre való, tehát teljesen egyenletes felosztást eredményez. Általában azonban nem osztható fel a gömb felszíne $n(n-1)+2$ egyenlő területű részre. Az „egyenletesség" általánosabban érvényes definiálása természetesen többféleképp lehetséges. Talán a két legkézenfekvőbb út azt a felosztást nevezni legegyenletesebbnek, amelynél a területre nézve legkisebb rész területe a lehető legnagyobb, illetve amelynél a legnagyobb területű rész területe a lehető legkisebb. Négy főkör esetére megadjuk az előbbi értelemben legegyenletesebb felosztást, továbbá kimutatjuk, hogy az utóbbi értelemben legegyenletesebb felosztás ettől különböző

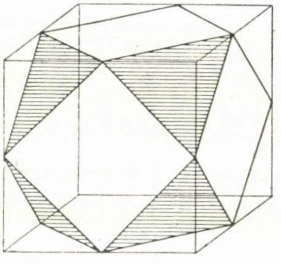
Tétel. *Egy gömbre írt 4 főkör által meghatározott 14 tartomány közül a legkisebb területű tartomány területe akkor a legnagyobb, ha a főkörök egy kuboktaéder*[1] *hálózatát alkotják.*

Bizonyítás. Legyen a vizsgált gömb egységsugarú. A legegyenletesebb felosztás keresésénél nyilván szorítkozhatunk olyan elrendezések vizsgálatára amelyeknél nincs három, közös ponttal rendelkező főkör, mert ekkor van 0 területű rész is. Minthogy bármelyik főkör által meghatározott mindkét félgömbön a másik három kör páronként metszi egymást (2. ábra), a gömb felosztása mindig ugyanolyan jellegű : mindig 8 gömbháromszög és 6 gömb-

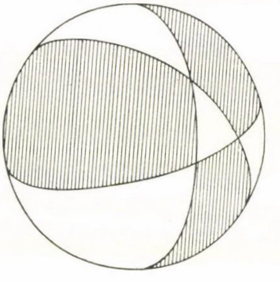
[1] A kuboktaéder a kocka (illetve az oktaéder) élközéppontjainak konvex burka (1. ábra).

négyszög keletkezik, mégpedig úgy, hogy háromszögnek csak négyszög, négyszögnek csak háromszög szomszédja van. A 8 gömbháromszög kerületösszege megegyezik tehát a 6 gömbnégyszögével s egyben a főkörök összhosszával 8π-vel.

A vizsgált feladat helyett foglalkozzunk először azzal a kérdéssel, hogy milyen elrendezés mellett lesz a legkisebb területű *gömbháromszög* területe a legnagyobb.

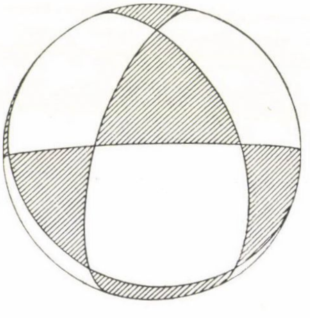


1. ábra.

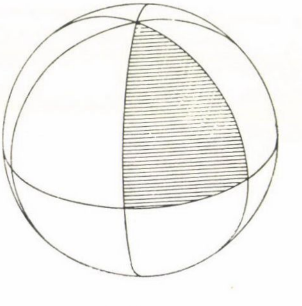


2. ábra.

A legkisebb kerületű gömbháromszög kerülete nem lehet nagyobb, mint π, azonos kerületű gömbháromszögek közül pedig a szabályosnak legnagyobb a területe, így a legkisebb területű gömbháromszög nem lehet nagyobb, mint a π kerületű szabályos. Ekkora is csak abban az esetben, ha valamennyi háromszög π kerületű szabályos gömbháromszög. Ilyen felosztás létezik is, és ezt a kuboktaéder hálózata szolgáltatja, amelyet úgy nyerünk, hogy a gömb középpontjából a gömbbe írt kuboktaéder éleit a gömbre vetítjük (3. ábra). Ennél a felosztásnál a többi tartomány (a négyszögek) területe a háromszögekénél nagyobb — hiszen azok nagyobb-kerületű, többoldalú szabályos gömbsokszögek — tehát a terület szempontjából legkisebb gömbháromszög egyben a legkisebb tartomány is, s így e felosztás a tételben szereplő problémának is megoldását szolgáltatja. Ezzel a tétel igazolást nyert.



3. ábra.



4. ábra.

A kuboktaéder gömbi hálózata az említett másik értelemben már nem a legegyenletesebben osztja fel a gömb felszínét. Van ugyanis olyan felosztás, amelynél a legnagyobb területű rész területe kisebb, mint a kuboktaéderes hálózat egy gömbnégyszögének területe. Tekintsünk ugyanis három főkört, amelyek a gömböt hat $\pi/3$ szögű kétszögre osztják s egy ezekre merőleges negyediket (4. ábra). E felosztásnál 12 egybevágó, $4\pi/3$ kerületű (és két 0 területű) gömbháromszög keletkezik. A maximális területű tartomány tehát egy $4\pi/3$ kerületű gömbháromszög, míg a kuboktaéderes hálózat esetében egy ugyanekkora kerületű, s ennélfogva valóban nagyobb területű szabályos négyszög.

(Beérkezett: 1958. VI. 3.)

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ СФЕРИЧЕСКОЙ СЕТКИ КУБОКТАЭДРА

A. HEPPES

Резюме

Рассмотрим 14 области поверхности шара определённые 4 большими кругами. Доказанная в статье теорема утверждает, что площадь области, которая имеет наименьшую площадь, в том случае является наибольшей, если большие круги образуют сетку одного кубоктаэдра. (Фиг. 1.)

Утверждение теоремы неверно, если заменить в теореме слова «наименьший» и «наибольший».

AN EXTREMAL PROPERTY OF THE SPHERICAL NET OF THE CUBOCTAHEDRON

by

A. HEPPES

Abstract

Theorem. Let us consider four great circles of a sphere dividing its surface into 14 domains. The surface of the domain having the smallest area is the greatest if the four great circles form the spherical net of a cuboctahedron. (Fig. 1.)

The statement becomes false if we invert the words "smallest" and "greatest".

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS LINEÁRIS ALGEBRAI EGYENLETRENDSZEREK EGYÉRTELMŰ MEGOLDHATÓSÁGÁVAL KAPCSOLATBAN

PETHŐ ÁRPÁD[1]

Bevezetés

A lineáris algebrai egyenletrendszerek elméletében *határozatlannak* nevezett rendszerekkel kapcsolatban felmerülhet az a kérdés, hogy — habár az ismeretlenek *együttesére* nézve egyértelmű megoldásról nem lehet szó — *egyes* ismeretlenekre az egyenletrendszer nem oldható-e fel egyértelműen. Mivel az ismert unicitási kritériumok ezt a kérdést nem érintik, az alábbiakban megadjuk az idevonatkozó egzisztenciatételeket, továbbá utalunk arra, hogy a lineáris egyenletrendszerek fizikai alkalmazásaiban az egyértelműségnek ilyen értelemben való felvetése gyakran indokolt. A szerző az alábbiakban közölt eredményeire éppen egy ilyen fizikai alkalmazás kapcsán jutott [2]. Feladatként tűzte ki a problémát a *Matematikai Lapok*ban, ahol többen meg is oldották. A megoldások közül a lap EGERVÁRY JENŐét közölte [3]. A szerző eredeti megoldása ettől különbözik.

1. §.

Lineáris algebrai egyenletrendszerek egyértelmű megoldhatóságával kapcsolatban bebizonyítjuk a következőt:

Tétel. *Az*

$$(1)\qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ . & . & & . & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & a_{m,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}\,,$$

röviden

$$\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n+1}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

egyenletrendszer x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ismeretlenjét akkor és csak akkor határozza meg egyértelműen, ha

1. A rendszer kompatibilis (nem tartalmaz ellenmondó egyenleteket), azaz az inhomogén és a homogén egyenletrendszer mátrixának rangja egyenlő:

$$(2)\qquad \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n+1}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n})\,;$$

[1] Budapesti Műszaki Egyetem, Fizikai-Kémiai Tanszék.

2. *A homogén egyenletrendszer mátrixának rangja 1-gyel nagyobb annak a mátrixnak a rangjánál, mely az előbbiből a k-adik oszlop elhagyásával keletkezik:*

$$(3) \qquad \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n}) + 1 .$$

Bizonyítás. A kritérium első pontja triviális, így csak a második pontot bizonyítjuk. Elegendő azonban a homogén esetre szorítkoznunk, mivel az inhomogén egyenletrendszer általános megoldása ennek egy partikuláris megoldásából és a homogén egyenletrendszer általános megoldásából tevődik össze, így a homogén és inhomogén rendszer egyidejűleg határozza meg egy valamely ismeretlen (x_k) értékét egyértelműen. Tehát bizonyítjuk, hogy a második pontban megadott kritérium a homogén egyenletrendszerre vonatkozólag érvényes.

A következő segédtételre van szükségünk: ha a homogén rendszer x_k-t egyértelműen határozza meg, akkor x_k zérussal egyenlő. Valóban: a homogén rendszer (mindig létező) triviális megoldásában x_k bizonyosan zérus, így az általános megoldásban is csak zérus lehet.

A homogén egyenletrendszer megoldása ekvivalens a $\boldsymbol{0}$ vektornak az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ oszlopvektorok lineáris kombinációjaként való előállításával. Minthogy a lineárisan független oszlopvektorok száma egyenlő az oszlopvektorok mátrixának rangszámával, a bizonyítandó rangkritérium ekvivalens azzal, hogy az $\boldsymbol{a}_k$ oszlopvektor akkor és csak akkor nincs a többiek terében, ha x_k egyértelmű. Valóban: ha $\boldsymbol{a}_k$ nincs a többiek terében, $x_k = 0$ egyértelműen (különben előállítható lenne a többiek lineáris kombinációjaként); másrészt, ha x_k egyértelmű, akkor a segédtétel szerint egyértelműen $x_k = 0$, tehát $\boldsymbol{a}_k$ nem lehet a többiek terében. Q. e. d.

Megjegyzés. Az egyértelmű megoldhatóság eldöntése lehetséges a homogén rendszer együtthatómátrixának bázisfaktorokra bontása alapján is. EGERVÁRY JENŐ egyik dolgozatában [1] az együtthatómátrixnak bázisfaktorokra való bontásán alapuló eljárást ad meg tetszőleges együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer általános megoldásának explicit előállítására. Eszerint, *ha*

$$\mathbf{A}_n^m = \mathbf{U}_r^m \mathbf{V}_n^{r*}$$

$$\left(\varrho(\mathbf{A}_n^m) = \varrho(\mathbf{U}_r^m) = \varrho(\mathbf{V}_n^{r*}) = r\right)$$

az együtthatómátrix ún. bázistényezőkre bontott alakja, akkor az

$$(1') \qquad \mathbf{A}_n^m \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

inhomogén egyenletrendszer kompatibilis, hacsak

$$(2') \qquad \mathbf{AV}(\mathbf{U}^*\mathbf{AV})^{-1}\mathbf{U}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} ,$$

és általános megoldása:

$$3') \qquad \boldsymbol{x} = \{\mathbf{E} - \mathbf{V}(\mathbf{U}^*\mathbf{AV})^{-1}\mathbf{U}^*\mathbf{A}\}\boldsymbol{t} + \mathbf{V}(\mathbf{U}^*\mathbf{AV})^{-1}\mathbf{U}^*\boldsymbol{b} ,$$

ahol $\boldsymbol{t}$ *tetszőleges elemű paramétervektor.*

(3′)-ből rögtön kiolvasható, hogy az x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) ismeretlenre (2′) teljesülése esetén akkor és csak akkor egyértelmű (1′) megoldása, ha a $\{\ldots\}$ mátrix k-adik sora csupa 0-ból áll, ha tehát

$$\mathbf{A}_m^{n(-1)} \equiv \mathbf{V}(\mathbf{U}^*\mathbf{AV})^{-1}\mathbf{U}^* = [a_{ij}^{(-1)}]$$

ún. általánosított inverz k-adik sorvektora és az

$$\mathbf{A}_n^m = [a_{ij}]$$

együtthatómátrix oszlopvektorai között fennállnak a következő relációk:

$$[a_{k1}^{(-1)}, a_{k2}^{(-1)}, \dots, a_{km}^{(-1)}] \begin{bmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{ml} \end{bmatrix} = \delta_{kl} \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

2. §.

Az alábbiakban a lineáris algebrai egyenletrendszerek néhány oly alkalmazását mutatjuk meg, amelyekben az ismeretlenekre adódó megoldások általában nem lesznek egyértelműek.

1. A merev testek sztatikájában fellépő probléma: adott erőnek adott irányú összetevőkre való bontása, lineáris egyenletrendszer megoldására vezet. Tárgyaljuk mindjárt az általános esetet: az $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ pontban hat az $\boldsymbol{e}_0(u_0, v_0, w_0)$ irányú $\boldsymbol{F}_0$ erő, mely felbontandó az $\boldsymbol{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ pontokban ható $\boldsymbol{e}_i(u_i, v_i, w_i)$ irányú $\boldsymbol{F}_i$ komponensekre ($\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_i$ egységvektorok, $i = 1,2,\dots,n$). A mechanikából ismeretes, hogy az $\boldsymbol{F}_0$ erő az $\boldsymbol{F}_i$ erőrendszerrel akkor és csak akkor ekvivalens, ha egyidejűleg

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

és

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i .$$

Bevezetve a

$$D_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_j & y_j & z_j \\ u_j & v_j & w_j \end{vmatrix} \qquad (j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

determináns első sorához tartozó $D_j^{(11)}$, $D_j^{(12)}$, $D_j^{(13)}$ aldeterminánsokat, a következő egyenletrendszer áll fenn az $\boldsymbol{F}_i$ erők ismeretlen F_i nagyságaira ($\boldsymbol{F}_i = F_i \boldsymbol{e}_i$ és $\boldsymbol{F}_0 = F_0 \boldsymbol{e}_0$):

$$\text{(4)} \qquad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ D_1^{(11)} & D_2^{(11)} & \dots & D_n^{(11)} \\ D_1^{(12)} & D_2^{(12)} & \dots & D_n^{(12)} \\ D_1^{(13)} & D_2^{(13)} & \dots & D_n^{(13)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix} = F_0 \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ D_0^{(11)} \\ D_0^{(12)} \\ D_0^{(13)} \end{bmatrix}$$

Amennyiben az erőfelbontás egyáltalán lehetséges, (2) teljesül. Hogy az $\boldsymbol{r}_i$ pontban ható erőkomponens egyértelmű-e, (3) alapján dönthető el.

2. Kémiai reakciók termodinamikájában alapvető kérdés, hogy egy bizonyos körülmények között lefutó reakcióban valamely állapotfüggvénynek milyen megváltozása lép fel [2]. Példaként említhetjük a reakcióban az energia (illetve entalpia) megváltozását, az ún. reakcióhőt. Tekintsük különböző kémiai reakcióknak bizonyos rendszerét, amelyben nem minden reakciónak ismeretes a reakcióhője. Felvetjük a kérdést, mi a feltétele annak, hogy az ismeretlen reakcióhők kiszámíthatók legyenek. Az alábbi gondolatmenet szerint a határozatlan egyenletrendszerek problémájával állunk szemben. Jelentsenek ugyanis az egyes reakcióegyenletekben fellépő kémiai jelek (kémiai komponensenként változó) energiaértékeket, vagyis az egyes reakcióegyenleteket a továbbiakban tekintsük ne csak anyag-, hanem energiamérlegeknek is: ekkor a keletkező és reagáló anyagok energiaértékeinek különbsége, vagyis a reakcióhő egy tagot szolgáltat ebben az energiamérlegben. Most már az ismert és ismeretlen reakcióhőjű reakcióegyenleteket együttesen olyan lineáris egyenletrendszernek tekintjük, melyben az egyes energiaértékek is mint ismeretlenek szerepelnek. (Mivel az energia csak additív állandó erejéig definiált, egyértelmű megoldhatóságot csak az ismeretlen reakcióhőkre várhatunk.)

A fenti típusú kémiai egyenletrendszerek általános alakja a következő:

$$(5)\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_{l+1} \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}$$

ahol $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+l}$ az ismeretlen reakcióhőket, $q_{l+1}, q_{l+2}, \dots, q_m$ az ismerteket, $x_1, x_2, \dots, x_n$ a kémiai komponensek energiaértékeit, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ pedig az ún. sztöchiometriai számokat jelentik.

Az egyértelműségi kritériumnak (5)-re való alkalmazása egy gyakran használt kémiai-termodinamikai tételnek matematikai analízisét nyújtja ([2]).

3. Fizikai mennyiségek között fennálló ismeretlen függvénykapcsolatok megállapítására ismeretes egy tisztán formális, dimenzionális meggondolásokon nyugvó módszer: a *dimenzionál-analízis*. E módszer szerint, ha a P fizikai mennyiség és a $P_1, P_2, \dots, P_n$ fizikai mennyiségek között valamilyen $P = f(P_1, P_2, \dots, P_n)$ összefüggés áll fenn, akkor a bal- és jobboldalak dimenzióinak szükségszerű megegyezése miatt a jobboldal csak a $P_1, P_2, \dots, P_n$ mennyiségek hatványainak a baloldal dimenzióját adó szorzataiból, pontosabban ezen szorzatok lineáris kombinációjából állhat. A lehetséges f függvénykapcsolatok megállapítására tehát megkeressük a $P_1, P_2, \dots, P_n$ mennyiségek hatványainak mindazon szorzatait, amelyek P dimenzióját adják és vesszük ezen szorzatok összes (általában végtelen sok tagú) lineáris kombinációit. A valóságos függvénykapcsolat a fenti végtelen sor valamilyen speciális összegezésével adódik.

Legyenek az alapdimenziók $U_1, U_2, \ldots, U_m$ [speciálisan U_1: hosszúság (L), U_2: tömeg (M), U_3: idő (T)].

Legyen

$$P_i = U_1^{a_{1i}} U_2^{a_{2i}} \ldots U_m^{a_{mi}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

és

$$P = U_1^{b_1} U_2^{b_2} \ldots U_m^{b_m} . \tag{7}$$

Az említett szorzatkombináció a következő alakú:

$$P = P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_n^{x_n} , \tag{8}$$

ahol a kitevők ismeretlenek.

Behelyettesítve (8)-ba a (6) egyenleteket, (7)-tel való összehasonlítás mutatja, hogy az ismeretlen kitevők az alábbi egyenletrendszert elégítik ki:

$$a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \ldots + a_{jn} x_n = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{9}$$

Ha mármost ennek az egyenletrendszernek van bizonyos ismeretlenre egyértelmű megoldása, az annyit jelent, hogy P valamennyi szorzatelőállításából közös faktor emelhető ki, ami a keresett f kapcsolatnak a dimenzionálanalízis által determinált részét fogja alkotni, míg a megmaradó szorzatkombinációk lineáris kombinációja a keresett f kapcsolatnak nemdeterminált részét képezi.

Pl. súrlódásmentes és inkompresszibilis folyadék felületén kialakuló vízhullámok v fázissebességét kívánjuk meghatározni, mint a folyadék h magasságának, a g nehézségi gyorsulásnak, a λ hullámhossznak és a folyadék ϱ sűrűségének a függvényét [4].

Most $U_1 = L$, $U_2 = M$, $U_3 = T$ és

$$P = v\ (LT^{-1})$$
$$P_1 = g\ (LT^{-2})$$
$$P_2 = \varrho\ (ML^{-3})$$
$$P_3 = \lambda\ (L)$$
$$P_4 = h\ (L)$$

Keressük v-t a következő alakban:

$$v = g^{x_1} \varrho^{x_2} \lambda^{x_3} h^{x_4} .$$

A dimenziók összehasonlításából adódó (9)-nek megfelelő egyenletrendszer:

$$\begin{array}{c} (L) \\ (M) \\ (T) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

A (10) egyenletrendszer kompatibilitását fizikai okok biztosítják, megoldása az x_1 és x_2 ismeretlenekre egyértelmű, ugyanis (3) szerint:

$$\varrho\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \varrho\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 = \varrho\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 .$$

(10) megoldása:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2} - t, \quad x_4 \equiv t ,$$

tehát a keresett összefüggés a

$$\sqrt{g}\,\frac{h^t}{\lambda^{t-\frac{1}{2}}}$$

alakú kifejezések lineáris kombinációja:

$$v = \sqrt{g}\sum_t C_t \frac{h^t}{\lambda^{t-\frac{1}{2}}} ,$$

C_t: dimenziónélküli állandó, ahol az összegezés további részleteiről a dimenzionál-analízis semmit sem mond. A mechanikából ismerjük a pontos összefüggést, amely szerint

$$v = \sqrt{g}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\,\mathrm{tgh}\,\frac{2\pi h}{\lambda}\right)^{1/2} .$$

Mindenesetre a dimenzionál-analízis nyújtotta összefüggés a fázissebességének a függetlenségét ϱ-tól és az arányosságát $\sqrt{g}$-vel determinálja.

(Beérkezett: 1958. III. 31.)

IRODALOM

[1] EGERVÁRY J.: „Az inverz mátrix általánosítása". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 315—324.
[2] PETHEŐ, Á.—SCHAY, G.: „Mathematische Diskussion der Anwendung des Hess'schen Satzes". *Acta Chimica Academiae Scientiarum Hungaricae* **4** (1954) 21—35.
[3] *Matematikai Lapok* (Feladatrovat) **6** (1955) 352.
[4] DUNCAN, W. J.: *Physical similarity and dimensional analysis.* Edward Arnold Co., New York, 1953.

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ В СВЯЗИ С ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТЬЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Á. PETHŐ

Резюме

Рассматриваются не такие системы линейных алгебраических уравнений, для которых разрешимость нужно исследовать обычным образом: существует ли для каждого неизвестного системы уравнений решение, такие, для которых решения для некоторых неизвестных вообще не однозначны.

Даются критерии позволяющие установить для каких неизвестных таких, вообще неопределенных систем уравнений, всё же существует единственное решение. Доказывается следующая теорема :

Для неизвестного x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ системы уравнений

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & a_{m,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{коротко:} \quad \mathbf{A}_{1,2\ldots,n+1}\, \boldsymbol{x} = 0)$$

единственное решение существует тогда и только тогда, если

1. Система совместнима (не содержит противоречащих уравнений), т. е. ранг матрици однородной и неоднородной системы совпадает :

$$\varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n+1}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) \;;$$

2. Ранг матрици однородной системы уравнений на единицу больше ранга матрици, отличающейся от неё тем, что не содержит k-ого столбца :

$$\varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n}) + 1 \;.$$

Применение этих критериев демонстрируется на примерах, взятых из разных областей физики : по одному простому случаю рассматривается из статики твердых тел, термодинамики химических реакций и димензионального анализа.

EINIGE BEMERKUNGEN ZUR EINDEUTIGEN LÖSBARKEIT VON LINEAREN ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGSSYSTEMEN

von

Á. PETHŐ

Auszug

Lineare algebraische Gleichungssysteme werden diskutiert, in denen die Lösbarkeit nicht wie gewöhnlich zu untersuchen ist : d. h. nicht ob die eindeutige Lösung inbezug auf jede Unbekannte existiere oder nicht, sondern die Fälle, in welchen die Lösungen inbezug auf die einzelnen Unbekannten im allgemeinen nicht eindeutig sind. Wir geben die Kriterien zur Entscheidung der Frage an für welche Unbekannten derartiger unbestimmten Gleichungssysteme die eindeutige Lösung existiert. Es wird folgender Satz bewiesen : Das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & a_{m,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{kürzer:} \quad \mathbf{A}_{1,2,\ldots,n+1}\, \boldsymbol{x} = 0)$$

besitzt eine eindeutige Lösung inbezug auf die Unbekannte x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) dann und nur dann, wenn

1. Das System keine widersprechenden Gleichungen enthält, d. h. der Rang der Matrix des inhomogenen Gleichungssystems mit demselben der Matrix des homogenen Gleichungssystems übereinstimmt:

$$\varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n+1}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) \ .$$

2. Der Rang der Matrix des homogenen Gleichungssystems um eins grösser ist als der Rang derjenigen Matrix, die aus der Ursprünglichen durch Weglassen der k-ten Spalte entsteht, d. h.:

$$\varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n}) + 1 \ .$$

Die Anwendung dieser Kriterien wird an Beispielen aus verschiedenen Gebieten der Physik gezeigt: je ein einfacher Fall wird aus der Statik der starren Körper, aus der Thermodynamik chemischer Reaktionen und aus der Dimensionstheorie untersucht.

EGY EGYDIMENZIÓS VÉLETLEN TÉRKITÖLTÉSI PROBLÉMÁRÓL

RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

Néhány évvel ezelőtt J. BERNAL hívta fel a figyelmemet a következő problémára, amelynek megoldása a folyadékok kinetikus elmélete szempontjából bírna jelentőséggel:

Az origó körüli R sugarú gömbben (ahol R nagy szám) találomra elhelyezünk N számú egységnyi sugarú gömböt (amelyeket tömörnek tekintünk, tehát egymásba nem hatolhatnak), oly módon, hogy az első gömb középpontja egyenletes eloszlású az origó körüli $R - 1$ sugarú gömbben, és általában, miután már k gömböt elhelyeztünk ($k = 1, 2, \ldots, N - 1$), a $(k + 1)$-edik gömb középpontját oly módon helyezzük el véletlenszerűen, hogy az egyenletes eloszlású azon pontok halmazában, amelyek köré egy egységnyi sugarú gömböt helyezve annak nincs közös pontja a már elhelyezett k gömb egyikével sem.

A feladat az így létrejövő véletlen gömbelhelyezkedés statisztikai jellemzése, például a gömbök közti távolságok eloszlásának kiszámítása stb.

Nemrégiben W. SCHMETTERER egy az említett problémával rokon problémát említett meg. Ez a BERNAL-féle problémától csak abban különbözik, hogy a gömbök számát nem rögzítjük le előre, hanem addig folytatjuk a gömbök elhelyezését a megadott eljárással, amíg ez egyáltalán lehetséges, vagyis amíg az R-sugarú gömb telítve lesz az egységsugarú gömbökkel úgy, hogy több már nem is fér el. Ez esetben a kérdés az, hogy ily módon átlagban az R-sugarú gömb hányadrészét fogják a belehelyezett egységsugarú gömbök kitölteni, illetve, hogy mennyi lesz az elhelyezhető gömbök számának várható értéke. (A két kérdés nyilván ekvivalens.)

BERNAL és SCHMETTERER fenti kérdéseinek egzakt megválaszolása igen nehéz problémának látszik. Ismeretes több más hasonló típusú probléma is, amelyek szintén megoldatlanok. Így például ez idő szerint nincsen kielégítő elmélet, amely egzakt választ adna arra a kérdésre, hogy ha ismert szemcsenagyság és szemcsealak szerinti megoszlású szilárd anyagot (pl. kőzúzalék, szén stb.) egy adott alakú tartályba (pl. vasúti kocsiba) öntünk, akkor a rendelkezésre álló térnek kb. hányadrészét tölti ki a szóban forgó anyag. E kérdés gyakorlati jelentősége szállítási és raktározási problémáknál nyilvánvaló.

Az említett problémákat „véletlen térkitöltési problémák" néven lehet összefoglalni. Ilyen jellegű feladatok más területen is felmerülnek, és megoldásuk a valószínűségszámítás egyik soronlevő feladata. E problémák egzakt tárgyalásának nehézsége onnan adódik, hogy a véletlen térkitöltési problémáknál az egyes térkitöltő elemek (gömbök, szemcsék stb.) elhelyezkedése nem független egymástól. Ilyen módon e problémák egy átfogóbb valószínűségszámítási problémakör részét alkotják, amelyet a következőképpen lehet jellemezni: a valószínűségszámítás független valószínűségi változókra vonatkozó tételeinek kiterjesztése nem teljesen független valószínűségi változók esetére, legalábbis a gyakorlati alkalmazások során legtöbbször előforduló függőségi típusokra. Mint ismeretes, ez irányban még nagyon sok a megoldatlan probléma.

Jelen dolgozatban egy, a véletlen térkitöltés problémakörébe tartozó egyszerű egydimenziós feladatot oldunk meg, mégpedig az említett SCHMETTERER-féle feladat egydimenziós analogonját. E feladat természetesen sokkal egyszerűbb, mint a megfelelő 3-, vagy akár csak az analóg 2-dimenziós feladat, ugyanis a geometriai nehézségek, amelyek már a síkbeli esetben és még inkább a térbeli esetben fellépnek, itt egyáltalán nem jelentkeznek.

Más szóval a következő feladatot vizsgáljuk: a $(0, x)$ intervallumra találomra ráhelyezünk egységnyi intervallumokat, úgy, hogy azoknak ne legyen egymással közös pontjuk. Meghatározandó az ilyen módon elhelyezhető intervallumok várható száma. A feladat megoldása — úgy hisszük — bizonyos érdekességgel bír mint egy kezdeti lépés az említett, jórészt még feltáratlan területen. Az egydimenziós feladat az alábbiakban adott megoldásának mintájára megoldható például a következő általánosabb feladat is:

A k-dimenziós tér ($k = 2, 3, \ldots,$) egy T tengelyparallel helyzetű téglájában találomra sorjában elhelyezünk adott méretű egybevágó tengelyparallel téglákat oly módon, hogy egy téglának se legyen közös pontja a már előzőleg elhelyezett téglákkal. Az eljárást addig folytatjuk, amíg ez egyáltalán lehetséges; meghatározandó az elhelyezett téglák várható száma, illetve az, hogy e téglák a T téglának hányadrészét töltik ki. A következőkben az egyszerűség kedvéért csak az egydimenziós esettel foglalkozunk, azonban az olvasó, ha a gondolatmenetet figyelemmel kíséri, látni fogja, hogy az tetszőleges dimenziószám esetében alkalmazható, bár az analitikus apparátus a többdimenziós esetben természetesen bonyolultabb és bizonyos geometria nehézségek is fellépnek.

Az egydimenziós feladat egy retardált differenciálegyenletre vezet, mégpedig ha $M(x)$ jelöli a $(0, x)$ intervallumon elhelyezett egységnyi intervallumok várható számát, akkor $M(x)$ eleget tesz a

$$(x-1)\,M'(x) + M(x) = 2\,M(x-1) + 1 \qquad (x \geqq 1) \tag{0.1}$$

retardált differenciálegyenletnek, $M(x) = 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ kezdeti feltétel mellett. Az (0.1) retardált differenciálegyenlet a

$$w(x)\,y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)\,y(x-1) + r(x) \tag{0.2}$$

típusú egyenletek osztályába tartozik. A (0.2) típusú egyenletekkel foglalkozik pl. N. G. DE BRUIJN [1] és [2] dolgozata. Különösen sokat vizsgálták a szintén a (0.2) típusba tartozó

$$xy'(x) + y(x) = y(x-1) \tag{0.3}$$

egyenletet, amely egy számelméleti probléma megoldását szolgáltatja. Ha ugyanis $\Phi(N, M)$ jelöli azon $n \leqq N$ természetes számok számát, amelyeknek nincs M-nél kisebb törzstényezője, akkor, mint A. BUCHSTAB [3] kimutatta,

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{\Phi(M^x, M)\log M}{M^x} = y(x) , \tag{0.4}$$

ahol $y(x)$ eleget tesz a (0.3) egyenletnek és az $y(x) = 1/x\ (1 \leqq x \leqq 2)$ kezdeti feltételeknek. DE BRUIJN [2], [4] kimutatta, hogy a szóban forgó $y(x)$ BUCHSTAB-féle függvénynek létezik a határértéke, ha $x \to +\infty$ és

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = e^{-\gamma} , \tag{0.5}$$

ahol γ az Euler-féle állandó. A (0.4) egyenlettel foglalkozott L. K. HUA is [5], aki a Laplace-transzformáció módszerét alkalmazta és így bizonyította be (0.5) fennállását, továbbá a maradéktagra is igen éles becslést adott meg.

Jelen dolgozatban, ugyanúgy, mint HUA, a szóban forgó (1) retardált differenciálegyenletet úgy oldjuk meg, hogy bevezetjük $M(x)$ Laplace-transzformáltját, vagyis a

$$\varphi(s) = \int_0^\infty M(x)\, e^{-sx}\, dx \qquad (s = \sigma + it\, ,\ \ \sigma > 0) \tag{0.6}$$

függvényt és kimutatjuk, hogy $\varphi(s)$ a

$$\frac{d}{ds}\left(se^s\,\varphi(s)\right) = \varphi(s)\,(e^s - 2) - \frac{1}{s} \tag{0.7}$$

közönséges differenciálegyenletnek tesz eleget, továbbá kielégíti a

$$\lim_{s\to+\infty} \varphi(s) = 0 \tag{0.8}$$

határfeltételt. (0.7) megoldása explicit alakban előállítható :

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} \int_s^\infty \exp\left(-2\int_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) dt\ . \tag{0.9}$$

$\varphi(s)$ explicit alakjából Tauber-típusú meggondolások alapján következtethetünk $M(x)$ aszimptotikus viselkedésére, ha $x \to +\infty$.

Az 1. § a probléma valószínűségszámítási megfogalmazásával, a várható értékre vonatkozó retardált differenciálegyenlet felállításával foglalkozik. A 2. §-ban a Laplace-transzformáció segítségével megoldjuk a keresett függvény Laplace-transzformáltjára nyert közönséges differenciálegyenletet. A 3. és 4. §-ban a Laplace-transzformált viselkedéséből következtetünk a keresett függvény (az x hosszúságú intervallumon elhelyezkedő egységnyi intervallumok várható számának) aszimptotikus viselkedésére. Kimutatjuk, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{M(x)}{x} = C \,, \tag{0.10}$$

ahol

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right) dt = 0{,}748 \ldots \,, \tag{0.11}$$

illetve ezen túlmenően kimutatjuk, hogy $M(x)$-re a következő aszimptotikus előállítás érvényes:

$$M(x) = Cx - (1-C) + O\left(\frac{1}{x^n}\right) , \tag{0.12}$$

ahol n tetszőleges nagy szám, és C a (0.11) alatti állandó.[1] Az 5. §-ban a szóban forgó intervallum-szám szórását becsüljük meg, és e becslés segítségével kimutatjuk, hogy az x hosszúságú intervallum lefedett részének viszonya a teljes intervallumhoz sztochasztikusan konvergál a C határértékhez. A 6. §-ban a kérdés teljesebb tárgyalásának lehetőségére mutatunk rá, amennyiben vázoljuk az eloszlásfüggvény pontos meghatározásához követendő eljárást.

A szóban forgó feladat megoldásának egy érdekes gyakorlati alkalmazására N. G. de Bruijn volt szíves figyelmemet felhívni. Egy L méter hosszúságú járda mentén autók parkolhatnak. Az újonnan érkező autók találomra helyezkednek el a még el nem foglalt részszakaszokban (nem igyekeznek szorosan egymáshoz zárkózni). Kérdés, hány autó fog tudni parkolni, ha egy-egy autónak l méter szabad járdamenti szakaszra van szüksége a parkoláshoz. A válasz az, hogy nagy valószínűséggel körülbelül 0,748 L/l számú autó fog tudni parkolni a szóban forgó parkírozó helyen.

1. §. A probléma valószínűségszámítási megfogalmazása

Helyezzünk el találomra a $(0, x)$ intervallumon egy egységnyi hosszúságú I_1-szakaszt. Ezen azt értjük, hogy az I_1 szakasz ξ kezdőpontja a $(0, x-1)$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ezután helyezzünk el az I_1 szakasz helyzetétől függetlenül találomra (az előbbi értelemben) egy másik egységnyi szakaszt a $(0, x)$-intervallumon. Ha a második szakasznak I_1-gyel nincs közös pontja, a második szakaszt megtartjuk és I_2-vel jelöljük; ha van közös pontja, akkor e szakaszt elhagyjuk és egy újabb szakaszt választunk. Ha már az $I_1, I_2, \ldots, I_k$ (egymástól idegen) szakaszokat megválasztottuk, a következő találomra választott szakaszt csak akkor tartjuk meg, ha az $I_1, I_2, \ldots, I_k$ szakaszok egyikével sincs közös pontja. Ez esetben e szakaszt I_{k+1}-gyel jelöljük. Az eljárást addig folytatjuk, ameddig még van egyáltalán lehetőség a további szakaszok elhelyezésére, vagyis addig, amíg olyan helyzet nem áll elő, hogy két szomszédos szakasz, illetve a két szélső szakasz és a $(0, x)$ intervallum megfelelő végpontjai közti távolságok között nem marad

[1] N. G. de Bruijn felhívta a figyelmemet arra, hogy az ő módszerével a maradéktag becslése (0.12)-ben még tovább élesíthető.

egyetlen 1-nél hosszabb sem. Tegyük fel, hogy ez a helyzet az I_{ν_x} intervallum elhelyezése után következik be. A feladat a ν_x valószínűségi változó $M(x) = \mathbf{M}\{\nu_x\}$várható értékének meghatározása, illetve a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} = C$$

határérték kiszámítása. Nyilvánvaló, hogy $M(x) = 0$, ha $0 \leqq x \leqq 1$ és $M(x)=1$, ha $1 < x \leqq 2$. (Nem teljesen evidens, hogy $M(x)$ monoton növekvő, bár ez valóban így van, és a későbbiekből adódni fog.) Nyilvánvaló, hogy $0 \leqq M(x) \leqq x$. A fenti határérték létezése sem magától értetődő, de ez is ki fog adódni, és egyben C értéket is meg fogjuk határozni. (C értéke közelítőleg 0,748.)

Először kimutatjuk, hogy $M(x)$ eleget tesz az

$$M(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x M(t)\,dt + 1 \qquad (x > 0) \tag{1.1}$$

integrálegyenletnek. Az (1.1) egyenletre a következő meggondolással jutunk: ha a $(0, x+1)$ intervallumon egy egységnyi intervallumot már elhelyeztünk, mégpedig ez a $(t, t+1)$ intervallum $(0 \leqq t \leqq x)$, akkor az ettől balra elhelyezkedő intervallumok átlagos száma nyilván $M(t)$, az ettől jobbra elhelyezkedő intervallumok átlagos száma $M(x-t)$ és így (mivel t egyenletes eloszlású $(0, x)$-ben)

$$M(x+1) = \frac{1}{x}\int_0^x \big(M(t) + M(x-t)\big)\,dt + 1 = \frac{2}{x}\int_0^x M(t)\,dt + 1\,.$$

(1.1)-et x-szel beszorozva és mindkét oldalt x szerint differenciálva kapjuk, hogy $M(x)$ az

$$x\,M'(x+1) + M(x+1) = 2\,M(x) + 1 \qquad (x > 0) \tag{1.2}$$

„retardált differenciálegyenletnek" tesz eleget.

2. §. A retardált differenciálegyenlet megoldása a Laplace-transzformáció segítségével

Legyen

$$\varphi(s) = \int_0^\infty M(x)\,e^{-xs}\,dx \qquad (s = \sigma + it\,,\ \sigma > 0)\,. \tag{2.1}$$

ahol $M(x)$ az

$$x\,M'(x+1) + M(x+1) = 2\,M(x) + 1 \qquad (x > 0) \tag{2.2}$$

retardált differenciálegyenletnek és az

$$M(x) = 0 \qquad \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \tag{2.3}$$

kezdeti feltételnek eleget tevő függvény.

A (2.3) Laplace-transzformált létezése a $0 \leqq M(x) \leqq x$ egyenlőtlenségből következik. (2.2) mindkét oldalát e^{-xs}-sel szorozva és x szerint integrálva nyerjük, hogy

$$(2.4) \qquad \int_0^\infty x M'(x+1)\, e^{-xs}\, dx + \int_0^\infty M(x+1)\, e^{-xs} dx = 2\,\varphi(s) + \frac{1}{s}\,.$$

Mivel $M(x) = 0$, ha $0 \leqq x \leqq 1$,

$$(2.5) \qquad \int_0^\infty M(x+1)\, e^{-xs}\, dx = e^s \int_1^\infty M(t)\, e^{-ts}\, dt = e^s\, \varphi(s)$$

és

$$(2.6) \qquad \int_0^\infty x M'(x+1)\, e^{-xs}\, dx = -\frac{d}{ds}\left(e^s \int_0^\infty M'(t) e^{-ts}\, dt \right).$$

Parciális integrálással nyerjük, hogy

$$(2.7) \qquad \int_0^\infty M'(t)\, e^{-ts}\, dt = s\,\varphi(s)\,.$$

A (2.4)—(2.7) összefüggésekből adódik, hogy $\varphi(s)$ a

$$(2.8) \qquad \frac{d}{ds}\left(se^s\,\varphi(s)\right) = \varphi(s)\,(e^s - 2) - \frac{1}{s}$$

differenciálegyenletnek tesz eleget.

Bevezetve a $w(s) = e^s\,\varphi(s)$ jelölést, $w(s)$ az

$$(2.9) \qquad sw'(s) = -2\,w(s)\, e^{-s} - \frac{1}{s}$$

differenciálegyenletnek tesz eleget.

A (2.9)-nek megfelelő homogén egyenletet megoldva, a határozatlan együttható módszerét alkalmazva és figyelembe véve, hogy $0 \leqq M(x) \leqq x$ miatt pozitív s esetén

$$0 \leqq w(s) \leqq e^s \int_1^\infty x e^{-sx}\, dx$$

és így

$$(2.10) \qquad \lim_{s \to +\infty} w(s) = 0\;,$$

kapjuk, hogy

$$w(s) = \frac{1}{s^2} \int_s^\infty \exp\left(-2 \int_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) dt\,, \tag{2.11}$$

tehát

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} \int_s^\infty \exp\left(-2 \int_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) dt\,. \tag{2.12}$$

A (2.12) formulából

$$\lim_{s\to+0} s^2\varphi(s) = C\,, \tag{2.13}$$

ahol

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) dt\,, \tag{2.14}$$

A C állandó számértékre 3 tizedesjegy pontossággal $C = 0{,}748$ adódik. A numerikus számítás céljából a C állandót definiáló integrált célszerű gyorsabban konvergáló integrállá alakítani. BÉKÉSSY ANDRÁS vette észre, hogy ez a következőképpen végezhető el: parciális integrálással adódik, hogy

$$C = 2\int_0^\infty (1-e^{-t}) \exp\left(-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) dt =$$

$$= 2C - 2\int_0^\infty \exp\left(-t - 2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) dt$$

tehát

$$C = 2\int_0^\infty \exp\left(-t - 2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) dt\,. \tag{2.15}$$

A (2.15) képlet alapján a numerikus számolást SIMON SÁNDOR végezte el.

3. §. Egy Tauber-típusú tétel alkalmazása $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = C$ bebizonyítására

Először kimutatjuk, hogy létezik a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x}$$

határérték és egyenlő a (2.14) alatt szereplő C konstanssal. E célból alkalmazni fogjuk a következő jól ismert Tauber-típusú tételt : *Ha* $\alpha(x)$ *monoton növekvő függvény* ($0 < x < +\infty$), $\beta > 0$ *és*

$$\lim_{s\to+0} s^{\beta}\int_0^{\infty} e^{-sx}\,d\alpha(x) = C\,,$$

akkor

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x^{\beta}} = \frac{C}{\Gamma(\beta+1)}$$

(lásd: [7], 108. tétel).

Mivel az

$$\alpha(x) = \int_0^{x} M(t)\,dt \tag{3.1}$$

függvény monoton növekvő és

$$s^2\int_0^{\infty} e^{-sx}\,d\,\alpha(x) = s^2\varphi(s)\,,$$

az említett tételből ($\beta = 2$ esetén) azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^{x} M(t)\,dt = \frac{C}{2}\,. \tag{3.2}$$

Osszuk most el (1.1) mindkét oldalát $(x+1)$-gyel és végezzük el az $x\to+\infty$ határátmenetet. (3.2)-ből azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M(x+1)}{x+1} = C\,. \tag{3.3}$$

Így tehát bebizonyítottuk állításunkat, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x} = C\,, \tag{3.4}$$

ahol C a (2.14) alatti állandó. (3.4)-ből és (2.2)-ből az is következik, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} M'(x) = C\,. \tag{3.5}$$

(3.5)-ből már látható, hogy $M(x)$ elég nagy x-re monoton növekvő. Most kimutatjuk, hogy $M(x)$ már $x > 2$-re monoton növekvő. Ehhez elegendő megmutatni, hogy

$$2M(x-1)+1-M(x) > 0\,,\quad \text{ha}\quad x > 2\,. \tag{3.6}$$

Az $1 < x \leqq 2$ intervallumban nyilván $2M(x-1)+1-M(x) = 0$. Ha megmutatjuk, hogy abból, hogy $2M(t-1)+1-M(t) \geqq 0$, ha $1 < t \leqq x$

valamilyen $x > 1$-re, következik, hogy $2M(x) + 1 - M(x+1) > 0$, akkor ebből (3.6) következik. Ez azonban azonnal belátható, hiszen (1.1) szerint

$$2M(x) + 1 - M(x+1) = \tag{3.7}$$

$$= \frac{4}{x(x-1)} \int_0^{x-1} M(t)\,dt + \frac{2}{x-1} \int_1^{x-1} \big(2M(t) + 1 - M(t+1)\big)\,dt$$

Tehát $M(x)$ valóban monoton növekvő.[2] Mivel (3.2)-ből következik, hogy

$$xM''(x+1) = 2\big(M'(x) - M'(x+1)\big), \tag{3.8}$$

(3.5)-ből az is következik, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} xM''(x) = 0. \tag{3.9}$$

Ily módon határértékben az $y = M(x)$ görbe erősen hozzásimul az $y = Cx$ egyeneshez.

Eredményünket a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Tétel. *A* $(0, x)$ *intervallumot kitöltve találomra elhelyezett közös pont nélküli egységnyi hosszúságú intervallumokkal, ezek nagy* x *esetén a* $(0, x)$ *intervallumnak átlagban 74,8%-át fedik le.*

Az $M(x) - Cx$ eltérést a következő paragrafusban közelebbről is megvizsgáljuk.

4. §. $M(x)$ pontosabb aszimptotikájának meghatározása

Vegyük észre, hogy a

$$\mu(x) = Cx - (1 - C) \tag{4.1}$$

függvény kielégíti az (1.1) egyenletet, bármi is a C állandó értéke. Ennek

---

[2] Miután kimutattuk, hogy $M(x)$ monoton növekvő, a fentebb

$$\alpha(x) = \int_0^x M(t)\,dt$$

függvényre alkalmazott Tauber-tételt közvetlenül alkalmazhatjuk $M(x)$-re is ($\beta = 1$ mellett), mivel

$$\int_0^\infty e^{-xs}\,dM(x) = \int_0^\infty M'(x)\,e^{-xs}\,dx = s\,\varphi(s).$$

Így egy újabb bizonyítást nyerünk arra, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} = C.$$

alapján már sejteni lehet, hogy ha C a (2.21) alatti állandó, akkor létezik $M(x) - Cx$ határértéke, ha $x \to +\infty$, mégpedig

$$\lim_{x\to+\infty} \big(M(x) - Cx\big) = -(1 - C) \tag{4.2}$$

E paragrafusban ki fogjuk mutatni, hogy ez valóban így van. E célból kiindulunk abból, hogy $M(x)$ Laplace-transzformáltja, $\varphi(s)$, (2.12) szerint a következő alakra hozható:

$$\varphi(s) = \frac{\Phi(s)}{s^2} . \tag{4.3}$$

Itt $\Phi(s)$ a következő alakban írható fel:

$$\Phi(s) = e^{-s}\left(C - \int_0^s e^{2\int_t^s \frac{1-e^{-u}}{u}\,du}\, dt\right). \tag{4.4}$$

Mivel $(1 - e^{-z})/z$ egész függvény, könnyen belátható, hogy $\Phi(s)$ is egész függvény. Ebből következik, hogy

$$\varphi(s) = \frac{C}{s^2} + \frac{\Phi'(0)}{s} + \psi(s) , \tag{4.5}$$

ahol

$$\psi(s) = \frac{\Phi(s) - C - \Phi'(0)\, s}{s^2} \tag{4.6}$$

szintén egész függvény. $\Phi'(0)$ értékét kiszámítva

$$\Phi'(0) = C - 1 \tag{4.7}$$

adódik, tehát

$$\varphi(s) = \frac{C}{s^2} - \frac{1-C}{s} + \psi(s) , \tag{4.8}$$

ahol $\psi(s)$ egész függvény.

Mármost a Laplace-transzformáció jól ismert inverziós képlete szerint

$$M(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{xs}\, \varphi(s)\, ds \qquad (\sigma > 0) , \tag{4.9}$$

és így

$$M(x) = Cx - (1 - C) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{xs}\, \psi(s)\, ds \qquad (\sigma > 0) . \tag{4.10}$$

Mivel $\psi(s)$ egész függvény, (4.10)-ben $\sigma = 0$ is vehető, tehát

$$M(x) = Cx - (1 - C) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \psi(it)\, dt \ , \tag{4.11}$$

Könnyen belátható, hogy ha $s = it$ (t valós), a $\varphi(s)$-et definiáló

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} e^{2\int_0^s \frac{1-e^{-u}}{u} du} \int_s^\infty \exp\left(-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dt \tag{4.12}$$

képletben szereplő

$$\int_s^\infty \exp\left(-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dt$$

integrálban integrációs útként választható az imaginárius tengely is. Ehhez ugyanis csak azt kell kimutatni, hogy ha K_R jelöli a $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$ negyedkört, akkor

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{K_R} \exp\left(-2\int_0^z \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dz \right| = 0 \ . \tag{4.13}$$

(4.13) a következőképpen látható be:

$$\left| \int_{K_R} \exp\left(-2\int_0^z \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dz \right| \leqq R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-2\int_1^R \frac{1-e^{-r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)}{r} dr\right) d\varphi \ .$$

Mármost, ha $0 \leqq \varphi \leqq \pi/4$, akkor

$$\int_1^R \frac{e^{-r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)}{r} dr \leqq \int_1^\infty e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} dr \leqq 3 \ ;$$

ha pedig $\pi/4 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, akkor, mivel $(e^{-r\cos\varphi})/r$ monoton csökkenő függvény,

$$\int_1^R \frac{e^{-r\cos\varphi}}{r} \cos(r\sin\varphi)\, dr \leqq \int_1^{\frac{\pi}{2\sin\varphi}} \frac{e^{-r\cos\varphi}}{r} \cos(r\sin\varphi)\, dr \leqq \frac{\pi}{2\sin\varphi} \leqq 3 \ .$$

Tehát

$$\left| \int_{K_R} \exp\left(-2\int_0^z \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dz \right| \leqq \frac{e^6\pi}{2R}$$

és így (4.13) valóban fennáll.

Ha tehát t pozitív, $\varphi(it)$ a

$$(4.14) \qquad \varphi(it) = -\frac{e^{-it}}{t^2} e^{2\int\limits_0^t \frac{1-e^{-iu}}{u} du} \int\limits_t^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^u \frac{1-e^{-iv}}{v} dv\right) du$$

alakra hozható. Nyilvánvaló, hogy $\varphi(-it) = \varphi(it)$, ezért $\varphi(it)$, illetve $\psi(it)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálatánál szorítkozhatunk t pozitív értékeire. (4.14)-ből, figyelembe véve, hogy az

$$\int\limits_1^\infty \frac{e^{-iu}}{u} du$$

integrál létezik, leolvasható, hogy

$$(4.15) \qquad \varphi(it) = O\left(\frac{1}{|t|}\right) \quad \text{ha} \quad t \to +\infty ,$$

és így

$$(4.16) \qquad \psi(it) = O\left(\frac{1}{|t|}\right) \quad \text{ha} \quad t \to +\infty .$$

Ily módon (4.11)-ből parciális integrálással következik, hogy

$$(4.17) \quad M(x) - Cx + (1-c) = -\frac{1}{2\pi i(x-1)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-1)} \frac{d}{dt}\left(e^{it}\psi(it)\right) dt .$$

Mivel

$$(4.18) \qquad \psi(it) = \varphi(it) + \frac{C}{t^2} - \frac{i(1-C)}{t} ,$$

tehát

$$(4.19) \qquad \frac{d}{dt}\left(e^{it}\psi(it)\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{it}\varphi(it)\right) + \frac{(1-C)\,e^{it}}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) .$$

(4.14)-ből (vagy a (2.9) egyenletből) látható, hogy

$$(4.20) \qquad \frac{d}{dt}\left(e^{it}\psi(it)\right) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) .$$

Figyelembe véve még, hogy

$$\left|\int\limits_1^\infty \frac{e^{ixt}}{t} dt\right| \leq K \quad \text{és} \quad \left|\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{ixt}}{t} dt\right| \leq K , \quad \text{ha} \quad x \geq 1 ,$$

ahol K nem függ x-től, következik, hogy

$$M(x) - Cx + (1 - C) = O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{4.21}$$

A $w(s)$-re vonatkozó (2.9) differenciálegyenletből következik teljes indukcióval, hogy

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{it}\varphi(it)\right) = O\left(\frac{1}{t^2}\right), \tag{4.22}$$

tehát a fenti meggondolást megismételve, ismételt parciális integrálással következik,[3] hogy

$$M(x) - Cx + (1 - C) = O\left(\frac{1}{x^n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.23}$$

N. G. DE BRUIJN volt szíves közölni velem, hogy [2] dolgozatának általános eredményei felhasználásával még élesebb becslés adható (4.23) jobboldalára, mégpedig kimutatható, hogy

$$M(x) - Cx + (1 - C) = O\left((2e)^x x^{-x+D}\right) \tag{4.24}$$

ahol D állandó. Ugyanis bevezetve az

$$f(x) = \frac{M(x+1) + 1}{x+2}$$

függvényt, $f(x)$-re az

$$\frac{x(x+2)}{2(x+1)} f'(x) + f(x) - f(x-1) = 0 \quad (x \geqq 0)$$

retardált differenciálegyenlet adódik, és erre már [2] egy általános tétele alkalmazható.

5. §. A szórás kiszámítása és a nagy számok törvényének alkalmazása

Jelölje ν_x a $(0, x)$ intervallumban elhelyezett egységnyi intervallumok számát. Célunk e paragrafusban a ν_x valószínűségi változó szórásának meghatározása. E célból vezessük be az

$$M_2(x) = \mathbf{M}\{\nu_x^2\} \tag{5.1}$$

jelölést. Ugyanazt a meggondolást alkalmazzuk, amelyet az $M(x)$-re vonatkozó függvényegyenlet felállításánál követtünk. E gondolatmenetet röviden abban foglalhatjuk össze, hogy azon feltevés mellett, hogy az $(0, x+1)$ intervallumban választott első intervallum a $(t, t+1)$ intervallum $(0 \leqq t \leqq x)$,

[3] Megjegyzendő, hogy (4.23) levezethető HAAR ALFRÉD egy tételéből is ([6], 85. oldal), azonban e tétel feltételei teljesülésének verifikálása nem könnyebb, mint a fent adott közvetlen bizonyítás.

ν_{x+1} előállítható a $\nu_{x+1} = \nu_t + \nu_{x-t} + 1$ alakban, ahol ν_t és ν_{x-t} függetlenek ; így

$$\mathbf{M}\{\nu_{x+1}^2\} =$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x \left(1 + \mathbf{M}\{\nu_t^2\} + \mathbf{M}\{\nu_{x-t}^2\} + 2\,\mathbf{M}\{\nu_t\} + 2\,\mathbf{M}\{\nu_{x-t}\} + 2\,\mathbf{M}\{\nu_t\}\,\mathbf{M}\{\nu_{x-t}\}\right) dt\ .$$

tehát

$$(5.2)\qquad M_2(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x M_2(t)\,dt + \frac{4}{x}\int_0^x M(t)\,dt + \frac{2}{x}\int_0^x M(t)\,M(x-t)\,dt + 1\ .$$

Bevezetve a ν_x változó szórásnégyzetére a

$$(5.3)\qquad D^2(x) = \mathbf{D}^2\{\nu_x\} = \mathbf{M}\{\nu_x^2\} - \mathbf{M}^2\{\nu_x\}$$

jelölést, következik

$$(5.4)\qquad \begin{aligned} D^2(x+1) &= \frac{2}{x}\int_0^x D^2(t)\,dt + \\ &+ \frac{2}{x}\int_0^x \left[M^2(t) + M(t)\,M(x-t) + 1 - \frac{M^2(x+1)}{2}\right] dt\ . \end{aligned}$$

Mivel (4.23) szerint az (5.4) jobboldalán álló függvény korlátos, következik, hogy van olyan $K > 0$ állandó, hogy

$$(5.5)\qquad D^2(x+1) \leqq \frac{2}{x}\int_0^x D^2(t)\,dt + K\ .$$

Mivel $\delta(x) = KM(x)$ eleget tesz a

$$(5.6)\qquad \delta(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x \delta(t)\,dt + K$$

egyenletnek, és a $(0, 1)$ intervallumban $D(x) = \delta(x) = 0$, (5.5) szerint minden x-re

$$(5.7)\qquad D^2(x) \leqq \delta(x) = KM(x)\ ,$$

Ezzel tehát kimutattuk, hogy $D^2(x) = O(x)$ és így, hogy

$$(5.8)\qquad D(x) = O\left(\sqrt{x}\right)\ .$$

Alkalmazzuk most a Csebisev-féle egyenlőtlenséget ν_x-re. Azt kapjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\nu_x}{M(x)} - 1\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{D^2(x)}{\varepsilon^2 M^2(x)} . \tag{5.9}$$

Mivel (5.9) jobboldala (5.8) szerint 0-hoz tart, ha $x \to +\infty$ következik, hogy $\nu_x/M(x)$ sztochasztikusan konvergál 1-hez. Az eredményt a következőképpen is kifejezhetjük: ν_x/x sztochasztikusan konvergál a (2.14) alatti C állandóhoz. *Ha tehát x igen nagy, gyakorlatilag bizonyosak lehetünk abban, hogy $\nu_x \approx Cx$, vagyis a $(0, x)$ intervallum lefedett részének aránya az egész intervallumhoz igen közel lesz a $C \approx 0{,}748$ értékhez.*

6. §. Az eloszlásfüggvény meghatározása

Eddig csak ν_x első két momentumával foglalkoztunk. Felmerül a kérdés: nem lehetséges-e ν_x eloszlását meghatározni. E paragrafusban ezzel a foglalkozunk.

Jelölje $P_k(x)$ annak a valószínűségét, hogy ν_x a k értéket veszi fel $(k = 0,1,2, \ldots)$. Akkor

$$P_0(x) = 1 \quad \text{és} \quad P_k(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6.1}$$

ha $0 \leqq x \leqq 1$, és az eddigiekben már többször alkalmazott gondolatmenet segítségével nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} &P_0(x+1) = 0 \\ &P_k(x+1) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\sum_{j=1}^{k-1} P_j(t)\, P_{k-j-1}(x-t)\right) dt \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{6.2}$$

ha $x > 0$.

A (6.1)—(6.2) egyenletek segítségével a $P_k(x)$ függvények szukcesszíve meghatározhatók. E célból bevezetjük a $P_k(x)$ függvény $\varphi_k(x)$ Laplace-transzformáltját:

$$\varphi_k(s) = \int_0^\infty e^{-xs} P_k(x)\, dx \qquad (s = \sigma + it\ ,\ \sigma > 0)\ . \tag{6.3}$$

(6.2)-ből könnyen adódik, hogy

$$-e^s\left(\varphi_k(s) + \varphi_k'(s)\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_j(s)\, \varphi_{k-1-j}(s) \qquad (k=1, 2, \ldots)\ . \tag{6.4}$$

Mivel

$$\varphi_0(s) = \int_0^1 e^{-xs}\, dx = \frac{1 - e^{-s}}{s}\ ,$$

(6.4)-et $k = 1$-re felírva és a $\varphi_0(s)$-re kapott kifejezést behelyettesítve, $\varphi_1(s)$-re egy közönséges differenciálegyenletet nyerünk. Ezt megoldva, és a kapott eredményt (6.4)-be $k = 2$ mellett behelyettesítve, egy közönséges differenciálegyenletet kapunk $\varphi_2(s)$-re. Ily módon az összes $\varphi_k(s)$ függvények egymás után meghatározhatók. A (6.4) végtelen differenciálegyenletrendszert egyetlen egyenletbe foglalhatjuk össze, ha bevezetjük az

$$(6.5) \qquad Y(s, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(s)\, z^k$$

függvényt. Y-ra (6.4)-ből az

$$(6.6) \qquad Y' = \frac{(s-1) + e^{-s}}{s^2} - ze^{-s}\, Y^2 - Y$$

közönséges, nem-lineáris differenciálegyenlet adódik.

Egy másik út a $P_k(x)$ függvények meghatározásra a következő: Bevezetjük a $\{ P_k(x) \}$ valószínűségeloszlás generátorfüggvényét, vagyis a

$$(6.7) \qquad G(z, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, z^k$$

függvényt. (6.1)-ből és (6.2)-ből $G(z, x)$-re a

$$(6.8) \qquad G(z, x+1) = 1 + \frac{z}{x} \int_0^x G(z, t)\, G(z, x-t)\, dt$$

integrálegyenlet adódik.

Ha (6.8) mindkét oldalát z szerint differenciáljuk és figyelembe vesszük, hogy

$$\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{z=1} = M(x)$$

és $G(1, x) = 1$, visszakapjuk $M(x)$-re az

$$M(x+1) = 1 + \frac{2}{x} \int_0^x M(t)\, dt$$

egyenletet. Hasonlóképpen (6.8)-ba z helyett $e^{-\zeta}$-t helyettesítve és ζ szerint kétszer differenciálva adódik az $M_2(x)$-re vonatkozó (5.2) egyenlet. Továbbá k-szoros differenciálás útján egy függvényegyenletet nyerünk a k-adrendű $M_k(x) = \mathbf{M}\{ \nu_x^k \}$ momentumra.

(Beérkezett: 1958. V. 27.)

IRODALOM

[1] De Bruijn, N. G.: „The asymptotically periodic behaviour of the solutions of some linear functional equations". *American Journal of Mathematics* **71** (1949) 313—330.

[2] De Bruijn, N. G.: „On some linear functional equations". *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **1** (1950) 129—134.

[3] Бухштаб, А. А.: „Асимптотическая оценка одной общей теоретико-числовой функции". *Математический Сборник* **2** (1937) 1239—1246.

[4] De Bruijn, N. G.: „On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes". *Indagationes Mathematicae* **12** (1950) 803—812.
[5] Loo-Keng-Hua: „Estimation of an integral". *Chinese Mathematical Society* **11** (1951) 393—402 (kínaiul, angol kivonattal).
[6] Haar, A.: „Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen". *Mathematische Annalen* **96** (1926) 69—107.
[7] Hardy, G. H.: *Divergent series.* Oxford University Press, 1949.

ОБ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАЛАЧЕ О СЛУЧАЙНОМ ЗАПОЛНЕНИИ ПРОСТРАНСТВА

A. RÉNYI

Резюме

В работе решается следующая проблема: расположим случайно единичный отрезок на отрезке $(0, x)$; это понимается так, что центр интервалла — случайная точка, имеющая равномерное распределение на отрезке $(^1/_2, x - {}^1/_2)$. Расположим случайным образом (в таком же смысле) второй единичный отрезок независимо от первого на отрезке $(0, x)$. Если второй отрезок имеет общую часть с первым, то он не принимается во внимание и выбор продолжается пока два отрезка не будет пересекаться. Процесс продолжается таким образом, т. е. если k (непересекающийся) отрезок уже расположен на отрезке $(0, x)$ случайным образом выбирается новый, но он сохраняется лишь если он не пересекается ни с одним из предыдущих, в противном случае выбор повторяется и т. д. Процесс заканчивается, если больше не остается возможности расположить единичный отрезок так, чтобы он не пересекался ни с одним из уже расположенных отрезков. Пусть ν_x обозначает число расположенных таким образом на отрезке $(0, x)$ единичных отрезков. Очевидно, ν_x — случайная величина. Пусть $M(x)$ обозначает ее математическое ожидание. В работе доказывается, что $M(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$M(x+1) = \frac{2}{x} \int_0^x M(t)\, dt + 1 \tag{1}$$

и начальному условию $M(x) = 0$ при $0 \leq x \leq 1$. Значения $M(x)$ с помощью (1) последовательно могут быть вычислены для отрезков $n \leqq x < n + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В настоящей работе исследуется ассимптотическое поведение $M(x)$. Введя преобразованную Laplace-а

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} M(x)\, dx \tag{2}$$

доказывается, что $\varphi(s)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{ds}\left(s e^s \varphi(s)\right) = \varphi(s)\,(e^s - 2) - \frac{1}{s}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} \int\limits_s^\infty \exp\left(-2 \int\limits_s^t \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dt \ . \tag{4}$$

Из (4) с помощью хорошо известной теоремы типа Tauber-a следует, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x} = C \ , \tag{5}$$

где

$$C = \int\limits_0^\infty \exp\left(-2 \int\limits_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) \approx 0{,}748 \ . \tag{6}$$

С помощью более глубокого изучения обратной формулы преобразования Laplace-a можно доказать,[1] что

$$M(x) = Cx - (1 - C) + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \tag{7}$$

для всех n. Далее доказывается также, что ν_x/x стохастически стремится к C при $x \to \infty$. Наконец, даются рекурсивные соотношения, из которых распределение от ν_x также может быть определено. Автор хочет заниматься с решением аналогичных проблем в случае большего числа измерении в другом работе.

ON A ONE-DIMENSIONAL PROBLEM CONCERNING RANDOM SPACE FILLING

by

A. RÉNYI

Abstract

In the paper the following problem is solved: Let us place at random a unit interval on the interval $(0, x)$ (by this we mean that the centrum of the unit interval is a random point uniformly distributed in the interval $(^1/_2, x - {}^1/_2)$. Let us place a second unit interval at random (in the same sense) independently from the first, on the interval $(0, x)$. If the second interval intersects the first, it is discarded, and the choice repeated until the two intervals do not intersect each other. The process is repeated in the same way, i. e. if already k (disjoint) unit intervals have been placed on the interval $(0, x)$, we choose at random an other interval, but retain it only if it does not intersect any of the previous intervals, otherwise the choice is repeated, etc. The process is finished, when there is no further possibility of placing still one unit interval so that it should not intersect any of the previously placed intervals. The number of unit intervals which can be thus placed

[1] N. G. de Bbruijn указал на то что применяя её метод оценок остаточного члена в (7) может быть ешё улушен.

on the interval $(0, x)$, shall be denoted by ν_x · ν_x is clearly a random variable. Let us denote by $M(x)$ the mean value of ν_x. It is shown in the paper that $M(x)$ satisfies the functional equation

$$M(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x M(t)\,dt + 1 \tag{1}$$

and the initial condition $M(x) = 0$ for $0 \leqq x \leqq 1$. The values of $M(x)$ can be successively determined for the intervals $n \leqq x < n+1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ by means of (1). In the present paper the asymptotic behavour of $M(x)$ is investigated. Introducing the Laplace-transform

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} M(x)\,dx\ , \tag{2}$$

it is shown that $\varphi(s)$ is a solution of the ordinary differential equation

$$\frac{d}{ds}\left(se^s\varphi(s)\right) = \varphi(s)\,(e^s - 2) - \frac{1}{s}\ . \tag{3}$$

It follows that

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}\int_s^\infty \exp\left(-2\int_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right)dt\ . \tag{4}$$

From (4) by a well-known Tauberian theorem it follows that

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x} = C \tag{5}$$

where

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\right)dt \sim 0{,}748\ . \tag{6}$$

By a more thorough investigation of the inversion formula for Laplace-transforms it can be shown that[1)]

$$M(x) = Cx - (1-C) + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{for all } n\ . \tag{7}$$

Moreover, it is also shown that ν_x/x tends stochastically to C for $x \to +\infty$. Finally recursive relations are given from which the probability distribution of ν_x may be also determined. The auther hopes to return to the analogous problem for any number of dimensions in an other paper.

[1)] N. G. de Bruijn pointed out that using his method the estimation of the remainder term in (7) can be made still sharper.

METEOROPATOLÓGIAI JELENSÉGEK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI VIZSGÁLATÁRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

A meteoropatológiai jelenségek vizsgálatánál gyakran felmerül a következő probléma: Meghatározott $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ időpontokban bizonyos klimatikai jelenségek (pl. meteorológiai frontok) fordulnak elő. Ugyanakkor megfigyeljük, hogy $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ időpontokban bizonyos biológiai jelenségek (pl. balesetek) is történnek. Tegyük fel, hogy a klimatikai jelenségek adott α ideig éreztetik hatásukat. (A t_n időpontokat az α hosszúságú szakaszok középpontjainak tekintjük.) Megfigyelésünk egy rögzített $(0, T)$ időintervallumra vonatkozik. Kérdés, hogy a biológiai jelenségek a klimatikai jelenségek hatásának tulajdoníthatók-e?

A fent említett vizsgálatot rendszerint H. VON SCHELLING [4] diagrammjának segítségével végzik el. Ebben a diagrammban fel van tüntetve, hogy a biológiai jelenségek előfordulási pontjai miként helyezkednek el az egyes klimatikai jelenségek előfordulási pontjaihoz viszonyítva. Ezen diagrammban szereplő adatok alapján történő kiértékelés matematikai módszereivel a szerző [5] dolgozatában foglalkozik. A gyakorlatban azonban SCHELLINGétől különböző eljárások is használatosak az adatok ábrázolására. Ilyen eljárást alkalmaz DR. HORVÁTH LÁSZLÓ GÁBOR [2] munkájában. Ennél a módszernél minden egyes biológiai jelenség időpontja csak egyszer van feltüntetve, mégpedig a hozzá legközelebb eső klimatikai jelenség időpontjához viszonytott helyzetben. E dolgozat ezen módszer matematikai vizsgálatával foglalkozik.

A szerző köszönetét fejezi ki DR. HORVÁTH LÁSZLÓ GÁBORnak, a *Magyar Államvasutak Pályaalkalmassági Vizsgáló Állomása* igazgatójának azért, hogy erre a problémára szíves volt a figyelmét felhívni.

1. §. Feltevések

Miként korábbi [5] dolgozatunkban, most is kétféle modellt alkalmazunk a klimatikai jelenségek folyamatának leírására.

a) Feltesszük, hogy a $\{t_n\}$ *eseménysorozat* λ *eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkot.*

Ez a feltevés szemléletesen azt jelenti, hogy *bármely időponttól* számítva a korábban előforduló klimatikai jelenségek semmilyen hatást sem gyakorolnak a jövőben keletkező klimatikai jelenségek előfordulási pontjaira, és a klimatikai jelenségek folyamata *bármely időponttól* számítva ugyanazon sztochasztikus törvénynek van alávetve.

b) Feltesszük, hogy a $\{t_n\}$ eseménysorozat rekurrens folyamatot alkot, amelynél a $t_{n+1} - t_n$ időkülönbségek egyforma eloszlású független pozitív valószínűségi változók $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel, amelynek szórása véges.

Ez a feltevés szemléletesen azt jelenti, hogy *az egyes klimatikai jelenségek létrejötte után* a megelőző klimatikai jelenségek semmilyen hatást sem gyakorolnak a jövőben keletkező klimatikai jelenségek előfordulási pontjaira és a klimatikai jelenségek folyamata *az egyes klimatikai jelenségek előfordulásától* számítva ugyanazon sztochasztikus törvénynek van alávetve.

Megjegyezzük, hogy az *a)* modell a *b)* modellnek az a speciális esete, midőn $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$.

A vizsgálat egy meghatározott $(0, T)$ időintervallumra vonatkozik. A következőképpen járunk el. Feltesszük, hogy a klimatikai jelenségeknek nincsen hatásuk. Ebben az esetben a biológiai jelenségek előfordulási pontjaira vonatkozóan indokolt a következő feltevés:

c) Az $\{u_n\}$ eseménysorozat μ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkot és független a $\{t_n\}$ sorozattól.

Ezután az *a)* és *c)*, illetve a *b)* és *c)* feltevések mellett megállapítjuk, hogy a $\{t_n\}$ pontok α hosszúságú környezetébe hány $\{u_n\}$ sorozathoz tartozó pont esése várható. Ha a ténylegesen észlelt pontok száma ennél jelentősen több, akkor beszélhetünk hatásról, különben pedig nem.

2. §. Eredmények

Jelölje a továbbiakban ν_T valószínűségi változó a $\{t_n\}$ pontok α hosszúságú környezetébe eső $\{u_n\}$ pontok számát abban az esetben, ha a függetlenség feltevésével élünk. A valóságban észlelt pontok számát pedig jelölje ν_T^*. Ekkor a hipotézisvizsgálat szokásos módszerét követve, a hatás nagyságát a $\mathbf{P}\{\nu_T \leqq \nu_T^*\}$ valószínűséggel mérjük.

Az *a)* modell esete. A ν_T valószínűségi változó várható értékére fennáll, hogy

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\nu_T\}}{T} = M = \mu(1 - e^{-\lambda\alpha}), \tag{1}$$

szórásnégyzetére pedig

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_T\}}{T} = D^2 = \mu\left\{(1 - e^{-\lambda\alpha}) + \frac{2\mu}{\lambda} e^{-\lambda\alpha}\left[1 - (1+\lambda\alpha)\, e^{-\lambda\alpha}\right]\right\}. \tag{2}$$

Továbbá érvényes a következő határeloszlástétel:

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_T - MT}{DT^{1/2}} \leqq x\right\} = \Phi(x), \tag{3}$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

Ha a vizsgált T időtartam alatt N_1 klimatikai jelenség és N_2 biológiai jelenség fordult elő, akkor az itt szereplő λ és μ ismeretlen paramétereket a következőképpen becsülhetjük meg:

$$\lambda \cong \frac{N_1}{T} \quad \text{és} \quad \mu \cong \frac{N_2}{T}.$$

Megjegyezzük, hogy a becslések pontossága T növekedésével együtt nő.

A fentiek alapján a következő kiértékelési módszert követhetjük. Meghatározzuk ν_T^* értékét és megbecsüljük M és D^2 értékét, amelyekre felírható, hogy

$$M \cong \frac{N_2}{T}\left(1 - e^{-\frac{N_1\alpha}{T}}\right) \tag{4}$$

és

$$D^2 \cong \frac{N_2}{T}\left\{\left(1 - e^{-\frac{N_1\alpha}{T}}\right) + \frac{2N_2}{N_1} e^{-\frac{N_1\alpha}{T}}\left[1 - \left(1 + \frac{N_1\alpha}{T}\right) e^{-\frac{N_1\alpha}{T}}\right]\right\}. \tag{5}$$

Ha T értéke ($1/\lambda$-hoz és $1/\mu$-höz képest) nagy, akkor a (3) határeloszlást tekinthetjük közelítő eloszlásnak és ennek alapján számíthatjuk ki a $\mathbf{P}\{\nu_T \leqq \nu_T^*\}$ valószínűséget. Eszerint a

$$\Phi\left(\frac{\nu_T^* - MT}{DT^{1/2}}\right) \tag{6}$$

valószínűség lesz a hatás nagyságának mértékszáma. Minél közelebb áll ez az érték 1-hez, annál nagyobbnak tekinthetjük a klimatikai hatást.

A szereplő e^{-x} és $\Phi(x)$ függvények értékeit az 1. és 2. táblázat tartalmazza.

1. TÁBLÁZAT

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,1	0,90483742	0,01	0,99004983	0,001	0,99900050
0,2	0,81873075	0,02	0,98019867	0,002	0,99800200
0,3	0,74081822	0,03	0,97044553	0,003	0,99700450
0,4	0,67032005	0,04	0,96078945	0,004	0,99600799
0,5	0,60653066	0,05	0,95122942	0,005	0,99501248
0,6	0,54881164	0,06	0,94176453	0,006	0,99401796
0,7	0,49658530	0,07	0,93239382	0,007	0,99302444
0,8	0,44932896	0,08	0,92311635	0,008	0,99203121
0,9	0,40656966	0,09	0,91393119	0,009	0,99104038
1,0	0,36787944	0,10	0,90483742	0,010	0,99004983

2. TÁBLÁZAT

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,0	0,500000	2,0	0,977250	3,0	0,998650	4,0	0,999968
0,2	0,579260	2,1	0,982136	3,1	0,999032	4,1	0,999979
0,4	0,655422	2,2	0,986097	3,2	0,999313	4,2	0,999987
0,6	0,725747	2,3	0,989276	3,3	0,999517	4,3	0,999991
0,8	0,788145	2,4	0,991802	3,4	0,999663	4,4	0,999995
1,0	0,841345	2,5	0,993790	3,5	0,999767	4,5	0,999997
1,2	0,884930	2,6	0,995339	3,6	0,999841	4,6	0,999998
1,4	0,919243	2,7	0,996533	3,7	0,999892	4,7	0,999999
1,6	0,945201	2,8	0,997445	3,8	0,999928	4,8	0,999999
1,8	0,964070	2,9	0,998134	3,9	0,999952	4,9	1,000000

A *b)* **modell esete.** Jelölje most az $F(x)$ eloszlásfüggvény átlagát τ, szórását pedig σ. A ν_T valószínűségi változó várható értékére fennáll, hogy

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\nu_T\}}{T} = M = \frac{\mu}{\tau} \int_0^{\alpha} [1 - F(x)]\, dx \,, \tag{7}$$

szórásnégyzetére pedig $F(\alpha) < 1$ esetén fennáll, hogy

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_T\}}{T} = D^2 = \frac{\mu}{\tau} \int_0^{\alpha} [1 - F(x)]\, dx + \frac{\mu^2}{(a+b)^3} (a^2 \sigma_b^2 + b^2 \sigma_a^2) \,, \tag{8}$$

ahol

$$a = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} [1 - F(x)]\, dx}{1 - F(\alpha)} \,, \qquad b = \frac{\int_0^{\alpha} [1 - F(x)]\, dx}{1 - F(\alpha)}$$

és

$$\sigma_a^2 = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} x^2\, d\, F(x)}{1 - F(\alpha)} - \left(\frac{\int_{\alpha}^{\infty} x\, d\, F(x)}{1 - F(\alpha)} \right)^2 , \quad \sigma_b^2 = \frac{\int_0^{\alpha} x^2\, d\, F(x)}{1 - F(\alpha)} + \left(\frac{\int_0^{\alpha} x\, d\, F(x)}{1 - F(\alpha)} \right)^2 .$$

Továbbá ismét fennáll a következő határeloszlástétel

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\nu_T - MT}{DT^{1/2}} \leq x \right\} = \Phi(x) \,. \tag{9}$$

Ha a vizsgált T időtartam alatt N_1 klimatikai jelenség és N_2 biológiai jelenség fordult elő, akkor nagy T értékek esetén jó közelítéssel alkalmazhatjuk a

$$\tau^{-1} \cong \frac{N_1}{T} \quad \text{és} \quad \mu \cong \frac{N_2}{T}$$

becsléseket. Ezenkivül a klimatikai jelenségek folyamatából meg kell becsülni a σ^2 szórásnégyzetet és a

$$\int_0^\alpha dF(x)\,, \quad \int_0^\alpha x\,dF(x)\,, \quad \int_0^\alpha x^2\,dF(x)$$

integrálokat. Ha mindezen adatokat megbecsültük, akkor ezek segítségével *M* és *D* közelítő értéke meghatározható és az *a)* modellhez hasonlóan a hatás nagyságának mérésére ismét a

$$\Phi\left(\frac{\nu_T^* - MT}{DT^{1/2}}\right) \tag{10}$$

valószínűséget nyerjük.

3. §. Az állítások bizonyítása

Tekintsük a klimatikai jelenségek előfordulási pontjainak $\{t_n\}$ sorozatát. Fel van téve, hogy minden egyes klimatikai jelenség hatása egy α hosszúságú időintervallumra terjed ki, amely intervallumnak középpontja a klimatikai jelenség. Megállapodunk abban, hogy egy adott időpillanatban *B* állapotról beszélünk, ha ez az időpont klimatikai jelenség hatáskörébe esik, különben pedig *A* állapotról. Ezután összeszámláljuk azokat a $(0, T)$ időintervallumban előforduló biológiai jelenségeket, amelyek olyankor fordulnak elő, midőn *B* állapot van. Ezek számát jelöli a ν_T valószínűségi változó. Megjegyezzük, hogy ha $F(\alpha) = 1$, akkor csak *B* állapot van és így minden pont számításba veendő. Ettől a nyilvánvaló esettől eltekintve fel fogjuk tenni, hogy $F(\alpha) < 1$.

Mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy az egymást követő *A* és *B* állapotok időtartamai független valószínűségi változók, mégpedig külön az *A* és külön a *B* állapotok időtartamai egyforma eloszlású változók. Ez a megállapítás mindkét modellre vonatkozik. Ezért csak a *b)* modellel fogunk foglalkozni. Az *a)* modell ebből speciális esetként adódik, ha $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geqq 0)$.

Jelölje az ,,*A*-szakaszok" hosszának eloszlásfüggvényét $G(x)$, a ,,*B*-szakaszok" hosszának eloszlásfüggvényét pedig $H(x)$. Ezek az eloszlásfüggvények könnyen megállapíthatók.

Igy a $G(x)$ eloszlásfüggvényre könnyen láthatóan fennáll, hogy

$$G(x) = \frac{F(x+\alpha) - F(\alpha)}{1 - F(\alpha)}\,, \quad \text{ha} \quad x \geqq 0\,. \tag{11}$$

Ennek átlaga

$$a = \frac{\int_\alpha^\infty [1 - F(x)]\,dx}{1 - F(\alpha)} = \frac{\int_\alpha^\infty x\,d\,F(x)}{1 - F(\alpha)} - \alpha\,,$$

amely véges, ha $\tau < \infty$, szórásnégyzete pedig

$$\sigma_a^2 = \frac{\int\limits_a^\infty x^2 \, dF(x)}{1 - F(\alpha)} - \left(\frac{\int\limits_a^\infty x \, dF(x)^2}{1 - F(\alpha)} \right),$$

amely véges, ha $\sigma^2 < \infty$.

A $H(x)$ eloszlásfüggvényre viszont szintén könnyen láthatóan a következő integrálegyenlet írható fel:

$$H(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } & x < \alpha. \\ 1 - F(\alpha) + \int\limits_0^\alpha H(x - y) \, dF(y), \text{ ha } & x \geqq \alpha. \end{cases}$$

Ez megoldható Laplace—Stieltjes transzformáció alkalmazásával. Ily módon eljárva azt nyerjük, hogy

$$(12) \qquad \int\limits_0^\infty e^{-sx} \, dH(x) = \frac{[1 - F(\alpha)] \, e^{-s\alpha}}{1 - \int\limits_0^\alpha e^{-sy} \, dF(y)}.$$

Ebből adódik, hogy $H(x)$ átlaga

$$b = \frac{\int\limits_0^\alpha [1 - F(x)] \, dx}{1 - F(\alpha)} = \frac{\int\limits_0^\alpha x \, dF(x)}{1 - F(\alpha)} + \alpha,$$

szórásnégyzete pedig

$$\sigma_b^2 = \frac{\int\limits_0^\alpha x^2 \, dF(x)}{1 - F(\alpha)} + \left(\frac{\int\limits_0^\alpha x \, dF(x)}{1 - F(\alpha)} \right)^2,$$

Jelölje most $\beta(T)$ valószínűségi változó a $(0, T)$ időközben B állapotban töltött időtartamot. A $\beta(T)$ valószínűségi változó várható értékére és szórásnégyzetére fennáll, hogy

$$(13) \qquad \lim_{T \to \infty} \frac{\mathbf{M}\{\beta(T)\}}{T} = \frac{b}{a + b}$$

és

$$(14) \qquad \lim_{T \to \infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\beta(T)\}}{T} = \frac{a^2 \sigma_b^2 + b^2 \sigma_a^2}{(a + b)^3}.$$

(Vö. [6].) Nyilvánvaló, hogy rögzített $\beta(T)$ érték mellett a ν_T valószínűségi változó Poisson-eloszlást követ $\mu\beta(T)$ várható értékkel. Ekkor $\mathbf{M}\{\nu_T \mid \beta(T)\} = \mathbf{D}^2\{\nu_T \mid \beta(T)\} = \mu\beta(T)$. Következőleg a teljes várható érték-tétel alapján felírható, hogy

$$\mathbf{M}\{\nu_T\} = \mu \, \mathbf{M}\{\beta(T)\},$$

és innen (13) tekintetbevételével adódik, hogy

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\nu_T\}}{T} = \mu \frac{b}{a+b}, \tag{15}$$

ami igazolja az (1) és (7) képleteket. Továbbá felírható az is, hogy

$$\mathbf{D}^2\{\nu_T\} = \mu\, \mathbf{M}\{\beta(T)\} + \mu^2 \mathbf{D}^2\{\beta(T)\},$$

és innen (13) és (14) tekintetbe vételével adódik, hogy

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_T\}}{T} = \mu \frac{b}{a+b} + \mu^2 \frac{(a^2\sigma_b^2 + b^2\sigma_a^2)}{(a+b)^3}, \tag{16}$$

ami igazolja a (2) és (8) képleteket.

A (3), illetve (9) határértéktételek bizonyításához hivatkozunk [6] dolgozatunkra, amelyben kimutattuk, hogy fennáll a következő határeloszlástétel:

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\beta(T) - \dfrac{b}{a+b}T}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2\sigma_b^2 + b^2\sigma_b^2}{(a+b)^3}\right)T}} \leq x \right\} = \Phi(x). \tag{17}$$

Viszont a ν_T változó rögzített $\beta(T)$ mellett Poisson-eloszlású $\beta(T)\mu$ várható értékkel és így, mint ismeretes, fennáll, hogy

$$\lim_{\beta(T)\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\nu_T - \beta(T)\mu}{\sqrt{\beta(T)\mu}} \leq x \right\} = \Phi(x). \tag{18}$$

Tekintetbe véve, hogy a ν_T valószínűségi változó csupán a $\beta(T)$ függvénye, a (17) és (18) képletek alapján R. L. Dobrusin [1] tételének felhasználásával arra jutunk, hogy

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\nu_T - \dfrac{b\mu T}{a+b}}{\sqrt{\left(\mu\dfrac{b}{a+b} + \mu^2\dfrac{(a^2\sigma_b^2 + b^2\sigma_a^2)}{(a+b)^3}\right)T}} \leq x \right\} = \Phi(x),$$

ami igazolja a (3) és (9) határeloszlástételt (vö. még [7]).

4. §. Megjegyzés

Az eddigiekben pontszerű klimatikai jelenségeket tekintettünk. Feltételeztük, hogy mindegyik jelenségnek bizonyos hatóköre van és módszert adtunk annak eldöntésére, hogy beszélhetünk-e klimatikai hatásról vagy sem. Előfordulhat azonban, hogy ehelyett bizonyos klimatikai jelenség hatásának az intenzitása időről időre van megadva, azaz ismerünk bizonyos $\lambda(t)$ intenzitásfüggvényt ($0 \leq t \leq T$) és el akarjuk dönteni, hogy az u_1, u_2, $\ldots$, u_n, $\ldots$ időpontokban előforduló biológiai jelenségek úgy tekinthetők-e, mint az említett klimatikai hatás következményei.

Ebben az esetben feltételezzük, hogy a biológiai jelenségek $\lambda(t)$ eseménysűrűségű Poisson-folyamat eseményeivel egyeznek meg. Megállapítjuk, hogy ezen feltevés mellett milyen lesz a várható észlelés. Ha a tényleges észlelés ettől jelentéktelen eltérést mutat, akkor beszélhetünk hatásról, különben nem.

Képezzük a következő kifejezéseket: Legyen

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du, \qquad (0 \leqq t \leqq T)$$

és $\Lambda(T) = \Lambda$. Továbbá jelölje a $(0, t)$ időközben előforduló biológiai hatások számát $N(t)$, és legyen $N(T) = N$ a $(0, T)$ időközben előforduló összes biológiai hatások száma. Tekintsük továbbá az

$$L(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8x^2}} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)x) - \Phi((2k-1)x)] \qquad (x \geqq 0)$$

eloszlásfüggvényt, amelynek értékeit a 3. táblázat tünteti fel.

3. TÁBLÁZAT

x	L(x)	x	L(x)	x	L(x)	x	L(x)
0,30	0,000001	0,50	0,009157	0,70	0,102674	1,4	0,677027
0,32	0,000007	0,52	0,013287	0,75	0,142035	1,5	0,732785
0,34	0,000030	0,54	0,018514	0,80	0,185242	1,6	0,780806
0,36	0,000093	0,56	0,024911	0,85	0,230852	1,7	0,821739
0,38	0,000248	0,58	0,032523	0,90	0,277614	1,8	0,856279
0,40	0,000570	0,60	0,041362	0,95	0,324515	1,9	0,885134
0,42	0,001168	0,62	0,051414	1,00	0,370777	2,0	0,908999
0,44	0,002175	0,64	0,062637	1,10	0,459269	2,5	0,975161
0,46	0,003740	0,66	0,074973	1,20	0,540358	3,0	0,994600
0,48	0,006018	0,68	0,088348	1,30	0,612990	3,5	0,999069

A konfidencia-intervallumok szokásos eljárását követve a következőképpen járhatunk el. Kiszámítjuk a

$$\gamma_T = \sqrt{N} \max_{0 \leq t \leq T} \frac{|\Lambda(t) - N(t)|}{\Lambda}$$

értéket és a hatás nagyságának mérésére az

$$1 - L(\gamma_T)$$

valószínűséget fogadjuk el.

A fenti módszer bizonyítására M. Kac [3] tételét használjuk fel. Eszerint, ha $R(x)$ egy tetszőleges folytonos eloszlásfüggvény és véletlen elemszámú mintát tekintünk, ahol a minta elemeinek a száma Poisson-eloszlást követ ϱ várható értékkel és $R_\varrho(x)$ jelöli a minta x-nél kisebb elemei számának és ϱ-nak a hányadosát, akkor fennáll, hogy

$$\lim_{\varrho \to \infty} \mathbf{P}\left\{ \max_{-\infty < y < \infty} |R(y) - R_\varrho(y)| < \frac{x}{\sqrt{\varrho}} \right\} = L(x) \qquad (x \geqq 0) .$$

Most esetünkben a biológiai jelenségek előfordulási pontjai úgy tekinthetők, mint az $R(x) = \Lambda(x)/\Lambda$ $(0 \leqq x \leqq T)$ folytonos eloszlásfüggvényű sokaságból vett véletlen számú minta elemei, ahol az elemek száma Poisson-eloszlást mutat. A Poisson-eloszlású változó várható értékének a becslésére pedig az N számot használhatjuk fel.

(Beérkezett: 1957. VIII. 31.)

IRODALOM

[1] Добрушин, Р. Л.: „Лемма о пределе сложной случайной функции". *Успехи Математических Наук СССР* **10**: 2 (1955) 157—159.

[2] Horváth, L.G.: „Az időjárás változások és az ipari balesetek". *Időjárás* **60** (1956) 88—96.

[3] Kac, M.: „On deviation between theoretical and empirical distribution". *Proceedings of the National Academy of Sciences of U. S. A.* **35** (1949) 252—257.

[4] Schelling, H. von: „Die Bedeutung der statistischen Methodik für die Biologie". *Ergebnisse der Hygiene, Bakteriologie, Immunitätsforschung und Experimentelle Therapie* **24** (1941) 87—149.

[5] Takács L.: „Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása bizonyos meteoropatológiai jelenségek vizsgálatánál". *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 301—320.

[6] Takács, L.: „On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 169—191.

[7] Takács, L.: „On a generalization of the renewal theory". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 91—103.

О ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНОМ ИССЛЕДОВАНИИ МЕТЕОРО-ПАТОЛОГИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

L. TAKÁCS

Резюме

При исследовании метеоропатологических явлений часто встречается следующая задача: В определённых моментах времени $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ происходят некоторые климатические явления (например, метеорологические фронты). В то же время в моменты $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ происходят и некоторые биологические явления. Предположим, что климатические явления дают себя чувствовать в течении α времени. (Моменты t_n считаются серединами отрезков длины α.) Наблюдения относятся к определённому отрезку времени $(0, T)$. Спрашивается, с какой вероятностью можно утверждать, что биологические явления возникают под влиянием климатических явлений.

Автор в работе [5] изложил математический метод, основанный на диаграмме Schelling-а. Настоящая работа занимается математическим исследованием более просто осуществимого метода.

Предполагается, что для последовательности климатических явлений $\{t_n\}$ разности $t_{n+1} - t_n$ суть независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$. После этого предполагается, что климатические явления не имеют последствий. Тогда можно предположить, что последовательность биологических явлений $\{u_n\}$ есть процесс

Poisson-a с плотностью событий μ, который не зависит от последовательности $\{t_n\}$. Пусть при таких обстоятельствах случайная величина ν_T обозначает число биологических явлений из интервалла $(0, T)$, располагающихся в окрестности радиуса α климатических явлений. А фактически наблюдаемое число есть ν_T^*. Согласно привычному методу исследования гипотезы примем вероятность

$$\mathbf{P}\{\nu_T \leqq \nu_T^*\}$$

как меры влияния.

Доказывается, что имеет место

$$\lim_{T \to \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_T - MT}{DT^{1/2}} \leqq x\right\} = \Phi(x)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

далее

$$M = \mu \frac{b}{a+b}$$

и

$$D^2 = \mu \frac{b}{a+b} + \mu^2 \frac{a^2 \sigma_b^2 + b^2 \sigma_a^2}{(a+b)^3} ,$$

где

$$a = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} [1 - F(x)]\, dx}{1 - F(\alpha)} , \quad b = \frac{\int_{0}^{\alpha} [1 - F(x)]\, dx}{1 - F(\alpha)}$$

и

$$\sigma_a^2 = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} x^2\, d\, F(x)}{1 - F(\alpha)} - \left(\frac{\int_{\alpha}^{\infty} x d\, F(x)}{1 - F(\alpha)}\right)^2 , \quad \sigma_b^2 = \frac{\int_{0}^{\alpha} x^2 d\, F(x)}{1 - F(\alpha)} + \left(\frac{\int_{0}^{\alpha} x d\, F(x)}{1 - F(\alpha)}\right)^2 .$$

Найденное предельное распределение для больших значений T может быть принято в качестве приближённого распределения и тогда

$$\Phi\left(\frac{\nu_T^* - MT}{DT^{1/2}}\right)$$

является мерой того, что климатические явления оказывают влияние на моменты, в которых случаются биологические события.

Если, в частности, $\{t_n\}$ ест процесс Poisson-а с плотностью событий λ, т. е. если $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geqq 0)$, то

$$M = \mu(1 - e^{-\lambda a})$$

и

$$D^2 = \mu\left\{(1 - e^{-\lambda a}) + \frac{2\mu}{\lambda} e^{-\lambda a}\left[1 - (1 + \lambda a) e^{-\lambda a}\right]\right\}.$$

Если за время T происходит N_1 климатических и N_2 биологических явлений, то параметры λ и μ могут быть оценены следующим образом

$$\lambda \cong \frac{N_1}{T} \quad \text{и} \quad \mu \cong \frac{N_2}{T}.$$

Работа, в заключение, исследует, могут ли биологические явления считаться следствиями кламатического явления, непрерывно протекающего с интенсивностью $\lambda(t)$ $(0 \leqq t \leqq T)$.

PROBABILISTIC TREATMENT OF METEOROPATHOLOGICAL PHENOMENA

by

L. TAKÁCS

Abstract

The following problem arises frequently in connection with the investigation of meteoropathological phenomena. Certain climatic phenomena (e. g. meteorological frontal passages) occur at the instants $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ and certain biological phenomena occur at the instants $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Let us suppose that every meteorological front gives rise to an effect extended over an interval with length α. (Choose the instants t_n as the centres of the corresponding intervals.) The instants of the phenomena occurring in the time interval $(0, T)$ are given and it is to be decided in what degree the biological phenomena can be considered as an effect of the meteorological fronts.

Earlier the author [5] communicated a mathematical method based on the diagram of SCHELLING. Now an other mathematical method will be investigated which is based on a simpler procedure as that of SCHELLING.

We restrict ourselves to the case when the time differences $t_{n+1} - t_n$ are identically distributed independent, positive random variables with distribution function $F(x)$.

We suppose that the climatic phenomena have no effect. In this case it is reasonable to suppose that the sequence of the biological phenomena $\{u_n\}$ formsa Poisson process with density μ and $\{u_n\}$ is independent of the sequence $\{t_n\}$. Under these conditions denote by ν_T the number of those biological phenomena occurring in the time interval $(0, T)$ which are falling into the intervals corresponding to the meteorological phenomena. Further denote by ν_T^* the actually observed number of the mentioned biological phenomena. The probability $\mathbf{P}\{\nu_T \leqq \nu_T^*\}$ will be considered as a measure of the effect of the meteorological phenomena.

It is shown that

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_T - MT}{DT^{1/2}} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\,,$$

where

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\,,$$

further

$$M = \mu\frac{b}{a+b}$$

and

$$D^2 = \mu\frac{b}{a+b} + \mu^2\frac{a^2\sigma_b^2 + b^2\sigma_a^2}{(a+b)^3}\,.$$

with the notation

$$a = \frac{\int_{\alpha}^{\infty}[1 - F(x)]\,dx}{1 - F(\alpha)}\,, \qquad b = \frac{\int_{0}^{\alpha}[1 - F(x)]\,dx}{1 - F(\alpha)}$$

and

$$\sigma_a^2 = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} x^2 d\,F(x)}{1 - F(\alpha)} - \left(\frac{\int_{\alpha}^{\infty} x d\,F(x)}{1 - F(\alpha)}\right)^2, \qquad \sigma_b^2 = \frac{\int_{0}^{\alpha} x^2 d\,F(x)}{1 - F(\alpha)} + \left(\frac{\int_{0}^{\alpha} x d\,F(x)}{1 - F(\alpha)}\right)^2.$$

If T is large enough, then the limiting distribution of ν_T can be considered as an approximative distribution of ν_T and in this case it can be written with good approximation:

$$\mathbf{P}\{\nu_T \leq \nu_T^*\} \simeq \Phi\left(\frac{\nu_T^* - MT}{DT^{1/2}}\right)$$

i. e. the right side of the above relation will be approximatively the measure of the effect of the meteorological phenomena.

If, particularly, $\{t_n\}$ forms a Poisson process with density λ, i. e. $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$, then

$$M = \mu(1 - e^{-\lambda\alpha})$$

and

$$D^2 = \mu\left\{(1 - e^{-\lambda\alpha}) + \frac{2\mu}{\lambda}e^{-\lambda\alpha}[1 - (1 + \lambda\alpha)e^{-\lambda\alpha}]\right\}.$$

When N_1 climatic phenomena and N_2 biological phenomena occurred in the time interval $(0, T)$, then the parameters λ and μ can be estimated as follows:

$$\lambda \cong \frac{N_1}{T} \quad\text{and}\quad \mu \cong \frac{N_2}{T}\,.$$

Finally the problem is treated whether the biological phenomena can be considered as an effect of some climatical phenomena acting concontinuously with intensity $\lambda(t)$ $(0 \leq t \leq T)$.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllősy Károly

A kézirat beérkezett: 1958. VII. 10. — Példányszám: 1100. — Terjedelem: 11½ (A/5) ív

46203/58 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernáth György

СОДЕРЖАНИЕ

INDEX

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

III. ÉVFOLYAM, 3—4. FÜZET
1958

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ III., ВЫПУСК 3—4.
1958

★

PUBLICATIONS

OF THE

MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME III., FASC. 3—4.
1958

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1959

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

III. ÉVFOLYAM, 3—4. FÜZET
1958

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ III., ВЫПУСК 3—4.
1958

★

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME III., FASC. 3—4.
1958

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1959

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

„A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI"
című kiadványsorozat folytatása

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD
TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS
A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden évfolyama 4 füzetből áll és körülbelül 30 nyomdaív terjedelmű. A dolgozatok vagy valamelyik világnyelven jelennek meg, magyar és még egy világnyelven írt részletes kivonattal, vagy pedig magyarul, két világnyelven írt részletes kivonattal. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük 2 gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15.).

A folyóirat, amelynek első évfolyama 1956-ban jelent meg, folytatása a „Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei" című kiadványsorozatnak, amelynek összesen három kötete jelent meg: I. kötet (1952), II. kötet (1953), III. kötet (1954).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára évfolyamonként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. *Belföldi* megrendelések az Akadémiai Kiadón keresztül adhatók fel (Budapest V. Alkotmány u. 21., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 15.915.111—46), *külföldi* megrendelések a Posta Központi Hírlap Iroda útján eszközölhetők (Budapest V. József nádor tér 1., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 61.257). A folyirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V. Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15.)

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

Продолжение издания
«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI
ТЕХНИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР: TAMÁS LIPTÁK
АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Иститута, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала выходит в 4 выпусках и содержит приблизительно 30 печатных листов. Статьи публикуются либо на каком-нибудь мировом языке с подробным резюме на венгерском и каком-нибудь другом мировом языке, либо на венгерском языке с подробным резюме на двух мировых языках. Работы, предназначенные для опубликования, просим посылать в двух напечатанных на машинке экземплярах вместе с резюме в адрес редакции (Budapest, V. Reáltanoda u. 13/15.).

Журнал, первый том которого вышел в 1956 году, является продолжением издания «A Magyar Tndományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» (Труды Института Прикладной Математики Академии Наук Венгрии) вышедшего в трёх томах: Том I. (1952), Том II. (1953), Том III. (1954).

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов за каждый том. Местные заказы принимает Издательство Академии Наук (Budapest V., Alkotmány u. 21., счёт Венгерского Национального Банка 15.915.111—46), заграничные заказы принимает Центральная Журнальная Контора Почты (Budapest V. József nádor tér 1., счёт Венгерского Национального Банка 61.257). По поводу отнощения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

continuing the series
«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI
TECHNICAL EDITOR: TAMÁS LIPTÁK
ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers and papers on the practical applications of mathematics. The journal is published quarterly, 4 fasciculi are forming a volume consisting of about 30 printed lists. The papers appear either in a world-language with abstract in Hungarian and in an other world-language, or in Hungarian with abstracts in two world-languages. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The journal, the first-volume of which appeared in 1956, continues the series «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» (Publications dee l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Adadémie des Sciences de Hongrie) of which 3 volumes were published altogether: Volume I. (1952), Volume II. (1953), Volume III. (1954).

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft to abroad. Subscriptions can be made at the Academic Publishing House in Hungary (Budapest V. Alkotmány u. 21., single account number in the Hungarian National Bank 15.915.111—46) resp. at the Posta Központi Hírlap Iroda from abroad (Budapest V. József nádor tér 1., single-account number in the Hungarian National Bank 61.257). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V. Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

REMARQUE SUR LA SOMMABILITÉ DES SÉRIES DE TAYLOR SUR LEURS CERCLES DE CONVERGENCE, II.

par

LÁSZLÓ ALPÁR

§ 1. Introduction

Dans l'article présent nous allons continuer l'examen de certaines relations qui lient entre elles les séries de Taylor des deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ régulières dans le cercle-unité et qu'on obtient l'une de l'autre par la transformation suivante

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right), \tag{1.1}$$

où $\zeta_0 \neq 0$ est un point intérieur du cercle $|z| < 1$. La relation (1.1) transforme la série de Taylor de

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1.2}$$

en

$$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu . \tag{1.3}$$

Le problème qui nous occupe peut être formulé d'une manière générale comme suit : Si l'on connaît le comportement de la série (1.2) au point $z = 1$, quelle conclusion peut-on en tirer sur l'allure de la série (1.3) au point

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0},$$

solution de l'équation

$$\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z} = 1 \;?$$

Or, abstraction faite d'une déformation «modérée», les valeurs de la fonction $f_1(z)$ au voisinage du point $z = 1$ sont sensiblement les mêmes que celles de $f_2(z)$ prises au voisinage du point

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0};$$

de plus le fait analogue subsiste quant à l'allure des valeurs de $f_1(z)$ et de

$f_2(z)$ pour chaque couple de points correspondants z_1 et z_2 situés sur la frontière du cercle $|z| \leqq 1$, à savoir tels que

$$z_1 = \frac{z_2 - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} .$$

Supposons maintenant la série de Taylor de $f_1(z)$ convergente au point $z = 1$, donc $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = 0$. Par conséquent, en évoquant le théorème de localisation de Riemann, on pourrait croire que la convergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

entraîne celle de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu .$$

Par contre, M. P. TURÁN a obtenu à ce sujet les résultats suivants [1] :

1. On peut trouver des fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ telles que malgré la convergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu , \tag{1.4}$$

la série correspondante

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu \tag{1.5}$$

soit divergente.

2. Si la série (1.2) *est sommable au sens d'Abel au point $z = 1$, la série* (1.3) *possède la même propriété au point*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} ,$$

quelle que soit la fonction $f_1(z)$ régulière dans le cercle $|z| < 1$.

Cette propriété particulière des fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ nous a amené à continuer l'étude de ces questions, et en généralisant le résultat de M. TURÁN, nous avons démontré [2] le théorème suivant :

3. Pour chaque k entier positif on peut trouver des fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ telles que malgré la sommabilité (C,k) de la série (1.4), *la série* (1.5) *ne soit pas sommable (C,k).*

Le but de ces recherches précédentes était d'établir des relations entre des procédés de sommation d'un même type et du même ordre : c'est ainsi qu'on a trouvé des relations entre convergence et convergence, sommabilité Abel et sommabilité Abel, sommabilité (C, k) et sommabilité (C, k). Par la suite nous voudrions répondre à des questions qui concernent des procédés de sommation d'ordres différents. Notamment, nous nous proposons de décider si la convergence de la série (1.4) assure la sommabilité $(C, 1)$ de la série (1.5), ou plus généralement si la sommabilité (C, k) de la série (1.4) entraîne la sommabilité $(C, k+1)$ de la série (1.5) pour des $k \geqq 0$ entiers. La réponse est affirmative.

Théorème : *Soient k un entier non négatif, $\zeta_0 \neq 0$ un point intérieur du cercle-unité, et*

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

une fonction régulière dans le cercle $|z| < 1$, ayant encore la propriété que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

est sommable (C, k) au point $z = 1$. Alors la série déterminée par la relation

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu$$

est sommable $(C, k+1)$ au point

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0},$$

et en outre la somme (C, k) de la première série est égale à la somme $(C, k+1)$ de la seconde.

Pour $k = 0$ nous obtenons un cas particulier important de ce théorème : *La convergence de la série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

implique toujours la sommabilité $(C, 1)$ de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu,$$

et la somme de la première série est égale à la somme $(C, 1)$ de la seconde.

Dans la suite nous allons garder les notations employées dans la partie I de cet article (voir [2]). On désignera donc par $\alpha_n^{(k)}$ la n-ième moyenne (C, k) de la série (1.4) et par $\beta_n^{(k)}$ celle de la série (1.5). Soient en outre, si ces deux limites existent,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(k)} = \alpha^{(k)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n^{(k)} = \beta^{(k)}. \tag{1.6}$$

Avec ces notations le théorème que nous venons d'énoncer s'exprime ainsi : l'existence de $\alpha^{(k)}$ entraîne toujours l'existence de $\beta^{(k+1)}$ et

$$\alpha^{(k)} = \beta^{(k+1)}. \tag{1.7}$$

L'idée de la démonstration est d'établir entre les $\alpha_n^{(k)}$ et les $\beta_n^{(k+1)}$ une relation de la forme

$$\beta_n^{(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)}, \tag{1.8}$$

où $\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ ne dépend pas du choix particulier de la fonction $f_1(z)$, mais seulement des quantités k, n, ν et ζ_0. La relation (1.8) définit un procédé de sommation à matrice $[\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ et nous vérifierons qu'elle satisfait aux conditions de la régularité de TOEPLITZ—SCHUR, donc $\beta^{(k+1)}$ existent et l'égalité (1.7) est vérifiée.

§ 2. Détermination du procédé de sommation

Dans la partie I (voir [2]) nous avons établi entre $\alpha_n^{(k)}$ et $\beta_n^{(k)}$ la relation suivante :

$$\binom{n+k}{k}\beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+k}{k} p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\,\alpha_\nu^{(k)}\,, \tag{2.1}$$

où

$$p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k}\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar\zeta_0}\right)^n \int\limits_{|\omega|=\varrho} \omega^\nu \left(\frac{1+\bar\zeta_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1}(1+\bar\zeta_0\,\omega)^{k-1}d\omega\ , \tag{2.2}$$

et ϱ est une constante, telle que $|\zeta_0| < \varrho < 1$ (voir [2], (2.14) et (2.15)).

D'autre part, selon la définition de $\beta_n^{(k+1)}$, on a

$$\begin{aligned}\beta_n^{(k+1)} &= \frac{\sum\limits_{m=0}^{n}\binom{m+k}{k}\beta_m^{(k)}}{\binom{n+k+1}{k+1}} = \frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+k}{k}\alpha_\nu^{(k)}\left[\sum_{m=0}^{n}p_{m\nu}^{(k)}(\zeta_0)\right] = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\,\alpha_\nu^{(k)}\ .\end{aligned} \tag{2.3}$$

En posant l'expression (2.2) de $p_{m\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ dans (2.3) et en faisant la somme de la série géometrique finie qui y figure, nous obtenons la formule

$$\begin{aligned}\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) &= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}\,\frac{1+\bar\zeta_0}{\binom{n+k+1}{k+1}}\ \times \\ &\times \int\limits_{|\omega|=\varrho}\binom{\nu+k}{k}\omega^\nu\,\frac{(1+\bar\zeta_0\,\omega)^k}{1-\omega}\left[\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar\zeta_0}\,\frac{1+\bar\zeta_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1}-1\right]d\omega\end{aligned} \tag{2.4}$$

qui peut prendre aussi la forme

$$\begin{aligned}\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) &= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{(1+\zeta_0)^{k+2}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar\zeta_0}\right)^n\frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}\ \times \\ &\times \int\limits_{|\omega|=\varrho}\binom{\nu+k}{k}\omega^\nu\,\frac{(1+\bar\zeta_0\,\omega)^k}{1-\omega}\left(\frac{1+\bar\zeta_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1}d\omega\ ,\end{aligned} \tag{2.5}$$

puisque la fonction

$$\omega^\nu \frac{(1+\bar{\zeta}_0\,\omega)^k}{1-\omega}$$

est holomorphe dans le cercle $|\omega| = \varrho$.

La détermination de la matrice $[\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ est donc achevée. Nous avons trouvé deux formules différentes pour $\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$: les expressions (2.4) et (2.5). Nous profiterons de toutes les deux. La formule (2.5) a l'avantage que la fonction qui y figure sous le signe d'intégrale n'a pas de pôle sur la frontière du cercle-unité, cette dernière peut donc être prise comme contour d'intégration au lieu du cercle $|\omega| = \varrho$.

Pour simplifier l'écriture nous introduisons encore certaines notations. Soient : $\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) = \gamma_{n\nu}^{(k)}$;

$$h_k(\omega) = \frac{(1+\bar{\zeta}_0\,\omega)^k}{1-\omega}\left[\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\,\frac{1+\bar{\zeta}_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1} - 1\right]\ ; \tag{2.6}$$

$$g(\omega) = \binom{\nu+k}{k}\omega^\nu \frac{(1+\bar{\zeta}_0\,\omega)^k}{1-\omega}\left(\frac{1+\bar{\zeta}_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1}\ ; \tag{2.7}$$

$$c_n^{(k)} = \frac{(1+\zeta_0)^{k+2}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n . \tag{2.8}$$

On voit que

$$|c_n^{(k)}| = \left|\frac{(1+\zeta_0)^{k+2}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}\right| \tag{2.9}$$

est une constante qui ne dépend ni de n ni de ν. Avec ces notations

$$\gamma_{n\nu}^{(k)} = \frac{c_n^{(k)}}{2\pi i}\left(\frac{1+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0}\right)^{n+1}\frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}\int\limits_{|\omega|=1}\binom{\nu+k}{k}\omega^\nu h_k(\omega)\,d\omega\ , \tag{2.10}$$

ou

$$\gamma_{n\nu}^{(k)} = \frac{c_n^{(k)}}{2\pi i}\,\frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}\int\limits_{|\omega|=\varrho} g(\omega)\,d\omega\ . \tag{2.11}$$

§ 3. Les deux premières conditions de la régularité

Les conditions de la régularité de Toeplitz—Schur sont réalisées,

I. *si* $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{n\nu}^{(k)} = 0$ *pour chaque* ν *fixé ;*

II. *si* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\gamma_{n\nu}^{(k)} = 1$;

III. *s'il existe une constante* $K^{(k)}$ *telle que l'inégalité*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K^{(k)}$$

soit toujours vérifiée indépendamment de n.

Dans ce § nous nous occupons seulement des deux premières conditions.

La condition I est réalisée.

Démonstration: Soit $R > 1$ une constante quelconque et considérons l'intégrale (2.11) en y remplaçant le chemin d'intégration $|\omega| = \varrho$ par celui de $|\omega| = R$. Dans ce dernier cercle, la fonction $g(\omega)$ a deux pôles : $\omega = -\zeta_0$ et $\omega = 1$, et par suite

$$\delta_{n\nu}^{(k)} = \frac{c_n^{(k)}}{2\pi i} \frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}} \int_{|\omega|=R} g(\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{c_n^{(k)}}{\binom{n+k+1}{k+1}} [\operatorname{Res} g(\omega)_{|\omega=-\zeta_0} + \operatorname{Res} g(\omega)_{|\omega=1}] =$$

$$(3.1) \qquad = \gamma_{n\nu}^{(k)} + c_n^{(k)} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} (1+\bar{\zeta}_0)^k \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0}\right)^{n+1} =$$

$$= \gamma_{n\nu}^{(k)} + \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} \frac{|1+\zeta_0|^{2(k+1)}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}} .$$

Par conséquent

$$(3.2) \qquad \lim_{n\to\infty} (\delta_{n\nu}^{(k)} - \gamma_{n\nu}^{(k)}) = 0 .$$

C'est donc la valeur absolue de l'intégrale

$$\int_{|\omega|=R} g(\omega)\, d\omega$$

que nous devons évaluer.

En tenant compte de (2.7) on a

$$(3.3) \qquad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=R} g(\omega)\, d\omega \right| \leq$$

$$\leq \binom{\nu+k}{k} R^{\nu+1} \max_{|\omega|=R} |1+\bar{\zeta}_0\omega|^k \max_{|\omega|=R} \frac{1}{|1-\omega|} \max_{|\omega|=R} \left| \frac{1+\bar{\zeta}_0\,\omega}{\omega+\zeta_0} \right|^{n+1} .$$

Or, en posant $\omega = Re^{i\varphi}$, $\zeta_0 = re^{i\alpha}$ il est facile de voir que

$$(3.4)\qquad \begin{gathered} \max_{|\omega|=R} |1 + \bar{\zeta}_0 \omega| = 1 + rR \ , \qquad \max_{|\omega|=R} \frac{1}{|1-\omega|} = \frac{1}{R-1} \ , \\ \max_{|\omega|=R} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right| = \frac{1 + rR}{R + r} \ . \end{gathered}$$

Des relations (3.1), (3.3) et (3.4) nous pouvons donc conclure que

$$(3.5)\qquad |\delta_{n\nu}^{(k)}| \leq \frac{|c_n^{(k)}|}{\binom{n+k+1}{k+1}} \binom{\nu+k}{k} \frac{R^{\nu+1}}{R-1} (1 + rR)^k \left(\frac{1 + rR}{R + r} \right)^{n+1} ,$$

dont le membre droit tend vers zéro quand $n \to \infty$. Par conséquent l'expression (3.2) permet d'écrire

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = 0 \ .$$

La condition II est réalisée.

Démonstration: Nous allons démontrer que pour chaque n fixé:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = 1 \ .$$

La condition II se trouve donc réalisée. En partant de la formule (2.5) on obtient

$$(3.6)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = \frac{c_n^{(k)}}{2\pi i} \frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}} \int_{|\omega|=\varrho} \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^k}{(1-\omega)^{k+2}} \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^{n+1} d\omega \ .$$

Posons ensuite $\omega = \dfrac{1}{u}$, (3.6) devient

$$(3.7)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = \frac{c_n^{(k)}}{2\pi i} \frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}} \int_{|u|=\frac{1}{\varrho}} \frac{(1 + \zeta_0 u)^k}{(u-1)^{k+2}} \left(\frac{u + \bar{\zeta}_0}{1 + \zeta_0 u} \right)^{n+k+1} du \ .$$

La fonction à intégrer n'a qu'un seul pôle $u = 1$ dans le cercle $|u| = 1/\varrho$, le théorème du résidu fournit donc la valeur de l'intégrale en question. Nous avons déjà déterminé cette intégrale (voir [2], (2.21) ou (2.22)) et nous avons trouvé que

$$(3.8)\qquad \begin{gathered} \frac{d^{k+1}}{du^{k+1}} \left[\left(\frac{u + \bar{\zeta}_0}{1 + \zeta_0 u} \right)^{n+k+1} (1 + \zeta_0 u)^k \right] = \\ = (n+k+1)(n+k) \ldots (n+1) \frac{(1 - |\zeta_0|^2)^{k+1}}{(1 + \zeta_0 u)^{k+2}} \left(\frac{u + \bar{\zeta}_0}{1 + \zeta_0 k} \right)^n , \end{gathered}$$

d'où pour $u = 1$, en vertu de (3.7), on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = 1 .$$

Remarque: M. J. CZIPSZER a démontré sans calcul direct par le choix particulier de la fonction $f_1(z)$ que les conditions I et II sont réalisées. La démonstration est la suivante :

1° Soit

$$f_1(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu z^\mu$$

une fonction pour laquelle $\alpha_\lambda^{(k)} = 0$, si $\lambda \neq \nu$, et $\alpha_\nu^{(k)} = 1$. De la suite des nombres $\alpha_\lambda^{(k)}$ on obtient a_μ par la formule

$$a_\mu = \sum_{\lambda=\mu-k-1}^{\mu} (-1)^{\mu-\lambda} \binom{k+1}{\mu-\lambda} \binom{\lambda+k}{k} \alpha_\lambda^{(k)}$$

([3], II. p. 71.) en prenant 0 pour les $\alpha_\lambda^{(k)}$, si λ est négatif; d'où, vu les valeurs particulières des $\alpha_\lambda^{(k)}$, on tire

$$a_\mu = (-1)^{\mu-\nu} \binom{k+1}{\mu-\nu} \binom{\nu+k}{k} ,$$

si $\nu \leqq \mu \leqq \nu + k + 1$, et $a_\mu = 0$ dans tous les autres cas. $f_1(z)$ est donc un polynôme, et à plus forte raison une fonction régulière sur le cercle fermé $|z| \leqq 1$, et de plus

$$f_1(1) = \lim_{\mu \to \infty} \alpha_\mu^{(k)} = 0 .$$

On en conclue que $f_2(z)$ est aussi régulière sur le même cercle fermé et sa série de Taylor tend vers zéro au point

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} ;$$

on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n^{(k)} = 0$. D'autre part

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_{n\mu}^{(k)} \alpha_\mu^{(k)} = \gamma_{n\nu}^{(k)} ,$$

et par suite $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = 0$.

2° Soit $f_1(z) \equiv 1$. Dans ce cas $\alpha_\nu^{(k)} = 1$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. $f_2(z) \equiv 1$, et $\beta_n^{(k)} = 1$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ainsi

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} \alpha_\nu^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = 1 .$$

§ 4. La troisième condition de la régularité

Pour démontrer l'existence d'une constante $K^{(k)}$ telle que l'inégalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K^{(k)} \tag{4.1}$$

soit toujours vérifiée indépendamment de n on procède par la décomposition en deux parties de la série qui figure dans l'inégalité (4.1) :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| = \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \,, \tag{4.2}$$

où

$$\nu_0 = \lambda_0(n+1) \tag{4.3}$$

et λ_0 est une constante entière et positive, indépendante de n dont la valeur sera fixée plus tard. On démontrera l'existence de deux constantes $K_1^{(k)}$ et $K^{(k)}$ indépendantes de n pour lesquelles les inégalités

$$\sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K_1^{(k)} \,, \qquad \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K_2^{(k)} \tag{4.4}$$

sont vérifiées.

Pour des raisons qui deviennent évidentes au cours de la démonstration, nous nous occupons d'abord de $K_2^{(k)}$.

1° Détermination de $K_2^{(k)}$. Il résulte de (2.11) que

$$\begin{aligned} &|\gamma_{n\nu}^{(k)}| \leqq \\ &\leqq \frac{|c_n^{(k)}|}{\binom{n+k+1}{k+1}} \binom{\nu+k}{k} \varrho^{\nu+1} \max_{|\omega|=\varrho} |1+\bar{\zeta}_0\,\omega|^k \max_{|\omega|=\varrho} \frac{1}{|1-\omega|} \max_{|\omega|=\varrho} \left|\frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0}\right|^{n+1} . \end{aligned} \tag{4.5}$$

En posant $\omega = \varrho\, e^{i\varphi}$ et encore $\zeta_0 = re^{i\alpha}$ il est simple de voir que

$$\max_{|\omega|=\varrho} |1+\bar{\zeta}_0\,\omega| = 1 + r\varrho \,, \quad \max_{|\omega|=\varrho} \frac{1}{|1-\omega|} = \frac{1}{1-\varrho} \,, \tag{4.6}$$

$$\max_{|\omega|=\varrho} \left|\frac{1+\bar{\zeta}_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right| = \frac{1-r\varrho}{\varrho-r} > 1 \,,$$

donc

$$|\gamma_{n\nu}^{(k)}| \leqq \frac{|c_n^{(k)}|}{\binom{n+k+1}{k+1}} \binom{\nu+k}{k} \frac{\varrho^{\nu+1}}{1-\varrho} (1+r\varrho)^k \left(\frac{1-r\varrho}{\varrho-r}\right)^{n+1} , \tag{4.7}$$

et

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \leqq \frac{|c_n^{(k)}|}{\binom{n+k+1}{k+1}} \frac{\varrho(1+r\varrho)^k}{(1-\varrho)^{k+2}} \left(\frac{1-r\varrho}{\varrho-r}\right)^{n+1} . \tag{4.8}$$

Or, en vertu de la troisième inégalité (4.6), le membre droit de l'expression (4.8) tend vers $+\infty$ avec n, et (4.8) ne fournit ainsi aucun renseignement utile. C'est pour cette raison que nous avons décomposé en deux parties la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \, .$$

Au lieu de (4.8), considérons donc la relation suivante déduite de (4.7) :

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \leqq \frac{|c_n^{(k)}|}{\binom{n+k+1}{k+1}} \frac{\varrho(1+r\varrho)^k}{\varrho - r} \left(\frac{1-r\varrho}{\varrho - r}\right)^{n+1} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \varrho^{\nu} , \tag{4.9}$$

où ν_0 est défini par (4.3) et λ_0 reste encore indéterminé. Pour évaluer la somme qui intervient dans le membre droit de l'inégalité (4.9), nous appliquons la formule

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \varrho^{\nu} &= \binom{\nu_0+k}{k} \varrho^{\nu_0} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{\nu_0+k}{k}} \varrho^{\nu-\nu_0} \leqq \\ &\leqq \binom{\nu_0+k}{k} \varrho^{\nu_0} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \binom{\nu-\nu_0+k}{k} \varrho^{\nu-\nu_0} = \frac{\binom{\nu_0+k}{k} \varrho^{\nu_0}}{(1-\varrho)^{k+1}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

à cause de l'inégalité évidente

$$\frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{\nu_0+k}{k}} \leqq \binom{\nu-\nu_0+k}{k} , \quad (\nu \leqq \nu_0) \, .$$

Ainsi, de (4.9), (4.10) et (4.3) :

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \leqq |c_n^{(k)}| \frac{\varrho(1+r\varrho)^k}{(1-\varrho)^{k+2}} \frac{\binom{\nu_0+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} \left(\varrho^{\lambda_0} \frac{1-r\varrho}{\varrho-r}\right)^{n+1} . \tag{4.11}$$

On choisira λ_0 de telle façon que l'inégalité

$$\varrho^{\lambda_0} \frac{1-r\varrho}{\varrho-r} < 1 \tag{4.12}$$

soit vérifiée. Il suffit de prendre

$$\lambda_0 = 1 + \left[\frac{\log \dfrac{\varrho-r}{1-r\varrho}}{\log \varrho}\right] \geqq 2 , \tag{4.13}$$

pour que l'inégalité (4.12) soit valable (on désigne par $[x]$ la partie entière du nombre x). La formule (4.3) détermine ν_0 aussi.

On vérifie encore sans difficulté la relation

$$\frac{\binom{\nu_0+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} \leqq \frac{\lambda_0^k(k+1)}{n+1} \leqq \lambda_0^k(k+1) \ . \tag{4.14}$$

En effet, selon l'expression (4.13) on a $\lambda_0 > 1$, et ainsi

$$\frac{\binom{\nu_0+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} = \frac{k+1}{n+1} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{\nu_0+k-l}{n+1+k-l} =$$

$$= \frac{k+1}{n+1} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{\lambda_0 + \frac{k-l}{n+1}}{1+\frac{k-l}{n+1}} \leqq \frac{\lambda_0^k(k+1)}{n+1} \ .$$

En tenant compte de (4.12) et (4.14) nous pouvons enfin écrire

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < \lambda_0^k(k+1)\, |c_n^{(k)}| \frac{\varrho(1+r\varrho)^k}{(1-\varrho)^{k+2}} = K_2^{(k)} \ . \tag{4.15}$$

Nous avons déjà remarqué (voir (2.9)) que $|c_n^{(k)}|$ est indépendant de n, et en vertu de la formule (4.15), $K_2^{(k)}$ possède la même propriété.

2°. *Détermination de* $K_1^{(k)}$. [1] C'est cette partie de notre raisonnement où nous profitons de l'autre définition de $\gamma_{n\nu}^{(k)}$, de l'expression (2.4) respectivement (2.10). Remarquons encore que cette fois-ci $\nu < \nu_0$, et pour ces ν on a

$$\binom{\nu+k}{k} < \binom{\nu_0+k}{k} ,$$

ce qui permet d'écrire

$$|\gamma_{n\nu}^{(k)}| < \left| \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}} (1+\bar{\zeta}_0) \right| \frac{\binom{\nu_0+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \omega^\nu h_k(\omega)\, d\omega \right| , \tag{4.16}$$

où $h_k(\omega)$ est définie par la formule (2.6). En posant encore

$$\left| \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}} (1+\bar{\zeta}_0) \right| = C_1 ,$$

[1] Cette partie de la démonstration originelle, que nous avons faite en tenant compte de certaines considérations géometriques, a été remplacée par celle ci-dessus plus simple dont l'idée a été suggérée par M. A. RÉNYI.

et en considérant la formule (4.14), l'inégalité (4.16) prendra la forme

$$(4.17)\qquad |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < \frac{C_1 \lambda_0^k (k+1)}{n+1} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\omega|=1} \omega^\nu h_k(\omega)\, d\omega \right| = \frac{C_1 \lambda_0^k (k+1)}{n+1} |\gamma_\nu^{(k)}| \,.$$

On reconnaît que les quantités $\gamma_\nu^{(k)}$ ne sont autres que les coefficients de Fourier de la fonction $h_k(\omega)$.

Appliquons ensuite l'inégalité de Cauchy:

$$(4.18)\qquad \left(\sum_{\nu=0}^{\nu_0 - 1} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \right)^2 \leqq \nu_0 \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |\gamma_{n\nu}^{(k)}|^2 < \frac{C_1^2 \lambda_0^{2k+1} (k+1)^2}{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu^{(k)}|^2 \,,$$

où nous avons tenu compte de (4.17).

D'autre part, en écrivant $\omega = e^{i\varphi}$, on a selon l'inégalité de Bessel

$$(4.19)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu^{(k)}|^2 \leqq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |h_k(e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \,.$$

Or,

$$(4.20)\qquad |h_k(e^{i\varphi})| \leqq (1+r)^{2k} |h_0(e^{i\varphi})|^2 \,.$$

Il suffit donc d'évaluer l'intégrale

$$(4.21)\qquad \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |h_0(e^{i\varphi})|^2 d\varphi \,.$$

Adoptons pour cela les notations suivantes:

$$(4.22)\qquad \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} = e^{-i\theta_0} \,, \quad \frac{1+\bar{\zeta}_0 e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}+\zeta_0} = e^{i\theta} \,,$$

d'où

$$e^{i\varphi} = \frac{1-\zeta_0 e^{i\theta}}{e^{i\theta}-\bar{\zeta}_0} \,, \quad \frac{1}{1-e^{i\varphi}} = \frac{1}{1+\bar{\zeta}_0} \, \frac{e^{i\theta}-\bar{\zeta}_0}{e^{i(\theta-\theta_0)}-1} \,,$$

$$d\varphi = -\frac{(1-|\zeta_0|^2)\, d\theta}{|e^{i\theta}-\bar{\zeta}_0|^2} \,.$$

Il en résulte que

$$|h_0(e^{i\varphi})|^2 = \frac{|e^{i\theta}-\bar{\zeta}_0|^2}{|1+\zeta_0|^2} \, \frac{|e^{i(n+1)(\theta-\theta_0)}-1|^2}{|e^{i(\theta-\theta_0)}-1|^2} = \frac{|e^{i\theta}-\bar{\zeta}_0|^2}{|1+\zeta_0|^2} \, \frac{\sin^2 (n+1) \dfrac{\theta-\theta_0}{2}}{\sin^2 \dfrac{\theta-\theta_0}{2}} \,.$$

Posons ensuite

$$c = \frac{1 - |\zeta_0|^2}{|1 + \zeta|^2}$$

et (4.21) devient

$$\text{(4.23)} \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_0(e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = \frac{c}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} \frac{\sin^2 (n+1) \dfrac{\theta - \theta_0}{2}}{\sin^2 \dfrac{\theta - \theta_0}{2}} \, d\theta = c(n+1) \ ,$$

puisque la fonction à intégrer de la formule (4.23) n'est autre que le noyau de FEJÉR. Ainsi, vu les inégalités (4.19) et (4.20) :

$$\text{(4.24)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu^{(k)}| \leqq c(n+1)(1+r)^{2k} \ .$$

De (4.18) et (4.24) nous obtenons

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\nu_0 - 1} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \right)^2 < C_1^2 \lambda_0^{2k+1} c(k+1)^2 (1+r)^{2k} = (K_1^{(k)})^2 \ ,$$

ou bien

$$\text{(4.25)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu_0 - 1} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K_1^{(k)} \ .$$

On voit que $K_1^{(k)}$ est bien indépendant de n.

Enfin de (4.15) et de (4.25) :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K_1^{(k)} + K_2^{(k)} = K^{(k)} \ .$$

Ce qu'il fallait démontrer.

(Reçu le 21 Juillet 1958.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] TURÁN, P. : „A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence-circle". *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* 12 (1958) 19—26.

[2] ALPÁR, L. : „Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, I.". *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 3 (1958) 1—12.

[3] HOBSON, E. W. : *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, I., II.* Cambridge, at the University Press, 1926.

MEGJEGYZÉS A TAYLOR-SOR SZUMMABILITÁSÁRÓL A KONVERGENCIA-KÖRÖN, II.

ALPÁR L.

Kivonat

A cikk azoknak az összefüggéseknek a vizsgálatával foglalkozik, amelyek két, az egységkörben reguláris függvény $f_1(z)$ és $f_2(z)$ Taylor-sorai között állnak fenn, ha $f_2(z)$-t az $f_1(z)$-ből a következő transzformációval nyerjük :

(1) $$f_2(z) = f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right),$$

ahol $0 < |\zeta_0| < 1$ és a megfelelő Taylor-sorok

(2) $$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

és

(3) $$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu .$$

A bennünket foglalkoztató kérdés mármost általános alakjában így fogalmazható : Ha ismerjük a (2) sor viselkedését a $z = 1$ pontban, mit mondhatunk a (3) sor viselkedéséről a

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontban, amely a

$$\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z} = 1$$

egyenlet megoldása. Azt várnók, hogy a két sor viselkedése lényeges eltérést nem mutat. Hiszen $f_1(z)$-nek a $z = 1$ pont környezetében felvett értékei egy „szelíd'' deformációtól eltekintve, nyilván azonosak az $f_2(z)$ függvénynek a

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pont környezetében felvett értékeivel ; sőt analóg tény áll fenn nyilván az $f_1(z)$ és $f_2(z)$ értékeinek viselkedésére bármely a $|z| = 1$ kör kerületére eső, megfelelő pontpárra, z_1- és z_2-re, amelyre ti.

$$z_1 = \frac{z_2-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z_2} .$$

Tegyük fel most, hogy $f_1(z)$ hatványsora a $z = 1$ pontban konvergens, akkor ebből az következik, hogy $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, tehát a Riemann-féle lokalizációs tételre gondolva, azt hihetnők, hogy a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

sor konvergenciája maga után vonja a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu$$

sor konvergenciáját.

Ezzel szemben TURÁN PÁL bebizonyította [1] a következőket :

1. Található olyan $f_1(z)$ függvény, hogy a (2) sornak a $z = 1$ pontban való konvergenciája ellenére a (3) sor a

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontban divergens.

2. Bárhogyan adjuk is meg az $f_1(z)$ függvényt a (2) sor $z = 1$ pontbeli Abel-szummálhatóságából mindig következik a (3) sor

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontbeli Abel-szummálhatósága.

Mi viszont bebizonyítottuk [2] az 1. általánosításaként az alábbi tételt :

3. Bármely k pozitív egész számhoz található olyan $f_1(z)$ függvény, hogy a (2) sornak a $z = 1$ pontban való (C, k) szummabilitása ellenére a (3) sor nem (C, k) szummábilis a

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontban.

A jelen dolgozatban az ilyen jellegű vizsgálatokat folytatva a következő ellenkező irányú tételt bizonyítottuk be :

4. *Legyen k nem-negatív egész szám. Ha az $f_1(z)$ függvény* (2) *Taylor-sora (C, k) szummábilis a $z = 1$ pontban, akkor az $f_2(z)$ függvény* (3) *Taylor-sora $(C, k + 1)$ szummábilis a*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontban és a két sor szummája egyenlő.

Ha $k = 0$, akkor ebből a következő speciális esetet nyerjük :

5. *Ha az $f_1(z)$ függvény* (2) *Taylor-sora konvergens a $z = 1$ pontban, akkor az $f_2(z)$ függvény* (3) *Taylor-sora $(C, 1)$ szummábilis a*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontban és a két sor szummája egyenlő.

A bizonyítás menete a következő : Jelentse $\alpha_n^{(k)}$ a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

sor, $\beta_n^{(k)}$ pedig a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^{\nu}$$

sor n-edik (C, k) közepét. Bebizonyítjuk, hogy az $\alpha_n^{(k)}$ és $\beta_n^{(k+1)}$ számok között a következő alakú kapcsolat áll fenn

$$\beta_n^{(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)} \quad , \tag{4}$$

ahol $\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ az $f_1(z)$ speciális alakjától független, és csak n-től, ν-től, k-tól és ζ_0-tól függő mennyiség. A (4) összefüggés szummációs eljárást definiál, amelynek $[\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ mátrixáról megmutatjuk, hogy az kielégíti a permanencia Toeplitz—Schur-féle feltételeit, amiből már következik, hogy ha $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(k)}$ létezik, akkor létezik $\lim_{n\to\infty} \beta_n^{(k+1)}$ is, és a két határérték egyenlő.

ЗАМЕЧАНИЕ О СУММИРУЕМОСТИ РЯДА TAYLOR-A НА ОКРУЖНОСТИ СХОДИМОСТИ, II.

L. ALPÁR

Резюме

Статья изучает зависимость между рядами Taylor-a регулярных в единичном круге функций $f_1(z)$, и $f_2(z)$, если $f_2(z)$ получается из $f_1(z)$ с помощью следующего преобразования:

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) \tag{1}$$

где $0 < |\zeta_0| < 1$, a соответствующие ряды Taylor-a суть

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{2}$$

и

$$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu \quad . \tag{3}$$

Интересующий нас вопрос в общем виде может быть сформулирован так: если известно поведение ряда (2) в точке $z = 1$, что можно сказать о поведении ряда (3) в точке

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} \ ,$$

являющейся решением уравнения

$$\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z} = 1 \ ?$$

Можно ожидать, что между поведением двух рядов не будет существенной разницы. Не обращая внимания на некоторую слабую деформацию — значения функции $f_1(z)$ в окружении точки $z = 1$ очевидно совпадают с значениями функции $f_2(z)$ в окружении точки

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0},$$

и очевидно аналогичный факт имеет место в поведении значений функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ для любой пары соответствующих точек z_1 и z_2 т. е. для которых

$$z_1 = \frac{z_2-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z_2},$$

лежащих на окружности круга $|z| = 1$. Предположим теперь, что степенный ряд функции $f_1(z)$ сходится в точке $z = 1$, то из этого следует, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, и думая на «локализационную теорему Римана» можно ожидать что из сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu.$$

Но P. TURÁN доказал в [1] следующее:

1. Существует такая функция $f_1(z)$, что несмотря на сходимость ряда (2) в точке $z = 1$ ряд (3) расходится в точке

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}.$$

2. Как бы не задать функцию $f_1(z)$, из суммируемости по Abel-ю ряда (2) в точке $z = 1$ всегда следует суммируемость по Abel-ю ряда (3) в точке

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}.$$

В работе [2] мы доказали, как обобщение теоремы 1., следующую теорему:

3. Для всех положительных целых чисел k существует такая функци $f_1(z)$, что несмотря на (C,k) суммируемость ряда (2) в точке $z = 1$, ряд (3) не (C,k) суммируем в точке

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}.$$

В настоящей работе продолжая исследования такого рода доказывается следующая теорема противоположного рода:

4. *Пусть k неотрицательное целое число. Если ряд Taylor-a (2) функции $f_1(z)$ (C,k) суммируем в точке $z = 1$, то ряд Taylor-a (3) функции $f_2(z)$ $(C,k+1)$ суммируем в точке*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

и суммы этих рядов совпадают.

Если $k = 0$, то отсюда получается следующий специальный случай:

5. *Если ряд Taylor-a (2) функции $f_1(z)$ сходится в точке $z = 1$, то ряд Taylor-a (3) функции $f_2(z)$ $(C,1)$ суммируем в точке*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

и суммы этих рядов совпадают.

Идея доказательства такова: Пусть $\alpha_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k)}$ обозначает n-ые средние (C, k) рядов

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu$$

соответственно. Доказывается, что между $\alpha_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k+1)}$ имеет место соотношение вида

$$\beta_n^{(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)} , \tag{4}$$

где $\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ не зависит от $f_1(z)$, а лишь от n, ν, k и ζ_0. Соотношение (4) определяет некоторый сумматорный процесс, о матрице $[\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ которого доказывается, что она удовлетворяет условию перманентности Toeplitz-a и Schur-a, что означает, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{(k)}$ существует то и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n^{(k+1)}$ существует и эти пределы совпадают.

ON SINGULAR RADII OF POWER SERIES

by

PAUL ERDŐS and ALFRÉD RÉNYI

Let $\mathcal{R}_u$ denote the class of analytic functions

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1a}$$

which are regular and unbounded in $|z| < 1$. According to D. GAIER and W. MEYER—KÖNIG [1] we call the radius R_φ defined by $z = re^{i\varphi}$, $0 \leq r < 1$ *singular* for $f(z)$, if $f(z)$ is unbounded in any sector $|z| < 1$, $\varphi - \varepsilon < \arg z < \varphi + \varepsilon$ with $\varepsilon > 0$. A radius which is not singular for $f(z)$ is called ***regular*** for $f(z)$. In [1] it has been shown that if $f(z)$ belongs to the class $\mathcal{R}_u$ and the power series of $f(z)$ has HADAMARD-gaps, i. e.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n_k} \tag{1b}$$

with

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots\ ) \tag{2a}$$

then every radius is singular for $f(z)$. Clearly for every $f(z) \in \mathcal{R}_u$ there is at least one singular radius. It is easy to see that if we suppose only that the power series (1b) has FABRY-gaps, i. e. if instead of (2a) we suppose only

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n_k < x} 1 = 0 \ , \tag{2b}$$

then it is possible that there is only one singular radius for $f(z)$. A simple example is furnished by

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=0}^{k^2-1} z^{N_k + j} \tag{3a}$$

where $N_{k+1} \geqq N_k + k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Clearly $f_1(z)$ is regular in $|z| < 1$ and if x is real, we have

$$\lim_{x \to 1-0} f_1(x) = +\infty$$

thus $f_1(z)$ belongs to the class $\mathcal{R}_u$ and R_0 is a singular radius for $f_1(z)$. On the other hand we have by (3a)

$$|f_1(z)| \leqq \frac{\pi^2}{3|1-z|} \quad \text{for} \quad |z| < 1 \; ; \tag{3b}$$

thus every radius R_φ with $0 < \varphi < 2\pi$ is regular for $f_1(z)$.

It is also clear from this example that to ensure that every radius should be singular for $f(z)$ it is not sufficient to prescribe the rate in which the ratio

$$\frac{1}{x}\sum_{n_k<x} 1$$

tends to 0 for $x \to +\infty$. As a matter of fact, for $f_1(z)$ defined by (3a) we have

$$\frac{1}{x}\sum_{n_k<x} 1 \leqq \frac{s^3}{N_s}$$

where s is defined by the inequality $N_s \leqq x < N_{s+1}$ and thus we can choose the sequence N_s so that

$$\frac{1}{x}\sum_{n_k<x} 1 < \varepsilon(x)$$

holds, where $\varepsilon(x)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ is a sequence of positive numbers, tending to 0 arbitrary rapidly.

P. Erdős [2] has shown — answering a question of Gaier and Meyer—König — that to ensure that every radius should be singular for $f(z)$, it is not even sufficient to suppose that the exponents n_k of the lacunary power series (1b) of $f(z) \in \mathcal{R}_u$ satisfy the condition

$$\lim_{k\to\infty} (n_{k+1} - n_k) = +\infty \; . \tag{2c}$$

The question arises, for which sequences n_k does there exist a function $f(z)$ belonging to the class $\mathcal{R}_u$ and having the power series expansion (1b), which has only one singular radius? Clearly it is impossible to give a criterion, which depends only on the rate of growth of the sequence n_k, because the number-theoretical properties of the sequence n_k come in. As a matter of fact let the sequence n_k satisfy the following condition:

D) *for every m $(m = 1, 2, \ldots)$ there exists an integer k_m such that for $k \geqq k_m$ n_k is divisible by 2^m.*

In this case if R_φ is a singular radius for $f(z)$ then $R_{\varphi'}$, where $\varphi' = \varphi + 2\pi l/2^m$ is also singular for any pair of positive integers l and m; as a matter of fact, if z_j $(j = 1, 2, \ldots)$ is a sequence of complex numbers with $|z_j| < 1$, $\varphi - \varepsilon < \arg z_j < \varphi + \varepsilon$ and

$$\lim_{j\to+\infty} |f(z_j)| = +\infty,$$

then putting $\varphi' = \varphi + 2\pi l/2^m$ and $z_j' = z_j \exp(2\pi i\, l/2^m)$ we have $\varphi' - \varepsilon < \arg z_j' < \varphi' + \varepsilon$ and as the series for $f(z_j')$ differs from that for $f(z_j)$ only in a finite number of terms, we have also

$$\lim_{j\to+\infty} |f(z_j')| = +\infty.$$

As the set of values of φ for which R_φ is singular for $f(z)$ is clearly closed (see [1]), it follows that every radius R_φ is singular for $f(z)$. Now the divisibility condition D) implies (2c), but (except for this) is compatible with every possible order of growth of n_k; by other words if ω_k is an increasing sequence of positive integers, tending arbitrarily slowly to $+\infty$, then there exists a sequence n_k of integers having the property D) and satisfying the condition $n_{k+1} - n_k < \omega_k$. Thus our question has to be modified to some extent. We ask for which sequences n_k does there exist a sequence n'_k such that $0 \leqq n'_k - n_k \leqq \omega_k$ where ω_k is a sequence tending arbitrarily slowly to $+\infty$, and a function

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n'_k} \tag{1c}$$

belonging to the class $\mathcal{R}_u$, which has R_0 as its only singular radius? We shall prove, by using standard methods of probability theory, that if n_k satisfies the condition

$$\liminf_{(k-j)\to+\infty} (n_k - n_j)^{\frac{1}{k-j}} = 1 \tag{2d}$$

then there exists always such a function.

Thus we prove the following

Theorem 1. *Let n_k be an increasing sequence of natural numbers, satisfying the condition* (2d). *Then for any sequence ω_k of natural numbers for which*

$$\lim_{k\to+\infty} \omega_k = +\infty,$$

there exists a sequence n'_k of natural numbers such that $0 \leqq n'_k - n_k < \omega_k$ and an analytic function $f(z)$, which is regular in the unit circle has the power series[1] (1c), *is unbounded in $|z| < 1$, but is bounded in the domain $|z| < 1$, $|\arg z| > \varepsilon$ for any $\varepsilon > 0$.*

Our proof of the above Theorem is not constructive; we prove only by using probabilistic methods, the existence of a suitable function $f(z)$, but can not give it explicitely.

The condition (2d) plays a role in other problems of a similar kind too; e. g. P. Erdős has proved [3] that if (2d) is satisfied, there exists a power series (1b) which converges uniformly but not absolutely for $|z| = 1$.

Proof of theorem 1. We shall need the following

Lemma.[2] *Let $m_1 < m_2 < \ldots < m_d$ be natural numbers, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d$ independent random variables, each of which takes on the values $0, 1, \ldots, s-1$ with the same probability $1/s$. Let z be a complex number such that $|z| \leqq 1$ and $2s|1-z| \geqq 1$. Let us consider the random variable*

$$Z = \sum_{j=1}^{d} z^{m_j+\nu_j} \,. \tag{4a}$$

[1] $f(z)$ can be chosen so that its power series has nonnegative coefficients.

[2] A similar lemma has been used in a previous paper [4] of the authors of the present paper.

Then we have[3])

$$\mathbf{P}\left\{|Z| \geqq \frac{4\,d}{s|1-z|}\right\} \leqq 4\,e^{-\frac{d}{32s^2}} \tag{5}$$

Proof of the Lemma. Let us put $z = r\,e^{i\varphi}$ and denote by C resp. S the real resp. imaginary part of Z, i.e. we put

$$C = \sum_{j=1}^{d} r^{m_j+\nu_j} \cdot \cos\,(m_j + \nu_j)\,\varphi \tag{4b}$$

and

$$S = \sum_{j=1}^{d} r^{m_j+\nu_j} \cdot \sin\,(m_j + \nu_j)\,\varphi \tag{4c}$$

As

$$|Z| \leqq \sqrt{2}\max(|C|, |S|)$$

we have evidently

$$\mathbf{P}\left\{|Z| \geqq \frac{4\,d}{s|1-z|}\right\} \leqq \mathbf{P}\left\{|C| \geqq \frac{2\sqrt{2}\,d}{s|1-z|}\right\} + \mathbf{P}\left\{|S| \geqq \frac{2\sqrt{2}\,d}{s|1-z|}\right\} \tag{6}$$

Now let us calculate the mean value of e^{tC} where we shall choose the value of the real number t later. We have

$$\mathbf{M}\{e^{tC}\} = \prod_{j=1}^{d} \mathbf{M}\left\{e^{tr^{m_j+\nu_j}\cos(m_j+\nu_j)\varphi}\right\} =$$

$$= \prod_{j=1}^{d}\left(\sum_{N=0}^{\infty}\frac{t^N}{N!}\left(\frac{1}{s}\sum_{h=0}^{s-1} r^{N(m_j+h)}\cos^N(m_j+h)\varphi\right)\right)$$

As

$$\left|\frac{1}{s}\sum_{h=0}^{s-1} r^{m_j+h}\cos(m_j+h)\,\varphi\right| \leqq \left|\frac{1}{s}\sum_{h=0}^{s-1} z^{m_j+h}\right| \leqq \frac{2}{s|1-z|}$$

and

$$\left|\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1} r^{N(m_j+h)}\cos^N(m_j+h)\,\varphi\right| \leqq 1 \qquad (N = 2, 3, \ldots\ )$$

we have for $0 < |t| < 1/2$

$$\mathbf{M}\{e^{tc}\} \leqq \left(1 + \frac{2\,|t|}{s\,|1-z|} + t^2\right)^d \tag{7}$$

Evidently

$$\mathbf{P}\left\{|C| \geqq \frac{2\sqrt{2}\,d}{s\,|1-z|}\right\} = \mathbf{P}\left\{C \geqq \frac{2\sqrt{2}\,d}{s\,|1-z|}\right\} + \mathbf{P}\left\{C \leqq -\frac{2\sqrt{2}\,d}{s\,|1-z|}\right\}$$

---

[3]) Here and in what follows $\mathbf{P}\{\ldots\}$ denotes the probability of the event in the brackets and $\mathbf{M}\{\xi\}$ the mean value of the random variable ξ.

further if $t < 0$, then

(8a)
$$\mathbf{P}\left\{C \geq \frac{2\sqrt{2}\,d}{s\,|1-z|}\right\} \leq \mathbf{M}\{e^{tC}\}\,e^{-\frac{2\sqrt{2}\,td}{s\,|1-z|}}$$

and

(8b)
$$\mathbf{P}\left\{C \leq -\frac{2\sqrt{2}\,d}{s\,|1-z|}\right\} \leq \mathbf{M}\{e^{-tC}\}\,e^{-\frac{2\sqrt{2}\,td}{s\,|1-z|}}$$

By choosing in (7)

$$t = \frac{1}{4s\,|1-z|}$$

we obtain, taking into account that $8\sqrt{2} - 9 > 2$ and that $|1-z|^2 \leqq 4$,

(9a)
$$\mathbf{P}\left\{|C| \geqq \frac{2\sqrt{2}\,d}{s\,|1-z|}\right\} \leqq 2e^{-\frac{d}{32s^2}}$$

In the same way it can be shown that

(9b)
$$\mathbf{P}\left\{|S| \geqq \frac{2\sqrt{2}\,d}{s\,|1-z|}\right\} \leqq 2e^{-\frac{d}{32s^2}}$$

Clearly (6), (9a) and (9b) imply (5). Thus our Lemma is proved.

Let us choose now a subsequence n_{k_p} of the sequence n_k such that $k_1 < k_2 < \ldots < k_p < \ldots$,

(10a)
$$\lim_{p \to +\infty} (k_{2p+1} - k_{2p}) = +\infty$$

and

(10b)
$$\lim_{p \to +\infty} (n_{k_{2p+1}} - n_{k_{2p}})^{\frac{1}{k_{2p+1} - k_{2p}}} = 1$$

By (2d) this is possible. As a matter of fact, if $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ and $(n_k - n_j)^{\frac{1}{k-j}} < 1 + \varepsilon$, then either $j > [k\varepsilon]$ or $j \leqq [k\varepsilon]$; in the latter case we have

$$(n_k - n_{[k\varepsilon]})^{\frac{1}{k-[k\varepsilon]}} \leqq \left[(n_k - n_j)^{\frac{1}{k-j}}\right]^{\frac{k-j}{k-[k\varepsilon]}} \leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \leqq 1 + 3\varepsilon$$

Thus we may suppose that there exists a sequence of pairs (k, j) such that $k \to +\infty$, $j \to +\infty$, $(k-j) \to +\infty$ and $(n_k - n_j)^{\frac{1}{k-j}} \to 1$. This implies the existence of a sequence k_p having the required properties.

Clearly we may rarify the sequence k_p as much as we want; thus it can be supposed that besides (10a) and (10b) the following three conditions are also satisfied:

(10c)
$$(n_{k_{2p+1}} - n_{k_{2p}})^{\frac{1}{k_{2p+1} - k_{2p}}} < 1 + \frac{1}{p^9}$$

(10d)
$$p^4 \leqq \omega_{k_{2p}}$$

and

(10e) $$k_{2p+1} - k_{2p} > 64\,p^{10}$$

Now let us put

(11a) $$d_p = k_{2p+1} - k_{2p}$$

and

(11b) $$m_{pj} = n_{k_{2p}+j} - n_{k_{2p}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, d_p)$$

further put

(11c) $$\delta_p = \frac{1}{p}$$

(11d) $$s_p = p^4$$

and

(11e) $$N_p = (m_{pd_p} + s_p)\, s_p\, \delta_p^2 \qquad (p = 1, 2, \ldots\ )$$

Let us put

(12a) $$z_{ph} = e^{\frac{2\pi ih}{N_p}} \qquad (h = 0, 1, \ldots, N_p - 1)$$

further

(12b) $$z^*_{ph} = \begin{cases} z_{ph} \text{ for } \delta_p N_p \leqq h \leqq (1-\delta_p) N_p \\ 2\cos 2\pi\delta_p - z_{ph} \text{ for } 0 \leqq h < \delta_p N_p \text{ and } (1-\delta_p) N_p < h < N_p \end{cases}$$

(clearly in the second case z^*_{ph} is obtained by reflecting z_{ph} on the line $\mathcal{Re}(z) = \cos\, 2\pi\delta_p$).

Evidently

(13) $$|z^*_{ph} - 1| \geqq 1 - \cos 2\pi\,\delta_p \geqq 8\,\delta_p^2 \quad \text{for} \quad p \geqq 4\,, \qquad h = 1, 2, \ldots, N_p$$

Let us denote by $\mathcal{L}_p$ the contour consisting of the arc $2\pi\delta_p \leqq \varphi \leqq 2\pi\,(1-\delta_p)$ of the unit circle $z = e^{i\varphi}$ and of the arc $|\varphi| < 2\pi\,\delta_p$ of the circle $z = 2\cos\,2\pi\delta_p - e^{i\varphi}$; clearly the points z^*_{ph} $(h = 1, 2, \ldots, N_p)$ divide the line $\mathcal{L}_p$ into arcs of the length $2\pi/N_p$. By our lemma we have, denoting by ν_{pj} $(j = 1, 2, \ldots d_p)$ independent random variables, each of which takes on the values $0, 1, \ldots, s_p - 1$ with the probability $1/s_p$,

(14) $$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leq h\leq N_p}\left|\sum_{j=1}^{d_p} z^{*\,m_{pj}+\nu_{pj}}_{ph}\right| > \frac{4\,d_p}{8\,s_p\,\delta_p^2}\right\} \leqq 4\,N_p\,e^{-\frac{d_p}{32\,s_p^2}}$$

Now putting

(15) $$Q_p(z) = \sum_{j=1}^{d_p} z^{m_{pj}+\nu_{pj}}$$

we have

(16) $$|Q'_p(z)| \leqq d_p\,(m_{pd_p} + s_p) \quad \text{for} \quad |z| \leqq 1$$

and thus for any two points z, z' of the closed unit circle

$$|Q_p(z) - Q_p(z')| \leqq d_p(m_{pd_p} + s_p)\,|z - z'|\ . \tag{17}$$

Thus we obtain

$$\max_{z\in L_p} |Q_p(z)| \leqq \max_{1\leqq h\leqq N_p} \left|\sum_{j=1}^{c'_p} z_{ph}^{*\,m_{pj}+\nu_{pj}}\right| + \frac{d_p \cdot 2\pi}{s_p \cdot \delta_p^2} \tag{18}$$

and therefore by (14)

$$\mathbf{P}\left\{\max_{z\in L_p} |Q_p(z)| \geqq \frac{7\,d_p}{s_p\,\delta_p^2}\right\} \leqq 4\,N_p\,e^{-\frac{c'_p}{32 s_p^2}} \tag{19a}$$

and thus with respect to (10a)—(11e) that for $p \geqq 64$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{z\in L_p} |Q_p(z)| \geqq \frac{7\,d_p}{p^2}\right\} \leqq 8\,p^2\,e^{-p^2}\ . \tag{19b}$$

Thus it follows that

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\max_{z\in L_p} |Q_p(z)| \geqq \frac{7\,d_p}{p^2}\right\} \tag{20}$$

converges, and therefore, with probability 1, only a finite number of the inequalities

$$\max_{z\in L_p} |Q_p(z)| \geqq \frac{7\,d_p}{p^2}$$

is satisfied.

This implies that the values of ν_{pj} can be chosen in such a way that

$$\max_{z\in L_p} |Q_p(z)| < \frac{7\,d_p}{p^2} \tag{21}$$

for all $p \geqq p_0$.

Let us put now

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{d_p}\, z^{n_{k_{2p}}}\, Q_p(z) \tag{22}$$

where the polynomials $Q_p(z)$ are chosen in such a way that (21) is satisfied for all $p \geqq p_0$. Clearly $f(z)$ is regular in $|z| < 1$, and also unbounded, as all its coefficients are nonnegative and $Q_p(1) = d_p$. On the other hand, for any $\varphi \not\equiv 0 \bmod 2\pi$ and any $\varepsilon > 0$ with $0 < \varphi - \varepsilon < \varphi + \varepsilon < 2\pi$ we have for all values of p, for which $2\pi/p < \varphi - \varepsilon$ and $2\pi\,(1 - 1/p) > \varphi + \varepsilon$, for $\varphi - \varepsilon \leqq \arg z \leqq \varphi + \varepsilon$, $|z| < 1$ (by the maximum principle)

$$\frac{1}{d_p}\,|Q_p(z)| \leqq \frac{7}{p^2}$$

for $p \geqq p_0$. But this implies, that $f(z)$ is bounded in the sector $|z| < 1$, $\varphi - \varepsilon \leqq \arg z \leqq \varphi + \varepsilon$, or, by other words, R_0 is the only singular radius of $f(z)$. Taking into account that

$$\nu_{pj} \leqq s_p = p^4 \leqq \omega_{k_{2p}}$$

evidently $f(z)$ satisfies all requirements of Theorem 1., which is therewith proved.

It can be shown that the condition $n_k' - n_k = O(\omega_k)$ with ω_k tending arbitrarily slowly to $+\infty$ can not be replaced in Theorem 1. by $n_k' - n_k = O(1)$. We prove namely the following result:

Theorem 2. *Let n_k be an increasing sequence of natural numbers, such that n_k is divisible by 2^m for all $k \geqq k_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Let*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n_k + b_k} \tag{23}$$

be regular and unbounded in the unit circle, where the sequence b_k of integers is bounded. Then every radius R_φ is singular with respect to $f(z)$.

Proof of Theorem 2.[4] It suffices to show that $f(z)$ can not be bounded in a sector $|z| < 1$, $\alpha < \arg z < \beta$. This will be shown by proving that if $f(z)$ would be bounded in such a sector, it would be bounded in the whole unit circle. As a matter of fact, let us suppose that $f(z)$ is given by (23) and that $|b_k| \leqq B$ $(k = 1, 2, \ldots)$ and put

$$f_j(z) = \sum_{b_k = j} c_k z^{n_k} \qquad (|j| \leqq B) \tag{24}$$

Then we may write

$$f(z) = \sum_{j=-B}^{B} z^j f_j(z) \tag{23b}$$

Let us consider the values $z_l = e^{2\pi i \frac{l}{2^m}}$, where m is a fixed natural number, such that

$$2^m > \frac{4\pi(B+1)}{\beta - \alpha} \tag{25}$$

and l takes on the values $0, 1, \ldots, 2^m - 1$. Putting

$$F_{j+B}(r, \vartheta) = \left(\sum_{\substack{k \geqq k_m \\ b_k = j}} c_k r^{n_k} e^{i n_k \vartheta} \right) (re^{i\vartheta})^j \qquad (-B \leqq j \leqq +B) \tag{26}$$

we have for $0 \leqq r < 1$, $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ and $l = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$

$$f(re^{i\vartheta} z_l) = z_l^{-B} \sum_{l=0}^{2B} F_h(r, \vartheta) z_l^h + \Delta \tag{23c}$$

where Δ denotes a term which is bounded in the unit circle, the bound depending only on m.

As a matter of fact we have

$$|\Delta| \leqq \sum_{k < k_m} |c_k| = A \tag{27}$$

[4] It will be seen from the proof that the condition „n_k is divisible by 2^m for all $k \geqq k_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$" could be replaced by the following more general condition: „there exists a sequence Λ_m $m = 1, 2, \ldots)$ of natural numbers, such that $\Lambda_m \to +\infty$ and n_k is divisible by Λ_m for $k \geqq k_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$."

Now by (25) there are at least $2B+1$ terms of the sequence z_l ($l = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$) lying on the arc $\alpha - \vartheta < \arg z < \beta - \vartheta$, $|z| = 1$.

Let us denote these numbers by $z_{l_1}, z_{l_1+1}, \ldots, z_{l_1+2B}$, let us fix the value of ϑ and put

$$Q_\vartheta(r, \zeta) = \sum_{j=0}^{2B} F_j(r, \vartheta)\, \zeta^j \quad (28a)$$

We have by the interpolation formula of Lagrange

$$Q_\vartheta(r, \zeta) = \sum_{j=0}^{2B} Q_\vartheta(r, z_{l_1+j}) \frac{\Omega(\zeta)}{\Omega'(z_{l_1+j})(\zeta - z_{l_1+j})} \quad (28b)$$

where

$$\Omega(\zeta) = \prod_{j=0}^{2B} (\zeta - z_{l_1+j}) \,. \quad (29)$$

As by supposition there exists a constant K such that $|f(z)| \leq K$ for $|z| < 1$, $\alpha < \arg z < \beta$ we have by (23c), (27) and (28a)

$$|Q_\vartheta(r, z_{l_1+j})| \leqq K + A \qquad (j = 0, 1, \ldots, 2B) \,. \quad (30)$$

Thus it follows, that for $|\zeta| = 1$ we have

$$|Q_\vartheta(r, \zeta)| \leqq \frac{(K+A)(2B+1)}{\left(\sin \frac{\pi}{2^m}\right)^{2B}} \,. \quad (31)$$

It follows from (23c) for $l = 0$ that

$$|f(re^{i\vartheta})| \leqq \frac{(K+A)(2B+1)}{\left(\sin \frac{\pi}{2^m}\right)^{2B}} + A \quad \text{for} \quad 0 \leqq r < 1 \quad \text{and} \quad 0 \leqq \vartheta < 2\pi \,. \quad (32)$$

As the bound on the right hand side of (32) does not depend on r or ϑ, it follows that $f(z)$ is bounded in the whole unit circle, which contradicts our hypothesis. Thus Theorem 2. is proved.

It remains an open question, whether condition (2d) is best possible. In other words, the following problem is still unsolved:

Let

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k}$$

be regular and unbounded in $|z| < 1$. Suppose that

$$\liminf_{(k-j) \to +\infty} (n_k - n_j)^{\frac{1}{k-j}} = q > 1$$

Is it true that all radii R_φ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ are singular for $f(z)$?

(Received July 1, 1958.)

REFERENCES

[1] GAIER, D.—MEYER-KÖNIG, W.: „Singuläre Radien bei Potenzreihen". *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **59** (1956) 36—48.
[2] ERDŐS, P.: „Über eine Fragestellung von Gaier und Meyer-König". *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **60** (1957) 89—92.
[3] ERDŐS, P.: „On the uniform but not absolute convergence of power series with gaps". *Annales de la Societé Polonaise de Mathématique* **25** (1952) 162—168.
[4] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: „Probabilistic approach to some problems of diophantine approximation". *Illinois Journal of Mathematics* **1** (1957) 303—315.

HATVÁNYSOROK SZINGULÁRIS SUGARAIRÓL

ERDŐS P. és RÉNYI A.

Kivonat

Legyen $f(z)$ az egységkörben reguláris és nem korlátos függvény. A $z = re^{i\varphi}$ $(0 \leqq r < 1)$ sugarat, melyet a rövidség kedvéért R_φ-vel jelölünk, D. GAIER és W. MEYER—KÖNIG nyomán (lásd [1], [2]) *szinguláris*nak nevezzük, ha $f(z)$ nem korlátos a $|z| < 1$, $\varphi - \varepsilon < \arg z < \varphi + \varepsilon$ körcikkben, akármilyen kis pozitív szám is ε. A nem-szinguláris sugarakat reguláris sugárnak nevezzük. A jelen dolgozatban a következő tételeket bizonyítjuk be:

1. tétel. *Legyen n_k természetes számok egy növekvő sorozata, amelyre*

$$\liminf_{(k-j)\to+\infty} (n_k - n_j)^{\frac{1}{k-j}} = 1 . \tag{1}$$

Legyen ω_k egy tetszőlegesen lassan végtelenhez tartó számsorozat. Akkor létezik olyan

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n'_k} \tag{2}$$

alakú hatványsorral bíró, az egységkörben reguláris és nem korlátos $f(z)$ függvény, amelynek csak egyetlen szinguláris sugara van, és amelynek n'_k kitevői eleget tesznek a

$$0 \leqq n'_k - n_k \leqq \omega_k \tag{3}$$

feltételnek.

Az 1. tétel a dolgozatban valószínűségszámítási módszerrel van bebizonyítva.

2. tétel. *Legyen A_m $(m = 1, 2, \ldots)$ egy természetes számokból álló tetszőleges növekvő sorozat és n_k egy olyan természetes számokból álló sorozat, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy az n_k sorozat tagjai véges sok kivétellel oszthatók A_m-mel $(m = 1, 2, \ldots)$. Legyen b_k tetszőleges egész számokból álló korlátos sorozat. Tegyük fel, hogy*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_k z^{n_k + b_k}$$

az egységkörben reguláris és nem korlátos függvény. Akkor $f(z)$-re vonatkozólag az egységkör minden sugara szinguláris.

О СИНГУЛЯРНЫХ РАДИУСАХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

P. ERDŐS и A. RÉNYI

Резюме

Пусть функция $f(z)$ регулярна и неограниченна в единичном круге. Радиус $z = re^{i\varphi}$ $(0 \leqq r < 1)$, обозначаемый для краткости через R_φ, следуя D. Gaier-у и W. Meyer—König-у (см. [1], [2]), называется сингулярным, если $f(z)$ неограниченна в круговом секторе $|z| < 1, \varphi - \varepsilon < \arg z < < \varphi + \varepsilon$ при любом положительном ε. Несингулярные радиусы называются регулярными. В настоящей работе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть n_k есть возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой*

$$\liminf_{(k-j)\to\infty} (n_k - n_j)^{\frac{1}{k-j}} = 1 . \tag{1}$$

Пусть ω_k есть как угодно медленно стремящаяся к бесконечности числовая последовательность. Тогда существует такая регулярная и неограчиченная в единичном круге функция $f(z)$, разлагаемая в степенной ряд вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n'_k} \tag{2}$$

которая имеет лишь единственный сингулярный радиус и для которой выполненно условие

$$0 \leqq n'_k - n_k \leqq \omega_k . \tag{3}$$

Теорема 1 доказывается в работе теоретико-вероятностным методом.

Теорема 2. *Пусть Λ_m $(m = 1, 2, \ldots)$ любая возрастающая последовательность натуральных чисел, а n_k последовтельность натуральных чисел, за исключением конечного числа делящихся на Λ_m $(m = 1, 2, \ldots)$. Пусть b_k любая ограниченная последовательность целых чисел. Предположим, что функция*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k + b_k}$$

регулярна и неограниченна в единичном круге. Тогда относительно $f(z)$ всякий радиус единичного круга сингулярен.

ON THE COMBINATION OF INDEPENDENT TESTS

by

TAMÁS LIPTÁK

Introduction

In scientific research there are two types of statistical hypotheses. In the first it is desired to prove a systematic effect in presence of random errors and for this purpose a "null-hypothesis" is being taken in order to disprove it on ground of observations ; having attained it the result is called "significant". In the second type it is desired to prove a statistical law by the "fitting" of observations. According to this there are significance tests and tests of goodness of fit. In the theory of testing statistical hypotheses both kinds of tests are examined the same way. For this purpose the roles of alternative hypotheses are changed. In the following the terminology of significance tests is going to be used.

In the Neyman—Pearson theory the tests serving to decide between accepting or rejecting the null-hypothesis are characterized by their critical set : the null-hypothesis is rejected if the sample observed belongs to this set. The level of a test is the probability of the critical set (if the nullhypothesis is simple) or its upper bound (if it is composite).

The choice of the level of tests is determined by practical considerations : this is one of the reasons why in practice families of tests are used containing a test for each level of significance between 0 and 1 characterized by the following property: a sample being significant on a level α is also significant on any level $\alpha' > \alpha$. The level of significance is often not determined beforehand, instead of this the minimal level is calculated for which the actual result is still significant. This "moving level" is being used for measuring the significancy of results. This practice is supposed to be originating from the early, "preclassical" period of the theory of testing statistical hypotheses, at which period the ,,deviation" of the results from the null-hypothesis was measured by the actual value of a suitably chosen statistic.

In any case it is obvious that the conscious use of this practice cannot lead to any mistake, it being the same whether the actual value of the statistic is compared to a fixed critical value ("method of fixed level") or whether the moving level is compared to a fixed level (,,method of moving level"). In the first method this comparison leads only to a statement of significancy or insignificancy, whereas in the second one by noting the actual value of the moving level we obtain some information which can be used in combining more tests. This is just the subject of this paper.

The following may be mentioned as an example. Significance tests were carried out in three experiments for the same problem. On the usual 5% level of significance the results proved insignificant in every case. From this result no further statistical inference can be derived. If it is known, however, that the moving levels in each of the three cases were between 5% and 30%, it may be stated — supposing the independence of the experiments — that the *combined* results of the three experiments are significant on a 5% level.

The paper deals with the suitable combination of moving levels originating from stochastically independent tests (resp. statistics). The corresponding null-hypotheses are in the following connection with each other : either the null-hypothesis is true in each case, or some alternative in all of them.

The connection of null-hypotheses satisfies the above assumptions e. g. in the cases below :

a) the case of observations of different sizes about the same null-hypothesis ;

b) the case of observations made about the same null-hypothesis biased by unknown nuisance parameters (testing of normality etc.) ;

c) the case of moving levels originating from stochastically independent statistics.

This *combination problem* has not been, in such a generality, dealt with in the literature. The problem of combination of independent tests is treated first in R. A. FISHER's *Statistical Methods for Research Workers* (see [3], § 21.1). The problem is dealt with — though not stated — in case of simple hypotheses and of statistics with continous distribution. The theoretical aspects of the problem are not treated here, only a formula for the combination is given. This "omnibus test" may be reduced to the product (or, equivalently, to the geometrical mean) of the levels. The necessary transformation is based on the χ^2-table. K. PEARSON arrived to the same results, independently of FISHER, but in another form [14]. It was E. S. PEARSON who first investigated the efficiency of the above omnibus test, but he did so under the same simple null-hypothesis and sample sizes [12]. The case of tests based on statistics with discrete distribution is treated in many papers (e. g. [8], [13], [17]) I. J. GOOD generalizes the "omnibus test" by introducing different weights of efficiency for the various tests. The transformation necessary to the application of this test is much more complicated than the original transformation and it is not tabulated.

In § 1 of this paper the problem of moving levels is treated quite generally. The moving level is proved to be a random variable having a distribution function which is equal to or less than the uniform distribution function U over the interval [0,1] if the null-hypothesis is true, and, in the unbiased case, it is equal to or greater than U if the alternative hypothesis is true.

In § 2 the class of available combinations is narrowed down by three rational postulates. It is possible to weight the various tests according to the possibly informations relating to their efficiency.

It is proved that the class M of combinations satisfying the mentioned postulates are the combinations generated by the weighted means of the levels. The average function applied here may be any continuous and strictly increasing function defined in the closed interval [0,1]. Here the results of NAGUMO — KOLMOGOROV—DE FINETTI for characterization of mean values are available (see e. g. [7], pp. 158—163). The class M of available combinations is enlarged to the class M^* of all combinations based on weighted means of levels with average function being continuous only in the *open* interval (0,1).

In § 3 two theorems are proved : 1. Every element of M^* is admissible, i. e. a combination problem can be given for every average function and for every system of weights in which the combination generated by the weighted mean of levels based on this function and this system is the optimal solution of the problem. 2. Every element of M^* as a test is unbiased if the levels are originated from unbiased tests.

In § 4 it is proved that the postulate of monotony occurring in § 2 is not too restrictive; namely every Bayes solution of the combination problem for a wide class of "good" tests has this property.

§ 5 is devoted to prove FISHER's "omnibus test" to be the likelihood ratio test of the combination problem for a class of tests being essentially the same as above.

Finally, in § 6 the combination generated by the inverse of the normal distribution function is suggested instead of FISHER's "omnibus test". This combination is optimal for a large class of tests for one-sided hypotheses. In addition, its application needs less numerical work and simpler tables than the "omnibus test" either in original form and even less numerical work and simpler tables in case of its weighted form introduced by GOOD.

§ 1 The Problem of Combination of Moving Levels

In this § the definitions which may be needed later on are given. Then the combination problem will be formulated as a problem of hypothesis testing.

A hypothesis concerning the distribution of a random variable may be tested by observing this variable. The result of observing the variable in any well-defined way is called a *sample*, the set of possible samples is the *sample space*. To the possible distributions of the random variable there corresponds a set of probability measures defined on the sample space, while a *statistical hypothesis* determines a subset of the set of possible probability measures.

Let X be the sample space and $\mathcal{A}$ the σ-algebra of its measurable subsets. The above probability measures defined on the measurable space $(X,\mathcal{A})$, i. e. the possible distributions of the sample $x \in X$, are indexed by an index space Ω. Thus the set of possible distributions of the sample is the system $\mathcal{P}_\Omega = \{P_\theta : \theta \in \Omega\}$. The measures P_θ are assumed to be different, i. e. for every pair $\theta_1 \in \Omega, \theta_2 \in \Omega$, $\theta_1 \neq \theta_2$ a set $A \in \mathcal{A}$ is supposed to exist for which $P_{\theta_1}(A) \neq P_{\theta_2}(A)$.

The statistical hypothesis H_0 (or the "null-hypothesis") determines a subset of $\mathcal{P}_\Omega$ or — being the same — that of Ω, and H_0 is the hypothesis supposing that the ,,true" distribution P_{θ^*} of the sample is such that the index belongs to this subset. Let Ω_0 be the above subset of Ω and, consequently, let $\mathcal{P}_{\Omega_0} = \{P_\theta : \theta \in \Omega_0\}$ be the distributions of the sample consistent with the null-hypothesis. It is assumed that $\Omega_0 \neq \varnothing$ and $\Omega_1 = \Omega - \Omega_0 \neq \varnothing$. The set of distributions consistent with the alternative hypothesis is clearly $\mathcal{P}_{\Omega_1} = \{P_\theta : \theta \in \Omega_1\}$.

H_0 is called a *simple hypothesis* if $\mathcal{P}_{\Omega_0}$ (or Ω_0) consists of a single element. Otherwise, H_0 is a *composite hypothesis*.

A rule by the application of which the acceptance or rejection of H_0 is decided according to the result of sampling is called a *criterion*.[1] Every

[1] Contrary to the usual terminology, the word *test* is reserved for a concept to be introduced later.

criterion may be characterized by its *critical set* i. e. by the set of all samples to which the rejection of H_0 is ordered by the rule. In other words the critical set is the set of *significant* samples. Only rules having measurable critical sets will be called criteria.

In principle, any measurable set may be chosen as the critical set of a criterion. The problem of the theory of statistical hypothesis is to choose a set the use of which relatively seldom leads to false decisions. False decisions can occur with all criteria. An *error of the first kind* is committed if the null-hypothesis gets rejected in spite of it being true ; an *error of the second kind* is arrived at if the null-hypothesis is accepted in spite of it being false. C being the critical set, these two errors might occur in the following way: if θ^* is the "true" index, i. e. the "real" distribution of the sample is $P_{\theta^*} \in \mathcal{P}_\Omega$,

(1.1) $$\theta^* \in \Omega_0 \quad \text{and} \quad x \in C$$

(error of the first kind) ;

(1.2) $$\theta^* \in \Omega_1 \quad \text{and} \quad x \in X - C$$

(error of the second kind).

Thus it follows from the relation $P_\theta(X - C) = 1 - P_\theta(C)$ that a criterion is the better, the smaller is the value of the *power function*

(1.3) $$p(\theta) = P_\theta(C)$$

in the case of $\theta \in \Omega_0$ and the larger it is if $\theta \in \Omega_1$. The probability of committing the error of the first kind is namely $p(\theta^*)$ $(\theta^* \in \Omega_0)$ and that of the error of the second type $1 - p(\theta^*)$ $(\theta^* \in \Omega_1)$.

In case of a simple null-hypothesis the probability of committing an error of the first kind is called the *size* of the criterion. This definition may be immediately transferred to composite null-hypotheses in the case of criteria having critical set C for which

(1.4) $$P_\theta(C) \equiv \alpha \qquad \theta \in \Omega_0$$

holds. The probability of committing an error of the first kind is determined by the null-hypothesis in this case too. The size of such *similar criteria* is α given in (1.4). In general case the least upper bound of these probabilities, i. e.

(1.5) $$\alpha = \sup_{\theta \in \Omega_0} p(\theta) = \sup_{\theta \in \Omega_0} P_\theta(C)$$

is called the size of the criterion. To a criterion having a size α at most,

(1.6) $$p(\theta) = P_\theta(C) \leqq \alpha \quad \text{for} \quad \theta \in \Omega_0$$

holds.

It is reasonable to require a criterion to reject the null-hypothesis more often when it is false than to do so when it is true. In terms of the power function, it is required for every pair $\theta_0 \in \Omega_0$, $\theta_1 \in \Omega_1$ that

(1.7) $$p(\theta_0) \leqq p(\theta_1)$$

should be true. If α denotes the size of the criterion, (1.7) is equivalent to

$$p(\theta) \geqq \alpha \quad \text{for} \quad \theta \in \Omega_0 . \tag{1.8}$$

Those criteria which fullfill the above requirements are called *unbiased criteria.*

A family of criteria is called a *test* if

1° for every *level* α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ there belongs a criterion having the size α at most ;

2° a sample being significant on a level α_1 is also significant on any level $\alpha_2 > \alpha_1$;

3° the set of samples being significant on an arbitrary level $\alpha' < \alpha$ is identical with the set of samples being significant on the level α.

Denoting the critical set of the criterion, corresponding to the level α, by C_α, the above conditions are equivalent to the following :

1° for every level α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$

$$P_\theta(C_\alpha) \leqq \alpha \quad \text{for} \quad \theta \in \Omega_0 ; \tag{1.9}$$

2° for every pair of levels $0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 \leqq 1$,

$$C_{\alpha_1} \subset C_{\alpha_2} \tag{1.10}$$

holds

3° for every level α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$

$$\bigcup_{\alpha' < \alpha} C_{\alpha'} = C_\alpha \tag{1.11}$$

A test is called *continuous* if for every level α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ the criterion having C_α as its critical set, is exactly of size α, i. e. instead of (1.9)

$$\sup_{t \in \Omega_0} P_\theta(C_\alpha) = \alpha \tag{1.12}$$

holds for $0 \leqq \alpha \leqq 1$.

The notions defined earlier for criteria may easily be extended to cover tests as well. Thus a family of criteria is called a *similar test* or *unbiased test*, respectively, if it satisfies the conditions 1° — 3° and every one of its criteria is similar or unbiased, respectively.

The real valued measurable functions $T(x)$ defined on the sample space, are called *statistics*. The distribution function of the statistic — in the case of P_θ — is the function

$$F_\theta(t) = P_\theta(\{x : T(x) < t\}) . \tag{1.13}$$

Tests can be derived from any statistic $T(x)$ e. g. in the following manner : the sample x is called significant on the level α if

$$T(x) < t_\alpha . \tag{1.14}$$

The constants t_α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ must be so selected that the system of the corresponding critical sets

$$C_\alpha^T = \{x : T(x) < t_\alpha\} \qquad 0 \leqq \alpha \leqq 1 \tag{1.15}$$

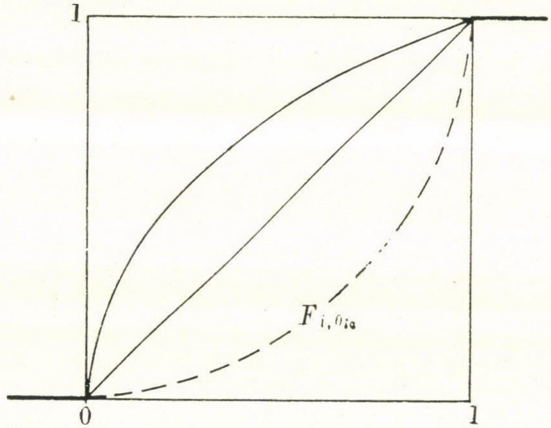
should satisfy the conditions 1°—3°. For this purpose the upper envelope function

(1.16) $$F(t) = \sup_{\theta \in \Omega_0} F_\theta(t) = \sup_{\theta \in \Omega_0} P_\theta(\{x : T(x) < t\})$$

of the distribution functions of $F_\theta(t)$ according to the null-hypothesis and its generalised inverse,[2] the function $F^{(-1)}(\alpha)$ should be formed.
Then the value of t_α may be defined by the following relation:

(1.17) $$t_\alpha = F^{(-1)}(\alpha) \qquad 0 \leqq \alpha \leqq 1 \; .$$

It can be easily seen, that the family of criteria of the form (1.15) obtained in such a manner really forms a test.



1. ábra

Supposing that ϱ is a strictly increasing and continuous function defined over the range of T, then the statistic ϱT defined by the relation

(1.18) $$\varrho T(x) = \varrho(T(x))$$

generates the same test as T. In other words: considering as equivalent the statistics that may be obtained by strictly increasing and continuous transformation from one another, to *every equivalence class of statistics there corresponds uniquely a test which is called the test generated by this equivalence class of statistics.*

The converse of this fact is also true: *to every test there corresponds uniquely an equivalence class of statistics any element of which generates this test in the form of* (1.15).

To demonstrate also the converse of the theorem, let us define the following statistic for the critical sets C_α occurring in the conditions 1°—3°:

(1.19) $$L(x) = \inf \{\alpha : x \in C_\alpha\} \qquad x \in X \; .$$

[2] The generalised inverse function $F^{(-1)}$ of the function F may be determined e. g. in the following way: $F^{(-1)}(\alpha) = 0$ for $\alpha \leqq 0$; $F^{(-1)}(\alpha) = 1$ for $\alpha \geqq 1$ and $F^{(-1)}(\alpha) = \inf \{t : F(t) \geqq \alpha\}$ for $0 < \alpha < 1$.

$L(x)$ is the „smallest“ level at which the sample is still significant. This statistic is called the *moving level* of the test having the sets $\{C_\alpha\}$ as critical sets. It is clear that the test generated by this statistic is identical with the original test i. e.

$$C_\alpha^L = C_\alpha \qquad 0 \leqq \alpha \leqq 1 \;, \tag{1.20}$$

(cf. e. g. [11], p. 80). This proves the converse of our assertion.

It should be observed here that in the relation (1.15) the signs $\leqq$, $>$ or $\geqq$ may figure instead of $<$ as well, whereby everything that has been stated above so far would remain valid with suitable modifications. The tests used in practice are derived from statistics by the employment of the sign $\geqq$ in (1.14) (t-test, χ^2-test etc.).

Let us now proceed to the distribution of the moving level L defined by the relation (1.19). Let $F_\theta(t)$ denote the distribution function of $L(x)$ in the case of P_θ. It follows from the definition of $L(x)$, that for every $\theta \in \Omega$ the distribution function $F_\theta(t)$ is *defined in the interval* $[0,1]$, i. e.

$$F_\theta(0) = 0 \quad \text{and} \quad F_\theta(1+0) = 1 \;. \tag{1.21}$$

Furthermore, let U denote the uniform distribution function over the interval $[0,1]$, i. e. put

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad t \leqq 0 \\ t & \text{for} \quad 0 \leqq t \leqq 1 \\ 1 & \text{for} \quad t \geqq 1 \;. \end{cases} \tag{1.22}$$

Then the following theorem is true : *if the null-hypothesis is true the distribution function of the moving level of any test, is everywhere at most as large as the uniform distribution function over the interval* $[0,1]$, *i. e.*

$$F_{\theta_0}(t) \leqq U(t) \qquad \text{for} \quad \theta_0 \in \Omega_0 \;, \quad 0 \leqq t \leqq 1 \;. \tag{1.23}$$

Furthermore: the distribution function of the moving level of any unbiased test, in the case of any possible distribution consistent with the null-hypothesis is everywhere at most as large as the distribution function of it in the case of any possible distribution consistent with the alternative hypothesis, i. e.

$$F_{\theta_0}(t) \leqq F_{\theta_1}(t) \tag{1.24}$$

whenever $\theta_0 \in \Omega_0$ *and* $\theta_1 \in \Omega_1$.

Both statements follow directly from the definition of tests and unbiased tests, respectively.

If the test is continuous and either the null-hypothesis is simple or the test is similar, equality holds identically in the relation (1.23). In other words : *in this case the moving level is uniformly distributed over the interval* $[0,1]$ *assuming the null-hypothesis to be true.*

In the case of unbiased tests it is easy to give an intuitive interpretation of the inequalities (1.23)—(1.24). For this purpose let us define a partial ordering in the set $\mathcal{F}$ of all distribution functions F defined on the interval

[0,1] in the following way: for two elements F_1, F_2 of $\mathcal{F}$ the relation $F_1 \prec F_2$ should mean the following:

$$F_1(t) \geqq F_2(t) \qquad \text{for all } 0 \leqq t \leqq 1 \tag{1.25}$$

and

$$F_1(t_0) > F_2(t_0) \tag{1.26}$$

for some $0 \leqq t_0 \leqq 1$. Without the latter, the fulfillment of (1.25) is indicated as follows: $F_1 \preceq F_2$. The sense of the "direction" of ordering is shown by the following fact: in case of $F_1 \preceq F_2$, two random variables, ξ_1 and ξ_2, can be given in such a way that the distribution function of ξ_1 is F_1, the distribution function of ξ_2 is F_2 with probability 1

$$\xi_1 \leqq \xi_2 \tag{1.27}$$

holds and in case of $F_1 \prec F_2$ the event $\xi_1 < \xi_2$ has a positive probability.

Turning to the problem of the moving level of unbiased tests, the relations (1.23)—(1.24) can be rewritten in the following way: if the null-hypothesis is true i. e. for $\theta_0 \in \Omega_0$, the relation

$$F_{\theta_0} \succeq U \tag{1.28}$$

holds, while for every pair $\theta_0 \in \Omega_0$, $\theta_1 \in \Omega_1$ the relation

$$F_{\theta_0} \succeq F_{\theta_1} \tag{1.29}$$

holds. Intuitively, this means that in case of the null-hypothesis a higher moving level may always be expected than in case of the alternative hypothesis. Thus we are getting back to the intuitively evident fact that the smallness of the moving level indicates the acceptance rather than the alternative hypothesis.

The subject of the present paper is the following: A set of experiments is given in which the statistical hypotheses are in the following connection with each other: either the null-hypothesis is true in each experiment or the alternative one is valid in each case.[3] Each experiment is evaluated by a test i. e. a statistic is selected and the actual value of its moving level is obtained. It is supposed that these statistics — hence their moving levels as well — are independent random variables in each cases.[4] Considering the joint truth of these null-hypothesis as a new null-hypothesis it is desiderable to evaluate this new problem by an "overall" test, in other words: to combine the independent moving levels to one single moving level. This is called the *combination problem.*

---

[3] Examples *a*)—*c*) for such sets of experiments have been given in the Introduction.

[4] This will certainly be the case if the experiments are independent of each other. It may happen, however, that, to evaluate the same experiment, two different tests have been employed and the statistics generating them are stochastically independent of each other in case of each possible distribution. The moving levels of these tests may be treated as different levels for combination.

Let $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r$ denote the index sets in the experiments, and let

$$\Theta_i = \Theta_{i0} \cup \Theta_{i1} \qquad (\Theta_{i0} \cap \Theta_{i1} = \varnothing) \tag{1.30}$$

be the decompositions of the index sets into the subset of the indices according to the null-hypothesis and that of indices according to the alternative one. Because of the supposed connection of the null-hypotheses, either one of the indices $(\theta_{10}, \theta_{20}, \ldots, \theta_{r0})$ $(\theta_{i0}, \in \Theta_{i0}, i = 1, 2, \ldots, r)$ or one of the indices $(\theta_{11}, \theta_{21}, \ldots, \theta_{r1})$ $(\theta_{i1} \in \Theta_{i1}, i = 1, 2, \ldots, r)$ is true in the set of experiments. Let the r-dimensional distribution functions

$$F_\theta(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \prod_{i=1}^{r} F_{i,\theta_i}(t_i) \tag{1.33}$$

be constructed from the distribution functions F_{i,θ_i} of the moving levels L_i according to the index $\theta_i \in \Theta_i$, but only for the indices $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$ drawn from one of the direct product sets $\Theta_{10} \times \Theta_{20} \times \ldots \times \Theta_{r0}$ and $\Theta_{11} \times \Theta_{21} \times \ldots \times \Theta_{r1}$. The distribution functions which can be obtained in this way will be indexed by a set Ω. Let

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \qquad (\Omega_0 \cap \Omega_1 = \varnothing) \tag{1.34}$$

be the decomposition of Ω into the subsets according to the direct sets above. Then the *combination problem is equivalent to the following hypothesis testing problem:* the possible probability distributions are generated by the distribution functions (1.33) defined on the sample space K_r (i. e. on the r-dimensional unit cube) and in case of the null-hypothesis $(\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20} \ldots, \theta_{r0}) \in \Omega_0)$ the relations

$$F_{i,\theta_{i_0}} \geqq U \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{1.35}$$

hold. Further, in the case of unbiased tests, the relations

$$F_{i,\theta_{i_0}} \geqq F_{i,\theta_{i_1}} \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{1.36}$$

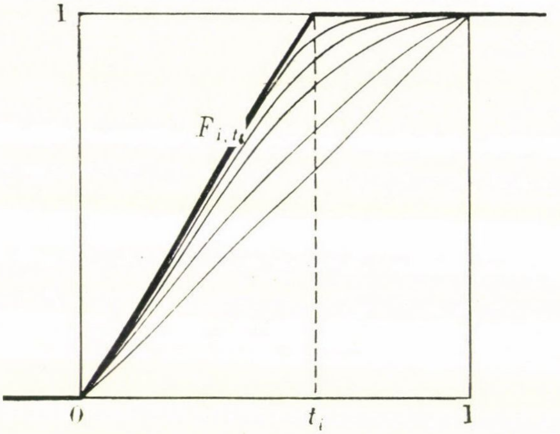
hold for any pair of $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \ldots, \theta_{r0})$ and $\theta_1 = (\theta_{11}, \theta_{21}, \ldots, \theta_{r1})$ with $\theta_0 \in \Omega_0$ and $\theta_1 \in \Omega_1$.

§. 2. The Class of Monotone, Compatible and Normed Combinations

The solution of the combination problem is sought in the form of a test, that is to say, in the form of some function of the moving levels. Since the number of experiments evaluated by tests tobe combined may differ from time to time, it is reasonable to seek at once for the solution in the form of a family of combinations, which supplies a combination for every number of experiments. The easiest way obtaining this is to form the empirical distribution of the "sample" consisting of the moving levels permitting in it different weights for the individual levels. For any number of experiments, this function is a discrete distribution function defined on the interval [0,1]. Thus it is reasonable to seek the solution of the combination problem in the form of a functional $\varphi(S)$ defined on the set $\mathcal{S}$ of all finite discrete distribution functions S defined on the interval [0,1]. It may be observed that, owing to the characterisability of tests by statistics as discussed before, it is sufficient to restrict the treatment to the equivalence classes of functionals which are invariant under any strictly increasing and continuous transformation.

Let E_t denote the (degenerated) distribution function of the constant t, i. e. let be

$$E_t(u) = \begin{cases} 0 & \text{for } u \leqq t \\ 1 & \text{for } u > t \,. \end{cases} \tag{2.1}$$



2. ábra

If the weights corresponding to the experiments are $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ($\lambda_1 \geqq 0, \lambda_2 \geqq 0, \ldots, \lambda_r \geqq 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r = 1$) then the weighted empirical distribution function of the level set $L_1, L_2, \ldots, L_r$ is defined by the relation

$$S = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i E_{L_i} \,. \tag{2.2}$$

In an other form this function is the following:

$$S(t) = \sum_{L_i < t} \lambda_i \,. \tag{2.3}$$

By any possible value of the number of levels, the weights and the levels, the functions S defined by (2.2) or (2.3) are finite discrete distribution functions, i.e.

$$S \in \mathcal{S} \,. \tag{2.4}$$

The intuitive interpretation of the "joint" null-hypothesis explained above suggests to require from the functional φ to be monotone according to the partial ordering defined in $\mathcal{S}$. This is contained in the following

Postulate 1. (monotony). For the functional φ

$$\varphi(S_1) < \varphi(S_2) \tag{2.5}$$

should be hold for every pair of distribution functions from $\mathcal{S}$ with

$$S_1 \prec S_2 . \tag{2.6}$$

This postulates expresses the evident requirement that a set of levels should be more significant than another if the levels of the former are more significant than the corresponding levels of the other set.

Weighting the elements of the set of levels the following problem arises: if some set of levels with weighted elements are joined to an overall set of levels, how are the levels to be reweighted in this new set? Thus the demand arises for the weighting of the different set of level sets between each other, as well. Let $\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \ldots, \lambda_{r_j,j}$ denote the weights corresponding to the elements of the set of levels $L_{1j}, L_{2j}, \ldots, L_{r_j,j}$ ($\lambda_{1j} \geqq 0, \lambda_{2j} \geqq 0, \ldots, \lambda_{r_j,j} \geqq 0$; $\lambda_{1j} + \lambda_{2j} + \ldots + \lambda_{r_j,j} = 1$). If w_j denotes the weight corresponding to the set $L_{1j}, L_{2j}, \ldots, L_{r_j,j}$ ($w_1 \geqq 0, w_2 \geqq 0, \ldots, w_k \geqq 0$; $w_1 + w_2 + \ldots + w_k = 1$), it is reasonable to choose the weight of the level L_{ij} in the overall set $L_{11}, L_{21}, \ldots, L_{r_1,1}, L_{12}, L_{22}, \ldots, L_{r_2,2}, \ldots, L_{1k}, L_{2k}, \ldots, L_{r_k k}$ to be $\lambda_{ij} w_j$ ($i = 1, 2, \ldots, r_j$; $j = 1, 2, \ldots, k$). According to this, the weighted empirical distribution function S of the overall set of levels is

$$S = \sum_{j=1}^{k} w_j S_j \tag{2.7}$$

where

$$S_j = \sum_{i=1}^{r_j} \lambda_{ij} E_{L_{ij}} \tag{2.8}$$

is the empirical distribution function of the set $L_{1j}, L_{2j}, \ldots, L_{r_j,j}$ ($j = 1, 2, \ldots, k$).

It is reasonable to demand of the combination that in case of joining different sets of levels the value of the combined level should be uniquely determined by the values of the weights corresponding to these sets and the values of the combined levels of the individual sets of levels. This demand is expressed by the following

Postulate 2 (compatibility). The identity

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{k} w_j S'_j\right) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{k} w_j S''_j\right) \tag{2.9}$$

should be fulfilled by an arbitrary weight system $w_1, w_2, \ldots, w_k$ if $S'_j \in \mathcal{S}, S''_j \in \mathcal{S}$ and

$$\varphi(S'_j) = \varphi(S''_j) \tag{2.10}$$

($j = 1, 2, \ldots, k$).

The following postulate is devoted to express the evident requirement, that the value of the "combined" level of a "set" consisting of a single level, should agree with the value of this level.

Postulate 3 (normedness). The following identity should be fulfilled :

$$\varphi(E_t) = t \qquad \text{for } 0 \leqq t \leqq 1 . \tag{2.11}$$

These three postulates referring to the combination, are equivalent to the conditions occurring in the characterization of the mean values. More precisely the following theorem is true :

Characterization of the mean values (NAGUMO—KOLMOGOROV—DE FINETTI; see e. g. [7] pp. 158—163). *For any functional φ satisfying Postulates 1—3 a strictly increasing and continuous function $\chi(t)$ can be given with the property*

$$\varphi(S) = \chi^{-1}\left(\int_0^1 \chi(t)\, d\, S(t)\right) \qquad \textit{for } S \in \mathcal{S} \ . \tag{2.12}$$

Here χ^{-1} is the inverse function of χ.

Conversely: any functional φ of the form (2.12) with average function χ having the above properties satisfies Postulates 1—3.

It should be observed here that from the form

$$S = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i E_{L_i} \tag{2.13}$$

of the distribution function S the following formula for φ can be obtained:

$$\varphi(S) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i E_{L_i}\right) = \chi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi(L_i)\right) . \tag{2.14}$$

This is equivalent to (2.12). From this form it is clear that these functionals are the weighted means of the levels $L_1, L_2, \ldots, L_r$, weighted by the weights $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ and averaged by the function $\chi(t)$.

It is worth-while to quote the proof of this theorem, which comes actually from DE FINETTI.

Let us consider first the following family $\mathcal{I} = \{I_t : 0 \leqq t \leqq 1\}$ of finite discrete distribution functions where

$$I_t = (1-t)\, E_0 + t\, E_1 = E_{1-t}^{(-1)} \in \mathcal{S} \ . \tag{2.15}$$

Evidently

$$I_0 = E_0 \quad \text{and} \quad I_1 = E_1 \ , \tag{2.16}$$

further for every pair of t_1, t_2 with $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$

$$I_{t_1} \prec I_{t_2} \tag{2.17}$$

holds. Moreover, for any weighting system $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ and for any set $t_1, t_2, \ldots, t_r$ $(0 \leqq t_i \leqq 1, i = 1, 2, \ldots, r)$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i I_{t_i} = I_{\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i t_i} \tag{2.18}$$

holds. Let now be

$$h(t) = \varphi(I_t) \qquad 0 \leqq t \leqq 1 \ . \tag{2.19}$$

Owing to the relation (2.16) and to the monotony of φ, $h(t)$ is a strictly increasing function of t, further, on account of (2.15),

$$h(0) = 0 \quad \text{and} \quad h(1) = 1 \ . \tag{2.20}$$

It can be proved that φ is continuous as well. Namely, if $h(t)$ would have, for instance, a right discontinuity in a point $t_0 \in [0,1)$, that is to say, $h(t_0) < < h(t_0 + 0)$ would hold, there would be such a number h_0 for which

$$(2.21) \qquad h(t_0) < h_0 < h(t_0 + \varepsilon)$$

would hold for every arbitrarily small positive value of ε. From this it would follow that

$$(2.22) \qquad E_{h(t_0)} \prec E_{h_0} \prec E_{h(t_0+\varepsilon)}$$

and, for an arbitrary $t \in [0,1]$,

$$(2.23) \qquad \tfrac{1}{2} E_{h(t_0)} + \tfrac{1}{2} E_{h(t)} \prec \tfrac{1}{2} E_{h_0} + \tfrac{1}{2} E_{h(t)} \prec \tfrac{1}{2} E_{h(t_0+\varepsilon)} + \tfrac{1}{2} E_{h(t)}$$

and in such a way, on account of the monotony of φ,

$$(2.24) \qquad \varphi\left(\tfrac{1}{2} E_{h(t_0)} + \tfrac{1}{2} E_{h(t)}\right) < A_t = \varphi\left(\tfrac{1}{2} E_{h_0} + \tfrac{1}{2} E_{h(t)}\right) < \varphi\left(\tfrac{1}{2} E_{h(t_0+\varepsilon)} + \tfrac{1}{2} E_{h(t)}\right)$$

would hold. But

$$(2.25) \qquad \varphi(E_{h(t)}) = h(t) = \varphi(I_t) \ ,$$

hence, from the compatibility of φ,

$$(2.26) \qquad \varphi\left(\tfrac{1}{2} E_{h(t_0)} + \tfrac{1}{2} E_{h(t)}\right) = \varphi\left(\tfrac{1}{2} I_{t_0} + \tfrac{1}{2} I_t\right) = \varphi\left(I_{\frac{t_0+t}{2}}\right) = h\left(\frac{t_0 + t}{2}\right)$$

and, by a similar reasoning,

$$(2.27) \qquad \varphi\left(\tfrac{1}{2} E_{h(t_0+\varepsilon)} + \tfrac{1}{2} E_{h(t)}\right) = \varphi\left(\tfrac{1}{2} I_{t_0+\varepsilon} + \tfrac{1}{2} I_t\right) = \varphi\left(I_{\frac{t_0+t+\varepsilon}{2}}\right) = h\left(\frac{t_0 + t + \varepsilon}{2}\right)$$

would follow, consequently, on the basis of (2.24) — (2.27),

$$(2.28) \qquad h\left(\frac{t_0 + t}{2}\right) < A_t < h\left(\frac{t_0 + t + \varepsilon}{2}\right)$$

and hence for every possible value of t

$$(2.29) \qquad h\left(\frac{t_0 + t}{2}\right) < h\left(\frac{t_0 + t}{2} + 0\right)$$

would hold what is impossible, since a monotone function can have at most a denumerable number of discontinuities.

Thereafter the inverse of the strictly increasing and continuous function $h(t)$ may be formed. Let us denote by it $\chi(t)$. Evidently

$$(2.30) \qquad \varphi(E_t) = t = h(\chi(t)) = \varphi(I_{\chi(t)})$$

consequently on account of the compatibility of φ and because of (2.17)

$$\varphi(S) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i E_{L_i}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i I_{\chi(t)}\right) = \varphi\left(I_{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi(L_i)}\right) =$$

$$= h\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi(L_i)\right) = \chi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi(L_i)\right) = \chi^{-1}\left(\int_0^1 \chi(t)\, dS(t)\right) . \tag{2.31}$$

Since the converse of the theorem is trivial, the proof is ended hereby.

Applying this theorem to the combination problem it may be stated: *the class M of monotone, compatible and normed combinations coincides with the class of those combinations which — as tests — are generated by one of the weighted means of the levels. As an average function any function which is strictly increasing and continuous in the interval* $[0,1]$ *may figure.*

Considering the fact that a statistic is determined in any case by its test only up to a strictly increasing and continuous transformation, the statistic in (2.14) can be replaced by

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi(L_i) . \tag{2.32}$$

A combination of M may be obtained e. g. if the inverse of the distribution function of a random variable is chosen to be χ the density function of which vanishes outside a finite interval, while it is positive within the same. Example: the variable is uniformly distributed over the interval $[0,1]$, $\chi(t)=t$ and the combination is based on the weighted arithmetic mean of the levels.

The same may not be stated in the relation of an infinite interval: the inverse function of such a distribution function has infinite limiting value either at 0 or at 1 or both, and therefore it cannot be continuous in the *closed* interval $[0,1]$. Accordingly, the functional based on it is monotone only if no level is equal to 0 or 1, respectively. Since in practice these cases are uninteresting, it is reasonable to enlarge the class M to those combinations the generating statistics of which is of the form (2.32) but the function $\chi(t)$ occurring in it is to be supposed continuous only in the *open* interval $(0,1)$. Let M^* denote this class of the compatible, normed and "almost everywhere" monotone combinations.

An element of M^* may be obtained e. g. if the inverse of the distribution function of a random variable is chosen to be χ the density function of which vanishes outside an *arbitrary* (finite or infinite) interval, while within it is positive. Example: the variable is normally distributed with expectation 0 and variance 1, $\chi(t) = \Phi^{-1}(t)$ where

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \tag{2.33}$$

is the (standardized) normal distribution function. Also the geometrical, harmonical and arbitrary power means of the levels may be mentioned corresponding to $\chi(t) = \log t$, t and t^a respectively. The (ordinary) geometrical mean is equivalent to FISHER's "omnibus test" [3] while the weighted one to its generalization introduced by GOOD [4].

It is not intended to analyse in this paragraph how the choice of a combination from the class M^* should be made. Here it will be given only how to calculate the combined level in case of a given averaging function and weighting system.

Let us take first the case in which all levels to be combined are uniformly distributed over the interval [0,1] if the null-hypotheses are true (this is the case of continuous tests, everywhere either the null-hypothesis is simple, or the test is similar). The random variables $\chi(L_1), \chi(L_2), \ldots, \chi(L_r)$ are independent and, in case of the nullhypotheses, they are identically distributed with the common distribution function $\chi^{-1}(t)$. Consequently, in this case the task — to determine the distribution function of the statistic of the form (2.32) if the null-hypotheses are true — is reduced to determine the distribution function of a linear form of independent and identically distributed random variables. If this distribution function is $G_\chi(t)$, the combined level $\widetilde{L}$ — taking the relations (1.14) — (1.17) into account — will be given by the formula

$$\widetilde{L} = G_\chi \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi(L_i) \right) . \tag{2.34}$$

In the cases when χ is the inverse of the Cauchy- or the normal distribution function, the determination of G_χ can be very easily achieved. If $\chi(t) = C^{-1}(t)$ where

$$C(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t} \frac{du}{1+u^2} \tag{2.35}$$

is the (standardized) Cauchy distribution function,

$$G_\chi(t) = C(t) \tag{2.36}$$

holds (see e. g. [1], p. 247, equ. (19.2.3)) and therefore we have

$$\widetilde{L} = C \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i C^{-1}(L_i) \right) . \tag{2.37}$$

If $\chi(t) = \Phi^{-1}(t)$, where $\Phi(t)$ is the normal distribution function given in (2.33),

$$G_\chi(t) = \Phi \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_r^2}} \right) , \tag{2.38}$$

therefore we have

$$\widetilde{L} = \Phi \left(\frac{\lambda_1 \Phi^{-1}(L_1) + \lambda_2 \Phi^{-1}(L_2) + \ldots + \lambda_r \Phi^{-1}(L_r)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_r^2}} \right) . \tag{2.39}$$

Concerning the general case we observe only that in case of continuous tests the exact level is given by the above equations, otherwise these values may also be used as upper estimates for the exact ones (see concerning this the papers [8], [12] and [17]).

§ 3. Admissibility and Unbiasedness of the Elements of M^*

In this paragraph two good properties of the class of M^* will be shown to support the restrictions introduced in § 2.

First, the following theorem will be proved: *every element of M^* is an admissible solution of the combination problem, i. e. there can be given a hypothesis testing problem for every strictly increasing and continuous function $\chi(t)$ defined on the interval $(0,1)$ and for every weight system $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ in which the element of M^* corresponding to the function χ and the system $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ is the optimal solution of the combination problem.*

To prove this theorem a simple alternative testing problem will be given for every element of M^*. A *simple alternative testing problem* is a hypothesis testing having the following structure: there are given only two possible distributions P_0 and P_1 on the sample space X, and the null-hypothesis state P_0 to be the ,,true" distribution of the sample. The moving level of the test generated by the statistic $T(x)$ according to (1.14)—(1.17) is obviously

$$L(x) = G_0(T(x)) , \tag{3.1}$$

where G_0 is the distribution function of T in the case of P_0. $L(x)$ has the distribution function

$$F_0(t) = G_0(G_0^{(-1)}(t)) \quad \text{or} \quad F_1(t) = G_1(G_0^{(-1)}(t)) \tag{3.2}$$

according as to P_0 or P_1 is the ,,true" distribution of the sample X. Here G_1 denotes the distribution function of T according to P_1, and $G_0^{(-1)}$ is the generalized inverse of G_0.

Let r simple alternative testing problems be given where the statistics T_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ generating the tests are mutually independent random variables .The possible distribution functions G_{i0} and G_{i1} of T_i are supposed to be absolutely continuous with density functions g_{i0} and g_{i1} being positive in an interval and vanishing outside of it. Then the moving level L_i is uniformly distributed according to the null-hypothesis, i. e. its distribution function is

$$F_{i0}(t) = U(t) = t \qquad 0 \leq t \leq 1 , \; i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.3}$$

in this case and it is

$$F_{i1}(t) = G_{i1}(G_{i0}^{-1}(t)) \qquad 0 \leq t \leq 1, i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.4}$$

according to the alternative hypothesis. Here G_{i0}^{-1} denotes the ordinary inverse of G_{i0}.

The hypothesis testing problem equivalent to the combination of these independent tests can be solved optimally by the use of the fundamental lemma of NEYMAN and PEARSON (see e. g. [1], pp. 529—531). The optimal test is generated by the statistic

$$T(L_1, \ldots, L_r) = \sum_{i=1}^{r} \log \frac{f_{i0}(L_i)}{f_{i1}(L_i)} . \tag{3.5}$$

Here f_{i0} and f_{i1} denote the density functions of the distribution functions F_{i0} and F_{i1}, respectively. Since

$$f_{i0}(t) \equiv 1 \tag{3.6}$$

on account of (3.3) and

$$f_{i1}(t) = \frac{d}{dt} G_{i1}\big(G_{i0}^{-1}(t)\big) = \frac{g_{i1}\big(G_{i0}^{-1}(t)\big)}{g_{i0}\big(G_{i0}^{-1}(t)\big)} \tag{3.7}$$

on account of (3.4), this optimal statistic is the following:

$$T(L_1, L_2, \ldots, L_r) = \sum_{i=1}^{r} \log \frac{g_{i0}\big(G_{i0}^{-1}(L_i)\big)}{g_{i1}\big(G_{i0}^{-1}(L_i)\big)}. \tag{3.8}$$

The combination generated by this statistic is equivalent to the element of M^* characterized by the statistic

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi(L_i) \tag{3.9}$$

if and only if there exists a strictly increasing and continuous function ϱ for which

$$\sum_{i=1}^{r} \log \frac{g_{i0}\big(G_{i0}^{-1}(L_i)\big)}{g_{i1}\big(G_{i0}^{-1}(L_i)\big)} = \varrho\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi(L_i)\right) \tag{3.10}$$

holds identically. It follows that ϱ may be only a linear function, hence the above condition may be rewritten in the following form: there should exist constants $a > 0, b_1, b_2, \ldots, b_r$ such that

$$\log \frac{g_{i0}\big(G_{i0}^{-1}(L_i)\big)}{g_{i1}\big(G_{i0}^{-1}(L_i)\big)} = a\, \lambda_i \chi(L_i) + b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{3.11}$$

i. e.

$$g_{i1}(t) = g_{i0}(t)\, e^{-a\lambda_i \chi(G_{i0}(t)) - b_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.12}$$

holds identically in t.

Distribution functions G_{i0} resp. G_{i1} may be easily constructed which satisfy the conditions (3.12). To show this let H be any function which is strictly increasing and continuous, further, which maps the interval $(-\infty, \infty)$ into $(0, \infty)$ (e. g. $H(t) = e^t$). Let G_{i0} be defined by

$$G_{i0}(t) = G_0(t) = \chi^{-1}\big(H(t)\big) \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3,13}$$

where $\chi^{-1}(t) = 0$ for $t \leqq \chi(0)$ and $\chi^{-1}(t) = 1$ for $t \geqq \chi(1)$. Then the functions

$$g_{i0}(t) = \begin{cases} g_0(t) = G_0'(t) & \text{for } \chi(0) \leqq t \leqq \chi(1) \\ 0 & \text{for } t < \chi(0) \text{ or } t > \chi(1) \end{cases} \tag{3.14}$$

are probability density functions and the integrals

$$\int_{-\infty}^{t} g_{i0}(u)\, e^{-a\lambda_i H(u) - b_i}\, du \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.15}$$

define the alternative distribution functions G_{i1}, if the constants $a > 0$ and $b_1, b_2, \ldots, b_r$ are suitable chosen. Namely, let $a = 1$ and

$$b_i = \log \int_{\chi(0)}^{\chi(1)} g_0(u)\, e^{-\lambda_i H(u)}\, du \qquad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{3.16}$$

The integrals (3.15) and (3.16) exist according to

$$0 < e^{-\lambda_i H(u)} \leqq 1 \tag{3.17}$$

which follows from $\lambda_i > 0$ and $H(u) \geqq 0$.

To see an example, put $\chi(t) = \Phi^{-1}(t)$. Choosing now

$$G_{i0}(t) = \Phi\left(\frac{t}{\sigma_i/\sqrt{n_i}}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.18}$$

and

$$a = 1, \qquad b_i = \frac{-\mu_i}{\sigma_i/\sqrt{n_i}} \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.19}$$

with $\sigma_i > 0$, n_i positive integer, $\mu_i < 0$ ($i = 1, 2, \ldots, r$). Then

$$G_{i1}(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu_i}{\sigma_i/\sqrt{n_i}}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, r\,. \tag{3.20}$$

The constants n_i, σ_i and μ_i should be chosen so that the relations

$$\lambda_i = \frac{-\mu_i}{\sigma_i/\sqrt{n_i}} \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.21}$$

be valid.

This set of experiments can be interpreted as follows : a sample of size n_i was drawn in the ith experiment for a random variable having known variance σ_i^2 and expectation 0 in the case of null-hypothesis and $\mu_i < 0$ in the alternative case ($i = 1, 2, \ldots, r$). For the combination of these tests the method based on the statistic (3.9) with $\chi = \Phi^{-1}$ is optimal.

In what follows it will be further proved that *combining unbiased tests by an element of M^* this combination — as a test used for the sample consisting of moving levels — is unbiased.* In other words : if the relations (1.34) also are valid for the possible distribution functions F_{i,θ_i} of the levels besides of (1.33), and $\chi(t)$ denotes any strictly increasing and continuous function defined on the interval (0,1) and, further, if H_θ is the distribution function of the combined level $\widetilde{L}$ in the combination (from M^*) generated by the statistic

$$\chi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, \chi(L_i)\right) \tag{3.22}$$

in the case of $\theta \in \Omega$, then besides the relation

$$H_{\theta_0} \geqq U \tag{3.23}$$

being valid for every $\theta_0 \in \Omega_0$, the relations

$$H_{\theta_0} \geqq H_{\theta_1} \tag{3.24}$$

i. e.

$$H_{\theta_0}(t) \leqq H_{\theta_1}(t) \qquad 0 \leqq t \leqq 1 \tag{3.25}$$

hold for every pair $\theta_1 \in \Omega_1$ and $\theta_0 \in \Omega_0$.

Let G_θ denote the distribution function of the statistic (3.22) in the case $\theta \in \Omega$. The relations (3.25) will follow and so the theorem will be proved if we succeed to show that

$$G_{\theta_0}(t) \leqq G_{\theta_1}(t) \tag{3.26}$$

holds for all $\theta_0 \in \Omega_1$ and $\theta_1 \in \Omega_1$. For this purpose let us consider a random variable η uniformly distributed over $[0,1]$ and, keeping fixed the indices

$$\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \ldots, \theta_{r0}) \in \Omega_0 \text{ and } \theta_1 = (\theta_{11}, \theta_{21}, \ldots, \theta_{r1}) \in \Omega_1 \tag{3.27}$$

occurring in (3.26), let us write :

$$\xi_{i0} = F^{(-1)}_{i,\theta_{i0}}(\eta) \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.28}$$

and

$$\xi_{i1} = F^{(-1)}_{i,\theta_{i1}}(\eta) \qquad i = 1, 2, \ldots, r\ . \tag{3.29}$$

Here $F_{i,\theta_{i0}}$ resp. $F_{i,\theta_{i1}}$ denote the distribution function of the moving level L_i in the case of θ_0 and θ_1, respectively. As it is well-known, ξ_{i0} is then distributed according to $F_{i,\theta_{i0}}$ and ξ_{i1} according to $F_{i,\theta_{i0}}$ (see e. g. [15], p. 183), i. e. the distribution of the moving level L_i coincides with that of ξ_{i0} or ξ_{i1} according to whether θ_0 or θ_1 is the "true" index. Besides the empirical distribution function

$$S = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i E_{L_i} \tag{3.30}$$

of the levels $L_1, L_2, \ldots, L_r$, the functions

$$R_0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i E_{\xi_{i0}} \quad \text{and} \quad R_1 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i E_{\xi_{i1}} \tag{3.31}$$

can be defined, observing that $R_0 \in \mathcal{S}$ and $R_1 \in \mathcal{S}$ as well as $S \in \mathcal{S}$. Denoting by φ_χ the statistic (3.22) in functional form

$$\varphi_\chi(S) = \chi^{-1}\left(\int_0^1 \chi(t)\, dS(t)\right), \tag{3.32}$$

it is obvious from the definition of R_0 and R_1 that the distribution of the random variable $\varphi_\chi(S)$ coincides with that of $\varphi_\chi(R_0)$ or $\varphi_\chi(R_1)$ according to whether θ_0 or θ_1 is the "true" index. But the relations (1.33) and (1.34) imply that for every elementary event

$$\xi_{i0} \geqq \xi_{i1} \tag{3.33}$$

and therefore at the same time

$$R_0 \geqq R_1 \tag{3.34}$$

holds, from which

$$\varphi_\chi(R_0) \geqq \varphi_\chi(R_1) \tag{3.35}$$

follows for every elementary event, being the functional φ_χ monotone. The desired relation between G_{θ_0} and G_{θ_1} can be easily derived from (3.35).

§. 4. A Connection Between the Monotone and the Bayes Solutions of the Combination Problem.

It will be proved in this Section that the postulate of monotony of combinations introduced in § 2 is not too restrictive in the following sense: for a rather typical class of tests every Bayes solution of the combination problem is generated by a monotone statistic.

For this purpose let the notion of Bayes solution of a hypothesis testing problem be defined. Let $\mathcal{P}_\Omega = \{P_\theta : \theta \in \Omega\}$ be the system of possible distributions defined on the sample space X (precisely, on the measurable space $(X, \mathcal{A})$), and let the null-hypothesis be characterized by the subset $\Omega_0 \subset \Omega$, where $\Omega_0 \neq \varnothing$ and $\Omega_1 = \Omega - \Omega_0 \neq \varnothing$ is the subset corresponding to the alternative hypothesis. Considering some σ-algebras $\mathcal{B}_0$ and $\mathcal{B}_1$ consisting of subset of the index sets Ω_0 and Ω_1, respectively, *prior distributions* can be introduced, i. e. probability measures Q_0 and Q_1 in the measurable spaces $(\Omega_0, \mathcal{B}_0)$ and $(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$, respectively. Supposing the measurability of the functions $P_{\theta_0}(A)$ and $P_{\theta_1}(A)$ for fixed $A \in \mathcal{A}$ with respect to $\mathcal{B}_0$ and $\mathcal{B}_1$, respectively, the *posterior distributions*

$$P_{Q_0}(A) = \int_{\Omega_0} P_{\theta_0}(A)\, d\, Q_0(\theta_0) \tag{4.1}$$

and

$$P_{Q_1}(A) = \int_{\Omega_1} P_{\theta_1}(A)\, d\, Q_1(\theta_1) \tag{4.2}$$

can be formed which are probability measures defined on the original measurable space $(X_1, \mathcal{A})$.

Then a new hypothesis testing problem can be considered the possible distributions of which are P_{Q_0} and P_{Q_1} and P_{Q_0} corresponds to the new null-hypothesis. The optimal solution of this new problem can be determined by the fundamental lemma of NEYMAN and PEARSON; this test is called a *Bayes solution* (corresponding to the prior distributions Q_0, Q_1) of the original hypothesis testing problem.[6]

The theorem to be proved can now be formulated as follows. *Let C be the class of all tests the distribution function of the moving level of which is strictly increasing convex or concave function defined on the interval* [0,1] *according to whether the null-hypothesis or the alternative is true* (Figure 1)[7]. *If a com-*

[6] The definition given here is a simple extension of the usual one (see e. g.[9] p. 5) from criteria to tests (in sense of this paper).

[7] Every uniformly most powerful, uniformly most powerful similar or unbiased test belongs to the class C.

bination problem contains only tests belonging to the class C, then every Bayes solution of this problem is generated by a statistic which is monotone in sense of the definition given in § 2.

The importance of this theorem is clear from the fact that the class of all Bayes solutions in a relatively wide and typical class of hypothesis testing problems are "complete", i. e. for every test there can be given a Bayes solution which is at least as good as this test. (See e. g. [16], pp. 130—138.)

In the proof of the above theorem the fact will be used that the posterior distributions may be derived from the *posterior distribution functions* defined by the relations

$$F_{Q_0}(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \int\limits_{\Omega_0} \prod_{i=1}^{r} F_{i,\theta_{i0}}(t_i)\, dQ_0(\theta_{10}, \theta_{20}, \ldots, \theta_{r0}) \tag{4.3}$$

and

$$F_{Q_1}(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \int\limits_{\Omega_1} \prod_{i=1}^{r} F_{i,\theta_{i1}}(t_i)\, dQ_1(\theta_{11}, \theta_{21}, \ldots, \theta_{r1}) \tag{4.4}$$

Here Q_0 and Q_1 are the prior distributions introduced on the sets Ω_0 and Ω_1, respectively, in such a way that the functions $F_{i,\varrho_{i0}}$ and $F_{i,\varrho_{i0}}$ are measurable with respect to the corresponding σ-algebras.

As the functions $F_{i,\theta_{i0}}$ and $F_{i,\theta_{i1}}$ are strictly increasing and continuous, further the functions $F_{i,\varrho_{i0}}$ are convex and the functions $F_{i,\theta_{i1}}$ are concave ($i = 1, 2, \ldots, r$), their derivatives

$$f_{i,\theta_{i0}}(t) = F'_{i,\varrho_{i0}}(t) \tag{4.5}$$

$$f_{i,\theta_{i1}}(t) = F'_{i,\theta_{i1}}(t) \tag{4.6}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r$$

exist and the functions in (4.5) are strictly increasing, while the functions in (4.6) are strictly decreasing. Since the possible density functions of the sample of this posterior hypothesis testing problem are defined by the relations

$$\frac{\partial^r F_{Q_1}(t_1, t_2, \ldots, t_r)}{\partial t_1\, \partial t_2 \ldots \partial t_r} = \int\limits_{\Omega_0} \prod_{i=1}^{r} f_{i,\theta_{i0}}(t_i)\, dQ_0(\theta_{10}, \theta_{20}, \ldots, \theta_{r0}) \tag{4.7}$$

and

$$\frac{\partial^r F_{Q_1}(t_1, t_2, \ldots, t_r)}{\partial t_1\, \partial t_2 \ldots \partial t_r} = \int\limits_{\Omega_1} \prod_{i=1}^{r} f_{i,\varrho_{i1}}(t_i)\, dQ_1(\theta_{11}, \theta_{12}, \ldots, \theta_{r1}) , \tag{4.8}$$

the statistic occurring in the fundamental lemma of NEYMAN and PEARSON is given by

$$T(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \frac{\int\limits_{\Omega_0} \prod_{i=1}^{r} f_{i,\theta_{i0}}(t_i)\, dQ_0(\theta_{10}, \theta_{20}, \ldots, \theta_{r0})}{\int\limits_{\Omega_1} \prod_{i=1}^{r} f_{i,\varrho_{i1}}(t_i)\, dQ_1(\theta_{11}, \theta_{21}, \ldots, \theta_{r1})} \tag{4.9}$$

But this statistic is a strictly increasing function of $t_1, t_2, \ldots, t_r$. This property of T is obviously equivalent to the statement of the theorem.

§. 5. A Property of Fisher's "Omnibus Test"

J. Neyman and E. S. Pearson in their paper [11] developed a principle to determine a "natural" test for composite hypotheses. This "principle of likelihood ratio" is available in case of existence of the "likelihood function" of the sample drawn to test the null-hypothesis. This statistic is the frequency function of the sample, or, in exact terminology, the "generalized (Radon—Nikodym) density" of the sample distribution. Thus the existence of the likelihood function is connected to the assumption that the possible distributions of the sample form a dominated set of measures (see [5]). Under the validity of this assumption let

$$P_\theta(A) = \int_A f_\theta(x)\, d\mu(x) \qquad A \in \mathcal{A} \tag{5.1}$$

be the possible distrubitions of the sample x. Let as before, Ω_0 resp. Ω_1 denote, the subsets of Ω corresponding to the null-hypothesis resp. to the alternative one. μ is a fixed σ-finite measure defined on $(X, \mathcal{A})$. The measurable function to $f_\theta(x)$ occurring in (5.1) is the *generalized density function* of the sample.

The principle of likelihood ratio means the following method: consider the — so-called *likelihood ratio* — statistic

$$R(x) = \frac{\sup\limits_{\theta_0 \in \Omega_0} f_{\theta_0}(x)}{\sup\limits_{\theta \in \Omega} f_\theta(x)} \tag{5.2}$$

and use the test generated by R in the sense of (1.14)—(1.17). This is the *likelihood ratio solution* of the problem.

Various authors succeeded in proving several good properties of this principle (see e. g. [9]). Here only the following theorem — related to the combination problem — will be proved: *if the test to be combined is similar and the possible distribution functions of the levels are all belonging to the class C defined in § 4, then the likelihood ratio solution of the combination problem is equivalent to* Fisher'*s "omnibus test"*.

To prove this theorem let us remark first that in the combination problem the likelihood function is

$$f_\theta(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \prod_{i=1}^{r} f_{i,\theta_i}(t_i) \tag{5.3}$$

where, as before, f_{i,θ_i} denotes the frequency function of the level L_i in the case of $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) \in \Omega$ (see (4.5)—(4.6). On account of the assumption of similarity,

$$f_{i,\theta_{i0}}(t_i) \equiv 1 \qquad 0 \leqq t_i \leqq 1\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{5.4}$$

if $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \ldots, \theta_{r0}) \in \Omega_0$ and thus for the likelihood ratio the relation

$$R(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \frac{1}{\sup\limits_{\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta\ ) \in \Omega} \prod_{i=1}^{r} f_{i,\theta_i}(t_i)} \tag{5.5}$$

holds. But for any fixed i and t_i $(0 \leqq t_i \leqq 1,\ 1 \leqq i \leqq r)$ it follows from the assumption of concavity of the functions F_{i,θ_i} that

$$\sup f_{i,\theta_i}(t_i) = \frac{1}{t_i} \tag{5.6}$$

where $\frac{1}{t_i}$ is the value, at $t = t_i$, of the left derivative of the distribution function

$$F_{i;t_i}(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_i} & \text{for } 0 \leqq t \leqq t_i \\ 1 & \text{for } t_i \leqq t \leqq 1 \end{cases} \tag{5.7}$$

which is the upper envelope of some functions F_{i,θ_i} (see Fig. 2). On account of (5.6), the likelihood ratio is

$$R(t_1, t_2, \ldots, t_r) = t_1 t_2 \ldots t_r \tag{5.8}$$

which is equivalent to FISHER's "omnibus test". this was to be proved.

§ 6. Choice from M^*: Combination by means of Φ^{-1}

The question arises naturally which combination should be used in practice. The answer is not a unique one : the choice depends on the available information concerning the experiments and the tests used in them. As it was shown before, there corresponds a hypothesis testing problem to each combination problem the optimal solution of which — if it exists — gives the optimal solution for the combination problem too.

However, the need for combination of independent tests arises just in those cases in which no or scarce information only is available : the information consists, at most of the number of observations of the individual experiments. Thus the restrictions introduced in § 2 are not too arbitrary : they mean the necessary compromise with the insufficiency of information.

Further, the results of §§ 3 and 4 show that Postulate 1 is a rather natural one, Postulate 2 indicates an intrinsically desirable property of combinations (according to later similar combination) while Postulate 3 means only a norming in the set of combinations. Thus the only thing to be done is to choose an element from M^*.

Any choice has some arbitrariness, but it is suggested by a number of reasons to choose the combination the averaging function of which is Φ^{-1} i. e. the inverse of the normal distribution function

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du\ . \tag{6.1}$$

The formula of the combined level $\tilde{L}$ of the levels $L_1, L_2, \ldots, L_r$ with weights $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, respectively, is the following :

$$\tilde{L} = \Phi\left(\frac{\lambda_1 \Phi^{-1}(L_1) + \lambda_2 \Phi^{-1}(L_2) + \ldots + \lambda_r \Phi^{-1}(L_r)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_r^2}} \right) \tag{6.1}$$

(cf. (2.39)). This combination needs very easy computational works and tables, and, suitably choosing the weights, is optimal for a rather wide class of one-sided hypothesis testing problems which may be characterized as follows : the possible distributions are generated by densities belonging to the exponential family (see e. g. (8.1) in [10] or (2.3) in [2]) and the null-hypotheses are stating the validity of a one-sided inequality for one of the parameters in the density function. This question and similar ones will be treated in more detail in a forthcoming paper of the author.

The weights occurring in (6.2) should be chosen as to express the efficiencies (or the available information concerning these) of the tests used in the single experiments. Thus λ_i should be chosen proportional to the „expected" difference between the null-hypothesis and the real situation and inversely proportional to the standard deviation of the statistics used for testing in the ith experiment ($i = 1, 2, \ldots, r$). Generally, this standard deviation is inversely proportional to the square root of the number of observations of this experiment. If there is no information available but the number n_i of observations in the experiments ($i = 1, 2, \ldots, r$) the weights may be chosen proportional to the square roots of these numbers, i. e. in this case

$$\tilde{L} = \Phi\left(\frac{\sqrt{n_1}\,\Phi^{-1}(L_1) + \sqrt{n_2}\,\Phi^{-1}(L_2) + \ldots + \sqrt{n_r}\,\Phi^{-1}(L_r)}{\sqrt{n_1 + n_2 + \ldots + n_r}}\right). \tag{6.3}$$

Formulae (6.2) and (6.3) apply equally to significance tests and to tests for goodness of fit (e. g. for combination testings for normality). In case of significance tests, however, the formulae

$$\tilde{L} = 1 - \Phi\left(\frac{\lambda_1\Phi^{-1}(1 - L_1) + \lambda_2\Phi^{-1}(1 - L_2) + \ldots + \lambda_r\Phi^{-1}(L_r)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_r^2}}\right) \tag{6.4}$$

and

$$\tilde{L} = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n_1}\,\Phi^{-1}(1-L_1) + \sqrt{n_2}\,\Phi^{-1}(1 - L_2) + \ldots + \sqrt{n_r}\,\Phi^{-1}(1 - L_r)}{\sqrt{n_1 + n_2 + \ldots + n_r}}\right) \tag{6.5}$$

(being equivalent to (6.2) and (6.3), respectively) are more easily applicable as the tables of the function $\Phi^{-1}(t)$ (see e. g. [1] p. 557 or [15], p. 173) are given in detail only for values of t near to 1.

(Received December 20, 1958)

REFERENCES

[1] Cramér, H. : *Mathematical methods of statistics.* Princeton University Press, Princeton, 1946.

[2] Дынкин, Е. В.: "Необходимые и достаточные статистики для семейства распределений вероятностей". *Успехи Математических Наук* **6**:I (1951) 68—90.

[3] Fisher, R. A. : *Statistical methods for research workers.* Oliver and Boyd, London, 1932 (4th edition).

[4] Good, I. J. : "On the weighted combination of significance tests". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **17** (1955) 264—265.

[5] Halmos, P. R.—Savage, I. : "Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics". *The Annals of Mathematical Statistics* **20** (1949) 225—241.
[6] Halmos, P. R. : *Measure theory.* Van Nostrand, New-York, 1950.
[7] Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.—Pólya, G. : *Inequalities.* Cambridge, at the University Press, 1952.
[8] Lancaster, H. O. : "The combination of probabilities arising from data in discrete distributions". *Biometrika* **36** (1949) 370—382.
[9] Lehmann, E. L. : "Some principles of the theory of testing hypotheses". *The Annals of Mathematical Statistics* **21** (1950) 1—26.
[10] Lehmann, E. L.—Scheffé, H. : "Completeness, similar regions, and unbiased estimation, II.". *Sankhyā* **10** (1950) 305—340.
[11] Neyman, J.—Pearson, E. S. : "On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference". Biometrika **20** (1928) 175— and 263—
[12] Pearson, E. S. : "The probability integral transformation for testing goodness of fit and combining independent tests of significance". *Biometrika* **30** (1938) 134—148.
[13] Pearson, E. S. : "On questions raised by the combination of tests based on discontinuous distributions". *Biometrika* **37** (1950) 383—398.
[14] Pearson, K. : "On a method of determining whether a sample of size supposed to have been drawn from a parent population having a known probability integral has probably been drawn at random". *Biometrika* **25** (1933) 379—410.
[15] Rényi, A. : *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[16] Wald, A. : *Statistical decision functions.* Wiley, New York, 1950.
[17] Wallis, W. A. : "Compounding probabilities from independent significance tests." *Econometrica* **10** (1942) 229—248.

FÜGGETLEN MOZGÓ SZINTES PRÓBÁK ÖSSZEVONT ÉRTÉKELÉSÉRŐL

LIPTÁK T.

Kivonat

E dolgozatban szignifikancia-vizsgálatnál vagy illeszkedés-vizsgálatnál alkalmazható próbák mozgó szintjének nevezzük azt a legkisebb, illetve legnagyobb szintet, melynél az eredményt még szignifikánsnak, illetve illeszkedőnek lehet mondani. A statisztikai gyakorlatban az egyes vizsgálatoknál e mozgó szint megadásával szokták jellemezni a kísérleti eredmények szignifikáns, illetve illeszkedő voltát. Gyakran előfordul, hogy ugyanazon (vagy hasonló) hipotézisre vonatkozólag egymástól függetlenül több kísérletet is végeznek, de a kísérleti feltételek különböző volta és egyéb okok miatt az adatokat egyetlen mintává nem egyesíthetik (normalitásvizsgálat). Célszerű ilyenkor az egész kísérletsorozatot egyetlen mozgó szinttel jellemezni, más szóval az egyes kísérletekben kapott mozgó szinteket összevonni.

A dolgozat 1. §.-ban megállapítjuk, hogy bármely próba mozgó szintje olyan valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye a nullhipotézis fennállása esetén mindenütt kisebb vagy legfeljebb akkora , mint a [0,1] intervallumban egyenletes eloszlásfüggvény. Torzítatlan próbák esetén az is igaz, hogy a mozgó szint eloszlásfüggvénye az alternatív hipotézis fennállása esetén mindig nagyobb vagy legfeljebb egyenlő, mint a nullhipotézis alatt. Mozgó szintek összevonásának kérdését így egy hipotézis-vizsgálati problémává lehet átfogalmazni.

A 2. §.-ban kimutatjuk hogy néhány célszerű tulajdonság megkövetelésével az összevonások körét a mozgó szintek valamilyen súlyozott középértéke által

nyerhető összevonásokra lehet leszűkíteni. A szereplő súlyok az egyes mozgó szintek megbízhatóságára, a megfelelő próba efficienciájára vonatkozó esetleges információkból állapíthatók meg. E követelések lényegileg a következők: 1. Az összevonás ,,monoton'' legyen, tehát két szint-sorozat közül okvetlenül az elsőt minősítse szignifikánsabbnak (illetve illeszkedőbbnek), ha annak szintjei rendre szignifikánsabbak (illetve illeszkedőbbek), mint a másik sorozat megfelelő szintjei. 2. Az összevonás ,,kompatilibis'' legyen, tehát tetszőleges szintcsoportok esetén az egyes csoportok összevont szintjei, valamint az egyes csoportoknak tulajdonított súlyok értékei már egyértelműen határozzák meg az egyesített szintcsoport összevont szintjének értékét. 3. Bármely egyelemű szint-,,sorozat'' összevont szintje egyezzék meg e szint értékével.

Az összevonások fenti M^* osztálya tartalmazza az eddig használt FISHER-féle ,,omnibus test''-et [3], sőt, annak GOOD-féle általánosítását is [4]. A 3. §.-ban megmutatjuk, hogy az M^* osztályba tartozó összevonások valamennyien a szokásos definíció szerint elfogadhatók és torzítatlanok. A 4. §.-ban bebizonyítjuk, hogy amennyiben csak bizonyos tipikusan ,,jó'' próbákra szorítkozunk, az összevonási probléma valamennyi Bayes-megoldása a 2. §.-ban adott definíció értelmében monoton statisztikára alapozott összevonás. A dolgozat 5. §.-át azon tény bizonyításának szenteljük, hogy a FISHER-féle ,,omnibus-test'' lényegében ugyanezen próbák körében az összevonási probléma ,,likelihood-hányados'' megoldása.

Végül a 6. §.-ban az M^* osztály elemei közül a normális eloszlásfüggvény inverze szerint közepelt összevonást ajánljuk, amelynél az összevont szint képlete a következő :

$$\tilde{L} = \Phi\left(\frac{\lambda_1 \Phi^{-1}(L_1) + \lambda_2 \Phi^{-1}(L_2) + \ldots + \lambda_r \Phi^{-1}(L_r)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_r^2}}\right). \tag{1}$$

Itt $L_1, L_2, \ldots, L_r$ az összevonásra kerülő mozgó szintek, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ pedig a nekik tulajdonított súlyok értékei. Egyéb információk hiányában λ_i-t az i-edik kisérletben szereplő megfigyelések n_i számának négyzetgyökével arányosnak lehet venni. Ekkor a fenti képletben λ_i helyett egyszerűen $\sqrt{n_i}$-t kell írni. Viszonylag kicsiny szintek esetén célszerűbb a fentiekkel ekvivalens (6.4), illetve (6.5) képletekkel számolni.

О СОВМЕСТНОЙ ОЦЕНКЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЫТОВ

T. LIPTÁK

Резюме

В настоящей работе движущимся уровнем критерии, применимых при проверке значимости, называется тот наинизший уровень, при котором результат может ещё считаться сигнификантным. В статистической практике при отдельных исследованиях заданием этого движущегося уровня характеризуют сигнификантность результатов опытов. Часто случается, что относительно одной и той же (или похожих) гипотез производится независимо друг от друга несколько опытов, но

из-за различности условий опытов или по другим причинам данные не могут быть объединены в единственной выборке. Целесообразно в этом случае характеризировать серию опытов единственным движущимся уровнем, иначе говоря, совместно оценить движущиеся уровни, полученные в отдельных опытах.

В первом параграфе работы доказывается, что движущийся уровень любой критерии есть такая случайная величина, функция распределения которой, в случае выполнения нуль-гипотезы, не превосходит функции распределения, равномерной на отрезке [0,1]. В случае проб без искажения верно и то, что, в случае выполнения альтернативной гипотезы, имеет место обратное неравенство. С помощью этого вопрос о совместной оценке движущихся уровней может быть переформулирован как проблема об изучении гипотезы.

Во втором параграфе, требуя несколько целесообразных свойств, вопрос сводится к совместных оценкак, получаемых с помощью какого-нибудь средного значения с весом движущихся уровней. Фигурирущие веса могут быть определены из информаций относительно надёжности отдельных движущихся уровней, эффициенции соответствующей критерии. Требования в сущности следующие: 1. совместная оценка должна быть «монотонной», т. е. квалифицирует последовательность уровней более сигнификантной, чем другую, если уровни первой сигнификантней, чем соответствующие уровни последней. 2. совместная оценка должна быть «комбатибильна», т. е. в случае любых групп уровней значения совместного уровней отдельных групп и значения весов, соответствующих отдельным группам, уже единственным образом определяют значение собместного уровня объединенной группы уровней. 3. совместное значение любой одноэлементной «последовательности» уровней должно совпадать со значением уровня.

Указанный выше класс совместных оценок M^* содержит использованное до сих пор «omnibus test» Fisher-а [3] и её обобщение, данное Good-ом [4]. В третьем параграфе доказывается, что все совместные оценки, принадлежащие классу M^*, допустимы и не искажённы. В четвертом параграфе доказывается, что, если ограничиться некоторыми типичными допустимыми критериям, все решения Bayes-а проблемы концентрации монотонны в смысле определения § 2. В параграфе 6. работы доказывается, что «omnibus test» Fisher-а в круге этих же критериев есть решение проблемы «likelihood-частного». Наконец, в параграфе 5 из элементов класса M^* предлагается то в котором усреднение производится с помощью обратной нормальной функции распределения, для которой формула совместного уровня такова:

$$\tilde{L} = \Phi\left(\frac{\lambda_1 \Phi^{-1}(L_1) + \lambda_2 \Phi^{-1}(L_2) + \ldots + \lambda_r \Phi^{-1}(L_r)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_r^2}}\right).$$

Здесь $L_1, L_2, \ldots, L_r$ концентрируемые движущиеся уровни отдельных опытов, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ значения приписанных им весов. Доказывается, что этот способ оптимален в некотором достаточно широком классе изучений односторонних гипотез.

ON THE PROBABILISTIC GENERALIZATION OF THE LARGE SIEVE OF LINNIK

by

ALFRÉD RÉNYI

Let $S = [\Omega, \mathcal{A}, P]$ be a probability space, i. e. Ω an arbitrary abstract space, $\mathcal{A}$ a σ-algebra of subsets of Ω and P a measure on $\mathcal{A}$, for which $P(\Omega) = 1$. The elements of $\mathcal{A}$ will be denoted by $A, B, \ldots$ etc. and called events. Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a finite or infinite sequence of random variables on S. Let us suppose first that the random variables ξ_n are of the discrete type. Let z_{nk} $(k = 1, 2, \ldots)$ denote the possible values of ξ_n; let A_{nk} denote the event $\xi_n = z_{nk}$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$. We may suppose $P(A_{nk}) > 0$ for all values of k for which it is defined. Let us define

$$\mathbf{d}(\xi_n, \xi_m) = \sup_{(k,l)} \left| \frac{P(A_{nk} A_{ml})}{P(A_{nk})\, P(A_{ml})} - 1 \right| \quad \text{for} \quad n \neq m . \tag{1}$$

(We denote by the product of two events the event consisting in the joint occurrence of the two events.) Let us suppose that the quadratic form

$$\sum_{n \neq m}\sum \mathbf{d}(\xi_n, \xi_m)\, x_n x_m$$

is bounded, i. e. there exists a constant $\Delta \geqq 0$ such that for any sequence $\{x_n\}$ for which

$$\sum_n x_n^2 < +\infty ,$$

we have

$$\left| \sum_{n \neq m}\sum \mathbf{d}(\xi_n, \xi_m)\, x_n x_m \right| \leqq \Delta \sum_n x_n^2 . \tag{2}$$

If such a constant Δ exists we call the random variables $\{\xi_n\}$ *(pairwise) almost independent with modulus* Δ. (Clearly $\Delta = 0$ if and only if the variables ξ_n are pairwise independent.) Let us denote by $\mathbf{M}\{\eta\}$ the mean value and by $\mathbf{D}^2\{\eta\}$ the variance of a random variable η, and by $\mathbf{M}\{\eta | \xi\}$ the conditional mean value of η under the condition that the value of ξ is given. In case ξ is a discrete random variable, taking on the values z_k (we denote this event by A_k) with the probability $P(A_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\mathbf{M}\{\eta | \xi\}$ is a random variable which takes on the values $\mathbf{M}\{\eta|A_k\}$ $(K = 1, 2, \ldots)$ with probabilities $P(A_k)$ and thus

$$\mathbf{M}\left\{\mathbf{M}\{\eta|\xi\}\right\} = \mathbf{M}\{\eta\} \; . \tag{3}$$

Let us put

$$\mathbf{D}_\xi^2(\eta) = \mathbf{M}\left\{(\mathbf{M}\{\eta|\xi\} - \mathbf{M}\{\eta\})^2\right\} \tag{4}$$

i. e. $\mathbf{D}_\xi^2\{\eta\}$ is the variance of the random variable $\mathbf{M}\{\eta|\xi\}$. Let us put further

$$\theta_\xi^2\{\eta\} = \frac{\mathbf{D}_\xi^2\{\eta\}}{\mathbf{D}^2\{\eta\}} \; . \tag{5}$$

The positive square root $\theta_\xi\{\eta\}$ of the quantity under (5) is the *correlation ratio* introduced by K. PEARSON (see [1], p. 280—281).

Some years ago I have proved (see [3], and for a previous weaker version [2]) the following

Theorem 1. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of discrete random variables, which are (pairwise) almost independent with modulus Δ. Let η be an arbitrary random variable with finite mean and variance. Then we have*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{\xi_n}^2\{\eta\} \leqq (1 + \Delta) \; . \tag{6}$$

I obtained Theorem 1. as the probabilistic generalization of the large sieve of Y. V. LINNIK (see [4]). Theorem 1. has important applications, e. g. in number theory.[1]

In [3], Theorem 1. is stated in a somewhat different form ; first of all it is stated not only for discrete random variables ξ_n ; this makes no essential difference as the general case can easily be deduced from the particular case of discrete variables, as will be pointed out below. Besides this, the theorem is not expressed in terms of correlation ratios ; as a matter of fact, when writing the paper [3] it escaped my attention that this is the most simple way of expression.

In the present paper we give an improvement of theorem 1. The improvement consists in that we prove the inequality (6) by supposing instead of the condition that the random variables ξ_n should be „almost-independent" with modulus Δ, only that they should be „weakly-dependent", with modulus B.

The „weak dependence" is defined as follows: Let $\varphi(\xi_n, \xi_m)$ denote the *mean square contingency* [introduced by K. PEARSON (see [1], p. 282)] of the random variables ξ_n and ξ_m, i. e. let $\varphi(\xi_n, \xi_m)$ denote the positive square root of the quantity

$$\varphi^2(\xi_n, \xi_m) = \sum_k \sum_l \frac{(P(A_{nk} A_{ml}) - P(A_{nk}) P(A_{ml}))^2}{P(A_{nk}) P(A_{ml})} \; . \tag{7}$$

[1]) It contains as a special case the theorem which I used in proving (see [5]) that there exists a positive integer K such that every positive integer n can be represented in the form $n = p + P$ where p is a prime number and the number of prime factors of P does not exceed K. An other application of the large sieve has been found by P. T. BATEMAN, S. CHOWLA and P. ERDŐS [6].

We call the sequence $\{\xi_n\}$ *(pairwise) weakly dependent with modulus B*, if the quadratic form

$$\sum_{n\neq m}\sum \varphi(\xi_n, \xi_m)\, x_n\, x_m$$

is bounded with bound B, i. e. if for any sequence $\{x_n\}$ such that

$$\sum_n x_n^2 < +\infty$$

we have

$$\left|\sum_{n\neq m}\sum \varphi(\xi_n, \xi_m)\, x_n\, x_m\right| \leqq B \cdot \sum_n x_n^2 . \tag{8}$$

We prove (Theorem 2.) that under condition (8) we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta^2_{\xi_n}\{\eta\} \leqq (1+B) . \tag{9}$$

As clearly

$$\varphi^2(\xi_n, \xi_m) \leqq \mathbf{d}^2(\xi_n, \xi_m) . \tag{10}$$

we have

$$B \leqq \Delta \tag{11}$$

and thus (9) is stronger than (6). Evidently $B = 0$ if and only if the variables ξ_n are pairwise independent.

It should be mentioned, that if the sequence of random variables ξ_n is finite, then the bound Δ resp. B always exist, and thus the inequalities (6) resp. (9) have a sense for *any* finite sequence of discrete random variables $\{\xi_n\}$.

For the proof we need the following lemma (see [7]), which is a direct generalization of Bessel's inequality for quasi-orthogonal functions (resp. random variables) and which has been already used in [2] and [3].

Lemma. *Let ζ_n be a quasi-orthogonal sequence of random variables, with bound C, i. e. suppose that*

$$\left|\sum_n\sum_m \mathbf{M}\{\zeta_n \zeta_m\}\, x_n\, x_m\right| \leqq C \sum_n x_n^2 \tag{12}$$

for every sequence x_n of real numbers for which

$$\sum_n x_n^2 < +\infty .$$

Then we have for any random variable η, for which $\mathbf{M}\{\eta^2\}$ exists,

$$\sum_n \mathbf{M}^2\{\eta\zeta_n\} \leqq C\, \mathbf{M}\{\eta^2\} . \tag{13}$$

For the sake of completeness we reproduce here the very easy proof of this Lemma.

Proof of the Lemma. We have clearly for any N and for any real sequence a_n

$$\begin{aligned}(14)\qquad &\mathbf{M}\left\{\left(\eta-\frac{1}{C}\sum_{n=1}^{N}a_n\zeta_n\right)^2\right\}=\\ &=\mathbf{M}\{\eta^2\}-\frac{2}{C}\sum_{n=1}^{N}a_n\mathbf{M}\{\eta\zeta_n\}+\frac{1}{C^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}a_n a_m\mathbf{M}\{\zeta_n\zeta_m\}\,.\end{aligned}$$

Putting $a_n=\mathbf{M}\{\eta\zeta_n\}$ and applying (12) to the last term on the right-hand side of (14), we obtain, the left-hand side of (14) being evidently nonnegative, the assertion of the Lemma.

Now we introduce the random variables ξ_{nk} defined as follows:

$$\xi_{nk}=\begin{cases}1 & \text{if}\quad \xi_n=Z_{nk}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\tag{15}$$

and put

$$\xi^*_{nk}=\frac{\xi_{nk}-P(A_{nk})}{\sqrt{P(A_{nk})}}\,.\tag{16}$$

Let us put further

$$c_{nmkl}=\mathbf{M}\{\xi^*_{nk}\xi^*_{ml}\}\tag{17}$$

Then we have evidently

$$c_{nnkk}=1-P(A_{nk})\tag{18}$$

$$c_{nnkl}=-\sqrt{P(A_{nk})P(A_{nl})}\quad\text{for}\quad k\neq l\tag{19}$$

$$c_{nmkl}=\frac{P(A_{nk}A_{ml})-P(A_{nk})P(A_{ml})}{\sqrt{P(A_{nk})P(A_{ml})}}\qquad\text{for}\quad n\neq m\tag{20}$$

Let us consider now the quadratic form

$$Q=\sum_n\sum_m\sum_k\sum_l c_{nmkl}x_{nk}x_{ml}\tag{21}$$

where x_{nk} is a double sequence such that

$$\sum_n\sum_k x_{nk}^2<+\infty.$$

Let us suppose that (8) is satisfied. We have

$$Q=\sum_n\sum_k x_{nk}^2-\sum_n\left(\sum_k\sqrt{P(A_{nk})}\,x_{nk}\right)^2+\sum_{n\neq m}\sum\sum_k\sum_l c_{nmkl}x_{nk}x_{ml}\tag{22}$$

Let us put

$$y_n=\left(\sum_k x_{nk}^2\right)^{1/2}.\tag{23}$$

As by the inequality of Schwarz

$$\sum_n\left(\sum_k\sqrt{P(A_{nk})}\,x_{nk}\right)^2\leqq\sum_n\sum_k x_{nk}^2\tag{24}$$

we have (again by the inequality of Schwarz)

$$|Q| \leqq \sum_n \sum_k x_{nk}^2 + \sum_{n \neq m} \sum \varphi(\xi_n, \xi_m) y_n y_m \tag{25}$$

and thus by (8)

$$|Q| < \sum_n \sum_k x_{nk}^2 + B \sum_n y_n^2 \ . \tag{26}$$

Thus we obtain

$$|Q| \leqq (1+B) \sum_n \sum_k x_{nk}^2 \ . \tag{27}$$

Thus the system $\{\xi_{nk}^*\}$ is quasi-orthogonal with bound $C = 1 + B$. As, however, clearly

$$\sum_k \mathbf{M}^2\{\eta\, \xi_{uk}^*\} = \mathbf{D}_{\xi_n}^2\{\eta\} \tag{28}$$

it follows by the above Lemma that

$$\sum_n \mathbf{D}_{\xi_n}^2\{\eta\} \leqq (1+B)\, \mathbf{M}\{\eta^2\} \ . \tag{29}$$

We may evidently suppose $\mathbf{M}(\eta) = 0$, because putting $\eta' = \eta - \mathbf{M}(\eta)$ we have $\mathbf{M}(\eta') = 0$ and $\mathbf{D}_{\xi_n}^2(\eta') = \mathbf{D}_{\xi_n}^2(\eta)$; as $\mathbf{M}(\eta) = 0$ implies $\mathbf{M}(\eta^2) = \mathbf{D}^2(\eta)$, dividing both sides of (29) by $\mathbf{D}^2\{\eta\}$ we obtain (9).

Let us consider now two arbitrary random variables ζ_1 and ζ_2. Let us define $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ as the least upper bound of $\varphi(f_1(\zeta_1), f_2(\zeta_2))$ where f_1 and f_2 are arbitrary (Borel measurable) step functions and thus $f_1(\zeta_1)$ and $f_2(\zeta_2)$ are discrete random variables. In view of the fact, that denoting by I and J arbitrary real intervals, the two-dimensional interval function

$$\nu(I \times J) = \frac{(\mathbf{P}\{\zeta_1 \in I, \zeta_2 \in J\} - \mathbf{P}\{\zeta_1 \in I, \zeta_2 \in J\})^2}{\mathbf{P}\{\zeta_1 \in I\}\ \mathbf{P}\{\zeta_2 \in J\}} \tag{30}$$

is clearly subadditive, it follows (see the Lemma on p. **139**. of [3] which is evidently valid for interval functions on the plane too) that

$$\varphi^2(\zeta_1, \zeta_2) = \int\!\!\int \nu(I \times J) \tag{31}$$

where the integral of the interval-function on the right-hand side of **(31)** is to be understood in the sense of Burkill, and extended over the whole plane. We shall call the positive square root $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ of the quantity **(31)** the *mean square contingency* of the random variables ζ_1 and ζ_2.

Taking into account, that if ξ is an arbitrary random variable, $\theta_\xi(\eta)$ is equal to the least upper bound of $\theta_{f(\xi)}(\eta)$ where f is an arbitrary Borel-measurable step-function, it follows, that (9) holds also if the variables ξ_n are not supposed to be of the discrete type.

Thus we have proved the following

Theorem 2. *Let $\{\xi_n\}$ be a sequence of random variables. Let $\varphi(\xi_n, \xi_m)$ denote the mean square contingency of ξ_n and ξ_m. Let us suppose that*

$$\left| \sum_{n \neq m} \sum \varphi(\xi_n, \xi_m)\, x_n\, x_m \right| \leqq B \sum_n x_n^2$$

provided that

$$\sum_n x_n^2 < +\infty.$$

Let η be an arbitrary random variable with finite second moment. Then we have, denoting by $\theta_\xi\{\eta\}$ the correlation ratio of η on ξ,

$$\sum_n \theta_{\xi_n}^2\{\eta\} \leqq (1+B)\ . \tag{32}$$

(Received July 23, 1958.)

REFERENCES

[1] CRAMÉR, H. : *Mathematical methods of statistics.* Princeton University Press, 1946.
[2] RÉNYI, A. : „Un nouveau théorème concernant les fonctions indépendantes et ses applications a la théorie des nombres". *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **28** (1949) 137—149.
[3] RÉNYI, A. : „Sur un théorème général de probabilité". *Annales de l'Institut Fourier* **1** (1949) 43—52.
[4] LINNIK, Y. V. : „The large sieve". *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS* **30** (1941) 292—294.
[5] RÉNYI, A. : "О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа". *Известия Академии Наук СССР, сер. мат.* **12** (1948) 57—58.
[6] BATEMAN, P. T.—CHOWLA, S.—ERDŐS, P. : „Remarks on the size of $L(1, \chi)$" *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **1** (1950) 165—182.
[7] BOAS, R. P. JR. : „A general moment problem". *American Journal of Mathematics* **63** (1941) 361—370.

A LINNIK-FÉLE NAGY SZITA VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

RÉNYI A.

Kivonat

A szerző 1947 és 1949 között több irányban általánosította LINNIK nagy szitának nevezett számelméleti módszerét, és bebizonyított egy új valószínűségszámítási tételt, amely a Linnik-féle nagy szitát speciális esetként tartalmazza. A Linnik-féle nagy szita általánosítása tette lehetővé, hogy a szerző bebizonyíthatta a következő számelméleti tételt :

Létezik egy olyan K állandó, hogy minden n természetes szám előállítható $n = p + P$ alakban, ahol p törzsszám és P törzstényezőinek száma legfeljebb K.

E dolgozatban a szerző a szóbanforgó, a nagy szitát tartalmazó valószínűségszámítási tétel egy élesítését bizonyítja be.

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ diszkrét eloszlású valószínűségi változók. Jelölje z_{nk} $(k = 1, 2, \ldots)$ azokat az értékeket, amelyeket ξ_n pozitív valószínűséggel vesz fel; jelölje A_{nk} azt az eseményt, hogy ξ_{nk} a z_{nk} értéket veszi fel, és jelölje $P(A_{nk})$ az A_{nk} esemény valószínűségét.

Jelölje $\varphi(\xi_n, \xi_m)$ a ξ_n és ξ_m változók közötti függőség PEARSON-féle átlagos négyzetes mérőszámát (mean square contingency), vagyis legyen

$$\varphi(\xi_n, \xi_m) = \left(\sum_k \sum_l \frac{(P(A_{nk} A_{ml}) - P(A_{nk}) P(A_{ml}))^2}{P(A_{nk}) P(A_{ml})}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

Legyen η egy tetszőleges valószínűségi változó, jelölje $\mathbf{M}\{\eta\}$ az η változó várható értékét, $\mathbf{M}\{\eta^2\}$ η második momentumát és $\mathbf{D}^2\{\eta\}$ η szórásnégyzetét. Jelölje $\mathbf{M}\{\eta|A\}$ az η változó feltételes várható értékét az A feltétel mellett. Jelölje $\mathbf{M}\{\eta|\xi_n\}$ az η változó feltételes várható értékét ξ_n rögzített értéke mellett; $\mathbf{M}\{\eta|\xi_n\}$ tehát olyan valószínűségi változó, amely az $\mathbf{M}\{\eta|A_{nk}\}$ értéket $P(A_{nk})$ valószínűséggel veszi fel.

Jelölje $\theta_{\xi_n}\{\eta\}$ az η valószínűségi változó ξ_n-re vonatkozó PEARSON-féle korrelációs hányadosát, vagyis legyen

$$\theta^2_{\xi_n}\{\eta\} = \frac{\mathbf{D}^2\{\mathbf{M}\{\eta|\xi_n\}\}}{\mathbf{D}^2(\eta)} \tag{2}$$

ahol $\mathbf{D}^2\{\mathbf{M}\{\eta|\xi_n\}\}$ az $\mathbf{M}\{\eta|\xi_n\}$ valószínűségi változó szórásnégyzete. Akkor fennáll a következő

Tétel. *Ha a*

$$\sum_{n \neq m} \sum \varphi(\xi_n, \xi_m)\, x_n x_m$$

kvadratikus alak korlátos és korlátja B, vagyis ha bármely olyan x_n számsorozatra, amelyre

$$\sum x_n^2 < +\infty$$

érvényes a

$$\left|\sum_{n \neq m} \sum \varphi(\xi_n, \xi_m)\, x_n x_m\right| \leq B \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \tag{3}$$

egyenlőtlenség, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta^2_{\xi_n}\{\eta\} \leq (1 + B)\ . \tag{4}$$

О ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНОМ ОБОБЩЕНИИ БОЛЬШОГО РЕШЕТА ЛИННИКА

A. RÉNYI

Резюме

Автор в 1947—49 годах в нескольких направлениях обобщил метод введенный в теорию чисел Ю. В. Линником и называемый им большим решетом, и доказал одно новую теоретико-вероятностную теорему, содержащую большое решето Линника в качестве частного случая. Обобщение большого решета Линника позволило автору доказать следующую теорему теории чисел:

Существует такая постоянная K, что всякое натуральное число n может быть представленно в виде $n = p + P$, где p простое число, а число простых делителей P не превосходит K.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ суть случайные величины с дискретным распределением. Обозначим через z_{nk} $(k = 1, 2, \ldots)$ значения, принимаемые ξ_n с положительной вероятностью, через A_{nk} событие, заключающееся в том, что ξ_n принимает значение z_{nk}, а через $P(A_{nk})$ вероятность события A_{nk}.

Обозначим через $\varphi(\xi_n, \xi_m)$ средную квадратичную меру (mean square contingency) PEARSON-а зависимости между величинами ξ_n и ξ_m, т. е. пусть

$$\varphi(\xi_n, \xi_m) = \left(\sum_k \sum_l \frac{(P(A_{nk} A_{ml}) - P(A_{nk})\, P(A_{ml}))^2}{P(A_{nk}) P(A_{ml})}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{M}\{\eta\}$ обозначает математическое ожидание, $\mathbf{M}\{\eta^2\}$ второй момент, а $\mathbf{D}^2\{\eta\}$ дисперсию случайной величины η. Пусть $\mathbf{M}\{\eta | A\}$ обозначает условное математическое ожидание величины η при условии A. Обозначим через $\mathbf{M}\{\eta | \xi_n\}$ условное математическое ожидание величины η при фиксированном значении ξ_n; таким образом $\mathbf{M}\{\eta | \xi_n\}$ такая случайная величина, которая принимает значение $\mathbf{M}\{\eta | A_{nk}\}$ с вероятностью $P(A_{nk})$.

Пусть $\theta_{\xi_n}\{\eta\}$ обозначает корреляционное отношение PEARSON-а случайной величины η относительно ξ_n, т. е. пусть

$$\theta^2_{\xi_n}\{\eta\} = \frac{\mathbf{D}^2\{\mathbf{M}\{\eta | \xi_n\}\}}{\mathbf{D}^2\{\eta\}}, \tag{2}$$

где $\mathbf{D}^2\{\mathbf{M}\{\eta | \xi_n\}\}$ дисперсия случайной величины $\mathbf{M}\{\eta | \xi_n\}$. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Если квадратичная форма*

$$\sum_{n \neq m} \sum \varphi(\xi_n, \xi_m)\, x_n x_m$$

ограниченна и B ее граница, т. е. если для всякой последовательности x_n для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$$

имеет место неравенство

$$\left| \sum_{n \neq m} \sum \varphi(\xi_n, \xi_m)\, x_n x_m \right| \leq B \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2, \tag{3}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta^2_{\xi_n}\{\eta\} \leq (1 + B). \tag{4}$$

KÉTPÓLUSÚ ELEKTROMOS HÁLÓZATOKRÓL, III.

ÁDÁM ANDRÁS

Bevezetés

E dolgozatban kétpólusú gráfok és logikai műveletek összetartozásával foglalkozunk. Ezt a kapcsolatot mindig abban a (speciálisabb) felfogásban tekintjük, hogy egy gráf különböző éleihez különböző logikai változók tartoznak, azaz [7] terminológiájával élve „ismétlésnélküli rendszer"-eket vizsgálunk.

Az 1. §-ban összefoglaljuk a gráfelméleti és logikai előzményeket. Részben már itt, továbbá a 2. § elején vezetjük be a későbbiekben szükséges fogalmakat. A 2. § további részében a megelőző fogalom-alkotások többé-kevésbé nyilvánvaló következményeit rendszerezzük segédtételekké, hogy ezáltal a 2. § végén szereplő 1. tétel és a 3. §-ban kimondott fő eredményeink (2., 3., 4. tételek) könnyen elérhetőkké váljanak. E fő eredmények egy gráf éleinek közös soros, vagy párhuzamos komponensbe tartozására adnak oly elegendő és (a 4. tétel kivételével) szükséges feltételt, amely csupán a gráf által megvalósított logikai művelettel szorosan összefüggő fogalmakat tartalmaz.

Mint a 4. §-ban példával is megvilágítjuk, eredményeink konstruktív eljárást szolgáltatnak arra, hogy egy realizálható logikai művelet ismeretében a műveletet realizáló bármely gráf soros és párhuzamos előállítását, az éleknek az irreducibilis alkatrészekbe való osztályozását, és az irreducibilis alkatrészek által megvalósított logikai műveleteket meghatározzuk. A 4. § befejező részében a konstrukció néhány következményére utalunk.

1. §.

Mint a megelőző dolgozatokban, gráfon itt is véges gráfot értünk, amely a T_1 és T_2 tulajdonságokkal rendelkezik. [1] terminológiáját és eredményeit ismerteknek tételezzük fel. A [2] dolgozat eredményei közül csupán az 5. tételre hivatkozunk (78. oldal), amely a következőt mondja ki : ha egy irreducibilis gráf összes éleit két (idegen, nem üres) $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ osztályba soroljuk, akkor van a gráfnak olyan pályája, amely tartalmaz $\varkappa_1$-beli élt is, $\varkappa_2$-beli, élt is. E tétel bizonyítása [2] részletesebb ismerete nélkül is megérthető.

Egy $\mathfrak{G}$ gráf valamely pályájába tartozó élek halmazát $\mathfrak{G}$ egy *pálya-halmazá*nak (röviden : P-halmazának) nevezzük. Egy $\mathfrak{G}$ gráf éleinek valamely β halmazát $\mathfrak{G}$ egy *bázis*ának nevezzük, ha $\mathfrak{G}$ bármely pályája tartalmaz legalább egy β-beli élt ; és bármely β-beli élen átmegy $\mathfrak{G}$-nek olyan pályája, amely β-hoz tartozó más élt nem tartalmaz.

Egy $\mathfrak{G}$ gráf összes éleinek halmazát $\varkappa$-val fogjuk jelölni, $\varkappa$ részhalmazait általában $\varkappa'$-vel, $\varkappa_1$-gyel, $\varkappa_2$-vel stb., csupán a P-halmazok és a bázisok jelölésére használjuk a π, illetve β betűket. A halmazelméleti egyesítést, metszet- és különbségképzést az ott szokásos $\cup$, $\cap$, — jelekkel fejezzük ki ; az üres halmazt a $\varnothing$ jellel jelöljük.

Egy $\mathfrak{G}$ gráf élei legyenek $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Rendeljük hozzá a gráfhoz azt az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-változós logikai műveletet, amely pontosan akkor veszi fel értelmezési tartományának egy helyén az $\uparrow$ (igaz) értéket, ha van $\mathfrak{G}$-nek olyan P-halmaza, hogy a P-halmaz $k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_m}$ éleinek megfelelő x_{i_1}, $x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ változók mindegyike a tekintett helyen[1] $\uparrow$. Könnyen belátható, hogy egy n élű gráfhoz rendelt n változójú logikai művelet valóban függ mindegyik változójától, továbbá, hogy monoton, azaz, ha a változók két értékrendszere csupán egyetlen x_i változó értékében különbözik, akkor nem fordulhat elő az, hogy a művelet értéke $x_i = \downarrow$ esetén $\uparrow$, és $x_i = \uparrow$ esetén $\downarrow$ legyen. (Az első állítás igazolásaként elég arra utalnunk, hogy ha valamely a k_i élen átmenő pálya éleihez tartozó váltakozóknak az $\uparrow$, az összes többi változóknak a $\downarrow$ értéket tulajdonítjuk, akkor az x_i változó $\uparrow$ vagy $\downarrow$ voltától függően lesz $\uparrow$ vagy $\downarrow$ a művelet értéke. A monotonságot az teszi nyilvánvalóvá, hogy egy változó igazzá tétele nem szűkíti a csupa $\uparrow$ értékű változóknak megfelelő élekből álló pályák halmazát.) Tekintsünk egy f logikai műveletet ; ha egy $\mathfrak{G}$ gráf élei sorszámozhatóak úgy, hogy a gráfhoz éppen ez az f művelet tartozzék, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{G}$ gráf *megvalósítja* vagy *realizálja* az f műveletet. Ha egy gráf realizál valamely f logikai műveletet, akkor pontosan azokat a műveleteket valósítja meg, amelyek f-ből változók permutációjával előállíthatóak. Ne tegyünk különbséget két logikai művelet között, ha csupán ebben az értelemben („lényegtelenül") különböznek egymástól ; ekkor a „gráf $\to$ művelet" hozzárendelés több-egyértelmű leképezéssé válik. Az ismétlésnélküli rendszerekkel foglalkozó vizsgálatok alapvető célja így fogalmazható meg : körülhatárolni ennek a leképezésnek pontos értékkészletét és jellemezni az értelmezési tartománynak a leképezéshez tartozó osztályozását (azt az osztályozást, amelynél két gráf akkor és csak akkor tartozik ugyanabba az osztályba, ha ugyanazt a műveletet valósítják meg). Az első kérdésről tudomásom szerint igen kevés eredmény ismeretes, a második problémát illetően [7] 5. tételét ismerem legmesszebb menő eredményként. A jelen dolgozat egy adott műveletből kiindulva, az azt realizáló gráfok szerkezetével foglalkozik.

Ismeretes, hogy egy monoton logikai műveletnek egyetlen (jól meghatározott) redukált diszjunktív normálformája van. (A műveletet kifejező bármely diszjunktív normálformára alkalmazva a matematikai logikában jól ismert egyszerűsítési lehetőségeket, végül ugyanaz az egyszerűsíthetetlen forma adódik.) Ugyanez igaz a konjunktív normálformákra is.[2]

---

[1] Másképp : tekintsük a gráfot elektromos hálózatnak, amelynek minden k_i élébe egy-egy érintkező van elhelyezve. Az x_i változó igaz volta jelentse azt, hogy a k_i élbe iktatott érintkező zárva van, és fordítva. A logikai művelet aszerint vegye fel az $\uparrow$ vagy $\downarrow$ értéket, hogy a változók szóbanforgó értékrendszere létrehoz-e a gráf kezdőpontja és végpontja között vezető összeköttetést.

[2] A nem monoton műveletek egyszerűsítési lehetőségeit bonyolultabb áttekinteni, erre vonatkozóan QUINE [4] dolgozatára utalunk. A monoton műveletek speciális esetének egységes tárgyalását nem ismerem, az ezekről felhasznált ismeretek az említett cikk, továbbá HORN [3] (5. lemma : 18. oldal), QUINE [5] (1. tétel) és JABLONSZKIJ [9] (332—333. oldalak) dolgozatainak eredményei alapján könnyen összeállíthatók.

A $\mathfrak{G}$ gráf összes éleinek halmaza legyen $\varkappa$, a $\mathfrak{G}$-hez rendelt logikai művelet legyen f. Egy $\varkappa_1 \subseteq \varkappa$ halmazra vonatkozóan ekvivalens a következő három állítás:

α) $\varkappa_1$ pálya-halmaz;

β) ha pontosan a $\varkappa_1$-beli éleknek megfelelő változók igazak, akkor $f = \uparrow$, és ha tetszőleges $\varkappa_1$-beli él változóját hamissá változtatjuk (a többi változó értékét változatlanul hagyva), akkor $f = \downarrow$;

γ) a $\varkappa_1$-beli éleknek megfelelő változók f redukált diszjunktív normálformájának egy tagját alkotják.

(Egyrészt az *α)*$\Leftrightarrow$*β)* ekvivalencia nyilvánvaló, másrészt pedig a *β)*$\Leftrightarrow$*γ)* ekvivalencia könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy a redukált diszjunktív normálforma bármely tagja *negálatlan* változók konjunkciója, és bármely két különböző tagban fellépő változók halmazai nem állhatnak részhalmaz-kapcsolatban egymással.)

Szintén ekvivalens a következő három állítás:

α) $\varkappa_1$ bázis;

β) ha pontosan a $\varkappa_1$-beli éleknek megfelelő változók hamisak, akkor $f = \downarrow$, és ha tetszőleges $\varkappa_1$-beli él változóját igazzá változtatjuk, akkor $f = \uparrow$;

γ) a $\varkappa_1$-beli éleknek megfelelő változók f redukált konjunktív normálformájának egy tagját alkotják.

2. §.

Egy $\mathfrak{G}$ gráf két élére legyen $\varrho_1(k_1, k_2) = \uparrow$, ha van $\mathfrak{G}$-nek olyan P-halmaza, amely mind k_1-et, mind k_2-t tartalmazza.

Egy $\mathfrak{G}$ gráf két élére legyen $\varrho_2(k_1, k_2) = \uparrow$, ha van $\mathfrak{G}$-nek olyan bázisa, amely mind k_1-et, mind k_2-t tartalmazza.

Legyen a $\mathfrak{G}$ gráf összes éleinek halmaza $\varkappa$. Legyen $\varkappa_1 \subseteq \varkappa$, $\varkappa_2 \subseteq \varkappa$ és $\varkappa_1 \cap \varkappa_2 = \emptyset$. Ekkor $\sigma(\varkappa_1, \varkappa_2)$ legyen akkor és csak akkor igaz, ha $\mathfrak{G}$-nek bármely π_1 és π_2 P-halmazaira a $(\varkappa_1 \cap \pi_1) \cup (\varkappa_2 \cap \pi_2)$ halmaz előáll $(\varkappa_1 \cup \varkappa_2) \cap \pi_i$ alakban $\mathfrak{G}$-nek alkalmas π_i P-halmazával.

$\varepsilon_1(k_1, k_2)$, $\varepsilon_2(k_1, k_2)$és $\varepsilon_3(k_1, k_2)$ jelentsék rendre a ϱ_1 és ϱ_2 relációk, valamint a ϱ_1 reláció negációja által indukált ekvivalencia-relációkat ([6], 2. tétel, 20. oldal értelmében). Jelentse ϱ_1' a $\mathfrak{G}$ gráf $\mathfrak{G}'$ komponensében értelmezett ϱ_1 relációt. (Ezzel a jelölésmóddal később is fogunk élni.)

1. segédtétel. *Legyen $\mathfrak{G}$ párhuzamosan reducibilis gráf. Ekkor*

(1) $\mathfrak{G}$ két különböző komponensének egy-egy élére a ϱ_1 reláció mindig hamis;

(2) $\mathfrak{G}$ egy rögzített $\mathfrak{G}'$ komponensének két k_α, k_β élére $\varrho_1(k_\alpha, k_\beta) = \varrho_1'(k_\alpha, k_\beta)$;

(3) $\mathfrak{G}$ összes komponenseinek válasszuk egy-egy bázisát, ezek egyesítése $\mathfrak{G}$ egy bázisát alkotja, és $\mathfrak{G}$ összes bázisai előállnak ily módon;

(4) $\mathfrak{G}$ két különböző komponensének egy-egy élére a ϱ_2 reláció mindig igaz; végül

(5) $\mathfrak{G}$ él-párjaira az ε_2 és ε_3 relációk mindig igazak.

Az 1. segédtétel állításainak bizonyítása gyanánt elég arra utalnunk, hogy $\mathfrak{G}$ bármely P-halmaza $\mathfrak{G}$ valamely párhuzamos komponensének P-halmaza; valamint arra, hogy — mint a bázisok és a redukált konjunktív normálforma közötti kapcsolatból látható — $\mathfrak{G}$ bármely éle benne van $\mathfrak{G}$ valamely bázisában.

2. segédtétel. *Legyen $\mathfrak{G}$ sorosan reducibilis gráf. Ekkor*

(1) $\mathfrak{G}$ összes komponenseinek válasszuk egy-egy P-halmazát, ezek egyesítése $\mathfrak{G}$ egy P-halmazát alkotja, és $\mathfrak{G}$ összes P-halmazai előállnak ily módon;

(2) $\mathfrak{G}$ két különböző komponensének egy-egy élére a ϱ_1 reláció mindig igaz;

(3) $\mathfrak{G}$ bármely bázisa $\mathfrak{G}$ valamely komponensének bázisa, és megfordítva;

(4) $\mathfrak{G}$ valamely $\mathfrak{G}$ komponensének két k_α és k_β élére $\varrho_1(k_\alpha, k_\beta) = \varrho_1'(k_\alpha, k_\beta)$ és $\varrho_2(k_\alpha, k_\beta) = \varrho_2'(k_\alpha, k_\beta)$;

(5) $\mathfrak{G}$ él-párjaira az ε_1 reláció mindig igaz.

Bizonyításra csupán a (3) állítás szorul. Legyen β valamely bázisa $\mathfrak{G}$-nek. Első célunk kimutatni, hogy β élei $\mathfrak{G}$-nek egyetlen soros $\mathfrak{G}'$ komponensében helyezkednek el. Egyszerűség kedvéért feltételezhetjük, hogy $\mathfrak{G}$ két $\mathfrak{G}', \mathfrak{G}''$ komponensből áll (az alkalmazott módszerrel a bizonyítás az általános esetben is végrehajtható), ezek éleinek halmaza legyen $\varkappa'$ és $\varkappa''$, az őket szétválasztó pont legyen A. Ha mind $\beta \cap \varkappa'$, mind $\beta \cap \varkappa''$ bővebbek volnának az üres halmaznál, akkor léteznének (a bázisok értelmezése miatt) olyan a és b pályák, amelyek közül a nem megy át $\beta \cap \varkappa'$ egy élén sem, b pedig nem megy át $\beta \cap \varkappa''$ egy élén sem; de ekkor az $a[PA] \cdot b[AQ]$ pálya β egy élén sem menne át, ami ellentmond a bázis fogalmának. A (3) állítás további részei a tétel (1) állításából közvetlenül adódnak.

3. segédtétel. *A $\mathfrak{G}'$ gráf legyen soros komponense a $\mathfrak{G}$ gráfnak. $\varkappa$ és $\varkappa'$ legyen $\mathfrak{G}$, illetve $\mathfrak{G}'$ éleinek halmaza. Ekkor $\sigma(\varkappa', \varkappa - \varkappa') = \uparrow$.*

E segédtétel következik a 2. segédtétel (1) állításából és a σ reláció értelmezéséből.

1. tétel. *A $\mathfrak{G}'$ irreducibilis gráf legyen soros komponense a $\mathfrak{G}$ gráfnak. $\varkappa$ és $\varkappa'$ legyen $\mathfrak{G}$, illetve $\mathfrak{G}'$ éleinek halmaza. Ekkor a $\emptyset \subset \varkappa_1 \subseteqq \varkappa'$ feltételt kielégítő $\varkappa_1$ halmazokra a következő három állítás ekvivalens:*

$$\alpha)\ \varkappa_1 = \varkappa'$$

$$\beta)\ \sigma(\varkappa_1, \varkappa - \varkappa_1) = \uparrow$$

$$\gamma)\ \sigma'(\varkappa_1, \varkappa' - \varkappa_1) = \uparrow.$$

Bizonyítás. 1. Ha *α)* nem teljesül, akkor *γ)* nem teljesül. Ekkor ugyanis $\varkappa' - \varkappa_1$ nem üres halmaz, így az 1. § elején említett tétel következtében van olyan a pályája $\mathfrak{G}'$-nek, amely $\varkappa_1$-beli élt is tartalmaz, $(\varkappa' - \varkappa_1)$-beli élt is. Legyen A az a pálya első olyan pontja, hogy a-nak A-ból kiinduló két éle közül pontosan az egyik $\varkappa_1$-beli. (A belső pontja a $\mathfrak{G}'$ gráfnak.) Legyen b olyan pályája $\mathfrak{G}'$-nek, amely A-n nem megy át; legyenek π_1 és π_2 az a, illetve b pályák él-halmazai. Ekkor a $(\pi_1 \cap \varkappa_1) \cup (\pi_2 \cap (\varkappa' - \varkappa_1))$ halmaz az A pontból kiinduló élek közül pontosan egyet tartalmaz, tehát nem lehet P-halmaza $\mathfrak{G}'$-nek.

2. Ha *α)* teljesül, akkor a 3. segédtétel szerint *β)* teljesül.

3. Ha *β)* teljesül, akkor *γ)* teljesül. Ugyanis $\mathfrak{G}'$ tetszőleges két π_1' és π_2' P-halmaza kiegészíthető $\mathfrak{G}$-nek egy-egy π_1 és π_2 P-halmazává, a *β)* állítás miatt létező π_i P-halmazzal kielégül a $(\varkappa_1 \cap \pi_1) \cup ((\varkappa - \varkappa_1) \cap \pi_2) = \varkappa \cap \pi_i$ egyenlőség, amelynek mindkét oldalát $\varkappa'$-vel metszve a

$$(\varkappa_1 \cap \pi_1') \cup ((\varkappa' - \varkappa_1) \cap \pi_2') = \varkappa' \cap (\pi_i \cap \varkappa')$$

egyenlőséget kapjuk, ahol $\pi_i \cap \varkappa'$ a 2. segédtétel (1) állítása szerint pályája $\mathfrak{G}'$-nek.

3. §.

2. tétel. *A $\mathfrak{G}$ párhuzamosan reducibilis gráf két k_α, k_β élére $\varepsilon_1(k_\alpha, k_\beta)$ akkor és csak akkor igaz, ha k_α és k_β $\mathfrak{G}$-nek ugyanabban a párhuzamos komponensében vannak. Párhuzamosan irreducibilis gráf bármely él-párjára az ε_1 reláció igaz.*

Bizonyítás. A tétel ,,csak akkor'' állítását az 1. segédtétel (1) állítása biztosítja. A tétel második mondatának helyességét a bizonyítás hátralevő része külön utalás nélkül is világossá teszi. Az ,,akkor'' állítás igazolásában hivatkozunk az 1. segédtétel (2) állítására. Ha $\mathfrak{G}$-nek k_α-t és k_β-t tartalmazó $\mathfrak{G}'$ komponense sorosan reducibilis, akkor a 2. segédtétel (5) állítása máris teljessé teszi a bizonyítást. Ha pedig $\mathfrak{G}'$ irreducibilis gráf, akkor van olyan ($\mathfrak{G}'$-nek P' kezdőpontját és Q' végpontját belső pontként nem tartalmazó) út, amelynek élei rendre $k_\alpha = k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n = k_\beta$. Bármely k_i, k_{i+1} $(1 \leq \leq i \leq n-1)$ él-párra legyen a a k_i élen, b pedig a k_{i+1} élen átmenő pálya. Legyen k' a első éle, k'' pedig b utolsó éle. Nyilván $\varrho_1'(k_i, k') = \varrho_1'(k_{i+1}, k'') = \uparrow$. Másrészt mind a, mind b átmegy k_i és k_{i+1} közös végpontján, tehát a és b nem idegenek egymástól ; legyen A a első olyan belső pontja, amely pontja b-nek is. Létezik az $a[P'A] \cdot b[AQ']$ pálya, tehát $\varrho_1'(k', k'') = \uparrow$. Az eddigi eredmények összevetése alapján $\varepsilon_1'(k_i, k_{i+1}) = \varepsilon_1(k_i, k_{i+1}) = \uparrow$, tehát $\varepsilon_1(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$.

3. tétel. *A $\mathfrak{G}$ sorosan reducibilis gráf két k_α, k_β élére $\varepsilon_2(k_\alpha, k_\beta)$ akkor és csak akkor igaz, ha k_α és k_β $\mathfrak{G}$-nek ugyanabban a soros komponensében vannak. Sorosan irreducibilis gráf bármely él-párjára az ε_2 reláció igaz.*

A **bizonyítás**ban most is elég a tétel első mondatának igazolására szorítkoznunk. A tétel ,,csak akkor'' állítását az biztosítja, hogy a 2. segédtétel (3) állításából következően $\mathfrak{G}$ két különböző komponensének egy-egy élére ϱ_2 mindig hamis. Az ,,akkor'' állítás igazolásában hivatkozunk a 2. segédtétel (4) állítására. Ha $\mathfrak{G}$-nek a k_α-t és k_β-t tartalmazó $\mathfrak{G}'$ komponense párhuzamosan reducibilis, akkor az 1. segédtétel (4) állítása máris teljessé teszi a bizonyítást. Ha pedig $\mathfrak{G}'$ irreducibilis gráf, annak lehetetlenségét kell igazolnunk, hogy $\mathfrak{G}'$ éleinek halmazát az ε_2' ekvivalencia-reláció egynél több részhalmazra bontsa. Legyen $\varkappa_1$ $\mathfrak{G}'$ éleinek egy osztálya az ε_2' által létesített osztályozásnál, legyen $\varkappa_2$ $(\neq \emptyset)$ $\mathfrak{G}'$ többi éleinek halmaza. A $\mathfrak{G}'$-hez rendelt logikai művelet redukált konjunktív normálformáját ekkor $f_1[\varkappa_1] \cdot f_2[\varkappa_2]$ alakban írhatjuk. (A konjunkciót szorzásként jelöltük. A $[\varkappa_1]$ szimbólum azt jelenti, hogy az f_1 logikai művelet csupán a $\varkappa_1$ osztályba sorolt éleknek megfelelő változóktól függ.) Az f_1 és f_2 műveleteket külön-külön alakítsuk át redukált diszjunktív normálformákká. A ,,beszorzás'' elvégzésével — külön egyszerűsítés nélkül — a $\mathfrak{G}'$ gráfhoz rendelt logikai művelet redukált diszjunktív normálformáját kapjuk. A redukált diszjunktív normálforma tagjai és a P-halmazok közötti kapcsolat alapján bármely $(\varkappa_1 \cap \pi_1) \cup (\varkappa_2 \cap \pi_2)$ halmaz P-halmaza a $\mathfrak{G}'$ gráfnak, tehát az 1. tételben tekintett tulajdonságok közül γ) teljesül, α) nem, ami ellentmondás.

4. tétel. *Legyen $\mathfrak{G}$ sorosan reducibilis gráf. Ha $\mathfrak{G}$-nek két k_α, k_β élére $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$, akkor k_α és k_β $\mathfrak{G}$ ugyanazon komponensébe tartozó élek. Ha k_α és k_β $\mathfrak{G}$-nek ugyanazon, párhuzamosan reducibilis komponensébe tartozó élek, akkor $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$.*

Bizonyítás gyanánt elég egyrészt a 2. segédtétel (2) állítására, másrészt a 2. segédtétel (4) és az 1. segédtétel (5) állításaira hivatkoznunk.

4. §.

Tekintsünk egy monoton, minden változójától függő f logikai műveletet. Legyen $\mathfrak{G}$ olyan gráf, amely az f műveletet valósítja meg, jelöljük $\mathfrak{G}$ éleit egy alkalmas sorszámozás szerint. Az előző paragrafus eredményeinek ismeretében megállapíthatjuk, mely élek alkotják $\mathfrak{G}$ egy-egy irreducibilis alkatrészét, és ezek az alkatrészek milyen logikai műveleteket kötelesek megvalósítani. (Az eljárás alkalmazásakor feltételezzük, hogy van olyan $\mathfrak{G}$ gráf, amely az f logikai műveletet realizálja. Ez a feltevés nem mindig jogos, pl. az $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ művelet egy gráfhoz sincs hozzárendelve. Ha a feltevésünk helytelen, annak hatása abban mutatkozik meg, hogy az irreducibilis alkatrészek számára adódó műveletek legalább egyike megvalósíthatatlan.)

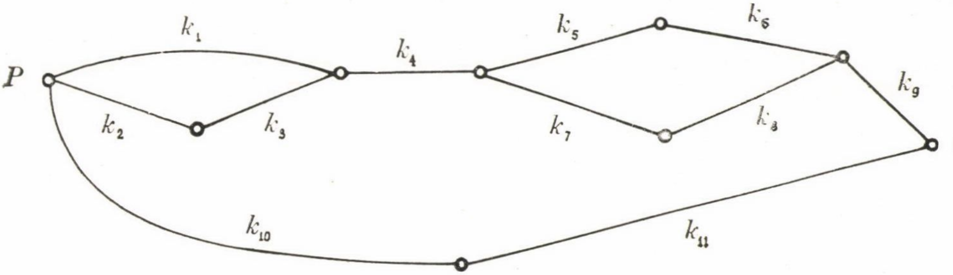
Az eljárás gyakorlati alkalmazására vizsgáljuk azt a $\mathfrak{G}$ gráfot, amely a következő 11 változós (rögtön redukált diszjunktív normálformában adott) logikai műveletet realizálja :

$$x_1x_4x_5x_6x_9 \vee x_1x_4x_7x_8x_9 \vee x_2x_3x_4x_5x_6x_9 \vee x_2x_3x_4x_7x_8x_9 \vee x_{10}x_{11}.$$

Első lépésként az ε_1 reláció alkalmazásával megállapítjuk, párhuzamosan reducibilis-e a $\mathfrak{G}$ gráf. (2. tétel.) Melyek az ε_1 reláció által létesített osztályozásnál k_1-gyel megegyező osztályba sorolt élek? Ezeknek felsorolását a k_1-gyel közös pályába tartozó élekkel kezdhetjük : $\{k_1, k_4, k_5, k_6, k_9, k_7, k_8, \ldots$ Ezután a k_4 éllel ϱ_1 relációban álló (még nem szereplő) élekkel bővítjük a halmazt : $\{k_1, k_4, k_5, k_6, k_9, k_7, k_8, k_2, k_3, \ldots\}$. További vizsgálat alapján sem tudjuk a még hiányzó k_{10} és k_{11} éleket ugyanebbe az osztályba sorolni, tehát $\mathfrak{G}$ párhuzamosan reducibilis, és egyik $\mathfrak{G}_1$ komponense pontosan a $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_9$ éleket tartalmazza. Másrészt k_{10} és k_{11} közös $\mathfrak{G}_2$ komponenst alkotnak (mivel $\varrho_1(k_{10}, k_{11}) = \uparrow$, így $\varepsilon_1(k_{10}, k_{11}) = \uparrow$), $\mathfrak{G}_2$-nek egy P-halmaza van : $\{k_{10}, k_{11}\}$, tehát ez a két él sorosan van kapcsolva. A $\mathfrak{G}_1$ komponens P-halmazai : $\{k_1, k_4, k_5, k_6, k_9\}$, $\{k_1, k_4, k_7, k_8, k_9\}$, $\{k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_9\}$, $\{k_2, k_3, k_4, k_7, k_8, k_9\}$.

Következő feladatunk a $\mathfrak{G}_1$ gráf soros felbonthatóságát megvizsgálni, a soros komponenseket elkülöníteni. Két módszer áll rendelkezésünkre : dolgozhatunk az ε_2 reláció (3. tétel), vagy az ε_3 reláció alkalmazásával. Az ε_2 reláció biztosan az élek kívánt osztályozását szolgáltatja, azonban használata ellen kényelmi szempontok szólnak : ha ezzel a módszerrel dolgozunk, akkor el kell végezni a diszjunktív és konjunktív normálformák egymásba való átalakítását. Az ε_3 reláció alkalmazásakor erre nincs szükség, viszont nem mindig érünk el pontos eredményt : ha a gráf valamely komponense nem bontható tovább (párhuzamosan), akkor az ε_3 relációnál a szóbanforgó komponens élei több osztályba sorolódhatnak. (4. tétel.) Arra, hogy melyik úton célszerűbb tovább folytatnunk az eljárást, nehéznek látszik általános szabályt megadni ; némely esetben előnyös lehet a két módszer következő kombinálása : először az ε_3 relációval osztályozzuk a gráf éleit, majd a σ reláció alkalmazásával (3. segédtétel és 1. tétel) a kapott osztályok mindegyikére eldöntjük, hogy az az osztály egy soros komponens *összes* éleit tartalmazza-e. Az ε_2 relációval azoknak a $\varkappa'$ osztályoknak egyesítési halmazát bontjuk tovább, amelyekre $\sigma(\varkappa', \varkappa - \varkappa') = \downarrow$ (ha ilyen osztályt egyáltalán találunk). ($\varkappa$-val $\mathfrak{G}_1$ éleinek halmazát jelöltük).

Alkalmazzuk a $\mathfrak{G}_1$ gráf éleire az ε_3 relációt. A következő él-halmazokat kapjuk : $\varkappa_1 = \{k_1, k_2, k_3\}$, $\varkappa_2 = \{k_4\}$, $\varkappa_3 = \{k_5, k_6, k_7, k_8\}$, $\varkappa_4 = \{k_9\}$. Vajon soros komponens-e $\varkappa_1$? $\pi_i \cap \varkappa_1$ alakban előálló halmazok : $\{k_1\}$ és $\{k_2, k_3\}$. $\pi_i \cap (\varkappa - \varkappa_1)$ alakban előálló halmazok : $\{k_4, k_5, k_6, k_9\}$ és $\{k_4, k_7, k_8, k_9\}$; összehasonlítva az ezekből képezhető egyesítési halmazokat $\mathfrak{G}_1$ P-halmazaival, $\sigma(\varkappa_1, \varkappa - \varkappa_1) = \uparrow$; tehát $\varkappa_1$ élei $\mathfrak{G}_1$-nek pontosan egy soros komponensét alkotják. További vizsgálatunkban elég a $\varkappa_2 \cup \varkappa_3 \cup \varkappa_4$ halmazra szorítkoznunk ; mind $\varkappa_2$, mind $\varkappa_3$, mind $\varkappa_4$ soros komponensnek adódik.



1. ábra.

(Az ε_2 reláció alkalmazására tehát nincs szükség.) (A $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ halmazok vizsgálatát tetszőleges sorrendben végezhetjük, a soros komponensnek bizonyult halmazt „leválaszthatjuk" úgy, mint előbb $\varkappa_1$-et.) A további elemzéssel a $\mathfrak{G}$ gráf szerkezete az 1. ábrán láthatónak adódik. (A sorosan kapcsolt komponensek sorrendjét önkényesen vettük fel.)

Annak az esetnek a megvilágítására, mikor (egynél több élű) irreducibilis gráfok is fellépnek egy sorosan kapcsolt gráf komponenseiként, nem közlünk példát, hiszen egyrészt a látott példa jól illusztrálja a gyakorlatban követendő módszert, másrészt pedig az említett gráfok pályáinak száma elég nagy, így érdekességével arányban nem álló terjedelmű lenne a részletes analízis. (A [2] bevezetésében ábrázolt egyszerű irreducibilis gráfoknak 6, 4, illetve 8 pályája van, a sorbakapcsolásnál szorzódik a pályák száma. Érdemes megjegyeznünk, hogy az említett irreducibilis gráfok éleit az ε_3 reláció 4, 3, illetve 6 osztályba sorolja.)

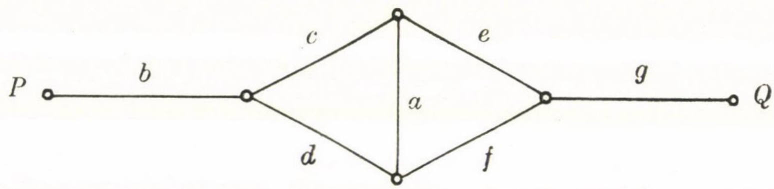
Konstrukciónkból világos a következő állítás, amely egyébként speciális esete TRAHTENBROT már említett tételének. ([7], 5. tétel.) *Egy logikai művelet egyértelműen meghatározza azt, hogy a műveletet realizáló bármely gráf hogyan áll elő soros és párhuzamos kapcsolások alkalmazásával e két kapcsolási módra nézve irreducibilis alkatrészekből, és hogy ezek az alkatrészek milyen logikai műveleteket kötelesek megvalósítani.* (Az egyértelműséget a soros kapcsolás kommutativitásától eltekintve értjük.) További specializálással a következő állításhoz jutunk : ha a $\mathfrak{G}'$ és $\mathfrak{G}''$ kétpólusú gráfok élei $k'_1, k'_2, \ldots, k'_n$ illetve $k''_1, k''_2, \ldots, k''_n$, és a gráfok pontosan egyike tartalmaz kettős élt,[3] akkor a $\mathfrak{G}'$-hez illetve $\mathfrak{G}''$-hez rendelt $f'(x_1, \ldots, x_n)$ és $f''(x_1, \ldots, x_n)$ logikai műve-

[3] Azaz a gráfok pontosan egyike állítható elő egy élű kétpólusú gráfokból soros és párhuzamos kapcsolásokkal.

letek különbözőek. Dolgozatunk utolsó célja ezt a tényt tisztán gráfelméleti eszközökkel kimondani és igazolni.

5. tétel. *Legyen a $\mathfrak{G}'$ gráf éleinek halmaza $\varkappa'$, és a $\mathfrak{G}''$ gráf éleinek halmaza $\varkappa''$. Ha $\mathfrak{G}'$ tartalmaz kettős élt, és $\mathfrak{G}''$ nem tartalmaz kettős élt, akkor $\varkappa'$-nek $\varkappa''$-re nincs olyan egy-egyértelmű leképezése, amely $\mathfrak{G}'$ pálya-halmazaihoz pontosan $\mathfrak{G}''$ pálya-halmazait rendelné.*[4]

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy létezik az említett tulajdonságú leképezés; tekintsünk egy ilyen leképezést. [1] 3. tétele szerint $\mathfrak{G}'$-nek vannak olyan a, b, c, d, e, f, g utai, amelyek a Wheatstone-féle híd módján csatla-



2 ábra.

koznak egymáshoz. (2. ábra.) Legyen π_1' a *bcafg* pálya éleinek halmaza, π_2' pedig a *bdaeg* pálya éleinek halmaza. $\mathfrak{G}''$ megfelelő P-halmazai legyenek π_1'' és π_2''. Tekintsük $\mathfrak{G}''$-nek a $\pi_1'' \cup \pi_2''$ halmaz éleiből (és a hozzájuk tartozó pontokból) álló $\mathfrak{H}''$ részgráfját. Ez a részgráf kettős él nélküli (az ellenkező esetben $\mathfrak{G}''$-nek is volna kettős éle.)

A párhuzamos, illetve soros kapcsolás szerinti indukcióval könnyű belátni a következő állítást. Ha egy kettős él nélküli gráfnak van olyan pályája, amely mind az A, mind a B pontokon átmegy, akkor A és B között egyértelműen definiálhatunk rendezést annak alapján, hogy a mindkettejükön átmenő pályák A-t vagy B-t tartalmazzák-e elsőbbként.

Legyen k' tetszőleges éle a $\mathfrak{G}'$ gráf a útjának, legyen k'' $\mathfrak{G}''$-nek k'-höz rendelt éle. k'' végpontjai legyenek A és B, mégpedig A előzze meg B-t legutóbbi megjegyzésünk értelmében. Minthogy bármely (k_x, k'') alakú élpárhoz, így bármely (X, A) vagy (X, B) alakú pontpárhoz (ahol X tetszőleges pontja, k_x tetszőleges éle a $\mathfrak{H}''$ gráfnak) van közös pálya, $\mathfrak{H}''$ bármely (A-tól és B-től különböző) pontja vagy megelőzi A-t, vagy pedig követi B-t. A k'' él ezért soros komponense $\mathfrak{H}''$-nek, tehát $\mathfrak{H}''$ bármely pályája átmegy k''-n. Tekintsük most $\mathfrak{H}''$ azon éleit, amelyek a kiválasztott leképezésnél a *bceg* pálya éleinek feleltek meg. Ezeknek az éleknek a halmaza k''-t nem tartalmazza, tehát nem lehet P-halmaz, ami ellentmond a leképezésre vonatkozó feltételnek.

(Beérkezett: 1958. VII. 9.)

[4] Azaz: amely leképezés $\mathfrak{G}'$ bármely pálya-halmazát pontosan $\mathfrak{G}''$ egy pálya-halmazába viszi át, és amelynél $\mathfrak{G}''$ bármely pálya-halmaza $\mathfrak{G}'$ valamely pálya-halmazának képeként áll elő.

A szerző megjegyzései az első korrigáláskor, 1959. január 4-én.

TRAHTENBROT időközben ugyanerre a problémakörre vonatkozó kiterjedtebb vizsgálatokat hozott nyilvánosságra a [8] dolgozatban. Ennek 5. tétele (248. oldal) ugyanazt a tényt fejezi ki más beállításban, mint 2. és 3. tételeink. A 2. és 3. tételek más módon is bizonyíthatóak, mint a 3. §-ban láttuk. A 2. tétel részletesebb meggondolást igénylő esetét ott direkt módon igazoltuk, indirekt módon igen könnyű belátnunk helyességét [2] 5. tételének alkalmazásával. A 3. tétel nem közvetlenül belátható esetére GALLAI TIBOR professzor a dolgozat lektorálása során a következő (tisztán gráfelméleti jellegű) bizonyítást adta.

Legyenek $a(PA)$, $b(AB)$, $c(AB)$ és $d(BQ)$ egy irreducibilis gráf páronként idegen útjai, a pontok között a $P = A$ és $B = Q$ egybeesés megengedett. Tekintsük az $a \cdot b \cdot d$-től és $a \cdot c \cdot d$-től különböző összes pályákat. Bármely ilyen pályából válasszunk ki egy olyan élt, amelyet az a, b, c, d utak egyike sem tartalmaz. A kiválasztott élek halmaza legyen χ ; k_1 és k_2 legyen tetszőleges éle b-nek, illetve c-nek. Ekkor a

$$\varkappa = \chi \cup \{k_1\} \cup \{k_2\}$$

halmaznak bármely pályával van közös éle, van tehát a gráfnak olyan β bázisa, hogy $\beta \subseteq \varkappa$. Könnyen látható, hogy $k_1 \in \beta$, $k_2 \in \beta$. Igazoltuk tehát, hogy a megadott módon elhelyezkedő a, b, c, d utakat tekintve b és c egy-egy éle mindig kiegészíthető bázissá. A bizonyítás hátra levő részében ezt az állítást segédtételnek fogjuk nevezni.

[8] 4. tétele szerint a gráfnak van két egymástól idegen p_1, p_2 pályája (lásd még [1] 3. lábjegyzetét). A segédtétel szerint p_1 bármely éle ϱ_2 relációban áll p_2 bármely élével. Ha a gráf valamely k élét sem p_1, sem p_2 nem tartalmazza, akkor k benne van alkalmas olyan útban, amelynek pontosan végpontjai p_1-beli vagy p_2 -beli pontok ; a segédtétel minden lehetséges esetben alkalmazható k-ra és p_1 vagy p_2 valamely élére.

IRODALOM

[1] ÁDÁM A. : „Kétpólusú elektromos hálózatokról, I.". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 211—218.

[2] ÁDÁM A. : „Kétpólusú elektromos hálózatokról, II.". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958) 67—79.

[3] HORN, A. : „Sentences which are true of direct unions of algebras". *Journal of Symbolic Logic* **16** (1951) 14—21.

[4] QUINE, W. V. : „The problem of simplifying truth functions". *American Mathematical Monthly,* **59** (1952) 521—531.

[5] QUINE, W. V. : „Two theorems about truth functions". *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* **10** (1953) 64—70.[5]

[6] RÉDEI L. : *Algebra, I.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.

[7] ТРАХТЕНБРОТ, Б. А. : „Синтез бесповторных схем". *Доклады Академии Наук СССР* **103** (1955) 973—976.

[8] ТРАХТЕНБРОТ, Б. А.: „К теории бесповторных контактных схем". *Трулы Математического Института им. В. А. Стеклова* **51** (1958) 226—269.

[9] ЯБЛОНСКИЙ, С. В. : „О суперпозициях функций алгебры логики". *Математический Сборник* **30** (1952) 329—348.

[5] E dolgozat referátuma megtalálható a *Journal of Symbolic Logic* **19** (1954) kötetének 142. oldalán.

О ДВУХПОЛЮСНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ, III.

A. ÁDÁM

Резюме

Настоящая работа занимается связью между двухполюсными графами и функциями истинности. Эта связь исследуется в следующей трактовке: ребра $k_1, k_2, \ldots, k_n$ графа $\mathfrak{G}$ взаимно однозначно соответствуют переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$; соответствующая графу $\mathfrak{G}$ функция истинности f (в некотором месте ее области определения) истинна, если существует такая цепь, любое ребро k_i которой соответствует такой переменной x_i, что $x_i = \uparrow$. (В работе [7] эта же трактовка играет основную роль. Говорят, что граф $\mathfrak{G}$ *реализует* функцию f *бесповторно*). Встречаются лишь монотонные функции истинности, которые эффективно зависят от каждой своей переменной. Каждая такая функция истинности имеет вполне определенную сокращенную дизъюнктивную (соответственно конъюнктивную) нормальную форму.

Понятие *цепи* было определено в [1]. Некоторое множество β ребер графа $\mathfrak{G}$ называется *базисом*, если всякая цепь графа $\mathfrak{G}$ содержит (хотя бы одно) ребро из β и для всякого ребра из β существует такая цепь графа $\mathfrak{G}$, которая не содержит других ребер из β.

Пусть функция истинности f соответствует графу $\mathfrak{G}$. Легко видеть, что некоторое множество ребер графа $\mathfrak{G}$ является цепью в том и только в том случае, если произведение соответствующих переменных входит в сокращенную дизъюнктивную нормальную форму функции f; и что некоторое множество ребер графа $\mathfrak{G}$ образует базис в том и только в том случае, если сумма соответствующих переменных аодит в сокрбхщенную конъюнктивную нормальную форму функции f.

Для ребер k_1 и k_2 графа $\mathfrak{G}$ пусть выполняется соотношение ϱ_1, если подходящая цепь проходит и через k_1 и через k_2. Пусть $\varrho_2(k_1, k_2) = \uparrow$, если существует такой базис, который содержит и k_1 и k_2. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 суть соотношения равносильности, порожденные соотношениями ϱ_1, ϱ_2 и отрицанием соотношения ϱ_1 соответственно.

Теорема 2. *Для двух ребер k_α и k_β параллельно приводимого графа $\mathfrak{G}$ $\varepsilon_1(k_\alpha, k_\beta)$ истинно в том и только в том случае, если k_α и k_β находятся в той же параллельной компоненте графа $\mathfrak{G}$. Для пар ребер параллельно неприводимого графа ε_1 тождественно истинно.*

Теорема 3. *Для двух ребер k_α и k_β последовательно приводимого графа $\mathfrak{G}$ $\varepsilon_2(k_\alpha, k_\beta)$ истинно в том и только в том случае, если k_α и k_β находятся в той же последовтельной компоненте. Для пар ребер последовательно неприводимого графа ε_2 тождественно истинно.*

Теорема 4. *Если для ребер k_α и k_β последовательно приводимого графа $\mathfrak{G}$ $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$, то k_α и k_β находятся в той же компоненте графа $\mathfrak{G}$. Если k_α и k_β находятся в той же параллельно приводимой компоненте графа $\mathfrak{G}$, то $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$.*

Пусть дана функция истинности f. Если предположим, что f реализуема, то теоремы 2. и 3. дают возможность обозреть последовательную и параллельную структуру любого графа $\mathfrak{G}$, реализующего f, и определить те функции истинности, которые неприводимые составляющие графа $\mathfrak{G}$ объязаны реализовать. В § 4. конструкция иллюстрируется примером. В некоторых случаях может быть выгодным и применение теоремы 4.

В заключительной части параграфа 4. затрагивается вопрос о единственности реализации. С помощью только средств теории графов формулируется и доказывается следующий специальный случай теоремы 5. работы Трахтенброта [7]: *если граф* $\mathfrak{G}'$ *содержит двойное ребро, а граф* $\mathfrak{G}''$ *— граф без двойных ребер, то* $\mathfrak{G}'$ *и* $\mathfrak{G}''$ *не могут реализовать ту же самую функцию истинности. (Теорема 5).*

ÜBER ZWEIPOLIGE ELEKTRISCHE NETZE, III.

von

A. ÁDÁM

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Zusammenhang der zweipoligen Graphen und der Wahrheitsfunktionen. Dieser Zusammenhang wird in der folgenden Auffassung betrachtet: die Kanten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des Graphen $\mathfrak{G}$ entsprechen ein-eindeutig den Variablen $x_1, \ldots, x_n$; und die Wahrheitsfunktion f (gehörend zum Graphen $\mathfrak{G}$) ist (an einer Stelle ihres Definitionsbereiches) wahr, wenn es eine Bahn gibt, deren jede Kante k_i einem solchen Variablen x_i entspricht, dass $x_i = \uparrow$ ist. (Diejenige Auffassung spielt eine grundlegende Rolle in [7]. Es ist gebräuchlich zu sagen, dass die Wahrheitsfunktion f durch den Graphen $\mathfrak{G}$ *ohne Wiederholung realisiert* wird.) Es treten nur monotone Wahrheitsfunktionen auf, die von ihrem jeden Variablen effektiv abhängen. Jede solche Wahrheitsfunktion hat eine wohlbestimmte reduzierte disjunktive (bzw. konjunktive) Normalform.

Der Begriff der *Bahn* wurde in [1] definiert. Eine Menge β gewisser Kanten eines Graphen $\mathfrak{G}$ wird eine *Basis* von $\mathfrak{G}$ genannt, wenn jede Bahn von $\mathfrak{G}$ (mindestens) eine Kante von β enthält, und zu jeder Kante aus β eine Bahn von $\mathfrak{G}$ existiert, die keine andere Kante aus β hat.

Sei die Wahrheitsfunktion f zugeordnet dem Graphen $\mathfrak{G}$. Wie leicht ersichtlich ist, eine Menge aus Kanten von $\mathfrak{G}$ bildet eine Bahn dann und nur dann, wenn die entsprechenden Variablen ein Glied der reduzierten disjunktiven Normalform von f bilden; und eine Menge aus Kanten von $\mathfrak{G}$ ist eine Basis dann und nur dann, wenn die entsprechenden Variablen ein Glied der reduzierten konjunktiven Normalform von f bilden.

Es sei $\varrho_1(k_1, k_2) = \uparrow$ für die Kanten k_1 und k_2 von $\mathfrak{G}$, wenn diese beiden Kanten von einer passenden Bahn durchlaufen werden. Es sei $\varrho_2(k_1, k_2) = \uparrow$, wenn k_1 und k_2 in einer passenden Basis enthalten werden. ε_1, ε_2 und ε_3 seien die Äquivalenz-Relationen, die (der Reihe nach) von ϱ_1, ϱ_2 bzw. von der Negation von ϱ_1 induziert sind.

Satz 2. *Für den Kanten k_α und k_β eines parallel reduziblen Graphen $\mathfrak{G}$ ist $\varepsilon_1(k_\alpha, k_\beta)$ wahr dann und nur dann, wenn k_α und k_β in derselben parallelen Komponente von $\mathfrak{G}$ enthalten sind. Die Relation ε_1 gilt für jedes Paar von Kanten eines parallel irreduziblen Graphen.*

Satz 3. *Für die Kanten k_α und k_β eines durch Reihenschaltung reduziblen Graphen $\mathfrak{G}$ ist $\varepsilon_2(k_\alpha, k_\beta)$ wahr dann und nur dann, wenn k_α und k_β in derselben*

Reihen-Komponente von $\mathfrak{G}$ *enthalten sind. Die Relation* ε_2 *gilt für jedes Paar von Kanten eines durch Reihenschaltung irreduziblen Graphen.*

Satz 4. *Wenn für die Kanten* k_α *und* k_β *eines durch Reihenschaltung reduziblen Graphen* $\mathfrak{G}$ $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$ *ist, dann sind* k_α *und* k_β *in derselben Komponente von* $\mathfrak{G}$ *enthalten. Sind* k_α *und* k_β *in derselben parallel reduziblen Komponente von* $\mathfrak{G}$, *dann gilt* $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$.

Sei eine Wahrheitsfunktion f gegeben. Unter die Voraussetzung, dass f realisiert werden kann, geben die Sätze 2. und 3. die Möglichkeit, die Reihenparallelstruktur jedes Graphen $\mathfrak{G}$, der f realisiert, zu übersehen, und die Wahrheitsfunktionen zu bestimmen, die durch die irreduziblen Bestandteilen von $\mathfrak{G}$ realisiert werden müssen. Im § 4. wird die Konstruktion durch ein Beispiel erleuchtet. In gewissen Fällen kann es vorteilhaft sein auch den Satz 4. anzuwenden.

Am Ende des § 4. wird die Eindeutigkeitsfrage der Realisation berührt, und es wird der folgende Spezialfall des Satzes 5. von TRACHTENBROT [7] mit rein graphentheoretischen Mitteln ausgesagt und bewiesen: *ist* $\mathfrak{G}'$ *ein Graph mit mindestens einer doppelten Kante und* $\mathfrak{G}''$ *ein Graph ohne doppelte Kante, dann können* $\mathfrak{G}'$ *und* $\mathfrak{G}''$ *nicht dieselbe Wahrheitsfunktion realisieren (Satz 5.).*

MEGJEGYZÉSEK IFJ. DRAHOS I., HORNYIK L. ÉS HOSSZÚ M. „EGY SZERSZÁMGEOMETRIAI PROBLÉMA MATEMATIKAI MEGOLDÁSA" CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ[1]

LIPKA ISTVÁN[2]

IFJ. DRAHOS ISTVÁN, HORNYIK LÁSZLÓ és HOSSZÚ MIKLÓS szerzők az ún. profilmarók geometriailag helyes alakjának a meghatározásával foglalkozó, ebben a kötetben közölt cikkükben [1], a csavarfelületek marására szolgáló szerszám felületét, mint forgásfelületek egyparaméteres seregének a burkoló felületét származtatják. E burkoló felület, amely szintén forgásfelület (szerszám-forgásfelület) tetszés szerinti körmetszetének a sugarát mint szélsőértéket nyerhetjük oly módon, hogy a kör síkja által a forgásfelületek egyparaméteres seregéből kimetszett körök sugarait a seregparaméter függvényének tekintjük és meghatározzuk ennek a függvénynek a szélsőértékét. Az így kapott szélsőértéknek minimumnak, éspedig a kialakítandó részhez tartozó szakaszon *abszolút minimumnak* kell lennie ahhoz, hogy a keresett burkoló felület körmetszetének a sugarát szolgáltassa.

Az alábbiakban a szerzők fent idézett cikkében közölt meggondolásokhoz csatlakozva, azok kiegészítéseképpen megmutatjuk, hogy ujjmaró esetében lapos menetű csavarra, valamint ferdefogú kerékre is milyen feltételek mellett biztosítható a szóbanforgó abszolút minimumnak a létezése.

1. §.

Laposmenetű csavart előállító ujjmaró esetében aránylag könnyen meghatározható az abszolút minimum létezésének a feltétele. Ugyanis itt, az egyparaméteres felületsereget — amelynek a szerszámforgásfelület a burkolója — egy, a Z forgástengelyre merőleges tetszésszerinti sík olyan körökben metszi, amelyek sugarának négyzete, a (34*) képlet szerint :

$$\varrho(Z, \psi) = (Z \operatorname{tg} \psi)^2 + a^2 k^2 (\psi - \psi_0)^2 \tag{1}$$

ahol ψ a felületsereg paramétere és ha $Z = Z_0$ egy rögzített síkmetszetet jelent, akkor $\varrho(Z_0, \psi)$ egyváltozós függvény e metszősíkon fekvő körök sugarának a négyzetét jelenti. A $\varrho(Z, \psi)$ függvény szélsőértékeit kell vizsgálnunk a $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$ szakaszban.[3] A szélsőérték létezéséhez szükséges

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial \psi} = Z^2 \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos^2 \psi} + a^2 k^2 (\psi - \psi_0) = 0 \tag{2}$$

---

[1] Lásd : [1]-et az irodalomjegyzékben. A szövegben e dolgozat egyenleteire való hivatkozásban a sorszám után *-ot teszünk : (1*), (2*) stb.

[2] Szerszámgépfejlesztő Intézet, Halásztelek.

[3] A laposmenetű csavar több $(0, 2\pi)$ nagyságú szakaszból, menetből áll.

fennállása, amelyből Z mint a ψ függvénye meghatározható [lásd a (37*) alatti képletet]. A ϱ ψ-szerinti differenciálhányadosának előbbi kifejezéséből :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial\psi^2} = Z^2\frac{1+2\sin^2\psi}{\cos^4\psi} + a^2k^2 . \tag{3}$$

Mivel ennek a kifejezésnek az értéke mindig pozítiv, azért ahol $\partial\varrho/\partial\psi = 0$, ott $\partial^2\varrho/\partial\psi^2 > 0$, vagyis ha valamely ψ-helyen a ϱ függvénynek szélsőértéke van, akkor az minimum. Legyen röviden $\partial\varrho/\partial\psi = \dot\varrho(Z, \psi)$. A $\dot\varrho(Z, \psi)$ a ψ változónak a $(0, \pi/2)$ intervallumban (3) szerint monoton növekvő függvénye, és mivel (2) szerint

$$\dot\varrho(Z, 0) = -2a^2k^2\psi_0 < 0 , \quad \dot\varrho\left(Z, \frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty ,$$

azért $\dot\varrho$ a $(0, \pi/2)$ intervallumban pontosan egyszer tűnik el, valamely $\psi_1 < \psi_0$ helyen. Mivel pedig a $(0, \psi_1)$ intervallumban $\dot\varrho < 0$, a $(\psi_1, \pi/2)$ intervallumban pedig $\dot\varrho > 0$, azért a ϱ legkisebb értéke a $(0, \pi/2)$ intervallumban :

$$\varrho(Z, \psi_1) \qquad (0 < \psi_1 < \psi_0 < \pi/2), \tag{4}$$

($\psi = \pi/2$ esetén (1) szerint $\varrho(Z, \pi/2) = \infty$). A második szögnegyedben, vagyis a $(\pi/2, \pi)$ intervallumban, mivel

$$\dot\varrho\left(Z, \frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty ; \quad \dot\varrho(Z, \pi) = 2a^2k^2(\pi - \psi_0) > 0$$

és (3) szerint $\dot\varrho$ monoton növekvő, szintén pontosan egy ψ_2 helyen tűnik el a $\dot\varrho$. Eszerint a ϱ legkisebb értéke a $(\pi/2, \pi)$ intervallumban :

$$\varrho(Z, \psi_2) \qquad \left(\frac{\pi}{2} < \psi_2 < \pi\right) .$$

Megmutatjuk, hogy ez a minimális érték nagyobb a (4) alattinál, vagyis :

$$\varrho(Z, \psi_1) < \varrho(Z, \psi_2) . \tag{5}$$

Mivel $\dot\varrho(Z, \psi_1) = 0$, azért (2)-ből és (1)ből következik, hogy

$$\varrho(Z, \psi_1) = Z^2 \operatorname{tg}^2\psi_1\left(1 + \frac{Z^2}{a^2k^2\cos^4\psi_1}\right) .$$

Tekintsük valamely Φ változónak az :

$$f(\Phi) = Z^2\operatorname{tg}^2\Phi\left(1 + \frac{Z^2}{a^2k^2\cos^4\Phi}\right) \tag{6}$$

függvényét. Nyilvánvaló, hogy $\Phi = \psi_1$, illetve $\Phi = \psi_2$-esetén :

$$f(\psi_1) = \varrho(Z, \psi_1) \text{ és } f(\psi_2) = \varrho(Z, \psi_2) . \tag{7}$$

A (2) szerint :

$$\dot\varrho(Z, \pi - \psi_1) = -2Z^2\frac{\operatorname{tg}\psi_1}{\cos^2\psi_1} + 2a^2k^2(\pi - \psi_1 - \psi_0) .$$

de a $\dot{\varrho}(Z, \psi_1) = 0$ relációból következik, hogy

$$-Z^2 \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\cos^2 \psi_1} = a^2 k^2 (\psi_1 - \psi_0) ,$$

amit $\dot{\varrho}(Z, \pi - \psi_1)$ előbbi kifejezésébe írva :

$$\dot{\varrho}(Z, \pi - \psi_1) = 2 a^2 k^2 (\pi - 2 \psi_0) > 0 \qquad \left(\psi_0 < \frac{\pi}{2}\right) .$$

Ebből az egyenlőtlenségből, mivel a $(\pi/2, \psi_2)$ intervallumban $\dot{\varrho} < 0$ és (ψ_2, π)-ben $\dot{\varrho} > 0$, következik, hogy

$$\pi - \psi_1 > \psi_2 .$$

Azonban $f(\Phi)$ monoton csökken, ha Φ $\pi/2$-től π-ig nő, és ezért

$$f(\psi_2) > f(\pi - \psi_1) ;$$

de (6) szerint $f(\pi - \psi_1) = f(\psi_1)$ és így

$$f(\psi_2) > f(\psi_1)$$

amivel az (5) alatti egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

Ennek az egyenlőtlenségnek a bizonyítása szemlélet alapján egyszerűbben is elvégezhető. Ugyanis a laposmenetű csavarfelületet az alaphengerre írt csavarvonal főnormálisainak az összessége alkotja. Ezek a főnormálisok mind derékszögben metszik a csavarfelület tengelyét, az Y-tengelyt. A ψ paraméterértékhez tartozó főnormális a $Z = Z_0$ síkot olyan pontban metszi, amelynek a Z-tengelytől való távolsága egyenlő a $\left(\varrho(Z_0, \psi)\right)^{1/2}$ sugárral. Ha a metszéspontot meghatározó két koordináta X_0, Y_0, akkor Y_0 a főnormálisnak az (X, Z) koordinátasíktól való távolsága és $X_0^2 + Y_0^2 = \varrho(Z_0, \psi)$. Most már, ha a ψ_1 paraméterértékhez tartozó főnormális metszéspontjának koordinátái X_1, Y_1 ; a ψ_2-höz tartozó metszésponté pedig X_2, Y_2, akkor, mivel ψ_1 az első, ψ_2 pedig a második szögnegyedbe esik, a szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy $|X_2| > |X_1|$ és $|Y_2| > |Y_1|$. Ebből következik, hogy $\varrho(Z, \psi_2) > \varrho(Z, \psi_1)$. Tekintsünk ezután egy a $(0, \pi)$ intervallumba eső ψ értékhez tartozó főnormálist és azt a főnormálist, amely a $(\pi, 2\pi)$ intervallumba eső $(2\pi - \psi)$ értékhez tartozik. Nyilvánvaló, hogy ezeknek a főnormálisoknak az (X, Z) síkra való merőleges vetületei, egymásnak tükörképei a Z-tengelyre vonatkozóan. Ebből következik, hogy a $Z = Z_0$ síkkal való metszéspontok X koordinátái abszolút értékben megegyeznek. A $(2\pi - \psi)$-hez tartozó főnormális metszéspontjának Y koordinátája pedig nyilván nagyobb, mint a ψ-hez tartozóé. Eszerint nyilvánvaló, hogy $\varrho(Z_0, 2\pi - \psi) > \varrho(Z_0, \psi)$. Ezzel megmutattuk, hogy a $\varrho(Z, \psi)$ függvénynek a $(0, 2\pi)$ intervallumban a $\psi = \psi_1$ helyen abszolút minimuma van. Ezek szerint a szerszám profilgörbéjének (37*) alatti paraméteres előállításában a paraméternek a (4) alatti $(0, \psi_0)$ intervallumban kell változnia.

2. §.

A ferdefogazású homlokkerekek készítéséhez szükséges ujjmaró esetében már kissé körülményesebb az abszolút minimum létezését biztosító feltételeknek a meghatározása.

Jelölje most $\varrho(Z, \varphi)$ ama körök sugarának négyzetét, amelyeket a szerszám forgásfelületet meghatározó egyparaméteres felületseregből a Z forgástengelyre merőleges sík kimetsz. φ a felületsereg paramétere és ha $Z = Z_0$ egy rögzített síkmetszetet jelent, akkor $\varrho(Z_0, \varphi)$ ezen a síkon fekvő körök sugarának a négyzetét jelenti. Kiszámítjuk a ϱ függvény φ-szerinti differenciálhányadosát. A (14*), (18*) és (19*) alatti képletekből következik, hogy:

$$\frac{z_1^3}{2}\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} = -UZ^2 - VZ - W$$

ahol (20_1^*) szerint:

$$U = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix}$$

(42_1^*), (42_2^*) és (45*) szerint

(8)
$$V = -2z_0U + z_1D$$
$$W = z_0^2U - z_0z_1D$$

ahol ((44*) szerint)

$$D = \begin{vmatrix} x_0 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix};$$

továbbá, mivel most $d = 0$, $\delta = -\pi/2$, $\varphi_0 = \psi_0 + \pi/2$, a (40*)-ből:

$$x_0 = a\cos\varphi\,, \qquad x_1 = -a\sin\varphi$$
$$y_0 = -ak(\varphi - \varphi_0)\,, \qquad y_1 = -ak$$
$$z_0 = a\sin\varphi\,, \qquad z_1 = a\cos\varphi\,.$$

A V és W (8) alatti értékét a $\partial\varrho/\partial\varphi$ kifejezésébe írva:

(9)
$$\frac{z_1^3}{2}\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} = (-ZU + z_0U - z_1D)(Z - z_0)$$

Az U és D harmadrendű determinánsok értékét kiszámítva:

$$U = -a^3\sin\varphi\,(1 + k^2)$$
$$D = a^3\big(\cos\varphi - k^2(\varphi - \varphi_0)\sin\varphi\big)\;;$$

ezek felhasználásával a (9) alatti kifejezés első faktorára nyerjük, hogy

(9′)
$$-ZU + z_0U - z_1D =$$
$$= a^3\big\{Z\sin\varphi\cdot(1 + k^2) + a\big[-1 + k^2\sin\varphi\big((\varphi - \varphi_0)\cos\varphi - \sin\varphi\big)\big]\big\}\,.$$

Megvizsgáljuk a $\dot{\varrho}(Z, \varphi)$ függvény (ϱ φ-szerinti deriváltja) értékváltozását a $(\pi/2, \pi)$ intervallumban, vagy pontosabban a (φ_0, π) intervallumban, ahol $\varphi_0 = \psi_0 + \pi/2$ (lásd 2*. ábra). Mivel a Z forgástengelyre merőleges metsző sík az a sugarú alaphengeren kívül esik, azért mindig $Z > z_0 = a \sin \varphi$ és így a (9) alatti kifejezés második faktora állandóan pozitív. Tehát $\dot{\varrho}$ előjel változását a (9′) alatti változása fogja meghatározni. Legyen először $\varphi = \pi$, akkor (9′) szerint

$$-ZU + z_0 U - z_1 D = a^3\{-a\} = -a^4 < 0$$

és így, mivel $z_1 = a \cos \varphi = -a < 0$, a $\varphi = \pi$ helyen

$$\left.\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\pi} > 0 . \tag{10}$$

A $\varphi = \varphi_0$-helyen (9′) szerint:

$$-ZU + z_0 U - z_1 D = a^3\{Z(1+k^2)\sin\varphi_0 - a[1 + k^2 \sin^2\varphi_0]\} .$$

Mivel $Z \geqq a$, az előbbi kifejezés pozitív, ha:

$$(1+k^2)\sin\varphi_0 - (1 + k^2\sin^2\varphi_0) > 0 \tag{11}$$

vagy ami ugyanaz, ha

$$k^2 > \frac{1}{\sin\varphi_0} . \tag{11′}$$

Itt $k^2 = \mathrm{tg}^2\, \gamma_a \geqq 1{,}23$, ahol γ_a az alaphengerre írt csavarvonal emelkedési szöge, amelyre a ferdefogazású homlokkerekek zöménél áll, hogy $\gamma_a \geqq 48°$. A (11′)-ben fellépő: $\varphi_0 = \pi/2 + \psi_0$, ahol ha z a kerék fogszámát jelenti, könnyen belátható, hogy $\psi_0 < \pi/2z$. Azonban $z \geqq 5$, tehát $\psi_0 < \pi/10$ és így

$$\sin\varphi_0 = \cos\psi_0 > \cos\frac{\pi}{10} > 0{,}9 .$$

Eszerint a (11′) alatti egyenlőtlenség teljesül, tehát a (11) alatti is fennáll és így, mivel a $\varphi = \varphi_0$ helyen $z_1 < 0$, a (9)-ből következik, hogy:

$$\dot{\varrho} = \left.\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} < 0 .$$

Tehát megmutattuk, hogy a (φ_0, π) intervallum kezdőpontjában a $\dot{\varrho}$ negatív, a vég pontjában pedig (10) szerint pozitív, amiből következik, hogy $\dot{\varrho}$ a (φ_0, π) intervallumban legalább egy helyen eltűnik. A következőkben bebizonyítjuk, hogy $\dot{\varrho}$ a (φ_0, π) intervallumban *pontosan egy* helyen tűnik el. Ez az állítás igazolást nyer, ha megmutatjuk, hogy ha a (φ_0, π) intervallum valamely φ helyén

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = 0 ,$$

akkor ugyanott

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \varphi^2} > 0 .$$

Tekintettel arra, hogy (45*) szerint

$$z_0 U - z_1 D = \Delta ,$$

a (9) alattit a következőképp is felírhatjuk:

$$\frac{z_1^3}{2}\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}=(-ZU+\varDelta)(Z-z_0)\ .$$

Differenciáljuk ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát φ-szerint:

$$\frac{3}{2}z_1^2\dot{z}_1\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}+\frac{z_1^3}{2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2}=(-Z\dot{U}+\dot{\varDelta})(Z-z_0)-\dot{z}_0(-ZU+\varDelta)\ .$$

Most már, ha $\partial\varrho/\partial\varphi=0$, vagyis fennáll a szélsőérték létezésének szükséges feltétele, akkor (45*) és (46*) szerint:

$$Z=z_0-\frac{D}{U}z_1=\frac{\varDelta}{U}\ ,$$

és ezt a $Z=\varDelta/U$ értéket az előbbi egyenlőségbe írva, tekintettel arra, hogy $\partial\varrho/\partial\varphi=0$, kapjuk:

$$\frac{z_1^3}{2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2}=\frac{-\dot{U}\varDelta+U\dot{\varDelta}}{U^2}(\varDelta-z_0U)\ .$$

De, mivel $Z=\varDelta/U$,

$$\frac{-\dot{U}\varDelta+U\dot{\varDelta}}{U^2}=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\varDelta}{U}\right)=\dot{Z}\ ;$$

másrészt (45*) szerint:

$$\varDelta-z_0U=-z_1D\ ,$$

amit $\partial^2\varrho/\partial\varphi^2$ előbbi kifejezésébe írva:

$$\text{(12)}\qquad \frac{z_1^2}{2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2}=-D\dot{Z}\ .$$

A (60_1^*) szerint:

$$Z=\frac{a}{\sin\varphi}-a\sin^2\beta\cos\varphi\left[\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)-\left(\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

és ennek φ-szerinti deriváltja:

$$\dot{Z}=-\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+a\sin^2\beta\sin\varphi\left[\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)-\left(\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)\right]+a\sin^2\beta\cos\varphi\operatorname{ctg}^2\varphi\ .$$

Mivel

$$\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)-\left(\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}\varphi+\varphi-\varphi_0\ ,$$

azért $\dot{Z}$ előbbi kifejezése a következő alakú lesz:

$$\dot{Z}=-\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+a\sin^2\beta[\cos\varphi+(\varphi-\varphi_0)\sin\varphi]+a\sin^2\beta\cos\varphi\operatorname{ctg}^2\varphi=$$

$$=\frac{-\cos\varphi\cos^2\beta+(\varphi-\varphi_0)\sin^2\beta\sin^3\varphi}{\sin^2\varphi}a\ .$$

Most már, ha

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \varphi < \pi \, ,$$

akkor

$$\cos\varphi < 0 \, , \quad \sin\varphi > 0 \, ,$$

tehát a (φ_0, π) intervallumban az előbbi képlet szerint:

$$\dot{Z} > 0 \, .$$

Mivel a (12)-ben fellépő D determináns a (φ_0, π) intervallumban

$$D = a^3 \big(\cos\varphi - k^2(\varphi - \varphi_0)\sin\varphi\big)$$

szerint negatív, azért ugyanitt

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2} > 0 \, .$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\dot{\varrho}$ a (φ_0, π) intervallumban pontosan egy helyen tűnik el és itt a ϱ függvénynek minimuma van, amely a (φ_0, π) intervallumban *abszolút minimum.*

A (9′) alatti kifejezésből látható, hogy $\dot{\varrho}$ amely a $\varphi = \pi$ helyen pozitív, a π helynek egy jobboldali környezetében is pozitív marad és így mondhatjuk, hogy a ϱ függvénynek valamely

$$(\varphi_0 , \Phi)$$

intervallumban egy helyen minimuma van, amely ott abszolút minimum; ahol

$$\Phi > \pi$$

(13)
$$\varphi_0 < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2z} \, .$$

Ezek szerint a ferdefogú kerék fogoldalát alkotó csavarfelületnek azt a részét alakíthatjuk ki az ujjmaróval, amely megfelel a (φ_0, Φ) szakasznak, vagyis az alaphengerre írt csavarvonal érintőinek, mint a felület alkotóinak azt az összességét, amelyet a φ paraméternek φ_0-tól Φ-ig való változásakor nyerünk. Ennek a felületrésznek az egyenlet-rendszere egy alkalmasan választott (ξ, η, ζ) derékszögű koordinátarendszerben:

(14)
$$\begin{aligned} \xi &= a\cos(\varphi - \varphi_0) - \lambda a \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \eta &= a\sin(\varphi - \varphi_0) + \lambda a \cos(\varphi - \varphi_0) \\ \zeta &= c_0(\varphi - \varphi_0) + c_0\lambda \qquad (c_0 = ak) \end{aligned}$$

ahol a φ és λ paraméterre:

$$\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \Phi \, ; \; -(\varphi - \varphi_0) \leqq \lambda \leqq \frac{b}{c_0} + \varphi_0 - \varphi .$$

A $\xi = a\cos(\varphi - \varphi_0)$, $\eta = a\sin(\varphi - \varphi_0)$, $\zeta = c_0(\varphi - \varphi_0)$ csavarvonalnak az a darabja, amely a (φ_0, Φ) szakasznak felel meg, meghatározza a fogaskerék szélességét. Ha a szóbanforgó csavarfelület részt olyan a felület ζ-tengelyére merőleges $\zeta = h$ síkokkal (homloksíkok) metszük, amelyekre $0 \leqq h \leqq c_0(\Phi - \varphi_0)$, akkor véges körevolvens darabokat nyerünk, amelyeknek a fogaskerék fejhengeréig kell terjedniök, hogy teljes fogoldalt kapjunk. Mivel a $\zeta = h = c_0(\bar{\varphi} - \varphi_0)$; $(\varphi_0 \leqq \bar{\varphi} \leqq \Phi)$ síkon fekvő evolvensdarab pontjainak a ζ-tengelytől való távolsága (14) szerint :

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = a\sqrt{1 + (\bar{\varphi} - \varphi)^2} \,,$$

továbbá

$$\max|\bar{\varphi} - \varphi| = \max\{(\bar{\varphi} - \varphi_0), (\Phi - \bar{\varphi})\} = M$$

$$(\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \Phi)$$

ahol, mint könnyen belátható

$$M \geqq \frac{\Phi - \varphi_0}{2} \,,$$

azért a $\zeta = h$ metszeten a ζ-tengelytől legmesszebb eső pont távolsága :

$$\max\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = a\sqrt{1 + M^2} \geqq a\sqrt{1 + \left(\frac{\Phi - \varphi_0}{2}\right)^2} \,,$$

vagyis

$$\min\{\max\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\} = a\sqrt{1 + \left(\frac{\Phi - \varphi_0}{2}\right)^2} \,.$$

Ha a fogaskerék fejhengerének sugara r_f, akkor nyilván az

$$r_f \leqq a\sqrt{1 + \left(\frac{\Phi - \varphi_0}{2}\right)^2} \tag{15}$$

egyenlőtlenségnek kell fennállni, ahhoz, hogy a fogoldal egészen a fejhengerig terjedjen. A fejhenger sugara *elemi fogazásnál* (lásd [3]) :

$$r_f = a\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}\right)^2}\left(1 + \frac{2\cos\beta}{z}\right)$$

ahol $\beta = \pi/2 - \gamma$ (a fogferdeség szöge[4]) $\alpha = 20^\circ$ a szerszám-kapcsolószög és

[4]) Itt γ annak a csavarvonalnak az emelkedési szögét jelenti, amelyet az osztóhenger metsz ki a fogoldalt alkotó csavarfelületből. Ez a γ érték nem egyenlő a (11′) alatti képletben szereplő γ_a-val, amely az alaphengeren való emelkedés szögét jelenti. γ_a és γ közt a következő összefüggés áll fenn :

$$\cos\gamma_a = \cos\gamma\,\cos\alpha \qquad (\alpha = 20^\circ)$$

Mivel a ferdefogazású homlokkerekek zöménél $\gamma \geqq 45^\circ$, azért az előbbi összefüggésből $\gamma_a \geqq 48^\circ$.

z most a fogszámot jelenti. (13) szerint:

$$\Phi - \varphi_0 > \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2z}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2z}.$$

A z fogszámról általában feltehetjük, hogy

$$z \geqq 10,$$

amikoris mindig fennáll a

$$\Phi - \varphi_0 > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} = \frac{9\pi}{20} \tag{16}$$

egyenlőtlenség és a (15) alatti teljesül, ha

$$z \geqq \frac{2\cos\beta\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{9\pi}{40}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}\right)^2}} = \frac{2\cos\beta\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}}{1{,}225 - \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}\right)^2}}.$$

A fogferdeség β szöge — mivel $\gamma = (\pi/2 - \beta)$-ra feltettük, hogy $\gamma \geqq 60°$ — a $(0, 30°)$ intervallumban változik és ekkor az előbbi törtkifejezés értéke 13 és 16 közé esik. Eszerint a (15) alatti teljesül, ha a kerék z fogszámára[5)]

$$z > 15$$

Maróval a fogazott kerék homlok profilevolvense egészen a belső körig elkészíthető — a belső kör sugara az elemi fejhézaggal nagyobb a lábkör sugárnál —, azonban *elemi fogazás*-nál a teljes fogmagasság mentén csak abban az esetben kapunk végig evolvens profilt, ha a kerék fogszáma: $z > 33$ ([2] 138. oldal). Vagy pontosabban, akkor kapunk teljes evolvens profilt, ha:

$$z \geqq \frac{2}{1 - \cos\alpha_h} = K_\beta$$

ahol (lásd [3]):

$$\cos\alpha_h = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta + \operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad (\alpha = 20°)$$

Ha $\beta = 0$, akkor $K_0 = 34$, ha $\beta = 10°$, akkor $K_{10} = 33$; $K_{20} = 30$, $K_{30} = 26$, $K_{45} = 18$. Ezek alapján egészen a belső köréig evolvens profilú keréknél a (15) alatti automatikusan teljesül.

Most rátérünk a megengedhető kerékszélesség meghatározására. Mint már említettük, a fogszélességet az alaphengerre írt csavarvonalnak az a darabja határozza meg, amely a (φ_0, Φ) szakasznak felel meg. A ferdefogú keréknél egy teljes körülforfulásnak megfelelő H menetmagasság, a kerék d

5) A z-re nyert alsó korlátnak ez az értéke még javítható, azonban itt, elemi fogazás esetében a 15 érték is megfelelő.

osztókör átmérője és a β ferdeségi szög között a következő összefüggés áll fenn (lásd: [4], 282. oldal):

$$H = \frac{\pi d}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Ferdefogú keréknél a fogszélesség: $b = 1{,}5 - 2d$ értéket is elérhet. Mivel a b fogszélesség a teljes H menetmagasságnak tört része, azért maximális kerékszélesség esetében teljesülni kell a következő feltételnek:

$$2d = \frac{H}{\mu} \qquad (\mu > 1); \tag{17}$$

ahonnan, tekintettel H előbb megadott kifejezésére:

$$\mu = \frac{\pi}{2\operatorname{tg}\beta} \tag{18}$$

Most már a csavarvonalnak az a darabja, amely a (φ_0, Φ) intervallumnak felel meg, alig egy negyed részét teszi ki az egész H menetemelkedésnek megfelelő darabnak abban az esetben, amikor $\Phi = \pi$ (mivel $\varphi_0 > \pi/2$); ennélfogva ekkor a μ-re a $\mu > 4{,}1$ feltételnek kell fennállnia, vagyis μ fenti (18) kifejezése szerint teljesülnie kell a

$$\operatorname{tg}\beta < \frac{\pi}{8{,}2}$$

egyenlőtlenségnek. Ez azt jelenti, hogy maximális fogszélesség esetében a β fogferdeségi szögre fennáll a

$$\beta \leqq 20^\circ\,57'$$

feltétel, és ebben az esetben a fogszélesség *megengedhető* értékére, a

$$b = \frac{H}{\mu} = \frac{\pi \cdot d}{\mu \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

kifejezésre fennáll a

$$b \geqq 2d$$

egyenlőtlenség. (Megjegyezzük, hogy a fogszélesség tényleges értékét szilárdsági szempontok, továbbá a megmunkálás pontosságának lehetőségei fogják meghatározni.) Abban az esetben pedig, amikor $\beta > 20°57'$, bebizonyítható, hogy a (φ_0, Φ) intervallum bővíthető, azaz a $\Phi > \pi$. E célból tekintsük megint a (9′) alatti kifejezést, amelynek értéke (10) alatti szerint a $\varphi = \pi$ helyen negatív. Megmutatjuk, hogy a (9′) alatti kifejezés az egész $(\pi, 3\pi/2)$ intervallumban negatív és így (9) szerint $\dot{\varrho}$ ugyanott pozitív, amiből következik, hogy ϱ értéke a $(\pi, 3\pi/2)$ intervallumban végig növekszik. Mivel $Z \geqq a$ és $\sin\varphi < 0$ a $(\pi, 3\pi/2)$-ben, azért a (9′) alatti kifejezés biztosan negatív a $(\pi, 3\pi/2)$ intervallumban, ha ugyanott negatív a

$$(1 + k^2)\sin\varphi + \big[-1 + k^2\sin\varphi\big((\varphi - \varphi_0)\cos\varphi - \sin\varphi\big)\big]$$

kifejezés. Írhatjuk, hogy $\varphi = \pi + \lambda$, ahol $0 \leqq \lambda \leqq \pi/2$. Mivel $\varphi_0 = \pi/2 + \psi_0$, azért $\varphi - \varphi_0 = \pi/2 + \lambda - \psi_0$, és ezek szerint az előbbi kifejezést a következő alakban is felírhatjuk :

$$-(1+k^2)\sin\lambda - 1 + k^2\left(\frac{\pi}{2}+\lambda-\psi_0\right)\sin\lambda\cos\lambda - k^2\sin^2\lambda\ .$$

Itt, mivel $\sin\lambda > 0$, $\cos\lambda > 0$, a harmadik tag pozitív a $0 < \lambda < \pi/2$ intervallumban és így a szóbanforgó kifejezés negatívitását bebizonyítottuk, ha megmutatjuk, hogy

$$(1+k^2)\sin\lambda + k^2\sin^2\lambda + 1 > k^2\left(\frac{\pi}{2}+\lambda\right)\sin\lambda\cos\lambda\ ,$$

amikor

$$0 \leqq \lambda \leqq \frac{\pi}{2}\ .$$

Vezessük be a következő jelöléseket :

(19) $$h(\lambda) = (1+k^2) + h^2\sin\lambda + \frac{1}{\sin\lambda}$$

(19′) $$g(\lambda) = \left(\frac{\pi}{2}+\lambda\right)\cos\lambda\ .$$

Azt kell megmutatnunk, hogy

(20) $$h(\lambda) > k^2 g(\lambda)$$

$$0 \leqq \lambda \leqq \pi/2\ .$$

Mivel

$$h'(\lambda) = \cos\lambda\left(k^2 - \frac{1}{\sin^2\lambda}\right),$$

és eszerint $h'(\lambda_0) = 0$, ha

$$\lambda_0 = \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{k}\ ,$$

azért a $h(\lambda)$ függvénynek a $(0, \pi/2)$ intervallumban pontosan egy minimuma van a $\lambda = \lambda_0$ helyen. Ez a minimum érték (19) szerint :

(21) $$h(\lambda_0) = (1+k^2) + k + k = (1+k)^2\ .$$

Ezután számítsuk ki a (19′) alatti $g(\lambda)$ függvény deriváltját :

$$g'(\lambda) = \cos\lambda - \left(\frac{\pi}{2}+\lambda\right)\sin\lambda\,.$$

Ez a függvény monoton csökken, ha λ 0-tól $\pi/2$-ig változik és mivel $g'(0) > 0$ és $g'(\pi/2) < 0$, ezért a $g'(\lambda)$ függvény a $(0, \pi/2)$ intervallumban pontosan egy λ_1 helyen tűnik el és ott a $g(\lambda)$ függvénynek abszolút maximuma van. Ha a $g'(\lambda) = 0$ egyenletet λ-ra megoldjuk, akkor arra a

$$\lambda_1 = 0{,}45795985 = 26^\circ\, 14'\, 21''$$

értéket nyerjük (pontosan $0{,}45795985 < \lambda_1 < 0{,}45796470$). Mivel

$$\cos \lambda_1 = 0{,}8969564,$$

azért (19′) szerint

$$g(\lambda_1) = 2{,}02875618 \cdot 0{,}8969564 = 1{,}8197058.$$

A $h(\lambda)$ függvénynek minimuma (21) szerint $(1+k)^2$, a $k^2 g(\lambda)$ maximuma pedig

$$k^2 g(\lambda_1) = 1{,}8197058\; k^2.$$

Most már $\quad (1+k)^2 > 1{,}8197058\; k^2.$

ha $\quad 1 + k > 1{,}3489647\; k.$

Mivel pedig $k = \operatorname{ctg} \beta_a$, az előbbi egyenlőtlenség fennáll, ha

$$\operatorname{ctg} \beta_a < 2{,}8656193$$

azaz, ha[6])

$$\beta_a \geqq 19^\circ\, 15'.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\beta_a > 19^\circ\, 15'$ esetében az eredeti (φ_0, Φ) intervallum, ahol $\Phi = \pi$, bővíthető és most $\Phi = 3\pi/2$. Ez a bővítés azért lehetséges, mert $\varrho(Z, \varphi)$ függvény a $(\pi, 3\pi/2)$ intervallumban végig növekszik. Könnyen belátható, hogy az így nyert $(\varphi_0, 3\pi/2)$ intervallum még tovább bővíthető éspedig a közel 2π nagyságú $(\varphi_0, 5\pi/2 - \psi_0)$ intervallummá $(\varphi_0 = = \pi/2 + \psi_0)$. Tekintsük az alaphengerre írt csavarvonal érintőinek, azaz a csavarfelület alkotóinak az összességét. Essék a φ paraméterérték a $(\varphi_0, 3\pi/2)$ intervallumba és tekintsük ehhez a φ-hez tartozó alkotót, valamint az alaphengernek azt az érintősíkját, amely tartalmazza a φ-hez tartozó alkotót. Az alaphengernek az az érintősíkja, amely az előbbi érintősíknak tükörképe az (Y, Z) koordinátasíkra vonatkozóan, tartalmazza a $(3\pi/2 - \varphi) + + 3\pi/2 = 3\pi - \varphi$ paraméterértékhez tartozó alkotót. Ez a paraméterérték a $(3\pi/2, 5\pi/2)$ intervallumba esik. A szóbanforgó két alkotó a $Z = Z_0$ síkot két olyan pontban metszi, amelyeknek a Z-tengelytől való távolsága: $\sqrt{\varrho(Z_0, \varphi)}$ illetőleg $\sqrt{\varrho(Z_0, 3\pi - \varphi)}$. Nyilvánvaló, hogy e két pont X koordinátája abszolút értékben megegyezik. Ha a φ-hez tartozó alkotót az (Y, Z) síkra vonatkozóan tükröztetjük a másik alkotót tartalmazó érintősíkra, akkor a közvetlen geometriai szemlélet mutatja, hogy a $(3\pi - \varphi)$-hez tartozó érintő metszéspontjának Y koordinátája nagyobb mint a φ-hez tartozó metszéspont $|Y|$ értéke. Ebből következik, hogy $\varrho(Z_0, 3\pi - \varphi) > \varrho(Z_0, \varphi)$. Ezzel megmutattuk, hogy abban az esetben, amikor a fogferdeség $\beta_a > 19^\circ\, 15'$ a(φ_0, Φ) intervallum $\Phi = 5\pi/2 - \psi_0 = 5\pi/2 - (\varphi_0 - \pi/2) = (3\pi - \varphi_0)$

6) A 4) lábjegyzetben megadott $\cos \gamma_a = \cos \gamma \,.\, \cos \alpha$ képlet szerint $\sin \beta_a = \sin \beta \cos \alpha$. Ez utóbbi összefüggésből következik, hogy ha $\beta \geq 20^\circ\, 57'$, akkor $\beta_a \geq 19^\circ\, 37'$. Vagyis a $\beta \geq 20^\circ\, 57'$ fogferdeség esetében a (φ_0, π) intervallum bővíthető.

intervallumra bővíthető. Továbbá, mivel $\varphi_0 = \pi/2 + \psi_0$, ahol $\psi_0 < \pi/2z \leqq \pi/42$, azért most

$$\Phi - \varphi_0 > \frac{41}{21}\pi ,$$

és így a $(\varphi_0, 3\pi - \varphi_0)$ szakasznak megfelelő emelkedésnek, a teljes H emelkedéshez való viszonya $2\pi : 41/21\pi = 42/41$. Eszerint a (17) alatti képletben $\mu = 42/41$-nek választható és így a fogszélesség megengedhető értéke:

$$b = \frac{H}{\mu} = \frac{41 \cdot \pi \cdot d}{42 \operatorname{tg} \beta} ; \quad 45° > \beta \geqq 20° \, 57' . \tag{22}$$

A maximális $b = 2d$ fogszélesség esetén, ebből a képletből:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{41\pi}{84} .$$

ami $\beta \sim 56° \, 53'$ megengedhető fogferdeséget jelent. Természetesen (11') szerint csak $\beta \leqq 45°$ állhat fenn.

3. §.

A fogszélesség megengedhető értékére levezetett (22) alatti képlet érdekesen alkalmazható még az ún. evolvens csigára, amelyet csak azóta gyártanak minálunk, amióta a budapesti szovjet trolibuszok pótalkatrészeit idehaza gyártják. Az evolvens csiga tulajdonképpen olyan ferdefogazású homlokkerék, amelynek fogferdeségi szöge $\beta = 90° - \gamma$ nagy érték ($\beta = 64° - 86°$). A több menetből álló csiga esetében, a (11) képletben szereplő $\varphi_0 = \pi/2$, mivel a $\psi_0 = 0$. A csiga *egy* teljes menetének a $(\pi/2, 5\pi/2)$ intervallum felel meg. A (9') alatti kifejezésre a $\varphi = \varphi_0 = \pi/2$ helyen most, függetlenül a k értékétől, vagyis az emelkedési szög nagyságától, fennáll az

$$a^3(Z - a)(1 + k^2) > 0$$

egyenlőtlenség és így 2. § szerint $\varrho(Z, \varphi)$ abszolút minimumát a $(\pi/2, \pi)$ intervallumban veszi fel. Mivel most $\Phi = 3\pi - \varphi_0 = 5\pi/2$, azért $\Phi - \varphi_0 = 2\pi$ és így $\mu = 1$. Tehát a megengedhető fogszélesség (22) alatti értéke csigára a következőképp módosul:

$$b = H = \frac{\pi d}{\operatorname{tg} \beta}$$

ahol $\beta > 20° \, 57'$. Ez az eredmény összhangban áll azzal, hogy a több ismétlődő menetből álló csigánál egy teljes körüljárásnál adódó H emelkedés felel meg a b fogszélességnek.

4. §.

Befejezésül a ferdefogazású kerék marására szolgáló ujjmaró profilgörbéjének [1] (60) alatt megadott egyenletére egy új levezetést adunk, amely a profilgörbét, mint egy hiperbolaseregnek a burkoló görbéjét származtatja.

A fogoldalt képező csavarfelületnek, mint az a sugarú alaphengerre írt csavarvonal érintői összességének az egyenletrendszerét az (x, y, z) derékszögű koordináta-rendszerben a következő alakban írhatjuk fel (lásd pl. : [3]) :

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi - ta\sin\varphi \\ y &= a\sin\varphi + ta\cos\varphi \qquad\qquad c = ak,\ k = \operatorname{tg}\gamma_a \\ z &= c(\varphi - \varphi_0) + ct \end{aligned}$$

ahol φ és t paraméterek. Itt, ha φ egy fix érték és t változó, akkor a csavarfelület egyik egyenes alkotójának, mint térbeli egyenesnek az egyenletrendszerét kapjuk. Ha ezt az egyenest az x-tengely körül megforgatjuk, akkor egypalástú forgási hiperboloidot nyerünk. A különböző φ értékekhez tartozó egyenes alkotókat az x-tengely körül megforgatva, hiperboloidsereget nyerünk. Ennek a felületseregnek burkoló felülete lesz a maró szerszám forgásfelülete. Ha az egypalástú hiperboloidsereget az (x, y) koordinátasíkkal metsszük, akkor egy olyan hiperbolasereget nyerünk, amelynek burkoló görbéje a szerszám profilgörbéjét szolgáltatja az (x, y) síkban.

Jelentsen a fenti egyenletrendszerben φ egy fix értéket, tehát tekintsünk a φ-hez tartozó alkotót és forgassuk el ezt, az x-tengely körül α szöggel. Az így kapott térbeli egyenesnek az egyenletrendszere a következő :

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi - ta\sin\varphi \\ y &= (a\sin\varphi + ta\cos\varphi)\cos\alpha - \big(c(\varphi - \varphi_0) + ct\big)\sin\alpha\ . \\ z &= (a\sin\varphi + ta\cos\varphi)\sin\alpha + \big(c(\varphi - \varphi_0) + ct\big)\cos\alpha\ . \end{aligned}$$

Ha ebben az egyenletrendszerben α változó — φ fix érték és t szintén változó — akkor az, a φ paraméterértékhez tartozó egypalástú forgási hiperboloid egyenletrendszerét jelenti. Az y és z előbbi kifejezéseiből adódik, hogy :

$$a\sin\varphi + ta\cos\varphi = \begin{vmatrix} y & -\sin\alpha \\ z & \cos\alpha \end{vmatrix}\ ;\ c(\varphi - \varphi_0) + ct = \begin{vmatrix} \cos\alpha & y \\ \sin\alpha & z \end{vmatrix}\ .$$

Most már a φ-hez tartozó hiperboloidot az (x, y) síkkal metszve, amikoris $z = 0$, az előbbi két egyenletből nyerjük, hogy

$$a\sin\varphi + ta\cos\varphi = y\cos\alpha\ ,\quad c(\varphi - \varphi_0) + ct = -\,y\sin\alpha\ .$$

Innen

$$y^2 = (a\sin\varphi + ta\cos\varphi)^2 + c^2(\varphi - \varphi_0 + t)^2\ ,$$

amit a fenti

$$x = a\cos\varphi - ta\sin\varphi$$

kifejezéssel összekapcsolva, annak a hiperbolának a paraméteres egyenletrendszerét jelenti, amelyet a φ-hez tartozó hiperboloidnak a $z = 0$ síkkal való metszésekor nyerünk. Tehát a φ-hez tartozó hiperbolának a paraméteres egyenletrendszere, ahol t a paraméter, a következő alakú :

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi - ta\sin\varphi \\ y^2 &= (a\sin\varphi + ta\cos\varphi)^2 + c^2(\varphi - \varphi_0 + t)^2\ . \end{aligned} \tag{23}$$

Ha itt φ változó, akkor (23) hiperbolasereget ábrázol. Ennek a seregnek burkoló görbéje lesz a keresett szerszámprofilgörbe. A hiperbolasereg burkoló görbéjét úgy nyerjük, hogy a sereg előbbi egyenletrendszeréből a φ és t paraméterek közül az egyiket elimináljuk. Az eliminációhoz képeznünk kell az egyenletrendszer Jacobi-féle függvénydeterminánsát, amely a következő alakú:

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} .$$

A $D = 0$ egyenletből az egyik paramétert a másikkal kifejezve és a nyert kifejezést a sereg egyenletrendszerébe helyettesítve olyan egyparaméteres egyenletrendszert kapunk, amely a burkoló görbét ábrázolja. Kiszámítjuk a D-ben fellépő differenciálhányadosokat:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -a \sin\varphi - ta\cos\varphi ; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -a\sin\varphi$$

$$y\frac{\partial y}{\partial \varphi} = a^2(\sin\varphi + t\cos\varphi)(\cos\varphi - t\sin\varphi) + c^2(\varphi - \varphi_0 + t)$$

$$y\frac{\partial y}{\partial t} = a^2(\sin\varphi + t\cos\varphi)\cos\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0 + t) .$$

Ezekkel a kifejezésekkel felírjuk a következő másodrendű determinánst:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ y\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & y\dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = y \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = y\cdot D .$$

Ha ennek a másodrendű determinánsnak az első oszlopából kivonjuk a második oszlopát és azután az első oszlopból a közös t faktort kiemeljük, akkor az a következő alakú lesz:

$$-at\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -a^2(\sin\varphi + t\cos\varphi)\sin\varphi & a^2(\sin\varphi + t\cos\varphi)\cos\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0 + t) \end{vmatrix} = yD .$$

A baloldali determinánst kiszámítva, t-nek a következő elsőfokú kifejezését nyerjük:

$$t\cos\varphi(a^2 + c^2) + a^2\sin\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0)\cos\varphi .$$

Ez a kifejezés a φ-ben azonosan eltűnik, ha

$$t = -\frac{1}{a^2 + c^2}\,\frac{1}{\cos\varphi}\,[a^2\sin\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0)\cos\varphi] \qquad 0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

és ekkor, mivel $y \neq 0$

$$D = 0$$

is azonosan fennáll. t-nek most kiszámított értékét x és y^2 (23) alatti kifejezéseibe írva, nyerjük a burkoló görbe egyenletrendszerét:

$$x = a\cos\varphi + \frac{a}{a^2+c^2}\,[a^2\operatorname{tg}\varphi + c^2(\varphi-\varphi_0)]\sin\varphi \tag{24}$$

és egyszerű számolással:

$$y^2 = \frac{a^2c^4}{(a^2+c^2)^2}\big(\sin\varphi - (\varphi-\varphi_0)\cos\varphi\big)^2 + \frac{c^2a^4}{(a^2+c^2)^2}(\varphi-\varphi_0-\operatorname{tg}\varphi)^2 .$$

Mivel $c = ak$, ahol $k = \operatorname{tg}\gamma_a$, azért

$$a^2 + c^2 = a^2(1+k^2) = \frac{a^2}{\cos^2\gamma_a}$$

és ennek felhasználásával:

$$y^2 = \frac{c^4}{a^2}\cos^4\gamma_a\cos^2\varphi\big(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi-\varphi_0)^2 + c^2\cos^4\gamma_a\big(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi-\varphi_0)\big)^2 =$$

$$= c^2\cos^4\gamma_a\left[\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi + 1\right]\big(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi-\varphi_0)\big)^2;$$

innen pedig, mivel $\frac{c}{a} = \operatorname{tg}\gamma_a$,

$$y = a\sin\gamma_a[\sin^2\gamma_a\cos^2\varphi + \cos^2\gamma_a]^{1/2}\big(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi-\varphi)\big) .$$

De

$$[\sin^2\gamma_a\cos^2\varphi + \cos^2\gamma_a]^{1/2} = (1-\sin^2\gamma_a\sin^2\varphi)^{1/2}$$

és így az y kifejezésének végleges alakja:

$$y = a\sin\gamma_a(1-\sin^2\gamma_a\sin^2\varphi)^{1/2}\big(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi-\varphi_0)\big) . \tag{25}$$

Az x (24) alatti kifejezését meg a következőképpen alakíthatjuk át:

$$x = \frac{a^3\cos\varphi + ac^2\cos\varphi + a^3\operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\varphi + ac^2(\varphi-\varphi_0)\sin\varphi}{a^2+c^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2+c^2}\left\{\frac{a^3}{\cos\varphi} + ac^2\big(\cos\varphi + (\varphi-\varphi_0)\sin\varphi\big)\right\} .$$

Mivel az előbbiek szerint

$$\frac{1}{a^2+c^2} = \frac{\cos^2\gamma_a}{a^2}, \qquad c = a\operatorname{tg}\gamma_a$$

azért

$$\frac{ac^2}{a^2+c^2} = a\sin^2\gamma_a ,$$

amit x előbbi kifejezésébe írva :

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}\cos^2\gamma_a + a\sin^2\gamma_a\big(\cos\varphi + (\varphi - \varphi_0)\sin\varphi\big) =$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi} + a\sin^2\gamma_a\left(\cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}\right) + a\sin^2\gamma_a(\varphi - \varphi_0)\sin\varphi =$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi} + a\sin^2\gamma_a\big(-\operatorname{tg}\varphi + (\varphi - \varphi_0)\big)\sin\varphi\ .$$

Ezt a kifejezést összekapcsolva a (25) alattival, a szerszám profilgörbéjére a következő paraméteres egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$(26)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{a}{\cos\varphi} + a\sin^2\gamma_a\big(-\operatorname{tg}\varphi + (\varphi - \varphi_0)\big)\sin\varphi \\ y &= a\sin\gamma_a(1 - \sin^2\gamma_a\sin^2\varphi)^{1/2}\big(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi - \varphi_0)\big)\ . \end{aligned}$$

Most már [1] cikk (60) alatti képlete ennek a profilgörbének egyenletrendszerét lényegében a következő alakban adja meg :

$$x = \frac{a}{\sin\varphi} - a\sin^2\gamma_a\left[\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \psi_0\right]\cos\varphi$$

$$y = a\sin\gamma_a\left[\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \psi_0\right](1 - \sin^2\gamma_a\cos^2\varphi)^{1/2}\ .$$

Ez az egyenletrendszer könnyen azonosítható az általunk levezetett (26) alattival. Ugyanis a

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi\ , \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \psi_0$$

helyettesítést végezve :

$$\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \psi_0 = \operatorname{inv}(-\psi) - \psi_0 = -\operatorname{tg}\psi + \psi - \psi_0$$

$$\sin\varphi = \cos\psi$$

$$\cos\varphi = -\sin\psi$$

és ezek felhasználásával az előbbi [1] (60) egyenletrendszer a következő alakú lesz :

$$x = \frac{a}{\cos\psi} + a\sin^2\gamma_a[-\operatorname{tg}\psi + \psi - \psi_0]\sin\psi$$

$$y = a\sin\gamma_a(1 - \sin^2\gamma_a\sin^2\psi)^{1/2}[-\operatorname{tg}\psi + \psi - \psi_0]$$

ami, mivel a négyzetgyök $\pm$ előjelű, megegyezik a (26) alatti egyenletrendszerrel.

(Beérkezett 1958. VI. 12. Kiegészítve 1958. VII. 14.)

IRODALOM

[1] IFJ. DRAHOS I.—HORNYIK L.—HOSSZÚ M.: „Egy szerszám-geometriai probléma matematikai megoldása". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958).

[2] SZENICZEI L.: *Az általános fogazás.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1955.

[3] LIPKA I.: „A csúszáskiegyenlítés problémájának analitikus megoldása ferdefogazású homlokkerekekre." *Gép* **6** (1954) 137—144.

[4] VÖRÖS I.: *Gépelemek, III. (Fogaskerekek.)* Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ J. DRAHOS, L. HORNYIK И M. HOSSZÚ «РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ»

I. LIPKA

Резюме

Поверхность вращения инструмента для фрезерования спиральных поверхностей может быть определена как описывающая однопараметрового семейства поверхностей вращения. Радиус любого кругового сечения поверхности вращения инструмента равняется экстремуму радиусов окружностей, полученных при соответствующем сечении семейства поверхностей. Согласно исследованиям цитируемых в загаловке авторов этот экстремум должен быть минимумом, причём абсолютным минимумом в интервалле обработки для того, чтобы получить правильный профиль инструмента. Первая часть настоящей заметки изучает условие существования абсолютного минимума для случая пальцевой фрезы для обработки винтов с плоским ходом. Вторая часть изучает существование абсолютного минимума в случае пальцевой фрезы для косозубого зубнатого колеса и находит связь между широтой зубцов и их допустимой косостью.

BEITRAG ZUR ARBEIT »DIE MATHEMATISCHE LÖSUNG EINES WERKZEUGGEOMETRISCHEN PROBLEMS« VON JR. I. DRAHOS, L. HORNYIK und M. HOSSZÚ

von

I. LIPKA

Zusammenfassung

Die Umdrehungsfläche des Werkzeuges für Fräsen von Schraubenflächen lässt sich als Hüllfläche einer einparametrigen Umdrehungsflächen-Schar herstellen. Der Halbemesser eines beliebigen Kreisschnittes der Umdrehungsfläche des Werkzeuges ist Extremwert der Halbemesser der Kreise, die man am entsprechenden Schnitt der Flächenschar gewinnt. Im Sinne der Untersuchungen von I. DRAHOS, L. HORNYIK und M. HOSSZÚ (S. [1] in Literatur), muss dieser Extremwert ein Minimum sein, u. zw. im Abschnitt der Bearbeitung muss er ein absolutes Minimum sein, damit man das richtige Werkzeugprofil erhalte. Teil 1. des Beitrages behandelt die Bedingung für die Existenz eines absoluten Minimums im Falle des Profilfingerfräsers für flachgängige Schraubengewinde. Teil 2. untersucht die Bedingung des absoluten Minimums für Profilfingerfräser von Schrägzahnstirnrädern und stellt ausserdem einen Zusammenhang zwischen dem zulässigen Schrägungswinkel und der Zahnbreite auf. Teil 3. wendet die im Teil 2. behandelte Theorie auf die Evolventenschnecke an. Teil 4. behandelt das Problem der Profilkurve des Fingerfräsers von Schrägzahnstirnrädern nach einer neuen Methode.

NEUTRONOK ATOMMAGREAKTOROKBAN VALÓ MOZGÁSÁNAK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI PROBLÉMÁI

MOGYORÓDI JÓZSEF

Bevezetés

E dolgozat az atommagreaktorokban lejátszódó neutronlassítási folyamat valószínűségszámítási vizsgálatával foglalkozik. A neutronlassítással kapcsolatban több probléma merül fel. Ezek közül PÁL LÉNÁRD [2] megoldotta valószínűségszámítási eszközökkel azt, hogy hány ütközéssel válik a keletkező neutron termikus neutronná. TAKÁCS LAJOS [1] azt a kérdést vizsgálta, hogy mennyi idő alatt válik a neutron termikussá, NÉMETH GÉZA és a szerző [3] közös dolgozata azt a további problémát tárgyalta, hogy a neutron bizonyos idő alatt hány ütközést végez. E dolgozat a neutronok térbeli mozgásával foglalkozik : a neutron által a lassító közegben a lelassulásig megtett úthossz valószínűségszámítási tárgyalását adja. A tárgyalás megtartja TAKÁCS LAJOS [1] dolgozatának fogalmait és jelöléseit.

1. §. A feladat kitűzése

Tekintsünk egy végtelen kiterjedésű homogén közeget, amely k különböző típusú atommagból áll. Legyen a neutron energiája E és a neki megfelelő letargia $x = \log(E_0/E)$, ahol E_0 a neutron kezdeti energiája. Feltesszük, hogy a neutron a közeg atommagjaival történő ütközések során vagy szóródik, vagy abszorbeálódik. Jelölje az i-edik típusú atommagon történő ütközés sűrűségét $\gamma_i(x)$, a szóródási sűrűséget pedig $\gamma_i^*(x)$; ezek a neutron x letargiájának függvényei. Az ütközés modelljéről, mint az szokásos, feltesszük, hogy izotróp, azaz hogy az i-edik típusú atommagon történő szóródás alkalmával a neutron letargiájának növekedése független az ütközés előtti értéktől és a letargianövekedés eloszlásfüggvénye :

$$H_i(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{ha } x < 0 \\ \dfrac{1-e^{-x}}{1-\alpha_i}\ , & \text{ha } 0 \leqq x \leqq \log(1/\alpha_i) \\ 1\ , & \text{ha } x > \log(1/\alpha_i) \end{cases}$$

ahol $\alpha_i = [(A_i - 1)/(A_i + 1)]^2$ és A_i a lassító közeg i-edik típusú atommagjának tömegszáma. Bevezetjük a $C(x) = \gamma_1(x) + \gamma_2(x) + \ldots + \gamma_k(x)$ és $C^*(x) = \gamma_1^*(x) + \gamma_2^*(x) + \ldots + \gamma_k^*(x)$ rövidítéseket. Legyen η_t a letargia értéke a t időpontban és

$$\tau_x = \inf_{\eta_t > x} t\ .$$

Nyilván az η_t és τ_x mennyiségek valószínűségi változók. Végül legyen r_x a τ_x időpillanat eléréséig az egymásután következő ütközések között megtett egyenes úthosszak összege és A_x azon esemény, hogy a neutron a τ_x időpillanat eléréséig nem abszorbeálódik. r_x nyilván valószínűségi változó. Két egymásután következő ütközés közti egyenes úthossz mint valószínűségi változó exponenciális eloszlást követ, és ha a neutron az x letargiaállapotban volt, akkor az exponenciális eloszlás paramétere $C(x)$. (Lásd : [1].) Szükségünk lesz a továbbiakban a $Q_1(x\,;\,z)$ eloszlásfüggvényre. Ez annak a valószínűsége, hogy a „z" kezdeti letargiaállapottal rendelkező neutron letargiája az első ütközés utáni pillanatban x-nél kisebb és az első ütközés nem vezetett abszorpcióra. Takács Lajos [1] dolgozatában megadta a $Q_1(x\,;\,z)$ függvényt explicit alakban :

$$Q_1(x\,;z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^*(z)\, H_i\,(x-z)}{C(z)}\,.$$

Meg fogjuk határozni a

$$\mathbf{P}\{r_{x;z} < R\;,\quad A_{x;z}\} = F(R, x\,;z) \tag{1}$$

valószínűséget. Ez annak a valószínűségét jelenti, hogy a z kezdeti letargiaállapottal rendelkező neutron az x letargiaállapot eléréséig nem abszorbeálódik és az addig befutott „térbeli törött vonal" hossza R-nél kisebb.

Az (1) valószínűséget R szerinti végtelen sor alakjában fogjuk előállítani.

Nyilván az (1) valószínűséget elég meghatározni $x \geqq z$ esetére. Ugyanis $x < z$ esetén ez a valószínűség 0, mivel a neutronlassítás folyamatában a neutron letargiája növekszik. Ez formuláinkból is kitűnik.

Foglalkozunk még az úthossz momentumainak kiszámításával is.

2. §. Az $F(R,\,x\,;\,z)$ valószínűség vizsgálata

1. tétel. *Az $F(R, x\,;z)$ valószínűség $(0 \leqq z \leqq x,\ R \geqq 0)$ az*

$$\begin{aligned} F(R, x\,;z) &= [1-e^{-C(z)R}] \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^*(z)\,[1-H_i(x-z)]}{C(z)} + \\ &+ \int_z^x \left\{ \int_0^R F(r, x\,;y)\, C(z)\, e^{-C(z)(R-r)}\, dr \right\} d_y Q_1(y\,;z) \end{aligned} \tag{2}$$

egyenletnek tesz eleget. Ennek az egyenletnek egyetlen korlátos megoldása van és ez a megoldás kifejezhető a következő végtelen sor alakban:

$$\sum_{j=1}^{\infty} G_j\,(x\,;z)\, R^j\;, \tag{3}$$

ahol a $G_j(x\,;\,z)$ függvények a

$$G_1(x\,;z) = C(z) \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^*(z)\;[1-H_i(x-z)]}{C(z)} \tag{4}$$

kezdeti függvényből kiindulva sorjában az

$$G_j(x;z) + \frac{j+1}{C(z)} G_{j+1}(x;z) = \sum_{i=1}^{k} \int_z^x G_j(x;y) \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} d_y H_i(y-z) \tag{5}$$

rekurzív képlet segítségével határozhatók meg.

Bizonyítás. Az az esemény, hogy a neutron a z letargiaértékről elindulva az x letargiaérték eléréséig R-nél kisebb utat tesz meg és az x letargiaérték eléréséig nem abszorbeálódik, két egymást kizáró módon jöhet létre: *a)* a neutron a z letargiaértéken R-nél kisebb utat tesz meg és ezen a letargiaszinten történő szóródás alkalmával a letargiája x értéknél nagyobb lesz; *b)* a z letargiaszinten történő szóródáskor a neutron letargiája z és x közé esik és az x letargiaszint eléréséig R-nél kisebb utat tesz meg. Az *a)* alatti esemény valószínűsége:

$$[1-e^{-C(z)R}] \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^*(z)\,[1-H_i(x-z)]}{C(z)} ;$$

ugyanis annak a valószínűségét, hogy a neutron a z letargiaértéken R-nél kisebb utat tesz meg, meg kell szorozni annak a valószínűségével, hogy a neutron a z letargiaértéken szóródik és letargiája a szóródás után x-nél nagyobb lesz. A *b)* esetben a neutron a z letargiaszinten történő első ütközésig $R-r$ hosszúságú utat tesz meg $(0 \leqq r \leqq R)$, ütközéskor a letargiája y lesz $(z \leqq y \leqq x)$ és az y letargiaértékről az x letargiaértékig eljutva r távolságnál rövidebb utat tesz meg. Ennek az összetett eseménynek a valószínűségét összegezve y és r szerint, kapjuk a *b)* alatti esemény valószínűségét. Az *a)* és *b)* alatti események valószínűségeinek összege adja (2)-t.

Osszuk el (2)-ben mindkét oldalt $\exp[-C(z)R]$-rel. Az így kapott kifejezés az R változó szerint deriválható. Ugyanis az $F(R, x; z)$ függvény az R változó szerint egy integrál felső határának a függvénye és így folytonos. Ennélfogva az $F(R, x; z)$ integrálja a felső határ szerint differenciálható. A differenciálást elvégezve majd $C(z) \exp[C(z)R]$-rel osztva, kapjuk a

$$\begin{aligned} F(R,x;z) + \frac{1}{C(z)} \frac{\partial F(R,x;z)}{\partial R} &= \\ = \sum_{i=1}^{k} \int_z^x F(R,x;y) \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} d_y H_i(y-z) &+ \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^*(z)\,[1-H_i(x-z)]}{C(z)} \end{aligned} \tag{6}$$

kifejezést. Nyilvánvaló, hogy (2) minden megoldása megoldása (6)-nak is, hiszen (6) a (2)-ből nyerhető R szerinti deriválással. Fordítva is igaz, hogy (6) minden megoldása, mely az $R=0$ helyen 0 értéket vesz fel, megoldása (2)-nek is. Tehát (2) helyett elegendő (6) olyan megoldásait keresni, melyek az $R=0$ helyen 0 értéket vesznek fel. Ha az egyelőre határozatlan (3) végtelen sort a (6) összefüggésbe behelyettesítjük, együttható összehasonlítás alapján láthatjuk, hogy a (3) végtelen sor kielégíti (6)-ot — ennélfogva (2)-t is, mivel (3) az $R=0$ helyen 0 értéket vesz fel —, hacsak az együtthatókat az (5) rekurzív összefüggés segítségével határozzuk meg. Ugyancsak (6) segítségével látható be az is, hogy a $G_1(x\,;z)$ kezdeti együtthatót a (4) összefüggés adja.

Annak belátásához, hogy a (3) végtelen sor, melynek együtthatóit a (4) és (5) összefüggések határozzák meg, megoldás, be kell még bizonyítani, hogy a (3) sor konvergens is. Ennek belátása nagyon egyszerűen történhetik. Jelölje a $|G_j(x\,;z)|$ felső korlátját M_j. A $C(z)$ ütközési sűrűség, mint a z függvénye, fizikai jelentése folytán korlátos: $C(z)\leq k$ (állandó), azonban ez a korlát függ attól, hogy milyen lassító közegről van szó. Az (5) rekurziós összefüggés szerint tehát:

$$|G_{j+1}(x\,;z)|\leq\frac{2}{j+1}M_j\cdot K\,,$$

azaz

$$M_{j+1}=\frac{2}{j+1}M_j\cdot K\,.$$

Mivel $M_1=K$, amint az a (4) összefüggésből világosan látható, azért $M_j=$ $=(2k)^j/j!$ A (3) végtelen sor ekkor a következő módon becsülhető meg:

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}G_j(x\,;z)R^j\right|\leq\sum_{j=1}^{\infty}\left|G_j(x\,;z)\right|R^j\leq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2K)^j}{j!}R^j=e^{2KR}.$$

A (3) végtelen sor tehát, melynek együtthatóit (4) és (5) határozzák meg, megoldása (6)-nak és így megoldása (2)-nek is.

Bebizonyítjuk most, hogy a (3), (4) és (5) által meghatározott megoldás előállítja az $F(R,\,x\,;z)$ valószínűséget. Azt fogjuk belátni, hogy a (2) illetve a (6) egyenleteknek csak egyetlen korlátos megoldása van és ez megegyezik a (3), (4) és (5) által meghatározott megoldással. Ebből már következik, hogy ez utóbbi megegyezik az $F(R,\,x\,;z)$ valószínűséggel, mert az $F(R,\,x\,;z)$ valószínűség kielégíti a (2), illetőleg a (6) egyenleteket és 0 és 1 közé esik.

Tegyük fel tehát, hogy $G(R,\,x\,;z)$ korlátos megoldása (6)-nak, azaz

$$|G(R,x\,;z)|\leq M$$

Belátjuk, hogy

$$f(R,x\,;z)=\sum_{j=1}^{\infty}G_j(x\,;z)R^j-G(R,x\,;z)\equiv 0$$

Az $f(R,\,x\,;z)$ kielégíti a

$$f(R,x\,;z)+\frac{1}{C(z)}\frac{\partial f(R,x\,;z)}{\partial R}=\sum_{i=1}^{k}\int_z^x f(R,x\,;y)\frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)}d_yH_i(y-z)\tag{7}$$

egyenletet. Fennáll, hogy

$$|f(R,x\,;z)|\leq e^{2KR}+M$$

tetszőleges R, x és z esetén ($z \leqq x$). Ennélfogva (7) alapján

$$\frac{1}{C(z)} \left| \frac{\partial f(R, x ; z)}{\partial R} \right| \leqq 2(e^{2KR} + M) ,$$

azaz

$$\left| \frac{\partial f(R, x ; z)}{\partial R} \right| \leqq 2K(e^{2KR} + M) .$$

Továbbá (7) R szerinti deriválásával kapjuk, hogy

$$\frac{\partial f(R, x ; z)}{\partial R} + \frac{1}{C(z)} \frac{\partial^2 f(R, x ; z)}{\partial R^2} = \sum_{i=1}^{k} \int_z^x \frac{\partial f(R, x ; y)}{\partial R} \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} d_y H_i(y - z)$$

és ebből látható, hogy

$$\left| \frac{\partial^2 f(R, x ; z)}{\partial R^2} \right| \leqq (2K)^2 (e^{2KR} + M) .$$

Általában is igaz, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$\left| \frac{\partial^n f(R, x ; z)}{\partial R^n} \right| \leqq (2\,K)^n (e^{2KR} + M) ,$$

tetszőleges véges R, x és z esetén ($x \geqq z$). Ez utóbbi összefüggést (7) szukcesszív deriválásával kaphatjuk meg. Ennélfogva tetszőleges $[0, R]$ korlátos intervallumban az $f(R, x ; z)$ függvény végtelen Taylor-sorának maradéktagja felülről megbecsülhető:

$$\left| \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(\vartheta R, x ; z)}{\partial R^n} \cdot R^n \right| \leqq \frac{(2KR)^n}{n!} (e^{2KR} + M) .$$

A jobboldal rögzített R mellett tart a zérushoz, ha n tart a végtelenhez. Tehát az $f(R, x ; z)$ függvény R változó szerinti $R = 0$ pont körüli végtelen Taylor-sora előállítja az $f(R, x ; z)$ függvényt. Ámde ez a végtelen Taylor-sor azonosan 0. Ugyanis $f(0, x ; z) = 0$ és így (7) alapján látható, hogy

$$\left. \frac{\partial f(R, x ; z)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0$$

továbbá (7) szukcesszív deriválásával belátható, hogy az $f(R, x ; z)$ függvény akárhányadik deriváltja az $R = 0$ helyen 0 értéket vesz fel. Valóban beláttuk tehát, hogy

$$f(R, x ; z) \equiv 0 ,$$

vagyis igaz az, hogy

$$G(R, x ; z) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x ; z) R^j ,$$

tehát az (1) valószínűségre a következő előállítás érvényes:

$$F(R, z ; z) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x ; z) R^j .$$

A fentebbi meggondolással azt is ki lehet mutatni, hogy a (6) egyenletnek csak egyetlen olyan megoldása van, amelynek abszolút értéke korlátos, de ez a korlát függhet még R-től is.

Példa. Tekintsük azt a speciális esetet, mikor a lassító közeg hidrogénből áll, és $C(z) \equiv C$ (állandó), $C^*(z) \equiv C^*$ (állandó). Ebben az esetben bármilyen értéket vesz fel a neutron letargiája, ezen a letargiaértéken befutott út hossza exponenciális eloszlású ugyanazzal a C paraméterrel, azaz két ütközés között befutott út hosszának eloszlása nem függ a neutron letargiájának pillanatnyi értékétől. Ezek szerint annak a valószínűsége, hogy a neutron a z és x letargiaszintek között R-nél kisebb utat tesz meg, csak az $x - z$ különbségtől függ, azaz $F(R, x\,; z) = F(R, x - z)$ vagyis, ha $x - z = t$, akkor $F(R, x\,; z) = F(R, t)$. A (2) egyenlet ebben a speciális esetben a következő egyszerű alakot ölti:

$$F(R,t)=\varrho(1-e^{-CR})e^{-t}+\int_0^t\left\{\int_0^R F(r,t-u)\,Ce^{-C(R-r)}\,dr\right\}\varrho\, e^{-u}\,du\,, \tag{8}$$

ahol $\varrho = C^*/C$ és, hidrogén lassítóközegről lévén szó, a $H(x)$ eloszlásfüggvény itt megegyezik az 1 paraméterű exponenciális eloszlással. Ennek az egyenletnek megoldását a Laplace—Stieltjes transzformáció segítségével is megkaphatnánk. Azonban az általános eredmények illusztrálása céljából ugyanúgy járunk el, mint fentebb, és a megoldást végtelen sor alakban állítjuk elő, majd pedig ezt a végtelen sort zárt alakra hozzuk. (4) alapján látható, hogy

$$G_1(t) = \varrho\, Ce^{-t}\,,$$

továbbá az (5) rekurziós formula segítségével teljes indukcióval belátható, hogy tetszőleges j index esetén

$$G_j(t) = \sum_{n=1}^{j} \frac{(-1)^{j-n}\varrho^n C^j}{(n-1)!\,(j-n)!\,j}\,[\Gamma(n-1,t)-\Gamma(n,t)]\,,$$

ahol $\Gamma(n, t)$ az n-edrendű nem teljes Γ-függvény:

$$\Gamma(n,t) = \frac{\int_0^t u^{n-1}e^{-u}\,du}{(n-1)!}\,.$$

Tehát az $F(R, t)$ valószínűség végtelen sor-alakja:

$$F(R,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{j} \frac{(-1)^{j-n}\varrho^n C^j}{(n-1)!\,(j-n)!\,j}\,[\Gamma(n-1,t)-\Gamma(n,t)]\right)R^j\,.$$

Adjuk meg ezt a végtelen sort zárt alakban! Mivel a sor konvergens az egész $[0, \infty)$ intervallumban, azért szabad tagonként deriválni. Deriválás után kapjuk, hogy

$$\frac{\partial F(R,t)}{\partial R} = \sum_{j=1}^{\infty} R^{j-1}\left(\sum_{n=1}^{j} \frac{(-1)^{j-n}\varrho^n C^j}{(n-1)!\,(j-n)!}\,[\Gamma(n-1,t)-\Gamma(n,t)]\right).$$

Az összegezés sorrendjét a jobboldalon megváltoztatva nyerjük, hogy

$$\frac{\partial F(R,t)}{\partial R} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n [\Gamma(n-1,t) - \Gamma(n,t)] R^{n-1} C^n}{(n-1)!} e^{-CR} .$$

Az összegezés sorrendjének megváltoztatása azért lehetséges, mert ez utóbbi sor abszolút konvergens. Ebből, figyelembe véve, hogy

$$\Gamma(n-1,t) - \Gamma(n,t) = \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} ,$$

kapjuk az $F(R, t)$ valószínűség R szerinti deriváltját:

$$\frac{\partial F(R,t)}{\partial R} = \varrho C e^{-t} e^{-CR} I_0\left(2(\varrho C R t)^{1/2}\right) , \tag{9}$$

ahol $I_0(t)$ a nulladrendű módosított Bessel-függvény:

$$I_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}t\right)^{2n}}{(n!)^2} .$$

Figyelembe véve, hogy $F(R, t)$ az $R = 0$ helyen 0 értéket vesz fel, (9) integrálásával megkapjuk (8) megoldását:

$$F(R,t) = \varrho C e^{-t} \int_0^R e^{-Cu} I_0\left(2(\varrho C u t)^{1/2}\right) du . \tag{10}$$

A továbbiakban szükségünk lesz még az $F(R, t)$ függvény R szerinti Laplace—Stieltjes transzformáltjára. (10) segítségével könnyen megkapható az $F(R, t)$ valószínűség R szerinti $\psi(s, t)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja:

$$\psi(s,t) = \frac{\varrho C}{s+C} e^{-\left(1 - \frac{\varrho C}{s+C}\right)t} .$$

A Laplace—Stieltjes transzformált ismerete alapján az $F(R, t)$ függvény $R = \infty$ helyen vett értékét könnyen meghatározhatjuk, ugyanis $\psi(0, t) = F(\infty, t)$, mivel $F(0, t) = 0$. Tehát

$$\psi(0,t) = F(\infty,t) = \mathbf{P}\{A_t\} = \varrho e^{-(1-\varrho)t} .$$

Ezt az eredményt Takács Lajos [1] dolgozatában is megtalálhatjuk, bár ő más úton jutott el hozzá.

3. §. A törött vonal hosszának feltételes várható értéke az x letargiaérték eléréséig

A továbbiakban szükségünk lesz Takács Lajos [1] dolgozatának néhány fogalmára és jelölésére. Legyen $Q_n(x)$ annak a valószínűsége, hogy a neutron az n-edik ütközés utáni pillanatban x-nél kisebb letargiaállapotban van és az első n ütközés nem vezetett abszorpcióra. A $Q_n(x)$ valószínűségek a következő rekurzív képlet segítségével határozhatók meg:

$$Q_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

és $n = 1, 2, \ldots$ esetén

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{k} \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y) H_i(x-y)}{C(y)} dQ_{n-1}(y) .$$

Legyen továbbá

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) .$$

Hasonlóképpen definiáljuk a $Q_n(x\,;z)$ függvényt is:

$$Q_0(x\,;z) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \geq z \\ 0, & \text{ha} \quad x < z \end{cases}$$

és

$$Q_n(x\,;z) = \sum_{i=1}^{k} \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y) H_i(x-y)}{C(y)} d_y Q_{n-1}(y\,;z) , \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

A $Q_n(x\,;z)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy a z letargiaértékről elinduló neutron a z letargiaértéktől számított n-edik ütközés utáni pillanatban x-nél kisebb letargiaállapotban van és ez az n ütközés nem vezetett abszorpcióra. Itt a fentebbieknek megfelelően:

$$M(x\,;z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x\,;z) .$$

Nyilván $M(x\,;0) = M(x)$.

2. tétel. *A törött vonal hosszának várható értéke azon feltétel mellett, hogy a z letargiaértékről elinduló neutron az x letargiaérték eléréséig nem abszorbeálódik, a következő:*

$$\mathbf{M}\{r_{x;z} \mid A_{x;z}\} = \frac{1}{\mathbf{P}\{A_{x;z}\}} \int_z^x \left\{1 - \int_y^x \left[1 - \frac{C^*(u)}{C(u)}\right] d_u M(u\,;y)\right\} \frac{1}{C(y)}\, d_y M(y\,;z) .$$

Bizonyítás. A várható érték összetevődik azoknak az utaknak a várható értékéből, amelyeket a neutron a különböző y letargiájú állapotokban befut ($z \leq y \leq x$). Ha a neutron a szóródásra vezető ütközés által az y letargiájú állapotba jut, akkor az y letargiájú állapotban befutott út várható értéke $1/C(y)$. Ez az út azonban csak akkor veendő figyelembe $r_{x;z}$ várható értékének meghatározásánál, ha a neutron az x letargiaérték eléréséig nem abszorbeálódik; ennek a valószínűsége:

$$1 - \int_y^x \left[1 - \frac{C^*(u)}{C(u)}\right] d_u M(u\,;y) .$$

Ez utóbbi valószínűséget TAKÁCS LAJOS [1] dolgozatában adta meg.

Hasonló módon fel lehetne írni az r_x; törött vonal hosszának magasabbrendű momentumait is, azonban ezek igen bonyolultak lennének.

Példa. Tekintsük ismét azt a speciális esetet, mikor $C^*(x) \equiv C^*$ és $C(x) \equiv C$ (állandók), továbbá a hidrogén lassító közeg esetéről van szó. Mint előbb már láttuk, ebben a speciális esetben az út hosszának eloszlását megadó valószínűség, amíg a neutron a z letargiaállapotból az x letargiaállapotba eljut, a letargiától csak az $x - z$ különbségen keresztül függ. Ebből következik, hogy a feltételes várható érték is csak a letargiakülönbségtől függ. Tehát ha $x - z = t$, akkor e speciális esetben a feltételes várható értékre adott képlet a következő alakot ölti:

$$\mathbf{M}\{r_t \mid A_t\} = \frac{1}{\mathbf{P}\{A_t\}} \int_0^t \left\{1 - \int_y^x \left[1 - \frac{C^*}{C}\right] d_u M(u\,;y) \frac{1}{C}\, dM(y)\right. .$$

Láttuk az előző paragrafusban, hogy

$$\mathbf{P}\{A_t\} = \varrho\, e^{-(1-\varrho)t} ,$$

ahol $\varrho = C^*/C$. Továbbá az [1] dolgozatban foglaltak szerint:

$$M(x) = 1 + \frac{\varrho}{1-\varrho}\left(1 - e^{-(1-\varrho)x}\right) \quad \text{és} \quad M(x\,;y) = M(x-y) .$$

Ekkor a várható értékre fent adott képlet segítségével egyszerű számításokkal adódik, hogy

$$\mathbf{M}\{r_t \mid A_t\} = \frac{1}{C} + \frac{\varrho t}{C} .$$

Ezt az eredményt és az összes többi magasabbrendű momentumokat megkaphatjuk más úton is, az $F(R,\ t)$ valószínűség $\psi(s,\ t)$ Laplace—Stieltjes transzformáltjának ismerete alapján. Ismeretes, hogy az $F(R,\ t)$ R változó szerinti n-edik momentumát megkaphatjuk, ha vesszük az R változó szerinti Laplace—Stieltjes transzformáltjának n-edik deriváltját az $s = 0$ helyen $(-1)^n$ előjellel. Az n-edik derivált értékét az $s = 0$ helyen könnyen megkaphatjuk, ha a

$$\psi(s, t) = \frac{\varrho C}{s + C}\, e^{-\left(1 - \frac{\varrho C}{s+C}\right)t}$$

kifejezést az s változó szerint sorbafejtjük. Az s^n együtthatójának $(-1)^n n!$-szorosa szolgáltatja a derivált értékét az $s = 0$ helyen.

Exponenciális és binomiális sorfejtés segítségével könnyen belátható, hogy

$$\frac{\varrho C}{s + C}\, e^{-\left(1 - \frac{\varrho C}{s+C}\right)t} = \varrho\, e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varrho t)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{k+n}{n} \left(\frac{s}{C}\right)^n .$$

Ez a sorfejtés biztosan érvényes az $|s| < C$ körben. Ennélfogva az s^n együtthatója

$$\varrho\, e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varrho t)^k}{k!} (-1)^n \binom{k+n}{n} \frac{1}{C^n} .$$

Ennek $(-1)^n n!$-szorosa, azaz az n-edik momentum:

$$\frac{\varrho e^{-t}}{C^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\varrho t)^k (k+1)(k+2) \ldots (k+n) .$$

Ez még a következő alakban is írható:

$$\frac{\varrho e^{-t}}{C^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^n (\varrho t)^{k+n}}{d(\varrho t)^n} = \frac{\varrho e^{-t}}{C^n} \frac{d^n}{d(\varrho t)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varrho t)^{k+n}}{k!} ,$$

illetőleg

$$\frac{\varrho e^{-t}}{C^n} \left[\frac{d^n}{d x^n} (x^n e^x) \right]_{x=\varrho t} .$$

Ennélfogva a törött vonal hosszának n-edik feltételes momentuma az A_t feltétel mellett

$$\frac{1}{\varrho e^{-(1-\varrho)t}} \frac{\varrho e^{-t}}{C^n} \left[\frac{d^n}{d x^n} (x^n e^x) \right]_{x=\varrho t} .$$

Meg kell jegyeznünk, hogy az n-edik feltételes momentum az A_t feltétel mellett kifejezhető az n-edik Laguerre-polinom segítségével. Ugyanis

$$\left[\frac{d^n}{d x^n} (x^n e^x) \right]_{x=\varrho t} = \left[\frac{d^n}{d x^n} (x^n e^{-x}) \right]_{x=-\varrho t} .$$

Ámde

$$\left[\frac{d^n}{d x^n} (x^n e^{-x}) \right] = e^{-x} L_n(x) ,$$

ahol $L_n(x)$ az n-edik Laguerre-polinom. Ennélfogva

$$\left[\frac{d^n}{d x^n} (x^n e^x) \right]_{x=\varrho t} = \left[\frac{d^n}{d x^n} (x^n e^{-x}) \right]_{x=-\varrho t} = e^{\varrho t} L_n(-\varrho t) ,$$

így az n-edik feltételes momentum az A_t feltétel mellett:

$$\frac{L_n(-\varrho t)}{C^n} .$$

Speciálisan az első momentum, mint azt már láttuk:

$$\frac{1}{C} + \frac{\varrho t}{C} .$$

Az első momentumra kapott eredmény igen kézenfekvő. Az $(1+\varrho t)/C$ összegben a második tagban t nemcsak a letargiát jelenti, hanem azt is, hogy átlagosan hány ütközés történik. Az ütközések átlagos számát, mint a [4] könyvben is, úgy számítjuk ki, hogy a letargia-megváltozást osztjuk az egy ütközésre eső átlagos letargianövekedéssel. Hidrogén esetében az átlagos letargianövekedés 1, ennélfogva t valóban az ütközések átlagos számát adja meg, míg a neutron az ütközések során t letargiamegváltozást szenved. t ütközés alatt megtett átlagos úthosszat úgy kapjuk meg, hogy az egy ütközésre eső átlagos úthosszat, az $1/C$-t, megszorozzuk az ütközések számával. A ϱ tényező azon neutronok részarányát adja meg, melyek az ütközések során nem abszorbeálódnak. — Az első momentum kifejezésében az $1/C$ tag szerepét az világítja meg, hogy, ha $t = 0$, azaz a letargiamegváltozás 0, akkor is a neutron átlagos úthossza azon a letargiaértéken, amelyről elindult, éppen $1/C$-vel egyenlő.

A második momentum a következő:

$$\frac{1}{C^2}[2 + 4\varrho t + \varrho^2 t^2] \, .$$

Ennélfogva a feltételes szórás:

$$\frac{1}{C^2}[1 + 2\varrho t] \, .$$

Látható, hogy a szórás a letargianövekedésnek lineáris függvénye.

(Beérkezett: 1957. V. 1. Átdolgozva: 1958. VIII. 1.)

IRODALOM

[1] Takács L.: „Atommagreaktorok elméletével kapcsolatos néhány valószínűségszámítási problémáról". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 55—56.

[2] Pál L.: „A neutronok lelassításának néhány kérdéséről". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 41—54.

[3] Mogyoródi J.—Németh G.: „Atommagreaktorokban végbemenő neutronlassításfolyamattal kapcsolatos valószínűségszámítási problémákról". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 335—348.

[4] Glasstone, S.—Edlund, M. S.: *The elements of nuclear reactor theory.* Van Nostrand, New York, 1952.

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДВИЖЕНИЯ НЕЙТРОНОВ В АТОМНЫХ РЕАКТОРАХ

J. MOGYORÓDI

Резюме

Настоящая работа занимается с одной проблемой движения нейтронов в атомных реакторах. Исследуется распределение длины пути, пробеганного нейтроном в замедляющей среде атомного реактора в процессе замедления.

Математическая модель проблемы следующая: предположим, что замедляющая среда бесконечна и однородна. Пусть эта среда состоит из атомных ядер k различных типов. Рассмотрим нейтрон, обладающий в момент времени $t = 0$ (фиксированной) начальной энергией E_0 и в момент времени t соответственно E. В процессе замедления нейтрон столкнется с

атомными ядрами замедляющей среды и потеряет случайно некоторую долю энергии. Следовательно, летаргия x нейтрона, определенная равенством:

$$x = \log(E_0/E) \ ,$$

случайно возрастает при каждом столкновении. Предположим, что рассеяние нейтрона изотропно. Это значит, что увеличение летаргии в случае рассеяния не зависит от её значения до столкновения. Пусть $\gamma_i(x)$ и $\gamma_i^*(x)$ обозначают соответственно плотность столкновения и плотность рассеяния, происходящих на ядрах i-ого типа. Пусть далее $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_k$, $C^* = \gamma_1^* + \ldots + \gamma_k^*$, где эти величины вообще говоря зависят от летаргии нейтрона.

Пусть $F(R, x ; z)$ вероятность того, что длина пути, пробеганного нейтроном в замедляющей среде, меньше, чем R, в то время, как его летаргия возрастает от значения z до значения x и нейтрон до достижения летаргии x не поглощается (последнее событие: $A_{x;z}$).

Автор показал на основе вышеупомянутой математической модели, что вероятность $F(R, x ; z)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$F(R, x ; z) = [1 - e^{-C(z)R}] \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^*(z)\,[1 - H_i(x - z)]}{C(z)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \int_z^x \{F(r, x ; y)\, C(z)\, e^{-C(z)(R-r)}\, d\, r\} \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} d_y H_i(y - z) \ .$$

Здесь функция $H_i(x)$ — функция распределения увеличения нейтрона при одном столкновении. Ему удалось дать эту вероятность в форме степенного ряда:

$$F(R, x ; z) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x ; z)\, R^j \tag{3}$$

Коэффициенты степенного ряда (3) выражаются рекурсивной формулой

$$G_j(x ; z) + \frac{j+1}{C(z)} G_{j+1}(x ; z) = \sum_{i=1}^{k} \int_z^x G_j(x ; y) \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} d_y H_i(y - z) \ ,$$

и начальным коэффициентом:

$$G_1(x ; z) = C(z) \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^*(z)\,[1 - H_i(x - z)]}{C(z)} \ ,$$

Автор определил условное математическое ожидание длины пути нейтрона при условии $A_{x;z}$.

В специальном случае даны конечный вид вероятности $F(R, x ; z)$ и условных моментов пути нейтрона.

PROBABILISTIC TREATMENT OF THE MOTION OF NEUTRONS IN NUCLEAR REACTORS

by

J. MOGYORÓDI

Abstract

This paper deals with a problem of the motion of the neutrons in nuclear reactors ; it investigates the distribution of the path-length of the neutron in the slowing-down medium of the nuclear reactor.

The mathematical model of the problem is as follows : we suppose that the slowing-down medium is infinite and homogeneous. Let this medium consist of atomic nuclei of k different types. Let us consider a neutron having a (fixed) initial energy E_0 at the moment $t = 0$ and E at the moment t, respectively. The neutron collides in the slowing-down process with the nuclei of the slowing-down medium and it loses a certain part of his energy. Consequently the lethargy x of the neutron, defined by the following relation :

$$x = \log (E_0/E) \ ,$$

increases at random at every collision. We suppose that the scattering of the neutron is isotropic, that is the collisions are such that in case of scattering the increase of the lethargy of the neutron is independent of its value before the collision. Let $H_i(x)$ be the distribution function of the increase of the lethargy at the scattering on a nucleus of type i. Let $\gamma_i(x)$ and $\gamma_i^*(x)$ denote the collision density and the scattering density of the neutron, respectively on a nucleus of type i. Put $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_k$, $C^* = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \ldots + \gamma_k^*$; these quantities generally depend on the lethargy of the neutron.

Let $F(R, x\,; z)$ denote the probability that the path-length of the neutron in the slowing-down medium is less than R, while its lethargy increases from the value z to the value x and during this time the neutron will be not absorbed (event $A_{x;z}$).

On the basis of this mathematical model, the author proved that the probability $F(R, x\,; z)$ satisfies the following integral equation :

$$F(R, x\,; z) = [1 - e^{-C(z)R}] \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^*(z)\,[1 - H_i(x-z]}{C(z)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \int_z^x \left\{ \int_0^R F(r, x\,; y)\, C(z)\, e^{-C(z)(R-r)}\, dr \right\} \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)}\, d_y H_i(y-z) \ .$$

He has succeeded in giving this probability in form of an infinite power series in R :

(3) $$F(R, x\,; z) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x\,; z)\, R^j \ .$$

The coefficients of (3) may be obtained by the recursive formula:

$$G_j(x\,;z) + \frac{j+1}{C(z)}\,G_{j+1}(x\,;z) = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{z}^{x} G_j(x\,;y)\,\frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)}\,d_y H_i(y-z)\ ,$$

from the initial coefficient:

$$G_1(x\,;z) = C(z) \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^*(z)\,[1 - H_i(x-z)]}{C(z)}\ .$$

Author determined the conditional expectation of the path-length of the neutron under the condition $A_{x;z}$. Under simplified suppositions the probability (3) and the conditional expectation are given explicitely.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET SZEMINÁRIUMAIBAN 1958-BAN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK KIVONATAI

A matrixelméleti osztály szemináriuma

1. TASSI GÉZA :[1] *A matrixelmélet alkalmazása rugalmas-plasztikus állapotú sztatikailag határozatlan rúdszerkezetek számítására.* (Május 29.)

Lásd az előadónak RÓZSA PÁLlal közösen írt hasonló című dolgozatát e *Közlemények* jelen évfolyamának 43—65. oldalain.

2. RÓZSA PÁL : *A lineáris programozás matrixelméleti megalapozásáról.*[2] (Június 17.)

A lineáris egyenletrendszerek megoldásának problémája matrixelméleti szempontból abban áll, hogy az adott egyenletrendszert egy vele ekvivalens olyan egyenletrendszerré alakítsuk át, amelynek együtthatómátrixa Hermite-féle normál alakú mátrix, más szóval olyan kvadratikus mátrix, amelynek fődiagonálisában minden elem 1 vagy 0 ; ahol 1 áll, ott ennek a sorában valamennyi többi elem 0 ; ahol 0 áll, ott ennek a sorában valamennyi többi elem 1.) Az Hermite-féle normál-alakú együtthatómatrixszal bíró egyenletrendszer tehát automatikusan szétválasztja az ismeretleneket ,,szabad'' és ,,kötött'' ismeretlenekre.

Megadható egy egyszerű algoritmus, amelynek segítségével az Hermite-féle normál-alakú mátrix egy olyan másik, ugyancsak Hermite-féle normál-alakú mátrixra transzformálható, hogy az 1-esek a fődiagonálisnak más helyén álljanak, tehát mások legyenek az egyenletrendszer szabad, illetve kötött ismeretlenei.

A lineáris programozás alapfeladata tudvalevően egy lineáris egyenlőtlenségrendszer olyan nem-negatív megoldásainak a meghatározása, amelyek bizonyos lineáris függvényt maximalizálnak (illetve minimalizálnak). Ha az egyenlőtlenségrendszert újabb ismeretlenek bevezetésével egyenletrendszerré alakítjuk át, Hermite-féle normálalakú együtthatómatrixszal bíró egyenletrendszert nyerünk, amelynek az adott feltételeket kielégítő megoldásához az említett algoritmusnak megfelelő alkalmazásával jutunk. Ezzel tulajdonképpen a DANTZIG nevéhez fűződő úgynevezett szimplex-módszernek tisztán matrixelméleti interpretációját nyerjük.

A valószínűségszámítási osztály szemináriuma

1—3. RÉNYI ALFRÉD : *Keverő halmazsorozatokról.* (Január 9. 16., és február 5.)

Lásd a következő dolgozatokat : RÉNYI A., ,,On mixing sequences of sets'' (Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 9 (1958) 215—

[1] Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem, II. sz. Hídépítéstani tanszék.
[2] A ''matematika közgazdasági alkalmazásai'' szemináriummal közös rendezésben.

228); RÉNYI A.—RÉVÉSZ P., „On mixing sequences of random variables" (Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 9 (1958), sajtó alatt).

4. TAKÁCS LAJOS: *Beszámoló előadás angliai tanulmányútjáról.* (Február 13.)

5. RÉVÉSZ PÁL:[3] *A Borel—Cantelli lemma egy általánosítása és ennek alkalmazása a Markov-láncok elméletében.* (Február 20.)

Az előadó a Borel—Cantelli lemma alábbi általánosításait bizonyította be.

1. lemma. *Legyen* (Ω, S, P) *valószínűségi mező,* $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ *események egy sorozata,* $\xi_n(\omega)$ *az* A_n *esemény indikátor változója, azaz*

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \omega \in A_n \\ 0, & \text{ha} \quad \omega \in \overline{A}_n . \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *sorozat Markov-láncot alkot és*

$$\mathbf{P}\{\xi_{n+1} = i \mid \xi_n = j\} = p_{ij}^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots; \; i, j = 0, 1),$$

továbbá, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{01}^{(n)} = \infty . \tag{1}$$

Ekkor az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be.*

Abban az esetben, ha az A_n események függetlenek,

$$p_{01}^{(n)} = \mathbf{P}\{A_n\}$$

s így, speciális esetként megkapjuk a BOREL—CANTELLI-lemmát.

Bizonyítás. Legyen B_n az az esemény, hogy az $A_N, A_{N+1}, A_{N+2}, \ldots$ események közül egy sem következik be, azaz

$$B_N = \overline{A}_N \overline{A}_{N+1} \ldots$$

és legyen

$$B_N^{(k)} = \overline{A}_N \overline{A}_{N+1} \ldots \overline{A}_{N+k} .$$

Nyilván $\lim\limits_{k \to \infty} B_N^{(k)} = B_N$, ezért elegendő bebizonyítani, hogy

$$\mathbf{P}\{B_N\} = \lim_{k \to \infty} \mathbf{P}\{B_N^{(k)}\} = 0 . \tag{2}$$

Kihasználva azt a feltételt, hogy a $\{\xi_n\}$ változók Markov-láncot alkotnak, adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{B_N^{(k)}\} &= \mathbf{P}\{\overline{A}_N \overline{A}_{N+1} \ldots \overline{A}_{N+k}\} = \\ &= \mathbf{P}\{\overline{A}_{N+k} \mid \overline{A}_{N+k-1}\} \mathbf{P}\{\overline{A}_{N+k-1} \mid \overline{A}_{N+k-2}\} \ldots \mathbf{P}\{\overline{A}_{N+1} \mid \overline{A}_N\} P(\overline{A}_N) \leqq \\ &\leqq \mathbf{P}\{\overline{A}_N\} (1 - p_{01}^{(N)}) (1 - p_{01}^{(N+1)}) \ldots (1 - p_{01}^{(N+k-1)}) . \end{aligned}$$

Ebből az (1) feltétel alkalmazásával adódik (2).

Hasonló módon bizonyítható a következő

[3] Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet.

2. lemma. *Legyen* $\xi_0, \xi_1, \ldots$ *véges állapotú Markov-lánc, legyen*

$$\mathsf{P}\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\} = p_{ij}^{(n)}$$

és

$$\min_{i,j} p_{ij}^{(n)} = p_n .$$

Tegyük fel, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty .$$

Ekkor a $\{\xi_n\}$ *Markov-lánc minden állapotba* 1 *valószínűséggel végtelen sokszor kerül, bármilyen is legyen* ξ_0 *eloszlása. Más szóval: ha a* $\xi_n = j$ *eseményt* C_{nj}-vel *jelöljük, akkor*

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} C_{nj}\right\} = 1 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

A 2. lemma segítségével diszkrét Markov-láncok ergodicitására vonatkozólag az alábbi dolgozatban szereplőhöz hasonló feltétel nyerhető: KOLMOGOROV, A. N., „Über die analytischen Methoden in den Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Mathematische Annalen **104** (1931) 415—458).

6. PALÁSTI ILONA: *Beszámoló előadás angliai tanulmányútjáról.* (Február 27.)

7. VINCZE ISTVZN: *Egy határeloszlástétel heurisztikus bizonyítása.* (Március 6.)

Az előadó J. L. DOOB által adott heurisztikus módszerrel bebizonyított egy a rendezett minták elméletében szerepet játszó kétváltozós határeloszlástételt.

8—9. ROTH—ROSENBLATT, MILLU:[4] *Az információelmélet egyes kérdéseiről.* (Március 27., április 3.)

10—11. MOGYORÓDI JÓZSEF: *Neutronok atommagreaktorokban való mozgásának valószínűségszámítási problémái.* (Április 10. és 17.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát e *Közlemények* 3 (1958) kötetének 237—250. oldalain.

12—13. RÉNYI ALFRÉD: *Referáló előadás.* (Április 24., május 15.)

Az előadó a következő könyvet ismertette: FISHER, R. A., „Statistical methods and scientific inference" (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956).

14. FÉNYES IMRE:[5] *A termodinamikai Gibbs-paradoxon információelméleti feloldása.* (Május 8.)

(Az előadó hasonló című dolgozata e *Közleményekben* van sajtó alatt).

15. CSÁKI ENDRE: *A Wilcoxon-próba Lehmann és Rényi-féle módosításainak összefüggése.* (Május 22.)

E. L. LEHMANN a WILCOXON-statisztika helyett a következő módosított statisztikát ajánlja (lásd: LEHMANN, E. L. „Consistency and unbiasedness of

---

[4] Bukaresti Parhon Egyetem, Matematikai Intézet.

[5] Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Intézet.

certain nonparametric tests" című dolgozatát, Annals of Mathematical Statistics 22 (1951) 165—179) :

$$L = \frac{V}{\binom{n}{2}\binom{m}{2}},$$

ahol V a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ mintából kiválasztható $(\xi_h, \xi_i, \eta_j, \eta_k)$ negyedosztályú kombinációk közül azoknak a száma, melyekre vagy

$$\max(\xi_h, \xi_i) < \min(\eta_j, \eta_k)$$

vagy

$$\max(\eta_j, \eta_k) < \min(\xi_h, \xi_i) .$$

Rényi a következő módosítást ajánlja (lásd : Rényi A., „Újabb kritériumok két minta összehasonlítására", A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 2 (1953) 243—265) :

$$W = \frac{W_1}{n\binom{m}{2}} + \frac{W_2}{m\binom{n}{2}} .$$

Itt W_1 a fenti mintából kiválasztott (ξ_i, η_j, η_k) alakú harmadosztályú kombinációk közül azoknak a száma, melyekre $\max(\eta_j, \eta_k) < \xi_i$, W_2 pedig azon (ξ_n, ξ_i, η_j) alakú kombinációk száma, melyekre $\max(\xi_n, \xi_i) < \eta_j$.

Az előadó bebizonyította, hogy e két statisztika között egyszerű összefüggés áll fenn, mégpedig

$$L = 2W - 1 .$$

16. Pergel József : *A Kolmogorov-féle alaptétel kiterjesztése feltételes valószínűségi mezőkre.* (Június 5.)

(Az előadó hasonló című dolgozata e *Közleményekben* van sajtó alatt.)

17. Rényi Alfréd : *Referáló előadás.* (Június 12.)

Az előadó a következő cikkgyűjteményt ismertette : „Symposium on Monte Carlo methods" (Wiley, New York, 1956).

18. Lipták Tamás : *Pontok körön való eloszlásának diszkrepanciája és ennek visszavezetése egy rendstatisztikai problémára.* (Június 19.)

Tekintsünk n pontot egy egységsugarú körön. *Diszkrepanciá*nak nevezik ezek helyzetének alábbi jellemzőjét :

$$d_n = \max_{\widehat{AB}} \left| n_{\widehat{AB}} - \frac{\widehat{AB}}{2\pi} n \right| \tag{1}$$

ahol $n_{\widehat{AB}}$ jelenti az $\widehat{AB}$ íven fekvő pontok számát.

Azt a kérdést, hogyan viselkedik d_n, amint $n \to \infty$, az előadó az alábbi rendstatisztikai problémára vezette vissza : Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ egy folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változóra vonatkozó független megfigyelések értékei, s legyen

$$F_n(x) = \sum_{\substack{\xi_i < x \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{1}{n} \tag{2}$$

az első n megfigyelésből álló minta empirikus eloszlásfüggvénye. Értelmezzük a

(3) $$D_n^+ = \max_{-\infty<x<+\infty} \left(F_n(x) - F(x)\right)$$

(4) $$D_n^- = \max_{-\infty<x<+\infty} \left(F(x) - F_n(x)\right)$$

és

(5) $$R_n = D_n^+ + D_n^-$$

valószínűségi változókat. Amennyiben valamennyi pont egyenletes eloszlású a körön és elhelyezkedésük független, d_n eloszlása megegyezik R_n eloszlásával ($n = 1, 2, \ldots, n$). Ez utóbbi eloszlása mindezideig nincs meghatározva.

19. BARTOSZYNSKI, R.:[6] *Some remarks on the convergence of stochastic processes.* (Október 9.)

1°. Introduction. Let R be a separable complete metric space. Denote by $M(R)$ the space of all perfect and complete (see [1]) measures defined on R. The sequence $\mu_n \in M(R)$ will be called weakly convergent to $\mu \in M(R)$ if for any bounded and continuous function $f(x)$, $x \in R$

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f(x)\, d\mu_n = \int_R f(x)\, d\mu\,.$$

We shall denote the weak convergence by $\Rightarrow$. It is possible (see [2]) to introduce a metric L in the space $M(R)$, so that $M(R)$ becomes a separable complete space, and the conditions $L(\mu_n, \mu) \to 0$ and $\mu_n \Rightarrow \mu$ are equivalent.

Let $D\,[0,1]$ be the space of all real functions $\xi(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ such that $\xi(t-0)$ and $\xi(t+0)$ exists in each point $0 < t < 1$, the limits $\xi(0+0)$ and $\xi(1-0)$ exist, and either $\xi(t) = \xi(t-0)$ or $\xi(t) = \xi(t+0)$ in each point $t \in [0,1]$. It is possible (see [2]) to introduce a metric d in the space $D\,[0,1]$ in such a way, that $D\,[0,1]$ becomes a separable complete metric space, and for the subspace $C\,[0,1]$ the d-convergence is equivalent to the uniform one.

2°. Let $\xi_n(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ be the sequence of stochastic processes with realizations (with probability one) from the space $D\,[0,1]$ and let $\xi(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ be a stochastic process without fixed points of discontinuity. Let μ_n and μ be respectively the measures in the space $D\,[0,1]$ generated by all finite dimensional distributions of the processes $\xi_n(t)$ and $\xi(t)$. Let further $\mu_n^{t_1,\ldots,t_m}$ and $\mu^{t_1,\ldots,t_m}$ be the measures in the m-dimensional Euclidean space R_m corresponding respectively to distribution functions

$$\mathsf{P}\{\xi_n(t_1) < x_1, \ldots, \xi_n(t_m) < x_m\} \text{ and } \mathsf{P}\{\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_m) < x_m\}\,.$$

As a metric in the space R_m take

$$\varrho(x, y) = \max_{1\leq k\leq m} |z_k - y_k|\,,$$

and let L denote the distance between measures mentioned in *Introduction*. Then the following two theorems are true:

[6] A Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Intézete, Varsó.

Theorem 1. *If* $\mu_n \Rightarrow \mu$, *then for any* m

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t_1,\ldots,t_m} L(\mu_n^{t_1,\ldots,t_m}, \mu^{t_1,\ldots,t_m}) = 0 \ . \tag{1}$$

Theorem 2. *If*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m} \sup_{t_1,\ldots,t_m} L(\mu_n^{t_1,\ldots,t_m}, \mu^{t_1\ldots,t_m}) = 0 \ , \tag{2}$$

then $\mu_n \Rightarrow \mu$.

The open question is, whether the condition (1) is sufficient or condition (2) is necessary (or may be something else) for the convergence $\mu_n \Rightarrow \mu$. It was proved in [3] that the following statement is true :

Let $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$ be for each n independent random variables, satisfying the condition, that for any $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq k_n} \mathbf{P}\{|\xi_{nk}| > \varepsilon\} = 0 \ .$$

Let $0 = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nk_n} = 1$ be the sequence of partitions of the interval [0,1] such that

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq k_n} (t_{nk} - t_{n,k-1}) = 0$$

and let

$$\zeta_{nk} = \sum_{j=1}^{k} \xi_{nj} \qquad k = 1, \ldots, k_n \ .$$

Define the stochastic process $\xi_n(t)$ by formula $\xi_n(t) = \zeta_{nk}$ for $t_{n,k-1} \leq t \leq t_{nk}$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$ and denote by P_n the measure in D [0,1] corresponding to the process $\xi_n(t)$.

Theorem 3. If P is a measure in D [0,1] corresponding to the stochastic process $\xi(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ which is continuous and with independent increments, then for the condition $P_n \Rightarrow P$ it is necessary and sufficient that

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq 1} L(P_n^t, P^t) = 0$$

where in this case L denotes the LEVY distance between the probability distribution functions.

Let $\xi_n(t)$ and $\xi(t)$ be stochastic processes, and we assume that their realizations are in the space C [0,1] and let μ_n and μ be the measures which are generated by ξ_n and ξ resp. Then $\mu_n \Rightarrow \mu$ if and only if

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m} \sup_{t_1,\ldots,t_m} L(\mu_n^{t_1,\ldots,t_m}, \mu^{t_1,\ldots,t_m}) = 0 \ .$$

REFERENCES

[1] ГНЕДЕНКО, Б. В.—КОЛМОГОРОВ, А. Н. : *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1949.

[2] ПРОХОРОВ, Ю. В. : «Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей». *Теория Вероятностей и её применения* **1** (1956).

[3] BARTOSZYNSKI, R. : „Some remarks on the convergence of stochastic processes." *Studia Mathematica* **17** (195) (sajtó alatt).

20. ZUBRZICKI, S. :[7] „On the comparison of two production processes and the rule of dualism." (Október 16.)

Az előadó ismertette H. STEINHAUS és S. ZUBRZICKI hasonló című dolgozatát. (Colloquium Mathematicum 5 (1957) 103—115).

21. PRÉKOPA ANDRÁS :[8] *Beszámoló előadás Szovjetunióbeli tanulmányútjáról.* (November 13.)

22. RÉVÉSZ PÁL :[8] *Nem független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásairól.* (November 20.)

Lásd az előadó „On the distributions of sums of dependent random variables," című dolgozatát (Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **10** (1959, sajtó alatt)).

23. CSÁKI PÉTER : *Várakozási-idő probléma orvosi alkalmazása.* (November 27.)

A kórházi felvételnél és a rendelőintézetekben jelenleg hosszú a várakozási idő és nagy a várakozók száma. Az előadás azzal a kérdéssel foglalkozott, hogyan lehet ezeket csökkenteni.

Az előadó ismertette röviden a várakozási-idő problémát és ennek alkalmazását a jelen problémára. Megemlítette az alkalmazás nehézségeit és rámutatott az irodalomban található próbálkozás hiányaira. Kórházaknál a várakozók számának csökkentése történhet megfelelő ütemű kórházfejlesztéssel vagy pótágyak beállításával. Rendelőintézetekben pedig a jelentkezési folyamatot úgy irányíthatjuk, hogy a forgalmas és kevésbé forgalmas időpontokat kiegyenlítjük. Az előadó az előadás során ismertette a következő dolgozatokat : KIEFER, J.—WOLFOWITZ, J. : „On the theory of queues with many servers" (Transactions of the American Mathematical Society **78** (1955) 1—18. és BAILEY, N. T. J. : „A study of queue and appointment systems in hospital out patient departments, with special reference to waiting times" (Journal of the Royal Statistical Society, Series B **14** (1952) 185—199).

A matematikai statisztikai osztály szemináriuma

1—3. SARKADI KÁROLY és VINCZE ISTVÁN : *Referáló előadássorozat.* (Január 9., 16. és 23.)

Az előadók a következő könyv VI. és VII. fejezetét ismertették : SCHMETTERER, L., „Einführung in die mathematische Statistik" (Springer, Wien, 1956).

4—30. LIPTÁK TAMÁS : *Fejezetek a modern matematikai statisztikából.* (Január 21. és 30., február 3., 6., 10., 13., 17., 20., 24. és 27., március 3., 6., 10., 13., 20., 24. és 31., április 3., 10., 14., 21., 24. és 28., május 5., 8., 12. és 15.)

Ismertető előadás-sorozat, főleg az alábbi könyv, illetve dolgozatok alapján : FRASER, D. A. S., „Nonparametric methods in statistics" (Wiley, New York, 1957) ; ДЫНКИН, Е. Б., «Необходимые и достаточные статистики для семейства распределении вероятностей» (Успехи Математических Наук **6** : 1 (1951) 68—90); LEHMANN, E. L.—SCHEFFÉ, H., „Completeness, similar regions, and unbiased estimation, I. & II." (Sankhya **10** (1950) 305—340 & **15** (1955) 219—236.) ; HODGES, J. L.—LEHMANN, E. L., „Some problems in

[7] Matematikai Intézet, Wroclaw.
[8] Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet.

minimax point estimation" (The Annals of Mathematical Statistics **21** (1905) 182—197); DANTZIG G. B.—WALD, A., „On the fundamental lemma of Neyman and Pearson" (The Annals of Mathematical Statistics **22** (1951). 87—93.); LEHMANN, E. L., „Some principles of the theory of testing hypotheses" (The Annals of Mathematical Statistics **21** (1950) 1—25.).

31. RÉVÉSZ PÁL :[9] *Referáló előadás.* (Január 30.)

Az előadó ismertette a következő dolgozatot: HALMOS, R. P.—SAVAGE, J. L., „The application of the Radon—Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics" (The Annals of Mathematical Statistics **20** (1949) 225—241)

32. ZUBRZYCKI, S. :[10] *Remarks on random, stratified and systematic sampling in a plane.* (Október 9.)

Rendeljünk hozzá a sík minden p pontjához egy $y(p)$ valószínűségi változót oly módon, hogy az $\{y(p)\}$ sztochasztikus folyamat folytonos és gyenge értelemben stacionárius legyen. Vizsgáljuk adott D tartományon a folyamat

$$\eta(D) = \frac{1}{|D|} \iint_D y(p)\,dp$$

középértékének az

$$\bar{\eta} = \frac{1}{n}\big(y(p_1) + \ldots + y(p_n)\big)$$

becslését, ahol $p_1, \ldots, p_n$ a D tartomány előírt módon választott pontjai. Az előadó a mintavétel módjára a következő három előírást választja: véletlen mintavétel, rétegezett mintavétel és szisztematikus mintavétel. A feladat a becslés hibájának az

$$E\big(\eta(D) - \bar{\eta}\big)^2$$

kifejezés által való meghatározása és összehasonlítása. A kérdéses hibákat $s^2_{ran}, s^2_{str}, s^2_{sys}$ szimbólumokkal jelölve, az előadó az

$$s^2_{str} \leqq s^2_{ran}$$

egyenlőtlenségre jutott; szükséges és elégséges feltételeket talált az

$$s^2_{sys} \leqq s^2_{str}$$

egyenlőtlenség fennállására, és megmutatta, hogy ha $\{y(p)\}$ izotróp folyamat exponenciális korreláció-függvénnyel, akkor az

$$s^2_{str} < s^2_{sys}$$

egyenlőtlenség néhány — eléggé meglepő — esetben teljesül.

Az előadó eredményeit részletesen a *Colloquium Mathematicum* című folyóiratban fogja közölni.

---

[9] Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet.

[10] Matematikai Intézet, Wroclaw.

33. CSÁKI ENDRE : *Megjegyzés az előjel-szabályhoz.* (Október 30.)

Két azonos elemszámú minta összehasonlítására Galton a következő statisztikát javasolja :

Legyenek $\xi_1^* < \xi_2^* < \ldots < \xi_n^*$, illetve $\eta_1^* < \eta_2^* < \ldots < \eta_n^*$ a két rendezett minta elemei. Jelöljük $\varkappa$-val azon (ξ_i^*, η_i^*) párok számát, melyekre $\xi_i^* > \eta_i^*$ (x tehát a $\xi_i - \eta_i$ különbségek közül a pozitív előjelűek száma). A $\varkappa$ valószínűségi változó egyenlő valószínűséggel veszi fel a $0, 1, \ldots, n$ értékeket, ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ függetlenek és azonos eloszlásúak. Az előadó teljes indukción alapuló egyszerű kombinatorikai bizonyítást ad erre a tényre.

34. SARKADI KÁROLY : *Előzetes mintavétel.* (Október 30.)

Lásd ÉLTETŐ Ö.—SARKADI K. : ,,On preliminary sampling" című dolgozatát (sajtó alatt).

35. VINCZE ISTVÁN : *Egy kétváltozós eloszlással kapcsolatos néhány kombinatorikai formuláról.* (November 6.)

Lásd VINCZE I. : ,,On some joint distribution and joint limiting distribution in the theory of order statistics, II." című dolgozatát e *Közlemények* **4** (1959) kötetében (sajtó alatt).

36. ÉLTETŐ ÖDÖN :[11] *Árindex-becsléssel kapcsolatos matematikai statisztikai problémák.* (November 13.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát (Statisztikai Szemle, sajtó alatt).

37. VINCZE ISTVÁN : *Megjegyzések az entrópia fogalmához.* (November 20.)

38. LIPTÁK TAMÁS : *Referáló előadás.* (November 27.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette : LINDLEY, D. V., ,,Fiducial distributions and Bayes's theorem" (Journal of the Royal Statistical Society, Series B **20** (1958) 102—107).

A valós függvénytani osztály szemináriuma

1. CSÁSZÁR ÁKOS folytatta *A halmazelméleti topológia alapvonalai* című kétórás előadásait. Az év folyamán összesen 27 előadás hangzott el.

2. ALEXITS GYÖRGY : *Hézagos ortogonális sorok konvergenciájáról és szummábilitásáról.* (Január 3. és 10.)

3. MARCUS,[12] SOLOMON : *Sur quelques problemes de la théorie descriptive des fonctions.*[13] (Október 20.)

4. FOIAS,[12] CIPRIAN : *Quelques applications des ensembles spectraux.*[13] (November 13.)

A differenciálegyenletek osztályának szemináriuma

1—7. ZIMÁNYI JÓZSEFNÉ : *Referáló előadássorozat.* (Január 7., 14. és 21, február 11., március 11. és 18., április 8.)

Az előadó folytatta a következő könyv ismertetését : BERGMANN, S.—SCHIFFER, M., ,,Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics" (Academic Press, New York, 1953).

---

[11] Központi Statisztikai Hivatal.
[12] Román Népköztársaság Akadémiájának Matematikai Kutató Intézete, Bukarest.
[13] A Bolyai János Matematikai Társulattal közös rendezésben.

8. Fényes Tamás: *Referáló előadás.* (Január 23.)

Az előadó befejezte a Schwinger-féle variációs módszerről szóló ismertetését, melyet múlt évben kezdett el. Az ismertetés a következő könyv alapján történt: Borgnis, F. E.—Papas, Ch. H., „Randwertprobleme der Mikrowellenphysik" (Springer, Berlin, 1955).

9. Adler György: *Hővezetés a Moebius-szalagon.* (Január 28.)

A Moebius-szalag legyen az (x, y) sík $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq m$ téglalapja, melyet az $x = 0$ és $x = l$ élei mentén oly módon képzelünk összeragasztva, hogy a $(0,0)$ pont az (l, m) ponttal, a $(0, m)$ pont pedig az $(l, 0)$ ponttal esik egybe.

Az előadó a tükrözési elv segítségével a hővezetés

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

differenciálegyenletének az első, illetve második peremértékfeladathoz tartozó, a Moebius-szalagra vonatkozó G_1 illetve G_2 Green-függvényét a következő alakban állította elő:

$$G_1(P, Q, t) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \Omega(P, Q_{ij})(-1)^j ,$$

$$G_2(P, Q, t) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \Omega(P, Q_{ij})$$

ahol

$$\Omega(P, Q, t) = \frac{a^2}{4\pi t} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t} a^2},$$

$$P = (x, y), \quad Q = (\xi, \eta), \quad Q_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij})$$

és

$$\xi_{ij} = il + j$$

$$\eta_{ij} = \left\{j + \tfrac{1}{2}\left(1 + (-1)^{i+j}\right)\right\} m + (-1)^{i-j} \eta .$$

10. Adler György: *A hővezetés differenciálegyenletének variációszámítási jellemezhetőségéről.* (Január 28.)

Lásd az előadó „Sulla caratterizzabilita dell'equazione del calore dal punto di vista del calcolo delle variazioni" című dolgozatát e *Közlemények* 2 (1957-es) kötetében, a 153—157 oldalakon.

11. Adler György: *A hővezetés peremértékfeladatainak egy új típusa.* (Február 4.)

Az előadó a hővezetés

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (a^2 > 0)$$

differenciálegyenletének megoldásával foglalkozott egy korlátos R tartomány esetén, az alábbi peremfeltételek mellett, melyek azt a tényt fejezik ki, hogy a R hővezető test az S felülete mentén véges hőkapacitású hőtartállyal érintkezik:

$$u(P,t) = A\frac{\partial u(P,t)}{\partial n} = f(t) \qquad (A \geqq 0)$$

$$Q(t) = Bf'(t) - C\int\limits_S \frac{\partial u(P,t)}{\partial n}\, d\sigma_P \qquad (B, C > 0)$$

(n az S felület belső normálisa.) Itt $f(t)$ a hőtartály hőmérsékletét, $Q(t)$ a hőtartályba időegység alatt betáplált hőmennyiséget jelöli.

Ily módon az $A = 0$ és az $A > 0$ esetek a hővezetés peremértékfeladatainak egy új típusát alkotják, szemben a klasszikusnak mondható első második és harmadik peremértékfeladatokkal.

Az előadó ismertetett egy megoldási módszert, amely a feladatot másodfajú Volterra-típusú integrálegyenlet megoldására vezeti vissza. — A feladat megoldásának unicitása egy, a tárgyalt hővezető rendszerre vonatkozó maximum-elvből következik.

12—14. Sallay Melánia: *Referáló előadás.* (Február 18., 25. és március 4.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: Shapiro, V. L., „On Green's theorem" (The Journal of the London Mathematical Society 127 (1957) 261—269).

15. Balatoni Ferenc: *Bizonyos sorfejtések és interpolációs sorok konvergenciájának vizsgálata a Vahlen-formula segítségével.* (Szeptember 30.)

Az előadó a Vahlentől származó

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} L_k(x)\left\{y(x_k) + \int\limits_{x_k}^{x} \frac{(x_k - \xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, y^{(n)}(\xi)\, d\xi\right\}$$

(ahol $L_k(x)$ az x_k helyhez tartozó Lagrange-féle interpolációs alapfüggvény) maradéktagos interpolációs polinom azon általánosításával foglalkozott, melyben az interpolációs formulában szereplő racionális polinomokat az n-szer differenciálható $\varphi_\nu;(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) függvények lineáris kombinációjával helyettesítjük, és vizsgálta $n \to \infty$ esetén a konvergencia-viszonyokat.

16. Березанский, Ю. М.[14]: *Über das Umkehrungsproblem der Spektraltheorie für Partiale Differenzengleichungen und Partiale Differentialgleichungen.* (Október 14.)

Az előadó parciális differenciálegyenlet együtthatóinak az egyenlet spektrálmátrixából történő rekonstrukciójával foglalkozott, továbbá vizsgálta a spektrálmátrixok tulajdonságait.

Bizonyos parciális differenciálegyenletek (speciálisan a $-\Delta u + c(x)u = \lambda u$ Schrödinger-egyenlet) esetén bebizonyította a probléma megoldásának unicitását: a $c(x)$ együttható egyértelműen meghatározható a spektrálfüggvényeknek a tartomány peremén felvett értékeiből. Az előadó foglalkozott még a Schrödinger-egyenlet haladó hullámokat leíró megoldásainak megfelelő rekonstrukciós problémákkal.

[14] Az Ukrán Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete, Kiev.

Az előadás részleteire vonatkozóan lásd az előadó «Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка» «О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера» című dolgozatait (Труды Московского Математического Общества 5 (1956) 203—268 & 7 (1958) 3—62).

17—18. ADLER GYÖRGY : *Referáló előadás.* (Október 28. és november 4.)

Az előadó ismertette LÁNCZOS, C., ,,Extended boundary value problems'' című, az Edinburghi Matematikus Kongresszuson tartott előadását.

19. ADLER GYÖRGY : *A hővezetés maximum-elvének kiterjesztése nem folytonos peremfeltételeket kielégítő függvényekre.* (November 11.)

Az eőladó a következő tételt bizonyította be :

Legyen C az $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(m = 1, 2, 3)$ tér korlátos tartománya. C határa legyen S. $m = 2$ esetén legyen S rektifikálható görbe, $m = 3$ esetén pedig mérhető felszínű felület (lásd : SZÁSZ PÁL, ,,A differenciál- és integrálszámítás elemei'', Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951, II. kötet 428—434).

Legyen

$$D = C \times (0, T] \ ,$$

$$H = \big(C \times \{0\} + (S \times [0, T])\big) \ ,$$

és

$$\sum = S \times \big(\{t_1\} + \{t_2\} + \ldots + \{t_l\}\big) \qquad (0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots t_l \leqq T)$$

A $V(P, t)$ függvény tegyen eleget a hővezetés

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_m^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t} \qquad (a^2 > 0)$$

differenciálegyenletének a D félig zárt tartományban, legyen folytonos és korlátos a $D + H - \Sigma$ halmazon. A függvény $(H - \Sigma)$-n felvett peremértékeinek felső határa legyen M :

$$M = \sup_{(P,t) \in H - \Sigma} V(P, t) \ .$$

Ekkor a $V(P, t)$ függvény a D félig zárt tartományban M-nél nagyobb értéket nem vehet fel.

20. FENYŐ ISTVÁN : *A differenciaegyenletek egy megoldási módszere* (November 25.)

Az előadó a Mikusiński-féle gondolatot követve tekinti az összes olyan függvényt, melyek csupán a nemnegatív egész számokra vannak értelmezve (számsorozatok). Ezek gyűrűt alkotnak az összeadásra és kivonásra, valamint a konvolúció-szorzásra, mint gyűrűműveletekre vonatkozóan.

Könnyű kimutatni, hogy ez a gyűrű nullosztómentes, és hányadostestté bővíthető. Ezt a gondolatot, hasonlóan a Mikusiński-féle operátorszámításhoz, fel lehet használni állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenletek megoldására. — Érdekes az, hogy más apparátus szükséges a differenciaegyenletek peremértékfeladatainak és más a kezdeti-értékfeladatok megoldásához.

ADLER GYÖRGY és FREUD GÉZA hozzászólásaikban rámutattak arra, hogy a számsorozatoknak az előadó által kidolgozott elmélete az eredeti Mikusiński-féle operátorszámításba beágyazható.

21. HAJTMAN BÉLA : *A nem-lineáris egyenletrendszerek egy típusának megoldásáról.* (December 2.)

Az előadó FREUD GÉZÁval közösen folytatott vizsgálatainak eredményéről számolt be. Ezekben a vizsgálatokban olyan n-ismeretlenes, tetszőleges test feletti egyenletrendszerekkel foglalkoztak, melyek m darab lineáris és 1 általános k-adfokú egyenletből állnak ($k > 1$). Az előadó ismertette az egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltételeit, valamint a megoldások előállítására vonatkozó képleteket és azok bizonyítását. — Külön tárgyalta az $n = m$, $n = m + 1$ és $n > m + 1$ eseteket. (Az $n < m$ eset a lineáris egyenletrendszerek elméletéből jól ismert módon ezen esetek egyikére vezethető vissza.) A felírt összefüggések csak abban az esetben nem érvényesek, ha az együtthatók testének p karakterisztikája és a nem-lineáris egyenlet k fokszáma közt a $0 < p \leqq k$ egyenlőtlenség teljesül.

Az előadás eredményeit a szerzők e *Közlemények* 4 (1959-es) évfolyamában fogják publikálni.

A komplex függvénytani osztály szemináriuma

1. ALPÁR LÁSZLÓ : *A Robin-állandó.* (Január 2.)

Ismertető előadás, főleg a következő dolgozat alapján: SZEGŐ, G., ,,Bemerkungen einer Arbeit von Herrn. M. Fekete : »Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten«" (Mathematische Zeitschrift 21 (1924) 203—208.

2. TURÁN PÁL : *Egész függvények lineárkombinációiról.* (Január 8.)

Az előadó új módszerei [lásd : TURÁN P., ,,Az analízis egy új módszeréről és annak egyes alkalmazásairól" (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953)] alkalmazásával többek közt megmutatja, hogy a végesrendű $k(z)$ egész függvények bizonyos osztályaira (melyek az $k(z) = e^z$ függvényt is magukban foglalják)

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu h(b_\nu z)$$

függvények rendje és típusa megegyezik $h(z)$-ével. Ezek segítségével a komplex approximációra ,,egyértelműségi" tételek igazolhatók, melyek közül tipikus a következő: Ha $|z| \leqq R$-ben

$$\left| F(z) - \sum_{\nu=1}^{n} a'_\nu e^{b_\nu z} \right| \leqq \eta$$

és

$$\left| F(z) - \sum_{\nu=1}^{n} a''_\nu e^{b_\nu z} \right| \leqq \eta \; .$$

ahol

$$\frac{\min\limits_{\nu} |b_\nu|}{\max\limits_{\nu} |b_\nu|} \geqq \gamma \, , \qquad \frac{\min\limits_{\mu \neq \nu} |b_\mu - b_\nu|}{\max\limits_{\nu} |b_\nu|} \geqq \delta$$

-val R oly nagy, hogy

$$R \geqq \max\left(1, \frac{1}{\gamma}\right)$$

és

$$(2n)!\left(\frac{2R}{\delta}\right)^{2n} < e^{\frac{R}{2}\gamma \max_\nu |b_\nu|}$$

akkor

$$\sum_{\nu=1}^{n} |a'_\nu - a''_\nu|^2 \leqq \eta^2 .$$

3—17. RÓZSA PÁL: *Referáló előadássorozat.* (Január 20., február 1., 14., 21. és 28., március 7., 14., 21. és 28., április 11., 18. és 24., május 2., 8. és 18)

Az előadó Голузин, Г. М., «Геометрическая теория функции комплексного переменного» (Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1952.) könyvének egyes fejezeteit, továbbá a következő dolgozatokat ismertette: MACINTYRE, A. J., "On the asymptotic paths of integral functions" (Journal of the London Mathematical Society 10 (1935) 35—39); CLUNIE, J., "The asymptotic behaviour of integral functions" (Quarterly Journal of Mathematics, Series 2 (1955) 1—3).

18. VINCZE ISTVÁN: *Kakeya tételéről.* (Október 20.)

Ismertető előadás.

19—21. SZEKERES GYÖRGY:[15] *A törtrendű iterációról.* (Október 14., 17. és 21.)

22. TURÁN PÁL: *A maximum-elvről.* (Október 31.)

Az előadó az analitikus függvények maximumelvének egy szigorúbb formáját mutatja ki és ezt harmonikus függvényekre is kiterjeszti. Bemutat egy tipikus alkalmazást is és ezekkel kapcsolatos számos nyitott problémára mutat rá.

23—30. RÉNYI KATÓ: *Bevezetés a mértékelméletbe.* (November 7., 14., 21. és 28., december 5., 12., 19. és 26.)

Ismertető előadássorozat (bevezetésként a logaritmikus potenciál tanulmányozásához) főleg a következő könyv alapján: HALMOS, P. R., Measure theory (van Nostrand, New York, 1950).

A funkcionálanalízis osztály szemináriuma

1. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *A Hilbert-tér önadjungált operátorainak perturbációja.* (Január 8.)

Lásd: SZŐKEFALVI-NAGY B., „Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert" (Commentarii Mathematici Helvetici **19** (1946—47) 347—366.).

2—4. GEHÉR LÁSZLÓ: *Zárt lineáris transzformációk perturbációja.* (Február 6., 12. és 19.)

[15] University of Adelaide, Mathematical Department, Adelaide, Australia.

Lásd : SZŐKEFALVI-NAGY B., ,,Perturbations des transformations lineares fermées" (Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **14** (1951—52) 125—137) és KATO, T., ,,On the perturbation theory of closed linear operators" (Journal of the Mathematical Society of Japan **4** (1952) **323—336**).

5—7. DURST ENDRE[16] és STACHO LAJOS :[17] *Referáló előadás.* (Február 26., március 5. és 12.)

Az előadók a következő cikket ismertették : SZŐKEFALVI-NAGY B., ,,Vibrations d'une corde non homogène" (Bulletin de la Societé Mathématique de France **75** (1947) 123—208.).

8. BOGNÁR JÁNOS : *Referáló előadás.* (Március 19.)

Az előadó folytatta a következő dolgozat ismertetését : Иохвидов, И. С.—КРЕЙН, М. Г., «Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, I.» (Труды Московского Математического Общества **5** (1956) 367—432).

9—10. KOVÁCS ISTVÁN :[16] *Referáló előadás.* (Mácius 2. és 16.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette : KATO, T., "On the upper and lower bounds of eigenvalues" (Journal of the Physical Society of Japan **4** (1949) 5—12.)

11—15. DURST ENDRE,[16] STACHO LAJOS[17] és TANDORI KÁROLY :[16] *Referáló előadás sorozat.* (Április 23., 30., május 7., 14., és 21.)

Az előadók a következő dolgozatot ismertették : KATO, T., "The convergence of the perturbation method" (Journal of the Faculty Science, University of Tokio **6** (1951)).

16—17. GEHÉR LÁSZLÓ : *Referáló előadás.* (Május 28. és június 11.)

Az előadó ismertette a következő dolgozatot : KATO, T., ,,On finite-dimensional perturbations of self adjoint operators" (Journal of the Mathematical Society of Japan **9** (1957) 239—250.).

18. KOVÁCS ISTVÁN :[16] *Referáló előadás.* (Június 18.)

Az előadó ismertette a következő dolgozatot : KATO, T., "Perturbation of continuous spectra by trace-class operators" (Proceedings of the Japan Academy **23** (1957) 260—265.).

19—22. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA : *Operátorok dilatációja.* (Szeptember 16., október 1., 8. és 15.)

Lásd pl. : RIESZ F. és SZŐKEFALVI-NAGY B., ,,Vorlesungen über Funktionalanalysis", Anhang. (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.)

23. БЕРЕЗАНСКИЙ,[18] Е. С. : *Önadjungált operátorok spektrális felbontása.* (Október 22.)

Az előadó a Hilbert-térből való kilépéssel a folytonos spektrum pontjaihoz is rendel sajátvektorokat. A hozzárendelésben nagy szerepet játszanak a Hilbert—Schmidt-féle operátorok.

24—25. FOIAȘ, CIPRIAN:[19] *A Hilbert-tér operátorainak általánosított sajátvektorai.* (Október 29. és november 5.)

Az előadó egy másik úton jut el ahhoz, hogy a Hilbert-térből való kilépéssel a folytonos spektrum pontjaihoz is rendel általánosított sajátvektorokat.

---

[16] Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet.
[17] Radnóti Miklós gimnázium, Szeged.
[18] Az Ukrán Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete, Kiev.
[19] A Román Népköztársaság Akadémiájának Matematikai Kutató Intézete, Bukarest.

26. GEHÉR LÁSZLÓ és KOVÁCS ISTVÁN :[16] *Referáló előadás.* (November 19.)

Az előadók ismertették a következő dolgozatokat : HALMOS, P., "Commutativity and spectral properties of normal operators" (Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **12** (1950) 153—156.) és ROSENBLUM, M., "On a theorem of Fuglede and Putnam" (The Journal of the London Mathematical Society **131** (1958) 376—377.).

27. BERKES JENŐ :[20] *Referáló előadás.* (November 26.)

Az előadó a következő dolgozatokat ismertette : WIELANDT, H., „Über die Unbeschränktheit der Operatoren der Quantenmechanik" (Mathematische Annalen 121 (1949) 21) és KLEINECKE, D., "On operator commutators" (Proceedings of the American Mathematical Society **7** (1956) 536—537).

28—29. KOVÁCS ISTVÁN[16] és SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA : *Referáló előadás sorozat* (December 4. és 11.)

Lásd : HALMOS, P., "Lectures on ergodic theory" (The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1956.)

A matematikai logika és matematikai gépek elmélete csoport szemináriuma

1—5. ÁDÁM ANDRÁS : *Kétpólusú hálózatok szerkezete.* (Február 4., 11. és 25., március 11. és 18.)

Lásd az előadó „Kétpólusú elektromos hálózatokról, II." című dolgozatát e *Közlemények* 3. (1958-as) évfolyamának 71—83. oldalain.

6. KALMÁR LÁSZLÓ : *A logikai gép kábelezésének ellenőrzésével kapcsolatos kérdések megbeszélése.* (Február 18.)

A kábelezési rajzok és a vezetéktáblázat ismertetése. Megbeszélés a rajzok és a vezetéktáblázat ellenőrzésével kapcsolatos teendőkről.

7. GRÄTZER GYÖRGY és SCHMIDT E. TAMÁS : *Partícióhálók algebrai jellemzése.* (Március 7.)

Az előadók a következő tételt bizonyították. Legyen L egy háló. M legyen L azon elemei Dedekind-féle komplementumainak halmaza, amelyeknek van ilyen komplementumuk. Ahhoz, hogy L izomorf legyen valamely halmaz összes partícióinak hálójával, szükséges és elegendő, hogy M fél-Boole-algebra legyen és hogy L izomorf legyen M Q-ideáljainak hálójával. Itt fél-Boole-algebrán olyan hálót értünk, amely valamely B atomos Boole-algebrából atomjai elhagyásával adódik, és M két olyan elemének metszetén, amelyek metszete B-ben atom volna, a nullelemet értjük. Egy M fél-Boole-algebra valamely I részhalmazát Q -ideálnak nevezzük, ha

1. ha $a \in I$ és $b \leqq a$ akkor $b \in I$; 2. ha $a \in I, b \in I, a \leqq b'$, akkor $a \cup b \in I$; 3. I tartalmazza bármely részlánca elemeinek komplett egyesítését. Itt b' a b elemnek azon B atomos Boole-algebrabeli komplementumát jelenti, amelyből M a fenti módon keletkezett. E tétel a partícióhálók belső algebrai jellemzését szolgáltatja.

8. KALMÁR LÁSZLÓ : *A kétcímű programozás elméletéhez.* (Március 25.)

Az M — 3 gépen az ún. egyszerű aritmetikai operátorok közül azokat könnyű programozni, amelyeknek baloldalán lánckifejezés áll, azaz olyan, a gép értékskáláján átfutó változókból a gép alapműveletei segítségével felépített

[20] Újszegedi Gimnázium, Szeged.

kifejezés, amelyben — ha minden zárójelet kiírunk — a kezdőzárjelek mind a kifejezés elején állnak egymás után. Az előadó ismertette a tetszőleges aritmetikai operátoroknak ilyen ,,láncoperátorok" szorzatára való felbontásának a programozás szempontjából célszerű és könnyen automatizálható módját.

9. ROSENBLATT—ROTH, MILLU :[21] *Über die Grundlagen der Informationstheorie.* (Április 1.)

A klasszikus információelméletnek valamint ezen elmélet nem-stacionárius folyamatokra való kiterjesztésének ismertetése.

10. KALMÁR LÁSZLÓ : *Ankét a logikai géphez építendő elektronikus adapterről.* (Április 15.)

A logikai gép alkalmazása többpólusú elektromágneses blokkok (vagy tervrajzaik) ellenőrzésére túlságosan lassú eljárás, ha ezt olymódon végezzük, hogy pontpáronként egymás után ellenőrízzük, ekvivalens-e az az ítélet, hogy a pontpár két pontja között van vezető összeköttetés, a blokk jelfogóinak minden állása esetén a megfelelő működési feltételt kifejező formulával. Meg lehet azonban gyorsítani az ellenőrzést, ha a blokk jelfogóinak egy-egy állása esetén elektronikus módszerekkel végigellenőrízzük az ekvivalenciát minden egyes pontpárra, és csak ha ez megtörtént, akkor léptetjük át a blokkot és a logikai gépet a következő állásra. Ez az eljárás egy elektronikus adaptert igényel ; az ankét ennek tervét vitatta meg.

11—12. MUSZKA DÁNIEL : *A logikai gép működésének ellenőrzése.* (Április 22. és 29.)

13—14. POLLÁK GYÖRGY : *Referáló előadás.* (Május 13. és 20.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: Войшвило, Е. К., «Метод упрощения форм выражения функций истинности» (Научные Доклады Высшей Школы (философические науки) **2** (1958) 120—134.).

15. KALMÁR LÁSZLÓ : *A logikai gép bemutatása a Komszomol Szegeden járó küldöttségének.* (Május 20.)

16—17. ÁDÁM ANDRÁS : *Referáló előadás.* (Június 3. és 10.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette : QUINE, W. V., "The problem of simplifying truth functions" (American Mathematical Monthly **59** (1952) 521—531.).

18. KALMÁR LÁSZLÓ : *Megbeszélés a logikai gép programozásának gépesítéséről.* (Június 17.)

19. ЧАЙКОВСКИЙ, ЛЕМАР[22] : *A Szovjetunió elektronikus számológépei.*[23] (Október 30.)

Az elektrónikus számológépek működési elveinek vázolása után az előadó ismertette a Sztrela, BESZM, M—2, M—3, Pagoda, Krisztall és Jerevan nevű számológépek adatait.

20. Ершов,[22] Андрей : *Néhány probléma az operátoralgoritmusok elméletéből.* (Október 30.)

Az előadás előtt KALMÁR László ismertette JERSOV budapesti előadását az operátor-algoritmus fogalmáról. Az előadó ehhez kapcsolódva a következő problémákat veti fel :

1° Lehet-e olyan, valemely véges, t számú betűből álló ábécére nézve algoritmikusan teljes műveletrendszert találni, amely $(2t + 1)$-nél kevesebb,

[21] Bukaresti Parhon Egyetem, Matematikai Intézete.

[22] A Szovjet Tudományos Akadémia Számítási Központja, Moszkva.

[23] A Bolyai János Matematikai Társulat Szegedi tagozatával közös rendezésben.

csupa egyváltozós műveletet tartalmaz? JERSOV budapesti előadásában szereplő ilyen rendszer $2t + 1$ egyváltozós műveletet tartalmaz.)

2° Van-e olyan algoritmikusan teljes műveletrendszer, amelyben a műveletek száma független az ábécé elemeinek számától?

3° Keresendő olyan, csupa egyváltozós műveletből álló algoritmikusan teljes rendszer, amely az ábécé betűinek adott száma esetén bebizonyíthatóan minimális számú műveletből áll.

4° Van-e egyetlen kétváltozós műveletből álló algoritmikusan teljes rendszer?

5° Keresendő olyan szükséges és elegendő feltétel arra, hogy egy műveletrendszer algoritmikusan teljes legyen, amely analóg POST szükséges és elegendő feltételével arra, hogy a logikai műveletek egy rendszere funkcionálisan teljes legyen.

6° Operátor-algoritmus-osztályok pótlása lehetőleg egyszerű részosztályaikkal oly módon, hogy az eredeti osztály bármely algoritmusához legyen a rész-osztálynak vele ekvivalens eleme.

21. ЕРШОВ,[22] АНДРЕЙ : *A gépi nyelv formalizálása.* (Október 31.)

A blokksémák módszerének nagy előnye, hogy szemléletes, eddig azonban — az operátorsémák módszerével ellentétben — nem sikerült oly módon szabatossá tenni, hogy felölelje azt az esetet is, amikor a feladat programozásához utasítások módosítására is szükség van. Ezt a hiányt pótolja a cím-algoritmus B. V. KOROLJUK által bevezetett fogalma, amely a cím fogalmának iteratív általánosításán alapul. Az előadó ismertette ezt a fogalmat, és felvetett néhány problémát ezzel kapcsolatban.

22. ЕРШОВ,[22] АНДРЕЙ : *A Szovjetunió Tudományos Akadémiája Számítási Központjának munkájáról a programozás automatizálása terén.*[23] (November 1)

A SZTA Számítási Központjának a számolástechnika automatizálására vonatkozó eddigi munkájának általános ismertetése után az előadó részletesen ismertette a kiinduló információk felírásának módját a Sztrela programozó programja számára.

A matematika közgazdasági alkalmazásaival foglalkozó szeminárium

1. BRÓDY ANDRÁS :[24] *Az input-output mátrixok legnagyobb sajátértékével kapcsolatos problémák.* (Január 6.)

Az input-output számítás, amelyet LEONTIEF az 1926-ban publikált szovjet társadalmi termékmérlegek és az azokkal kapcsolatos „technológiai koefficiens”-viták alapján dolgozott ki, szabatosabban alapozható meg a munkaértékelmélet alapján. Az $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ mátrix

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^n$$

hatványsorának közgazdasági értelme is van: az egységnyi alapvető rendelés támasztotta elsődleges, másodlagos, harmadlagos stb. szükségletet fejezi ki, illetőleg az egységnyi árdrágulás által kiváltott további árdrágulási hullámokat.

[24] Közgazdaságtudományi Intézet.

E sor konvergenciája a legnagyobb sajátérték abszolút értékétől függ, ezért az bizonyos értelemben a rendszer hatásfokának tekinthető. A következő tétel

$$\min_{0<x} \max_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \lambda$$

közgazdaságilag a következőképpen interpretálható: x_i az i-edik termék teljes termelése valamely időszakaszban, $(Ax)_i$ a felhasználás ugyanebből a termékből. Ha rendszerünket fejleszteni akarjuk, a fejlesztés felső határát a legszűkebb keresztmetszet adja meg, azaz fenti tört maximuma. Ha keressük, hogy e szűk keresztmetszet a termelési szintek helyes megválasztásával mennyire szorítható le, alsó határul éppen a legnagyobb sajátértéket kapjuk, ez tehát a maximális terjeszkedési képesség mutatójaként fogható fel, ugyanakkor más hasonló jelzőszámokkal (átlagprofitráta, termelékenységi index stb.) is megteremthető a közvetlen kapcsolat.

2. SZÉKELY GÁBOR: *Indifferencia felületek meghatározása Engel-görbék segítségével.* (Február 4.)

Ismertető előadás.

3. NEMÉNY VILMOS:[25] *Az ökonometriai modellek szerepe a gazdasági életben.* (Március 4.)

Ismertető előadás.

4. EGERVÁRY JENŐ:[1] *Kombinatórikus módszer a szállítási probléma megoldására.*[26] (Április 11.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát e *Közlemények* 4 (1959) kötetében (sajtó alatt).

5. THEISS EDE:[27] *Az ökonometriai modellek sztochasztikus alapproblémái.* (Április 9.)

Ismertető előadás.

6. KREKÓ BÉLA:[28] *Leontief modelljének elemi matematikai vizsgálata.*[29] (Május 27.)

Ismertető előadás.

A biometriai osztály szemináriuma

1—5. CSÁKI PÉTER: *Empirikus eloszlások közelítése.* (Március 24. és 31., április 14. és 28., május 5.)

Ismertető előadás, elsősorban a következő könyv alapján: KENDALL, M. G., "The advanced theory of statistics" (Griffin, London, 1947).

6—7. FISCHER JÁNOS: *Csoportosítások és leolvasások eloszlástorzító hatása, az eloszlást leíró és jellemző módszerek.* (Május 12., június 2.)

8. FISCHER JÁNOS: *Függetlenséggel kapcsolatos egyes kérdések.* (November 11.)

9. CSÁKI PÉTER: *„Várakozási" módszer felhasználhatósága az egészségügyi intézmények túlzsúfoltságának csökkentésére.* (November 24.)

[25] Központi Statisztikai Hivatal.

[26] A mátrixelméleti osztállyal és a Bolyai János Matematikai Társulattal közös rendezésben.

[27] *Eötvös Loránd* Tudományegyetem, Statisztikai Tanszék.

[28] Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem, Gazdaságmatematika Tanszék.

[29] A Magyar Tudományos Akadémia Kibernetikai Kutatócsoportjával közös rendezésben.

AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN MÉG FEL NEM TÜNTETETT, MÁSUTT MEGJELENT VAGY SAJTÓ ALATT LEVŐ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Ádám, A. : ,,On the definitions of direct product in universal algebra." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **7** (1959) (sajtó alatt).

[2] Alexits, Gy. : ,,Une contribution a la théorie constructive des fonctions." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **19** (1958) 149—157.

[3] Alexits, Gy. : ,,Über die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihen bei jeder Anordnung ihrer Glieder." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **19** (1958) 158—161.

[4] Alexits, Gy. : —Fenyő I. : *Matematika vegyészek számára.* (III. kiadás) Tankönyvkiadó, Budapest (sajtó alatt).

[5] Császár Á. : ,,Konvex halmazokról és függvényekről." *Matematikai Lapok* (sajtó alatt).

[6] Császár Á. : ,,Sur les singularités des fonctions continues." *Bulletin de Mathématiques de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la République Populaire Roumaine.*

[7] Császár Á.: — (Marcus S.-el együtt) : ,,Sur un probleme de H. Steinhaus et de J. Mycielski." *Colloquium Mathematicum* (sajtó alatt).

[8] Császár Á. : ,,Sur les courbes afriodiques." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

[9] Császár Á.—Czipszer J. : ,,Sur les courbes irramifiées." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

[10] Csukás A.-né—Tamássy J.-né : ,,Statisztikai módszerek." Részlet a *Háziállatok korszerű szelekciója* c. könyvben, Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1959 (sajtó alatt).

[11] Egerváry, J. : ,,Bemerkungen zum Transportproblem." *Mathematik, Technik und Wirtschaft-Mitteilungen (Wien)* **5** (1958) 278—284.

[12] Egerváry, J.—Lovass-Nagy V. (Kolin L-val együtt) : ,,Discrete models and matrix methods in the engineering mechanics." *Az Indian Society of Theoretical and Applied Mechanics III. Kongresszusának Közleményeiben* (sajtó alatt).

[13] Egerváry, J.: On the application of matrices and hypermatrices in engineering analysis, *Mémcires et Publications de la Societé des Sciences des Arts et des Lettres du Hainaut* (1959) (Sajtó alatt).

[14] Egerváry, J.—Turán, P. : Notes on interpolation, VI. (On the stability of interpolation on an infinite interval." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

[15] Fenyő. I. : «О теории вольтерровских операторов.» *Известия Академии Наук СССР (Серия математика)*

[16] Fenyő, I. : ,,Eine neue Methode zur Lösung von Differenzengleichungen nebst Anwendungen." *Periodica Polytechnika* (sajtó alatt).

[17] Fenyő, I.-t lásd még : [4]

[18] Fodor G. (Erdős P.-lal és Hajnal A.-sal együtt) : ,,On the structure of setmappings." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **20** (1959) (sajtó alatt).

[19] Freúd G. : ,,Eine Eigenschaft Tschebischeffscher Approximationspolynome." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* (sajtó alatt).

[20] FREUD, G. : „Über die Approximation stetiger Funktionen durch gewöhnliche Polynome." *Mathematische Annalen* (sajtó alatt).

[21] FREUD. G. : „Bemerkung über die Konvergenz eines Interpolationsverfahrens von P. Turán." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

[22] FREUD, G. : Ein Beitrag zu dem Satze von Cantor und Bendixson." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

[23] FREUD, G. : „Eine Eigenschaft der Lösungen parabolischer Differentialgleichungen". *Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences* **6** (1957) 451—452.

[24] FREUD, G. : „Sur quelques problemes de l'equation de la chaleur." *Publications de Congres „Le Mathématiĉue et l'Ingenieur" a Mons* (sajtó alatt).

[25] GRÄTZER, GY.—SCHMIDT, E. T. : „Ideals and congruence relations in lattices." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 137—175.

[26] GRÄTZER, GY.—SCHMIDT, E. T. : „On ideal theory for lattices." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **19** (1958) 82—92.

[27] GRÄTZER, GY.—SCHMIDT, E. T. : „Two notes on lattice congruences." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae (Sectio Mathematica)* **1** (1958) 83—87.

[28] GRÄTZER, GY.—SCHMIDT, E. T. : „On the lattice of all join-endomorphisms of a lattice." *Proceedings of the American Mathematical Society* **9** (1958) 722—726.

[29] GRÄTZER, GY.—SCHMIDT, E. T. : „On the generalized Boolean algebra generated by a distributive lattice." *Indagationes Mathematicae* **20** (1958) 547—553.

[30] GRÄTZER, GY.—SCHMIDT, E. T. : „Eine Bemerkung über fast-vollkommene Körper." *Mathematische Zeitschrift.*

[31] JUVANCZ, I. : „Allgemeine Fragen der Arteriosklerosen-Statistiken." *Tagung der Deutschen Gesellschaft für Ernäherung,* 1958. Steinkopff, Darmstadt, 1959 (sajtó alatt).

[32] JUVANCZ, I. : „Registration of results of acute experiments." *Acta Medica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1959) (sajtó alatt).

[33] KÁNTOR, S. : „Geőcze Zoárd függvénye mindenütt folytonos és sehol sem differenciálható." *Matematikai Lapok* **8** (1957) 264—267.

[34] LIPTÁK, T. (KORNAI J.-sal együtt) : „A nyereségérdekeltség matematikai vizsgálata lineáris programozási módszerekkel" (sajtó alatt).

[35] LOVASS-NAGY, V. (BAJCSAY P.-lal együtt) : „Investigation of one-dimensional heat conduction problems by means of the matrix calculus." *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

[36] LOVASS-NAGY, V. (SZENDY K.-lyal együtt) : „Investigation of transient phenomena of electrical networks by means of the matrix calculus." *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

[37] LOVASS-NAGY, V. : „Über die Lösung der Poisson'schen Differenzengleichungen der Festigkeitslehre bei beliebigem Gebiet mit Hilfe der Matrizenalgorithmen von E. Egerváry." *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (sajtó alatt).

[38] LOVASS-NAGY, V. (Béres E.-kel és SZABÓ J.-sal együtt) : „Die Berechnung räumlicher Rahmen von zyklischer Symmetrie." *Der Stahlbau* (sajtó alatt).

[39] LOVASS-NAGY, V.-t lásd még : [12].

[40] POLLÁK, GY.—RÉDEI, L.: „Die Halbgruppen, deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sund." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **7** (1959) (sajtó alatt).

[41] RÉDEI, L. : „Über die algebrisch-zahlentheoretische Verallgemeinerung eines elementarzahlentheoretischen Satzes von Zsigmondy." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **19** (1958) 97—126.

[42] RÉDEI, L. : „Eine Bemerkung über die endlichen einstufig nichtkommutativen Gruppen." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **19** (1958) 127—128.

[43] RÉDEI, L. : „Zur Theorie der Polynomideale über kommutativen nullteilerfreien Hauptidealringen." *Mathematische Nachrichten* **18** (1958) 313—332.

[44] RÉDEI, L. : „Die einstufig Nicht-Zeroringe und Verallgemeinerungen." *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **22** (1958) 201—214.

[45] RÉDEI, L. : „Natürliche Basen des Kreisteilungskörpers." *Abhandlugen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* (sajtó alatt).

[46] RÉDEI, L. : „Neuer Beweis eines Satzes von Delaunay über ebene Punktgitter." *Quarterly Journal of Mathematics* (Sajtó alatt).

[47] RÉDEI, L.—TURÁN, P. : „Über endliche Körper." *Acta Arithmetica* (sajtó alatt).

[48] RÉDEI L.-t lásd még : [40].

[49] RÉNYI, A. : „Probabilistic methods in number theory." *Edinburghi Nemzetközi Matematikai Kongresszus Kiadványa* (sajtó alatt).

[50] RÉNYI, A. (ERDŐS P.-lal együtt): „Further results on the statistical properties of the digits in Cantor-series." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

[51] RÉNYI, A. (ERDŐS P.-lal együtt): „On random graphs, I." *Publicationes Mathematicae Debrecen* (sajtó alatt).

[52] RÉNYI, A.: „On a theorem of P. Erdős and its application in information theory." *Mathematica* (sajtó alatt).

[53] RÓZSA P. (TASSI G.-val együtt): „Rugalmas plasztikus állapotú statisztikailag határozatlan rúdszerkezetek számítása matrixszámítás felhasználásával." *Az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei* **4** (1958) №. 2. 21—43.

[54] RÓZSA, P.: «О применении клеточных матриц в механике корпускулярных систем.» *Успехи математических Наук* (sajtó alatt).

[55] SCHMIDT, E. T.-t lásd: [25]—[30].

[56] SZABÓ, Á.: „Deiknymi als mathematischer Terminus für beweisen." *Maia (Firenze* **10** (1958) 106—131.

[57] SZABÓ, Á.: „A matematikai bizonyítás görög terminus technicusa." *Antik tanulmányok* (1958) 25—43.

[58] SZABÓ, Á.: „Die Grundlagen in der frühgriechischen Mathematik." *Studi Italiani di Filologia classica* **30** (1958) 1—51.

[59] SZABÓ, Á.: „A görög matematika definíciós-axiomatikus alapja." *Matematikai Lapok* (sajtó alatt).

[60] SZABÓ, Á.: „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik." *Mathematische Annalen* (sajtó alatt).

[61] SZABÓ, Á.: „A korai antik matematika." *Gondolat*, Budapest (sajtó alatt).

[62] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: „Spectral sets and normal dilatations of operators." *Proceedings of the International Congress of Mathematicians in Edinburgh* (sajtó alatt).

[63] SZŐKEFALVI-NAGY, B. (KORÁNYI Á.-mal együtt): „Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie." *Acta Mathematica (Uppsala)* (sajtó alatt).

[64] SZŐKEFALVI-NAGY, B. (C. FOIAS-sal együtt): „Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* (sajtó alatt).

[65] SZÜSZ, P.: „Über die Approximation einer reellen Zahl durch Brüche." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

[66] SZÜSZ, P.: „Über die metrische Theorie der diophantischen Approximation." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 177—194.

[67] SZÜSZ, P.—TURÁN, P. (ERDŐS P.-lal együtt): „Remarks to the theory of diophantine approximation." *Colloquium Mathematicum* **6** (1958) 119—126.

[68] TAMÁSSY J.-nét lásd: [10].

[69] TURÁN, P.: „A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence-circle." *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences (Belgrade)* **12** (1958) 19—26.

[70] TURÁN, P.: „On some one-sides theorems of the theory of diophantine approximation." *Jubilee Volume of the Indian Mathematical Society.*

[71] TURÁN, P.-lásd még: [14] [47], [67].

[72] VARGA, O.: „Normal Koordinaten in Kawaguchischen Räumen und seinen affinen Verallgemeinerungen sowie eine Anwendung derselben zur Bestimmung von Differentialinvarianten." *Mathematische Nachrichten* **18** (1958) 141—151.

[73] VINCZE, I.: „A selejthányad vizsgálata a matematikai statisztika módszerével." *Természettudományi Közlöny* **2** (1958) 405—407.

A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN HIÁNYOS BIBLIOGRÁFIAI ADATOKKAL SZEREPLŐ DOLGOZATOK PONTOS ADATAI*

I./3—4. : [1] EGERVÁRY, J. : „Begründung und Darstellung einer allgemeinen Theorie der Hängebrücken mit Hilfe der Matrizenrechnung." *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau* **16** (1956) 149—184.

I./3—4. : [30] BALÁZS, J—TURÁN, P. : „Notes on interpolation, III. (convergence)." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 195—214.

I./3—4. : [58] TURÁN, P. : „On the so-called density-hypothesis in the theory of the zeta-function of Riemann." *Acta Arithmetica* **4** (1958) 21—56.

I./3—4. : [65] VINCZE, I. (ERDŐS P.-lal együtt) : „Konvex, zárt síkgörbék megközelítéséről." *Matematikai Lapok* **9** (1958) 19—36.

II. : [3] EGERVÁRY, J. : „Über eine Verallgemeinerung der Purcellschen Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme." *Österreichisches Ingenieur-Archiv* **9** (1957) 249—251.

II. : [17] RÉNYI, A. : „On mixing sequences of sets." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 215—228.

II. : [18] RÉNYI. A. : „Quelques remarques sur les probabilités des événements dépendants." *Journal de Mathématiques Pures et Appliq ées* 1958, 393—398.

II. : [24] TAKÁCS, L. : „On the probability distribution of the measure of the union of random sets placed in a Euclidean space." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae (Sectio Mathematica)* 1 (1958) 89—95.

II. : [26] TAKÁCS, L. : „On a combined waiting time and loss problem concerning telephone traiff." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae (Sectio Mathematica)* 1 (1958) 73—82.

II. : [32] TAKÁCS, L. : „On a coincidence problem concerning telephone traffic." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 9 (1958) 45—81.

II. : [36] RÉNYI, A. : „Some remarks of univalent functions, II." *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A. I. Mathematica* 250 /29 (1958), *Helsinki*, 1—7.

II. : [39] TURÁN, P. : „On an inequality." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae (Sectio Mathematica)* 1 (1958) 3—6.

II. : [42] VINCZE, I. : „Bemerkung zur Theorie der Maximum-Modul von ganzen transcendenten Funktionen." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 19 (1958) 129—140.

II. : [48] CSÁSZÁR, Á. : „Sur les polynomes orthogonaux classiques." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae (Sectio Mathematica)* 1 (1958) 32—39.

II. : [49] CSÁSZÁR, Á. : „Sur une classe de structures topologiques générales." *Revue de Mathématique Pure et Appliquées* **2** (1957) 399—407.

II. : [51] CZIPSZER, J.—FREUD, G. : „Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynome trigonométrique et par ses dérivées successives." *Acta Mathematica (Uppsala)* **99** (1958) 33—52.

* A sorszám előtt a megfelelő dolgozatjegyzéket tartalmazó évfolyamra, illetve füzetre utalunk.

II. : [52] EGERVÁRY, J.—TURÁN, P.: Notes on Interpolation V. (On the stability of the interpolation on a finite interval), *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 259—267.

II. : [53] FREUD, G.—(T. GANELIUS-szal együtt): „Some remarks on one-sided approximation." *Mathematica Scandinavica* **5** (1957) 276—285.

II. : [54] G. FREUD—(T. GANELIUS-szal együtt): „Über die Asymptotik orthogonaler Polynome." *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **9** (1957) 19—32.

II. : [55] FREUD, G.: „Eine Bemerkung zur asymptotischen Darstellung von Orthogonalpolynomen." *Mathematica Scandinavica* **5** (1957) 285—290.

II. : [57] ERDŐS, P.–RÉNYI, A.—SZÜSZ, P.: „On Engel's and Sylvester's series." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae (Sectio Mathematica)* **1** (1958) 7—32.

II. : [67] SZŐKEFALVI-NAGY, B. (C. FOIAS-sal együtt): „Sur les contractions de l'espace de Hilbert, III." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **19** (1958) 26—45.

II. : [73] FENYŐ, I.: „A Mikusinski-féle operátorfogalom és a disztribució fogalma közti kapcsolatról." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **8** (1958) 385—392.

II. : [77] FREUD, G.: *Parciális differenciálegyenletek.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1958. (Műszaki matematikai gyakorlatok, B/VIII.)

II. : [88] CSÁSZÁR, Á.: „Megjegyzés Geőcze Zoárd függvényéhez." *Matematikai Lapok* **8** (1957) 268—271.

II. : [92] KALMÁR, L.: „Über arithmetische Funktionen von unendlich vielen Variablen, welche an jeder Stelle bloss von einer endlichen Anzahl von Variablen abhängig sind." *Colloquium Mathematicum* **5** (1957) 1—5.

II. : [95] VINCZE, I.: „Eine Bemerkung zur Differentialgeometrie der Flächen." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae (Sectio Mathematica)* **1** (1958) 71—72.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllősy Károly
A kézirat beérkezett: 1958. VIII. 15. Terjedelem: 12.25 (A/5) ív
46655/59 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

ÉRTESÍTÉS A II. MAGYAR MATEMATIKAI KONGRESSZUSRÓL

A Magyar Tudományos Akadémia és a Bolyai János Matematikai Társulat közösen rendezi meg Budapesten a II. Magyar Matematikai Kongresszust 1960. augusztus 24. és 31. között. A kongresszus megemlékezik Bolyai János halálának 100. évfordulójáról. A kongresszuson az alábbi szekciók fognak működni :

1. Algebra és számelmélet
2. Geometria és topológia
3. Analízis
4. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika
5. Matematikai logika és matematikai gépek elmélete
6. A matematika alkalmazásai
7. A matematika története és oktatása.

A kongresszus iránt érdeklődők forduljanak a kongresszus szervezőbizottságához. Cím : Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete, Budapest, V., Reáltanoda utca 13—15. A szervezőbizottság az érdeklődők címére rendszeresen megküldi a kongresszusra, vonatkozó tájékoztatókat.

СООБЩЕНИЕ О ВТОРОМ ВЕНГЕРСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ СЪЕЗДЕ

24—31-ого августа 1960-ого года в Будапеште состоится второй венгерский математический съезд. Съезд совместно организуют Венгерская Академия Наук и Математическое Общество имени Яноша Бояи. Съезд почтит памят Яноша Бояи, в связи со столетием со дня его смерти. На съезде будут работать следующие секции :

1. алгебра и теория чисел
2. геометрия и топология
3. анализ
4. теория вероятностей и математическая статистика
5. математическая логика и теория математических машин
6. приложения математики
7. история математики и преподавание математики.

Интересующиеся могут обратится к организационному комитету съезда. Адрес : Математический Институт Венгерской Академии Наук, Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15. Организационный комитет будет регулярно посылать интересующимся информацию относительнс съезда.

ANNOUNCEMENT OF THE II. HUNGARIAN MATHEMATICAL CONGRESS

The II. Hungarian Mathematical Congress will take place from 24th to 31st of August 1960, in Budapest, as organised jointly by the Hungarian Academy of Sciences and the János Bolyai Mathematical Society. The Congress will commemorate of János Bolyai, at the occasion of the centenary of his death.

Within the scope of the Congress the following sections will work :

1. Algebra and number theory
2. Geometry and topology
3. Analysis
4. Probability theory and mathematical statistics
5. Mathematical logic and theory of mathematical machines
6. Applications of mathematics
7. History of mathematics and mathematical education

Those who show an interest in the Congress should apply to the Organizing Committee. Address : Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15. The Organizing Committee will regularly supply the inquirers with further informations concerning the Congress.

COMMUNICATION SUR LE DEUXIÈME CONGRÈS MATHÉMATIQUE HONGROIS

L'Académie des Sciences de Hongrie et l'Association Mathématique János Bolyai organiseront en commun le deuxième Congrès Mathématique Hongrois qui se tiendra à Budapest du 24 au 31 Août 1960. Pendant le Congrès aura lieu la commémoration du 100-ième anniversair de la mort de János Bolyai.

Dans le cadre du Congrès prendron part les sections suivantes :

1. Algèbre et théorie des nombres
2. Géométrie et topologie
3. Analyse mathématique
4. Calcul des probabilités et statistique mathématique
5. Logique mathématique et théorie des machines mathématiques
6. Application des mathématiques
7. Histoire et enseignement des mathématiques.

Les personnes intéressées au Congrès sont priées de s'informer auprès du Comité d'Organisation du Congrès. Adresse : Institut de Mathématique de l'Académie des Sciences de Hongrie, Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15.

Le Comité d'organisation enverra systématiquement à l'adresse des intéréssés les informations relatives à ce Congrès.

BEKANNTMACHUNG ÜBER DEM II. UNGARISCHEN MATHEMATISCHEN KONGRESS

Der II. Ungarische Mathematische Kongreß wird vom 24. bis 31. August 1960 in Budapest stattfinden. Der Kongreß wird eine gemeinsame Veranstaltung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der János Bolyai Mathematischen Gesellschaft sein. Am Kongreß wird man János Bolyai, anläßlich des 100. Jahrestages seines Todes, gedenken. Im Rahmen des Kongreßes werden die folgenden Sektionen tagen :

1. Algebra und Zahlentheorie
2. Geometrie und Topologie
3. Analysis
4. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik
5. Mathematische Logik und Theorie der mathematischen Maschinen
6. Anwendungen der Mathematik
7. Geschichte und Unterricht der Mathematik.

Die sich für den Kongreß Interessierenden sollen sich zum Organisationsausschuß des Kongresses wenden. Adresse : Mathematisches Institut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15. Die Organisationsausschuß wird den Interessierten regelmäßig weitere Auskunft über dem Kongreß erteilen.

СОДЕРЖАНИЕ

Ára: 30,—Ft

INDEX