A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XX. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1971

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÖNYVKRITIKA

INDEX

FROM THE FOREIGN LITERATURE

BOOK REVIEWS

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XX. KÖTET 1–2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1971

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XX. kötet 1—2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye-változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Pénztorgalmi jelzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

RÉNYI ALFRÉD
1921—1970

Mély megrendüléssel vette tudomásul a magyar és a nemzetközi tudományos világ Rényi Alfréd akadémikus korai elhunytát. 1970. február hó 1-én, rövid súlyos betegség vetett véget váratlanul egy rendkívül gazdag életpályának. Rényi Alfrédban a magyar tudomány a valószínűségszámításnak, a matematikai statisztikának és a matematika sok más ágának nemzetközi tekintélyű művelőjét veszítette el.

Tudományos munkásságát állami és társadalmi elismerés övezte. Kétszeres Kossuth-díjas, fiatalon a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja, a Matematikai Kutató Intézet igazgatója, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Valószínűségszámítási Tanszékének tanszékvezető tanára, a Bolyai János Matematikai Társulat Elnökségének tagja, a Magyar Népköztársasági Érdemrend tulajdonosa volt.

Úttörő szerepet játszott abban is, hogy a matematikai módszerek ipari, gazdasági és közgazdasági alkalmazást nyertek.

Személyében nemcsak kiváló tudóst, hanem lelkes pedagógust is gyászolnak barátai, munkatársai, tanítványai. Halálával számos hazai tudományos és oktatási testületet ért pótolhatatlan veszteség.

Rényi Alfréd emléke tovább él mindazokban, akik ismerték, becsülték és szerették, de túl a kortársak emlékezetén halhatatlanná lett műveiben, számos cikkében és könyvében.

RÉNYI ALFRÉD MUNKÁSSÁGA*

1. *Cauchy—Fourier sorok szummálhatóságáról*[1]. Doktori értekezés, Szeged, 1945. Kézirat.
2. On a Tauberian theorem of O. Szász, *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1946/48) 119—123.
3. Integral formulae in the theory of convex curves, *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1946/48) 158—166.
4. On the minimal number of terms of the square of a polynomial, *Hung. Acta Math.* **1** (1946/49) No. 2, 30—34.
5. O predsztavlenii csetnüh csiszel v vide szummü odnogo prosztogo i ognogo pocsti-prosztogo csiszla, *Dokl. Akad. Nauk SzSzSzR* **56** (1947) 455—458.
6. *O predsztavlenii csetnüh csiszel v vide szummü prosztogo i odnogo pocsti-prosztogo csiszla.* Kandidátusi disszertáció. Leningrád, 1947. (Kézirat.)
7. Ob odnom novom primenenii metoda akademika I. M. Vinogradova, *Dokl. Akad. Nauk SzSzSzR* **56** (1947) 675—678.

* Összeállította Medgyessy Pál. E felsorolásban nem szerepelnek könyvismertetések, új folyóiratokhoz írt előszók, hazai kongresszusokon, stb. tartott előadásoknak a Matematikai Lapokban megjelent kivonatai, az MTA Alkalmazott Matematikai (később: Matematikai Kutató-) Intézetében szemináriumokon tartott előadásoknak az Intézet Közleményeiben megjelent kivonatai, az MTA III. Osztályán osztálytitkári minőségében tartott beszámolók, matematikai vonatkozások nélküli cikkek, hozzászólások é. i. t.

[1] Feltételezett cím.

8. O nekotorüh gipotezah teorii harakterov Dirihle, (JU. V. LINNIKkel), *Izv. Akad. Nauk SzSzSzR* **11** (1947) 539—546.
9. O predsztavlenii csetnüh csiszel v vide szummü prosztogo i pocsti-prosztogo csiszla, *Izv. Akad. Nauk SzSzSzR* **12** (1948) 57—78. *(Vö.: 6.)*
10. Játék a véletlennel, *Középisk. Mat. Lapok* **1** (1948) 101—111.
11. Játék a véletlennel, II., *Középisk. Mat. Lapok* **1** (1948) 144—157.
12. Simple proof of a theorem of Borel and of the law of the iterated logarithm, *Mat. Tidsskrift B*, 1948, 41—48.
13. Remarque à la note précédente (A következő cikkhez: G. ALEXITS: Sur la convergence des séries lacunaires, *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1946/48) 251—253.), *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1946/48) 253.
14. *Generalization of the „large sieve" of Ju. V. Linnik*, Math. Centrum, Amsterdam, 1948. 5 p. (Kőnyomatos.)
15. *On the zeros of the L-function of Dirichlet*, Math. Centrum, Amsterdam, 1948. 4 p. (Kőnyomatos.)
16. *Proof of the theorem that every integer can be represented as the sum of a prime and an almost prime*, Math. Centrum, Amsterdam, 1948. 3 p. (Kőnyomatos.)
17. O predsztavlenii csiszel 1, 2, ..., *N* poszredsztvom raznosztej, (RÉDEI LÁSZLÓval), *Mat. Szbornik* **24** (1949) 385—389.
18. Some remarks on independent random variables, *Hung. Acta Math.* **1** (1946/49) No. 4, 17—20.
19. On the measure of equidistribution of point sets, *Acta Sci. Math. Szeged* **13** (1949) 77—92.
20. Un nouveau théorème concernant les fonctions indépendantes et ses applications à la théorie des nombres, *Jour. Math. Pures Appl.* **28** (1949) 137—149.
21. A szovjet matematika 30 éve, Természet és Technika **108** (1949) 220—226.
22. Probability methods in number theory, *Publ. Math. Coll., Budapest* **1** (1949) No. 21. 9 p.
23. Sur un théorème général de probabilité, *Annales Inst. Fourier* **1** (1949) 43—52.
24. On the coefficients of schlicht functions, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949) 18—23.
25. A szovjet matematika 30 éve. I. A valószínűségszámítás megalapozásáról, *Mat. Lapok* **1** (1949/50) 27—64.
26. On a theorem of Erdős and Turán, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950) 7—10.
27. Some problems and results on consecutive primes, (ERDŐS PÁLlal), *„Simon Stevin"* **27** (1949/50) 115—125.
28. A szovjet matematika 30 éve, II. A valószínűségszámítás új irányai, *Mat. Lapok* **1** (1949/50) 91—137.
29. On the large sieve of Ju. V. Linnik, *Comp. Math.* **8** (1950) 68—75.
30. On the geometry of conformal mapping, *Acta Sci. Math. Szeged.* **12** (1950) Pars B, 215—222.
31. On the algebra of distributions, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1950) 135—149.
32. Az aprítás matematikai elméletéről, *Építőanyag* **2** (1950) 9—10. szám, 7 p.
33. A Newton-féle gyökközelítő eljárásról, *Mat. Lapok* **1** (1949/50) 278—293.
34. On the summability of Cauchy—Fourier series, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1950) 162—164. *(Vö.: 1.)*
35. Ob odnoj obscsej teoreme teorii verojatnosztej i ejo primenenii v teorii csiszel. Zprávy o společnem 3. sjezdu matematiků Československých a 7. sjezdu matematiků Polských, Praha, 1950. *Časopis Pěst. Mat. Fys.* **74** (1949) 167—175.
36. K teorii predel' nüh teorem dlja szumm nezaviszimüh szlucsajnüh velicsin, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **1** (1950) 99—108.
37. Harc a formalizmus ellen a matematika tanításában. *A középiskolai matematikatanítás kérdései.* Szocialista Nevelés Kiskönyvtára. 4. sz. Közoktatásügyi Kiadó Vállalat, Budapest, 1950; pp. 24—28.
38. Remarks concerning the zeros of certain integral functions. *C. R. Acad. Bulg. Sci.* **3** (1950) No. 2—3, 9—10.
39. On composed Poisson distributions, I., (JÁNOSSY LAJOSsal és ACZÉL JÁNOSsal.), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **1** (1950) 209—224.
40. *Valószínűségszámítás*[2], 1949—50. I. f. é.—II. f. é. Egyetemi jegyzet. A Debreceni Tudományegyetem Matematikai Intézete, Debrecen, 1950.
41. *Valószínűségszámítás*[3]. Egyetemi jegyzet. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kara, Budapest, 1950.

[2] Feltételezett cím.
[3] Feltételezett cím. Valószínűleg részekre tagolva jelent meg.

42. A valószínűségszámítás központi határértéktételének egy új általánosításáról, *MTA III. Oszt. Közl.* **1** (1951) 351—355. *(Vö. 36.)*
43. A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének feladatairól, *Akad. Ért.* **58** (1951) 483. füzet, 1951 január—február, 20—26.
44. A Poisson-eloszlás problémaköréről, *MTA III. Oszt. Közl.* **1** (1951) 202—212.
45. On some problems concerning Poisson processes, *Publ. Math. Debrecen* **2** (1951) 66—73.
46. Sur l'indépendance des domaines simples dans l'espace euclidien à *n* dimensions, (Rényi Katóval és Surányi Jánossal), *Colloqu. Math.* **2** (1951) 130—135.
47. Összetett Poisson-eloszlásokról, I., (Jánossy Lajossal és Aczél Jánossal), *MTA III. Oszt. Közl.* **1** (1951) 315—328. *(Vö.: 39.)*
48. Ob osznovah teorii verojatnosztej, *Annuaire Fac. Sci. Phys. Math., Univ. Sofia*, Livre 1, Partie 1. **47** (1951) 227—236.
49. *Základy theorie pravděpodobnosti*, Mat. Ustav Československe Akad. Věd., *Praha*, 1951. 10 p. (Kőnyomatos.) *(Vö.: 48.)*
50. On composed Poisson distributions, II., *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **2** (1951) 83—98.
51. Összetett Poisson-eloszlásokról, II., *MTA III. Oszt. Közl.* **1** (1951) 329—341. *(Vö.: 50.)*
52. Két bizonyítás Jánossy Lajos egy tételére, (Turán Pállal), *MTA III. Oszt. Közl.* **1** (1951) 369—370.
53. Hozzászólás. (A következőhöz: Hőmunkások víz- és sóanyagcseréje. — A matematikai statisztika módszereinek alkalmazása az orvostudományban. Orvosi Hetilap **92** (1951) 29. szám. 20 p.), *Orvosi Hetilap*, **92** (1951) 29. szám. 6 p.
54. On the approximation of measurable functions, (Pukánszky Lajossal), *Publ. Math. Debrecen* **2** (1951) 146—149.
55. *Komplex függvénytan.* Egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó, 1. Jegyzetsokszorosító, Budapest, 1951. 34 p.
56. *Komplex függvénytan.* Egyetemi jegyzet. VKM 2. Jegyzetsokszorosító, Budapest, 1951. 59 p.
57. Sztochasztikus függetlenség és teljes függvényrendszerek, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei.* 1950. augusztus 27.—szeptember 2. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952; pp. 299—308.
58. Sztohaszticseszkaja nezaviszimoszt' i pol'nie szisztemü funkcij. *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei.* 1950. augusztus 27.—szeptember 2. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952; pp. 309—316. *(Vö.: 57.)*
59. On a conjecture of H. Steinhaus, *Annales Soc. Polon. Math.* **25** (1952) 279—287.
60. Hozzászólás. (A következőhöz: Kalmár László: A matematika alapjaival kapcsolatos újabb eredmények, *MTA III. Oszt. Közl.* **2** (1952) 89—103.) *MTA III. Oszt. Közl.* **2** (1952) 104—107.
61. Új eredmények a valószínűségszámítás terén, *MTA III. Oszt. Közl.* **2** (1952) 125—139.
62. Ismertetés A. Ja. Hincsin „A statisztikai mechanika analitikus módszerei" c. könyvéről, (Fényes Imrével), *MTA III. Oszt. Közl.* **2** (1952) 275—280.
63. A valószínűségszámítás elvi kérdései a dialektikus materializmus megvilágításában, *Filozófiai Évkönyv, 1952.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952; pp. 63—97.
64. On projections of probability distributions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952) 131—142.
65. Jordan Károly matematikai munkásságáról, *Mat. Lapok* **3** (1952) 111—121.
66. Gépalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószínűségszámítási meghatározása, (Szentmártony Tiborral), *Mat. Lapok* **3** (1952) 129—139.
67. Gépipari üzemek elektromos energiaszükségletének és egyidejűségi, illetőleg szükségleti tényezőjének valószínűségszámítási meghatározása, (Szentmártony Tiborral), *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **1** (1952) 85—104.
68. Kompresszorok és légtartályok racionális méretezése üzemek sűrített levegővel való ellátására, *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **1** (1952) 105—138.
69. Poisson-folyamatok által származtatott történés-folyamatokról és azok technikai és fizikai alkalmazásairól, (Takács Lajossal), *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **1** (1952) 139—146.
70. Megjegyzések Gombás Pál és Gáspár Rezső egy dolgozatához, *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **1** (1952) 393—397.
71. On the zeros of polynomials, (Turán Pállal), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952) 275—284.
72. Bolyai János, a tudomány nagy forradalmára, *Mat. Lapok* **3** (1952) 173—178.
73. Valószínűségszámítás[4]. Egyetemi jegyzet. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1952.
74. H. Steinhaus egy sejtéséről, *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 37—44. *(Vö.: 59.)*
75. Ukreplenie szvjazi matematiki sz praktikoj, Priroda, 1953, 69—73.

[4] Feltételezett cím. Részekre tagolva jelent meg.

76. Poznámka u uhlech mnohoúhelnika. *Časopis Pěst. Mat.* **78** (1953) 305—306.
77. Valószínűség-eloszlások vetületeiről, *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 59—69. *(Vö.: 64.)*
78. Bolyai János felfedezésének tudományos és világnézeti jelentősége, *Természet és Technika* **112** (1953) 1—3.
79. A Bolyai—Lobacsevszkij geometria világnézeti jelentősége, *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 253—273.
80. Ideologický význam geometrie Bolyai—Lobačevského, *Časopis Pěst. Mat.* **78** (1953) 149—168. *(Vö.: 79.)*
81. Hozzászólás. (A következőhöz: JÁNOSSY LAJOS: Beszámoló a berlini fizikus kongresszus egyes problémáiról, *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 323—325.), *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 326—327.
82. Hozzászólás. (A következőhöz: GOMBÁS PÁL: Elméleti fizikai kutatásokban alkalmazott matematikai módszerek különös tekintettel a kvantummechanikai közelítő módszerekre, *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 329—340.) *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 344—347.
83. Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája a valószínűségszámítás ipari alkalmazásai terén, *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 363—372.
84. On the theory of order statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953) 191—231.
85. A rendezett minták elméletéről, *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 467—503. *(Vö.: 84.)*
86. Eine neue Methode in der Theorie der geordneten Stichproben, *Bericht über die Mathematiker-Tagung in Berlin,* Januar 1953. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1953; pp. 203—212.
87. Hozzászólás. (A következőhöz: *Ankét* O. J. SMIDT *„Négy előadás a Föld keletkezésének elméletéről" című könyvéről, MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 579—601.) *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953) 595—600.
88. Kémiai reakciók tárgyalása a sztochasztikus folyamatok elmélete segítségével, *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **2** (1953) 83—101.
89. Újabb kritériumok két minta összehasonlítására, *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **2** (1953) 243—265.
90. *A valószínűségszámítás alapfogalmairól.* A Mérnöki Továbbképző Intézet előadássorozatából. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1953. 51 p.
91. A raktárkészlet pótlásáról, I., (PALÁSTI ILONÁval, SZENTMÁRTONY TIBORral és TAKÁCS LAJOSsal), *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **2** (1953) 187—201.
92. *Valószínűségszámítás*[5]. Egyetemi jegyzet. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1953.
93. Základni problémy počtu pravděpodobnosti ve světle dialektického materialismu, *Časopis Pěst. Mat.* **79** (1954) 189—218. *(Vö.: 63.)*
94. Elementary proofs of some basic facts concerning order statistics, (HAJÓS GYÖRGYgyel), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954) 1—6.
95. Ideologicseszkoe znacsenie geometrii Bojai—Lobacsevszkogo. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954) Supplementum, 21—42. *(Vö.: 79.)*
96. A valószínűségszámítás új axiomatikus felépítése, *MTA III. Oszt. Közl.* **4** (1954) 369—427.
97. A valószínűségszámítás történetének rövid áttekintése, *MTA III. Oszt. Közl.* **4** (1954) 447—466.
98. *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
99. Elemi bizonyítások a rendezett minták elméletének néhány alapvető összefüggésére, (HAJÓS GYÖRGYgyel.), *MTA III. Oszt. Közl.* **4** (1954) 467—472. *(Vö.: 94.)*
100. A kémiai frakcionáló megosztás matematikai tárgyalása nem-teljes diffúzió esetében, (MEDGYESSY PÁLlal, TETTAMANTI KÁROLYlyal és VINCZE ISTVÁNnal), *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **3** (1954) 81—97.
101. A komplex potenciál egyrétűségéről, I., (RÉNYI KATÓval), *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **3** (1954) 353—367.
102. Die prinzipiellen Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Lichte des dialektischen Materialismus, *Philosophisches Jahrbuch,* 1952. Zusammenfassung. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954; pp. 7—8.
103. Hozzászólás. (A következőhöz: SEDLMAYER KURT: Nagyobb termések elérésének tudományos alapjai, *MTA IV. Oszt. Közl.* **5** (1954).) *MTA IV. Oszt. Közl.* **5** (1954) 138—200.
104. Egy lucerna nemesítésével kapcsolatos kombinatorikai problémáról. (Előadás. Matematikai Statisztikai Kollokvium. 1954. szeptember hó 27.—29., Jósvafő.) Kivonat: *Az 1954. szeptember hó 27.-étől 29.-éig Jósvafőn, a Bolyai János Matematikai Társulat által rendezett Matematikai Kollokviumon elhangzott előadások kivonatai.* Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1954; pp. 13—15.

[5] Feltételezett cím. Részekre tagolva jelent meg.

105. Megoldatlan problémák a rendezett minták elméletében. — Referátum. (Előadás: Matematikai Statisztikai Kollokvium. 1954. szeptember hó 27.—29., Jósvafő.) Kivonat: *Az 1954. szeptember hó 27.-étől 29.-éig Jósvafőn, a Bolyai János Matematikai Társulat által rendezett Matematikai Statisztikai Kollokviumon elhangzott előadások kivonatai.* Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1954; pp. 18—20.
106. Egy kombinatorikai probléma, amely a lucerna nemesítésével kapcsolatban merült fel, *Mat. Lapok* **6** (1955) 151—164. *(Vö.: 104.)*
107. Bizonyos trigonometrikus rendszerek teljességéről, (CZIPSZER JÁNOSsal), *MTA III. Oszt. Közl.* **5** (1955) 391—410.
108. A matematika fejlődése hazánkban a felszabadulás óta, (ALEXITS GYÖRGYgyel és HAJÓS GYÖRGYgyel), *A magyar tudomány tíz éve.* 1945—1955. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955; pp. 87—106.
109. Generalization of an inequality of Kolmogorov, (J. HÁJEKkel), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955) 281—283.
110. On a new axiomatic theory of probability, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955) 285—335.
111. *A sztochasztikus folyamatok elméletéről és annak néhány műszaki alkalmazásáról.* (Mérnöki Továbbképző Intézet előadássorozatából.) Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1955. 78 p.
112. On the density of certain sequences of integers, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci., Beograd* **8** (1955) 157—162.
113. *Matematikai Statisztika*[6]. Egyetemi jegyzet. Jegyzetsokszorosító, Budapest, 1955.
114. Szakkörökben elvégezhető valószínűségszámítási kísérletekről. *Előadások az iskolai matematika köréből.* A Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa. Tankönyvkiadó, Budapest, 1956; pp. 135—150.
115. Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in Berlin,* Oktober, 1954. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956; pp. 7—15.
116. An inequality for uncorrelated random variables, (ZERGÉNYI ERZSÉBETtel), Czech. Math. Jour. 6/81 (1956) 415—419.
117. A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle előállításaiban, *Mat. Lapok* **7** (1956) 77—100.
118. On some combinatorical problems, (ERDŐS PÁLlal), *Publ. Math. Debrecen* **4** (1955/56) 398—405.
119. O predel'nom raszpredelenii dlja szumm nezaviszimüh szlucsajnüh velicsin na bikompaktnüh kommutativnüh topologicseszkih gruppah, (K. URBANIKkal és PRÉKOPA ANDRÁSsal), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956) 11—16.
120. On conditional probability spaces generated by a dimensionally ordered set of measures, *Teorija Verojatnosztej* **1** (1956) 61—71.
121. Az entrópia fogalmáról, (BALATONI JÁNOSsal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **1** (1956) 9—40.
122. Az ingerületátvitel valószínűsége egy egyszerű konvergens kapcsolású interneuronális synapsismodellben, (SZENTÁGOTHAI JÁNOSsal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **1** (1956) 83—91.
123. On the number of zeros of successive derivatives of analytic functions, (ERDŐS PÁLlal), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956) 125—144.
124. Az árrendezés problémájáról. (BRÓDY ANDRÁSsal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **1** (1956) 325—335.
125. A Monte-Carlo módszer mint minimax stratégia. (PALÁSTI ILONÁval), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **1** (1956) 529—545.
126. Discussion on Dr. David's and Dr. Johnson's paper. [A következőhöz: *F. N. David and N. L. Johnson:* Some tests of significance with ordered variables. *Jour. Roy. Stat. Soc. Ser. B,* **18** (1956) 1—20.], *Jour. Roy. Stat. Soc. Ser. B,* **18** (1956) 29.
127. A Poisson-folyamat egy jellemzése, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **1** (1956) 519—527.
128. On the independence in the limit of sums depending on the same sequence of independent random variables, (PRÉKOPA ANDRÁSsal), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956) 319—326.
129. On a new axiomatic foundation of the theory of probability. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* 1954. Amsterdam September 2—September 9. Vol. I. Noordhoff N. V., Groningen—North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1957; pp. 506—507.
130. On the theory of order statistics. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* 1954. Amsterdam September 2—September 9. Vol. I. Noordhoff N. V., Groningen—North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1957; pp. 508—509.
131. A new deduction of Maxwell's law of velocity distribution, *Izvestija Mat. Inszt. Szofija* **2** (1957) 45—53.

[6] Feltételezett cím. Valószínűleg részekre tagolva jelent meg.

132. Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein polynomials, (ARATÓ MÁTYÁSsal), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 91—98.
133. On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 193—199.
134. On the number of zeros of successive derivatives of entire functions of finite order, (ERDŐS PÁLlal), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 223—225.
135. A probabilistic approach to problems of diophantine approximation, (ERDŐS PÁLlal), *Illinois Jour. Math.* **1** (1957) 303—315.
136. Mathematical Notes, II. On the sequence of generalized partial sums of a series, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1957/58) 129—141.
137. A remark on the theorem of Simmons, *Acta Sci. Math. Szeged* **18** (1957) 21—22.
138. Valós számok előállítására szolgáló algoritmusokról, *MTA III. Oszt. Közl.* **7** (1957) 265—293.
139. Representations for real numbers and their ergodic properties, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 477—493.
140. Az $L(z)$ valószínűség-eloszlásfüggvényről, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **2** (1957) 43—50.
141. Szénszemcsés ellenállások vizsgálata valószínűségszámítási módszerrel, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **2** (1957) 247—256.
142. Über den Begriff der Entropie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, (Előadás: *IV. Österreichischer Mathematikerkongress Wien*, 17.—22. IX. 1956.) Kivonat: *Nachr. Österr. Math. Ges. Beilage zu „Internat. Math. Nachr."* **11** (1957) April, NR. 47/48, Sondernummer, 83.
143. Über den Begriff der Entropie, (BALATONI JÁNOSsal), *Arbeiten zur Informationstheorie.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957; pp. 117—134. *(Vö.: 121.)*
144. On a theorem of Erdős—Kac, (TURÁN PÁLlal), *Acta Arith.* **4** (1958) 71—84.
145. Some remarks on univalent functions, *Izvesztija Mat. Inszt. Szofija* **3** (1958/59) 111—121.
146. Some remarks on univalent functions, II., *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Series A. I. Mathematica.* 250/29. Suomalainen Tiedeakatemia, Helsinki, 1958. 7 p.
147. Quelques remarques sur les probabilités d'événements dépendants, *Jour. Math. Pures Appl.* (9) **37** (1958) 393—398.
148. On mixing sequences of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958) 215—228.
149. Egy egydimenziós véletlen térkitöltési problémáról, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **3** (1958) 109—127.
150. On Engel's and Sylvester's series, (ERDŐS PÁLlal és SZÜSZ PÉTERrel), *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.* **1** (1958) 7—32.
151. Probability methods in number theory, (kínai nyelven), *Shuxue Jinzhan* **4** (1958) 465—510.
152. On Cantor's products, *Colloqu. Math.* **6** (1958) 135—139.
153. On mixing sequences of random variables, (RÉVÉSZ PÁLlal), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958) 389—393.
154. On sigular radii of power series, (ERDŐS PÁLlal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **3** (1958) 159—169.
155. On the probabilistic generalization of the large sieve of Linnik, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **3** (1958) 199—206.
156. *Matematikai statisztika* IV. éves alkalmazott matematika szakos hallgatók számára. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1958. 211 p.
157. Some further statistical properties of the digits in Cantor's series, (ERDŐS PÁLlal.), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 21—29.
158. On random graphs I., (ERDŐS PÁLlal), *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959) 290—297.
159. On a theorem of P. Erdős and its application in information theory, *Mathematica, Cluj* **1** (24) (1959) 341—344.
160. On the dimension and entropy of probability distributions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 193—215.
161. New version of the probabilistic generalization of the large sieve, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 217—226.
162. On the central limit theorem for samples from a finite population, (ERDŐS PÁLlal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **4** (1959) 49—51.
163. Some remarks on the theory of trees, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **4** (1959) 73—85.
164. On Cantor's series with convergent $\Sigma 1/q_n$, (ERDŐS PÁLlal), *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.* **2** (1959) 93—109.
165. Autoklávok soros és párhuzamos kapcsolásáról és a keverés elméletéről, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **4** (1959) 155—165.
166. On measures of dependence, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 441—451.
167. On connected graphs, I. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **4** (1959) 385—388.

168. Summation methods and probability theory, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **4** (1959) 389—399.
169. On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **11** (1960) 97—102.
170. Additive properties of random sequences of positive integers, (ERDŐS PÁLlal), *Acta Arithm.* **6** (1960) 83—110.
171. Bolyongási problémákra vonatkozó határeloszlástételek, *MTA III. Oszt. Közl.* **10** (1960) 149—169.
172. On the evolution of random graphs, (ERDŐS PÁLlal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **5** (1960) 17—61.
173. Probabilistic methods in number theory, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* 14—21 August 1958. (Edinburgh.) Cambridge U. P., London, 1960; pp. 529—539.
174. Az információelmélet néhány alapvető kérdése, *MTA III. Oszt. Közl.* **10** (1960) 251—282.
175. Dimension, entropy and information, *Transactions of the Prague Conference on information theory, statistical decision functions, random processes* held at Liblice near Prague, from June 1 to 6, 1959. Publ. House of the Czech. Acad. Sci., Prague, 1960; pp. 545—556.
176. Bemerkungen zur Arbeit „Über gewisse Elementenfolgen des Hilbertschen Raumes" von K. KONCZ, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **5** (1960) 265—267.
177. Üzletek áruellátásával kapcsolatos szélsőértékfeladatok, (ZIERMANN MARGITtal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **5.** B (1960) 495—506.
178. Turán Pál matematikai munkásságáról, *Mat. Lapok* **11** (1960) 229—263.
179. On the evolution of random graphs, (ERDŐS PÁLlal), *Bull. Inst. Internat. Stat.* **38** (1961) 4ᵉ Livraison, 343—347.
180. On measures of entropy and information, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.* Held at the Statistical Laboratory, University of California, June 20—July 30. 1960. Vol. 1. University of California Press, Berkeley—Los Angeles, 1961; pp. 547—561.
181. Egy általános módszer valószínűségszámítási tételek bizonyítására és annak néhány alkalmazása, *MTA III. Oszt. Közl.* **11** (1961) 79—105.
182. On random generating elements of a finite Boolean algebra, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961) 75—81.
183. On the strength of connectedness of a random graph, (ERDŐS PÁLlal), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961) 261—267.
184. On a classical problem of probability theory, (ERDŐS PÁLlal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **6.**A (1961) 215—220.
185. On Kolmogorov's inequality, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **6.**A (1961) 411—415.
186. Legendre polynomials and probability theory, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.* **3—4** (1960/61) 247—251.
187. Egy információelméleti problémáról, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **6.**B (1961) 505—516.
188. On random subsets of a finite set, *Mathematica, Cluj* **3** (26) (1961) 355—362.
189. Über verschiedene Masszahlen von Entropie und Informationsgewinn, (Előadás: V. Österreichischer Mathematikerkongress, Innsbruck, 12.—17. IX. 1960.) Kivonat: *Nachr. Österr. Math. Ges. Beilage zu „Internat. Math. Nachr."* **15** (1961) Jänner, NR. 66, Sondernummer, 79—80.
190. On different measures of information. (Előadás: Második Magyar Matematikai Kongresszus, Budapest, 1960. augusztus 24.—31.) Kivonat: *Deuxième Congrès Mathématique Hongrois,* Budapest, 24.—31. August 1960, II. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961; pp. 26—28.
191. Gondolatok a matematikus képzés továbbfejlesztéséről, *Magyar Tudomány* **6** (1961) 593—600.
192. Statistical laws of accumulation of information, *Bull. Inst. Internat. Stat.* **39** (1962) 2ᵉ Livraison, 311—316.
193. Az információ-akkumuláció statisztikus törvényszerűségeiről, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **12** (1962) 15—33.
194. Egy megfigyeléssorozat kiemelkedő elemeiről, *MTA III. Oszt. Közl.* **12** (1962) 105—121.
195. Three new proofs and a generalization of a theorem of Irving Weiss, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **7.** A (1962) 203—214.
196. Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations, *Annales Fac. Sci. Univ. Clermont-Ferrand* **2** (1962) No. 8, 7—12.
197. Dialógus a matematikáról, *Valóság,* 1962, 3. szám, 40—56.
198. On a problem of A. Zygmund, (ERDŐS PÁLlal), *Studies in mathematical analysis and related topics,* Essays in honor of George Pólya. Stanford Univ. Press, Stanford, Cal., 1962; pp. 110—116.

199. A new approach to the theory of Engel' series, *Annales Univ. Budapest. Sect. Math.* **5** (1962) 25—32.
200. On the representation of an even number as the sum of a prime and of an almost prime. *American Mathematical Society. Translations.* Series 2. Vol, 19. American Mathematical Society, Providence, 1962; pp. 299—321. *(Vö.: 9.)*
201. Egy gráfelméleti problémáról, (ERDŐS PÁLlal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 7.B (1962) 623—641.
202. A matematika alkalmazásairól tartandó vita tézisei, *Magyar Tudomány* 7 (69) (1962) 553—559.
203. On the theory of outstanding observations. (Előadás: International Congress of Mathematicians, Stockholm 1962.) Kivonat: *International Congress of Mathematicians*, Abstracts of short communications. Stockholm 1962. Almqvist and Wiksells, Uppsala, 1962; pp. 165—166.
204. Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations. *Colloquium on Combinatorial Methods in Probability Theory.* August 1—10, 1962. Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Danmark, 1962; pp. 104—117.
205. *Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
206. *Sur les graphes aléatoires* (I). *L'évolution des graphes aléatoires. — Sur les graphes aléatoires II. Symetrie et asymetrie des graphes aléatoires.* Institut H. Poincaré, Paris, 1962. 20 p. (Sokszorosított kézirat.)
207. Remarks on a problem of Obreanu, (ERDŐS PÁLlal), *Canadian Math. Bull.* **6** (1963) 267—273.
208. Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten, (R. SULANKEvel), *Zeitschr. Wahrscheinlichkeitstheorie* 2 (1963/64) 75—84.
209. On stable sequences of events. *Sankhyā*, Ser. A, **25** (1963) 293—302.
210. On the distribution of values of additive number-theoretical functions, *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963) 264—273.
211. A study of sequences of equivalent events as special stable sequences, (RÉVÉSZ PÁLlal), *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963) 319—325.
212. On „small" coefficients of the power series of an entire function, (RÉNYI KATÓval), *Annales Univ. Budapest. Sect. Math.* **6** (1963) 27—38.
213. On two problems of information theory, (ERDŐS PÁLlal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **8**.A (1963) 229—243.
214. On random matrices, (ERDŐS PÁLlal), *Mat. Kut. Int. Közl.* **8**.A (1963) 455—461.
215. An elementary inequality between the probability of events, (J. NEVEUvel és ERDŐS PÁLlal), *Math. Scand.* **13** (1963) 99—104.
216. Asymmetric graphs, (ERDŐS PÁLlal), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **14** (1963) 295—315.
217. Un dialogue. *Les cahiers rationalistes*, **33** (1963) janvier—février, Nos. 208—209, 4—32. *(Vö.: 196.)*
218. Blaise Pascal. 1623—1662. *Magyar Tudomány* **8** (70) (1963) 102—108.
219. Megjegyzések egyes „megjegyzések"-hez. [A következőhöz: TEKSE KÁLMÁN: Néhány megjegyzés RÉNYI A. „A matematika alkalmazásairól tartandó vita téziseiről" című cikkéhez. *Magyar Tudomány* **8** (70) (1963) 46—50.], *Magyar Tudomány* **8** (70) (1963) 419—429.
220. Über stabile Folgen von Ereignissen und Zufallsveränderlichen. (Előadás: Tagung über Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Oberwolfach, 4.—8. März 1963.) Kivonat: *Tagungsbericht. Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie.* Oberwolfach, 4.—8. März 1963. Mathematisches Forschungsinstitut, Oberwolfach, 1963. (Sokszorosított kézirat.)
221. Dialógus a matematikáról. (Részletek.) *A matematika tanítása.* Szemelvénygyüjtemény. (Szerkesztette Varga Tamás.) Kézirat (255—504). Tankönyvkiadó, Budapest, 1963; pp. 381—415. *(Vö.: 197.)*
222. Dialógus a matematika tanításáról. *A matematika tanítása.* Szemelvénygyűjtemény. (Szerkesztette Varga Tamás.) (Kézirat (255—504.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1963; pp. 365—380.
223. Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten, II., (R. SULANKEvel), *Zeitschr. Wahrscheinlichkeitstheorie* 3 (1964/65) 138—147.
224. Információelmélet a nyelvészetben. *Általános nyelvészeti tanulmányok. II.* A matematikai nyelvészet és a gépi fordítás kérdései. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964; pp. 245—251.
225. *Additive and multiplicative number-theoretical functions.* University of Michigan, Ann Arbor, 1964. 23 p. (Sokszorosított kézirat.)
226. *Dialógus a matematika alkalmazásairól.* Az MTA Matematikai Kutatóintézete, Budapest, 1964. 20 p. (Sokszorosított kézirat.)
227. *A természet könyvének nyelve. Dialógus.* 1964. Az MTA Matematikai Kutatóintézete, Budapest, 1964. (Kézirat.)

228. On an extremal property of the Poisson process, *Annals Inst. Stat. Math. Tokyo* **16** (1964) 129—133.
229. A generalization of a theorem of E. Vincze, (R. G. LAHAval és E. LUKÁCScsal), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **9**.A (1964) 237—239.
230. On two mathematical models of the traffic on a divided highway, *Jour. Appl. Prob.* **1** (1964) 311—320.
231. On the amount of information concerning an unknown parameter in a sequence of observations, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **9**.A (1964) 617—625.
232. Hervorragende Elemente von Beobachtungsreihen, (Előadás: Internationale Tagung über Mathematische Statistik und ihre Anwendungen, Berlin von 4. bis 8. September 1962.). Kivonat: *Abh. Deutsch. Akad. Wissensch. Berlin, Klasse Math. Phys. Technik*, 1964, No. 4, p. 101.
233. A Socratic dialogue on mathematics, *Canadian Math. Bull.* **7** (1964) 441—462. *(Vö.: 196.)*
234. Mathematics. A Socratic dialogue, *Physics Today* **17** (1964) December, 24—36. *(Vö.: 196.)*
235. A Socratic dialogue on mathematics, „*Simon Stevin*" **38** (1963/64) 125—144. *(Vö.: 196.)*
236. On the amount of information in a frequency count, *Bull. Inst. Internat. Stat.* **41** (1964) 623—626.
237. Sur les espaces simples des Probabilités conditionnelles, *Annales Inst. H. Poincaré, Nouvelle Série*, Sect. B, **1** (1964) no. 1, 3—21.
238. A dialogue on the applications of mathematics, *Ontario Mathematical Gazette* **3** (1964) 28—40. *(Vö.: 223.)*
239. *Dialogue on the applications of mathematics.* University of Michigan, Ann Arbor, 1964. (Sokszorosított kézirat.) *(Vö.: 223.)*
240. Discussion on Mr. Lewis's paper. (A következőhöz: P. A. W. LEWIS: A branching Poisson process model for the analysis of computer failure patterns, *Jour. Roy. Stat. Soc.*, Series B, **26** (1964) 398—456.), *Jour. Roy. Stat. Soc.*, Series B, **26** (1964) 445—446.
241. Eine Extremaleigenschaft des Poissonschen Processes. (Előadás: Tagung über Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie, Oberwolfach, 2.—7. August 1964.) Kivonat: *Tagungsbericht. Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Oberwolfach*, 2 —7. *August* 1964. Mathematisches Forschungsinstitut, Oberwolfach, 1964. (Sokszorosított kézirat.)
242. On the foundations of information theory, *Rev. Inst. Internat. Stat.* **33** (1965) 1—14.
243. Probabilistic methods in group theory, (ERDŐS PÁLlal), *Jour. Analyse Mathématique* **14** (1965) 127—138.
244. Some remarks on periodic entire functions, (RÉNYI KATÓval), *Jour. Analyse Mathématique* **14** (1965) 303—310.
245. *On some problems in the theory of order statistics.* 36th Session of the ISI, Sydney, 1965. 17 p. (Sokszorosított kézirat.)
246. On some problems in the theory of order statistics, *Bull. Inst. Internat. Stat.* **43** (1965) 165—176.
247. On certain representations of real numbers and on sequences of equivalent events, *Acta Sci. Math. Szeged* **26** (1965) 63—74.
248. *Dialógusok a matematikáról.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.
249. On the theory of random search, *Bull. Amer. Math. Soc.* **71** (1965) 809—828.
250. On the mean value of nonnegative multiplicative number-theoretical functions, (ERDŐS PÁLlal), *Michigan Math. Jour.* **12** (1965) 321—338.
251. A new proof of a theorem of Delange, *Publ. Math. Debrecen* **12** (1965) 323—329.
252. *The language of the Great Book of Nature.* Az MTA Matematikai Kutatóintézete, Budapest, 1965. 39 p. (Sokszorosított kézirat.) *(Vö.: 224.)*
253. A természet könyvének nyelve, *Fizikai Szemle* **15** (1965) 129—138. *(Vö.: 224.)*
254. A Matemática — Um Diálogo Socrático, *Gazeta de Matemática*, 1965, No. 100, Julho—Dezembro, 59—71. *(Vö.: 196.)*
255. *On the amount of information concerning an unknown parameter in a sequence of observations.* Lectures to the Fifth Summer Research Institute of the Australian Mathematical Society. Preprint. Australian Mathematical Society, 1965; pp. 1—13. *(Vö.: 228.)*
256. *On the theory of random search.* Lectures to the Fifth Summer Research Institute of the Australian Mathematical Society. Preprint. Australian Mathematical Society, 1965; pp. 14—16.
257. *On an extremal property of the Poisson process.* Lectures to the Fifth Summer Research Institute of the Australian Mathematical Society. Preprint. Australian Mathematical Society, 1965; pp. 17—20.

258. *Véges geometriák kombinatorikai alkalmazásai,* I. Az MTA Matematikai Kutatóintézete, Budapest, 1965. 67 p. (Sokszorosított kézirat.)
259. *Új módszerek és eredmények a kombinatorikus analízisben,* I. Az MTA Matematikai Kutatóintézete, Budapest, 1965. 89 p. (Sokszorosított kézirat.)
260. On a problem of graph theory, (ERDŐS PÁLlal és T. SÓS VERÁval), *Studia Sci. Math. Hung.* **1** (1966) 215—235.
261. Véges geometriák kombinatorikai alkalmazásai, I., *Mat. Lapok* **17** (1966) 33—76. *(Vö.: 256.)*
262. *Probability theory. Lecture notes.* Stanford University, Stanford, 1966. 110 p.
263. On the existence of a factor of degree one of a connected random graph, (ERDŐS PÁLlal), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966) 359—368.
264. Új módszerek és eredmények a kombinatorikus analízisben, I., *MTA III. Oszt. Közl.* **16** (1966) 77—105. *(Vö.: 257.)*
265. On the amount of missing information and the Neyman—Pearson lemma. *Research papers in statistics.* Festschrift for J. Neyman. Wiley, London, 1966; pp. 281—288.
266. On the amount of information in a random variable concerning an event, *Jour. Math. Sci. Delhi* **1** (1966) 30—33.
267. *Statistics based on information theory.* European Meeting of Statisticians, London, 1966. 17 p. (Sokszorosított kézirat.)
268. *Mathematics. A Socratic dialogue.* [Sokszorosított alakja a következőnek: ALFRÉD RÉNYI: Mathematics. A Socratic dialogue. *Phisics Today* **17** (1964) December, 24—36.] Mathematics Department of Ohio University, 1966. 16 p. *(Vö.: 196.)*
269. Sokratischer Dialog, *Neue Sammlung* **6** (1966) 284—304. *(Vö.: 196.)*
270. A dialogue on the applications of mathematics, „*Simon Stevin*" **39** (1965/66) 3—17. *(Vö.: 223.).*
271. Új módszerek és eredmények a kombinatorikus analízisben, II., *MTA III. Oszt. Közl.* **16** (1966) 159—177. *(Vö.: 257.)*
272. Levelek a valószínűségről, *Fizikai Szemle* **16** (1966) 278—288.
273. A Matematikai Kutató Intézet 10 éve, *Magyar Tudomány* **11** (73) (1966) 81—91.
274. *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
275. *Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie.* 2., berichtigte Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966. *(Vö.: 204.)*
276. *Calcul des probabilités. Avec un appendice sur la théorie de l'information.* Dunod, Paris, 1966. *(Vö.: 204.)*
277. *Dialógusok a matematikáról.* 2. kiadás. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1966. *(Vö.: 245.)*
278. *Valószínűségszámítási módszerek az analízisben.* Az MTA Matematikai Kutatóintézete, Budapest, 1966. 65 p. (Sokszorosított kézirat.)
279. Eine Ungleichung zwischen die Irrtumschwahrscheinlichkeit und die fehlende Information. (Előadás: Tagung über Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Oberwolfach, 17.—24. April 1966.) Kivonat: *Tagungsbericht. Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie.* Oberwolfach, 17.—24. April 1966. Mathematisches Forschungsinstitut, Oberwolfach, 1966. (Sokszorosított kézirat.)
280. *On the mathematical theory of trees,* „Rouse Ball" lectures, Cambridge, 1966. (Kézirat.)
281. *Levelek a valószínűségről.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967.
282. Valószínűségszámítási módszerek az analízisben, I., *Mat. Lapok* **18** (1967) 5—35. *(Vö.: 276.)*
283. Valószínűségszámítási módszerek az analízisben, II., *Mat. Lapok* **18** (1967) 175—194. *(Vö.: 276.)*
284. Remarks on the Poisson process, *Studia Sci. Mat. Hung.* **2** (1967) 119—123.
285. Statistics and information theory, *Studia Sci. Math. Hung.* **2** (1967) 249—256.
286. On the height of trees, (SZEKERES GYÖRGYgyel), *Jour. Australian Math. Soc.* **7** (1967) 497—507.
287. Remarks on the Poisson process. *Symposium on probability methods in analysis.* Lectures delivered at a symposium at Loutraki, Greece, 22.5—4.6. 1966. Lecture Notes in Mathematics. 31. Springer, Berlin, 1967; pp. 280—286.
288. On some basic problems of statistics from the point of view of information theory. *Proceedings of the Fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability.* Held at the Statistical Laboratory, University of California, June 21—July 18, 1965 and December 27, 1965—January 7, 1966. Vol. I. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1967; pp. 531—543.
289. Játék és matematika (I), *Természettudományi Közlöny* **11** (98) (1967) 61—63.
290. Játék és matematika (II), *Természettudományi Közlöny* **11** (98) (1967) 116—119.
291. Játék és matematika (III), *Természettudományi Közlöny* **11** (98) (1967) 211—213.
292. „Az ember gúnnyal — tudjuk — arra támad, amit meg nem ért!" (A televízióban elhangzott

„Játék és matematika" c. sorozat befejező része.) *Természettudományi Közlöny* **11** (98) (1967) 296—298.
293. *Dialogues on mathematics.* Holden-Day, Inc., San Francisco, 1967. *(Vö.: 245.)*
294. *Dialoge über Mathematik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967. *(Vö.: 248.)*
295. *Dialoge über Mathematik.* Birkhäuser, Basel, 1967. *(Vö.: 245.)*
296. Probabilistic methods in combinatorial mathematics. (Előadás: Symposium on combinatorial mathematics, Chapel Hill, 1967.) Sokszorosított szöveg: Symposium on combinatorial mathematics, Chapel Hill. University of North Carolina Monographs series, 1967. 13 p.
297. Probabilistic methods in combinatorial mathematics. *Combinatorial mathematics and its applications.* Proceedings of the Conference held at the University of North Carolina at Chapel Hill, April 10—14, 1967. 13 p. *(Vö.: 294.)*
298. *Letters on probability.* 4th letter. Az MTA Matematikai Kutatóintézete, Budapest, 1967. 18 p. (Sokszorosított kézirat.)
299. *Dialoguri despre matematică.* Editura Ştiintifică, Bucureşti, 1967. *(Vö.: 245.)*
300. Kerekasztal-konferencia szovjet matematikusokkal a matematika elvi kérdéseiről, *Mat. Lapok* **19** (1968) 3—8.
301. A rendezett minták elméletének egy problémaköréről, *MTA III. Oszt. Közl.* (1968) 23—30. *(Vö.: 243.)*
302. Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet, (R. SULANKEvel), *Zeitschr. Wahrscheinlichkeitstheorie* **9** (1968) 146—157.
303. On quadratic inequalities in the theory of probability, (GALAMBOS JÁNOSsal), *Studia Sci. Math. Hung.* **3** (1968) 351—358.
304. On random matrices, II., (ERDŐS PÁLlal), *Studia Sci. Math. Hung.* **3** (1968) 459—464.
305. Information and statistics. *Studies in mathematical statistics.* Theory and applications. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968; pp. 129—131.
306. Sur la théorie de la recherche aléatoire. *Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique.* No. 165. *Programmation en mathématiques numériques.* Besançon 7—14 Septembre 1966. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1968; pp. 281—287.
307. On the distribution of numbers prime to *n*. *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis.* Zur Erinnerung an Edmund Landau (1877—1938). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968; pp. 269—278.
308. On the distribution of numbers prime to *n*. *Number theory and Analysis*, a Collection of Papers in Honor of Edmund Landau (1877—1938). Plenum Press, New York, 1968; pp. 269—278. *(Vö.: 305.)*
309. Vázlatok egy Fibonacci-témára, *Természet Világa*, 1968, 22—27.
310. Vázlatok egy Fibonacci-témára (II), *Természet Világa*, 1968, 87—90.
311. Ars Mathematica, *Fizikai Szemle* **18** (1968) 60—61.
312. Ars Mathematica, *Élet és Tudomány* **14** (1968) 654—655. *(Vö.: 309.)*
313. *Valószínűségszámítás.* Második kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. *(Vö.: 272.)*
314. Die Sprache des Buches der Natur. *Neue Sammlung* **8** (1968) 117—123. *(Vö.: 224.)*
315. Some remarks on the large sieve of Yu. V. Linnik, (ERDŐS PÁLlal), *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.* **11** (1968) 3—13.
316. On some problems of statistics from the point of view of information theory. (Előadás: Információelméleti Kollokvium. Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen 1967, szeptember 19—24.) Kivonat: *Információelméleti Kollokvium. Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen* 1967, szeptember 19—24. Előadáskivonatok. Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968; pp. 87—90.
317. Stochastische Prozesse in der Biologie. (Előadás: A Nemzetközi Biometriai Társaság Magyar Csoportjának Biometriai Konferenciája. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest 1968. március 19—22.) Kivonat: *A Nemzetközi Biometriai Társaság Magyar Csoportjának Biometriai Konferenciája.* Magyar Tudományos Akadémia, Budapest 1968. március 19—22. Előadáskivonatok. Az MTA Biológiai Tudományok Osztálya, Budapest, 1968; pp. 50.
318. On random entire functions, (ERDŐS PÁLlal), Zastosowania Matematyki **10** (1969) 47—55.
319. Measures in denumerable spaces, (A. HANISCHsal és W. M. HIRSCHsel), *American Math. Monthly* **76** (1969) 494—502.
320. *Lectures on the theory of search.* Department of Statistics. University of North Carolina at Chapel Hill. Institute of Statistics Mimeo Series No. 600. 7. May 1969. 78 p.

321. A szerencsejátékok és a valószínűségszámítás. *Matematikai érdekességek.* Gondolat, Budapest, 1969; pp. 197—220.
322. A Barkochba játék és az információelmélet. *Matematikai érdekességek.* Gondolat, Budapest, 1969; pp. 269—286.
323. *Dialógusok a matematikáról.* 3. kiadás. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969. *(Vö.: 245.)*
324. *Dialogi o matematike,* Mir, Moszkva, 1969. *(Vö.: 245.)*
325. *Briefe über die Wahrscheinlichkeit.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969. *(Vö.: 279.)*
326. *Briefe über die Wahrscheinlichkeit.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969. *(Vö.: 279.)*
327. *Briefe über die Wahrscheinlichkeit.* Birkhäuser, Basel, 1969. *(Vö.: 279.)*
328. On some problems of statistics from the point of view of information theory. *Proceedings of the Colloquium on Information Theory* organized by the Bolyai Mathematical Society, Debrecen (Hungary), 1967. Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1969; pp. 343—357.
329. Lezioni sulla probabilità e l'informazione. *Lezioni e conferenze. Università di Trieste, Istituto di Meccanica.* Trieste, 1969. (Megjelenőben.)
330. Remarks on the teaching of probability. *1st CSMP International Conference on the Teaching of Probability and Statistics at the Pre-College Level.* — Sponsored by Southern Illinois University, March, 18—27, 1969. Carbondale, 1969. (Sokszorosított kézirat.)
331. *On Cayley's polynomials for counting trees.* International Conference on Combinatorial Structures and their Applications, Calgary, 1969. (Sokszorosított kézirat.)
332. On the enumeration of trees. *Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and their Applications.* Calgary, 1969. (Megjelenőben.)
333. *Gondolatok a valószínűségszámítás tanításáról.* Az MTA Matematikai Kutatóintézete, Budapest, 1969. (Sokszorosított kézirat.) *(Vö.: 328.)*
334. *Mathematical models of biological processes.* Előadás. Kingston, 1969. (Kézirat.)
335. Application of probability theory to other areas of mathematics. Lectures held at the 12th Biennial International Seminar of the Canadian Mathematical Congress at Vancouver, August 1969. Preprint. Canadian Mathematical Society, Vancouver, 1969.
336. Gondolatok a valószínűségszámítás tanításáról, *Mat. Lapok,* 1970. (Megjelenőben.) *(Vö.: 328.)*
337. *Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény.* (Társszerzőkkel.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1970. (Megjelenőben.)
338. *Probability theory,* Akadémiai Kiadó, Budapest-North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.
339. *Foundations of probability,* Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970.
340. *On the mathematical theory of trees,* North-Holland Publishing Co., Amsterdam. 1970. (Megjelenőben.)
341. Stochastische Prozesse in der Biologie. Vorträge der II. Ungarischen Biometrischen Konferenz (Budapest, von 19. bis 22. März 1968). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970; pp. 27—33.
342. On a new law of large numbers, (Erdős Pállal), *Jour. Analyse Mathématique.* 22 (1970) 103—111.
343. The Prüfer code for k-trees, (Rényi Katóval), *Combinatorial theory and its applications* III. Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest. North-Holland Publishing Co., Amsterdam—London, 1970; pp. 945—971.
344. On the enumeration of search-codes, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **21.** (1970) 27—33.
345. *Valószínűségszámítás.* (Cseh nyelven.) Praha, 1970. (Megjelenőben.)
346. Uniform flow in cascade graphs. *Egy M. Behara által szerkesztett Springer-kiadványban.* Springer, Berlin, 1970. (Megjelenőben.)
347. On the number of endpoints of a k-tree, *Studia Sci. Math. Hung.* **5** (1970) 5—10.
348. Naplójegyzetek az információelméletről. Az „Ars Mathematica" címmel a Magvető Kiadó részére készülő könyv részlete, 1970. (Kéziratban.)
349. Dialógusok a matematikáról. 3. rész. (Olaszul.) Sapere, 1970. (Megjelenőben.)
350. Application of probability theory to other areas of mathematics. *A 12th Biennial International Seminar of the Canadian Mathematical Congress (Vancouver, 1969.) kiadványa,* Vancouver, 1970. (Megjelenőben.) *(Vö.: 333.)*
351. *Ars Mathematica.* (Angolul.) 1970. (Megjelenőben.)
352 Napló az információelméletről. *Fizikai Szemle* **20** (1970) 161—172. *(Vö.: 348.)*
353. Remarks on the teaching of probability, *The teaching of probability and statistics.* Proceedings of First CSMP International Conference on Teaching of mathematics at the Pre-college Level. Jointly sponsored by Southern Illinois University and CEMREL. March, 1969. (Edited by Lennart Råde.) J. Wiley, Inc., New York, 1969; pp. 273—281. *(Vö.: 330.)*
354. *Piszma v. verojatnoszti.* Mir, Moszkva, 1971. (Megjelenőben.) *(Vö.: 281.)*

AIRY-FÜGGVÉNYEK CSEBISEV-SORFEJTÉSE

Írta: NÉMETH GÉZA

1. Bevezetés

Az *Airy*-függvények értékeinek kiszámítására — gyakorlati fontosságuk miatt — részletes táblázatok készültek pl. [1] [2]. A számításokat általában *Taylor*-sorfejtésekkel, aszimptotikus sorokkal, numerikus integrálásokkal stb. végzik. Ismeretes, hogy számológépen való számolásnál a polinomközelítések e módszereknél gazdaságosabban alkalmazhatók. A következőkben az *Airy*-függvényekre aszimptotikus kifejtésükhöz hasonló *Csebisev*-polinomok szerinti sorfejtéseket határozunk meg. A sorfejtések együtthatóit 15 tizedes jegyre táblázatosan adjuk meg. A következő jelöléseket fogjuk használni $x>0$-ra:

$$A_i(x),\ B_i(x),\ A_i(-x),\ B_i(-x),$$

$$A_i'(x),\ B_i'(x),\ A_i'(-x),\ B_i'(-x),$$

$$A_i^{(1)}(x)=\int_0^x A_i(t)\,dt,\quad A_i^{(1)}(-x)=\int_0^x A_i(-t)\,dt,$$

$$B_i^{(1)}(x)=\int_0^x B_i(t)\,dt,\quad B_i^{(1)}(-x)=\int_0^x B_i(-t)\,dt,$$

$$A_i^{(2)}(x)=\int_0^x\int_0^s A_i(t)\,dt\,ds,\quad A_i^{(2)}(-x)=\int_0^x\int_0^s A_i(-t)\,dt\,ds,$$

$$B_i^{(2)}(x)=\int_0^x\int_0^s B_i(t)\,dt\,ds,\quad B_i^{(2)}(-x)=\int_0^x\int_0^s B_i(-t)\,dt\,ds.$$

2. Az Airy függvények analitikai sajátságai

Röviden összefoglaljuk az *Airy*-függvények analitikai sajátságait, melyek alapul szolgálnak a *Csebisev*-sorfejtések levezetéséhez. A szereplő képletek egy része megtalálható pl. [1]-ben vagy LUKE könyvében [3].

Az *Airy*-függvények $A_i(x)$ és $B_i(x)$ az

(1) $$y''(x)=xy(x),\qquad -\infty<x<\infty,$$

differenciál egyenlet lineárisan független megoldásai. E függvényeket, valamint deriváltjaikat és integráljaikat $-\infty<x<\infty$ értékekre akarjuk kiszámítani. Ismernünk kell tehát mind az $x\to 0$ mind az $x\to\pm\infty$ aszimptotikus viselkedésüket. A következő képletek érvényesek $x\to 0$ esetére:

$$A_i(\pm x)=C_{1\,0}F_1\left(;\frac{2}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right)\mp C_2x_0F_1\left(;\frac{4}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right),\tag{2}$$

$$B_i(\pm x)=C_1\sqrt{3}\,{}_0F_1\left(;\frac{1}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right)\pm C_2\sqrt{3}\,x\,{}_0F_1\left(;\frac{4}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right),\tag{3}$$

$$A_i'(\pm x)=-C_{2\,0}F_1\left(;\frac{1}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right)+\frac{1}{2}C_1x_0^2F_1\left(;\frac{5}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right),\tag{4}$$

$$B_i'(\pm x)=C_2\sqrt{3}\,{}_0F_1\left(;\frac{1}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right)+\frac{1}{2}C_1x^2\sqrt{3}\,{}_0F_1\left(;\frac{5}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right),\tag{5}$$

$$A_i^{(1)}(\pm x)=C_1x\,{}_1F_2\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3},\frac{4}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right)\mp\frac{1}{2}C_2x^2\,{}_1F_2\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3},\frac{5}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right),\tag{6}$$

$$B_i^{(1)}(\pm x)=C_1\sqrt{3}\,x\,{}_1F_2\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3},\frac{4}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right)\pm\frac{1}{2}C_2\sqrt{3}\,x^2\,{}_1F_2\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3},\frac{5}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right),\tag{7}$$

$$A_i^{(2)}(\pm x)=\frac{1}{2}C_1x^2\,{}_1F_2\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3},\frac{5}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right)\mp\frac{1}{6}C_2x^3\,{}_2F_3\left(\frac{2}{3},1;\frac{4}{3},\frac{5}{3},2;\pm\frac{1}{4}\xi^2\right),\tag{8}$$

$$B_i^{(2)}(\pm x)=\tag{9}$$

$$=\frac{1}{2}C_1\sqrt{3}\,x^2\,{}_1F_2\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3},\frac{5}{3};\pm\frac{1}{4}\xi^2\right)\pm\frac{1}{6}C_2\sqrt{3}\,x^3\,{}_2F_3\left(\frac{2}{3},1;\frac{4}{3},\frac{5}{3},2;\pm\frac{1}{4}\xi^2\right),$$

ahol

$$C_1=\frac{3^{-2/3}}{\Gamma(2/3)}=0.355028053887817,\qquad C_2=\frac{3^{-1/3}}{\Gamma(1/3)}=0.258819403792807,$$

$$C_3=\frac{3^{1/6}}{\Gamma(1/3)}=0.4482883573533830.$$

$${}_pF_q(a_1,a_2,\dots,a_p;b_1,\dots b_q;t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\dots(a_p)_k}{(b_1)_k\dots(b_p)_k}\frac{t^k}{k!},\qquad t\to 0,$$

$$(a)_0=1,\quad (a)_k=a(a+1)\dots(a+k-1),\quad \xi=\frac{2}{3}x^{3/2},\qquad x>0.$$

Könnyen látható, hogy ezek a képletek $x>5$ esetén már igen kényelmetlenek egy numerikus számításnál. Ilyen esetekben az $x\to\infty$ aszimptotikus képletek kerülnek alkalmazásra. Ezek az alábbiak:

$$A_i(x)=\frac{1}{2}\pi^{-1/2}x^{-1/4}e^{-\xi}R(\xi),\quad R(\xi)\sim{}_2F_0\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6};;-\frac{1}{2\xi}\right),\tag{10}$$

$$B_i(x)=\pi^{-1/2}x^{-1/4}e^{\xi}S(\xi),\quad S(\xi)\sim{}_2F_0\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6};;\frac{1}{2\xi}\right),\tag{11}$$

(12) $$A_i'(x) = -\frac{1}{2}\pi^{-1/2}x^{-1/4}e^{-\xi}P(\xi), \quad P(\xi) \sim {}_2F_0\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6};; -\frac{1}{2\xi}\right),$$

(13) $$B_i'(x) = \pi^{-1/2}x^{1/4}e^{\xi}Q(\xi), \quad Q(\xi) \sim {}_2F_0\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6};; \frac{1}{2\xi}\right),$$

(14) $$A_i(-x) = \pi^{-1/2}x^{-1/4}\left\{\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)P_1(\xi) + \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)Q_1(\xi)\right\},$$

(15) $$B_i(-x) = \pi^{-1/2}x^{-1/4}\left\{\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)Q_1(\xi) - \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)P_1(\xi)\right\},$$

(16) $$P_1(\xi) \sim {}_4F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{12}, \frac{11}{12}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{\xi^2}\right),$$
$$Q_1(\xi) \sim \frac{5}{72\xi}\,{}_4F_1\left(\frac{7}{12}, \frac{13}{12}, \frac{11}{12}, \frac{17}{12}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{\xi^2}\right),$$

(17) $$A_i'(-x) = \pi^{-1/2}x^{-1/4}\left\{\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)Q_2(\xi) + \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)P_2(\xi)\right\},$$

(18) $$B_i'(-x) = \pi^{-1/2}x^{-1/4}\left\{\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)P_2(\xi) - \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)Q_2(\xi)\right\},$$

(19) $$P_2(\xi) \sim {}_4F_1\left(-\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{13}{12}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{\xi^2}\right),$$
$$Q_2(\xi) \sim \frac{7}{72\xi}\,{}_4F_1\left(\frac{5}{12}, \frac{11}{12}, \frac{13}{12}, \frac{19}{12}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{\xi^2}\right),$$

(20) $$A_i^{(1)}(x) = \frac{1}{3} - (6\pi\xi)^{-1/2}e^{-\xi}R_1(\xi), \quad R_1(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\xi}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)_k v_k,$$

(21) $$B_i^{(1)}(x) = \pi^{-1/2}x^{-3/4}e^{\xi}S_1(\xi), \quad S_1(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\xi^k}\left(\frac{1}{2}\right)_k v_k,$$

(22) $$A_i^{(1)}(-x) = \frac{2}{3} - \pi^{-1/2}x^{-3/4}\left\{\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)Q_3(\xi) - \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)P_3(\xi)\right\},$$

(23) $$B_i^{(1)}(-x) = \pi^{-1/2}x^{-3/4}\left\{\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)P_3(\xi) + \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)Q_3(\xi)\right\},$$

(24) $$P_3(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{\xi^2}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)_k\left(\frac{3}{4}\right)_k v_{2k}, \quad Q_3(\xi) \sim \frac{1}{2\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{\xi^2}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)_k\left(\frac{5}{4}\right)_k v_{2k+1},$$

$$(25)\qquad v_0 = 1, \quad v_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{\left(\frac{1}{6}\right)_j \left(\frac{5}{6}\right)_j}{\left(\frac{1}{2}\right)_j j!2^j}, \quad k=1,2,\dots,$$

$$(26)\qquad A_i^{(2)}(x) = \frac{1}{3}x - C_2 + \frac{1}{2}\pi^{-1/2}x^{-5/4}e^{-\xi}R_2(\xi), \quad R_2(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\xi}\right)^k \left(\frac{3}{2}\right)_k t_k,$$

$$(27)\qquad B_i^{(2)}(x) = C_3 + \pi^{-1/2}x^{-5/4}e^{\xi}S_2(\xi), \quad S_2(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\xi}\right)^k \left(\frac{3}{2}\right)_k t_k,$$

$$(28)\qquad A_i^{(2)}(-x) = \frac{2}{3}x - C_2 - \pi^{-1/2}x^{-5/4}\left\{\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)P_4(\xi) + \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)Q_4(\xi)\right\},$$

$$(29)\qquad B_i^{(2)}(-x = C_3 - \pi^{-1/2}x^{-5/4}\left\{\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)Q_4(\xi) - \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)P_4(\xi)\right\},$$

$$(30)\qquad P_4(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{\xi^2}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)_k \left(\frac{5}{4}\right)_k t_{2k}, \quad Q_4(\xi) \sim \frac{3}{2\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{\xi^2}\right)^k \left(\frac{5}{4}\right)_k \left(\frac{7}{4}\right)_k t_{2k+1},$$

$$(31)\qquad t_0 = 1, \quad t_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)_j \left(\frac{7}{6}\right)_j}{\left(\frac{3}{2}\right)_j j!2^j}, \quad k=1,2,\dots.$$

Látható, hogy az R, S, P, Q, valamint a P_1, Q_1, P_2, Q_2 függvények $x \to \infty$ sorai divergensek, lévén a sor együtthatója $0(k!)$, valamint $0(k!^2)$ nagyságrendű. Mivel v_k és t_k korlátosak, analóg állítás érvényes az R_1, S_1, R_2, S_2, valamint a P_3, Q_3; P_4, Q_4 sorokra is. Ezek a sorok tehát nagy pontosságú numerikus számításokra alkalmatlanok.

3. Az Airy-függvények Csebisev-sorfejtése

A *Csebisev*-polinomok szerinti sorfejtéseknek jelenleg két fontos előnyét fogjuk kihasználni. Az első előny abból származik, hogy a (2)—(9) sorokat *Csebisev*-polinomok szerint rendezve megnövelődik a konvergencia sebessége, a második pedig abból, hogy az R, S, P, Q stb. függvények *Csebisev*-polinomok szerinti sora konvergál (ellentétben az aszimptotikus soraikkal). Beszélünk kisargumentumról és nagyargumentumról: $0 \leqq x \leqq a$ esetén kis argumentumról lesz szó, $x \geqq a$ esetén nagy argumentumról. Itt „a" egy alkalmasan megválasztott pozitív paraméter.

Rátérve a kisargumentumokra az alábbi *Csebisev*-sorfejtéseket fogjuk alkalmazni. Legyen $A_i(x)$ sorának együtthatója $a_k^{(1)}$:

$$(32)\qquad A_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} T_k^*\left(\frac{x}{a}\right) \qquad 0 \leqq x \leqq a$$

és hasonlóan $B_i(x)$, $A_i'(x)$, $B_i'(x)$ sorfejtései együtthatója rendre $b_k^{(1)}$, $c_k^{(1)}$, $d_k^{(1)}$, valamint $A_i(-x)$, $B_i(-x)$, $A_i'(-x)$, $B_i'(-x)$ együtthatója $a_k^{(2)}$, $b_k^{(2)}$, $c_k^{(2)}$, $d_k^{(2)}$.

Legyen továbbá

$$A_i^{(1)}(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(3)} T_k^*\left(\frac{x}{a}\right), \tag{33}$$

$$A_i^{(2)}(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(4)} T_k^*\left(\frac{x}{a}\right) \tag{34}$$

és (33)-nak és (34)-nek megfelelően $B_i^{(1)}(x)/x$, $A_i^{(1)}(-x)/x$, $B_i^{(1)}(-x)/x$ együtthatója $b_k^{(3)}$, $c_k^{(3)}$, $d_k^{(3)}$, illetve $B_i^{(2)}(x)/x^2$, $A_i^{(2)}(-x)/x^2$, $B_i^{(2)}(-x)/x^2$ együtthatója $b_k^{(4)}$, $c_k^{(4)}$, $d_k^{(4)}$.

A (2)—(9) sorok segítségével az $a_k^{(l)}$, $b_k^{(l)}$, $c_k^{(l)}$, $d_k^{(l)}$ $(l=1, 2, 3, 4)$ számok a szokásos konverziós eljárással számíthatók ki (ezzel itt a továbbiakban nem foglalkozunk).

Nagy argumentum esetére a *Csebisev*-sorfejtéseket nem lehet a megfelelő aszimptotikus sorfejtésekből levezetni. Mi most a függvények integrálelőállításaiból fogjuk nyerni a kívánt sorfejtéseket:

$$R(\xi) = 2^{-1/2}\pi^{-3/2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\eta^{1/2}\left(1+\frac{\eta}{\xi}\right)} e^{-\eta} K_{1/3}(\eta)\,d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} r_k T_k^*\left(\frac{a}{\xi}\right), \quad \xi \geqq a \tag{35}$$

(36)

$$r_k = \varepsilon_k 2^{-1/2}\pi^{-3/2}a^{1/2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\eta}}\,\frac{\eta^{k-1}}{(1+\sqrt{1+\eta})^{2k}} e^{-a\eta} K_{1/3}(a\eta)\,d\eta, \quad \varepsilon_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 2(-1)^k & k \geqq 1 \end{cases}$$

$$S(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k T_k^*\left(\frac{a}{\xi}\right), \tag{37}$$

$$\begin{aligned} S_k(a) = \varepsilon_k \frac{3}{\sqrt{\pi}} \Bigg\{ & (2a)^{1/2} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}-k; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -2a\right) - \\ & -3\cdot 2^{-1/6} a^{5/6} \frac{\Gamma\left(k+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{6}\right)} {}_2F_2\left(k+\frac{5}{6}, \frac{5}{6}-k; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -2a\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{38}$$

$$P(\xi) = 1 + 2^{-1/2}\pi^{-3/2}\int_0^{\infty} \frac{\frac{\eta^{1/2}}{\xi}}{1+\frac{\eta}{\xi}} e^{-\eta} K_{2/3}(\eta)\,d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} p_k T_k^*\left(\frac{a}{\xi}\right), \tag{39}$$

$$p_0 = 1 + 2^{-1/2}\pi^{-3/2}a^{1/2}\int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2}}{\sqrt{1+\eta}}\,\frac{e^{-a\eta}}{(1+\sqrt{1+\eta})} K_{2/3}(a\eta)\,d\eta,$$

(40)
$$p_k = -\varepsilon_k 2^{-1/2}\pi^{-3/2}a^{1/2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+\eta}}\,\frac{\eta^{k-1/2}}{(1+\sqrt{1+\eta})^{2k}}\,e^{-a\eta}K_{2/3}(a\eta)\,d\eta,$$

(41)
$$Q(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k T_k^*\left(\frac{a}{\xi}\right),$$

(42)
$$q_k = \varepsilon_k \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\left\{a^{1/2}{}_2F_2\left(\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}-k; \frac{1}{3}, \frac{5}{3}; -2a\right)-\right.$$
$$\left.-9\cdot 2^{-4/3}a^{7/6}\frac{\Gamma\left(k+\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(k-\frac{1}{6}\right)}\,{}_2F_2\left(\frac{7}{6}+k, \frac{7}{6}-k; \frac{5}{3}, \frac{7}{3}; -2a\right)\right\},$$

(43)
$$P_1(\xi) = 2^{-1/2}\pi^{-3/2}\int_0^\infty \frac{\eta^{-1/2}}{1+\frac{\eta^2}{\xi^2}}\,e^{-\eta}K_{1/3}(\eta)\,d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(1)}T_{2k}\left(\frac{a}{\xi}\right),$$

(44)
$$p_k^{(1)} = \varepsilon_k 2^{-1/2}\pi^{-3/2}a^{1/2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\,\frac{\eta^{2k-1/2}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{2k}}\,e^{-a\eta}K_{1/3}(a\eta)\,d\eta,$$

(45)
$$Q_1(\xi) = 2^{-1/2}\pi^{-3/2}\int_0^\infty \frac{\frac{\eta^{1/2}}{\xi}}{1+\frac{\eta^2}{\xi^2}}\,e^{-\eta}K_{1/3}(\eta)\,d\eta = \frac{5}{72\xi}\sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(1)}T_{2k}\left(\frac{a}{\xi}\right),$$

(46)
$$q_k^{(1)} = \varepsilon_k \frac{36\cdot 2^{1/2}a^{3/2}}{5\pi^{3/2}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\,\frac{\eta^{2k+1/2}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{2k}}\,e^{-a\eta}K_{1/3}(a\eta)\,d\eta,$$

(47)
$$P_2(\xi) = 1+2^{-1/2}\pi^{-3/2}\int_0^\infty \frac{\frac{\eta^{3/2}}{\xi^2}}{1+\frac{\eta^2}{\xi^2}}\,e^{-\eta}K_{2/3}(\eta)\,d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(2)}\,T_{2k}\left(\frac{a}{\xi}\right),$$

(48)
$$p_0^{(2)} = 1+2^{-1/2}\pi^{-3/2}a^{1/2}\int_0^\infty \frac{\eta^{3/2}}{\sqrt{1+\eta^2}(1+\sqrt{1+\eta^2})}\,e^{-a\eta}K_{2/3}(a\eta)\,d\eta,$$
$$p_k^{(2)} = -\varepsilon_k 2^{-1/2}\pi^{-3/2}a^{1/2}\int_0^\infty \frac{\eta^{2k-1/2}}{\sqrt{1+\eta^2}(1+\sqrt{1+\eta^2})^{2k}}\,e^{-a\eta}K_{2/3}(a\eta)\,d\eta,$$

$$(49) \qquad Q_2(\xi) = 2^{-1/2}\pi^{3/2}\int_0^\infty \frac{\frac{\eta^{1/2}}{\xi}}{1+\frac{\eta^2}{\xi^2}} e^{-\eta}K_{2/3}(\eta)d\eta = \frac{7}{72\xi}\sum_{k=0}^\infty q_k^{(2)} T_{2k}\left(\frac{a}{\xi}\right),$$

$$(50) \qquad q_k^{(2)} = \varepsilon_k \frac{36\cdot 2^{1/2}a^{3/2}}{7\pi^{3/2}}\int_0^\infty \frac{\eta^{2k+1/2}}{\sqrt{1+\eta^2}\left(1+\sqrt{1+\eta^2}\right)^{2k}} e^{-a\eta}K_{2/3}(a\eta)d\eta.$$

A felsorolt integrál előállítások a $K_\nu(x)$ *Bessel*-függvények integrál előállításaiból nyerhetők. Az S_k és q_k számok kifejezése a hipergeometriai sorokkal [4] munkánkban található meg.

Az $A_i(-x)$, $B_i(-x)$, $A_i'(-x)$, $B_i'(-x)$ függvényeknek $0<x<\infty$ esetére végtelen sok gyöke létezik. A gyökök kiszámításához megadható egy sorfejtéses előállítás, amely lényegében még MC MAHONtól származik. A módszer azt használja fel, hogy ezek a függvények *Bessel*-függvények kombinációjaként állíthatók elő:

$$(51) \qquad A_i(-x) = \frac{x^{1/2}}{3}\{J_{-1/3}(\xi)+J_{1/3}(\xi)\},$$

$$(52) \qquad B_i(-x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}\{J_{-1/3}(\xi)-J_{1/3}(\xi)\},$$

$$(53) \qquad A_i'(-x) = -\frac{x}{2}\{J_{-2/3}(\xi)-J_{2/3}(\xi)\},$$

$$(54) \qquad B_i'(-x) = \frac{x}{\sqrt{3}}\{J_{-2/3}(\xi)+J_{2/3}(\xi)\}.$$

Alkalmazva a $J_\nu(\xi)$ *Bessel*-függvény alábbi előállítását:

$$(55) \qquad J_\nu(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\left\{\cos\left(\xi-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)P_\nu(\xi)-\sin\left(\xi-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)Q_\nu(\xi)\right\},$$

$$(56) \qquad P_\nu(\xi)\sim 1-\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8\xi)^2}+\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)(4\nu^2-49)}{4!(8\xi)^4}-\dots,$$

$$(57) \qquad Q_\nu(\xi)\sim\frac{4\nu^2-1}{8\xi}-\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8\xi)^3}+\dots$$

az

$$(58) \qquad x_k = \left(\frac{3}{2}\xi_k\right)^{2/3}$$

képlet adja a k-adik gyököt, ahol ξ_k rendre a

$$(59) \qquad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{Q_{1/3}}{P_{1/3}}, \quad \xi_k = \left(k-\frac{1}{4}\right)\pi-\varepsilon, \quad \text{ill.} \quad \xi_k = \left(k-\frac{3}{4}\right)\pi-\varepsilon,$$

$$(60) \qquad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{Q_{2/3}}{P_{2/3}}, \quad \xi_k = \left(k-\frac{3}{4}\right)\pi-\varepsilon, \quad \text{ill.} \quad \xi_k = \left(k-\frac{1}{4}\right)\pi-\varepsilon$$

egyenletnek tesz eleget A_i, ill. B_i valamint A_i', ill. B_i' esetére. Az ε-ra vonatkozó egyenleteket rekurzíve oldottuk meg. A sormegoldást *Csebisev*-polinomsorba transzformáltuk és az eredményeket a táblázatok között adjuk meg.

Az *Airy*-függvények integráljaira az alábbi sorfejtéseket alkalmazzuk:

$$R_1(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty \frac{1}{\eta^{1/2}\left(1+\frac{\eta}{\xi}\right)} e^{-\eta}\alpha(\eta)\,d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{(1)} T_k^*\left(\frac{a}{\xi}\right), \tag{61}$$

$$\alpha(\eta) = \sqrt{3} - \frac{1}{\pi}\int_\eta^\infty K_{1/3}(u)\,du,$$

$$r_k^{(1)} = \varepsilon_k \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \frac{\eta^{k-1/2}}{(1+\sqrt{1+\eta})^{2k}} e^{-a\eta}\alpha(a\eta)\,d\eta, \tag{62}$$

$$S_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{(1)} T_k^*\left(\frac{a}{\xi}\right), \tag{63}$$

$$p_3(\xi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta^{-1/2}}{1+\frac{\eta^2}{\xi^2}} e^{-\eta}\alpha(\eta)\,d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(3)} T_{2k}\left(\frac{a}{\xi}\right), \tag{64}$$

$$p_k^{(3)} = \varepsilon_k \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\eta^{2k-1/2}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{2k}} e^{-a\eta}\alpha(a\eta)\,d\eta, \tag{65}$$

$$Q_3(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\frac{\eta^{1/2}}{\xi}}{1+\frac{\eta^2}{\xi^2}} e^{-\eta}\alpha(\eta)\,d\eta = \frac{1}{2\xi} \sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(3)} T_{2k}\left(\frac{a}{\xi}\right), \tag{66}$$

$$q_k^{(3)} = \varepsilon_k \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a^{3/2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\eta^{2k+1/2}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{2k}} e^{-a\eta}\alpha(a\eta)\,d\eta, \tag{67}$$

$$R_2(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \frac{\eta^{1/2}}{1+\frac{\eta}{\xi}} e^{-\eta}\beta(\eta)\,d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{(2)} T_k^*\left(\frac{a}{\xi}\right), \tag{68}$$

$$\beta(\eta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \int_\eta^\infty \frac{K_{2/3}(u)}{u}\,du,$$

$$r_k^{(2)} = \varepsilon_k \frac{a^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \frac{\eta^{k+1/2}}{(1+\sqrt{1+\eta})^{2k}} e^{-a\eta}\beta(a\eta)\,d\eta, \tag{69}$$

$$S_2(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{(2)} T_k^* \left(\frac{a}{\xi}\right), \tag{70}$$

$$P_4(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2}}{1+\frac{\eta^2}{\xi^2}} e^{-\eta}\beta(\eta)\,d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(4)} T_{2k}\left(\frac{a}{\xi}\right), \tag{71}$$

$$p_k^{(4)} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\eta^{2k+1/2}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{2k}} e^{-a\eta}\beta(a\eta)\,d\eta, \tag{72}$$

$$Q_4(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\frac{\eta^{3/2}}{\xi}}{1+\frac{\eta^2}{\xi^2}} e^{-\eta}\beta(\eta)\,d\eta = \frac{3}{2\xi} \sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(4)} T_{2k}\left(\frac{a}{\xi}\right), \tag{73}$$

$$q_k^{(4)} = 3\cdot 2^{1/2}\pi^{-1/2}a^{5/2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\eta^{2k+3/2}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{2k}} e^{-a\eta}\beta(a\eta)\,d\eta. \tag{74}$$

A (35), (37), (39), (41), (43), (45), (47), (49) valamint a (61), (64), (66), (68), (71), (73) Csebisev-sorok konvergenciáját az együtthatók integrálkifejezése segítségével lehet bebizonyítani. Az integrálokra alkalmazva a Laplace-módszert az alábbi kifejezéseket nyerjük $k \to \infty$ esetére:

$$r_k = \exp\{-3(2a)^{1/3}k^{2/3}\}\,0(k^{-3/2}), \tag{75}$$

$$p_k = \exp\{-3(2a)^{1/3}k^{2/3}\}\,0(k^{-2/3}), \tag{76}$$

$$p_k^{(l)} = \exp\{-4a^{1/2}k^{1/2}\}\,0(k^{1/4}), \qquad l = 1, 2, 3, 4. \tag{77}$$

$$q_k^{(l)} = \exp\{-4a^{1/2}k^{1/2}\}\,0(k^{1/4}), \qquad l = 1, 2, 3, 4. \tag{78}$$

$$r_k^{(l)} = \exp\{-3(2a)^{1/3}k^{2/3}\}\,0(1), \qquad l = 1, 2. \tag{79}$$

$$S_k = \exp\{-\lambda k^{2/3}\}\,0(k^{-2/3}), \qquad \lambda = 3\cdot 2^{-2/3}a^{1/3}(1-i\sqrt{3}). \tag{80}$$

$$q_k = \exp\{-\lambda k^{2/3}\}\,0(k^{-2/3}). \tag{81}$$

A (63) és (70) sorok együtthatóira ($S_k^{(1)}$, $S_k^{(2)}$) nem adunk explicit kifejezéseket bonyolultságuk miatt, bár $k \to \infty$ viselkedésük (80)—(81)-hez hasonló egyszerű kifejezés.

Az $S_k^{(l)}$ $(l = 1, 2)$ számok kiszámítására a következő eljárást alkalmaztuk. Bebizonyítható, hogy létezik olyan transzformáció, amely a

$$\varphi(\xi) = 2\xi^{1/2}e^{-\xi} \int_0^{\xi^{1/2}} e^{u^2}du,$$

$$\psi(\xi) = 4\xi^{3/2}e^{-\xi} \int_0^{\xi^{1/2}} e^{u^2}du - 2\xi$$

függvényeket $S_1(\xi)$, illetőleg $S_2(\xi)$-be transzformálja. Megjegyezzük, hogy $S_1(\xi)$ és $\varphi(\xi)$, illetőleg $S_2(\xi)$ és $\psi(\xi)$ aszimptotikus sorai csak a v_k, illetőleg t_k faktorok fellépése miatt különböznek egymástól. Ennek alapján úgy járunk el, hogy az

$$S_1(\xi) = T_1(\xi, \varphi(\xi))$$

előállításban $\varphi(\xi)$ polinom közelítésének együtthatóit a v_k számokkal szorozzuk, majd ezt a polinomot rendezzük a *Csebisev*-polinomok szerint, és így adódnak az $S_k^{(1)}$ számok. Analóg nyerjük $S_k^{(2)}$-t is. A módszer hibabecsléséhez meg lehet adni a T_1 transzformáltat explicit alakban (T_2 analóg módon adható meg, ezért csak T_1-el foglalkozunk).

Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$(82) \qquad S_1(\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \int_0^1 u^{-5/6}(1-u)^{-2/3} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \int_0^1 v^{-1/6}(1-v)^{-5/6} \cdot$$

$$(83) \qquad \cdot \frac{\varphi(\xi) - \frac{1}{2} uv\varphi\left(\frac{2\xi}{uv}\right)}{1 - \frac{1}{2} uv} \, du \, dv.$$

A (83) előállítást legegyszerűbben pl. *Laplace*-transzformációval lehet bebizonyítani. Legyen $x = \lambda/\sigma$, $0 < \sigma \leqq 1$ és

$$(84) \qquad \int_0^\infty \lambda^{-1/2} e^{-\lambda p} \varphi\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \frac{1}{1+p\sigma},$$

$$(85) \qquad \int_0^\infty \lambda^{-1/2} e^{-\lambda p} S_1\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) d\lambda = H(p).$$

Felhasználva azt, hogy

$$S_1(\xi) = \left(\frac{\pi}{2}\xi\right)^{1/2} e^{-\xi} \int_0^\xi [I_{-1/3}(x) + I_{1/3}(x)] \, dx,$$

$H(p)$ explicit alakban megadható:

$$(86) \qquad H(p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \frac{1}{1+p\sigma} \, {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; \frac{1}{2}; -\frac{p\sigma}{2}\right).$$

Az itt szereplő hipergeometriai függvényt integrálalakban írva a következőt kapjuk:

$$H(p)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^1 u^{-5/6}(1-u)^{-2/3}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\int_0^1 v^{-1/6}(1-v)^{-5/6}\cdot$$

(

$$\cdot\frac{1}{1-\frac{uv}{2}}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{p}}\frac{1}{1+p\sigma}-\frac{1}{2}uv\sqrt{\frac{\pi}{p}}\frac{1}{1+p\sigma\frac{1}{2}uv}\right\}dv\,du.$$

A (87) kifejezésben tagonként végezve el a visszatranszformálást (84) és (85) figyelembevételével kapjuk a kívánt (83) előállítást.

Innen látható, hogy $\xi \geqq a$ esetén

$$|S_1(\xi)|<c_4|\varphi(\xi)|,\qquad c_4<\frac{3}{2}\ \text{(konst.)},$$

és ez azt jelenti, hogy S_1 közelítésénél φ hibája legfeljebb $\frac{3}{2}$-del megnövelődve jelenhet meg $S_1(\xi)$-ben.

4. Táblázatok

Az *Airy*-függvények generálásához a tárgyalt sorfejtések együtthatóit numerikusan kiszámítottuk és táblázatokban adjuk meg. A kis- és nagyargumentumot elhatároló „a" paraméter értékét az *Airy*-függvényekre és deriváltjaikra $(36)^{1/3}$-nak választottuk ($\xi=4$) és az *Airy*-függvények első és második integráljára $a=(144)^{1/3}$-nak ($\xi=8$):

$$x_1=(36)^{1/3}=3{,}301927248894627,\qquad x_2=(144)^{1/3}=5{,}241482788417746.$$

A táblázatban szereplő számok utolsó jegye esetleg egy egységgel hibás.

A számításokat a KFKI ICT 1905-ös számológépen végeztük el, az S8MT nevű duplaprecíziós változókkal dolgozó Fortran nyelven megírt program segítségével.

$$A_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} T_k^* \left(\frac{x}{x_1}\right), \quad x \leqq x_1$$

k	$a_k^{(1)}$
0	0.120531440112250
1	−.167828860757883
2	. 60817121826835
3	−. 8945723970114
4	−. 1721760159747
5	. 1139729345509
6	−. 232629784249
7	. 9253149378
8	. 6489856558
9	−. 1667474718
10	. 144056318
11	. 15268260
12	−. 5843769
13	. 638942
14	. 9294
15	−. 12134
16	. 1552
17	−. 34
18	−. 16
19	. 2

$$B_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(1)} T_k^* \left(\frac{x}{x_1}\right), \quad x \leqq x_1$$

k	$b_k^{(1)}$
0	6.373973756369498
1	9.074109726596059
2	4.827578395776620
3	2.050239862179347
4	.707643119875340
5	.216485538324834
6	. 58169193250895
7	. 14007410872885
8	. 3117976751586
9	. 635307679485
10	. 120440279201
11	. 21511906998
12	. 3597815970
13	. 570425497
14	. 86174474
15	. 12363267
16	. 1699910
17	. 244422
18	. 28404
19	. 3470
20	. 409
21	. 47
22	. 5
23	. 1

$$A_i(x) = \frac{x^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\xi} \sum_{k=0}^{\infty} r_k T_k^* \left(\frac{4}{\xi}\right), \quad x \geqq x_1$$

k	r_k
0	0.992047643125206
1	−. 7729864820592
2	. 211521343142
3	−. 10224755303
4	. 682891074
5	−. 56798178
6	. 5559745
7	−. 618391
8	. 76324
9	−. 10277
10	. 1491
11	−. 231
12	. 38
13	−. 7
14	. 1

$$B_i(x) = \frac{e^{\xi}}{\pi^{1/2} x^{1/4}} \sum_{k=0}^{\infty} S_k T_k^* \left(\frac{4}{\xi}\right), \quad x \geqq x_1$$

k	S_k
0	1.009863253162107
1	. 10328037085271
2	. 515968909467
3	. 57852077029
4	. 6400806582
5	−. 905293254
6	−. 805222588
7	−. 135723401
8	. 55927262
9	. 24528401
10	−. 4597755
11	−. 3659801
12	. 623209
13	. 559711
14	−. 136966
15	−. 84183
16	. 35468
17	. 10306
18	−. 8832
19	−. 212
20	. 1889
21	−. 447
22	−. 288
23	. 189
24	. 5
25	−. 46
26	. 16
27	. 5
28	−. 6
29	. 1
30	. 1
31	−. 1

$$A_i(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} T_k^* \left(\frac{x}{x_1}\right), \quad x \leqq x_1.$$

k	$a_k^{(2)}$
0	0.136622273419194
1	−.466809065343357
2	−.216682629072937
3	.78742630808176
4	.52675584660002
5	.2847916955417
6	−.3667131692481
7	−.859263679171
8	.40146152683
9	.43602901129
10	.5208393493
11	−.642172148
12	−.236323153
13	−.15073632
14	.3447092
15	.729271
16	.20845
17	−.10189
18	−.1444
19	−.2
20	.19
21	.2

$$B_i(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(2)} T_k^* \left(\frac{x}{x_1}\right), \quad x \leqq x_1.$$

k	$b_k^{(2)}$
0	0.031322063956424
1	−.395280774409233
2	.297889766352589
3	.115648955246402
4	−.8021474858026
5	−.16686113476938
6	−.2230095043191
7	.561154753879
8	.225042520014
9	.10317413576
10	−.6421851437
11	−.1308471807
12	.6257577
13	.33070446
14	.4141703
15	−.186316
16	−.98197
17	−.8037
18	.695
19	.190
20	.10
21	−.1

$$P_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(1)} T_{2k} \left(\frac{4}{\xi}\right), \quad x \geqq x_1.$$

k	$p_k^{(1)}$
0	0.998908863464708
1	−.1070080635074
2	.19984879530
3	−.979433836
4	.80688896
5	−.9264185
6	.1342874
7	−.231680
8	.45790
9	−.10099
10	.2439
11	−.636
12	.177
13	−.52
14	.16
15	−.5
16	.2
17	−.1

$$Q_1(\xi) = \frac{5}{72\xi} \sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(1)} T_{2k} \left(\frac{4}{\xi}\right), \quad x \geqq x_1.$$

k	$q_k^{(1)}$
0	0.984755928487569
1	−.14702210610554
2	.503451998790
3	−.34318950514
4	.3518562517
5	−.474307443
6	.77941316
7	−.14896125
8	.3208979
9	−.762229
10	.196440
11	−.54263
12	.15915
13	−.4919
14	.1592
15	−.537
16	.188
17	−.68
18	.25
19	−.10
20	.4
21	−.2
22	.1

$$A_i'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} T_k^* \left(\frac{x}{x_1}\right), \quad x \leq x_1.$$

k	$c_k^{(1)}$
0	−0.114428593274535
1	0.137380027124725
2	−. 25547000579265
3	−. 9969365499706
4	. 6963917908506
5	−. 1626309920522
6	. 60499028575
7	. 64555565341
8	−. 17966716749
9	. 1660354692
10	. 213299137
11	−. 84763316
12	. 9841165
13	. 187352
14	−. 221129
15	. 29731
16	−. 634
17	−. 361
18	. 56
19	−. 2

$$B_i'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(1)} T_k^* \left(\frac{x}{x_1}\right), \quad x \leq x_1.$$

k	$d_k^{(1)}$
0	9.940419427058728
1	15.579915710889730
2	8.888337756906712
3	3.883526222253408
4	1.437271609283872
5	.454531860916177
6	.126003843482515
7	. 31730105217640
8	. 7222454652070
9	. 1512826480152
10	. 295870649015
11	. 53796403206
12	. 9212634897
13	. 1495079302
14	. 229358284
15	. 33578126
16	. 4702811
17	. 629424
18	. 81066
19	. 10055
20	. 1201
21	. 139
22	. 15
23	. 1

$$A_i'(x) = -\frac{e^{-\xi}}{2\pi^{1/2} x^{-1/4}} \sum_{k=0}^{\infty} p_k T_k^* \left(\frac{4}{\xi}\right), \quad x \geq x_1.$$

k	p_k
0	1.011284144666497
1	. 11017475312220
2	−. 254235199348
3	. 11612135375
4	−. 753697813
5	. 61610322
6	−. 5960727
7	. 657417
8	−. 80623
9	. 10802
10	−. 1561
11	. 241
12	−. 39
13	. 7
14	−. 1

$$B_i'(x) = \frac{e^{\xi}}{\pi^{1/2} x^{-1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} q_k T_k^* \left(\frac{4}{\xi}\right), \quad x \geq x_1.$$

k	q_k
0	0.986474998832512
1	−. 14059527726506
2	−. 590329151423
3	−. 63024235100
4	−. 6999840729
5	. 878376664
6	. 831728600
7	. 145288237
8	−. 56108016
9	−. 25515714
10	. 4500629
11	. 3773328
12	−. 606952
13	−. 575929
14	. 135265
15	. 86894
16	−. 35489
17	−. 10776
18	. 8916
19	. 283
20	−. 1921
21	. 441
22	. 297
23	−. 190
24	−. 6
25	. 47
26	−. 16
27	−. 6
28	. 6
29	−. 1
30	−. 1
31	. 1

$$A_i'(-x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} T_k^*\left(\frac{x}{x_1}\right), \quad x \leqq x_1.$$

k	$c_k^{(2)}$
0	0.134449513958915
1	.295942612178126
2	−.296599882452928
3	−.229042011018464
4	−. 10430170502297
5	. 26205694648635
6	. 6819857985582
7	−. 448787411506
8	−. 466608736190
9	−. 59718607437
10	. 8781641100
11	. 3376586374
12	. 224343376
13	−. 58834970
14	−. 13041887
15	−. 373007
16	. 209854
17	. 31019
18	. 17
19	−. 470
20	−. 50
21	. 1
22	. 1

$$B_i'(-x)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(2)} T_k^*\left(\frac{x}{x_1}\right), \quad x \leqq x_1.$$

k	$d_k^{(2)}$
0	0.077383596080147
1	−.668760120454877
2	−.324081364592807
3	. 52975384656115
4	. 96214831642713
5	. 14106085591037
6	−. 4854103068214
7	−. 2103320916783
8	−. 95569059362
9	. 77635869244
10	. 16918848678
11	−. 159320688
12	−. 517259143
13	−. 68354507
14	. 3546758
15	. 1887910
16	. 161175
17	−. 15404
18	−. 4341
19	−. 239
20	. 37
21	. 7
22	

$$P_2(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(2)} T_{2k}\left(\frac{4}{\xi}\right), \quad x \geqq x_1.$$

k	$p_k^{(2)}$
0	1.001295719214363
1	. 1272661421933
2	−. 21915184579
3	. 1046147063
4	−. 85070886
5	. 9691191
6	−. 1397384
7	. 240163
8	−. 47328
9	. 10414
10	−. 2510
11	. 653
12	−. 182
13	. 53
14	−. 17
15	. 5
16	−. 2
17	. 1

$$Q_2(\xi)=\frac{7}{72\xi}\sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(2)} T_{2k}\left(\frac{4}{\xi}\right), \quad x \geqq x_1.$$

k	$q_k^{(2)}$
0	0.987772630468030
1	−. 11810702120328
2	. 387646347470
3	−. 25960352758
4	. 2635721585
5	−. 353089580
6	. 57769068
7	−. 11004912
8	. 2364707
9	−. 560541
10	. 144217
11	−. 39780
12	. 11653
13	−. 3598
14	. 1163
15	−. 392
16	. 137
17	−. 50
18	. 19
19	−. 7
20	. 3
21	−. 1

$$A_i(x_n) = 0$$

$$x_1 = -2.338107410459767$$

$$x_n = -\left\{\frac{3}{2}\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)u_n^{(1)}\right\}^{2/3}, \quad n=2, 3, \ldots$$

$$u_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} z_k^{(1)} T_{2k}\left(\frac{7}{4n-1}\right)$$

k	$z_k^{(1)}$
0	1.001133360892161
1	.1128400476482
2	−.4861929251
3	.94359901
4	−.3851527
5	.249808
6	−.22279
7	.2511
8	−.339
9	.53
10	−.9
11	.2

$$A'_i(x_n) = 0$$

$$x_1 = -1.018792971647471$$

$$x_n = -\left\{\frac{3}{2}\pi\left(n-\frac{3}{4}\right)u_n^{(3)}\right\}^{2/3}, \quad n=2, 3, \ldots$$

$$u_n^{(3)} = \sum_{k=0}^{\infty} z_k^{(3)} T_{2k}\left(\frac{5}{4n-3}\right)$$

k	$z_k^{(3)}$
0	0.996899718041792
1	−.3084004902659
2	.15717884497
3	−.521415490
4	.33935775
5	−.3312534
6	.425164
7	−.66633
8	.12173
9	−.2513
10	.573
11	−.142
12	.37
13	−.11
14	.3
15	−.1

$$B_i(x_n) = 0$$

$$x_1 = -1.173713222709128$$

$$x_n = -\left\{\frac{3}{2}\pi\left(n-\frac{3}{4}\right)u_n^{(2)}\right\}^{2/3}, \quad n=2, 3, \ldots$$

$$u_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} z_k^{(2)} T_{2k}\left(\frac{5}{4n-3}\right)$$

k	$z_k^{(2)}$
0	1.002195660695910
1	.2178109802700
2	−.16960496475
3	.551229269
4	−.35250529
5	.3400430
6	−.433287
7	.67597
8	−.12313
9	.2537
10	−.578
11	.143
12	−.38
13	.11
14	−.3
15	.1

$$B'_i(x_n) = 0$$

$$x_1 = -2.294439682614123$$

$$x_n = -\left\{\frac{3}{2}\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)u_n^{(4)}\right\}^{2/3}, \quad n=2, 3, \ldots$$

$$u_n^{(4)} = \sum_{k=0}^{\infty} z_k^{(4)} T_{2k}\left(\frac{7}{4n-1}\right)$$

k	$z_k^{(4)}$
0	0.998406051221823
1	−.1589340426457
2	.4514710719
3	−.89644468
4	.3727183
5	−.244517
6	.21950
7	−.2483
8	.336
9	−.52
10	.9
11	−.2

$$A_i^{(1)}(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(3)} T_k^* \left(\frac{x}{x_2}\right), \quad x \leqq x_2.$$

k	$a_k^{(3)}$
0	0.167309955549330
1	−.138833749391644
2	. 42693976093630
3	−. 7776322457830
4	−. 392114983777
5	. 841351286511
6	−. 304480235087
7	. 53284908589
8	. 930472131
9	−. 3321295855
10	. 942808894
11	−. 108124674
12	−. 12158869
13	. 7397362
14	−. 1327282
15	. 49601
16	. 31827
17	−. 8216
18	. 768
19	. 69
20	−. 32
21	. 4

$$B_i^{(1)}(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(3)} T_k^* \left(\frac{x}{x_2}\right), \quad x \leqq x_2.$$

k	$b_k^{(3)}$
0	19.746423175415449
1	33.421598170057534
2	23.112132392259135
3	13.441327140061466
4	6.749710207607081
5	3.007841304580219
6	1.205402544150081
7	.440612841135375
8	.148452873274722
9	. 46447156901552
10	. 13596185919530
11	. 3743995685863
12	. 974415692922
13	. 240747478580
14	. 56657962750
15	. 12741213076
16	. 2745709407
17	. 568338025
18	. 113250222
19	. 21767990
20	. 4042866
21	. 726726
22	. 126620
23	. 21412
24	. 3519
25	. 563
26	. 88
27	. 13
28	. 2

$$A_i^{(1)}(x) = \frac{1}{3} - \frac{e^{-\xi}}{(6\pi\xi)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{(1)} T_k^* \left(\frac{8}{\xi}\right), \quad x \geqq x_2.$$

k	$r_k^{(1)}$
0	0.968611686973613
1	−. 30129651772080
2	. 1182866477802
3	−. 69897206095
4	. 5346267929
5	−. 491980038
6	. 52176903
7	−. 6200693
8	. 809646
9	−. 114492
10	. 17342
11	−. 2790
12	. 473
13	−. 84
14	. 16
15	−. 3
16	. 1

$$B_i^{(1)}(x) = \frac{e^{\xi}}{\pi^{1/2} x^{3/4}} \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{(1)} T_k^* \left(\frac{8}{\xi}\right), \quad x \geqq x_2.$$

k	$s_k^{(1)}$
0	1.043373261895484
1	. 46562348283283
2	. 3621330668957
3	. 483205510468
4	. 41127965419
5	−. 18136189822
6	−. 9703694198
7	−. 734800816
8	. 961099744
9	. 235057030
10	−. 108774363
11	−. 40117513
12	. 16681504
13	. 6112590
14	−. 3308610
15	−. 772088
16	. 727928
17	. 32063
18	−. 153606
19	. 26875
20	. 26486
21	−. 13029
22	−. 2217
23	. 3714
24	−. 710
25	−. 649
26	. 416
27	. 1
28	−. 107
29	. 45
30	. 9
31	−. 16
32	. 5
33	. 2
34	−. 2
35	. 1

$$A_i^{(1)}(-x) = x \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(3)} T_k^* \left(\frac{x}{x_2}\right), \quad x \leqq x_2.$$

k	$c_k^{(3)}$
0	0.290568567087045
1	−.168969223877061
2	−. 42714085031810
3	. 84978293684633
4	. 9065203040869
5	−. 20322262881791
6	−. 5068718344054
7	. 2113265160901
8	. 1036734509965
9	−. 17469500078
10	−. 95657221195
11	−. 16584800400
12	. 3528346940
13	. 1642011754
14	. 88939642
15	−. 67283625
16	−. 15048855
17	. 440650
18	. 652841
19	. 82431
20	−. 9827
21	−. 3998
22	−. 270
23	. 74
24	. 17

$$B_i^{(1)}(-x) = x \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(3)} T_k^* \left(\frac{x}{x_2}\right), \quad x \leqq x_2.$$

k	$d_k^{(3)}$
0	0.187484069565758
1	−.294866612241399
2	.166193041700529
3	. 3519023817395
4	−. 43311223754907
5	−. 8318876773784
6	. 7527677093084
7	. 2526578667711
8	−. 409840740630
9	−. 347588883407
10	−. 29121350908
11	. 21320634725
12	. 5927200433
13	−. 258263507
14	−. 370409669
15	−. 49404676
16	. 8914115
17	. 3488812
18	. 193554
19	−. 96744
20	−. 20696
21	. 72
22	. 620
23	. 83
24	−. 5
25	−. 3

$$P_3(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(3)} T_{2k} \left(\frac{8}{\xi}\right), \quad x \geqq x_2.$$

k	$p_k^{(3)}$
0	0.993614142516261
1	−. 6213543340449
2	. 161900652955
3	−. 9418135576
4	. 866969841
5	−. 107894731
6	. 16651496
7	−. 3023183
8	. 623691
9	−. 142722
10	. 35598
11	−. 9551
12	. 2729
13	−. 824
14	. 261
15	−. 86
16	. 30
17	−. 11
18	. 4
19	−. 1
20	. 1

$$Q_3(\xi) = \frac{1}{2\xi} \sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(3)} T_{2k} \left(\frac{8}{\xi}\right), \quad x \geqq x_2.$$

k	$q_k^{(3)}$
0	1.108268927151576
1	−. 29247192676291
2	. 1261229956734
3	−. 98492949041
4	. 11090415008
5	−. 1604311887
6	. 278860541
7	−. 55829252
8	. 12511344
9	−. 3075480
10	. 816959
11	−. 231862
12	. 69687
13	−. 22024
14	. 7277
15	−. 2502
16	. 892
17	−. 328
18	. 124
19	−. 48
20	. 19
21	−. 8
22	. 3
23	−. 1
24	. 1

$$A_i^{(2)}(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(4)} T_k^*\left(\frac{x}{x_2}\right), \quad x \leqq x_2.$$

k	$a_k^{(4)}$
0	0.103236104665470
1	−. 60509241828425
2	. 12956669968692
3	−. 1356381323310
4	−. 301150428752
5	. 191145434075
6	−. 48046629232
7	. 5321578036
8	. 743372356
9	−. 454565082
10	. 92013893
11	−. 5914774
12	−. 1907394
13	. 649754
14	−. 85139
15	−. 1128
16	. 2639
17	−. 498
18	. 30
19	. 6
20	−. 2

$$B_i^{(2)}(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(4)} T_k^*\left(\frac{x}{x_2}\right), \quad x \leqq x_2.$$

k	$b_k^{(4)}$
0	2.376934193343208
1	3.436488592599466
2	2.134862805289304
3	1.131354031040452
4	.517423388626065
5	.212442857090162
6	. 78834690199751
7	. 26822436283339
8	. 8459673551766
9	. 2486997265073
10	. 686750133278
11	. 179020959370
12	. 44230752113
13	. 10403425888
14	. 2336510626
15	. 502506127
16	. 103778536
17	. 20623849
18	. 3952167
19	. 731700
20	. 131080
21	. 22757
22	. 3834
23	. 628
24	. 100
25	. 16
26	. 2

$$A_i^{(2)}(x) = \frac{x}{3} - C_2 + \frac{e^{-\xi}}{2\pi^{1/2} x^{5/4}} \sum_{k=0}^{\infty}{}' r_k^{(2)} T_k^*\left(\frac{8}{\xi}\right), \quad x \geqq x_2.$$

k	$r_k^{(2)}$
0	0.927547614305933
1	−. 68053787556737
2	. 4048448765197
3	−. 316543933971
4	. 29891872825
5	−. 3254579647
6	. 396783192
7	−. 53091403
8	. 7684256
9	−. 1189947
10	. 195477
11	−. 33834
12	. 6136
13	−. 1161
14	. 228
15	−. 46
16	. 10
17	−. 2

$$B_i^{(2)}(x) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma(1/3)} + \frac{e^{\xi}}{\pi^{1/2} x^{5/4}} \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(2)} T_k^*\left(\frac{8}{\xi}\right), \quad x \geqq x_2$$

k	$s_k^{(2)}$
0	1.123888296754825
1	.139659966975968
2	. 18318289390212
3	. 2615195032499
4	−. 156840635560
5	−. 313885774033
6	−. 84468297932
7	. 17260686481
8	. 14707888727
9	−. 452778994
10	−. 2341516028
11	. 3822580
12	. 408115974
13	−. 19299079
14	−. 76089691
15	. 12666240
16	. 13694440
17	−. 5115168
18	−. 1924847
19	. 1591882
20	. 31079
21	−. 382717
22	. 108957
23	. 58408
24	−. 47486
25	. 2474
26	. 11375
27	−. 5230
28	−. 857
29	. 1799
30	−. 576
31	−. 235
32	. 277
33	−. 70
34	−. 45
35	. 44
36	−. 10
37	−. 8
38	. 7
39	−. 1

$$A_i^{(2)}(-x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(4)} T_k^*\left(\frac{x}{x_2}\right), \quad x \leqq x_2.$$

k	$c_k^{(4)}$
0	0.177005327942350
1	−.42085046281750
2	−.34146627056594
3	.12894129509932
4	.5721221547051
5	−.1646621119883
6	−.931799174640
7	.54481978433
8	.97698807507
9	.11030847853
10	−.5393950658
11	−.1593890322
12	.60742684
13	.94176146
14	.11702493
15	−.2385894
16	−.833898
17	−.31957
18	.24686
19	.4511
20	−.137
21	−.148
22	−.16
23	.2
24	.1

$$P_4(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(4)} T_{2k}\left(\frac{8}{\xi}\right), \quad x \geqq x_2.$$

k	$p_k^{(4)}$
0	0.976553058529189
1	−.22412363923160
2	.950802872544
3	−.73985161773
4	.8322420731
5	−.1203499189
6	.209165447
7	−.41873810
8	.9383715
9	−.2306636
10	.612723
11	−.173897
12	.52265
13	−.16518
14	.5458
15	−.1876
16	.669
17	−.246
18	.93
19	−.36
20	.15
21	−.6
22	.2
23	−.1

$$B_i^{(2)}(-x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(4)} T_k^*\left(\frac{x}{x_2}\right), \quad x \leqq x_2.$$

k	$d_k^{(4)}$
0	0.129037050014735
1	−.153686551313976
2	.37869148598867
3	.11197423487665
4	−.4578434933010
5	−.2507245794353
6	.426041673401
7	.318553007633
8	.11573723275
9	−.25427012853
10	−.4846298890
11	.857066783
12	.425156611
13	.21206489
14	−.17162598
15	−.3569494
16	.168758
17	.159177
18	.16931
19	−.2842
20	−.909
21	−.41
22	.19
23	.4

$$Q_4(\xi) = \frac{3}{2\xi} \sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(4)} T_{2k}\left(\frac{8}{\xi}\right), \quad x \geqq x_2.$$

k	$q_k^{(4)}$
0	0.884346558534359
1	−.47529013905515
2	.2967674984980
3	−.294426349039
4	.39382276893
5	−.6504392445
6	.1258149730
7	−.275381142
8	.66604723
9	−.17498852
10	.4930492
11	−.1475270
12	.465141
13	−.153576
14	.52829
15	−.18854
16	.6956
17	−.2645
18	.1034
19	−.415
20	.170
21	−.71
22	.30
23	−.13
24	.6
25	−.3
26	.1
27	−.1

IRODALOM

[1] MILLER, J. C. P.: *The Airy integral. British Assoc. Adv. Sci. Math. Tables, Part-Vol. B.*, Cambridge (1946).
[2] SMIRNOV, A. D.: *Tables of Airy functions.* Moscow (1955).
[3] LUKE, Y. L.: *Integrals of Bessel Functions.* McGraw-Hill Book Company. New York (1962).
[4] NÉMETH GÉZA: Bessel függvények Csebisev sorfejtése, II. *KFKI Közl.* 299—309. (1966), **14**.

(Beérkezett: 1968. I. 8.)

CHEBYSHEV POLYNOMIAL EXPANSIONS OF AIRY FUNCTIONS, THEIR ZEROS, DERIVATIVES, FIRST AND SECOND INTEGRALS

by

G. NÉMETH

Summary

Chebyshev polynomial expansions are determined in this paper for Airy Functions and related functions (zeros, derivatives, first and second integrals). These asymptotic type expansions have convergent character. Their coefficients evaluated to 15 digit accuracy are listed in tabulated form.

A SZÁSZ O.-FÉLE OPERÁTOR APPROXIMÁCIÓS TULAJDONSÁGAIRÓL

Írta: GRÓF JÓZSEF

I. Bevezetés

Ismeretes, hogy valamely $f(x)$ függvényhez hozzárendelt

$$B_n[f;\, x] = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

Bernstein-féle polinomokkal [1] kapcsolatban érvényesek a következő állítások:

1. Ha $f(x)$ korlátos $[0, 1]$-ben és folytonos az $[a, b]$ intervallumban, akkor $B_n[f;\, x] \to f(x)$ az $[a, b]$-ben egyenletesen, midőn $n \to \infty$ [4].

2. Ha $f(x)$ korlátos $[0, 1]$-ben és folytonos $x = x_0$-nál, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} B_n[f;\, x_0] = f(x_0)$ [3].

3. Ha $f(x)$ kielégíti az $|f(x'') - f(x')| < K_1 |x'' - x'|^\alpha$ $(0 \leqq x' < x'' \leqq 1,\ 0 < \alpha \leqq 1)$ *Lipschitz*-féle feltételt, akkor $|B_n[f;\, x] - f(x)| < K_2 \sqrt{n^{-\alpha}}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$, ahol K_1, K_2 konstansok [5].

Végtelen intervallumra SZÁSZ OTTÓ általánosította a *Bernstein*-féle polinomokat [6], olyan operátort vezetett be, amely valamely, a $[0, \infty)$-ben értelmezett függvényhez súlyozott hatványsort rendel:

$$S_n[f;\, x] = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}.$$

Idézett cikkében a *Bernstein*-polinomokra vonatkozó, előbb említett eredmények analóg állításait vizsgálja S_n-nel kapcsolatban, végtelen intervallum esetén, továbbá differenciálható függvényekre vonatkozólag is elemzi $S_n[f;\, x]$ tulajdonságait. Az alábbiakban ezekhez a vizsgálatokhoz kapcsolódva néhány kiegészítő megállapítást fogunk tenni, továbbá élesítjük, ill. általánosítjuk SZÁSZ O. egyes tételeit.

II.

Első lépésként meg fogjuk vizsgálni, nem állíthatunk-e többet az alábbi tételnél ([6], 240. old.):

„Ha $f(x)$ korlátos minden véges intervallumban és $f(x) = O(x^k)$ (ha $x \to \infty$, $k > 0$ tetszőleges konstans), továbbá $f(x)$ folytonos $x = x_0$-nál, akkor $S_n[f;\, x_0] \to f(x_0)$ midőn $n \to \infty$."

Pontosabban szólva: nem lehetne-e az $f(x) = O(x^k)$ feltételt enyhíteni? Hogy túlzott reményeket nem táplálhatunk ez irányban, az rögtön kiderül, ha pl. az $f(x)=e^{x^k}$ függvényhez rendelt súlyozott hatványsort vizsgáljuk:

$$S_n[f;\,x] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp\left[-nx+\left(\frac{\nu}{n}\right)^k\right]\frac{(nx)^\nu}{\nu!}.$$

A sor ν-edik tagját vizsgálva (a *Stirling*-formula felhasználásával) láthatjuk, hogy sorunk bármely pozitív x-re és n-re $k>1$ esetén divergens. Ha példánkban $k\leqq 1$, akkor a ν-edik tag zérushoz tart ugyan (midőn $\nu\to\infty$), kérdés azonban, hogy ekkor már fennáll-e a konvergencia, s ha igen, a sor összege e^{x^k}-hoz konvergál-e, midőn $n\to\infty$. A kérdésekre igennel válaszolhatunk, de ennél többet fogunk bizonyítani: az alábbi tétel nemcsak az előbb idézett tételt, hanem [6] másik két tételét is élesíti, nevezetesen azokat, amelyek a közelítés rendjét vizsgálják, (adott pontban) egyszer, ill. kétszer differenciálható függvények esetén. ([6], 242., ill. 243. old.) A tétel egyben általánosabban, r-szer ($r\geqq 0$, tetszőleges) differenciálható függvényekkel foglalkozik.

1. TÉTEL (A) *Ha $f(x)$ korlátos minden, a $[0,\infty)$-ben fekvő véges intervallumon, és $f(x)=O(e^{kx})$ ($x\to\infty$, k tetszőleges pozitív konstans), továbbá $f(x)$ r-szer differenciálható az $x=x_0$ helyen ($r\geqq 0$, $x_0\geqq 0$), ill. $r=0$ esetben $f(x)$ folytonos $x=x_0$-nál, akkor*

$$S_n[f;\,x_0] = \sum_{j=0}^{r}\frac{1}{j!}f^{(j)}(x_0)V_{n,j}(x_0)+\frac{\varrho_{n,r}(x_0)}{\sqrt{n^r}}, \tag{1}$$

ahol $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho_{n,r}(x_0)=0$, *és* $V_{n,j}$ *jelentése*:

$$V_{n,j}(x) = e^{-nx}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^j\frac{(nx)^\nu}{\nu!}.$$

(B) *A $V_{n,j}(x)$ függvényekre érvényes a következő rekurziós formula:*

$$V_{n,j+1}(x) = \frac{x}{n}V'_{n,j}(x)+\frac{jx}{n}V_{n,j-1}(x)\qquad (j=1,2,\ldots). \tag{2}$$

(C) *A $V_{n,j}(x)$ függvény $\left[\frac{j}{2}\right]$-edfokú polinom, amelynek minden együtthatója legalább $n^{-\left[\frac{j+1}{2}\right]}$ rendben zérushoz tart, midőn $n\to\infty$, konstans tagja pedig $j\neq 0$-ra zérus.*

(D) *Ha valamely $f(x)$ függvényre érvényes a*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^k}}{|f(x)|}<\infty\qquad (k>1)$$

feltétel, akkor az $S_n[f;\,x]$ transzformáció $n>0$, $x>0$-ra értelmetlen.

Bizonyítás. Kezdjük (B) bizonyításával. Differenciáljuk $V_{n,j}(x)$-et:

$$V'_{n,j}(x) = -nV_{n,j}(x)-jV_{n,j-1}(x)+\frac{1}{x}\,e^{-nx}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^j\nu\frac{(nx)^\nu}{\nu!}.$$

Ha az utoljára kapott szummában szereplő ν tényezőt a következőképpen írjuk fel:

$$\nu = n\left(\frac{\nu}{n}-x\right)+nx,$$

akkor az illető sor az alábbi alakot ölti:

$$ne^{-nx}\left[\frac{1}{x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^{j+1}\frac{(nx)^\nu}{\nu!}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^{j}\frac{(nx)^\nu}{\nu!}\right]=$$

$$=\frac{n}{x}[V_{n,j+1}(x)-(-x)^{j+1}]+n[V_{n,j}(x)-(-x)^j]=\frac{n}{x}V_{n,j+1}(x)+nV_{n,j}(x),$$

ezt $V'_{n,j}(x)$ előbbi kifejezésébe visszatéve a rekurziós formula közvetlenül megkapható.

A tétel (C) részét teljes indukcióval bizonyítjuk. A későbbiek kedvéért is számítsuk ki $V_{n,j}(x)$-et néhány j-re. Ehhez szükségünk van az $S_n[w^j; x]$ függvényekre. Nyilván $S_n[1; x]\equiv 1$,

$$S_n[w; x] = e^{-nx}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\nu}{n}\frac{(nx)^\nu}{\nu!} = xe^{-nx}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(nx)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} = x.$$

Hasonló számolással azt kapjuk, hogy

$$S_n[w^2; x] = x^2+\frac{x}{n}; \qquad S_n[w^3; x] = x^3+\frac{3x^2}{n}+\frac{x}{n^2};$$

$$S_n[w^4; x] = x^4+\frac{6x^3}{n}+\frac{7x^2}{n^2}+\frac{x}{n^3}; \ \ldots$$

Ezek után a $V_{n,j}(x)$ függvények már könnyen adódnak:

$$(3)\qquad \begin{cases} V_{n,0}(x)\equiv 1; & V_{n,1}(x)\equiv 0; \qquad V_{n,2}(x)=\dfrac{x}{n};\\[2mm] V_{n,3}(x)=\dfrac{x}{n^2}; & V_{n,4}(x)=\dfrac{3x^2}{n^2}+\dfrac{x}{n^3}; \ \ldots \end{cases}$$

(2)-ből világosan látható, hogy ha $V_{n,2m-1}(x)$, ill. $V_{n,2m}(x)$ függvény $m-1$-edfokú, ill. m-edfokú polinom, akkor $V_{n,2m+1}(x)$, ill. $V_{n,2m+2}(x)$ szintén polinom, amelynek fokszáma m, ill. $m+1$. Ugyanígy az is látható, hogy ha $V_{n,2m-1}(x)$ és $V_{n,2m}(x)$ polinom együtthatói közül bármelyikre igaz, hogy legalább n^{-m} rendben zérushoz tart, akkor $V_{n,2m+1}(x)$ és $V_{n,2m+2}(x)$ polinom együtthatói legalább $n^{-(m+1)}$ rendben tartanak zérushoz. Ezeket a megállapításokat (3)-mal összevetve, beláttuk, hogy $V_{n,j}(x)$ függvény a (C)-ben leírt tulajdonságú polinom. (Hogy konstans tagok $j\geqq 1$-re nem lépnek fel a polinomokban, az (2)-ből és (3)-ból szintén látható.) Most bizonyítsuk be (A)-t.

Ha $x_0=0$, akkor az állítás nyilvánvaló. Legyen tehát a továbbiakban $x_0>0$. Mivel $f(x)$ r-szer differenciálható $x=x_0$-ban, írhatjuk:

$$(4)\qquad f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\ldots+\frac{h^r}{r!}[f^{(r)}(x_0)+\eta(x_0,h)],$$

ahol $|\eta(x_0, h)| < \sigma(2\delta)$, ha $|h| < 2\delta$, és $\sigma \to 0$, midőn $\delta \to 0$. Ebből, valamint az

$$S_n[f;\, x_0] - f(x_0) = e^{-nx_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{\nu}{n}\right) - f(x_0) \right] \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!}$$

egyenlőségből:

$$S_n[f;\, x_0] = e^{-nx_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{r} \left(\frac{\nu}{n} - x\right)^j \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!} +$$

$$+ e^{-nx_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{n} - x_0\right)^r \frac{1}{r!} \eta_{n,\nu}(x_0) \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!},$$

ahol $|\eta_{n,\nu}(x_0)| < \sigma(2\delta)$, ha $\left|\frac{\nu}{n} - x_0\right| \leqq 2\delta$. Ha a kapott kifejezésben az utolsó szummát három részre bontjuk a következő módon:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} = \sum_{\left|\frac{\nu}{n} - x_0 e^{k/n}\right| < \delta} {}_1 + \sum_{\frac{\nu}{n} < x_0 e^{k/n} - \delta} {}_2 + \sum_{\frac{\nu}{n} > x_0 e^{k/n} + \delta} {}_3 \,,$$

akkor hátralevő feladatunk csupán annak belátása, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sqrt{n^r}\left(\sum{}_1 + \sum{}_2 + \sum{}_3\right)\right] = 0.$$

Kezdjük Σ_1 vizsgálatával:

$$\left|\sum{}_1\right| < \frac{1}{r!} e^{-nx_0} \sum_{\left|\frac{\nu}{n} - x_0 e^{k/n}\right| < \delta} \left|\frac{\nu}{n} - x_0\right|^r |\eta_{n,\nu}(x_0)| \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!}.$$

Mivel k rögzített pozitív szám, létezik olyan $n_0 = n_0(\delta)$ küszöbszám, hogy

(5) $$[x_0 e^{k/n} - \delta,\ x_0 e^{k/n} + \delta] \subset [x_0 - 2\delta,\ x_0 + 2\delta] \qquad (n > n_0).$$

Ha tehát n elég nagy, akkor

(6) $$\left|\sum{}_1\right| < \frac{1}{r!} \sigma(2\delta) e^{-nx_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{\nu}{n} - x_0\right|^r \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!}.$$

A Bunyakovszkij—Schwarz-féle egyenlőtlenség értelmében $r \geqq 1$-re

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{\nu}{n} - x_0\right|^r \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!} \leqq \left\{ \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{n} - x_0\right)^{2r-2} \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!} \right] \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{n} - x_0\right)^2 \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!} \right] \right\}^{1/2}.$$

Ezen eredményünket (6)-tal, valamint a tétel (C) állításával egybevetve, kapjuk:

(7) $$\left|\sum{}_1\right| < K_{r,x_0} \cdot \sigma(2\delta) \sqrt{n^{-r}},$$

ahol K_{r,x_0} csak r-től és x_0-tól függő, n-től független konstans.

Σ_2 becsléséhez (4)-ből írjuk fel:

(8) $$\left(\frac{\nu}{n} - x_0\right)^r \frac{1}{r!} \eta_{n,\nu}(x_0) = f\left(\frac{\nu}{n}\right) - \sum_{j=0}^{r} \left(\frac{\nu}{n} - x_0\right)^j \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0).$$

Mivel Σ_2-ben $\frac{\nu}{n} < x_0 e^{k/n} - \delta$, ezért létezik olyan n-től független x_1 szám, hogy a Σ_2-beli tagokra $\left|\frac{\nu}{n} - x_0\right| < x_1$, $f(x)$ véges-intervallumbeli korlátosságából pedig $\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right| < K$ (konst) a szóba jöhető ν-kre, így

$$(9)\qquad |\textstyle\sum_2| \leqq \left[K + \sum_{j=0}^{r} x_1^j \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)\right] e^{-nx_0} \sum_{\left|\frac{\nu}{n} - x_0 e^{k/n}\right| > \delta} \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!}.$$

Az utolsó szummajel mögötti x_0 helyére $x_0 e^{k/n}$-et írva növeljük a szumma értékét. Nyilvánvaló továbbá, hogy létezik olyan $n_1(k)$ küszöbszám, amelyre fennáll, hogy $n > n_1$ esetén a szóba jöhető ν értékek halmazát nem csökkentjük, ha ν-re a következő egyenlőtlenséget írjuk elő:

$$|\nu - nx_0 e^{k/n}| > \frac{\delta}{2x_0} nx_0 e^{k/n}.$$

Ezen egyenlőtlenségnek eleget tevő indexek halmazát H-val jelölve, írhatjuk tehát:

$$(10)\qquad e^{-nx_0} \sum_{\left|\frac{\nu}{n} - x_0 e^{k/n}\right| > \delta} \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!} \leqq e^{-nx_0(1-e^{k/n})} \sum_{\nu \in H} e^{-nx_0 e^{k/n}} \frac{(nx_0 e^{k/n})^\nu}{\nu!} \qquad (n > n_1).$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nx_0(1-e^{k/n})} = e^{kx_0},$$

továbbá használjuk fel a következő formulát: ([2], 200. old.)

$$\sum_{|\nu - t| > \beta t} e^{-t} \frac{t^\nu}{\nu!} = O\left(e^{-\frac{1}{3}\beta^2 t}\right) \qquad (t \to \infty).$$

Ezek felhasználásával (9)-ből és (10)-ből kapjuk:

$$(11)\qquad |\textstyle\sum_2| = O\left[\exp\left(-\frac{\delta^2 n}{12x_0}\right)\right] \qquad (n \to \infty).$$

Σ_3 becsléséhez használjuk fel az $f(x) = O(e^{kx})$ feltételt. Ennek megfelelően (8)-ból

$$\left(\frac{\nu}{n} - x_0\right)^r \eta_{n,\nu}(x_0) = O(e^{k\nu/n}) \qquad (\nu \to \infty),$$

amiből

$$\textstyle\sum_3 = O\left[e^{-nx_0} \sum_{\frac{\nu}{n} > x_0 e^{k/n} + \delta} e^{k\nu/n} \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!}\right] \leqq$$

$$\leqq e^{-nx_0(1-e^{k/n})}\, O\left[\sum_{\left|\frac{\nu}{n} - x_0 e^{k/n}\right| > \delta} e^{-nx_0 e^{k/n}} \frac{(nx_0 e^{k/n})^\nu}{\nu!}\right].$$

Ezután már Σ_2-éhez hasonlóan fejezhetjük be Σ_3 becslését, így (7)-re és (11)-re visszatekintve (A) bizonyítását befejeztük.

Illusztrációképpen írjuk fel a tétel (A) állítását $r=4$ esetre: (felhasználjuk (3)-mat.)

$$S_n[f; x_0] = f(x_0)+\frac{1}{2n}x_0f''(x_0)+\frac{1}{6n^2}x_0f'''(x_0)+\frac{1}{8n^2}x_0^2f^{(4)}(x_0)+\frac{1}{n^2}\varrho_{n,4}(x_0),$$

ahol $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho_{n,4}(x_0)=0$.

A tétel utolsó, (D) állításának bizonyítását lényegében már a tétel kimondása előtt elvégeztük, amikor beláttuk, hogy $S_n[e^{w^k}; x]$ $k>1$ mellett $x>0$, $n>0$-ra értelmetlen.

MEGJEGYZÉSEK:

1. A (D) alatti feltétel megengedi, hogy az (A)-beli $f(x)=O(e^{kx})$ feltétel helyébe esetleg még enyhébb feltételt állítsunk. Példaként tekintsük az $f(x)=x^x$ függvényt — erről a tétel nem nyilatkozik sem pozitív, sem negatív értelemben. Arra a kérdésre, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}S_n[w^w; x]=x^x$ fennáll-e valamilyen x-re, nem válaszolunk, könnyű azonban látni (pl. a hányadoskritérium segítségével), hogy az $S_n[w^w; x]$ végtelen sor $n>1$ mellett minden $x\geqq 0$-ra konvergens, $n=1$ esetén $x<1/e$-re konvergens, $x>1/e$-re divergens.

2. Az $r=2$ esetben a tétel a *Bernstein*-polinomokra vonatkozó *Voronovszkája*-féle tétellel [7] analóg, amely most nemcsak arra mutat rá, hogy $f''(x_0)\neq 0$ esetén a közelítés nem lehet jobb $1/n$-edrendűnél, hanem arra is, hogy ha az $xf''(x)$ szorzat nem korlátos valamely ($[0,\infty)$-en fekvő) végtelen intervallumban, akkor ebben $S_n[f; x]$ nem konvergálhat egyenletesen $f(x)$-hez, midőn $n\to\infty$.

3. A tétel bizonyítására visszatekintve rögtön látható, hogy ha $p_m(x)$ legfeljebb m-edfokú polinom, akkor $S_n[p_m; x]$ is az, bármely n mellett.

2. TÉTEL. *Ha $f(x)$ r-szer differenciálható $[0,\infty)$-ben, és $f^{(r)}(x)=O(e^{kx})$ ($x\to\infty$, k tetszőleges pozitív konstans), valamint $f^{(r)}(x)$ folytonos $x=x_0$-nál* ($x_0\geqq 0$), *akkor*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d^r}{dx^r}S_n[f; x]\Big|_{x=x_0}=f^{(r)}(x_0).$$

Az állítás bizonyítása erősebb feltételek mellett $\big(O(e^{kx})$ helyett $O(x^k)\big)$ [6]-ban (242. old.) szerepel. Ehhez a bizonyításhoz csak annyit kell hozzátennünk, hogy a

$$\frac{d^r}{dx^r}S_n[f; x]\Big|_{x=x_0}-f^{(r)}(x_0)$$

eltérésre kapott végtelen sort bontsuk olyan Σ_4, Σ_5, Σ_6 szummák összegére, amelyek futóindexei tartozzanak rendre ugyanabba az indexhalmazba, mint az 1. (A) tétel bizonyításában Σ_1, Σ_2 és Σ_3 indexei. A hátralevő lépésekben ekkor a most felsorolt két bizonyításban felhasznált gondolatokhoz képest új ötletekre nincs szükségünk.

III.

Eddigi vizsgálatainkban $S_n[f; x]$-et, ill. annak deriváltjait rögzített x_0 pontban tekintettük, a feltételek egy része is csak $f(x)$-nek x_0 pontbeli viselkedésére vonatkozott. Most vizsgáljuk meg, mit mondhatunk $f(x)$-nek $S_n[f; x]$-szel való egyenletes megközelítésének lehetőségéről, ill. a megközelítés rendjéről. Idézzük elsősorban SZÁSZ O. idevágó tételét ([6]. 240—241. old.):

„Ha $f(x)$ kielégíti a következő Lipschitz-típusú feltételt:

$$(12)\qquad |f(x_1)-f(x_2)|<M\frac{|x_1-x_2|^\alpha}{(x_1+x_2)^{\alpha/2}}\qquad (0<x_1<x_2<\infty),$$

ahol M és α konstansok $(0<\alpha\leqq 1)$, akkor

$$(13)\qquad |S_n[f; x]-f(x)|\leqq\frac{M}{\sqrt{n^\alpha}}\qquad (0<x<\infty)."$$

Az alábbi tételben (13)-nál gyengébb állítást fogunk kimondani, ennek megfelelően azonban az $f(x)$-re vonatkozó, meglehetősen szigorú (12) feltételt jelentős mértékben enyhíthetjük. Célunk tehát olyan megállapítást tenni, hogy ha valamely $f(x)$ függvény végtelen intervallumban S_n segítségével egyenletesen nem is approximálható, milyen feltétel mellett állíthatjuk, hogy $S_n[f; x]$ tetszőleges hosszúságú zárt intervallumon egyenletesen megközelíti azt. Megadjuk a közelítés rendjét is.

3. TÉTEL. (A) *Ha $|f(x)|\leqq Ne^{kx}$ minden pozitív x-re, és $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ intervallumban, $(a\geqq 0)$, akkor $n>n_2$-re*

$$(14)\qquad |S_n[f; x]-f(x)|<\omega_{[a,b]}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(1+\sqrt{b})+\frac{M}{n}$$

egyenletesen az $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ intervallumban, ahol N, k pozitív konstansok, $\omega_{[a,b]}(\delta)$-val pedig az $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó folytonossági modulusát jelöltük. Megadjuk továbbá az n_2 küszöbszámot és az n-től független M konstans értékét:

$$n_2=n_2(k,\varepsilon,b)=k/\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{2b}\right)$$

$$M=\frac{b}{\varepsilon^2}\left(\max_{a\leqq t\leqq b}|f(t)|+4N\left(1+\frac{\varepsilon}{2b}\right)e^{1,2kb}\right).$$

(B) *A (14) becslés a közelítés nagyságrendjét tekintve nem javítható.*

Bizonyítás. Legyen $x\in[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, egyébként tetszőleges szám.

$$|S_n[f; x]-f(x)|\leqq\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{-nx}\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right|\frac{(nx)^\nu}{\nu!}\leqq\sum_{\nu=0}^{[an]}{}_7+\sum_{\nu=[an]+1}^{[bn]}{}_8+\sum_{\nu=[bn]+1}^{\infty}{}_9.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\sum{}_8\leqq e^{-nx}\sum_{\nu=[an]+1}^{[bn]}\omega\left(\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\right)\frac{(nx)^\nu}{\nu!},$$

ahol $\omega_{[a,b]}(\delta)$ helyett egyszerűen $\omega(\delta)$-t írtunk. A folytonossági modulus tulajdonsága alapján:

$$\omega\left(\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\right) \leqq \left(\sqrt{n}\left|\frac{\nu}{n}-x\right|+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (\nu=[an]+1,\ldots,[bn]).$$

Ezután írhatjuk:

$$\sum\nolimits_8 \leqq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[\sqrt{n}\,e^{-nx}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\frac{(nx)^\nu}{\nu!}+1\right]. \tag{15}$$

A szögletes zárójelben található szummára alkalmazzuk a *Bunyakovszkij—Schwarz*-féle egyenlőtlenséget:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\frac{(nx)^\nu}{\nu!} \leqq \left[e^{nx}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^2\frac{(nx)^\nu}{\nu!}\right]^{1/2},$$

így (15)-ből és (3)-ból azt kapjuk, hogy

$$\sum\nolimits_8 \leqq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(1+\sqrt{b}). \tag{16}$$

Σ_7 és Σ_9 becslését egyszerre végezzük. Könnyű látni, hogy

$$\sum\nolimits_7+\sum\nolimits_9 \leqq e^{-nx}\sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|>\varepsilon}\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right|\frac{(nx)^\nu}{\nu!} \leqq$$

$$\leqq \sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|>\varepsilon}{}_{10}\, e^{-nx}\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right|\frac{(nx)^\nu}{\nu!}+\sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|>\varepsilon}{}_{11}\, e^{-nx}|f(x)|\frac{(nx)^\nu}{\nu!}.$$

A továbbiakban fel fogjuk használni a valószínűségszámítás egy megállapítását. Tekintsünk egy λ paraméterű *Poisson*-eloszlást, alkalmazzuk rá a *Csebisev*-féle egyenlőtlenséget, így az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\sum_{|\nu-\lambda|>\varrho\sqrt{\lambda}}\frac{e^{-\lambda}\lambda^\nu}{\nu!} < \frac{1}{\varrho^2}, \tag{17}$$

ahol ϱ tetszőleges pozitív szám. Ha ϱ-t és λ-t a következőképpen választjuk: $\varrho=\varepsilon\sqrt{n}/\sqrt{x}$, $\lambda=nx$, akkor (17) így alakul:

$$\sum_{|\nu-nx|>\varepsilon n} e^{-nx}\frac{(nx)^\nu}{\nu!} < \frac{x}{\varepsilon^2 n},$$

amiből nyilvánvaló, hogy

$$\sum\nolimits_{11} \leqq \frac{1}{n}\max_{a\leqq t\leqq b}|f(t)|\cdot\frac{b}{\varepsilon^2}.$$

Σ_{10} becslésekor hasonló utat követünk, de itt még ki kell használnunk az $|f(x)| \leqq Ne^{kx}$ feltételt is. Ennek alapján:

$$\sum_{10} \leqq Ne^{-nx} \sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|>\varepsilon} e^{k\nu/n} \frac{(nx)^\nu}{\nu!}.$$

A tétel kimondásakor kikötött $n > n_2$ egyenlőtlenségből következik, hogy minden szóba jöhető x-re $xe^{k/n} - x < \varepsilon/2$, így

$$\sum_{10} \leqq Ne^{nx(e^{k/n}-1)} \sum_{\left|\frac{\nu}{n}-xe^{k/n}\right|>\frac{\varepsilon}{2}} e^{-nxe^{k/n}} \cdot \frac{(nxe^{k/n})^\nu}{\nu!}.$$

Alkalmazzuk most (17)-et a következő szereposztással:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{n}{xe^{k/n}}}, \qquad \lambda = nxe^{k/n},$$

ekkor az alábbi eredményt kapjuk:

$$\sum_{10} \leqq \frac{1}{n} \frac{4Nxe^{k/n}}{\varepsilon^2} e^{nx(e^{k/n}-1)}.$$

Könnyű látni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} nx(e^{k/n}-1) = kx$, és ha $n > n_2$, akkor $nx(e^{k/n}-1) < 1{,}2kx$, továbbá azt, hogy $n > n_2$-re $e^{k/n} < 1+\varepsilon/(2b)$. Ezen megállapítások alapján írhatjuk:

$$\sum_{10} \leqq \frac{1}{n} \frac{4Nb\left(1+\frac{\varepsilon}{2b}\right)}{\varepsilon^2} e^{1{,}2kb},$$

és részeredményeink egybevetésével (A) bizonyítását be is fejeztük.

A tétel (B) részének bizonyításához tekintsük az $f(x) = |x - x_0|$ függvényt $(a \leqq x_0 \leqq b)$. Vizsgáljuk meg $S_n[f; x_0] - f(x_0)$ értékét! Jelöljük ezt az értéket Δ-val, $[nx_0]$-át pedig m-mel, vezessük be továbbá a következő jelölést is:

$$e^{-nx_0} \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2} \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu_1}^{\nu_2}.$$

Ezek után:

$$\Delta = e^{-nx_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{\nu}{n} - x_0\right| \frac{(nx_0)^\nu}{\nu!} = e^{-nx_0}\left[\sum_{\nu=0}^{m}\left(x_0 - \frac{\nu}{n}\right)\frac{(nx_0)^\nu}{\nu!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=m+1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n} - x_0\right)\frac{(nx_0)^\nu}{\nu!}\right] = x_0\left(\sum_0^m - \sum_0^{m-1} + \sum_m^\infty - \sum_{m+1}^\infty\right) = 2x_0 e^{-nx_0}\frac{(nx_0)^m}{m!}.$$

A *Stirling*-formula alapján

$$\Delta \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x_0}{\sqrt{m}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{x_0}}{\sqrt{n}},$$

ez pedig állításunkat bizonyítja.

Itt szeretnék egyben köszönetet mondani Dr. BALÁZS JÁNOS c. egy. tanárnak, akinek a témát köszönhetem, és aki munkám iránti érdeklődésével, hasznos megjegyzéseivel nagy segítségemre volt. Köszönettel tartozom Dr. PÁL LÁSZLÓ docens úrnak is, aki dolgozatom átnézésével volt szíves fáradni, s a témához kapcsolódó egyéb problémákra is felhívta figyelmemet.

IRODALOM

1] S. N. BERNSTEIN: Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilites (Харьков, Сообщ. матем. об-ва (2) 13 (1912) 1—2. old.).
[2] G. H. HARDY: Divergent series (Oxford Univ. Press 1949).
[3] F. HERZOG and J. D. HILL: The Bernstein polinomials for discontinuous functions (Am. J. Math. 68 (1946) 109—124. old.).
[4] G. PÓLYA und G. SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. (Berlin 1925.)
[5] T. POPOVICIU: Sur l'approximation des fonctions d'ordre superior (Mathematica 10 (1935) 49—54. old.).
[6] O. SZÁSZ: Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite intervall (Journal of Research of the National Bureau of Standards 45 (1950) 239—245. old.).
[7] E. B. Вороновская: Определение асимтомического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна (Докл. Акад. Наук. СССР. (A) 4. (1932) 79—85. old).

(Beérkezett: 1968. II. 15)

ÜBER APPROXIMATIONSEIGENSCHAFTEN DER O. SZÁSZ-SCHEN OPERATOREN

J. GRÓF

Zusammenfassung

In diesem Artikel werden einige, mit dem Operator

$$S_n[f; x] = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

zusammenhängende Sätze von O. SZÁSZ verallgemeinert bzw. verschärft. Es wird bewiesen, dass die Bedingung $f(x)=O(x^k)$, die in den genannten Sätzen vorkommt, nicht notwendig ist sondern zu gleichen Resultaten auch $f(x)=O(e^{kx})$ genügend ist.

Im dritten Satz werden Bedingungen gegeben, die in beliebig langem Intervall zur gleichmässigen Konvergenz der Folge $\{S_n[f; x]\}$ gegen $f(x)$ (wenn $n\to\infty$) hinreichend sind.

STRUKTURAOSZTÁLYOKON VÉGZETT ALGEBRAI MŰVELETEK ÉS LOGIKAI FORMULÁK (I)*

Írta: MAKKAI MIHÁLY

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés

A disszertáció témája a matematikai logikához, ezen belül pedig a modellelmélet tárgyköréhez tartozik. A modellelmélet másrészről sokban kapcsolódik az univerzális algebrához; a disszertáció témája is erősen algebrai jellegű.

A matematikai logika azon ágát, amelyet ma modellelméletnek nevezünk, A. TARSKI [43], [44], L. HENKIN [13] és A. ROBINSON [37] kezdeményezték az ötvenes évek elején.

A modellelmélet centrális fogalma a *Tarski*-féle [42] igazságfogalom, vagy jelentésreláció: *„az F zárt formula igaz az $\mathfrak{A}$ struktúrában”*, *ill.* *„$\mathfrak{A}$ modellje F-nek”*. Kezdetben *formulán* kizárólag az elsőrendű függvénykalkulus egy formuláját értették. 1960 óta emellett különböző „végtelen hosszú” (de bizonyos értelemben mégis „elsőrendű”) formulákat is behatóan vizsgáltak. Az első dolgozat, amely az általunk a III. fejezetben vizsgált formulatípust átfogóan tárgyalja, SCOTT [39] dolgozata. A II. fejezet 6. §-ban fellép egy olyan formulatípus, amelyet először HENKIN [14] vizsgált.

Először néhány szót szólunk általában a modellelméletről és a disszertációnak azon belül elfoglalt helyéről.

Egy eredményt a modellelmélethez sorolhatunk, ha formulák „nem túl szűk” osztályait a formulák modelljeinek tulajdonságaival hozza kapcsolatba. Pl. tipikus

* Kandidátusi értekezés, Budapest, 1968. A dolgozat (I) része az értekezés első négy pontját, valamint a teljes irodalmi hivatkozást tartalmazza.

modellelméleti téma a részstruktúra fogalmának és az univerzális formulák osztályának kapcsolata (egy formulát univerzálisnak nevezünk, ha prímformulákból és negált prímformulákból konjunkcióval, diszjunkcióval és univerzális kvantifikációval épül fel). Ezzel szemben pl. a csoport fogalmát definiáló, mondjuk 5 darab axióma modelljeinek vizsgálata nem modellelmélet (hanem csoportelmélet).

Nem szükséges azonban egy eredmény modellelméleti jellegéhez az, hogy a benne szóba jövő struktúrák általánosabbak legyenek hagyományos struktúratípusoknál. Pl. TARSKInak az az eredménye, hogy két tetszőleges valósan zárt testben ugyanazok a (véges) formulák igazak, szintén modellelméleti jellegű.

A modellelmélet körülhatárolásához ezen tematikai megjegyzéseknél fontosabb a modellelmélet *módszertani* egysége. Ez a hely azonban nem alkalmas ennek taglalására, mivel amellett, hogy néhány alapvető tételt (I. fej. (2.14), (2.17)) többször felhasználunk, módszereink általában erősen eltérnek a szokásosaktól.

Kezdetben modellelmélet címén a modelleknek elsősorban *algebrai* tulajdonságait vizsgálták. A jelen disszertáció is a modellelméletnek ehhez a hagyományos algebrai ágához kapcsolódik. Később algebrai fogalmakból sajátosan modellelméleti fogalmak alakultak ki (elemi rész [45], ultraszorzat [9] stb.), amelyek az eredeti algebrai kérdéseket is új megvilágításba helyezték (lásd pl. [16]). Az új módszerek segítségével azután modellek *halmazelméleti* (például számossági) tulajdonságait is eredményesen tudták vizsgálni. Jelen pillanatban a modellelméletben a halmazelméleti kérdésfeltevések és a különböző típusú végtelen hosszú formulák állnak az érdeklődés középpontjában.

Míg a halmazelméleti modellelméletben modellek konstrukciójára szolgáló eszközként transzfinit rekurziós és egyéb (kombinatorikus) halmazelméleti eljárások lépten-nyomon előfordulnak, addig az algebrai modellelméletben a formulákkal és formulahalmazokkal történő manipuláció ezeknél fontosabb szerepet játszik. Ezzel szemben megjegyzendő, hogy néha erősen halmazelméleti jellegű meggondolások is szerepelnek algebrai jellegű eredmények bizonyításaiban (lásd pl. KEISLER [17]).

A jelen disszertációból a kombinatorikus halmazelmélet módszerei teljesen hiányoznak. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy eredményeink igazak maradnak abban az axiomatikus elméletben, mint metaelméletben, amelyet úgy kapunk, hogy a halmazelmélet egy szokásos axiómarendszeréből a hatványhalmazaxiómát elhagyjuk; megjegyezzük, hogy ehhez a rendszerhez ellentmondásmentesen hozzáfűzhetjük azt az axiómát, hogy „minden halmaz megszámlálható".

A modellelméletet az különbözteti meg a matematikai logika egyéb ágaitól, hogy a *formális levezetés* és ezzel kapcsolatos egyéb fogalmak általában hiányoznak belőle. A modellelmélet fejlődése ténylegesen akkor indult meg, amikor TARSKI, HENKIN és ROBINSON észrevették, hogy az elsőrendű függvénykalkulusra vonatkozó *Gödel*-féle teljességi tételnek egy, a levezetés fogalmát nem tartalmazó „tisztán szemantikai" következménye, a Kompaktsági Tétel (lásd I. fej. (2.14)) igen széles körben alkalmazható, többek között klasszikus algebrai állítások bizonyítására is.

Mindenekelőtt vázlatosan ismertetünk néhány fogalmat; a fogalmak pontos definícióját lásd az I. fejezetben.

Egy $\mathfrak{A}$ *struktúra* egy *A alaphalmazból* és ezen értelmezett relációkból és operációkból áll; az utóbbiak a struktúra μ *típusának* elemeivel vannak indexezve. μ elemei *nem-logikai jelek*, amelyek a struktúra relációinak és operációinak a struktúrára vonatkozó formális állításokban, a *formulákban* való azonosítására szolgálnak. Nem-logikai jelek egy tetszőleges halmaza *hasonlósági típus*. Ha $\mathfrak{A}$ típusa

μ, $\mu' \subseteq \mu$, akkor a $\mathfrak{A}$*-nak* μ'*-re vonatkozó* $\mathfrak{A} \upharpoonright \mu'$ *redukáltját* $\mathfrak{A}$-ból a $\mu' - \mu$-beli elemek által indexezett relációk és operációk elhagyásával kapjuk; $\mathfrak{A} \upharpoonright \mu'$ típusa μ'. Ha K struktúrák egy osztálya akkor $K \upharpoonright \mu' = \{\mathfrak{A} \upharpoonright \mu' : \mathfrak{A} \in K\}$. $\mathrm{Mod}_\mu(F)$ jelöli az F (zárt) formula μ típusú *modelljeinek* osztályát, $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) = \bigcap_{F \in \Sigma} \mathrm{Mod}_\mu(F)$ tetszőleges Σ formulahalmaz esetén. K a következőkben mindig μ típusú struktúrák egy osztálya. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ azt jelenti, hogy $\mathfrak{A}$-ban és $\mathfrak{B}$-ben ugyanazok a véges formulák igazak. $\bar{K} = \{\mathfrak{B} : \text{van olyan } \mathfrak{A} \in K \text{ melyre } \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\}$.

TARSKI [43], [44] struktúraosztályok következő kategóriáit vezette be. $K \in EC$ ha $K = \mathrm{Mod}_\mu(F)$ valamely μ-re és F véges formulára; $K \in EC_\Delta$ ha $K = \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$ valamely μ-re és véges formulák valamely Σ halmazára. $K \in UC$, ill. $K \in UC_\Delta$ ha az első, illetve második feltétel teljesül azzal a pótlólagos kikötéssel, hogy F univerzális, ill. Σ elemei univerzálisak. $K \in PC$ (ill. $K \in PC_\Delta$) ha $K = K' \upharpoonright \mu$ valamely μ-re és $K' \in EC$-re (ill. $K' \in EC_\Delta$-ra). $K \in PC_\omega$, ha $K = K' \upharpoonright \mu$ valamely $K' \in EC_\Delta$-ra úgy, hogy K' elemeinek típusa (véges vagy) megszámlálható.

Ugyanebben a dolgozatban Tarski vizsgálni kezdett bizonyos struktúraosztályokon végzett műveleteket. Ezek a következőképpen származtathatók. Legyen R egy fix μ típusú struktúrák közötti reláció és legyen $S_R(K) = \{\mathfrak{B} : \text{van } \mathfrak{A} \in K \text{ melyre } \mathfrak{A} R \mathfrak{B}\}$. Ha $\mathfrak{A} R \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ beágyazható $\mathfrak{A}$-ba, ill. $\mathfrak{A} R \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ homomorf képe $\mathfrak{A}$-nak, akkor $S_R(K)$-t $\mathrm{Sub}\,(K)$-val, ill. $\mathrm{Hom}\,(K)$-val jelöljük. $\mathrm{Sub}\,(K)$ a K valamely elemébe beágyazható struktúrák osztálya, $\mathrm{Hom}\,(K)$ pedig K elemei homomorf képeinek osztálya.

A 3. § végén definiálunk egy sor R relációt, amelyekkel a disszertációban ismételten foglalkozunk.

TARSKI [44] és ŁOŚ [24] a következő eredményeket bizonyították:

(A_1) $$K \in PC_\Delta \Rightarrow \mathrm{Sub}\,(K) \in UC_\Delta.$$

(B_1) $$K \in EC_\Delta \text{ és } \mathrm{Sub}\,(K) = K \Leftrightarrow K \in UC_\Delta.$$

(C_1) $$K \in EC \text{ és } \mathrm{Sub}\,(K) = K \Leftrightarrow K \in UC.$$

(C_1') Egy véges F formula akkor és csak akkor öröklődik részstruktúrára (azaz $\mathrm{Sub}\,(\mathrm{Mod}_\mu(F)) = \mathrm{Mod}_\mu(F)$) ha F logikailag ekvivalens egy véges univerzális G formulával (azaz $\mathrm{Mod}_\mu(F) = \mathrm{Mod}_\mu(G)$).

(B_1) (A_1)-ből következik; (C_1) a kompaktsági tétellel következik (B_1)-ből, (C_1') (C_1) átfogalmazása. LYNDON [25] eredményei a fentiekkel párhuzamban:

(A_2) $$K \in PC_\Delta \Rightarrow \mathrm{Hom}\,(K) = \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) \text{ valamely } \Sigma \subseteq \mathrm{Poz}\,(\mu)\text{-ra},$$

(B_2) $$K \in EC_\Delta \text{ és } \mathrm{Hom}\,(K) = K \Leftrightarrow K = \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) \text{ valamely } \Sigma \subseteq \mathrm{Poz}\,(\mu)\text{-ra},$$

(C_2) $$K \in EC \text{ és } \mathrm{Hom}\,(K) = K \Leftrightarrow K = \mathrm{Mod}_\mu(F) \text{ valamely } F \in \mathrm{Poz}\,(\mu)\text{-ra.}$$ [1]

[1] Itt $\mathrm{Poz}\,(\mu)$ a pozitív véges μ-formulák halmaza. Egy formula pozitív, ha a logikai operátorok közül csak a $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ operátorokat tartalmazza. A precíz definíciót lásd a 55. oldalon.

(C_2') Egy véges F formula akkor és csak akkor öröklődik homomorf képekre, ha F logikailag ekvivalens egy véges pozitív formulával.

Egy (C_1'), ill. (C_2') típusú tételt *öröklődési tételnek* nevezünk.

KEISLER [16,] [18] (A_2)-vel analóg tételeket bizonyított egy sor más esetben; többek között néhány olyan R relációval kapcsolatban, amelyeket a 3. § végén vezetünk be.

Megjegyzendő, hogy homomorfizmusok esetében az (A_1)-nek pontosan megfelelő állítás nem igaz; LYNDON [25] példát adott olyan $K \in EC$ osztályra, melyre $\mathrm{Hom}(K) \notin EC_\Delta$. Nyitva maradt azonban a kérdés, hogy $K \in EC$ (vagy $K \in PC_\Delta$) esetén mindig igaz-e, hogy $\mathrm{Hom}(K) \in PC_\Delta$. Ezt a kérdést már TARSKI [44] felvetette, mivel észrevette, hogy $K \in PC_\Delta$ esetén $\mathrm{Hom}(K)$ sok szempontból úgy viselkedik, mint a PC_Δ osztályok (például zárt ultraszorzatra [9]). MALCEV [32] explicite megfogalmazott egy általánosabb kérdést, amelynek pozitív megválaszolásából a TARSKI kérdésére adott pozitív válasz is könnyen következik.

A MALCEV kérdésére adott pozitív választ az I. fejezet 4. §-ban bizonyítjuk (4.1 Tétel; az említett következmény a 4.6 Korollárium).

Az 5. § fő eredménye (5.4 és 5.5 Tételek) a (B_2) eredmény egy „PC_Δ változata". Legyen μ fix hasonlósági típus. Nevezzünk egy formulát a rövidség kedvéért *jó*-nak, ha egy véges pozitív μ-formulából úgy keletkezik, hogy abban egyes szabad változók helyébe $fx_0 \ldots x_{n-1}$ alakú kifejezéseket helyettesítünk, ahol f μ-ben nem levő operációjel, $x_0, \ldots, x_{n-1}$ változók (tehát nem helyettesíthetünk pl. egy $f(gx, y)$ alakú összetett kifejezést), majd az így kapott formula változóit univerzális kvantorokkal lekötjük. Nagyon könnyen be lehet látni (5.4 Tétel), hogy ha $K = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma) \upharpoonright \mu$ egy jó formulákból álló Σ halmaz mellett, akkor $\mathrm{Hom}(K) = K$. Az említett jellemzést ennek a megfordítása adja (5.5 Tétel).

A 6. § eredménye szerint egy homomorf képekre zárt PC_ω osztály *megszámlálható* elemeinek osztályát egy végtelen hosszú prefixummal rendelkező pozitív formula megszámlálható modelljeinek osztályaként lehet előállítani (6.4 Tétel). Ennek alkalmazásaként új bizonyítást adunk a fenti (A_2) tételre.

A III. fejezetben olyan végtelen hosszú formulákkal foglalkozunk, amelyek képzési szabályai csak annyiban térnek el a véges formulákéitól, hogy megszámlálhatóan végtelen sok formula konjunkcióját és diszjunkcióját is képezhetjük; az így kapott logikai nyelvet $L(\omega_1, \omega)$-val jelöljük.

(C_1')' $L(\omega_1, \omega)$-beli megfelelőjét MALITZ [33], (C_2') ilyen megfelelőjét pedig LOPEZ—ESCOBAR [23] bizonyította be először. A 7. és 8. §-okban ezeknek és további a véges logikára ismert öröklődési tételeknek $L(\omega_1, \omega)$ megfelelőit bizonyítjuk. A 9. §-ban megmutatjuk, hogy egy sor R relációra igaz (A_1) következő analógonja: Ha F $L(\omega_1, \omega)$ egy formulája, akkor $S_R^{(\omega)}(\mathrm{Mod}_\mu(F)) = \mathrm{Mod}_\mu^{(\omega)}(\Sigma)$ ahol $\Sigma \subseteq \Delta$; itt Δ R-hez valamilyen szintaktikus módon rendelt formula-halmaz; pl. ha $\mathfrak{A} R \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ homomorf képe $\mathfrak{A}$-nak, akkor Δ a pozitív $L(\omega_1, \omega)$-formulák halmaza. Az (ω) felső indexek arra utalnak, hogy *megszámlálható* struktúrákra szorítkozunk mindkét oldalon.

A III. fejezet módszere több szempontból új. MALITZ és LOPEZ—ESCOBAR eredményeiket *interpolációs tételeken* keresztül nyerték. Egy interpolációs tétel alakja a következő: ha $F \models H$ (és esetleg F és H-ra még bizonyos szintaktikus feltételek is teljesülnek), akkor létezik olyan G formula, melyre $F \models G \models H$ és amely bizonyos szintaktikus feltételeket kielégít. (Pl. G-ben csak olyan relációjel fordul elő, amely F-ben is és H-ban is előfordul.) Az interpolációs tételeket másrészt egy a *Gödel*-féle teljességi tétellel analóg tétel segítségével nyerték; eszerint $L(\omega_1, \omega)$-ban minden azonosan igaz formula „levezethető" egy úgynevezett *Gentzen*-típusú axiómarendszerben (lásd [23]); most a levezetések végtelen objektumok lesznek. Eddig nem volt ismeretes, hogy $L(\omega_1, \omega)$-ra vonatkozó, a III. fejezetben fellépő típusú modellelméleti kérdéseket meg lehet-e közelíteni a fenti „bizonyításelméleti" jellegű módszerek megkerülésével. Az irodalomban ezt a kérdést többen is felvetették, lásd pl. BARWISE [1].

Amellett, hogy módszerünk elkerüli a bizonyításelméleti fogalmakat, egyben sokkal hatékonyabb és természetesebb is, mint az eddig ismertek. Pl. a 9.1 Tétel részstruktúrákra vonatkozó részét a szerzőtől függetlenül BARWISE [1] is megtalálta; módszerét azonban (mely a fent leírt bizonyításelméleti típusba tartozik) nem lehet kiterjeszteni a többi eset bizonyítására.

Másrészről megjegyzendő, hogy a III. fejezet módszere rokon a SMULLYAN [40] által a fent említett interpolációs tétel véges logikára vonatkozó esetére adott bizonyításával. A leglényegesebb eltérés az, hogy ahol mi formulahalmazokból és leképezésekből álló összetett objektumokat tekintünk, SMULLYANnál elég egyetlen formulahalmazt tekinteni.

VAUGHT [46] foglalkozott egy K osztály tetszőlegesen sok eleméből alkotható teljes direkt sorozatok $P(K)$ osztályával és kimutatta, hogy ha $K \in PC_\Delta$ akkor Sub$P(K)$ UC_Δ osztály. Ez az eredmény, a fenti TARSKI—ŁOŚ eredménnyel összevetve azt mutatja, hogy a $P(K)$ osztály $K \in PC_\Delta$ esetén bizonyos fokig úgy viselkedik, mint a PC_Δ osztályok. Könnyű azonban ismert axiomatikus halmazelméleti eredmények alapján megmutatni, hogy egyszerű számossági okok miatt a szokásos halmazelméleti rendszerekben nem lehet bebizonyítani, hogy $P(K)$ izomorfizmusokkal szemben való lezártja PC_Δ, ha K azon végtelen $\mathfrak{A} = (A, U)$ struktúrák EC_Δ osztálya, ahol U A-nak kételemű részhalmaza.

Ezzel szemben a IV. fejezet fő eredményeként (10.5 Tétel) bebizonyítjuk, hogy ha $K \in PC_\Delta$ akkor $P(K)$ kompakt, azaz $P(K) \in EC_\Delta$. Ezt a K-ból egy egyszerű módon megalkotott másik osztályra alkalmazva, VAUGHT fenti tétele adódik (10.6 Korollárium).

Az I. fejezetben összegyűjtöttük mindazokat a jólismert fogalmakat és állításokat, amelyeket a disszertáció érdemi részében felhasználunk. Arra törekedtünk, hogy lehetőleg minden definíciót, még a legelemibbeket is, pontosan megadjunk; az állítások bizonyítását azonban csak elvétve írjuk le. A nem triviális, bizonyítás nélkül közölt állításokhoz irodalmi utalást adunk.

Végül megjegyezzük, hogy a II. fejezet anyaga a 6. § kivételével a [26] dolgozatban jelent meg, a IV., ill. III. fejezet anyaga pedig a [27], ill. a [28] dolgozatokban jelent meg, ill. van megjelenés alatt.

I. fejezet. Logikai és algebrai előkészületek

1. § *Halmazelmélet és szintakszis*

A modellelméletet elsősorban az különbözteti meg a metamatematikától, hogy a modellelméletben a logikai formulák matematikai, konkrétabban: *halmazelméleti* objektumok, míg a metamatematikában jelsorozatokról és hasonló „nemmatematikai" fogalmakról beszélünk. Hangsúlyozni kívánjuk tehát, hogy a disszertáció, mint modellelméleti értekezés, kizárólag a halmazelmélet fogalomrendszerére épül. Közelebbről: meggondolásainkat az axiomatikus halmazelmélet *Bernays—Gödel* [2], [11] féle rendszerébe lehetne formálisan lefordítani. Így például feltesszük, hogy minden „létező" (matematikai objektum) *osztály*. Az osztályok közül egyesek (azok, amelyek elemei valamely osztálynak) *halmazok*. Azokat az osztályokat, amelyek nem halmazok, *valódi osztályoknak* nevezzük. Néhány esetben valódi osztályokból álló összességekről is beszélünk (pl. PC_Δ); ilyen esetekben tulajdonképpen egy konkrét $F(K)$ halmazelméleti formuláról van szó, egy darab K szabad osztályváltozóval és a *Bernays—Gödel* halmazelméletben való elképzelt formális tárgyalás esetén a „$K \in PC_\Delta$" (rész)állítást $F(K)$-val kell fordítanunk.

Halmazelméleti jelöléseinkben a modellelméleti irodalom konvencióit fogadjuk el. Valamely $f(x, y, \ldots)$ halmazértékű kifejezés és valamely $P(x, y, \ldots)$ az $x, y, \ldots$ *halmazokra* vonatkozó feltétel esetén $\{f(x, y, \ldots): P(x, y, \ldots)\}$ azt az osztályt jelenti, amelynek elemei az összes $f(x, y, \ldots)$ halmaz, midőn $x, y, \ldots$ felveszi mindazon halmaz-értékeket, melyekre $P(x, y, \ldots)$ fennáll. $\{f(x, y, \ldots) \in \Gamma: P(x, y, \ldots)\}$ ugyanaz, mint $\{f(x, y, \ldots): P(x, y, \ldots)$ és $f(x, y, \ldots) \in \Gamma\}$. Természetesen, ha egy osztály része egy halmaznak, akkor maga is halmaz. Kis latin betűkkel a következőkben mindig halmazokat jelölünk, nagy latin betűkkel pedig általában osztályokat.

Az (a, b) *rendezett párt* a szokásos módon definiálva, az $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ *rendezett* n-*est* n-szerinti rekurzióval az $(a) = a$, $(a_0, \ldots, a_{n-1}) = ((a_0, \ldots, a_{n-2}), a_{n-1})$ egyenlőségekkel definiáljuk. *Relációnak* nevezünk minden olyan osztályt, amelynek elemei rendezett párok. $A \times B$, az A és B osztályok *Descartes-szorzata* az $\{(x, y): x \in A, y \in B\}$ osztály és általában $A_0 \times \ldots \times A_{n-1} = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}): a_i \in A_i (i < h)\}$. A^n ugyanaz, mint $\overset{1}{\breve{A}} \times \ldots \times \overset{n}{\breve{A}}$. Megjegyezzük azonban, hogy A^n ilyen értelemben csak elvétve fordul elő és felső indexet használunk sok olyan esetben is, amikor az *nem* jelöl *Descartes*-hatványt. Továbbá, $\mathrm{dom}\,(R) =_{df} \{x: (x, y) \in R$ valamely y-ra$\}$, $rn(R) = {}_{df} \{y: (x, y) \in R$ valamely x-ra$\}$, $R^{-1} =_{df} \{(x, y): (y, x) \in R\}$, $R_2 \circ R_1 = {}_{df} \{(x, z): (x, y) \in R_1$ és $(y, z) \in R_2$ valamely y-ra$\}$, $R \upharpoonright S =_{df} \{(x, y) \in R: x \in S\}$. A most definiált osztályok rendre *R értelmezési tartománya*, *R értékkészlete*, *R inverze*, *R_1 és R_2 kompozíciója* és *R megszorítása S-re*. Ezen definíciók leginkább olyankor használatosak, ha R, (illetve R_1 és R_2) *függvény*, azaz R reláció és $(x, y) \in R$, $(x, z) \in R$ esetén $y = z$. $x \in \mathrm{dom}\,(R)$ esetén $R(x)$ jelöli *R értékét x-nél*, azaz azt az egyértelműen meghatározott y-t, melyre $(x, y) \in R$. $\langle f(x, y, \ldots, z): P(x, y, \ldots, z)\rangle$ jelöli azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya $D = \{(x, y, \ldots, z): P(x, y, \ldots, z)\}$ és értéke tetszőleges $(x, y, \ldots, z) \in D$ helyen egyenlő $f(x, y, \ldots, z)$-vel. $\bigcup A$ jelöli az $\{x$: van olyan $y \in A$ melyre $x \in y\}$ osztályt. Tehát $a \cup b = \bigcup \{a, b\}$, továbbá $\bigcup_{i \in I} a_i = \bigcup \{a_i: i \in I\}$. $\prod_{i \in b} a_i$ jelöli mindazon φ függvények halmazát, amelyek értelmezési tartománya, b és amelyekre $\varphi(i) \in a_i$ minden $i \in b$-re.

Azokat a függvényeket, amelyeknek értelmezési tartománya egy természetes szám,[2] *véges sorozatoknak*, azokat pedig, amelyeknek értelmezési tartománya ω, *végtelen sorozatoknak* nevezzük. Véges sorozatok jelölésére az $a = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$ jelölést is használjuk; itt $\mathrm{dom}\,(a) = n$ és $a(i) = a_i$ $(i < n)$. Egy a halmaz *megszámlálható*, ha üres, vagy van olyan $b = \langle b_n: n < \omega\rangle$ végtelen sorozat, amelyre $rn(b) =$

[2] A természetes számok szokásos *Neumann*-féle bevezetését vesszük alapul, vagyis minden természetes szám a nála kisebb természetes számok halmaza. ω a természetes számok halmaza, $n < \omega$ ugyanazt jelenti mint $n \in \omega$. $S_\omega(a)$ jelöli a véges részhalmazainak halmazát.

$= \{b_n : n < \omega\} = a$. Tehát a *véges* halmazokat is a megszámlálhatóak közé soroljuk. Ha a és b olyanok, mint előbb, vagy pedig $b = \langle b_i : i < n \rangle$ és $a = rn(b)$ valamely n természetes számra, akkor b a-nak egy *felsorolása*. *b ismétlésmentes*, ha mint függvény egy-egyértelmű.

Ezek után rátérünk *szintaktikai*, azaz a logikai formulák „formatanával" kapcsolatos fogalmaink bevezetésére. Tárgyalásmódunk majdnem azonos a [23] dolgozatéval, de némileg explicitebb. Végtelen hosszú formuláknak a miénktől többé-kevésbé eltérő szintaktikai bevezetése található [15]-ben és [33]-ban.

Minden $\langle 0, n \rangle$ alakú véges sorozatot, ahol n természetes szám, *változónak* nevezünk. $\langle 0, n \rangle$-t v_n-nel fogjuk jelölni. A $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ *logikai operátorok* és az $\approx$ *egyenlőségjel* azonosak rendre az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 természetes számokkal. Minden $P = \langle 7, n, a \rangle$ alakú objektumot, ahol $n < \omega$ és a tetszőleges halmaz, *n-változós relációjel*nek nevezünk. n-t *P rangjának* is nevezzük és $\varrho(P)$-vel jelöljük. $f = \langle 8, n, a \rangle$ *n-változós* (vagy *n-rangú*) *operációjel* tetszőleges a halmaz mellett; $n = \varrho(f)$. Ha $\varrho(f) = 0$, akkor *f individuumjel.*

Kifejezésnek nevezzük a következő tulajdonságoknak eleget tevő legszűkebb X osztály elemeit:[3]

(i) ha x változó, akkor $x \in X$,

(ii) ha c individuumjel, akkor $c \in X$,

(iii) ha $\omega > n \geqq 1$, $t_0, \ldots, t_{n-1} \in X$ és f n-változós operációjel, akkor

$$\langle 9, f, t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle \in X.$$

Világos ezen definíció alapján, hogy minden kifejezés *vagy* változó, *vagy* individuumjel, *vagy* pedig $\langle 9, f, t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle$ alakú, ahol $n \geqq 1$, $t_0, \ldots, t_{n-1}$ kifejezések és f n-változós operációjel. Ugyanakkor az is világos, hogy ezen három eset közül csak egy következhet be, és a harmadik esetben $n, f, t_0, \ldots, t_{n-1}$ egyértelműen meghatározottak. Ezen tényre utalunk, amikor a *„kifejezések egyértelmű olvashatóságáról"* beszélünk. Megjegyezzük, hogy a harmadik esetben $\langle 9, f, t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle$ helyett röviden $ft_0, \ldots, t_{n-1}$-t írunk.

Prímformulának nevezünk

(i) minden O-változós relációjelet,

(ii) a $\langle \approx, t_0, t_1 \rangle$ alakú (és $t_0 \approx t_1$-gyel jelölt) objektumokat, ahol t_0, t_1 kifejezések és

(iii) a $\langle 10, P, t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle$ alakú (és $Pt_0, \ldots, t_{n-1}$-gyel jelölt) halmazokat, ahol P n-változós relációjel, $0 < n < \omega$ és $t_0, \ldots, t_{n-1}$ kifejezések.

Eddigi fogalmaink szorosan kapcsolódtak az elsőrendű függvénykalkulus szokásos fogalmaihoz. Eltérést jelent azonban az, hogy tetszőleges $n < \omega$-ra az n-változós operációjelek, illetve relációjelek osztálya valódi osztály. Ezzel szemben a változók *megszámlálhatóan* végtelen halmazt alkotnak.

A formula fogalmát úgy definiáljuk, hogy megszámlálhatóan végtelen konjunkció és diszjunkció képzését is lehetővé tegyük. Az *$L(\omega_1, \omega)$ logikai nyelv formulájának*, vagy röviden *formulának* nevezzük azon *legszűkebb X* osztály elemeit, amely X osztály eleget tesz a következő kikötéseknek:

(i) ha F prímformula, akkor $F \in X$,

[3] Ez a definíció ilyen formában „nem automatikusan megengedett" a *Gödel—Bernays* halmazelméletben, azaz a mondott legszűkebb osztály létezését külön be kell bizonyítani.

(ii) ha $F\in X$, akkor $\neg F =_{df} \langle \neg, F\rangle \in X$,

(iii) ha Σ X-nek megszámlálható részhalmaza, akkor $\bigwedge\Sigma =_{df} \langle \bigwedge, \Sigma\rangle \in X$ és

(iv) $\bigvee\Sigma =_{df} \langle \bigvee, \Sigma\rangle \in X$,

(v) ha x változó és $F\in X$, akkor $\forall xF =_{df} \langle \forall, x, F\rangle \ni X$ és

(vi) $\exists xF =_{df} \langle \exists, x, F\rangle \in X$.

Akárcsak a kifejezéseknél, most is világos, hogy minden egyes formula a (i)—(vi)-ban felsorolt kategóriákból pontosan egybe tartozik (ha ott X a formulák osztályát jelenti), továbbá a $\neg F$, $\bigwedge\Sigma$, $\bigvee\Sigma$, $\forall xF$, $\exists xF$ formulákból egyértelműen lehet következtetni Σ-ra, ill. x-re és F-re. Ez a tény a *„formulák egyértelmű olvashatósága"*.

A formula fogalmának induktív jellegű definíciója következtében formulákra vonatkozó állításokat bizonyíthatunk *„formula-változóra vonatkozó indukcióval"*, és formulákon értelmezett függvényeket, illetve predikátumokat definiálhatunk *„formulaváltozóra vonatkozó rekurzióval"*. Az indukció-elv pontosabban a következőt mondja ki. Tegyük fel, hogy az F formula-változóra vonatkozó $P(F)$ állításra nézve tudjuk, hogy

(i) $P(F)$ igaz, ha F prímformula;

(ii) abból, hogy $P(F)$ igaz, következik, hogy $P(\neg F)$, $P(\forall xF)$ és $P(\exists xF)$ is igazak (ahol x változó) és végül,

(iii) abból, hogy $P(F)$ igaz Σ minden F elemére, következik, hogy $P(\bigwedge\Sigma)$ és $P(\bigvee\Sigma)$ is igazak (ahol Σ formulák egy megszámlálható halmaza). Ezen feltételek alapján következik, hogy $P(F)$ igaz minden F formulára.

A rekurzió-elv igaz voltához a formulák egyértelmű olvashatóságára is szükség van. A függvényekre vonatkozó rekurzió-elv a következő. Ha egy, a formulák osztályán értelmezendő G függvényre olyan feltételek adottak, amelyek

(i) a $G(F)$ értéket minden F prímformulára explicite adják meg,

(ii) $G(\neg F)$-t, $G(\forall xF)$-t és $G(\exists xF)$-t $G(F)$ függvényében adják meg, továbbá

(iii) a $G(\bigwedge\Sigma)$ és $G(\bigvee\Sigma)$ értékeket $G\restriction\Sigma$ függvényében adják meg, akkor *pontosqn egy* olyan G függvény van, amely ezeket a feltételeket kielégíti. A predikátumokra vonatkozó rekurzió-elv a függvényekre vonatkozónak speciális esete, amennyiben a predikátumok igazság-értékű függvények.

Mindezeket, mint halmazelméleti általánosságokat, nem bizonyítjuk.

Hasonló (és még egyszerűbb) indukció-, illetve rekurzió-elvet fogalmazhatunk meg kifejezésekre vonatkozólag.

Egy formulát *véges*nek nevezünk, ha, intuitíve, csak véges sok formulának a konjunkciója, ill. diszjunkciója szerepel a formulában. Pontosabban szólva, egy formula *véges*, ha eleme azon legszűkebb X osztálynak, amely kielégíti a formula definíciójában szereplő (i)—(vi) feltételeket azzal a módosítással, hogy (iii)-ban és (iv)-ben „megszámlálható" helyett „véges"-t mondunk. A véges formulák az elsőrendű függvénykalkulus szokásos értelemben vett formuláival azonosíthatók.

Tetszőleges F és G formulák esetén $F\wedge G$, $F\vee G$, $F\to G$, $F\leftrightarrow G$ rendre a $\bigwedge\{F, G\}$, $\bigvee\{F, G\}$, $(\neg F)\vee G$, $(F\to G)\wedge(G\to F)$ formulákat jelölik. $\bigwedge_{i\in I} F_i$, ill. $\bigvee_{i\in I} F_i$ a $\bigwedge\{F_i : i\in I\}$, ill. $\bigvee\{F_i : i\in I\}$ formulát jelenti. Hasonló értelemben használjuk az $\bigwedge_{i=1}^{n} F_i$ és más jelöléseket. A $\bigwedge\bigcirc$, $\bigvee\bigcirc$ formulákat (ahol $\bigcirc$ természetesen az üres halmazt jelöli) rendre a $\uparrow$ („igaz"), és a $\downarrow$ („hamis") jelekkel is jelöljük; ennek a jelölésnek az alapja az, hogy $\bigwedge \bigcirc$ *azonosan igaz*, $\bigvee \bigcirc$ pedig *azonosan hamis* formula (lásd 60. oldalt).

A változókat, logikai operátorokat, az egyenlőségjelet és a *nem-logikai jeleket* (azaz a relációjeleket és operációjeleket) gyűjtőnéven *szimbólumoknak* nevezzük. Most a kifejezésekre vonatkozó rekurzióval definiáljuk a „*σ szimbólum előfordul a t kifejezésben*" predikátumot a következő feltételekkel:

(i) ha t változó, vagy individuumjel, akkor σ *előfordul* t-ben akkor és csak akkor, ha $\sigma = t$;

(ii) ha $t = ft_0, \ldots, t_{n-1}$, akkor σ *előfordul* t-ben akkor és csak akkor, ha $\sigma = f$ vagy σ *előfordul* $t_0, \ldots, t_{n-1}$ valamelyikében.

A „*σ szimbólum előfordul az F formulában*" predikátumot az F-re vonatkozó rekurzióval definiáljuk a következő feltételekkel:

(i) σ *előfordul* az $F = P$, illetve $F = Pt_0, \ldots, t_{n-1}$, ill. $F = t_1 \approx t_2$ prímformulában akkor és csak akkor, ha $\sigma = P$, ill. $\sigma = P$ vagy σ *előfordul* $t_0, \ldots, t_{n-1}$ valamelyikében, ill. $\sigma = \approx$ vagy σ *előfordul* t_1, t_2 valamelyikében (itt P először O-változós relációjel, másodszor n-változós relációjel és $t_0, \ldots, t_{n-1}$, ill. t_1, t_2 kifejezések).

(ii) σ *előfordul* $\neg F$-ben akkor és csak akkor, ha vagy σ *előfordul* F-ben, vagy pedig $\sigma = \neg$.

(iii) σ *előfordul* $\bigwedge \Sigma$-ban (ill. $\bigvee \Sigma$-ban), akkor és csak akkor, ha $\sigma = \bigwedge$ (ill. $\sigma = \bigvee$) vagy pedig σ *előfordul* Σ valamely elemében.

(iv) σ *előfordul* $\forall xF$-ben (ill. $\exists xF$-ben), ha $\sigma = \forall$ (ill. $\sigma = \exists$), vagy $\sigma = x$, vagy pedig σ *előfordul* F-ben.

Egy formulát *kvantormentesnek*, vagy *nyílt*nak nevezünk, ha sem az *univerzális kvantorjel* $\forall$, sem pedig az *egzisztenciális kvantorjel* $\exists$ nem fordul elő benne. Megjegyezzük, hogy univerzális, illetve egzisztenciális *kvantor*nak a valamely x változóval képzett $\forall x =_{df} (\forall, x)$, ill. $\exists x =_{df} (\exists, x)$ párokat nevezzük.

Nem-logikai jelek egy tetszőleges halmazát *hasonlósági típus*nak nevezzük. Ha μ hasonlósági típus, t kifejezés, F formula, akkor azt mondjuk, hogy t *μ feletti kifejezés* vagy μ-kifejezés, ill. F *μ feletti formula* vagy μ-formula, ha a t, ill. F-ben előforduló minden nem-logikai jel μ-nek eleme.

Megjegyezzük, hogy O-változós relációjelek használata algebrai szempontból kissé erőltetettnek látszik; ezeket csak kényelmi okokból vezettük be; nevezetesen a 4. §-ban egyöntetűbbé válik ezáltal a tárgyalás. *A 4.1 Tétel bizonyítása után az egész disszertációban feltesszük, hogy az előforduló hasonlósági típusok nem tartalmaznak O-változós relációjeleket.*

A rekurzió-elv újabb alkalmazásával definiáljuk az „*x szabad változója az F formulának*" és „*x kötött változója az F formulának*" predikátumokat. Legyen x változó. Az első predikátumot definiáló feltételek a következők:

(i) ha F prímformula akkor x *szabad változója* F-nek akkor és csak akkor, ha x előfordul F-ben;

(ii) x *szabad változója* $\neg F$-nek akkor és csak akkor, ha x *szabad változója* F-nek;

(iii) x *szabad változója* $\bigwedge \Sigma$-nak, ill. $\bigvee \Sigma$-nak akkor és csak akkor, ha x *szabad változója* Σ valamely formulájának;

(iv) x *szabad változója* a $\forall yF$, ill. a $\exists yF$ formulának akkor és csak akkor, ha $x \neq y$ és x *szabad változója* F-nek.

Ha t kifejezés, var (t) jelöli a t-ben előforduló változók halmazát, és, ha F formula, var (F) F szabad változóinak halmaza. Egy t kifejezést, ill. F formulát *zártnak* nevezünk, ha var $(t)=0$, ill. var $(F)=0$.

A második predikátumot definiáló feltételek:

(i) x *nem kötött változója* F-nek, ha F prímformula;

(ii) x *kötött változója* $\neg F$-nek, ill. $\bigwedge\Sigma$-nak, ill. $\bigvee\Sigma$-nak akkor és csak akkor, ha x *kötött változója* F-nek, ill. Σ valamely elemének.

(iii) x *kötött változója* $\forall yF$-nek, ill. $\exists yF$-nek akkor és csak akkor, ha $x=y$ vagy pedig x *kötött változója* F-nek.

Az indukció-elv triviális alkalmazásával lehet bebizonyítani, hogy az x változó akkor és csak akkor fordul elő F-ben, ha x szabad vagy kötött változója F-nek.

Fontos szerepet játszik a III. fejezetben a *redukált* formula fogalma. Intuitíve, egy formula redukált, ha a negációjel ($\neg$) csak prímformulákra van alkalmazva a formulában, azaz ha $\neg$ a formulában csak „legbelül" fordul elő. Pontosabban, a *redukált formulák* osztálya azon legszűkebb X osztály, amely a formulák osztályának definíciójában szereplő (i), (iii)—(vi) feltételeket és a következő (ii)′ feltételt kielégíti:

(ii)′ ha F prímformula, akkor $\neg F \in X$.

Bár triviális, szigorúan véve mégis bizonyításra szorul, hogy minden redukált formula egyben *formula* is.

Most egy olyan operációt definiálunk, amely tetszőleges F formulához egy F^* redukált, F-fel logikailag ekvivalens[4] formulát rendel. Ez a definíció pontos mása annak az ismert eljárásnak, amellyel egy formula előtti negációjelet a DE MORGAN azonosságokkal és a $\neg\exists xF \curvearrowright \forall x\neg F$, $\neg\forall xF \curvearrowright \exists x\neg F$ szabályokkal a formula belsejébe lehet szorítani. Megjegyezzük azonban, hogy a prenex normálformának (amelyről még lesz szó) nincs megfelelője általános esetben. A * operációt definiáló feltételek a következők:

(i) $F^* = F$ ha F prímformula;

(ii) (a) $(\neg F)^* = \neg F$ ha F prímformula;

(ii) (b) $(\neg\neg F)^* = F^*$,

(ii) (c) $(\neg \bigwedge\Sigma)^* = \bigvee\{(\neg F)^*\colon F\in\Sigma\}$,

(ii) (d) $(\neg \bigvee\Sigma)^* = \bigwedge\{(\neg F)^*\colon F\in\Sigma\}$,

(ii) (e) $(\neg \forall xF)^* = \exists x(\neg F)^*$,

(ii) (f) $(\neg \exists xF)^* = \forall x(\neg F)^*$,

(iii) $(\bigwedge\Sigma)^* = \bigwedge\{F^*\colon F\in\Sigma\}$,

(iv) $(\bigvee\Sigma)^* = \bigvee\{F^*\colon F\in\Sigma\}$,

(v) $(\forall xF)^* = \forall x(F^*)$,

(vi) $(\exists xF)^* = \exists x(F^*)$.

[4] Ezt a fogalmat a 2. §-ban vezetjük be.

Megjegyezzük, hogy ez a rekurzió nem pontosan olyan alakú, mint amelyről beszéltünk. Az egyszerű típusú rekurzióval az $[F^*, (\neg F)^*]$ rendezett párt lehetne definiálni; F^*-ot ebből már explicite lehetne definiálni.

A következő állítások bizonyítása indukcióval történhet, igen kézenfekvő módon.

(1. 1) *Tetszőleges F formulára F^* redukált formula.*

(1. 2) *Valamely $\neg$-től különböző szimbólum akkor és csak akkor fordul elő F^*-ban, ha előfordul F-ben.*

Egy formulát *univerzális*-nak nevezünk, ha redukált és $\exists$ nem fordul elő benne. Ekvivalens módon, az univerzális formulák osztályát úgy is definiálhatnánk, mint a redukált formulák osztályát, kivéve, hogy a (vi) feltételt elhagyjuk.

Azokat a redukált formulákat, amelyekben $\forall$ nem fordul elő, *egzisztenciálisok-nak* nevezzük.

Egy formula *pozitív*, ha $\neg$ nem fordul elő benne. Nyilvánvaló, hogy minden pozitív formula redukált.

Végül még egy szintaktikus fogalom, a helyettesítés fogalma következik; ezután a véges formulákra vonatkozó néhány tudnivalóra térünk rá. Tegyük fel, hogy φ olyan függvény, amelynek értelmezési tartományában csak változók vagy individuumjelek vannak, és amelynek minden értéke kifejezés. Egy ilyen φ függvényt *helyettesítés*-nek nevezünk. Tetszőleges F formula esetén $F(\varphi)$-vel fogjuk jelölni azt a formulát, amely intuitíve úgy keletkezik, hogy F-ben c minden előfordulását $\varphi(c)$-vel helyettesítjük, ha c individuumjel és c minden *szabad* előfordulását $\varphi(c)$-vel helyettesítjük, ha c változó [itt c dom(φ) elemein fut végig].

Először $t(\varphi)$-t definiáljuk a t kifejezés szerinti rekurzióval, tetszőleges, de rögzített φ helyettesítés mellett a következő feltételekkel:

(i) ha t változó, vagy individuumjel és $t \in \mathrm{dom}(\varphi)$, akkor $t(\varphi) = \varphi(t)$;

(ii) ha t változó, vagy individuumjel és $t \notin \mathrm{dom}(\varphi)$ akkor $t(\varphi) = t$;

(iii) $t = ft_0, \ldots, t_{n-1}$ esetén $t(\varphi) = ft_0(\varphi), \ldots, t_{n-1}(\varphi)$.

Ezek után $F(\varphi)$ definíciója az F formula szerinti rekurzióval a következő:

(i) ha $F = P$, ill. $F = Pt_0 \ldots t_{n-1} (n \geqq 1)$, ill. $F = t_0 \approx t_1$, akkor $F(\varphi) = P$,

ill. $F(\varphi) = Pt_0(\varphi) \ldots t_{n-1}(\varphi)$, ill. $F(\varphi) = t_0(\varphi) \approx t_1(\varphi)$,

(ii) $(\neg F)(\varphi) = \neg(F(\varphi))$, $(\wedge \Sigma)(\varphi) = \wedge\{F(\varphi) : F \in \Sigma\}$, $(\vee \Sigma)(\varphi) = \vee\{F(\varphi) : F \in \Sigma\}$,

(iii) $(\forall x F)(\varphi) = \forall x(F(\varphi \restriction (\mathrm{dom}(\varphi) - \{x\})))$, $(\exists x F)(\varphi) = \exists x(F(\varphi \restriction (\mathrm{dom}(\varphi) - \{x\})))$.

A helyettesítés néhány közismert és elemi tulajdonságát gyűjtjük össze a következő lemmákban. A helyettesítés legfontosabb tulajdonságát a 2. §-ban fogalmazzuk meg.

(1. 3) *Ha az F formulában előforduló individuumjeleknek és F szabad változóinak halmaza C, és φ helyettesítés, akkor $F(\varphi) = F(\varphi \restriction C)$.*

(1. 4) *Ha x szabad változója $F(\varphi)$-nek, akkor vagy x szabad változója F-nek és x nem eleme* dom(φ)*-nek, vagy pedig x előfordul legalább egy $rn(\varphi)$-beli kifejezésben.*

(1. 5) *Ha F véges, vagy nyílt, vagy univerzális, vagy egzisztenciális, vagy pedig pozitív, akkor $F(\varphi)$ is ugyanolyan.*

(1. 6) *Ha* φ_1 *és* φ_2 *helyettesítések, továbbá F egyetlen kötött változója sem fordul elő egyetlen* $rn(\varphi_1)$*-beli kifejezésben sem, akkor* $(F(\varphi_1))(\varphi_2)=F(\psi)$, *ahol* ψ *az a helyettesítés, melyre* $\mathrm{dom}\,(\psi)=\mathrm{dom}\,(\varphi_1)\cup\mathrm{dom}\,(\varphi_2)$, *továbbá* $c\in\mathrm{dom}\,(\varphi_1)$ *esetén* $\psi(c)=(\varphi_1(c))(\varphi_2)$, és $c\in\mathrm{dom}\,(\varphi_2)-\mathrm{dom}\,(\varphi_1)$ *esetén* $\psi(c)=\varphi_2(c)$.

A $\{(c,d)\}=\varphi$ helyettesítéssel kapott $F(\varphi)$ formulát $F(d/c)$-vel jelöljük. Továbbá, ha a φ helyettesítésre $\mathrm{dom}\,(\varphi)=\{c_0,\dots,c_{n-1}\}$ és $\varphi(c_i)=d_i$ $(i<n)$, akkor $F(\varphi)$ helyett $F\begin{pmatrix}d_0,\dots,d_{n-1}\\ c_0,\dots,c_{n-1}\end{pmatrix}$-t is írunk.

Legyen p kvantoroknak egy véges sorozata; másszóval $p=\langle Q_ix_i : i<s\rangle$ valamely s természetes számra, ahol x_i változó és $Q_i=\forall$ vagy $Q_i=\exists$ minden $i<s$-re. Nevezzünk egy ilyen tulajdonságú sorozatot *prefixumnak*, s-t pedig p *hosszúságának*. Ha $x_i\neq x_j$ hacsak $i\neq j$, $i,j<s$, akkor p-t *szabályos* prefixumnak nevezzük. Legyen F tetszőleges formula. Definiáljuk a $(p)F$ formulát p hosszúsága szerinti rekurzióval a következőképpen:

(i) $$(p)F=F, \quad \text{ha} \quad s=0;$$

(ii) $$(p)F=(p\restriction s-1)Q_{s-1}x_{s-1}F, \quad \text{ha} \quad s\geqq 1.$$

(itt természetesen $Q_{s-1}x_{s-1}=p(s-1)$, s pedig p hosszúsága).

Igen könnyen belátható, hogy minden F formulához egyértelműen hozzárendelhető egy p prefixum és egy G formula oly módon, hogy $F=(p)G$ és G *nem* $\forall xG'$ *sem* pedig $\exists xG'$ alakú. Nevezzük p-t F *prefixumának*, G-t F *magjának*. Egy formulát *prenex* formulának nevezünk, ha véges, magja kvantor mentes és prefixuma szabályos.

Tegyük fel, hogy az F formulának csak véges sok szabad változója van (ez teljesül, ha F véges). Jelöljük $\forall(F)$-fel F *univerzális lezártját*, azaz azt a $(p)F$ formulát, ahol a $p=\langle Q_ix_i : i<s\rangle$ szabályos prefixumban $Q_i=\forall$ minden $i<s$-re, $\{x_i : i<s\}=\mathrm{var}\,(F)$ és az x_i változók a $\langle v_i : i<\omega\rangle$ sorozatban való előfordulásuk szerint következnek egymásután p-ben (azaz, ha $x_i=v_{j_i}$, akkor $j_{i_1}<j_{i_2}$, ha $i_1<i_2<s$).

Egy kifejezést *szabad*-nak nevezünk, ha minden változó „legfeljebb egyszer fordul elő" benne és a kifejezésben levő változók „a kifejezésben balról jobbra haladva megegyeznek rendre $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$-gyel" valamely $n<\omega$-ra. Nyilvánvaló, hogy ez a fogalom sokkal egyszerűbben definiálható a kifejezések szokásos, jelsorozatként történő értelmezése esetén. A mi fogalomrendszerünkben a szabad kifejezések osztálya azon legszűkebb X osztály, amely kielégíti a következő feltételeket:

(i) $v_0\in X$.

(ii) Ha c individuumjel, akkor $c\in X$.

(iii) Tegyük fel, hogy $n\geqq 1$, f n-változós operációjel, $t_0,\dots,t_{n-1}$ elemei X-nek és a t_i-ben előforduló változók $v_0,\dots,v_{k_i-1}$. Legyen $l_i=\sum_{j<i}k_j$ $i\leqq n$-re (tehát $l_0=0$), és legyen $t_i'=t_i\begin{pmatrix}v_{l_i},\dots,v_{l_{i+1}-1}\\ v_0,\dots,v_{k_i-1}\end{pmatrix}$ minden $i<n$-re. Ekkor $ft_0'\dots t_{n-1}'\in X$.

A következő állítás szemléletesen nyilvánvaló: bizonyítása formálisan a t kifejezés szerinti indukcióval történhet.

(1. 7) *Tetszőleges t kifejezéshez pontosan egy olyan szabad* t' *kifejezés van, amelyre* $t=t'(\varphi)$ *valamely olyan helyettesítés mellett, amelyre* $\mathrm{dom}\,(\varphi)$ *és* $rn(\varphi)$

minden eleme változó; továbbá a φ helyettesítés is egyértelműen meghatározott a $t=t'(\varphi)$, $\operatorname{dom}(\varphi)=\operatorname{var}(t')$ *és a* $rn(\varphi) \subseteq \{v_n : n < \omega\}$ *feltételek által.*

A szabad prímformula fogalma a szabad kifejezés fogalmával rokon, és a következőképpen adható meg:

(i) Minden O-változós relációjel szabad prímformula.

(ii) Legyenek $t_0, \ldots, t_{n-1}$ szabad kifejezések és definiáljuk a $t'_0, \ldots, t'_{n-1}$ kifejezéseket ugyanúgy, mint a fenti (iii) pont alatt. Legyen továbbá P n-változós relációjel. Ekkor $Pt'_0, \ldots, t'_{n-1}$ és $t'_0 \approx t'_1$ szabad prímformulák.

A következő állítás (1. 7)-tel analóg és annak alapján könnyen belátható.

(1. 8) *Tetszőleges F prímformulához pontosan egy olyan szabad N prímformula van, amelyre $F=N(\varphi)$ valamilyen olyan φ helyettesítés mellett, melyre* $\operatorname{dom}(\varphi)=\operatorname{var}(N)$ *és $rn(\varphi)$ minden eleme változó; itt φ is egyértelműen meghatározott. Továbbá, ha N_0 és N_1 szabad prímformulák, φ_0 és φ_1 helyettesítések úgy, hogy* $\operatorname{dom}(\varphi_j)=\operatorname{var}(N_j)$ $(j<2)$, *$rn(\varphi_j)$ $(j<2)$ minden eleme N_0-ban és N_1-ben nem előforduló individuumjel, akkor $N_0(\varphi_0)=N_1(\varphi_1)$-ből következik, hogy $N_0=N_1$ és $\varphi_0=\varphi_1$.*

Most definiáljuk egy formula egy egyváltozós relációjelre vonatkozó *relativizáltjának* a fogalmát. Legyen A fix egyváltozós relációjel. F szerinti rekurzióval definiáljuk az $F^{(A)}$ relativizált formulát a következőképpen:

(i) $F^{(A)}=F$ ha F prímformula;

(ii) $(\neg F)^{(A)}=\neg(F^{(A)})$, $(\bigwedge\Sigma)^{(A)}=\bigwedge\{F^{(A)}: F\in\Sigma\}$, $(\bigvee\Sigma)^{(A)}=\bigvee\{F^{(A)}: F\in\Sigma\}$;

(iii) $(\forall xF)^{(A)}=\forall x(Ax\to F^{(A)})$, $(\exists xF)^{A}=\exists x(Ax\wedge F^{(A)})$.

Végül megjegyezzük, hogy az a kifejezés, hogy „az F formula szerinti indukcióval", néha az eredetitől eltérő értelemben fog előfordulni. Így pl. a 8. § 8.1—8.8 tételei első felének bizonyításában szereplő indukciók az ott szereplő Δ formulahalmazok induktív definíciójának felelnek meg ugyanúgy, ahogyan az eredeti indukcióelv megfelel a formula definíciójának. Ugyanakkor ezek az indukciók könynyen visszavezethetők az eredeti indukció-elvre. Másrészt pl. a 7.2 tétel bizonyításában olyan indukciót alkalmazunk, melynél csak zárt formulák jönnek számításba és $F(d/x)$-ről következtetünk $\forall xF$-re. Ez pl. a következő módon vezethető vissza az eredeti típusú indukcióra. Ahelyett, hogy csak zárt F formulákat tekintenénk, azt bizonyítjuk F szerinti indukcióval, hogy tetszőleges F formulára és φ helyettesítésre, ha $F(\varphi)$ zárt, akkor $F(\varphi)$ rendelkezik a szóban forgó tulajdonsággal.

2. §. *Szemantika*

A modellelmélet három alapfogalma a formula, a *struktúra* és a kettőt összekapcsoló *jelentésreláció*. Ebben a §-ban az utóbbi két fogalmat vezetjük be, és további ezekkel kapcsolatos definíciókat és állításokat fogalmazunk meg.

*Struktúrá*nak nevezünk egy (A, α) rendezett párt, ahol A egy nem üres halmaz, α pedig függvény, amelynek értelmezési tartománya egy hasonlósági típus (azaz nem-logikai jeleknek egy tetszőleges halmaza), továbbá α kielégíti a következő feltételeket:

(i) Ha $P\in\operatorname{dom}(\alpha)$, P O-változós relációjel, akkor $\alpha(P)=\uparrow$ vagy pedig $\alpha(P)=\downarrow$;

(ii) ha $P \in \mathrm{dom}(\alpha)$, P n-változós relációjel akkor $\alpha(P)$ *n-változós reláció A-n*, azaz $\alpha(P) \subseteq A^n$. Figyeljük meg, hogy $n=1$ esetén $\alpha(P)$ A-nak *részhalmaza.*

(iii) ha $f \in \mathrm{dom}(\alpha)$, f individuumjel, akkor $\alpha(f) \in A$.

(iv) ha $f \in \mathrm{dom}(\alpha)$, f n-változós operációjel, ahol $n \geqq 1$, akkor $\alpha(f)$ *n-változós operáció A-n*, azaz $\alpha(f)$ olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya A^n, értékkészlete pedig része A-nak.

Ha az (A, α) struktúrát $\mathfrak{A}$-val jelöljük, akkor tetszőleges $\sigma \in \mathrm{dom}(\alpha)$ szimbólum esetén $\alpha(\sigma)$-t $\sigma^{\mathfrak{A}}$-val jelöljük; $\sigma^{\mathfrak{A}}$ σ interpretációja $\mathfrak{A}$-ban. A-t a struktúra *alaphalmazának* nevezzük és $|\mathfrak{A}|$-val jelöljük, $\mu = \mathrm{dom}(\alpha)$ pedig $\mathfrak{A}$ *(hasonlósági) típusa* és $\mathfrak{A}$ *μ típusú* struktúra.

Ha $\mu' \subseteq \mu$ és $\mathfrak{A}$ μ típusú struktúra, akkor $\mathfrak{A} \upharpoonright \mu'$, $\mathfrak{A}$ *μ'-redukáltja* az az egyértelműen meghatározott μ' típusú $\mathfrak{A}'$ struktúra, melyre $|\mathfrak{A}'| = |\mathfrak{A}|$ és $\sigma^{\mathfrak{A}'} = \sigma^{\mathfrak{A}}$, ha $\sigma \in \mu'$; azaz $\mathfrak{A}' = (A, \alpha \upharpoonright \mu')$ ha $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ μ típusú struktúra és φ olyan függvény, hogy a fenti (i)—(iv) feltételek teljesülnek, ha α helyett φ-t írunk, valamint $\mu \cap \mathrm{dom}(\varphi) = 0$. Ekkor $(A, \alpha \cup \varphi)$ szintén struktúra, melynek típusa $\mu \cup \mathrm{dom}(\varphi)$. Ezt a struktúrát $(\mathfrak{A}, \varphi)$-vel jelöljük. Világos, hogy $(\mathfrak{A}, \varphi) \upharpoonright \mu = \mathfrak{A}$.

Legyen például $+$ és $\cdot$ két különböző kétváltozós operációjel. Ekkor a *gyűrűk* azonosíthatók bizonyos $\{+, \cdot\}$ típusú struktúrákkal. De gyűrűknek nevezhetünk bizonyos $\{+, \cdot, \bigcirc, -\}$ típusú struktúrákat is, ahol $\bigcirc$ individuumjel és $-$ egy további kétváltozós operációjel. Látjuk tehát, hogy egy algebrailag egyértelműen megadott struktúra különböző típusú struktúráknak felelhet meg az itt adott definíció szerint. Ez, úgy érezzük, csak a modellelmélet pontosabb szóhasználatának a következménye, és nem értelmezhető úgy, hogy „nem sikerült megragadni a gyűrű fogalmát a modellelméleti struktúra-fogalommal".

Egy tetszőleges μ típusú struktúrákból álló K osztály esetén $K \upharpoonright \mu'$ jelöli az $\{\mathfrak{A} \upharpoonright \mu' : \mathfrak{A} \in K\}$ osztályt; itt természetesen $\mu' \subseteq \mu$. Ha pedig $\mu' \supseteq \mu$, akkor $K[\mu']$ azon μ' típusú struktúrák osztálya, melyeknek a μ-redukáltja K-ba esik. Másszóval $K[\mu']$ az a legtágabb μ' típusú struktúrákból álló K' osztály, melyre $K' \upharpoonright \mu \subseteq K$. Nyilvánvalóan $K[\mu'] \upharpoonright \mu = K$.

Most rátérünk a *jelentés-reláció* definíciójára. Definíciónk a TARSKI [42] által megadott klasszikus definíció kézenfekvő általánosítása. Egy a mi formuláinkat is tartalmazó igen széles formulaosztályhoz tartozó jelentés-reláció precíz definícióját lásd [15]-ben.

Legyen $\mathfrak{A}$ egy μ típusú struktúra, $|\mathfrak{A}| = A$. Egy a változók halmazán értelmezett φ függvényt, amelynek értékei A-ból valók *(a változók) egy $\mathfrak{A}$-beli (teljes) értékelés(é)nek* nevezünk. Jelöljük $\varphi(a/x)$-el azt a ψ függvényt, amelynek értelmezési tartománya ugyanaz, mint φ-é, és értékei is rendre megegyeznek φ értékeivel, kivéve, hogy $\psi(x) = a$; másszóval $\psi = \varphi \upharpoonright (\mathrm{dom}(\varphi) - \{x\}) \cup \{(x, a)\}$. Először definiáljuk a *„t kifejezés $t^{\mathfrak{A}}[\varphi]$ értékét az $\mathfrak{A}$ struktúrában a φ értékelés mellett"* a t μ-kifejezés szerinti rekurzióval a következő módon:

(i) $x^{\mathfrak{A}}[\varphi] = \varphi(x)$, ha x változó;

(ii) $c^{\mathfrak{A}}[\varphi] = c^{\mathfrak{A}}$, ha c individuumjel μ-ben;

(iii) $(ft_0 \dots t_{n-1})^{\mathfrak{A}}[\varphi] = f^{\mathfrak{A}}(t_0^{\mathfrak{A}}[\varphi], \dots, t_{n-1}^{\mathfrak{A}}[\varphi])$

ha f n-változós operációjel μ-ben, $t_0, \dots, t_{n-1}$ μ-kifejezések, $n \geqq 1$.

A következő predikátumot: „*a φ értékelés kielégíti az F formulát az $\mathfrak{A}$ struktúrában* (jelben: $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$) az F μ-formula szerinti rekurzióval definiáljuk, minden egyes rögzített $\mathfrak{A}$ μ-struktúra esetén, a következő feltételek megadásával:

(i) $\models_{\mathfrak{A}} P[\varphi] \Leftrightarrow P^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{t}$, ha P O-változós relációjel μ-ben;

(ii) $\models_{\mathfrak{A}} (Pt_0 \ldots t_{n-1})[\varphi] \Leftrightarrow (t_0^{\mathfrak{A}}[\varphi], \ldots, t_{n-1}^{\mathfrak{A}}[\varphi]) \in P^{\mathfrak{A}}$, ha Pn-változós relációjel μ-ben, $n \geqq 1$;

(iii) $\models_{\mathfrak{A}} (t_0 \approx t_1)[\varphi] \Leftrightarrow t_0^{\mathfrak{A}}[\varphi] = t_1^{\mathfrak{A}}[\varphi]$;

(iv) $\models_{\mathfrak{A}} (\bigwedge \Sigma)[\varphi] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ minden $F \in \Sigma$-ra;

(v) $\models_{\mathfrak{A}} (\bigvee \Sigma)[\varphi] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ legalább egy $F \in \Sigma$ formulára;

(vi) $\models_{\mathfrak{A}} (\forall x F)[\varphi] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} F[\varphi(a/x)]$ minden $a \in A$-ra;

(vii) $\models_{\mathfrak{A}} (\exists x F)[\varphi] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} F[\varphi(a/x)]$ legalább egy $a \in A$ elemre.

Megjegyezzük, hogy a rekurzió újból nem a szokásos alakú. Az eredeti típusú rekurzióval a $\{\varphi : \models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]\}$ $\mathfrak{A}$-beli értékelésekből álló halmazt lehetne definiálni, majd ebből kellene explicite definiálni a $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ predikátumot.

(2. 1) *Ha φ_1 és φ_2 teljes értékelések az $\mathfrak{A}$ μ-típusú struktúrában és a t μ-kifejezésre* $\varphi_1 \restriction \text{var}(t) = \varphi_2 \restriction \text{var}(t)$, *akkor* $t^{\mathfrak{A}}[\varphi_1] = t^{\mathfrak{A}}[\varphi_2]$.

(2. 2) *Legyenek φ_1, φ_2, $\mathfrak{A}$ és μ, mint előbb, legyen F μ-formula és tegyük fel, hogy* $\varphi_1 \restriction \text{var}(F) = \varphi_2 \restriction \text{var}(F)$. *Ekkor* $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi_1]$ *akkor és csak akkor ha* $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi_2]$.

Megjegyzés. Ez az állítás mutatja, hogy $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ igazságértékét φ-nek csak F *szabad* változóin felvett értékei befolyásolják.

Mindkét állítás bizonyítása indukcióval történhet; a második bizonyításában felhasználjuk az elsőt.

Tegyük fel, hogy φ a változók halmazának valamely részhalmazát képezi le az $\mathfrak{A}$ μ-struktúra A alaphalmazába (azaz φ dom (φ)*-nek* egy $\mathfrak{A}$*-beli értékelése*). Tegyük fel, hogy az F μ-formula szabad változói elemei dom (φ)-nek. Ezen feltételek mellett $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ definíció szerint akkor és csak akkor legyen igaz, ha $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi']$ valamely φ' teljes értékelésre, melyre $\varphi' \restriction \text{dom}(\varphi) = \varphi$. (2. 2.) szerint $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ ekvivalens azzal, hogy $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi']$ fennáll minden olyan teljes φ' értékelésre, melyre $\varphi' \restriction \text{dom}(\varphi) = \varphi$ (azaz $\varphi \subseteq \varphi'$). Megállapodunk abban, hogy a „$\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$" állítás magában foglalja azt is, hogy „$\mathfrak{A}$ struktúra, amelynek típusát μ-vel jelölve, F μ-formula és φ a változók egy halmazának leképezése $|\mathfrak{A}|$-ba úgy, hogy var $(F) \subseteq$ dom (φ)". Ezzel analóg értelemben fogjuk használni a $t^{\mathfrak{A}}[\varphi]$ jelölést valamely részleges φ értékelés mellett.[5]

Triviálisan bizonyítható a következő állítás is:

(2. 3) *Ha $\mathfrak{A}$ μ-típusú struktúra, $\mu' \subseteq \mu$ és F μ'-formula, akkor* $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ *akkor és csak akkor ha* $\models_{\mathfrak{A} \restriction \mu'} F[\varphi]$.

Ha F, ill. t zárt formula, ill. kifejezés, akkor $\models_{\mathfrak{A}} F[0]$, ill. $t^{\mathfrak{A}}[0]$ helyett $\models_{\mathfrak{A}} F$-t, ill. $t^{\mathfrak{A}}$-t írunk és ha $\models_{\mathfrak{A}} F$ igaz, azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ *modell*je F-nek, vagy, hogy F *igaz* $\mathfrak{A}$-ben. Ha F zárt μ-formula, akkor $\text{Mod}_{\mu}(F)$ jelöli F μ-típusú modelljeinek

[5] Ha dom $(\varphi) = \{x_i : i < n\}$ és $\varphi(x_i) = a_i$ $(i < n)$, akkor $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ helyett $\mathfrak{A} \models F\begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{n-1} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}$ írható.

osztályát. Ha F μ' feletti zárt formula és $\mu' \subseteq \mu$ akkor $\mathrm{Mod}_\mu(F) = (\mathrm{Mod}_{\mu'}(F))[\mu]$, mint az (2. 3) állításból azonnal világos.

Ha Σ zárt μ-formuláknak egy halmaza, akkor $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$ jelöli Σ *μ-típusú modelljeinek* osztályát, azaz $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) = \bigcap_{F \in \Sigma} \mathrm{Mod}_\mu(F)$. Megjegyezzük, hogy ha $\Sigma = 0$, akkor $\mathrm{Mod}_\mu(0)$ a μ-típusú struktúrák osztálya.

Ha Σ zárt formulák egy halmaza és F zárt formula, akkor azt mondjuk, hogy *F logikai következménye Σ-nek* (jelben $\Sigma \models F$), ha *valamely* (vagy, ekvivalens módon, a *legszűkebb* olyan) μ hasonlósági típusra, melyre F és Σ minden eleme μ-formulák, fennáll, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}_\mu(F)$. Jelöljük $Cn_\mu(\Sigma)$-val Σ μ feletti véges logikai következményeinek halmazát, és $Cn_\mu^{\omega_1,\omega}(\Sigma)$-val Σ összes (véges vagy nem véges) μ feletti következményének halmazát. $\{G\} \models F$ helyett természetesen $G \models F$-t írunk.

Azt mondjuk, hogy az F formula *azonosan igaz*, ha $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ minden μ-típusú $\mathfrak{A}$ struktúrára és minden φ $\mathfrak{A}$-beli teljes értékelésre; itt μ az F-ben előforduló nem logikai jelek halmaza. Ha F zárt μ-formula, akkor ez ekvivalens azzal, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(F) = \mathrm{Mod}_\mu(0)$. Nyilvánvalóan $\uparrow = \bigwedge 0$ azonosan igaz, és $\downarrow = \bigvee 0$ *azonosan hamis*, azaz $\neg\downarrow$ azonosan igaz, vagy másszóval $\mathrm{Mod}_\mu(\downarrow) = 0$ (tetszőleges μ mellett).

Az F és G formulák *logikailag* ekvivalensek, ha $F \leftrightarrow G$ azonosan igaz.

A következő állítást szintén F szerinti indukcióval lehet bizonyítani.

(2. 4) *Minden F formula logikailag ekvivalens F^*-gal, F redukáltjával.*

Ha Σ zárt μ-formulák egy halmaza, Σ *konzisztens*, ha $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) \neq 0$, és *ellentmondásos*, ha $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) = 0$, azaz ha $\Sigma \models \downarrow$.

A II. és IV. fejezetben $\mathfrak{A} \models F[\varphi]$-t, ill. $\mathfrak{A} \models F$-t fogunk általában írni $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$, ill. $\models_{\mathfrak{A}} F$ helyett. Ez a $\Sigma \models F$ jelöléssel nem keverhető össze, mivel struktúrákat mindig gót nagybetűkkel, formulákat, ill. formulahalmazokat pedig latin és görög nagybetűkkel fogunk jelölni. A III. fejezetben azonban megtartjuk az eredeti megkülönböztetést $\models_{\mathfrak{A}} F$ és $\Sigma \models F$ között.

A következő lemma a helyettesítésre vonatkozó legfontosabb állítás.

(2. 5) *Tegyük fel, hogy F μ-formula, ψ pedig olyan helyettesítés, melyre* dom (ψ) *minden eleme változó és $rn(\psi)$ minden eleme μ-kifejezés. Tegyük fel továbbá, hogy F-nek egyetlen kötött változója sem fordul elő $rn(\psi)$ egyetlen kifejezésében sem. Legyen $\mathfrak{A}$ μ-típusú struktúra és φ $\mathfrak{A}$-beli teljes értékelés. Jelöljük $\psi^{\mathfrak{A}}[\varphi]$-vel a*

$$\langle (\psi(x))^{\mathfrak{A}}[\varphi] : x \in \mathrm{dom}\,(\psi) \rangle \cup \varphi \restriction (\mathrm{dom}\,(\varphi) - \mathrm{dom}\,(\psi))$$

függvényt. Ekkor

$$\models_{\mathfrak{A}} F(\psi)[\varphi] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} F[\psi^{\mathfrak{A}}[\varphi]].$$

Ennek az állításnak a bizonyítása is az F formula szerinti indukcióval történik. Azt az esetet, amikor F prímformula, a $(t(\psi))^{\mathfrak{A}}[\varphi] = t^{\mathfrak{A}}[\psi^{\mathfrak{A}}[\varphi]]$ egyenlőség felhasználásával kell tárgyalni; itt t tetszőleges μ-kifejezés. A bizonyítás részletezésétől most is eltekintünk.

Külön megemlítjük viszont azt a speciális esetet, amikor $\varphi = 0$ és $\psi = \{(x, d)\}$, ahol d individuumjel. Írjunk $\models_{\mathfrak{A}} F[a/x]$-t $\models_{\mathfrak{A}} F[\{(x, a)\}]$ helyett. A fenti állítás ekkor a következőbe megy át.

(2. 6) *Ha $d \in \mu$, d individuumjel, $\mathfrak{A}$ μ-típusú struktúra, x változó és F μ-formula, amelynek x-en kívül nincs szabad változója, akkor*

$$\models_{\mathfrak{A}} F(d/x) \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} F[d^{\mathfrak{A}}/x].$$

Ennek következménye a következő öt állítás. Ezek megfogalmazásában, továbbá a III. fejezetben egy Σ formula halmaz és egy F formula esetén $\Sigma \cup \{F\}$ helyett $\Sigma + F$-t írunk. Ehhez hasonlóan a III. fejezetben a $\varphi + (x, d)$ jelölést fogjuk használni $\varphi \cup \{(x, d)\}$ helyett olyan esetekben, mikor φ függvény.

(2. 7) *Legyenek F, d, μ és x mint előbb, legyen Σ zárt μ-formulák egy halmaza, G zárt μ-formula. Ekkor*

(a) $\forall xF \models F(d/x)$.

(b) $F(d/x) \models \exists xF$.

(c) *Ha $\Sigma \models F(d/x)$ és d nem fordul elő Σ egyetlen formulájában sem, sem pedig $\forall xF$-ben, akkor $\Sigma \models \forall xF$.*

(d) *Ha $\Sigma + F(d/x) \models G$ és d nem fordul elő egyetlen a $\Sigma \cup \{\forall xF, G\}$ halmazban levő formulában sem, akkor $\Sigma + \exists xF \models G$.*

(e) *Jelöljük az $(\mathfrak{A}, \{(d, a)\})$ struktúrát $(\mathfrak{A}, a/d)$-val. Ha $\mathfrak{A}$ tetszőleges μ-típusú struktúra, $\exists xF$ zárt μ-formula, akkor a d individuumjelet μ-n* kívül *választva, van olyan $a \in |\mathfrak{A}|$ elem, amelyre*

$$\models_{(\mathfrak{A},\, a/d)} \exists xF \to F(d/x).$$

Bizonyítás.

(ad (a)) Tegyük fel, hogy $\models_{\mathfrak{A}} \forall xF$ a μ-típusú $\mathfrak{A}$ struktúrára. Ekkor a jelentésreláció, $\models$, definíciója szerint $\models_{\mathfrak{A}} F[d^{\mathfrak{A}}/x]$. Tehát (2. 6) szerint $\models_{\mathfrak{A}} F(d/x)$, amit be kellett látnunk.

(b) bizonyítása hasonló (a)-éhoz.

(ad (d)) Tegyük fel (d) feltevését, legyen $\mu_0 = \mu - \{d\}$. Ekkor feltevésünk szerint $\exists xF$, G és a Σ-beli formulák zárt μ_0 feletti formulák. Amit meg kell mutatnunk tehát az az, hogy $\mathrm{Mod}_{\mu_0}(\Sigma + \exists xF) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mu_0}(G)$. Legyen $\mathfrak{A}_0 \in \mathrm{Mod}_{\mu_0}(\Sigma + \exists xF)$. Ezért van olyan $a \in |\mathfrak{A}_0|$ elem, melyre $\models_{\mathfrak{A}_0} F[a/x]$. Definiáljuk az $\mathfrak{A}$ μ-struktúrát úgy, hogy $\mathfrak{A} \upharpoonright \mu_0 = \mathfrak{A}_0$ és $d^{\mathfrak{A}} = a$. $\models_{\mathfrak{A}} F[d^{\mathfrak{A}}/x]$-ból következik, hogy $\models_{\mathfrak{A}} F(d/x)$. Ezt összevetve azzal, hogy $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_{\mu}(\Sigma)$, feltevésünk szerint adódik, hogy $\models_{\mathfrak{A}} G$, és így az is, hogy $\models_{\mathfrak{A}_0} G$, amit be kellett látnunk.

(c) bizonyítása hasonló (d)-éhez.

(ad (e)) Ha $\models_{\mathfrak{A}} \exists xF$, akkor a-nak válasszunk egy olyan elemet, melyre $\models_{\mathfrak{A}} F[a/x]$, ha pedig $\models_{\mathfrak{A}} \exists xF$ nem áll fenn, legyen a tetszőleges. Könnyen belátható, hogy az így választott a elem mellett a bizonyítandó állítás igaz.

Struktúrák mellett szükségünk van egy olyan segédfogalomra is, amely lehetőséget ad az egyenlőségjelnek a standardtól (lásd $\models$ definíciójának (iii) pontját) eltérő interpretációjára. *Pszeudostruktúrának* nevezünk egy $\mathfrak{A} = (A, \alpha \cup \{(\approx, \approx^{\mathfrak{A}})\})$ alakú párt, ahol $\mathfrak{A}' = (A, \alpha)$ struktúra és $\approx^{\mathfrak{A}}$ kétváltozós reláció A-n. $\sigma^{\mathfrak{A}'}$, $|\mathfrak{A}'|$ helyett $\sigma^{\mathfrak{A}}$-t és $|\mathfrak{A}|$-t írunk, és ezeket σ *$\mathfrak{A}$-beli interpretációjának* és $\mathfrak{A}$ *alaphalmazának* nevezzük. A $\mu = \mathrm{dom}\,(\alpha)$ halmazt most is $\mathfrak{A}$ *típusának* nevezzük.

Ha φ a változók halmazának egy leképezése A-ba, akkor φ újból a változóknak egy $\mathfrak{A}$-beli *teljes értékelése*. A $t^{\mathfrak{A}}[\varphi]$ értéket tetszőleges t μ-kifejezés esetén ugyanúgy határozzuk meg, mint struktúrák esetén. A $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ relációt a struktúrákra vonatkozó $\models$ reláció definíciójának (i), (ii) és (iv)—(vii) kikötéseivel és a következő (iii)' feltétellel értelmezzük:

(iii)' $$\models_{\mathfrak{A}}(t_0 \approx t_1)[\varphi] \Leftrightarrow (t_0^{\mathfrak{A}}[\varphi], t_1^{\mathfrak{A}}[\varphi]) \in \approx^{\mathfrak{A}}.$$

A (2. 1), (2. 2), (2. 5) és (2. 6) állítások ugyanúgy bizonyíthatók pszeudostruktúrákra, mint struktúrákra.

Bizonyos pszeudostruktúrákból, amelyeket normálisaknak fogunk nevezni, az algebrai faktorstruktúra-konstrukcióhoz hasonló módon struktúrát lehet képezni. Jelöljük tetszőleges μ hasonlósági típus esetén I_μ-vel a μ-höz tartozó egyenlőségi axiómák halmazát, azaz a következő véges formulákból álló halmazt:

$$v_0 \approx v_0,$$

$$v_0 \approx v_1 \rightarrow v_1 \approx v_0,$$

$$(v_0 \approx v_1 \wedge v_1 \approx v_2) \rightarrow v_0 \approx v_2,$$

$$(v_0 \approx v_n \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \approx v_{2n-1}) \rightarrow (Pv_0 \ldots v_{n-1} \leftrightarrow Pv_n \ldots v_{2n-1})$$

tetszőleges $n \geqq 1$ -re és $P \in \mu$ n-változós relációjelre.

$$(v_0 \approx v_n \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \approx v_{2n-1}) \rightarrow (fv_0 \ldots v_{n-1} \approx fv_n \ldots v_{2n-1})$$

tetszőleges $n \geqq 1$ -re és $f \in \mu$ n-változós operációjelre.

Nevezzük az $\mathfrak{A}$ μ-típusú pszeudostruktúrát *normálisnak*, ha $\models_{\mathfrak{A}} \forall(G)\, I_\mu$ minden G elemére. Másszóval, $\mathfrak{A}$ normális, ha $\approx^{\mathfrak{A}}$ ekvivalenciareláció az A halmazon, továbbá $\approx^{\mathfrak{A}}$ kongruencia reláció a $P^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ relációkra és műveletekre nézve.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$ μ-típusú normális pszeudostruktúra. Definiáljuk az $\mathfrak{A}/\approx$ μ-típusú struktúrát, $\mathfrak{A}$ *faktorstruktúráját* a következő módon. Jelöljük tetszőleges $a \in |\mathfrak{A}|$ esetén $[a]$-val a $\approx^{\mathfrak{A}}$ reláció azon ekvivalencia osztályát, amelynek a eleme. Legyen

(i) $|\mathfrak{A}/\approx| =_{df} \{[a] : a \in |\mathfrak{A}|\}$;

(ii) $P^{\mathfrak{A}/\approx} =_{df} P^{\mathfrak{A}}$ ha $P \in \mu$ O-változós relációjel;

(iii) $([a_0], \ldots, [a_{n-1}]) \in P^{\mathfrak{A}/\approx} \Leftrightarrow_{df} (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in P^{\mathfrak{A}}$

tetszőleges $n > 0$, $P \in \mu$ n-változós relációjel és $a_0, \ldots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ elemek esetén;

(iv) $f^{\mathfrak{A}/\approx}([a_0], \ldots, [a_{n-1}]) =_{df} [f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})]$

tetszőleges $n \geqq 0$, $f \in \mu$ n-változós operációjel és $a_0, \ldots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ elemek esetén.
Az, hogy ezen definíciók valóban egyértelműen meghatározzák az $\mathfrak{A}/\approx$ struktúrát, abból következik, hogy $\mathfrak{A}$ normális.

(2. 8) *Legyen $\mathfrak{A}$ μ-típusú normális pszeudostruktúra. Legyen φ tetszőleges teljes értékelés $\mathfrak{A}$-ban, és legyen $[\varphi] = \langle [\varphi(x)] : x$ változó$\rangle$*[6]. *Ekkor*

(a) *tetszőleges t μ-kifejezés esetén*

$$t^{\mathfrak{A}/\approx}[[\varphi]] = [t^{\mathfrak{A}}[\varphi]]$$

[6] $[a]$ $\approx^{\mathfrak{A}}$-nak az az ekvivalencia-osztálya, melynek a eleme (lásd fent).

(b) *tetszőleges F μ-formula esetén*

$$\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}/\approx} F[[\varphi]].$$

Ez az állítás is a t kifejezés, illetve az F formula szerinti indukcióval bizonyítható.

Ha az $\mathfrak{A}$ pszeudostruktúrára és a Σ zárt formulákból álló halmazra igaz, hogy $\models_{\mathfrak{A}} F$ (azaz $\models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$ valamely (vagy minden) $\mathfrak{A}$-beli teljes φ értékelés mellett) Σ tetszőleges F elemére, akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ Σ-nak *pszeudomodellje*. $\mathfrak{A}$ *pszeudomodellje* a G zárt formulának, ha $\mathfrak{A}$ pszeudomodellje $\{G\}$-nek.

A jelen § további részében csak véges formulákkal foglalkozunk.

A következő állítás triviálisan bizonyítható:

(2. 9) *Tetszőleges F formula esetén $\models_{\mathfrak{A}} \forall(F)$ akkor és csak akkor, ha $\models_{\mathfrak{A}} F(\varphi)$ a változóknak minden φ $\mathfrak{A}$-beli értékelésére.*

A következő állítás bizonyítása megtalálható pl. [20]-ban (Theorem 27., 132. oldal).

(2. 10) *Minden F véges formulához van olyan G prenex formula, amelyre G*

(i) *logikailag ekvivalens F-fel,*
(ii) *szabad változói megegyeznek F szabad változóival és*
(iii) *ugyanazok a nem-logikai jelek fordulnak elő G-ben, mint F-ben.*

Legyen $F=(p)M$ zárt prenex formula, $p = \langle Q_i x_i : i < s\rangle$. Legyen $\langle w_n : n < k\rangle$ a p-ben előforduló egzisztenciálisan kötött változók sorozata olyan sorrendben, ahogy p-ben előfordulnak (azaz legyen $\{w_n : n < k\} = \{x_i : i < s,\ Q_i = \exists\}$ és ha $w_n = x_{j_n}$ $(n<k)$, akkor $n<n'<k$ esetén $j_n<j_{n'}$), és minden $n<k$-ra legyen $\langle u_i : i < k_n\rangle$ a p-ben w_n *előtt* levő univerzálisan kötött változók sorozata abban a sorrendben, ahogyan p-ben előfordulnak (azaz $\{u_i : i < k_n\} = \{x_i : i < j_n,\ Q_i = \forall\}$ ahol $w_n = x_{j_n}$), és $u_0, \dots, u_{l-1}$ a p-ben előforduló összes univerzálisan kötött változó. Legyen minden $n<k$ esetén q_n egy k_n-változós operációjel úgy, hogy q_n nem fordul elő M-ben, továbbá $q_n \neq q_{n'}$ ha $n \neq n'$ és legyen η olyan helyettesítés, melyre dom $(\eta) \supseteqq \{x_i : i < s\}$, $\eta(u_i) = u_i$ $(i<l)$ és $\eta(w_n) = q_n u_0 \dots u_{k_n-1}$. Egy ilyen η helyettesítést a $(p)M$ prenex formulára nézve *normális* helyettesítésnek nevezünk. Legyen μ olyan hasonlósági típus, amelyhez a q_n szimbólumok nem tartoznak hozzá és melyre F μ-formula, valamint legyen $\mu' = \mu \cup \{q_n : n < k\}$. Ekkor fennáll a következő:

(2. 11) *Tetszőleges $F=(p)M$-re nézve normális η helyettesítés mellett*

$$\mathrm{Mod}_\mu(F) = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\forall(M(\varphi))) \restriction \mu.$$

$\forall(M(\varphi))$ a $(p)M$ prenex formula egy *Skolem normálformája*. A (2. 11) állítás bizonyítása megtalálható pl. [34]-ben, a 88. oldalon.

Most rátérünk néhány struktúraosztály-típus definíciójára. A szóban forgó típusokat TARSKI [43], [44] vezette be.

Ha $K = \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$ valamely μ hasonlósági típus és Σ zárt véges μ-formulákból álló halmaz mellett, akkor azt mondjuk, hogy K *elemi* osztály, jelben: $K \in EC_\Delta$. Ha Σ egyelemű halmaz, akkor K *szigorúan elemi*, $K \in EC$. Elemi és szigorúan elemi osztályok sűrűn fordulnak elő a hagyományos algebrában. Pl. az algebrailag zárt testek osztálya elemi (de nem szigorúan elemi) osztály, a testek osztálya viszont szigorúan elemi osztály. Valamely μ típusú struktúrákból álló K osztály *pszeudoelemi* (jelben $K \in PC_\Delta$), ha $K = K' \upharpoonright \mu$ valamely K' elemi osztály mellett (amelynek elemei μ' típusúak valamely $\mu' \supseteq \mu$ hasonlósági típus mellett). Ha itt $K' \in EC$, akkor $K \in PC$ és K *szigorúan pszeudoelemi*. Pl. a gyűrűk multiplikatív félcsoportjainak osztálya PC osztály. Mindazon lineárisan rendezett halmazok osztálya, amelyek sűrűek és bármely két nyílt intervallumuk izomorf, PC, de nem EC_Δ osztály. Azon halmazok osztálya, melyek számossága legalább $\aleph_1$ PC_Δ, de nem EC_Δ, sem pedig PC. A $K = \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$ osztály, ahol $\mu = \{+, \cdot\}$ és Σ mindazon zárt formulák halmaza, melyek igazak a természetes számok körében a $+$ és $\cdot$ jelek szokásos interpretációja mellett, EC_Δ, de nem PC osztály. Ezek a példák mutatják, hogy EC, EC_Δ, PC és PC_Δ között „csak" az $EC \subset PC \subset PC_\Delta$, $EC \subset EC_\Delta \subset PC_\Delta$ relációk állnak fenn.

PC_ω-val jelöljük azon $K' \upharpoonright \mu$ osztályok összességét, amelyeknél K' egy *megszámlálható* $\mu' \supseteq \mu$ hasonlósági típus mellett, μ' típusú struktúrákból álló elemi osztály.

UC_Δ-val jelöljük azon $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$ osztályok összességét, ahol Σ véges *univerzális* μ-formulák egy halmaza.

A $K \in EC_\Delta(\mu)$, $K \in EC(\mu)$, $K \in PC_\Delta(\mu)$ stb. jelölést használjuk akkor, ha $K \in EC_\Delta$, ill. $K \in EC$, stb. és K μ típusú struktúrák egy osztálya.

Megjegyezzük, hogy nagyon sok, az algebrában tekintett struktúraosztály nem esik a fenti kategóriák közül a legáltalánosabb, PC_Δ-ba sem. Ilyen például az egyszerű csoportok osztálya, vagy a jólrendezett halmazok osztálya.

A következő állítás (2. 11) következménye.

(2. 12) *Tetszőleges $K \in PC_\Delta(\mu)$ osztály esetén meg lehet adni a $\mu' \supseteq \mu$ hasonlósági típust és a Σ véges zárt μ'-formulákból álló halmazt úgy, hogy Σ minden eleme $\forall(F)$ alakú, ahol F kvantormentes formula és $K = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma) \upharpoonright \mu$.*

Bizonyítás. Feltevésünk szerint $K = \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_1) \upharpoonright \mu$ valamely $\mu_1 \supseteq \mu$ és Σ_1 mellett. Σ_1 minden F eleméhez van vele logikailag ekvivalens F' zárt prenex μ_1-formula. Legyen $\Sigma_2 = \{F' : F \in \Sigma_1\}$. Nyilvánvalóan $K = \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_2) \upharpoonright \mu$. Σ_2 minden egyes F eleméhez alkossuk meg az $Sk(F) = \forall(M(\varphi))$ formulát, ahol $F = (p)M$ és φ-t úgy határozzuk meg, mint a (2. 11) előtti bekezdésben azzal a pótlólagos kikötéssel, hogy a q_n operációjelek különböző $F \in \Sigma_2$ formulák esetén különbözők legyenek és ne tartozzanak a μ_1 halmazhoz. Legyen μ' mindazon nem-logikai jelek halmaza, amelyek vagy μ_1-nek elemei, vagy pedig előfordulnak valamely $Sk(F)$ formulában, és legyen Σ az $Sk(F)$ formulák halmaza, midőn F végigfut Σ_2 elemein. Azt állítjuk, hogy $K = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma) \upharpoonright \mu$. Legyen először $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma) \upharpoonright \mu$, azaz $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \upharpoonright \mu$, ahol $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma)$. Ekkor $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(Sk(F))$ Σ_2 tetszőleges F elemére és így (2. 11) szerint $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(F)$ Σ_2 tetszőleges F elemére. Ezért $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma_2)$, azaz $\mathfrak{A}' \upharpoonright \mu_1 \in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_2)$ és így $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}' \upharpoonright \mu_1) \upharpoonright \mu \in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_2) \upharpoonright \mu = K$ amit be kellett látnunk. Tegyük fel másrészt, hogy $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \upharpoonright \mu_1$, ahol $\mathfrak{A}_1 \in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_2)$. Σ_2 F elemét tetszőlegesen választva, (2. 11) szerint van olyan $\mathfrak{A}_F \in \mathrm{Mod}_{\mu_F}(Sk(F))$ struktúra, melyre $\mathfrak{A}_F \upharpoonright \mu_1 = \mathfrak{A}_1$. Itt μ_F μ_1 elemeiből és a $Sk(F)$ formulába újonnan bevezetett q_n operációjelekből álló hasonlósági típus. Mivel konstrukciónk szerint $\mu_{F_1} \cap \mu_{F_2} = \mu_1$, ha $F_1, F_2 \in \Sigma_2$ és $F_1 \neq F_2$, azért van olyan μ' típusú $\mathfrak{A}'$ struktúra, melyre $\mathfrak{A}' \upharpoonright \mu_F = \mathfrak{A}_F$ minden $F \in \Sigma_2$-re. Ekkor $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma)$ mivel $\Sigma = \{Sk(F) : F \in \Sigma_2\}$, és így $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \upharpoonright \mu \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma) \upharpoonright \mu$, amit be kellett látnunk.

Tetszőleges $\mathfrak{A}$ struktúra esetén $Th(\mathfrak{A})$ jelöli mindazon véges zárt μ-formulák összességét, amelyek igazak $\mathfrak{A}$-ban; itt μ $\mathfrak{A}$ típusa. Ha K valamely adott μ mellett

μ típusú struktúrákból álló osztály, akkor $Th(K)$ jelölje azon véges zárt μ-formulák összességét, amelyek igazak minden K-beli struktúrában. Megjegyezzük, hogy azon esetet kivéve, mikor K üres, K egyértelműen meghatározza az itt szereplő μ hasonlósági típust. Két ugyanolyan típusú (vagy röviden: *hasonló*) $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúráról azt mondjuk, hogy *elemileg ekvivalensek* ($\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$), ha $Th(\mathfrak{A})=Th(\mathfrak{B})$. Világos, hogy adott μ típusú $\mathfrak{A}$ struktúra esetén, $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{A}$ ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{B}\in \mathrm{Mod}_\mu(Th(\mathfrak{A}))$; ezek szerint $\{\mathfrak{B}:\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{A}\}$ mindig elemi osztály.

A következő tétel bizonyítása megtalálható pl. [45]-ben.

(2. 13) *(Löwenheim—Skolem tétel). Ha az $\mathfrak{A}$ struktúra típusa megszámlálható, akkor van $\mathfrak{A}$-val elemileg ekvivalens megszámlálható struktúra (azaz, amelynek az alaphalmaza megszámlálható).*

A modellelmélet leggyakrabban és legeredményesebben alkalmazott tétele a következő lényegében GÖDELtől származó tétel.

(2. 14) *(Kompaktsági Tétel). Ha egy Σ véges zárt formulákból álló halmaz minden véges részhalmaza konzisztens, akkor Σ maga is konzisztens.*

Bizonyítását lásd például [9]-ben.

A tétel elnevezését a következő konstrukció indokolja. Legyen μ fix hasonlósági típus és legyen S_μ a $Th(\mathfrak{A})$ alakú formula halmazok összessége midőn $\mathfrak{A}$ végigfut a μ típusú struktúrák osztályán. Világos, hogy S_μ halmaz, hiszen részhalmaza a zárt μ-formulák által alkotott halmazok halmazának. S_μ-n egy topológiát vezetünk be, a topológia egy nyílt bázisának a megadásával, a következőképpen. A bázis elemei legyenek a $\langle G\rangle_\mu=\{\pi\in S_\mu:G\in\pi\}$ halmazok midőn G végigfut a μ feletti véges zárt formulák halmazán. $\langle G_1\rangle_\mu\cap\langle G_2\rangle_\mu=\{\pi\in S_\mu:G_1\in\pi,\ G_2\in\pi\}=\{\pi\in S_\mu:G_1\wedge G_2\in\pi\}=$ $=\langle G_1\wedge G_2\rangle_\mu$ (mivel $\pi=Th(\mathfrak{A})$ valamely $\mathfrak{A}$ μ-struktúrára, azért $G\in\pi\Leftrightarrow\models_{\mathfrak{A}}G$; tehát $G_1\in\pi$ és $G_2\in\pi\Leftrightarrow\models_{\mathfrak{A}}G_1$ és $\models_{\mathfrak{A}}G_2\Leftrightarrow\models_{\mathfrak{A}}G_1\wedge G_2\Leftrightarrow G_1\wedge G_2\in\pi$). Tehát $\{\langle G\rangle_\mu:G$ zárt μ-formula$\}$ valóban bázis. Jelöljük S_μ egy X részhalmazának S_μ-re vonatkozó komplementerét $-X$-el. Ekkor $-\langle G\rangle_\mu=\langle\neg G\rangle_\mu$(amint az az előbbi egyenlőséghez hasonlóan könnyen belátható), és így minden $\langle G\rangle_\mu$ halmaz nemcsak nyílt, hanem zárt is. Ily módon S_μ minden zárt részhalmaza $\bigcap_{G\in\Gamma}\langle G\rangle_\mu$ alakú. S_μ *Hausdorff*-tér, mert ha $\pi_1,\pi_2\in S_\mu$ és $\pi_1\neq\pi_2$, akkor van olyan G melyre pl. $G\in\pi_1$, de $G\notin\pi_2$. Ekkor $\pi_1\in\langle G\rangle_\mu$ és $\pi_2\in-\langle G\rangle_\mu=\langle\neg G\rangle_\mu$ és így a π_1 és π_2 pontoknak vannak diszjunkt környezetei, amit be kellett látnunk. Végül azt állítjuk, hogy S_μ *kompakt*. Tegyük fel először, hogy $\{\langle G\rangle_\mu:G\in\Gamma\}$ $\langle G\rangle_\mu$ alakú zárt—nyílt halmazoknak egy olyan halmaza, melynek bármely véges $\{\langle G\rangle_\mu:G\in\Gamma'\}$ részhalmazában levő zárt halmazok metszete nem üres. Ha tehát $\Gamma'\in S_\omega(\Gamma)$, akkor $\bigcap_{G\in\Gamma'}\langle G\rangle_\mu=\langle\wedge\Gamma'\rangle_\mu$ nem üres, azaz van olyan $\mathfrak{A}$ μ-struktúra, hogy $Th(\mathfrak{A})\in\langle\wedge\Gamma'\rangle_\mu$ azaz, hogy $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}_\mu(\Gamma')$. A Kompaktsági Tételből tehát következik, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(\Gamma)\neq 0$. Legyen $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}_\mu(\Gamma)$; ekkor nyilvánvalóan $\pi=Th(\mathfrak{A})\in\bigcap_{G\in\Gamma}\langle G\rangle_\mu$, amit be kellett látnunk. Tegyük most fel, hogy $\{X_i:i\in I\}$ S_μ zárt halmazainak egy tetszőleges összessége, amelyre $\bigcap_{i\in I'}X_i\neq 0$ minden $I'\in S_\omega(I)$-re. Az X_i zárt halmazok $X_i=\bigcap_{j\in J_i}\langle G_j^{(i)}\rangle_\mu$ alakban állíthatók elő, mint fentebb láttuk. Tekintsük a $\{\langle G_j^{(i)}\rangle_\mu:j\in J_i,\ i\in I\}$ bázishalmazokból álló halmazt; ennek bármely véges sok eleméből alkotott metszethalmaz tartalmazza az X_i halmazok közül véges soknak a metszetét, tehát feltevésünk szerint véges sok $\langle G_j^{(i)}\rangle_\mu$ metszete nem üres. Ebből következik, hogy

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{j\in J_i,\, i\in I} \langle G_j^{(i)}\rangle_\mu \neq 0$$

a fenti bázishalmazokra bebizonyított speciális esetből. Ezzel beláttuk, hogy S_μ kompakt.

Legyen K μ típusú struktúrák egy osztálya. Jelöljük $\bar{K}$-al mindazon $\mathfrak{B}$ struktúrák osztályát, amelyekre van $\mathfrak{A}\in K$ úgy, hogy $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. Nyilvánvaló, hogy $K\subseteq\bar{K}$, $\bar{\bar{K}}=\bar{K}$. Az is világos, hogy $\bar{K}=K$, ha $K\in EC_\Delta$; viszont $\bar{K}=K$ korántsem elegendő ahhoz, hogy $K\in EC_\Delta$. Pl., ha $K\in EC_\Delta(\mu)$, de $K\notin EC$, akkor $\mathfrak{S}(\mu)^7 - K = -K$ osztály nem elemi, viszont igaz rá, hogy $\overline{-K} = -K$.

Nevezzünk egy μ típusú struktúrákból álló K osztályt *kompakt*nak, ha tetszőleges Σ véges és zárt μ-formulákból álló halmaz esetén, abból, hogy minden $\Sigma'\in S_\omega(\Sigma)$-ra $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma')\cap K\neq 0$ következik, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)\cap K\neq 0$.

(2. 15) *K akkor és csak akkor kompakt, ha $\bar{K}\in EC_\Delta$, ekkor $\bar{K}=\mathrm{Mod}_\mu(Th(K))$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\bar{K}\in EC_\Delta(\mu)$, azaz $\bar{K}=\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0)$. Ha adva van egy, a kompaktság definíciójában megfogalmazott tulajdonságú Σ halmaz, akkor nyilvánvalóan következik, hogy $\Sigma\cup\Sigma_0$ minden véges részhalmaza konzisztens. Ezért a kompaktsági tétellel $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma\cup\Sigma_0)=\bar{K}\cap\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)\neq 0$ következik. Ha $\mathfrak{B}\in\bar{K}\cap\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$, akkor $\mathfrak{B}\in\bar{K}$ miatt van olyan $\mathfrak{A}\in K$, melyre $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$; tehát egyben $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathfrak{A}\in K\cap\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)\neq 0$, amit be kellett látnunk.

Tegyük most fel, hogy K kompakt, és legyen $\Sigma_0=Th(K)$. Ekkor nyilvánvalóan $\bar{K}\subseteq\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0)$. Ahhoz, hogy az ellenkező irányú inklúziót belássuk, tegyük fel, hogy $\mathfrak{B}\in\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0)$. Legyen $\Sigma=Th(\mathfrak{B})$, és legyen $\Sigma'\in S_\omega(\Sigma)$. Azt állítjuk, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma')\cap$ $\cap K\neq 0$. Ellenkező esetben ugyanis $\neg\bigwedge\Sigma'\in\Sigma_0$ állna fenn Σ_0 definíciója szerint, ez pedig ellentmond annak, hogy egyrészt $\mathfrak{B}\in\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0)$, másrészt $\models_{\mathfrak{B}}\bigwedge\Sigma'$. K kompaktsága miatt tehát $K\cap\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)\neq 0$. Ha $\mathfrak{A}\in K\cap\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$, akkor $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{A}\in K$ és így $\mathfrak{B}\in\bar{K}$, q.e.d.

(2. 16) *Ha $K\in PC_\Delta$ akkor K kompakt.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $K=\mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma_0)\restriction\mu$ és tegyük fel, hogy Σ a kompaktság definíciójában megfogalmazott tulajdonságú formula halmaz. Ekkor nyilvánvalóan igaz, hogy $\Sigma_0\cup\Sigma$ minden véges részhalmaza konzisztens, tehát $\Sigma_0\cup\Sigma$ is konzisztens. Ha $\mathfrak{A}'\in\mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma_0\cup\Sigma)$, akkor $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'\restriction\mu\in K\cap\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)\neq 0$, q.e.d.

Megjegyezzük, hogy a kompaktság sokkal gyengébb feltétel egy osztályra nézve, mint az, hogy az osztály PC_Δ. Egy kompakt osztály pl. nem szükségképpen zárt izomorfizmusra.

A következő, PC_Δ osztályokra vonatkozó tétel CRAIG [4] és ROBINSON [38] tétele. Az itt adott megfogalmazás a [3] kivonatban található meg.

[7] $\mathfrak{S}(\mu)$ jelöli a μ-típusú struktúrák osztályát.

(2. 17) *Tegyük fel, hogy a (nem üres) I indexhalmaz minden i elemére $K_i \in PC_\Delta(\mu)$ (a μ hasonlósági típus mellett), és tegyük fel, hogy $\bigcap_{i\in I} \overline{K}_i \neq 0$. Ekkor $\bigcap_{i\in I} K_i \neq 0$.*

Most bevezetünk egy segédfogalmat, amely lényegében az *ítéletkalkulus* szemantikájába tartozik, és amelyre a II. fejezetben lesz szükségünk. Tegyük fel, hogy U prímformuláknak egy tetszőleges halmaza. Azon nyílt formulák P_U halmaza, amelyek *minden prímformula-része U-hoz tartozik* az a legszűkebb X formulahalmaz, amelyre

(i) $U \subseteq X$;

(ii) ha $F \in X$ akkor $\neg F \in X$;

és (iii) ha $\Sigma \in S_\omega(X)$, akkor $\bigwedge \Sigma$, $\bigvee \Sigma \in X$.

Legyen ε egy U-n értelmezett függvény, amelynek értékei a $\uparrow$ és $\downarrow$ igazságértékek lehetnek. Ekkor ε U-nak egy *igazság-értékelése.* Jelöljük $\tilde{\varepsilon}$-mal azt a P_U-n értelmezett függvényt, amelyre

(i) $\tilde{\varepsilon}(F) = \varepsilon(F)$ ha $F \in U$;

(ii) $\tilde{\varepsilon}(\neg F) = \dot{\neg}\, \tilde{\varepsilon}(F)$;

(iii) $\tilde{\varepsilon}(\bigwedge \Sigma) = \dot{\bigwedge}(\{\tilde{\varepsilon}(F) : F \in \Sigma\})$;

(iv) $\tilde{\varepsilon}(\bigvee \Sigma) = \dot{\bigvee}(\{\tilde{\varepsilon}(F) : F \in \Sigma\})$;

ahol $\dot{\neg}(\uparrow) = \downarrow$, $\dot{\neg}(\downarrow) = \uparrow$, $\dot{\bigwedge}(0) = \uparrow$, $\dot{\bigwedge}(\{\uparrow\}) = \uparrow$, $\dot{\bigwedge}(\{\uparrow, \downarrow\}) = \downarrow$, $\dot{\bigwedge}(\{\downarrow\}) = \downarrow$ és $\dot{\bigvee}$ $\dot{\bigwedge}$ -nak duálisa. $\tilde{\varepsilon}$ az ε *által indukált igazság-értékelés.* A következő állítás triviálisan igaz.

(2. 18) *Tegyük fel, hogy U elemei μ feletti prímformulák, legyen $\mathfrak{A}$ μ típusú struktúra, φ a változóknak egy $\mathfrak{A}$-beli értékelése. Definiáljuk U-nak ε értékelését úgy, hogy $\varepsilon(F) = \uparrow \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$. Ekkor tetszőleges $G \in P_U$ esetén $\tilde{\varepsilon}(G) = \uparrow \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} G[\varphi]$.*

A következő tételt „az ítéletkalkulusra vonatkozó kompaktsági tételnek" is nevezhetjük.

(2. 19) *Legyen U prímformuláknak egy tetszőleges halmaza és legyen Γ P_U-nak egy részhalmaza (azaz Γ elemeinek prímformularészei essenek U-ba). Tegyük fel, hogy Γ bármely véges Γ' részhalmazához van U-nak olyan ε igazságértékelése, melyre $\tilde{\varepsilon}(F) = \uparrow$ Γ' minden F elemére. Ekkor van U-nak olyan δ értékelése, melyre $\tilde{\delta}(F) = \uparrow$ Γ minden F elemére.*

Bár nem tudunk explicit irodalmi utalást adni a tétel bizonyítására, megemlítjük, hogy a tétel szorzatterekre vonatkozó Tyihonov-féle tétel direkt következménye. Másrészt a különböző prímformulákat különböző nullváltozós relációjelekkel helyettesítve a tétel átmegy (2. 14) egy speciális esetébe.

3. §. *Univerzális algebra*

Végül néhány univerzális algebrai fogalmat vezetünk be. A továbbiakban minden struktúra típusa a fix μ hasonlósági típus, amelyről feltesszük, hogy nem tartalmaz O-változós relációjelet, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ struktúrák és $|\mathfrak{A}|=A$, $|\mathfrak{B}|=B$, $|\mathfrak{C}|=C$. Legyen h az A halmaz egy leképezése B-be (azaz dom $(h)=A$, $rn(h)\subseteq B$). Azt mondjuk, hogy h *$\mathfrak{A}$-nak egy homomorfizmusa $\mathfrak{B}$-be* ha

(i) tetszőleges $P\in\mu$ n-változós relációjel és $a_0, \ldots, a_{n-1}\in A$ elemek esetén abból, hogy $(a_0, \ldots, a_{n-1})\in P^{\mathfrak{A}}$ következik, hogy $(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))\in P^{\mathfrak{B}}$,

(ii) tetszőleges $f\in\mu$ n-változós operációjel és $a_0, \ldots, a_{n-1}\in A$ elemek esetén $h(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}))=f^{\mathfrak{B}}(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))$.

(3. 1) *Ha h $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-be való homomorfizmusa és φ a változók egy értékelése $\mathfrak{A}$-ban, t kifejezés és F pozitív formula, akkor*

(i) $h(t^{\mathfrak{A}}[\varphi]) = t^{\mathfrak{B}}[h\circ\varphi]$

és (ii) $\models_{\mathfrak{A}}F[\varphi] \Rightarrow \models_{\mathfrak{B}}F[h\circ\varphi]$.

(i) bizonyítása t szerinti indukcióval történik, (ii) F prímformulára (i) következménye. A 8. §-ban a 8.2 tétel első felének bizonyításában a teljesség kedvéért vázoljuk (3. 1) induktív bizonyítását tetszőleges F-re. (i) egyébként csak más kifejezése annak az (univerzális) algebrából közismert ténynek, hogy „egy homomorfizmus az alapműveletekből definiált műveletekre nézve is műveletartó".

Ha h $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-be való homomorfizmusa és $rn(h)=|\mathfrak{B}|$, akkor azt mondjuk, hogy h $\mathfrak{A}$-nak *$\mathfrak{B}$-re* való homomorfizmusa és $\mathfrak{B}$ *homomorf képe* $\mathfrak{A}$-nak.

Tegyük fel, hogy h egy egy-egy értelmű leképezés az A halmazon. Ekkor beszélhetünk az $\mathfrak{A}$ struktúrának a leképezés *melletti* $\mathfrak{B}=h(\mathfrak{A})$ *képéről*, melyet úgy definiálunk, hogy

(i) $B = |\mathfrak{B}| = h(A)$;

(ii) $(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))\in P^{\mathfrak{B}} \Leftrightarrow (a_0, \ldots, a_{n-1})\in P^{\mathfrak{A}}$,

és (iii) $f^{\mathfrak{B}}(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})) = h(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}))$

álljon fenn. Ha az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúrák és a A-n értelmezett 1—1 értelmű h leképezés olyanok, hogy a most felírt (ii), (iii) feltételek teljesülnek, akkor azt mondjuk, hogy h *$\mathfrak{A}$-nak* egy *izomorfizmusa* $\mathfrak{B}$-be, és ha még (i) is teljesül, akkor h $\mathfrak{A}$-nak egy *izomorfizmusa $\mathfrak{B}$-re*, és $\mathfrak{B}$ *izomorf $\mathfrak{A}$-val* ($\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}$).

(3. 2) *Ha h $\mathfrak{A}$-nak egy izomorfizmusa $\mathfrak{B}$-re, F tetszőleges (véges vagy nem véges) μ-formula, φ egy $\mathfrak{A}$-beli értékelés, akkor*

$$\models_{\mathfrak{A}}F[\varphi] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}}F[h\circ\varphi].$$

$\mathfrak{B}$ *részstruktúrája* $\mathfrak{A}$-nak, illetve $\mathfrak{A}$ bővítése $\mathfrak{B}$-nek (jelben $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$), ha $B\subseteq A$, $P^{\mathfrak{B}} = P^{\mathfrak{A}}\cap B^n$ ($P\in\mu$ n-változós relációjel), $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}}\restriction B^n$ ($n\geqq 1$, $f\in\mu$ n-változós operációjel) és $c^{\mathfrak{B}}=c^{\mathfrak{A}}$ ($c\in\mu$ individuumjel). Ha h $\mathfrak{A}$-nak izomorfizmusa $\mathfrak{B}$-be, akkor $h(\mathfrak{A})\subset\mathfrak{B}$, amint az könnyen látható.

Ha B $A=|\mathfrak{A}|$-nak egy tetszőleges nem üres részhalmaza, úgy akkor és csak akkor létezik $\mathfrak{A}$-nak olyan részstruktúrája, melyre $|\mathfrak{B}|=B$, ha minden $n\geqq 0$ és $f\in\mu$ n-változós operációjelre, továbbá tetszőleges $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ elemekre $f^{\mathfrak{A}}(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in B$ (speciálisan $c^{\mathfrak{A}} \in B$, ha $c \in \mu$ individuumjel). Ha ilyen $\mathfrak{B}$ struktúra létezik, akkor nyilvánvalóan egyértelműen meghatározott; jelöljük ezt a struktúrát $\mathfrak{A}|B$-vel.

(3. 3) *Ha $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, φ a változóknak egy $\mathfrak{B}$-beli értékelése, t kifejezés és F prímformula, akkor*

(i) $t^{\mathfrak{B}}[\varphi] = t^{\mathfrak{A}}[\varphi]$

és

(ii) $\models_{\mathfrak{B}} F[\varphi] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} F[\varphi]$.

A bővítés fogalmának specializációja a következő fogalom, amely a halmazelméletben fordul elő (lásd pl. [7]). Legyen $E \in \mu$ rögzített kétváltozós relációjel. Írjunk $(a, b) \in E^{\mathfrak{B}}$ helyett $aE^{\mathfrak{B}}b$-t és Exy helyett xEy-t. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{B}$ *E-bővítése* $\mathfrak{A}$-nak, ha $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ és ha $b \in B$ és $a \in A$, továbbá $bE^{\mathfrak{B}}a$, akkor $b \in A$. Ha például $E^{\mathfrak{B}}$ $\mathfrak{B}$-nak egy lineáris rendezése, akkor az, hogy $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$-nak E-bővítése, azt jelenti, hogy $E^{\mathfrak{A}}$ kezdőszelete $E^{\mathfrak{B}}$-nek.

A következő tétel Tarski és Vaught [45] eredménye.

(3. 4) *Legyen D individuumjeleknek egy nem-üres halmaza, $D \subseteq \mu$, $\mathfrak{A}$ pedig μ típusú struktúra. Tegyük fel, hogy minden $\exists xF$ alakú μ feletti véges zárt formulához van olyan $d \in D$ individuumjel, melyre $\models_{\mathfrak{A}} \exists xF \to F(d/x)$. Ekkor, ha $B = \{d^{\mathfrak{A}} : d \in D\}$, akkor $\mathfrak{A}|B$ létezik és $\mathfrak{A}|B \equiv \mathfrak{A}$.*

Bizonyítás. Legyen f tetszőleges μ-beli operációjel, legyen f n-változós. Válasszuk B-ből a $d_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, d_n^{\mathfrak{A}}$ elemeket tetszőlegesen. Feltevésünk szerint van olyan $d \in D$ individuumjel, melyre $\models_{\mathfrak{A}} \exists xfd_1, \ldots, d_n \approx x \to fd_1, \ldots, d_n \approx d$. Mivel természetesen $\models_{\mathfrak{A}} \exists xfd_1, \ldots, d_n \approx x$, azért tehát, emellett a d mellett, $d^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(d_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, d_n^{\mathfrak{A}})$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy B zárt az $\mathfrak{A}$ alapoperációira nézve, tehát $\mathfrak{B} =_{df} \mathfrak{A}|B$ létezik. Most az F véges zárt μ-formula szerinti indukcióval bebizonyítjuk, hogy $\models_{\mathfrak{A}} F \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} F$.

Nyilvánvalóan elegendő olyan F formulákra szorítkozni, amelyekben csak $\neg$, $\wedge$ és $\exists$ fordulnak elő a logikai operátorok közül, hiszen, mint közismert, minden formula logikailag ekvivalens egy mondott tulajdonságú formulával.

Ha F prímformula, akkor állításunk (3.3)-ból következik. Ha $F = \neg G$, akkor

$$\begin{aligned} \models_{\mathfrak{A}} F &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} \neg G \\ &\Leftrightarrow \not\models_{\mathfrak{A}} G \\ &\Leftrightarrow \not\models_{\mathfrak{B}} G \quad \text{(az indukciós feltevés szerint)} \\ &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} F, \quad \text{amit be kellett látnunk.} \end{aligned}$$

Ha $F = G_1 \wedge G_2$, akkor

$$\begin{aligned} \models_{\mathfrak{A}} F &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} G_1 \text{ és } \models_{\mathfrak{A}} G_2 \\ &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} G_1 \text{ és } \models_{\mathfrak{B}} G_2 \quad \text{(az indukciós feltevés szerint)} \\ &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} F, \quad \text{amit be kellett látnunk.} \end{aligned}$$

Ha végül $F=\exists xG$, akkor

$$\begin{aligned}\models_{\mathfrak{B}}F &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}}G[d^{\mathfrak{A}}/x] && \text{valamely } d\in D\text{-re}\\ &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}}G(d/x) && \text{valamely } d\in D\text{-re (lásd (2.6))}\\ &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}}G(d/x) && \text{valamely } d\in D\text{-re}\\ & && \text{(az indukciós feltevés szerint).}\end{aligned}$$

Ha tehát $\models_{\mathfrak{B}}F$, akkor $\models_{\mathfrak{A}}G(d/x)$ valamely $d\in D$-re, tehát valóban $\models_{\mathfrak{A}}\exists xG$. Fordítva, tegyük fel, hogy $\models_{\mathfrak{A}}\exists xG$. Feltevésünk szerint van olyan d individuumjel, a D halmazban, melyre $\models_{\mathfrak{A}}\exists xG\rightarrow G(d/x)$. Ezért $\models_{\mathfrak{A}}G(d/x)$, amely az éppen levezetett ekvivalencia szerint azt jelenti, hogy $\models_{\mathfrak{B}}F$, q.e.d.

Ezzel állításunkat F szerinti indukcióval bebizonyítottuk és ezzel a lemmát beláttuk.

Most megfogalmazzuk a relativizáció (lásd 57. old.) szemantikai alaptulajdonságát.

(3. 5) *Legyen A egyváltozós relációjel, $A\in\mu$ és $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúra. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}|A^{\mathfrak{B}}$ létezik. Ekkor tetszőleges F zárt μ-formula mellett*

$$\models_{\mathfrak{A}}F\Leftrightarrow\models_{\mathfrak{B}}F^{(A)}.$$

Ha h $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való homomorfizmusa és $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$, akkor azt mondjuk, hogy h $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való *endomorfizmusa és $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$-nak endomorf képe.* Ha emellett még az is teljesül, hogy $h\restriction B$ az *identikus leképezés*, (azaz $h(b)=b$ $b\in B$ mellett), akkor azt mondjuk, hogy h $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való *retraktív leképezése* és $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$-nak egy *retraktja*. Retraktok például a *Boole* algebrák elméletében szerepelnek (lásd HALMOS [12]).

A homomorfizmus fogalmának egy másik specializációja az *erős homomorfizmus* fogalma. A h $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való homomorfizmusa *$\mathfrak{A}$-nak erős homomorfizmusa* $\mathfrak{B}$-re (és $\mathfrak{B}$ *$\mathfrak{A}$-nak erős homomorf képe*), ha még az is teljesül, hogy ha $(b_0,\dots,b_{n-1})\in P^{\mathfrak{B}}$ valamely $P\in\mu$ n-változós operációjel mellett, akkor vannak olyan $a_0,\dots,a_{n-1}\in A$ elemek, melyekre $h(a_i)=b_i$ $(i<n)$ és $(a_0,\dots,a_{n-1})\in P^{\mathfrak{A}}$. Másszóval, „$P^{\mathfrak{A}}$ h melletti képe megegyezik $P^{\mathfrak{B}}$-vel." Erős homomorfizmusok szerepelnek pl. a rendezett struktúrák elméletében.

Az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúrák $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$-vel jelölt *direkt szorzata* az a $\mathfrak{C}$ struktúra, melyre

(i) $C=|\mathfrak{C}|=A\times B$,

(ii) $((a_0,b_0),\dots,(a_{n-1},b_{n-1}))\in P^{\mathfrak{C}}\Leftrightarrow(a_0,\dots,a_{n-1})\in P^{\mathfrak{A}}$ és $(b_0,\dots,b_{n-1})\in P^{\mathfrak{B}}$

($P\in\mu$, P n-változós relációjel)

és (iii) $f^{\mathfrak{C}}((a_0,b_0),\dots,(a_{n-1},b_{n-1}))=(f^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}),f^{\mathfrak{B}}(b_0,\dots,b_{n-1}))$

($f\in\mu$, f n-változós operációjel).

Több struktúra direkt szorzatát a következőképpen definiáljuk.

Legyen $\langle \mathfrak{A}^{(i)}: i \in I \rangle$ struktúráknak egy indexezett sokasága I nem üres halmaz mellett. Az $\mathfrak{A}^{(i)}$ struktúrák $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}^{(i)}$ *direkt szorzatán* a következő $\mathfrak{C}$ struktúrát értjük:

(i) $|\mathfrak{C}| = \prod_{i \in I} |\mathfrak{A}^{(i)}|$;

(ii) $(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}) \in P^{\mathfrak{C}} \Leftrightarrow (\varphi_0(i), \ldots, \varphi_{n-1}(i)) \in P^{\mathfrak{A}^{(i)}}$

minden $i \in I$-re (tetszőleges $P \in \mu$ n-változós relációjel és

$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in \prod_{i \in I} |\mathfrak{A}^{(i)}|$ elemek mellett);

(iii) $f^{\mathfrak{C}}(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}) = \langle f^{\mathfrak{A}^{(i)}}(\varphi_0(i), \ldots, \varphi_{n-1}(i)): i \in I \rangle$

(tetszőleges $f \in \mu$ n-változós operációjel és $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in |\mathfrak{C}|$ elemek mellett).

Legyen R valamely μ típusú struktúrák közötti reláció (azaz dom $(R) \subseteq \mathfrak{S}(\mu)$, $rn(R) \subseteq \mathfrak{S}(\mu)$). Ekkor, ha K μ típusú struktúrák egy osztálya, $S_R(K)$-val fogjuk jelölni azon $\mathfrak{B}$ struktúrák osztályát, melyekre $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ (azaz $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \in R$) valamely $\mathfrak{A} \in K$ struktúra mellett. A II. és III. fejezetben speciális R relációkból képzett $S_R(K)$ műveletekkel foglalkozunk. A következő relációkat fogjuk tekinteni: „$\mathfrak{B}$ izomorf $\mathfrak{A}$ egy részstruktúrájával", „$\mathfrak{B}$ homomorf képe $\mathfrak{A}$-nak", „$\mathfrak{B}$ izomorf $\mathfrak{A}$ egy endomorf képével", „van $\mathfrak{A}$-nak egy $\mathfrak{B}$-vel izomorf retraktja", „$\mathfrak{B}$ erős homomorf képe $\mathfrak{A}$-nak", „$\mathfrak{B}$ izomorf $\mathfrak{A}$-nak egy E-kiterjesztésével", „$\mathfrak{B}$ direkt faktora $\mathfrak{A}$-nak" (azaz van olyan $\mathfrak{C}$, melyre $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$) „$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$"; jelöljük ezeket rendre $R_1, \ldots, R_8$-cal. Jelöljük $R_9, \ldots, R_{16}$-tal rendre $R_1, \ldots, R_8$ inverzét. $S_{R_1}(K)$ helyett Sub (K)-t, $S_{R_2}(K)$ helyett Hom (K)-t és $S_{R_9}(K)$ helyett Ext (K)-t fogunk írni. Sub (K) azon struktúrák osztálya, amelyek izomorfok valamely K-beli struktúra egy részstruktúrájával, Hom (K) K elemei összes homomorf képének osztálya és Ext (K) K elemei bővítéseinek osztálya. Az $R_1, \ldots, R_8$ relációk úgy vannak definiálva, hogy $S_{R_i}(K)$ mindig zárt izomorfizmusra.

A IV. fejezetben elsősorban a $P(K)$ struktúra-osztályokon végzett művelettel foglalkozunk. Jelentse $P(K)$ mindazon $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}^{(i)}$ direkt szorzatok osztályát, ahol I nem-üres halmaz és $\mathfrak{A}^{(i)} \in K$ minden $i \in I$-re.

Jelölje $Dp(K)$ a K elemeiből alkotható *direkt hatványok* osztályát, azaz az $\mathfrak{A}^{(I)} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}^{(i)}$ struktúrák osztályát, ahol I nem üres halmaz és minden $i \in I$-re $\mathfrak{A}^{(i)}$ K-nak *ugyanaz* a fix $\mathfrak{A}$ eleme.

II. fejezet. Pszeudoelemi osztályok

4. §. *Gyengén pszeudoelemi osztályok*

Ebben és a következő §-ban „formulán” mindig *véges* formulát értünk.

Legyen μ tetszőleges hasonlósági típus, Q egyváltozós relációjel μ-ben, $\mathfrak{A}$ μ típusú struktúra. Annak a feltétele, hogy $\mathfrak{A}$-nak létezzen olyan $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}|Q^{\mathfrak{A}}$ részstruktúrája, melyre $|\mathfrak{B}| = Q^{\mathfrak{A}}$ az, hogy $\mathfrak{A}$ modellje legyen $\Sigma^{(\mu)}$-nak, ahol

$$\Sigma^{(\mu)} = \{\exists v_0 Q v_0\} \cup \{\forall v_0 \ldots \forall v_{n-1}(Qv_0 \wedge \ldots \wedge Qv_{n-1}) \to$$
$$\to Qfv_0 \ldots v_{n-1}): 1 \leq n < \omega, f \in \mu, \varrho(f) = n\} \cup \{Qc: c \in \mu\}.$$

Ha $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma^{(\mu)})$, jelölje $\mathfrak{A} \parallel Q$ az $(\mathfrak{A}\,|\,Q^{\mathfrak{A}}) \restriction (\mu - \{Q\})$ struktúrát. Például, legyen $\mathfrak{A}$ a valós számok teste a racionális számok halmazával, mint kitüntetett részhalmazzal; $\mathfrak{A}$ típusa $\mu = \{Q, +, \cdot\}$, ahol Q egyváltozós relációjel és $Q^{\mathfrak{A}}$ a racionális számok halmaza. Ekkor $\mathfrak{A} \| Q$ típusa $\{+, \cdot\}$ és $\mathfrak{A} \| Q$ a racionális számok teste.

Mint látjuk, $\mathfrak{A} \| Q$ típusa $\mu - \{Q\}$, alaphalmaza pedig $Q^{\mathfrak{A}}$.

Legyen K μ típusú struktúrák egy tetszőleges osztálya. Jelöljük $K \| Q$-val az $\{\mathfrak{A} \| Q : \mathfrak{A} \in K \cap \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma^{(\mu)})\}$ osztályt. Azokat a K' osztályokat, amelyek $(K \| Q) \restriction \mu'$ alakúak, ahol $K \in PC_\Delta(\mu)$, $Q \in \mu$, Q egyváltozós relációjel és $\mu' \subseteq \mu - \{Q\}$, *gyengén pszeudoelemi, vagy* PC'_Δ osztályoknak nevezzük; jelben: $K' \in PC'_\Delta$, illetve $K' \in PC'_\Delta(\mu')$, ha K' elemeinek típusa μ'. A PC'_Δ jelölést VAUGHT vezette be a [46] dolgozatban.

Megjegyezzük, hogy minden PC_Δ osztály triviálisan egyben PC'_Δ osztály is (lásd 4. 2 korollárium).

TARSKI már 1952-ben észrevette, hogy ha $K \in PC_\Delta$, akkor $\mathrm{Hom}(K) \in PC'_\Delta$; a [44] dolgozatban utal ezen észrevételének egy alkalmazására. Ugyanebben a dolgozatban felveti azt a kérdést, hogy ez javítható-e PC'_Δ-nek PC_Δ-val való helyettesítésével. MALCEV [32] dolgozatában szintén említi (bizonyítás nélkül) a TARSKI által is észrevett tényt és felveti a kérdést, hogy PC'_Δ megegyezik-e PC_Δ-val. MALCEV azt is megjegyzi, hogy a válasz valószínűleg negatív. Ezen § célja annak bizonyítása, hogy MALCEV sejtésével szemben $PC'_\Delta = PC_\Delta$ valóban igaz (4. 2 Korollárium). Ezáltal TARSKI kérdésére is pozitív választ tudunk adni (4. 6 Korollárium).

4. 1. TÉTEL. *Legyen Q egyváltozós relációjel, $Q \in \mu$, legyen továbbá $K \in PC_\Delta(\mu)$. Ekkor $K \| Q \in PC_\Delta(\mu - \{Q\})$.*

Bizonyítás. (2. 12) értelmében feltehetjük, hogy $K = \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma) \restriction \mu$, ahol μ_1 valamely μ-nél nem szűkebb hasonlósági típus és $\Sigma = \{\forall(H): H \in \Sigma_0\}$ kvantormentes μ_1-formulák valamely Σ_0 halmaza mellett.

Első lépésként hozzárendelünk μ_1 minden szabad (lásd 57. old.) N prímformulájához egy $R^N \notin \mu_1$ relációjelet úgy, hogy R^N rangja N változóinak a száma, és különböző szabad N_1, N_2 prímformulákra R^{N_1} és R^{N_2} is különbözők. Legyen az így kapott R^N jelek halmaza μ_0 és legyen $\mu' = \mu \cup \mu_0$.

Most megadjuk a $\mu' \supseteq \mu$ hasonlósági típus zárt formuláinak egy olyan Σ' halmazát, amelyre igaz lesz, hogy

$$K \| Q = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma') \restriction (\mu - \{Q\}). \qquad (1)$$

Először definiáljuk μ_1 *nyílt* Ψ formuláira a $\overline{\Psi}$ μ'-formulát a következő rekurzív módon.

(i) Legyen Ψ prímformula. Ekkor (1. 8) szerint van egy egyértelműen meghatározott N szabad prímformula és egy, a N $v_0, \ldots, v_{n-1}$ változóin értelmezett, szintén egyértelműen meghatározott $\varphi = \{(v_i, x_i): i < n\}$ helyettesítés, melyre $\Psi = N\begin{pmatrix} x_0, \ldots, x_{n-1} \\ v_0, \ldots, v_{n-1} \end{pmatrix}$.

Ekkor legyen $\overline{\Psi} = R^N x_0 \ldots x_{n-1}$.

(ii) Ha $\Psi = \neg \Psi'$, ill. $\Psi = \bigwedge \Gamma$, ill. $\Psi = \bigvee \Gamma$, akkor legyen $\overline{\Psi} = \neg \overline{\Psi}'$, ill. $\overline{\Psi} = \bigwedge\{\overline{\Psi}': \Psi' \in \Gamma\}$, ill. $\overline{\Psi} = \bigwedge\{\overline{\Psi}': \Psi' \in \Gamma\}$.[8]

Megjegyezzük, hogy Ψ-ben és $\overline{\Psi}$-ban ugyanazok a változók fordulnak elő.

Legyen I_{μ_1} a μ_1 típushoz tartozó nyílt egyenlőségi axiómák halmaza (lásd 1. fejezet 62. oldal). Legyen $\Sigma_0' = \Sigma_0 \cup I_{\mu_1}$. Most tekintsük azokat a formulákat, amelyek Σ_0' elemeiből úgy keletkeznek, hogy a változók helyébe tetszőleges módon μ_1 feletti kifejezéseket helyettesítünk. Legyen az így kapott formulák halmaza Σ_0'' és legyen Σ_1 a $\{\forall(\overline{\Psi}): \Psi \in \Sigma_0''\}$ zárt μ'-formulákból álló halmaz.

Másrészt tetszőleges t μ_1-kifejezéshez legyen E_t a $\forall(\overline{Q(t)} \to \exists x \ \overline{x \approx t})$ formula, ahol x egy t-ben elő nem forduló változó, és legyen $\Sigma_2 = \{E_t : t \ \mu_1\text{-kifejezés}\}$.

Harmadszor, legyen Σ_3 a $\forall(F \leftrightarrow \overline{F})$ formulák halmaza, ahol F μ feletti prímformula.

Ezekután Σ' definíciója: $\Sigma' = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \{\forall v_0 Q v_0\}$. (1) bizonyítása két részből fog állni (I, II).

I. $K \| Q \subseteqq \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma') \restriction (\mu - \{Q\})$ *bizonyítása.*

Legyen $\mathfrak{A}_0 \in K \| Q$, azaz valamely $\mathfrak{A}$-ra, $\mathfrak{B}_1$-re és $\mathfrak{B}$-re

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \restriction (\mu - \{Q\}) \tag{2}$$

$$\mathfrak{B}_1 \in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma) \tag{3}$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \restriction \mu \tag{4}$$

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \tag{5}$$

$$A =_{df} |\mathfrak{A}| = Q^{\mathfrak{B}} = Q^{\mathfrak{A}}. \tag{6}$$

Definiáljuk az $\mathfrak{A}'$ μ' típusú struktúrát a következőképpen. Legyen

$$\mathfrak{A}' \restriction \mu = \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Továbbá, tetszőleges N szabad, μ_1 feletti prímformula esetén legyen

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in (R^N)^{\mathfrak{A}'} \text{ akkor és csak akkor ha}$$

$$\mathfrak{B}_1 \models N\begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{n-1} \\ v_0, \ldots, v_{n-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

tetszőleges $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ elemekre; itt $n = \varrho(R^N)$.

[8] Szemléletesebben azt is mondhattuk volna, hogy általánosan Ψ esetében $\overline{\Psi}$-t úgy kapjuk meg, hogy Ψ minden Ψ' prímformuláját $\overline{\Psi}'$-vel pótoljuk.

Célunk az, hogy belássuk

$$\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma') \tag{9}$$

(8)-nak és $\overline{\Psi}$ definíciójának következménye, hogy tetszőleges Ψ nyílt μ_1-formula és $a_0, \dots, a_{k-1} \in A$ elemek esetén

$$\mathfrak{A}' \models \overline{\Psi}\begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{k-1} \\ x_0, \dots, x_{k-1} \end{bmatrix} \text{ akkor és csak akkor, ha } \mathfrak{B}_1 \models \Psi \begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{k-1} \\ x_0, \dots, x_{k-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

(itt Ψ összes változói a különböző $x_0, \dots, x_{k-1}$ változók között vannak). Valóban, ha Ψ prímformula, akkor $\Psi = N\begin{pmatrix} y_0, \dots, y_{n-1} \\ v_0, \dots, v_{n-1} \end{pmatrix}$ valamely N szabad prímformulára. Továbbá $y_i = x_{j_i}$ valamely $j_i < k$-ra, minden $i < n$ mellett. $\overline{\Psi} = R^N y_0 \dots y_{n-1}$, $\overline{\Psi}$ definíciója szerint, és így:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}' \models \overline{\Psi}\begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{k-1} \\ x_0, \dots, x_{k-1} \end{bmatrix} &\Leftrightarrow (a_{j_0}, \dots, a_{j_{n-1}}) \in (R^N)^{\mathfrak{A}'} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \models N \begin{bmatrix} a_{j_0}, \dots, a_{j_{n-1}} \\ v_0, \dots, v_{n-1} \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \models N \begin{pmatrix} x_{j_0}, \dots, x_{j_{n-1}} \\ v_0, \dots, v_{n-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{j_0}, \dots, a_{j_{n-1}} \\ x_{j_0}, \dots, x_{j_{n-1}} \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \models \Psi \begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{k-1} \\ x_0, \dots, x_{k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tetszőleges nyílt Ψ μ_1-formulára (10) nyilván következik a letárgyalt esetből és $\overline{\Psi}$ definíciójának (ii) pontjából, Ψ szerinti indukcióval.

Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{B}_1 \models \forall(F)$, ha $F \in I_{\mu_1}$. Ezért, és (3) miatt, $\mathfrak{B}_1 \models \forall(F)$ tetszőleges $F \in \Sigma_0'$-re. Tehát (10) alapján $\mathfrak{A}' \models \forall(\overline{F})$ minden $F \in \Sigma_0'$-ra, azaz $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma_1)$.

Legyen t tetszőleges μ_1-kifejezés és tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}' \models \overline{Qt}\begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{m-1} \\ x_0, \dots, x_{m-1} \end{bmatrix}$. (10)-ből következik, hogy $\mathfrak{B}_1 \models Qt \begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{m-1} \\ x_0, \dots, x_{m-1} \end{bmatrix}$, azaz $a \in Q^{\mathfrak{B}_1} = Q^{\mathfrak{B}} = A$, ahol $a = t^{\mathfrak{B}_1}\begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{m-1} \\ x_0, \dots, x_{m-1} \end{bmatrix}$. Nyilvánvalóan, $\mathfrak{B}_1 \models (x \approx t)\begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{m-1}, a \\ x_0, \dots, x_{m-1}, x \end{bmatrix}$ (ahol x egy az $x_0, \dots, x_{m-1}$ változók között elő nem forduló változó) és így, ismét (10) alapján,

$$\mathfrak{A}' \models \overline{x \approx t}\begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{m-1}, a \\ x_0, \dots, x_{m-1}, x \end{bmatrix}$$

(itt felhasználjuk, hogy $a \in A$), és végül

$$\mathfrak{A}' \models \exists x\, \overline{x \approx t}\begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{m-1} \\ x_0, \dots, x_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathfrak{A}' \models E_t$ és így

$$\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma_2).$$

Most legyen F μ feletti prímformula, φ pedig a változóknak egy $\mathfrak{A}$-beli értékelése. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}' \models \bar{F}[\varphi] &\underset{(10)}{\leftrightarrow} \mathfrak{B}_1 \models F[\varphi]\\ &\underset{(4)}{\leftrightarrow} \mathfrak{B} \models F[\varphi]\\ &\underset{(5)}{\leftrightarrow} \mathfrak{A} \models F[\varphi]\\ &\underset{(7)}{\leftrightarrow} \mathfrak{A}' \models F[\varphi].\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy $\mathfrak{A}' \models \forall(F \leftrightarrow \bar{F})$ tetszőleges μ feletti F prímformulára, azaz $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma_3)$.

Végül (5)-ből következik, hogy $\mathfrak{A} \models \forall v_0 Q v_0$.

Összefoglalva, mivel $\Sigma' = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \{\forall v_0 Q v_0\}$, (9) bizonyítást nyert. Ebből, (7)-ből és (2)-ből következik, hogy $\mathfrak{A}_0 \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma') \upharpoonright (\mu - \{Q\})$, q.e.d.

II. $\mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma') \upharpoonright (\mu - \{Q\}) \subseteq K \| Q$ *bizonyítása.*

Válasszunk a bizonyítandó inklúzió bal oldalán álló osztályból egy tetszőleges $\mathfrak{A}_0$ struktúrát. Ekkor van olyan $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma')$ modell, hogy $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}' \upharpoonright (\mu - \{Q\})$. Legyen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \upharpoonright \mu$.

Rendeljünk $A =_{df} |\mathfrak{A}|$ minden a eleméhez egy $\bar{a}$ individuumjelet úgy, hogy $\bar{a} \notin \mu_1$, ha $a \in A$ és $\bar{a}_1 \neq \bar{a}_2$, ha $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. Legyen $\mu_2 = \mu_1 \cup \{\bar{a} : a \in A\}$ és legyen C a zárt μ_2-kifejezések halmaza.

Legyenek $c_0, \ldots, c_{n-1}$ C tetszőleges rögzített elemei. Tekintsük a következő $t_0, \ldots, t_{n-1}$-re és φ-re vonatkozó feltételeket:

(i) t_i μ_1-kifejezés minden $i < n$-re,

(ii) φ a változók valamely, az $\bigcup_{i<n} \mathrm{var}(t_i)$ halmazt tartalmazó halmazának egy $\mathfrak{A}$-beli értékelése,

(iii) $c_i = t_i(\bar{\varphi})$ minden $i < n$-re, ahol $\bar{\varphi}$ az a függvény, melyre $\mathrm{dom}(\bar{\varphi}) = \mathrm{dom}(\varphi)$ és $\bar{\varphi}(x) = \overline{\varphi(x)}$ $(x \in \mathrm{dom}(\varphi))$.

LEMMA. *Legyen Φ valamely μ_1 feletti prímformula, amelynek változói a különböző $y_0, \ldots, y_{n-1}$ változók között vannak, és tegyük fel, hogy $t_0, \ldots, t_{n-1}$ és φ, ill. $t'_0, \ldots, t'_{n-1}$ és φ' egyaránt kielégítik az* (i)—(iii) *feltételeket. Ekkor*

$$\mathfrak{A}' \models \overline{\Phi\begin{pmatrix} t_0, \ldots, t_{n-1} \\ y_0, \ldots, y_{n-1}\end{pmatrix}}[\varphi] \leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \overline{\Phi\begin{pmatrix} t'_0, \ldots, t'_{n-1} \\ y_0, \ldots, y_{n-1}\end{pmatrix}}[\varphi'].$$

A lemma bizonyítása. Legyen $\Psi = \Phi\begin{pmatrix} t_0, \ldots, t_{n-1} \\ y_0, \ldots, y_{n-1}\end{pmatrix}$ és $\Psi' = \Phi\begin{pmatrix} t'_0, \ldots, t'_{n-1} \\ y_0, \ldots, y_{n-1}\end{pmatrix}$. Legyenek N és N' olyan szabad primformulák, továbbá α és α' olyan helyettesítések, melyekre $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{var}(N)$, $\mathrm{dom}(\alpha') = \mathrm{var}(N')$, $rn(\alpha)$ és $rn(\alpha')$ elemei változók és $\Psi = N(\alpha)$, $\Psi' = N(\alpha')$. Ekkor (iii) következtében $F =_{df} \Phi\begin{pmatrix} c_0, \ldots, c_{n-1} \\ y_0, \ldots, y_{n-1}\end{pmatrix} = \Psi(\bar{\varphi}) = N(\alpha)(\bar{\varphi}) = N(\bar{\varphi} \circ \alpha)$ (itt felhasználtuk (1.6)-t és (1.3)-t is). Hasonlóan kapjuk, hogy $F = N'(\bar{\varphi}' \circ \alpha')$. Ezek szerint $N(\bar{\varphi} \circ \alpha) = N'(\bar{\varphi}' \circ \alpha')$, és így, mivel a

$rn(\bar{\varphi}\circ\alpha)$, $rn(\bar{\varphi}'\circ\alpha')$ halmazok elemei μ_1-ben nem előforduló individuumjelek, (1.8) miatt $N=N'$ és $\bar{\varphi}\circ\alpha=\bar{\varphi}'\circ\alpha'$. Legyen $\mathrm{var}(N)=\{v_0, \ldots, v_{m-1}\}$, $x_j=\alpha(v_j)$ és $x'_j=\alpha'(v_j)\,(j<m)$. Legutóbb kapott egyenlőségünk szerint minden $j<m$-re

$$a_j =_{df} \varphi(x_j) = \varphi'(x'_j) \tag{11}$$

$\bar{\Psi}$ definíció szerint megegyezik $R^N x_0 \ldots x_{m-1}$-gyel, hasonlóképpen $\bar{\Psi}' = R^N x'_0 \ldots x'_{m-1}$. Tehát (11) alapján

$$\mathfrak{A}' \models \bar{\Psi}[\varphi] \Leftrightarrow (a_0, \ldots, a_{m-1}) \in (R^N)^{\mathfrak{A}'}$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \bar{\Psi}'[\varphi']$$

ami éppen a Lemma állítása.

Megjegyezzük, hogy adott $c_0, \ldots, c_{n-1} \in C$ elemek esetén mindig vannak olyan $t_0, \ldots, t_{n-1}$ kifejezések és olyan egy-egyértelmű φ függvény, hogy az (i)—(iii) feltételek teljesülnek. Legyenek ugyanis a különböző $a_0, \ldots, a_{m-1}$ elemek A mindazon a elemei, melyekre $\bar{a}$ előfordul t_i $(i<n)$ valamelyikében, legyen $\varphi = \{(v_j, a_j) : j < m\}$, és $t_i = c_i \begin{pmatrix} v_0, \ldots, v_{m-1} \\ \bar{a}_0, \ldots, a_{m-1} \end{pmatrix} (i<n)$. Ekkor $t_0, \ldots, t_{n-1}$ és φ nyilván kielégítik (i)—(iii)-t és φ egy-egyértelmű.

Most definiáljuk a $\mathfrak{C}$ μ_2 típusú pszeudostruktúrát a következő módon. Legyen $|\mathfrak{C}|=C$. Legyen továbbá $f^{\mathfrak{C}}(c_0, \ldots, c_{n-1}) = fc_0 \ldots c_{n-1}$, hacsak $f \in \mu_2$ n-változós operációjel, $c_0, \ldots, c_{n-1} \in C$ (beleértve azt is, hogy $f^{\mathfrak{C}}=f$, ha f individuumjel), $P^{\mathfrak{C}}=(\bar{P})^{\mathfrak{A}'}$ ha $P \in \mu_2$ (azaz $P \in \mu_1$) O-változós relációjel, és végül legyen

$$(c_0, \ldots, c_{n-1}) \in P^{\mathfrak{C}} \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \bar{P} t_0 \ldots t_{n-1}[\varphi] \tag{12}$$

ha $P \in \mu_1$ n-változós relációjel, $n \geqq 1$; vagy $P = \approx$, $n=2$ (amely esetben $\approx t_0 t_1$ természetesen $t_0 \approx t_1$-t jelenti), és ahol $t_0, \ldots, t_{n-1}$ olyan μ_1-kifejezések és φ olyan értékelés, hogy (i)—(iii) teljesülnek. A Lemma és az utána következő megjegyzés szerint a legutóbbi ekvivalencia $P^{\mathfrak{C}}$-t egyértelműen definiálja.

A t μ_1-kifejezés szerinti indukcióval triviálisan belátható, hogy

$$t^{\mathfrak{C}}[\varphi] = t(\varphi) \tag{13}$$

ha φ t változóin értelmezett $\mathfrak{C}$-beli értékelés.

Most legyen Φ μ_1 feletti nyílt formula, amelynek változói a különböző $y_0, \ldots, y_{n-1}$ változók között vannak, és legyenek $c_0, \ldots, c_{n-1}$ C tetszőleges elemei. Tegyük fel, hogy $t_0, \ldots, t_{n-1}$ és φ olyanok, hogy (i)—(iii) teljesülnek. Azt állítjuk, hogy

$$\mathfrak{C} \models \Phi \begin{bmatrix} c_0, \ldots, c_{n-1} \\ y_0, \ldots, y_{n-1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \Phi \begin{pmatrix} t_0, \ldots, t_{n-1} \\ y_0, \ldots, y_{n-1} \end{pmatrix} [\varphi]. \tag{14}$$

Az állítást elég megmutatni arra az esetre, ha Φ prímformula, az általános eset ugyanis ebből egy triviális indukcióval adódik. Ha $\Phi = P \in \mu_1$ O-változós relációjel, az állítás $\mathfrak{C}$ definíciójának egy része.

Legyen tehát $\Phi = Ps_0 \ldots s_{k-1}$, ahol $k \geqq 1$, $P \in \mu_1$ k-változós relációjel, vagy pedig $P = \approx$ és $k=2$. Tegyük fel először, hogy φ egy-egyértelmű. Legyen

$$c'_j = s_j \begin{pmatrix} c_0, \ldots, c_{n-1} \\ y_0, \ldots, y_{n-1} \end{pmatrix} \tag{15}$$

minden $j<k$-ra. Nyilván $c_j' \in C$. Legyen $r_j = c_j'((\bar{\varphi})^{-1})$ $j<k$-ra. Ekkor $c_j' = c_j'(\bar{\varphi} \circ (\bar{\varphi})^{-1}) = c_j'((\bar{\varphi})^{-1})(\bar{\varphi}) = r_j(\bar{\varphi})$ (lásd (I. 6), (I. 3)), azért világos, hogy k, $(c_0', \dots, c_{k-1}')$ $(r_0, \dots, r_{k-1})$ és φ kielégítik az (i)—(iii) feltételeket, rendre az ottani n, $(c_0, \dots, c_{n-1})$, $(t_0, \dots, t_{n-1})$ és φ helyett. Másrészt $c_i((\bar{\varphi}^{-1}) = t_i(\bar{\varphi})((\bar{\varphi})^{-1}) = t_i((\bar{\varphi})^{-1} \circ \bar{\varphi}) = t_i$, és így

$$r_j = s_j\begin{pmatrix} c_0, \dots, c_{n-1} \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{pmatrix}((\bar{\varphi})^{-1}) = s_j\begin{pmatrix} c_0((\bar{\varphi})^{-1}), \dots, c_{n-1}((\bar{\varphi})^{-1}) \\ y_0, \quad \dots, \quad y_{n-1} \end{pmatrix} = s_j\begin{pmatrix} t_0, \dots, t_{n-1} \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{pmatrix} \tag{16}$$

ha $j<k$. Így végül

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} \models \Phi\begin{bmatrix} c_0, \dots, c_{n-1} \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{bmatrix} &\underset{(13)}{\Leftrightarrow} \mathfrak{C} \models Ps_0 \dots s_{k-1}\begin{pmatrix} c_0, \dots, c_{n-1} \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{pmatrix} \\ &\underset{(15)}{\Leftrightarrow} (c_0', \dots, c_{k-1}') \in P^{\mathfrak{C}} \\ &\underset{(12)}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}' \models \overline{P}\overline{r_0} \dots \overline{r_{k-1}}[\varphi] \\ &\underset{(16)}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}' \models \overline{(Ps_0 \dots s_{k-1})\begin{pmatrix} t_0, \dots, t_{n-1} \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{pmatrix}}[\varphi] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \overline{\Phi\begin{pmatrix} t_0, \dots, t_{n-1} \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{pmatrix}}[\varphi], \end{aligned}$$

amit be akartunk látni.

Végül általános (azaz nem feltétlenül egy-egyértelmű) φ esetén válasszuk a $t_0', \dots, t_{n-1}'$ kifejezéseket és az egy-egyértelmű φ' függvényt úgy, hogy ezek kielégítsék az (i)—(iii) feltételeket az adott $c_0, \dots, c_{n-1} \in C$ elemekkel.

Ekkor $$\mathfrak{C} \models \Phi\begin{bmatrix} c_0, \dots, c_{n-1} \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \overline{\Phi\begin{pmatrix} t_0', \dots, t_{n-1}' \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{pmatrix}}[\varphi']$$

(14) már bizonyított esete szerint, másrészt

$$\mathfrak{A}' \models \overline{\Phi\begin{pmatrix} t_0, \dots, t_{n-1} \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{pmatrix}}[\varphi] \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \overline{\Phi\begin{pmatrix} t_0', \dots, t_{n-1}' \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{pmatrix}}[\varphi']$$

a Lemma szerint. A két legutóbbi ekvivalenciát összevetve, valóban (14)-t kapjuk.

Most tegyük fel, hogy $\Phi \in \Sigma_0'$, $\mathrm{var}(\Phi) \subseteq \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$, $c_0, \dots, c_{n-1} \in |\mathfrak{C}|$. Válaszszuk $t_0, \dots, t_{n-1}$-t és φ-t (i)—(iii)-nak megfelelően, és legyen $\Psi = \Phi\begin{pmatrix} t_0, \dots, t_{n-1} \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{pmatrix}$. Mivel Σ_1 definíciója szerint $\forall(\Psi) \in \Sigma_1 \subseteq \Sigma'$, azért $\mathfrak{A}' \models \forall(\Psi)$, tehát $\mathfrak{A}' \models \Psi[\varphi]$ és így (14) miatt $\mathfrak{C} \models \Phi\begin{bmatrix} c_0, \dots, c_{n-1} \\ y_0, \dots, y_{n-1} \end{bmatrix}$. Mivel ez tetszőleges $c_0, \dots, c_{n-1} \in C = |\mathfrak{C}|$ elemekre fennáll, $\mathfrak{C} \models \forall(\Phi)$ $\Sigma_0' = I_{\mu_1} \cup \Sigma_0$ tetszőleges elemére. Ebből következik egyrészt, hogy $\mathfrak{C}$ normális pszeudostruktúra, másrészt, hogy $\mathfrak{C}$ pszeudomodellje

$\Sigma = \{\forall(\Phi) : \Phi \in \Sigma_0\}$-nak. Ezért $\mathfrak{C}$ faktorstruktúrája, $\mathfrak{C}/\approx$, modellje Σ-nak, és így, ha $\mathfrak{B} = (\mathfrak{C}/\approx)\restriction\mu$, akkor

$$\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma)\restriction\mu = K \tag{17}$$

Legyen $[c]$ $\approx^{\mathfrak{C}}$-nek a $c \in C$ elemet tartalmazó ekvivalenciaosztálya. Legyen h az az $A = |\mathfrak{A}|$-n értelmezett függvény, melyre $h(a) = [\bar{a}]$ $(a \in A)$. Azt állítjuk, hogy h $\mathfrak{A}$-nak egy izomorfizmusa $\mathfrak{B}$-be. Legyen ugyanis F tetszőleges μ feletti prímformula, φ a változóknak egy $\mathfrak{A}$-beli értékelése. $\mathfrak{A}'$ modellje a

$$\forall(F \leftrightarrow \bar{F}) \in \Sigma_3 \subseteq \Sigma' \quad \text{formulának, és így}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}' \models F[\varphi] &\Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \bar{F}[\varphi] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{C} \models F[\bar{\varphi}] \\ &\underset{(14)}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \models F[[\bar{\varphi}]] \\ &\underset{(2.8)}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \models F[h \circ \varphi]\end{aligned}$$

(14)-t most a $c_i = \overline{\varphi(y_i)}$, $t_i = y_i$ szereposztás mellett alkalmaztuk; természetesen $[\bar{\varphi}](x) =_{df} [\overline{\varphi(x)}]$ és így $\bar{\varphi} = h \circ \varphi$. Ha a most levezetett ekvivalenciát a $v_0 \approx v_1$, $Pv_0, \ldots, v_{n-1}$, illetve $fv_0, \ldots, v_{n-1} \approx v_n$ prímformulákra alkalmazzuk, kapjuk, hogy h egy-egyértelmű, mindkét irányban relációtartó és művelettartó, azaz, hogy h valóban izomorfizmus.

Legyen az $\mathfrak{A}$ struktúrának a h leképezés melletti képe $\mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{B}$ és $A'' =_{df} |\mathfrak{A}''|$. Azt állítjuk, hogy $A'' = Q^{\mathfrak{B}}$. Mivel $\mathfrak{A} \models \forall v_0 Q v_0$, azért $\mathfrak{A}'' \models \forall v_0 Q v_0$ és így, mivel $\mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{B}$, $A'' = Q^{\mathfrak{A}''} \subseteq Q^{\mathfrak{B}}$.

Legyen fordítva $[b]$ tetszőleges eleme $Q^{\mathfrak{B}}$-nek, ahol $b \in C = |\mathfrak{C}|$. b felírható a következő alakban:

$$b = t\begin{pmatrix}\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1} \\ v_0, \ldots, v_{n-1}\end{pmatrix}$$

ahol t μ_1 feletti kifejezés és $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$. $[b] \in Q^{\mathfrak{B}}$ ekvivalens azzal, hogy $b \in Q^{\mathfrak{C}}$; ezt a feltevésünket további ekvivalens formában felírva azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{C} \models (Qt)\begin{bmatrix}\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1} \\ v_0, \ldots, v_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk (14)-t; most $c_i = \bar{a}_i$, $t_i = v_i$, $y_i = v_i$ $0 \leqq i < n$-re.
Ezért

$$\mathfrak{A}' \models Qt\begin{bmatrix}a_0, \ldots, a_{n-1} \\ v_0, \ldots, v_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathfrak{A}'$ kielégíti a $\forall(\overline{Qt} \to \exists x\, \overline{x \approx t}) \in \Sigma_2 \subseteq \Sigma'$ formulát, azért

$$\mathfrak{A}' \models \exists x\, \overline{x \approx t}\begin{bmatrix}a_0, \ldots, a_{n-1} \\ v_0, \ldots, v_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Legyen $a \in A$ olyan, hogy

$$\mathfrak{A}' \models \overline{x \approx t} \begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{n-1}, a \\ v_0, \ldots, v_{n-1}, x \end{bmatrix}.$$

Újból (14)-t alkalmazva,

$$\mathfrak{C} \models x \approx t \begin{bmatrix} \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}, \bar{a} \\ v_0, \ldots, v_{n-1}, x \end{bmatrix}.$$

Másszóval

$$\bar{a} \approx^{\mathfrak{C}} t^{\mathfrak{C}} \begin{bmatrix} \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1} \\ v_0, \ldots, v_{n-1} \end{bmatrix} = t \begin{pmatrix} \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1} \\ v_0, \ldots, v_{n-1} \end{pmatrix} = b$$

(itt alkalmaztuk (13)-t). Ezek szerint $[\bar{a}] = [b]$, azaz $[b] = h(a) \in A''$; ezzel beláttuk, hogy $Q^{\mathfrak{B}} \subseteq A''$ és így valóban $Q^{\mathfrak{B}} = A''$.

Összefoglalva, $\mathfrak{B} \in K$ (lásd (17)) és h $\mathfrak{A}$-nak egy izomorfizmusa $\mathfrak{B}$-be úgy, hogy $|\mathfrak{A}''| = Q^{\mathfrak{B}}$ ahol $\mathfrak{A}''$ $\mathfrak{A}$-nak h melletti képe. Nyilvánvaló, hogy létezik olyan $\mathfrak{B}'$ struktúra és $\mathfrak{B}'$-nek olyan h' $\mathfrak{B}$-re történő izomorfizmusa, melyekre $A \subset |\mathfrak{B}'|$ és $h = h' \restriction A$. Ekkor $\mathfrak{B}' \in K$ (mivel K zárt izomorfizmusra), $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}'|Q^{\mathfrak{B}'}$ és így $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}' \| Q$, azaz valóban $\mathfrak{A}_0 \in K \| Q$.

Ezek szerint az (1) egyenlőség bizonyítást nyert, amivel a tétel állítását igazoltuk.

4. 2 KOROLLÁRIUM $PC'_\Delta = PC_\Delta$.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $K \in PC_\Delta(\mu)$. Legyen Q egyváltozós relációjel úgy, hogy $Q \notin \mu$. Tekintsük azon $\mu' = \mu \cup \{Q\}$ típusú $\mathfrak{A}$ struktúrák K' osztályát, melyekre $\mathfrak{A} \models \forall v_0 Q v_0$ és $\mathfrak{A} \restriction \mu \in K$. $K' = K[\mu'] \cap \mathrm{Mod}_{\mu'}(\forall v_0 Q v_0)$ és így $K \in PC_\Delta$-ból következik, hogy $K' \in PC_\Delta$. A $K = K' \| Q$ egyenlőség K' definíciója alapján triviálisan igaz, ezért valóban $K \in PC'_\Delta$.

Tegyük fel most, hogy $K \in PC'_\Delta(\mu)$. A feltevés azt jelenti, hogy $K = (K' \| Q) \restriction \mu$, ahol $K' \in PC_\Delta(\mu')$, $\mu \subseteq \mu' - \{Q\}$, Q egyváltozós relációjel, $Q \in \mu'$ és Σ zárt μ'-formulák egy halmaza. A 4.1 Tétel szerint $K' \| Q \in PC_\Delta$ és így $K \in PC_\Delta$, q.e.d.

A 4. 2 Korolláriumot felhasználhatjuk annak bizonyítására, hogy egy pszeudoelemi osztályból különböző algebrai műveletekkel képzett osztályok pszeudoelemiek. A módszer minden esetben az, hogy kimutatjuk: az illető osztály PC'_Δ osztály, majd alkalmazzuk 4. 2-t.

4. 3. TÉTEL. *Ha $K \in PC_\Delta$, akkor az I. fej. 3. § végén definiált S_{R_i} műveletekkel képzett $K^{(i)} = S_{R_i}(K)$ $(i = 1, \ldots, 16)$ osztályok gyengén pszeudoelemiek.*

A tétel $i = 2$ esetét MALCEV [32] említi (bizonyítás nélkül). A tétel azonban lényegében triviális, és egyes esetei ilyen vagy olyan formában hosszabb idő óta ismertek. Mi igyekszünk a 16 különböző esetre minél egységesebb bizonyítást adni, azonban csak a direkt faktor esetét $(i = 7)$ fogjuk teljes részletességgel tárgyalni.

Legyen a μ hasonlósági típus olyan, hogy $K \in PC_\Delta(\mu)$. Minden i-re $(1 \leqq i \leqq 16)$ $K^{(i)}$ definíció szerint mindazon $\mathfrak{B}$ struktúrákból áll, melyekre van $\mathfrak{A} \in K$ úgy, hogy $\mathfrak{A} R_i \mathfrak{B}$. Elfelejtkezve most K-ról, magáról $R = R_i$-ről tetszőleges $i = 1, \ldots, 16$ esetén a következőket mondhatjuk.

4. 4. LEMMA *Megadhatók μ-nek μ', μ'' bővítései, a különböző A, B egyváltozós relációjelek, továbbá a $\Sigma^{(i)}$ zárt μ''-formulákból álló halmaz úgy, hogy $A, B \in \mu' - \mu$ $\mu' \subseteqq \mu''$ és $\mathfrak{A} R_i \mathfrak{B} \Leftrightarrow$ van $\mathfrak{D} \in \mathrm{Mod}_{\mu''}(\Sigma^{(i)})$ úgy, hogy $\mathfrak{A}_1 =_{df} (\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| A$, $\mathfrak{B}_1 =_{df} (\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| B$ léteznek és $\mathfrak{A}_1 \upharpoonright \mu \cong \mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}_1 \upharpoonright \mu \cong \mathfrak{B}$.*

Bizonyítás az $i=7$ esetre (most $\mathfrak{A} R_i \mathfrak{B} \Leftrightarrow$ van olyan $\mathfrak{C}$, melyre $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$).

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $\mu = \{f\}$ ahol f kétváltozós operációjel. Legyen $\mu' = \{f, A, B, C\}$ és $\mu'' = \mu' \cup \{g\}$ ahol A, B, C különböző egyváltozós relációjelek, g pedig kétváltozós operációjel. Legyen $\Sigma^{(7)}$ a következő formulákból álló halmaz:

$$\forall x \forall y((Bx \wedge Cy) \to Agxy),$$

$$\forall z \exists x \exists y(Az \to (z \approx gxy \wedge Bx \wedge Cy)),$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2((Bx_1 \wedge Bx_2 \wedge Cy_1 \wedge Cy_2) \to gfx_1x_2fy_1y_2 \approx fgx_1y_1gx_2y_2),$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2((Bx_1 \wedge Bx_2 \wedge Cy_1 \wedge Cy_2 \wedge (\neg x_1 \approx x_2 \vee \neg y_1 \approx y_2)) \to$$
$$\to \neg gx_1y_1 \approx gx_2y_2).$$

A formulák intuitív tartalma az, hogy „g izomorfizmusa $B \times C$-nek A-ra". Pontosabban, igaz a következő. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{D}$ μ'' típusú struktúra és $\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| A$, $\mathfrak{B}_1 = (\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| B$ léteznek (azaz, $A^{\mathfrak{D}} \neq 0$, $B^{\mathfrak{D}} \neq 0$). Legyen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \upharpoonright \mu$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \upharpoonright \mu$. Ekkor

$$(*) \begin{cases} \mathfrak{D} \in \mathrm{Mod}_{\mu''}(\Sigma^{(7)}) \Leftrightarrow \mathfrak{C} = (\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| C \upharpoonright \mu \\ \text{létezik és } \varphi =_{df} g^{\mathfrak{D}} \upharpoonright (B^{\mathfrak{D}} \times C^{\mathfrak{D}}) \ \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}\text{-nek } \mathfrak{A}\text{-ra történő izomorfizmusa. Ez} \\ \text{az állítás rögtön világos } \Sigma^{(7)} \text{ definíciójából.} \end{cases}$$

Most lássuk be a lemma állítását.

Tegyük fel először, hogy $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$, azaz hogy van $\mathfrak{C}$ úgy, hogy $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \cong \mathfrak{A}$. Legyenek az $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ struktúrák izomorfok rendre $\mathfrak{A}$-val, $\mathfrak{B}$-vel, $\mathfrak{C}$-vel olyan módon, hogy $|\mathfrak{A}'|$, $|\mathfrak{B}'|$, $|\mathfrak{C}'|$ páronként diszjunktak. Feltevésünk szerint tehát van $\mathfrak{B}' \times \mathfrak{C}'$-nek egy $\mathfrak{A}'$-re történő φ izomorfizmusa. Definiáljuk a $\mathfrak{D}$ μ'' típusú struktúrát a következőképpen. Legyen

$$|\mathfrak{D}| = |\mathfrak{A}'| \cup |\mathfrak{B}'| \cup |\mathfrak{C}'|$$

$$A^{\mathfrak{D}} = |\mathfrak{A}'|$$

$$B^{\mathfrak{D}} = |\mathfrak{B}'|$$

$$C^{\mathfrak{D}} = |\mathfrak{C}'|.$$

Definiáljuk $f^{\mathfrak{D}}$-t olyan módon, hogy $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{D} \upharpoonright \mu$, $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{D} \upharpoonright \mu$, $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{D} \upharpoonright \mu$ fennálljon, $f^{\mathfrak{D}}$ választása egyébként tetszőleges lehet. Határozzuk meg végül $g^{\mathfrak{D}}$-t úgy, hogy $g^{\mathfrak{D}}$ kiterjesztése legyen φ-nek. $\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| A$, $\mathfrak{B}_1 = (\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| B$, $\mathfrak{C}_1 = (\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| C$ léteznek és $\mathfrak{A}_1 \upharpoonright \mu = \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}_1 \upharpoonright \mu = \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}_1 \upharpoonright \mu = \mathfrak{C}'$, tehát a $(*)$ ekvivalencia jobb oldala fennáll, így $\mathfrak{D} \in \mathrm{Mod}_{\mu''}(\Sigma^{(7)})$ azaz a lemmában állított ekvivalencia jobb oldala valóban igaz.

Másodszor tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúrák, $\mathfrak{D} \in \mathrm{Mod}_{\mu''}(\Sigma^{(7)})$, továbbá $((\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| A) \upharpoonright \mu$, $((\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| B) \upharpoonright \mu$ léteznek és izomorfak rendre $\mathfrak{A}$-val és $\mathfrak{B}$-vel. Ekkor a $(*)$ állítás szerint $\mathfrak{A}$ izomorf $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$-vel, $\mathfrak{C} = ((\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| C) \upharpoonright \mu$ mellett, azaz $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$.

4. 5. LEMMA. *Legyenek* μ, μ_1, μ', μ'' *hasonlósági típusok, A egyváltozós relációjel és* Σ_1 *zárt* μ_1*-formulák egy halmaza úgy, hogy* $\mu \subseteqq \mu_1$, $\mu \subseteqq \mu' \subseteqq \mu''$, $\mu'' \cap \mu_1 = \mu$ és $A \in \mu' - \mu$. *Ekkor van olyan* Δ $\mu'' \cup \mu_1$ *feletti zárt formulákból álló halmaz, hogy* $\mathrm{Mod}_{\mu'' \cup \mu_1}(\Delta) \upharpoonright \mu''$ *megegyezik azon* $\mathfrak{D}$ μ''*-típusú struktúrák osztályával, melyekre* $((\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| A) \upharpoonright \mu$ *létezik és eleme a* $\mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_1) \upharpoonright \mu$ *osztálynak.*

Bizonyítás. Legyen Δ a következő halmaz:

$$\Delta = \{\exists v_0 A v_0\}$$

$$\cup \{\forall ((\bigwedge_{i<\varrho(f)} A v_i) \to A f v_0 \ldots v_{\varrho(f)-1}) : f \in \mu' \cup \mu_1, f \text{ operációjel}\} \cup \{F^{(A)} : F \in \Sigma_1\}.$$

Az, hogy Δ kielégíti a követelményeket, (3. 5) alapján könnyen belátható.

4. 3. *Bizonyítása.* Tegyük fel, hogy $K = \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_1) \upharpoonright \mu$ A $\mu_1 - \mu$ halmazban levő jelek esetleges átjelölésével nyilvánvalóan elérhetjük, hogy $\mu_1 \cap \mu'' = \mu$ álljon fenn.

Tetszőleges $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúrára 4. 4 és 4. 5 felhasználásával a következő ekvivalenciákat állíthatjuk.

$$\mathfrak{B} \in K^{(i)}$$

$$\Leftrightarrow (\exists \mathfrak{A})[\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_1) \upharpoonright \mu \ \& \ \mathfrak{A} R \mathfrak{B}]$$

$$\Leftrightarrow (\exists \mathfrak{A}')[\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_1) \ \& \ (\mathfrak{A}' \upharpoonright \mu) R \mathfrak{B}]$$

$$\underset{(4.4)}{\Leftrightarrow} (\exists \mathfrak{D})(\exists \mathfrak{A}')[\mathfrak{D} \in \mathrm{Mod}_{\mu''}(\Sigma^{(i)}) \ \& \ \mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_1) \ \& \ ((\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| A) \upharpoonright \mu \simeq \mathfrak{A}' \upharpoonright \mu \ \&$$

$$\& \ ((\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| B) \upharpoonright \mu \simeq \mathfrak{B}]$$

$$\Leftrightarrow (\exists \mathfrak{D})[\mathfrak{D} \in \mathrm{Mod}_{\mu''}(\Sigma^{(i)}) \ \& \ ((\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| A) \upharpoonright \mu \in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_1) \upharpoonright \mu \ \& \ ((\mathfrak{D} \upharpoonright \mu') \| B) \upharpoonright \mu \simeq \mathfrak{B}]$$

$$\underset{(4.5)}{\Leftrightarrow} (\exists \mathfrak{D}')[\mathfrak{D}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'' \cup \mu_1}(\Sigma^{(i)} \cup \Delta) \ \& \ ((\mathfrak{D}' \upharpoonright \mu') \| B) \upharpoonright \mu \simeq \mathfrak{B}]$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \in ((\mathrm{Mod}_{\mu'' \cup \mu_1}(\Sigma^{(i)} \cup \Delta) \upharpoonright \mu') \| B) \upharpoonright \mu.$$

Ez azt bizonyítja, hogy $K^{(i)}$ egyenlő az utolsó ekvivalenciajel jobb oldalán szereplő osztállyal és így valóban $K^{(i)} \in PC'_\Delta$.

4. 6. KOROLLÁRIUM. *Ha* $K \in PC_\Delta$, *akkor* $S_{R_i}(K) \in PC_\Delta$ $i = 1, \ldots, 16$*-ra.*

Bizonyítás: 4. 3 és 4. 2.

1. MEGJEGYZÉS. A szerző [26] dolgozatában mutatott példát olyan $K \in EC$ osztályra, amelyre $K|Q \notin EC_\Delta$. Lyndon [25] megadott olyan $K \in EC$ osztályt, melyre Hom $(K) \notin EC_\Delta$.

2. MEGJEGYZÉS. A szerző [26]-ban bebizonyította, hogy, (i) ha $K \in PC$, akkor $(K \| Q)^\infty \in PC$ és ebből következően, (ii) ha $K \in PC$ akkor $(\mathrm{Hom}\,(K))^\infty \in PC$. Itt $(K)^\infty$ a K-ban levő végtelen struktúrák osztályát jelenti. A bizonyítás KLEENE [19], CRAIG és VAUGHT [5] egy tételének általánosításán keresztül történik. Hasonló módon látható be minden $i = 1, \ldots, 16$-ra, hogy ha $K \in PC$, akkor $(S_{R_i}(K))^\infty \in PC$.

Egy [26]-ban mutatott ellenpélda átalakításával könnyen lehet olyan $K \in EC$ osztályt konstruálni, amelyre (amellett, hogy $(K \| Q)^\infty \in PC$) $K \| Q \notin PC$. Bár a szerző nem rendelkezik példákkal, nagyon valószínű, hogy a $K \in EC \Rightarrow S_{R_i}(K) \in PC$ implikációk sem igazak.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] J. BARWISE: *Infinitary Logic and Admissible Sets*, Doctoral Dissertation, Stanford University, Stanford, 1967.

[2] P. BERNAYS, A. A. FRAENKEL: *Axiomatic Set Theory*, Amsterdam, 1958.

[3] J. R. BÜCHI, W. CRAIG: Notes on the family PC_Δ of sets of models, *J. Symbolic Logic*, **21** (1956) 222—223.

[4] W. CRAIG: Three uses of the Herbrand—Gentzen theorem in relating model theory and proof theory, *J. Symbolic Logic* **22** (1957), 269—285.

[5] W. CRAIG, R. L. VAUGHT: Finite axiomatizability using additional predicates. *J. Symbolic Logic*, **23** (1958), 289—308.

[6] S. FEFERMAN: Persistent and invariant formulas for outer extensions (megjelenés alatt).

[7] S. FEFERMAN, G. KREISEL: Persistent and invariant formulas relative to theories of higher order, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966), 480—485.

[8] S. FEFERMAN, R. L. VAUGHT: The first order properties of products of algebraic systems, *Fund. Math.* **4** (1959), 57—103.

[9] T. E. FRAYNE, A. C. MOREL, D. S. SCOTT: Reduced direct products, *Fund. Math.* **51** (1962), 195—228.

[10] E. G. FUHRKEN: Languages with added quantifier „there exist at least $\aleph_\alpha$". *The The ory of Models, Proceedings of the* 1963 *International Symposium at Berkeley, Amsterdam*, 1965. pp. 121—131.

[11] K. GÖDEL: *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, (fourth printing) Princeton, 1958.

[12] P. R. HALMOS: *Lectures on Boolean Algebras*, Princeton, 1963.

[13] L. A. HENKIN: Some interconnections between modern algebra and mathematical logic, *Trans Amer. Math. Soc.* **74** (1953), 410—427.

[14] L. A. HENKIN: Some remarks on infinitely long formulas. Infinitistic Methods, *Proceedings of the 1959 Symposium on Foundations of Mathematics at Warsaw*, Warsaw, 1961.

[15] C. R. KARP: *Languages with Expressions of Infinite Length*, Amsterdam, 1964.

[16] H. J. KEISLER: Theory of models with generalized atomic formulas, *J. Symbolic Logic* **25** (1960), 1—26.

[17] H. J. KEISLER: Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfields, *Michigan Math. J.* **11** (1964), 71—82.

[18] H. J. KEISLER: Some applications of infinitely long formulas, *J. Symbolic Logic* **30** (1965), 339—349.

[19] S. C. KLEENE: Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicates, *Memoires Amer. Math. Soc.* **10** (1952), 27—68.

[20] S. C. KLEENE: *Mathematical Logic*, New York—London—Sydney, 1967.

[21] S. KRIPKE: Transfinite recursion on admissible ordinals, I, II (abstracts), *J. Symbolic Logic*, **29** (1964), 161—162.

[22] C. KURATOWSKI: *Topologie I*, (2ieme ed.), Warszawa, 1948.

[23] E. G. K. LOPEZ—ESCOBAR: An interpolation theorem for denumerably long formulas, *Fund. Math.* **57** (1965), 253—272.

[24] J. ŁOŚ: On the extending of models (I), *Fund. Math.* **42** (1955), 38—54.

[25] R. C. LYNDON: Properties preserved under homomorphism, *Pacific J. Math.* **9** (1959), 143—154.

[26] M. MAKKAI: On PC_Δ-classes in the theory of models, *Publications Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **9**/A (1964), 159—194.

[27] M. MAKKAI: A compactness result concerning direct products of models, *Fund. Math.* **57** (1965), 313—325.

[28] M. MAKKAI: Results for denumerably long formulas with finite strings of quantifiers, (sajtó alatt) *J. Symbolic Logic*.

[29] M. MAKKAI: Preservation theorems for infinitary logic (kivonat), *Notices Amer. Math. Soc.* **15** (1968), 196.

[30] M. MAKKAI: Modeltheoretic results on infinitary sentences (kivonat), (megjelenés alatt) *Notices Amer. Math. Soc.* 1968.

[31] M. MAKKAI: A generalization of the interpolation theorem (kivonat), (megjelenés alatt) *Notices Amer. Math. Soc.* 1968.

[32] А. И. МАЛЬЦЕВ: Некоторые вопросы теории классов моделей. *Труды Четвертого Всесоюзного Математического Съезда*, Ленинград, 1963, I. том, 169—198.

[33] J. I. MALITZ: *Problems in the Model Theory of Infinite Languages*, Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley, 1965.
[34] E. MENDELSON: *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, 1964.
[35] M. D. MORLEY, R. L. VAUGHT: Homogeneous universal models, *Math. Scand.* **11** (1962), 37—57.
[36] R. PLATEK: *Foundations of Recursion Theory*, Doctoral Dissertation and Supplement, Stanford University, Stanford, 1966.
[37] A. ROBINSON: *On the Metamathematics of Algebra*, Amsterdam, 1951.
[38] A. ROBINSON: A result on consistency and its application to the theory of definition, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* **59** (Indag. Math. **18**) (1956), 47—58.
[39] D. S. SCOTT: Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers, *The Theory of Models, Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley*, Amsterdam, 1965, pp. 329—341.
[40] R. M. SMULLYAN: A unifying principle in quantification theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **49** (1963), 828—832.
[41] L. SVENONIUS: On the denumerable models of theories with extra predicates, *The Theory of Models, Proceeding of the 1963 International Symposium at Berkeley*, Amsterdam, 1965, pp. 376—389.
[42] A. TARSKI: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philosophica* **1** (1935), 261—405.
[43] A. TARSKI: Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics, *Proc. Internat. Congress Math., Cambridge Mass. U. S. A.*, 1950, vol. 1. Providence, 1952, 705—720.
[44] A. TARSKI: Contributions to the theory of models, I, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* **57** (Indag. Math. **16**) (1954), 572—588.
[45] A. TARSKI, R. L. VAUGHT: Arithmetical extensions of relational systems, *Compositio Math.* **13** (1957), 81—102.
[46] R. L. VAUGHT: The elementary character of two notions from general algebra, *Essays on the Foundations of Mathematics*, Jeruzsalem, 1961, 226—233.

ALGEBRAIC OPERATIONS ON CLASSES OF STRUCTURES AND THEIR CONNECTIONS WITH LOGICAL FORMULAS

by

M. MAKKAI

Summary

The main results of this paper have appeared in English in the papers [26], [27], [28] of the references.

PONTFOLYAMATOK RITKÍTÁSÁRÓL

Írta: MOGYORÓDI JÓZSEF és SZÁNTAI TAMÁS

1. E dolgozat célja új bizonyítást adni JU. K. BELJAJEV egy, a pontfolyamatok ritkításával kapcsolatos eredményére. BELJAJEV eredménye kifogástalan, bizonyítási eljárása azonban vázlatos. ([1]).

A pontfolyamatok ritkításával kapcsolatos kutatásokat TAKÁCS LAJOS és RÉNYI ALFRÉD kezdeményezték. Eredményeiket általánosították mértékelméleti irányban [4], továbbá másfajta ritkítási eljárások bevezetésével [5]. JU. K. BELJAJEV, a *Rényi*-féle ritkítás esetét tárgyalja, de a RÉNYI által alapul vett rekurrens folyamatnál általánosabb pontfolyamatokat vizsgál. Megjegyezzük még, hogy rekurrens folyamatokra alkalmazva a *Rényi-féle* ritkítási eljárást, eredmények születtek a *Poisson*-eloszláshoz való konvergencia gyorsaságával kapcsolatban is [7].

Tekintsünk valamilyen $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ véletlen pontfolyamatot a $(-\infty, \infty)$ számegyenesen: $t_{i+1} \geqq t_i$ és jelölje $\eta(\Delta)$ a $\Delta = (s, s')$ véges intervallumba eső pontok számát. Legyen $0 < \gamma < 1$ és definiáljuk az $\eta(\Delta)$ valószínűségi változón elvégzendő L_γ operációt a következő módon: a t_i pontok mindegyikét egymástól függetlenül γ valószínűséggel tartsuk meg és $1-\gamma$ valószínűséggel töröljük az eredeti pontfolyamatból. Az így nyert új pontfolyamat t_i' pontjai az eredeti pontfolyamatnak is pontjai, de eljárásunkkal az eredeti pontfolyamat egy ritkítását nyerjük. Jelölje $L_\gamma[\eta(\Delta)] = \eta_\gamma(\Delta)$ az új pontfolyamatban a Δ intervallumba eső pontok számát. Beljajev állítása a következő:

1. TÉTEL. *Ha minden véges intervallumra nézve egyenletesen teljesül, hogy* $|\Delta| \to +\infty$ *esetén* ($|\Delta|$ *a* Δ *intervallum hosszát jelöli) az*

$$\frac{\eta(\Delta)}{|\Delta|}$$

valószínűségi változó sztochasztikusan valamilyen $\xi \geqq 0$ *valószínűségi változóhoz konvergál,* $P(\xi < \lambda) = G(\lambda)$, *akkor* $\gamma \to 0$ *esetén az* $L_\gamma\left[\eta\left(\frac{\Delta}{\gamma}\right)\right]$ *valószínűségi változó eloszlása azon összetett Poisson-folyamat eloszlásához konvergál, amelynek paraméterének eloszlásfüggvénye* $G(\lambda)$.

Itt Δ/γ azt az intervallumot jelöli, amelyet az eredeti Δ intervallumból úgy nyerünk, hogy végpontjait az $1/\gamma$ számmal megszorozzuk.

Ez az állítás azt fejezi ki, hogy $\gamma \to 0$ esetén a ritkítás és a Δ intervallum $1/\gamma$-szorosra való megnyújtása eredményeként a megnyújtott intervallumba eső pontok száma határértékben összetett *Poisson*-eloszlású. A számegyenes Δ véges intervallumain értelmezett $\eta_0(\Delta)$ valószínűségi változót összetett *Poisson*-eloszlásúnak nevezzük, ha az egymástól idegen Δ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ intervallumok tetszőleges választása esetén $(m=1, 2, \ldots)$

$$P(\eta(\Delta_i) = k_i;\ i=1, 2, \ldots, m) = \prod_{i=1}^{m} \frac{|\Delta_i|^{k_i}}{k_i!} \int_{+0}^{\infty} \lambda^{\sum_{i=1}^{m} k_i} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{m} |\Delta_i|} dG(\lambda) +$$

$$+ G(+0)\delta(k_1, k_2, \ldots, k_m),$$

ahol $\delta(0, 0, \ldots, 0)=1$, $\delta(k_1, k_2, \ldots, k_m)=0$, ha $\sum_{i=1}^{m} k_i \neq 0$ és a k_i számok nemnegatív egészek. $G(\lambda)$ valószínűség-eloszlásfüggvény, amelyre $G(\lambda)=0$, ha $\lambda<0$.

BELJAJEV az 1. Tételben megfogalmazott állítást precízen bizonyítja abban az esetben, amikor a ξ valószínűségi változó 1 valószínűséggel állandó. Állításának az a része, amikor ξ nem állandó csak vázlatos bizonyítást nyert.

RÉNYI ALFRÉD [3] dolgozatában a rekurrens pontfolyamatok esetére tárgyalja az itt részletezett ritkítási eljárást. Bebizonyítja, hogy $\gamma\to 0$ esetén a ritkítás elvégzése után nyert új pontfolyamat két egymás után következő véletlen pontjának távolsága megfelelően normálva határértékben exponenciális eloszlású.

2. Az 1. Tétel bizonyításához szükséges a következő, önmagában is érdekes

1. LEMMA. *Ha $\xi_{ij\gamma}$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots$, $0<\gamma<1$, teljesen, független valószínűségi változók, $P(\xi_{ij\gamma}=1)=\gamma$, $P(\xi_{ij\gamma}=0) = 1-\gamma$; továbbá $N_{i\gamma}$, $i=1, 2, \ldots, m$, $0<\gamma<1$ a $\xi_{ij\gamma}$ változóktól független, nem negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változók, melyekre $\gamma\to 0$ esetén $\gamma\cdot N_{i\gamma}$, $i=1, 2, \ldots, m$, együttes eloszlása konvergál valamilyen $F(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ eloszlásfüggvényhez, akkor*

$$\lim_{\gamma\to 0} P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = k_i, i = 1, 2, \ldots, m\right\} = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \frac{a_i^{k_i} e^{-a_i}}{k_i!} dF(a_1, \ldots, a_m),$$

ahol az $\frac{a^k e^{-a}}{k!}$ tényező $a=0$ esetén definíció szerint eggyel, ill. nullával legyen egyenlő aszerint, hogy $k=0$ vagy $k\neq 0$.

Bizonyítás. Tekintsük a $[0, +\infty)$ félegyenes $\{a_i^{(p_i)}\}_{p_i=0}^{\infty}$, $i=1, 2, \ldots, m$, felosztásait, ahol $a_i^{(0)}=0$, $i=1, 2, \ldots, m$. Tegyük fel, hogy ezek a felosztások elég finomak, azaz, hogy egy adott $\varepsilon>0$ szám mellett minden i-re és p_i-re $a_i^{(p_i+1)}-a_i^{(p_i)} < \varepsilon$. Ekkor a teljes valószínűség tétele alapján:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i = 1, 2 \ldots, m\right\} = \tag{1}$$

$$= \sum_{p_1, \ldots p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = k_i, \left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ \sum_{j=\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]+1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = 0, i=1, \ldots, m\right\} +$$

$$+ \sum_{p_1, \ldots, p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = k_i, \left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1, \ldots, m,\ \text{és legalább egy } i\text{-re}\right.$$

$$\sum_{j=\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]+1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} \geqq 1\Bigg\} = \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\ldots,m\right\} P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq\right.$$

$$\left.\leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ \sum_{j=\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]+1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = 0,\ i=1,\ldots,m\right\} + \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} =\right.$$

$$\left.= k_i, \left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\ldots,m, \text{ és legalább egy } i\text{-re} \sum_{j=\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]+1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} \geqq 1\right\}.$$

Adjunk alkalmas alsó és felső becslést az (1) összefüggés jobb oldalára. A második szumma becslése a következő:

$$(2)\qquad 0 \leqq \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = k_i, \left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\ldots,m\right.$$

$$\left.\text{és legalább egy } i\text{-re} \sum_{j=\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]+1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} \geqq 1\right\} \leqq \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\ldots,m\right.$$

$$\left.\text{és legalább egy } i\text{-re} \sum_{j=\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]+1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} \geqq 1\right\} = \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq\right.$$

$$\left.\leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\ldots,m\right\} P\left\{\text{legalább egy } i\text{-re} \sum_{j=\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]+1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} \geqq 1\right\} \leqq$$

$$\leqq \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\ldots,m\right\} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} P\left\{\sum_{j=\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]+1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} \geqq 1\right\}\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\ldots,m\right\} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m}\left(\left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right] - \left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]\right)\cdot\gamma\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\ldots,m\right\} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} (a_i^{(p_i+1)} - a_i^{(p_i)}) + m\gamma\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\ldots,m\right\} \cdot m(\varepsilon+\gamma) = m(\varepsilon+\gamma)$$

Az alkalmazott egyenlőtlenségek helyessége könnyen ellenőrizhető, egy közbülső egyenlőtlenség a *Markov*-egyenlőtlenségből adódik.

Az (1) összefüggés jobb oldala első szummájának a becslése a következő:

$$\sum_{p_1,\dots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\dots,m\right\} P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} \leqq \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\dots,m\right\} \geqq$$

$$\geqq \sum_{p_1,\dots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\dots,m\right\} P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq\right.$$

$$\left.\leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ \sum_{j=\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]+1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = 0,\ i=1,\dots,m\right\} =$$

$$= \sum_{p_1,\dots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\dots,m\right\}\cdot\left[P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq\right.\right.$$

$$\left.\leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\dots,m\right\} - P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\dots,m\right.$$

$$\text{és legalább egy } i\text{-re} \left.\left.\sum_{j=\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} \geqq 1\right\}\right] \geqq \sum_{p_1,\dots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\dots,m\right\}\cdot$$

$$\cdot\left[P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\dots,m\right\} - P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq\right.\right.$$

$$\left.\left.\leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\dots,m\right\} m(\varepsilon+\gamma)\right] \geqq \sum_{p_1,\dots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\dots,m\right\}\cdot$$

$$\cdot P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\dots,m\right\}(1-m(\varepsilon+\gamma)). \tag{3}$$

Az alkalmazott egyenlőtlenségek helyessége itt is nyilvánvaló, egy közbülső egyenlőtlenség a (2)-ben elvégzett becsléssorozatból következik.

A (2) és (3) becsléseket összegezve,

$$P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\dots,m\right\}$$

becslésére az adódik, hogy:

$$\sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\ldots,m\right\} P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq\right.$$

$$\left.\leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\ldots,m\right\}(1-m(\varepsilon+\gamma)) \leqq P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\ldots,m\right\} \leqq$$

$$\leqq \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\ldots,m\right\}\cdot P\left\{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right] \leqq\right.$$

$$\left.\leqq N_{i\gamma} < \left[\frac{a_i^{(p_i+1)}}{\gamma}\right],\ i=1,\ldots,m\right\} + m(\varepsilon+\gamma). \tag{4}$$

Tudjuk, hogy $\gamma\to 0$ esetén

$$\lim_{\gamma\to 0} P\left\{\sum_{j=1}^{\left[\frac{a_i^{(p_i)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\ldots,m\right\} = \prod_{i=1}^{m} \frac{(a_i^{(p_i)})^{k_i}\cdot e^{-a_i^{(p_i)}}}{k_i!}. \tag{5}$$

Ha az üres szummának nulla értéket tulajdonítunk, akkor $a_i^{(0)}=0$ esetén

$$P\left\{\sum_{j=1}^{\left[\frac{a_i^{(0)}}{\gamma}\right]} \xi_{ij\gamma} = k_i\right\} = \begin{cases} 1, & \text{ha } k_i=0 \\ 0, & \text{ha } k_i\neq 0, \end{cases}$$

bármely $i=1, 2, \ldots, m$ érték mellett. Ezért, ha (5) jobb oldalán az $\frac{a^k e^{-a}}{k!}$ tényezőt $a=0$ esetén egynek, illetve nullának definiáljuk aszerint, hogy $k=0$ vagy $k\neq 0$, az (5) határátmenet akkor is igaz marad, ha a $p_1, \ldots, p_m$ számok között nulla is előfordul. Ha most a (4) összefüggést $\gamma\to 0$ mellett vizsgáljuk, akkor

$$\sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{(a_i^{(p_i)})^{k_i}\cdot e^{-a_i^{(p_i)}}}{k_i!}\cdot P\{a_i^{(p_i)} \leqq N_i < a_i^{(p_i+1)},\ i=1,\ldots,m\}(1-m\varepsilon) \leqq$$

$$\leqq \lim_{\gamma\to 0} \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\ P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = k_i,\ i=1,\ldots,m\right\} \leqq \tag{6}$$

$$\leqq \sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{(a_i^{(p_i)})^{k_i}\cdot e^{-a_i^{(p_i)}}}{k_i!} P\{a_i^{(p_i)} \leqq N_i < a_i^{(p_i+1)},\ i=1,\ldots,m\} + m\varepsilon,$$

ahol $\{N_i,\ i=1, \ldots, m\}$ egy olyan valószínűségi vektorváltozót jelöl, amelynek együttes eloszlása $F(a_1, \ldots, a_m)$. Ha most $\varepsilon\to 0$, és így a felosztások minden határon túl finomodnak, akkor a (6) egyenlőtlenség bal és jobb oldala a közös

$$\int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i^{k_i} e^{-a_i}}{k_i!} \, dF(a_1, \dots, a_m)$$

határértékhez konvergál, ami a Lemma állítását bizonyítja.

Megjegyzések. *a)* A Lemma feltételei mellett

$$\lim_{\gamma \to 0} P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = k_i, \ i = 1, 2, \dots, m\right\} = M\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{N_i^{k_i} e^{-N_i}}{k_i!}\right),$$

ahol $\{N_i, \ i=1, 2, \dots, m\}$ a bizonyításban definiált valószínűségi vektorváltozó.
b) Ha $N_i = c_i N$, ahol c_i pozitív állandó, $i = 1, 2, \dots, m$, akkor

$$\lim_{\gamma \to 0} P\left\{\sum_{j=1}^{N_{i\gamma}} \xi_{ij\gamma} = k_i, \ i = 1, 2, \dots, m\right\} = M\left(N^{\sum_{i=1}^{m} k_i} e^{-N \sum_{i=1}^{m} c_i} \prod_{i=1}^{m} c_i^{k_i} \Big/ k_i!\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{c_i^{k_i}}{k_i!} \int_0^{+\infty} x^{\sum_{i=1}^{m} k_i} e^{-x \sum_{i=1}^{m} c_i} \, dG(x) + \delta(k_1, k_2, \dots, k_m) G(+0),$$

ahol $G(x)$ az N változó eloszlásfüggvénye.

3. Áttérünk az 1. TÉTEL bizonyítására. Tekintsünk m számú, egymástól idegen $\Delta_i = (s_i, s_i')$, $s_i' - s_i = l_i$, $i = 1, 2, \dots, m$; $m = 1, 2, \dots$, intervallumot és legyen $\Delta_i/\gamma = (s_i/\gamma, s_i'/\gamma)$. Az 1. Tétel feltételéből következik, hogy $\gamma \to 0$ esetén

$$P\left(\left|\gamma \eta\left(\frac{\Delta_i}{\gamma}\right) - l_i \xi\right| > \varepsilon\right) \to 0. \tag{7}$$

Jelölje az eredeti pontfolyamatban a Δ_i/γ intervallumba eső j-edik pontot t_{ij} és legyen $\xi_{ij\gamma} = 1$, ha a γ számmal jellemzett ritkítási eljárás során a t_{ij} pontot megtartjuk és legyen $\xi_{ij\gamma} = 0$, ha a t_{ij} pontot kihagyjuk. Nyilvánvaló, hogy a $\xi_{ij\gamma}$ valószínűségi változók i és j minden lehetséges értéke esetén egymástól teljesen függetlenek, sőt teljesen függetlenek az $\eta(\Delta_i/\gamma)$ valószínűségi változóktól is. Jelöléseinket használva írható, hogy

$$\eta_\gamma\left(\frac{\Delta_i}{\gamma}\right) = \sum_{j=1}^{\eta(\Delta_i/\gamma)} \xi_{ij\gamma}.$$

Az 1. Lemmában szereplő $N_{i\gamma}$, ill. N_i valószínűségi változók legyenek most $\eta(\Delta_i/\gamma)$, ill. $l_i \xi$. (7) és az utána következő meggondolások alapján a Lemma összes feltételei teljesülnek. Alkalmazva az 1. Lemmához fűzött *b)* megjegyzést, kapjuk tételünk állítását.

Megjegyzés. *c)* JU. K. BELJAJEV, miután matematikailag kifogástalanul bebizonyította a tétel állítását állandó pozitív ξ érték esetén, az alábbi vázlatos gondolatmenetet alkalmazta:

Olyan feltétel mellett, hogy $\xi = \lambda$, majdnem minden λ esetén alkalmazható a ξ = állandó esetére bebizonyított állítás. Ezért a $\xi = \lambda$ feltétel mellett az $\eta_\gamma(\Delta/\gamma)$

valószínűségi változóra teljesül, hogy eloszlásban a $\lambda|\Delta|$ paraméterű *Poisson*-folyamathoz konvergál. Integrálva ezt a limeszrelációt a λ paraméter $G(\lambda)$ eloszlása szerint, nyerjük a tétel állítását az általános esetben. A legutolsó lépés lehetőségét éppen a 2. pontban leírt 1. Lemma igazolja.

BELJAJEV módszerével ellentétben, az 1. Tételben egy lépésben végezzük el a bizonyítást.

4. A rekurrens folyamatok ritkítására JU. K. BELJAJEV bevezetett egy másik eljárást is, amely valamilyen egy készülékből álló (egycsatornás) tömegkiszolgáló rendszerben elutasított igények alapján van meghatározva. Az erre a ritkítási eljárásra vonatkozó határeloszlástétel bizonyítása megtalálható az [1] dolgozatban. E pontban azt kívánjuk megmutatni, hogy a bizonyítás egy nem részletezett megjegyzése hogyan látható be precízen.

A szóban forgó ritkítási eljárás a következő: tekintsünk valamilyen egycsatornás elutasítással működő tömegkiszolgáló rendszert, amelyhez az igények rekurrens pontfolyamat szerint érkeznek. A szomszédos igények beérkezési időpontjai közötti távolságok eloszlásfüggvénye legyen $F(x)$; $\int_0^{+\infty} x dF(x) = \frac{1}{\lambda}$, $0<\lambda< +\infty$, $F(+0) = 0$. Jelölje $\eta(\Delta)$ a $\Delta=(s, s')$ véges intervallumban fellépő igények számát. Ha az igény beérkezésének t_i időpontjában a kiszolgáló készülék szabad, akkor az igény kiszolgálása megkezdődik és τ_i ideig tart. Tegyük fel, hogy a τ_i mennyiségek teljesen független, azonos $G_\gamma(x)=G\left(\frac{x}{\gamma}\right)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók, ahol $G(x)$ valamilyen nem-negatív valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ha a t_i időpontban a kiszolgáló készülék egy korábban beérkezett igény kiszolgálásával van elfoglalva, akkor az újabban fellépő igényt elutasítja a rendszer. Az elutasított igények folyamatát tekinthetjük úgy, mint a beérkező folyamat ritkítását. Jelölje $\eta_\gamma(\Delta) = L_\gamma^{(1)}[\eta(\Delta)]$ az elutasított igények folyamatában a Δ intervallumba eső igények számát. Jelölje $H(t)$ a $(0, t)$ intervallumban a bemenethez érkező igények átlagos számát és tegyük fel, hogy a kezdő pillanatban igény lép fel.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$F_{1\gamma} = \int_0^{+\infty} F(x)\, dG_\gamma(x) = \int_0^{+\infty} F(\gamma x)\, dG(x),$$

$$F_2(t) = \int_0^t F(t-x)\, dF(x),$$

$$F_{2\gamma} = \int_0^{+\infty} F_2(x)\, dG_\gamma(x) = \int_0^{+\infty} F_2(\gamma x)\, dG(x),$$

$$H_\gamma = \int_0^{+\infty} H(x)\, dG_\gamma(x) = \int_0^{+\infty} H(\gamma x)\, dG(x).$$

BELJAJEV a következőt bizonyítja:

2. TÉTEL. *Ha a fent meghatározott, egy készülékből álló, elutasítással működő tömegkiszolgáló rendszerre teljesül az*

$$\frac{F_{2\gamma}}{F_{1\gamma}} \to 0, \quad \textit{midőn} \quad \gamma \to 0,$$

vagy a sokkal erősebb

$$\frac{H_\gamma}{F_{1\gamma}} \to 1, \quad \textit{midőn} \quad \gamma \to 0$$

feltétel, akkor az elutasítások folyamatában az $L_\gamma^{(1)}\left[\eta\left(\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}}\right)\right]$ *valószínűségi változó eloszlása az egységnyi paraméterű Poisson-folyamat eloszlásához konvergál.*

Itt $\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}}$ azt az intervallumot jelöli, amelyet az eredetiből úgy nyerünk, hogy végpontjait az $\frac{1}{\lambda F_{1\gamma}}$ számmal megszorozzuk.

Ha az erősebb feltétel teljesül, akkor ezen kívül az is fennáll, hogy

$$M\left[\eta_\gamma\left(\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}}\right)\right] \to |\Delta|, \quad \text{ha} \quad \gamma \to 0.$$

A tétel bizonyításánál BELJAJEV bevezette a $\nu(\tau_i)$ valószínűségi változókat, amelyek a τ_i kiszolgálási, ill. foglaltsági intervallumban beérkező, és így elutasítást nyerő igények számát jelölik. Jelölje $N_\gamma(\Delta)$ a Δ időtartam alatt elkezdődő és teljesen befejeződő foglaltsági intervallumok számát.

A bizonyítás során szükség van a következő állításra:

$$(8) \qquad F_{1\gamma}N_\gamma\left(\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}}\right) \to |\Delta| \quad \text{sztochasztikusan, ha} \quad \gamma \to 0.$$

Ez az állítás szemléletesen nyilvánvaló. Ugyanis $N_\gamma\left(\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}}\right)$ felfogható azon pontfolyamat $\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}}$ intervallumba eső történéseinek számaként, amelyet a beérkezési rekurrens folyamatból nyerünk, ha sorban haladva az egyes pontokon, mindig csak a $(\nu(\tau_i)+1)$-edik pontot hagyjuk meg. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\nu(\tau_i)$ változók teljesen függetlenek és $M(\nu(\tau_i)) \to 0$, ha $\gamma \to 0$. Ily módon várható, hogy elég kicsi γ érték mellett $N_\gamma\left(\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}}\right)$ körülbelül azt adja meg, hogy az eredeti rekurrens folyamatnak hány történése esik a $\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}}$ intervallumba. Ez utóbbi valószínűségi változót a rekurrens folyamatok elméletében $N_{\frac{\Delta}{\gamma F_{1\gamma}}}$-val jelölik. Ismeretes, hogy ezen elmélet alapján

$$N_{\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}}} \Big/ \frac{|\Delta|}{\lambda F_{1\gamma}} \to \lambda \qquad \left(\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}} \to +\infty\right)$$

sztochasztikusan, azaz

$$F_{1\gamma} \cdot N_{\frac{\Delta}{\lambda F_{1\gamma}}} \to |\Delta|$$

sztochasztikusan, ha $\gamma \to 0$. A (8) állítás bizonyításához azonban szükséges a következő

2. LEMMA. *Tekintsünk valamely* $\{t_i\}_{i=0}^{+\infty}$, $t_{i+1} \geqq t_i$, *rekurrens pontfolyamatot a* $[0, +\infty)$ *félegyenesen, amelyre* $\xi_i = t_i - t_{i-1}$, $(i=1, 2, \ldots)$, $P(\xi_i < x) = F(x)$, $\int_0^{+\infty} x dF(x) = \mu < +\infty$, $F(+0) = 0$. *Legyen adott minden* $0 < t < +\infty$ *mellett olyan pozitív egész értékeket felvevő, egymástól független azonos eloszlású* $\{\nu_t^j\}_{j=1}^{+\infty}$ *valószínűségi változókból álló sorozat, amelyre* $M(\nu_t^j) \to 1$, *ha* $t \to +\infty$. *Jelölje* N_t *azon pontfolyamat* $(0, t)$ *intervallumba eső történéseinek a számát, amelyet az eredeti* $\{t_i\}_{i=0}^{+\infty}$ *rekurrens folyamatból úgy nyerünk, hogy csak a* $t_0, t_{\nu_t^1}, t_{\nu_t^1+\nu_t^2}, \ldots, t_{\sum_{j=1}^{k} \nu_t^j}, \ldots$ *időpontbeli történéseket hagyjuk meg. Ekkor a* N_t/t *valószínűségi változó* $t \to +\infty$ *esetén sztochasztikusan az* $1/\mu$ *számhoz konvergál.*

Bizonyítás. Induljunk ki a nyilvánvaló

$$\{N_t \geqq n\} = \left\{t_{\sum_{j=1}^{n} \nu_t^j} \leqq t\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{\sum_{j=1}^{n} \nu_t^j} \xi_i \leqq t\right\} = \left\{\frac{\sum_{i=1}^{\sum_{j=1}^{n} \nu_t^j} \xi_i}{\sum_{j=1}^{n} \nu_t^j} \leqq \frac{t}{\sum_{j=1}^{n} \nu_t^j}\right\} \tag{9}$$

azonosságból. Tetszőleges n pozitív egész szám esetén a *Markov*-egyenlőtlenség alkalmazásával nyerjük, hogy

$$P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \nu_t^j}{n} - 1 \geqq \varepsilon\right) \leqq \frac{M(\nu_t^j) - 1}{\varepsilon} \to 0, \quad \text{ha} \quad t \to +\infty. \tag{10}$$

Ezért

$$\sum_{j=1}^{n} \nu_t^j \Big/ n \to 1 \quad \text{sztochasztikusan, ha} \quad t \to +\infty. \tag{11}$$

Legyen $\delta = \mu - \frac{\mu}{1+\mu\varepsilon}$ és tekintsük az $n^* = \left[\frac{t}{\mu - \delta}\right]$ pozitív egész számot.

Nyilván $n^*/t \to \frac{1}{\mu - \delta}$, ha $t \to +\infty$ és így (11) miatt

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{j=1}^{n^*} \nu_t^j}{t} - \frac{1}{\mu - \delta}\right| \geqq \varepsilon\right\} \to 0, \tag{12}$$

ha $t\to+\infty$. Hivatkozva a nagy számok törvényének véletlen tagszámú összegekre vonatkozó alakjára mondhatjuk, hogy [6]

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{\sum_{j=1}^{n^*}\nu_t^j}\xi_i\Big/\sum_{j=1}^{n^*}\nu_t^j\to\mu \text{ sztochasztikusan, ha } t\to+\infty.$$

Nyilvánvaló a következő egyszerű állítás: ha $t\to+\infty$ esetén $\xi_t\to\mu$ és $\eta_t\to\mu-\delta$ sztochasztikusan, ahol $\delta>0$, akkor $P(\xi_t\leqq\eta_t)\to 0$, midőn $t\to+\infty$. (12) és (13) alapján és előbbi megjegyzésünkből következőleg azt kapjuk, hogy

$$P\left\{\sum_{i=1}^{\sum_{j=1}^{n^*}\nu_t^j}\xi_i\Big/\sum_{j=1}^{n^*}\nu_t^j\leqq\frac{t}{\sum_{j=1}^{n^*}\nu_t^j}\right\}\to 0,\qquad (t\to+\infty),$$

azaz

$$P(N_t\geqq n^*)\to 0,\qquad (t\to+\infty),$$

amiből $t\to+\infty$ esetén

$$P\left(\frac{N_t}{t}\geqq\frac{1}{\mu-\delta}\right)\to 0.$$

Végül is a δ szám értelmezése alapján azt kapjuk, hogy

$$P\left(\frac{N_t}{t}-\frac{1}{\mu}\geqq\varepsilon\right)\to 0\qquad (t\to+\infty).$$

Kiindulva már most az ugyancsak nyilvánvaló

$$\{N_t\leqq n\}=\left\{t_{\sum_{j=1}^{n}\nu_t^j}\geqq t\right\}=\left\{\sum_{i=1}^{\sum_{j=1}^{n}\nu_t^j}\xi_i\geqq t\right\}$$

azonosságból, akkor az előbbi gondolatmenettel azonos módon nyernénk, hogy

$$P\left(\frac{N_t}{t}-\frac{1}{\mu}\leqq-\varepsilon\right)\to 0,\qquad t\to+\infty.$$

Ez utóbbi relációk éppen a Lemma állítását jelentik.

IRODALOM

[1] Ю. К. Беляев: Предельные теоремы для редеющих потоков, *Теория вероятностей и ее применения*, **8** (1963) Выпуск 2. 175—184.
[2] TAKÁCS, L.: On the sequence of events selected by a counter from a recurrent process of events, *Теория, вероятностей и ее применения*, **1** (1957) 90—102.
[3] RÉNYI, A.: A Poisson-folyamat egy jellemzése, *MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei*, **1** (1956) 4. füzet. 124—128.
[4] NAWROTZKI, K.: Ein Grenzwertsatz für homogene zufällige Punktfolgen, *Mathematische Nachrichten*, **24** (1962) Heft 4. 201—217.
[5] MOGYORÓDI, J.: Rekurrens folyamatok ritkításáról. *MTA III. Matematikai és Fizikai Osztálya Közleményei*, **19** (1969) No 1—2.
[6] MOGYORÓDI, J.: On the law of large numbers for the sum of a random number of independent random variables, *Annales Univ. Sci. Budapestinensis de R. Eötvös nom.* Sect. Math., **8** (1965) 33—38.
[7] KONDRATAITÉ, G.: *Retejanciu sriantu ribines teoremos patikslinimas*, Szakdolgozat. Vilnius.

(Beérkezett: 1969. III. 27.)

О РЕДЕЮЩИХ ПОТОКАХ

Й. Модьороди, Т. Сантаи

В статье дается новое доказательство двух теорем Ю. К. Беляева, касающихся разрежения потоков. Доказательство Беляева эвристическое. Доказательство Теоремы 1 п. 1 настоящей работы основывается на Лемме п. 2, которая является обобщением соответствующей леммы Беляева. В п. 4 работы находится доказательство одного наглядного утверждения Беляева. ([1], Теорема 3.)

INKORREKT MATEMATIKAI PROBLÉMÁK VIZSGÁLATÁNAK JELEN ÁLLÁSÁRÓL, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL I. FAJÚ OPERÁTOREGYENLETEK MEGOLDÁSÁRA

(Áttekintés)

Írta: MEDGYESSY PÁL

1. Bevezetés

A század eleje óta ismeretesek a matematikai fizika olyan problémái, melyekre az jellemző, hogy megoldásuk bizonyos „adattól" (kerületi feltétel stb.) nem függ „folytonosan". Az ilyen problémákat *inkorrekt* problémáknak nevezték el. Kezelésmódjukkal számos munkában foglalkoztak.

Dolgozatunk célja az inkorrekt matematikai problémák vizsgálatában elért legfontosabb eredmények ismertetése, különös tekintettel I. fajú operátoregyenletek megoldására és a numerikus módszerekre. Gyűjtésünket 1968 végével zártuk.

Dolgozatunk végén irodalomjegyzék közli, megjelenési év szerint csoportosítva, az e körbe sorolható cikkeket, 1968 végéig. Teljességre nem törekedhettünk. A hivatkozás módja: például F. JOHN 1955 [5] F. JOHN-nak az 1955. évben megjelent cikkek jegyzékében az [5] sorszám alatt feltüntetett munkáját jelenti.

Hasonló s így alaposan felhasznált, bár rövidebb összefoglaló ismertetések: M. M. LAVRENT'EV és V. G. VASZIL'EV 1966 [2], M. M. LAVRENT'EV 1966 [8], L. SZ. KIRILLOVA és A. A. PIONTKOVSZKIJ 1968 [2][1].

Dolgozatunk olvasásához szükséges a funkcionálanalízis elemeinek ismerete.

2. Hadamard szerint korrekt, illetve inkorrekt problémák

J. HADAMARDtól (1902 [1], 1932 [1]) származik az a fogalom, hogy egy matematikai-fizikai probléma (megfogalmazása) „*korrekt*". Mivel a legtöbb matematikai fizikai probléma operátoregyenlet megoldására vezethető vissza, később operátoregyenletek megoldása problémájára is alkalmazták ezt a fogalmat.

Legyen X, Y teljes lineáris metrikus tér, A folytonos, nem okvetlenül lineáris operátor, adott értelmezési tartománnyal és értékkészlettel. Ha y Y tetszőleges eleme ($y \in Y$), felírható formálisan az

$$Ax = y \qquad (y \in Y) \tag{2. 1}$$

ún. I. *fajú operátoregyenlet.* Ez megoldható, ha adott $y_0 \in Y$ elemhez található oly $x_0 \in X$, melyre $Ax_0 = y_0$. (Ha y_0 nem tartozik A értékkészletébe, nincs megoldás.)

Azt mondjuk, (2. 1) megoldhatóságának problémája (*Hadamard* szerint) *korrekt*, ha

1. valamilyen adott $\mathfrak{N} \subset Y$ zárt lineáris sokaságba tartozó y_0 ($y_0 \in \mathfrak{N}$) elemhez (2. 1)-nek van x_0 megoldása és $x_0 \in \mathfrak{M} \subset X$, ahol $\mathfrak{M}$ is zárt lineáris sokaság,

[1] Orosz neveket a könyvtári címátírás szabályai szerint írtunk át. Ez esetben ugyanis az eredeti egyértelműen rekonstruálható.

2. az $x_0 \in \mathfrak{M}$ megoldás egyetlen, ha $y_0 \in \mathfrak{N}$,

3. az x_0 megoldás „folytonosan" függ az y_0 „adatoktól" (stabilis), azaz: ha $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$ $(x_1, x_2 \in \mathfrak{M})$, $y_1, y_2 \in \mathfrak{N}$ és $\varrho(y_1, y_2) \leqq \delta$, akkor $\varrho(x_1, x_2) \leqq \varepsilon(\delta)$, ahol $\varepsilon(\delta) \downarrow 0$, ha $\delta \downarrow 0$ (a ϱ-val jelölt „távolságok" mindig a megfelelő térben értendők).

Ha e feltételek közül legalább egy nem teljesül, azt mondjuk, hogy a probléma (*Hadamard* szerint) *inkorrekt*. A természettudományok számos ilyen problémát szolgáltattak.

Ez a helyzet többek között egyes I. fajú Fredholm-féle integrálegyenletek esetében. Legyen például az egyenlet

$$\int_a^b K(t, s)x(s)ds = y(t) \qquad (c \leqq t \leqq d)$$

ahol $x(s) \in C_1[a, b]$ (az $[a, b]$ intervallumon folytonos, szakaszonként sima függvények osztálya), $y(t) \in L_2[a, b]$, $K(t, s)$ mindkét változója szerint folytonos, és a normák:

$$\|x(s)\| = \max_{a \leqq s \leqq b} |x(s)|, \ \|y(t)\| = \sqrt{\int_c^d y(t)^2 \, dt}.$$

Belátható, hogy megadható olyan N $(N \subset L_2)$ zárt lineáris sokaság, hogy ha $y(t) \in N$, az egyenletnek létezik egyetlen megoldása. Legyen $y_0(t) \in N$ és $x_0(s)$ a hozzá tartozó (egyetlen) megoldás, azaz legyen $\int_a^b K(t, s)x_0(s)\,ds = y_0(t)$. Vegyük most $x_0(s)$ helyett az $x_1(s) = x_0(s) + \sin \lambda s$ függvényt. Ez az $y_1(t) = y_0(t) + \int_a^b K(t, s) \sin \lambda s \, ds$ függvényhez tartozó megoldásként fogható fel ($y_1(t)$ szintén N-be tartozónak veendő). Ekkor, „távolságnak" a normát véve, $\varrho(x_1(s), x_0(s)) = \|x_1(s) - x_0(s)\| = \|\sin \lambda s\| = 1$,

$$\varrho(y_1(t), y_0(t)) = \|y_1(t) - y_0(t)\| = \sqrt{\int_c^d \left[\int_a^b K(t,s) \sin \lambda s \, ds\right]^2 dt}.$$

Feltételeinkből következik, hogy $K(t, s)$ bármely t, s mellett korlátos. Ekkor azonban négyzetgyök alatti kifejezés λ növelésével tetszőleges kis $\delta > 0$ korlát alá szorítható. Megadható tehát két függvény, $y_1(t)$ és $y_0(t)$, melyekre $\|y_1(t) - y_0(t)\| < \delta$, míg a hozzájuk tartozó megoldásokkal képezett $\|x_1(s) - x_0(s)\|$ nem szorítható δ-tól függő, hasonlóan tetszőleges kis korlát alá. A 3. feltétel tehát nem teljesül, a probléma (*Hadamard* szerint) inkorrekt.

(2. 1) megoldása inkorrekt például akkor is, ha X, Y *Banach*-tér, A folytonos, lineáris és inverze, A^{-1}, létezik, de nem folytonos. Ha X, Y *Hilbert*-tér és A teljesen folytonos, (2. 1) már eleve sem oldható meg bármely $y \in Y$ mellett és A^{-1} sem korlátos, következésképpen 3. sem teljesül.

Ezek a tények nagyon megnehezítik inkorrekt probléma esetén (2. 1) típusú egyenletek numerikus kezelését, ha y helyett valamilyen y_δ $(\varrho(y, y_\delta) < \delta, \ y_\delta \in N)$ „mért adat" áll csak rendelkezésre, hiszen a jobb oldal eltérései nagy eltéréseket eredményezhetnek a megoldásban (Vö.: T. CARLEMAN 1926 [1], I. G. MALKIN 1932 [2], G. M. GOLU-

ZIN és V. I. KRÜLOV 1933 [1], B. A. ANDREEV 1954 [3], M. PICONE 1954 [2], A. K. MALOVICSKO 1956 [10].)

Érthetően felmerült az az igény, hogy az inkorrekt problémákat kezelhetővé tegyék, alapvetően figyelembe véve a numerikus eljárások említett szempontjait. A következőkben a legfontosabb módszereket ismertetjük. Ezeknek az a közös alapgondolata, hogy a (2. 1) operátoregyenlet egzakt megoldására külön megkötéseket rónak ki, vagy az egzakt megoldás valamilyen *közelítését* tekintik eleve az operátoregyenlet megoldásának, és ekkor — *Hadamard* szerint, vagy *másféle* korrektségdefiníció szerint — korrekt lesz (2. 1) megoldásának problémája és a közelítő megoldás is megvan.

3. Tihonov szerint korrekt problémák. M. M. Lavrent'ev megoldási módszere

A. N. TIHONOV 1944-ben a következőket vezette be (1944 [1]); a gondolat szerepel már T. CARLEMANnál (1926 [1]) és I. M. RAPOPORTnál (1940 [1], 1941 [1]) is. Összhangban a matematikai fizika inkorrekt problémáival, másképp értelmezte a „korrekt" fogalmat, mégpedig a következőképpen:

Legyen Φ, F teljes lineáris metrikus tér, A egy folytonos operátor, melynek értelmezési tartománya és értékkészlete adott, és $\varphi \in \Phi$, $f \in F$. Tekintsük az

(3. 1) $$A\varphi = f$$

operátoregyenletet. Tegyük fel, hogy (3. 1) megoldásának problémája *Hadamard* szerint inkorrekt.

Azt mondjuk, hogy (3. 1) megoldásának problémája *Tihonov szerint korrekt*, ha

1. *eleve tudjuk*, hogy ha f bizonyos adott $\mathfrak{N}$ halmazba tartozik ($f \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset F$), akkor (3. 1)-nek van megoldása és a φ megoldások összessége egy *adott* zárt $\mathfrak{M}$ ún. *korrektségi halmazba* tartozik ($\varphi \in \mathfrak{M}$). (Nyilván $\mathfrak{N} = A\mathfrak{M}$.)

2. valamely φ ($\varphi \in \mathfrak{M}$) megoldás egyetlen is,

3. egy φ megoldás „folytonosan" függ az f „adattól", ha $f \in \mathfrak{N}$ (vagyis ha f megváltozásakor a megfelelő megoldás változatlanul az $\mathfrak{M}$ halmazba tartozik); azaz, ha $A\varphi_1 = f_1$, $A\varphi_2 = f_2$, ($f_1, f_2 \in \mathfrak{N}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{M}$) és $\varrho(f_1, f_2) \leqq \delta$, akkor $\varrho(x_1, x_2) \leqq \varepsilon(\delta)$, ahol $\varepsilon(\delta) \downarrow 0$, ha $\delta \downarrow 0$.

Alkalmazások szempontjából igen fontos A. N. TIHONOVnak e tétele (1944 [1]): Ha A egy-egyértelmű és folytonos, továbbá, ha $\mathfrak{M}$ *kompakt halmaz* — és így (korábbi topológiai tételek alapján) az $A\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ halmazon A^{-1} folytonos — és ha az 1. és 2. feltételek teljesülnek és f megváltozásakor továbbra is $\mathfrak{N}$-ben marad ($f \in \mathfrak{N} = A\mathfrak{M}$) („módosított *Tihonov*-féle feltételek"), akkor létezik oly $\omega(\delta)$ folytonos, nemcsökkenő függvény ($\omega(o) = 0$), hogy ha $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{M}$, $A\varphi_1 = f_1$, $A\varphi_2 = f_2$; $f_1, f_2 \in \mathfrak{N}$ és $\varrho(f_1, f_2) \leqq \delta$, akkor $\varrho(\varphi_1, \varphi_2) \leqq \omega(\delta)$, vagyis az 1. és 2. feltételekből a 3. feltétel már következik, a probléma *Tihonov* szerint korrekt. Hogyha például f_2 f_1 „mért" közelítése, ez azt jelenti, hogy az előző feltételek teljesülése mellett az e közelítéshez tartozó megoldás közelítése lesz az egzakt megoldásnak.

Mindez nem mond semmit a *megoldás tényleges megszerkesztéséről*. A gyakorlat szempontjainak megfelelő *közelítő* megoldást a következőkép vezetett be M. M. LAVRENT'EV (lásd például 1962 [1]): *Tegyük fel*, hogy Φ, F *Hilbert*-tér, A

teljesen folytonos és hogy (3. 1) jobboldalának, az f elemnek csak valamilyen f_δ $(\varrho(f,f_\delta) = \|f-f_\delta\| \leqq \delta,\ f\in\mathfrak{N}$, de esetleg $f_\delta \notin \mathfrak{N}$!) „mért" közelítését ismerjük, a megfelelő (egyetlen) megoldás, φ, az $\mathfrak{M}$ kompakt halmazba tartozik ($\varphi\in\mathfrak{M}$) emellett ismerjük a fenti $\omega(\delta)$ függvényt. Ekkor bizonyítható, hogy megszerkeszthető egy a δ mellett valamilyen $\alpha=\alpha(\delta)$ paramétertől is függő $\varphi_{\alpha\delta}$ elem, melyre — $\alpha(\delta)$ alkalmas megválasztásakor — $\varrho(\varphi, \varphi_{\alpha\delta}) = \|\varphi-\varphi_{\alpha\delta}\| \to 0$, ha $\delta\to 0$. Ezt a $\varphi_{\alpha\delta}$ elemet tekintjük (3. 1) közelítő megoldásának, összhangban az előzőkkel.

PÉLDA (M. M. LAVRENT'EV 1956 [2], [3]). Legyen az előző pontban A pozitív, teljesen folytonos lineáris operátor, $\|A\|\leqq 1$. Teljesüljenek a módosított *Tihonov*-féle feltételek és az $\mathfrak{M}$ korrektségi halmaz legyen azon u elemek halmaza, melyeket az $u=Bv$, $v\in\mathfrak{M}$, $\|v\|\leqq 1$, $\|B\|\leqq 1$ — ahol B teljesen folytonos lineáris operátor — összefüggések értelmeznek. $\alpha>0$ mellett vezessük be a $\varphi_{\alpha\delta}$ elemet, melyet a $\varphi_{\alpha\delta} = (A+\alpha E)^{-1} f_\delta$ *II. fajú operátoregyenlet értelmez* (E az egységoperátor). Ennek az egyenletnek a megoldása *Hadamard* szerint korrekt probléma s a megoldás előállítható. Bizonyítható, hogy ekkor $\|\varphi-\varphi_{\alpha\delta}\| \leqq \omega(\delta)+\dfrac{\delta}{\alpha} \leqq 2\omega(\alpha_0)$, ahol α_0 az $\alpha\omega(\alpha)=\delta$ egyenlet gyöke. Ha $\delta\to 0$, $\alpha_0=\alpha_0(\delta)$ és $\omega(\alpha_0)$ is zérushoz tart és így $\varphi_{\alpha\delta}$, melyet az előbbiek szerint f_δ segítségével az említett II. fajú operátoregyenlet megoldása alakjában *elő is tudunk állítani*, tekinthető közelítő megoldásnak. — Nagyon lényeges hibabecslések stb. szempontjából is, hogy az említett II. fajú egyenlet megoldása explicite előállítható.

Mindezzel kapcsolatban a következő *nehézségek* merülnek fel:

1. a korrektség vizsgálatakor nem mindig jelölhető ki pl. az $\mathfrak{M}$ kompakt halmaz, bár több kritériumot találtak $\mathfrak{M}$ kompakt voltának megállapítására;

2. nincs hatásos kritérium arra, hogy f kis változásakor a hozzá tartozó φ megoldás $\mathfrak{M}$ eleme marad;

3. tulajdonképp csak f_δ ismert, f nem és így nem tudjuk eldönteni, létezik-e a valóságos f-hez megoldás;

4. nincs jó kritérium arra sem, hogy adott $\mathfrak{M}$ kompaktum esetében f eleme-e $A\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$-nek.

A módszer által adott „megoldás" valójában egy $\varphi\in\mathfrak{M}$ elem, melyre $\|A\varphi-f\|$ nem lépi túl az f „adat" δ „mérési hibáját".

1. MEGJEGYZÉS. Ha az 1. és 2. feltételek teljesülnek és az $\mathfrak{M}$ korrektségi halmaz a $(-\infty, \infty)$ intervallumon folytonos és korlátos függvények halmazának egy egyenletesen korlátos T részhalmaza, melyre fennáll: létezik adott $\varepsilon>0$-hoz a $(-\infty, \infty)$ intervallum végesszámú nyílt halmazzal való oly lefedése, hogy e halmazok mindegyikén bármely T halmazbeli függvény ingadozása kisebb ε-nál, — akkor, — minthogy ez esetben $\mathfrak{M}$ kompakt lesz, — a probléma *Tihonov* szerint korrekt és numerikus kezelése a kiindulási „adatok" hibái ellenére is lehetséges (az előző értelemben).

2. MEGJEGYZÉS. Ha (3. 1) (létező és egyetlen) megoldására f helyett a „hibás" f_δ ($\|f-f_\delta\| \leqq \delta$) észlelése mellett, van valamilyen — például egzakt analitikus előállítás alapján megszerkeszthető — f_δ-ra támaszkodó közelítő megoldás, $\varphi_{\alpha\delta}$ mely tartalmaz valamilyen α paramétert (ekvidisztáns „adatok" száma, stb.) és az „adatok" hibáját (δ), és bizonyítható, hogy — esetleg α és δ bizonyos összefüggését feltételezve — $\|\varphi-\varphi_{\alpha\delta}\|$ tart 0-hoz, ha $\delta\to 0$, akkor a fentiek szerint ez a $\varphi_{\alpha\delta}$ tekinthető megoldásnak, feltéve, hogy a módosított *Tihonov*-féle feltételek teljesülnek. (Erre példa

található többek között e munkákban: F. JOHN 1955 [5], MEDGYESSY PÁL 1961 [1], 1966 [22] (konvolúciós I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenletekről van szó). Persze, megadható sokszor több — jobb vagy rosszabb — közelítő megoldás is.

Tihonov szerint korrekt problémákkal, illetve közelítő megoldásukkal ezután sokan foglalkoztak. Összefoglalások is megjelentek, például F. JOHN 1955 [2], M. M. LAVRENT'EV 1962 [1]. Konkrét feladatokról szólnak: B. A. ANDREEV 1947 [1], 1949 [1]; E. M. LANDISZ 1952 [1]; B. A. ANDREEV 1952 [2]; C. PUCCI 1953 [1]; M. M. LAVRENT'EV 1954 [1]; F. JOHN 1955 [1], [5]; C. PUCCI 1955 [3]; M. M. LAVRENT'EV 1955 [4]; F. BERTOLINI 1955 [6]; SZ. N. MERGELJAN 1956 [1]; M. M. LAVRENT'EV 1956 [2], [3], [4], [5]; V. K. IVANOV 1956 [6]; E. M. LANDISZ 1956 [8]; M. M. LAVRENT'EV 1957 [1]; SZ. G. KREJN 1957 [3]; M. M. LAVRENT'EV 1958 [1]; C. PUCCI 1958 [2]; D. FOX and C. PUCCI 1958 [3]; M. M. LAVRENT'EV 1959 [1]; C. PUCCI 1959 [2]. Egyesek nemlineáris operátorok esetére is kitérnek (például M. M. LAVRENT'EV 1962 [1], P. SZ. NOVIKOV 1938 [1] dolgozatára támaszkodva).

Az M. M. LAVRENT'EV 1962 [1] monográfiája megjelenése utáni irodalomból a következőket említjük meg: SZ. G. KREJN és O. J. PROZOROVSZKAJA 1963 [5] különböző közelítő megoldás-módszereket közöl inverz hővezetési probléma esetére. V. K. IVANOV és L. E. KAZAKOVA 1963 [7] a potenciálelmélet inverz problémáját tárgyalja, bizonyos sorfejtés segítségével, numerikus szempontból is alkalmazhatónak látszó módon. K. MILLER (1964 [9]) egyes parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos inkorrekt problémákat vizsgál. V. K. IVANOV 1965 [3] a megkötéseket lényegesen enyhítve, egy speciális *Cauchy*-feladat esetében, közelítő megoldást s hibabecslést ír le, ha az „adatok" hibát hordoznak, M. M. LAVRENT'EV egy közelítő módszerét erősen általánosítja (pl. nem korlátos, önadjungált A operátor esetére) JU. T. ANTOHIN 1966 [12], [13], [14], számos példát mutatva be, becslésekkel stb. V. I. LEBEDEV 1966 [18] bizonyos típusú A operátor esetére az $\mathfrak{M}$ korrektségi halmaz ε-entrópiája és az $\mathfrak{M}$-en értelmezett legjobb függvényközelítések ismeretét feltételezve (vagyis a megoldásra vonatkozó információk bővítésével), konstruktív függvénytani eszközökkel vizsgálta a (3. 1) egyenlet megoldását „mért" f_δ alapján. R. DENCSEV (1967 [20]) M. M. LAVRENT'EVnek a fenti $\omega(\delta)$ függvénnyel kapcsolatos vizsgálatait általánosította.

Numerikus (*metodikai*, vagyis numerikus megoldást az egyébként is ismert egzakt megoldással egybevető) példát közöl V. I. DMITRIEV és E. V. ZAHAROV 1968 [13] egy speciális konvolúciós integrálegyenlet megoldásával foglalkozva, a feladatot egy más integrálegyenlet közelítő megoldására vezetve vissza. *Nem metodikai* példákat közöl konvolúciós, I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenlet megoldására MEDGYESSY PÁL 1961 [1], 1966 [1].

MEGJEGYZÉS. A *Tihonov* szerint korrekt problémákkal kapcsolatban érdekes megállapításokat közölt L. V. MAJOROV (1965 [15]). Megmutatta, hogy ha a fizikai mérések feldolgozásában is gyakran előforduló I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenletben a megoldás *sűrűségfüggvény-típusú*, akkor az integrálegyenlet megoldása mindig definiálható úgy, hogy a feladat *Tihonov* szerint korrekt legyen. Az egyenlet jobb oldalát „mérési hibával" torzítottnak tételezve fel, M. M. LAVRENT'EV egyes eredményeire támaszkodva, megszerkesztve a közelítő megoldást, egyes esetekben megadható az említett „mérési hiba" és a megoldás hibájának összefüggése is.

4. D. L. Phillips megoldási módszere

1962-ben D. L. PHILLIPS (1962 [2]) egy módszert közölt I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenletek megoldására, melyben implicite megtalálhatók az inkorrekt problémák megoldásának egyes későbbi ötletei és így alapvető munkának tekinthető. Ő tekinti az

$$\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy = g(x) \qquad (a \leqq x \leqq b) \tag{4.1}$$

egyenletet, korlátosnak és folytonosnak téve fel a szereplő függvényeket. Nem stabilis megoldás esetén a korábban szokásos diszkrétizáló, egyenletrendszerrel dolgozó megoldásmód összevissza ugráló eredményt ad, $g(x)$ észlelési hibái folytán. Így tehát tekintsük a jobb oldalt mindjárt a „mért adatokkal" kifejezve az úgyis meglevő $\varepsilon(x)$ hiba levonásával, azaz legyen az egyenlet

$$\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy = \hat{g}(x) - \varepsilon(x),$$

ahol $\hat{g}(x)$ a „mért" függvény. Így $\varepsilon(x)$-től függően megoldások egész $\mathfrak{F}$ családját kaphatjuk. Ezekből választjuk ki, valamilyen megállapodás alapján, a *megoldásnak tekintendő* függvényt. Szerző simasági feltételt köt ki erre a megoldásra: kiemeli azt az $f_s \in \mathfrak{F}$ függvényt, melyre

$$\int_a^b (f_s'')^2\,dx = \min_{f \in \mathfrak{F}} \int_a^b (f'')^2\,dx. \tag{4.2}$$

Ezután közelíti e feltételt, diszkrétizálva, a

$$\sum_{i=0}^{n} (f_{i+1}^{(s)} - 2f_i^{(s)} + f_{i-1}^{(s)})^2 = \min_{f \in \mathfrak{F}^*} \sum_{i=0}^{n} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})^2 \tag{4.3}$$

alakkal, (f_i f, $f_i^{(s)} f_s$ értéke az i-edik ekvidisztáns pontban) az egyenletet pedig a

$$\sum_{i=0}^{n} w_i K_{ji} f_i = \hat{g}_j + \varepsilon_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n) \tag{4.4}$$

alakkal (ekvidisztáns pontokra) és felteszi, hogy

$$\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = e^2 \qquad \text{(konst.)} \tag{4.5}$$

A (4. 3)-nak eleget tevő $\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_n)$ vektorok $\mathfrak{F}^*$ családjából most kiválasztjuk azt az $\mathbf{f}_s = (f_0^{(s)}, \ldots, f_n^{(s)})$ vektort, melyre a (4. 4), (4. 5) feltételek is teljesülnek. Ez feltételes szélsőérték-probléma, ami végül is a következő matrixegyenletre vezet:

$$\mathbf{f}_s = (A + \gamma B)^{-1} \hat{\mathbf{g}},$$

a hibát pedig

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\gamma B \mathbf{f}_s$$

adja meg, ahol $A \equiv (w_i K_{ji})$, w_i a kvadratúra-közelítésben szereplő állandó, $A^{-1} = (\alpha_{ij})$,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n), \quad \hat{\mathbf{g}} = (\hat{g}_0, \dots, \hat{g}_n), \quad B = (b_{lk}) \qquad (k, l = 0, 1, \dots, n),$$

$$b_{lk} = \alpha_{k-2,l} - 4\alpha_{k-1,l} + 6\alpha_{kl} - 4\alpha_{k+1,l} + \alpha_{k+2,l}$$

és $\gamma > 0$ egy konstans („regularizációs paraméter"), melynek növelése növeli a simaságot. Elég egy pár γ-val kísérletezni. Az egyenletekből $\mathbf{f}_s$ meghatározható, különböző γ mellett, aztán pedig $\boldsymbol{\varepsilon}$; ha ennek maximális komponense $\approx g(x)$ maximális hibája, jó γ választása. Gyakorlatban számos γ-hoz meg kell oldani a feladatot és megnézni az egyes megoldások simaságát. — Számos metodikai példát is közöl.

D. L. PHILLIPS módszerét egyszerűsítette S. TWOMEY (1963 [3]), $\mathbf{f}_s$-re a következő egyenletet vezetve le: $\mathbf{f}_s = (A^*A + \gamma H)^{-1} A^* \hat{\mathbf{g}}$ (A^* A transzponáltja). Itt

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

és csak egyetlen invertálás szükséges kettő helyett, emellett a (K_{ji}) mátrixnak nem kell kvadratikusnak lennie (vagyis lehet több a megfigyelés, mint az ismeretlenek száma). — Másféle mellékfeltételek bevezetése lehetőségét is vizsgálta, és hasonló típusú képletet talált $\mathbf{f}_s$ ily esetekben való kiszámítására. (Egyik ilyen mellékfeltétel: egy kísérleti megoldástól való (kijelölt pontokban vett) eltérések négyzeteinek összege legyen minimális; erre példát is közölt.) S. TWOMEY 1965 [19] munkája lényegében véve ugyanezeket közli, csak jobban kitér a probléma múltjára és megoldása alkalmazásaira.

5. V. K. Ivanov módszere. A kvázimegoldás

A 3. pontban megemlítettük a *Tihonov* szerint korrekt problémák vizsgálatakor felmerülő nehézségeket. Ezek kiküszöbölésére 1962-ben a „*Tihonov* szerint korrekt" fogalom elejtésével V. K. IVANOV (1962 [3], [4], [4]) új módszert vezetett be, melynek alapgondolata csírájában megtalálható I. DOUGLAS, JR.-nál (1960 [1]) is. Ez a következő volt:

Megtartotta a korrekt probléma *Hadamard*-féle definícióját, megváltoztatta azonban a *megoldás* definícióját, a következőképp:

Legyen X, Y teljes lineáris metrikus tér, A folytonos operátor, melynek értékkészlete nem zárt és melyre A^{-1} nem folytonos és legyen $x \in X$, $y \in Y$. Vizsgáljuk az

$$Ax = y \tag{5. 1}$$

operátoregyenlet megoldhatóságának problémáját. Feltevéseinkből következik, hogy e probléma *Hadamard* szerint inkorrekt.

Legyen most $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \subset X$) *adott* kompakt zárt halmaz és $\mathfrak{N} = A\mathfrak{M}$. Legyen adva y_0 ($y_0 \in Y$). Ekkor (5. 1) *kvázimegoldásának* fogjuk nevezni azt az $\mathfrak{M}$ halmazba tartozó x_0 ($x_0 \in \mathfrak{M}$) „pontot", melyre $\varrho(Ax, y_0)$ felveszi minimumát, miközben x az

$\mathfrak{M}$ halmazban mozog (vö. a *Tihonov* szerint korrekt problémák megoldásával kapcsolatos nehézségekről a 3. pont végén mondottakkal!).

$\mathfrak{M}$ kompakt lévén, az x_0 kvázimegoldás létezik (sőt több is lehet), tetszőleges $y_0 \in Y$ mellett. Világos, hogy ha $\mathfrak{N} = A\mathfrak{M}$ és $y_0 \in \mathfrak{N}$, akkor az $Ax = y$ egyenlet kvázimegoldása azonos az x_0 pontos megoldással ($x_0 \in \mathfrak{M}$).

Legyen most X, Y teljes lineáris metrikus tér, A folytonos és lineáris operátor. Ha $y_0 \in Y$, az előbbiek alapján az $Ax = y_0$ egyenlet kvázimegoldása létezik tetszőleges $\mathfrak{M}$ kompakt halmaz mellett. Ha emellett az $Ax = 0$ homogén egyenletnek csak zérus-megoldása van, $\mathfrak{M}$ konvex és az Y térbeli „gömbök" szigorúan konvexek, akkor az $Ax = y_0$ egyenletnek *egyetlen* kvázimegoldása van, mely „folytonosan" függ y_0-tól, vagyis ekkor az $Ax = y$ *operátoregyenlet megoldásának problémája — ha „megoldáson" az* $\mathfrak{M}$ *halmazba tartozó kvázimegoldást értünk — Hadamard szerint korrekt.*

$\mathfrak{M}$ legtöbbször C_1 vagy L_2 térbeli „gömb", vagy a pozitív harmonikus függvények tere, stb. és ezek már eleve konvexek is.

A kvázimegoldás unicitása és folytonossága akkor is fennáll, ha X teljes lineáris metrikus tér, Y *Hilbert*-tér, $\mathfrak{M}$ konvex és A az $\mathfrak{M}$ halmaz kölcsönösen egyértelmű leképezését létesíti. Ennek aleseteként megemlítendő az a speciális eset, amidőn X, Y *Hilbert*-tér. Ekkor X-ben $\mathfrak{M}$ helyett az $\Omega_k = \{x;\ \|x\| \leqq R\}$ gömb (ez gyengén kompakt halmaz) vehető kvázimegoldás előállításakor. Legyen most A teljesen folytonos, és adjungáltja A^*. Ekkor A^*A önadjungált, pozitív, teljesen folytonos operátor. Legyenek A^*A sajátértékei $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3 \geqq \ldots$, sajátvektorai teljes ortonormált rendszere pedig $u_1, u_2, u_3, \ldots$, s legyen $A^*y = \sum_n \beta_n u_n$. A kvázimegoldás esetünkben ekvivalens az $\|Ax - y\| = (Ax - y, Ax - y)$-t (skaláris szorzat) Ω_R-en minimalizáló x elemmel. Ha most $\sum_n \frac{\beta_n^2}{\lambda_n^2} > R^2$, a minimum az $(x, x) = R^2$ feltétel mellett keresendő és a *Lagrange*-féle eljárás alapján a minimalizáló megoldást az $A^*Ax + \lambda x = A^*y$ *II. fajú operátoregyenlet megoldása szolgáltatja* (λ a multiplikátor). Ezen egyenletek elmélete alapján ekkor Ω_R-en $x = \sum_n \frac{\beta_n}{\lambda_n + \lambda} u_n$, ahol λ a $\sum_n \frac{\beta_n^2}{(\lambda_n + \lambda)^2} = R$ egyenlet pozitív gyöke. A kvázimegoldás eme explicit előállítása értékes eszköz egzakt és kvázimegoldás eltérése, továbbá közelítő megoldás becslése vizsgálatában.

Áttérve most a gyakorlatban előadódó helyzetre és *közelítő* megoldásokra, tegyük fel, hogy az $Ax = y_0$ egyenlet jobb oldala helyett az y_δ $(\varrho(y, y_\delta) \leqq \delta)$ „mért adat" ismert csak. Minimalizáljuk a $\varrho(Ax, y_\delta)$ funkcionált. Érje el ez minimumát az x_δ pontban. Ha $\varrho(Ax_\delta, y_\delta) \leqq \delta$, *megállapodunk abban*, hogy az x_δ kvázimegoldást tekintjük közelítő megoldásnak. Ellenkező esetben úgy tekintjük a dolgot, hogy δ „pontossági határon" belül operátoregyenletünknek nincs közelítő megoldása az $\mathfrak{M}$ halmazon.

Bizonyítható, hogy az y_δ-hoz rendelt kvázimegoldás tart az egzakt y_0 elemhez tartozó valamelyik kvázimegoldáshoz, ha y_δ tart y_0-hoz (ezt a tényt „β-folytonosságnak", e speciális konvergencia-típust „β-konvergenciának" nevezzük). Ha $\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}_{n+1} \subset \mathfrak{M}$ $(n \geqq 1)$ egy kompaktumsorozat, $\bigcup_{n \geqq 1} \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_\infty$ sűrű $\mathfrak{M}$-ben $(\overline{\mathfrak{M}_\infty} = \mathfrak{M})$, akkor az $\mathfrak{M}_n$ halmazon lehetséges, értelemszerűen definiált kvázimegoldások halmaza „β-konvergál" az $\mathfrak{M}$ halmazon lehetséges kvázimegoldások halmazához, ha $n \to \infty$. Így „közelítő" jobb oldal (y_δ) esetén az egyenletünk minden, $\mathfrak{M}_n$ halmazbeli kvázimegoldása. approximálni fogja az egzakt egyenlet valamelyik, $\mathfrak{M}$ halmazbeli kvázimegoldását. Ennek az az előnye, hogy $\mathfrak{M}_n$ sokszor végesdimenziós, ami a közelítés megszerkesztését megkönnyíti.

Közelítő megoldás vizsgálatakor, becsléseknél jó szolgálatot tesz, hogy a kvázimegoldás pl. a fentebb bevezetett II. fajú operátoregyenlet megoldása s így explicite előállítható.

A V. K. IVANOV idézett dolgozatai utáni irodalom: M. M. LAVRENT'EV (1962 [1]) „hibás adatok" mellett, ha X, Y *Hilbert*-tér, A folytonos — vizsgálta (5. 1) kvázimegoldását. Idevágó, alkalmazási jellegű V. V. IVANOV (1962 [5]) cikke. Hasonló kiterjesztés: I. N. DOMBROVSZKAJA és V. K. IVANOV 1964 [3]. Hasonló kiterjesztés, kvázimegoldásával együtt: I. N. DOMBROVSZKAJA 1964 [2]. X, Y *Hilbert*-tér, A teljesen folytonos operátor esetén A. B. BAKUSINSZKIJ (1965 [1]) vizsgálta a (4. 1) egyenletet. Kiterjesztés más terek, operátor és $\mathfrak{M}$ halmaz esetére: V. K. IVANOV 1965 [6]. I. N. DOMBROVSZKAJA és V. K. IVANOV (1965 [11]) bebizonyította, hogy ha X, Y *Clarkson*-féle értelemben konvex *Banach*-tér (azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon \leqq 2)$ mellett van oly $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy az $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x-y\| \geqq \varepsilon$ feltételekből következik $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqq 1-\delta(\varepsilon)$), akkor az $\mathfrak{M}$ halmaznak vehető e térbeli gömb. R. V. SZULEJMANOV (1965 [18]) V. K. IVANOV egy dolgozatában szereplő, a fentiekhez hasonló II. fajú egyenlet diszkrétizálásakor nyert lineáris egyenletrendszerhez rendelhető legnagyobb és legkisebb sajátérték hányadosát vizsgálta. (4. 1) megoldását vizsgálta, ha $X = C_1$, $Y = L_2$ tér, A teljesen folytonos, JU. I. HUDAK (1966 [1]). Ismertetést tartalmaz V. K. IVANOV 1966 [6] dolgozata. T. F. DOLGOPOLOVA és V. K. IVANOV (1966 [11]) numerikus differenciálást oldott meg kvázimegoldásra való visszavezetéssel. A (4. 1) egyenlettel foglalkozott, ha X *Banach*-tér, Y *Hilbert*-tér, A teljesen folytonos, V. K. IVANOV (1967 [5]); X, Y *Hilbert*-tér, A zárt operátor esetén pedig L. F. KORKINA (1967 [6]). X *Banach*-tér, Y *Hilbert*-tér, A zárt operátor esetére I. N. DOMBROVSZKAJA (1967 [7]) vizsgálta a (4. 1) egyenletet. O. A. LISZKOVEC 1967 [24] dolgozatában potenciálelméleti problémával foglalkozott V. K. IVANOV módszere alapján, 1968 [4] cikkében pedig az „adatok" *Fourier*-együtthatói felhasználásával speciális problémák kvázimegoldását állította elő, $\mathfrak{M}$ kijelölése mellett, valamint ennek közelítését egy $\mathfrak{M}_n$ halmazon $(\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}_{n+1} \subset \mathfrak{M}, n \geqq 1)$; a szóban forgó minimalizálás egzakte elvégezhető volt, s pl. numerikus differenciálás esetében a korábbiaknál jobb eredmény jött ki. O. A. LISZKOVEC (1968 [5]) vizsgálta továbbá az (5. 1) egyenletet, amidőn X, Y Banach-tér és A zárt, lineáris, kölcsönösen egyértelmű, teljesen folytonos operátor, és az „adatok hibásak", —II. fajú operátoregyenletre vezetve vissza, megadva a közelítő megoldás hibabecslését. F. FRIDRIK (1967 [9]) egy integrálegyenlet esetén, a szokottaknál enyhébb feltételek mellett vizsgálta kvázimegoldás létezését.

Ami kvázimegoldás x_δ közelítésének *numerikus meghatározását* illeti, y_δ „adatok" alapján, világos, hogy ehhez a $\varrho(Ax, y_\delta)$ funkcionált kell numerikusan minimalizálni, bizonyos mellékfeltétel mellett. Ez standard módszerekkel történik, s tulajdonképpen *nem-lineáris programozási feladat.*

Ilyen szempontból megírt dolgozat alig van. F. FRIDRIK (1967 [9]) egy speciális integrálegyenletet vizsgált, melynek ismerte egzakt megoldását; annak adatait geofizikai vizsgálatokból átvett adathibákkal eltorzítva, az így kapott y_δ mennyiségekkel kvázimegoldás-közelítést számított ki, a lineáris programozás eszközeivel, s az eredményt összehasonlította az egzakt megoldással („metodikai" példa). Közli a numerikus részleteket is. — Tulajdonképp kvázimegoldást határozott meg, programozási feladat megoldására vezetve azt vissza, SZELEZSÁN JÁNOS (1968 [6]). A kvázimegoldás meghatározásának fő nehézsége, hogy ki kell jelölni az $\mathfrak{M}$ zárt kompakt halmazt, s ennek sokszor akadályai vannak. A *Tihonov* szerint korrekt problémák tárgyalása nehézségeihez képest az itteniek kétségtelenül csekélyebbek.

6. Az A. N. Tihonov-féle regularizációs módszer

A *Tihonov* szerint korrekt problémák vizsgálati nehézségeinek elkerülésére 1963-ban A. N. TIHONOV (1963 [1], [8], [2], 1965 [2], 1967 [4]) egy újabb módszert közölt: a *regularizációs módszert*, mely már eleve a gyakorlat körülményeiből indul ki, tudniillik arra épül, hogy egy probléma „adatai" hibát hordanak magukban. Meggondolása részletesen a következő.

Legyen U, Z metrikus tér, A folytonos operátor, melynek értelmezési tartománya Z, értékkészlete U; legyen $z \in Z$, $u \in U$ és tekintsük az

$$Az = u \tag{6.1}$$

operátoregyenlet megoldásának problémáját. Feltesszük, hogy A^{-1} létezik, de — például — nem korlátos, azaz a probléma *Hadamard* szerint inkorrekt.

Feltesszük, hogy fennáll a *Tihonov* szerinti korrektség első két feltétele, azaz

1. eleve tudjuk, hogy ha $\bar{u} \in \mathfrak{N} \subset U$, ahol $\mathfrak{N}$ adott, akkor (5. 1)-nek létezik megoldása, $\bar{z}$ (azaz $A\bar{z} = \bar{u}$), mely adott, zárt $\mathfrak{M}$ halmazba tartozik ($\mathfrak{N} = A\mathfrak{M}$),

2. egyetlen;

továbbá tudjuk, hogy

3. a gyakorlatban $\bar{u}$ helyett valamilyen $\tilde{u}_\delta$ „mérhető" csak, mely eleme U-nak ($\tilde{u}_\delta \in U$) és $\varrho(\bar{u}, \tilde{u}_\delta) \leqq \delta$, ahol δ ismert.

Ekkor két probléma vethető fel:

A. PROBLÉMA: Adott $\tilde{u}_\delta$ és $\delta > 0$ mellett megkonstruálandó oly $\tilde{z}_\delta$, mely Z eleme ($\tilde{z}_\delta \in Z$) és amelyre fennáll $\varrho(\bar{z}, \tilde{z}_\delta) \leqq \varepsilon(\delta)$, ha $\varrho(\bar{u}, \tilde{u}_\delta) \leqq \delta$, $\varepsilon(\delta) \downarrow 0$, ha $\delta \downarrow 0$, vagyis (6. 1) megoldása „folytonosan" függjön (6. 1) jobb oldalától, az „adatoktól". Abban az esetben, amidőn az adott $\mathfrak{M}$ halmaz kompakt, az M. M. LAVRENT'EV-féle közelítő megoldás, mint a 3. pontban láttuk, megadja e probléma megoldását. Itt azonban eleve nem kötöttük ki, hogy $\mathfrak{M}$ kompakt.

Ezt a z_δ elemet tekintjük (6. 1) *megoldásának* ha (6. 1) jobb oldala $\tilde{u}_\delta$, a „mért adatok" (tulajdonképp ez közelítő megoldás csupán). Mivel a probléma Hadamard szerint inkorrekt, $A^{-1}\tilde{u}_\delta$ esetleg nem is létezik, vagy többértelmű, vagy nagy ingadozást mutat, ez az értelmezés kínálkozik; lehet viszont, hogy $A\tilde{z}_\delta \neq \tilde{u}_\delta$.

B. PROBLÉMA: Becslés adandó a $\varrho(\bar{z}, \tilde{z}_\delta)$ mennyiségre, illetve $\varepsilon(\delta)$-ra, δ függvényében.

E problémák megoldása bizonyos előkészítést kíván, új fogalmak bevezetését, stb. melyeket A. N. TIHONOV így foglalt össze:

Az $Az = u$ operátoregyenlet *regularizátorának* nevezünk bármely R_α $\alpha(\alpha > 0)$ paramétertől függő operátort, amelyre fennáll:

1. R_α értelmezve van tetszőleges $\alpha > 0$ mellett, az egész U téren, és értékkészlete Z,

2. R_α folytonos az U téren, u szerint,

3. tetszőleges $z \in Z$ mellett $\varrho(z, R_\alpha Az) \to 0$, ha $\alpha \to 0$ (a konvergencia nem egyenletes).

1. és 2. másképp azt jelenti, hogy minden $u \in U$ és $\alpha > 0$ mellett létezik egy $R_\alpha u = z^{(\alpha)}$ elem, mely „folytonosan" függ az u elemtől. A $\{z^{(\alpha)}\}$ halmazt a közelítő megoldások *regularizált családjá*nak nevezzük. 3. folytán monoton 0-hoz tartó $\{\alpha_n\}$ sorozathoz tartozó $\{z^{(\alpha_n)}\}$ sorozat tagjai az egzakt megoldást közelítő megoldások konvergens sorozatát képezik. R_α megalkotását, alkalmazását, $\{z^{(\alpha)}\}$ képzését, a $z^{(\alpha)}$-val való közelítést *regularizációnak* hívjuk. Egy $z^{(\alpha)}$-t szolgáltató algoritmus neve: *regularizáló algoritmus*. A közelítés bizonyos jellegű konvergálást jelent; így beszélhetünk gyenge (0-rendű)-, erős-, egyenletes-, n-ed rendben sima — stb. regularizációról stb. Ha (6. 1)-hez található legalább egy regularizátor, (6. 1) megoldása problémáját *regularizálhatónak* hívjuk. $\alpha = \alpha(\delta)$ neve: *regularizáló paraméter*. Egyazon problémához elvileg több regularizátor is megadható.

Egy regularizátor meghatározása adott esetben többféleképp történhetik. Többen R_α valamilyen általános előállításából kiindulva jutottak el R_α alkalmas alakjára. Egy másik út kikerüli R_α előállítását és rögtön $z^{(\alpha)}$ konstruktív meghatározásával foglalkozik. Ezt ismertetjük, bevezetője, A. N. TIHONOV (1965 [2]) nyomán) speciális esetekben korábban is foglalkozott ezzel A. N. TIHONOV (1963 [1], [2]).

Legyen U, Z a fenti, A folytonos operátor, melyre $Az_1 \neq Az_2$, ha $z_1 \neq z_2$ ($z_1, z_2 \in Z$). *Tegyük fel*, hogy

1. létezik Z-ben egy $\bar{Z} \subset Z$ részhalmaz, melyen bevezethető egy új „távolság" $\varrho_{\bar{Z}}(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ ($\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in \bar{Z}$) és ez majorizálja a Z téren bevezetett $\varrho_Z(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ „távolságot", azaz $\varrho_{\bar{Z}}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \geqq \varrho_Z(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$;

2. az $\bar{S}_C(\bar{z}_0) = \{\bar{z} \in \bar{Z} : \varrho_{\bar{Z}}(\bar{z}, \bar{z}_0) \leqq C\}$ C sugarú, $\bar{z}_0$ középpontú, $\bar{Z}$ térbeli „gömb", Z térbeli „távolságmérték" szerint, kompakt Z-ben.

Tekintsük most az

$$M^{(\alpha)}[\bar{z}, u] = [\varrho_U(A\bar{z}, u)]^2 + \alpha\Omega(\bar{z}) \qquad (\bar{z} \in \bar{Z}) \tag{6.2}$$

ún. *simító funkcionált*, ahol $u \in U$ tetszőleges, $\Omega(\bar{z}) = [\varrho_{\bar{Z}}(\bar{z}, \bar{z}_0)]^2$, $\bar{z}_0 \in \bar{Z}$ tetszőleges, $\alpha > 0$ ($\Omega(\bar{z})$ neve *regularizáló funkcionál*).

Bizonyítható: 1. *ha Z normált tér és $\bar{Z}$ Hilbert-tér*, tetszőleges $\alpha > 0$ mellett létezik egyetlen $z^\alpha \in \bar{Z}$ pont, melyre $M^{(\alpha)}[\bar{z}, u]$ felveszi minimumát; 2. ekkor $\{z^{(\alpha)}\}$ a közelítő megoldások regularizált családját szolgáltatja, vagyis, ha $A\bar{z} = \bar{u}$ ($\bar{z} \in \bar{Z}$), akkor megadva egy $\varepsilon > 0$ mennyiséget, a (6. 2) kifejezést minimalizáló $z^{(\alpha)}$ „távolságára" fenn fog állni $\varrho(\bar{z}, z^{(\alpha)}) \leqq \varepsilon$, ha csak $\alpha = \alpha(\varepsilon, \bar{z})$ elegendően kicsi.

Lássunk konkrét *példát* a (6. 2) lényeges részét kitevő $\Omega(\bar{z})$ regularizáló funkcionálra. Legyen $Z = C(\mu, \nu)$ a (μ, ν) intervallumon folytonos egyváltozós függvények tere, $\bar{Z} = W_2^1$ azon függvények halmaza, melyeknek léteznek a SZOBOL'EV által bevezetett elsőrendű, általánosított, négyzetesen integrálható deriváltjai. A W_2^1 tér *Hilbert*-tér, melyben a „távolságot"

$$\varrho_{\bar{Z}}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \|\bar{z}_1 - \bar{z}_2\|_{\bar{Z}} = \sqrt{\int_\mu^\nu [k_1(s)\bar{z}'(k)^2 + k_0(s)\bar{z}(s)^2]\, ds}$$

$$\left(\bar{z}(s) = \bar{z}_1(s) - \bar{z}_2(s)\right)$$

értelmezi, ahol $k_0(s)$, $k_1(s)$ pozitív, folytonos függvények. Bizonyítható, hogy e $\bar{Z}$

és $\bar{Z}$ halmazok elemei kielégítik a fenti feltételeket, $\|\bar{z}-\bar{z}_0\|_{\bar{z}}^2$, tehát $\Omega(\bar{z})$ simító funkcionálnak vehető.

A. N. TIHONOV 1963 [1] alapvető dolgozatában ezzel a simító funkcionállal dolgozott. Az ott vizsgált operátoregyenlet az

$$\int_a^b K(x, s)z(s)\,ds = u(x) \qquad (c \leqq x \leqq d,\ u(x) \in L_2(c, d))$$

I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenlet volt. A simító funkcionál teljes alakja a fentiek figyelembevételével

$$M^{(\alpha)}[\bar{z}, u] = \int_c^d \left[\int_a^b K(x, s)\bar{z}(s)\,ds - u(x)\right]^2 dx + \alpha\left[\int_a^b [k(s)\bar{z}'(s)^2 + p(s)\bar{z}(s)^2]\,ds\right] \tag{6.3}$$

$$(\bar{z} \in \bar{Z},\ \alpha > 0)$$

volt, ahol $k(s) > 0$, $p(s) > 0$ folytonos függvények, melyeket esetenként választunk meg. Bizonyítható, hogy az $M^{(\alpha)}[\bar{z}; u]$ funkcionált minimalizáló $z^{(\alpha)}(s)$ függvény megoldása az

$$L^{(\alpha)}[z] = \alpha\left\{\frac{d}{ds}\left[k(s)\frac{dz}{ds}\right] - p(s)z(s)\right\} - \left\{\int_a^b \bar{K}(s, v)z(v)\,dv - \bar{b}(s)\right\} = 0 \tag{6.4}$$

Euler-féle egyenletnek, ahol $z'(a) = z'(b) = 0$,

$$\bar{K}(s, v) = \int_c^d K(\xi, s)K(\xi, v)\,d\xi,\quad \bar{b}(s) = \int_c^d K(\xi, s)u(\xi)\,d\xi.$$

Az

$$L^{0}[z] = \frac{d}{ds}\left[k(s)\frac{dz}{ds}\right] - p(s)z(s) = f(s) \qquad (z'(a) = z'(b) = 0)$$

Green-féle függvénnyel, melyet a fenti *Euler*-féle operátor határoz meg, az *Euler*-féle egyenlet átmegy egy II. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenletbe, s ennek lesz megoldása a keresett $z^{(\alpha)}(s)$ $(\alpha > 0)$.

A. N. TIHONOV 1963 [2] ugyancsak alapvető dolgozatában szintén az előző integrálegyenlettel foglalkozott, de abban az esetben, amidőn a mag folytonos, $z(s) \in C^{(n+1)}(a, b)$ (az (a, b) szakaszon n-ed rendben sima függvények tere), $u(x) \in L_2(c, d)$. Egyéb részleteket mellőzve közvetlenül bizonyította, hogy ebben az esetben a simító funkcionál

$$M^{(\alpha)}[\bar{z}, u] = \int_c^d \left[\int_a^b K(x, s)\bar{z}(s)\,ds - u(x)\right]^2 dx + \alpha\left[\int_a^b \left\{\sum_{i=0}^{n+1} K_i(s)\bar{z}^{(i)}(s)^2\right\} ds\right], \tag{6.5}$$

ahol $K_i(s) > 0$ egy folytonos függvény. (E funkcionál $n = 0$ esetén átmegy (6. 3)-ba.) Ebben az esetben tetszőleges $\alpha > 0$ mellett létezik egy $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható $z_n^{(\alpha)}(s)$ függvény, mely minimalizálja (6. 5)-öt. $z_n^{(\alpha)}(s)$-t meghatározza az

$$L_n^{(\alpha)}[z] = \alpha\left\{\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+1}\frac{d^i}{ds^i}\left[K_i(s)\frac{d^iz}{ds^i}\right]\right\} - \left\{\int_a^b \bar{K}(s, v)z(v)\,dv - \bar{b}(s)\right\} = 0$$

Euler-féle egyenlet, ahol a kerületi feltételek

$$\Pi^l(s) = \left[\left\{\sum_{i=l+1}^{n+1}(-1)^{i-l-1}[K_i(s)z(s)^i]^{(i-l-1)}\right\}\right]_{a,b} = 0, \qquad (l = 1, \dots, n+1)$$

$$\bar{K}(s, v) = \int_a^b K(\xi, s)K(\xi, v)\,d\xi, \qquad \bar{b}(s) = \int_c^d K(\xi, s)u(\xi)\,d\xi.$$

A kerületi feltételek *Green*-függvényével, amely

$$\tilde{L}_n[z] = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+1}\frac{d^i}{ds^i}[K_i(s)z^{(i)}(s)] = f,$$

$$\Pi^l(a) = \Pi^l(b) = 0,$$

($l = 1, \dots, n+1$), (6. 6) egy II. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenletbe megy át, melynek megoldása a keresett $z_n^{(\alpha)}(s)$. — Ha $a = c$, $b = d$ és

$$K(x, s) = \int_a^b \hat{K}(\xi, x)\hat{K}(\xi, s)\,d\xi,$$

$$\tilde{L}_n^{(\alpha)}[z] = \alpha L_n[z] - \left\{\int_a^b K(s, v)z(v)\,dv - u(s)\right\} = 0$$

lesz, $\Pi^l(a) = \Pi^{(l)}(b) = 0$, mely egyszerűbb az előzőnél (ide tartozik a *Gauss*-függvény mag, a *Cauchy*-függvény mag, általában szimmetrikus stabilis sűrűségfüggvényt képviselő magok).

A korábbi módszerek mellékfeltételeivel szemben a regularizációs módszer nem köti ki, hogy (6. 1) (létezőnek ismert) megoldása eleve valamilyen adott (Z halmazbeli) kompaktumba tartozzék. Hátránya mégis, hogy nem tudta mellőzni a megoldást tartalmazó $\bar{Z}$ halmaz bevezetését, melyen a Z-belinél erősebb „távolságmértéket" kellett értelmezni, — és a többi, fent felsorolt megkötéseket sem; a megoldás mindenképpen egy speciális $\mathfrak{M}$ halmaz eleme. Nagy előny azonban, hogy a simító funkcionállal dolgozhatunk.

MEGJEGYZÉS. Kapcsolat létesíthető egy regularizátor által létesített megoldás és a V. K. IVANOV által bevezetett, fentebb ismertetett kvázimegoldás között — amint arra például I. N. DOMBROVSZKAJA és V. K. IVANOV (1965 [11]) rámutattak —, közelítő megoldások regularizált családja azonos bizonyos kiterjesztett $\mathfrak{M}_c = \{z : \Omega(z) \leqq c\}$ kompaktumon értelmezett kvázimegoldások családjával, ahol $\Omega(z)$ bizonyos mellékfeltételeknek eleget tevő nemnegatív konvex funkcionál. A kvázimegoldásokat ekkor a $\varrho(Az, u_0)$ $(Az_0 = u_0)$ funkcionált minimalizáló z_c pontok adják meg, amidőn z csak az $\mathfrak{M}_c$ halmazban változhat. Ez a kvázi megoldás-család $c \to \infty$ esetén tart a közelítő megoldások regularizált családjához.

M. M. LAVRENT'EV és V. G. VASZIL'EV (1966 [2]) a következőképpen jellemezte a szóban forgó összefüggést. Tegyük fel, hogy (6.1)-nek egyetlen megoldása van. Legyen Z_α $(\alpha>0)$ egy egyparaméteres kompaktum-család, mely eleget tesz a $Z_{\alpha_1}\subset Z_{\alpha_2}$ $(\alpha_1<\alpha_2)$, $\bigcup\limits_{\alpha>0} Z_\alpha = Z$ feltételeknek. Legyen B_α egy folytonos operátor, melynek értelmezési tartománya U és amelyre $B_\alpha u$ (6.1)-nek kvázimegoldása, ha az ehhez bevezetett $\mathfrak{M}$ halmaz Z_α-val azonos. Ekkor B_α (6.1)-nek regularizátora lesz.

Ezen előkészítés után most már rátérhetünk az *A. problémára*. Megmutatjuk, hogy az *A*. problémára — bizonyos megkötések után — a regularizátor segítségével választ adhatunk.

Legyen az előzőkben szereplő Z és U *Banach*-tér, A lineáris folytonos operátor. Legyen $\bar{z}$ (6.1)-nek feltevés szerint létező, $\bar{u}$-hoz tartozó megoldása. Legyen $\bar{u}$ „mért" értéke $\tilde{u}_\delta$ és a közelítésre álljon fenn $\|\bar{u}-\tilde{u}_\delta\| \leqq \delta$ és létezzék regularizátor, R_α. Mivel feltevés szerint $\tilde{u}_\delta \in U$, a regularizátor definíciója 1. pontja szerint $R_\alpha\tilde{u}_\delta = z_\delta^{(\alpha)}$ értelmezve van. Tekintsük e $z_\delta^{(\alpha)}$ és az egzakt megoldás, $\bar{z}$, „távolságát";

$$\|\bar{z}-z_\delta^{(\alpha)}\| \leqq \|\bar{z}-R_\alpha A\bar{z}\| + \|R_\alpha A\bar{z}-z_\delta^{(\alpha)}\| = \|\bar{z}-R_\alpha A\bar{z}\| + \|R_\alpha\bar{u}-R_\alpha\tilde{u}_\delta\| \leqq$$

$$\leqq \|\bar{z}-R_\alpha A\bar{z}\| + \|R_\alpha\|\cdot\|\bar{u}-\tilde{u}_\delta\| \leqq \|\bar{z}-R_\alpha A\bar{z}\| + \|R_\alpha\|\cdot\delta.$$

A probléma inkorrekt volta folytán ugyan $\|R_\alpha\|\to\infty$, ha $\alpha\to 0$, de mindig megadható oly monoton $\alpha=\alpha(\delta)$ függvény, hogy $\|R_{\alpha(\delta)}\|\cdot\delta = o(\delta)$ legyen, mely $\to 0$, ha $\delta\to 0$. A regularizátor definíciója 3. pontja értelmében $\|\bar{z}-R_\alpha A\bar{z}\| \to 0$, ha $\alpha\to 0$, vagyis akkor is, ha $\delta\to 0$, mert $\alpha=\alpha(\delta)\to 0$, ha $\delta\to 0$. Így tehát $\alpha(\delta)$ alkalmas választásával elérhető, hogy — rögzített $\bar{z}$ mellett — $\|\bar{z}-z_\delta^{(\alpha)}\| \leqq \varepsilon(\delta)$, ha $\|\bar{u}-\tilde{u}_\delta\| \leqq \delta$, $\varepsilon(\delta)\downarrow 0$, ha $\delta\downarrow 0$. Más szóval, az R_α regularizátor bevezetésével elérhető, hogy az R_α segítségével és alkalmas $\alpha=\alpha(\delta)$ paraméterrel az $\tilde{u}_\delta$ „mért adatokból" megalkossuk (5. 1) fentebb értelmezett megoldását.

Rögtön felmerül a kérdés: nem lesz-e $z_\delta^{(\alpha)}$ is minimalizálója valamilyen funkcionálnak, — ekkor tudniillik R_α ismerete nélkül is meghatározható volna. E kérdésre A. N. TIHONOV (1963 [1], [2], 1965 [2], 1967 [4]) igenlő választ adott.

Legyenek $\alpha_0(\delta)$, $\varepsilon_0(\delta)$ δ valamilyen csökkenő függvényei, $\alpha_0(0)=0$, $\varepsilon_0(0)=0$ és legyen

$$\frac{\delta^2}{\varepsilon_0(\delta)} \leqq \alpha \leqq \alpha_0(\delta) \qquad (\text{„}\alpha_0\text{-feltevés"}). \tag{6.7}$$

Tekintsük a (6. 3) funkcionál által képezett

$$M^{(\alpha)}[z, \tilde{u}_\delta] \tag{6.8}$$

kifejezést; ebben $\alpha>0$ tegyen eleget az „α_0-feltételnek". Legyen $\tilde{z}_\delta^{(\alpha)}$ az $M^{(\alpha)}[z, \tilde{u}_\delta]$ funkcionált minimalizáló elem. Bizonyítható, hogy ekkor $\|\bar{z}-\tilde{z}_\delta^{(\alpha)}\| \leqq \varepsilon(\delta)$, $\varepsilon(\delta)\downarrow 0$, ha $\delta\downarrow 0$, vagyis tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz megadható $\delta_0(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $\delta\leqq\delta_0(\varepsilon)$, akkor $\|\bar{z}-\tilde{z}_\delta^{(\alpha)}\| \leqq \varepsilon$. Ez azonban épp azt jelenti, hogy $\tilde{z}_\delta^{(\alpha)}$ a fejezet elején említett értelemben (6.1)-nek *közelítő megoldása*, ha $\bar{z}\in\bar{Z}$. (6.1) közelítő megoldását is megkaphatjuk tehát bizonyos funkcionál minimalizálása útján. (6. 3) tulajdonságai, kezelésmódja (6. 8)-ra szóról-szóra fennállnak, ami főleg a minimalizálás szempontjából fontos.

Mindebből látható, hogy a regularizáció módszere szempontjából rendkívül lényeges az α regularizáció paraméternek az α_0-feltétellel (vagy ehelyett bevezetett, újabb feltételekkel) összhangban való megválasztása. Ezzel számos dolgozat foglalkozott.

A *B. problémára* csak újabb fogalom bevezetése után adhatunk választ. Ez az *egyenletes regularizáció* fogalma, megalkotója V. K. IVANOV (1966 [6]). Az előfeltételek a következők:

Legyen Z, U *Banach*-tér, A lineáris folytonos operátor, melynek értelmezési tartománya Z, értékkészlete U egy mindenütt sűrű halmaza, emellett A^{-1} létezik, de — például — nem korlátos. Tekintsük az $Az=u$ $(z\in Z,\ u\in U)$ operátoregyenletet. Ennek feltételeink mellett létezik (egyetlen) megoldása, de az nem függ „folytonosan" az „adatoktól": *Hadamard* szerint inkorrekt a probléma.

Azt mondjuk, hogy egy, az α $(\alpha>0)$ paramétertől függő $\hat{R}_\alpha$ lineáris operátor, melynek értelmezési tartománya U, értékkészlete Z, az $Az=u$ operátoregyenletet — valamely $\mathfrak{M}$ $(\mathfrak{M}\subset Z)$ halmazon — *egyenletesen regularizálja*, ha

1. $\hat{R}_\alpha$ értelmezve van az egész U téren;
2. $\hat{R}_\alpha$ folytonos az U téren, u szerint;
3. tetszőleges $z\in\mathfrak{M}$ mellett $\|z-\hat{R}_\alpha Az\|\to 0$, *egyenletesen*, ha $\alpha\to 0$.

Vegyük észre, hogy A. N. TIHONOV-nál nincs kiemelve az az $\mathfrak{M}$ halmaz, melyen a regularizáció folyik.

Ami mármost a *B.* problémát illeti, V. K. IVANOV (1966 [6]) megmutatta, hogy megoldásának szükséges feltétele, hogy létezzék a (6. 1) egyenletet egyenletesen regularizáló $\hat{R}_\alpha$ operátor, — elégséges feltétele pedig, például, hogy $\bar{z}$-től $(\bar{z}\in\mathfrak{M})$ független kvantitatív becslésünk legyen $\|\bar{z}-\hat{R}_\alpha A\bar{z}\|$-re és kvantitatív becslés $\|\hat{R}_\alpha\|$-ra.

Mindez feltételezi $\alpha=\alpha(\delta)$ közelebbi ismeretét és hangsúlyozza az erre irányuló vizsgálatok fontosságát.

Mivel egyenletünk megoldásának mindig valamilyen $\mathfrak{M}$ halmazba kell tartoznia, szükségesnek látszott szükséges és elégséges feltételét találni a *B.* probléma megoldhatóságának. V. K. IVANOV ezeket így összegezte: 1. $\hat{R}_\alpha A$ $(0<\alpha<\alpha_0)$ legyen teljesen folytonos; 2. $\mathfrak{M}$ egy végesdimenziós altérig terjedő pontossággal legyen kompakt. — 1. teljesül többek közt, ha A teljesen folytonos; ez a helyzet például, ha (5. 1) I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenlet.

MEGJEGYZÉS. — Ha (6. 1) z megoldásához van valamilyen, eddig nem említett módon, — például z egzakt analitikus előállítása alapján megszerkesztett — $\hat{z}$ elem, mely „mért" $\tilde{u}_\delta$ „adatokra" támaszkodik és amelyre igazolható, hogy ha $\varrho(u,\tilde{u}_\delta)\leqq\delta$ (ahol $Au=z$), akkor $\varrho(z,\hat{z})\leqq\varepsilon(\delta)$, $\varepsilon(\delta)\downarrow 0$, ha $\delta\downarrow 0$, akkor $\hat{z}$ — *per definitionem* — (6. 1) megoldásának, illetve a közelítő megoldások regularizált családja tagjának tekinthető. Az ilyen közelítő megoldásokban mindig szereplő paraméterek valamelyike fogja ekkor átvenni az α regularizáló paraméter szerepét.

E tény a gyakorlatban nagyon fontos, mert lehetőséget nyújt arra, hogy esetleg az R_α regularizátor megkeresése vagy az $M^\alpha[\bar{z},\tilde{u}_\delta]$ funkcionál bevonása nélkül is megtaláljuk (6. 1) közelítő megoldását, például valamilyen, $\tilde{u}_\delta$-ra alkalmazott iterációs eljárás révén. Tulajdonképp ez az eset szerepel például A. B. BAKUSINSZKIJ és V. I. SZTRAHOV 1968 [11] cikkében.

A regularizáció módszerével kapcsolatban fontos újabb lépés volt még, hogy V. K. IVANOV 1966 [15] dolgozatában bevezette a *Tihonov*-féle regularizációs módszer bizonyos dualisát, amelyben egyszerűbb az $\alpha=\alpha(\delta)$ regularizáló paraméter annyira sarkalatos megválasztása a kiindulási adatok függvényeként. Módszere a következő:

Legyen az egyenlet $Ax=y$ $(x \in X,\ y \in Y)$, ahol X lineáris normált tér, Y *Hilbert*-tér, A folytonos (nem okvetlenül lineáris) operátor. Feltesszük, hogy x nem függ folytonosan y-tól (inkorrekt a probléma), továbbá, hogy $y=y_0$-ra létezik egyetlen megoldás, $x_0 \neq 0$, mely valamilyen $\mathfrak{M}$ lineáris sokaságba tartozik, mely sűrű X-ben. Mint korábban is, meghatározandó, illetve valamilyen értelemben közelítendő ez az x_0. Feltesszük, hogy y_0 helyett csak y_δ adott, melynek „távolsága" y_0-tól, eleget tesz $\|y_0-y_\delta\| \leqq \delta$-nak. Megoldásnak tekintünk egy y_δ alapján konstruált x_δ közelítő megoldást, mely esetleg nem is megoldása az egyenletnek $(Ax_\delta \neq y_\delta)$, melyre azonban ésszerű kikötések teljesülnek s ezért választjuk ki. Így tette ezt már A. N. Tihonov is a regularizációs módszerben, megalkotva a simító funkcionált, mely egy $\alpha>0$ paramétertől függ, s megkeresve az ezen funkcionált minimalizáló $x_\delta^{(\alpha)}$ elemet. Tudjuk, hogy $\alpha(\delta)=c\delta^2$ $(c>0)$, illetve kissé általánosabb összefüggés esetén $\|x_0-x_\delta\| \to 0$, ha $\delta \to 0$. *Ezt az $x_\delta^{(\alpha)}$-t fogadta el közelítő megoldásnak* a *Tihonov*-féle módszer. — A gyakorlatban azonban általában $\delta>0$ adott, és ennek segítségével kellene megadni, *pontosan*, α-t; c azonban elég tetszőleges és így $\alpha=c\delta^2$ sem adható meg pontosan. Kérdés, nem róhatók-e ki kiegészítő feltételek $x_\delta^{(\alpha)}$-ra, melyek biztosítanák α egyértelmű és — bizonyos értelemben — optimális megválasztását.

Ilyen irányú kísérlet történt már A. N. Tihonov és B. V. Glaszko 1964 [5], 1965 [5] munkáiban.

Megemlítjük, hogy a regularizáció módszerét L. P. Grabar (1967 [21]) I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenlet esetében a megoldás és a jobb oldalnak a $0, h, \ldots, nh$ pontokon ortonormált $P_{m,n}(x)$ $(m=0, 1, \ldots)$ *Csebüsev*-polinomrendszer szerinti kifejtésekor kapott, a kifejtés együtthatóira fennálló lineáris egyenletrendszer megoldásának bizonyos optimalizálásával javasolja pótolni; e módszerrel pl. A. N. Tihonov és V. B. Glaszko 1964 [5]-ben szereplő regularizációs módszerrel kezelt metodikai példáját sokkal eredményesebben lehetett tárgyalni.

B. K. Ivanov megmutatja, hogy α meghatározásának bizonytalansága kiküszöbölhető, ha $x_\delta^{(\alpha)}$-ra kikötjük, hogy $\|Ax_\delta^{(\alpha)}-y_\delta\| \leqq \delta$ legyen, ami elég természetes kikötés. Az így kapott $x_\delta^{(\alpha)}$ is eleget tesz az $\|x_0-x_\delta^{(\alpha)}\| \to 0$, ha $\delta \to 0$ feltételnek. E gondolat megtalálható D. L. Phillips-nél (1962 [2]), a konvergenciával azonban ő nem foglalkozott. (Lineáris esetben ez út és a *Tihonov*-féle kapcsolatáról, $\|Ax_\delta^{(\alpha)}-y_0\| \leqq \delta$ megkötés mellett (mely nem a legjobb), szó volt I. N. Dombrovszkaja 1964 [8], I. N. Dombrovszkaja és V. K. Ivanov 1965 [10] dolgozatában.)

Ami a részleteket illeti, a korábbi *Tihonov*-féle módszerekben inkorrekt probléma közelítő megoldásához azt kellett tudni, hogy megoldás létezik és valamilyen $\mathfrak{M}$ korrektségi osztályba tartozik. $\mathfrak{M}$ vagy kompaktum X-ben, vagy X egy részhalmaza, melyen az X-belinél erősebb metrikát vezettünk be (regularizációs módszer). Ennek folytán elfogadható a következő gondolatmenet: tegyük fel, hogy létezik egy Z *Hilbert*-tér, melyet X-re egy B teljesen folytonos lineáris operátor leképez. Feltesszük, hogy x_0 B értékkészletébe $\big(R(B);\ R(B) \subset X\big)$ tartozik, $\big(x_0 \in R(B)\big)$. Ha $S_r = \{z : \|z\| \leqq r\}$ $(r>0)$ gömb Z-ben, és $M_r=BS_r$ (ez kompaktum X-ben), akkor $R(B) = \bigcup_{r=0} M_r = M$. Legyen $C=AB$ (ez teljesen folytonos operátor), mely leképezi Z-t Y-ra, és $\Omega_\delta = \{z : \|Cz-y_\delta\| \leqq \delta\}$ azon z elemek halmaza, melyek eleget tesznek az $\|Ax-y_\delta\| \leqq \delta$ $(x=Bz,\ \delta<\delta_0)$ feltételnek. Bizonyítható, hogy ekkor Ω_δ-ban létezik egy z_δ elem, melyre $\|z_\delta\|$ minimális, és erre a z_δ-ra

$$\|Cz_\delta-y_\delta\| = \delta. \tag{6.8}$$

Bizonyítható, hogy z_δ azonos az

$$M[z, \alpha, \delta] = \|Cz - y_\delta\|^2 + \alpha\|z\|^2 \qquad (0 < \delta < \|A(0) - y_\delta\|) \tag{6.9}$$

funkcionált minimalizáló $z_\delta^{(\alpha)}$-val, bizonyos α-ra. Konkrét feladat esetén legjobb α-nak valamilyen α_0 értéket adva, minimalizálni (6. 9)-et, és a kapott $z_\delta^{(\alpha_0)}$-val ellenőrizni (6. 8)-at. (Elméletileg (6. 9)-ből $z_\delta^{(\alpha)}$-t α függvényeként kapjuk, s aztán megkeressük azt az $\alpha_0(\delta)$-t, melyre (6. 8) teljesül.) A megfelelő $x_\delta^{(\alpha)}$ B-vel kiszámítható. Az is fennáll, hogy $\|x_0 - x_\delta\| \to 0$ (erősen), ha $\delta \to 0$.

Ez újabb módszernek alkalmazásai is voltak már: T. F. DOLGOPOLOVA és V. K. IVANOV 1966 [11], V. K. IVANOV és A. A. CSUDINOVA 1966 [9].

A regularizációs módszer fontos továbbfejlesztését közölte konvolúció-típusú integrálegyenletek megoldásának vizsgálata kapcsán V. N. SZTRAHOV (1968 [12]); az alapgondolat már V. N. SZTRAHOV 1963 [6] cikkében szerepel (hasonló jellegű I. D. SZAVINSZKIJ 1967 [23] cikke). — Az általa vizsgált egyenlet

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) K(x-\xi)\, d\xi = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{6.10}$$

ahol $\varphi, f \in L_2$ és — $k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-itx} dx$ jelölés mellett — $|k(t)| \leqq 1$, $k(t) \neq 0$ majdnem minden t-re.

Tegyük fel, hogy adott $f(x)$ mellett (6. 10)-nek van (egyetlen megoldása; mivel azonban $\|A^{-1}\| = \infty$, (6. 10) megoldása *Hadamard* szerint inkorrekt probléma.

Alkalmasan értelmezett közelítő megoldás előállításához V. N. SZTRAHOV bevezeti a következő fogalmakat:

A) Legyen L ($\|L\| < \infty$) egy, az L_2 térben ható lineáris operátor. Az L operátort *szimmetrikusan végesdimenziósnak* nevezi, ha Lf ($f \in L_2$) egy x pontban felvett értéke meghatározásához felhasználjuk $f(x)$ véges számú értékét, melyeken véges számú aritmetikai műveletet hajtunk végre.

B) A $T_{\alpha,n}$ ($0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0$, $n_0 \leqq n \leqq \infty$) kétparaméteres lineáris operátort a (6.10) egyenletet az $\mathfrak{M} \in L_2$ halmazon *egyenletesen regularizálónak* nevezzük, ha $\|T_{\alpha,n}\| < \infty$ ($\alpha \neq 0$, $n \neq \infty$) és ha minden $\varphi \in \mathfrak{M}$-re és legalább egy (α, n) sorozatra

$$\|\varphi - T_{\alpha,n} A\varphi\| \to 0,$$

egyenletesen, ha $\alpha \to 0$, $n \to \infty$.

A (6.10) integrálegyenlet f jobb oldala helyett valamilyen f_δ ($\|f - f_\delta\| \leqq \delta$) lesz „mérhető". Bizonyítható, hogy ha ismeretes egy a (6.10) egyenletet az $\mathfrak{M}$ halmazon egyenletesen regularizáló $T_{\alpha,n}$ kétparaméteres lineáris operátor ($0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0$, $n_0 \leqq n \leqq \infty$), akkor egyenletünk megoldásának problémája *Tihonov* szerint korrekt lesz és közelítő megoldása (a regularizátor alkalmazása mintájára) $T_{\alpha,n} f_\delta$, tudniillik egyszerűen igazolható, hogy $\|\varphi - T_{\alpha,n} f_\delta\| \leqq \|\varphi - T_{\alpha,n} A\varphi\| + \|T_{\alpha,n}\| \cdot \delta$ és megadható oly $\alpha = \alpha(\delta)$ monoton függvény, hogy kis δ mellett ezen egyenlőtlenség jobb oldala $T_{\alpha,n}$ egyenletesen regularizáló volta folytán tetszőlegesen kicsi lesz (vö. a fejezet elején bemutatott A. probléma megoldásával). $T_{\alpha,n}$ egyenletesen regularizáló voltára külön kritériumok adhatók; elegendő például, ha $\|T_{\alpha,\infty} - T_{\alpha,n}\| \to 0$ egyenletesen, midőn $n \to \infty$, $0 < \alpha < \alpha_0$ és $T_{\alpha,\infty}$ (*Tihonov*-féle) regularizátor. (Ezt, mint közbülső lépést sokszor kihasználják a bizonyítások.)

V. N. SZTRAHOV $T_{\alpha,n}$-nek a következő numerikusan végesdimenziós, kétparaméteres, (6.10)-et egyenletesen regularizálónak feltett $S_{\alpha,n}$ operátort veszi ($h(x)$ alkalmas függvény):

$$S_{\alpha,n}\{h(x)\} = \sum_{k=-n}^{n} c_k h(x+k\alpha)$$

($c_k = c_k(\alpha, n)$ később konkretizálandó együtthatók) mellyel (6.10) közelítő megoldása

$$\varphi_{\alpha,n}(x) \equiv S_{\alpha,n}\{f_\delta(x)\} = \sum_{k=-n}^{n} c_k f_\delta(x+k\alpha) \tag{6.11}$$

lenne.

Külön rámutatunk arra, hogy itt operátort konstruálunk meg és annak segítségével állítjuk elő a közelítő megoldást, — nem pedig egy valamilyen értelemben regularizált megoldás-családot, pl. egy funkcionál minimalizálása révén.

V. N. SZTRAHOV bebizonyítja, hogy ha

1. $\mathfrak{M}_1 \subset L_2$ ama korlátos $\varphi_\sigma(x)$ függvények halmaza, ($\|\varphi_\sigma\| \leqq N$, $\varphi_\sigma(x) \in \mathfrak{M}_1$) melyek *Fourier*-transzformáltja, $\Phi_\sigma(t)$ eleget tesz a $\Phi_\sigma(t) \equiv 1$, ha $|t| > \sigma$ feltételnek;

2.

$$c_k = c_k(\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \frac{e^{ik\alpha t}}{k(t)}\,dt, \tag{6.12}$$

vagyis $c_k \frac{1}{k(t)}$ *Fourier*-együtthatója a $|t| \leqq \pi/\alpha$ szakaszon (ez a megválasztás analitikus okokból kínálkozik!);

3. minden $\alpha > 0$-ra

$$\sup_{|t| \leqq \frac{\pi}{\alpha}} \left|\frac{1}{k(t)}\right| < \infty \quad \text{és} \quad \left|1 - \frac{k(t)}{k_{\text{per}}^{(\alpha)}(t)}\right| \leqq C \qquad \left(|t| > \frac{\pi}{\alpha}\right)$$

ahol C konstans, $k_{\text{per}}^{(\alpha)}(t)$ $k(t)$ $|t| \leqq \pi/\alpha$ intervallumbeli értékeinek $2\pi/\alpha$ periódusos megismétlése;

4.

$$\frac{1}{k_{\text{per}}^{(\alpha)}(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\alpha) e^{-ik\alpha t} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

egyenletesen konvergens, ha $\alpha > 0$;

akkor $S_{\alpha,n}$ az $\mathfrak{M}_1$ halmazon *valóban* egyenletesen regularizáló lesz és ha $\hat{\varphi}(x)$ (6.10) megoldása valamilyen $\hat{f}(x)$ mellett ($A\hat{\varphi} = \hat{f}$) és $\hat{\varphi} \in \mathfrak{M}_1 \subset L_2$, akkor az $\hat{f}_\delta$ „mért adatokkal” ($\|\hat{f} - \hat{f}_\delta\| \leqq \delta$) megalkotott

$$S_{\alpha,n}\{\hat{f}_\delta(x)\} = \hat{\varphi}_{\alpha,n} = \sum_{k=-n}^{n} c_k \hat{f}_\delta(x+k\alpha) \tag{6.13}$$

függvény, ahol c_k a (6.12) alatti, előírtan közelíti az $\hat{\varphi}$ megoldást, ha δ elég kicsi és α és n-t úgy választjuk meg, hogy

$$\frac{\delta}{N} \sup_{|t| \leqq \sigma} \left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ik\alpha t}\right| + \sup_{|t| \leqq \sigma} \left|\frac{1}{k_{\text{per}}^{(\alpha)}(t)} - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ik\alpha t}\right|$$

minimális legyen.

Hasonló tétel mondható ki, ha (6. 10) φ megoldására fennáll: $\varphi \in L_2^{(k+1)}$ ($L_2^{(k+1)}$ a $(k+1)$-szer deriválható függvények halmaza, $\varphi^{(\nu)} \in L_2$ $(\nu = 0, 1, \ldots, k+1)$). Ekkor (bizonyos feltételek mellett) $S_{\alpha,n}$ például az egyenletes konvergencia értelmében regularizáló lesz,

$$\max_x \left| \frac{d^r\varphi}{dx^r} - \frac{d^r\varphi_{\alpha,n}}{dx^r} \right| \to 0 \qquad (r \leqq k;\ \alpha \to 0,\ n \to \infty)$$

értelemben.

Természetesen sokféleképp lehet (6.11) típusú, egyenletesen regularizáló kétparaméteres lineáris operátort megszerkeszteni próbálni, pl. más elv szerint választani, „kézenfekvően" a c_k együtthatókat a fentiekben. Csak az a fontos, hogy a bevezetett operátor egyenletesen regularizáló voltát bizonyítani tudjuk.

Könnyen belátható, hogy kis átfogalmazással F. JOHN 1955 [5], MEDGYESSY PÁL 1966 [22] és MEDGYESSY PÁL és VARGA LÁSZLÓ 1968 [21] dolgozatainak eredménye tulajdonképp ebbe a megoldásmód-típusba sorolható, mely igen alkalmasnak látszik.

A regularizációs módszer alapgondolatának és főbb kiterjesztéseinek ismertetése után most megpróbáljuk felvázolni az idetartozó irodalom legfontosabb cikkeit.

Összefoglaló ismertetést nyújt A. N. TIHONOV 1967 [4], 1968 [15]; R. V. SZULEJMANOV 1966 [10]; G. RIBIÈRE 1967 [22].

A regularizációs módszerrel rokon gondolatokról írt SZ. M. LANDISZ (1952 [1]), SZ. G. KREJN (1957 [2]), R. LATTÈS—J.-L. LIONS (1967 [25]; főleg az elliptikus parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos 4. fej. no 8-ban). A *Tihonov*-féléhez hasonló funkcionál bevezetése és felhasználása: W. OETTLI és W. PRAGER 1964 [6]; R. BELLMAN, R. E. KALABA és J. A. LOCKETT 1965 [8], [10]. — Konkrét feladatot old meg regularizációs módszerrel (vagy kiterjeszti azt) számos cikk. Ezek témái: *Fourier*-sorok stabilis szummációja (A. N. TIHONOV 1964 [4]); nemlineáris integrálegyenletek (A. N. TIHONOV 1964 [7]), A. N. TIHONOV és V. B. GLASZKO 1965 [5]; R. V. SZULEJMANOV (1965 [9]) iterációs eljárással adta meg közelítő megoldások regularizált családját. Optimális folyamatok elmélete: A. N. TIHONOV 1965 [4]; lineáris egyenletrendszerek megoldása: A. N. TIHONOV 1965 [7], [12]; egy műszaki hátterű integrálegyenlet: V. A. MOROZOV 1965 [14]; lineáris programozás: A. N. TIHONOV 1965 [13]. A. B. BAKUSINSZKIJ 1965 [1] I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenletet vizsgált, a terek s operátor speciális megválasztása mellett, lényegében II. fajú egyenletre való visszavezetéssel; megadta a közelítő megoldás L_2-ben erős konvergálása feltételét és a regularizáló paraméter megválasztását. V. JA. ARSZENIN egy integrálegyenletet vizsgált (a fenti $\bar{Z}$ halmaz szakaszonként folytonos függvények osztálya volt). V. P. MASZLOV (1965 [20]) a perturbációelmélettel hozta kapcsolatba a módszert. V. A. MOROZOV (1966 [5]) ugyanazokkal a kérdésekkel foglalkozott, mint A. B. BAKUSINSZKIJ 1965 [1]. JU. I. HUDAK (1966 [1]) integrálegyenletre visszavezetéssel a 0-rendű egyenletes közelítés feltételeivel és a regularizáló paraméter aszimptotikájával foglalkozott, V. K. IVANOV hasonló (alább leírandó) vizsgálataival kb. azonos eredménnyel. Funkcionálok optimalizálásával foglalkozott A. N. TIHONOV (1966 [3]). V. A. MOROZOV 1966 [4] a regularizációs módszert kiterjesztette tetszőleges *Hilbert*-terekben felírt egyenletekre, vizsgálta a regularizáló paraméter megválasztását, közelítő megoldás-módszert is adott. V. A. MOROZOV 1966 [5] a regularizálhatóság és a *Tihonov*-féle korrektség ekvivalenciája feltételeivel foglalkozott. T. F. DOLGOPOLOVA és V. K. IVANOV 1966 [11] a numerikus differenciálást tárgyalta a regularizációs módszerrel, O. A. LISZKOVEC pedig (1966 [23]) 2. rendű lineáris elliptikus parciális differenciálegyenleteket. R. BELLMANN, R. E. KALABA és J. A. LOCKETT 1966 [21] inkorrekt problémákat a *Tihonov*-féléhez hasonló funkcionál alapján tárgyalt, különböző analitikus eszközök felhasználásával. A. B. BAKUSINSZKIJ 1966 [17] lényegében saját 1965 [1] cikkéhez csatlakozik. A. B. BAKUSINSZKIJ 1967 [2] különböző R_α regularizátor-előállításokat vezetett be; ezek speciális esetként tartalmazták a *Tihonov*-féle alapvető munkákban szereplő R_α-kat. Kitért a regularizáló paraméter megválasztására, s iterációs közelítésekre is (az utóbbi kérdéskör először V. M. FRIDMAN 1956 [9] cikkében szerepel). V. A. MOROZOV 1967 [3] függvények bizonyos közelítésükből való rekonstruálása kérdését a regularizációs módszerrel vizsgálta. A. N. TIHONOV, V. JA. GALKIN és P. N. ZAIKIN 1967 [13] ugyanezt a módszert az optimális folyamatok elméletében alkalmazta. A regularizációs módszert topológikus terek esetére kiterjesztette, általános összefoglalásával együtt M. K. GAVURIN 1967 [11]. L. A. CSUDOV 1967 [17] parciális differenciálegyenletek véges differenciákkal való megoldására alkalmazta a regularizáció módszerét, A. D. GORBUNOV 1967 [19] pedig közönséges differenciálegyenlet-rendszerekkel kapcsolatos nemlineáris kerületiérték-feladatok megoldásában. M. K. LIHT 1967 [15] megmutatta, hogy ha az (5. 1) $A\varphi=\psi$ operátoregyenlet megoldása helyett csupán bizonyos, ezt tartalmazó funkcionált akarunk kiszámítani, akkor a megoldás egy a *Tihonov*-féléhez eléggé hasonló funkcionált minimizál, melynek használata amazénál egyszerűbb, beleértve a regularizáló paraméter megválasztását is. (Az általa alkalmazott eltérés-, illetve közelítésmértékek eltérnek a korábban használtaktól, pl. a $\tilde{\varphi}$ közelítő megoldás jóságát $\|A\tilde{\varphi}-\psi\|$ méri, $\psi\in F$, $\varphi\in\Phi$, ahol Φ, F lineáris normált tér, A lineáris operátor.) Regularizáló operátor-családok széles körű vizsgálatával foglalkozott V. A. MOROZOV 1967 [10].

V. K. IVANOV 1967 [1] arra az álláspontra helyezkedett, hogy az ő, illetve A. N. TIHONOV módszere lényegében azonosítható (kapcsolatukat már láttuk). Együttesen összefoglalta őket az $\int_a^b K(x,t)u(t)dt=f(x)$ $(c\leq x\leq d)$ egyenlet esetére, $f(x)\in L_2$, $K(x,t)$ négyzetesen integrálható, zárt, $u(t)\in U$, $B(t)=\sqrt{\int_a^b K(x,t)^2\,dx}$ mellett vizsgálva az 1. $B(t)\in C$, $U=C[a,b]$; 2. $B(t)\in L_2$, $U=L_2[a,b]$ eseteket, ahol K^*, az adjungált, mely a transzponált $K^*(x,t)=K(t,x)$ magnak felel meg, az $L_2[a,b]$-beli függvényeket folytonosakba viszi át. Azon feltételek mellett, hogy $f(x)=f_0(x)$-re van (a mag zártsága folytán egyetlen) $u_0(t)$ megoldás, valamilyen $\mathfrak{M}\subset U$ korrektségi osztályban és hogy $f_0(x)$ helyett $f_\delta(x)$ ismert, $\|f_0-f_\delta\|\leqq\delta$ adott, f_δ alapján keresendő $u_\delta(t)$, a „közelítő megoldás", melyre

$$\|u_0-u_\delta\|\to 0,\quad \text{ha}\quad \delta\to 0. \tag{6. 14}$$

(Ált. $f(x)=f_\delta(x)$ nem írható be az egyenletbe az instabilitás folytán.) — V. K. IVANOV szerint mindkét út jellemzője, hogy $\alpha>0$ paraméterrel bevezetnek egy másodfajú *Fredholm*-féle integrálegyenletet a kiindulási helyett; konkréten, az $u_0(t)$ megoldás helyett veszik $\alpha u+K^*Ku=K^*f_\delta$ megoldását, $u(t;\alpha,f_\delta)$-t, α és δ oly összefüggése mellett, mely (6. 14)-et biztosítja. (Ez egy szimmetrikus magú egyenlet, mely kezelhető.) Legyen $\Delta(\alpha,\delta;u_0)=\sup\|u_0(t)-u(t;\alpha,f_\delta)\|$, $\|f_0-f_\delta\|\leqq\delta, f_\delta\in L_2$. V. K. IVANOV foglalkozik a fő problémával, $\delta=\delta(\alpha)$-nak $(0\leqq\alpha\leqq\alpha_0,\ \delta\geqq 0)$, mely folytonos, monoton növekedő függvénye α-nak, aszimptotikájával ($\alpha \to 0$) és az $\mathfrak{M}$ korrektségi osztály ($u_0(t) \in \mathfrak{M}$) oly megválasztásával, hogy $\lim_{\alpha \to 0} \Delta(\alpha, \delta(\alpha); u_0) = 0$ legyen. (Az előzményeket illetőleg: M. M. LAVRENT'EV (1962 [1]), V. K. IVANOV (1963 [4]); A. N. TIHONOV (1963 [1]), [2]) különböző elégséges feltételeket adtak az $\mathfrak{M}$ korrektségi osztályra és $\alpha = \alpha(\delta)$-ra ($\delta(\alpha)$ inverze), melyek a mondott limesz létezését biztosítják, míg A. B. BAKUSINSZKIJ (1965 [1]) kimutatta, hogy $\delta/\sqrt{\alpha} \to 0$ szükséges és elégséges ahhoz, hogy a fenti 1. esetben $\|u_0 - u_\delta\| \to 0$, ha $\delta \to 0$.) — V. K. IVANOV kimutatja, hogy ha közelítő megoldásnak $u(t, \alpha(\delta), f_\delta)$-t vesszük, $\|u_0 - u_\delta\|$ gyenge L_2-konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele $\delta = O(\sqrt{\alpha})$, vagyis az A. N. TIHONOV-féle (1963 [2]) gyenge regularizációkor, ahol ő $\alpha(\delta) \leqq C\delta^2$-et vesz, a 2 kitevő nem növelhető. — Foglalkozott továbbá $\mathfrak{M}$ megválasztásával és a megfelelő $\mathfrak{M}$ esetén $\delta(\alpha)$ típusával ($\mathfrak{M}$ nem kell, hogy kompakt legyen).

MEGJEGYZÉS. Alapvető cikkeiben A. N. TIHONOV nem vezetett be határozottan II. fajú integrálegyenletet; mindig kerületiérték-feladat szerepelt.

Konkrét feladatnak a regularizáció módszerével való megoldását közli E. SZ. LEVITIN 1968 [3]. SZ. JA. VILENKIN és E. SZ. VILENKIN (1968 [8]) impulzus-átviteli függvényt értelmező I. fajú *Fredholm*-féle konvolúciós integrálegyenlet megoldását tárgyalja ugyanezen módon, míg V. JA. ARSZENIN és V. V. IVANOV (1968 [9]) *Volterra*-féle konvolúciós integrálegyenletét, melyben az egyes függvények stacionárius sztochasztikus folyamatok realizációi. V. JA. ARSZENIN és V. V. IVANOV (1968 [10]), [24]) I. fajú *Volterra*-féle konvolúciós integrálegyenlet megoldását vizsgálja (a $z^{(\alpha)}$ közelítő megoldások és az egzakt megoldás eltérése és a regularizáló paraméter megválasztása vizsgálatát beleértve), az „adatok" hibája figyelembevételével, a regularizációs módszerrel. A. B. BAKUSINSZKIJ és V. N. SZTRAHOV 1968 [11] a korábbiaktól eltérő regularizációs módszert ír le az $A\varphi = f$, $\|A\| = 1$, $\|A - E\| = 1$ egyenlet megoldására, ahol $\varphi \in X$, X reflexív *Banach*-tér. Egy a „hibás" f-re épített iterációs eljárással nyert elemet vesz az egzakt megoldás közelítésének; e közelítések regularizált családot képeznek. Egyenletesen konvergáló közelítéseket is megadott. (Cikke rokon R. V. SZULEJMANOV 1965 [9] dolgozatával.) — A. G. RAMM (1968 [16]) numerikus differenciáláshoz ekvidisztáns függvényértékekre felépített, lineáris kifejezés típusú regularizátort adott meg, új eljárással. Ugyancsak A. G. RAMM (1968 [17]) hasonló módszert dolgozott ki operátoregyenletre. JU. T. ANTOHIN (1968 [19]) a regularizátor fogalmát jelentősen kiterjesztette és stabilis megoldásmódszerekben alkalmazta, számos példa esetére (konvolúciós integrálegyenlet stb.) Ő részben M. M. LAVRENT'EV módszerét (operátor-hatványsor) általánosította, konvergenciabecslésekkel. Nem-korlátos operátorokat korlátosokkal (regularizátorokkal) közelített, s hibás „adatok" mellett meg tudta adni a legjobb közelítést szolgáltató operátort. — Lényegében véve regularizációs módszert alkalmaz I. fajú *Volterra*-féle integrálegyenlet megoldására W. W. SCHMAEDEKE (1968 [23]). V. V. BASZIN (1968 [20]) nemlineáris parciális differenciálegyenletre vonatkozó *Cauchy*-probléma megoldására alkalmazza a regularizációs módszert. A. B. BAKUSINSZKIJ (1968 [3]) saját 1967 [2] eredményeit nemkorlátos operátor esetére terjeszti ki. Tulajdonképp a regularizációs módszer szerepel MEDGYESSY PÁL és VARGA LÁSZLÓ 1968 [21] dolgozatában is, konvolúciós I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenlet megoldásában. — Ide sorolható R. ARCANGELI (1968 [24]) cikke is, mely a hővezetési egyenlet „retrográd" megoldását vizsgálja.

Tekintsük most az A. N. TIHONOV által bevezetett regularizációs módszert a *numerikus analízis* szempontjából.

A. N. TIHONOV (1963 [1]) kimutatta a következőket: (6. 3)-ban az (a, b) intervallumot osszuk fel az $s_j = jh - \frac{h}{2}$ $(j = 1, \ldots, n)$, a (c, d) intervallumot pedig az

$$x_i = ih_1 - \frac{h_1}{2} \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad \left(h = \frac{a-b}{n}, \quad h_1 = \frac{c-d}{m}\right)$$

osztópontokkal. Legyen $z(s_j) = z_j$, és

$$\int_a^b K(x_i, s) z(s)\, ds = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} z_j h + O(h^{\gamma}) \qquad (\gamma > 0)$$

valamilyen kvadratúra-formula, K_{ij} együtthatókkal, $O(h^{\gamma})$ maradéktaggal. Legyenek $u(x)$-nek az $\{x_i\}$-n felvett értékei $\{\hat{u}_i\}$ $(=\hat{u})$, $z(s)$ $\{s_j\}$-n felvett értékei $\{\hat{z}_j\}$ $(=\hat{z})$. Ekkor a (6. 3) funkcionálnak a következő típusú $\tilde{M}_h^{(\alpha)}[\hat{z}, \hat{u}]$ diszkrétizált alak felel meg:

$$\tilde{M}_h^{(\alpha)}[\hat{z}, \hat{u}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \hat{z}_j h - \hat{u}_i \right\}^2 h_1 + \alpha \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{k_j (\hat{z}_{j+1} - \hat{z}_j)^2}{h} + p_j \hat{z}_j^2 h \right\} \qquad (k_j > 0,\ p_j < 0). \tag{6. 15}$$

Bizonyítható, hogy tetszőleges $\{\hat{u}\} = \{\hat{u}_j\}$ halmaz és $\alpha > 0$ mellett létezik oly $\hat{z}_\alpha = \{\hat{z}_{\alpha, j}\}$ halmaz, melynek értékei minimalizálják az $\tilde{M}_h^{(\alpha)}[\hat{z}, \hat{u}]$ funkcionált és ha $\varepsilon > 0$ és $0 < \gamma_1 \leqq \gamma_2$, található oly $\delta_0 = \delta_0\ (\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, z)$ és $h_0 = h_0\ (\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, z)$ hogy ha $\|u - \tilde{u}_\delta\| \leqq \delta$, ahol $\tilde{u}_\delta$ u „δ pontosságú" közelítése — amit „mérhetünk" és α eleget tesz a $\frac{\delta^2}{\gamma_1} \leqq \alpha \leqq \frac{\delta^2}{\gamma_2}$ összefüggésnek, akkor a $\hat{z} = \{\hat{z}_j\}$, $\hat{\tilde{u}}_\delta = \{\tilde{u}_{\delta, j}\}$ függvényérték-halmazokra felírt $\tilde{M}_h^{(\alpha)}[\hat{z}, \hat{\tilde{u}}_j]$ funkcionált minimizáló $\{z_{\delta, j}^{(\alpha)}\}$ mennyiségek a $z(s)$ függvény „ε-környezetébe" esnek, ha $\delta < \delta_0$, $h < h_0$, vagyis a $\{z_{\delta, j}^{(\alpha)}\}$ mennyiségek által reprezentált pontok δ csökkentésével egyre közelebb fekszenek majd az operátoregyenlet megoldása — $z(s)$ — görbéjéhez.

Az operátoregyenlet jobb oldala közelítő értékeinek felhasználásával felírt (6. 15) funkcionál minimalizálása tehát az adott operátoregyenlet megoldásának ilyen értelmű közelítését szolgáltatja. Az egészet befolyásoló α paraméter megválasztásáról azonban az $\alpha = O(\delta^2)$, (illetve a numerikus szempontból megengedhető $\alpha = c\delta^2$ (c konstans)) összefüggésen kívül mást nem tudunk mondani.

Sok esetben célszerűbb dolgozni a (6.4) *Euler*-egyenlet diszkrétizálásával nyert lineáris egyenletrendszerrel; ennek megoldása nyilván $\{z_{\delta, j}^{(\alpha)}\}$-hez hasonló jellegű közelítést ad.

A fentiekhez analóg tétel érvényes, ha n-ed rendben sima regularizálást akarunk (vö. A. N. TIHONOV 1963 [2]) és az akkor szereplő (6.5) funkcionált diszkrétizáljuk, a szokásos módon.

Az első numerikus példa A. N. TIHONOV és V. B. GLASZKO 1964 [5] cikkében szerepelt; tulajdonképp „kísérletezés" volt („metodikai" példa), mert az

$$\int_{-1}^{1} K(x, s) z(s)\, ds = u(x), \quad K(x, s) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(x-s)^2+1} \qquad (-l \leqq x \leqq l)$$

integrálegyenlet megoldását kereste, amidőn

$$u(x) = \int_{-1}^{1} K(x, s)(1-s^2)^2\, ds,$$

vagyis a megoldás analitikus alakja ismert. Az $u(x)$ mennyiségeket mesterségesen hibákkal látták el, majd a (6.15) diszkrétizált funkcionált $s_j = jh, h = \frac{1}{n+{}^1/_2}$,

$$n = 20, \quad j = -20, \ldots, 20; \quad x_k = kh_1, \quad h_1 = \frac{1}{n}, \quad n = 20, \quad k = -20, \ldots, 20$$

mellett, s szerinti integráláskor a trapézformula, x szerinti integráláskor a *Simpson*-formula segítségével írták fel, deriváltakat egyszerűen első differenciákkal pótolva, aztán minimalizálták különböző α-k mellett. A kvadratúra-formulák stb. hibáit tekintetbe venni nem lehetett, így előre nem tudták, milyen α mellett közelíti meg legjobban a numerikus megoldás az elméletit. ($\alpha = 5 \cdot 10^{-9}$ adódott a kísérletekből a legjobb egyenletes közelítéskor, $\alpha = 0$ használhatatlan eredményt adott.) Vizsgálták $u(x)$ hibája (δ) befolyását α megválasztására, $\alpha = \text{konst} \cdot \delta^2$-et véve a konst. becslésére, illetve az egzakt és a numerikus megoldás (megfelelő normával mért) eltérésére, valamint $u(x)$ mesterséges hibáinak és az l értéknek a befolyását. Az optimális esetben igen jól illeszkedtek a numerikus adatok az egzakt megoldáshoz. — A minimalizálás a funkcionálhoz rendelhető *Euler*-egyenlet megoldásán alapult. E vizsgálatok kiterjesztése *metodikai* példákra az *Euler-egyenlet* közelítő megoldására támaszkodva, a számológép-programok leírása, *aprólékosan*, minden numerikus részlet közlésével megtalálható V. B. GLASZKO és P. N. ZAIKIN 1966 [19]-ben.

Nemlineáris integrálegyenlet numerikus megoldásáról szó van A. N. TIHONOV és V. B. GLASZKO 1965 [5] cikkében, de itt is „kísérletezés", „metodikai" példa szerepel, azaz: ismert megoldással hasonlították össze a numerikus eredményt, kb. ugyanolyan jellegű részletvizsgálatokkal, mint az előző esetben. Az optimális α-érték közelítő meghatározására külön algoritmust dolgoztak ki.

A. B. BAKUSINSZKIJ 1965 [1] fentebb már említett dolgozatában ugyancsak „metodikai" példát közöl; egy integrálegyenlet megoldásáról van szó. Ehhez — a szerző módszere folytán — először egy II. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenletet kell megalkotni, melyet szerző aztán egy másutt közölt algoritmusával old meg numerikusan (Бакушинский, А. Б.: Один метод численного решения интегральных уравнений. Вычислительные методы и программирование III. Изд. МГУ, 1965, 536—543), különböző regularizáló paraméter-értékek mellett s megállapítva az optimálisat ($\alpha = \text{konst} \cdot \delta$ itt nincs feltéve!). Lényegében ugyanez van A. B. BAKUSINSZKIJ 1966 [17]-ben is.

További, jórészt metodikai példákat bemutató, nem általános elveket közlő irodalom a regularizációs módszer numerikus végrehajtásáról: spektrumvonalak eredeti intenzitáslefutásának rekonstruálása ($\int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x)$ — $K(x,s)$ az „apparátus-függvény" — megoldása): A. N. TIHONOV, V. JA. ARSZENIN, L. A. VLADIMIROV, G. G. DOROSENKO és L. A. DUMOVA 1965 [17]; derivált egyenletes megközelítése: A. N. TIHONOV 1967 [4]-ben; *Laplace*-transzformált numerikus invertálása: A. N. TIHONOV 1967 [4]-ben; kristályfizikai problémák: V. I. IVERONOVA, A. N. TIHONOV, P. N. ZAIKIN és A. P. ZVJASZINA 1966 [20]; impulzus-átvitelifüggvény meghatározása az autokorrelációfüggvény alapján: A. N. TIHONOV 1967 [4]-ben; az optimális vezérlés egyes kérdései (a minimalizálási feladatot gradiens-projekcióval oldják meg): A. N. TIHONOV, V. JA. GALKIN és P. N. ZAIKIN 1967 [13]; bizonyos típusú gátak megtervezésekor felmerülő integro-differenciálegyenlet megoldása („metodikai" példával): V. A. MOROZOV és V. F. IVANISCSEV 1966 [16]; polinommal négyzetintegrálra optimális közelítése elég sima függvénynek és deriváltjainak e függvény egyes „mért" értékei alapján (a függvény „rekonstruálása"): V. B. DEMIDOVICS 1967 [18] („metodikai" példával, V. B. GLASZKO és P. N. ZAIKIN 1966 [19] programja felhasználásával); egy konvolúciós integrálegyenlet megoldása, a regularizáló paraméter stb. optimális értékeit metodikai példákból véve át (tehát *nem „metodikai"* példa is szerepelt!): A. P. ZSIDKOV, B. M. SCSEDRIN, N. G. RAMBIDI és N. M. EGOROVA 1968 [1]; anyagszerkezet-vizsgálatokban való alkalmazást említ N. P. ZSIDKOV és B. M. SCSEDRIN 1968 [18]. A. B. BAKUSINSZKIJ és V. N. SZTRAHOV 1968 [11] fent ismertetett dolgozatában is szerepel metodikai példa a leírt iterációs megoldásmódhoz.

A V. N. SZTRAHOV 1968 [12] dolgozatában konvolúciós integrálegyenlet esetére leírt eljárás numerikus feladatokban is jól alkalmazható, mert a közelítő megoldás a „mért adatokból" azonnal megszerkeszthető, ha az optimális paramétereket szolgáltató minimalizálási feladatot kellő diszkrétizálás után megoldottuk. — Hasonló a helyzet I. D. SZAVINSZKIJ 1967 [23] dolgozatával.

Az A. N. Tihonov-féle funkcionálhoz hasonló funkcionál ($\|Ax-y\|^2+\alpha\varphi(x)$) minimalizálására vezeti vissza az $Ax=y$ operátoregyenlet megoldását R. BELLMAN, R. E. KALABA és J. A. LOCKETT (1965 [18], [19], 1966 [21]); ha pl. ismerik c közelítését x-nek, $\varphi(x) = \|x-c\|^2$-et vesznek. Kidolgoztak megoldásmódszert dinamikus programozás alapján, szukcesszív approximációval, sorozatos minimalizálások útján. Metodikai példákat is közöltek. — Metodikai példát közöl MEDGYESSY PÁL és VARGA LÁSZLÓ 1968 [21], lényegileg a regularizációs módszert alkalmazó dolgozatában.

MEGJEGYZÉS. A fentebb sokszor említett minimalizálási feladatok technikájáról szóló irodalomból a következőket említjük meg:

Иванов, В. В.: Об одном общем приближенном методе решения линейных нзадач. *ДА СССР* **143** (1962) 514—517.

Фридман, В. М.: О сходимости методов типа найскорейшего спуска. *УМН* **17**:3 (1962) 201—204.

Шаманский, В. Е.: О некоторых вычислительных схемах итерационных процессов. *Украйн. мат. ж.* **14** (1962) 100—109.

Федоренко, Р.П.: Приближенное решение некоторых задач оптимального управления. *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **4** (1964) 1045—1064.

Поляк, Б. Т.: Теоремы существования и сходимость минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений. *ДАН СССР* **166** (1966) 287—290.

Левитин, Е. С. и Поляк, Б. Т.: О сходимости минимизирующих последовательностей в задачах на условный экстремум. *ДАН СССР* **168** (1966) 997—1000.

Левитин, Е. С. и Поляк, Б. Т.: Методы минимизации при наличии ограничений. *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **6** (1966) 787—823. (Összefoglaló cikk.)

Левитин, Е. С.: О корректности ограничений и устойчивости в экстремальных задачах. *Вести. МГУ, сер. мат.-мех.* No. 1, 1968, 24—34.

7. Valószínűségelméleti hátterű megoldási módszerek

Operátoregyenletek megoldásának eddig ismertetett módszereire jellemző volt, hogy megoldásnak *minősítettük* a megfelelő függvénytér egy oly elemét, mely bizonyos feltételeknek eleget tett. Ilyen feltétel általában úgy hangzott, hogy a mondott elem az alkalmazott távolságfogalom szerint tetszőlegesen közelítette meg az egzakt megoldást, hogyha az egyenlet jobb oldalának „mért hibája" minden határon túl csökkent.

A megoldásnak tekintett elem kiválasztását a cikkek egy újabb csoportja *valószínűségelméleti* szempontok szerint végzi el és az operátoregyenlet vizsgálatát is ide tartozó eszközökkel folytatja le. Ezekről adunk ismertetést ebben a fejezetben.

V. N. Szudakov és L. A. Halfin (1964 [1]) a kétdimenziós *Laplace*-egyenletre vonatkozó *Cauchy*-feladatot a következő új felfogásban fogalmazta át: hogyan konstruálható meg az x szerint 2π-periodikus, a $0<y<l$ sávban harmonikus $u(x, y)$ függvény $u(x, 0)$ és $u'_y(x, 0)=\varphi(x)$ ismeretében, ha $\varphi(x)$ egy *sztochasztikus folyamat* („zaj") mikor is a megfelelő $u(x, y)$ is sztochasztikus folyamat. Közelebbről azt vizsgálták: 1. milyen típusú $\varphi(x)$ esetén lehet $\varphi(x)$ „adat" e feladatban és lesz az $E(\|u(x, l)\|^2_{L_2[0, 2\pi]})$ várható érték véges; 2. milyen módon tartson egy $\{\varphi_n(x)\}$ sztochasztikus folyamat-sorozat az 1. valószínűséggel azonosan zérus „elfajult" folyamathoz, hogy a $\varphi_n(x)$-hez tartozó $u_n(x, l)$ folyamatokra fennálljon $E(\|u_n(x, l)\|^2)\to 0$, ha $n\to\infty$ $(l>0)$. 2π-periodikus $\varphi(x)$ folyamat esetére, annak korrelációfüggvénye alapján, e kérdésekre választ is adtak. Vizsgálataikat más típusú *Cauchy*-feladatokra is kiterjesztették.

M. M. Lavrent'ev és V. G. Vaszil'ev (1966 [2]) hasonló problémafelvetésből kiindulva, a valószínűségelméleti felfogás mellett is meg tudták tartani a „*Tihonov* szerint korrekt" és „kvázimegoldás" fogalmakat. Az $A\varphi=f$ operátoregyenletet, ahol $\varphi\in\Phi, f\in F$, Φ, F metrikus tér, A folytonos operátor — úgy fogták fel, hogy az adott jobb oldal és a hozzá tartozó megoldás — φ és f — sztochasztikus folyamatok, s ennek megfelelően Φ, F-re újabb tulajdonságokat (mértékes tér stb.) róttak ki, illetve bevezették a szükséges valószínűségelméleti hátteret — azután azt vizsgálták, hogy ha az f sztochasztikus folyamat helyett egy $\tilde{f}$ folyamatot „mérünk", mely bizonyos értelemben közel van f-hez, hogyan szerkeszthető meg olyan B operátor, hogy a $B\tilde{f}=\tilde{\varphi}$ új folyamattal képezett A) $E[\varrho(\varphi, \tilde{\varphi})]$ várható érték — vagy B) $P\{\varrho(\varphi, \tilde{\varphi})>\varepsilon\}$ valószínűség — tehát egy valószínűségelméleti fogalmakkal kifejezett eltérés-mérték — minimális legyen. Megmutatták, hogy ebben az új felfogásban pl. a „klasszikus" kvázimegoldás a B) eltérés-mérték mellett optimális megoldás, hogy ugyanezen eltérés-mérték mellett becslés adható a $P\{\varrho(B_\lambda \tilde{f}, \varphi) > \varepsilon\}$ eltérésre, ahol B_λ a kiindulási operátoregyenlet egy regularizátora — és a λ paraméter optimális megválasztására is lehetőség nyílik, stb. Illusztráló példájuk többek közt egy konvolúciós I. fajú *Fredhom*-féle integrálegyenlet, melyben a jobb oldal stacionárius sztochasztikus folyamat, hasonló jellegű zajjal terhelve, mely esetben regularizátort egy konvolúciós integráloperátorral értelmeztek és elvégezték a szereplő, ismert folyamatok autokorreláció-, illetve kölcsönös korrelációfüggvényei *Fourier*-transzformáltjaiból megalkotható közelítő megoldás fent említett eltérése becslését is. — Gyakorlati alkalmazásról nem szólnak.

A. P. PETROV 1967 [16] a $K\varphi = \hat{f}$ egyenlet helyett a gyakorlatban valójában előadódó $f = K\varphi + x$ egyenletet vizsgálta, ahol f a „mért adat", K lineáris teljesen folytonos operátor, $\varphi, f \in H$ (H *Hilbert*-tér), $\|\varphi\| \leqq 1$ és x egy sztochasztikus folyamat; a feladat nem magának φ-nek, hanem egy adott (u, φ) $(u \in H)$ lineáris funkcionálnak a becslése, x bizonyos jellemzői ismeretében, bizonyos megkötések mellett, melyek bizonyos φ elemet kiválasztanak majd a szóba jövők halmazából. Ésszerű feltevés, hogy (u, φ) becslését egy $(v, f) = \delta(f)$ $(v \in H)$ lineáris funkcionál szolgáltassa, ahol v-t később határozzuk meg. Tekintsük az $[(u, \varphi) - \delta(f)]^2$ mennyiség $W(\varphi, v)$ várható értékét a becslés jósága mértékének és legyen x valós és középben folytonos folyamat (a, b)-n, $Ex = 0$. Ekkor $W(\varphi, v) = E(v, x)^2 + (u - K^* v, \varphi)^2$ és $E(v, x)^2 = (Rv, v)$, ahol az R operátort

$$Ru = \int_a^b r(s, t) u(s)\, ds, \quad r(s, t) = Ex(t)x(s)$$

értelmezi, feltéve, hogy R korlátos, önadjungált és nem negatív-definit. — Eldöntendő ezek után, hogyan keressük meg a $W(\varphi, v)$-t minimalizáló v-t; ehhez értelmezni kell, hogyan hasonlítsunk össze különböző v-k esetére megfelelő $W(\varphi, v)$ jellemzőket. Erre a szerző több lehetőséget ismertet. Egyik a „minimax-eljárás"; ekkor azt mondjuk, hogy $W(\varphi, \delta_1(f)) < W(\varphi, \delta_2(f))$, ha $\sup_\varphi W(\varphi, \delta_1) < \sup_\varphi W(\varphi, \delta_2)$. Ezen értelmezés mellett a $W(\varphi, v)$-t minimalizáló v_M függvényt $v_M = (R + KK^*)^{-1} Ku$ adja meg. — Egy másik, a „*Bayes*-féle döntés". Legyen A a H tér S egységgömbje részhalmazainak szigma-gyűrűje, μ valószínűségi mérték (S, A)-n, és legyen (l_1, φ), (l_2, φ) mérhető, ha $l_1, l_2 \in H$. Ekkor azt mondjuk, hogy

$$W(\varphi, v_1) < W(\varphi, v_2) \quad \text{ha} \quad \int_S W(\varphi, v_1)\, d\mu < \int_S W(\varphi, v_2)\, d\mu.$$

Ezen értelmezés mellett a minimalizáló v_B elemet $v_B = (R + K\Phi K^*)^{-1} K\Phi u$ szolgáltatja, ahol Φ önadjungált, nem negatív-definit lineáris operátor H-n, melyet

$$\Phi l = \sum_i \Big(\sum_k \Big(\int (\varphi, \psi_i)(\varphi, \psi_k)\, d\mu\Big) l_k\Big) \psi_i$$

definiál, ahol $\{\psi_i\}$ tetszőleges ortonormált bázis H-ban,

$$l \in H, \quad (l, \varphi) = \Sigma l_k l_i (\varphi, \psi_i)(\varphi, \psi_K).$$

v_B Φ-től függően más és más. — Elegendően nem ismert Φ esetére is ad a szerző minimalizáló v_B megállapításához eljárást, Φ-t a megoldás simasága jellemzőjének tekintve. — A szerző példaként az

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-s)\varphi(s)\,ds + \xi(t)$$

konvolúciós típusú integrálegyenletet vizsgálja,

$$v(s,t) = \varepsilon^2 e^{-\beta|t-s|}, \quad K(\tau) = e^{-\frac{\pi\tau^2}{\Theta^2}}, \quad v(\omega) \equiv v_\alpha(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > \alpha \\ \dfrac{\omega}{K}, & |\omega| \leqq \alpha \end{cases}$$

mellett, minimax eljárás feltételezésével. Ekkor az optimális v_M megoldást optimális $\alpha = \alpha_M$ jellemzi, — melyet meg is határoz. — A szerző végül megállapítja, hogy ha optimális megoldást a *Tihonov*-féle regularizációs módszerrel nyert $v^{(\alpha)}$ elem révén határoz meg, az a „*Bayes*-féle döntés" esetére vonatkozó optimális megoldással (a feltételek bizonyos azonosítása mellett) egybeesik.

V. F. TURCSIN 1967 [14], 1968 [14] elsősorban az $\int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')\varphi(x')dx' = f(x)$ integrálegyenlettel foglalkozott, valószínűségelméleti szempontok alapján. Feltette, hogy 1. az $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvényeket csupán az $x_n = nh$ $(h > 0)$, $n = -N_0$, $-N_0+1, \ldots, N_0-1, N_0$ pontokban ismerjük, illetve kívánjuk meghatározni, 2. $f(x)$ és $\varphi(x)$-et a $(-N_0, N_0)$ szakaszon kívül periodikusan folytatva képzeljük el Nh $(N = 2N_0+1)$ periódussal. — Legyen $f(nh) = f_n$, $\varphi(nh) = \varphi_n$. A feltételekből következik, hogy

$$f_n = \sum_{\nu=-N_0}^{N_0} \hat{f}_\nu e^{i\omega_\nu hn}, \qquad \varphi_n = \sum_{\nu=-N_0}^{N_0} \hat{\varphi}_\nu e^{i\omega_\nu hn} \quad \left(\omega_\nu = \frac{2\pi}{Nh}\nu\right),$$

ahol $\hat{f}_\nu$, $\tilde{\varphi}_\nu$ a kifejtés együtthatói, melyekre fennáll:

$$\hat{f}_\nu = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_0}^{N_0} f_n e^{-i\omega_n h\nu}, \qquad \hat{\varphi}_\nu = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_0}^{N_0} \varphi_n e^{-i\omega_n h\nu}.$$

Kiindulási egyenletünk ekkor a $\sum_m R_{n-m}\varphi_m = f_n$ alakba megy át, ahol (a *Kotel'nikov—Shannon*-formula felhasználásával)

$$R_l = \int_{-\infty}^{\infty} R(lh-x')\frac{\sin(\pi x'/h)}{(\pi x'/h)}\,dx'.$$

Végülis azt kapjuk, hogy $\hat{f}_q/\lambda_q = \hat{\varphi}_q$ és $\varphi_n = \sum_{\mu=-N_0}^{N_0} K_{n-\mu}^{(-1)} f_\mu$,
ahol

$$K_\tau^{(-1)} = \frac{1}{N}\sum_{q=-N_0}^{N_0} \frac{1}{\lambda_q} e^{i\frac{2\pi}{N}q\tau}, \qquad \lambda_q = \sum_l R_l e^{-i\omega_q hl}.$$

A szerző ezek után a gyakorlatban előadódó helyzetet vizsgálja: f_n helyett $\chi_n = f_n + \varepsilon_n$ értéket „mérhetünk" csak, ahol ε_n a „hiba", melyet a szerző 0 várható értékű, s^2 szórásnégyzetű, normális eloszlású sztochasztikus változó egy megfigyelt értékének tételez fel. Ezek következtében operátoregyenletünk a χ_n mennyiségekhez általánosságban egy $(\hat{\varphi}_{-N_0}, \ldots, \hat{\varphi}_{N_0})$ sztochasztikus vektorváltozót rendel. Ennek komponenseire bizonyos megkötések tehetők; ezek után szerző „megoldásnak" e vektorváltozó várható értékét tekinti, feltéve, hogy $s'^2 \equiv D^2(\hat{\varphi}_n - \chi_n) \leqq s^2$. A $\hat{\varphi}_n$-ra tett megkötések abból állnak, hogy a $\hat{\varphi}_n = \sum_{q=-N_0}^{N_0} \Phi_q e^{in\omega_q h}$ kifejtésben $D^2\Phi_q = \frac{\gamma_q^2}{N}$ egy (közelebbről nem definiált) függvény szerint csökken; ennek bevonásával a szerző (sajnos, matematikailag nem áttekinthetően) levezeti, hogy ha $\hat{\varphi}_n = \sum_q \Phi_q e^{in\omega_q h}$, akkor $\Phi_q = \frac{F_q}{\lambda_q} \cdot \frac{\lambda_q^2}{\lambda_q^2 + s^2/\gamma_q^2}$, ahol $\chi_n = \sum_q F_q e^{in\omega_q h}$ (vagyis F_q az operátoregyenlet jobb oldali „mért" értékei kifejtésének q-adik együtthatója). Egybevetve ezt az egzakt megoldáshoz vezető, fenti $\varphi_q = \hat{f}_q/\lambda_q$ egyenlőséggel, látjuk, hogy a szerző a „megoldást" a „mért adatok" bizonyos súlyozását alkalmazva kapja meg. — Az eljárásban bizonytalanság, kényes pont γ_q^2 megválasztása; vehető pl. $\gamma_q^2 = \frac{\alpha}{\omega_q^{2m}}$ (m egész, α konst). Szerző megmutatja, hogy ebben és hasonló esetekben az $s'^2 = s^2$ feltételből meghatározott α bizonyos értelemben optimális „megoldást" szolgáltat. Metodikai példákat is közöl. Az α említett meghatározását megengedő kritérium a szerző szerint természetes és ezért ő eljárását jobbnak minősíti D. L. PHILLIPS 1962 [2] és A. N. TIHONOV 1963 [1], [2] eljárásánál, melyekben α-hoz hasonló jellegű, de közelebbről meg nem határozott paraméter lép fel.

O. N. STRAND és E. R. WESTWATER 1968 [7], [22] az $\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = \gamma(x)$ integrálegyenletet vizsgálta, ahol $\varphi(y)(a \leqq y \leqq b)$ egy folytonos realizációkkal bíró sztochasztikus folyamat, melyre $D^2\varphi(y_1)\varphi(y_2) < \infty$, $K(x, y)$ x és y folytonos függvénye. Ekkor $\gamma(x)$ is sztochasztikus folyamat. Szerzők a $\gamma(x)$-nek $x = x_i$ ($i = 1, \ldots, n$) pontokban hibákkal észlelt $\gamma(x_i) + \varepsilon_i$ értékei alapján az integrálegyenletet algebrai egyenletrendszerré átalakítva kerestek becslést $\varphi(y_i)$-re, feltételezve, hogy $E\varphi(y) = \varphi_0(y)$ és a $\varphi(y_i)$-k kovariancia-matrixa, S_φ ismert, ε_i független $\varphi(y_i)$-től, $E\varepsilon_i = 0$, az ε_i-k kovariancia-matrixa, S_ε, ismert, az integrálegyenlet diszkretizálásakor fellépő kvadratúra-formulák hibái elhanyagolhatók ε_i-hez képest (S_φ, S_ε nem-szinguláris és $m \times m$, illetve $n \times n$ dimenziós). Szerzők $\varphi - \varphi_0$-ra explicit alakban oly lineáris torzítatlan becslést adtak meg, melyre fennáll, hogy a hibanégyzet-összeg várható értéke minimális. Az ez esetben létesülő megoldást is előállították. — A vizsgálatok hátterében S. TWOMEY 1963 [3]-ban (fentebb is) említett azon gondolata áll, hogy a lehetséges megoldások közül a kellően „simát", a megoldások egy súlyozott a *priori* megoldástól való bizonyos „eltérése" minimalizálása alapján válasszuk ki.

(Beérkezett; 1969. IV. 29.)

IRODALOMJEGYZÉK

1902.

[1] HADAMARD, J.: Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, *Bull. Univ. Princeton* **13** (1902) 49—52.

1926.

[1] CARLEMAN, T.: *Les fonctions quasi analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

1932.

[1] HADAMARD, J.: *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris, 1932.

[2] Малкин, И. Г.: *Определение толщины однородного притягивающего слоя*, Тр. ин-та им. Стеклова, т. II., вып. 4. Изд. АН СССР, Москва, 1932.

1933.

[1] Голузин, Г. М. и Крылов, В. И.: Обобщение формулы Carleman'а и приложение ее к аналитическому продолжению функций, *Мат. сб.* **40** (1933) 144—149.

1938.

[1] Новиков, П. С.: О единственности обратной задачи потенциала, *ДАН СССР* **18** (1938) 165—168.

1940.

[1] Рапопорт, И. М.: О плоской обратной задаче теории потенциала, *ДАН СССР* **28** (1940) 305—307.

1941.

[1] Рапопорт, И. М.: Об устойчивости в обратной задаче теории потенциала, *ДАН СССР* **31** (1941) 303—305.

1944.

[1] Тихонов, А. Н.: Об устойчивости обратных задач, *ДАН СССР* **39** (1944) 195—198.

1947.

[1] Андреев, Б. А.: Расчеты пространственного распределения, *Изв. АН СССР*, сер. геогр. и геофиз. № 1, 1947.

1949.

[1] Андреев, Б. А.: Расчеты пространственного распределения, *Изв. АН СССР*, сер. геогр. и геофиз., № 3, 1949.

1952.

[1] Ландис, Е. М.: О единственности решения задачи Коши для параболических уравнений, *ДАН СССР* **83** (1952) 345—348.

[2] Андреев, Б. А.: Расчеты пространственного распределения, *Изв. АН СССР*, сер. геогр. и геофиз., № 2, 1952.

1953.

[1] PUCCI, C.: Studio col metodo delle differenze di un problema di Cauchy relativo ad equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico, *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa* (3) **7** (1953) 205—215 (1954).

1954.

[1] Лаврентьев, М. М.: О точности решения систем линейных уравнений, *Мат. сб.* **34** (1954) 259—268.

[2] PICONE, M.: Sul calcolo delle funzioni olomorfe di una variabile complessa. *Studies in Mathematics and mechanics presented to Richard von Mises*, Academic Press, New York, 1954; pp. 118—126.

[3] Андреев, Б. А.: Расчеты пространственного распределения, *Изв. АН СССР*, сер. геогр. и геофиз., № 1, 1954.

1955.

[1] JOHN, F.: A note on "improper" problems in partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **8** (1955) 591—594.
[2] JOHN, F.: *Differential equations with approximate and improper data. Lecture Notes*, New York, 1955.
[3] PUCCI, C.: Sui problemi di Cauchy non "ben posti", *Atti Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **18** (1955) 473—477.
[4] Лаврентьев, М. М.: О задаче Коши для уравнения Лапласа, *ДАН СССР* **102** (1955) 205—206.
[5] JOHN, F.: Numerical solution of the equation of heat conduction for preceding times, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **40** (1955) 129—142.
[6] BERTOLINI, F.: Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in tre variabili indipendenti. II., *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **40** (1955) 121—128.

1956.

[1] Мергелян, С. Н.: Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа, *Усп. мат. наук* **11**:5 (71) (1956) 3—26.
[2] Лаврентьев, М. М.: О задаче Коши для уравнения Лапласа, *Изв. АН СССР, сер. мат.* **20** (1956) 819—842.
[3] Лаврентьев, М. М.: О задаче Коши для уравнения Лапласа, *Труды 3-го Всесоюзного Матем. съезда,* т. 2. Изд. АН СССР, Москва, 1956; p. 118.
[4] Лаврентьев, М. М.: Количественные уточнения внутренных теорем единственности, *ДАН СССР* **110** (1956) 731—734.
[5] Лаврентьев, М. М.: К вопросу об обратной задаче теории потенциала, *ДАН СССР* **106** (1956) 389—390.
[6] Иванов, В. К.: Обратная задача теории потенциала для тела, близкого к данному, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **20** (1956) 793—818.
[7] Ландис, Е. М.: О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений, *ДАН СССР* **107** (1956) 640—643.
[8] Ландис, Е. М.: О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений, *Усп. мат. наук* **11**:2 (68) (1956) 235—237.
[9] Фридман, В. М.: Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма I рода, *Усп. мат. наук* **11**:1 (67) (1956) 233—234.
[10] Маловичко, I. К.: *Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки,* Гостоптехиздат, Москва, 1956.

1957.

[1] Лаврентьев, М. М.: О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка, *ДАН СССР* **112** (1957) 195—197.
[2] Крейн, С. Г.: О классах корректности для некоторых граничных задач, *ДАН СССР* **114** (1957) 1162—1165.

1958.

[1] LAVRENTIEFF, M. M.: Uniqueness and stability of analytic functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.* I. no. 250/**19** (1958).
[2] PUCCI, C.: Discussione del problema di Cauchy per le equazioni di tipo ellittico, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **46** (1958) 131—154.
[3] FOX, D. and PUCCI, C.: The Dirichlet problem for the wave equation, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **46** (1958) 155—182.

1959.

[1] Лаврентьев, М. М.: Об интегральных уравнениях первого рода, *ДАН СССР* **127** (1959) 31—33.
[2] PUCCI, C.: Alcune limitazioni per le solutioni di equazione paraboliche, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **48** (1959) 161—172.

1960.

[1] DOUGLAS, J., JR.: Mathematical programming and integral equations. *Symposium on the Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-Differential Equations* (Rome, 1960), Birkhäuser, Basel, 1960; pp. 269—274.

1961.

[1] MEDGYESSY, P.: *Decomposition of superpositions of distribution functions*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961.

1962.

[1] Лаврентьев, М. М.: *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Изд. Сибирск. Отд. АН СССР, Новосибирск, 1962.
[2] PHILLIPS, D. L.: A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, *Jour. Assoc. Comp. Math.* **9** (1962) 84—97.
[3] Иванов, В. К.: Интегральные уравнения первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала, *ДАН СССР* **142** (1962) 998—1000.
[4] Иванов, В. К.: О линейных некорректных задачах, *ДАН СССР* **145** (1962) 270—272.

1963.

[1] Тихонов, А. Н.: О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации, *ДАН СССР* **151** (1963) 501—504.
[2] Тихонов, А. Н.: О регуляризации некорректно поставленных задач, *ДАН СССР* **153** (1963) 49—52.
[3] TWOMEY, S.: On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature, *Jour. Assoc. Comp. Mach.* **10** (1963) 97—101.
[4] Иванов, В. К.: О некорректно поставленных задачах, *Мат. сб.* **61** (1963) 211—222.
[5] Крейн, С. Г. и Прозоровская, О. И.: О приближенных методах решения некорректных задач, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **3** (1963) 120—130.
[6] Страхов, В. М.: Об одном численном методе решения линейных интегральных уравнений типа свертки, *ДАН СССР* **153** (1963) 533—536.
[7] Иванов, В. К. и Казакова, Л. Э.: Об одном приложении аналитических функций к обратной задаче потенциала, *Сибир. мат. ж.* **4** (1963) 1311—1317.
[8] Тихонов, А. Н.: О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. *Материалы к Совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными* (Новосибирск, авг. 1963). Изд. Сибирск. Отд. АН СССР, Новосибирск, 1963; pp. 261—265.

1964.

[1] Судаков, В. Н. и Халфин, Л. А.: Статитический подход к корректности задач математической физики, *ДАН СССР* **157** (1964) 1058—1060.
[2] Домбровская, И. Н.: О линейных операторных уравнениях первого рода, *Изв. ВУЗ'ов, Математика* 1964, № 2 (39) 74—78.
[3] Домбровская, И. Н. и Иванов, В. К.: Некорректные линейные уравнения и исключительные случаи уравнений типа свертки, *Изв. ВУЗ'ов, Математика* 1964, № 4 (41) 69—74.
[4] Тихонов, А. Н.: Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье, *ДАН СССР* **156** (1964) 268—271.
[5] Тихонов, А. Н. и Гласко, В. Б.: О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **4** (1964) 564—571.
[6] OETTLI, W. and PRAGER, W.: Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, *Numer. Math.* **6** (1964) 405—409.
[7] Тихонов, А. Н.: О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода, *ДАН СССР* **156** (1964) 1296—1299.
[8] Домбровская, И. Н.: О решении некорректных линейных уравнений в гильбертовом пространстве, *Мат. зап. Уральский ун-т* **4** (1964) № 4, 36—40.
[9] MILLER, K.: Three circle theorems in partial differential equations and applications to improperly posed problems, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **16** (1964) 126—154.

1965.

[1] Бакушинский, А. Б.: Об одном численном методе решения интегральных уравнений Фредгольма I рода, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **5** (1965) 744—749.
[2] Тихонов, А. Н.: О нелинейных уравнениях первого рода, *ДАН СССР* **161** (1965) 1023—1026.

[3] Иванов, В. К.: Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе, *Дифф. уравн.* **1** (1965) 131—136.
[4] Тихонов, А. Н.: О методах регуляризации задач оптимального управления, *ДАН СССР* **162** (1965) 763—765.
[5] Тихонов, А. Н. и Гласко, В. Б.: Применение метода регуляризации в нелинейных задачах. *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **5** (1965) 463—473.
[6] Иванов, В. К.: Об одном типе некорректных линейных уравнений в векторных топологических пространствах, *Сибир. мат. ж.* **6** (1965) 832—839.
[7] Тихонов, А. Н.: О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивых методах их решения, *ДАН СССР* **163** (1965) 591—595.
[8] Bellman, R., Kalaba, R. and Lockett, J.: Dynamic programming and ill-conditioned linear systems, *J. Math. Anal. Appl.* **10** (1965) 206—215.
[9] Suleĭmanov, R. V.: The method of successive approximations for obtaining the solution of the Fredholm integral equation of the first kind, *Baškir. Gos. Univ. Učen. Zap. Vyp.* **20** (1965) 67—78.
[10] Bellman, R.; Kalaba, R. and Lockett, J.: Dynamic programming and ill-conditioned linear systems —II., *J. Math. Anal. Appl.* **12** (1965) 393—400.
[11] Домбровская, И. Н. и Иванов, В. К.: К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных пространствах, *Сибир. мат. ж.* **6** (1965) 499—508.
[12] Тихонов, А. Н.: Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **5** (1965) 718—722.
[13] Тихонов, А. Н.: О некорректных задачах оптимального планирования и устойчивых методах их решения, *ДАН СССР* **164** (1965) 507—510.
[14] Морозов, В. А.: Применение метода регуляризации к решению одной некорректной задачи, *Вестн. Москов. унив.* 1965, № 4, 13—21.
[15] Майоров, Л. В.: О корректности одной обратной задачи, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **5** (1965) 363—365.
[16] Арсенин, В. Я.: О разрывных решениях уравнений первого рода, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **5** (1965) 922—926.
[17] Тихонов, А. Н.; Арсенин, В. Я.; Владимиров, Л. А.; Дорошенко, Г. Г. и Дунова, Л. А.: К вопросу об обработке спектров γ-кванта и быстрых нейтронов, измеренных с помощью однокристальных сцинтилляционных спектрометров, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **29** (1965) 815—818.
[18] Suleĭmanov, R. V.: Analysis of the condition of the matrix of a system of linear algebraic equations corresponding to a Fredholm integral equation of the first kind, regularized in L_2, *Baškir. Gos. Univ. Učen. Zap. Vyp.* **20** (1965), Ser. Mat. No. 2, 79—82.
[19] Twomey, S.: The application of numerical filtering to the solution of integral equations encountered in indirect sensing measurements, *Jour. Franklin Inst.* **279** (1965) 95—109.
[20] Маслов, В. П.: *Теория возмущений и асимптотические методы,* Наука, Москва, 1965

1966.

[1] Худак, Ю. И.: О регуляризации решений интегральных уравнений I рода, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **6** (1966) 766—769.
[2] Лаврентьев, М. М. и Васильев, В. Г.: О постановке некоторых некорректных задач математической физики, *Сибир. мат. ж.* **7** (1966) 559—576.
[3] Тихонов, А. Н.: Об устойчивости задачи оптимизации функционалов, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **6** (1966) 631—634.
[4] Морозов, В. А.: О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **6** (1966) 170—175.
[5] Морозов, В. А.: О решении функциональных уравнений методом регуляризации, *ДАН СССР* **167** (1966) 510—512.
[6] Иванов, В. К.: О равномерной регуляризации неустойчивых задач, *Сибир. мат. ж.* **7** (1966) 546—558.
[7] Тихонов, А. Н.: О некорректных задачах оптимального планирования, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **6** (1966) 81—89.
[8] Лаврентьев, М. М.: О постановке некоторых некорректных задач математической физики. *Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики, Новосибирск.,* Наука, Москва, 1966; 258—276.
[9] Иванов, В. К. и Чудинова, А. А.: Об одном способе нахождения гармонических моментов возмущающих масс, *Изв. АН СССР, физ. земли,* 1966, № 3, 55—62.

[10] Сулейманов, Р. В.: Решение регуляризованного в L_2 интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода методом последовательных приближений, *Мат. зап. Уральский ун-т,* **5** (1966) № 4, 101—104.
[11] Долгополова, Т. Ф. и Иванов, В. К.: О численном дифференцировании, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **6** (1966) 570—576.
[12] Антохин, Ю. Т.: О некоторых задачах аналитической теории уравнений первого рода, *Дифф. уравн.* **2** (1966) 226—240.
[13] Антохин, Ю. Т.: О некоторых некорректных задачах теории потенциала, *Дифф. уравн.* **2** (1966) 525—532.
[14] Антохин, Ю. Т.: О некоторых некорректных задачах теории уравнений с частными производными, *Дифф. уравн.* **2** (1966) 241—251.
[15] Иванов, В. К.: О приближенном решении операторных уравнений первого рода, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **6** (1966) 1089—1094.
[16] Морозов, В. А. и Иванищев, В. Ф.: Применение метода регуляризации к расчету арочных плотин. *Вычислительная математика и программирование.* V. Изд. Москов. Унив., Москва, 1966; 171—186.
[17] Бакушинский, А. Б.: О некотором численном методе решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода. *Вычислительная математика и программирование.* V. Изд. Москов. Унив., Москва, 1966; 99—106.
[18] Лебедев, В. И.: О решении на компактных множествах некоторых задач восстановления, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **6** (1966) 1002—1018.
[19] Гласко, В. Б. и Заикин, П. Н.: О программе регуляризирующего алгоритма для уравнения Фредгольма первого рода, *Вычислительная математика и программирование.* V. Изд. Москов. Унив., Москва, 1966; 61—73.
[20] Иверонова, В. И.; Тихонов, А. Н.; Заикин, П. Н. и Звясина, А. П.: Определение фононного спектра кристаллов по теплоемкости. *Физика твердого тела,* т. 8, 1966.
[21] Bellman, R.; Kalaba, R. E. and Lockett, J. A.: *Dynamic programming and ill-conditioned systems. Numerical inversion of the Laplace transform: Applications to Biology, Economics, Engineering and Physics,* American Elsevier Publ. Co., Inc., New York, 1966; pp. 135—173.
[22] Medgyessy Pál: Egy konvolúciós típusú integrálegyenlet numerikus megoldása és ennek felhasználása Gauss-függvény szuperpozíciók felbontására. *MTA III. Oszt. Közl.* **16** (1966) 47—64.
[23] Лисковец, О. А.: Регуляризация некорректных задач для уравнений математической физики, *Дифф. уравн.* **2** (1966) 1128—1131.

1967.

[1] Иванов, В. К.: Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода, *Дифф. уравн.* **3** (1967) 410—421.
[2] Бакушинский, А. Б.: Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **7** (1967) 672—677.
[3] Морозов, В. А.: О восстановлении функции методом регуляризации, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **7** (1967) 874—881.
[4] Тихонов, А. Н.: О некорректно поставленных задачах. *Вычислительные методы и программирование,* VIII. Изд. Москов. Унив., 1967; 3—33.
[5] Иванов, В. К.: О регуляризации линейных операторных уравнений первого рода, *Изв. ВУЗ'ов, Математика,* 1967, № 10, 50—55.
[6] Коркина, Л. Ф.: О решении операторных уравнений первого рода в гильбертовых пространствах, *Изв. ВУЗ'ов, Математика,* 1967, № 7, 65—69.
[7] Домбровская, И. Н.: Об уравнениях первого рода с замкнутым оператором, *Изв. ВУЗ'ов, Математика,* 1967, № 6, 39—42.
[8] Антохин, Ю. Т.: Некорректные задачи в гильбертовом пространстве и устойчивые методы их решения, *Дифф. уравн.* **3** (1967) 1135—1156.
[9] Фридрих, Ф.: Об одном эксперименте по решению интегральных уравнений I. рода, *Методы вычислений.* Вып. 4. Изд. Ленингр. Унив., 1967; 102—109.
[10] Морозов, В. А.: О регуляризирующих семействах операторов. *Вычислительные методы и программирование.* VIII. Изд. Москов. Унив., 1967; 63—95.
[11] Гавурин, М. К.: О методе А. Н. Тихонова решения некорректных задач, *Методы вычислений.* Вып. 4. Изд. Ленингр. Унив., 1967; 21—25.

[12] Лисковец, О. А.: Некорректные задачи с замкнутым необратимым оператором, *Дифф. уравн.* 3 (1967) 636—646.
[13] Тихонов, А. Н.; Галкин, В. Я. и Заикин, П. Н.: О прямых методах решения задач оптимального управления, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* 7 (1967) 416—423.
[14] Турчин, Б. Ф.: Решение уравнения Фредгольма I. рода в статистическом ансамбле гладких функций, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* 7 (1967) 1270—1284.
[15] Лихт, М. К.: О вычислении функционалов на решениях линейных уравнений I. рода, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* 7 (1967) 667—672.
[16] Петров, А. П.: Оценки линейных функционалов для решения некоторых обратных задач, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* 7 (1967), 648—654.
[17] Чудов, Л. А.: Разностные схемы и некорректные задачи для уравнений с частными производными, *Вычислительные методы и программирование.* VIII. Изд. Москов. Унив., 1967; 34—62.
[18] Демидович, В. Б.: Восстановление функции и ее производных по экспериментальной информации, *Вычислительные методы о приграммирование.* VIII. Изд. Москов. Унив., 1967; 96—102.
[19] Горбунов, А. Д.: О решении нелинейных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, *Вычислительная математика и программирование.* VIII. Изд. Москов. Унив., 1967; 186—199.
[20] Денчев, Р.: Об устойчивости линейных уравнений на компакте, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* 7 (1967) 1367—1370.
[21] Грабар, Л. П.: Применение полиномов Чебышева, ортонормированных на системе равноотстоящих точек, для решения интегральных уравнений первого рода, *ДАН СССР.* **172** (1967) 767—770.
[22] Ribière, G.: Régularisation des operateurs. *Rev. fr. inform. et res. oper.* 1967, 1, No. 5, 57—79.
[23] Савинский, И. Д.: О решении некорректной задачи при пересчете потенциального поля на нижележащие уровни, *Изв. АН СССР. Физ. Земли* 6 (1967) 72—92.
[24] Лисковец, О. А.: Способ численного решения обратных задач теории потенциала, *ДАН БССР* **11** (1967) 101—103.
25] Lattès, R.—Lions, J.-L.: *Méthode de quasi-reversibilité et applications.* Dunod, Paris, 1967.

1968.

[1] Жидков, А. П.; Щедрин, Б. М.; Рамбиди, Н. Г. и Егорова, Н. М.: Применение метода регуляризации для решения некоторых задач газовой электронографии, *Вычислительные методы и программирование.* X. Изд. Москов. Унив., 1968; 215—222.
[2] Кириллова, Л. С. и Пионтковский, А. А.: Некорректные задачи в теории оптимального управления (обзор), *Авт. и телемех.* 1968, 10, 5—17.
[3] Бакушинский, А. Б.: Алгоритмы регуляризации для линейных уравнений с неограниченными операторами, *ДАН СССР* **183** (1968) 12—14.
[4] Лисковец, О. А.: Численное решение некоторых некорректных задач методом квазирешении, *Дифф. уравн.* 4 (1968) 735—742.
[5] Лисковец, О. А.: О регуляризации линейных уравнений в банаховых пространствах, *Дифф. уравн.* 4 (1968) 1136—1139.
[6] Szelezsán János: Optimális vezérlési feladat numerikus megoldása, *MTA SzTK Közl.* 4 (1968), jún., 54—82.
[7] Strand, O. N. and Westwater, R.: Statistical estimation of the numerical solution of a Fredholm integral equation of the first kind, *J. Assoc. Comp. Mach.* **15** (1968) 100—114.
[8] Виленкин, С. Я. и Виленкин, Е. С.: Применение регуляризатора при оценке импульсной переходной функции стационарного линейного объекта по входному и выходному сигналам, *Авт. и телемех.* 1968, 8, 50—55.
[9] Арсенин, В. Я. и Иванов, В. В.: Об оптимальной регуляризации, *ДАН СССР* **182** (1968) 9—12.
[10] Арсенин, В. Я. и Иванов, В. В.: О решении некоторых интегральных уравнений I рода типа свертки методом регуляризации, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **8** (1968) 310—321.
[11] Бакушинский, А. Б. и Страхов, В. И.: О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **8** (1968) 181—185.
[12] Страхов, В. Н.: О численном решении некорректных задач, представляемых интегральными уравнениями типа свертки, *ДАН СССР* **178** (1968) 299—302.

[13] Дмитриев, В. И. и Захаров, Е. В.: О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I рода, *Вычислительные методы и программирование.* X. Изд. Москов. Унив., 1968; 49—54.
[14] Турчин, Б. Ф.: Выбор ансамбля гладких функций при решении обратной задачи, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **8** (1968) 230—238.
[15] Тихонов, А. Н.: О методах решения некорректно поставленных задач, *Труды Международного Конгресса Математиков* (Москва 1966). Изд. „Мир”, Москва, 1968; pp. 720—722.
[16] Рамм, А. Г.: О численном дифференцировании, *Изв. ВУЗ'ов, Математика,* **11** (1968) 131—134.
[17] Рамм, А. Г.: Об уравнениях первого рода, *Дифф. уравн.* **4** (1968) 2057—2060.
[18] Жидков, Н. П. и Щедрин, Б. М.: Обзор работ ВЦ МГУ по структурному анализу. *Вычислительные методы и программирование.* X. Изд. Москов. Унив., 1968; 185—202.
[19] Антохин, Ю. Т.: Некорректные задачи для уравнения типа свертки, *Дифф. уравн.* **4** (1968) 1691—1704.
[20] Басин, В. В.: Регуляризация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, *Дифф. уравн.* **4** (1968) 2268—2274.
[21] Medgyessy Pál és Varga László: Gauss-függvény keverékek numerikus felbontására szolgáló egyik eljárás javításáról, *MTA III. Oszt. Közl.* **18** (1968) 31—39.
[22] Strand, O. N. and Westwater, E. R.: Minimum-RMS estimation of the numerical solution of a Fredholm integral equation of the first kind, *SIAM Jour. Num. Analysis* **5** (1968) 287—295.
[23] Schmaedeke, W. W.: Approximate solutions for Volterra integral equations of the first kind, *Jour. Math. Anal. Appl.* **23** (1968) 604—613.
[24] Арсенин, В. Я. и Иванов, В. В.: О влиянии регуляризации *p*-го порядка, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **8.** (1968) 661—663.
[25] Arcangeli, R.: Un probléme de resolution retrograde de l'équation de la chaleur, *Rev. fr. inform. et rech. oper.* **2** (1968) No. 13, 61—78.

ON THE PRESENT STATUS OF THE INVESTIGATIONS CONCERNING INCORRECT PROBLEMS IN MATHEMATICS, WITH SPECIAL REGARD TO THE SOLUTION OF OPERATOR EQUATIONS OF THE Ist KIND

(Survey)

by

P. Medgyessy

Summary

The paper surveys the work of M. M. Lavrent'ev and D. L. Phillips on this field, further the method of quasi-solutions of V. K. Ivanov as well as the regularisation method of A. N. Tihonov. Finally, a probabilistic approach to some incorrect problems is briefly mentioned, too.

SZTOCHASZTIKUS KÉSZLETMODELLEKKEL KAPCSOLATOS VIZSGÁLATOK

Írta: NÉMETH GYULA

1. Bevezetés

1. 1 Készlet- és eszközgazdálkodási problémák a népgazdaság csaknem valamennyi területén jelentkeznek és gazdaságos, észszerű megoldást sürgetnek vállalati, iparági és népgazdasági szinten egyaránt. Attól függően, hogy a gazdasági élet melyik területéről van szó, a készletezési problémák természetesen más és más formában vetődnek fel. Ebben a dolgozatban olyan készletproblémák vizsgálatára kerül sor, amelyek *elsősorban ipari vállalatoknál* mutatkoznak fontosnak és időszerűnek.

Köztudomású, hogy egy gyár termelési programjának teljesítéséhez számos anyagféleségre van szükség: nyersanyagokra, segédanyagokra, félkésztermékekre, és egyéb anyagokra, például állóeszközfenntartási anyagokra, tartalék alkatrészekre stb. A tapasztalatok egyértelműen amellett szólnak, hogy ezeket az anyagokat kisebb-nagyobb mennyiségben minden ipari vállalatnak a saját raktárán kell tárolnia, ha biztosítani kívánja a folyamatos, zökkenőmentes gyártást. Szakirodalmi adatok szerint közepes és nagysorozatgyártásnál az összes felhasználásra kerülő nyersanyag és alkatrésztípus 80—90%-ának a gyár saját raktárán kell lennie, hogy onnét a termelő üzemek, műhelyek bármikor kivételezhessék. Súlyos hiba volna azonban a raktárkészlet csupán különféle anyagok puszta halmazának, valami szükséges rossznak tekinteni.

A készletgazdálkodás a termelési folyamat szerves része. Ez olyankor szokott különösen érezhetővé válni, amikor a vállalati anyaggazdálkodás rosszul működik, és pl. alkatrészhiány miatt esetleg napokig kell állnia egy szerelőszalagnak vagy egy egész műhelynek, vagy éppen ellenkezőleg: nagy mennyiségű elfekvő készlet keletkezik, amit csak hulladékáron lehet értékesíteni a vállalati eredmény rovására.

A raktárhelyiségek befogadóképessége és a vállalat rendelkezésére álló forgóalap természetesen mindig véges, tehát az egyidejűleg tárolható anyag mennyisége is. Következésképpen a készlet bizonyos idő elteltével kimerül, pótlásáról, a raktár feltöltéséről időről időre gondoskodni kell. *Ideális esetben* két alapkérdésre kell rendszeresen választ találnia a vállalati anyaggazdálkodónak:

1. Mikor kell rendelnie?
2. Mennyit kell rendelnie egy-egy anyagféleségből?

A két kérdés nem független egymástól, a válasz pedig — egyebek között — függ a készletellenőrzés módjától (folyamatos vagy időszakos), a szükséglet időbeni jelentkezésének természetétől, a várható szükséglet nagyságától, a szükséglet becslésének hibájától, a szállítási késedelemtől, a költségfüggvények alakjától (hogy ti. a beszerzési, a raktározási és a hiányköltség külön-külön tekintve konvex-e vagy konkáv) stb. *A megrendelésre vonatkozó döntések sorozatát nevezik készletpótlási politikának.* Egy készletpótlási politika optimális voltának kritériuma a raktározással kapcsolatos költségek együttes minimalizálása, meghatározott kiszolgálási készség biztosítása mellett. Hétköznapi nyelven megfogalmazva: *a készletgazdálkodás fő feladata* — egészen általánosan — *annak a termékmennyiségnek a meghatározása, beszerzése és tárolása, amely a jövőbeli szükségletek kielégítését a leggazdaságosabb módon biztosítja.* Léteznek természetesen olyan rendszerek is, amelyeknél nincsen tényleges készlet, hanem közvetlenül kerül az áru a termelőtől a fogyasztóhoz, vagy felhasználóhoz. Minthogy ebben a dolgozatban az ipari vállalati készletgazdálkodás problémáit tartjuk szem előtt, ezért a továbbiakban mindig abból indulunk ki, hogy valamilyen anyagféleséget ténylegesen a raktáron tartunk a termelő üzemegységek szükségleteinek kielégítése céljából.

Némi magyarázatra szorul még az előző bekezdésben használt „ideális esetben" kitétel. Az ott leírt eset azért ideális, mert a megrendelő vállalatnak módjában áll a számára optimálisnak mutatkozó készletpótlási politikát kiválasztani és *megvalósítani.* A gyakorlatban azonban erre ritkán van lehetőség. Sok esetben a megrendelést *teljesítő* vállalat szabja meg a szállítási feltételeket: a szállítási határidőket és az esetenként szállított tételek nagyságát. Éppen ezek a körülmények biztosítanak különös fontosságot hazai viszonylatban azoknak a készletmodelleknek, amelyeket talán legmegfelelőbben *kezdőkészlet-modellek*nek lehet nevezni, mivel nem a kifogyott készlet utánpótlását, a rendelési politika optimalizálását célozzák, hanem annak a *minimális kezdőkészletnek* a meghatározását, amelynek *a tervidőszak kezdetén* már a vállalat raktárán kell lennie ahhoz, hogy *a folyamatos termelés nagy valószínűséggel ne szenvedjen fennakadást* addig sem, amíg a megrendelt anyagok a tárgyidőszak folyamán beérkeznek a raktárba. Az előzetesen megrendelt anyagok beérkezése a megrendelő vállalat számára a legtöbb esetben véletlen eseményfolyamatként jelenik meg, csakúgy, mint a raktáron tárolt anyag kiáramlása, bár itt gyakrabban találkozunk determinált időfüggvénnyel.

1. 2 Az utolsó két évtized folyamán világszerte előtérbe került a készletproblémák matematikai vizsgálata. Különösen ARROW, HARRIS és MARSCHAK [2], valamint DVORETZKY, KIEFER és WOLFOWITZ [7], [8] dolgozatai óta mutat nagy fellendülést a kutatás, bár már jóval korábban is értek el szép eredményeket egyszerűbb készletezési problémák megoldása terén, így pl. az 1920-as években G. F. MELLEN ("Practical Lot Quantity Formula", Management and Administration, 1925.) és H. S. OWEN ("How to Maintain Proper Inventory Control", Industrial Management, 1925.) cikkei, vagy H. R. PITT 1946-ban megjelent [11] dolgozata tartalmaz figyelemre méltó eredményeket. ARROW, HARRIS és MARSCHAK érdeme a determinisztikus készletpótlási modell formuláinak szigorú bizonyítása és az első dinamikus-sztochasztikus modell korrekt megfogalmazása és megoldása.

Az utolsó tizenöt év alatt szinte áttekinthetetlenné duzzadt a készletgazdálkodás matematikai elméletével foglalkozó szakirodalom. Jól érzékelteti ezt pl. A. F. VEINOTT [17] cikkének irodalomjegyzéke, amely nem kevesebb, mint 123 publikációt sorol fel. Ezek a publikációk csaknem kivétel nélkül az 1. 1 pontban említett készletpótlási (utánrendelési) modellekkel foglalkoznak, és abból indulnak ki, hogy a megrendelő fél mindenkor előírhatja a szállító félnek az esetenként szállított tételek nagyságát, sőt, olykor még a szállítási időpontokat is. Még akkor is, amikor a szállítási késedelmet (delivery time lag) valószínűségi változónak tekintik, azt mindig feltételezik, hogy a megrendelt mennyiség *egy tételben* kerül leszállításra. További közös vonásuk a szóban forgó modelleknek, hogy *meglehetősen gyakori* (pl. hetenkénti) *utánrendelést kívánnak.* A külföldi szerzők ezenkívül *feltételezik a költségfüggvények isme-*

retét is, legalábbis az egyes költségfüggvények (beszerzési, raktározási, hiányköltség) alakjának az ismeretét, hogy ti. lineárisak, konvexek vagy konkávok-e. Ezeknek a modelleknek és eredményeknek a túlnyomó része éppen a feltételek hiánya miatt egyáltalán nem, vagy csak lényeges átdolgozással volna alkalmazható a kialakult hazai gyakorlat viszonyai között.

Az 1. 1 pontban szóba került kezdőkészletmodellek vizsgálatát PRÉKOPA A. [12] és ZIERMANN M. [18] alapvető jelentőségű dolgozatai indították el.

2. A kezdőkészlet-probléma általános megfogalmazása

2. 1 *A kezdőkészlet-probléma gyakorlati háttere*

Miként már a Bevezetésben utalás történt rá, a kezdőkészletmodellek gyakorlati alkalmazását *elsősorban* azok a körülmények javallják, amelyek *nem teszik lehetővé* a megrendelő vállalatnak, hogy az adottságainak megfelelő *optimális készletpótlási politikát* kövesse, akár azért, mert a kellő gyakoriságú készletellenőrzést nem tudja megvalósítani, akár azért, mert az adott szállítási feltételeken nem tud változtatni, de az is gyakori eset, hogy a költségfüggvények ismeretének hiányában egyáltalán nem is lehet kiválasztani az illető vállalat számára optimális készletpótlási politikát. A jelen dolgozatban vizsgált modell-típus viszont a következő gyakorlati feltételeken alapszik:

A megrendelő vállalat nagyjában-egészében ismeri a soron következő tervidőszak (rendszerint egy év) termelési tervét és ennek alapján a készletezni kívánt anyagok várható szükségletére vonatkozóan becslést tud adni. Ezek a becsült adatok szerencsés esetben lehetnek valódi (matematikai statisztikai értelemben vett) becslések is, de lehetnek intuitív extrapolációval kapott számértékek is. Gyakran még azt is meg tudják mondani — a tapasztalatok alapján —, hogy ezt a feltételezett mennyiséget *várhatóan* hány résztételben fogják a raktárból kivételezni a felhasználó üzemegységek, pl. átlag hetenként vagy havonta egyszer. A feltételezett szükségletet a kérdéses tervidőszak kezdete előtt (olykor már három hónappal előbb, import anyagoknál fél évvel előbb) egyszerre kell megrendelni, a szóban forgó anyagot, alkatrészt vagy félkészterméket előállító vagy készletező vállalatnál. A megrendelt tétel leszállításáról mindössze annyit *tételezhetünk fel*, hogy a soron levő tervidőszakban az egész megrendelt mennyiség beérkezik a megrendelő vállalat raktárába, esetleg még azt is, hogy — figyelembe véve a szállító eszközök kapacitását — a szállítások várható száma egyenesen arányos a megrendelt mennyiséggel. A megrendelő vállalat azonban a kérdéses tervidőszak első munkanapjától kezdve termelni óhajt, tehát valamekkora készletről gondoskodnia kell, amivel biztosítani tudja a zavartalan, folyamatos termelést addig is, amíg a megrendelt anyagok beérkeznek, vagy másképpen megfogalmazva: el tudja kerülni az anyag- vagy alkatrészhiány miatt előálló termeléskiesést és veszteségeket. *Száz százalékos biztonságra* azonban nem mindig gazdaságos, és nem is mindig lehetséges törekedni, egyrészt mivel a ténylegesen igényelt mennyiség maga is véletlen, azaz valószínűségi változó, másrészt, mivel a száz százalékos biztonságot csak igen nagy forgóeszköz lekötése árán lehetne elérni, amennyiben nemcsak a *teljes várható szükségletet* kellene beszerezni a tárgyidőszak kezdetére, hanem *a becslés hibájától függő biztonsági készletet is.* Ez pedig az éves átlagkészlet, s vele együtt a raktározási, eszközlekötési, stb. költségek tetemes növekedésével járna. Meg kell tehát elégedni valamivel kisebb biztonsággal; pontosabban szólva: gazdaságossági, üzembiztonsági és egyéb szempontok figyelembevételével meg kell állapítani — éspedig anyagféleségenként külön-külön — azt a *megbízhatósági szintet*, ami megadja, hogy mekkora valószínűséggel kívánja a vállalat pozitív értéken tartani a raktárkészletet az egész tervidőszakban. Ha ez megtörtént, akkor a beáramlás és kiáramlás természetétől függően, meg kell határozni azt a minimális kezdőkészletet, aminek a tervidőszak kezdetén már a vállalat raktárán kell lennie ahhoz, hogy az előírt megbízhatósági szinten tudja fedezni a termelő üzemek szükségletét. Ez a kezdőkészlet-probléma verbális megfogalmazása.

2. 2 *Definíciók, jelölések*

Készletezési időszak az a $0 \leqq t \leqq T$ időintervallum, amelynek a szükségletét fedezni kívánjuk. Tartama a gyakorlatban legtöbbször egy év vagy negyedév, éppen ezért semmi megszorítást nem jelent, ha egységnyi hosszúságúnak választjuk, tehát $T=1$-et veszünk. Magát a t időparamétert egyszerűség kedvéért folytonosnak tekintjük.

A szükségletet mint véletlen eseményfolyamatot mindvégig ξ_t-vel jelöljük. ξ_t jelenti a $t \in (0, T]$ időpontig igényelt anyag mennyiségét. $\{\xi_t;\ t \in [0, T]\}$ rendszerint olyan sztochasztikus folyamat, amely véletlen időpontokban jelentkező és véletlen nagyságú tételekre vonatkozó igény formájában jelenik meg, tehát általában

$$\xi_t = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\nu(t)}$$

alakban írható, ahol

$$\{\nu(t),\ t \in [0, T]\}$$

maga is sztochasztikus folyamat, és a $t \in (0, T]$ időpontig jelentkező igények számát jelöli, míg $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(t)}$ az esetenként igényelt mennyiséget, a $\nu(t)$ folyamat eseményeinek sorrendjében, azaz ha a $\nu(t)$ folyamat eseményei, a raktárba befutó anyagigények rendre a

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{\nu(t)} \leqq T$$

időpontokban történnek, akkor ξ_i a t_i $\left(1 \leqq i \leqq \nu(t)\right)$ véletlen időpontban igényelt mennyiséget jelenti.

A $\{\xi_t,\ t \in [0, T]\}$ folyamatot rövidség kedvéért szokás *kiáramlási* (output) *folyamatnak* is nevezni, bár a szükségletfolyamat nem mindig azonos a kiáramlással, mely utóbbin a raktárból *ténylegesen* kivitt mennyiséget értjük. Ha ζ_t^+ jelöli a t időpontban raktáron található tényleges készlet nagyságát (on hand inventory) $\tilde{\xi}_i$ pedig a t_i időpontban bekövetkező kiáramlást, akkor a szükséglet és a kiáramlás között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$\tilde{\xi}_i = \begin{cases} \xi_i, & \text{ha} \quad \xi_i \leqq \zeta_{t_i}^+, \\ \zeta_{t_i}^+ \quad \text{vagy} \quad 0, & \text{ha} \quad \xi_i > \zeta_{t_i}^+. \end{cases}$$

Ha a szükséglet determinisztikus folyamat, akkor $x(t)$-vel jelöljük.

A $t \in (0, T]$ időpontig raktárba beérkező mennyiséget a továbbiakban mindig

η_t jelöli. Az $\{\eta_t; t \in [0, T]\}$ *beáramlási* (input) *folyamat* általában a ξ_t szükséglet-folyamathoz hasonló szerkezetű, azaz rendszerint

$$\eta_t = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{\mu(t)}$$

alakban áll elő, mint pozitív valószínűségi változók véletlen tagszámú összege. $\{\mu(t); t \in [0, T]\}$ a szállításokat reprezentáló véletlen eseményfolyamat, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\mu(t)}$ pedig a $\mu(t)$ folyamat eseményeihez tartozó, az egyes szállítmányokkal beérkező mennyiségek.

Gyakorlati meggondolások alapján és a vizsgált modelltípus természeténél fogva feltehetjük, és a továbbiakban mindig fel is tételezzük, hogy a ξ_t és az η_t folyamat független egymástól.

Olykor szükségesnek mutatkozik az elméleti és a tényleges készletszint megkülönböztetése. Ha a $[0, T]$ készletezési időszak kezdetén, a $t=0$ időpontban raktáron található, ténylegesen meglevő készlet $y_0(\geqq 0)$, akkor a $t \in (0, T]$ időpontbeli *elméleti készlet:*

$$\zeta_t = y_0 + \eta_t - \xi_t,$$

amíg a *tényleges készlet:*

$$\zeta_t^+ = \max(0, \zeta_t).$$

Az elméleti készletnek megvan az az első pillanatra értelmetlennek tűnő tulajdonsága, hogy negatív is lehet. Ha azonban a negatív készletet úgy értelmezzük, mint a raktár tartozását, mint — hiány miatt — ki nem elégített, de előjegyzésben tartott igényt, amit a legközelebbi szállítmányból nyomban kielégít a raktár, akkor a negatív készlet értelmetlen volta megszűnik.

*Megbízhatósági szint*nek azt az előírt valószínűséget nevezzük, amekkora valószínűséggel pozitív értéken kívánjuk tartani az elméleti készletszintet az egész $[0, T]$ készletezési időszakban. A dolgozatban ezt vagy α-val, vagy $1-\varepsilon$-nal jelöljük aszerint, hogy mikor melyik jelölés célszerűbb. Természetesen $\alpha \in (0, 1)$ és $\varepsilon \in (0, 1)$. Az utóbbi jelölésnél ε a kockázatot, vagyis a raktárkészlet kimerülésének megengedett valószínűségét jelenti. Az $\alpha = 1-\varepsilon$ megbízhatósági szintet anyagféleségenként külön-külön kell előre meghatározni, gazdaságossági, üzembiztonsági és esetleg egyéb pl. honvédelmi szempontok mérlegelése alapján. Ez a körülmény is érthetővé teszi, hogy a továbbiakban mindig csak egy meghatározott anyagféleség készletezését tekintjük, jóllehet egyes ipari vállalatok sokezer különböző anyaggal dolgoznak (pl. van olyan elektronikus műszergyár, amelyik nem kevesebb, mint 43 000 különböző alkatrésztípust használ fel).

2. 3 *A feladat általános megfogalmazása*

A 2. 1 szakaszban mondottakkal összhangban, a kezdőkészlet-probléma egészen általánosan a következőképpen fogalmazható meg:

Adott $\{\xi_t, t \in [0, T]\}$ szükséglet-folyamat és $\{\eta_t, t \in [0, T]\}$ beáramlási folyamat, valamint előírt $\alpha = 1-\varepsilon$ megbízhatósági szint esetén meghatározandó az a minimális y^* kezdőkészlet, amely biztosítja azt, hogy a

$$\zeta_t = y + \eta_t - \xi_t$$

készletszint-folyamat legalább α valószínűséggel pozitív lesz a $[0, T]$ interval-

lumban, feltéve, hogy a $[0, T]$-ben igényelt mennyiség: $\xi_T = s$, $[0, T]$-ben beérkező mennyiség: $\eta_T = r$, az igénylések száma: $\nu(T) = n$, végül a szállítások száma: $\mu(T) = m$.
A ζ_t elméleti készletszint-folyamat helyett célszerűbb a $\min\limits_{0 \leqq t \leqq T} \zeta_t$ funkcionált tekinteni, amennyiben ζ_t realizációi 1 valószínűséggel folytonos függvények. Avégből, hogy ezt a megkötést is elejthessük, a $\min \zeta_t$ helyett inkább ζ_t infimumát használjuk. Ezek után a kezdőkészlet-problémát és egyszersmind magát *a vizsgált modelltípust* is egészen általánosan az alábbi *sztochasztikus optimizációs feladat* alakjában lehet leírni:

$$(1) \qquad \mathbf{P}\{\inf_{0 \leqq t \leqq T} [y + \eta_t - \xi_t] > 0 \mid \xi_T = s, \ \nu_T = n; \ \eta_T = r, \ \mu_T = m\} \geqq \alpha$$

$$\min_{y > 0} y!$$

Nyilvánvaló, hogy amennyiben az összes feltétel 1 valószínűséggel teljesül, akkor az (1) feladat a következőre egyszerűsödik:

$$(2) \qquad \mathbf{P}\{\inf_{0 \leqq t \leqq T} [y + \eta_t - \xi_t] > 0\} \geqq \alpha$$

$$\min_{y > 0} y!$$

Egyszerű átrendezéssel és a

$$-\inf_{0 \leqq t \leqq T} (\eta_t - \xi_t) = \sup_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - \eta_t)$$

azonosság felhasználásával (1)-et a vele ekvivalens

$$(3) \qquad \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - \eta_t) < y \mid \xi_T = s, \ \nu_T = n; \ \eta_T = r, \ \mu_T = m\} \geqq \alpha$$

$$\min_{y > 0} y!$$

alakban írhatjuk. Jelölje most a $\sigma_T = \sup\limits_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - \eta_t)$ valószínűségi változó feltételes eloszlásfüggvényét a

$$\xi_T = s, \ \nu_T = n, \ \eta_T = r, \ \mu_T = m$$

feltételek mellett $F(y|s, n; r, m)$. Abban az esetben, amikor σ_T eloszlásfüggvénye folytonos és szigorúan monoton növekvő, az inverz függvénye, F^{-1} is szigorúan növekvő folytonos függvény a $(0, 1)$ intervallumban, az (1)-el ekvivalens (3) feladat megoldását, vagyis az

$$(4) \qquad F(y|s, n, r, m) \geqq \alpha$$

feltételnek eleget tevő minimális y értéket egyszerűen az

$$(5) \qquad F(y|s, n, r, m) = \alpha$$

feltételes megbízhatósági egyenlet

$$(6) \qquad y = F^{-1}(\alpha; s, n, r, m)$$

megoldás adja.

Abban a fontos és gyakori esetben, amikor σ_T *lehetséges értékei nemnegatív egész számok*, már nem ilyen egyszerű a helyzet, de alkalmas megállapodással tisztázható. Minthogy ilyenkor σ_T (feltételes) eloszlásfüggvénye nemcsökkenő lépcsősfüggvény, pontosan két eset egyikével és csakis az egyikével állunk szemben. Az egyik lehetséges eset az, hogy az előírt $\alpha \in (0, 1)$ értéket az F eloszlásfüggvény seholsem veszi fel. Ekkor szükségképpen van olyan k egész szám, amelyre

$$F(k) = F(k-0) = \alpha_1,$$

$$F(k+1) = F(k+0) = \alpha_2,$$

és $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. Most megállapodás kérdése, hogy az $y = k$ vagy az $y = k+1$ értéket tekintjük-e az (1), ill. (3) feladat megoldásának. Minthogy

$$(7) \qquad \begin{aligned} k &= \inf_{y>0}\{y : F(y|\cdots) = \alpha_2\} \\ &= \inf_{y>0}\{y : F(y|\cdots) \geqq \alpha\}, \end{aligned}$$

kézenfekvő, hogy az $y = k$ értéket fogadjuk el.

Ehhez hasonló és következetes módon állapodhatunk meg a másik lehetséges esetre nézve is, amikor ti. az F (feltételes) eloszlásfüggvény felveszi ugyan az előre megadott értéket, de tartja is egy egységnyi hosszúságú intervallumon:

$$F(y|s, n; r, m) = \alpha, \qquad k < y \leqq k+1.$$

Tehát ilyenkor is a

$$(8) \qquad k = \inf_{y>0}\{y : F(y|\cdots) \geqq \alpha\}$$

értéket fogadjuk el megoldásnak. Amikor *a minimális y^* konkrét értékének a kiszámítására* kerül sor, a diszkrét eloszlás esetében is az (5) megbízhatósági egyenletből indulhatunk ki, de egyszerűség kedvéért az F eloszlásfüggvényt megállapodásszerűen *jobbról folytonosnak* tekintjük, amint ezt számos szerző is megteszi, pl. J. L. DOOB, S. S. WILKS, stb. Legyen tehát

$$(9) \qquad F(y) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\sigma_T \leqq y\}.$$

A numerikus számítást pedig ellenkező irányban haladva végezzük: miután a ξ_t és az η_t folyamat tulajdonságainak az ismeretében sikerült meghatározni a

$$\sigma_T = \sup_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - \eta_t)$$

valószínűségi változó (feltételes) eloszlásfüggvényét, rögzített s, r, n, m paraméter értékek mellett kiszámítjuk F értékét a szóba jövő egész y értékeknél. Az F függvény ily módon kapott helyettesítési értékeit összehasonlítjuk az előírt α számmal, és az a legkisebb $y = k$ egész szám lesz a keresett y^* megoldás, amelyiknél az F függvény helyettesítési értéke először *nem* marad az α szint alatt.

Most már, (7), (8) és (9) alapján az (1), ill. (3) sztochasztikus optimizációs feladatot tömören így fogalmazhatjuk meg:

Meghatározandó

$$y^* = \min_{y>0} \{y : F(y|s, n, r, m) \geqq \alpha\}, \tag{10}$$

ill.

$$y^* = \min_{y>0} \{y : F(y) \geqq \alpha\}. \tag{11}$$

Az elmondottak alapján *mind a folytonos, mind a diszkrét esetben joggal tekinthetjük az* (1) vagy (3), ill. (10) vagy (11) *feladatot megoldottnak, ha sikerült meghatározni a*

$$\sigma_T = \sup_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - \eta_t)$$

vagy a

$$\vartheta_T = \inf_{0 \leqq t \leqq T} (\eta_t - \xi_t)$$

funkcionál (feltételes) *eloszlásfüggvényét*. A dolgozat következő fejezeteiben ilyen értelemben keressük az (1) vagy (3) feladat megoldásait, alkalmasan választott ξ_t és η_t folyamatok esetében.

3. A kezdőkészlet-probléma megoldása néhány speciális esetben

3. 1 *Első modell: mind a szükséglet, mind a beáramlás homogén WIENER-folyamat*

A modellt *meghatározó* feltételek:

1° A 2. 2 szakaszban mondottak értelmében az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a $[0, T]$ készletezési időszak egységnyi tartamú, azaz $T = 1$.

2° A $\{\xi_t, 0 \leqq t \leqq 1\}$ szükséglet olyan szeparábilis homogén WIENER-folyamat, amelyre

(i) $\mathbf{P}\{\xi_0 = 0\} = 1.$

(12) (ii) $\mathbf{M}\{\xi_t - \xi_s\} = m_1(t-s), \quad 0 \leqq s < t \leqq 1,$

(iii) $\mathbf{D}^2\{\xi_t - \xi_s\} = \sigma_1^2(t-s), \quad 0 \leqq s < t \leqq 1.$

MEGJEGYZÉS: Minthogy a növekmények $N(m_1(t-s), \sigma_1\sqrt{t-s})$ eloszlású valószínűségi változók, értelmezésre szorul a negatív növekmények esete. Erre nézve a következőket lehet mondani:

1. ha m_1 elég nagy, akkor annak a valószínűsége, hogy egy növekmény negatív legyen, gyakorlatilag elhanyagolhatóan kicsiny, márpedig rendszerint éppen olyankor közelíthetjük a valóságos folyamatot egy WIENER-folyamattal, amikor a várható érték nagy;

2. az ipari gyakorlatban mindennapos eset a raktári *visszavételezés*, amikor egy termelő üzemegység valamilyen oknál fogva nem használta fel a kivételezett anyagot és a megmaradt mennyiséget a központi raktárba visszaszállítja és egy e célra rendszeresített nyomtatványon visszavételezteti; s ez éppen a negatív kiáramlást realizálja.

3° Az $\{\eta_t,\ 0 \leqq t \leqq 1\}$ beáramlás szintén szeparábilis homogén WIENER-folyamat, és

$$\text{(13)}\quad \begin{aligned} &\text{(i)} && \mathbf{P}\{\eta_0 = 0\} = 1, && \\ &\text{(ii)} && \mathbf{M}\{\eta_t - \eta_s\} = m_2(t-s), && 0 \leqq s < t \leqq 1, \\ &\text{(iii)} && \mathbf{D}^2\{\eta_t - \eta_s\} = \sigma_2^2(t-s), && 0 \leqq s < t \leqq 1. \end{aligned}$$

MEGJEGYZÉS: A beáramlási folyamat negatív növekményeire értelemszerűen alkalmazhatók a szükséglettel kapcsolatban mondottak, azzal a különbséggel, hogy itt a raktári visszavételezés helyett a beérkező anyagellenőrzés (MEO) által, minőségi kifogás miatt *visszaküldött tételek* adnak reális tartalmat a negatív beáramlásnak.

4° Feltételezzük, hogy

(i) ξ_t és η_t függetlenek, továbbá, hogy

(ii) $m_1 = m_2 (>0)$.

Az utóbbi feltevésnek az a reális alapja, hogy a várható szükséglettel egyenlő mennyiséget rendeltünk és joggal várjuk el, hogy a megrendelt mennyiség be is érkezik.

5° Definíciószerűen legyen

$$\zeta_t = \xi_t - \eta_t.$$

Nyilvánvaló, hogy ζ_t olyan szeparábilis homogén WIENER-folyamat, amelyre fennáll, hogy

$$\text{(14)}\quad \begin{aligned} &\text{(i)} && \mathbf{P}\{\zeta_0 = 0\} = 1, && \\ &\text{(ii)} && \mathbf{M}\{\zeta_t - \zeta_s\} = 0, && 0 \leqq s < t \leqq 1, \\ &\text{(iii)} && \mathbf{D}^2\{\zeta_t - \zeta_s\} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(t-s), && 0 \leqq s < t \leqq 1. \end{aligned}$$

6° Sem ξ_1, sem η_1, tehát ζ_1 értékére vonatkozólag sem teszünk semmi feltevést.

A feladat mármost előre adott $1-\varepsilon$ megbízhatósági szinthez meghatározni a

$$\text{(15)}\quad \mathbf{P}\Big\{\inf_{0 \leqq t \leqq 1} (y - \zeta_t) > 0 \,\Big|\, \zeta_0 = 0\Big\} \geqq 1 - \varepsilon$$

korlátozó feltételnek eleget tevő minimális y értéket.

A 2. 3 szakaszban mondottak értelmében, valamint annak figyelembevételével, hogy egy szeparábilis WIENER-folyamat realizációi 1 valószínűséggel folytonos függvények, (15) helyett tekinthetjük a vele ekvivalens

$$\text{(16)}\quad \begin{gathered} \mathbf{P}\Big\{\max_{0 \leqq t \leqq 1} \zeta_t \leqq y\Big\} \geqq 1 - \varepsilon \\ \min_{y > 0} y! \end{gathered}$$

feladatot.

Ismeretes, hogy a ζ_t-re tett feltevések mellett igaz a következő:

$$\mathbf{P}\{\max_{0\leq t\leq 1} \zeta_t > y\} = 2\mathbf{P}\{\zeta_1 > y\} = 2\left[1-\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)\right]. \tag{17}$$

(A bizonyítást illetően l. DOOB [6], 392. old. és KARLIN [10] 276. old.) Mivel most a $\max_{0\leq t\leq 1} \zeta_t$ eloszlásfüggvénye folytonos és szigorúan monoton, a kezdőkészlet-feladat megoldását egyszerűen a

$$\mathbf{P}\{\max_{0\leq t\leq 1} \zeta_t \leq y\} = 1-\varepsilon \tag{18}$$

megbízhatósági egyenletből kapjuk. (17) felhasználásával:

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon &= \mathbf{P}\{\max_{0\leq t\leq 1} \zeta_t \leq y\} \\ &= 1-\mathbf{P}\{\max_{0\leq t\leq 1} \zeta_t > y\} \\ &= 1-2\mathbf{P}\{\zeta_1 > y\} \\ &= 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)-1, \end{aligned} \tag{19}$$

tehát a keresett minimális kezdőkészlet:

$$y^* = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,\Phi^{-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{20}$$

Figyelemre méltó, hogy a megoldás független a szükséglet és a beáramlási folyamat várható értékétől, továbbá az is, hogy rögzített megbízhatósági szint mellett az optimális kezdőkészlet a ζ_t folyamat szórásával arányosan növekszik.

Ehhez hasonló, de több szempontból előnyösebben alkalmazható és könnyen dinamikussá fejleszthető a modell következő változata:

Legyen $\{\zeta_t = \xi_t - \eta_t,\ 0\leq t\leq 1\}$ az előbbi módon értelmezett szeparábilis homogén WIENER-folyamat, azzal a további egyszerűsítő feltevéssel, hogy

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2 = 1.$$

Most az $y(>0)$ kezdőkészletet úgy tekintjük, mint a ζ_t elméleti készletszint-folyamat $t=0$ időpontbeli értékét, ami részben az előző időszakból maradhatott a raktáron, részben a gondoskodásunk eredménye is lehet. Tételezzük fel, hogy az egységnyi tartamú készletezési időszak végén, a $t=1$ időpontban az elméleti készlet egy rögzített $x>0$ mennyiség. Az előre megadott $1-\varepsilon$ megbízhatósághoz keressük most a

$$\mathbf{P}\{\min_{0\leq t\leq 1} \zeta_t > 0 \,|\, \zeta_0 = y,\ \zeta_1 = x\} = 1-\varepsilon \tag{21}$$

feltételes megbízhatósági egyenlet y megoldását.

ÁLLÍTÁS: *a tett feltevések mellett* (21) *megoldása*

$$y = \frac{1}{2x}\ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{22}$$

Ha speciálisan $x=y$, (azaz vagy nincs hiány a $0 \leqq t \leqq 1$ intervallumban, vagy pedig a hiány tartama alatt jelentkező igényeket a raktár az első beérkező szállítmányból rögtön kielégíti) akkor a megoldás

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon}}. \tag{23}$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$\mathbf{P}\{\min_{0 \leqq t \leqq 1} \zeta_t > 0 \mid \zeta_0 = y,\ x \leqq \zeta_1 \leqq x+dx\} = \frac{\mathbf{P}\{\min_{0 \leqq t \leqq 1} \zeta_t > 0,\ x \leqq \zeta_1 \leqq x+dx \mid \zeta_0 = y\}}{\mathbf{P}\{x \leqq \zeta_1 \leqq x+dx \mid \zeta_0 = y\}}.$$

A nevezőben álló valószínűség:

$$\mathbf{P}\{x \leqq \zeta_1 \leqq x+dx \mid \zeta_0 = y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} dx. \tag{24}$$

A számlálóban álló valószínűség kiszámítására először belátjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\min_{0 \leqq t \leqq 1} \zeta_t > 0,\ x \leqq \zeta_1 \leqq x+dx \mid \zeta_0 = y\} = \\ &= \mathbf{P}\{x \leqq \zeta_1 \leqq x+dx \mid \zeta_0 = y\} - \mathbf{P}\{x \leqq \zeta_1 \leqq x+dx,\ \min_{0 \leqq t \leqq 1} \zeta_t \leqq 0 \mid \zeta_0 = y\}. \end{aligned} \tag{25}$$

(25) jobb oldalán az első tag nyilván azonos (24)-gyel. (25) jobb oldalának második tagjáról D. ANDRÉ tükrözési tételének segítségével (L. FELLER [9], 27. old.) könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\min_{0 \leqq t \leqq 1} \zeta_t \leqq 0,\ x \leqq \zeta_1 \leqq x+dx \mid \zeta_0 = y\} = \\ &= \mathbf{P}\{\min_{0 \leqq t \leqq 1} \zeta_t \leqq 0,\ -(x+dx) \leqq \zeta_1 \leqq -x \mid \zeta_0 = y\} = \\ &= \mathbf{P}\{-(x+dx) \leqq \zeta_1 \leqq -x \mid \zeta_0 = y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}} dx. \end{aligned} \tag{26}$$

Itt kihasználtuk azt a tényt, hogy a

$$-(x+dx) \leqq \zeta_1 \leqq -x \qquad (x>0)$$

esemény bekövetkezése maga után vonja a

$$\min_{0 \leqq t \leqq 1} \zeta_t \leqq 0$$

esemény bekövetkezését. Ezekután, (24), (25) és (26) összevetésével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\min_{0 \leqq t \leqq 1} \zeta_t > 0 \mid \zeta_0 = y,\ \zeta_1 = x\} = \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}} dx}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} dx} = 1 - e^{-2xy}, \qquad x>0,\ y>0. \end{aligned} \tag{27}$$

A (21) egyenlet szerint (27) utolsó sorának egyenlőnek kell lennie $1-\varepsilon$-nal, azaz

$$\varepsilon = e^{-2xy}, \tag{28}$$

amiből rögtön adódik a (22) és $x=y$ esetén a (23) formula, ami bizonyítandó volt.

3. 2 *Második modell: a szükséglet determinisztikus, a beáramlás homogén POISSON-folyamat*

A modellt meghatározó feltételek:

1° Az alapul vett $[0, T]$ készletezési időszak ismét egységnyi tartamú, tehát $T=1$.

2° A szükséglet egyenletes, állandó intenzitású, időegységenként konstans $c>0$ egység, tehát a szükséglet-folyamat determinisztikus: $x(t)=ct$, $0\leqq t\leqq 1$.

3° Az $\{\eta_t,\ 0\leqq t\leqq 1\}$ beáramlási folyamat olyan, hogy az egyes szállítmányok egy $\lambda>0$ paraméterű $\nu(t)$ homogén POISSON-folyamatban érkeznek be, míg az esetenként érkező tételek egyenlő nagyságúak. Feltételezzük, hogy pontosan n alkalommal szállítják le a megrendelt c mennyiséget, tehát minden egyes szállítmánnyal c/n egység érkezik be. Természetesen azt is feltesszük, hogy $n\geqq 1$. Ezek szerint annak a valószínűsége, hogy a $t\in(0, 1]$ időpontig pontosan k szállítmány érkezzék:

$$\mathbf{P}\{\nu(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \qquad k=0, 1, \dots$$

A $t\in(0, 1]$ időpontig beérkező mennyiséget reprezentáló η_t folyamat pedig a következő módon adható meg:

$$\eta_t = \begin{cases} c\dfrac{\nu(t)}{\nu(1)}, & 0\leqq t\leqq 1, \quad \text{ha} \quad \nu(1)>0,\\ 0\ , & 0\leqq t\leqq 1, \quad \text{ha} \quad \nu(1)=0.\end{cases}$$

4° Az $1-\varepsilon$ megbízhatósági szint előre adott.

A feladat tehát a minimális y kezdőkészlet meghatározása a

$$\mathbf{P}\{\inf_{0\leqq t\leqq 1}(y+\eta_t-ct) > 0\ \eta_1 = c,\ \nu(1) = n(\geqq 1)\} \geqq 1-\varepsilon \tag{29}$$

korlátozó feltétel mellett.

A szokásos átrendezéssel, és figyelembe véve, hogy a $\nu(1)=n(\geqq 1)$ feltétel teljesülése maga után vonja az $\eta_1=c$ esemény bekövetkezését, végül a 2. 3 szakaszban foglaltak értelmében egyenletre áttérve, a következőt kapjuk:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqq t\leqq 1}\left[t-\frac{\nu(t)}{\nu(1)}\right] \geqq \frac{y}{c}\,\middle|\, \nu(1) = n(\geqq 1)\right\} = \varepsilon. \tag{30}$$

Ezt az egyenletet kell megoldani y-ra, vagy pedig élve a 2. 3 szakaszban tisztázott lehetőséggel, egyszerűen a supremum funkcionál eloszlásának a meghatározására szorítkozunk.

A

$$\sup_{0 \leqq t \leqq 1}\left[t-\frac{\nu(t)}{\nu(1)}\right]$$

valószínűségi változó feltételes eloszlásfüggvényének (a $\nu(1)=n \geqq 1$ feltétel mellett) a meghatározásához felhasználjuk a következő ismert *tételt*:

Tétel: (TAKÁCS [16], 17. szakasz, 1. tétel) *Ha* $\{\chi(u),\ 0 \leqq u \leqq T\}$ *olyan felcserélhető növekményű szeparábilis sztochasztikus folyamat, amelynek majdnem minden realizációja nemcsökkenő lépcsősfüggvény és*

$$\mathbf{P}\{\chi(0)=0\}=1,$$

akkor

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqq u \leqq t}[u-\chi(u)] \leqq x\} = 1-\int_x^t \frac{y}{x}\, d\mathbf{P}_y\{\chi(y)=y-x\},$$

ahol

$$0 < x \leqq t \leqq T.$$

A tett feltevések mellett $\nu(t)/\nu(1)$ mindenben eleget tesz az idézett tétel feltételeinek, tehát

$$\frac{y}{c}=u$$

helyettesítéssel (30)-ra írhatjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leqq t \leqq 1}\left[t-\frac{\nu(t)}{\nu(1)}\right] \leqq u \mid \nu(1)=n\right\} = 1-\sum_{u \leqq x \leqq 1}\frac{u}{x}\mathbf{P}\left\{\frac{\nu(x)}{\nu(1)}=x-u \mid \nu(1)=n\right\}=$$

$$=1-\sum_{u \leqq x \leqq 1}\frac{u}{x}\,\frac{\mathbf{P}\{\nu(x)=n(x-u),\ \nu(1)=n\}}{\mathbf{P}\{\nu(1)=n\}}.$$

Az $n(x-u)=j$ helyettesítéssel és az

$$x=u+\frac{j}{n} \leqq 1$$

korlát figyelembevételével, valamint a POISSON-folyamat additív tulajdonságának felhasználásával továbbá

$$1-\sum_{0 \leqq j \leqq n(1-u)}\frac{u}{u+j/n}\,\frac{\mathbf{P}\{\nu(u+j/n)=j,\ \nu(u+j/n)+\nu(1-u-j/n)=n\}}{\mathbf{P}\{\nu(1)=n\}}$$

$$=1-\sum_{j=0}^{[n(1-u)]}\frac{u}{u+j/n}\,\frac{\mathbf{P}\{\nu(u+j/n)=j\}\,\mathbf{P}\{\nu(1-u-j/n)=n-j\}}{\mathbf{P}\{\nu(1)=n\}}$$

$$=1-\sum_{j=0}^{[n(1-u)]}\frac{u}{u+j/n}\,\frac{e^{-\lambda(u+j/n)}\dfrac{[\lambda(u+j/n)]^j}{j!}\,e^{-\lambda(1-u-j/n)}\dfrac{[\lambda(1-u-j/n)]^{n-j}}{(n-j)!}}{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}}$$

$$=1-u\sum_{j=0}^{[n(1-u)]}\binom{n}{j}\left(u+\frac{j}{n}\right)^{j-1}\left(1-u-\frac{j}{n}\right)^{n-j},$$

ami nem más, mint a jól ismert BIRNBAUM—TINGEY formula (L. ZIERMANN [18]). Visszatérve a (30)-nak megfelelő eredeti feladatra, a keresett y kezdőérték az

$$\varepsilon = \frac{y}{c} \sum_{j=0}^{[n(1-y/c)]} \binom{n}{j} \left(\frac{y}{c}+\frac{j}{n}\right)^{j-1} \left(1-\frac{y}{c}-\frac{j}{n}\right)^{n-j}, \quad (o<y<c) \tag{31}$$

összefüggésből számítható.

Ha a szállításokra vonatkozóan csupán azt kötjük ki, hogy a $\lambda>0$ paraméterű homogén POISSON-folyamat szerint érkező szállítmányok mindig egyenlő nagyságú tételeket tartalmaznak, akkor a helyzetnek megfelelő

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq 1}\left[t-\frac{\nu(t)}{\nu(1)}\right]<\frac{y}{c}\right\}=1-\varepsilon \tag{32}$$

megbízhatósági egyenlet egzakt megoldását az

$$\varepsilon = e^{-\lambda}\left[1+\frac{y}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{[n(1-y/c)]}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{j}\left(\frac{y}{c}+\frac{j}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{y}{c}-\frac{j}{n}\right)^{n-j}\right] \tag{33}$$

összefüggés tartalmazza, ha $0<\frac{y}{c}<1$.

3. 3 *Harmadik modell: mind a szükséglet, mind a beáramlás homogén POISSON-folyamat*

A modell meghatározó feltételei:

1° Az alapul vett készletezési időszak tetszőleges $T>0$ hosszúságú $[0, T]$ intervallum.

2° A $\{\xi_t,\ 0\leq t\leq T\}$ szükséglet-folyamat $\lambda>0$ paraméterű homogén POISSON-folyamat, tehát annak a valószínűsége, hogy a $t\in(0, T]$ időpontig n egység anyagot igényelnek:

$$\mathbf{P}\{\xi_t=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

3° Az $\{\eta_t,\ 0\leq t\leq T\}$ beáramlás $\mu>0$ paraméterű homogén POISSON-folyamat, és így annak a valószínűsége, hogy a $(0, t]$, $t\in(0, T]$ intervallumban pontosan m egység érkezik be a raktárba:

$$\mathbf{P}\{\eta_t=m\}=e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^m}{m!}, \qquad m=0,1,2,\ldots$$

4° Feltesszük, hogy ξ_t és η_t függetlenek, $\lambda\leq\mu$.

5° Az $1-\varepsilon$ megbízhatósági szint adott, $0<\varepsilon<1$.

A feladat meghatározni a

$$\mathbf{P}\{\inf_{0\leq t\leq T}[y+\eta_t-\xi_t]>0\}\geq 1-\varepsilon \tag{34}$$

korlátozó feltételnek eleget tevő minimális y kezdőkészletet.

A 2. 3 szakaszban mondottak értelmében a (34) feladatot megoldottnak tekintjük, ha sikerül meghatározni az $\inf(\eta_t-\xi_t)$ vagy $\sup(\xi_t-\eta_t)$ valószínűségi változó eloszlását.

Az idevágó eredményt most tétel formájában mondjuk ki.

Tétel: *Legyen* $\{\xi_t,\ 0\leqq t\leqq T\}$ *és* $\{\eta_t,\ 0\leqq t\leqq T\}$ *két egymástól független, szeparábilis, homogén* POISSON*-folyamat, rendre* $\lambda>0$ *és* $\mu>0$ *paraméterrel,* $\lambda\leqq\mu$. *Ekkor*

$$\mathbf{P}\{\inf_{0\leqq t\leqq T}(\eta_t-\xi_t)\leqq -a\}=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a,\mu T)}{\Gamma(a)}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^a, & a>0\\ 1, & a\leqq 0,\end{cases}\tag{35}$$

és

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqq t\leqq T}(\xi_t-\eta_t)<a\}=\begin{cases}1-\dfrac{\Gamma(a,\mu T)}{\Gamma(a)}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^a, & a>0,\\ 0, & a\leqq 0,\end{cases}\tag{36}$$

ahol

$$\Gamma(a,\mu T)=\int_0^{\mu T}e^{-t}t^{a-1}\,dt$$

a nem teljes gamma-függvény.

1. Következmény: *A tétel feltételei mellett,* $\lambda=\mu$ *és* $T<\infty$ *esetén*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqq t\leqq T}(\xi_t-\eta_t)<a\}=\begin{cases}1-\dfrac{\Gamma(a,\mu T)}{\Gamma(a)}, & a>0,\\ 0, & a\leqq 0\end{cases}\tag{37}$$

vagyis a $\sup\limits_{0\leqq t\leqq T}(\xi_t-\eta_t)$ *funkcionál maga is* POISSON*-eloszlású valószínűségi változó,* μT *várható értékkel.*

2. Következmény: *A tétel feltételei mellett,* $T\to\infty$ *és* $\lambda<\mu$ *esetén*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqq t<\infty}(\xi_t-\eta_t)<a\}=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^a, & a>0\\ 0, & a\leqq 0\end{cases}\tag{38}$$

végül $T\to\infty$ *és* $\lambda=\mu$ *esetén*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqq t<\infty}(\xi_t-\eta_t)\geqq a\}=1,\qquad -\infty<a<\infty.\tag{39}$$

Bizonyítás: Előljáróban érdemes megjegyezni, hogy ξ_t és η_t függetlensége következtében $\eta_t-\xi_t$ és $\xi_t-\eta_t$ lehetséges értékei az egész számok, és

$$\mathbf{P}\{\xi_t-\eta_t=n\}=e^{-(\lambda+\mu)t}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n/2}I_n\left(2\sqrt{\lambda\mu t}\right),\qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

ahol
$$I_n(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
az n-edrendű elsőfajú módosított BESSEL-függvény.

A bizonyítás első lépéseként meghatározzuk az
$$\inf_{0 \leqq t \leqq T} (\eta_t - \xi_t)$$
feltételes eloszlásfüggvényét, tetszőlegesen választott és rögzített
$$\eta_T = n(\geqq 0), \quad \xi_T = m(\geqq 0)$$
feltételek mellett. A továbbiakban a mindig egész számot jelöl. Rövidség kedvéért bevezetjük a következő jelölést:

(40) $$\mathbf{P}\{\inf_{0 \leqq t \leqq T} (\eta_t + \xi_t) \leqq -a \mid \eta_T = n, \xi_T = m\} = F(a \mid n, m).$$

Most mindenekelőtt megjegyezzük, hogy

a) $\mathbf{P}\{\inf_{0 \leqq t \leqq T} (\eta_t - \xi_t) \leqq 0\} = 1$, mert $\mathbf{P}\{\xi_0 = 0\} = \mathbf{P}\{\eta_0 = 0\} = 1$.

b) $F(a|n, m) = 1$, ha $-a \geqq \min(0, n-m)$, azaz $a \leqq \max(0, m-n)$, mert $\eta_T - \xi_T = n-m$.

c) $F(a|n, m) = 0$, ha $-a < -m$, azaz $a > m$, mert $\eta_t \geqq 0$, $\forall t \in [0, T]$.

d) $0 < F(a|n, m) < 1$ akkor és csak akkor, ha $-m \leqq -a < \min(0, n-m)$, azaz $\max(0, m-n) < a \leqq m$; ezért most csak a 40 d)-nek megfelelő a-val számolunk.

Tekintsük a $\zeta_t = \eta_t - \xi_t$ folyamat egy tetszőleges realizációját, feltételezve, hogy $\eta_T = n$ és $\xi_T = m$. Ennek képe a (t, ζ_t) síkban az origóból indul, a $(T, n-m)$ pontban végződik, és n számú pozitív, valamint m számú negatív egységugrásból tevődik össze. Az $F(a|n, m)$ valószínűség kiszámítása céljából ábrázoljuk a $\zeta_t = \eta_t - \xi_t$ folyamat kiválasztott realizációját olyan (x, y) koordinátarendszerben, amelynél az x tengelyre az egységugrások összegeződő számát, az y tengelyre pedig a ζ_t folyamat lehetséges értékeit mértük fel. Az ábrázolás a következő módon történik: az $x = 1, 2, \dots, n+m$ helyeken ζ_t értékének megváltozása $+1$ vagy -1. Jelölje az $x = k$ pontbeli megváltozást y_k. Eszerint $y_k = 1$, ha a k-adik esemény η_t-hez tartozik, és $y_k = -1$, ha a k-adik esemény ξ_t-hez tartozik.

Legyen továbbá
$$s_k = y_1 + y_2 + \dots + y_k, \qquad k = 1, 2, \dots, n+m.$$
Az s_k összegekre nyilvánvalóan fennáll, hogy

(41) $$s_0 = 0; \quad s_k - s_{k-1} = y_k \quad (k = 1, \dots, n+m); \quad s_{n+m} = n-m.$$

Kössük össze a
$$(0, 0), (1, s_1), (2, s_2), \dots, (n+m, s_{n+m})$$
pontokat egyenes szakaszokkal. Ekkor olyan töröttvonalat kapunk, amelyik az (x, y) koordinátarendszer kezdőpontját az $(n+m, n-m)$ ponttal köti össze, az i-edik szakasz iránytényezője y_i, a k-adik töréspont ordinátája s_k. Minden ilyen

(42) $$\{s_1, s_2, \dots, s_{n+m}\}$$

értékrendszert *út*nak nevezünk, ha eleget tesz a (41) feltételeknek, és úgy tekintjük, mint a $(0, 0)$ pontból induló és $n+m$ lépés után az $(n+m, n-m)$ pontba érkező, az egész koordinátájú rácspontokon véletlen bolyongást végző pont útját. Nyilvánvaló, hogy az $\eta_T = n$ és $\xi_T = m$ feltétel mellett a $\zeta_t = \eta_t - \xi_t$ folyamat bármely konkrét lefutásához, azaz minden egyes realizációjához egy és csak egy, (42)-vel definiált út tartozik. Az összes lehetséges ilyen utak N száma annyi, ahányféleképpen az

$$x = 1, x = 2, \dots, x = n+m$$

hely közül a pozitív y_i-k számára n helyet, vagy negatív y_j-k számára m helyet ki lehet választani, tehát

$$N = \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}.$$

Minthogy a folyamatokra tett feltevés miatt valamennyi lehetséges út egyenlően valószínű, ezért bármelyik út valószínűsége:

$$N^{-1} = \frac{1}{\binom{n+m}{n}}.$$

Most ismét felhasználjuk D. ANDRÉ 3. 1 szakaszban már idézett tükrözési elvét („reflection principle"), amelynek szabatos megfogalmazása a következő:

Legyen $A = (a, \alpha)$ és $B = (b, \beta)$ *két egész koordinátájú pont a pozitív síknegyedben*; $0 \leqq a < b$, $0 < \alpha$ *és* $0 < \beta$. *Legyen továbbá* $A' = (a, -\alpha)$ *az* A *pont* x *tengelyre vonatkozó tükörképe, végül legyen*

$$\{s_a = \alpha, s_{\alpha+1}, \dots, s_b = \beta\}$$

olyan A*-ból* B*-be vezető út, amelynek legalább egy közös pontja van az* x *tengellyel, egyébként tetszőleges. Ekkor igaz a következő: az* A*-ból* B*-be vezető olyan utak száma, amelyek az* x *tengelyt elérik vagy metszik, egyenlő az* A'*-ból* B*-be vezető utak teljes számával.* (Bizonyítása megtalálható pl. FELLER [9], 27. old.)

Ha a olyan egész szám, amelyikre fennáll a (40) d) egyenlőtlenség, és a most idézett tételbeli x tengely szerepét az $y = -a$ egyenes veszi át, akkor a tükrözési tétel értelmében a $(0, 0)$ pontból az $(n+m, n-m)$ pontba vezető olyan utak teljes száma, amelyek az $y = -a$ egyenest elérik vagy metszik, egyenlő a $(0, -2a)$ pontból az $(n+m, n-m)$ pontba vezető összes lehetséges utak N_a számával, ami az

$$n-m = -2a + k\cdot(+1) + (n+m-k)\cdot(-1),$$

azaz

$$k = n+a$$

követelményből kifolyólag nyilvánvalóan

$$N_a = \binom{n+m}{n+a} = \binom{n+m}{m-a}.$$

Mivel pedig az

(43) $$\left\{\inf_{0 \leqq t \leqq T} (\eta_t - \xi_t) \leqq -a \,|\, \eta_T = n, \quad \xi_T = m\right\}$$

eseményt pontosan azok az utak reprezentálják, amelyek az $y = -a$ egyenest elérik vagy metszik, a (43) esemény valószínűsége

$$\frac{N_a}{N} = \frac{\binom{n+m}{n+a}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{n!\,m!}{(n+a)!\,(m-a)!},$$

pontosabban:

$$F(a\,n, m) = \begin{cases} 0 & , \quad a > m, \\ \dfrac{n!\,m!}{(n+a)!\,(m-a)!}, & \max(0, m-n) < a \leqq m, \\ 1 & , \quad a \leqq \max(0, m-n). \end{cases} \tag{44}$$

Ezek szerint, ha a szükséglet és a beáramlás két független, szeparábilis, homogén POISSON-folyamat, és mind a $[0, T]$ időszakban beérkező teljes mennyiségre, mind pedig a $[0, T]$ készletezési időszak teljes szükségletére vonatkozólag meghatározott feltevéssel élünk, akkor az

$$y^* = \min_{y>0} \{y: F(y\,n, m) \geqq 1-\varepsilon\} \tag{45}$$

kezdőkészlet-feladat pontos megoldását az

$$\varepsilon = \frac{n!\,m!}{(n+y)!\,(m-y)!} \tag{46}$$

összefüggés tartalmazza, és ebből a 2. 3 szakaszban vázolt módon számítható a minimális y^* kezdőkészlet értéke.

Figyelemre méltó, hogy *ebben az esetben az optimális y^* megoldás nem függ sem a szükséglet-, sem a beáramlási folyamat paraméterétől.*

1. MEGJEGYZÉS: Egy sorbanállási probléma kapcsán a (44) formuláig eljutott D. G. CHAMPERNOWNE is [5] dolgozatában, az ő bizonyítása azonban kissé elnagyolt és pontatlan is, amennyiben csak a

$$-a < -m, \quad -a \geqq 0 \quad \text{és} \quad -m \leqq -a \leqq 0$$

eseteket veszi figyelembe, holott evidens, hogy a (44)-ben szereplő középső

$$\frac{n!\,m!}{(n+a)!\,(m-a)!}$$

formula csakis az itt adott

$$-m \leqq -a < \min(0, n-m)$$

egyenlőtlenségnek megfelelő a esetén igaz.

2. MEGJEGYZÉS: A STIRLING-formula felhasználásával könnyen igazolható, hogy $n=m$ esetén a (46) képlet a [12] 327. oldalán (35) alatt közölt PRÉKOPA-féle

$$M_{\lambda,\mu} = cT\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1+(1-\lambda)^2}{n} + \frac{1+(1-\mu)^2}{m}\right)\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]^{1/2}$$

aszimptotikus formulának megfelelő egzakt megoldást tartalmazza a $\lambda=\mu=1$, és $n=m=cT$ speciális esetben, ahol

$$\lambda=\frac{n\alpha}{cT}, \qquad 0\leqq\lambda\leqq 1,$$

$$\mu=\frac{m\beta}{cT}, \qquad 0\leqq\mu\leqq 1,$$

α = a minimális beérkező mennyiség,
β = a minimális igényelt mennyiség,
n = a szállítások száma $[0, T]$-ben,
m = az igények száma $[0, T]$-ben,
ε = a megengedett kockázat,

$$\exp\left(-2\frac{nm}{m+m(1-\lambda)^2+n+n(1-\mu)^2}\right)<\varepsilon<1.$$

A bizonyítás második lépéseként meghatározzuk az

$$\inf_{0\leqq t\leqq T}(\eta_t-\xi_t)$$

funkcionál feltételes eloszlását a $\xi_T=m$ feltétel mellett, vagyis az

$$F(a|m)=\mathbf{P}\{\inf_{0\leqq t\leqq T}(\eta_t-\xi_t)\leqq -a|\xi_T=m\}$$

feltételes eloszlásfüggvényt. Ha $\max(0, m-n)<a\leqq m$, akkor

$$\begin{aligned}
F(a|m) &= \sum_{n=0}^{\infty}F(a|n,m)\mathbf{P}\{\eta_T=n\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,m!}{(n+a)!(m-a)!}e^{-\mu T}\frac{(\mu T)^n}{n!}\\
&= \frac{m!}{(m-a)!}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\mu T}\frac{(\mu T)^n}{(n+a)!}\\
&= \frac{m!}{(m-a)!}\sum_{n=0}^{\infty}(\mu T)^{-a}\frac{(\mu T)^{n+a}}{(n+a)!}e^{-\mu T} \qquad (47)\\
&= \frac{m!}{(m-a)!}(\mu T)^{-a}\sum_{n=a}^{\infty}\frac{(\mu T)^n}{n!}e^{-\mu T}\\
&= \frac{m!}{(m-a)!}(\mu T)^{-a}\frac{\Gamma(a,\mu T)}{\Gamma(a)}\\
&= a\binom{m}{a}(\mu T)^{-a}\Gamma(a,\mu T), \qquad 0<a\leqq m.
\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk azt, hogy

$$\sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\mu T)^k}{k!} e^{-\mu T} = 1 - \frac{\Gamma(a, \mu T)}{\Gamma(a)},$$

ahol

$$\Gamma(a, \mu T) = \int_0^{\mu T} e^{-t} t^{a-1} \, dt$$

a nem teljes gamma-függvény.

Közbevetőleg megállapíthatjuk a következőket:

Ha a szükséglet $\{\xi_t, 0 \leqq t \leqq T\}$ $\lambda > 0$ paraméterű, a beáramlás $\{\eta_t, 0 \leqq t \leqq T\}$ $\mu > 0$ paraméterű szeparábilis, homogén POISSON-folyamat, a két folyamat egymástól független, és csak a $[0, T]$ időszak szükségletére nézve teszünk feltevést, akkor a helyzetnek megfelelő

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leqq t \leqq T} [y + \eta_t - \xi_t] > 0 \,|\, \xi_T = m\right\} = 1 - \varepsilon$$

feltételes megbízhatósági egyenlet pontos megoldása az

$$\varepsilon = y \binom{m}{y} (\mu T)^{-y} \Gamma(y, \mu T), \qquad (0 < y \leqq m) \tag{48}$$

összefüggésből számítható a 2. 3 szakaszban ismertetett módon.

A bizonyítás harmadik lépése gyanánt most már meghatározzuk az

$$F(a) = \mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leqq t \leqq T} (\eta_t - \xi_t) \leqq -a\right\}$$

eloszlásfüggvényt.

$$\begin{aligned} F(a) &= \sum_{m=a}^{\infty} F(a \,|\, m) \mathbf{P}\{\xi_T = m\} \\ &= (\mu T)^{-a} \frac{\Gamma(a, \mu T)}{\Gamma(a)} \sum_{m=a}^{\infty} \frac{(\lambda T)^m}{(m-a)!} e^{-\lambda T} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^a \frac{\Gamma(a, \mu T)}{\Gamma(a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^m}{m!} e^{-\lambda T} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^a \frac{\Gamma(a, \mu T)}{\Gamma(a)}, \qquad 0 < a, \qquad \lambda \leqq \mu. \end{aligned} \tag{49}$$

Ezzel a (35) állítás bizonyítást nyert.

Tételünk második állítása (36) a

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - \eta_t) = -\inf_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - \eta_t)$$

relációk figyelembevételével egyszerűen adódik.

1. Következmény: *Ha* $\lambda = \mu$, $T < \infty$, *akkor*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - \eta_t) < a\} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\Gamma(a, \mu T)}{\Gamma(a)}, & a > 0 \\ 0 \quad , & a \leqq 0. \end{cases} \tag{37}$$

A $\sup (\xi_t - \eta_t)$ *funkcionál tehát maga is* POISSON-*eloszlású valószínűségi változó,* $\lambda T = \mu T$ *várható értékkel. A feltétel nélküli*

$$\mathbf{P}\{\inf_{0 \leqq t \leqq T} [y + \eta_t - \xi_t] > 0\} = 1 - \varepsilon$$

megbízhatósági egyenlet egzakt megoldását most az

$$\varepsilon = \frac{\Gamma(y, \mu T)}{\Gamma(y)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^y \tag{50}$$

összefüggés tartalmazza implicite.

Észrevehető (46), (48) és (50) összehasonlítása során, és numerikus példával is szemléltethető, hogy amint sorra elejtjük a beáramlásra, majd a szükségletre tett feltevést, a kezdőkészlet-feladat megoldásaként kapott minimális y^* kezdőkészlet értéke megnövekszik, és pl. $T = 1$, $\lambda = 10$, $\lambda = \mu$, $\varepsilon = 0{,}05$ esetén (50)-ből már $y^* = 16$ adódik, vagyis nagyobb, mint a várható szükséglet.

3. Megjegyzés: Ha μT „elég nagy”, pl. $\mu T > 100$ akkor (50) helyett már gyakorlatilag kielégítő pontosságot eredményez a normális eloszlással való közelítés: $\lambda = \mu$ esetén

$$\varepsilon = \frac{\Gamma(y, \lambda T)}{\Gamma(y)} \approx 1 - \Phi\left(\frac{y - \lambda T}{\sqrt{\lambda T}}\right), \tag{51}$$

amiből a keresett minimális kezdőkészlet:

$$y^* \approx \lambda T + \sqrt{\lambda T} \Phi^{-1}(1 - \varepsilon). \tag{52}$$

2. Következmény

$$\lim_{T \to \infty} \Gamma(a, \mu T) = \Gamma(a, \infty) = \Gamma(a).$$

Megjegyzés: R. PYKE [14] cikkében a

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} [Y(t) - \alpha t]$$

és az

$$\inf_{0 \leqq t \leqq T} [Y(t) - \alpha t]$$

eloszlását adja meg, ahol

$$\{Y(t),\ 0 \leqq t \leqq T\}$$

szeparábilis, homogén POISSON-folyamat, $\alpha > 0$ konstans.

IRODALOM

[1] ARATÓ MÁTYÁS: *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe.* Bolyai Társulat, Budapest 1968.
[2] K. J. ARROW—T. HARRIS—T. MARSCHAK: Optimal Inventory Policy, *Econometrica,* **19** (1951), p. 250.
[3] K. J. ARROW—S. KARLIN—H. SCARF: *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production.* Stanford U. P., 1958.
[4] M. BAXTER—M. D. DONSKER: On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independent increments, *Trans. Am. Math. Society,* **85** (1957), p. 73.
[5] D. G. CHAMPERNOWNE: An elementary method of solution of the queuing problem with a single server and constant parameters, *J. of the Royal Stat. Society, B* **18** (1956), p. 125.
[6] J. L. DOOB: *Stochastic processes,* J. Wiley and Sons, 1953.
[7] A. DVORETZKY—J. KIEFER—J. WOLFOWITZ: The Inventory Problem, I. and II., *Econometrica,* **20** (1952), p. 187. and 450.
[8] A. DVORETZKY—J. KIEFER—J. WOLFOWITZ: On the Optimal Character of the (s, S) Policy in Inventory Theory. *Econometrica,* **20** (1953), p. 586.
[9] W. FELLER: *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* 2nd edition, J. Wiley and Sons, 1957.
[10] S. KARLIN: *A First Course in Stochastic Processes,* Academic Press, 1966.
[11] H. R. PITT: A theorem on random functions with applications to a theory of provisioning, *Journal of London Math. Soc.,* **21** (1946), p. 16.
[12] PRÉKOPA ANDRÁS: Reliability equation for an inventory problem and its asymptotic solutions. *Coll. on Appl. of Math. to Econ.,* 1963. Edited by A. Prékopa. — Akadémiai Kiadó, 1965.
[13] PRÉKOPA ANDRÁS: On secondary processes generated by a random point distribution of Poisson type, *Annales Univ. Sc. Budapestiensis Sectio Mathematica,* 1958.
[14] R. PYKE: The supremum and infimum of the Poisson-process, *Annals of Math. Stat.,* **30** (1959), p. 568.
[15] RÉNYI ALFRÉD: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
[16] TAKÁCS LAJOS: *Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes,* J. Wiley and Sons, 1967.
[17] A. F. VEINOTT: The status of mathematical inventory theory, *Management Science,* **12** (1966), p. 745.
[18] ZIERMANN MARGIT: A Szmirnov-tétel alkalmazása egy raktározási problémára, *MTA Mat. Kut. Int. Közl., VIII. B.,* Akadémiai Kiadó, 1964.

A STUDY OF SOME STOCHASTIC INVENTORY MODELS

by

GY. NÉMETH

Summary

Having given a short rewiew of the practical background and situations of the so called „initial stock-level models" treated in the paper author gives the exact solutions of three particular models, each of which can be formulated in the form of a stochastic optimization problem as follows:

$$P\{\inf_{0\leq t\leq T}(y+\eta_t-\xi_t)>0\}\geq\alpha \tag{1}$$

$$\min_{y>0} y!$$

where $\{\eta_t; 0\leq t\leq T\}$ is the input process on $[0, T]$, $\{\xi_t; 0\leq t\leq T\}$ represents the demand process, $\alpha\in(0, 1)$ is the prescribed security, y denotes the initial on-hand inventory, that is, the amount held at $t=0$.

The particular cases of the problem (1) considered are the following:

a) both of the η_t and ξ_t are independent and separable homogeneous WIENER processes;

b) η_t is a separable homogeneous POISSON process, while the demand: $\xi_t = ct$ is deterministic with a constant intensity $c > 0$ per unit time; finally

c) both of the processes η_t and ξ_t are independent and separable homogeneous POISSON processes with parameters $\mu > 0$ and $\lambda > 0$ respectively.

The main result published in the paper is the proof of the interesting fact that the supremum functional of the difference of two independent POISSON processes with the same parameter $\lambda > 0$, that is the random variable

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - \eta_t)$$

has again the POISSON distribution with parameter λT, provided that $T < \infty$. A rigorous proof is given for the case $\lambda \leqq \mu$, $T < \infty$, and as a result of that we have:

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - \eta_t) < n\} = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \dfrac{\Gamma(n, \mu T)}{\Gamma(n)}, & n > 0 \\ 0, & n \leqq 0 \end{cases} \tag{2}$$

where

$$\Gamma(n, \mu T) = \int_0^{\mu T} e^{-x} x^{n-1}\, dx$$

is the incomplete *Gamma*-function. The above-mentioned result has been found as a simple corollary of (2), as well as the following

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqq t < \infty} (\xi_t - \eta_t) < n\} = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n, & n > 0, \\ 0, & n \leqq 0, \end{cases} \quad \lambda < \mu. \tag{3}$$

MATEMATIKAI VIZSGÁLATOK RENDSZER-IDENTIFIKÁCIÓ, ILLETVE ADATDETEKCIÓELMÉLET KÖRÉBŐL

Írta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

1. §

Valamely fizikai, műszaki, gazdasági, biológiai stb. rendszer vizsgálatakor — a klasszikus és modern matematika eszközeivel — annak jövőbeni viselkedését igyekszünk leírni, illetve megjósolni, feltéve, hogy elfogadhatóan sikerült megadnunk a rendszer struktúráját leíró egyenletet és a kezdeti állapotot.

A gyakorlatban azonban számos esetben találkozunk ezen feladat „inverz" vagy másképpen identifikációs problémájával, mikor is a feladat az előbbivel szemben így fogalmazható meg: meghatározandó a rendszer szerkezetét leíró összefüggés, ha az idő folyamán bizonyos megfigyeléseink vannak annak viselkedésére vonatkozóan.

A vizsgálat tárgyát képező rendszert számos esetben állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet jellemzi. Ismeretes, ha pl. az ilyen differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének összes gyökei valósak és különbözők, akkor *a megoldás*

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

alakú, *ún. exponenciális függvény szuperpozíció*, melyben a szereplő konstansok valós számok; $y(t)$ pedig többnyire grafikusan áll elő, illetve műszer rajzolja fel. A közölt előzmények alapján számos esetben a probléma az, hogy $y(t)$ grafikonja (illetve bizonyos ordinátaértékei) ismeretében hogyan lehet meghatározni az

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t}$$

összefüggésben szereplő c_k, λ_k együtthatókat;

I. n ismeretében

II. n ismerete nélkül.

A jelen dolgozatnak az a célja, hogy bizonyos feltételek mellett egy, a vizsgálat tárgyát képező rendszer differenciálegyenletének empirikus megoldása ismeretében, annak rendűségére vonatkozóan adjon némi útbaigazítást.

A pontosabb megfogalmazás végett tegyük fel, hogy a vizsgálat tárgyát képező rendszert az $y^{(i)}(0)=0$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ feltétel mellett elfogadhatóan jellemzi az

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad (a_n \neq 0)$$

állandó együtthatójú differenciálegyenlet. A MIKUSINSKI-féle operátorszámítás alkalmazásával könnyen belátható, hogy az $y(t)$ *és* $f(t)$ *ismerete egyértelműen meghatározza a rendszert jellemző állandó együtthatójú legalacsonyabb rendű differenciálegyenlet együtthatóit és rendszámát.*

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy ha már valamilyen módon (pl.: a momentumok módszerével, ismételt integrálással, stb.) meg tudjuk határozni a differenciálegyenlet együtthatóinak egy részét, akkor ezen együtthatók tulajdonságai (értékei) ismeretében mit tudunk mondani a differenciálegyenlet rendűségére vonatkozóan.

Megjegyezzük, hogy az a_k $(k=0, 1, ..., n)$ ismerete egyben lehetővé teszi a c_k, λ_k értékek, kiszámítását is, ami azt jelenti, hogy c_k és λ_k értékeit nem közvetlenül, hanem közvetett úton határozzuk meg, illetve becsüljük, úgy, hogy közben n-et is meghatározzuk, illetve becsüljük.

2. §

A dolgozatban szereplő két tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi segédtételre.

LEMMA: *Legyen*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

olyan n-ed fokú (tehát $a_n \neq 0$), valós együtthatójú polinom, amelyre $a_0 \neq 0$. Jelölje

$$x_k = \alpha_k + j\beta_k \qquad (k=1, 2, ..., n;\ j = \sqrt{-1})$$

a $p_n(x)=0$ egyenlet gyökhelyeit. Ekkor annak szükséges feltétele, hogy az

$$\alpha_k \leqq 0 \qquad (k=1, 2, ..., n)$$

és

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n < 0$$

egyenlőtlenség fennálljon az, hogy a

$$0 < \frac{a_l}{a_n} \qquad (l=0, 1, 2, \ldots, n)$$

*egyenlőtlenség teljesüljön.**

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a gyökhelyeket úgy indexeztük miszerint az első $2N \left(0 \leqq N \leqq \left[\frac{n}{2}\right]^{**}\right)$ gyökhely komplex szám (tehát $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N \neq 0$): s következésképpen a hátralevő $n-2N$ számú gyökhely valós.

Ekkor, ha $n > 2N > 0$ a szóban levő polinom

$$p_n(x) = a_n(x-x_1)(x-\bar{x}_1)\ldots(x-x_N)(x-\bar{x}_N)(x-x_{2N+1})\ldots(x-x_n)$$

* A kézirat lektorálásakor MEDGYESSY PÁL hívta fel a figyelmünket arra, hogy ezen lemma α_k negativitása esetén megtalálható pl. [2] 105. oldalán. E helyen való közzétételét — hivatkozás helyett — azért tartottuk indokoltnak, mert a közölt megfogalmazásban α_k értékek nem pozitivitása mellett csak az α_k értékek összegére tettünk fel negativitást. Az anyag további részében pedig több helyen is felhasználjuk a lemma igazolásakor kapott részeredményeket.

** Definíció szerint $[A]$ az A valós számban foglalt legnagyobb egész számot jelenti; másszóval $[A]=K$ ha $K \leqq A < K+1$ $(K = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

alakban írható, ahol

$$x_k = \alpha_k + j\beta_k;\ \bar{x}_k = \alpha_k - j\beta_k \qquad (k = 1, 2, \dots, N)$$
$$x_k = \alpha_k \qquad (k = 2N+1, \dots, n).$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket: legyen

$$g_1(x) = \begin{cases} (x-x_1)(x-\bar{x}_1)\dots(x-x_N)(x-\bar{x}_N) & \text{ha } N > 0 \\ 1 & \text{ha } N = 0. \end{cases}$$

Továbbá legyen

$$g_2(x) = \begin{cases} a_n(x-x_{2N+1})\dots(x-x_n) & \text{ha } 0 \leqq 2N < n \\ a_n & \text{ha } 2N = n. \end{cases}$$

a) *eset:* Vizsgáljuk először a $g_1(x)$ polinom alakját (tulajdonságát) $N>0$ esetén. Az alkalmazott jelölések mellett

$$g_1(x) = \prod_{i=1}^{N} (x^2-(x_i+\bar{x}_i)+|x_i|^2) = \prod_{i=1}^{N} (x^2-2\alpha_i x+\alpha_i^2+\beta_i^2).$$

Mivel feltevésünk szerint $\alpha_i \leqq 0$ és $\beta_i \neq 0$; ezért $-2\alpha_i \geqq 0$ és $\alpha_i^2+\beta_i^2 > 0$ minden $i=1, 2, \dots, N$-re. Tekintsük a

$$g_1(x) = \prod_{i=1}^{N} (x^2-2\alpha_i x+\alpha_i^2+\beta_i^2) =$$
$$= x^{2N}+b_{2N-1}x^{2N-1}+\dots+b_{2N-2k+1}x^{2N-2k+1}+b_{2N-2k}x^{2N-2k}+\dots+b_1x+b_0$$

alakját, ahol tehát $b_{2N}=1$. Könnyen belátható, hogy $k=1, 2, \dots, N$ esetén $b_{2N-2k}>0$. Ugyanis

$$b_{2N-2k} = \sum_{1\leqq i_1<i_2<\dots<i_k\leqq N} (\alpha_{i_1}^2+\beta_{i_1}^2)(\alpha_{i_2}^2+\beta_{i_2}^2)\dots(\alpha_{i_k}^2+\beta_{i_k}^2)+\varepsilon_k$$

alakú, ahol $\varepsilon_k \geqq 0$.

(Amennyiben $N=0$, akkor $g_1(x) \equiv b_0 \doteq 1$.)

Tekintsük most a $g_1(x)$ polinom páratlan indexű együtthatóit vagyis a $b_{2N-2k+1}$ értékeket.

Ezekről azt állítjuk, hogy $b_{2N-2k+1}$ vagy minden $k=1, 2, \dots, N$ esetén 0 vagy minden $k=1, 2, \dots, N$ esetén $b_{2N-2k+1}>0$ attól függően, hogy $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N = 0$ vagy $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N < 0$.

α) Ha $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N = 0$, akkor $\alpha_k \leqq 0$ következtében $\alpha_k=0$ $(k=1, 2, \dots, N)$ s így

$$g_1(x) = (x^2+\beta_1^2)(x^2+\beta_2^2)\dots(x^2+\beta_N^2).$$

Ebből látható, hogy a $g_1(x)$ polinomnak páratlan kitevőjű tagjai nincsenek; ami úgy lehetséges, hogy

$$b_{2N-2k+1}=0 \qquad (k=1, 2, \dots, N).$$

β) Ha pediglen $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N < 0$ akkor az $\alpha_k \leqq 0$ feltétel folytán van legalább egy olyan k_0 index $(1 \leqq k_0 \leqq N)$, melyre nézve $\alpha_{k_0}<0$.

Ennélfogva a

$$g_1(x) = \prod_{i=1}^{N} (x^2 - 2\alpha_i x + \alpha_i^2 + \beta_i^2)$$

összefüggésben a szorzás elvégzésénél tetszőleges $k > 1$ esetén legalább egy

$$-2\alpha_{k_0}(\alpha_{i_1}^2 + \beta_{i_1}^2) \dots (\alpha_{i_{k-1}}^2 + \beta_{i_{k-1}}^2) x^{2N-2k+1}$$

alakú tagot is kapunk, ami azt jelenti, hogy

$$b_{2N-2k+1} = -2\alpha_{k_0}(\alpha_{i_1}^2 + \beta_{i_1}^2) \dots (\alpha_{i_{k-1}}^2 + \beta_{i_{k-1}}^2) + \delta_k,$$

ahol

$$-2\alpha_{k_0}(\alpha_{i_1}^2 + \beta_{i_1}^2) \dots (\alpha_{i_{k-1}}^2 + \beta_{i_{k-1}}^2) > 0 \quad \text{és} \quad \delta_k \geqq 0,$$

s így nyilvánvaló, hogy

$$b_{2N-2k+1} > 0 \qquad \text{ha} \quad k = 2, 3, \dots, N.$$

A $k = 1$ esetben pedig

$$b_{2N-2k+1} = b_{2N-1} = -2 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i,$$

amelyből közvetlenül adódik, hogy

$$b_{2N-1} > 0.$$

b) *eset:* Tekintsük most a

$$g_2(x) = a_n(x - x_{2N+1}) \dots (x - x_n) \qquad (0 \leqq 2N < n)$$

polinomot. A szorzás elvégzése után kapjuk, hogy

$$g_2(x) = a_n[x^{n-2N} + c_{n-2N-1}x^{n-2N-1} + \dots + c_{n-2N-l}x^{n-2N-l} + \dots + c_1 x + c_0],$$

ahol

$$c_{n-2N-l} = \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leqq n-2N} (-1)^l x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l}.$$

Mivel $a_0 \neq 0$, ezért a $p_n(x)$ polinomnak 0 nem gyökhelye, s így feltevésünkből kifolyólag

$$x_{i_1} < 0, \; x_{i_2} < 0, \dots, \; x_{i_l} < 0.$$

Minthogy továbbá

$$(-1)^l x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l} > 0$$

az $i_1, i_2, \dots, i_l$ minden számításba jövő értékeire, ezért $c_{n-2N-l} > 0$ minden $1 \leqq l \leqq$ $\leqq n - 2N$ esetén.

Mindezek után vizsgáljuk meg az eredeti polinomot, amidőn $n - 2N > 0$. Az alkalmazott jelölések szerint

$$p_n(x) = g_1(x) g_2(x) = a_n \left(\sum_{i=0}^{2N} b_i x^i \right) \left(\sum_{l=0}^{n-2N} c_l x^l \right),$$

ahol

$$b_{2N} = c_{n-2N} = 1;$$

$$b_{2j} > 0 \qquad (j = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$c_l > 0 \qquad (l = 0, 1, \dots, n - 2N - 1).$$

A szorzás elvégzése után tetszőlegesen rögzített k-hoz ($0 \leqq k \leqq n$) található olyan

$$b_{2i_0} c_{l_0} x^{2i_0+l_0}$$

tag, amelyre $2i_0 + l_0 = k$.

Tekintettel arra, hogy $b_{2i_0} > 0$, $c_{l_0} > 0$ így $\frac{a_k}{a_n}$ az $\frac{a_k}{a_n} = b_{2i_0} c_{l_0} + \gamma_k$ alakban állítható elő, ahol $\gamma_k \geqq 0$. Ennek alapján $\frac{a_k}{a_n} > 0$ minden $0 \leqq k \leqq n$ esetén. Az $N = 0$ esetén $\frac{a_k}{a_n} > 0$ nyilvánvaló. Amennyiben $n - 2N = 0$ $(N > 0)$ úgy

$$p_n(x) = a_n g_1(x) = \sum_{k=0}^{2N} a_n b_k x^k,$$

ahol $b_k > 0$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots, 2N$-re, mivel ebben az esetben

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2N} < 0.$$

Következmény: A lemma bizonyításakor kapott részeredmények alapján könynyen belátható, hogy ha a $p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ polinom gyökhelyeinek valós része nem pozitív és $a_0 \neq 0$, akkor $p_n(x)$ páros kitevőjű tagjainak együtthatói nem nullák és azonos előjelűek az a_n együtthatóval.

Megjegyzés: Amennyiben a $p_n(x)$ polinom együtthatói közül $a_0 = a_1 = \cdots$ $\cdots = a_{m-1} = 0$, de $a_m \neq 0$, akkor a

$$p_n(x) = x^m(a_n x^{n-m} + \cdots + a_{m+1}x + a_m) = x^m p_{n-m}(x)$$

összefüggésben szereplő $p_{n-m}(x)$ polinomra már alkalmazható az imént bizonyított lemma.

3. §

1. TÉTEL: *Ha a rendszert jellemző*

$$\cdots + a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_k y^{(k)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = f(t)$$

alakú véges rendű differenciálegyenlet $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ valós együtthatóival képezett

$$p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_0$$

polinom gyökhelyeinek valós része nem pozitív (ez a rendszer stabilitásának feltétele) és $a_k \neq 0$, de $a_{k+1} = a_{k+2} = 0$, akkor a differenciálegyenlet k-ad rendű.

Bizonyítás: Legyen az N az a legnagyobb index, melyre még $a_N \neq 0$ $(N \geqq k)$. Jelölje a_m az első nem nulla együtthatót ($0 \leqq m \leqq k$), akkor

$$p_N(x) = x^m(a_N x^{N-m} + \cdots + a_{m+1}x + a_m) = x^m p_{N-m}(x),$$

ahol a $p_{N-m}(x)$ polinomnak a 0 már nem gyökhelye.

Tegyük fel indirekte, hogy $N > k$. A tétel feltétele értelmében, akkor $N > k+2$. (Ugyanis $a_{k+1} = a_{k+2} = 0$.) A lemma következménye szerint a $p_{N-m}(x)$ páros kitevőjű együtthatói közül egyik sem 0, s minthogy a $p_{N-m}(x)$ polinomban vagy az

a_{k+1} vagy az a_{k+2} pároskitevőjű tag együtthatójaként szerepel, így ellentmondásra jutottunk azzal, hogy mindkét együttható 0. Ezek alapján $N \leqq k$. Minthogy azonban $a_k \neq 0$, így csak $N = k$ lehet.

2. TÉTEL: *Ha az előbbi véges rendű differenciálegyenlet által determinált polinom gyökhelyeinek valós része nem pozitív — vagyis a rendszer stabilis — és $a_i \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, de $a_{n+1} = 0$, akkor a rendszer $n > 0$ esetén n-ed rendű.*

Bizonyítás: A feltétel szerint $n \geqq 1$, s így $a_0 \neq 0$; $a_1 \neq 0$.

A. eset: A szóba jövő polinomnak van valós gyöke. Jelöljük ezt α_j-vel; $(1 \leqq j \leqq n)$. Ekkor $\alpha_j \leqq 0$ a pozitivitás kizárása miatt. Az $\alpha_j = 0$ nem teljesülhet $a_0 \neq 0$ miatt, s így $\alpha_j < 0$. Ennek következtében

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j + \cdots + \alpha_n < 0.$$

B. eset: A szóba jövő polinomnak nincs valós gyöke. Ekkor csupa tiszta képzetes gyöke nem lehet, mert a lemma α) alatti részeredménye alapján $a_1 = 0$ lenne, ami ellentmond feltételünknek. Jelöljük a komplex gyökök közül α_k-val annak valós részét, melyre nézve $\alpha_k \neq 0$ $(1 \leqq k \leqq n)$. A pozitivitás kizárása miatt kell, hogy $\alpha_k < 0$ legyen, s így $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \cdots + \alpha_n < 0$.

E két lehetséges eset összevetéséből a lemma feltételei következnek és így

$$\frac{a_l}{a_n} > 0 \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Ha a polinom fokszáma $n < N$ lenne, akkor a tétel feltételei mellett — megismételve az imént alkalmazott meggondolásokat a lemma feltételeihez jutunk; vagyis az $a_0 \neq 0$, $\alpha_i \leqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ mellett kapjuk, hogy $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots + \alpha_N < 0$.

Ebből kifolyólag — a bizonyított lemma alapján — $\frac{a_l}{a_N} > 0$ minden $l = 0, 1, \ldots, N$-re, s így $l = n + 1$-re is. De mivel $a_{n+1} = 0$, így ellentmondáshoz jutottunk, tehát kell, hogy $N \leqq n$ legyen. Tekintettel arra, hogy $a_n \neq 0$, ezért $n = N$.

4. §

Az alábbiakban röviden utalunk a kapott eredmények gyakorlati alkalmazására.

Evégből tegyük fel, hogy az $f(t)$ függvény ismeretes az $y(t)$ függvény pedig regisztrálás útján grafikon-alakban adott. Tegyük fel továbbá, hogy

$$y^{(i)}(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Legyen a stabilis rendszer az

$$\ldots a_k y^{(k)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = f(t)$$

egyelőre határozatlan rendű és ismeretlen állandó együtthatójú differenciálegyenlettel jellemezve. (Minthogy a szerzők [1]-ben $y(t)$ viselkedésére tett bizonyos feltételek mellett az együtthatók közelítő meghatározásaival, s a közölt eljárások konkrét feladatokon történő bemutatásával részletesebben is foglalkoztak, ezért e helyen inkább csak utalásként teszünk említést a bizonyított tételek gyakorlati felhasználására vonatkozóan.)

Tételezzük fel pl. hogy

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = C,$$

továbbá

$$\lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t) \qquad (i=1,2,\ldots)$$

létezik. Ekkor bizonyítható (vö. [1] 99. o.), hogy

$$\lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Ezen utóbbi állítás gyakorlatilag azt jelenti, hogy $y^{(i)}(T)$ jó közelítéssel nulla valahányszor T-nek elég nagy értéket adunk. Mármost, ha a rendszer stabilis és $\lim_{t\to\infty} y(t)=C\neq 0$, akkor elég nagy értékű T esetén $\left(\lim_{T\to\infty} y^{(i)}(T)=0\right.$ következtében$\left.\right)$

$$a_0 \approx \frac{f(T)}{y(T)}.$$

Az a_1 becslése végett integráljuk a szóban levő differenciálegyenlet mindkét oldalát 0-tól T-ig. Kapjuk, hogy

$$+a_1 y(T)+a_0\int_0^T y(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt,$$

ahonnan

$$a_1 \approx \frac{1}{y(T)}\left[\int_0^T f(t)\,dt - a_0\int_0^T y(t)\,dt\right].$$

A közölt gondolatmenet megismétlésével általában az a_k értékének becslésére $(k=1,2,\ldots)$ a következő rekurzív formulát kapjuk:

$$a_k \approx \frac{1}{y(T)}\left[\frac{1}{(k-1)!}\int_0^T (T-t)^{k-1} f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i-1)!}\int_0^T (T-t)^{k-i-1} y(t)\,dt\right].$$

A szereplő konvolúciós-típusú numerikus integrálás elkerülhető, ha az együtthatókat a momentumok módszerével becsüljük.

Megemlítjük, hogy nem egyszer számos műszaki—gazdasági probléma matematikai modellje olyan lineáris inhomogén differenciálegyenlettel jellemezhető, amelynek együtthatói nem állandók, hanem valószínűségi változók. Ilyen feltételek mellett a közölt és ehhez hasonló problémák tovább bonyolódnak főleg akkor, ha a „rendűség" is valószínűségi változó.

Magától értetődik, hogy ilyen esetekben nemegyszer a problémák értelmezését is módosítani kell, minthogy a célt a feltételek figyelembevételével kell kitűzni. Az általunk itt vizsgált eset megfelelhet pl. egy olyan változatnak, melynél a differenciálegyenletben szereplő valószínűségi változókat várható értékeikkel helyettesítjük, s ezt követően keressük a felmerülő problémák megoldását.

(Beérkezett: 1969. V. 2.)

IRODALOM

[1] DOBÓ A. — SZAJCZ S.: Modern operátorszámítás és alkalmazása a kibernetikában, *Operációkutatás és Számítástechnikai sorozat;* KGM. ISZSZI. 1968.

[2] N. OBRESCHKOFF: *Verteilung und Berechnung der Nullstellen Reeller Polynome,* Berlin 1963.

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

FÜGGVÉNYOSZTÁLYOK ÉS HOZZÁJUK RENDELT INTEGRÁL-TRANSZFORMÁCIÓK KOMPLEX TARTOMÁNYOKBAN*

Írta: M. M. DZSRBASJAN és SZ. A. AKOPJAN

A dolgozatban paraméteres előállítást adunk a $\mathcal{H}_2[\alpha]$ függvényosztályra, amelynek elemei a logaritmusfüggvény *Riemann*-felületén fekvő, tetszés szerinti nyílású

$$\Delta(\alpha):\left\{|\operatorname{Arg} z|<\frac{\pi}{2\alpha},\quad 0<|z|<\infty\right\}\qquad(0<\alpha<\infty)$$

szögtartományban analitikusak.

Ez az előállítás lehetővé teszi a *Fourier—Plancherel*-típusú és a *Wiener—Paley*-típusú operátorok apparátusának a kiépítését olyan halmazok esetében, amelyek bármilyen véges számú párhuzamos egyenesből és sávból állnak.

Bevezetés

Vizsgálva a H_2 függvényosztályt, amely a $\operatorname{Re} z>0$ félsíkban analitikus és a

$$\sup_{0<x<\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2\,dy\right\}<\infty,$$

feltételnek eleget tevő $F(z)$ függvényekből áll, WIENER és PALEY [1] bebizonyították azt a fontos tételt, hogy *a H_2 osztály egybeesik azoknak a függvényeknek a halmazával, amelyek előállíthatók*

$$F(z)=\int_0^{\infty} e^{-zv}\varphi(v)\,dv,\qquad \operatorname{Re} z>0,$$

alakban, ahol $\varphi(v)\in L^2(0,\infty)$.

Jelölje $\mathcal{H}_2[\alpha,\omega]$ $\left(\frac{1}{2}<\alpha<\infty,\ -1<\omega<1\right)$ azon $F(z)$ függvények osztályát, amelyek a

$$\Delta(\alpha):\left\{|\operatorname{Arg} z|<\frac{\pi}{2\alpha},\quad 0<|z|<\infty\right\}$$

* КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМИ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ Известия Академии наук СССР, Серия математическая **30** (1966) 825—852.

szögtartományban analitikusak és teljesítik a

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} < \infty$$

feltételt. A Mittag-Leffler típusú

$$E_\varrho(z;\mu) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(k\varrho^{-1}+\mu)}$$

egész függvény aszimptotikus tulajdonságai alapján a [2] munkában sikerült megadni, a $\mathscr{H}_2[\alpha,\omega]$ osztály paraméteres előállítását, ami a *Wiener—Paley*-tétel további általánosítását jelenti. Az említett mű szerzői bebizonyították a következő tételt.

A TÉTEL. 1°. *A $\mathscr{H}_2[\alpha,\omega]$ osztály egybeesik azoknak a függvényeknek a halmazával, amelyek előállíthatók*

$$F(z) = \int_0^\infty E_\varrho(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} z\tau^{1/\varrho};\mu) v_{(-)}(\tau)\tau^{\mu-1}\,d\tau + \int_0^\infty E_\varrho(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} z\tau^{1/\varrho};\mu) v_{(+)}(\tau)\tau^{\mu-1}\,d\tau, \qquad z\in\Delta(\alpha)$$

alakban, ahol

$$\varrho \geqq \frac{\alpha}{2\alpha-1}, \qquad \mu = \frac{1+\omega+\varrho}{2\varrho}, \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\alpha},$$

a $v_{(\pm)}(\tau)\in L^2(0,\infty)$ függvények pedig tetszés szerintiek.

2°. *Ha $F(z)\in\mathscr{H}_2[\alpha,\omega]$, akkor*

$$L_\varrho(z,F) \equiv$$

$$\equiv \int_0^\infty E_\varrho(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} z\tau^{1/\varrho};\mu) v_{(-)}(\tau;F)\tau^{\mu-1}\,d\tau + \int_0^\infty E_\varrho(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} z\tau^{1/\varrho};\mu) v_{(+)}(\tau;F)\tau^{\mu-1}\,d\tau = F(z), \qquad z\in\Delta(\alpha)$$

ahol

$$v_{(\pm)}(\tau;F) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\varrho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{\pm ir\tau}-1}{\pm ir} F(r^{1/\varrho}e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}) r^{\mu-1}\,dr.$$

3°, *Az*

$$L_\varrho^*(e^{i\varphi}r^{1/\varrho};F) \equiv r^{1-\mu}\left\{\frac{d}{dr}\left[r^\mu \int_0^\infty E_\varrho(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} e^{i\varphi} r^{1/\varrho}\tau^{1/\varrho};\mu+1) v_{(-)}(\tau;F)\tau^{\mu-1}\,d\tau\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dr}\left[r^\mu \int_0^\infty E_\varrho(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} e^{i\varphi} r^{1/\varrho}\tau^{1/\varrho};\mu+1) v_{(+)}(\tau;F)\tau^{\mu-1}\,d\tau\right]\right\} = F(e^{i\varphi}r^{1/\varrho})$$

$$\left(|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\alpha}, \quad 0<r<\infty\right)$$

képlet érvényes minden r-re, ha $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$, és majdnem minden r-re, ha $|\varphi| = \frac{\pi}{2\alpha}$.

Később M. M. DZSRBASJAN lényegesen kiegészítette ezt az eredményt.

B TÉTEL. 1°. *Ha* $\varrho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ *és* $\varkappa = \frac{\alpha\varrho}{(2\alpha-1)\varrho-2\alpha}$, *akkor igaz az*

$$L_\varrho(z; F) \equiv 0, \qquad z \in \Delta(\varkappa, \pi),$$

azonosság, ahol $\Delta(\varkappa, \pi)$ *az*

$$\left\{|\operatorname{Arg} z - \pi| < \frac{\pi}{2\varkappa}, \qquad 0 < |z| < \infty\right\}$$

szögtartomány jele.

2°. *Ha* $\varrho \geqq \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$, *akkor*

$$L_\varrho^*(e^{i\varphi} r^{1/\varrho}; F) \equiv 0, \qquad |\varphi - \pi| \leqq \frac{\pi}{2\varkappa}$$

mindenütt a $0 < r < \infty$ *féltengelyen.*

Ezeknek a tételeknek, valamint határesetüknek (amikor $\alpha = +\infty$) az alapján, amelyeket korábban bizonyítottak be [3], a jelen cikk egyik szerzője egy nemrégi munkájában [4] Fourier—Plancherel- és Wiener—Paley-típusú operátort szerkesztett tetszés szerinti olyan síkbeli $\mathcal{M}$ halmazokhoz, amelyek véges számú, a $z=0$ pontból kiinduló, egymást nem fedő sugárból és ugyanonnan kiinduló szögtartományból állnak.

Dolgozatunk célja mindezen eredmények további kiterjesztése arra az esetre, amikor a szögtartomány vagy az $\mathcal{M}$ halmaz a logaritmus függvény *Riemann*-felületén, tehát a

$$G_\infty: \quad \{-\infty < \operatorname{Arg} z < +\infty, \quad 0 < |z| < \infty\}$$

tartományban fekszik. Ennek során jelentős mértékben fel fogjuk használni a

$$\nu(z; \mu) = \int_0^\infty \frac{z^{t+\mu}}{\Gamma(1+\mu+t)}\, dt,$$

Volterra-féle mag által meghatározott integrál-transzformációk elméletét, amelynek a kidolgozása az [5] munkában történt.

Idézzük e transzformációk elméletének néhány alapvető állítását, amelyekre az alábbiakban szükségünk lesz.

C TÉTEL. *Legyen* $f(x)$ *az* $L^2(0, \infty)$ *osztályhoz tartozó tetszés szerinti függvény. Ekkor:*

1°. *Az*

$$\mathcal{F}(y, \varphi) = \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{\nu(e^{i\varphi} xy; \frac{1}{2})}{x} f(x)\, dx, \qquad |\varphi| \geqq \frac{\pi}{2},$$

képlet a $(0, \infty)$ intervallumban majdnem mindenütt egy $\mathcal{F}(y, \varphi) \in L^2(0, \infty)$ függvényt értelmez, amelyre

$$\int_0^\infty |\mathcal{F}(y, \varphi)|^2 dy \leqq 2 \int_0^\infty |f(x)|^2 dx, \qquad |\varphi| \geqq \frac{\pi}{2}.$$

2°. *Az*

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(re^{i\varphi}) = \mathcal{F}(r, \varphi)$$

függvény a

$$G_\infty^{(+)}: \left\{\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < +\infty, \quad 0 < |z| < \infty\right\},$$

$$G_\infty^{(-)}: \left\{-\infty < \operatorname{Arg} z < -\frac{\pi}{2}, \quad 0 < |z| < \infty\right\}$$

Riemann-felületeken holomorf, és érvényes az

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty v\left(zx; -\frac{1}{2}\right) f(x)\, dx, \qquad z \in G_\infty^{(\pm)}$$

előállítás, ahol a jobb oldalon álló integrál abszolút és egyenletesen konvergens a $G_\infty^{(+)}$ és a $G_\infty^{(-)}$ tartomány bármely korlátos és zárt részén, továbbá

$$\int_0^\infty |\mathcal{F}(re^{i\varphi})|^2 dr \leqq 2 \int_0^\infty |f(x)|^2 dx$$

minden $|\varphi| > \dfrac{\pi}{2}$ értékre.

D TÉTEL. *Legyen $g(y)$ az $L^2(0, \infty)$ osztály tetszés szerinti függvénye. Ekkor:*
1°. *Az*

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy} - 1}{\pm iy} g(y)\, dy$$

függvények szintén $L^2(0, \infty)$-hez tartoznak. A $(0, \infty)$ intervallumon majdnem mindenütt

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{v(ixy; \frac{1}{2})}{ix} f^{(-)}(x)\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{v(-ixy; \frac{1}{2})}{-ix} f^{(+)}(x)\, dx.$$

2°*. $|\vartheta| \geqq \pi$ *esetén igaz a*

$$\frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{v(ixye^{i\vartheta}; \frac{1}{2})}{ix} f^{(-)}(x)\, dx + \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{v(-ixye^{i\vartheta}; \frac{1}{2})}{-ix} f^{(+)}(x)\, dx \equiv 0, \qquad (0 < y < \infty)$$

* Ez az állítás az [5] dolgozatban explicite nincs kimondva, de közvetlenül következik az ottani (3. 3), (3. 4) képletekből.

azonosság is, továbbá a vele ekvivalens

$$\int_0^\infty v\left(ixz;\ -\frac{1}{2}\right)f^{(-)}(x)\,dx+\int_0^\infty v\left(-ixz;\ -\frac{1}{2}\right)f^{(+)}(x)\,dx\equiv 0$$

azonosság, ahol $|\operatorname{Arg} z|>\pi$, $0<|z|<\infty$.

Tetszés szerinti α $(0<\alpha<\infty)$ esetén jelölje $\mathscr{H}_2[\alpha]\equiv\mathscr{H}_2[\alpha,0]$ azoknak az $F(z)$ függvényeknek az osztályát, amelyek a $\Delta(\alpha)\subset G_\infty$ szögtartományban (ez a $0<\alpha<\frac{1}{2}$ esetben többrétű) analitikusak és eleget tesznek a

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2\alpha}}\left\{\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2\,dr\right\}<\infty$$

feltételnek.

E Tétel. *Minden* $F(z)\in\mathscr{H}_2[\alpha]$ *függvényre igazak a következő állítások:*

1°. *Léteznek az* $L^2(0,\infty)$ *osztályhoz tartozó* $F\big(re^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\big)$ *peremértékek, amelyeket a*

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned}&\underset{\varphi\to\frac{\pi}{2\alpha}-0}{\text{l. i. m.}}\, F(re^{i\varphi})=F\big(re^{i\frac{\pi}{2\alpha}}\big),\\ &\underset{\varphi\to-\frac{\pi}{2\alpha}+0}{\text{l. i. m.}}\, F(re^{i\varphi})=F\big(re^{-i\frac{\pi}{2\alpha}}\big)\end{aligned}\qquad (0<r<\infty)$$

összefüggések értelmeznek.

2°. *Tetszés szerinti* φ_0 $\left(0<\varphi_0<\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)$ *értékre*

$$\text{(2)}\qquad \lim_{r\to0^+}\{\max_{|\varphi|\leqq\varphi_0}[|F(re^{i\varphi})|\,r^{1/2}]\}=\lim_{r\to+\infty}\{\max_{|\varphi|\leqq\varphi_0}[|F(re^{i\varphi})|\,r^{1/2}]\}=0.$$

Bizonyítás. 1°. Az (1) állítás bizonyítása az $\frac{1}{2}<\alpha<\infty$ esetre a [2] dolgozatban, a 401. oldalon található, de könnyen ellenőrizhető, hogy ez a bizonyítás tetszés szerinti $\alpha\in(0,\infty)$ mellett is helyes marad.

2°. A $w=\log z$ transzformáció a $\Delta(\alpha)$ tartományt a

$$\left\{-\infty<u<\infty,\quad |v|<\frac{\pi}{2\alpha}\right\}\qquad (w=u+iv)$$

sávra képezi le; ha $F(z)\in\mathscr{H}_2[\alpha]$ és $\Phi(w)=F(e^w)e^{\frac{w}{2}}$, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(u+iv)|^2\,du\leqq M<\infty,\qquad |v|<\frac{\pi}{2\alpha}.$$

Ennélfogva egy ismert lemma (lásd [6], 167. oldal) alapján

$$\lim_{|u|\to\infty}\{\max_{|v|\leqq v_0}|\Phi(u+iv)|\}=0,$$

hacsak $0<v_0<\frac{\pi}{2\alpha}$. Visszatérve a z változóra, megkapjuk a (2) egyenlőséget.

Dolgozatunk két paragrafusból áll.

Az 1. §-ban bebizonyítjuk a $\mathscr{H}_2[\alpha]$ osztály paraméteres előállításáról szóló alaptételt. A nyert eredmény (1. tétel) az A, B tételek természetes általánosítása tetszés szerinti $\frac{\pi}{\alpha}$ $(0<\alpha<\infty)$ nyílású $\Delta(\alpha)$ szögtartomány esetére. Ennek az eredménynek egy ekvivalens megfogalmazása (2. tétel), amelyre az egész G_∞ felületnek a $w=\log z$ síkra való leképezése útján jutunk, zárt alakban kezünkbe adja a *Wiener—Paley*-típusú operátor apparátusát tetszés szerinti szélességű $|\mathrm{Im}\, w|<h$ párhuzamos sávra vonatkozóan. Ennek az apparátusnak megvan az az igen fontos tulajdonsága, hogy lehetővé teszi az azonosan nulla függvény előállítását az $\mathrm{Im}\, w\geqq h_1$ és az $\mathrm{Im}\, w\leqq -h_1$ félsíkban, ahol $h_1>h$ meghatározott szám.

A 2. §-ban az 1. és 2. tétel eredményei alapján ismertetjük a következő feladat teljes megoldását: megszerkesztendő a *Fourier—Plancherel*-típusú és a *Wiener—Paley*-típusú operátor apparátusa olyan $\mathscr{M}\subset G_\infty$ halmazhoz, amely véges számú, a $z=0$ pontból kiinduló, egymást nem fedő sugárból és szögtartományból áll.

Ismertetjük még a megfelelő feladat megoldásának ekvivalens megfogalmazását olyan halmazok esetén, amelyek tetszés szerinti véges számú párhuzamos egyenesből és sávból állnak (4. tétel).

1. §. A $\mathscr{H}_2[\alpha]$, $H_2[h]$ osztályok és paraméteres előállításuk

1. 1. Jelölje $H_2^{(+)}$ azon $\Phi(z)$ függvények osztályát, amelyek az $\mathrm{Im}\, z>0$ felső félsíkban analitikusak és amelyekre

$$\sup_{0<y<\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x+iy)|^2\,dx\right\}<\infty.$$

A Wiener—Paley-tétel szerint a $H_2^{(+)}$ osztály megegyezik azoknak a függvényeknek a halmazával, amelyek előállíthatók

$$\Phi(z)=\int_0^\infty e^{izv}\varphi(v)\,dv,\qquad \mathrm{Im}\, z>0$$

alakban, ahol $\varphi(v)\in L^2(0,\infty)$ tetszés szerinti függvény.

A [2] dolgozatban bizonyítást nyert, hogy ez az osztály azonos az $\mathrm{Im}\, z>0$ félsíkban analitikus és a

$$\sup\left\{\int_0^\infty|\Phi(re^{i\varphi})|^2\,dr\right\}<\infty.$$

feltételnek eleget tevő függvények osztályával. Az alsó félsíkban az analóg osztály jele $H_2^{(-)}$ lesz.

Legyen $F(z)\in\mathscr{H}_2[\alpha]$, vagyis $F(z)$ legyen analitikus a

$$\Delta(\alpha):\left\{|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2\alpha},\quad 0<|z|<\infty\right\}\qquad (0<\alpha<\infty)$$

szögtartományban és teljesítse a

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2\alpha}}\left\{\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2\,dr\right\}<\infty \tag{1.1}$$

feltételt. Ekkor *Plancherel* tétele szerint a $(0,\infty)$ intervallumon majdnem mindenütt értelmezve vannak és az $L^2(0,\infty)$ osztályhoz tartoznak az

$$f^{(\pm)}(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{\pm ixr}-1}{\pm ir}F\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)dr \tag{1.2}$$

függvények, valamint bármilyen $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}\right)$ érték mellett az

$$f^{(\pm)}(x,\varphi)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{\pm ixr}-1}{\pm ir}F(re^{i\varphi})\,dr \tag{1.3}$$

függvények is.

A *Parseval*-formulából és az E tétel 1°. állításából következik, hogy igazak az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{aligned}&\operatorname*{l.i.m.}_{\varphi\to\frac{\pi}{2\alpha}-0} f^{(+)}(x,\varphi)=f^{(+)}(x),\\ &\operatorname*{l.i.m.}_{\varphi\to-\frac{\pi}{2\alpha}+0} f^{(-)}(x,\varphi)=f^{(-)}(x).\end{aligned} \tag{1.4}$$

WIENER és PALEY említett tétele szerint $f^{(+)}(x)$ előállítható a felső félsíkban analitikus és a $H_2^{(+)}$ osztályhoz tartozó

$$f^{(+)}(z)=\int_0^\infty e^{izr}F\left(re^{i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)dr\qquad (\operatorname{Im} z>0)$$

függvény peremértékeként. Hasonlóképpen $f^{(-)}(x)$ előállítható az alsó félsíkban analitikus és a $H_2^{(-)}$ osztályhoz tartozó

$$f^{(-)}(z)=\int_0^\infty e^{-irz}F\left(re^{-i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)dr\qquad (\operatorname{Im} z<0)$$

függvény peremértékeként.

Vezessük be a

$$\varphi_{(-)} = \max\left\{-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}-\pi\right\},$$

$$\varphi_{(+)} = \min\left\{\frac{\pi}{2\alpha}, \pi-\frac{\pi}{2\alpha}\right\}$$

jelöléseket, és figyeljük meg, hogy $\alpha>1$ esetén $\varphi_{(-)}=-\frac{\pi}{2\alpha}$, $\varphi_{(+)}=\frac{\pi}{2\alpha}$.

Bebizonyítunk két segédtételt.

1. SEGÉDTÉTEL. a) *Ha* $\varphi_{(-)} < \varphi \leqq \frac{\pi}{2\alpha}$, *akkor*

(1.5) $$f^{(+)}(x, \varphi) = e^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha}-\varphi\right)} f^{(+)}\left(xe^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha}-\varphi\right)}\right);$$

b) *ha* $-\frac{\pi}{2\alpha} \leqq \varphi < \varphi_{(+)}$, *akkor*

(1.6) $$f^{(-)}(x, \varphi) = e^{-i\left(\frac{\pi}{2\alpha}+\varphi\right)} f^{(-)}\left(xe^{-i\left(\frac{\pi}{2\alpha}+\varphi\right)}\right).$$

BIZONYÍTÁS. Az (1. 5), (1. 6) képletek helyessége a $\varphi = \frac{\pi}{2\alpha}$, ill. $\varphi = -\frac{\pi}{2\alpha}$ esetben nyilván az (1. 4) összefüggésekből következik.

a) Legyen $\varphi_{(-)}<\varphi<\varphi_2<\frac{\pi}{2\alpha}$. A

(1.7) $$g^{(+)}(z) = \frac{e^{ixze^{-i\varphi}}-1}{iz} F(z) \qquad (x>0)$$

függvény analitikus a

$$\varphi \leqq \operatorname{Arg} z \leqq \varphi_2, \qquad 0<|z|<\infty$$

szögtartományban, és $R\to\infty$ esetén

(1.8) $$|g^{(+)}(Re^{i\psi}| = o(R^{-3/2}) \qquad (\varphi\leqq\psi\leqq\varphi_2,\ x>0)$$

ψ-ben egyenletesen. Csakugyan, minthogy

$$|g^{(+)}(Re^{i\psi})| = \frac{|e^{ixR[\cos(\psi-\varphi)+i\sin(\psi-\varphi)]}-1|}{R}|F(Re^{i\psi})|,$$

ezért $$0 \leqq \psi-\varphi \leqq \varphi_2-\varphi < \frac{\pi}{2\alpha}-\varphi_{(-)} \leqq \pi \quad \text{esetén}$$

$$e^{-xR\sin(\psi-\varphi)} = O(1), \quad \text{ha} \quad R\to+\infty \quad (x>0).$$

Ennélfogva az E tétel 2°. állítása alapján az (1. 8) becslésre jutunk. Szintén az E tétel értelmében, $\varepsilon\to+0$ esetén fennáll a

(1.9) $$|g^{(+)}(\varepsilon e^{i\psi})| = o(\varepsilon^{-1/2}) \qquad (\varphi\leqq\psi\leqq\varphi_2)$$

becslés, ψ-re nézve egyenletesen.

Ha $L_{\varepsilon,R}$ a $D_{\varepsilon,R}:\{\varphi < \operatorname{Arg} z < \varphi_2,\ \varepsilon<|z|<R\}$ tartomány kontúrja, akkor a $g^{(+)}(z)$ függvényt ezen kontúr mentén integrálva, és elvégezve az $\varepsilon \to +0$, $R \to +\infty$ határátmeneteket, az (1. 8), (1. 9) becslések alapján az

$$\int_0^\infty g^{(+)}(re^{i\varphi})d(re^{i\varphi}) = \int_0^\infty g^{(+)}(re^{i\varphi_2})d(re^{i\varphi_2}) \tag{1.10}$$

egyenlőséget kapjuk, amely érvényes tetszés szerinti

$$\varphi\text{-re és } \varphi_2\text{-re} \qquad \left(\varphi_{(-)}<\varphi<\varphi_2<\frac{\pi}{2\alpha}\right).$$

Az (1. 7), (1. 10) képletekből nyerjük:

$$\int_0^\infty \frac{e^{ixr}-1}{ir}F(re^{i\varphi})dr = \int_0^\infty \frac{e^{ixre^{i(\varphi_2-\varphi)}}-1}{ir}F(re^{i\varphi_2})dr,$$

azaz

$$f^{(+)}(x,\varphi) = e^{i(\varphi_2-\varphi)}f^{(+)}(xe^{i(\varphi_2-\varphi)}) \qquad \left(\varphi_{(-)}<\varphi<\varphi_2<\frac{\pi}{2\alpha}\right). \tag{1.11}$$

Az (1. 11) összefüggésből következik, hogy

$$\begin{aligned} f^{(+)}(x,\varphi)-e^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha}-\varphi\right)}f^{(+)}\left(xe^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha}-\varphi\right)}\right) &= \\ = e^{i(\varphi_2-\varphi)}f^{(+)}(xe^{i(\varphi_2-\varphi)})-e^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha}-\varphi\right)}f^{(+)}\left(xe^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha}-\varphi\right)}\right)&. \end{aligned} \tag{1.12}$$

De az $f^{(+)}(z)$ ($\operatorname{Im} z>0$) függvény folytonossága miatt (1. 12) jobb oldala nullához tart, ha $\varphi_2 \to \frac{\pi}{2\alpha}-0$. Ezzel az (1. 5) állítást igazoltuk.

Analóg megfontolást végezhetünk a b) esetben is, felhasználva a

$$g^{(-)}(z) = \frac{e^{-ixze^{-i\varphi}}-1}{iz}F(z) \qquad (x>0)$$

függvényt, ahol $-\frac{\pi}{2\alpha}<\varphi<\varphi_{(+)}$.

2. SEGÉDTÉTEL. 1°. *Ha* $-\frac{\pi}{2\alpha} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2\alpha}$ *és* $\vartheta \geqq 0$ *vagy* $\vartheta \leqq -\pi-\frac{\pi}{2\alpha}-\varphi$, *akkor fennáll a következő egyenlőség:*

$$e^{-i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)}\frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{v\left(ixre^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)}e^{i\vartheta};\ \frac{1}{2}\right)}{ix}f^{(-)}(x)dx = \frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{v\left(ixre^{i\vartheta};\ \frac{1}{2}\right)}{ix}f^{(-)}(x,\varphi)dx. \tag{1.13}$$

2°. *Ha* $-\frac{\pi}{2\alpha} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2\alpha}$ *és* $\vartheta \leqq 0$ *vagy* $\vartheta \geqq \pi + \frac{\pi}{2\alpha} - \varphi$, *akkor igaz az alábbi egyenlőség:*

$$e^{-i\left(\varphi-\frac{\varphi}{2\alpha}\right)}\frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{v\left(-ixre^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2\alpha}\right)}e^{i\vartheta};\frac{1}{2}\right)}{-ix}f^{(+)}(x)dx =$$

(1.14)

$$= \frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{v\left(-ixre^{i\vartheta};\frac{1}{2}\right)}{-ix}f^{(+)}(x,\varphi)dx.$$

BIZONYÍTÁS. 1°. Az (1. 13) képlet helyessége $\varphi = -\frac{\pi}{2\alpha}$ esetén (1. 4) alapján nyilvánvaló.

Legyen $-\frac{\pi}{2\alpha} < \varphi < \varphi_{(+)}$ és $\vartheta > 0$ vagy $\vartheta < -\pi - \frac{\pi}{2\alpha} - \varphi$. Fennáll $f^{(-)}(-iz) \in \in \mathscr{H}_2[1]$, úgyhogy a

$$h^{(-)}(z) = \frac{v\left(zre^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)}e^{i\vartheta};\frac{1}{2}\right)}{iz}f^{(-)}(-iz), \qquad r \in (0, +\infty)$$

függvény analitikus a

$$\frac{\pi}{2} - \left(\varphi + \frac{\pi}{2\alpha}\right) < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2} \qquad \left(\frac{\pi}{2} - \left(\varphi + \frac{\pi}{2\alpha}\right) > -\frac{\pi}{2}\right)$$

szögtartományban. A $v(z;\mu)$ függvényre vonatkozó aszimptotikus becslésekből következik, hogy $|t| \geqq \beta > \frac{\pi}{2}$ esetén (lásd [5], 391. oldal, (1. 13) képlet)

(1.15) $$\left|v\left(Re^{it};\frac{1}{2}\right)\right| = O\left(\frac{R^{1/2}}{\log R}\right), \quad \text{ha} \quad R \to \infty$$

t-ben egyenletesen, továbbá

(1.16) $$\left|v\left(\varepsilon e^{it};\frac{1}{2}\right)\right| < c_1\frac{\varepsilon^{1/2}}{\log(1/\varepsilon)} + c_2\varepsilon^{3/2}, \quad \text{ha} \quad \varepsilon \to 0$$

szintén t-ben egyenletesen, ahol c_1 és c_2 nem függ ε-tól (lásd [5], 399. oldal, (2. 29) képlet).

Ezen becsléseken kívül fennáll még, hogy $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 \leqq \psi \leqq \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$ esetén

(1.17) $$|f^{(-)}(-ire^{i\psi})| = o(r^{-1/2}), \quad \text{ha} \quad r \to +0, +\infty$$

ψ-re nézve egyenletesen.

Mármost, ha φ_1, φ_2 tetszés szerinti, a

$$\frac{\pi}{2}-\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)<\varphi_1<\varphi_2<\frac{\pi}{2}$$

feltételnek eleget tevő számok, akkor az (1. 15), (1. 17) képletekből kapjuk:

$$(1.18)\qquad |h^{(-)}(Re^{i\psi})|=o\left(\frac{1}{R\log R}\right),\qquad \varphi_1\leqq\psi\leqq\varphi_2,$$

ψ-ben egyenletesen.

Az (1. 16), (1. 17) összefüggésekből adódik, hogy $\varepsilon\to 0$ esetén

$$(1.19)\qquad |h^{(-)}(\varepsilon e^{i\psi})|=o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\right),\qquad \varphi_1\leqq\psi\leqq\varphi_2,$$

ψ-ben egyenletesen.

Továbbá a $h^{(-)}(z)$ függvényt a $\{\varphi_1<\operatorname{Arg} z<\varphi_2,\ \varepsilon<|z|<R\}$ tartomány határa mentén integrálva és elvégezve az $R\to+\infty$, $\varepsilon\to+0$ határátmeneteket, (1. 18) és (1. 19) értelmében az

$$\int_0^\infty h^{(-)}(xe^{i\varphi_1})\,d(xe^{i\varphi_1})=\int_0^\infty h^{(-)}(xe^{i\varphi_2})\,d(xe^{i\varphi_2})$$

egyenlőséget nyerjük, ami felbontott alakban

$$(1.20)\qquad \int_0^\infty \frac{v\left(xe^{i\varphi_1}re^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)}e^{i\vartheta};\frac{1}{2}\right)}{ix}f^{(-)}(-ixe^{i\varphi_1})\,dx=$$

$$=\int_0^\infty \frac{v\left(xe^{i\varphi_2}re^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)}e^{i\vartheta};\frac{1}{2}\right)}{ix}f^{(-)}(-ixe^{i\varphi_2})\,dx,\qquad r\in(0,+\infty),$$

ahol φ_1, φ_2 tetszés szerinti számok $\left(\frac{\pi}{2}-\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)<\varphi_1<\varphi_2<\frac{\pi}{2}\right)$. Ha most az (1.20) azonosságban elvégezzük a $\varphi_1\to\frac{\pi}{2}-\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)+0$, $\varphi_2\to\frac{\pi}{2}-0$ határátmeneteket, kapjuk:

$$(1.21)\qquad \int_0^\infty \frac{v\left(ixre^{i\vartheta};\frac{1}{2}\right)}{ix}f^{(-)}\left(xe^{-i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)}\right)dx=$$

$$=\int_0^\infty \frac{v\left(ixre^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)}e^{i\theta};\frac{1}{2}\right)}{ix}f^{(-)}(x)\,dx,\qquad r\in(0,\infty).$$

Minthogy az 1. segédtétel értelmében

$$f^{(-)}\left(xe^{-i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)}\right) = e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)} f^{(-)}(x, \varphi),$$

ezért (1. 21)-ből nyerjük:

$$e^{-i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)} \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{v\left(ixre^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)} e^{i\vartheta}; \frac{1}{2}\right)}{ix} f^{(-)}(x)\, dx = \tag{1.22}$$

$$= \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{v\left(ixre^{i\vartheta}; \frac{1}{2}\right)}{ix} f^{(-)}(x, \varphi)\, dx, \qquad r \in (0, \infty).$$

Vegyük észre, hogy a C tétel szerint (1. 22) bal oldala mint az $re^{i\vartheta}$ komplex változó függvénye analitikus, ha $\vartheta > 0$ vagy $\vartheta < -\pi - \frac{\pi}{2\alpha} - \varphi$, és ezekre az értékekre előállítható az

$$\int_0^\infty v\left(ixre^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)} e^{i\vartheta}; -\frac{1}{2}\right) f^{(-)}(x)\, dx.$$

képlet segítségével. Ugyanakkor (1. 22) jobb oldala analitikus $\vartheta > 0$ és $\vartheta < -\pi$ esetén, és érvényes rá az

$$\int_0^\infty v\left(ixre^{i\vartheta}; -\frac{1}{2}\right) f^{(-)}(x, \varphi)\, dx$$

előállítás. Ennélfogva a $\vartheta > 0$ és a $\vartheta < -\pi - \frac{\pi}{2\alpha} - \varphi$ esetben $\left(\text{ahol } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right]\right)$ fennáll az

$$\int_0^\infty v\left(ixre^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)} e^{i\vartheta}; -\frac{1}{2}\right) f^{(-)}(x)\, dx = \int_0^\infty v\left(ixre^{i\vartheta}; -\frac{1}{2}\right) f^{(-)}(x, \varphi)\, dx, \tag{1.22'}$$

$$r \in (0, +\infty)$$

azonosság, amely nyilván ekvivalens az (1. 22) egyenlőséggel.

De a C tétel szerint $\vartheta = 0$ esetén (1. 22) jobb oldala majdnem mindenütt létezik. Ugyancsak a C tétel szerint a bal oldal majdnem mindenütt létezik, ha $\varphi = \frac{\pi}{2\alpha}$, és analitikus függvényt állít elő, ha $\varphi < \frac{\pi}{2\alpha}$. Így az (1. 22) egyenlőség a $\vartheta = -\pi - \frac{\pi}{2\alpha} - \varphi$ esetben is érvényes marad. Teljesen analóg módon győződhetünk meg a segédtétel 2°. állításának a helyességéről.

1. 2. Tekintsük a

$$v_\varrho(z;\mu)=\int_0^\infty \frac{z^t}{\Gamma\left(\frac{t}{\varrho}+\mu\right)}\,dt \qquad (\varrho>0,\ \mu>0)$$

függvényt, amelyet a *Volterra*-féle $v(z;\mu)$ függvénnyel a

$$v_\varrho(z;\mu)=\varrho z^{\varrho(1-\mu)}v(z^\varrho;\mu-1) \tag{1.23}$$

képlet kapcsol össze. Bebizonyítjuk a következő tételt.

1. TÉTEL. 1°. *A $\mathscr{H}_2[\alpha]$ osztály $(0<\alpha<\infty)$ egybeesik azoknak a függvényeknek a halmazával, amelyek előállíthatók*

$$\begin{aligned}F(z)&=z^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}}z\tau^{1/\varrho};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v_{(-)}(\tau)\,d\tau+\\&+z^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}}z\tau^{1/\varrho};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v_{(+)}(\tau)\,d\tau, \qquad z\in\Delta(\alpha)\end{aligned} \tag{1.24}$$

alakban, ahol $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\varrho}$, $\varrho>0$ *tetszés szerinti paraméter,* $v_{(\pm)}(\tau)$ *pedig az* $L^2(0,\infty)$ *osztályból vett tetszés szerinti függvények.*

2°. *Ha* $F(z)\in\mathscr{H}_2[\alpha]$, *akkor igaz az*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\varrho(z;F)&\equiv z^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}}z\tau^{\frac{1}{\varrho}};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v_{(-)}(\tau;F)\,d\tau+\\&+z^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}}z\tau^{\frac{1}{\varrho}};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v_{(+)}(\tau;F)\,d\tau=F(z), \qquad z\in\Delta(\alpha)\end{aligned} \tag{1.25}$$

képlet, ahol a $v_{(\pm)}(\tau;F)$ *függvények szintén az* $L^2(0,\infty)$ *osztályhoz tartoznak és a* $(0,+\infty)$ *intervallumon majdnem mindenütt rendre az alábbi képletek útján vannak értelmezve:*

$$v_{(\pm)}(\tau;F)=\frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}}{2\pi\varrho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{\pm i\tau r}-1}{\pm ir}F\left(r^{\frac{1}{\varrho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)r^{\frac{1-\varrho}{2\varrho}}\,dr. \tag{1.26}$$

3°. *Az*

$$\mathscr{L}_\varrho^*(e^{i\varphi}r^{1/\varrho}; F \equiv r^{\frac{\varrho-1}{2\varrho}} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \left\{ \frac{d}{dr} r^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} r^{1/\varrho}\tau^{1/\varrho}e^{i\varphi}; \frac{3}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}(\tau; F)\, d\tau + \right.$$

(1.27)

$$\left. + \frac{d}{dr} r^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} r^{1/\varrho}e^{i\varphi}\tau^{1/\varrho}; \frac{3}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}(\tau; F)\, d\tau \right\} = F(r^{1/\varrho}e^{i\varphi})$$

képlet érvényes minden r-re, ha $|\varphi| < \dfrac{\pi}{2\alpha}$, *és majdnem minden r-re, ha* $|\varphi| = \dfrac{\pi}{2\alpha}$.

4°. *Az*

$$|\operatorname{Arg} z| > \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\varrho}, \qquad 0 < |z| < \infty$$

tartományban

(1.28) $$\mathscr{L}_\varrho(z; F) \equiv 0.$$

Ezenkívül a $(0, \infty)$ *féltengelyen fennáll*

(1.29) $$\mathscr{L}_\varrho^*(e^{i\varphi}r^{1/\varrho}; F) \equiv 0, \qquad |\varphi| \geqq \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\varrho}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen először $\varrho = 1$, és vegyük észre, hogy (1. 23) alapján

(1.30) $$v(z: \mu) = z^\mu v_1(z; \mu + 1).$$

1°. Legyen $v_{(+)}(\tau)$ és $v_{(-)}(\tau)$ az $L^2(0, \infty)$ osztályhoz tartozó tetszés szerinti függvény. Tekintsük az

(1.31)
$$F_{(+)}(z) = z^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty v_1\left(e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} z\tau; \frac{1}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}(\tau)\, d\tau =$$
$$= e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^\infty v\left(e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} z\tau; -\frac{1}{2}\right) v_{(+)}(\tau)\, d\tau$$

és az

(1.32)
$$F_{(-)}(z) = z^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty v_1\left(e^{i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} z\tau; \frac{1}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}(\tau)\, d\tau =$$
$$= e^{i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^\infty v\left(e^{i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} z\tau; -\frac{1}{2}\right) v_{(-)}(\tau)\, d\tau$$

integrált, ahol z komplex változó. A C tétel szerint az $F_{(+)}(z)$ függvény a

(1.33) $$\Delta_{(+)}: \left\{ \left| \operatorname{Arg} z - \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right| > \frac{\pi}{2}, \quad 0 < |z| < \infty \right\}$$

tartományban analitikus és eleget tesz az

$$\int_0^\infty |F_{(+)}(re^{i\varphi})|^2 dr \leqq M_{(+)}, \quad \left|\varphi-\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right| > \frac{\pi}{2} \tag{1.34}$$

feltételnek, ahol $M_{(+)}$ nem függ φ-től. Ugyanezen tétel szerint az $F_{(-)}(z)$ függvény analitikus a

$$\Delta_{(-)}: \left\{\left|\operatorname{Arg} z+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right| > \frac{\pi}{2}, \quad 0<|z|<\infty\right\}$$

tartományban és teljesül rá az

$$\int_0^\infty |F_{(-)}(re^{i\varphi})|^2 dr \leqq M_{(-)}, \quad \left|\varphi+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right| > \frac{\pi}{2} \tag{1.35}$$

feltétel, ahol $M_{(-)}$ nem függ φ-től.

A $\Delta_{(+)}$, $\Delta_{(-)}$ tartományok metszete tartalmazza a $\Delta(\alpha)$ tartományt, valamint az

$$\operatorname{Arg} z > \frac{\pi}{2\alpha}+\pi \quad \text{és} \quad \operatorname{Arg} z < -\frac{\pi}{2\alpha}-\pi, \quad 0<|z|<\infty$$

tartományokat. Ennélfogva az

$$F(z) = F_{(+)}(z)+F_{(-)}(z)$$

jelöléssel azt kapjuk, hogy az $F(z)$ függvény analitikus a $\Delta(\alpha)$ tartományban, és az (1. 34), (1. 35) összefüggések értelmében kielégíti az

$$\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 dr \leqq M_F < \infty, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$$

feltételt, ahol $M_F = 2(M_{(+)}+M_{(-)})$.

Az (1. 31), (1. 32) képletek alapján ez azt jelenti, hogy azok az $F(z)$ függvények, amelyek előállíthatók

$$\begin{aligned} F(z) = {} & z^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty v_1\left(e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} z\tau;\ \frac{1}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}(\tau)\, d\tau + \\ & + z^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty v_1\left(e^{i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} z\tau;\ \frac{1}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{1.36}$$

alakban, ahol $v_{(\pm)}(\tau) \in L^2(0, \infty)$, a $\mathscr{H}_2[\alpha]$ osztályhoz tartoznak.

Kiegészítésképpen megállapítottuk, hogy $F(z)$ analitikus az

$$\operatorname{Arg} z > \frac{\pi}{2\alpha}+\pi, \quad \operatorname{Arg} z < -\frac{\pi}{2\alpha}-\pi$$

tartományokban, és ott eleget tesz az

$$(1.37) \qquad \int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 dr \leqq M_F, \qquad |\varphi| > \frac{\pi}{2\alpha} + \pi$$

feltételnek.

2°, 3°. Legyen $F(z) \in \mathscr{H}_2[\alpha]$ és

$$(1.38) \qquad v_{(\pm)}(\tau;\varphi) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}}{2\pi} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{\pm i\tau r}-1}{\pm ir} F(re^{i\varphi})dr, \qquad |\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Ekkor a D tétel szerint $v_{(\pm)}(\tau;\varphi) \in L^2(0,\infty)$, és a $(0,\infty)$ intervallumon majdnem mindenütt

$$(1.39) \qquad \begin{aligned} F(re^{i\varphi}) &= e^{i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{v\left(ir\tau;\frac{1}{2}\right)}{i\tau} v_{(-)}(\tau;\varphi)d\tau + \\ &+ e^{-i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{v\left(-ir\tau;\frac{1}{2}\right)}{-i\tau} v_{(+)}(\tau;\varphi)d\tau \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

De a 2. segédtétel értelmében (a $\vartheta = 0$ választással) fennáll

$$(1.40) \qquad \begin{gathered} I_1 = e^{-i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)+i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{v\left(ir\tau e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)};\frac{1}{2}\right)}{i\tau} v_{(-)}(\tau;F)d\tau, \\ |\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\alpha}, \end{gathered}$$

$$(1.41) \qquad \begin{gathered} I_2 = e^{-i\left(\varphi-\frac{\pi}{2\alpha}\right)-i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{v\left(-ir\tau e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2\alpha}\right)};\frac{1}{2}\right)}{-i\tau} v_{(+)}(\tau;F)d\tau, \\ |\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\alpha}, \end{gathered}$$

ahol

$$v_{(\pm)}(\tau;F) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}}{2\pi} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ir\tau}-1}{\pm ir} F\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)dr.$$

Íly módon az

$$(1.42)\quad \begin{aligned} F(re^{i\varphi}) &= e^{-i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)+i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{v\left(r\tau e^{i\varphi}e^{i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)};\frac{1}{2}\right)}{i\tau} v_{(-)}(\tau;F)\,d\tau+ \\ &+e^{-i\left(\varphi-\frac{\pi}{2\alpha}\right)-i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{v\left(r\tau e^{i\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)};\frac{1}{2}\right)}{-i\tau} v_{(+)}(\tau;F)\,d\tau, \end{aligned}$$

$$|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\alpha}$$

előállítást kapjuk, amely $\varphi = \pm\frac{\pi}{2\alpha}$ esetén majdnem mindenütt, $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ esetén pedig minden r-re érvényes. De $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ esetén, a C tétel értelmében, az (1. 42) képletben fellépő differenciálásokat szabad az integráljel mögé bevinni, tehát nyerjük:

$$(1.43)\quad \begin{aligned} F(re^{i\varphi}) &= e^{i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\int_0^\infty v\left(r\tau e^{i\varphi}e^{i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)};\,-\frac{1}{2}\right) v_{(-)}(\tau;F)\,d\tau+ \\ &+e^{-i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\int_0^\infty v\left(r\tau e^{i\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)};\,-\frac{1}{2}\right) v_{(+)}(\tau;F)\,d\tau. \end{aligned}$$

Az (1. 30) összefüggés folytán az (1. 42), (1. 43) képletek a következő alakra hozhatók:

$$(1.42')\quad \begin{aligned} F(re^{i\varphi}) = e^{-i\frac{\varphi}{2}}\Bigg\{&\frac{d}{dr}r^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_1\left(r\tau e^{i\varphi}e^{i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)};\frac{3}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}(\tau;F)\,d\tau+ \\ &+\frac{d}{dr}r^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_1\left(r\tau e^{i\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)};\frac{3}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}(\tau;F)\,d\tau\Bigg\} \end{aligned}$$

és

$$(1.43')\quad \begin{aligned} F(re^{i\varphi}) &= (re^{i\varphi})^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_1\left(r\tau e^{i\varphi}e^{i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}(\tau;F)\,d\tau+ \\ &+(re^{i\varphi})^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_1\left(r\tau e^{i\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)};\frac{1}{2}\right) v_{(+)}(\tau;F)\tau^{-\frac{1}{2}}\,d\tau. \end{aligned}$$

4°. A 2. segédtétel alapján akkor, ha $|\varphi+\vartheta|\geqq\pi+\frac{\pi}{2\alpha}$ és $|\varphi|\leqq\frac{\pi}{2\alpha}$, fennáll:

$$
\begin{aligned}
&e^{-i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\alpha}\right)+i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{v\left(\tau r e^{i\varphi}e^{i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}e^{i\vartheta};\frac{1}{2}\right)}{i\tau}v_{(-)}(\tau;F)\,d\tau+\\
&+e^{-i\left(\varphi-\frac{\pi}{2\alpha}\right)-i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{v\left(\tau r e^{i\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}e^{i\vartheta};\frac{1}{2}\right)}{-i\tau}v_{(+)}(\tau;F)\,d\tau=\\
(1.44)\qquad &=e^{i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{v\left(ir\tau e^{i\vartheta};\frac{1}{2}\right)}{i\tau}v_{(-)}(\tau;\varphi)\,d\tau+\\
&+e^{-i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{v\left(-ir\tau e^{i\vartheta};\frac{1}{2}\right)}{-i\tau}v_{(+)}(\tau;\varphi)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Legyen $\psi=\varphi+\vartheta$, ugyhogy $|\psi|\geqq\pi+\frac{\pi}{2\alpha}$ és $|\varphi|\leqq\frac{\pi}{2\alpha}$. Ekkor $|\vartheta|\geqq\pi$, és a D tétel 2°. állítása szerint (1.44) jobb oldala nullával egyenlő. Ennélfogva $|\psi|\geqq\pi+$ $+\frac{\pi}{2\alpha}$ esetén az (1.44) összefüggésből, (1.30) felhasználásával, adódik:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}r^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_1\left(\tau r e^{i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}e^{i\psi};\frac{3}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v_{(-)}(\tau;F)\,d\tau+\\
(1.45)\qquad &+\frac{d}{dr}r^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_1\left(\tau r e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}e^{i\psi};\frac{3}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v_{(+)}(\tau;F)\,d\tau\equiv 0,\qquad (0<r<\infty),
\end{aligned}
$$

azaz

$$\mathscr{L}_1^*(e^{i\psi}r;F)\equiv 0,\qquad |\psi|\geqq\frac{\pi}{2\alpha}+\pi.$$

Ha pedig $|\psi|>\frac{\pi}{2\alpha}+\pi$, akkor, az (1. 45) összefüggésben kijelölt differenciálásokat bevíve az integráljel mögé, a $\varrho=1$ esetben az (1. 29) állításra jutunk. Tehát a $\varrho=1$ esetre a tétel összes állításait igazoltuk.

Ha viszont $\varrho\neq 1$ tetszés szerinti pozitív szám, akkor bevezetve az $\alpha_1=\frac{\alpha}{\varrho}$ jelölést végezzük el a $z_1=z^\varrho$ transzformációt, amely a $\Delta(\alpha)$ tartományt a $\Delta(\alpha_1)$

tartományra képezi le. Könnyű belátni, hogy ennek során ha $F(z)\in\mathcal{H}_2[\alpha]$ $(z\in\Delta(\alpha))$, akkor

$$F_1(z_1)=z_1^{\frac{1-\varrho}{2\varrho}}F(z_1^{1/\varrho})\in\mathcal{H}_2[\alpha_1],\qquad (z_1\in\Delta(\alpha_1)),$$

és megfordítva, ha $F_1(z_1)\in\mathcal{H}_2[\alpha_1]$ $(z_1\in\Delta(\alpha_1))$, akkor

$$F(z)=F_1(z^\varrho)z^{\frac{\varrho-1}{2}}\in\mathcal{H}_2[\alpha],\qquad (z\in\Delta(\alpha)).$$

Az utoljára bizonyítottak alapján az $F_1(z_1)$ függvény előállítható a következőképpen:

$$(1.46)\quad \begin{aligned} F_1(z_1)&=z_1^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \nu_1\left(z_1\tau e^{i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v^*_{(-)}(\tau;F_1)\,d\tau+\\ &+z_1^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \nu_1\left(z_1\tau e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v^*_{(+)}(\tau;F_1)\,d\tau,\\ &\qquad\qquad z_1\in\Delta(\alpha_1),\end{aligned}$$

ahol

$$(1.47)\quad v^*_{(\pm)}(\tau;F_1)=\frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)}}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty\frac{e^{\pm i\tau r_1}-1}{\pm i r_1}F_1\left(r_1e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha_1}}\right)dr_1.$$

Elvégezve a $z_1=z^\varrho$ helyettesítést és tekintetbe véve, hogy

$$F_1(z^\varrho)z^{\frac{\varrho-1}{2}}=F(z),$$

$$\nu_1(z^\varrho;\mu)=\frac{1}{\varrho}\nu_\varrho(z;\mu),$$

az (1.46) egyenlőségből adódik:

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{1}{\varrho}z^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \nu_\varrho\left(z\tau^{\frac{1}{\varrho}}e^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\alpha_1\varrho}\right)};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v^*_{(-)}(\tau;F_1)\,d\tau+\\ &+\frac{1}{\varrho}z^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \nu_\varrho\left(z\tau^{\frac{1}{\varrho}}e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\alpha_1\varrho}\right)};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v^*_{(+)}(\tau;F_1)\,d\tau.\end{aligned}$$

Végül az (1. 47) összefüggésből

$$\frac{1}{\varrho} v^*_{(\pm)}(\tau; F_1) =$$

$$= \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\varrho}{\alpha}\right)}}{2\pi\varrho} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ir\tau}-1}{\pm i\tau} F\left(r^{\frac{1}{\varrho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)\left(r^{\frac{1}{\varrho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)^{\frac{1-\varrho}{2}} dr =$$

$$= \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}}{2\pi\varrho} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ir\tau}-1}{\pm ir} F\left(r^{\frac{1}{\varrho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right) r^{\frac{1-\varrho}{2\varrho}} dr = v_{\pm}(\tau; F),$$

vagyis az (1. 25), (1. 26) képleteket igazoltuk.

Vegyük észre, hogy az $\left\{|\operatorname{Arg} z_1| > \frac{\pi}{2\alpha_1} + \pi,\ 0 < |z_1| < \infty\right\}$ tartomány az $\left\{|\operatorname{Arg} z| > \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\varrho},\ 0 < |z| < \infty\right\}$ tartományra képeződik le, ezért a tétel további állításai ugyanígy bizonyíthatók be.

1. 3. Az 1. tétel lehetővé teszi azon $G(w)$ függvények osztályának paraméteres előállítását, amelyek az

$$S(h): \left\{-\infty < u < \infty, \quad |v| < \frac{\pi}{2h}\right\} \tag{1.48}$$

sávban analitikusak és eleget tesznek a

$$\sup_{|v| < \frac{\pi}{2h}} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |G(u+iv)|^2 du\right\} < \infty \tag{1.49}$$

feltételnek. Legyen ennek az osztálynak a jele $H_2[h]$.

WIENER és PALEY [1] bizonyította be először, hogy *a $H_2[h]$ osztály megegyezik azon függvények halmazával, amelyek előállíthatók*

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itw} \varphi(t) dt, \qquad |\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2h}$$

alakban, ahol $\varphi(t)$ tetszés szerinti mérhető és az

$$e^{\frac{\pi}{2h}|t|} \varphi(t) \in L^2(-\infty, \infty)$$

tulajdonsággal rendelkező függvény.

Megjegyezzük, hogy a vizsgált esetben a Wiener—Paley operátor az $S(h)$ sávon kívül értelmét veszti.

A következő tétel új paraméteres előállítást ad a $H_2[h]$ osztályra egy olyan operátor segítségével, amely bizonyos félsíkokban az azonosan nulla függvényt állítja elő.

2. TÉTEL. 1°. *A $H_2[h]$ osztály megegyezik azon függvények halmazával, amelyek előállíthatók*

$$G(w) = \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} e^w \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}(\tau)d\tau + \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} e^w \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}(\tau)d\tau$$

alakban, ahol $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{h}$, $\varrho > 0$ *tetszés szerinti paraméter,* $v_{(\pm)}(\tau)$ *pedig az* $L^2(0, \infty)$ *osztályból vett tetszés szerinti függvények.*

2°. *Ha* $G(w) \in H_2[h]$, *akkor fennáll*

$$L_\varrho(w; G) \equiv \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} e^w \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}(\tau; G)d\tau +$$

$$+\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} e^w \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}(\tau; G)\tau d = G(w), \qquad w \in S(h),$$

ahol a $v_{(\pm)}(\tau; G)$ *függvények szintén az* $L^2(0, \infty)$ *osztályhoz tartoznak és a* $(0, \infty)$ *intervallumon majdnem mindenütt rendre az alábbi képletek útján vannak értelmezve:*

$$v_{(\pm)}(\tau; G) = \frac{e^{\mp i\frac{\pi}{4}}}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^\infty (e^{\pm i\tau e^{u\varrho}} - 1)e^{-\frac{u\varrho}{2}} G\left(u \pm i\frac{\pi}{2h}\right)du.$$

3°. *Az*

$$L_\varrho^*\left(\frac{u+iv}{\varrho}, G\right) \equiv e^{-\frac{u}{2}}\frac{d}{du}e^{\frac{u}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} e^{\frac{u+iv}{\varrho}} \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{3}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}(\tau; G)d\tau +$$

$$+e^{-\frac{u}{2}}\frac{d}{du}e^{\frac{u}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} e^{\frac{u+iv}{\varrho}} \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{3}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}(\tau; G)d\tau = G\left(\frac{u+iv}{\varrho}\right)$$

képlet igaz minden u-ra, ha $|v| < \frac{\pi}{2h}$, *és majdnem minden u-ra, ha* $|v| = \frac{\pi}{2h}$.

4°. *Az* $\operatorname{Im} w > \frac{\pi}{2h} + \frac{\pi}{\varrho}$ *és az* $\operatorname{Im} w < -\frac{\pi}{2h} - \frac{\pi}{\varrho}$ *félsíkban fennáll*

$$L_\varrho(w; G) \equiv 0.$$

Ezenkívül az egész $(-\infty, \infty)$ *tengelyen*

$$L_\varrho^*\left(\frac{u+iv}{\varrho}; G\right) \equiv 0, \qquad |v| \geqq \frac{\pi}{2h} + \frac{\pi}{\varrho}.$$

Vázolni fogjuk a tétel bizonyítását. Végezzük el a $z=e^w$ transzformációt, amely a w sík $S(h)$ tartományát a $\Delta(h)\subset G_\infty$ tartományra képezi le. Ennek során ha $G(w)\in H_2[h]$ $(w\in S(h))$, akkor

$$F(z)=G(\log z)^{-1/2}\in \mathscr{H}_2[h], \qquad (z\in\Delta(h)),$$

és megfordítva, ha $F(z)\in\mathscr{H}_2[h]$, $z\in\Delta(h)$, akkor

$$G(w)=F(e^w)e^{w/2}\in H_2[h], \qquad w\in S(h).$$

Vegyük észre, hogy az $\operatorname{Im} w>\frac{\pi}{2h}+\frac{\pi}{\varrho}$ és az $\operatorname{Im} w<-\frac{\pi}{2h}-\frac{\pi}{\varrho}$ félsík a G_∞ *Riemann*-felületen rendre az $\operatorname{Arg} z>\frac{\pi}{2h}+\frac{\pi}{\varrho}$ és az $\operatorname{Arg} z<-\frac{\pi}{2h}-\frac{\pi}{\varrho}$ tartományba megy át.

Az 1. tételben az

$$F(z)=G(\log z)z^{-\frac{1}{2}}$$

választással élve és elvégezve a $z=e^w$ helyettesítést, nyerjük a $G(w)\in\mathscr{H}_2[h]$ függvényekre vonatkozó megfelelő állításokat.

Befejezésként megemlítjük, hogy a $\mathscr{H}_2[h]$ osztály előállítása itt már a végtelen növekedésű

$$v_\varrho(e^w;\mu)=\int_0^\infty \frac{e^{wt}}{\Gamma\left(\frac{t}{\varrho}+\mu\right)}\,dt$$

egész függvény segítségével történik, míg ugyanezen osztály Wiener—Paley-féle előállításában [1] a *Fourier*-féle mag szerepel, amely exponenciális növekedésű egész függvény.

2. §. A Fourier—Plancherel- és a Wiener—Paley-típusú operátor megszerkesztése néhány általános halmazosztályra

Amint az 1. és a 2. tételből kitűnik, az 1. §-ban megszerkesztett $\mathscr{L}_\varrho(z;F)$, $L_\varrho(w;G)$ operátorok azzal a fontos tulajdonsággal rendelkeznek, hogy miközben bizonyos halmazon (a $\Delta(\alpha)\subset G_\infty$ szögtartományban vagy az $S(h)$ sávban) előállítják az adott függvényt, ugyanakkor az adott halmaz kiegészítő halmazának meghatározott részén az azonosan nulla függvényt állítják elő.

Ez a tulajdonság lehetővé teszi, hogy a szuperponálás módszerével felépítsük a *Fourier—Plancherel*-típusú és a *Wiener—Paley*-típusú operátor apparátusát a G_∞ *Riemann*-felületen vagy a komplex síkon fekvő halmazok néhány általános osztályára vonatkozóan. Ezt a felépítést a jelen paragrafus 3. és 4. tételében végezzük el, amelyeket bizonyítás nélkül ismertetünk, minthogy a bizonyítások, a [4] munka alaptételéhez (1. tétel) hasonlóan, csak az $\mathscr{L}_\varrho(z;F)$, $L_\varrho(w;G)$ operátorok fent említett tulajdonságán alapulnak.

2. 1. Felsorolunk több olyan előzetes definíciót és jelölést, amelyre az alaptétel megfogalmazásánál szükség van.

A $G_\infty : \{-\infty < \operatorname{Arg} z < \infty,\ 0 < |z| < \infty\}$ végtelen sokrétű *Riemann*-felületen értelmezzük a $\Delta(\alpha, \vartheta)$ ponthalmazt a következőképpen:

$$(2.1) \qquad \Delta(\alpha, \vartheta) = \begin{cases} |\operatorname{Arg} z - \vartheta| < \dfrac{\pi}{2\alpha}, & \text{ha} \quad 0 < \alpha < 1 \\ \operatorname{Arg} z = \vartheta, & \text{ha} \quad \alpha = +\infty. \end{cases}$$

Legyen a

$$\{\vartheta_k\}_1^p : \ -\infty < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_p < +\infty,$$

$$\{a_k\}_1^p : 0 < a_k \leqq \infty, \qquad k = 1, 2, \ldots, p$$

számok összessége olyan, hogy a $\{\bar{\Delta}(\alpha_k, \vartheta_k)\}_1^p$ zárt halmazok összes lehetséges

$$\bar{\Delta}(a_{k_1}, \vartheta_{k_1}) \cap \bar{\Delta}(\alpha_{k_2}, \vartheta_{k_2})$$

alakú metszetei csak egyetlen pontot tartalmaznak, a koordinátarendszer kezdőpontját. Világos, hogy ez a feltétel teljesül, ha

$$\vartheta_{k+1} - \vartheta_k > \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right), \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Ebből következik, hogy az

$$e_k = e\left\{|\varphi - \vartheta_k| \leqq \frac{\pi}{2\alpha_k}\right\} \subset (-\infty, +\infty), \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

zárt intervallumoknak (amelyek az $\alpha_k = +\infty$ esetben a ϑ_k ponttá fajulnak el) mindig üres a metszetük.

Továbbá a G_∞ *Riemann*-felületen tekintsük az

$$(2.2) \qquad \mathcal{M}\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p; \alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \equiv \mathcal{M}\{\vartheta; \alpha\} = \bigcup_1^p \Delta(\alpha_k, \vartheta_k)$$

ponthalmazt, amelynek a komponensei a koordinátarendszer kezdőpontjából kiinduló sugarak (ha az α_k számok közt $+\infty$ is szerepel), és szintén a $z=0$ pontból mint csúcsból kiinduló szögtartományok (ha az α_k számok között van, amelyik nem $+\infty$). E halmaz

$$\bar{\mathcal{M}}\{\vartheta; \alpha\} = \bigcup_1^p \bar{\Delta}(\alpha_k, \vartheta_k)$$

lezárása sugarak és zárt szögtartományok $\{\bar{\Delta}(\alpha_k, \vartheta_k)\}_1^p$ rendszeréből áll, amelyeknek a metszete feltevés szerint egyetlen pont, a koordinátarendszer kezdőpontja. A zárt $\bar{\mathcal{M}}$ halmaz

$$C\bar{\mathcal{M}}\{\vartheta; \alpha\} = G_\infty - \bar{\mathcal{M}}\{\vartheta; \alpha\}$$

kiegészítő halmaza nyilván tartalmaz minimális $\dfrac{\pi}{\varrho_{\mathcal{M}}}$ nyílású szögtartományt. A $\varrho_{\mathcal{M}}$ szám az említett kiegészítő halmazt bizonyos értelemben metrikusan jellemzi.

Az adott $\mathcal{M}\{\vartheta; \alpha\}$ halmazzal együtt tekintsük a $(-\infty, +\infty)$ egyenesen fekvő, zárt

$$(2.3) \qquad \mathcal{E}\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p; \alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \equiv \mathcal{E}\{\vartheta; \alpha\} = \bigcup_1^p e_k$$

halmazt. Az $\mathscr{E}\{\vartheta;\alpha\}$ halmaz az

$$e_k = e\left(|\varphi-\vartheta_k| \leqq \frac{\pi}{2\alpha_k}\right), \quad (k=1,2,\dots,p)$$

zárt intervallumoknak (amelyek $\alpha_k = +\infty$ esetén a ϑ_k ponttá fajulnak el) az összege; itt a feltevés szerint bármely két intervallum metszete üres.

Állapodjunk meg abban, hogy $\tilde{\Delta}(\alpha_k, \vartheta_k)$ fogja jelölni a $\Delta(\alpha_k, \vartheta_k)$ szögtartomány pontjainak a halmazát, ill. az üres halmazt a szerint, amint $0 < \alpha_k < +\infty$ vagy $\alpha_k = +\infty$. Feltéve, hogy az $\{\alpha_k\}_1^p$ számok közül legalább az egyik különbözik $+\infty$-től, észrevesszük, hogy az

$$\tilde{\mathscr{M}}\{\vartheta;\alpha\} = \bigcup_1^p \tilde{\Delta}(\alpha_k, \vartheta_k) \tag{2.4}$$

nyílt halmaz tartalmazza $\mathscr{M}\{\vartheta;\alpha\}$ összes belső pontját.

Tovább menve, legyen

$$\tilde{e}_k = \begin{cases} e\left(|\varphi-\vartheta_k| < \dfrac{\pi}{2\alpha_k}\right), & 0<\alpha_k<+\infty, \\ e(\varphi=\vartheta_k), \quad \alpha_k = +\infty. \end{cases} \tag{2.5}$$

Az

$$\tilde{\mathscr{E}}\{\vartheta;\alpha\} = \bigcup_1^p \tilde{e}_k \subset \mathscr{E}\{\vartheta;\alpha\} \tag{2.6}$$

halmaz az $\mathscr{E}\{\vartheta;\alpha\}$ halmaz összes izolált és belső pontjából áll. Azt fogjuk mondani, hogy az $F(z)$ függvény a $\mathscr{H}_2^{(\vartheta_1,\dots,\vartheta_p)}[\alpha_1,\dots,\alpha_p]$ osztályhoz tartozik, ha az $\mathscr{M}\{\vartheta;\alpha\}$ halmazon van értelmezve és eleget tesz az

$$\text{A)} \qquad \sup_{\varphi\in\mathscr{E}\{v;\alpha\}} \left\{\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2\,dr\right\} < +\infty \tag{2.7}$$

feltételnek, abban az esetben pedig, amikor $\tilde{\mathscr{M}}\{\vartheta;\alpha\}$ nem üres, az alábbi kiegészítő feltételnek is:

B) Az $F(z)$ függvény analitikus $\tilde{\mathscr{M}}\{\vartheta;\alpha\}$ mindegyik komponensén, vagyis mindegyik $\Delta(\alpha_k, \vartheta_k)$ $(0<\alpha_k<+\infty)$ szögtartományban.

Tegyük fel, hogy $F(z)\in\mathscr{H}_2^{(\vartheta_1\dots,\vartheta_p)}[\alpha_1,\dots,\alpha_p]$, és tekintsük az

$$F_k(z) = F(e^{i\vartheta_k}z), \qquad z\in\Delta(\alpha_k) \qquad (k=1,2,\dots,p) \tag{2.8}$$

függvények rendszerét. Ekkor, figyelembe véve az $\tilde{\mathscr{E}}\{\vartheta;\alpha\}$ halmaz (2. 5)—(2. 6) definícióját, a következő megállapításra jutunk: ha valamely adott k-ra $(1\leqq k\leqq p)$ $\alpha_k = +\infty$, akkor az $F_k(z)$ függvény a $(0, +\infty)$ féltengelyen mérhető és eleget tesz az

$$\int_0^\infty |F_k(r)|^2\,dr < +\infty$$

feltételnek; ha pedig egy adott k $(1\leqq k\leqq p)$ érték mellett $\alpha_k < +\infty$, akkor $F_k(z)$ analitikus a $\Delta(\alpha_k)$ tartományban és teljesül rá az

$$\int_0^\infty |F_k(re^{i\varphi})|^2\,dr \leqq A_F < +\infty, \qquad |\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha_k}$$

feltétel, azaz $F_k(z)\in\mathcal{H}_2[\alpha_k]$. De ebben az esetben az $F_k(z)$ függvénynek a $\Delta(\alpha_k)$ tartomány határán majdnem mindenütt van peremértéke, mégpedig

$$F_k\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha_k}}r\right) = F\left(e^{i\left(\vartheta_k\pm\frac{\pi}{2\alpha_k}\right)}r\right),$$

és ez eleget tesz az

$$\int_0^\infty \left|F_k\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha_k}}r\right)\right|^2 dr \leqq A_F < +\infty$$

feltételnek.

Az elmondottakból következik, hogy általában

$$\int_0^\infty \left|F_k\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha_k}}r\right)\right|^2 dr \leqq A_F < \infty, \qquad (k=1,2,\dots,p), \tag{2.9}$$

ahol $\alpha_k = +\infty$ esetén $e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha_k}} = 1$ értendő.

Most megjegyezzük, hogy tetszés szerinti $\varrho > 0$ szám esetén a (2. 9) feltétel felírható az

$$F_k\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha_k}}t^{\frac{1}{\varrho}}\right)t^{\frac{1-\varrho}{2\varrho}} \in L^2(0,+\infty), \qquad (k=1,2,\dots,p) \tag{2.9'}$$

alakban. Ekkor mindegyik $F_k(z)$ függvényhez hozzárendelhetünk két függvényt:

$$\begin{aligned} &v_{(\pm)}(\tau;F_k) \equiv v_{(\pm)}^{(k)}(\tau;F) \equiv \\ &\equiv \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha_k}\right)}}{2\pi\varrho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{\pm i\tau r}-1}{\pm ir}F_k\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha_k}}r^{\frac{1}{\varrho}}\right)r^{\frac{1-\varrho}{2\varrho}}\,dr, \end{aligned} \tag{2.10}$$

ezek PLANCHEREL tétele értelmében az $L^2(0,\infty)$ osztályhoz tartoznak.

Végül vezessük be az

$$\frac{1}{\gamma_k} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\alpha_k} \qquad (k=1,2,\dots,p)$$

jelölést, és mindegyik $F_k(z)$ függvényhez rendeljünk hozzá két operátort a következő képletek segítségével:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varrho^*\left(e^{i\varphi}r^{\frac{1}{\varrho}};F_k\right) \equiv \mathcal{L}_\varrho^{*(k)}\left(e^{i\varphi}r^{\frac{1}{\varrho}};F\right) \equiv \\ &\equiv r^{\frac{\varrho-1}{2\varrho}}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\left\{\frac{d}{dr}\left[r^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty V_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma_k}}r^{\frac{1}{\varrho}}e^{i\varphi}\tau^{\frac{1}{\varrho}};\ \frac{3}{2}\right)v_{(-)}^{(k)}(\tau;F)\tau^{-\frac{1}{2}}\,d\tau\right]+\right. \\ &\left.+\frac{d}{dr}\left[r^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty V_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma_k}}r^{\frac{1}{\varrho}}e^{i\varphi}\tau^{\frac{1}{\varrho}};\ \frac{3}{2}\right)v_{(+)}^{(k)}(\tau;F)\tau^{-\frac{1}{2}}\,d\tau\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\mathscr{L}_\varrho(z;F_k)\equiv\mathscr{L}_\varrho^{(k)}(z;F)\equiv z^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma_k}}z\tau^{\frac{1}{\varrho}};\frac{1}{2}\right)v_{(-)}^{(k)}(\tau;F)\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau+ \tag{2.11'}$$

$$+z^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma_k}}z\tau^{\frac{1}{\varrho}};\frac{1}{2}\right)v_{(+)}^{(k)}(\tau;F)\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau.$$

Ilyen módon minden $F(z)\in\mathscr{H}_2^{(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_p)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_p]$ függvénynek megfeleltethetünk két operátor-rendszert:

$$\{\mathscr{L}_\varrho^{*(k)}(e^{i\varphi}r^{1/\varrho};F)\}_1^p \quad \text{és} \quad \{\mathscr{L}_\varrho^{(k)}(z;F)\}_1^p.$$

Ezen operátorokon kívül az $L^2(0,+\infty)$ osztályból vett függvényekből álló tetszés szerinti $\{v_{(+)}^{(k)}(\tau),v_{(-)}^{(k)}(\tau)\}_1^p$ rendszerhez alkossunk még két

$$\{\mathscr{R}_\varrho^{*(k)}(e^{i\varphi}r^{1/\varrho})\}_1^p \quad \text{és} \quad \{\mathscr{R}_\varrho^{(k)}(z)\}_1^p$$

operátor-rendszert a következő definíciók útján:

$$\mathscr{R}_\varrho^*(e^{i\varphi}r^{\frac{1}{\varrho}};v_{(\pm)}^{(k)})\equiv\mathscr{R}_\varrho^{*(k)}(e^{i\varphi}r^{\frac{1}{\varrho}})\equiv$$

$$\equiv r^{\frac{\varrho-1}{2\varrho}}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\left\{\frac{d}{dr}\left[r^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma_k}}r^{\frac{1}{\varrho}}e^{i\varphi}\tau^{\frac{1}{\varrho}};\frac{3}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v_{(-)}^{(k)}(\tau)d\tau\right]+\right. \tag{2.12}$$

$$\left.+\frac{d}{dr}\left[r^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma_k}}r^{\frac{1}{\varrho}}e^{i\varphi}\tau^{\frac{1}{\varrho}};\frac{3}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v_{(+)}^{(k)}(\tau)d\tau\right]\right\}$$

és

$$\mathscr{R}_\varrho(z;v_{(\pm)}^{(k)})\equiv\mathscr{R}_\varrho^{(k)}(z)\equiv z^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma_k}}z\tau^{\frac{1}{\varrho}};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v_{(-)}^{(k)}(\tau)d\tau+ \tag{2.12'}$$

$$+z^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma_k}}z\tau^{\frac{1}{\varrho}};\frac{1}{2}\right)\tau^{-\frac{1}{2}}v_{(+)}^{(k)}(\tau)d\tau.$$

Az alábbi tétel a $\mathscr{H}_2^{(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_p)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_p]$ osztály paraméteres előállítását adja.

3. TÉTEL. *Legyen megadva a* $G_\infty:\{-\infty<\operatorname{Arg}z<+\infty,\ 0<|z|<\infty\}$ *Riemann-felületen egy*

$$\mathscr{M}\{\vartheta;\alpha\}\equiv\mathscr{M}\{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_p;\alpha_1,\ldots,\alpha_p\},$$

típusú halmaz, amelynek a $(-\infty,\infty)$ *intervallumban az*

$$\mathscr{E}\{\vartheta;\alpha\}\equiv\mathscr{E}\{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_p;\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$$

ponthalmaz felel meg. Tetszés szerinti $\varrho\geqq\varrho_{\mathscr{M}}$ *számára igazak a következő állítások.*

1°. *A* $\mathscr{H}_2^{(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_p)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_p]$ *osztály azokból és csak azokból a függvényekből áll, amelyek előállíthatók*

$$F(e^{i\varphi}r)=\sum_{k=1}^{p}{}' \mathscr{R}_\varrho^*(e^{i(\varphi-\vartheta_k)}r;\, v_{(\pm)}^{(k)}), \qquad \varphi\in\mathscr{E}\{\vartheta;\alpha\} \tag{2.13}$$

alakban, ahol $\{v_{(\pm)}^{(k)}(\tau)\}_1^p$ *tetszés szerinti, az* $L^2(0,+\infty)$ *osztályhoz tartozó függvények. A* (2. 13) *képlet az* $F(e^{i\varphi}r)$ *függvényt minden* $r\in(0,+\infty)$ *értékre meghatározza, ha* φ *az* $\mathscr{E}\{\vartheta;\alpha\}$ *halmaz belső pontja, és majdnem minden* $r\in(0,+\infty)$ *értékre határozza meg, ha* φ *határpont vagy izolált pont.*

2°. *Ha* $\tilde{\mathscr{M}}\{\vartheta;\alpha\}$ *nem üres, akkor a* (2. 13) *képlettel meghatározott* $F(z)$ *függvény előállítható még a következőképpen is:*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{p}{}' \mathscr{R}_\varrho^{(k)}(e^{-i\vartheta_k}z), \qquad z\in\tilde{M}\{\vartheta;\alpha\}.$$

3°. *Ha* $F(z)\in\mathscr{H}_2^{(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_p)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_p]$, *akkor fennáll*

$$F(e^{i\varphi}r)=\sum_{k=1} \mathscr{L}_\varrho^{*(k)}(e^{i(\varphi-\vartheta_k)}r;\, F), \qquad \varphi\in\mathscr{E}\{\vartheta;\alpha\},$$

mégpedig az r, φ *változók értékeire tett ugyanolyan kikötések mellett, mint amik a* (2. 13) *képlettel kapcsolatban szerepeltek.*

Végül ha az $\tilde{\mathscr{M}}\{\vartheta;\alpha\}$ *halmaz nem üres, akkor ezen a halmazon* $F(z)$ *előállítható az*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{p}{}' \mathscr{L}_p^{(k)}(e^{-i\vartheta_k}z;\, F), \qquad z\in\tilde{\mathscr{M}}\{\vartheta;\alpha\}$$

alakban.

2. 2. A $w(=u+iv)$ síkon értelmezzünk egy $S(h,\eta)$ $(0<h\leqq+\infty,\ -\infty<\eta<<+\infty)$ halmazt a következőképpen:

$$S(h,\eta)=\begin{cases}|v-\eta|<\dfrac{\pi}{2h}, & \text{ha}\quad 0<h<+\infty,\\ v=\eta, & \text{ha}\quad h=+\infty.\end{cases}\qquad(-\infty<u<+\infty).$$

Legyenek a számokból álló

$$\{\eta_k\}_1^p:-\infty<\eta_1<\eta_2<\ldots<\eta_p<+\infty, \qquad (p\geqq1),$$

$$\{h_k\}_1^p: 0<h_k\leqq\infty, \qquad k=1,2,\ldots,p$$

rendszerek olyanok, hogy az $\{\bar{S}(h_k,\eta_k)\}_1^p$ zárt halmazok összes lehetséges

$$\bar{S}(h_{k_1},\eta_{k_1})\cap\bar{S}(h_{k_2},\eta_{k_2})$$

metszetei csak a végtelen távoli pontot tartalmazzák. Könnyen belátható, hogy ez a feltétel ekvivalens az alábbi egyenlőtlenség-rendszer fennállásával:

$$-\infty<\eta_1-\frac{1}{h_1}<\eta_1+\frac{1}{h_1}<\eta_2-\frac{1}{h_2}<\ldots<\eta_{p-1}+\frac{1}{h_{p-1}}<\eta_p-\frac{1}{h_p}<\eta_p+\frac{1}{h_p}<+\infty.$$

Ennélfogva az

$$e_k = e\left(|v-\eta_k| \leqq \frac{\pi}{2h_k}\right), \qquad k = 1, 2, \dots, p$$

zárt intervallumoknak (amelyek $h_k = +\infty$ esetén a $v=\eta_k$ ponttá fajulnak el) a metszete mindig üres. Nyilvánvaló, hogy $e_k \subset (-\infty, \infty)$.

Tekintsük a w síkon az

$$M\{\eta_1, \dots, \eta_p; h_1, \dots, h_p\} \equiv M\{\eta, h\} = \bigcup_1^p S(h_k, \eta_k)$$

ponthalmazt. Ennek a komponensei valós tengellyel párhuzamos egyenesek (ha a h_k számok közt szerepel $+\infty$), és valós tengellyel párhuzamos sávok (ha nem mindegyik h_k szám egyenlő $+\infty$-nel). E halmaz lezárása,

$$\overline{M}\{\eta, h\} = \bigcup_1^p \bar{S}(h_k, \eta_k)$$

párhuzamos egyenesek és zárt sávok összessége, amelyek csak a végtelen távoli pontban metszik egymást. Nyilvánvaló, hogy az $\overline{M}\{\eta, h\}$ zárt halmaz $C\overline{M}\{\eta, h\}$ kiegészítő halmaza tartalmaz minimális $\frac{\pi}{\varrho_M}$ szélességű sávot. A ϱ_M szám a $C\overline{M}\{\eta, h\}$ halmaz metrikus jellemzőjéül szolgálhat. Az adott $M\{\eta, h\}$ halmaznak feleltessük meg a $(-\infty, \infty)$ intervallumban fekvő

$$E\{\eta_1, \dots, \eta_p; h_1, \dots, h_p\} \equiv E\{\eta, h\} = \bigcup_1^p e_k$$

zárt halmazt.

Jelölje $\tilde{S}(h_k, \eta_k)$ az $S(h_k, \eta_k)$ sáv pontjaiból álló halmazt, ill. az üres halmazt attól függően, hogy $h_k < +\infty$ vagy $h_k = +\infty$.

Feltéve, hogy a h_k számok közül legalább az egyik nem $+\infty$, azt találjuk, hogy az

$$\tilde{M}\{\eta, h\} = \bigcup_1^p \tilde{S}(h_k, \eta_k)$$

nyílt halmaz tartalmazza az $M\{\eta, h\}$ halmaz összes belső pontjait. Végül legyen

$$\tilde{e}_k = \begin{cases} e(|v-\eta_k|) < \dfrac{\pi}{2h_k}, & 0 < h_k < +\infty, \\ e(v=\eta_k), \quad h_k = +\infty; \end{cases}$$

ekkor az

$$\tilde{E}\{\eta, h\} = \bigcup_1^p \tilde{e}_k \subset E\{\eta, h\}$$

halmaz az $E\{\eta, h\}$ halmaz összes izolált és belső pontjaiból áll.

Azt fogjuk mondani, hogy a $G(w)$ függvény a $H_2^{(\eta_1, \ldots, \eta_p)}[h_1, \ldots, h_p]$ osztályhoz tartozik, ha az $M\{\eta, h\}$ halmazon van értelmezve és eleget tesz az

$$\text{A)} \qquad \sup_{v \in \tilde{E}\{\eta, h\}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |G(u+iv)|^2 du \right\} < +\infty,$$

feltételnek, abban az esetben pedig, amikor $\tilde{M}\{\eta, h\}$ nem üres, még az alábbi kiegészítő feltételnek is:

B) A $G(w)$ függvény analitikus az $\tilde{M}\{\eta, h\}$ halmaz minden komponensén, vagyis mindegyik $S(\eta_k, h_k)$ $(0 < h_k < +\infty)$ sávon.

Tegyük fel, hogy $G(w) \in H_2^{(\eta_1, \ldots, \eta_p)}[h_1, \ldots, h_p]$, és tekintsük a

$$v_{(\pm)}^{(k)}(\tau; G) = \frac{e^{\mp i\frac{\pi}{4}}}{2\pi} \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\pm i\tau e^{u\varrho}} - 1) e^{-\frac{u\varrho}{2}} G\left(u + i\left(\eta_k \pm \frac{\pi}{2h_k}\right)\right) du \tag{2.14}$$

függvényeket, valamint a következő két operátort:

$$\begin{aligned} L_\varrho^{*(k)}\left(\frac{u+iv}{\varrho}; G\right) \equiv{}& e^{-\frac{u}{2}} \frac{d}{du} e^{\frac{u}{2}} \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma_k}} e^{\frac{u+iv}{\varrho}} \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{3}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-1)}^{(k)}(\tau; G)\, d\tau + \\ &+ e^{-\frac{u}{2}} \frac{d}{du} e^{\frac{u}{2}} \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma_k}} e^{\frac{u+iv}{\varrho}} \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{3}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}^{(k)}(\tau; G)\, d\tau, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} L_\varrho^{(k)}(w; G) ={}& \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma_k}} e^{w} \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{1}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}^{(k)}(\tau; G)\, d\tau + \\ &+ \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma_k}} e^{w} \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{1}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}^{(k)}(\tau; G)\, d\tau, \end{aligned} \tag{2.15'}$$

ahol $\frac{1}{\gamma_k} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{h_k}$ $(k = 1, \ldots, p)$ és $\varrho > 0$ tetszés szerinti szám.

Az $L^2(0, +\infty)$ osztályból vett függvények bármely $\{{}_{(\pm)}^{(k)}v(\tau)\}_1^p$ rendszerére értelmezzük még az alábbi operátorokat:

$$\begin{aligned} R_\varrho^{*(k)}\left(\frac{u+iv}{\varrho}\right) ={}& e^{-\frac{u}{2}} \frac{d}{du} e^{\frac{u}{2}} \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma_k}} e^{\frac{u+iv}{\varrho}} \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{3}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}^{(k)}(\tau)\, d\tau + \\ &+ e^{-\frac{u}{2}} \frac{d}{du} e^{\frac{u}{2}} \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma_k}} e^{\frac{u+iv}{\varrho}} \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{3}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}^{(k)}(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{2.16}$$

és

$$
(2.16') \quad R_\varrho^{(k)}(w) = \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma_k}} e^w \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{1}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}^{(k)}(\tau)\, d\tau + \int_0^\infty v_\varrho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma_k}} e^w \tau^{\frac{1}{\varrho}}; \frac{1}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}^{(k)}(\tau)\, d\tau.
$$

Igaz a következő

4. TÉTEL. *Legyen adva a w síkon egy*

$$M\{\eta, h\} \equiv M\{\eta_1, \dots, \eta_p; h_1, \dots, h_p\}$$

típusú halmaz, amelynek megfelel az

$$E\{\eta, h\} \equiv E\{\eta_1, \dots, \eta_p; h_1, \dots, h_p\} \subset (-\infty, \infty)$$

ponthalmaz. Legyen $\varrho \geqq \varrho_M$ tetszés szerinti szám. Ekkor:

1°. *A $H_2^{(\eta_1, \dots, \eta_p)}[h_1, \dots, h_p]$ osztály azokból és csak azokból a függvényekből áll, amelyek előállíthatók*

$$(2.17) \qquad G(u+iv) = \sum_{k=1}^{p} R_\varrho^{*(k)}(u+iv-i\eta_k), \qquad v \in E\{\eta, h\}$$

alakban. A (2. 17) *képlet a $G(u+iv)$ függvényt minden $u \in (-\infty, \infty)$ értékre meghatározza, ha v az $E\{\eta, h\}$ halmaz belső pontja, és majdnem minden $u \in (-\infty, \infty)$ értékre határozza meg, ha v határpont vagy izolált pont.*

Ha $\tilde{M}\{\eta, h\}$ nem üres, akkor a (2. 17) *képlettel definiált $G(w)$ függvény a következőképpen is előállítható:*

$$G(w) = \sum_{k=1}^{p} R_\varrho^{(k)}(w-i\eta_k), \qquad w \in \tilde{M}\{\eta, h\}.$$

2°. *Ha $G(w) \in H_2^{(\eta_1, \dots, \eta_p)}[h_1, \dots, h_p]$, akkor fennáll*

$$G(u+iv) = \sum_{k=1}^{p} L_\varrho^{*(k)}(u+iv-i\eta_k; G), \qquad v \in E\{\eta, h\},$$

mégpedig az u, v változók értékeire vonatkozó ugyanolyan kikötések mellett, mint a (2. 17) *képlet.*

Végül ha az $\tilde{M}\{\eta, h\}$ halmaz nem üres, akkor ezen a halmazon a $G(w)$ függvény előállítható az alábbi módon is:

$$G(w) = \sum_{k=1}^{p} L_\varrho^{(k)}(w-i\eta_k; G), \qquad w \in \tilde{M}\{\eta, h\}.$$

IRODALOM

[1] Paley, R. E. A. C., Wiener, N., *Fourier transforms in the complex domain.* New York, 1934.
[2] Джрбашян, М. М., Аветисян, А. Е.: Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, *Сибирский мат. журнал* **1** (1960) 383—426.
[3] Джрбашян, М. М., Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, *Известия АН СССР, сер. матем.*, **19** (1955) 133—190.
[4] Джрбашян, М. М., Об интегральных преобразованиях в комплексной области, *Доклады АН СССР* **159** (1964) 258—261.
[5] Джрбашян, М. М., Интегральные преобразования с ядрами Вольтерра, *Известия АН СССР, сер. матем.*, **24** (1960) 387—420.
[6] Titchmarsch, E. C., *Introduction to the theory of Fourier integrals.* Oxford, 1937.

Technikai szerkesztő: Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat nyomdába érkezett: 1970. VIII. 25. — Ívterjedelem: 17,15 (A/5) ív

70-4437 — Szegedi Nyomda

Ára: 37,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

FROM THE FOREIGHN LITERATURE

Megjelent 1971. V. 31.

Index: 26498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XX. KÖTET 3–4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1971

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XX. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Mathematicarum Hungarica.

RÉDEI LÁSZLÓ AKADÉMIKUS 70 ÉVES

1970. november 15-én töltötte be 70-edik születésnapját Rédei László akadémikus. A Magyar Népköztársaság Elnöki Tanácsa kiemelkedő tudományos és oktatói tevékenységéért Rédei László akadémikusnak a Munka Érdemrend arany fokozatát adományozta.

Az alábbiakban közöljük Rédei László akadémikus tudományos munkásságáról készült jegyzéket.

Könyvek

1. *Algebra.* 1. köt. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954. 642 p.
2. *Algebra.* 1. T. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 797 p. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. A. Reihe. Bd. 26. 1. T.)
3. *Algebra.* 1. Vol. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967, 823 p.
4. *Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach F. Klein.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965. 363 p.
5. *Foundation of Euclidean and non-Euclidean geometries according to F. Klein.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968. 395 p.
6. *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen.* Teubner, Leipzig, 1963. 228 p.
7. *The Theory of finitely generated commutative smigroups.* Pergamon Pr., Oxford, 1965. 353 p. (International series of monographs in pure and applied mathematics. 82.)
8. *Lückenhafte Polynome über endlichen Körpern,* Birkhäuser Verlag, Basel, 1970. (Sajtó alatt)

Cikkek

1. Az $x^{\varphi(p^{\alpha})}-1\equiv 0 \pmod{p^{\alpha}}$ congruentia primitív gyökének existencia tétele. *Szent István Akadémia Értesítője* (1921) 199—202.
2. Ein neuer Beweis des quadratischen Reziprocitätssatzes. *Acta Sci. Math.* **2** (1925) 134—138 és *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **155** (1927) 103—106.
3. A másodfokú képzetes számtest osztályszámáról. *Math. és Term. Tud. Értesitő* **44** (1927) 230—246.
4. Ein neuer Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **155** (1927) 103—106.
5. Über die Klassenzahl des imaginären quadratischen Zahlkörpers. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **159** (1928) 210—219.
6. A másodfokú valós számtest osztályszámáról és alapegységéről. *Math. és Term. Tud. Értesitő* **48** (1931) 648—682.
7. A másodfokú számtest osztályszámáról. *Math. és Term. Tud. Értesitő* **48** (1931) 683—707.
8. A másodfokú számtest osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai. *Math. és Term. Tud. Értesitő* **49** (1932) 338—363.
9. Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beiliebigen quadratischen Zahlkörpers (H. Reinhardttal közösen) *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **170** (1933) 69—74.
10. A másodfokú számtest osztálycsoportjának 8-cal osztható invariánsai. *Math. és Term. Tud. Értesitő* **50** (1934) 195—218.

11. A másodfokú számtest egyik tételének új bizonyítása. *Math. és Term. Tud. Értesítő* **50** (1934) 219—230.
12. Gauss egyik számelméleti tételének kibővítéséről. *A mezőtúri ref. gimn. Értesitőjéből* (1932/33).
13. Megjegyzés H. Rademacher úr megelőző dolgozatához. *Math. és Fiz. Lapok* **40** (1933) 35—39.
14. Megjegyzések K. Borsuk egyik geometriai tételéhez. *Mat. és Fiz. Lapok* **41** (1934) 36—40.
15. Felső korlát a másodfokú számtest abszulút osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai számára. *Mat. és Term. Tud. Értesítő* **51** (1934) 219—226.
16. A másodfokú számtest alapegységéről és az abszolút osztálycsoport 8-cal osztható invariánsairól. *Math. és Term. Tud. Ért.* **51** (1934) 227—259.
17. Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **171** (1934) 55—60.
18. Über der Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **171** (1934) 131—148.
19. Eine obere Schranke der Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppen im quadratischen Zahlkörper. *Journal. f. d. reine u. angew. Math.* **171** (1934) 61—64.
20. Ein kombinatorischer Satz, *Acta Sci. Math. Szeged* **7** (1934) 39—43.
21. Aufgabe 175. *Jahresbericht d. Deutschen Math. Ver.* **44** (1934) 69.
22. Ein asymptotisches Verhalten der absoluten Klassengruppe des quadratischen Zahlkörpers und die Pell'sche Gleichung. *Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver.* 1935. 77—78.
23. Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben. *Math. és Term. Tud. Ért.* **54** (1935) 45—116.
24. Über die Pell'sche Gleichung $t^2-du^2=-1$. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **173** (1935) 193—221.
25. Über einige Mittelwertwertfragen im quadratischen Zahlkörper. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **174** (1935) 15—55.
26. A $t^2-du^2=-1$ Pell-féle egyenletről. *Math. és Term. Tud. Ért.* **54** (1936) 1—44.
27. Néhány újabb kongruenciafeltétel a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának nyolccal osztható invariánsaira. *Math. és Term. Tud. Ért.* **54** (1936) 736—76.
28. Der Euklidesche Algorithmus in quadratischen Körpern. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **174** (1936) 192—205. (H. Behrbommal közösen)
29. Lösung der Aufgabe 175. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **46** (1936) 49—50.
30. A négyzetes maradékok eloszlásáról összetett modulus esetében. *Math. és Term. Tud. Ért.* **56** (1937) 54—88.
31. A másodfajú *D*-felbontásokról, *Math. és Term. Tud. Ért.* **56** (1937) 89—125.
32. Egy új számelméleti jel, alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére, I. rész. *Math. és Term. Tud. Ért.* **56** (1937) 807—847.
33. Másodfokú számtestek abszolut osztálycsoportjának 2-, 4- és 8-cal osztható invariánsai. *Math. és Term. Tud. Ért.* **56** (1937) 848—853.
34. Másodfokú számtestek abszolút osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsainak számosságára vonatkozó néhány középértékkérdés. *Math. és Term. Tud. Ért.* **57** (1938) 88—104.
35. Egy új számelméleti jel alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére, II. rész. *Math. és Term. Tud. Ért.* **57** (1938) 488—500.
36. Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper, I. *Journal für die reine und angewandte Math.* **180** (1938) 1—43.
37. Die Diophantische Gleichung $mx^2+ny^2=z^4$. *Aus den Monatsheften für Math. u. Phys.* **48** (1939) 43—60.
38. Algebrai számtestek ideálosztálycsoportjainak páros részéről. *Math. és Term. Tud. Ért.* **59** (1940) 829—841.
39. Euklides algoritmusáról valós másodfokú számtestekben. *Math. és Fiz. Lapok* **47** (1940) 78—90.
40. Konvex testek támasztófüggvényéről. *Math. és Term. Tud. Ért.* **60** (1941) 64—69.
41. Über den Fundamentalsatz der Abel'schen Gruppen von endlicher Ordnung, *Acta Sci. Math. Szeged* **10** (1941) 109—111.
42. Zur Gaussischen Theorie der Reduktion binärer quadratischen Formen. *Acta Sci. Math. Szeged* **10** (1941) 134—140.
43. Über den Euklidischen Algorithmus in reellquadratischen Zahlkörpern. *Journal für die reine und angewandte Math.* **183** (1941) 183—192.
44. Egy diophantosi approximációról az algebrai számok körében. *Math. és Term. Tud. Ért.* **61** (1942) 460—470.

45. Jelentés az 1942. évi Kőnig Gyula jutalomról. (HAJÓS GYÖRGY munkáinak ismertetése.) *Mat. és Fiz. Lapok* **49** (1942) 1—16.
46. A rácsparallelogrammákról. *Mat. és Fiz. Lapok* **49** (1942) 73—75.
47. Zur Frage des Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern. *Math. Ann.* **118** (1942) 588—608.
48. Zu einem Approximationssatz von Koksma. *Math. Zeitschrift* **48** (1942) 500—502.
49. Másodfokú számtestek gyűrűosztálycsoportjának páros részéről, a Pell-féle és az $rx^2+sy^2=z^{2n}$ diophantosi egyenletről, I. *Math. és Term. Tud. Ért.* **62** (1943) 13—34.
50. Másodfokú számtestek gyűrűosztálycsoportjának páros részéről, a Pell-féle és az $rx^2+sy^2=z^{2n}$ diophantosi egyenletről, II. *Math. és Term. Tud. Ért.* **62** (1943) 35—47.
51. Másodfokú számtestek gyűrűosztálycsoportjának páros részéről, a Pell-féle és az $rx^2+sy^2=z^{2n}$ diophantosi egyenletről, III. *Math. és Term. Tud. Ért.* **62** (1943) 48—62.
52. Kurze Darstellung des fünften Gauss'schen Beweises für den quadratischen Reziprozitätssatz. *Commentarii Math. Helv.* **16** (1943—44) 264—265.
53. Megjegyzés Waldapfel László dolgozatához. *Mat. és Fiz. Lapok* **50** (1943) 260—261.
54. Über die Klassengruppen und Klassenkörper algebraischer Zahlkörper. *Journal für die reine und angewandte Math.* **186** (1944) 80—90.
55. A hypergeometrikus sorok alkalmazása az $1-x^{p-1}$ Fermat-féle polinom bizonyos szorzatelőállításaira a p törzsmodulus szerint, kapcsolatban a négyzetes maradékok elméletével. *Math. és Term. Tud. Ért.* **62** (1944) 335—348.
56. A harmad- és negyedfokú egyenlet megoldása véges testeken. *Math. és Term. Tud. Értesítő* **62** (1944) 349—364.
57. Bemerkung zu einer Arbeit von R. Fueter über die Klassenkörpertheorie. *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1946) 37—38.
58. Über einige merkwürdige polynome in endlichen Körpern mit Zahlentheoretischen Beziehungen. *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1946) 37—38.
59. Zur Theorie der Gleichungen in endlichen Körpern. *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1946) 63—70.
60. Über eindeutig umkehrbare Polynome in endlichen Körpern. *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1946) 85—92.
61. Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern. *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1946) 96—105.
62. Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern". *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1947) 184—190.
63. Das „schiefe Produkt" in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören. *Commentarii Math. Helv.* **20** (1947) 225—264.
64. Algebraisch-Zahlentheoretische Betrauchtungen über Ringe. I. *Acta Math.* **79** (1947) 291—320. (SZELE TIBORral közösen).
65. Zwei Lückensätze über polynomen in endlichen Primkörpern mit Anwendung auf die endlichen Abel'schen Gruppen und die Gaussischen Summen, *Acta Math.* **79** (1947) 273—290.
66. Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski—Hajós. *Acta Sci. Math. Szeged* **13** (1949) 21—35.
67. O prjedsztavljenin csiszel 1, 2, ... N poszrjedsztvom raznosztjej. *Matematicseszkij Szbornik* **24** (66) (1949) 385—389. (RÉNYI ALFRÉDdal közösen).
68. Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heren. *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949) 42—50. (SZŐKEFALVI-NAGY BÉLÁval közösen).
69. Die Reduktion des gruppentheoretischen Satzes von Hajós auf den Fall von p-Gruppen. *Monatshefte für Mathematik, Wien* **53** (1949) 221—226.
70. Kurzer Beweis des Gruppentheoretischen Satzes von Hajós. *Commentarii Math. Helv.* **23** (1949) 272—282.
71. Die Primfaktoren der Zahlenfolge 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... *Portugaliae Math.* **8** (1949) 59—61.
72. Kurzer Beweis eines Satzes von Vandiver über endliche Körper. *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949) 99—100.
73. Die Ringe „ersten Ranges". *Acta Sci. Math. Szeged* **12** (1950) 18—29. (SZELE TIBORral közösen.)
74. Elementarer Beweis und Verallgemeinerung einer Reziprozitätsformel von Dedekind. *Acta Sci. Math. Szeged* **12** (1950) 236—239.
75. Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtung über Ringe, II. *Acta Math.* **82** (1950) 209—241.
76. Über die Anzahl der Potenzreste mod p im Intervall $(1, p)$. *Nieuw Archief voor Wiskunde Groningen* **23** (1950) 150—162.

77. Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen, *Acta Math.* **84** (1950) 129—153.
78. Endlich-projektivgeometrisches Analogon des Minkowskischen Fundamentalsatzes. *Acta Math.* **84** (1950) 155—158.
79. Die endlichen Gruppen ohne direkt unzerlegbare Untergruppen. *Math. Annalen* **122** (1950) 127—130.
80. Der Zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern. *Math. Annalen.* **122** (1950) 205—220. (FÁRY ISTVÁNnal közösen).
81. Ein Satz über quadratische Formen. *Math. Annalen* 122 (1950) 340—342.
82. Über das Dreieckpaar. *Studii si cercetari matematice* **1** (1950) 87—137.
83. On facterisable groups. *Acta Sci. Math. Szeged* **13** (150) 235—238.
84. Über die Wertverteilung des Jacobischen Symbols. *Acta Sci. Math. Szeged* **13** (1950) 242—246.
85. Über die Basen endlicher Gruppen. *Math. Zeitschr.* **53** (1951) 454—455.
86. Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **188** (1150) 201—227.
87. Einfacher Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes. *Math. Zeitschrift* **54** (1951) 25—26.
88. Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **1** (1950) 74—98.
89. A short proof of a theorem of Št. Schwarz concerning finite fields. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* **75** (1950) 211—212.
90. Über die endlichen nilpotenten Gruppen. *Monatshefte für Math.* **55** (1951) 200—205. (SZÉP JENŐvel közösen). Magyar nyelven: *Első Magyar Mat. Kongresszus Közl.*, Budapest.
91. Ein Beitrag zum Problem der Faktorisation von endlichen Abelschen Gruppen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **1** (1950) 197—207.
92. Die Einfachheit der alternierenden Gruppe. *Monatshefte für Math.* **55** (1951) 328—329.
93. Über eine Verschärfung eines zahlentheoretischen Satzes von Thue. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **2** (1951) 75—82.
94. Eine determinantenidentität für symmetrische Funktionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **2** (1951) 105—107.
95. Über gewisse Ringskonstruktionen durch schiefes Produkt. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **2** (1951) 185—189.
96. Véges nilpotens csoportok. *Első Magyar Mat. Kongresszus Közl.* 225—232. Akadémiai kiadó, 1952.
97. Über Ringe mit gemeinsamer multiplikativer Halbgruppe. *Commentarii Math. Helv.* **26** (1952) 146—151. (STEINFELD OTTÓval közösen).
98. Die Vollidealringe. *Monatshefte für Math.* **56** (1952) 89—95.
99. Die Verallgemeinerung des Schreierschen Erweiterungstheorie. *Acta Sci. Math.* **14** (1952) 252—273.
100. Über die Determinantenteiler. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952) 143—150.
101. Kurzer Beweis der Waringschen Formel. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952) 151—153.
102. Vollidealringe im weiteren Sinn, I. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952) 243—268.
103. Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie. *Acta Sci. Math. Szeged* **15** (1953) 7—11. (A. STÖHRrel közösen).
104. Die Existenz eines ungeraden quadratischen Nichtrestes mod p im Intervall $(1, p)$. *Acta Sci. Math. Szeged* **15** (1953) 12—19.
105. Eine Verallgemeinerung der Remarkschen Zerlegung. *Acta Sci. Math. Szeged* **15** (1953) 85—86. (SZÉP JENŐvel közösen).
106. Bedingtes Artinsches Symbol mit Anwendung in der Klassenkörpertheorie. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953) 1—29.
107. Die 2-Ringklassengruppe des quadratischen Zahlkörpers und die Theorie der Pellschen Gleichung. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953) 31—87.
108. Quadratische Zahlkörper und Theorie der Pellschen Gleichung, *Ber. Math. Tagung.* Berlin, 1953.
109. Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954) 169—195.
110/a. Csoportok és gyűrűk holomorfelmélete. *Magyar Tud. Akad. III. Osztály Közl.* **4** (1954) 25—48.
111. Über die Kantenbasen für endliche vollständige gerichtete Graphen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung* **4** (1954) 17—25)
112. Über das Kreisteilungspolynom. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954) 27—28.
113. Gegenseitige Schreiersche Gruppenerweiterungen. *Acta Sci. Math.* **15** (1954) 243—250. (STEINFELD OTTÓval közösen.)
114. Über die Ringe mit gegebenen Modul. *Acta Sci. Math.* **15** (1954) 251—254.

115. Zetafunktionen in der Algebra. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955) 5—25.
116. Neuer Beweis des Hajós'schen Satzes über die endlichen Abel'schen Gruppen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955) 27—40.
117. Die Gruppentheoretischen Zetafunktionen und der Satz von Hajós. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955) 271—279.
118. Hazai vizsgálatok a véges csoportok elméletében. *MTA III. Osztály Közl.* **5** (1955) 315—325.
119. Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa-Casadio. *Acta Sci. Math. Szeged* **16** (1955) 165—170.
120. Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen. *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956) 303—324.
121. Äquivalenz der Sätze von Kronecker—Hensel und von Szekeres für die Ideale des Polynomringes einer Unbestimmten über einem kommutetiven Hauptidealring mit Primzerlegung. *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956) 198—202.
122. Die einstufig nichtkommutativen endlichen Ringe. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 401—442.
123. Über die algebraisch-zahlentheoretische Verallgemeinerung eines elementargeometrischen Satzes von ZSIGMONDY. *Acta Sci. Math. Szeged* **19** (1958) 98—126.
124. Eine Bemerkung über die endlichen einstufig nichtkommutativen Gruppen. *Acta Sci. Math. Szeged* **19** (1958) 127—128.
125. Zur Theorie der Polynomideale über kommutativen nullteilerfreien Hauptidealringen. *Math. Nachr.* **18** (1958) 313—332.
126. Die Einstufig Nicht-Zeroringe und Verallgemeinerungen. *Abh. aus dem Math. Sem. der Univ. Hamburg* **22** (1958) 201—214.
127. Die Halbgruppen, deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind. *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959) 126—130. (POLLÁK GYÖRGYgyel közösen).
128. Neuer Beweis eines Satzes von Delone über ebene Punktgitter. *Journal London Math. Soc.* **34** (1959) 205—207.
129. Die einstufig nichtregulären Ringe. *Acta Sci. Math. Szeged* **20** (1959) 238—244.
130. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen über endlichen Körpern. *Acta Arithmetica* **5** (1959) 223—225.
131. Natürliche Basen des Kreisteilungskörpers, I. *Abh. aus dem Math. Semin. der Univ. Hamburg* **23** (1959) 180—200.
132. Ein spezieller Diskriminantensatz über Polynome. *Acta Sci. Math. Szeged* **20** (1959) 234—237.
133. Neumann János munkássága az algebrában és számelméletben. *Mat. Lapok* **10** (1959) 226—230.
134. Über die quadratischen Zahlkörper mit Primzerlegung. *Acta Sci. Math. Szeged* **21** (1960) 1—3.
135. Natürliche Basen des Kreisteilungskörpers. Teil II. *Math. Seminar der Univ. Hamburg* **24** (1960) 12—40.
136. Eine Ergänzung zu meiner Arbeit über gruppentheoretische schiefe Produkte. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **208** (1961) 144. p.
137. Hajós György 50. születésnapjára. *Mat. Lapok* **13** (1962) 217—227.
138. Ein Überdeckungssatz für endliche abelsche Gruppen im Zusammenhang mit dem Hauptsatz von Hajós. *Acta Sci. Math.* **26** (1965) 55—61.
139. Logische Dualität der Frobenius-Stickelbergerschen und Hajósschen Hauptsätze der Theorie der endlichen Abelschen Gruppen. *Acta Sci. Math.* **26** (1965).
140. Die neue Theorie der endlichen Abelsschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós. *Acta Sci. Math.* **26** (1965) 329—373.
141. Ein Gleichverteilungssatz für Systeme homogener Linearformen. *Acta Sci. Math. Szegediensis* **27** (1966) 41—43. (H. WEINERTtel közösen).
142. Verallgemeierung eines Satzes über homogene Linearformen. *Acta Math. Sci. Szegediensis* **27** (1966) 45—48. (H. WEINERTtel közösen).
143. Berichtigung zu meiner Arbeit „Die neue Theorie der endlichen Abel'schen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós". *Acta Math. Sci.* **17** (1966) 461.
144. Powers in Groups. *Reprinted from the American Math. Monthly* Vol 73. No. 9. November 1966.
145. Polynome mit eingeengtem Wertevorrat über Körpern. *Mat. Seminar der Univ. Hamburg* **33** (1969) 29—31.

TURÁN PÁL AKADÉMIKUS 60 ÉVES

1970. augusztus 18-án töltötte be 60-adik születésnapját Turán Pál akadémikus. Kiemelkedő tudományos és oktatói tevékenységéért a Magyar Népköztársaság Elnöki Tanácsa Turán Pál akadémikusnak a Munka Érdemrend arany fokozatát adományozta.

Az alábbiakban közöljük Turán Pál akadémikus tudományos munkásságának jegyzékét.

1. Über das zweite Hauptproblem der „Factorisation Numerorum" (SZEKERES GYÖRGY-gyel). *Acta Litt. ac Scient.* Szeged **6** (1933) 143—154.
2. On a problem in the elementary theory of numbers (ERDŐS PÁLlal). *Amer. Math. Monthly* **41** (1934) 608—611.
3. Az egész számok prímosztóiról. *Math. és Fiz. Lapok* (1934) 103—130.
4. On a theorem of Hardy and Ramanujan. *Journ. of the Lond. Math. Soc.* **9** (1934) 274—276.
5. Über die arithmetischen Mittel der Fourierreihen. *Journ. of the Lond. Math. Soc.* **10** (1935) 277—280.
6. Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan. *Journ. of the Lond. Math. Soc.* **11** (1936) 125—133,
7. Ein Zahlentheoretischer Satz (ERDŐS PÁLlal). *Mitteilungen der Forschungs-Instituts für Math. und Mech., Tomsk* **1** (1935) 101—103.
8. Über die Vereinfachung eines Landau'schen Satzes (ERDŐS PÁLlal). *Mitt. der Forsch. Inst. für Math. und Mech., Tomsk* **1** (1935) 154—147.
9. On some sequences of integers (ERDŐS PÁLlal). *Journ. of the Lond. Math. Soc.* **11** (1936) 261—264.
10. On Interpolation, I. (ERDŐS PÁLlal). *Ann. of Math.* **38** (1937) 142—155.
11. Über die Primzahlen der arithmetischen Progression, I. *Acta Litt. ac Scient. Szeged* **8** (1937) 226—235.
12. Über den Bloch'schen Satz (GRÜNWALD GÉZÁval). *Acta Litt. ac Sci. Szeged* **8** (1937) 236—240.
13. Egy szélsőértékfeladat a determinánselméletben (SZEKERES GYÖRGY-gyel). *Math. és Term. Tud. Értesítő* (1937) 796—806.
14. Über Interpolation (GRÜNWALD GÉZÁval). *Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa* (1938) 137—146.
15. Über die monotone Konvergenz der Cesaro-Mittel bei Fourier- und Potenzreihen. *Proc. of the Cambr. Phil. Soc.* **34** (1938) 134—143.
16. On Interpolation, II. (ERDŐS PÁLlal). *Ann. of Math.* **39** (1938) 702—724.
17. Über die Partialsummen der Fourierreihe. *Journ. of the Lond. Math. Soc.* **13** (1938) 278—282.
18. Über die Ableitung von Polynomen. *Compositio Math.* (1939) 88—95.
19. Über die Primzahlen der arithmetischen Progression, II. *Acta Litt. ac Scient. Szeged* **9** (1939) 187—192.
20. On uniformly dense distribution of certain sequences of points (ERDŐS PÁLlal). *Ann. of Math.* **41** (1940) 162—173.
21. Determinánsokra vonatkozó szélsőértékfeladatok. *Math. és Term. Tud. Értesítő* **59** (1940) 95—105.
22. On Interpolation, III. (ERDŐS PÁLlal). *Ann. of Math.* **41** (1940) 510—553.
23. Über die Verteilung der Primzahlen, I. *Acta Litt. ac Sci. Szeged* **12** (1941) 81—104.
24. Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról. *Math. és Fiz. Lapok* **48** (1941) 436—452.

25. On a problem of Sidon in additive number-theory and on some related problems (ERDŐS PÁLlal). *Journ. of London Math. Soc.* **16** (1941) 212—215.
26. Über die Wurzeln der Dirichletschen *L*-Functionen. *Acta Litt. ac Scient. Szeged* **10** (1943) 188—201.
27. On rational polynomials. *Acta Univ. Szeged* (1946) 106—113.
28. On a theorem of Littlewood. *Journ. of the London Math. Soc.* **21** (1946) 268—275.
29. Sur la theorie des fonctions quasi-analitiques, *Comptes Rendus Paris* (1947) 1750—1752.
30. On the gap-theorem of Fabry. *Hungarica Acta Math.* **1** (1947) 21—29.
31. On Riemann's hypothesis. *Acad. de Sciences de L'URSS Bull.* (1947) 197—262.
32. On power-series whose coefficients form a multiply monotonic sequence. *Lőw Immanuel emlékkönyv.* (1947) 300—305.
33. On some approximative Dirichlet polynomials in the theory of the zeta-function of Reimann. *Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mat.—Fys. Meddelelser.* **24** (1948) (No. 17) 1—36.
34. On certain exponential sums. *Indagationes Math.* **10** (1948) (Fasc. 2) 343—352.
35. On the strong summability of the Fourier-series. *Journ. of Indian Math. Soc.* **12** (1948) 8—12.
36. On some new questions on the distribution of prime-numbers (ERDŐS PÁLlal). *Bull. of Amer. Math. Soc.* **54** (1948) 371—378.
37. On some example in the theory of power series. *Bull. of Amer. Math. Soc.* **54** (1948) 932—936.
38. On a problem in the theory uniform distribution (ERDŐS PÁLlal). *Indagationes Math.* **10** (1948) (Fasc. 5.) 370—378. és 406—413.
39. On Descartes—Harriot's rule. *Bull. of Amer. Math. Soc.* **55** (1949) 797—800.
40. On the distribution of real-roots of almost periodical polynomials. *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949) 38—41.
41. Megemlékezés. *Matematikai Lapok* **1** (1950) 3—16.
42. Remark on a theorem of Fejér. *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949) 95—97.
43. Fejér Lipót matematikai munkássága. *Matematikai Lapok* **1** (1950) 160—170.
44. On a new method in the Analysis with applications. *Casopis pro pest. mat. a fys. roc.* **74** (1949) 123—131.
45. On the distribution of roots of polynomials (ERDŐS PÁLlal). *Ann. of Math. Vol.* **51** (1950) 105—119.
46. On the theory of mechanical quadrature. *Acta Univ. Szeged* **12** (1950) pars A. 30—37.
47. A számelmélet újabb eredményei a Szovjetunióban. *Matematikai Lapok* **1** (1950) 243—266.
48. On the remainder-term of the prime-number formula, I. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **1** (1950) 48—63.
49. On the zeros of the polynomials of Legendre. *Casopis propest. mat. a fys. Roc.* **75** (1950) 113—122.
50. On the remainder-term of the prime-number formula., II. *Acta Math. Hung.* **1** (1950) (Fasc. 4.) 155—166.
51. On approximative solution of algebraic equations. *Publ. Math. Debrecen* **2** (1951) 26—42.
52. A note on Fermat's conjecture. *Journ. of the Indian Math. Soc.* **15** Part A (March—June) (1951) 47—50. (Memorial Volume to S. Pillai.)
53. On a certain point of the kinetical gas theory (EGERVÁRY JENŐvel). *Studia Math.* (1951) 170—180.
54. On Carlson's theorem in the theory of rets-function of Riemann. *Acta Math. Hung.* **2** (1951) 39—73.
55. Magasabbfokú algebrai egyenletek közelítő megoldásáról. *MTA III. Osztály Közl.* **1** (1951) (2—4. füzet) 279—287.
56. A kinetikus gázelmélet bizonyos kérdéseiről. (EGERVÁRY JENŐvel). *MTA III. Osztály Közl.* **1** (1951) 2—4. füzet) 369—370.
57. Két bizonyítás Jánossy Lajos egy tételére. (RÉNYI ALFRÉDdal). *MTA III. Osztály Közl.* **1** (1951) (No. 2—4.) 3.
58. *A függvényfogalom bevezetéséről.* Litografált K. M. kiadás (1952).
59. Az egész számok bizonyos sorozatairól. *Középisk. Mat. Lapok* **8** (1954) 33—41.
60. On an application of the typical means in the theory of zeta-function of Riemann. *Comm. du Sém. Math. de l'Univ. de Lund. Tome suppl. ded. a M. Riesz* (1952) 239—252.
61. On a property of lacunary power-series. *Acta Litt. ac Scient.* **14** (fasc. 4.) (1952) 209—218.
62. On a trigonometrical sum. *Ann. de Soc. Pol. de Math.* **14** (1952) 155—161.
63. Az analízis egy módszerének újabb alkalmazásairól. *MTA III. Osztály Közl.* **2** (1952) 145—153.
64. Sur l'algebre fonctionelle. *Comptes Rendus Du Prem. Congr. des Math. Hong.* (1952) 264—290.

65. On the zeros of polinomials (RÉNYI ALFRÉDdal). *Acta Math. Hung.* **3** (Fasc. 4.) (1952) 275—284.
66. *Az analízis egy új módszeréről és annak alkalmazásairól.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.
67. *Über eine neue Methode der Analysis und ihre Anwendungen.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.
68. Steinhaus egy problémájáról. *Matematikai Lapok* **4** (1953) (No. 4.) 263—275.
69. A függvénytan és sorelmélet bizonyos érintkezési pontjairól. *Eötv. Lor. Tud. Egy. T. T. K. Évkönyve* (1952—53) 5—13.
70. On the theory of graphs. *Coll. Math.* **3** (1954) 19—30.
71. On a problem of K. Zarankiewicz (T. Sós VERÁval és KŐVÁRI TAMÁSsal), *Coll. Math.* **3** (1954) (Fasc. 1.) 50—57.
72. Hermite-expansion and strips for zeros of polinomials. *Archiv der Mathematik* **5** (1954) (Fasc. 1—3.) 148—152.
73. A kínai matematika történetének egy problémájáról. *Matematikai Lapok* **5** (1954) 1—6.
74. A Riemann-féle zétafüggvény gyökeiről (Székfoglaló előadás). *MTA III. Osztály Közl.* **4** (1954) (No. 3.) 357—368.
75. A second note on Fermat's conjecture (DÉNES PÉTERrel). *Publ. Math. Debr.* **4** (1955) (Fasc. 1—2.) 28—32.
76. Grünwald Géza élete és matematikai munkássága. *Matematikai Lapok* **6** (1955) 6—27.
77. On Lindelöf's conjecture, *Acta Math. Hung.* **5** (1954) (Fasc. 3—4.) 145—163.
78. On a new analytical method and its applications. *Coll. Math.* **3** (1955) (Fasc. 2.) 91—112.
79. On the role of the Lebesgue-functions in the theory of the Lagr. interp. (ERDŐS PÁLlal). *Acta Math. Hung.* **6** (1955) (Fasc. 1—2.) 47—66.
80. Notes on Interpolation, I. (SURÁNYI JÁNOSSAL) (On some interpolatorical properties of the ultrasph. polyn.)*Acta Math. Hung.* **6** (1955) 67—80.
81. On some new theorems in the theory of diophantine approximations (T. Sós VERÁval). *Acta Math. Hung.* **6** (1955) (No. 3—4.) 241—257.
82. On the instability of systems of differential equations. *Acta Math. Hung.* **6** (1955) (No. 3—4.) 257—271.
83. Faktoriálisos számrendszerbeli számjegyek eloszlásáról. *Matematikai Lapok* **7** (1956) (No. 1—2.) 71—76.
84. On a problem in the theory of determinants. *Acta Sinica* (1955) 411—423.
85. Remark on the zeros of characteristic equations. *Publ. Math. Debr.* **4** (1956) (Fasc. 3—4.) 406—410.
86. On the zeros of the zeta funciton of Riemann. *Report of an International Colloq. on zeta--functions. Bombay, 1956. Journ. of Indian Math. Soc.* p. 17—36.
87. Über eine neue Methode der Analysis. *Wiss. Zeitschr. der Humboldt-Univ. zu Berlin* (1955/56) 275—279.
88. Über eine Anwendung einer neuen Methode auf die Theorie der Riemannschen Zetafunktion. Ibid. p. 281—284.
89. Remark on the preceeding paper of J. W. S. Cassels. *Acta Math. Hung.* **7** (1956) (No. 3—4.) 291—295.
90. Notes on Interpolation, II. Explicit formulae (with J. BALÁZS). *Acta Math. Hung.* **8** (1957) (Fasc. 1—2.) 201—215.
91. Remark on the theory of the quasianalytical function-classes. *Publ. of. the Math. Institute of the Hung. Acad. Sci.* **1** (1956) (Fasc. 4.) 481—489.
92. *Az analízis egy új módszeréről és annak alkalmazásairól* c. könyv kibővített és átdolgozott kínai kiadása, 1956.
93. Über lakunäre Potenzreihen. *Revue de mathématiques pures et appliquées,* **1** (1956) 27—32.
94. On the so-called density-hypothesis in the theory of the zeta functions of Riemann, *Acta Arith.* **4** (1958) 31—56.
95. On an theorem of Erdős—Kac (RÉNYI ALFRÉDdal). *Acta Arith.* **4** (1958) 71—84.
96. Über die Potenzsummen komplexer Zahlen. *Archiv der Math.* **9** (1958) (Fasc. 1—2.) 59—64.
97. Bizonyos szélsőértékfeladatokról. *Középisk. Mat. Lapok* XVI (3—4) **16** (1958) (No. 3—4.) 65—69, ill. 97—101.
98. Notes on Interpolation, III. Convergence (with J. BALÁZS). *Acta Math. Hung.* **9** (1958) (Fasc. 1—2.) 195—214.
99. On an inequality. *Annales Univ. Sci. Bp. de R. Eötvös nom. Sect. Math.* **1** (1958) 3—6.
100. Remarks on the theory of diophantine approximation (with P. ERDŐS and P. SZÜSZ). *Coll. Math.* **6** (1958) 119—126.

101. Notes on Interpolation, IV. Inequalities. (with J. BALÁZS). *Acta Math. Hung.* **9** (1958) (Fasc. 3—4.) 243—258.
102. Notes on Interpolation, V. On the stability of interpolation (with E. EGERVÁRY). *Acta Math. Hung.* **9** (1958) (Fasc. 3—4.) 259—267.
103. A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence-circle. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad Serbe des Sci. Belgrade* (1958) 19—26.
104. To the analytical theory of algebraic equations. *Iz. na Matematicseszkaja Inst.* **3** (1959) 133—137.
105. Notes on Interpolation, VI. On the stability of the interpolation on an infinite interval (with E. EGERVÁRY). *Acta Math. Hung.* **10** (1959) (Fasc. 1—2.) 55—62.
106. Notes on Interpolation, VII. Convergence in infinite intervals (with J. BALÁZS). *Acta Math. Hung.* **10** (1959) (Fasc. 1—2.) 63—68.
107. Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. *Euler-Festband* **(1959)** 322—336.
108. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen über endlichen Körpern (RÉDEI LÁSZLÓval). *Acta Arith.* **5** (1959) (No. 2.) 223—225.
109. On the infinite product-representation of functions regular and novanishing in the unit circle. *Bull. de l'Acad. Pol. des Sci.* **7** (1959) (No. 8.) 481—486.
110. On a property of the stable or conditionally stable solutions of systems of non-linear differential equations. *Annali di Matem.* **48** (1959) 333—340.
111. A note on the real zeros of Dirichlet's L-function. *Acta Arith.* **5** (1959) (No. 3.) 309—314.
112. Nachtrag zu meiner Abhandlung „On some approximative Dirichlet-polynomials in the theory of zeta-function of Riemann". *Acta Math. Hung.* **10** (1959) (Fasc. 3—4.) 277—298.
113. A hatványsorok elméletének egy kérdéséről. *Matematikai Lapok* (1959) X. 3—4. (No. 3—4.) 278—282.
114. On the distribution of zeros of general exponential polynomials. *Publ. Math. Debr.* **7** (1960) 130—136.
115. A theorem on diophantine approximation with application to Riemann zeta-function. *Acta Szeged* **21** (1960) (Fasc. 3—4.) 311—318.
116. On an improvement of some new one-sided theorems of the theory of diophantine approximations. *Acta Math. Hung.* **11** (1960) (Fasc. 3—4.) 299—316.
117. Fejér Lipót 1880—1959. *Matematikai Lapok* 11 (1960) 8—18.
118. An extremal problem in the theory of interpolation (with P. ERDŐS). *Acta Math. Hung.* **12** (1961) 221—234.
119. Remark on a theorem of Erhard Schmidt. *Matematica Cluj.* **2** (1960) 373—378.
120. Sur la distribution des valeurs d'une function entière (ALPÁR LÁSZLÓval) *Publ. Math. Inst. Hung. Acad.* **6** (1961) Ser. A. (Fasc. 1—2.) 157—164.
121. On a density theory of U. V. Linnik, Ibid. p. 165—180.
122. On the eigenvalues of matrices. *Annali di Matem. pura ed appl.* **54** (161) 397—402.
123. On some further one-sided theorems of new type in the theory of diophantine approximation. *Acta Math. Hung.* **12** (1961) (Fasc. 3—4.) 455—468.
124. Notes on Interpolation, VIII. Mean convergence sin infinite intervals (BALÁZS JÁNOSsal). *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961) (Fasc. 3—4.) 469—474.
125. On some one sided theorems of the theory of diophantine approximations. *Journal of the Indian Math. Soc.* **24** (1960) 563—574.
126. On the monotone convergence of certain Riemann-sums (with G. SZEGŐ). *Publ. Math. Debr.* **8** (1961) (Fasc. 3—4.) 326—335.
127. Research problems. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961) Ser. A. (Fasc. 3.) 417—423.
128. A remark on Hermite—Fejér interpolation. *Ann. Univ. Sci. Bp. de R. Eötvös nom. Sect. Math.* **3—4** (1960—61). 369—377.
129. On Lindelöf's conjecture concerning Riemann zeta-function. *Illinois Journ. of Math.* **6** (1962) 95—97.
130. On some questions concerning determinants. *Annales Polon. Matem.* **12** (1962) 49—53.
131—133. The comparative theory of primes, I. (with S. KNAPOWSKI). *Acta Math. Hung.* **13** (1962) (Fasc. 3—4.) 299—314. II. Ibid. p. 315—342. III. Ibid. p. 343—364.
134. On a certain problem in the theory of power-series with gaps. *Pólya Festschrift* (1962) 404—409.
135. Egy komplex számok hatványösszegeire vonatkozó szélsőértékfeladatról és annak egy alkalmazásáról. *Matematikai Lapok.* **13** (1962) 279—288.
136. The comparative theory of primes, IV. (with S. KNAPOWSKI). *Acta Math. Hung.* **14** (1963) (No. 1—2.) 31—42.

137—138. The comparative theory of primes, V. (with S. KNAPOWSKI). *Acta Math. Hung.* **14** (1963) (Fasc. 1—2.), 43—64. VI. Ibid p. 65—78.
139. *Untersuchungen über Dirichlet. Polynomen.* Heft. No. 13. der Schriftenreihe der Institut für Mathematik. (1963) 71—79. Akad. Verlag Berlin, 1963.
140—141. The comparative theory of primes (with S. KNAPOWSKI), VII—VIII. *Acta Math. Hung.* **14** (1963) (Fasc. 3—4.) 241—250, 251—268.
142. Erdős Pál 50 éves. *Matematikai Lapok* **14** (1963) (No. 1—2.) 1—28.
143. Hermite-expansion and distribution of zeros of polynomials (MAKAI ENDRÉvel). *Publ. Math. Inst. Hung. Acad.* **8** (1963) Ser. A. (Fasc. 1—2.) 157—164.
144. Diofantikus approximáció és alkalmazott matematika. *Matematikai Lapok* **14** (1963) (No. 3—4.) 264—276.
145. Further developments in the comparative prime-number theory, I. (with S. KNAPOWSKI), *Acta Arith.* **9** (1964) 3—40.
146—147. On the distribution of values of a class of entire functions, I. (DANCS ISTVÁNnal). *Publ. Math. Debrecen* **11** (1964) (Fasc. 1—4.) 257—265., II. Uo. 255—272.
148. Further developments in the comparative prime-number theory, II. (with S. KNAPOWSKI). *Acta Arith.* **3** (1963) 293—314.
149. On the comparative theory of primes. *Trudi csetvertovo vszeszojuznovo matematicseszkovo szjezda, Leningrad,* 1961. T. II. p. 137—142. (megjelent 1965-ben).
150. A remark on the heat-equation. *Journ. d'Analyse Mathématique* **14** (1965) 443—448.
151. On an assertion of Cebysev (with S. KNAPOWSKI). *Journ. d'Analyse* **14** (1965) 267—274.
152. Notes on interpolation, IX. Approximative representation of Fourier-transform. (BALÁZS JÁNOSsal). *Acta Math. Hung.* T. XVI. Fasc. **16** (1965) (Fasc. 1—2.) 215—220.
153. Further developments in the comparative prime-number theory (with S. KNAPOWSKI). *Acta Arith.* **11** (1965) 115—127.
154. On the constructive theory of functions, III. (SZÜSZ P.-rel). *Studia Sci. Math. Hung.* **1** (1966) (Fasc. 3—4.) 315—332.
155. On some problems of a statistical group-theory, I. (ERDŐS PÁLlal). *Zeitschr. für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **4** (1965) (Heft. 2) 175—186.
156. Further developments in the comparative prime number theory, IV. Accumulation theorems for residue-classes representing quadratic non-residues mod k (S. KNAPOWSKIval). *Acta Arith.* **11** (1965) (Fasc. 2.) 147—162.
157. Further developments in the comparative prime number theory, V. The use of two-sided theorems (S. KNAPOWSKIval). Ibid. p. 193—202.
158. On the twin-prime problem, I. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **9** (1964) Ser. A. (Fasc. 3.) 247—262.
159. On the constructive theory of functions, I. (SZÜSZ PÉTERrel). *Publ. Inst. Hung. Acad. Sci.* **9** (1964) Ser. A. (Fasc. 3.) 495—502.
160. On a characterisation of Dirichlet's *L*-functions, *Annales Univ. Sci. Bp. de R. Eötvös nom. Sect. Math.* **8** (1965) 65—69.
161. A konstruktív függvénytan egy újabb irányáról (SZÜSZ PÉTERrel). *MTA III. Osztály Közl.* **16** (1966) (No. 1.) 33—46.
162. Az összehasonlító prímszámelmélet egyes problémáiról. *Matematikai Lapok* **17** (1966) (No. 1—2.) 19—32.
163. On the constructive theory of functions, II. (SZÜSZ PÉTERrel) *Studia Sci. Math. Hung.* **1** (1966) 65—70.
164. Further developments in the comparative prime number theory, VI. (S. KNAPOWSKIval). Acta Arith. **12** (1966) (Fasc. 1.) 85—96.
165. On the approximation of piecewise analytic functions by rational functions. *Szovremennie problemi teorii analiticseszkich funckcii Erevan, 1965,* p. 296—299. (megj. 1967.)
166. On the constructive theory of functions, III. (SZÜSZ P.-rel). *Studia Scient. Math. Hung.* **1** (1966) (Fasc. 3—4.) 315—322.
167. O nekotorich teoretiko-funkcionalnich metodach reseta v teorii csiszel. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **171** (1966) (No. 6.) 1289—1292.
168. A statisztikus csoportelmélet egyes problémáiról (ERDŐS PÁLlal). *MTA III. Osztály Közl.* **17** (1967) 51—58.
169. On some problems in the theory of mechanical quadrature. *Matematica, Cluj.* **8** (31) (1966) 181—192.
170. Some function theoretical sieve methods in the theory of numbers. *Amer. Math. Soc. Transl.,* 1967. p. 1661—1664.

171. On some problems of a statistical group-theory, II. (ERDŐS PÁLlal). *Acta Math. Hung.* **18** (1967) (Fasc. 1—2.) 151—163.
172. Remarks on the preceding paper of J. Clunie entitled „On equivalent power series". *Acta Math. Hung.* **18** (1967) (Fasc. 1—2.) 171—173.
173. On the twin-prime problem, II. *Acta Arith.* **13** (1967) 61—90.
174. On some problems of a statistical group theory, III. (ERDŐS PÁLlal). *Acta Math. Hung.* **18** (1967) (Fasc. 3—4.) 309—320.
175. On the twin-prime problem, III. *Acta Arith.* **14** (1968) (Fasc. 4.) 399—408.
176. On some problems of a statistical group-theory, IV. (with P. ERDŐS). *Acta Math. Hung.* **19** (1968) (Fasc. 3—4.) 413—436.
177. On an inequality of Cebysev. *Annales Univ. Sci. Bp. de R. Eötvös nom. Sect. Math.* **11** (1968) 15—16.
178. Algebrai egyenletek közelítő megoldásáról. *MTA III. Osztály Közl.* **18** (1968) 223—236.
179. Über die angenäherte Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen und Eigenwerten von Matrizen. *Berichte der IV. Int. Math. Kongress über Anwendungen der Math. in den Ingenieurwissensch. Weimar,* 1967, p. 209—216.
180. *Über einige Fragen der vergleichenden Primzahltheorie.* Abhandl. aus Zahlentheorie und Analysis (S. KNAPOWSKIval). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968. p. 159—171.
181. On the distribution of roots of Riemann zeta and allied functions, I. (HALÁSZ GÁBORral). *Journal of Number Theory,* **1** (1969) 122—137.
182. On a certain limitation of eigenvalues of matrices. *Aequationes Mathematicae* **2** (1969) (Fasc. 2—3.) 184—189.
183. On some statistical properties of the alternating group of degree *n*, (DÉNES JÓZSEFfel és ERDŐS PÁLlal). *L'Enseignement Mathématique,* **4** (1969) 89—99.
184. A remark on linear differential equations. *Acta Math. Hung.* **20** (1969) (Fasc. 3—4.) 357—360.
185. On a problem concerning the zeros of Dirichlet's *L*-functions. (Megjelenőben a *Publ. of the Ramanujan Institute* I. kötetében.)
186. *Fejér Lipót összegyűjtött munkáinak kiadása.* (Megjelenőben az Akadémiai Kiadónál.)
187. On some problems of a statistical group theory, V. (with P. ERDŐS). *Periodica Mathematica Hungarica* **1** (megjelenőben).
188. On some general problems in the theory of partitions, I. (with P. ERDŐS). *Acta Arith.* (megjelenőben).
189. Applications of graphtheory to geometry. (Megjelenőben a calgaryi egyetem 1969. június 1—14. között rendezett kombinatorikai kollokviuma előadásai kötetében.)
190. Zeta roots and prime numbers. (Megjelenőben a Bolyai János Mat. Társulat által 1968. április 4—8. között rendezett számelméleti kollokvium előadásai kötetében.)
191. Analysis and diophantine approximation. (Megjelenőben az Istituto di Alta Matematica (Roma) által 1968. december 11—15. között rendezett számelméleti kollokvium előadásai kötetében.)
192. On the distribution of roots of Riemann zeta and allied functions, II. (HALÁSZ GÁBORral). *Acta Math. Hung.* (megjelenőben).
193. On some connections between combinatorics and group theory. (Megjelenik a Bolyai János Matematikai Társulat által 1969. aug. 25—29. között rendezett kombinatorikai kollokvium előadásai kötetében.)
194. On a trigonometrical inequality. (Megjelenik a Bolyai János Mat. Társulat által 1969. aug. 23—szept. 2. között rendezett konstruktív függvénytani kollokvium előadáskötetében.)
195. On some recent results in the analytical theory of numbers. (Megjelenik az Amer. Math. Soc. 1969. júl. 6—21. közötti nyári számelméleti iskoláján tartott előadások kötetében.)
196. On some problems of a statistical group theory, VI. (with P, ERDŐS). (Megjelenik az Indian Math. Soc. S. Minakshishundaram emlékkötetében.)
197. Commemoration on Stanislas Knapowski. (Megjelenik a Wiadomosci Matematyczne-ben.)
198. On some applications of the graph theory, II. (ERDŐS PÁLlal, A. MÉIRrel és T. SÓS VERÁval). (Megjelenik az R. Rado jubileumi kötetben.)
199. Ortogonális polinomokra vonatkozó megjegyzések. *Matematikai Lapok* (sajtó alatt).

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA OSZTÁLYVEZETŐSÉGI BESZÁMOLÓJA*

Április 4-én ünnepeljük hazánk felszabadulásának 25. évfordulóját. E negyedszázad alatt gyors ütemű fejlődés ment végbe országunkban minden téren, a tudományos életben is. A Magyar Tudományos Akadémia teljes újjászervezésére 1949-ben került sor és ekkor vett lendületet az a folyamat, amelynek során hazánk legfőbb tudományos intézménye a társadalmi fejlődés lényeges tényezőjévé vált.

A felszabadulás 25. és az Akadémia újjászervezésének 20. évfordulója alkalmából a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának vezetősége azt a célt tűzte maga elé, hogy rövid áttekintést nyújt az Osztály keretében művelt matematikai, fizikai és csillagászati kutatások fejlődésének 25 évéről, ismerteti az Osztály két évtizedes tevékenységét és utal a jövő lényeges feladataira.

I.

Az elmúlt időszak *kutatási eredményei*nek ismertetése messze meghaladja egy szóbeli beszámoló kereteit, ezért most azokra nem térünk ki, hanem utalunk Szőkefalvi-Nagy Béla, Pál Lénárd és Detre László tagtársunk tanulmányaira, amelyek a Magyar Tudomány ünnepi számában fognak megjelenni. Jelen beszámoló főként a *szervezeti fejlődés* lényegesebb kérdéseit tekinti át.

1. Az Akadémia 1949-ben történt átszervezése után a kémiai és egyes geotudományok leválasztásával alakult ki a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának (III. Osztály) mai szervezete. Az Osztályra elsősorban az a feladat hárult, hogy összefogja és intézmények létrehozásával kiszélesítse a matematikai, fizikai és csillagászati kutatásokat, meghatározza azok főbb célkitűzéseit és biztosítsa kutatók nevelésének lehetőségeit. E feladatok megvalósítása keretében került sor 1950-ben az Alkalmazott Matematikai Intézet és a Központi Fizikai Kutató Intézet megalakítására.

Az Alkalmazott Matematikai Intézet létrehozásával — mint az elnevezés is jelzi — az Osztály szervezett formában biztosítani kívánta az alkalmazott matematikai kutatások művelését és a matematika eredményeinek a termelésben való alkalmazását. A matematikai kutatásoknak az ötvenes évek első felében — nem utolsósorban az Alkalmazott Matematikai Intézet tevékenysége nyomán — hazánkban végbemenő megerősödése és kiszélesedése, valamint az intézet néhány évi tapasztalata kialakította azt a nézetet, hogy az intézetet át kell szervezni az alapvető

* Elhangzott az 1970. évi akadémiai közgyűlés keretében február 3-án megtartott nyilvános osztályülésen.

kutatások tervszerű végzésére alkalmasabb és ugyanakkor a matematika különféle alkalmazásaira is jobb felkészültséget biztosító kutató intézetté. Ez az átalakítás 1955-ben következett be és azóta az intézet MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET elnevezéssel működik. Előzőleg az intézet mechanikai és szilárdságtani, kémiai, biztosítási és gazdasági matematikai stb. osztályokra tagozódott, jelenleg pedig az osztály-tagozódást a matematika fő ágai határozzák meg: valószínűségszámítás, matematikai statisztika, algebra, komplex függvénytan, differenciálegyenletek stb.

A KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET (KFKI) azzal a céllal alakult, hogy az addig szétszórtan, egyetemi tanszékeken folyó fizikai kutatásokat központosítsa és a korszerű kísérleti fizikai módszerek, eljárások kifejlesztésével új alapokat és lehetőségeket biztosítson a hazai fizikai kutatások számára. 1959-ben az intézet kettős felügyelet alá került, mely abban állt, hogy a személyi és gazdasági ügyekben a felügyeletet az *Országos Atomenergia Bizottság,* a tudományos irányítást pedig az Akadémia és az Atomenergia Bizottság együttesen gyakorolta. 1967. január 1. óta az Intézet teljes felügyeletét és irányítását újból az Akadémia látja el. — Az intézet tudományos osztályai 1950-ben az egyetemi tanszékeken dolgozó kisszámú képzett fizikus érdeklődési körének megfelelően alakultak: elméleti fizikai, kozmikus sugárzási, spektroszkópiai, atomfizikai, radiológiai osztály és elektromágneses hullámok osztálya. 1955-ben elindult az intézetben a kutató reaktor fogadására való felkészülés, és ezzel egyidőben új tudományos program bontakozott ki, amely neutronfizikai, reaktorfizikai, szilárdtestfizikai, magkémiai és elektronikai kutatásokat foglalt magában. A program alakulása szervezeti változtatást vont maga után, amelynek során az intézet létesítésekor megalakult egyes osztályok megszűntek, ill. átszervezésükre került sor. 1958 után erősödött az intézetben az alkalmazott kutatás, és a szükségletnek megfelelően elektronikus műszerek kísérleti gyártásával foglalkozó termelő laboratórium is alakult. Növekedett az elméleti és kísérleti kutatások összeforrottsága és a munka komplexitása is. A kezdetben csaknem kizárólag alapkutatással foglalkozó intézetből fokozatosan alap-, alkalmazott és fejlesztő kutatást végző, sőt bizonyos termelési feladatokat is ellátó komplex intézet lett, amelyben ma már nemcsak a szűkebb értelemben vett fizikai (magfizika, nagyenergiájú fizika, szilárdtestfizika), hanem egyes műszaki tudományok (reaktortechnika, elektrotechnika stb.) és más határtudományok (magkémia, sugárvédelem stb.) területén is jelentős kutatómunka folyik.

Az 1929-ben létesített és a Közoktatásügyi Minisztériumhoz tartozó CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZETet az Akadémia 1951-ben átvette és a III. Osztály irányítása alá helyezte. Az intézet Napfizikai Osztályából 1958-ban Debrecenben önálló NAPFIZIKAI OBSZERVATÓRIUMot létesítettünk. 1959-ben országos szputnyikmegfigyelő hálózatot szerveztünk, amelynek felügyeletét kezdettől fogva a CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZET látja el. Ehhez jelenleg négy állás tartozik: a budapesti, a bajai, a szombathelyi és a miskolci állomás. Mátrában, Piszkéstetőn 1962-ben új hegyi obszervatórium létesült, amely ma Közép-Európa egyik legkorszerűbb csillagászati intézménye. Csillagászati obszervatóriumaink főként a változócsillagokkal, stellárstatisztikai, csillagászati magnetohidrodinamikai és kozmológiai kutatásokkal, továbbá a mesterséges holdak megfigyelésével kapcsolatos légköri és geodéziai vizsgálatokkal, valamint a naptevékenység egyes időszerű kérdéseivel foglalkoznak.

1954-ben — leválasztva a Központi Fizikai Kutató Intézet Elméleti Fizikai Osztályát — létrehoztuk az ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÓ CSOPORTOT, amelynek munkássága főként az atom statisztikus elméletének kiépítésével vívott ki elismerést.

Ugyancsak 1954-ben — a debreceni tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében kifejlődött magfizikai iskolára alapítva — megalakult Debrecenben az ATOMMAG KUTATÓ INTÉZET (ATOMKI). Fő kutatási területe a kisenergiájú kísérleti magfizika, különösképpen a radioaktív sugárzások magspektroszkópiai vizsgálata. Emellett jelentős eredmények születtek az intézetben az urán és más nagy atomsúlyú kationokkal kapcsolatos geokémiai vizsgálatok során.

1956-ban a műszaki kibernetikai kutatások megindítása céljából az Akadémia KIBERNETIKAI KUTATÓ CSOPORTot létesített, amelyet a korszerű számítástechnika alkalmazásaival kapcsolatos kutatások fokozottabb fejlesztése érdekében az Osztály 1960-ban SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTtá szervezett át.

1960-ig 17 egyetemi intézetben, ill. tanszéken végzett kutatómunkát részesítettük anyagi és részben személyi támogatásban. 1960-ban az Osztály elhatározta e támogatás koncentrálását. Ennek megfelelően 11 tanszék támogatását átadtuk a Művelődésügyi Minisztériumnak és egyidejűleg 4 egyetemi fizikai intézetben a következő akadémiai tanszéki kutatócsoportokat létesítettük: ELMÉLETI FIZIKAI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT *(az Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében)*, KRISTÁLYNÖVEKEDÉSI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT *(a Budapesti Műszaki Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetében)*, KRISTÁLYFIZIKAI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT *(a Budapesti Semmelweis Orvostudományi Egyetem Biofizikai Intézetében)*, LUMINESZCENCIA ÉS FÉLVEZETŐ TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT *(a Szegedi József Attila Tudományegyetem Kisérleti Fizikai Intézetében)*. Az elméleti fizikai csoport főként a kvantumtérelmélet, a másik három pedig elsősorban a szilárdtestfizika területén ért el sikereket. — Az előzőkön kívül 1967-ben — leválasztva a Matematikai Kutató Intézet szegedi osztályait — megalakítottuk Szegeden az ANALÍZIS, valamint a MATEMATIKAI LOGIKAI ÉS AUTOMATAELMÉLETI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORTokat amelyek a hazai matematikai iskolák ugyancsak jelentős reprezentánsai.

Csupán az Osztály intézményei, ill. az ezek által művelt területek nem adnak teljes képet a hazai matematikai és fizikai kutatásokról. Mind a matematika, mind a fizika fejlődésében az elmúlt 25 év alatt ugyancsak jelentős szerepet játszottak az egyetemi tanszékek is, amelyek száma felszabadulásunk óta megsokszorozódott. A fizikával kapcsolatban utalnunk kell az Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának felügyelete alatt működő intézetekben — elsősorban a MŰSZAKI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETben — és több ipari kutató intézetben folyó kutatásokra is. Részletesebb tájékoztatás a bevezetőben már említett tanulmányokban található.

A közeljövőben Osztályunk nem szándékozik új intézményeket létesíteni, hanem a meglevők korszerűsítésére és fejlesztésére gondolunk. Ezzel kapcsolatban megemlítünk néhány folyamatban levő, ill. soron következő nagyobb beruházást. Az Akadémia a közelmúltban nagyteljesítményű elektronikus számológépet rendelt, amelynek üzembehelyezésére a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTban ez év utolsó negyedében kerül sor. Az ATOMMAG KUTATÓ INTÉZETben 5 MeV-os generátor épül. A negyedik ötéves terv keretében a CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZET részére újabb teleszkópot vásárolunk és ennek elhelyezésére új kupolát építünk. Ugyancsak a negyedik ötéves terv keretében a NAPFIZIKAI OBSZERVATÓRIUM részére egyedi gyártmányú koronográfot és spektrográfot szerzünk be a Szovjetunióból, és a műszerek elhelyezése céljából bővítjük az obszervatórium épületét. A CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZET és a NAPFIZIKAI OBSZERVATÓRIUM beruházásához igen jelentős anyagi támogatást biztosít az ŰRKUTATÁSI KORMÁNYBIZOTTSÁG is. — Az Osztály az utóbbi években többször foglalkozott az akadémiai tanszéki kutató csoportok elhelyezési problémáival. A Szegeden működő csoportok az Akadémia szegedi székházában néhány éve méltó elhelyezést nyertek, a Budapesten működő kristályfizikai kutató csoportok munkáját azonban ma már csaknem megbénítja a korszerűtlen elhelyezés és zsúfoltság. Remélhető, hogy az elkövetkezendő egy-két évben ez a probléma is megoldódik azáltal, hogy az Akadémia több, hasonló helyzetben levő kutatóhely részére a Budaörsi úton kutatótelepet létesít. A tervek szerint itt nyer majd új elhelyezést az ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÓ CSOPORT is.

Az új intézmények száma és mérete, a régebben is művelt tudományágak megerősödése és az újak kifejlődése önmagában is nagy átalakulásról tanúskodik. Az átalakulás azonban nemcsak egyszerű mennyiségi fejlődést jelent. Az elmúlt 25 év alatt ugyanis a hazánkban végbemenő társadalmi átalakulás gyökeresen megváltoztatta a tudomány társadalmi szerepét és ezzel egy időben az egész világon végigsöpört és napjainkban is tart egy technikai, tudományos és műveltségi forradalom. Mindez együtt az Osztály tudományos életében is tükröződik és olyan problémákat vet fel, amilyenek azelőtt egyáltalán nem jelentkeztek, vagy legalábbis egy generáción belül nem léptek föl. — Egymás után jelennek meg napjainkban új ágak a matematikában, fizikában, csillagászatban és tanúi vagyunk annak is, hogyan alakulnak ki új diszciplinák más tudományokkal kapcsolatban, éppen e három tudományterület fejlődésének eredményeként. — A matematika, fizika és csillagászat mindig lényeges szerepet játszott a társadalom fejlődésében, gazdasági és szemléleti vonatkozásban egyaránt. Nyilvánvaló a társadalmi visszahatás is, amely mindenkor megtermékenyítette a tudományos munkát. E kölcsönhatás azelőtt lassúbb volt és konzekvenciái csak több generáció után jelentkeztek. Napjainkban viszont közvetlenül tapasztalhatjuk, hogyan válik a tudomány termelő erővé, társadalomformáló tényezővé és nap mint nap jelentkezik a társadalmi igény is gyakran konkrét, megoldandó feladatok formájában. A fejlődés felgyorsulása és a tudomány közüggyé válása következtében előttünk változik a kutatási problémák társadalmi súlya, amely körülmény szükségképpen befolyásolja a kutatási célokat és feladatokat.

Az Osztály az elmúlt időszakban igyekezett gondot fordítani arra, hogy a mindenkor időszerű követelményeknek megfeleljen. Ezért — amint az előzőekben adott áttekintés is mutatta — több ízben foglalkoztunk intézeteink feladataival és az ezekkel összefüggő szervezeti kérdésekkel. Törekedtünk arra is, hogy a különböző helyeken folyó kutatásokat együtt tekintsük, a kapcsolatok kiépítését, programok koordinálását észrevételekkel, javaslatokkal elősegítsük. A közeljövőben is több kérdés vár tisztázásra, pl. a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT új feladatköre most van kialakulóban, foglalkozni kell a hazai magfizikai kutatások jövőjével. *A legfontosabb azonban az, hogy valamennyi területen fokozzuk törekvésünket, hogy erőinket minél inkább a társadalmi igények kielégítését szolgáló kutatásokra koncentráljuk.* E feladat különös megfontolást és az egyes területeken gondos elemzést igényel.

A társadalmi igényekkel összefüggésben kell tekintenünk azokat a lényeges problémákat is, amelyek a közelmúltban továbbfejlődésünkkel kapcsolatban felvetődtek. Ezek egyike az, hogy a kísérleti kutatásokkal foglalkozó munkahelyeken a berendezések, műszerek értéke a használódás és az elavulás következtében erősen csökken és a jelenlegi beruházási helyzetben nemcsak a dinamikus, de még az egyszerű szinttartás sem biztosítható. Aktuális probléma a kutatómunka finanszírozása módjának a helyes megválasztása is. Egyes területeken — kísérletképpen — a közeli időben elkezdődik a feladat-finanszírozás. Reméljük, hogy ezáltal lehetőség nyílik néhány fontos kutatás valóban kiemelt kezelésére és a kutatói személyi állomány megmerevedésének feloldására is.

2. Az Osztály egyik döntő feladata volt a *tudományos káderutánpótlás* megszervezése. Az 1950-es évek elején, amikor intenzívebben megindult a kutatások fejlesztése, csak viszonylag kis létszámú egyetemi oktatógárdára lehetett támaszkodni. Közülük kerültek ki megalakuló intézeteink első munkatársai. Csakhamar azonban a fiatal egyetemi oktatók és a tanulmányaikat befejező, tehetséges egyetemi hallgatók közül a bel- és külföldi aspirantúra különböző formái révén sokan kaptak lehetőséget arra, hogy viszonylag kedvező körülmények között tudományos munkával foglalkozzanak. Többen azóta eredményes kutatókká fejlődtek és ma kutatóintézeteink és egyetemi tanszékeink vezető munkatársai között találjuk őket.

Az aspiránsképzés megindulását követő első években minden arra alkalmas pályázót, választott kutatási területétől függetlenül, felvételre javasoltunk, abból kiindulva, hogy a hozzánk tartozó szakterületek mindegyikében káderhiány van. A hatvanas években már lehetőség volt e téren is a tervszerűség fokozására. Ennek eredményeként az utóbbi években megvédett disszertációk között szép számmal vannak olyanok, amelyek a kiemelt kutatási területekhez kapcsolódnak, vagy az alkalmazások szempontjaiból is fontosak. Megállapíthatjuk, hogy a tudományos fokozatok elnyerésére való törekvés az elmúlt időszakban komoly ösztönző tényező volt a fiatalok munkájában.

A tudományos káderutánpótlásnak azonban az aspiránsképzés nem kizárólagos formája. Jelentősebb az a szakmai és nevelő tevékenység, amely intézményeinkben folyik, és amelyből általában aktívan veszik ki részüket a kutatóhelyek különböző beosztású vezetői. Vezetői beosztásban dolgozó tudósaink, kutatóink többsége hivatásszeretettől áthatva, lelkesen és rendszeresen foglalkozik a munkatársakkal. Ugyancsak jelentős szerepe van a szakmai továbbfejlődésben az intézményeink többségében rendszeresen megtartott szemináriumoknak, továbbá a nyári iskoláknak, külföldi tanulmányutaknak is. Ma már szerénytelenség nélkül elmondhatjuk, hogy mindhárom tudományterületen külföldön is elismert iskolák alakultak ki. Ennek következménye az is, hogy intézményeink ma már a különböző tudományos vezetői állásokra — csekély kivétellel — saját nevelésű munkatársakat tudnak állítani.

Az utóbbi években jelentősen nőtt a kutatók nyelvtudása; ehhez többek között értékes segítséget nyújtottak az évenként megszervezett akadémiai nyelvtanfolyamok.

Az Akadémia az intézetek tudományos színvonalának emelése érdekében az utóbbi időben egyre szigorúbb követelményeket támaszt a kutatási munkakörök betöltőivel szemben. Ezt szolgálja a személyi minősítés rendjének a közelmúltban történt szabályozása is, a határozott időtartamra szóló kinevezési rendszer pedig a vezetői és kutatási munkakörök betöltésének megmerevedését hivatott kiküszöbölni. Az 1968 végén és 1969 elején lebonyolított személyi minősítések tapasztalatai azt mutatták, hogy az intézményekben dolgozó kutatók többségének szakmai felkészültsége, a munkához való viszonya, hivatásszeretete jó, ideológiai-politikai felkészültsége kielégítő. Ugyancsak a minősítések eredményeként az is megállapítható, hogy intézményeink vezető beosztású dolgozói általában rendelkeznek a vezetéshez szükséges adottságokkal, megfelelnek a vezetőkkel szemben támasztott követelményeknek. Intézményeinkben az utóbbi egy-két évben bizonyos egészséges mértékű fluktuáció mutatkozik a kutatók körében. Kár, hogy ez a jelenség egyelőre inkább véletlenszerű, nem pedig tudatos káderpolitika következménye. A népgazdaság céljait szolgáló helyes káderpolitika kialakítása és érvényesítése sürgős feladat és ebben az Akadémiának sajátos szerepe van: olyan káderképző iskolának kell lennie, amely nemcsak saját feladatai ellátására, hanem más intézmények számára is egyre magasabb tudományos színvonalat képviselő kádereket képez.

3. Az Osztály fontos feladatának tekintette a *tudományos eredmények közlésének* biztosítását. Ennek érdekében az *Osztály Közleményei* mellett 1950-ben az *Acta Mathematica Hungarica* és az *Acta Physica Hungarica,* majd 1953-ban a *Magyar Fizikai Folyóirat* megindítására került sor. 1966-tól kezdődően *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* címmel az Osztály második idegen nyelvű matematikai folyóiratot is megjelentet, amelynek elsőrendű feladata, hogy a matematika alkalmazásaival foglalkozó cikkeknek helyet biztosítson.

Folyóirataink tudományos színvonala igen jó. Az idegen nyelvűek külföldi szakkörökben ma már elismertek, és nagy számban kapunk dolgozatokat közlés céljából neves kölföldi kutatóktól is. Az *Acta Mathematica* több évfolyamát a hatvanas évek közepén az Akadémiai Kiadó külföldi rendelésre újra nyomtatta. — Folyóiratkiadásunk jelenlegi problémái főleg abból adódnak, hogy a kutatómunka fejlődése következtében a közlési igény nő, a folyóiratok terjedelme viszont megindulásuk óta alig változott. Gyakran említett és indokolt észrevétel az is, hogy folyóiratainkban a dolgozatok átfutási ideje meglehetősen hosszú.

Az elmúlt 20 év alatt jelentős fejlődést értünk el a *könyvkiadás* területén is. Könyvkiadási tevékenységünk az ötvenes évek elején főleg idegen nyelvből lefordított művek megjelentetésére korlátozódott, csakhamar azonban előtérbe kerültek a hazai művek és könyvkiadási tervünk ma már döntően magyar szerzők munkáit tartalmazza. 1951 óta összesen 95 művet jelentettünk meg. — A matematikai művek száma 53, ebből fordítás 18. A magyar szerzők által írt 35 monográfia túlnyomó többségében idegen nyelven jelent meg, ugyanaz a mű számos esetben két vagy több idegen nyelven, több kiadásban is. 1969-től kezdődően *Disquisitiones Mathematicae Hungaricae* címmel matematikai monográfia-sorozat kiadását határoztuk el. A sorozat, amely hazai szerzőktől származó, magyar vagy idegen nyelvű matematikai monográfiákat foglal majd magába, az Akadémiai Kiadó matematikai könyvsorozata lesz és legalább részleges képet fog adni a hazai matematikusok munkásságáról. — A fizikai művek száma 41, ebből 23 fordítás. A magyar szerzők által írt 18 fizikai tárgyú mű közül 9 jelent meg idegen nyelven. — A csillagászat területén eddig egy mű (fordítás) került kiadásra.

Szerénytelenség nélkül megállapíthatjuk, hogy a magyar szerzők munkái, különösen a matematikai művek jelentős hazai és nemzetközi sikert arattak. Az eredmények mellett azonban nehézségeink is vannak. Az egyik az, hogy egyes fontosabb területeken, mint pl. a differenciálegyenletek elmélete vagy a szilárdtestek fizikájának bizonyos területei, általában nem vállalkoznak kutatóink könyvírásra, pedig megítélésünk szerint ehhez a személyi feltételek megvannak. Sajnálatos körülmény az is, hogy a kiadásra már jóváhagyott művek kéziratai — különösen a fizika vonatkozásában — több esetben hosszú ideig készülnek el.

II.

Az Osztály az elmúlt időszakban kettős feladatot töltött be: mint tudósok testülete véleményt alakított ki, állást foglalt, ill. határozott időszerű szakmai és tudománypolitikai kérdésekben, mint államigazgatási szerv pedig évente néhányszor tízmillió forinttal gazdálkodott, több intézmény felügyeletét látta el. E kettős jellegnek megfelelően alakult ki az Osztály munkamódszere, testületi hálózata.

Az *Osztályvezetőség* rendszeresen igyekezett kidolgozni az Osztály működésének tudománypolitikai irányelveit, főbb vonalakban irányította és ellenőrizte az intézmények működését, megvitatta és jóváhagyta, ill. véleményezte a kutatási terveket és beszámolókat, összeállította a fejlesztési terveket, határozott, ill. állást foglalt az Osztályt érintő anyagi ügyekben. Rendszeresen foglalkozott többek között a hatáskörébe tartozó tudományterületek belföldi és nemzetközi kapcsolataival, a könyv- és folyóiratkiadási ügyekkel, a MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTÉRIUM felkérésére véleményezte az egyetemi tanári és docensi pályázatokat stb.

Az Osztályvezetőség munkáját a *Matematikai, a Fizikai és a Csillagászati Bizottság* javaslataira, véleményére támaszkodva végezte. Az irányítás és ellenőrzés hatásosságának fokozása, a kutatási eredmények és tervek gondosabb elemzése érdekében szükségesnek mutatkozott az említett három szakbizottsághoz a tudományterületek egyes részterületeivel foglalkozó testületeket is szervezni. Ez az igény különösen a fizikai tudományok területén jelentkezett, és 1964-től kezdve a hazai fizikai kutatások fő irányainak megfelelően a következő *albizottságok és osztályközi, ún. komplex bizottságok* működnek:

Nagyenergiájú és Elemi Részecskék Fizikájának Albizottsága,
Magfizikai Albizottság,
Atomhéjfizikai Albizottság,
Spektroszkópiai Albizottság (a VI. és VII. Osztállyal közös testület),
Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság (a VI. Osztállyal közös testület).

A mesterséges holdak megfigyelésére létesült állomások munkáját a *Csillagászati Bizottság*hoz tartozó *Szputnyikmegfigyelési Albizottság* koordinálja. A közelmúltban kezdte meg munkáját ugyancsak a *Csillagászati Bizottság* albizottságaként a *Szoláris—Terresztrikus Programok Albizottsága.* 1968-ban került sor a Matematikai Bizottsághoz tartozó *Operációkutatási és Számítástechnikai Albizottság* megalakítására. Az Osztály, annak érdekében, hogy a KFKI felügyeleti és testületi irányítását eredményesen megvalósíthassa, 1967-ben vezető tudósokból és népgazdasági szakemberekből álló testületet, KFKI-Bizottságot alakított, amely közvetlenül az Osztályvezetőségnek van alárendelve.

Külön szerkesztőbizottságok látják el az Osztály öt folyóiratának a szerkesztését. 1963-ig az aspirantúrával és a tudományos minősítéssel kapcsolatos szakmai és szervezési ügyekkel is az Osztály foglalkozott; azóta e feladatokat közvetlenül a *Tudományos Minősítő Bizottság* és annak szakbizottságai látják el.

Az Osztály testületei az elmúlt két évtized során sokszor foglalkoztak tudománypolitikai kérdésekkel, több tudományág helyzetét elemezték, javaslatokat dolgoztak ki azok továbbfejlesztésére stb. Pl. a *Matematikai Bizottság* ankétok keretében elemezte a hazai algebrai, analízis kutatások helyzetét, valamint a matematika alkalmazásának problémáit, többször foglalkozott a biometriai kutatások, a numerikus módszerekkel kapcsolatos vizsgálatok helyzetével, a számítástechnikai kutatásokkal stb. A *Fizikai Bizottság* elemző tanulmányt készített a hazai fizikai kutatások helyzetéről, és alapos javaslatot dolgozott ki azok továbbfejlesztésére; foglalkozott a fizikusképzéssel, vizsgálta a kutatások eredményeinek az iparban való hasznosítását, ill. a fizikusok iparban történő foglalkoztatását. A *Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság* igen körültekintő, helyszíni látogatásokkal egybekötve felmérte a hazai szilárdtestfizikai kutatásokat, elemezte azokat és nagy vonalakban meghatározta a feladatokat. Ugyanezt tette a *Magfizikai Albizottság* a magfizikai kutatások vonatkozásában. Az *Atomhéjfizikai Albizottság* külső szakemberek bevonásával foglalkozott a hazai kvantumkémiai kutatásokkal. Testületeinket gyakran foglalkoztatta a felsőoktatási intézmények helyzete és kezdeményezésükre több új tanszék szervezésére került sor.

A *nemzetközi kapcsolatokat* illetően elsősorban a szocialista országokkal való együttműködésre támaszkodtunk, de felhasználtuk a tőkés országokkal adódó kedvező lehetőségeket is. Az Osztály részt kért továbbá azokból a feladatokból, amelyeket Magyarország a fejlődő országok megsegítésében vállalt. — A szocialista országok tudományos akadémiáival kötött egyezmények munkaterveiben számos közös kutatási témával szerepelnek intézményeink. Az utóbbi időben erőfeszítéseket tettünk annak érdekében, hogy megszűnjék e téren fellelhető formalizmus és felesleges adminisztráció. Jó példaként említjük a KURCSATOV ATOMENERGIA INTÉZET és a KFKI között nemrég kötött igen konkrét együttműködési megállapodást. Az egyezmény szerint a két intézmény közösen végez kutatásokat a magfizika, a szilárdtestfizika, a reaktorfizika, az elektronika és a számítástechnika területén. A magyar fél részt vesz a KURCSATOV INTÉZETben tervezendő és felállításra kerülő nagy kísérleti berendezések megépítésében és a KURCSATOV INTÉZET egyes vezető munkatársai időszakos munkán vesznek részt a KFKI-ben. A közös munkák éves terveit közösen állítják össze és egyeztetik a távlati terveket is. A közös tudományos problémákról évenként munkaértekezleteket szerveznek. A kölcsönös kiküldések a valutamentes csere keretében, gyorsan bonyolódnak.

Igen eredményesek a magyar matematikusok, fizikusok és csillagászok külföldi tudósokkal való személyes kapcsolatai is. Sok külföldi szakember látogatott el hazánkba és tartott előadásokat, szép számmal jelentek meg közös publikációk hazai és külföldi társszerzőségben. Ugyanakkor szakembereink nagy számban kaptak meghívást neves külföldi intézményektől és azokban értékes előadásokat tartottak.

Fokozatos fejlődés mutatkozott a kiutazások tekintetében is, mind a számszerűséget, mind pedig a kiutazás hasznosságát illetően. A kiküldetési terv összeállításakor azt a gyakorlatot követtük, hogy hosszabb időtartamú kiküldetésben elsősorban olyan fiatalabb kutatók részesüljenek, akik kiemelt témával foglalkoznak. A külföldi rendezvényeken résztvevő delegációknak az idősebb szakemberek mellett mindig tagjai voltak fiatalok is.

Megfelelő kapcsolat alakult ki a kiküldetések terén az *Országos Atomenergia Bizottság*gal és ennek többek között az volt az eredménye, hogy az Osztály kiküldöttei részt vettek csaknem minden, számukra jelentős tudományos tanácskozáson, amelyet a Dubnai Intézet, a Bécsi Atomenergia Ügynökség és a szocialista országok atomenergia bizottságai rendeztek. Kutatóink közül többen hosszú időtartamú ösztöndíjat kaptak a Bécsi Atomenergia Ügynökségtől. Az Osztályhoz tartozó kutatók közül jelenleg is többen dolgoznak Dubnában. Fiatal kutatóink fejlődését jelentős mértékben segíti, hogy a szocialista országokba korlátlan számban van lehetőség állami ösztöndíjjal tanulmányútra utazni. E lehetőséget elég sokan felhasználták, de kívánatos, hogy még többen vegyék igénybe. Biztató fejlődésnek indult a Szovjetunió Tudományos Akadémiája által biztosított munkavállalási lehetőség tapasztaltabb kutatóink részére.

Az Osztály az utóbbi években intenzíven bekapcsolódott a nemzetközi tudományos szervezetek munkájába. Különösen vonatkozik ez a NEMZETKÖZI ELMÉLETI ÉS ALKALMAZOTT FIZIKAI UNIÓban (IUPAP), a NEMZETKÖZI CSILLAGÁSZATI UNIÓban, a *COSPAR*-ban, a NEMZETKÖZI SUGÁRVÉDELMI TÁRSASÁGban és a NEMZETKÖZI KRISZTALLOGRÁFIAI UNIÓban végzett tevékenységekre. Jelenleg a IUPAP 15 szakbizottsága közül 6-ban van magyar képviselő — és az egyik alelnök magyar. Csillagászaink közül többen tagjai a Nemzetközi Csillagászati Uniónak, sőt egyikük elnöke a Változócsillag Szekciónak. Matematikusaink a *Bolyai János Matematikai Társulat* révén vesznek részt a NEMZETKÖZI MATEMATIKAI UNIÓ (IMU) szervezeteiben és ott ugyancsak jelentős szerepet töltenek be.

Az Osztály kezdeményezésére 1963-ban megindult egy együttműködés a fizika területén a baráti országok között, amely koordinálja a rendezvényeket, közvetlen véleménycserét tesz lehetővé tudománypolitikai kérdésekben.

Nagy súlyt helyezett az Osztály a *tudományos tanácskozások* rendezésére. Az elmúlt 20 évben önállóan, ill. a *Bolyai János Matematikai Társulat*tal, valamint az *Eötvös Loránd Fizikai Társulat*tal közösen 41 matematikai, 52 fizikai és 4 csillagászati tárgykörű tanácskozást rendeztünk. A nagyobb rendezvények közé tartozik a II. MAGYAR MATEMATIKAI KONGRESSZUS (1960), a VII. EURÓPAI MOLEKULA SPEKTROSZKÓPIAI KONGRESSZUS (1963), a NEMZETKÖZI MATEMATIKAI UNIÓ felkérésére rendezett NEMZETKÖZI KOLLOKVIUM AZ ABEL-CSOPORTOK TÉMAKÖRBEN (1963), a NEMZETKÖZI LUMINESZCENCIA KONGRESSZUS (1966), a NEMZETKÖZI KOZMIKUS SUGÁRZÁSI KONGRESSZUS (1969).

A NEMZETKÖZI CSILLAGÁSZATI UNIÓ felkérésére 1967-ben a NEMZETKÖZI NAPFIZIKAI SZIMPÓZIUMOT és 1968-ban a NEMZETKÖZI VÁLTOZÓCSILLAG KOLLOKVIUMOT szintén Budapesten rendeztük meg. Ugyancsak 1968-ban került sor Debrecemben a NEMZETKÖZI MAGSPEKTROSZKÓPIAI KONFERENCIA megrendezésére. A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET az UNESCO felkérésére két alkalommal is tartott többhónapos *valószínűségelméleti és matematikai statisztikai tanfolyamot* a fejlődő ázsiai, afrikai és dél-amerikai országok szakembereinek továbbképzésére. Ebben az évben a IUPAP égisze alatt nemzetközi tanácskozásra kerül sor hazánkban a *heteroátmenetek (szilárdtestfizika)* tárgykörben és a *fizikaoktatás* időszerű kérdéseiben, 1971-ben pedig az *akusztika* témakörben.

Az Osztály igyekezett elősegíteni a szakmailag hozzánk tartozó tudományos egyesületek tevékenységét. A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULATtal és az EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULATtal fennálló kapcsolatok tradicionálisan jónak mondhatók. Az együttműködés közé tartozik pl. a tudományos tanácskozások és a nemzetközi kapcsolatok egyeztetése.

III.

Az Akadémia alapítása óta többször, legutóbb 1949-ben változtatta szervezetét az élet új követelményeinek megfelelően. A szervezeti kérdések a közelmúltban ismét napirendre kerültek, mert az elmúlt 20 év alatt megváltoztak a külső tényezők és az Akadémia tevékenysége során saját magát is megváltoztatta. Az előbbi körülményről már szóltunk, az utóbbival kapcsolatban pedig azokra a nehézségekre utalunk, amelyek az Akadémia megnövekedett feladataiból adódnak. A testületi tevékenység és az egyre növekvő intézeti hálózat igazgatása mind nagyobb méreteket öltött és a kétféle tevékenységnek azonos szervezeti keretbe való szorítása nehézkessé vált. A tudományos testületek szükségszerűen mindinkább csak formálisan végezték a szakigazgatási feladatokat, ezeket érdemileg főként a tisztségviselők személyes felelősséggel látták el. A szakigazgatási ügyek formális tárgyalása viszont sok időt vont el a testületek tudományos és tudománypolitikai hivatásának teljesítéséről.

A szervezeti reform azt célozza, hogy az Akadémia az évek során megnövekedett és megváltozott feladatait jobban láthassa el, a tudományos testületek és a kutató intézmények munkája hatékonyabb legyen és az eddigieknél több segítséget nyújthasson társadalmunk formálásához. Amikor a szervezeti kérdésekről beszélünk, nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy a lényeg az Akadémia munkájának tartalma, s a szervezeti változtatásra olyan mértékben és olyan formában van szükség, amely adott helyzetben a tartalmi munkának a hatékonyságát növeli. Az Akadémia országos elvi-módszertani hatókörének a növelésére a tudományos osztályoknak és bizottságaiknak a munkáját tovább kell fejleszteni, az eddigieken túlmenően kell kezdeményezniök pl. országos kutatási prognózisok készítését, a tudományos kutatások fő irányainak kidolgozását, más szervek megbízásából véleményt nyilvánítani országos érdekű tudományos és társadalmi-gazdasági, valamint kulturális kérdésekben.

A testületi szerveket mentesíteni kell a kutatóhálózat operatív irányításának teendői alól, ezeket a feladatokat az Akadémia szakigazgatási szervei vegyék át. A szakigazgatás azonban szorosan működjék együtt a tudományos testületekkel, és tudományos kérdésekben a testületek állásfoglalását tekintse irányadónak. Az átszervezéssel egy időben növelni kell az intézetek felelősségét és jogkörét is — más szóval az önállóságukat — úgy azonban, hogy kellőképpen érvényesüljenek a felsőbb irányítószervek tudománypolitikai intenciói. Az igazgatási szervezetet úgy kell felépíteni, hogy az ne gyámkodást, hanem magas szintű igazgatást és a valóban szükséges ellenőrzést biztosítsa.

Áttekintve az utóbbi 20 évben végzett munkát, megállapíthatjuk, hogy kutatóink és intézményeink számottevő eredményeket értek el tudományos életünk fejlődésének meggyorsításában, és annak a célkitűzésnek megvalósításában, hogy a tudományos kutatások sikeresen szolgálják szocialista építőmunkánkat.

Sok még azonban a hozzánk tartozó területeken is a ki nem aknázott lehetőség, a fejlődés nem minden fontos területen megfelelő ütemű, és található több más hiányosság is. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy az eddigieknél szorosabb összehangot kell biztosítanunk a társadalmi szükségletek és a tudományos tevékenység között. A legfontosabb feladatok megoldásához bátran kell koncentrálnunk a rendelkezésre álló anyagi- és szellemi kapacitást, de nem kevésbé fontos a más országokban elért eredmények jobb megismerése, azok adaptálása, a nemzetközi tudományos munkamegosztásban való aktívabb részvétel sem.

Befejezésül az Osztályvezetőség arra a fontos feladatra szeretné a figyelmet irányítani, amellyel az elkövetkező hónapokban foglalkoznunk kell. Mint ismeretes, a Kormány a Tudományos Akadémiát és az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottságot (OMFB) bízta meg az 1971—1985. évek tartamára szóló *országos távlati tudományos kutatási terv* elkészítésével. Az új távlati kutatási terv kölcsönhatásba kerül a népgazdaság távlati tervével. A terv két oldalról megközelítve készül. Előkészítése során egyrészt a felső vezető, illetve koordináló állami szervek kikeresik azokat a nagy jelentőségű tudományos problémákat, amelyek megoldására a népgazdasági fejlesztési tervek megvalósításához szükség van, és amely problémákat hazai kutatással indokolt megoldani. Másrészt viszont a kutatóhelyeknek kell kiválasztaniok azokat a problémákat, amelyeket országos jelentőségűnek vélnek. Az ily módon felülről és alulról jövő elgondolások összevetése és egyeztetése révén fog kialakulni a távlati terv. Az ipari kutatási tervek tekintetében elsősorban az OMFB, alapkutatások vonatkozásában főleg az Akadémia lesz a kutatóhelyek vitapartnere. Ehhez a nagyon fontos munkához kérjük az Osztály tagjainak, intézményeinek kutatóinak és minden dolgozójának az áldozatkész, felelősségteljes közreműködését.

STRUKTÚRAOSZTÁLYOKON VÉGZETT ALGEBRAI MŰVELETEK ÉS LOGIKAI FORMULÁK* (II)

Írta: MAKKAI MIHÁLY

5. §. *A homomorfizmusra zárt pszeudoelemi osztályok jellemzése*

Az 4. 1 Tétel bizonyításának módszere továbbfejleszthető oly módon, hogy egyes R_i relációk esetén (lásd I. fej. 3. § végét) 4. 6-nál élesebb eredményeket kapjunk. A következőkben egy tételt bizonyítunk be homomorfizmusokkal kapcsolatban, amely a *Lyndon*-féle megőrzési tétel PC_Δ osztályokra vonatkozó analogonjának tekinthető. Mielőtt tulajdonképpeni témánkra térnénk, LYNDON tételét több formában is megfogalmazzuk, hogy eredményeinkkel való analógiáját világossabbá tegyük.

Mindenekelőtt kimondjuk a következő, majdnem nyilvánvaló állítást, amely a homomorfizmusok és pozitív formulák kapcsolatának alapja.

5. 1. LEMMA. *Ha* $K = \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$ *ahol* Σ *pozitív zárt* μ*-formulák egy tetszőleges halmaza, akkor* K *zárt homomorfizmusra, azaz* $\mathrm{Hom}\,(K) = K$.

A bizonyításhoz megjegyezzük, hogy a III. fejezet 8. 2 tétele első felének bizonyításában az állítást igazoljuk arra az esetre, ha Σ egyetlen formulából áll. Ebből viszont az általános eset azonnal következik.

LYNDON [25] a következő tételt a $K \in EC_\Delta$ feltétel mellett bizonyította be.

5. 2. TÉTEL. (LYNDON [25], KEISLER [16]). *Ha* $K \in PC_\Delta(\mu)$ *akkor* $\overline{\mathrm{Hom}\,(K)} = \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$, *ahol* Σ *pozitív zárt formuláknak egy halmaza* (konkrétan: $\Sigma = Th(K) \cap \Delta$, ahol Δ a pozitív μ-formulák halmaza).

Az 5. 2 Tétel egy kissé gyengített (a $K \in PC_\Delta$ feltétel helyett a $K \in PC_\omega$ feltételt tartalmazó) változatának egy új bizonyítását a következő §-ban adjuk meg.[1] Az 5. 2. Tétel közvetlen következménye a következő

5. 2'. TÉTEL. (LYNDON [25]). *Ha* $K \in EC_\Delta(\mu)$ *és* K *zárt homomorzfimusra, akkor van egy pozitív* μ*-formulákból álló* Σ *halmaz úgy, hogy* $K = \mathrm{Mod}_\mu\,(\Sigma)$.

Bizonyítás. A tétel feltevése értelmében $\overline{\mathrm{Hom}\,(K)} = K$; alkalmazzuk az előbbi tételt.

A következő állítás 5. 1 és 5. 2' konjunkciójának absztrakciója.

5. 2''. TÉTEL. *Legyen* μ *tetszőleges hasonlósági típus. Ekkor van zárt* μ*-formuláknak egy olyan* Δ *halmaza, amelyre igaz, hogy egy* $K \in EC_\Delta(\mu)$ *osztályra* $\mathrm{Hom}\,(K) = K$ *akkor és csak akkor áll fenn, ha* $K = \mathrm{Mod}_\mu\,(\Sigma)$ *valamely* $\Sigma \subseteq \Delta$ *mellett.*

* Kandidátusi értekezés, Budapest, 1968. A dolgozat (I.) része az MTA III. Osztály Közleményei **20** (1971) 1—2. számában pp. 48—83. jelent meg, s az értekezés első négy pontját, valamint a teljes irodalmi hivatkozást tartalmazza.

[1] A 7. § eredményeinek felhasználásával a 9. §-ban több más analóg eredménnyel együtt az 5.2 Tételt is teljes általánosságban bizonyítjuk.

Valóban, vegyük Δ-nak a pozitív zárt μ-formulák halmazát.

Az 5. 2″. Tétel a *Lyndon*-tétel egy absztrakt formájának tekinthető. Megjegyezzük, hogy ez a tétel igaz marad, ha a Hom $(K)=K$ feltételt egy sor egyéb zártsági feltétel közül bármelyikkel is helyettesítjük. Ezek között a feltételek között vannak az $S_{R_i}(K)=K$ feltételek az R_i $(i=1, \dots, 16)$ relációk mindegyikére (lásd 3. § vége). Ezzel szemben nem ismeretes az 5. 2″ Tételnek és említett analogonjainak olyan közös általánosítása, amelyben az $S_{R_i}(K)=K$ zártsági feltételek valamely közös általánosítása lenne a tétel feltétele.* A szerző a [31] dolgozatban sejtésként fogalmazott meg egy ilyen lehetséges általánosítást; a sejtés az R_i relációk reflexivitásával és tranzitivitásával kapcsolatos. A jelen § fő eredménye, először az 5. 2″. Tételhez hasonló absztrakt formában, a következő tétel.

5. 3. TÉTEL. *Legyen μ tetszőleges hasonlósági típus. Ekkor van zárt formuláknak egy $\mathfrak{F}$ osztálya, úgy hogy $K \in PC_\Delta(\mu)$ esetén* $\mathrm{Hom}(K)=K$ *akkor és csak akkor, ha* $K = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma)\restriction\mu$ *$\mathfrak{F}$ valamely Σ részhalmazára, és valamely $\mu' \supseteq \mu$ hasonlósági típusra, amelyre Σ minden eleme μ'-formula.*

Az 5. 3 Tétel bizonyítása ugyancsak a $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_{\mathrm{Hom}}(\mu)$ osztály konkrét megadásával kezdődik.

Legyen $\mathfrak{L}_0^\mu$ azon kifejezések osztálya, amelyek vagy változók, vagy pedig $fx_0, \dots, x_{n-1}$ alakúak, ahol f μ-ben nem előforduló n-változós operációjel, $n \geqq 0$, $x_0, \dots, x_{n-1}$ pedig tetszőleges változók. $\mathfrak{L}_0^\mu$ elemeit *μ-egyszerű* kifejezésnek nevezzük. Tekintsük azon $\bigvee_{i<n} \bigwedge_{j<m_i} F_{ij}$ formulák Θ_0 halmazát, ahol $n \geqq 0$, $m_i \geqq 0$ és F_{ij} μ feletti prímformula minden $i<n$ és $j<m_i$-re. Végül legyen $\mathfrak{F}_{\mathrm{Hom}}(\mu)$ mindazon $\forall(\Psi)$ formulák osztálya, ahol Ψ egy Θ_0-beli Φ formulából $\mathfrak{L}_0^\mu$-beli kifejezéseknek Φ változói helyébe való helyettesítésével keletkezik.

Például, ha $\mu=\{f\}$, ahol f kétváltozós operációjel, g pedig egy további egyváltozós operációjel, akkor a $\forall v_0 \forall v_1 f v_0 g v_1 \approx v_0$ formula hozzátartozik $\mathfrak{F}_{\mathrm{Hom}}(\mu)$-höz, de $\forall v_0 \forall v_1\, g f v_0 v_1 \approx v_0$ nem.

Az 5. 3 Tétel könnyebbik felét adja a következő

5. 4 TÉTEL. *Ha Σ $\mathfrak{F}_{\mathrm{Hom}}(\mu)$ tetszőleges részhalmaza és μ' egy olyan hasonlósági típus, mely tartalmazza μ elemeit és a Σ formuláiban előforduló nem-logikai jeleket, akkor* $K = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma)\restriction\mu$ *zárt homomorfizmusra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} \in \mathrm{Hom}(K)$, azaz, hogy bizonyos $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ és φ mellett $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}'\restriction\mu$, $\mathfrak{B}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma)$ és φ $\mathfrak{B}$-nek $\mathfrak{A}$-ra való homomorfizmusa. Legyen $|\mathfrak{A}|=A$, $|\mathfrak{B}|=B$. Alkalmazva a kiválasztási axiómát, legyen A tetszőleges a elemére $\bar{a}$ egy a által meghatározott olyan B-beli elem, amelyre $\varphi(\bar{a})=a$. Definiáljuk az $\mathfrak{A}'$ μ'-típusú struktúrát oly módon, hogy $\mathfrak{A}'\restriction\mu = \mathfrak{A}$, továbbá, ha $f \in \mu'-\mu$ és $a_0, \dots, a_{\varrho(f)-1} \in A$, akkor

$$(1) \qquad f^{\mathfrak{A}'}(a_0, \dots, a_{\varrho(f)-1}) = \varphi\big(f^{\mathfrak{B}'}(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{\varrho(f)-1})\big)$$

$\mathfrak{A}'$ definíciójából azonnal következik, hogy tetszőleges $\mathfrak{L}_0^\mu$-beli t kifejezésre, ha t vál-

* (1972 június) P. LINDSTRÖM: On relations between structures c. dolgozata (*Theoria* **32** (1966), 172—185) tartalmaz egy ilyen feltételt.

tozói a különböző $x_0, \ldots, x_{m-1}$ változók között vannak, akkor

$$\varphi\left(t^{\mathfrak{B}'}\begin{bmatrix}\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}\right) = t^{\mathfrak{A}'}\begin{bmatrix}a_0, \ldots, a_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Megjegyezzük, hogy (2) nem igaz *minden* t kifejezésre.

Legyen $G\in\Sigma$, azaz $G = \forall(\Psi)$, ahol $\Psi = \bigvee_{i<n}\bigwedge_{j<m_i} F'_{ij}$, és F'_{ij} valamely F_{ij} μ feletti prímformulából $\mathfrak{L}^{\mu}_0$-beli kifejezéseknek F_{ij} változói helyébe való helyettesítésével adódik.

Bebizonyítjuk, hogy $\mathfrak{A}'\models G$. Legyen $a_0, \ldots, a_{m-1}\in A$ és legyen $x_0, \ldots, x_{m-1}$ a Ψ-ben előforduló összes különböző változó. Mivel $\mathfrak{L}'\in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma)$, azért kapjuk, hogy $\mathfrak{B}\models$ $=\Psi\begin{bmatrix}\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}$. Ezért valamely $i_0<n$-nek eleget tevő i_0-ra $\mathfrak{B}'\models F'_{i_0 j}\begin{bmatrix}\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}$ minden $j<m_{i_0}$-ra. Rögzítsünk egy ilyen j indexet. Feltevésünk szerint $F'_{i_0 j} =$ $= F_{i_0 j}\begin{pmatrix}t_0, \ldots, t_{k-1}\\ y_0, \ldots, y_{k-1}\end{pmatrix}$, ahol $t_0, \ldots, t_{k-1}\in\mathfrak{L}^{\mu}_0$. Legyen $\tau_l = t_l^{\mathfrak{B}'}\begin{bmatrix}\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}$, $\tau'_l =$ $= t_l^{\mathfrak{A}'}\begin{bmatrix}a_0, \ldots, a_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}$ $l<k$-ra. Ezek szerint $\mathfrak{B}\models F_{i_0 j}\begin{bmatrix}\tau_0, \ldots, \tau_{k-1}\\ y_0, \ldots, y_{k-1}\end{bmatrix}$ (alkalmazva (2.5)-öt is). Mivel $F_{i_0 j}$ μ feletti prímformula és φ homomorfizmus, ebből továbbmenőleg következik, hogy $\mathfrak{A}\models F_{i_0 j}\begin{bmatrix}\varphi(\tau_0), \ldots, \varphi(\tau_{k-1})\\ y_0, \ldots, y_{k-1}\end{bmatrix}$. Alkalmazva a (2) összefüggést, $\mathfrak{A}\models F_{i_0 j}\begin{bmatrix}\tau'_0, \ldots, \tau'_{k-1}\\ y_0, \ldots, y_{k-1}\end{bmatrix}$ és így $\mathfrak{A}'\models F'_{i_0 j}\begin{bmatrix}a_0, \ldots, a_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}$ adódik. Ezt alkalmazva $j=0, \ldots, m_{i_0}-1$-re $\mathfrak{A}'\models\Psi\begin{bmatrix}a_0, \ldots, a_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}$ következik. Mivel $a_0, \ldots, a_{m-1}$ A tetszőleges elemei voltak, G igaz $\mathfrak{A}'$-ben. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathfrak{A}'$ modellje Σ-nak. Ezek szerint mivel $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'\restriction\mu$, $\mathfrak{A}\in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma)\restriction\mu\in K$.

$\mathfrak{A}$-ra vonatkozó egyetlen feltevésünk az volt, hogy $\mathfrak{A}\in\mathrm{Hom}(K)$. Tehát bebizonyítottuk, hogy $\mathrm{Hom}(K)\subseteq K$, q.e.d.

Az 5. 3 Tétel másik fele a következő tétel következménye.

5.5 TÉTEL. *Legyen $K\in PC_\Delta(\mu)$. Ekkor van olyan $\mu'\geqq\mu$ hasonlósági típus és Σ' $\mathfrak{F}_{\mathrm{Hom}}(\mu)$-beli zárt μ'-formulákból álló halmaz, amelyekre* $\mathrm{Hom}(K) = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma')\restriction\mu$.

Bizonyítás. Feltevésünk és az I. fej. (2. 12) szerint $K = \mathrm{Mod}_{\mu 1}(\Sigma)\restriction\mu$ valamely μ_1 hasonlósági típus és Σ μ_1 feletti $\forall(F)$ alakú formulákból álló halmaz mellett (F nyílt).

Először megadjuk a tételben szereplő μ'-t és Σ'-t. Első lépésként hozzárendelünk μ_1 minden v_0-tól különböző *szabad t* kifejezéséhez egy h^t operációjelet úgy, hogy $\varrho(h^t)$ a t-ben előforduló változók száma. Különböző t szabad kifejezésekre a h^t jelek legyenek különbözők és ne forduljanak elő μ_1-ben. Definiáljuk μ'-t mint a $\mu\cup\{h^t : t\neq$ $\neq v_0$ szabad μ_1 kifejezés$\}$ halmazt. μ_1 minden t kifejezéséhez van egy egyértelműen meghatározott t_0 szabad kifejezés úgy, hogy ha $v_0, \ldots, v_{m-1}$ az összes t_0-ban előforduló változó, akkor $t=t_0\begin{pmatrix}x_0, \ldots, x_{m-1}\\ v_0, \ldots, v_{m-1}\end{pmatrix}$ bizonyos egyértelműen meghatározott $x_0, \ldots, x_{m-1}$ változók mellett (lásd I. fej. (1. 7)). Legyen $\bar{t}$ a $h^{t_0}x_0, \ldots, x_{m-1}$ kifejezés, amennyiben t_0 nem azonos v_0-lal (azaz, ha t nem változó) és egyébként pedig legyen

$\bar{t}=t$. Legyen I_{μ_1} a μ_1 hasonlósági típushoz tartozó nyílt egyenlőségi axiómák halmaza (lásd I. fej. 38. old.) Σ minden formulája $\forall(H)$ alakú, ahol H nyílt formula, azaz $\Sigma=\{\forall(H): H\in\Sigma_0\}$ nyílt μ_1-formulák egy Σ_0 halmazára. Legyen $\Sigma_0' = \Sigma_0 \cup I_m$. Jelölje Θ Σ_0' formuláiból a változók helyébe μ_1 feletti kifejezések helyettesítésével kapott formulák halmazát, Z pedig legyen azon (F, ψ) párok halmaza, ahol F μ *feletti* prímformula, ψ pedig olyan helyettesítés, amely F összes (szabad) változóján értelmezve van, $rn(\psi)$ elemei pedig μ_1 feletti kifejezések.

Ezekután Z minden (F, ψ) eleméhez hozzárendelünk egy $\Psi_{F,\psi}$-vel jelölt μ'-formulát. Legyen $z_0, \ldots, z_{l-1}$ F összes különböző változója. Legyen

$$\Psi_{F,\psi} = F\begin{pmatrix} \bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{l-1} \\ z_0, \ldots, z_{l-1} \end{pmatrix},$$

ahol $u_i=\psi(z_i)$ $i<l$-re.

Legyen U μ_1 *feletti* prímformuláknak egy tetszőleges véges halmaza. Minden, az U-n értelmezett, $\uparrow$ vagy $\downarrow$ értékű ε függvény minden olyan nyílt E formulához, amely U-beli prímformulákból az ítéletkalkulus operációi segítségével épül fel, egy meghatározott $\bar{\varepsilon}(E)$ igazságértéket rendel hozzá (lásd 1. fej. 49. old.). $\bar{\varepsilon}(E)$ csak akkor van definiálva, ha E minden prímformula-része U-nak eleme, azaz $E\in P_U$. Adott U mellett legyen X_U azon $\varepsilon: U \to \{\uparrow, \downarrow\}$ függvények halmaza, melyekre $\bar{\varepsilon}(E) = \uparrow$ $\Theta \cap P_U$ minden E elemére.

Most legyen U μ_1 feletti prímformuláknak egy *véges* halmaza, V pedig Z-nek egy véges részhalmaza. Legyen $\Phi_{U,V}$ a következő formula:

$$\Phi_{U,V} = \bigvee_{\varepsilon\in X_U} \bigwedge_{\substack{(F,\psi)\in V \\ \bar{\varepsilon}(F(\psi))=\uparrow}} \Psi_{F,\psi}.$$

A konjunkciójel alatt szereplő $\bar{\varepsilon}(F(\psi))=\uparrow$ feltétel természetesen úgy értendő, hogy $\bar{\varepsilon}(F(\psi))$ *definiálva van és* egyenlő az $\uparrow$ értékkel. A $\Psi_{F,\psi}$ formulák definíciója alapján világos, hogy $\forall(\Phi_{U,V})$ μ' feletti zárt formula és hozzá tartozik $\mathfrak{F}_{\mathrm{Hom}}(\mu)$-höz.

Legyen végül Σ' mindazon $\forall(\Phi_{U,V})$ formulák halmaza, ahol U μ_1 feletti prímformulák véges halmaza, V pedig Z véges részhalmaza.

I. Hom $(K) \subseteq \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma') \upharpoonright \mu$ *bizonyítása.*

Legyen $\mathfrak{A}\in \mathrm{Hom}(K)$, azaz valamely $\mathfrak{B}$-re és φ-re, $\mathfrak{B}\in K$ és φ $\mathfrak{B}$-nek $\mathfrak{A}$-ra való homomorfizmusa. A $\mathfrak{B}\in K$ feltétel szerint van olyan $\mathfrak{B}_1\in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma)$ struktúra, melyre $\mathfrak{B}_1 \upharpoonright \mu = \mathfrak{B}$. Válasszunk $A =_{\mathrm{df}} |\mathfrak{A}|$ minden a eleméhez egy $\tilde{a}\in|\mathfrak{B}|=B$ elemet úgy, hogy $a=\varphi(\tilde{a})$ fennálljon. Definiáljuk az $\mathfrak{A}'$ μ' feletti struktúrát a következő egyenlőségekkel:

$$\mathfrak{A}' \upharpoonright \mu = \mathfrak{A},$$

$$(h^t)^{\mathfrak{A}'}(a_0, \ldots, a_{m-1}) = \varphi\left(t^{\mathfrak{B}_1}\begin{bmatrix} \tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{m-1} \\ v_0, \ldots, v_{m-1}\end{bmatrix}\right)$$

minden szabad $t\neq v_0$ μ_1-kifejezésére; itt $v_0, \ldots, v_{m-1}$ a t összes változója és $a_0, \ldots, a_{m-1}$ A tetszőleges elemei. Ebből a definícióból könnyen következik, hogy tetszőleges μ_1 feletti μ kifejezés esetén

$$(\bar{u})^{\mathfrak{A}'}\begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{m-1} \\ w_0, \ldots, w_{m-1}\end{bmatrix} = \varphi\left(u^{\mathfrak{B}_1}\begin{bmatrix} \tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{m-1} \\ w_0, \ldots, w_{m-1}\end{bmatrix}\right) \tag{3}$$

ahol $a_0, \ldots, a_{m-1} \in A$ és $w_0, \ldots, w_{m-1}$ u összes különböző változója. (Egy analóg állításnak, 4. § (10) állításának bizonyítását részletesen leírtuk; (3) bizonyítása hasonló módon történik.)

Legyen U μ_1 feletti prímformulák egy véges halmaza, V véges részhalmaza Z-nek; legyen $x_0, \ldots, x_{m-1}$ a $\Phi_{U,V}$ formulában vagy pedig az U-ban levő prímformulák valamelyikében előforduló összes különböző változó. Legyenek $a_0, \ldots, a_{m-1}$ A tetszőleges elemei. Legyen Γ a Θ halmaz azon E elemeinek halmaza, melyek minden prímformula-része U-nak eleme, azaz $\Gamma = \Theta \cap P_U$. Mivel $\mathfrak{B}_1$ modellje Σ-nak és természetesen a $\{\forall(F): F \in I_{\mu_1}\}$ halmaznak is, azért $\Gamma(\subseteq \Theta)$ minden E elemére

$$(4) \qquad \mathfrak{B}_1 \models E\begin{bmatrix}\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}.$$

Definiáljuk az $\varepsilon_0: U \to \{\uparrow, \downarrow\}$ hozzárendelést a következő módon. Legyen U minden N elemére

$$\varepsilon_0(N) = \uparrow \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \mathfrak{B}_1 \models N\begin{bmatrix}\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}.$$

Ebből következik, hogy $\tilde{\varepsilon}_0(E) = \uparrow$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{B}_1 \models E\begin{bmatrix}\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}$ minden $E \in P_U$-ra (lásd I. fej. (2-18)). (4) szerint tehát $\tilde{\varepsilon}_0(E) = \uparrow$ Γ minden E elemére, azaz $\varepsilon_0 \in X_U$.

Most tegyük fel, hogy $(F, \psi) \in V$, $G =_{\mathrm{df}} F(\psi) = F\begin{pmatrix}u_0, \ldots, u_{l-1}\\ z_0, \ldots, z_{l-1}\end{pmatrix}$, továbbá, hogy $\tilde{\varepsilon}_0(G) = \uparrow$. Ezért

$$(5) \qquad \mathfrak{B}_1 \models G\begin{bmatrix}\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}$$

Legyen $b_k = u_k^{\mathfrak{B}_1}\begin{bmatrix}\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}$ $k < l$-re.

(5)-t ezért a következő formában is írhatjuk:

$$\mathfrak{B} \models F\begin{bmatrix}b_0, \ldots, b_{l-1}\\ z_0, \ldots, z_{l-1}\end{bmatrix}.$$

Mivel φ $\mathfrak{B}$-nek $\mathfrak{A}$-ra való homomorfizmusa,

$$\mathfrak{A} \models F\begin{bmatrix}\varphi(b_0), \ldots, \varphi(b_{l-1})\\ z_0, \ldots, z_{l-1}\end{bmatrix}.$$

(3)-t alkalmazva, kapjuk, hogy

$$\mathfrak{A}' \models F\begin{pmatrix}\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{l-1}\\ z_0, \ldots, z_{l-1}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a_0, \ldots, a_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathfrak{A}' \models \Psi_{F,\psi}\begin{bmatrix}a_0, \ldots, a_{m-1}\\ x_0, \ldots, x_{m-1}\end{bmatrix}.$$

Mivel utolsó eredményünk tetszőleges $(F, \psi) \in V$ esetén fennáll, ha $\tilde{\varepsilon}_0(F(\psi)) = \uparrow$, azért

$$\mathfrak{A}' \models \bigwedge_{\substack{(F,\psi)\in V \\ \tilde{\varepsilon}_0(F(\psi))=\uparrow}} \Psi_{F,\psi} \begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{m-1} \\ x_0, \ldots, x_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Figyelembe véve, hogy $\varepsilon_0 \in X_U$, továbbá, hogy $a_0, \ldots, a_{m-1}$ A tetszőleges elemei voltak, azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{A}' \models \forall (\Phi_{U,V}).$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma')$ és így mivel $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction \mu$, kapjuk, hogy $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma') \restriction \mu$. Mivel $\mathfrak{A}$ Hom (K) tetszőleges eleme volt, a Hom $(K) \subseteq \subseteq \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma') \restriction \mu$ inklúzió bizonyítást nyert.

II. $\mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma') \restriction \mu \subseteq$ Hom (K) *bizonyítása.*

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma') \restriction \mu$, azaz valamely $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma')$ struktúrára $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction \mu$.

Rendeljünk $A =_{\mathrm{df}} |\mathfrak{A}|$ minden a eleméhez egy c_a individuumjelet oly módon, hogy különböző a elemek mellett a megfelelő c_a elemek is különbözők legyenek, továbbá c_a ne tartozzon sem μ'-höz, sem pedig μ_1-hez egyetlen $a \in A$ elem mellett sem. Legyen $\mu_2 = \mu_1 \cup \{c_a : a \in A\}$.

Legyen Γ_2 mindazon $\neg G \begin{pmatrix} c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix}$ formulák összessége, amelyekre valamely $(F, \psi) \in Z$ mellett $G = F(\psi)$, továbbá $x_0, \ldots, x_{n-1}$ G összes szabad változója, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ és

$$\mathfrak{A}' \models \neg \Psi_{F,\psi} \begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{n-1} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}$$

($\Psi_{F,\psi}$ definícióját lásd 224. oldal). Legyen továbbá Θ_2 mindazon formulák halmaza, amelyek Θ elemeiből c_a individuumjeleknek az összes előforduló változó helyébe való helyettesítésével kaphatók. Figyelembe véve Θ definícióját, Θ_2 tehát Σ_0' elemeiből μ_2 feletti zárt kifejezések helyettesítésével keletkező zárt formulák összessége.

LEMMA. *Van olyan δ függvény, amely a μ_2 feletti prímformulák W halmazán van értelmezve, értékei $\uparrow$ vagy $\downarrow$ lehetnek, és amelyre $\tilde{\delta}(D) = \uparrow$ $\Gamma_2 \cup \Theta_2$ tetszőleges D eleme esetén.*

Bizonyítás. Az ítéletkalkulusra vonatkozó kompaktsági tétel (lásd I. fej. (2. 19)) szerint elég belátni, hogy Γ_2 és Θ_2 egy-egy véges Γ_2', illetve Θ_2' részhalmaza esetén, ha W' a $\Gamma_2' \cup \Theta_2'$-ben levő formulák prímformula-részeinek összessége, akkor van olyan W'-n értelmezett ε' függvény, amely mellett $\tilde{\varepsilon}'(D) = \uparrow$ $\Gamma_2' \cup \Theta_2'$ tetszőleges D eleme mellett. Legyen a W' formuláiban előforduló összes különböző c_a alakú individuumjel $c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}}$, legyenek továbbá $x_0, \ldots, x_{n-1}$ különböző változók. Tekintsük a W' formuláiból $i < n$-re x_i-nek c_{a_i} helyébe történő helyettesítésével kapott μ_1 feletti prímformulák U összességét, továbbá legyen Θ' és Γ' ugyanezen helyettesítésekkel Θ_2'-ből illetve Γ_2'-ből kapott formulák összessége. Nyilvánvaló, hogy

$\Theta' \subseteq \Theta$. $\Gamma_2' \subseteq \Gamma_2$ és Γ_2 definíciója miatt, Γ' minden E eleméhez van olyan $(F, \psi) \in Z$ pár, melyre $E = \neg G$, ahol $G = F(\psi)$, G változói $x_0, \ldots, x_{n-1}$ közül valók és

$$\text{(6)} \qquad \mathfrak{A}' \models \neg \Psi_{F,\psi} \begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{n-1} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}$$

Jelöljünk ki Γ' minden E eleméhez egy ilyen (F_E, ψ_E) párt; az így kijelölt párok halmaza legyen $V \subseteq Z$.

Mivel a $\forall(\Phi_{U,V})$ formula igaz $\mathfrak{A}'$-ben, ezért

$$\mathfrak{A}' \models \bigvee_{\varepsilon \in X_U} \bigwedge_{\substack{(F,\psi) \in V \\ \tilde{\varepsilon}(F(\psi)) = \uparrow}} \Psi_{F,\psi} \begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{n-1} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ezek szerint van olyan $\varepsilon : U \to \{\uparrow, \downarrow\}$ értékelés, melyre egyrészt $\tilde{\varepsilon}(E) = \uparrow$ Θ' minden E elemére, másrészt

$$\text{(7)} \qquad \tilde{\varepsilon}(F(\psi)) = \uparrow \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Psi_{F,\psi} \begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{n-1} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}$$

V minden (F, ψ) elemére.

Definiáljuk az $\varepsilon' : W' \to \{\uparrow, \downarrow\}$ értékelést úgy, hogy

$$\text{(8)} \qquad \varepsilon' \left(N \begin{pmatrix} c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix} \right) = \varepsilon(N)$$

fennálljon U minden N elemére. Ekkor nyilván $\tilde{\varepsilon}'(D) = \uparrow$ Θ_2' minden D elemére (hiszen $D = E \begin{pmatrix} c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix}$ valamely $E \in \Theta'$ mellett). Legyen D Γ_2' tetszőleges eleme. Ekkor $D = E \begin{pmatrix} c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix}$ valamely $E \in \Gamma'$ formula mellett. Tekintsük az $(F, \psi) = {}_{\mathrm{df}} (F_E, \psi_E) \in V$ elemet, legyen $G = F(\psi)$. Azt állítjuk, hogy $\tilde{\varepsilon}(G) = \downarrow$. Ha ugyanis $\tilde{\varepsilon}(G) = \uparrow$, akkor (7) szerint $\mathfrak{A}' \models \Psi_{F,\psi} \begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{n-1} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}$, ami (6) szerint ellentmondás. Ezek szerint valóban $\tilde{\varepsilon}(G) = \downarrow$ és így (8) maga után vonja, hogy $\tilde{\varepsilon}(D) = \tilde{\varepsilon}(E) = \tilde{\varepsilon}(\neg G) = \uparrow$.

Összefoglalva: beláttuk, hogy $\tilde{\varepsilon}'(D) = \uparrow$ $\Theta_2' \cup \Gamma_2'$ minden D elemére, amellyel a lemma bizonyítását befejeztük.

Folytatva a tétel bizonyítását, legyen B_2 a μ_2 feletti zárt kifejezések halmaza. A Lemma alapján kapott δ értékelés segítségével definiáljuk a $\mathfrak{B}_2$ μ_2 típusú pszeudostruktúrát a következő követelményekkel:

$$|\mathfrak{B}_2| = B_2,$$

$$(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in P^{\mathfrak{B}_2} \Leftrightarrow \delta(Pb_0 \ldots b_{n-1}) = \uparrow,$$

$$f^{\mathfrak{B}_2}(b_0, \ldots, b_{n-1}) = fb_0 \ldots b_{n-1},$$

ahol P, ill f μ_2-beli reláció- ill. operációjel, és $n = \varrho(P)$, ill. $n = \varrho(f)$, vagy pedig $P = \approx$ és $n = 2$ és $b_0, \ldots, b_{n-1}$ tetszőleges B_2-beli elemek. Speciálisan, $c^{\mathfrak{B}_2} = c$ minden μ_2-beli c indiciduumjelre, továbbá, mint ahogy egy egyszerű indukció mutatja, $b^{\mathfrak{B}_2} = b$ minden $b \in B_2$ zárt kifejezés mellett. Továbbmenőleg

$$\text{(9)} \qquad \mathfrak{B}_2 \models \Phi \Leftrightarrow \tilde{\delta}(\Phi) = 1$$

minden μ_2 feletti zárt kvantormentes Φ formulára, amint azt az előbbi kifejezésekre vonatkozó állításból tetszőleges Φ prímformulára és indukcióval általános Φ-re könnyen be lehet látni.

(9)-ből és δ-nak a Lemmában megadott tulajdonságából következik, hogy $\mathfrak{B}_2$ Θ_2-nek pszeudomodellje. Θ_2 definícióját figyelembe véve adódik, hogy $\mathfrak{B}_2$ pszeudomodellje Σ-nak és hogy $\mathfrak{B}_2$ normális pszeudostruktúra. Valóban, ha $\forall(H)\in\Sigma$, ahol a H nyílt formula szabad változói a különböző $x_0, \dots, x_{n-1}$ változók, továbbá $b_0, \dots, b_{n-1}\in B_2=|\mathfrak{B}_2|$, akkor (felhasználva I. fej. (2. 5) állítást is)

$$\mathfrak{B}_2 \models H\begin{bmatrix} b_0, \dots, b_{n-1} \\ x_0, \dots, x_{n-1}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathfrak{B}_2 \models H\begin{bmatrix} b_0^{\mathfrak{B}_2}, \dots, b_{n-1}^{\mathfrak{B}_2} \\ x_0, \dots, x_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{B}_2 \models H\begin{pmatrix} b_0, \dots, b_{n-1} \\ x_0, \dots, x_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Továbbá a $H\begin{pmatrix} b_0, \dots, b_{n-1} \\ x_0, \dots, x_{n-1}\end{pmatrix}$ formula definíció szerint Θ_2-nek eleme és így, mivel $\mathfrak{B}_2$ Θ_2-nek pszeudomodellje, $\mathfrak{B}_2\models H\begin{bmatrix} b_0, \dots, b_{n-1} \\ x_0, \dots, x_{n-1}\end{bmatrix}$. Mivel itt $b_0, \dots, b_{n-1}$ $B_2=|\mathfrak{B}_2|$ tetszőleges elemei voltak, valóban beláttuk, hogy $\mathfrak{B}_2=\forall(H)$. Az, hogy $\mathfrak{B}_2$ normális, ugyanígy következik abból, hogy ha $E\in I_{\mu_1}$, akkor E-ből változóinak B_2 elemeivel való helyettesítésével kapott formula Θ_2-nek eleme.

Legyen $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_2/\approx$ $\mathfrak{B}_2$ faktorstruktúrája és $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \restriction \mu$. Az előbbiek alapján és (2. 8) felhasználásával $\mathfrak{B}_1\in \mathrm{Mod}_{\mu_2}(\Sigma)$ következik. Végül még azt kell megmutatnunk, hogy $\mathfrak{A}$ homomorf képe $\mathfrak{B}$-nek.

Értelmezzük az $\eta: B_2 \to A = |\mathfrak{A}|$ leképzést a következő módon. Legyen b B_2 tetszőleges eleme és legyen $c_{a_0}, \dots, c_{a_{n-1}}$ a b-ben előforduló összes különböző c_a $(a\in A)$ alakú individuumjel. Legyenek $x_0, \dots, x_{n-1}$ különböző, egyébként tetszőleges változók és végül legyen

$$\eta(b) = \overline{\left(b\begin{pmatrix} x_0, \dots, x_{n-1} \\ c_{a_0}, \dots, c_{a_{n-1}}\end{pmatrix}\right)}^{\mathfrak{A}'}\begin{bmatrix} a_0, \dots, a_{n-1} \\ x_0, \dots, x_{n-1}\end{bmatrix} \tag{10}$$

Könnyű belátni, hogy $\eta(b)$ így megadott értéke nem függ az x_i változók megválasztásától.[2] Világos, továbbá, hogy $\eta(b)\in A$ minden $b\in B_2$-re, és hogy η B_2-t az egész A halmazra képezi le, hiszen $\eta(c_a)=a$.

Azt állítjuk, hogy ha F tetszőleges μ *feletti* prímformula a $z_0, \dots, z_{l-1}$ különböző változókkal, továbbá $b_0, \dots, b_{l-1}\in B_2$, akkor

$$\mathfrak{B}_2 \models F\begin{bmatrix} b_0, \dots, b_{l-1} \\ z_0, \dots, z_{l-1}\end{bmatrix} \tag{11}$$

maga után vonja, hogy

$$\mathfrak{A} \models F\begin{bmatrix} \eta(b_0), \dots, \eta(b_{l-1}) \\ z_0, \dots, z_{l-1}\end{bmatrix} \tag{12}$$

Ennek bizonyítására tegyük fel, hogy (11) teljesül. Legyen $c_{a_0}, \dots, c_{a_{n-1}}$ az összes

[2] Ennek az állításnak a bizonyítása analóg a 4.1 Tétel bizonyításában szereplő lemma bizonyításával.

c_a $(a \in A)$ alakú individuumjel, amely $b_0, \ldots, b_{l-1}$ valamelyikében előfordul, és legyenek $x_0, \ldots, x_{n-1}$ különböző változók. Legyen

$$u_k = b_k \begin{pmatrix} x_0, \ldots, x_{n-1} \\ c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$k<l$ esetén, és legyen ψ az a helyettesítés, melyre dom $(\psi)=\{z_0, \ldots, z_{l-1}\}$ és $\psi(z_k) = u_k$. Legyen végül $G=F(\psi)=F\begin{pmatrix} u_0, \ldots, u_{l-1} \\ z_0, \ldots, z_{l-1} \end{pmatrix}$.

Természetesen $(F, \psi) \in Z$. (9) alapján (11) azt jelenti, hogy $\tilde{\delta}\left(F\begin{pmatrix} b_0, \ldots, b_{l-1} \\ z_0, \ldots, z_{l-1} \end{pmatrix}\right) = \uparrow$. Az $F\begin{pmatrix} b_0, \ldots, b_{l-1} \\ z_0, \ldots, z_{l-1} \end{pmatrix}$ formula azonos a $G\begin{pmatrix} c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix}$ formulával és ilyen módon $\tilde{\delta}\left(G\begin{pmatrix} c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix}\right) = \uparrow$. Ebből, és abból, hogy $\tilde{\delta}(D)=\uparrow$ Γ_2 minden D elemére következik, hogy $\neg G\begin{pmatrix} c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix}$ *nem* eleme Γ_2-nek. Ez utóbbi, Γ_2 definíciója szerint azt jelenti, hogy $\mathfrak{A}' \models \Psi_{F,\psi}\begin{bmatrix} a_0, \ldots, a_{n-1} \\ x_0, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}$. Mint tudjuk, $\Psi_{F,\psi} = F\begin{pmatrix} \bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{l-1} \\ z_0, \ldots, z_{l-1} \end{pmatrix}$. Figyelembe véve tehát η és u_k kifejezések definícióját (azaz (10)-t és (13)-t) azt kapjuk, hogy $\mathfrak{A}' \models F\begin{bmatrix} \eta(b_0), \ldots, \eta(b_{l-1}) \\ z_0, \ldots, z_{l-1} \end{bmatrix}$, amely ekvivalens a (12) bizonyítandó állítással.

Ha F-nek a $z_0 \approx z_1$ formulát választjuk, az előbbiek szerint azt kapjuk, hogy $b_0 \approx^{\mathfrak{B}_2} b_1$-ből következik $\eta(b_0)=\eta(b_1)$. Ezért a $\varphi([b])=\eta(b)$ egyenlőség egyértelműen definiálja a φ függvényt, amely $|\mathfrak{B}|=B$-t A-ra képezi le (itt $[b]$ az $\approx^{\mathfrak{B}_2}$ ekvivalencia reláció b-t tartalmazó ekvivalencia osztálya). Végül azt állítjuk, hogy φ $\mathfrak{B}$-nek homomorfizmusa $\mathfrak{A}$-ra. Tegyük fel ugyanis, hogy $\mathfrak{B} \models F\begin{pmatrix} [b_0], \ldots, [b_{l-1}] \\ z_0, \ldots, z_{l-1} \end{pmatrix}$ valamely F prímformula mellett. Ekkor fennáll (11) és így (12) is, tehát $\mathfrak{A} \models F\begin{pmatrix} \varphi([b_0]), \ldots, \varphi([b_{l-1}]) \\ z_0, \ldots, z_{l-1} \end{pmatrix}$ ami bizonyítja, hogy φ homomorfizmus.

Összefoglalva, $\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1 \upharpoonright \mu_1 \in \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma)$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1' \upharpoonright \mu$ és $\mathfrak{A}$ homomorf képe $\mathfrak{B}$-nek; más szóval $\mathfrak{A} \in \mathrm{Hom}\,(K)$ és ezt kellett bizonyítanunk.

I és II értelmében beláttuk, hogy $\mathrm{Hom}\,(K) = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma') \upharpoonright \mu$ és így 5. 5 bizonyítását befejeztük.

Az 5. 5 Tétel az 5. 2 Tétel „PC_Δ-analogonjának" tekinthető. A 5. 3 Tétel 5. 4-ből és 5. 5-ből most már könnyen következik.

MEGJEGYZÉS. Az 5. 3 (illetve a két későbbi) tétel nagy mértékben általánosítható olyan módon, hogy homomorfizmusok helyett olyan leképzéseket tekintünk, amelyek egy megadott, de tetszőleges formulahalmaz elemeire vonatkozólag rendelkeznek azzal az átörökítő tulajdonsággal, amellyel a homomorfizmusok a prímformulákra nézve bírnak; lásd Makkai [26].

További analóg eredmények kaphatók a $\mathrm{Hom}\,(K)=K$ feltétel helyett más zártsági feltételek mellett is. Így pl. Los [24] és Tarski [44] tétele kimondja, hogy tetszőleges $K \in PC_\Delta$ osztály esetén $\mathrm{Sub}(K) \in UC_\Delta$; tehát 5. 3 igaz a $\mathrm{Sub}(K)=K$ zártsági feltételre, ha $\mathfrak{F}$-nek a μ-feletti zárt univerzális formulák *halmazát* vesszük. A [9] dolgozat 2. 16 Tételének bizonyítási módszerével igazolni lehet, hogy 5. 3 igaz marad az $\mathrm{Ext}(K)=K$ feltételre vonatkozólag; itt $\mathfrak{F}$ mindazon kvantormentes zárt formulák osztálya, amelyek μ jelein kívül csak individuumjeleket tartalmaznak. Továbbá a szerző endomorfizmusokra (azaz az $\mathrm{End}(K)=K$ feltételre) is kiterjesztette 5. 5 bizonyításának módszerét. Azonban a szerző nem tudja, hogy az 5. 3 Tétel igaz marad-e a $\mathrm{Hom}(K)=K$ feltételnek tetszőleges $S_{R_i}(K)=K$ feltétellel való helyettesítése után is ($i=1, \ldots, 16$), így pl. nem tudja a választ az $E\,\mathrm{ext}(K)=K$ feltételre vonatkozólag.*

6. §. *Végtelen hosszú prefixummal rendelkező formulák*

Ebben a paragrafusban „formulán" mindig *véges* formulát értünk, hacsak mást nem mondunk.

Speciális PC_ω osztályokkal foglalkozunk. PC_ω szóban forgó részkategóriájának definíciója legszemléletesebben egy új formula fogalom bevezetésével történhet. Az új formulák végtelen hosszú prefixummal rendelkeznek. Konkrétan

$$(Q_0x_0Q_1x_1 \ldots Q_nx_n \ldots) \wedge \Sigma \tag{1}$$

alakúak, ahol Q_n $\forall$ vagy $\exists$ minden n természetes számra, Σ pedig véges formuláknak egy megszámlálható halmaza.

A 6. 1 Lemma szerint egy ilyen formula által definiált struktúraosztály PC_ω osztály. E vizsgálatok fő eredménye a 6. 4 Tétel, amely az újonnan bevezetett formulák segítségével megadja azon számlálható struktúrákból álló homomorfizmusra zárt K osztályoknak egy jellemzését, amelyekre $K=(K_1)^{(\omega)}$ valamely $K_1 \in PC_\omega$ osztály mellett. Végezetül eredményünket az 5. 2 Tétel bizonyítására alkalmazzuk.

KEISLER [18] az említettnél általánosabb végtelen hosszú formulákat használva, a *véges* formulákra vonatkozó öröklődési tételeknek (lásd III. fejezet) egy igen szép és egységes elméletét adta meg. A jelen szakaszban a bizonyítottak alkalmazásaképpen, az 5. 2 Tételen keresztül mi is bebizonyítjuk a homomorfizmusokra vonatkozó öröklődési tételt véges formulákra (lásd 6. 7 Korollárium).

SVENONIUS [41] a mi általunk vizsgált formulatipussal kapcsolatban bizonyított be egy eredményt (lásd 6. 2 Tétel). Módszerünk szorosan kapcsolódik SVENONIUS [41] dolgozatához.

Most rátérünk a fogalmak precíz definiálására. Egy *végtelen prefixumú* (v.p.) formula egy $\Phi=(p, M)=(p)M$ pár, ahol p (a formula *prefixuma*) a természetes számok halmazán értelmezett függvény, melynek $p(n)=Q_nx_n$ értékei $\forall x=(\forall, x)$ vagy $\exists x=(\exists, x)$ alakú kvantorok, különböző n és m indexek mellett x_n, x_m különböző változók, továbbá M $L(\omega_1, \omega)$ egy formulája, amely nem tartalmaz kötötten egyetlen x_n változót sem. Csak *zárt* v.p. formulákkal fogunk foglalkozni, azaz feltesszük, hogy M-ben csak a $p=\langle Q_nx_n : n<\omega\rangle$ prefixum x_n változói fordulnak elő szabadon. Tegyük fel, hogy az M-ben előforduló nem logikai jelek elemei μ-nek, μ megszámlálható hasonlósági típus.

Legyen U illetve W a p-ben univerzális, illetve egzisztenciális kvantorral lekö-

* (1972. június) A szerző azóta igenlő választ adott mindezekre a kérdésekre; az eredmények A. I. MALCEV emlékének szentelt egy cikkgyűjteményben jelennek meg.

tött változók halmaza; azaz $U = \{x_n : p(n) = (\forall, x_n),\ n<\omega\}$, $W = \{x_n : p(n) = (\exists, x_n)\ n<\omega\}$. Legyen $\langle u_i : i < \lambda\rangle$ illetve $\langle w_n : n < \nu\rangle$ az U, illetve a W halmaz elemeinek p-ben való előfordulásuk sorrendjében" való felsorolása, azaz pl. $\{u_i : i < \lambda\} = U$ és ha $i<j<\lambda$, $x_m = u_i$ és $x_n = u_j$, akkor $m<n$. Itt λ, illetve ν természetes szám, vagy pedig ω, aszerint, hogy véges vagy végtelen sok univerzális (illetve egzisztenciális) kvantor szerepel p-ben. Legyen minden $n<\nu$-re k_n a p-ben v_n előtt levő U-beli változók száma.

Legyen most $\mathfrak{A}$ egy μ típusú struktúra, $A = |\mathfrak{A}|$. Egy $f = \langle f_n : n = \omega\rangle$ függvénysorozatot, ahol f_n A-n értelmezett k_n-változós operáció, *$\mathfrak{A}$-beli Φ-re vonatkozó stratégiá*nak nevezünk. Megjegyezzük, hogy $k_n = 0$ esetén f_n mint 0-változós művelet A-nak egy rögzített eleme.

Legyen most $\alpha = \langle a_i : i < \lambda\rangle$ A elemeinek egy sorozata. Az $U \cup W$ változókból álló halmaz $\alpha : f$ értékelését határozzuk meg a következőképpen:

(1) $$(\alpha : f)(u_i) = a_i$$

(2) $$(\alpha : f)(w_n) = f_n(a_0, \ldots, a_{k_n - 1}).$$

Az f stratégiáról azt mondjuk, hogy *nyerő $\mathfrak{A}$-ban Φ-re nézve,* ha A elemeinek tetszőleges λ-típusú α sorozata mellett

(3) $$\models_{\mathfrak{A}} M[\alpha : f].$$

Végül *Φ igaz* $\mathfrak{A}$-ban, vagy *$\mathfrak{A}$ modellje* Φ-nek (jelben: $\models_{\mathfrak{A}} \Phi$ vagy $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Phi)$), ha van $\mathfrak{A}$-ban Φ-re nézve nyerő stratégia.

A nyerő stratégia fogalma még a következőképpen is megadható. Legyen Φ a fenti v.p. formula, $\mathfrak{A}$ μ típusú struktúra, $|\mathfrak{A}| = A$. Legyen q_n k_n-változós operációjel minden $n<\nu$-re úgy, hogy $q_n \neq q_{n'}$ ha $n \neq n'$ és $q_n \notin \mu$ minden $n, n' < \nu$-re. Megjegyezzük, hogy feltettük, hogy M nem tartalmazza kötötten $U \cup W$-nek egyetlen elemét sem. Legyen η a következő, az $U \cup W$ halmazon értelmezett helyettesítés:

(4) $$\eta(u) = u$$

minden $u \in U$-ra és

(5) $$\eta(w_n) = q_n u_0, \ldots, u_{k_n - 1}$$

minden $n<\nu$ mellett. Legyen $\mathfrak{A}'$ egy tetszőleges $\mu' = \mu \cup \{q_n : n < \nu\}$ típusú struktúra, amelyre $\mathfrak{A}' \upharpoonright \mu = \mathfrak{A}$. Ekkor $\langle f_n^{\mathfrak{A}'} : n < \nu\rangle$ nyerő stratégia Φ-re nézve $\mathfrak{A}$-ban akkor és csak akkor, ha

$$\models_{\mathfrak{A}'} M(\eta)[\xi]$$

az U-beli változóknak minden $\mathfrak{A}'$-beli ξ értékelése mellett. Ez az állításunk az I. fej. (2. 5) és a nyerő stratégia definíciója alapján azonnal világos.

Most tegyük fel, hogy $M \doteq \bigwedge \Delta$, ahol Δ véges formuláknak egy megszámlálható halmaza. Ekkor Φ-t *konjunktívnak* nevezzük. Legyen $\Sigma = \{\forall(F(\eta)) : F \in \Delta\}$ a fenti η helyettesítés mellett (lásd (4) és (5)). Legutóbbi állításunkat átfogalmazva azt kapjuk, hogy $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Phi)$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma) \upharpoonright \mu$.

Ezzel beláttuk a következő állítást:

6. 1 LEMMA. *Tetszőleges Φ μ feletti konjunktív v.p. formula esetén* $\mathrm{Mod}_\mu(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma) \upharpoonright \mu$ *(ahol Σ az előbb konstruált formulahalmaz) és így* $\mathrm{Mod}_\mu(\Phi) \in PC_\omega$.

SVENONIUS bebizonyította a lemma következő részleges megfordítását.

6. 2 TÉTEL (SVENONIUS [41]). *Ha* $K \in PC_\omega(\mu)$, *akkor van olyan konjunktív v.p.* Φ *formula, amelyre* $K^{(\omega)} = \mathrm{Mod}_\mu^{(\omega)}(\Phi)$.

Más szóval, a 4. 1 Lemma megfordítása érvényes, amennyiben megszámlálható struktúrákra szorítkozunk.

Ezen szakasz fő eredménye, a 6. 4 Tétel megértésének érdekében először a következő, lényegében triviális lemmát bizonyítjuk be.

6. 3. LEMMA. *Ha* $\Phi = (p)M = (p)\bigwedge \Gamma$ *konjuktív* μ*-feletti v. p. formula, ahol* Γ *elemei pozitív kvantormentes véges formulák, akkor* $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Mod}_\mu\,(\Phi)) = \mathrm{Mod}_\mu\,(\Phi)$.

Bizonyítás. 6. 1 értelmében $K =_{\mathrm{df}} \mathrm{Mod}_\mu\,(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma)\restriction\mu$ ahol μ' és Σ a 6. 1 Lemma előtt definiált hasonlósági típus, illetve formula-halmaz. A konstrukció értelmében Σ minden eleme logikailag ekvivalens $\mathfrak{F}_{\mathrm{Hom}}(\mu)$ egy elemével [3] (az $\mathfrak{F}_{\mathrm{Hom}}(\mu)$ osztály definícióját illetőleg lásd az 5. §-t). Az 5. 4 Tételből következik állításunk.

Megjegyezzük, hogy könnyen igazolni lehetne azt az általánosabb állítást is, hogy $K = \mathrm{Mod}_\mu((p)M)$ esetén K zárt homomorfizmusra, ha $ML(\omega_1, \omega)$-nak tetszőleges pozitív formulája.

A most következő tétel 6. 3-nak részleges megfordítása (akárcsak *Svenonius*-tétele 6. 1-nek).

A 6. 4 Tétel bizonyítása szoros kapcsolatban áll SVENONIUS bizonyításával; nevezetesen, mindkét bizonyítás első és fő lépése egy adott elmélet *Henkin*-elméletté való lezárása (lásd a 6.4 Tétel bizonyításában a Σ' formulahalmaz definícióját).

6. 4 TÉTEL. *Legyen* $K \in PC_\omega(\mu)$. *Ekkor létezik olyan* $\Phi = (p)\bigwedge\Gamma$ *v.p. formula, amelyre a* Γ *megszámlálható halmaz elemei véges pozitív kvantormentes* μ*-formulák és* $\mathrm{Hom}^{(\omega)}(K) = \mathrm{Mod}_\mu^{(\omega)}\,(\Phi)$.

Bizonyítás. Feltevésünk szerint

$$K = \mathrm{Mod}_{\mu_1}(\Sigma_1)\restriction\mu$$

bizonyos megszámlálható μ_1 hasonlósági típus és Σ_1 zárt μ_1-formulákból álló halmaz mellett; természetesen $\mu \subseteq \mu_1$.

Legyen E μ_1-hez nem tartozó individuumjeleknek egy megszámlálhatóan végtelen halmaza, legyen C' E-nek egy végtelen részhalmaza úgy, hogy $E - C'$ is végtelen és legyen $\langle \exists x_i F_i : i < \omega\rangle$ a $\mu_1 \cup E$ feletti $\exists x F$ alakú zárt formuláknak egy felsorolása. Minden $n < \omega$-ra definiáljuk a $d_n \in E$ individuumjelet n szerinti rekurzióval a következőképpen. Tegyük fel, hogy d_m $m < n$-re már definiálva van. Legyen d_n valamely (vagy pedig E egy rögzített megszámlálásában az első olyan) $E - C'$-beli elem, melyre $d_n \neq d_m$ minden $m < n$ mellett és d_n nem fordul elő $\exists x_m F_m$-ben egyetlen $m \leqq n$)!) index mellett sem. Legyen $D =_{\mathrm{df}} \{d_n : n < \omega\}$ és $C =_{\mathrm{df}} E - D \supseteq E - (E - C') = C'$. C tehát végtelen, továbbá $C \cap D = \mathrm{O}$ és $C \cup D = E$.

Legyen

(6)
$$\Sigma' = \Sigma_1 \cup \{\exists x_n F_n \to F_n(d_n/x_n) : n < \omega\},$$

legyen továbbá Γ azon véges, pozitív, zárt, kvantormentes $\mu \cup E$ (!) feletti formuláknak a halmaza, melyek következményei Σ'-nek. Legyen továbbá π E-nek egy kölcsönösen egyértelmű leképzése változóknak egy halmazára. A megkonstruálandó

[3] Ennek belátásához Σ $\forall(H)$ alaku elemeiben az F formulát diszjunktiv normálformára kell hozni.

Φ v.p. formula magja legyen az $M = \bigwedge \{G(\pi): G \in \Gamma\}$ végtelen konjunkció. Φ p prefixumát úgy adjuk meg, hogy a következők teljesüljenek:

(i) $p\langle Q_n x_n : n < \omega\rangle$ alakú sorozat ahol $Q_n = \forall$ vagy $Q_n = \exists$, x_n változó és $x_n \neq x_m$ ha $n \neq m$, minden n és m természetes számra,

(ii) $rn(p)$ elemei vagy $\forall u$,vagy pedig $\exists v$ alakúak, ahol $u \in rn(\pi \upharpoonright C)$ és $v \in rn(\pi \upharpoonright D)$,

(iii) $\exists \pi(d_m)$ megelőzi $\exists \pi(d_n)$-t p-ben akkor és csak akkor, ha $m < n$,

(iv) tetszőleges $c \in C$ és $n < \omega$ mellett, $\forall \pi(c)$ megelőzi $\exists \pi(d_n)$-t p-ben akkor és csak akkor, ha c előfordul F_m-ben valamely $m \leqq n$ index mellett. p-nek csak ezeket a tulajdonságait fogjuk kihasználni.

p konkrét megadásához legyen $\langle c_i' : i < \omega\rangle$ C-nek egy ismétlés nélküli felsorolása. Legyen $y_i = \pi(c_i')$ és $w_n = \pi(d_n)$ $(i < \omega,\ n < \omega)$. Tetszőleges $n < \omega$ mellett legyen $\langle c_{i_j}' : j < r_n\rangle$ azon C-beli individuumjeleknek növekvő i_j indexek szerinti ismétlés nélküli felsorolása, amelyek előfordulnak F_n-ben, de nem fordulnak elő egyetlen F_m-ben sem, ha $m < n$. r_n egy esetleg 0-val egyenlő természetes szám. Legyen $l_n = \sum_{i<n} (r_i + 1) + r_n$ tetszőleges $n < \omega$ esetén és l_{-1} legyen -1. $p = \langle p(r) : r < \omega\rangle$ definíciójához válasszunk egy tetszőleges r természetes számot. Ekkor egy egyértelműen meghatározott n természetes szám mellett $l_{n-1} < r \leqq l_n$, azaz $r = \sum_{-1 \leqq i < n} (r_i + 1) + s$ ahol $o \leqq s \leqq r_n$. Ha $s = r_n$, $p(r)$ legyen $\exists w_n$, ha pedig $o \leqq s < r_n$, $p(r)$ legyen $\forall y_{i_s}$. Könnyű belátni, hogy az így definiált p sorozat valóban kielégíti az (i)—(iv) követelményeket.

Ezáltal a $\Phi = (p)M$ v.p. formulát definiáltuk.

A következőkben a 230—231. oldalon bevezetett értelemben használjuk az u_i, w_n, k_n jelöléseket. Figyeljük meg, hogy az ottani λ és ν egyenlők ω-val. Legyen a fent bevezetett π leképezés mellett $c_i = \pi^{-1}(u_i) i < \omega$-ra. A p-re vonatkozó (ii) és (iii) feltételek miatt $w_n = \pi(d_n)$ (mivel $\langle w_n : n < \omega\rangle$ a p-ben egzisztenciális kvantorban szereplő változóknak p-ben való előfordulásuk szerinti felsorolása). A p-re vonatkozó (iv) feltétel miatt $\{c_i : i < k_n\}$ azon C-beli individuumjelek halmaza, amelyek előfordulnak F_m-ben valamely $m \leqq n$ mellett.

I. Hom $(K) \subseteqq \mathrm{Mod}_\mu(\Phi)$ *bizonyítása.*

Tegyük fel, hogy

$$\mathfrak{B}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma'),$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \upharpoonright \mu,$$

és h $\mathfrak{B}$-nek egy homomorfizmusa $\mathfrak{A}$-ra.

Először definiálni fogjuk minden $n < \omega$-ra n szerinti rekurzióval a g_n k_n-változós operációt a $B = |\mathfrak{B}|$ halmazon. Tegyük fel, hogy g_m $m < n$ esetén már definiálva van. Legyen minden $i < k_n$-re b_i B-nek egy tetszőleges eleme. Meg kell határoznunk a $b = g_n(b_0, \ldots, b_{k_n - 1})$ elemet. Ennek érdekében értelmezzük a $\varphi^{(n)}$ függvényt az $E_n = \{c_i : i < k_n\} \cup \{d_m : m < n\}$ halmazon a következőképpen:

$$\varphi^{(n)}(c_i) = b_i \quad (i < k_n) \tag{7}$$

$$\varphi^{(n)}(d_m) = g_m(b_0, \ldots, b_{k_m - 1}) \quad (m < n) \tag{8}$$

Egy előbbi megjegyzésünk szerint az F_n-ben előforduló E-beli individuumjelek mind E_n-hez tartoznak. Legyen

(9) $$b = g_n(b_0, \ldots, b_{k_n-1})$$

B-nek egy olyan eleme, melyre

(10) $$(\mathfrak{B}', \varphi^{(n)} + (d_n, b)) \models \exists x_n F_n \rightarrow F_n(d_n/x_n)$$

(lásd I. fejezet (2. 7.) (e)). Ezáltal a g_n függvényt definiáltuk a rögzített n-re és így rekurzióval minden $n<\omega$-ra.

Definiáljuk most az $\langle f_n : n < \omega \rangle$ Φ-re vonatkozó stratégiát $\mathfrak{A}$-ban a következőképpen. Legyen h' A-nak B-be való valamely olyan leképezése, amelyre $h(h'(a)) = a$ minden $a \in A$-ra. Legyen $n<\omega$, $a_0, \ldots, a_{k_n=1}$ $A = |\mathfrak{A}|$ tetszőleges elemei és legyen

(11) $$f_n(a_0, \ldots, a_{k_n-1}) =_{\mathrm{df}} h(g_n(h'(a_0), \ldots, h'(a_{k_n-1}))).$$

Az állítjuk, hogy $\langle f_n : n < \omega \rangle$ nyerő stratégia $\mathfrak{A}$-ban Φ-re nézve. Ennek belátásához legyen a_i A tetszőleges eleme minden $i<\omega$-ra, legyen $\alpha = \langle a_i : i < \omega \rangle$ és $b_i = h'(a_i)$ $i<\omega$-ra. Értelmezzük a φ leképezést az E halmazon a következőképpen:

(12) $$\varphi(c_i) = b_i$$

(13) $$\varphi(d_n) = g_n(b_0, \ldots, b_{k_n-1}).$$

Mivel minden n természetes számra φ kiterjesztése a $\varphi^{(n)} + (d_n, b)$ függvénynek (ahol $\varphi^{(n)}$-t a (7), (8) egyenlőségek határozzák meg, b pedig a (9)-ben szereplő elem), ezért (10) miatt

$$(\mathfrak{B}', \varphi) \models \exists x_n F_n \rightarrow F(d_n/x_n)$$

minden $n<\omega$-ra. Σ' (6) alatti definíciója miatt tehát $(\mathfrak{B}', \varphi)$ modellje Σ'-nek és így Γ minden F elemének is. Tehát $(\mathfrak{B}, \varphi)$ is modellje Γ minden F elemének (hiszen F $\mu \cup E$ feletti formula).

Azt állítjuk, hogy az (1) és (2) által meghatározott $\alpha : f$ értékelés azonos a $h \circ \varphi \circ \pi^{-1}$ összetett függvénnyel. Valóban, mindkét függvény értelmezési tartománya $U \cup W$; ha pedig $i<\lambda=\omega$, akkor $(h \circ \varphi \circ \pi^{-1})(u_i) = h(b_i) = a_i = (\alpha : f)(u_i)$ és ha $n<\nu=\omega$ akkor (13)-t és (11)-t is használva kapjuk, hogy $(h \circ \varphi \circ \pi^{-1})(w_n) = h(g_n(b_0, \ldots, b_{k_n-1})) = f_n(a_0, \ldots, a_{k_n-1})) = (\alpha : f)(w_n)$, amit be kellett látnunk.

Legyen most G Γ tetszőleges eleme. Mint mondottuk, $(\mathfrak{B}, \varphi) \models G$, és így (2. 5)-t is használva $\mathfrak{B} \models G(\pi)[\varphi \circ \pi^{-1}]$, Mivel h $\mathfrak{B}$-nek $\mathfrak{A}$-ra való homomorfizmusa és G pozitív, ezért $\mathfrak{A} \models G(\pi)[h \circ \varphi \circ \pi^{-1}]$ (I. fej. (3. 1.)). Más szóval $\mathfrak{A} \models G(\pi)[\alpha : f]$. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathfrak{A} \models \bigwedge \{G(\pi) : G \in \Gamma\}[\alpha : f]$, azaz $\mathfrak{A} \models M[\alpha : f]$. Ezzel beláttuk, hogy $f = \langle f_n : n<\omega \rangle$ valóban nyerő stratégia $\mathfrak{A}$-ban Φ-re vonatkozólag, és így $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Phi)$, amit meg kellett mutatnunk.

II. $\mathrm{Mod}_\mu^{(\omega)}(\Phi) \subseteq \mathrm{Hom}\,(K)$ *bizonyítása.*

Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{A}$ megszámlálható μ-struktúra Φ-nek modellje. Ezek szerint van $f = \langle f_n : n<\omega \rangle$ $\mathfrak{A}$-ban Φ-re nézve nyerő stratégia.

Legyen $\alpha = \langle a_i : i<\omega \rangle$ A elemeinek egy (nem feltétlenül ismétlés nélküli) felsorolása. Legyen Δ azon $\mu \cup E$ feletti zárt $\neg F$ negált prímformuláknak a halmaza, melyekre $\mathfrak{A} \models \neg F(\pi)[\alpha : f]$. Azt állítjuk, hogy $\Sigma' \cup \Delta$ konzisztens. A kompaktsági tétel (I. fej. (2.14.)) értelmében elég $\Sigma' \cup \Delta$ véges részhalmazainak a konzisztenciáját kimutatni. Legyen $\neg F_1, \ldots, \neg F_k$ Δ tetszőleges, véges sok eleme. Tegyük fel, hogy $\Sigma' \cup \{\neg F_1, \ldots, \neg F_k\}$ ellentmondásos, azaz $\Sigma' \models \bigvee_{i=1}^{k} F_i$. Ezek szerint, mivel $\bigvee_{i=1}^{k} F_i$ pozitív, $\bigvee_{i=1}^{k} F_i \in \Gamma$ Γ definíciója szerint. Mivel az f nyerő stratégia $\mathfrak{A}$-ban Φ-re nézve, azért $\mathfrak{A} \models M[\alpha:f]$ és így, mivel $M = \bigwedge \{G(\pi): G \in \Gamma\}$, $\mathfrak{A} \models \bigvee_{i=1}^{k} F_i(\pi)[\alpha:f]$, azaz $\mathfrak{A} \models F_i(\pi)[\alpha:f]$ valamely $i=1, \ldots, k$ index mellett. Ez ellentmond annak, hogy $\neg F_i \in \Delta$. Tehát valóban, $\Sigma' \cup \{\neg F_1, \ldots, \neg F_k\}$ konzisztens, és így $\Sigma' \cup \Delta$ is konzisztens, ahogyan állítottuk.

Legyen $\mathfrak{B}_1$ $\Sigma' \cup \Delta$-nak egy $\mu' \cup E$ típusú modellje. Σ' definíciója miatt $\mathfrak{B}_1$ és az E individuumjelekből álló halmaz kielégíti az I. fej. (3. 4.) állításának feltételét, tehát $\mathfrak{B}_1$-nek az a $\mathfrak{B}_2$ részstruktúrája, melyre $B =_{df} |\mathfrak{B}_2| =_{df} \{e^{\mathfrak{B}_1}: e \in E\} = \{e^{\mathfrak{B}_2}: e \in E\}$ szintén modellje $\Sigma' \cup \Delta$-nak. Legyen $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_2 \restriction \mu'$ és $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \restriction \mu = \mathfrak{B}_2 \restriction \mu$. Mivel $\Sigma \subseteq \Sigma'$, azért $\mathfrak{B}' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma)$.

Végül azt állítjuk, hogy a

$$h(e^{\mathfrak{B}_2}) = (\alpha:f)(\pi(e)) \tag{14}$$

egyenlőség egyértelműen definál B-n egy h leképzést, továbbá, hogy h $\mathfrak{B}$-nek $\mathfrak{A}$-ra való homomorfizmusa.

Tegyük fel, hogy $(\alpha:f)(\pi(e_1)) \neq (\alpha:f)(\pi(e_2))$ E valamely e_1 és e_2 elemére. Ekkor tehát $\mathfrak{A} \models \neg e_1 \approx e_2(\pi)[\alpha:f]$, azaz $\neg e_1 \approx e_2 \in \Delta$, és így $\mathfrak{B}_2 \models \neg e_1 \approx e_2$ azaz $e_1^{\mathfrak{B}_1} \neq e_2^{\mathfrak{B}_2}$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (14) egyenlőségnek eleget tevő h leképezés valóban létezik. Természetesen h egyértelműen meghatározott (14) által.

Legyen most F tetszőleges μ feletti prímformula, φ pedig F (szabad) változói X halmazának egy $\mathfrak{B}$-beli értékelése. $x \in X$ mellett legyen $\varphi(x) = (\psi(x))^{\mathfrak{B}_2}$, ahol $\psi(x)$ E-nek egy megfelelő eleme minden $x \in X$-re. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{B} \models F[\varphi]$. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{A} \models F[h \circ \varphi]$; ehhez tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} \models \neg F[h \circ \varphi]$. (14) szerint $h \circ \varphi = (\alpha:f) \circ \pi \circ \psi$, és így $\mathfrak{A} \models \neg F(\psi)(\pi)[\alpha:f]$. A $\neg F(\psi)$ formula tehát eleme Δ-nak és így $\mathfrak{B}_2 \models \neg F(\psi)$. Más szóval $\mathfrak{B}_2 \models \neg F[\varphi]$, azaz $\mathfrak{B} \models \neg F[\varphi]$, mivel F μ-formula. Ez ellentmond azon feltevésünknek, hogy $\mathfrak{B} \models F[\varphi]$; így valóban $\mathfrak{A} \models F[h \circ \varphi]$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy h valóban homomorfizmus.

Az, hogy a h leképzés a teljes A halmazra történik, abból következik, hogy $A = rn(\alpha) \subseteq rn(\alpha:f)$.

Összefoglalva: beláttuk, hogy $\mathfrak{A}$ homomorf képe Σ egy modelljének, q.e.d. Ezzel a 6. 4 Tétel bizonyítását befejeztük.

MEGJEGYZÉS. A homomorfizmus fogalma mellett még néhány más algebrai fogalommal kapcsolatban is igazak bizonyos, a most bizonyított tétellel analóg eredmények. Így például, ha $K \in PC_\omega(\mu)$ és a $K_1 = \mathrm{Sub}^{(\omega)}(K)$ osztálynak keressük egy, a 6. 4. Tétel szellemében történő jellemzését, akkor természetes azt a kérdést felvetni, hogy K_1 előállítható-e $\mathrm{Mod}_\mu^{(\omega)}(\Phi)$ alakban, ahol a Φ konjunktív v.p. formula prefixumában csak univerzális kvantor szerepel, magja pedig kvantormentes. A válasz természetesen igenlő, hiszen egy zárt univerzális μ-formulákból álló megszámlálható Σ halmaz esetén $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) = \mathrm{Mod}_\mu(\Phi)$ egy mondott típusú Φ v.p. formulára, és így az állítás a *Łoś—Tarski*-tételnek egy gyengített változata (amennyiben megszámlálható struktúrákra szorítkozunk csak). Másik példaként megemlítjük, bizonyítás nélkül, a következő állítást.

6. 5. TÉTEL. *Ha $K \in PC_\omega(\mu)$, akkor van olyan Φ konjunktív v.p. formula, melyre* $\mathrm{Ext}(K) = \mathrm{Mod}_\mu(\Phi)$, *$\Phi$ prefixumában csak egzisztenciális kvantor fordul elő és Φ magja kvantormentes.*

A bizonyítás nagyon hasonló a 6. 4 Tétel bizonyításához.

Megjegyezzük azonban, hogy nem sikerült minden egyes, az I. fej. 3. §-ban definiált, struktúrák közötti R_i reláció esetén a megfelelő típusú tételt bebizonyítani; nevezetesen az E-kiterjesztés fogalma állt ellen az ilyen irányú próbálkozásnak; annak ellenére, hogy a sejtés ebben az esetben is kézenfekvő. Ebben az esetben ti. korlátozott kvantorokat tartalmazó végtelen prefixumokat kell tekinteni; ennek további részletezésétől eltekintünk.*

Szeretnénk rámutatni az 5. 5 és a 6. 4 tételek kapcsolatára. Amint 6. 3 bizonyításában említettük, egy a 6. 4 Tételben szereplő v. p. formulához a 6. 1 Lemma értelmében konstruált Σ formulahalmaz minden eleme logikailag ekvivalens egy $\mathfrak{F}_{\mathrm{Hom}}(\mu)$-beli formulával. Ilyen módon tehát, alkalmazva a 6. 4 Tételt és a 6. 1 Lemmát kapjuk, hogy tetszőleges $K \in PC_\omega(\mu)$ esetén $\mathrm{Hom}^{(\omega)}(K) = \mathrm{Mod}_{\mu'}^{(\omega)}(\Sigma') \upharpoonright \mu$ valamely $\Sigma' < \mathfrak{F}_{\mathrm{Hom}}(\mu)$ formulahalmaz mellett. Ez az 5. 5 Tételbe megy át, ha (i) PC_ω-t PC_Δ-val helyettesítjük és (ii) a felső (ω) indexeket elhagyjuk.[4] Másrészt, a 6. 4 tétel annyiban mond többet, mint 5. 5, amennyiben a 6. 4-ben szereplő Σ' halmaz a következő speciális tulajdonsággal rendelkezik. Σ' elemei kvantormentes μ-formulákból változóknak egy bizonyos Z halmazba tartozó μ-egyszerű (lásd 5. §.) kifejezésekkel való helyettesítésével keletkeznek, ahol Z bármely két $fz_0, \ldots, z_{l-1}, f'z'_0, \ldots, z'_{l'-1}$ elemére ha $l \leq l'$, akkor $z'_0 = z_0, \ldots, z'_{l-1} = z_{l-1}$. Ez a további tulajdonság teszi lehetővé 6. 4-nek a *Lyndon*-tétel bizonyítására való most következő alkalmazását is.

Megismételve már előzőleg használt jelöléseket, legyen Φ egy μ-típusú konjunktív v.p. formula, legyen p Φ prefixuma, $M = \bigwedge \Gamma$ Φ magja, legyen továbbá $\langle u_i : i < \lambda \rangle$ illetve $\langle w_n : n < \nu \rangle$ a p-ben levő univerzális, illetve egzisztenciális kvantorral lekötött változók U, illetve W halmazának a változók p-ben való előfordulása szerinti felsorolása, k_n a w_n előtt előforduló u_i változók száma, q_n k_n-változós operációjel ($q_n \notin \mu$, $q_n \neq q_m$ ha $n \neq m$), $\mu' = \mu \cup \{q_n : n < \nu\}$, η az a helyettesítés, melyre $\mathrm{dom}(\eta) = U \cup W$, $\eta(u_i) = u_i (i < \lambda)$ és $\eta(w_n) = q_n(u_0, \ldots, u_{k_n - 1})$ és végül legyen Σ a $\forall(G(\eta))$ alakú formulák halmaza, ahol $G \in \Gamma$. 6. 1 szerint $\mathrm{Mod}_\mu(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mu'}(\Sigma) \upharpoonright \mu$.[5]

6. 6. LEMMA. (i) *Ha $\Sigma \models F$ ahol F tetszőleges zárt μ-formula, akkor van Γ-nak olyan Γ' véges részhalmaza, melyre $[\Gamma'] \models F$.*

(ii) *Γ tetszőleges Γ' véges részhalmazára $\Sigma \models [\Gamma']$.*

Bizonyítás (ad (i)), Állításunk azonnal következik az *I.* fej. (2. 11.) állításából és a kompaktsági tételből, ugyanis η a $p^{(k)} \bigwedge \Gamma' = [\Gamma']$ formulára nézve *normális* helyettesítés. Részletesebben, ha $\Sigma \models F$ akkor F logikai következménye Σ valamely véges részhalmazának, azaz $\bigwedge\limits_{G \in \Gamma'} \forall(G(\eta)) \models F$ Γ valamely Γ' véges rész-

* (1972. június) A szerző egy általános eredménye igenlő választ ad ezekre a kérdésekre; lásd *Fundamenta Math.* 73 (1972), 219—233.

[4] Ez természetesen nem bizonyítása 5.5-nek; ellenkezőleg, arra akartunk rámutatni, hogy 5.5 mennyiben *erősebb*, mint 6.4.

[5] Legyen $\Gamma' \in S_\omega(\Gamma)$, és legyen $p^{(k)} = p \upharpoonright k$, ahol k az a legkisebb természetes szám, amelyre $\bigwedge \Gamma'$ minden szabad változója benne van az $\{x_j : j < k\}$ halmazban; itt $p = \langle Q_n x_n : n < \omega \rangle$. Más szóval, a $p^{(k)}$ prefixum p-nek az a legrövidebb kezdőszelete, amely tartalmazza $\bigwedge \Gamma'$ összes szabad változóját. Definiáljuk $[\Gamma']$-t, mint a $(p^{(k)}) \bigwedge \Gamma'$ zárt prenex μ-formulát.

halmazára. Ez más szóval azt jelenti, hogy $\forall(\wedge\Gamma'(\eta))\models F$ és így (2. 11) szerint $(p^{(k)})\wedge\Gamma'\models F$, q.e.d.

Az 5. 2. Tétel bizonyítása a $K\in PC_\omega(\mu)$ esetre.

Legyen $K\in PC_\omega(\mu)$ és $\Sigma_0 = Th(K)\cap\Delta$ ahol Δ a pozitív μ-formulák halmaza. Ha $\mathfrak{B}\in\overline{\mathrm{Hom}(K)}$ akkor definíció szerint $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{B}'$ valamely $\mathfrak{B}'\in\mathrm{Hom}(K)$ struktúra mellett. A (triviális) 5. 1 Lemma értelmében $\mathfrak{B}'\in\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0)$, tehát $\mathfrak{B}\in\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0)$, mivel a $\overline{\mathrm{Hom}(K)}\subseteq\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0)$ inklúziót beláttuk.

A másik irányú inklúzióra rátérve, először is 6. 4 és 6. 1 értelmében $\mathrm{Hom}^{(\omega)}(K)= =\mathrm{Mod}_\mu^{(\omega)}(\Phi)=\mathrm{Mod}_{\mu'}^{(\omega)}(\Sigma)\restriction\mu$, ahol a $\Phi = (p)\wedge\Gamma$ v.p. formulában Γ elemei pozitív kvantormentes μ-formulák, továbbá a μ' hasonlósági típus és a Σ halmaz 6. 1 (és 6. 6) előtt elmondott módon vannak megkonstruálva.

Tegyük fel, hogy valamely F zárt μ-formulára $\Sigma\models F$. Azt állítjuk, hogy ekkor $F\in Th(K)$. Valóban, ha $\mathfrak{A}$ K tetszőleges eleme, akkor a Löwenheim—Skolem tétel (I. (2. 13.)) értelmében van K-ban $\mathfrak{A}$-val elemileg ekvivalens $\mathfrak{A}'$ megszámlálható struktúra (felhasználva azt is, hogy $K\in PC_\omega$). Ekkor méginkább $\mathfrak{A}'\in\mathrm{Hom}^{(\omega)}(K)$, tehát $\mathrm{Hom}^{(\omega)}(K) = \mathrm{Mod}_{\mu'}^{(\omega)}(\Sigma)\restriction\mu$ miatt Σ valamely μ' típusú $\mathfrak{A}''$ modelljére $\mathfrak{A}' = = \mathfrak{A}''\restriction\mu$. Mivel $\Sigma\models F$, azért $\models_{\mathfrak{A}''}F$ és így $\models_{\mathfrak{A}'}F$, tehát $\models_{\mathfrak{A}}F$ ($\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}'$ miatt) amit be kellett látnunk.

Legyen most $\mathfrak{B}$ $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0)$ tetszőleges eleme. Azt állítjuk, hogy $\Sigma\cup Th(\mathfrak{B})$ konzisztens. Ekkor elegendő belátni, hogy $\Sigma\cup\{F_1, \ldots, F_k\}$ konzisztens, ha $k<\omega$ és $F_1, \ldots, F_k$ tetszőleges véges sok formula $Th(\mathfrak{B})$-ből. Tegyük fel, hogy ellenkezőleg, $\Sigma\models\neg\bigwedge_{i=1}^{k}F_i\,{}_{\mathrm{df}}{=}F$. Ekkor 6. 6 (i) szerint $[\Gamma']\models F$, ahol $[\Gamma'] = (p^{(k)})\wedge\Gamma'$ Γ valamely Γ' véges részhalmazára és $p^{(k)}$ valamely véges prefixum. $[\Gamma']$ tehát pozitív zárt μ formula. Másrészt 6. 6. (ii) szerint $\Sigma\models[\Gamma']$, tehát az előző bekezdésben mondottak szerint $[\Gamma']\in Th(K)$. Mivel $[\Gamma']$ pozitív, azért tehát $[\Gamma']\in\Sigma_0$, és így $\models_{\mathfrak{B}}[\Gamma']$. De ekkor $[\Gamma']\models F$ miatt $\models_{\mathfrak{B}}F$, ami nem igaz, hiszen $F = \neg\bigwedge_{i=1}^{k}F_i$ és $F_i\in Th(\mathfrak{B})$ $(i=1, \ldots, k)$. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $\Sigma\cup\{F_1, \ldots, F_k\}$ konzisztens. Tehát $\Sigma\cup Th(\mathfrak{B})$ is konzisztens, ahogyan állítottuk.

Legyen (a *Löwenheim—Skolem*-tétel felhasználásával) $\mathfrak{B}'$ $\Sigma\cup Th(\mathfrak{B})$-nek egy tetszőleges μ' típusú megszámlálható modellje. Mivel $\mathrm{Hom}^{(\omega)}(K) = \mathrm{Mod}_{\mu'}^{(\omega)}(\Sigma)\restriction\mu$, azért $\mathfrak{B}'\restriction\mu\in\mathrm{Hom}^{(\omega)}(K)$ másrészt $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{B}'\restriction\mu$. Ez bizonyítja, hogy $\mathfrak{B}\in\overline{\mathrm{Hom}(K)}$. Mivel $\mathfrak{B}$ $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0)$-nak tetszőleges eleme volt, ezzel beláttuk, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0)\subseteq\overline{\mathrm{Hom}(K)}$, q.e.d.

6. 7 KOROLLÁRIUM. (LYNDON [25]). *Tetszőleges véges F és H zárt μ-formulák mellett a következő két feltétel egymással ekvivalens.*

1. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúrákra, ha $\mathfrak{B}$ homomorf képe $\mathfrak{A}$-nak és $\models_{\mathfrak{A}}F$, akkor $\models_{\mathfrak{B}}H$.*
2. *Van olyan G pozitív zárt μ-formula, melyre $F\models G\models H$.*

Bizonyítás. A (triviális) (2.)$\Rightarrow$(1.) implikációt a következő fejezetben bizonyítjuk. Tegyük most fel, hogy F és H kielégíti az 1. feltételt. Legyen $K=\mathrm{Mod}_\mu(F)$. Feltevésünk más szóval azt jelenti, hogy $H\in Th(\mathrm{Hom}(K)) = Th(\overline{\mathrm{Hom}(K)})$. Az 5. 2 Tétel értelmében tehát $H\in Th(\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_0))$, ahol $\Sigma_0\subseteq Th(K)$ és Σ_0 elemei pozitív formulák. Más szóval, $\Sigma_0 \models H$. A kompaktsági tételt alkalmazva kapjuk, hogy $G \models H$ valamely pozitív $G \in Th(K)$ formulára, azaz amelyre $F \models G$, q.e.d.

Megjegyezzük, hogy a 6. 7 állítást véges formulák helyett az $L(\omega_1, \omega)$ formuláira egyéb hasonló állítások mellett a következő fejezetben fogjuk bizonyítani.

III. fejezet. Megszámlálható konjunkcióval és diszjunkcióval képzett formulák

7. §. *Bevezetés és előkészítő lemmák*

Ennek a fejezetnek fő célja a 8. § öröklődési tételeinek bizonyítása. A hagyományos szóhasználat szerint egy adott, μ típusú struktúrák közötti R reláció esetén az ehhez tartozó öröklődési tétel formája a következő.

Ahhoz, hogy tetszőleges $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ μ-struktúrák esetén abból, hogy $\mathfrak{A}R\mathfrak{B}$ és $\models_{\mathfrak{A}} F$ következzék, hogy $\models_{\mathfrak{B}} F$, szükséges és elegendő, hogy F logikailag ekvivalens legyen egy a Δ halmazba tartozó zárt formulával.

Ugyanezt az állítást struktúraosztályokon végzett műveletekkel kifejezve a következőt kapjuk:

Tetszőleges F μ-formula mellett, a $K = \mathrm{Mod}_\mu(F)$ osztályra az $S_R(K) \subseteq K$ inklúzió akkor és csak akkor teljesül, ha $K = \mathrm{Mod}_\mu(G)$ valamely $G \in \Delta$ zárt formula mellett.

Itt a Δ halmaz valamely szintaktikus módon megadott formulahalmaz. Pl. legyen az „$\mathfrak{A}R\mathfrak{B}$" reláció: „$\mathfrak{B}$ homomorf képe $\mathfrak{A}$-nak". Ekkor a fenti tétel igaz a pozitív zárt μ-formulák Δ halmaza mellett. Ez LYNDON [25] tétele akkor, ha „formulán" véges formulát értünk és LOPEZ—ESCOBAR [23] eredménye, ha „formulán $L(\omega_1, \omega)$ formuláját értjük. Az öröklődési tételek egyik jellemvonása, hogy a szintaktikus feltétel elegendősége triviális; a tulajdonképpeni tétel tehát egy „természetes" tényállásnak a megfordítása. A másik jellemvonás az, hogy a Δ halmaz minden esetben igen egyszerű módon van megadva. A rekurzív függvények elméletében használt terminológiát használva ezt precízen is megfogalmazhatnánk, de ettől eltekintünk, mint ami nem tartozik a disszertáció témájához. A harmadik és legérdekesebb tulajdonság az öröklődési tételek egy általánosabb formájával kapcsolatos. Az általunk bizonyított tételek formája ugyanis olyan lesz, mint az előző fejezetben a 6. 7 Korolláriumé; ha ott az F és H formulát azonosítjuk, akkor kapjuk a szokásos értelemben vett öröklődési tételt. Az, hogy egy R μ-struktúrák közötti relációra egy a következő paragrafus tételeihez hasonló tétel igaz, a következő absztrakt (tehát a Δ halmaz konkrét alakjától elvonatkoztatott) következménnyel jár. Írjuk szimbolikusan $F \overset{R}{\Rightarrow} H$ alakban azt az állítást, hogy tetszőleges $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ μ-struktúrákra abból, hogy $\mathfrak{A}R\mathfrak{B}$ és $\models_{\mathfrak{A}} F$, következik, hogy $\models_{\mathfrak{B}} H$. Ekkor a szóbanforgó következmény: $F \overset{R}{\Rightarrow} H$ ekvivalens azzal, hogy $F \models G \overset{R}{\Rightarrow} G \models H$ valamely G zárt μ-formulára. Érdekes módon ezt az absztrakt állítást nem sikerült a szereplő R relációk valamely általános jellegű tulajdonságából egyöntetű módon levezetni.* A szerző egy erre vonatkozó sejtést a [28] dolgozatban fogalmazott meg; megjegyezzük, hogy véges formulák esetén ez a probléma ekvivalens a II. fej. 5. §. elején említettel.

Módszerünkkel egységes módon tudjuk tárgyalni a véges és a végtelen ($L(\omega_1, \omega)$-beli) formulák esetét. *A jelen és a 2. szakaszban tehát „formulán" vagy „véges*

* (1972. június) $L(\omega_1, \omega)$ esetére a szerző pozitív választ kapott erre a kérdésre.

formulát", vagy pedig „$L(\omega_1, \omega)$-beli formulát" kell érteni; mindkét értelmezés mellett az eredmények és a bizonyítások érvényben maradnak. Egyetlen további kifejezés, amelynek értelme a két esetben más és más az, hogy „(egy Δ formulahalmaz) zárt konjunkcióra (ill. diszjunkcióra)". Ha a „véges értelmezést" választjuk, akkor ez azt jelenti, hogy $\bigwedge\Sigma\in\Delta$ (ill. $\bigvee\Sigma\in\Delta$) Δ minden véges Σ részhalmazára, a másik esetben pedig, hogy $\bigwedge\Sigma\in\Delta$ (ill. $\bigvee\Sigma\in\Delta$) Δ minden megszámlálható Σ részhalmazára.

Legyen μ *megszámlálható* hasonlósági típus, és D individuumjeleknek egy megszámlálhatóan végtelen halmaza úgy, hogy $\mu\cap D=0$. Minden i természetes számra legyen X_i változóknak egy megszámlálhatóan végtelen halmaza úgy, hogy különböző i indexek mellett az X_i halmazok diszjunktak. Ebben és a következő §-ban μ-t, D-t és az X_i halmazokat mindvégig rögzítettnek gondoljuk.

Legyen Σ_0 a $\mu\cup D$ feletti véges, zárt, azonosan igaz redukált formula halmaza, Σ_0 nyilvánvalóan megszámlálható.

7. 1. DEFINÍCIÓ. Legyen T $\mu\cup D$ feletti zárt redukált formuláknak egy halmaza. Azt mondjuk, hogy T *pszeudoteljes*, ha a következő feltételek teljesülnek.

1. $\Sigma_0\subseteqq T$.
2. A T-beli véges formulák halmaza konzisztens.
3. Ha $\bigwedge\Sigma\in T$, akkor $F\in T$ minden $F\in\Sigma$ formulára.
4. Ha $\forall xF\in T$, akkor $F(d/x)\in T$ minden $d\in D$ elemre.
5. Ha $\bigvee\Sigma\in T$, akkor $F\in T$ valamely $F\in\Sigma$ formulára.
6. Ha $\exists xF\in T$, akkor $F(d/x)\in T$ valamely $d\in D$ elemre.

Tegyük fel, hogy T pszeudoteljes. T-hez hozzárendelünk egy $\mathfrak{A}$ $\mu\cup D$ feletti struktúrát a következőképpen.

Legyen $\mathfrak{B}$ a T véges elemeiből álló halmaz egy $\mu\cup D$ típusú modellje. Legyen F tetszőleges $\mu\cup D$ feletti véges zárt formula. Ekkor $F^*\vee(\neg F)^*\in\Sigma_0\subseteqq T$. 7.1 .5. szerint tehát vagy $F^*\in T$, vagy pedig $(\neg F)^*\in T$. Ha F igaz $\mathfrak{B}$-ben, akkor $(\neg F)^*\in T$ lehetetlen (különben $\neg F$ igaz lenne $\mathfrak{B}$-ben), tehát a most mondottak szerint $F^*\in T$. Más szóval, tetszőleges véges zárt F $\mu\cup D$ feletti formula esetén F akkor és csak akkor igaz $\mathfrak{B}$-ben, ha $F^*\in T$.

Legyen $A=\{d^{\mathfrak{B}}:d\in D\}$. Azt állítjuk, hogy A zárt az $f^{\mathfrak{B}}$ operációk mellett ($f\in\mu$). Valóban, legyen f n-változós operációjel μ-ben, $d_0,\dots,d_{n-1}$ tetszőleges D-beli individuumjelek. Mivel $\exists v_0 fd_0,\dots,d_{n-1}\approx v_0\in\Sigma_0\subseteqq T$ azért a 7.1.6. feltétel miatt van olyan $d\in D$, hogy $fd_0,\dots,d_{n-1}\approx d\in T$. Ezek szerint $f^{\mathfrak{B}}(d_0^{\mathfrak{B}},\dots,d_{n-1}^{\mathfrak{B}})=d^{\mathfrak{B}}\in A$, és ezt kellett belátnunk.

Az előbbiek szerint képezhetjük $\mathfrak{B}$-nek azon $\mathfrak{A}$ részstruktúráját, melynek alaphalmaza A. $\mathfrak{A}$ akkor és csak akkor modellje egy $\mu\cup D$ feletti zárt F prímformulának, vagy általában egy $\mu\cup D$ feletti zárt, kvantormentes redukált véges F formulának, ha $\mathfrak{B}$ modellje F-nek, ha tehát F eleme T-nek. Ebből következik, hogy az $\mathfrak{A}$ struktúra izomorfizmus erejéig egyértelműen meg van határozva (azaz különböző $\mathfrak{B}$ modellek mellett kapott $\mathfrak{A}$ struktúrák izomorfak). Az $\mathfrak{A}$ struktúrát T *kanonikus modell*jének nevezzük; az elnevezést a következő alapvető állítás indokolja.

7. 2 TÉTEL. *Egy pszeudoteljes elmélet kanonikus modellje az elméletnek modellje. Továbbá, egy véges $\mu\cup D$ feletti F zárt formula akkor és csak akkor igaz a kanonikus modellben, ha F^* hozzá tartozik az elmélethez.*

Bizonyítás. Az $F\in T$ formula szerinti indukcióval bebizonyítjuk, hogy ha $F\in T$ akkor $\models_{\mathfrak{A}}T$.

Ha F prímformula, vagy pedig negált prímformula, akkor állításunk a fentebbiek szerint igaz. Ha $F = \bigwedge\Sigma \in T$, akkor minden $G \in \Sigma$-ra $G \in T$ (7. 1.3), azaz az indukciós feltevés szerint $\models_{\mathfrak{A}} G$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\models_{\mathfrak{A}} \bigwedge\Sigma$. Ha $F = \forall xG \in T$ és d D-nek tetszőleges eleme, akkor $G(d/x) \in T$ (7.1.4) és így $\models_{\mathfrak{A}} G(d/x)$, azaz $\models_{\mathfrak{A}} G[d^{\mathfrak{A}}/x]$ (lásd (2. 6)). Mivel $|\mathfrak{A}| = \{d^{\mathfrak{A}} : d \in D\}$, kapjuk, hogy $\models_{\mathfrak{A}} \forall xG$. Ha $F = \bigvee\Sigma \in T$, akkor valamely $G \in \Sigma$-ra $G \in T$ és így $\models_{\mathfrak{A}} G$, tehát annál inkább $\models_{\mathfrak{A}} \bigvee\Sigma$. Végül, ha $F = \exists xG$, akkor valamely $d \in D$ mellett $G(d/x) \in T$, tehát $\models_{\mathfrak{A}} G[d^{\mathfrak{A}}/x]$ (lásd (2. 6)) és így $\models_{\mathfrak{A}} \exists xG$. Mivel T elemei redukált formulák (tehát $\neg G \in T$ csak akkor, ha G prímformula), indukciónk teljes. Ezek szerint $\mathfrak{A}$ valóban modellje T-nek. A második állítás belátásához még csak annyit kell bizonyítanunk, hogy ha $\models_{\mathfrak{A}} F$ és F véges és zárt, akkor $F^* \in T$. Valóban, $F^* \vee (\neg F)^* \in \Sigma_0 \subseteq T$, továbbá $(\neg F)^* \notin T$, mivel $(\neg F)^* \in T$ esetén a már bizonyítottak szerint $\models_{\mathfrak{A}} (\neg F)^*$ állna fenn, ami ellentmond annak, hogy $\models_{\mathfrak{A}} F$. Ezért az 5. feltétel miatt $F^* \in T$, q.e.d.

Legyen s 0-nál nagyobb természetes szám és Δ a fix μ hasonlósági típus feletti formulák egy halmaza. Legyen Φ egy tetszőleges halmaz. Egy tetszőleges ilyen módon megadott $S = (X_0, \dots, X_{s-1}, \Delta, \Phi)$ rendszert σ-rendszernek fogunk nevezni.

Ezen fejezet legfontosabb eszköze az egy adott σ-rendszerhez tartozó *approximáló rendszer* fogalma.

7. 3. DEFINÍCIÓ. Az $S = (X_0, \dots, X_{s-1}, \Delta, \Phi)$ σ-rendszerhez tartozó *approximáló rendszerek* azok a $\gamma = (\Theta_0, \Theta_1, \varphi_0^0, \dots, \varphi_{s-1}^0, \varphi_0^1, \dots, \varphi_{s-1}^1)$ rendszerek, amelyekre a következő kikötések teljesülnek, minden $i < s$ és $j < 2$ mellett.

1. Θ_j $\mu \cup D$ feletti redukált zárt formulák véges halmaza és Θ_j elemeiben csak véges sok D-beli individuum jel fordul elő.

2. φ_i^j függvény, $\mathrm{dom}\,(\varphi_i^0) = \mathrm{dom}\,(\varphi_i^1)$, $\mathrm{dom}\,(\varphi_i^j)$ X_i-nek véges részhalmaza és $rn(\varphi_i^j)$ (véges) részhalmaza D-nek.

3. $(\varphi_0^0, \dots, \varphi_{s-1}^0, \varphi_0^1, \dots, \varphi_{s-1}^1) \in \Phi$.

4. Legyen $\varphi^j = \bigcup\limits_{i<s} \varphi_i^j$. Ekkor *nincsen* olyan G formula, melyre a következő $C(\gamma, G)$ feltétel teljesül:

$$C(\gamma, G) \begin{cases} G \in \Delta, & \mathrm{var}\,(G) \subseteq \mathrm{dom}\,(\varphi^0), \\ \Theta_0 \models G(\varphi^0) & \text{és} \quad \Theta_1 \models \neg\, G(\varphi^1). \end{cases}$$

MEGJEGYZÉS. A fejezet eredményei közül csak egynek a bizonyításában van szükség a Φ halmazra és a 7. 3.3. feltételre.

Az S-hez tartozó approximáló rendszerek halmazát Γ_S-el jelöljük.

MEGJEGYZÉS. Az approximáló rendszer elnevezést az indokolja, hogy bizonyításaink során a konstruálandó struktúrákat és leképezéseket Γ_S elemeivel fogjuk „approximálni", pontosabban, bizonyos, a Γ_S elemeiből álló, a komponensénkénti halmazelméleti tartalmazás értelmében növekvő sorozatok limesze (azaz a komponensenkénti egyesítés által előálló rendszer) segítségével fogjuk ezeket a struktúrákat és leképzéseket definiálni.

Ha a $(\Theta_0, \Theta_1, \varphi_0^0, \dots, \varphi_{s-1}^0, \varphi_0^1, \dots, \varphi_{s-1}^1)$ rendszert röviden γ-val jelöljük, akkor a $\Theta_j, \varphi_j^i (j < 2, i < s)$ elemeket a $\Theta_j\gamma$, illetve $\varphi_i^j\gamma$ szimbólumokkal fogjuk jelölni; erre akkor lesz szükségünk, ha Γ_S-nek egyszerre több eleméről kell beszélnünk.

7. 4 LEMMA. *Tegyük fel, hogy az $S = (X_0, \dots, X_{s-1}, \Delta, \Phi)$ σ-rendszerben Δ zárt konjunkcióra és diszjunkcióra. Legyen $j, j' < 2$ és $j \neq j'$. Legyenek $\Theta_{j'}, \varphi_i^j, \varphi_i^{j'}$*

minden $i<s$-re tetszőleges fix objektumok. Tekintsük azon Θ elemek Γ' halmazát, melyekre van olyan $\gamma\in\Gamma_S=\Gamma$, hogy $\Theta_j\gamma=\Theta$, $\Theta_{j'}\gamma=\Theta_j$, és $\varphi_i^l\gamma=\varphi_i^l$ $(l<2,\ i<s)$. Ekkor Γ' minden Θ eleme kielégíti a következő feltételeket:

1. *Θ konzisztens.*
2. *Ha $F\in\Sigma_0$ akkor $\Theta+F\in\Gamma'$*
3. *Ha $\bigwedge\Sigma\in\Theta$, akkor $\Theta+F\in\Gamma'$ minden $F\in\Sigma$ formulára.*
4. *Ha $\forall xF\in\Theta$, akkor $\Theta+F(d/x)\in\Gamma'$ minden $d\in D$ individuumjelre.*
5. *Ha $\bigvee\Sigma\in\Theta$, akkor $\Theta+F\in\Gamma'$ valamely $F\in\Sigma$ formulára.*
6. *Ha $\exists xF\in\Theta$, akkor $\Theta+F(d/x)\in\Gamma'$ valamely $d\in D$ individuumjelre.*

Bizonyítás. Először is megjegyezzük, hogy szemléletesen Γ' a Γ „$2s+2$ dimenziós halmaznak" a Θ_j, $\gamma=\Theta_{j'}$, $\varphi_i^l\gamma=\varphi_i^l$ feltételek által megadott „egyenessel való metszetének" az első $(j=0)$, illetve második $(j=1)$ „koordinátatengelyre való vetülete". Természetesen, ha az adott $\Theta_{j'}$, φ_i^l elemek nem elégítik ki 7. 3.1.—7. 3.4. feltételek rájuk eső részét, akkor Γ' üres.

Tegyük fel, hogy $\Theta\in\Gamma'$, azaz, hogy $\Theta=\Theta_j\gamma=\Theta_j$ valamely $\gamma\in\Gamma$ mellett, amelyre $\varphi_i^l\gamma=\varphi_i^l$ $(l<2)$ és $\Theta_{j'}\gamma=\Theta_{j'}$. Legyen $\varphi^j=\bigcup\limits_{i<s}\varphi_i^j$ $(j<2)$.

(ad 1.) Ha az állítással ellentétben Θ nem lenne konzisztens, akkor $\Theta_j\models\downarrow=$ $=\bigvee O\in\Delta$ és $\Theta_{j'}=\uparrow=\bigwedge O\in\Delta$ állna fenn, továbbá $\downarrow(\varphi^j)=\downarrow$, $\uparrow(\varphi^{j'})=\uparrow$, tehát $C(\gamma,\downarrow)$ állna fenn, 7. 3.4-el ellentétben.

(ad 2., 3., 4.) Legyen $F\in\Sigma_0$, vagy $\bigwedge\Sigma\in\Theta$ és $F\in\Sigma$, vagy pedig $\forall xG\in\Theta$, $d\in D$, és $F=G(d/x)$. Legyen $\gamma'=(\Theta_0',\Theta_1',\varphi_0^0,\ldots,\varphi_0^1,\ldots)$, ahol $\Theta_j'=\Theta_j+F$, $\Theta_{j'}'=\Theta_{j'}$. γ' kielégíti a 7. 3. 1—7. 3. 3. feltételeket. Tegyük fel, hogy γ' nem elégíti ki 7. 3.4-et, azaz, hogy valamely G formula mellett $C(\gamma',G)$ fennáll. $j=0$ esetén G^j legyen G, $j=1$ esetén G^j legyen $\neg G$. Mindhárom esetben $\Theta_j+F\models G^j(\varphi^j)$-ből következik, hogy $\Theta_j\models G^j(\varphi^j)$. Mivel $G\in\Delta$ és var $(G)\subseteq$dom $(\varphi^0)C(\gamma',G)$ miatt, azt kaptuk, hogy $C(\gamma,G)$ fennáll. Ez ellentmond annak, hogy $\gamma\in\Gamma$. Ezek szerint γ' valóban kielégíti 7. 3. 4-et, így $\gamma'\in\Gamma$ és végül $\Theta+F\in\Gamma'$, q.e.d.

(ad. 5.) Tegyük fel, hogy $\bigvee\Sigma\in\Theta_j$, és tegyük fel az állítással ellentétben, hogy minden $F\in\Sigma$-ra $\Theta_j+F\notin\Gamma'$. Legyen $\gamma_F=(\Theta_0^F,\Theta_1^F,\varphi_0^0,\ldots,\varphi_0^1,\ldots)$, ahol $\Theta_j^F=$ $=\Theta_j+F$ és $\Theta_{j'}^F=\Theta_{j'}$. γ_F kielégíti a 7. 3. 1—7. 3. 3. feltételeket minden $F\in\Sigma$-ra. Abból, hogy $\Theta_j+F\notin\Gamma'$, követekzik, hogy $\gamma_F\notin\Gamma_S$, és így az is, hogy γ_F nem elégíti ki a 7. 3. 4. feltételt, tehát minden $F\in\Sigma$-ra van olyan G_F formula, melyre $C(\gamma_F,G_F)$ fennáll.

Különböztessük meg most a $j=0\,(j'=1)$ és a $j=1\,(j'=0)$ eseteket és tekintsük az első esetet. Ekkor $\Theta_0+F\models G_F(\varphi^0)$ és $\Theta_1\models\neg G_F(\varphi^1)$ minden $F\in\Sigma$-ra. Ebből következik, hogy $\Theta_0+\bigvee\Sigma\models\bigvee\limits_{F\in\Sigma}G_F(\varphi^0)$, azaz, mivel $\bigvee\Sigma\in\Theta_0$, $\Theta_0\models G(\varphi^0)$, ahol $G=$ $=\bigvee\limits_{F\in\Sigma}G_F$. Mivel Δ zárt diszjunkcióra, $G\in\Delta$. Másrészt nyilvánvalóan következik, hogy $\Theta_1\models\bigwedge\limits_{F\in\Sigma}\neg G_F(\varphi^1)$, azaz $\Theta_1\models\neg G(\varphi^1)$. Végül az is világos, hogy var $(G)\subseteq$ $\subseteq$dom (φ^j). Azt kaptuk, hogy $C(\gamma,G)$, ami ellentmond annak, hogy $\gamma\in\Gamma$, tehál indirekt feltevésünkkel ellentétben $\Theta_j+F\in\Gamma'$ valamely $F\in\Sigma$ formula mellett, amit be kellett látni.

Tekintsük most a második esetet, amikor $j=1$ és $j'=0$. Ekkor $\Theta_0\models G_F(\varphi^0)$, $\Theta_1+F\models\neg G_F(\varphi^1)$ $(F\in\Sigma)$. Az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy a $G=\bigwedge\limits_{F\in\Sigma}G_F$

formula mellett $\Theta_0 \models G(\varphi^0)$, továbbá $\Theta_1 \models \bigvee_{F \in \Sigma} \neg G_F(\varphi^1)$, azaz $\Theta_1 \models \neg G(\varphi^1)$. Mivel feltevésünk szerint $G \in \Delta$, újból ellentmondást kapunk azzal, hogy $\gamma \in \Gamma$. Ezzel 5. bizonyítását befejeztük.

(ad 6.) Tegyük fel, hogy $\exists x F \in \Theta_j$. Válasszuk a $d \in D$ individuumjelet oly módon, hogy $d \notin rn(\varphi^j)$ és d nem fordul elő Θ_j egyetlen formulájában sem. Mivel a 7. 3. 1 és 7. 3. 2. feltételek szerint D-nek összesen csak véges sok eleme fordul elő $rn(\varphi^j)$-ben és Θ_j-ben, továbbá D végtelen, ilyen d található. Azt állítjuk, hogy $\Theta + F(d/x) \in \Gamma'$, más szóval $\gamma' \in \Gamma_S$, ahol $\gamma' = (\Theta_0', \Theta_1', \varphi_0^0, ..., \varphi_0^1, ...)$, $\Theta_j' = \Theta_j + F(d/x)$ és $\Theta_{j'}' = \Theta_{j'}$. A 7. 3. 1—3. kikötések nyilvánvalóan teljesülnek γ'-re. Ahhoz, hogy belássuk, hogy γ' kielégíti 7. 3 .4-et, tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan G formula, melyre $C(\gamma', G)$ fennáll. Legyen $G_0 = G$ és $G_1 = \neg G$. $C(\gamma', G)$-ből következik, hogy $\Theta_j + F(d/x) \models G_j(\varphi^j)$. Mivel d nem fordul elő Θ_j-ben (és így a $\exists x F \in \Theta_j$ formulában sem), továbbá d nem fordul elő $G_j(\varphi^j)$-ben sem, azért az I. fejezet (2.7) (d) szerint $\Theta_j + \exists x F \models G_j(\varphi^j)$, azaz $\Theta_j \models G_j(\varphi^j)$. Mivel $\Theta_j \models G_j(\varphi^j)$ és $\Theta_{j'} = \Theta_{j'}' \models G_{j'}(\varphi^{j'})$, azt kapjuk, hogy $C(\gamma, G)$ fennáll, ami ellentmond annak, hogy $\gamma \in \Gamma$. Tehát feltevésünkkel ellentétben $\gamma' \in \Gamma$, azaz $\Theta + F(d/x) \in \Gamma'$, amit be kellett látnunk.

Ezzel 7. 4 bizonyítását befejeztük.

A különböző konkrét S σ-rendszerek esetén Γ_S különböző „zártsági" feltételeknek fog eleget tenni, hasonlóan azokhoz, amelyek 7. 4 állításában szerepelnek. Bizonyításaink lényege egy kiinduló approximáló rendszernek a „lezárása" ezekkel a feltételekkel szemben. A feltételeket egy *C_0-rendszer* megadásával fogjuk rögzíteni. Egy C_0-rendszeren egy $\Omega = (\Gamma, \leqq, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ rendszert értünk, ahol Γ és U tetszőleges halmazok, $\leqq$ Γ-nak egy reflexív féligrendezése,[6] továbbá Λ_1 és Λ_2 U-n értelmezett függvények, amelyek értékei Γ-nak részhalmazai. Γ „zártsága" a feltételekkel szemben a következő definíció 3. pontjának felel meg.

7. 5. Definíció. Az $\Omega = (\Gamma, \leqq, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C_0-rendszert C-rendszernek nevezzük, ha a következők teljesülnek (2. és 3. U minden u elemére).

1. Γ minden γ eleméhez legfeljebb megszámlálható sok $u \in U$ elem van, amelyre $\gamma \in \Lambda_1(u)$.
2. Ha $\gamma_1 \leqq \gamma_2$ és $\gamma_1 \in \Lambda_1(u)$, akkor $\gamma_2 \in \Lambda_1(u)$.
3. Ha $\gamma_1 \in \Lambda_1(u)$, akkor van olyan $\gamma_2 \in \Gamma$, melyre $\gamma_1 \leqq \gamma_2$ és $\gamma_2 \in \Lambda_2(u)$.

A Γ elemeiből álló $\langle \gamma_n : n < \omega \rangle$ sorozat az $\Omega = (\Gamma, \leqq, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C_0-rendszernek egy *zárt sorozata,* ha minden $n < \omega$-ra $\gamma_n \leqq \gamma_{n+1}$, továbbá minden $n < \omega$ és $u \in U$ mellett, ha $\gamma_n \in \Lambda_1(u)$, akkor van olyan $n' > n$, hogy $\gamma_{n'} \in \Lambda_2(u)$.

7. 6. Lemma. *Legyen γ_0 Γ-nak tetszőleges eleme és tegyük fel, hogy $\Omega = (\Gamma, \leqq, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C-rendszer. Akkor van Ω-nak olyan zárt sorozata, melynek γ_0 az első eleme.*

Bizonyítás. Legyen $f: \omega \times \omega \to \omega - \{0\}$ a természetes számokból álló (m, j) pároknak egy, a pozitív egész számok halmazára történő kölcsönösen egyértelmű leképezése, melyre $f(m, j) > m$ (pl. legyen $f(m, j) = m^2 + j + 1$ ha $m \geqq j$ és $f(m, j) = j^2 + 2j - m$ ha $j < m$). Legyen $\langle u_i^\gamma : i < \nu_\gamma \rangle$ az $\{u : \gamma \in \Lambda_1(u)\}$ halmaznak egy felsorolása,

[6] Más szóval $\leqq$ reflexív, tranzitív, és antiszimmetrikus reláció Γ-n. Az, hogy $\leqq$ antiszimmetrikus, azt jelenti, hogy $\gamma_1 \leqq \gamma_2$ és $\gamma_2 \leqq \gamma_1$ esetén $\gamma_1 = \gamma_2$.

ahol $0 \leqq v_\gamma \leqq \omega$ (itt felhasználtuk a 7. 5. 1. feltételt). Tegyük fel, hogy $n \geqq 0$ és hogy γ_m már definiálva van minden $m \leqq n$ mellett. Legyen $(m, j) = f^{-1}(n+1)$; ekkor tehát $m \leqq n$. Először tegyük fel, hogy $j < v_{\gamma_m}$; legyen $u = u_j^{\gamma_m}$. Ekkor tehát $\gamma_m \in \Lambda_1(u)$ és így 7. 5. 2. szerint $\gamma_n \in \Lambda_1(u)$. 7. 5. 3-t alkalmazva, legyen γ_{n+1} Γ-nak egy tetszőleges (vagy a meghatározottság kedvéért, Γ valamely rögzített jólrendezésében az első) olyan γ eleme, melyre $\gamma \in \Lambda_2(u)$ és $\gamma_n \lesssim \gamma$. Ha másodszor $j \geqq v_{\gamma_m}$, akkor $\gamma_{n+1} = \gamma_n$.

Ezzel a $\langle \gamma_n : n < \omega \rangle$ sorozatot definiáltuk. Annak bizonyítására, hogy a sorozat zárt, tegyük fel, hogy $\gamma_m \in \Lambda_1(u)$. Ekkor $u = u_j^{\gamma_m}$ valamely $j < v_{\gamma_m}$ mellett. Legyen $n+1 = f(m, j) > m$. γ_{n+1} definíciója szerint $\gamma_{n+1} \in \Lambda_2(u)$. Ez bizonyítja, hogy $\langle \gamma_n : n < \omega \rangle$ zárt, q.e.d.

Legyen most S tetszőleges σ-rendszer, $\Gamma = \Gamma_S$. Jelöljük $\mathfrak{F}$-el a $\mu \cup D$ feletti zárt formulák halmazát. Legyen U_0 a következő halmaz;

$$\begin{aligned} U_0 = {} & \{(2, j, F) : F \in \Sigma_0, j < 2\} \\ & \cup \{(3, j, F, \wedge\Sigma) : F \in \Sigma, \wedge\Sigma \in \mathfrak{F}, j < 2\} \\ & \cup \{(4, j, d, \forall x F) : d \in D, \forall x F \in \mathfrak{F}, j < 2\} \\ & \cup \{(5, j, \vee\Sigma) : \vee\Sigma \in \mathfrak{F}, j < 2\} \\ & \cup \{(6, j, \exists x F) : \exists x F \in \mathfrak{F}, j < 2\} \end{aligned}$$

Definiáljuk a $\Lambda_{1,0}^S$, $\Lambda_{2,0}^S$ U_0-n értelmezett függvényeket a $\Gamma_k = \Lambda_{k,0}^S(u)$ $(k = 1, 2)$ halmazok megadásával, U minden u elemére, u lehetséges 5 típusának megfelelően, a következőképpen:

$$\begin{aligned} & u = (2, j, F): && \Gamma_1 = \Gamma, && \Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : F \in \Theta_j \gamma\}. \\ & u = (3, j, F, \wedge\Sigma): && \Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \wedge\Sigma \in \Theta_j \gamma\}, && \Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : F \in \Theta_j \gamma\}. \\ & u = (4, j, d, \forall x F): && \Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \forall x F \in \Theta_j \gamma\}, && \Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : F(d/x) \in \Theta_j \gamma\}. \\ & u = (5, j, \vee\Sigma): && \Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \vee\Sigma \in \Theta_j \gamma\}, && \Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : F \in \Theta_j \gamma \\ & && && \qquad \text{valamely } F \in \Sigma \text{ mellett}\}. \\ & u = (6, j, \exists x F): && \Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \exists x F \in \Theta_j \gamma\}, && \Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : F(d/x) \in \Theta_j \gamma \\ & && && \qquad \text{valamely } d \in D \text{ mellett}\}. \end{aligned}$$

Az öröklődési tételek bizonyításainak mindegyikében az egyik lépés az lesz, hogy egy bizonyos C_0-rendszerről kimutatjuk, hogy *ez* egyben C-rendszer is, majd a következő lépésben alkalmazzuk 7. 6 Lemmát. A fellépő $\Omega = (\Gamma, \lesssim, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C_0-rendszerekben Γ valamely Γ_S halmaz lesz egy S σ-rendszer mellett, a $\lesssim$ féligrendezést pedig komponensenkénti inklúzióval, azaz a

$$(*) \qquad \gamma_1 \lesssim \gamma_2 \Leftrightarrow \Theta_j \gamma_1 \subseteq \Theta_j \gamma_2, \ \varphi_i^j \gamma_1 \subseteq \varphi_i^j \gamma_2 \quad (j < 2, i < s)$$

ekvivalenciával definiáljuk; itt $S = (X_0, \ldots, X_{S-1}, \Delta, \Phi)$.

7. 7. LEMMA. *Legyen $\Gamma = \Gamma_S$ valamely S σ-rendszer mellett, és $\lesssim$ Γ-nak $(*)$ által meghatározott féligrendezése. Az $\Omega = (\Gamma, \lesssim, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C_0-rendszerről tegyük fel, hogy $U_0 \subseteq U$, $\Lambda_{k,0}^S \subseteq \Lambda_k$ $(k = 1, 2)$. Ekkor:*

1. *Tetszőleges $\gamma\in\Gamma$ elem esetén legfeljebb megszámlálható sok U_0-beli u elem van, melyre $\gamma\in\Lambda_1(u)$.*

2. *A 7. 5. 2 feltétel teljesül U_0 minden u elemére.*

3. *Ha Δ zárt konjunkcióra és diszjunkcióra, akkor a 7. 5. 3 feltétel teljesül U_0 minden u elemére.*

4. *Az előző pont feltétele mellett legyen $\langle\gamma_n : n<\omega\rangle$ Ω-nak egy zárt sorozata. Legyen $T_j=\bigcup_{n<\omega}\Theta_j\gamma_n$, $\psi_i^j=\bigcup_{n<\omega}\varphi_i^j\gamma_n$ $j<2$ és $i<s$ esetén. Ekkor T_j pszeudoteljes és ψ_i^j X_i egy részhalmazán értelmezett, D-beli értékeket felvevő függvény ($j<2$, $i<s$).*

MEGJEGYZÉS. Nevezzünk egy, valamely zárt sorozat alapján, a 4. pontban leírt módon definiált $(T_0, T_1, \psi_0^0, \ldots, \psi_{s-1}^0, \psi_0^1, \ldots, \psi_{s-1}^1)$ rendszert Ω egy *limeszpontjának*.

Bizonyítás.

(ad 1.) Mivel $\Lambda_k(u)=\Lambda_{k,0}^S(u)$, ha $u\in U_0$, azt kell belátnunk, hogy azon $u\in U_0$ elemek halmaza, melyekre $\gamma\in\Lambda_{1,0}^S(u)$ (egy fix $\gamma\in\Gamma$ elem mellett), megszámlálható. Ehhez pedig elegendő azt megmutatnunk, hogy $Y^l=\{u\in U_0^l : \gamma\in\Lambda_{k,0}^S(u)\}$ megszámlálható $l=1,\ldots,5$ mellett, ahol $U_0^1,\ldots,U_0^5$ az U_0 definíciója jobb oldalán szereplő unió 5 tagja. U_0^1 maga megszámlálható, hiszen Σ_0 megszámlálható. Ezért Y^1 megszámlálható. Azon $\bigwedge\Sigma$ formulák Z halmaza, melyre $\bigwedge\Sigma\in\Theta_j\gamma$, véges. Ilyen módon $Y^2=\{(3, j, F, \bigwedge\Sigma) : \bigwedge\Sigma\in Z, F\in\Sigma, j<2\}$ megszámlálható, mivel Σ megszámlálható. D megszámlálhatóságát is használva, hasonlóan adódik, hogy Y^3 megszámlálható. Végül világos, hogy Y^4, Y^5 végesek.

(ad. 2.) A $\leqq$ féligrendezés definíciója alapján U_0 tetszőleges u elemére közvetlenül belátható, hogy ha $\gamma_1, \gamma_2\in\Gamma$, $\gamma_1\leqq\gamma_2$ és $\gamma_1\in\Lambda_{1,0}^S(u)$, akkor $\gamma_2\in\Lambda_{1,0}^S(u)$.

(ad 3.) Tegyük fel, hogy Δ zárt konjunkcióra és diszjunkcióra. Ekkor alkalmazhatjuk a 7. 4 Lemmát. Rögzítsük a $j, j'<2$ indexeket úgy, hogy $j\neq j'$, és a $\gamma_1\in\Gamma$ elemet.

Legyen először $u=(0, j, F)\in U_0$; a $\gamma_1\in\Lambda_1(u)=\Gamma$ feltétel nem jelent kikötést γ_1-re nézve. 7. 4. 2 szerint, ha γ_2-t úgy definiáljuk, hogy $\Theta_j\gamma_2=\Theta_j\gamma_1+F$ legyen, és γ_2 többi koordinátájában megegyezzék γ_1-el, akkor $\gamma_2\in\Gamma\cdot\Lambda_{2,0}^S(u)=\Lambda_2(u)$ definíciója szerint $\gamma_2\in\Lambda_2(u)$, továbbá világos, hogy $\gamma_1\leqq\gamma_2$, amivel az első típusba (azaz U_1^0-ba) tartozó U_0-beli u elemekre a 7. 5. 3 feltétel teljesülését beláttuk. U_0 többi elemére a meggondolás ugyanilyen egyszerű; a $\gamma_2\in\Gamma$ elemet γ_1-ből 7. 4 megfelelő pontja alapján kapjuk meg.

(ad 4.) Az, hogy a ψ_i^j halmaz függvény, abból következik, hogy ψ_i^j függvények növekvő sorozatának egyesítése. A T_j-re vonatkozó állításnak az a része, hogy a T_j-ben levő véges formulákból álló halmaz konzisztens (7. 1. 1.), abból következik, hogy $\Theta_j\gamma_n$ konzisztens minden $n<\omega$-ra, és T_j minden véges részhalmaza valamely $\Theta_j\gamma_n$-nek is részhalmaza.

A többi állítás a zárt sorozat definíciójából, $U_0\subseteqq U$-ból és a $\Lambda_{1,0}^S(u)$, $\Lambda_{2,0}^S(u)$ $(u\in U_0)$ halmazok konkrét alakjából közvetlenül következik. Pl. legyen F Σ_0 tetszőleges eleme. Legyen $u=(0, j, F)\in U_0$. Természetesen $\gamma_0\in\Lambda_1(u)=\Gamma$, tehát valamely $n<\omega$-ra $\gamma_n\in\Lambda_2(u)$, azaz $F\in\Theta_j\gamma_n$ és így $F\in T_j$, amit be kellett látnunk. A 7. 1. 5 feltételnek T_j-re való teljesülését belátandó, tegyük fel, hogy $\bigvee\Sigma\in T_j$. Ekkor $\bigvee\Sigma\in\Theta_j\gamma_m$ valamely $m<\omega$ mellett. Legyen $u=(5, j, \bigvee\Sigma)\in U_0$. $\gamma_m\in\Lambda_1(u)$ a $\Lambda_{1,0}^S$ függvény definíciója szerint. Ezek szerint valamely $n>m$ mellett $\gamma_n \in A^S_{2,0}(u)$, azaz van olyan $F \in \Sigma$, hogy $F \in \Theta_j \gamma_n \subseteqq T_j$, q.e.d.

Ezzel 2. 7 bizonyítását befejeztük.

A következőkben néhány további általános definíciót és lemmát adunk meg.

Tegyük fel, hogy az S σ-endszerben Φ az összes olyan $(\varphi^0_0, ..., \varphi^0_{s-1}, \varphi^1_0, ..., \varphi^1_{s-1})$ alakú rendszerek halmaza, amelyekre $\varphi^j_i \subseteqq X_i \times D$. Más szóval, a σ-rendszer definíciójában szereplő $(\varphi^0_0, ..., \varphi^1_0, ...) \in \Phi$ feltétel nem jelent a definíció többi feltételén túlmenő megszorítást γ-ra nézve. Ekkor az $S=(X_0, ..., X_{s-1}, \Delta, \Phi)$ rendszert $(X_0, ..., X_{s-1}, \Delta)$-val jelöljük.

7. 8 LEMMA. *Legyen $S=(X_0, ..., X_{s-1}, \Delta)$ egy σ-rendszer, legyen $i<s$, és legyen X' X_i-nek egy fix részhalmaza.*

(i) *Tegyük fel, hogy változók egy tetszőleges X'' véges halmaza mellett van olyan $x \in X'-X''$ változó, melyre igaz, hogy akárhogyan is választunk Δ-ból egy G formulát úgy, hogy* var $(G) \subseteqq X'' \cup \{x\}$, *akkor $\exists xG \in \Delta$. Ebben az esetben, ha d_0 tetszőleges eleme D-nek és $\gamma \in \Gamma_S$, akkor van olyan $x \in X'$ változó és $d_1 \in D$ elem, melyekre $\gamma' \in \Gamma_S$, ahol γ' a φ^0_i, φ^1_i koordinátákat kivéve megegyezik γ-val és $\varphi^j_i \gamma' = \varphi^j_i \gamma + (x, d_j)$.*

(ii) *Tegyük fel (i) feltevését $\forall xG$-vel $\exists xG$ helyett. Ekkor, ha $d_1 \in D$ és $\gamma \in \Gamma_S$, úgy van olyan $x \in X'$ és $d_0 \in D$, melyre $\gamma' \in \Gamma_S$, ahol γ'-t úgy definiáljuk, mint (i)-ben.*

MEGJEGYZÉS. A 8. 7 Tétel bizonyításán kívül minden alkalmazásban az X' halmaz azonos lesz X_i-vel, továbbá (i) (vagy (ii)) feltétel azért fog teljesülni, mert $\exists xG$ (ill. $\forall xG$) *minden* $x \in X_i$-re és $G \in \Delta$-ra eleme lesz Δ-nak.

Bizonyítás. Az (i) állítást bizonyítjuk, (ii) teljesen hasonló módon igazolható. Tegyük fel (i) feltevését, legyen $\varphi^j_k = \varphi^j_k \gamma$, $\varphi^j = \bigcup_{k<s} \varphi^j_k$ és $X'' = \mathrm{dom}\,(\varphi^0) = \mathrm{dom}\,(\varphi^1)$. Válasszuk az $x \in X'-X''$ változót úgy, hogy kielégítse a feltevésben szereplő kikötést, a $d_1 \in D$ individuumjelet pedig oly módon, hogy d_1 ne forduljon elő Θ_1 egyetlen formulájában sem, sem pedig $rn(\varphi^1)$-ben. Definiáljuk γ'-t úgy, mint a lemma állításában. Világos, hogy γ' kielégíti a 7. 3. 1—3. feltételeket.

Tegyük fel, hogy γ' nem elégíti ki 7. 3. 4-et. Tehát van olyan $G \in \Delta$ formula, amelyre $C(\gamma', G)$, azaz var $(G) \subseteqq \mathrm{dom}\,(\varphi^0) \cup \{x\}$, $\Theta_0 \models G(\varphi^0 \gamma') = G(\varphi^0)(d_0/x)$ és $\Theta_1 \models \neg G(\varphi^1 \gamma') = \neg G(\varphi^1)(d_1/x)$. Mivel d_1 nem fordul elő Θ_1-ben, sem pedig $\neg G(\varphi^1)$-ben azért I. fej. (2.7) (c) szerint $\Theta_1 \models \forall xG(\varphi^1)$, azaz $\Theta_1 \models \neg \exists xG(\varphi^1)$. Mivel $G(\varphi^0)(d_0/x) \models \exists xG(\varphi^0)$ (lásd (2. 7) (b)), azért $\Theta_0 \models \exists xG(\varphi^0)$. Mivel var $(G) \subseteqq \subseteqq \mathrm{dom}\,(\varphi^0) \cup \{x\}$, azért x választása szerint $\exists xG \in \Delta$; továbbá var $(\exists xG) \subseteqq \mathrm{dom}\,(\varphi_0)$. Összefoglalva tehát, a $C(\gamma, \exists xG)$ feltétel teljesül, ami ellentmond annak, hogy $\gamma \in \Gamma_S$. Tehát γ' kielégíti 7. 3. 4-et és $\gamma' = \Gamma_S$, q.e.d.

Legyen $S=(X_0, ..., X_{s-1}, \Delta)$ σ-rendszer, $\Gamma = \Gamma_S$, $i<s$, $j<2$ rögzített értékek és X', X_i-nek egy rögzített részhalmaza. Definiáljuk az $U_{i,j,X'}$ halmazt, mint az $u= =(7, i, j, X', d_j)$ elemek összességét, ahol d_j D-nek tetszőleges eleme. Legyen $j' \neq j$, $j'<2$. Definiáljuk a $A_k = A^S_{k,i,j,X'}$ $(k=1,2)$ $U_{i,j,X'}$-n értelmezett függvényeket úgy, hogy $A_1(u) = \Gamma_S$ minden $n \in U_{i,j,X'}$-re és $A_2(u) = \{\gamma \in \Gamma_S : (x, d_j) \in \varphi^j_i \gamma$ valamely $x \in X'$ mellett$\}$, midőn $u=(7, i, j, X', d_j)$. Abban a legtöbbször fellépő esetben, amikor $X' = X_i$, $A^S_{k,i,j,X'}$ helyett $A^S_{k,i,j}$-t fogunk írni.

7. 9 LEMMA. *Legyen az $S=(X_0, ..., X_{s-1}, \Delta)$ σ-rendszer mellett $\Omega = (\Gamma_S, \lesssim, U, A_1, A_2)$ egy C_0-rendszer, ahol a $\lesssim$ féligrendezés $(\ast)$ szerint van definiálva, és tegyük fel, hogy $U_{i,j,X'} \subseteqq U$, $A^S_{k,i,j,X'} \subseteqq A_k$ $(k=1,2)$ a fix $i<s$, $j<2$ indexek mellett. Ekkor*

1. *$U_{i,j,X'}$ megszámlálható.*

2. *A 7. 5. 2 feltétel teljesül (az adott Ω mellett) minden $u \in U_{i,j,X'}$ elemre.*

3. *Tegyük fel, hogy ha $j=0$, akkor 7. 8* (i) *feltétele, ha pedig $j=1$, akkor 7. 8* (ii) *feltétele teljesül az adott S, i és X' mellett. Ekkor a 7. 5. 3 feltétel teljesül (az adott Ω mellett) $U_{i,j,X'}$ minden u eleme mellett.*

4. *Legyen $(T_0, T_1, \psi_0^0, \ldots, \psi_0^1, \ldots)$ Ω-nak egy limeszpontja és legyen ψ ψ_i^j-nek X'-re való megszorítása. Ekkor $rn(\psi)=D$.*

Bizonyítás.

1. és 2. nyilvánvalóak.

(ad 3.) Az állítás 7. 8 következménye. Csak a $j=0$ esetben tekintjük, a másik eset teljesen hasonló. Legyen $u=(7, i, j, X', d_0) \in U_{i,0,X'}$ és tegyük fel, hogy $\gamma_1 \in \Gamma_S$. Feltevésünk és 7. 8 (i) szerint van $x \in X'$ változó és $d_1 \in D$ elem úgy, hogy $\gamma_2 \in \Gamma_S$, ahol γ_2 megegyezik γ_1-el minden koordinátában, kivéve a φ_i^0 és φ_i^1 koordinátákat, ahol $\varphi_i^j \gamma_2 = \varphi_i^j \gamma_1 + (x, d_j)$ $(j=0, 1)$. $\Lambda_{2,i,0,X'}^S$ definíciója szerint $\gamma_2 \in \Lambda_2(u)$, másrészt $\gamma_1 \leqq \gamma_2$, amivel állításunkat beláttuk.

(ad 4.) Legyen d_j D tetszőleges eleme és legyen $u=(7, i, j, X', d_j) \in U_{i,j,X'}$. Legyen $\langle \gamma_n : n<\omega \rangle$ Ω-nak olyan zárt sorozata, amelyre (többek között) $\psi_i^j = \bigcup_{n<\omega} \varphi_i^j \gamma_n$. Mivel $\Lambda_1(u) = \Gamma_S$, $\gamma_0 \in \Lambda_1(u)$; $\langle \gamma_n : n<\omega \rangle$ zártsága folytán tehát van olyan $n<\omega$, melyre $\gamma_n \in \Lambda_2(u)$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy valamely $x \in X'$ mellett $(x, d_j) \in \varphi_i^j \gamma_n \subseteqq \psi_i^j$, azaz $d_j \in rn(\psi)$. Mivel d_j D-nek tetszőleges eleme volt, következik, hogy $rn(\psi)=D$.

Ezzel 7. 9 bizonyítását befejeztük.

Legyen $S=(X_0, \ldots, X_{s-1}, \Delta, \Phi)$ σ-rendszer, $\Omega=(\Gamma_S, \leqq, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C_0-rendszer (a szokásos $\leqq$ féligrendezéssel), legyen $(T_0, T_1, \psi_0^0, \ldots, \psi_0^1, \ldots)$ Ω-nak egy limeszpontja és $\psi^j = \bigcup_{i<s} \psi_i^j$ $(j<2)$. Tegyük fel, hogy Δ zárt konjunkcióra és diszjunkcióra és legyen $\mathfrak{A}_0$, ill. $\mathfrak{A}_1$ T_0, ill. T_1 kanonikus modellje, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0 \restriction \mu$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}_1 \restriction \mu$.

7. 10 LEMMA. *Ezen feltételek mellett a következők igazak.*

(i) *Legyen G Δ-beli véges formula. Ha $\models_{\mathfrak{A}_0} G(\psi^0)$ akkor $\models_{\mathfrak{A}_1} G(\psi^1)$ (és így, ha $\models_{\mathfrak{A}_1} \neg G(\psi^1)$, akkor $\models_{\mathfrak{A}_0} \neg G(\psi^0)$).*

(ii) *Legyen ϱ egy tetszőleges s-nél kisebb természetes számokból álló halmaz, $\psi_\varrho^j = \bigcup_{i \in \varrho} \psi_i^j$. Tetszőlegesen megválasztva $j \neq j'$ 2-nél kisebb indexeket, tegyük fel a $j=0$ esetben, hogy $x \approx y \in \Delta$ és a $j=1$ esetben, hogy $\neg x \approx y \in \Delta$, hacsak $x, y \in X_\varrho =_{\mathrm{df}} \bigcup_{i \in \varrho} X_i$. Ekkor az $|\mathfrak{A}_j| = A_j$ halmaz $\{d^{\mathfrak{A}_j} : d \in rn(\psi_\varrho^j)\} = A_j'$ részhalmazának pontosan egy olyan h_ϱ^j leképzése van $|\mathfrak{A}_{j'}|$-be, melyre $h_\varrho^j((\psi_\varrho^j(x))^{\mathfrak{A}_j}) = (\psi_\varrho^{j'}(x))^{\mathfrak{A}_{j'}}$, hacsak $x \in \operatorname{dom}(\psi_\varrho^0) = \operatorname{dom}(\psi_\varrho^1)$.*

(iii) *A* (ii) *pontban meghatározott h_ϱ^0, ill. h_ϱ^1 leképzés homomorfizmus $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-be, illetve $\mathfrak{B}$-ből $\mathfrak{A}$-ba, ha $G \in \Delta$, illetve $\neg G \in \Delta$ minden olyan G μ feletti prímformulára, melynek változói X_ϱ-ban vannak. Ugyanezen leképezés izomorfizmus, ha $G \in \Delta$ és $\neg G \in \Delta$* minden említett típusú G-re.

Bizonyítás.

(ad (i)). Tegyük fel, hogy $\models_{\mathfrak{A}_0} G(\psi^0)$. 7. 2 szerint $G^*(\psi^0) \in T_0$. Mivel $\models_{\mathfrak{A}_1} \neg G(\psi^1)$ 7. 2 szerint akkor és csak akkor, ha $(\neg G)^*(\psi^1) \in T_1$, azért elég belátni, hogy $(\neg G)^*(\psi^1) \notin T_1$, ti. ebből következik, hogy $\models_{\mathfrak{A}_1} \neg G(\psi^1)$ *nem* áll fenn, azaz $\models_{\mathfrak{A}_1} G(\psi^1)$. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $(\neg G)^*(\psi_1) \in T_1$. Legyen $\langle \gamma_n : n<\omega \rangle$ Ω-nak

egy zárt sorozata úgy, hogy $T_j = \bigcup_{n<\omega} \Theta_j \gamma_n$, $\psi_i^j = \bigcup_{n<\omega} \varphi_i^j \gamma_n$ $(j<2,\ i<s)$. Ezek szerint valamely $n_1 < \omega$ indexre $(\neg G)^*(\psi^1) \in \Theta_1 \gamma_{n_1}$. Mivel $G^*(\psi^0) \in T_0$, azért valamely $n_2 > \omega$-ra, amely választható n_1-nél nagyobbra, $G^*(\psi^0) \in \Theta_0 \gamma_{n_2}$. G-ben összesen véges sok változó fordul elő, amelyek mindegyike a $\mathrm{dom}(\psi^0) = \bigcup_{n<\omega} = \mathrm{dom}(\varphi^0 \gamma_n)$ halmazban van (ahol természetesen $\varphi^j \gamma_n = \bigcup_{i<S} \varphi_i^j \gamma_n$). Ezért van olyan $n > n_2$ index, amelyre $\mathrm{var}(G) \subseteq \mathrm{dom}(\varphi^0 \gamma_n)$. Így $G^*(\psi^0) = G^*(\varphi^0 \gamma_n)$, $(\neg G)^*(\psi^1) = (\neg G)^*(\varphi^1 \gamma_n)$.

Jelöljük $\Theta_j \gamma_n$-t, $\varphi_i^j \gamma_n$-t és $\varphi^j \gamma_n$-t röviden Θ_j, φ_i^j illetve φ^j-vel. Mivel $G^*(\psi^0) \in \Theta_0$ és $(\neg G)^*(\psi^1) \in \Theta_1$, kapjuk, hogy $\Theta_0 \models G(\varphi^0)$, $\Theta_1 \models \neg G(\varphi^1)$. Feltevésünk szerint $\mathrm{var}(G) \subseteq \mathrm{dom}(\varphi^0)$ és $G \in \Delta$. Összefoglalva, teljesül a $C(\gamma_n, G)$ feltétel, ami ellentmond annak, hogy $\gamma_n \in \Gamma_S$. Ezek szerint valóban $(\neg G)^*(\psi^1) \notin T_1$, ami bizonyítja (i)-t.

(*ad (ii)*) Csak a $j=0$ esetet tekintjük. Nyilvánvalóan elég belátni, hogy ha $x, y \in \mathrm{dom}(\psi_\varrho^i)$ és $(\psi_\varrho^0(x))^{\mathfrak{A}_0} \cdot = (\psi_\varrho^0(y))^{\mathfrak{A}_0 \cdot}$, akkor $(\psi_\varrho^1(x))^{\mathfrak{A}_1} = (\psi_\varrho^1(y))^{\mathfrak{A}_1}$. Az $x \approx y \in \Delta$ formulára alkalmazva (i)-t azt kapjuk, hogy $\models_{\mathfrak{A}_0} (x \approx y)(\psi^0)$ maga után vonja $\models_{\mathfrak{A}_1} (x \approx y)(\psi^1)$ fennállását, ami éppen a bizonyítandó állítás.

(*ad (iii)*) Az állítások (i)-ből közvetlenül következnek.

Megjegyezzük, hogy abban a leggyakrabban előforduló esetben, amikor $\varrho = \{i\}$ egyelemű halmaz, a 7. 10 (ii)-ben meghatározott h_ϱ^j helyett h_i^j-t fogunk írni.

8. §. *Öröklődési tételek*

Ebben a §-ban az előző § felhasználásával öröklődési tételeket bizonyítunk. Elsőnek egy részstruktúrákra vonatkozó tételt bizonyítunk, amelynek a véges logikára vonatkozó esete Łośtól és TARSKItól [44] származik, $L(\omega_1, \omega)$-ra vonatkozó esetét pedig MALITZ [33] bizonyította be.

Megjegyezzük, hogy MALITZ bizonyítása olyan, hogy a véges logika esetére nem alkalmazható, és másrészt egyetlen, a véges logikára alkalmazott eljárás sem volt megfelelő $L(\omega_1, \omega)$-ra. Amint azt szerző 1967-ben Berkeleyben hallotta, sokáig nyitott kérdés volt, vajjon van-e olyan bizonyítás a tételre, amely a véges és a végtelen esetet egyszerre elintézi. A szerző, miután a disszertációban ismertetett módszert, és ezáltal az említett kérdésre a pozitív választ is megkapta, értesül, hogy S. FEFERMAN [6] szintén kidolgozott egy módszert, melynek segítségével a *Los—Tarski—Malitz*-tételt, továbbá ezzel együtt a 8. 6 Tételt egységesen tudta tárgyalni. FEFERMAN módszerének lényege az interpolációs tétel egy általánosítása, amelyet FEFERMAN szintén az említett *Gentzen*-típusú teljes axiómarendszer egy módosításával bizonyított; így a problémának ez a megközelítése szellemben közel áll LOPEZ—ESCOBAR és MALITZ módszereihez.

8. 1. TÉTEL. (LOS [24], TARSKI [44], MALITZ [33]). *A következő két feltétel tetszőleges F és H feletti zárt formulák esetén ekvivalens.*

1. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúrák esetén, ha $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ és $\models_{\mathfrak{A}} F$, akkor $\models_{\mathfrak{A}} H$.*
2. *Van olyan G μ feletti univerzális zárt formula, amelyre $F \models G \models H$.*

I. A (2.)$\Rightarrow$(1.) implikáció bizonyítása.

Ez a tétel triviális része.

Elegendő belátni, hogy ha G univerzális, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ és $\models_{\mathfrak{A}} G$, akkor $\models_{\mathfrak{A}} G$. Ugyanis, tegyük fel, hogy az univerzális G μ-formula mellett $F \models G \models H$, $\models_{\mathfrak{A}} F$ és $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. Ekkor $\models_{\mathfrak{A}} G$, tehát állításunk szerint $\models_{\mathfrak{B}} G$ és így végül $\models_{\mathfrak{B}} H$, amit be kellett látnunk.

Fentebbi állításunkat a következő, G szerinti indukcióval bizonyított állítás zárt G formulára vonatkozó speciális eseteként kapjuk.

($*$) Ha G tetszőleges μ feletti univerzális formula (nem szükségképpen zárt), $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$, φ a változóknak egy $\mathfrak{B}$-beli értékelése és $\models_{\mathfrak{A}} G[\varphi]$, akkor $\models_{\mathfrak{B}} G[\varphi]$.

Ha G prímformula, vagy negált prímformula, akkor állításunk nyilvánvaló (I. (3. 3)). Tegyük most fel, hogy $G=\bigwedge_{i\in I} G_i$ alakú. Abból, hogy $\models_{\mathfrak{A}} G[\varphi]$, következik, hogy $\models_{\mathfrak{A}} G_i[\varphi]$ minden $i\in I$-re. Indukciós feltevésünket G_i-re alkalmazva kapjuk, hogy $\models_{\mathfrak{B}} G_i[\varphi]$ $(i\in I)$, azaz valóban $\models_{\mathfrak{B}}(\bigwedge_{i\in I} G_i)[\varphi]$. Ha $G=\bigvee_{i\in I} G_i$, hasonlóan járunk el.

Tegyük fel végül, hogy $G=\forall xG'$. $\models_{\mathfrak{B}}\forall xG'[\varphi]$-t bizonyítandó, legyen b $|\mathfrak{B}|$ tetszőleges eleme. Mivel $b\in|\mathfrak{A}|$ és $\models_{\mathfrak{A}}\forall xG'[\varphi]$, azért $\models_{\mathfrak{A}} G'[\varphi(b/x)]$. Világos, hogy $\varphi(b/x)$ a változóknak $\mathfrak{B}$-*beli* értékelése. Az indukciós feltevés szerint tehát $\models_{\mathfrak{B}} G'[\varphi(b/x)]$. Mivel az utóbbi minden $b\in|\mathfrak{B}|$ mellett fennáll, azt kaptuk, hogy $\models_{\mathfrak{B}}\forall xG'[\varphi]$, q.e.d.

Az univerzális formula definícióját figyelembe véve láthatjuk, hogy indukciónk teljes.

II. Az (1.)$\Rightarrow$(2.) implikáció bizonyítása.

Feltesszük, hogy F és H nem elégítik ki 2.-t és ebből megmutatjuk, hogy akkor nem elégítik ki 1.-t sem. Ez bizonyítani fogja állításunkat.

Legyen $s=1$, $X=X_0$, S az (X, Δ) σ-rendszer, ahol Δ az univerzális μ-formulák halmaza, $\Gamma=\Gamma_S$ és $\gamma_0=(\{F^*\}, \{(\neg H)^*\}, 0, 0)$. Γ_S definíciója és F-re és H-ra tett feltevésünk szerint $\gamma_0\in\Gamma$. Γ-nak $\leqq$ féligrendezését komponensenkénti inklúzióval definiáljuk.

Legyen $U = U_0\cup U_{0,1}$, $\Lambda_k=\Lambda^S_{k,0}\cup\Lambda^S_{k,0,1}$, $k=1$ és $k=2$-re (a definíciókat illetőleg lásd 243. old. és 245. old.) és legyen Ω a $(\Gamma, \leqq, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C_0-rendszer. Mivel Δ zárt konjunkcióra, diszjunkcióra és univerzális kvantifikációra, azért 7. 7. 3 és 7. 9. 3 (az utóbbi $i=0$ és $j=1$ mellett) alkalmazhatók. 7. 7. 1—3. és 7. 9. 1—3. ($i=0$ és $j=1$ mellett) alkalmazásával kapjuk, hogy Ω C-rendszer. 7. 6 szerint van Ω-nak γ_0-al kezdődő valamely $\langle\gamma_n : n<\omega\rangle$ zárt sorozata. Legyen $T_j=\bigcup_{n<\omega}\Theta_j\gamma_n$, $\psi^j=\bigcup_{n<\omega}\varphi^j\gamma_n$. Ekkor $F^*\in T_0$ és $(\neg H)^*\in T_1$. 7. 7. 4 értelmében T_0, T_1 pszeudoteljesek, és 7. 9. 4 szerint $rn(\psi^1)=D$.

Legyen $\mathfrak{A}_j$ T_j kanonikus modellje ($j=0$ és $j=1$-re). A 7. 10 (ii) szerint meghatározott $h^1_{\{0\}}=h^1_0$ leképezést h-val jelölve látjuk, hogy dom $(h)=|\mathfrak{A}_1|$ 7. 10 (iii) szerint tehát h $\mathfrak{B}=_{\mathrm{df}}\mathfrak{A}_1\restriction\mu$-nek egy $\mathfrak{A}=_{\mathrm{df}}\mathfrak{A}_0\restriction\mu$-be való izomorfizmusa. Legyen $\mathfrak{B}'$ $\mathfrak{B}$-nek h melletti képe. Ekkor tehát $\mathfrak{B}'\subset\mathfrak{A}$. Másrészt a 7. 2 Tétel szerint $\models_{\mathfrak{A}_0} F^*$ és $\models_{\mathfrak{A}_1}(\neg H)^*$ és így nyilván $\models_{\mathfrak{A}} F$ és $\models_{\mathfrak{B}'}\neg H$. Ezzel valóban megmutattuk, hogy F és H nem elégítik ki 1-et, q.e.d.

Megjegyezzük, hogy tételünk a következő szimbolikus formában is írható. Legyen $Th^{\omega_1,\omega}(K)$ mindazon μ-feletti $L(\omega_1, \omega)$-beli zárt formulák halmaza, amelyek igazak minden K-hoz tartozó struktúrában. A 8. 1 Tétel ekvivalens formában, a véges logikára, és $L(\omega_1, \omega)$-ra, a következő egyenlőségekkel írható le:

(i) $\mathrm{Th}(S_{R_1}(\mathrm{Mod}_\mu(F)))=C_{n_\mu}(C_{n_\mu}(F)\cap\Delta)$,

(ii) $\mathrm{Th}^{\omega_1,\omega}(S_{R_1}(\mathrm{Mod}_\mu(F)))=C^{\omega_1,\omega}_{n_\mu}(C^{\omega_1,\omega}_{n_\mu}(F)\cap\Delta)$.

Itt (ii)-ben (ill. (i)-ben) F tetszőleges (véges) zárt μ-formula és Δ a (véges) univerzális μ-formulák halmaza.

Hasonló átfogalmazás adható meg a jelen § többi tételére is.

A következő korollárium azt a speciális esetet fogalmazza meg, amely valóban megérdemli az „öröklődési tétel" elnevezést. Ez ugyanis a „részstruktúrára öröklődő" formulák jellemzését adja meg.

8. 1'. KOROLLÁRIUM. *Az F zárt formula akkor és csak akkor öröklődik részstruktúrákra, ha logikailag ekvivalens egy univerzális formulával.*

Bizonyítás. Válasszuk 8. 1-ben a H formulát szintén F-nek.

A jelen § további tételeinél a megfelelő speciális esetet nem fogjuk külön megfogalmazni és magát az általános tételt fogjuk öröklődési tételnek nevezni.

A következő legegyszerűbb algebrai fogalom, amellyel kapcsolatban egyszerű öröklődési tétel ismeretes, a homomorfizmus. Most bebizonyítjuk ezt a LYNDONtól és LOPEZ—ESCOBARtól származó tételt.

8. 2 TÉTEL (LYNDON [25], LOPEZ—ESCOBAR [23]). *Tetszőleges F és H zárt μ feletti formulák esetén a következő két feltétel egymással ekvivalens.*

1. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ μ-struktúrákra, ha $\mathfrak{B}$ homomorf képe $\mathfrak{A}$-nak és $\models_{\mathfrak{A}} F$, akkor $\models_{\mathfrak{B}} H$.*
2. *Van olyan pozitív μ feletti zárt G formula, melyre $F \models G \models H$.*

I. A (2.)$\Rightarrow$(1.) implikáció bizonyítása a következő, a G formula szerinti indukcióval bizonyított állításból következik. Ha h $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való homomorfizmusa és φ a változóknak egy $\mathfrak{A}$-beli értékelése, akkor minden pozitív G formulára abból, hogy $\models_{\mathfrak{A}} G[\varphi]$, következik, hogy $\models_{\mathfrak{B}} G[h \circ \varphi]$. Ha G prímformula, akkor ez a (3. 1) (ii) állítás. A négy indukciós lépés ($G = \bigwedge \Sigma, G = \bigvee \Sigma, G = \forall x G', G = \exists x G'$) közül csak az utolsót végezzük el. Tegyük fel, hogy $\models_{\mathfrak{A}} \exists x G'[\varphi]$, azaz $\models_{\mathfrak{A}} G'[\varphi(a/x)]$ valamely $a \in |\mathfrak{A}|$ mellett. Az indukciós feltevés szerint tehát $\models_{\mathfrak{B}} G'[h \circ (\varphi(a/x))]$, azaz $\models_{\mathfrak{B}} G'[(h \circ \varphi)(h(a)/x)]$, tehát valóban $\models_{\mathfrak{B}} \exists x G'[h \circ \varphi]$.

Ha speciálisan G pozitív *zárt* formula, akkor tehát G öröklődik homomorfizmus mellett.

II. A (nem 2.)$\Rightarrow$(nem 1.) implikáció bizonyítása.

A bizonyítás igen hasonló lesz a megfelelő részhez 8. 1 bizonyításában.

Tegyük fel, hogy az F és H zárt μ-formulák nem elégítik ki 2.-t. Legyen $s = 1$, $X = X_0$, S az (X, Δ) σ-rendszer, ahol Δ a pozitív μ-formulák halmaza, $\Gamma = \Gamma_S$ és $\gamma_0 = (\{F^*\}, \{(\neg H)^*\}, 0, 0)$. Mint előbb, $\gamma_0 \in \Gamma$.

Legyen $U = U_0 \cup U_{0,0} \cup U_{0,1}$, $\Lambda_k = \Lambda^S_{k,0} \cup \Lambda^S_{k,0,0} \cup \Lambda^S_{k,0,1}$ $k=1$-re és $k=2$-re, és Ω legyen a $(\Gamma, \leqq, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C_0-rendszer. Felhasználva, hogy Δ zárt konjunkcióra és diszjunkcióra és mindkét fajta kvantifikációra, 7. 7 és 7. 9 alapján kapjuk, hogy Ω C-rendszer. Alkalmazva 7. 6-t, legyen $(T_0, T_1, \psi^0, \psi^1)$ Ω-nak egy limeszpontja, melyre $F^* \in T_0$, $(\neg H)^* \in T_1$. 7. 7 és 7. 9 szerint T_0, T_1 pszeudo-teljesek, továbbá $rn(\psi^0) = rn(\psi^1) = D$. Legyen $\mathfrak{A}_j$ T_j kanonikus modellje $j < 2$-re, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \restriction \mu$ és $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \restriction \mu$. Annak alapján, hogy a prímformulák pozitívak, 7. 10-et és a benne bevezetett jelöléseket alkalmazva kapjuk, hogy $h^0_0 = h$ $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való homomorfizmusa.

Végül 7. 2-ből következőleg $\models_{\mathfrak{A}} F$ és $\models_{\mathfrak{B}} \neg H$, amivel bebizonyítottuk, hogy F és H nem elégítik ki 1-et, q.e.d.

Következőnek egy endomorfizmusokkal kapcsolatos tételt bizonyítunk be. Definiáljuk a Δ_{End} halmazt a következőképpen. Legyenek X_0 és X_1 a rögzített, változókból álló végtelen diszjunkt halmazok és legyen $\Delta_{\mathrm{End}} = \Delta_{\mathrm{End}}(\mu)$ az a legszűkebb, μ feletti formulákból álló Y halmaz, amelyre a következők teljesülnek;

(i) ha F μ feletti prímformula és $\mathrm{var}(F) \subseteq X_0$, akkor $F \in Y$,
(ii) ha F μ feletti prímformula és $\mathrm{var}(F) \subseteq X_1$, akkor $F \in Y$ és $\neg F \in Y$,
(iii) Y zárt konjunkcióra és diszkonjunkcióra,
(iv) ha $F \in Y$ és $x \in X_0$, akkor $\forall x F$, $\exists x F \in Y$,
(v) ha $F \in Y$ és $x \in X_1$, akkor $\forall x F \in Y$.

8. 3 TÉTEL *Tetszőleges F, H zárt μ feletti formulákra a következő két feltétel ekvivalens.*

1. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúrákra, ha $\mathfrak{B}$ endomorf képe $\mathfrak{A}$-nak és $\models_{\mathfrak{A}} F$, akkor $\models_{\mathfrak{B}} H$.*
2. *Van olyan $G \in \Delta_{\mathrm{End}}(\mu)$ zárt formula, melyre $F \models G \models H$.*

MEGJEGYZÉS. A [26] dolgozatban a véges logika esetére vonatkozólag a most kimondott tétel (1.)$\Rightarrow$(2.) részénél erősebb tételt bizonyítottunk, amennyiben ott a Δ halmaz helyett egy szűkebb formulahalmaz szerepelt, ti. az összes $\bigwedge_{i=1}^{n} (F_i \vee G_i)$ alakú formulák Δ' halmaza, ahol F_i pozitív, G_i pedig univerzális. Azonban egyszerű logikai átalakítások mutatják, hogy a véges logika esetében Δ_{End} tetszőleges eleme logikailag ekvivalens Δ' egy elemével, és így mostani állításunk nem lényegesen gyengébb az eredetinél. A végtelen esetben azonban Δ_{End} elemeinek hasonló teı mészetű „egyszerűsítése" nem látszik lehetségesnek. Megjegyezzük még, hogy a [26] dolgozatban adott bizonyításunk a 8. 1 és 8. 2 tételek felhasználásával standarad jellegű modellelméleti meggondolásokkal történik. Hasonló eljárásra az $L(\omega_1, \omega)$ nyelv esetében nem látszik lehetőség.

A tétel bizonyítása az eddigi két tétel bizonyításához nagyon hasonlít és ezért csak vázlatosan írjuk le.

I. A (2.)$\Rightarrow$(1.) implikáció bizonyítása.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ és h $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való homomorfizmusa. Legyen $\varphi_0 : X_0 \to |\mathfrak{A}|$ és $\varphi_1 : X_1 \to |\mathfrak{B}|$. Legyen $G \in \Delta_{\mathrm{End}}(\mu)$ tetszőleges formula és tegyük fel, hogy $\models_{\mathfrak{A}} G[\varphi_0 \cup \varphi_1]$. Ekkor $\models_{\mathfrak{B}} G[(\varphi_0 \circ h) \cup \varphi_1]$. Ezt az állítást G szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az indukciós lépések részletezésétől eltekintünk. Ennek az állításnak a zárt formulákra vonatkozó speciális esetéből bizonyítandó állításunk azonnal következik.

II. A (nem. 2.)$\Rightarrow$(nem. 1.) implikáció bizonyítása.

Tegyük fel, hogy az F, H zárt μ-formulák nem elégítik ki a 2. feltételt. Legyen $s=2$, $\Delta = \Delta_{\mathrm{End}}(\mu)$, S az (X_0, X_1, Δ) σ-rendszer, $\Gamma = \Gamma_S$. Ebben az esetben tehát Γ elemei $(\Theta_0, \Theta_1, \varphi_0^0, \varphi_1^0, \varphi_0^1, \varphi_1^1)$ alakú rendszerek. Legyen $U = U_0 \cup U_{0,0} \cup U_{0,1} \cup U_{1,1}$ és $\Lambda_k = \Lambda_{k,0}^S \cup \Lambda_{k,0,0}^S \cup \Lambda_{k,0,1}^S \cup \Lambda_{k,1,1}^S$ $k=1$-re és $k=2$-re, és legyen Ω a $(\Gamma, \lesssim, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C_0-rendszer a szokásos $\lesssim$ féligrendezéssel.

Legyen $\gamma_0=(\{F^*\}\ \{(\neg H)^*\}, 0, 0, 0, 0)$. F-re és H-ra tett feltevésünkből következik, hogy $\gamma_0 \in \Gamma$. Figyelembe véve, hogy $Y=\Delta$ kielégíti a $\Delta_{\mathrm{End}}(\mu)$ definíciójának (iii), (iv) és (v) pontjait, 7. 7 és 7. 9 alkalmazásával kapjuk, hogy Ω C-rendszer. Legyen 7. 6 alapján $(T_0, T_1, \psi_0^0, \psi_1^0, \psi_0^1, \psi_1^1)$ Ω-nak egy limeszpontja. 7. 7. 4 és 7. 9. 4 alkalmazásával azt kapjuk, hogy T_j $(j<2)$ pszeudoteljes és $rn(\psi_0^0)=rn(\psi_0^1)=rn(\psi_1^1)=$ $=D$.

Legyen $\mathfrak{A}_j$ T_j kanonikus modellje $(j<2)$. Mivel $x \approx y \in \Delta$, ha $x, y \in X_0$ és $\neg x \approx$ $\approx y \in \Delta$ ha $x, y \in X_1$, azért 7. 10 (ii) szerint definiálhatjuk a $h_0=h_0^0$ és a $h_1=h_1^1$ leképzéseket, amelyekre definíciójuk és $rn(\psi_0^0)=rn(\psi_0^1)=rn(\psi_1^1)=D$ miatt azt kapjuk, hogy $\mathrm{dom}(h_0)=|\mathfrak{A}_0|$, $rn(h_0)=|\mathfrak{A}_1|$, $\mathrm{dom}(h_1)=|\mathfrak{A}_1|$, és természetesen $rn(h_1)\subseteq|\mathfrak{A}_0|$. Legyen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \restriction \mu$ és $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \restriction \mu$. 7. 10 (iii) segítségével és annak alapján, hogy $Y=\Delta$ kielégíti Δ_{End} definíciójának első két pontját adódik, hogy h_0 $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való homomorfizmusa és h_1 $\mathfrak{B}$-nek $\mathfrak{A}$-ba való izomorfizmusa. Legyen $\mathfrak{B}$-nek h_1 melletti képe $\mathfrak{B}'$. Ekkor azt kapjuk, hogy $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{A}$, továbbá $h_1 \circ h_0$ $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}'$-re való homomorfizmusa. Mivel 7. 2 alapján nyilván következik, hogy $\models_{\mathfrak{A}} F$ és $\models_{\mathfrak{B}'} \neg H$, bizonyításunkat befejeztük.

A következő tétel véges formulákra vonatkozó részét KEISLER [18] bizonyította be.

Definiáljuk a $\Delta_R=\Delta_R(\mu)$ halmazt, mint a legszűkebb olyan μ feletti formulákból álló Y halmazt, amely kielégíti a következő követelményeket:

(i) ha F μ feletti prímformula és $\mathrm{var}(F)\subseteq X_0 \cup X_1$, akkor $F \in Y$,
(ii) ha F μ feletti prímformula és $\mathrm{var}(F)\subseteq X_1$, akkor F, $\neg F \in Y$,
(iii) Y zárt konjunkcióra és diszjunkcióra,
(iv) ha $F \in Y$ és $x \in X_0$, akkor $\exists x F \in Y$,
(v) ha $F \in Y$ és $x \in X_1$, akkor $\forall x F \in Y$.

8. 4 TÉTEL (véges eset: KEISLER [18]). *Tetszőleges F és H μ feletti zárt formulákra a következő két feltétel ekvivalens.*

1. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ μ struktúrákra, ha $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$-nak retraktja és $\models_{\mathfrak{A}} F$, akkor $\models_{\mathfrak{B}} H$.*
2. *Van olyan $G \in \Delta_R(\mu)$ zárt formula, melyre $F \models G \models H$.*

I. A (2.)$\Rightarrow$(1.) implikáció bizonyítása.

Az állítás a következő, G szerinti indukcióval bizonyított állítás következménye. Tegyük fel, hogy h $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való rektraktív leképzése, $\varphi_0: X_0 \to |\mathfrak{A}|$, $\varphi_1: X_1 \to |\mathfrak{B}|$ és G $\Delta_R(\mu)$ tetszőleges eleme. Ekkor, ha $\models_{\mathfrak{A}} G[\varphi_0 \cup \varphi_1]$, akkor $\models_{\mathfrak{B}} G[(\varphi_0 \circ h) \cup \varphi_1]$. Az indukciós lépések részletezésétől ezúttal is eltekintünk.

II. A (nem 2.)$\Rightarrow$(nem 1.) implikáció bizonyítása.

Tegyük fel, hogy az F és H zárt μ-formulák nem elégítik ki a 2. feltételt. Legyen $s=2$, $\Delta=\Delta_R(\mu)$, $S=(X_0, X_1, \Delta)$, $\Gamma=\Gamma_s$ és $\gamma_0=(\{F^*\}, \{\neg H^*\}, 0, 0, 0, 0) \in \Gamma$. Legyen $U = U_0 \cup U_{0,0} \cup U_{1,1}$, $\Lambda_k = \Lambda_{k,0}^S \cup \Lambda_{k,0,0}^S \cup \Lambda_{k,1,1}^S$ $k=1$ és $k=2$-re. Felhasználva, hogy $Y=\Delta$ kielégíti a Δ_R definíciójának (iii), (iv) és (v) pontjait, 7. 7. 1—3. és 7. 9. 1—3. alapján azt kapjuk, hogy $\Omega = (\Gamma, \lesssim, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C-rendszer. 7. 6-t alkalmazva, legyen $(T_0, T_1, \psi_0^0, \psi_1^0, \psi_0^1, \psi_1^1)$ Ω-nak egy limeszpontja, amelyre $F^* \in T_0$ és $(\neg H)^* \in T_1$.

Legyenek $\mathfrak{A}_0$ és $\mathfrak{A}_1$ rendre a T_0 és T_1 pszeudoteljes elméletek kanonikus modelljei, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \restriction \mu$ és $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \restriction \mu$. 7. 10 (ii)-t és (iii)-t alkalmazva kapjuk, hogy az ott definiált

$h_0 = h^0_{\{0,1\}}$ leképzés $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való homomorfizmusa, továbbá, hogy $h_1 = h^1_{\{1\}}$ $\mathfrak{B}$-nek $\mathfrak{A}$-ba való izomorfizmusa. Jelöljük $x \in \mathrm{dom}(\psi^j_i) = x'_i$ esetén a $(\psi^j_i(x))^{\mathfrak{A}_j}$ elemet $[x]_j$-vel. Tetszőleges $x \in X'_1$ elem esetén $h_0(h_1([x]_1)) = h([x]_0) = [x]_1$ $h^0_{\{0,1\}}$ és $h^1_{\{1\}}$ definíciója szerint. Mivel $B = |\mathfrak{B}|$ tetszőleges eleme előáll $[x]_1$ alakban, ahol $x \in X'_1$, azért adódik, hogy $h_0 \circ h_1$ B identikus leképzése. Legyen $\mathfrak{B}$-nek h_1 melletti képe $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{A}$. Ekkor a $h = h_1 \circ h_0$ leképzés $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}'$-re való homomorfizmusa és $B' = |\mathfrak{B}'|$ tetszőleges $b' = h_1(b)$ elemére (ahol $b \in B$), $(h_1 \circ h_0)(b') = h_1(h_0(h_1(b))) = h_1(b) = b'$, azaz h B'-n az identikus leképezés. Ez bizonyítja, hogy $\mathfrak{B}'$ $\mathfrak{A}$-nak retraktja. Mivel 7. 2 alapján $F^* \in T_0$ és $(\neg H)^* \in T_1$ miatt $\models_{\mathfrak{A}} F$ és $\models_{\mathfrak{B}'} \neg H$, azért F és H valóban nem elégítik ki az 1. feltételt, q.e.d.

A jelen § első négy tételének bizonyításához az előző § lemmái elegendőek voltak. A következő két tétel bizonyításában ezeket egy-egy további lemmával kell kiegészítenünk. Ezek a lemmák 7. 4-hez és 7. 8-hoz hasonlóan, az egyes bizonyításokban használt U halmazok bizonyos részhalmazaival kapcsolatosak.

Először az erős homomorfizmus fogalmával kapcsolatban mondunk ki egy tételt. Legyen $\Delta_{\mathrm{Erhom}} = \Delta_{\mathrm{Erhom}}(\mu)$ azon μ-formulákból álló legszűkebb Y halmaz, melyre a következők teljesülnek:

(i) minden olyan μ feletti prímformula, amelynek minden változója X_0-ban van, hozzátartozik Y-hoz,

(ii) Y zárt konjunkcióra és diszjunkcióra,

(iii) ha $G \in Y$ és $x \in X_0$, akkor $\forall x G \in Y$ és $\exists x G \in Y$, és végül

(iv) ha $n < \omega$, P n-változós relációjel μ-ben, $x_0, \ldots, x_{n-1}$ különböző X_0-beli változók és $G \in Y$, akkor $\forall x_0, \ldots, \forall x_{n-1}(Px_0, \ldots, x_{n-1} \to G) \in Y$.

8. 5 TÉTEL (véges eset: KEISLER [18]). *Tetszőleges F és H zárt μ-formulák esetén a következő két feltétel egymással ekvivalens.*

1. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúrák esetén, ha $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$-nak erős homomorf képe és $\models_{\mathfrak{A}} F$, akkor $\models_{\mathfrak{B}} H$.*

2. *Van olyan G zárt formula $\Delta_{\mathrm{Erhom}}(\mu)$-ben, melyre $F \models G \models H$.*

I. A (2.)$\Rightarrow$(1.) implikáció bizonyítása.

Tegyük fel, hogy G $\Delta = \Delta_{\mathrm{Erhom}}(\mu)$ tetszőleges eleme, $\varphi: X_0 \to |\mathfrak{A}|$, h $\mathfrak{A}$-nak egy erős homomorfizmusa $\mathfrak{B}$-re és $\models_{\mathfrak{A}} G[\varphi]$. G szerinti indukcióval bebizonyítjuk, hogy ezen feltétel mellett $\models_{\mathfrak{B}} G[h \circ \varphi]$. Csak két lépést részletezünk. Legyen $G = \exists x H$, ahol $H \in \Delta$. Feltevésünk szerint tehát $\models_{\mathfrak{A}} G[\varphi(a/x)]$ valamely $a \in |\mathfrak{A}|$ mellett. Az indukciós feltevést alkalmazva kapjuk, hogy $\models_{\mathfrak{B}} G[h \circ (\varphi(a/x))]$, azaz $\models_{\mathfrak{B}} G[(h \circ \varphi)(h(a)/x)]$ és így $\models_{\mathfrak{B}} \exists x G[h \circ \varphi]$, q.e.d.

Legyen végül $G = \forall x_0, \ldots, \forall x_{n-1}(Px_0, \ldots, x_{n-1} \to H)$, ahol $H \in \Delta$. Hogy megmutassuk, hogy $\models_{\mathfrak{B}} G[\varphi]$, legyenek $b_i \in |\mathfrak{B}|$ $(i < n)$ tetszőleges elemek és tegyük fel, hogy $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in P^{\mathfrak{B}}$. Be kell látnunk, hogy $\models_{\mathfrak{B}} H[(h \circ \varphi)(b_0/x_0), \ldots, (b_{n-1}/x_{n-1})]$. Ezért válasszunk olyan $a_0, \ldots, a_{n-1}$ elemeket, melyekre $h(a_i) = b_i$ $i < n$-re és $(a_0, \ldots, \ldots, a_{n-1}) \in P^{\mathfrak{A}}$. Mivel h erős homomorfizmus, ilyen a_i elemek léteznek. Feltevésünk szerint $\models_{\mathfrak{A}} \forall x_0 \ldots \forall x_{n-1}(Px_0 \ldots x_{n-1} \to H)^{[\varphi]}$, tehát $\models_{\mathfrak{B}} (Px_0 \ldots x_{n-1} \to H)$ $[\varphi(a_0/x_0) \ldots (a_{n-1}/x_{n-1})]$ és így $\models_{\mathfrak{A}} G[\varphi(a_0/x_0) \ldots (a_{n-1}/x_{n-1})]$. Indukciós feltevésünk szerint tehát $\models_{\mathfrak{B}} H[(h \circ \varphi)(a_0/x_0) \ldots (a_{n-1}/x_{n-1})]$, azaz $\models_{\mathfrak{B}} H[(h \circ \varphi)(b_0/x_0) \ldots (b_{n-1}/x_{n-1})]$, amit be kellett látnunk.

Az előbbi bekezdés állítását valamely $G \in \Delta_{\mathrm{Erhom}}(\mu)$ zárt formulára alkalmazva kapjuk, hogy amennyiben $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$-nak erős homomorf képe és $\models_{\mathfrak{A}} G$, akkor $\models_{\mathfrak{B}} G$. Ebből a (2.)$\Rightarrow$(1.) implikáció éppen úgy következik, mint 8. 1 esetében.

II. A (nem 2.)$\Rightarrow$(nem 1.) implikáció bizonyítása

Tegyük fel, hogy F és H nem elégítik ki a 2. feltételt. Legyen $\Delta = \Delta_{\mathrm{Erhom}}(\mu)$, $s=1$, $X=X_0$, $S=(X, \Delta)$ és $\Gamma=\Gamma_S$. Először bebizonyítjuk a következő lemmát.

LEMMA. *Tegyük fel, hogy $n<\omega$, $P\in\mu$ és P n-változós relációjel, továbbá $d_0, \ldots, \ldots, d_{n-1} \in D$, $Pd_0 \ldots d_{n-1} \in \Theta_1$ és $\gamma=(\Theta_0, \Theta_1, \varphi^0, \varphi^1)\in\Gamma$. Akkor vannak olyan különböző $x_0, \ldots, x_{n-1}\in X$ változók és $d'_0, \ldots, d'_{n-1}\in D$ individuumjelek, melyekre $\gamma' =_{\mathrm{df}} (\Theta_0 + Pd'_0 \ldots d'_{n-1}, \Theta_1, \varphi^0 + (x_0, d'_0) + \ldots + (x_{n-1}, d'_{n-1}), \varphi^1 + (x_0, d_0) + \ldots + (x_{n-1}, d_{n-1}))$ hozzátartozik Γ-hoz.*

Bizonyítás. Tegyük fel a lemma feltevéseit. Válasszuk D-ből a $d'_0, \ldots. d'_{n-1}$ különböző individuumjeleket úgy, hogy ezek ne forduljanak elő Θ_0 egyetlen formulájában sem, és ne tartozzanak $rn(\varphi^0)$-hoz, továbbá válasszuk X-ből az $x_0, \ldots, x_{n-1}$ különböző változókat oly módon, hogy ezek ne legyenek a dom (φ^0) halmazban. Mivel Θ_0-ban D-nek csak véges sok eleme fordulhat elő és dom (φ^0) véges (lásd 7. 3. 1—2.), azért $d'_0, \ldots, d'_{n-1}$ és $x_0, \ldots, x_{n-1}$ megválaszthatók ilyen módon. Tegyük fel, hogy ezen választások által meghatározott γ' elem nem tartozik hozzá Γ-hoz. Ekkor $C(\gamma', G)$ fennáll valamely Δ-beli G formulára. Ha tehát $G' = Pd'_0 \ldots d'_{n-1} \rightarrow G(\varphi^0\gamma') = (Px_0 \ldots x_{n-1} \rightarrow G)(\varphi^0)(d'_0/x_0) \ldots (d'_{n-1}/x_{n-1})$, akkor $\Theta_0 + Pd'_0 \ldots d'_{n-1} \models\, \models G(\varphi^0\gamma')$ miatt $\Theta_0 \models G'$. Mivel $d'_{n-1}, d'_{n-2}, \ldots, d'_0$ nem fordulnak elő Θ_0-ban, továbbá d'_i nem fordul elő $\forall x_{i+1}, \ldots, \forall x_{n-1}(Px_0 \ldots x_{n-1} \rightarrow G)$ $(\varphi^0)(d'_0/x_0) \ldots \ldots (d'_{i-1}/x'_{i-1})$-ben, azért I. fej. (2. 7) (c) n-szeri alkalmazásával kapjuk, hogy $G_1 = \forall x_0 \ldots \forall x_{n-1}(Px_0 \ldots x_{n-1} \rightarrow G)$ mellett $\Theta_0 \models G_1(\varphi^0)$. $C(\gamma', G)$-ből következik, hogy $\Theta_1 \models \neg G(\varphi^1\gamma')$, tehát $Pd_0 \ldots d_{n-1} \in \Theta_1$ miatt $\Theta_1 \models Pd_0 \ldots d_{n-1} \wedge \neg G(\varphi^1\gamma')$, azaz $\Theta_1 \models \neg(Pd_0 \ldots d_{n-1} \rightarrow G(\varphi^1\gamma')) = \neg(Px_0 \ldots x_{n-1} \rightarrow G)(\varphi^1) \cdot \cdot (d_0/x_0) \ldots (d_{n-1}/x_{n-1})$. Ezért $\Theta_1 \models \exists x_0 \ldots \exists x_{n-1} \neg(Px_0 \ldots x_{n-1} \rightarrow G)(\varphi^1)$, azaz $\Theta_1 \models \neg G_1(\varphi^1)$. A var $(G_1) \subseteq$ dom (φ^0) feltétel teljesülése nyilvánvaló $C(\gamma', G)$ miatt. Mivel $Y=\Delta$ kielégíti a Δ_{Erhom} definíciójában szereplő (iv) feltételt, azért $G_1 \in \Delta$. Ezzel beláttuk, hogy $C(\gamma, G_1)$ fennáll és így γ nem elégíti ki a 7. 3. 4 feltételt, ellentétben azzal, hogy $\gamma\in\Gamma$. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $\gamma' \notin \Gamma$ lehetetlen, azaz $\gamma' \in \Gamma$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Legyen U' az $u = (8, Pd_0 \ldots d_{n-1})$ alakú elemek halmaza, ahol n tetszőleges természetes szám, P n-változós relációjel μ-ben és $d_0, \ldots, d_{n-1} \in D$. Definiáljuk a Λ'_1, Λ'_2 függvényeket az U' halmazon a következőképpen. Legyen $\Lambda'_1(u) = \{\gamma\in\Gamma: :Pd_0 \ldots d_{n-1} \in \Theta_1\gamma\}$ és legyen $\Lambda'_2(u)$ azon $\gamma\in\Gamma$ approximáló rendszerek halmaza, melyekre vannak olyan $x_0, \ldots, x_{n-1}$ dom $(\varphi^0\gamma)$-beli változók, hogy $(\varphi^1\gamma)(x_i) = d_i$ $(i<n)$ és ha $d'_i = (\varphi^0\gamma)(x_i)$ $(i<n)$, akkor $Pd'_0 \ldots d'_{n-1} \in \Theta^0\gamma$. Legyen $U = U_0 \cup U_{0,0} \cup \cup U_{0,1} \cup U'$, és $\Lambda_k = \Lambda^S_{k,0} \cup \Lambda^S_{k,0,0} \cup \Lambda^S_{k,0,1} \cup \Lambda'_k$ $k=1$ és $k=2$ esetén, s legyen Ω a $(\Gamma, \lesssim, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C_0-rendszer, ahol $\lesssim$ Γ-nak a szokásos komponensenkénti inklúzióval definiált féligrendezése.

U' nyilvánvalóan megszámlálható. Ebből, 7. 7. 1-ből és 7. 9. 1-ből következik, hogy Ω kielégíti a 7.5. 1 feltételt. Könnyű ellenőrizni, hogy U' minden u elemére teljesül a 7. 5. 2 feltétel; ebből, 7. 7. 2-ből és 7. 9. 2-ből következik, hogy 7. 5. 2 U minden u elemére teljesül. Legyen $u = (8, Pd_0 \ldots d_{n-1})$ U' tetszőleges eleme. Azt állítjuk, hogy az adott Ω mellett, u kielégíti a 7. 5. 3 feltételt. Ennek kimutatására tegyük fel, hogy $\gamma=\gamma_1\in\Lambda_1(u)=\Lambda_1'(u)$. Ha $\gamma=(\Theta_0, \Theta_1, \varphi^0, \varphi^1)$, akkor ez a definíció szerint azt jelenti, hogy $Pd_0 \dots d_{n-1}\in\Theta_1$. A Lemmában definiált $\gamma_2=\gamma'$ elem a Lemma szerint Γ-ban van, $\gamma_1\preceq\gamma_2$ nyilván teljesül, és $\gamma_2\in\Lambda_2(u)$ $\Lambda_2'(u)$ definíciója alapján. Ezzel a 7. 5. 3 feltételnek u-ra való teljesülését beláttuk. Mivel Δ zárt konjunkcióra és diszjunkcióra, azért 7. 7. 3 szerint $U_0\subseteqq U$ elemei kielégítik 7. 5. 3-t. Végül mivel $Y=\Delta$ kielégíti a Δ_{Erhom} definíciójában szereplő (iii) feltételt, ezért 7. 9. 3-ből következik, hogy U megmaradó elemei is kielégítik 7. 5. 3-t.

Ezzel beláttuk, hogy Ω valóban C-rendszer. Mivel F és H nem elégítik ki a Tétel 2. feltételét, azért $\Gamma=\Gamma_S$ definíciója alapján nyilvánvalóan $\gamma_0=_{\text{df}}(\{F^*\}, \{(\neg H)^*\}, 0, 0)\in\Gamma$. Legyen 7. 6 alapján $\langle\gamma_n: n<\omega\rangle$ Ω-nak egy olyan zárt sorozata, melynek első eleme γ_0, és legyen $T_j=\bigcup_{n<\omega}\Theta_j\gamma_n$, $\psi^j=\bigcup_{n<\omega}\varphi^j\gamma_n$ $j=0$ és $j=1$ esetén. Ekkor tehát $F^*\in T_0$, $(\neg H)^*\in T_1$. 7. 7. 4 szerint T_0, T_1 pszeudo-teljesek. $\Lambda^S_{k,0,0}\subseteqq\Lambda_k$, $\Lambda^S_{k,0,1}\subseteqq\Lambda_k$ $(k=1, 2)$ miatt 7. 9. 4 szerint $rn(\psi^0)=rn(\psi^1)=D$.

Legyen $\mathfrak{A}_j$ T_j kanonikus modellje $(j<2)$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0\restriction\mu$ és $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}_1\restriction\mu$. 7. 2 szerint $\models_{\mathfrak{A}_0}F^*$ és $\models_{\mathfrak{A}_1}(\neg H)^*$, és így $\models_{\mathfrak{A}}F$ és $\models_{\mathfrak{B}}\neg H$. Most alkalmazzuk a 7. 10 Lemmát. $\varrho=\{0\}$ választásával 7. 10 (ii) szerint van az $\{d^{\mathfrak{A}_0}: d\in rn(\psi^0)\}=A=_{\text{df}}|\mathfrak{A}|$ halmaznak egy olyan $h=h_0^0$ leképzése $B=_{\text{df}}|\mathfrak{B}|$-be, melyre $h((\psi^0(x))^{\mathfrak{A}_0})=(\psi^1(x))^{\mathfrak{A}_1}$, minden $x\in\in\operatorname{dom}(\psi^0)$-ra. Mivel $rn(\psi^1)=D$, azért nyilvánvaló, hogy $rn(h)=|\mathfrak{B}|$. Δ_{Erhom} definíciójának (i) pontja és 7. 10 (iii) szerint h $\mathfrak{A}$-nak homomorfizmusa $\mathfrak{B}$-re.

Végül be akarjuk látni, hogy h erős homomorfizmus. Ezért tegyük fel, hogy valamely $b_0, \dots, b_{n-1}\in|\mathfrak{B}|$ elemekre $(b_0, \dots, b_{n-1})\in P^{\mathfrak{B}}$. Ha a $d_i\in D$ individuumjelek olyanok, hogy $b_i=d_i^{\mathfrak{A}_1}$, akkor ez azt jelenti, hogy $\models_{\mathfrak{A}_1}Pd_0\dots d_{n-1}$. 7. 2 szerint tehát $Pd_0\dots d_{n-1}\in T_1$, azaz $Pd_0\dots d_{n-1}\in\Theta_1\gamma_m$ valamely $m<\omega$-ra. Legyen $u==(8, Pd_0\dots d_{n-1})\in U'\subseteqq U$, és használjuk fel $\langle\gamma_{m'}: m'<\omega\rangle$ zártságát. $\Lambda_1(u)$ definíciója szerint $\gamma_m\in\Lambda_1(u)$; van tehát olyan $n'<\omega$, melyre $\gamma_{n'}\in\Lambda_2(u)$. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy bizonyos $x_i\in\operatorname{dom}(\varphi^0\gamma_{n'})$ $(i<n)$ változók mellett, ha $d_i'==(\varphi^0\gamma_{n'})(x_i)$ $(i<n)$, akkor $Pd_0'\dots d_{n-1}'\in\Theta_0\gamma_{n'}\subseteqq T_0$, továbbá $d_i=(\varphi^1\gamma_{n'})(x_i)$ $(i<n)$. Tehát $d_i'=\psi^0(x_i)$, $d_i=\psi^1(x_i)$ és így $a_i=d_i'^{\mathfrak{A}_0}$ mellett $(i<n)$ h definíciója szerint $h(a_i)=b_i$ $(i<n)$. Végül 7. 2 szerint $Pd_0'\dots d_{n-1}'\in T_0$-ből következik, hogy $(a_0, \dots, a_{n-1})\in P^{\mathfrak{A}}$.

Ezzel beláttuk, hogy h valóban erős homomorfizmus. Tehát $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$-nak erős homomorf képe; továbbá, mint említettük, $\models_{\mathfrak{A}}F$ és $\models_{\mathfrak{B}}\neg H$. Tehát F és H valóban nem elégítik ki a tétel 1. feltételét, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

Következőnek FEFERMAN [6] egy E-bővítésekre vonatkozó tételét fogalmazzuk meg; a tétel bizonyításából csak az előző tételben szereplő lemmáéhoz hasonló szerepet játszó lemmát bizonyítjuk be és a használt Ω C_0-rendszert adjuk meg.

FEFERMAN [6] egy jóval általánosabb tételt bizonyít be, amely magába foglalja a 8. 1 tételt is. Megjegyezzük azonban, hogy az általános tételt is be lehet bizonyítani a disszertáció módszereivel.

Legyen $E\in\mu$ kétváltozós relációjel. A $\Delta_{E\text{ext}}=\Delta_{E\text{ext}}(\mu)$ μ-formulákból álló halmaz legyen az a legszűkebb Y halmaz, mely kielégíti a következőket:

(i) minden olyan μ feletti prímformula és negált prímformula, amelynek minden változója X_0-ban van, eleme Y-nak,

(ii) Y zárt konjunkcióra és diszjunkcióra,

(iii) ha $F\in Y$ és $x\in X_0$, akkor $\exists xF\in Y$, és

(iv) ha $F\in Y$, $x\neq y$ és $x, y\in X_0$, akkor $\forall x(xEy\to F)\in Y$.

8. 6 TÉTEL (FEFERMAN [6]). *Tetszőleges F és H zárt μ-formulák esetén, a következő két feltétel egymással ekvivalens.*

1. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúrák esetén, ha $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$-nak E-bővítése, és $\models_{\mathfrak{A}} F$, akkor $\models_{\mathfrak{B}} H$.*

2. *Van olyan zárt G formula a $\Delta_{E\,\mathrm{ext}}(\mu)$ halmazban, melyre $F \models G \models H$.*

A (nem 2.)$\Rightarrow$(nem 1.) implikáció bizonyítása.

Legyen $\Delta = \Delta_{E\,\mathrm{ext}}(\mu)$, $s=1$, $X=X_0$, $S=(X, \Delta)$ és $\Gamma=\Gamma_S$. Tegyük fel, hogy F és H nem elégítik ki a 2. feltételt és legyen $\gamma_0 = (\{F^*\}, \{(\neg H)^*\}, 0, 0)$. Γ_S definíciója szerint (lásd 7. 3) $\gamma_0 \in \Gamma$.

LEMMA. *Ha $\gamma = (\Theta_0, \Theta_1, \varphi^0, \varphi^1) \in \Gamma$, $y \in \mathrm{dom}\,(\varphi^0) = \mathrm{dom}\,(\varphi^1)$, $d \in D$ és $dE\varphi^1(y) \in \Theta_1$, akkor van olyan $d' \in D$ individuumjel és $x \in X$ változó, melyekre $\gamma' = (\Theta_0, \Theta_1, \varphi^0 + (x, d'), \varphi^1 + (x, d))$ eleme Γ-nak.*

A lemma bizonyítása. Legyen x $X - \mathrm{dom}\,(\varphi^0)$ egy tetszőleges eleme és d' D-nek egy olyan eleme, amely nincs benne $rn(\varphi^0)$-ban és nem fordul elő Θ_0 egyetlen formulájában sem. Mivel γ kielégíti a 7. 3. 1—2. feltételeket, azért ilyen x és d' léteznek. Világos, hogy az x és d' ilyen megválasztásával a lemmában definiált γ' szintén kielégíti a 7. 3. 1—2 feltételeket. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben γ' nem elégíti ki 7. 3. 4-et, azaz, hogy van Δ-ban olyan G formula, melyre $C(\gamma', G)$ fennáll. Ezek szerint $\Theta_1 \models G(\varphi^1\gamma') = G(\varphi^1)(d/x)$, és így $dE\varphi^1(y) \in \Theta_1$ miatt $\Theta_1 \models (xEy \wedge G)(\varphi^1)(d/x)$. Legyen $G' = \forall x(xEy \to G)$. Legutóbbi állításunk és (2. 7) (b) alapján kapjuk, hogy $\Theta_1 \models (\exists x(xEy \wedge G))(\varphi^1)$, azaz $\Theta_1 \models \neg G'(\varphi^1)$. $C(\gamma', G)$ miatt $\Theta_0 \models G(\varphi^0)(d'/x)$, és így méginkább $\Theta_0 \models (xEy \to G)(\varphi^0)(d'/x)$. Felhasználva, hogy d' nem fordul elő Θ_0-ban, sem pedig $(xEy \to G)(\varphi^0)$-ban, (2. 7) (c) alapján kapjuk, hogy $\Theta_0 \models \forall x(xEy \to G)(\varphi^0)$, azaz $\Theta_0 \models G'(\varphi^0)$. $\Delta_{E\,\mathrm{ext}}$ definíciójának (iv) pontja szerint $G' \in \Delta$. Ezzel beláttuk, hogy $C(\gamma, G')$ fennáll, ellentmondásban azzal, hogy $\gamma \in \Gamma$. Ez bizonyítja, hogy indirekt feltevésünkkel ellentétben γ' kielégíti 7. 3. 4-et és így $\gamma' \in \Gamma$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Legyen $U' = \{(8, d, y) : d \in D, y \in X\}$ és $\Lambda_1'(u) = \{\gamma \in \Gamma : y \in \mathrm{dom}\,(\varphi^1\gamma), dE(\varphi^1\gamma)(y) \in \Theta_1\gamma\}$, továbbá $\Lambda_2'(u) = \{\gamma \in \Gamma : d \in rn(\varphi^1\gamma)\}$ $u = (8, d, y) \in U'$ esetén. Legyen $U = U_0 \cup U_{0,0} \cup U'$ és $\Lambda_k = \Lambda_{k,0}^S \cup \Lambda_{k,0,0}^S \cup \Lambda_k'$ $k=1$-re és $k=2$-re. A bizonyítás befejezése ugyanúgy történik, mint a 8. 5 Tétel esetében.

A következő két tétel direkt szorzatokkal kapcsolatos; a véges logikára vonatkozó eset egy kissé eltérő fogalmazásban mindkét esetben KEISLERtől [18] származik.

Legyen $\langle x_{ij} : i < \omega, j < \omega \rangle$ $X = X_0$ elemeinek egy ismétlés nélküli kettős indexelése. Legyen $\Delta_{Df} = \Delta_{Df}(\mu)$ azon legszűkebb, μ feletti formulákból álló Y halmaz, amelyre a következők teljesülnek:

(i) ha F μ feletti prímformula, amelyben az összes különböző változó $x_{i_k j_k}$ $(k < n)$, továbbá i_k' tetszőleges természetes szám minden $k < n$-re és $\eta = \{(x_{i_k j_k}, x_{i_k' j_k}) : k < n\}$, akkor $F \in Y$ és $F \wedge \neg F(\eta) \in Y$,

(ii) Y zárt konjunkcióra és diszjunkcióra,

(iii) ha $G \in Y$, akkor $\forall x_{ij} G \in Y$ $(i, j < \omega)$,

(iv) ha $G \in Y$, $i, j < \omega$ és $x_{i'j}$ egyetlen $i' \neq i$ természetes számra sem szabad változója G-nek, akkor $\exists x_{ij} G \in Y$.

8. 7. TÉTEL. *Tetszőleges F és H μ feletti zárt formulákra a következő két feltétel egymással ekvivalens.*

1. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúrákra, ha van olyan $\mathfrak{H}$ struktúra, melyre $\mathfrak{B}\times\mathfrak{H}\cong\mathfrak{A}$, és $\models_{\mathfrak{A}}F$, akkor $\models_{\mathfrak{B}}H$.*

2. *Van olyan $G\in\Delta_{Df}(\mu)$ zárt formula, melyre $F\models G\models H$.*

I. A (2.)$\Rightarrow$(1.) implikáció bizonyítása.

A $G\in\Delta_{Df}(\mu)$ formula szerinti indukcióval bebizonyítjuk a következő általánosabb állítást. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\times\mathfrak{H}$. Legyen $\varphi:X\to|\mathfrak{A}|$ és definiáljuk a $\psi:X\to|\mathfrak{B}|$ és $\chi:X\to|\mathfrak{H}|$ leképzést úgy, hogy $\varphi(x)=(\psi(x),\chi(x))$ álljon fenn. Tegyük fel továbbá, hogy $\chi(x_{i_1j})=\chi(x_{i_2j})$ $i_1,i_2,j<\omega$-ra. Ekkor, ha $G\in\Delta_{Df}(\mu)$ és $\models_{\mathfrak{A}}G[\varphi]$, úgy $\models_{\mathfrak{B}}G[\psi]$.

Ha G prímformula, akkor az állítás világos. Tegyük fel, hogy $G=F\wedge\neg F(\eta)$; itt Δ_{Df} definíciójának (i) pontjában használt jelöléseket használjuk. Ekkor $\models_{\mathfrak{A}}G[\varphi]$ azt jelenti, hogy $\models_{\mathfrak{A}}F[\varphi]$ és $\models_{\mathfrak{A}}\neg F[\varphi\circ\eta]$. Ebből következik, hogy $\models_{\mathfrak{B}}F[\psi]$ és $\models_{\mathfrak{H}}F[\chi]$, továbbá, hgy *vagy* $\models_{\mathfrak{B}}\neg F[\psi\circ\eta]$, *vagy* pedig $\models_{\mathfrak{H}}\neg F[\chi\circ\eta]$. Mivel $(\chi\circ\eta)(x_{i_kj_k})=\chi(x_{i'_kj_k})=\chi(x_{i_kj_k})$, azért $\models_{\mathfrak{H}}F[\chi\circ\eta)$ és így szükségképpen $\models_{\mathfrak{B}}\neg F[\psi\circ\eta]$. Ezzel beláttuk, hogy $\models_{\mathfrak{B}}(F\wedge\neg F(\eta))[\psi]$. Q.e.d.

Az indukciós lépések közül csak egyet mutatunk be. Tegyük fel, hogy $G=\exists x_{ij}G'$, ahol $G'\in\Delta_{Df}(\mu)$ és nincs olyan $i'\neq i$, hogy $x_{i'j}\in\mathrm{var}\,(G')$. Tegyük fel, hogy a φ-re, ψ-re és χ-re tett kikötéseink mellett $\models_{\mathfrak{A}}G[\varphi]$, azaz valamely $a=(b,c)$ mellett $\models_{\mathfrak{A}}G'[\varphi(a/x_{ij})]$. Legyen $\varphi'=\varphi(a/x_{i'j}:i'<\omega)$, $\psi'=\psi(b/x_{i'j}:i'<\omega)$, $\chi'=\chi(c/x_{i'j}:i'<\omega)$. Ekkor $\varphi'(x)=(\psi'(x),\chi'(x))$ minden $x\in X$-re, továbbá azt állítjuk, hogy $\chi'(x_{i_1k})=\chi'(x_{i_2k})$ minden $i_1,i_2,k<\omega$ mellett. Valóban, ha $k\neq j$, akkor $\chi'(x_{i_1k})=\chi(x_{i_1k})=\chi(x_{i_2k})=\chi'(x_{i_2k})$, ha pedig $k=j$, akkor $\chi'(x_{i_1j})=\chi'(x_{i_2j})=c$. Mivel $x_{i'j}\in\mathrm{var}\,(G')$ csak akkor, ha $i'=i$, azért $\varphi(a/x_{ij})$ és φ' G' szabad változóin megegyeznek és így $\models_{\mathfrak{A}}G'[\varphi']$. Az indukciós feltevés szerint tehát $\models_{\mathfrak{B}}G'[\psi']$, azaz $\models_{\mathfrak{B}}G'[\psi(b/x_{ij})]$, és így valóban $\models_{\mathfrak{B}}\exists x_{ij}G'[\psi]$, q.e.d.

II. A (nem 2.)$\Rightarrow$(nem 1.) implikáció bizonyítása

Tegyük fel, hogy F és H nem elégítik ki a tétel 2. feltételét. Legyen $\Delta=\Delta_{Df}(u)$, $s=1$, $X=X_0$, $S=(X,\Delta)$ és $\Gamma=\Gamma_S$. Ez esetben $i=0$ és $j=0$, illetve $i=0$ és $j=1$ mellett a 7. 9 Lemmát általános formájában kell alkalmaznunk. Legyen $X^{(n)}=\{x_{mn}:m<\omega\}$. Legyen U az $U_0\cup U_{0,0}\cup\bigcup_{n<\omega}U_{0,1,X^{(n)}}$ halmaz és legyen $A_k=A^S_{k,0}\cup A^S_{k,0,0}\cup\bigcup_{n<\omega}A^S_{k,0,1,X^{(n)}}$ $k=1$ és $k=2$ esetén.

Azt állítjuk, hogy $X'=X_0=X$, $i=0$ és $j=0$ mellett 7. 8 (i) feltétele teljesül. Legyen ugyanis X'' változóknak egy tetszőleges véges halmaza. Válasszuk az n természetes számot úgy, hogy n különbözzék minden n'-től, melyre van olyan m', hogy $x_{m'n'}\in X''$, és legyen $x=x_{0n}$. Ha $G\in\Delta$ és $\mathrm{var}\,(G)\subseteq X''\cup\{x\}$, akkor nincsen olyan $m\neq 0$, melyre $x_{m,n}$ szabad változója G-nek, tehát Δ_{Df} definíciójának (iv) pontját $Y=\Delta$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $\exists xG=\exists x_{0n}G\in\Delta$. Ezzel beláttuk, hogy 7. 8 (i) feltétele teljesül.

Mivel az $X^{(n)}$ halmaz végtelen, azért Δ_{Df} definíciójának (iii) pontját $Y=\Delta$-ra alkalmazva adódik, hogy $i=0, j=1$ és $X'=X^{(n)}$ mellett 7. 8 (ii) feltétele teljesül.

Legyen Ω a $(\Gamma, \preceq, U, A_1, A_2)$ C_0-rendszer. 7. 7. 1—3 és 7. 9. 1—3 alkalmazásával kapjuk, hogy Ω C-rendszer. Azt, hogy 7. 9. 3 alkalmazható (az $i=0$, $j=0$, $X'=X$ illetve az $i=0, j=1$, $X'=X^{(n)}$ esetekben, ahol n tetszőleges természetes szám), éppen most láttuk be. Legyen 7. 6 alkalmazásával $(T_0, T_1, \psi^0, \psi^1)$ Ω-nak egy limeszpontja úgy, hogy $F^* \in T_0$, $(\neg H)^* \in T_1$. Ilyen limeszpont létezik, mivel F-re és H-ra tett feltevésünk következtében $\gamma_0 =_{\mathrm{df}} (\{F^*\}, \{(\neg H)^*\}, 0, 0) \in \Gamma$ és így 7. 6 szerint van Ω-nak olyan zárt sorozata, amelynek első eleme γ_0; ezen zárt sorozat által definiált limeszpont a mondott tulajdonságú lesz. 7. 7. 4 szerint T_0, T_1 pszeudoteljesek.

Legyen $\mathfrak{A}_0$ ill. $\mathfrak{A}_1$ T_0 ill. T_1 kanonikus modellje, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \restriction \mu$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \restriction \mu$.

7. 9. 4 és 7. 10. 1 alkalmazásával kapjuk, hogy

(i) $rn(h_0^0) = D$,

(ii) $rn(h_1^0 \restriction X^{(n)}) = D$, és

(iii) ha F egy μ feletti prímformula, amelynek minden változója $x_{m_k n_k}$ alakú valamely $k<p$ mellett, továbbá $\eta = \{(x_{m_k n_k}, x_{m'_k n_k}) : k<p\}$, akkor $G =_{\mathrm{df}} F$, vagy pedig $G =_{\mathrm{df}} F \wedge \neg(F(\eta))$ mellett $\models_{\mathfrak{A}_0} G(\psi^0)$-ből következik, hogy $\models_{\mathfrak{A}_1} G(\psi^1)$.

Legyen $a_{mn} = (\psi^0(x_{mn}))^{\mathfrak{A}_0}$, $b_{mn} = (\psi^1(x_{mn}))^{\mathfrak{A}_1}$, $x_{mn} \in \mathrm{dom}\,(\psi^0) = \mathrm{dom}\,(\psi^1)$ esetén. Legyen tetszőleges $n<\omega$ esetén μ_n azon m indexek halmaza, melyekre $x_{mn} \in \mathrm{dom}\,(\psi_1)$. Legyen $n<\omega$-ra $c_n = \{a_{mn} : m \in \mu_n\}$, és legyen $C = \{c_n : n<\omega\}$. Azt állítjuk, hogy

(iv) tetszőleges n_1, n_2 indexek esetén c_{n_1} vagy egyenlő c_{n_2}-vel, vagy pedig $c_{n_1} \cap c_{n_2} = 0$.

Valóban, tegyük fel, hogy $c_{n_1} \cap c_{n_2} \neq 0$, azaz $a_{m_1 n_1} = a_{m_2 n_2}$ valamely olyan m_1, m_2, n_1, n_2 indexek mellett, amelyekre $m_1 \in \mu_{n_1}$, $m_2 \in \mu_{n_2}$. Akkor, hogy a $c_{n_1} \subseteq c_{n_2}$ inklúziót belássuk, legyen m'_1 μ_{n_1} tetszőleges eleme. (ii) szerint van olyan $m'_2 \in \mu_{n_2}$ természetes szám, amelyre $b_{m'_2 n_2} = b_{m'_1 n_1}$. Azt állítjuk, hogy $a_{m'_1 n_1} = a_{m'_2 n_2}$. Ha ugyanis ellenkezőleg $a_{m'_1 n_1} \neq a_{m'_2 n_2}$ állna fenn, akkor (iii)-t a $G = x_{m_1 n_1} \approx x_{m_2 n_2} \wedge \neg x_{m'_1 n_1} \approx x_{m'_2 n_2}$ formulára alkalmazva azt kapnánk, hogy $b_{m'_2 n_2} \neq b_{m'_1 n_1}$, ellentétben feltevésünkkel. Tehát valóban $a_{m'_1 n_1} = a_{m'_2 n_2}$. Más szóval bebizonyítottuk, hogy c_{n_1} tetszőleges $a_{m'_1 n_1}$ eleméhez van c_{n_2}-nek ezzel egyenlő $a_{m'_2 n_2}$ eleme, és így valóban $c_{n_1} \subseteq c_{n_2}$. Ugyanígy adódik, hogy $c_{n_2} \subseteq c_{n_1}$, tehát $c_{n_1} = c_{n_2}$, amit be kellett látnunk.

Legyen $f \in \mu$ valamely p-változós operációjel, $c^{(0)}, \ldots, c^{(p-1)}$ C-nek fix elemei. Azt állítjuk, hogy (v) az összes $f^{\mathfrak{A}}(a^{(0)}, \ldots, a^{(p-1)})$ alakú elem, midőn $a^{(0)}, \ldots, a^{(p-1)}$ rendre végig fut $c^{(0)}, \ldots, c^{(p-1)}$ elemein, ugyanabba a C-beli c halmazba esik.

Legyen ugyanis $c^{(0)} = c_{n_0}, \ldots, c^{(p-1)} = c_{n_{p-1}}$ és $a_{m_i n_i}, a_{m'_i n_i} \in c_{n_i}$ $(i<p)$. Legyen $a =_{\mathrm{df}} f^{\mathfrak{A}}(a_{m_0 n_0}, \ldots, a_{m_{p-1} n_{p-1}})$. (i) miatt vannak olyan m, n indexek, hogy $m \in \mu_n$ és $a = a_{mn}$. Legyen $a' =_{\mathrm{df}} f^{\mathfrak{A}}(a_{m'_0 n_0}, \ldots, a_{m'_{p-1} n_{p-1}})$ és $b' =_{\mathrm{df}} f^{\mathfrak{B}}(b_{m'_0 n_0}, \ldots, b_{m'_{p-1} n_{p-1}})$. (ii) alapján van olyan $m' \in \mu_n$, hogy $b = b_{m'n}$. Azt állítjuk, hogy $a' = a_{m'n}$. Ha ugyanis $a' \neq a_{m'n}$ lenne, akkor $\models_{\mathfrak{A}_0} (f x_{m_0 n_0}, \ldots, x_{m_{p-1} n_{p-1}} \approx x_{mn} \wedge \neg f x_{m'_0 n_0}, \ldots, x_{m'_{p-1} n_{p-1}} \approx x_{m'n})(\psi^0)$ állna fenn, tehát (iii) szerint kapnánk, hogy $\models_{\mathfrak{A}_1} (\neg f x_{m n_0}, \ldots, x_{m'_{p-1} n_{p-1}} \approx x_{m'n})(\psi^1)$, ami nem igaz. Összefoglalva, $a' = a_{m'n} \in c_n$ és így valóban $f^{\mathfrak{A}}(a^{(0)}, \ldots, a^{(p-1)}) \in C_n$ az adott n mellett tetszőleges $a^{(i)} \in c^{(i)}$ esetén, amit be kellett látnunk.

Definiáljuk most a $\mathfrak{H}$ μ-struktúrát a következőképpen:

(vi) $|\mathfrak{H}| = C$,

(vii) $(c^{(0)}, \ldots, c^{(p-1)}) \in P^{\mathfrak{H}} \Leftrightarrow$ vannak olyan $a^{(k)} \in c^{(k)}$ elemek, melyekre $(a^{(0)}, \ldots, a^{(p-1)}) \in P^{\mathfrak{A}}$ (tetszőleges μ-beli p-változós P relációjel esetén), és

(viii) $f^{\mathfrak{H}}(c^{(0)}, \ldots, c^{(p-1)}) = c$, ahol $c \in C$ azon elem, melyre $f^{\mathfrak{A}}(a^{(0)}, \ldots, a^{(p-1)}) \in c$ minden $a^{(i)} \in c^{(i)}$ $(i<p)$ elemrendszer esetén. (A $c \in C$ halmazok nem üresek, hiszen

$\{b_{mn}: m \in \mu_n\} = |\mathfrak{B}| \neq 0$. Ezért $c^{(0)}, \ldots, c^{(p-1)}$ egyike sem üres és íyg (iv) és (v) alapján (viii)-ban a c elem egyértelműen meghatározott.)

Alkalmazva (iii)-t a $G = x_{mn} \approx x_{m'n'}$ formulára, kapjuk, hogy

(ix) $a_{mn} = a_{m'n'}$-ből következik, hogy $b_{mn} = b_{m'n'}$. (ix)-ből, (iv)-ből és (i)-ből következik, hogy a $h(a_{mn}) = (b_{mn}, c_n)$ egyenlőség egyértelműen meghatározza A-nak egy h leképzését $B \times C$-be, ahol $B = |\mathfrak{B}|$. Azt állítjuk, hogy h $\mathfrak{A}$-nak izomorfizmusa $\mathfrak{B} \times \mathfrak{H}$-re. Az, hogy h $B \times C$-re történő leképzés, abból következik, hogy (ii) alapján tetszőleges $c_n \in C$ és $b \in B$ elemek esetén van olyan $m \in \mu_n$, hogy $b_{mn} = b$. Az, hogy h homomorfizmus, (iii)-nak valamely $Px_{m_0n_0} \ldots x_{m_{p-1}n_{p-1}}$ vagy $fx_{m_0n_0} \ldots x_{m_{p-1}n_{p-1}} \approx \approx x_{mn}$ alakú prímformulára való alkalmazásával és $\mathfrak{H}$ definíciójából következik.

Tegyük most fel, hogy $(b_{mn}, c_n) = (b_{m'n'}, c_{n'})$. Azt állítjuk, hogy $a_{mn} = a_{m'n'}$. $c_n = c_{n'}$ alapján ugyanis van olyan $m'' \in \mu_{n'}$ index, melyre $a_{mn} = a_{m''n'}$. Ha tehát állításunkkal ellentétben $a_{mn} \neq a_{m'n'}$ lenne, akkor $\models_{\mathfrak{A}_0} (x_{mn} \approx x_{m''n'} \wedge \neg x_{mn} \approx x_{m'n'})(\psi^0)$ és így (iii) alapján $b_{mn} \neq b_{m'n'}$ állna fenn, ami ellentmondás. Így valóban $a_{mn} = a_{m'n'}$, ami azt bizonyítja, hogy h 1-1 értelmű leképzés.

Végül tegyük fel, hogy $(b_{m_0n_0}, \ldots, b_{m_{p-1}n_{p-1}}) \in P^{\mathfrak{B}}$ és $(c_{n_0}, \ldots, c_{n_{p-1}}) \in P^{\mathfrak{H}}$. Be akarjuk látni, hogy $(a_{m_0n_0}, \ldots, a_{m_{p-1}n_{p-1}}) \in P^{\mathfrak{A}}$. $(c_{n_0}, \ldots, c_{n_{p-1}}) \in P^{\mathfrak{H}}$-ből és (vii)-ből következik, hogy $(a_{m_0'n_0}, \ldots, a_{m_{p-1}'n_{p-1}}) \in P^{\mathfrak{A}}$ valamely $m_i' \in \mu_{n_i}$ indexek mellett. Ha, állításunkkal ellentétben $(a_{m_0n_0}, \ldots, a_{m_{p-1}n_{p-1}}) \notin P^{\mathfrak{A}}$, akkor $\models_{\mathfrak{A}_0} (Px_{m_0'n_0} \ldots x_{m_{p-1}'n_{p-1}} \wedge \neg Px_{m_0n_0} \ldots x_{m_{p-1}n_{p-1}})(\psi^0)$ és így (iii) alapján $(b_{m_0n_0}, \ldots, b_{m_{p-1}n_{p-1}}) \notin P^{\mathfrak{B}}$ feltevésünkkel ellentétben; ezzel állításunkat beláttuk.

Összefoglalva, h $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B} \times \mathfrak{H}$-re való izomorfizmusa. Mivel $F^* \in T_0$, $(\neg H)^* \in T_1$, azért 7. 2 szerint $\models_{\mathfrak{A}} F$ és $\models_{\mathfrak{B}} \neg H$. Ezzel beláttuk, hogy F és H nem elégítik ki a tétel 1. feltevését. Ezzel a tétel második felének a bizonyítását és így az egész tételnek a bizonyítását is, befejeztük.

A következő, és ezen § utolsó tételének a bizonyításában olyan $S = (X_0, \ldots, \ldots, X_{s-1}, \Delta, \Phi)$ σ-rendszert használunk, melyben Φ az S-hez tartozó approximáló rendszerekben levő leképzésekre nem triviális megszorítást fog jelenteni.

Legyen $\langle x_n : n < \omega \rangle$ és $\langle y_n : n < \omega \rangle$ az X_0, ill. X_1 halmaz egy-egy ismétlés nélküli felsorolása. Definiáljuk a $\Delta_{Dr} = \Delta_{Dr}(\mu)$ μ-formulákból álló halmazt, mint azon legszűkebb Y halmazt, amely kielégíti a következő feltételeket:

(i) ha $F(x_{n_0}, \ldots, x_{n_{p-1}})$ μ feletti prímformula, amelyben a különböző $x_{n_0}, \ldots, \ldots, x_{n_{p-1}}$ változókon kívül más változó nem fordul elő, akkor $G = F(x_{n_0}, \ldots, x_{n_{p-1}}) \wedge \wedge \neg F(y_{n_0}, \ldots, y_{n_{p-1}})$ mellett $G \in Y$ és $\neg G \in Y$,

(ii) Y zárt konjunkcióra és diszjunkcióra,

(iii) ha $F \in Y$, akkor $\forall x_n \forall y_n F \in Y$ és $\exists x_n \exists y_n F \in Y$ minden $n < \omega$-ra.

8. 8 TÉTEL. (véges eset: KEISLER [18]). *Tetszőleges F és H μ feletti zárt formulák esetén a következő két feltétel egymással ekvivalens.*

1. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúrák esetén ha $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ és $\models_{\mathfrak{B}} F$, akkor $\models_{\mathfrak{B}} H$.*

2. *Van olyan $G \in \Delta_{Dr}(\mu)$ zárt formula, melyre $F \models G \models H$.*

Tekintettel arra, hogy a tétel bizonyítása nagy mértékben hasonló az eddigi bizonyításokhoz, a bizonyítást csak vázoljuk.

A (nem 2.) $\Rightarrow$ (nem 1.) implikáció bizonyítása.

Legyen Φ azon $(\varphi_0^0, \varphi_1^0, \varphi_0^1, \varphi_1^1)$ függvényekből álló négyesek halmaza, ahol $\mathrm{dom}\,(\varphi_i^j) \subseteq X_i$, $rn(\varphi_i^j) \subseteq D$, és tetszőleges n természetes számra $x_n \in \mathrm{dom}\,(\varphi_0^j)$ akkor és csak akkor, ha $y_n \in \mathrm{dom}\,(\varphi_1^j)$ $(j=0,1)$. Legyen $\Delta = \Delta_{D_r}(\mu)$, $s=2$, $S=(X_0, X_1, \Delta, \Phi)$ és $\Gamma = \Gamma_S$.

Tegyük fel, hogy F és H nem elégítik ki a 2. feltételt. Ekkor, ha $\gamma_0 = (\{F^*\}, \{(\neg H)^*\}, 0, 0, 0, 0)$, akkor $\gamma_0 \in \Gamma$, amint az Γ_S definíciója alapján könnyen látható. Legyen U' a $(7, j, d_0, d_1)$ alakú elemek halmaza, ahol $d_0, d_1 \in D$ és $j<2$. Definiáljuk a Λ_1', Λ_2' függvényeket az U' halmazon a következőképpen. Legyen $\Lambda_1'(\mu) = \Gamma$ minden $u \in U'$-re és $\Lambda_2'(u) = \{\gamma \in \Gamma : d_i \in rn(\varphi_i^j \gamma)\ i<2\text{-re}\}$ $u=(7, j, d_0, d_1) \in U'$ esetén. Legyen $U = U_0 \cup U'$ és $\Lambda_k = \Lambda_{k,0}^S \cup \Lambda_k'$ $k=1$ és $k=2$ esetén. Amint azt a 7. 7 Lemma és egy a 7. 8 Lemmával analóg állítás segítségével be lehet látni, Ω C-rendszer. Legyen 7. 6 alkalmazásával $(T_0, T_1, \psi_0^0, \psi_1^0, \psi_1^1)$ Ω-nak egy olyan limeszpontja, melyre $F^* \in T_0$ és $(\neg H)^* \in T_1$. T_0, T_1 pszeudoteljes elméletek, amint az 7. 7. 4-ből következik. Legyen $\mathfrak{A}_j$ T_j kanonikus modellje $(j<2)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \restriction \mu$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \restriction \mu$. Megmutatható, hogy a $h((\psi_0^0(x_n))^{\mathfrak{A}_0}, (\psi_1^0(y_n))^{\mathfrak{A}_0}) = ((\psi_0^1(x_n))^{\mathfrak{A}_1}, (\psi_1^1(y_n))^{\mathfrak{A}_1})(x_n \in \mathrm{dom}\,(\psi_0^0))$ egyenlőség egyértelműen definiálja $|\mathfrak{A}| \times |\mathfrak{A}|$-nak egy $|\mathfrak{B}| \times |\mathfrak{B}|$-re történő izomorfizmusát. Mivel 7. 2 értelmében $\models_{\mathfrak{A}} F$ és $\models_{\mathfrak{B}} \neg H$, F és H valóban nem elégítik ki a tétel 1. pontját, q.e.d.

Ezen § befejezéseképpen néhány megjegyzést teszünk arra vonatkozólag, hogy módszereink milyen további eredményekhez vezetnek.

1. MEGJEGYZÉS. BARWISE [1] bevezette az $L(\omega_1, \omega)$ logikai nyelv bizonyos „résznyelveinek" egy osztályát. Egy ilyen résznyelvet egy W halmaz határoz meg; ha ezt a nyelvet $L(W)$-vel jelöljük, akkor $L(W)$-ben a formula definíciója egyszerűen a formula fogalmának W-re való megszorítása, azaz F formula az $L(W)$ nyelvben akkor és csak akkor, ha F formula a közönséges értelemben (tehát $L(\omega_1, \omega)$-ben) és $F \in W$. Ahhoz, hogy az $L(W)$ nyelvnek jó tulajdonságai legyenek, a W halmaznak bizonyos feltételeket kell kielégítenie. BARWISE kimutatta, hogy ha W bizonyos, már egyéb vizsgálatokból (PLATEK [36], KRIPKA [21]) ismert tisztán halmazelméleti feltételeket kielégít (amely esetben azt mondjuk, hogy *W megengedett*), akkor $L(W)$-nek igen érdekes tulajdonságai lesznek; többek között a *Gödel*-féle teljességi tételnek egy természetes általánosítása érvényes lesz. A szerző a [28] dolgozatban a jelen § eredményeit tetszőleges megengedett W halmaz feletti $L(w)$ nyelvre bizonyította. Az általános eset tárgyalása valamivel bonyolultabb a disszertációban adottnál; többek között szükség van hozzá az említett *Gödel—Barwise*-féle teljességi tételre.

Mindezt elsősorban azért mondtuk el, hogy rámutassunk, hogy a fejezet tételeinek érvényességi köre nem mindössze az a két szélső eset, amelyről a jelen §-ban szó volt: ti. a véges formulák esete és a teljes $L(\omega_1, \omega)$ nyelv.

2. MEGJEGYZÉS. Módszereink alkalmasak öröklődési tételek bizonyos értelemben vett „kombinációinak", pl. a következő tételnek a bizonyítására.

8. 9 TÉTEL. *Tetszőleges F_1, F_2 és H μ feletti zárt formulák esetén a következő két feltétel ekvivalens.*

1. *H-nak van olyan μ típusú modellje, amely részstruktúrája F_1 egy modelljének és ugyanakkor homomorf képe F_2 egy modelljének.*

2. *Tetszőleges G_1 univerzális és G_2 pozitív zárt μ-formulák esetén, ha $F_1 \models G_1$ és $F_2 \models G_2$, akkor $\{G_1, G_2, H\}$ konzisztens.*

Figyeljük meg, hogy az (1.)⇒(2.) implikáció triviális. Ha ugyanis $\mathfrak{A}$ H-nak egy az 1. pontban mondott tulajdonságokkal rendelkező modellje, akkor a 8. 1 és

8. 2 tételek triviális részei szerint $\models_{\mathfrak{A}} G_1, \models_{\mathfrak{A}} G_2$ (ha G_1, G_2-re igazak a 2. pont feltevései) és így $\{G_1, G_2, H\}$-nak $\mathfrak{A}$ modellje.

Másrészt, a tétel másik irányú állítása a véges logika esetére szintén levezethető 8. 1-ből a következőképpen.

Tegyük fel, hogy F_1-re és F_2-re a 2. feltétel igaz. Legyen Σ_1 és Σ_2 azon univerzális illetve pozitív zárt μ-formulák halmaza, melyek következményei F_1-nek, illetve F_2-nek. Azt állítjuk, hogy $\Sigma =_{\text{df}} \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \{H\}$ konzisztens. Ugyanis Σ bármely véges részhalmaza része $\Sigma_1' \cup \Sigma_2' \cup \{H\}$-nak, ahol Σ_1', Σ_2' véges részhalmazai Σ_1-nek, illetve Σ_2-nek, és, ha $G_k = \bigwedge \Sigma_k'$ ($k=1$ és $k=2$), akkor feltevésünk szerint $\{G_1, G_2, H\}$ konzisztens, tehát $\Sigma_1' \cup \Sigma_2' \cup \{H\}$ is konzisztens. Más szóval Σ minden véges részhalmaza konzisztens, azaz Σ maga is konzisztens a kompaktsági tétel értelmében.

Legyen $\mathfrak{B}$ Σ-nak egy μ típusú modellje. A II. fejezet 4. 6 Korollárium szerint $K_1 =_{\text{df}} \text{Sub}(\text{Mod}_\mu(F_1)) \in PC_\Delta$ és $K_2 =_{\text{df}} \text{Hom}(\text{Mod}_\mu(F_2) \in PC_\Delta$. Legyen $T = Th(\mathfrak{B})$ és legyen T' T tetszőleges véges részhalmaza. Azt állítjuk, hogy $Mod_\mu(T') \cap K_1 \neq 0$ és $\text{Mod}_\mu(T') \cap K_2 \neq 0$. Ha ugyis pl. $\text{Mod}_\mu(T') \cap K_1 = 0$ lenne, akkor $\neg \bigwedge T' \in Th(K_1)$ állna fenn, azaz $\neg \bigwedge T'$ igaz lenne minden olyan struktúrában, amely részstruktúrája F_1 egy modelljének. 8. 1 szerint tehát $F_1 \models G_1 \models \neg \bigwedge T'$ állna fenn valamely G_1 univezális μ-formulára. De ekkor $G_1 \in \Sigma_1 \subseteq Th(\mathfrak{B}) = T$, $\mathfrak{B}$ választása miatt ,tehát $\models_{\mathfrak{B}} \neg \bigwedge T'$, ami nem igaz. Tehát valóban $\text{Mod}_\mu(T') \cap K_1 \neq 0$, és hasonlóképpen 8. 2 felhasználásával $\text{Mod}_\mu(T') \cap K_2 \neq 0$. Mivel ez T tetszőleges T' véges részhalmazára igaz, azért a CRAIG—ROBINSON tétel (I. fejezet 2. 17.) miatt $K_1 \cap K_2 \neq 0$, ami éppen a tétel 1. pontjában foglalt állítás.

A tételnek a teljes $L(\omega_1, \omega)$ nyelvre vonatkozó esete nem vezethető le hasonló módon. A bizonyítás (amely részletesen le van írva a szerző [28] dolgozatában) azonban a jelen §-ban leírtakhoz hasonló módon történik.

Megjegyezzük, hogy 8. 9 közös általánosítása a 8. 1 és 8. 2 tételeknek, ami világossá válik, ha F_2-nek vagy F_1-nek az $\uparrow$ formulát választjuk.

Végül megjegyezzük, hogy a jelen szakasz 8. 1—8. 8 tételei közül bármely kettőnek egy a 8. 9-hez hasonló közös általánosítása bizonyítható. A véges logikára vonatkozó fenti bizonyításunk változtatás nélkül érvényes mindezekre az esetekre. Továbbá az F_1 és F_2 formulák helyett akárhány véges sok, sőt megszámlálhatóan végtelen sok formula is vehető és az így adódó feltételek mellett a 8. 9-hez hasonló eredmények bizonyíthatóak. Amiatt azonban, hogy a 8. 1—8. 8 tételeknek (és egy sor, ezekhez hasonló eredménynek) ez idő szerint nincs értelmesen megfogalmazható közös általánosítása, a most említett irányú általánosítások nem látszanak különösebben érdekeseknek.

3. MEGJEGYZÉS. Mint már említettük, módszerünk sokban rokon SMULLYAN [40] módszerével. Az eredeti SMULLYAN módszer kis változtatásaival is már bizonyítani lehet az eddig ismert eredményeknél jóval erősebbeket; pl. a *Craig—Lopez—Escobar*-féle interpolációs tétel következő végtelen általánosítását.

8. 10 TÉTEL. (MAKKAI [28]). *Legyen Σ zárt formuláknak egy megszámlálható halmaza és μ egy hasonlósági típus olyan módon, hogy tetszőleges F_1, F_2 különböző Σ-beli formulák esetén, ha egy σ nem-logikai jel előfordul F_1-ben is és F_2-ben is, akkor σ benne van μ-ben. Ez esetben, ha Σ ellentmondásos, akkor van Σ minden F eleméhez egy olyan G_F zárt μ feletti formula, hogy $F \models G_F$ és $\{G_F : F \in \Sigma\}$ szintén ellentmondásos.*

Megjegyezzük, hogy a tétel *véges* Σ halmaz esetén könnyen levezethető a *Craig—Lopez—Escobar*-féle tételből. Másrészt a *véges logikára* vonatkozó esete (akár nem megszámlálható Σ esetén is) a kompaktsági tétel segítségével rögtön levezethető abból, hogy véges Σ halmaz esetén igaz a tétel.

Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy a *Lopez—Escobar*-féle tételből könnyen levezethető Suslinnak az a tétele, hogy egy szeparábilis teljes metrikus térben bármely két diszjunkt analitikus halmaz elválasztható egymástól egy *Borel*-halmazzal (lásd KURATOWSKI [22] 485 old.). Ugyanolyan módon, ahogyan SUSLIN tétele következik *Lopez—Escobar* tételéből, 8. 10-ből levezethető a SUSLIN-tételnek NOVIKOV által adott azon általánosítása, mely szerint egy fenti tulajdonságokkal rendelkező tér esetén, ha $\bigcap_{n<\omega} A_n=0$, ahol A_n minden $n\in\omega$-ra analitikus halmaz, akkor vannak olyan B_n *Borel*-halmazok ($n<\omega$), hogy $A_n\subseteq B_n$ és $\bigcap_{n<\omega} B_n=0$ (lásd KURATOWSKI [22] 510. old.).

9. §. *Megszámlálható struktúrákból álló osztályok*

Mint láttuk, az 5. 2 Tételből a 8. 2 Tétel véges formulákra vonatkozó része igen könnyen következett (6. 7 Korollárium). A következőkben először azt mutatjuk meg, hogy általános modellelméleti eszközökkel (nevezetesen a CRAIG—ROBINSON-tétel (2. 17), továbbá az általunk bizonyított 4. 6 Korollárium és a 4. 4. Lemma segítségével) a fordított irányba is lehet következtetni, mégpedig nemcsak a homomorfizmusokkal kapcsolatban, hanem a többi R_i relációra vonatkozólag is. Az így kapott eredmények nem újak, illetve igen könnyen levezethetők KEISLER [18] eredményeiből és analóg eredményekből. Mégis, úgy érezzük, érdekes tény, hogy a megőrzési tételeknek a 8. §-ban adott „kétformulás" általánosításai az említett, látszólag sokkal erősebb eredményeket is kiadják.

A mondottak után a jelen § tulajdonképpeni céljára, az említett tételek $L(\omega_1,\omega)$-beli megfelelőinek bizonyítására térünk rá.

Legyenek $\Delta_1^0(\mu),\dots,\Delta_8^0(\mu)$ rendre a μ feletti véges univerzális formulák halmaza, a p feletti véges pozitív formulák halmaza, továbbá a $\Delta_{\mathrm{End}}(\mu)$, $\Delta_R(\mu)$, $\Delta_{\mathrm{Erhom}}(\mu)$, $\Delta_{E\mathrm{ext}}(\mu)$, $\Delta_{Df}(\mu)$ és $\Delta_{Dr}(\mu)$ halmazok, ha ezeket *véges* formulákra szorítkozva úgy definiáljuk, mint az előző §-ban. Az ottani definíciókban nem volt lényeges, hogy μ megszámlálható volt. Megjegyezzük másrészt, hogy nyilvánvalóan $\Delta_i^0(\mu)=$ $=\bigcup_{\mu'\in S_\omega(\mu)}\Delta_i^0(\mu')$. Legyenek $\Delta_9^0(\mu),\dots,\Delta_{16}^0(\mu)$ rendre a $\Delta_1^0(\mu),\dots,\Delta_8^0(\mu)$ elemeinek negációjából alkotott halmazok.

9. 1. LEMMA. *Legyen Σ véges, zárt μ-formulák egy halmaza, ahol μ tetszőleges (nem feltétlenül megszámlálható) hasonlósági típus. Legyen j 1-től 16-ig tetszőleges természetes szám, és tegyük fel, hogy $H\in Th(S_{R_j}(\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)))$. Ekkor van olyan $G\in$ $\in\Delta_j^0(\mu)$ (véges) zárt formula, melyre $\Sigma\models G\models H$.*

Bizonyítás. Tegyük fel a lemma feltevéseit. A következőkben alkalmazni fogjuk a 4. 4 Lemmát és a benne használt jelöléseket. 4. 5 szerint ($\mu_1=\mu$ és $\Sigma=0$ mellett) van olyan Δ zárt μ''-formulákból álló halmaz, hogy $D\in\mathrm{Mod}_{\mu''}(\Delta)$ akkor és csak akkor, ha $(D\upharpoonright\mu')\|A$, $(D\upharpoonright\mu')\|B$ léteznek.

Azt állítjuk, hogy $\{F^{(A)}:F\in\Sigma\}\cup\Sigma^j\cup\Delta\models H^{(B)}$. Ennek beláthatásához tegyük fel, hogy D a baloldalon álló halmaz egy μ'' típusú modellje. Ekkor az $\mathfrak{A}=(D\upharpoonright\mu')\|A\upharpoonright\mu$,

$\mathfrak{B} = (D \restriction \mu') \| B \restriction \mu$ struktúrák léteznek és 4. 4 szerint $\mathfrak{A} R_j \mathfrak{B}$. I. fej. (3. 5) szerint másrészt $\models_{\mathfrak{A}} F$ Σ minden F elemére, azaz $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$. A két utóbbi állítás azt jelenti, hogy $\mathfrak{B} \in S_{R_j}(\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma))$ és így a H-ra tett feltevésünk miatt $\models_{\mathfrak{B}} H$. Ezért $\models_{(D \restriction \mu') \| B} H$ és így (3. 5) szerint $\models_{D \restriction \mu'} H^{(B)}$, azaz $\models_D H^{(B)}$, amit be kellett látnunk.

A most bizonyított állításból következik, hogy $\{F^{(A)} : F \in \Sigma'\} \cup \Sigma^{(j)} \cup \Delta \models H^{(B)}$, Σ valamely Σ' véges részhalmazára. Legyen $F_0 = \Lambda \Sigma'$ és $K' = \mathrm{Mod}_\mu(F_0)$. Ebből egy, az előző bekezdéshez hasonló meggondolással az adódik, hogy $H \in Th(S_{R_j}(K'))$. Ekkor $H \in Th(S_{R_j}(\mathrm{Mod}_{\mu_0}(F_0)))$ μ valamely véges μ_0 részhalmazára. Tehát az előző § megfelelő tétele[7] szerint van olyan $G \in \Delta_j^0(\mu_0) \subseteq \Delta_j^0(\mu)$ zárt formula, melyre $F \models G \models H$ és így annál inkább $\Sigma \models G \models H$.

Ezzel 9. 1 bizonyítását befejeztük.

9. 2 TÉTEL. *Rögzítsünk egy i 1 és 16 közötti természetes számot. Legyen* $K \in PC_\Delta(\mu)$ *és* $\Sigma_i = Th(K) \cap \Delta_i^0(\mu)$. *Ekkor* $\overline{S_{R_i}(K)} = \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_i)$.

Bizonyítás. Az $\overline{S_{R_i}(K)} \subseteq \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_i)$ inklúzió nyilvánvalóan következik az előző § megfelelő tételének triviális részéből.

Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{H} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_i)$. Legyen $K' = \{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{H}\} = \mathrm{Mod}_\mu(Th(\mathfrak{H}))$, $R_i^{-1} = R_{i \pm 8} = R_j$, ahol a $+$ vagy a $-$ jel veendő aszerint, hogy $1 \leqq i \leqq 8$ vagy $9 \leqq i \leqq 16$.

Azt állítjuk, hogy $\overline{S_{R_j}(K')} \cap \overline{K} \neq 0$. 4. 6 Korollárium szerint $K'' =_{\mathrm{df}} S_{R_j}(K') \in PC_\Delta$. Ezért (2. 16) és (2. 15) szerint bizonyítandó állításunk ekvivalens azzal, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(Th(K'')) \cap \mathrm{Mod}_\mu(Th(K)) \neq 0$, azaz hogy $Th(K'') \cup Th(K)$ konzisztens. Tegyük fel, hogy ellenkezőleg, van olyan $H \in Th(K)$ formula, melyre $Th(K'') \models \neg H$. Ekkor 9. 1 szerint $Th(\mathfrak{H}) \models G \models \neg H$ $\Delta_j^0(\mu)$ valamely zárt G eleme mellett. Ekkor $\models_{\mathfrak{H}} G$, másrészt $H \models \neg G$, és így $\neg G \in Th(K)$. Δ_i^0 és Δ_j^0 közül a nagyobb indexű a másik elemeinek negációjából álló halmaz, és így $G \in \Delta_j^0(\mu)$ miatt $\neg G$ logikailag ekvivalens $\Delta_0^i(\mu)$ valamely G' elemével. Így $G' \in Th(K) \cap \Delta_i^0(\mu) = \Sigma_i$ és ezért $\mathfrak{H}$-re tett feltevésünk szerint $\models_{\mathfrak{H}} G'$. Ez ellentmond annak, hogy $\models_{\mathfrak{H}} G$. Ezzel a bekezdés elején kimondott állítást igazoltuk.

Mivel $S_{R_j}(K')$ és K PC_Δ osztályok, azért a CRAIG—ROBINSON-tétel (I. fej. (2. 17)) szerint az előző állítás maga után vonja, hogy $S_{R_j}(K') \cap K \neq 0$. Ez a szereplő jelölések értelmében azt jelenti, hogy vannak olyan $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúrák, melyekre $\mathfrak{B} R_j \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{H}$ és $\mathfrak{A} \in K$. Mivel $\mathfrak{B} R_j \mathfrak{A}$ ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{A} R_i \mathfrak{B}$, kapjuk hogy $\mathfrak{B} \in S_{R_i}(K)$ és így $\mathfrak{H} \in \overline{S_{R_i}(K)}$. Mivel $\mathfrak{H}$ $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_i)$-nek tetszőleges eleme volt, ezzel a $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma_i) \subseteq \overline{S_{R_i}(K)}$ inklúziót és egyben a tételben állított egyenlőséget is beláttuk.

Rátérve a jelen § tulajdonképpeni témájára, először is megjegyezzük, hogy ŁOŚ és TARSKI tétele szerint $S_{R_1}(K) = \mathrm{Mod}_\mu(Th(K) \cap \Delta_1^0(\mu))$ tetszőleges $K \in PC_\Delta(\mu)$ osztály esetén. Azt is említettük (az $i=2$ esetre), hogy i többi értékére a 9. 2 tételnek a felülhúzás elhagyásával kapott hasonló élesítése nem igaz. Ezzel szemben, ha az $L(\omega_1, \omega)$ nyelvre térünk át és csak megszámlálható modelleket tekintünk, akkor a ŁOŚ—TARSKI tétellel analóg eredmény igaz $K = \mathrm{Mod}_\mu(F)$ alakú osztályokra, ahol F zárt $L(\omega_1, \omega)$-beli μ-formula.

A következőkben „formulán" mindig a teljes $L(\omega_1, \omega)$ nyelv egy formuláját értjük. Legyen μ valamely rögzített *megszámlálható* hasonlósági típus és legyen $\Delta_i =$

[7] Ha az 1, ..., 8 természetes számok valamelyike, akkor a megfelelő tétel 8.j., ha pedig $9 \leqq j \leqq 16$,, akkor 8.(j—8.)

$=\Delta_i(\mu)$ $i=1, \ldots, 16$ mellett a $\Delta_i^0(\mu)$-höz analóg módon, de véges formulák helyett a teljes $L(\omega_1, \omega)$ nyelvre vonatkozólag definiált formulahalmaz.

Állításunkat az I. fejezetben bevezetett jelöléseket használva a következő egyenlőség formájában fogalmazhatjuk meg.

9. 3 TÉTEL. *$S_{R_i}^{(\omega)}(\mathrm{Mod}_\mu(F))=\mathrm{Mod}_\mu^{(\omega)}(Cn_\mu^{\omega_1,\omega}(F)\cap\Delta_i)$ tetszőleges zárt F μ-formulára és $i=1, \ldots, 16$ természetes számra.*

A tétel, úgy látszik, nem bizonyítható az előző § tételeinek felhasználásával (amint a fentebb említett, véges logikára vonatkozó analóg tételek esetében történt.)* A bizonyítás módszere azonban szoros kapcsolatban áll az előző két §-sal, amint ezt látni fogjuk; emiatt több részletet mellőzni fogunk. A tételt csak az $i=2$ esetben (azaz a homomorfizmus esetére) bizonyítjuk be; azonban kezdő lemmáinkat úgy fogalmazzuk meg, hogy azok alkalmazhatók legyenek a többi esetben is.

Megjegyezzük, hogy a tételnek a részstruktúrákra vonatkozó esetét $(i=1)$ BARWISE [1] is bebizonyította; bizonyítása azonban egy interpolációs tételen nyugszik. Ugyanezt a bizonyítást BARWISEtől függetlenül a szerző is megtalálta és csak később realizálta, hogy itt is jó, ha elkerüljük az interpolációs tételeket; a többi esetet ugyanis úgy látszik, nem lehet ily módon tárgyalni.

Megjegyezzük még, hogy az előző § eredményei nem látszanak levezethetőnek a 9. 3 Tételből. Ez azzal van összefüggésben, hogy a 6. 7 Korollárium egyébként rendkívül egyszerű bizonyítása felhasználta a kompaktsági tételt.

Egy *σ'-rendszeren* egy $S=(X_0, \ldots, X_{s-1}, \Delta, \mathfrak{B}, \Phi)$ alakú rendszert értünk, ahol $\omega > s \geqq 1$, $X_0, \ldots, X_{s-1}$ a 7. szakaszban lerögzített változó-halmazok, Δ formuláknak egy halmaza, $\mathfrak{B}$ μ típusú struktúra és Φ egy tetszőleges halmaz. Egy tetszőleges S σ'-rendszer esetén Γ_S legyen azon $\gamma=(\Theta, \varphi_0^0, \ldots, \varphi_{s-1}^0, \varphi_0^1, \ldots, \varphi_{s-1}^1)\cdot$ $\cdot 2s+1$-esek halmaza, ahol

(i) Θ $\mu\cup D$ feletti zárt formulák véges halmaza, Θ elemeiben előforduló D-beli individuumjelek halmaza véges,

(ii) minden $i<s$-re és $j<2$ -re φ_i^j függvény, dom $(\varphi_i^0)=$ dom (φ_i^1) X_i-nek véges részhalmaza, $rn(\varphi_i^0)\subseteqq D$ és $rn(\varphi_i^1)\subseteqq|\mathfrak{B}|$,

(iii) $(\varphi_0^0, \ldots, \varphi_0^1, \ldots)\in\Phi$, és

(iv) ha $\varphi^j=\bigcup_{i<s}\varphi_i^j$ $(j<2)$, akkor tetszőleges $G\in\Delta$ formula esetén abból, hogy var $(G)\subseteqq$ dom (φ^0) és $\Theta\models G(\varphi^0)$ következik, hogy $\models_{\mathfrak{B}} G[\varphi^1]$.

A következő lemma 7. 4-hez hasonlóan bizonyítható és hasonló szerepet is játszik.

9. 4 LEMMA. *Legyen $S=(X_0, \ldots, X_{s-1}, \Delta, \mathfrak{B}, \Phi)$ egy σ'-rendszer, $\Gamma=\Gamma_S$. Rögzítsük a φ^j $(i<s, j<2)$ elemeiket tetszőleges módon és legyen Γ' azon Θ halmazok halmaza, amelyekre $\Theta=\Theta\gamma$ és $\varphi_i^j\gamma=\varphi_i^j$ minden $i<s$-re és $j<2$-re valamely $\gamma\in\Gamma$-ra. Tegyük fel, hogy Δ zárt diszjuncióra. Akkor Γ' minden Θ elemére a 7. 4. 1—6 feltételek (az adott Γ' mellett) teljesülnek.*

A bizonyítást, amely, mint mondtuk, nagyon hasonlít 7. 4 bizonyítására, elhagyjuk.

Definiáljuk az U_0' halmazt és a $\Lambda_{1,0}^S$, $\Lambda_{2,0}^S$ halmazokat úgy, ahogyan U_0-t, $\Lambda_{1,0}^S$-t és $\Lambda_{2,0}^S$-t a 7. §-ban definiáltuk, kivéve, hogy U_0'-be csak a 0 második kom-

* (1972. június) Azóta kiderült, hogy a 9.3 Tétel mégis levezethető a 8 § eredményeiből, SCOTT izomorfizmus tételének felhasználásával (*Theory of Models*, North Holland, 1965., 329—341. old.)

ponenssel rendelkező elemeket vesszük fel, továbbá Θ_j-t mindenütt Θ-val helyettesítjük. A $\Gamma=\Gamma_s$ halmaz $\lesssim$ féligrendezését most is komponensenkénti inklúzióval definiáljuk. A $(T, \psi_0^0, ..., \psi_{s-1}^0, \psi_0^1, ..., \psi_{s-1}^1)$ rendszert az $\Omega=(\Gamma, \lesssim, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C_0-rendszer limeszpontjának nevezzük, ha Ω valamely zárt $\langle \gamma_n : n<\omega \rangle$ sorozata mellett $T=\bigcup_{n<\omega} \Theta\gamma_n$ és $\psi_i^j=\bigcup_{n<\omega} \varphi_i^j\gamma_n$ $(i<s, j<2)$.

9. 5 LEMMA. *Legyen* $\Omega=(\Gamma, \lesssim, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ *egy* C_0*-rendszer, ahol* $\Gamma=\Gamma_S$ *az* $S=(X_0, ..., X_{s-1}, \Delta, \mathfrak{B}, \Phi)$ σ'*-rendszer mellett. Tegyük fel továbbá, hogy* $U_0' \subseteq U$, $\Lambda_{k,0}^S \subseteq \Lambda_k$ $k=1$ *és* $k=2$ *esetén. Tegyük fel végül, hogy* Δ *zárt diszjunkcióra. Ekkor*

1. Γ *tetszőleges* γ *elemére (legfeljebb) megszámlálható sok olyan* $u \in U_0'$ *elem van, melyre* $\gamma \in \Lambda_1(u)$.
2. *A 7. 5. 2 feltétel teljesül* U_0' *minden u elemére.*
3. *A 7. 5. 3 feltétel teljesül* U_0' *minden u elemére.*
4. *Ha* $(T, \psi_0^0, ..., \psi_{s-1}^0, \psi_0^1, ..., \psi_{s-1}^1)$ Ω*-nak egy limeszpontja, akkor T pszeudoteljes, továbbá* ψ_i^j *függvény úgy, hogy* $\mathrm{dom}(\psi_i^j) \subseteq X_i$, $rn(\psi_i^0) \subseteq D$ *és* $rn(\psi_i^1) \subseteq |\mathfrak{B}|$ *minden* $i<s$*-re és* $j<2$*-re.*

A bizonyítást, amely hasonló 7. 7 bizonyításához, most is elhagyjuk; csak annyit jegyzünk meg, hogy a 3. pont a 9. 4 Lemma következménye.

A 7. 8 Lemma megfelelőjét némileg eltérő módon kell megfogalmazni és bizonyítani. Tegyük fel, hogy az $S=(X_0, ..., X_{s-1}, \Delta, \mathfrak{B})=_{\mathrm{df}}(X_0, ..., X_{s-1}, \Delta, \mathfrak{B}, \Phi)$ σ'-rendszerben Φ az összes olyan $(\varphi_0^0, ..., \varphi_0^1, ...)$ $2s$-esek halmaza, ahol $\varphi_i^0 \subseteq X_i \times D$ és $\varphi_i^1 \subseteq X_i \times |\mathfrak{B}|$.

9. 6. LEMMA. *Rögzítsük az* $i<s$ *indexet és válasszunk egy* $X' \subseteq X_i$ *halmazt.*

(i) *Tegyük fel, hogy 7. 8 (i) feltétele teljesül és* Δ *zárt konjunkcióra. Ekkor, ha* $\gamma \in \Gamma_s$ *és* $d \in D$, *akkor van olyan* $x \in X'$ *változó és* $b \in |\mathfrak{B}|$ *elem, amelyekre* $\gamma' \in \Gamma_S$, *ahol* γ' *megegyezik* γ*-val minden koordinátájában, kivéve, hogy* $\varphi_i^0\gamma' = \varphi_i^0\gamma+(x, d)$ *és* $\varphi_i^1\gamma' = \varphi_i^1\gamma+(x, b)$.

(ii) *Tegyük tel 7. 8 (ii) feltételét. Ekkor, ha* $\gamma \in \Gamma_S$ *és* $b \in |\mathfrak{B}|$, *akkor van olyan* $x \in X'$ *változó és* $d \in D$ *elem, melyekre* $\gamma' \in \Gamma$, *ahol* γ'*-t úgy határozzuk meg, mint (i)-ben.*

(i) bizonyítása. Tegyük fel, hogy $\gamma=(\Theta, \varphi_0^0, ..., \varphi_{s-1}^0, \varphi_0^1, ..., \varphi_{s-1}^1) \in \Gamma=\Gamma_S$, $d \in D$ és legyen $X''=\mathrm{dom}(\varphi^0)=\mathrm{dom}(\varphi^1)$, ahol $\varphi^j=\bigcup_{i<s} \varphi_i^j$ $(j<2)$. Válasszuk (amint azt megtehetjük a feltevés értelmében) az $x \in X'-X''$ változót úgy, hogy ha $G \in \Delta$ és $\mathrm{var}(G) \subseteq X'' \cup \{x\}$, akkor $\exists x G \in \Delta$. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben minden $b \in |\mathfrak{B}| =_{\mathrm{df}} B$ elemre $\gamma_b =_{\mathrm{df}} (\Theta, \varphi_0^0, ..., \varphi_i^0+(x, d), ..., \varphi_{s-1}^0, \varphi_1^0, ..., \varphi_i^1+(x, b), ..., \varphi_{s-1}^1) \notin \Gamma$. Mivel γ_b nyilván kielégíti Γ_S definíciójának (i)—(iii) pontjait, azért tehát nem elégíti ki (iv)-t, azaz van olyan $G_b \in \Delta$ formula, melyre $\mathrm{var}(G_b) \subseteq \mathrm{dom}(\varphi^0) \cup \{x\}$, $\Theta \models G_b(\varphi^0)(d/x)$ és $\mathfrak{B} \models \neg G_b[\varphi^1+(x, b)]$ minden $b \in B$-re. Kapjuk, hogy $\Theta \models (\bigwedge_{b \in B} G_b)(\varphi^0)(d/x)$, tehát $\Theta \models G$, ha $G = \exists x \bigwedge_{b \in B} G_b$. Mivel B megszámlálható, G valóban formula. Másrészt kapjuk, hogy $\models_{\mathfrak{B}} (\bigvee_{b \in B} \neg G_b)[\varphi^1+(x, b)]$ minden $b \in B=|\mathfrak{B}|$-re, tehát $\models_{\mathfrak{B}} \forall x (\bigvee_{b \in B} \neg G_b)[\varphi^1]$, azaz $\models_{\mathfrak{B}} \neg G[\varphi^1]$. Mivel $G_b \in \Delta$ minden $b \in B$-re, azért Δ-ra tett feltevésünk szerint $\bigwedge_{b \in B} G_b \in \Delta$. Mivel pedig $\mathrm{var}(\bigwedge_{b \in B} G_b) \subseteq X'' \cup \{x\}$, azért x választása szerint $G = \exists x \bigwedge_{b \in B} G_b \in \Delta$. Összefoglalva, a G formula ellenpélda arra nézve, hogy γ kielégíti Γ_S definíciójának (iv) feltételét, azaz

$\gamma \notin \Gamma$, ami ellentmondás. Tehát valóban, legalább egy olyan b elem van, melyre $\gamma_b \in \Gamma$, és éppen ezt kellett bizonyítanunk.

(ii) bizonyítása ehhez hasonló, de valamivel egyszerűbb (nincs szükség Δ diszjunkcióra való zártságára).

Ezzel 9. 6 bizonyítását befejeztük.

Rátérve a 9. 3 tétel bizonyítására az $i=2$ esetben, először is megjegyezzük, hogy a $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Mod}_\mu(F)) \subseteq \mathrm{Mod}_\mu(Cn_\mu^{\omega_1,\omega}(F) \cap \Delta_2)$ inklúzió triviális. Hogy a fordított irányú tartalmazást bebizonyítsuk, tegyük fel, hogy $\mathfrak{B}$ megszámlálható, μ típusú struktúra, amelyben az F zárt μ-formula minden pozitív következménye igaz. Legyen $\Delta = \Delta_2(\mu)$, $s=1$, $X = X_0$, S a $(X, \Delta, \mathfrak{B})$ σ'-rendszer és $\Gamma = \Gamma_S$, Ha $\gamma_0 = (\{F^*\}, 0, 0)$, akkor Γ_s definícióját végignézve világos, hogy γ_0 kielégíti az ottani (i)—(iv) feltételek mindegyikét (az utolsót $\mathfrak{B}$-re tett kikötésünk következtében), és így $\gamma_0 \in \Gamma$.

Legyen U' a (7, 0, d) és (7, 1, b) alakú elemek halmaza, ahol $d \in D$. illetve $b \in B = {}_{\mathrm{df}}|\mathfrak{B}|$. Definiáljuk a Λ_1', Λ_2' függvényeket a $\Lambda_1'(u) = \Gamma$ $(u \in U')$, $\Lambda_2'(u) = \{\gamma \in \Gamma : d \in rn(\varphi^0\gamma)\}$ $(u=(7, 0, d) \in U')$, $\Lambda_2'(u) = \{\gamma \in \Gamma : b \in rn(\varphi^1\gamma)\}$ $(n=(7, 1, b) \in U')$ egyenlőségek által. Legyen $U = U_0' \cup U'$, $\Lambda_k = \Lambda_{k,0}^S \cup \Lambda_k'$ ($k=1$ és $k=2$ esetén). Könnyen belátható a 9. 5 és a 9. 6 Lemmák alapján, hogy $\Omega =_{\mathrm{df}} (\Gamma, \leqq, U, \Lambda_1, \Lambda_2)$ C-rendszer. Az, hogy a 7. 5. 1 feltétel teljesül, 9. 5. 1-ből és abból következik, hogy U' megszámlálható. A 7. 5. 2 feltétel teljesülése U_0' elemeire 9. 5. 2-ből következik; ugyanezt U' elemeire triviálisan belehet látni. A 7. 5. 3 feltétel teljesülését U_0' elemeire 9. 5. 3 mondja ki és végül ugyanennek a teljesülése U' elemeire mint könnyen látható, 9. 6 következménye.

Alkalmazzuk 7. 6-t; legyen $\langle \gamma_n : n < \omega \rangle$ Ω-nak egy zárt sorozata, amelynek első tagja $\gamma_0 = (\{F^*\}, 0, 0)$, és legyen $T = \bigcup_{n<\omega} \Theta\gamma_n$, $\psi^j = \bigcup_{n<\omega} \varphi^j \gamma_n$ $(j<2)$. Ekkor

(i) T pszeudoteljes és $F^* \in T$ 9. 5. 4 alapján.

(ii) $rn(\psi^0) = D$, $rn(\psi^1) = B$ $\Lambda_2' \subseteq \Lambda_2$ miatt. Ez az állítás lényegében ugyanaz, mint 7. 9. 4.

Legyen $\mathfrak{A}_0$ T kanonikus modellje és legyen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \upharpoonright \mu$. Azt állítjuk, hogy

(iii) ha F μ feletti prímformula, var $(F) \subseteq \mathrm{dom}(\psi^0)$ és $\models_{\mathfrak{A}_0} F(\psi^0)$, akkor $\models_{\mathfrak{B}} F[\psi^1]$. Ez az állítás 7. 10 (i)-hez hasonlóan bizonyítható, és abból következik, hogy F eleme Δ-nak. (i)-ből és 7. 2-ből következik, hogy

(iv) $\models_{\mathfrak{A}} F$.

Az (iii) állítást az $F = x \approx y$ formulákra alkalmazva (ahol $x, y \in \mathrm{dom}\,(\psi^0)$) adódik, hogy pontosan egy olyan h leképezés van, melyre $h(\psi^0(x))^{\mathfrak{A}_0} = \psi^1(x)$, midőn $x \in \mathrm{dom}\,(\psi_0) = \mathrm{dom}\,(\psi^1)$; (ii) értelmében h az egész $|\mathfrak{A}|$ halmazon értelmezve van és az egész B halmazra képezi $|\mathfrak{A}|$-t. (iii)-t újból alkalmazva azt kapjuk, hogy h $\mathfrak{A}$-nak homomorfizmusa $\mathfrak{B}$-re. Végül még (iv)-t is figyelembe véve, azt kaptuk, hogy $\mathfrak{B} \in \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Mod}_\mu(F))$, q.e.d.

IV. fejezet. Kompaktsági eredmények direkt szorzatokkal kapcsolatban

10. §. *Direkt szorzatokból álló osztályok.*

Ebben a §-ban a $P(K)$ művelettel foglalkozunk. A jelen fejezet fő eredménye a 10. 5 Tétel, amely szerint tetszőleges kompakt K osztály esetén $P(K)$ (a K elemeiből alkotható véges vagy végtelen direkt szorzatok osztálya) szintén kompakt. A Tétel feltevése teljesül, ha $K \in PC_\Delta$. Bár, mint említettük, a kompaktság sokkal gyengébb feltétel egy osztályra nézve, mint az, hogy az osztály pszeudo-elemi, tételünket mégis alkalmazni tudjuk VAUGHT egy tételének (lásd 10. 6 Korollárium) egy új bizonyítására. VAUGHT tételének levezetése a 10. 5 Tételből standarad módszerekkel történik; így a 10. 5 Tétel VAUGHT tétele egy általánosításának tekinthető.

Ebben a fejezetben (tehát a 10. és 11. §-okban) formulán mindig *véges* formulát értünk.

Legyen adva az $\mathfrak{A}^{(i)}$ μ típusú struktúráknak egy $\langle\mathfrak{A}^{(i)}: i\in I\rangle$ indexezett összessége. Jelöljük $\langle\mathfrak{A}^{(i)}: i\in I\rangle$-t röviden $\mathfrak{A}$-val. Legyen G zárt μ-formula. Jelöljük $K_G^{\mathfrak{A}}$-val I azon i elemeinek halmazát, melyekre $\mathfrak{A}^{(i)}\models G$.

Most ismertetjük azt a [8]-ban megadott kritériumot, amely szükséges és elegendő feltételt ad arra, hogy egy F zárt μ-formula igaz legyen egy adott $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}^{(i)}$ direkt szorzatban. A feltétel, durván szólva, kikötéseket jelent arra nézve, hogy hány olyan $\mathfrak{A}^{(i)}$ faktor lehet, amely bizonyos adott (alább G_j^F-vel jelölt) zárt formulákat kielégít.

10. 1 TÉTEL. (FEFERMAN és VAUGHT [8]). *Legyen F zárt μ-formula. Ekkor meg lehet adni*

(i) *az $m=m^F$, $M=M^F$ természetes számokat;*

(ii) *a $\langle q_j^{(0),F}: j<m\rangle$, $\langle q_j^{(1),F}: j<m\rangle, \dots, \langle q_j^{(M-1),F}: j<m\rangle$ M darab, természetes számokból álló sorozatot;*

(iii) *az $s_0=s_0^F, \dots, s_{m-1}=s_{m-1}^F$ M darab, m-nél kisebb természetes számokból álló halmazt; és végül*

(iv) *a $G_0=G_0^F, \dots, G_{m-1}=G_{m-1}^F$ m darab zárt μ-formulát úgy, hogy tetszőleges $\mathfrak{A}=\langle\mathfrak{A}^{(i)}: i\in I\rangle$ esetén, ahol $I\neq 0$ és $\mathfrak{A}^{(i)}$ μ tipusú struktúra minden $i\in I$-re, $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}^{(i)}\models F$ akkor és csak akkor, ha van olyan $k<M$ természetes szám, hogy minden $j<m$-re, $K_{G_j}^{\mathfrak{A}}$ elemeinek száma pontosan $q_j^{(k),F}$, ha $j\in S_k$ és legalább $q_j^{(k),F}$ ha $j\notin S_k$.*

Megjegyezzük, hogy az utóbbi esetben természetesen az is meg van engedve, hogy a $K_{G_j}^{\mathfrak{A}}$ halmaz végtelen legyen.

A 10. 1 Tétel-ből közvetlenül következik FEFERMAN és VAUGHT következő tétele (lásd [8]).

10. 2 KOROLLÁRIUM. *Ha I nem üres halmaz, $\mathfrak{A}^{(i)}$, $\mathfrak{B}^{(i)}$ μ típusú struktúrák és $\mathfrak{A}^{(i)}\equiv\mathfrak{B}^{(i)}$ minden $i\in I$-re, akkor*

$$\prod_{i\in I}\mathfrak{A}^{(i)} \equiv \prod_{i\in I}\mathfrak{B}^{(i)}.$$

Ebből viszont azonnal belátható a

10. 3 KOROLLÁRIUM. *Ha K μ típusú struktúrák tetszőleges osztálya, akkor*

$$\overline{P(K)}=\overline{P(\overline{K})} \quad \text{és} \quad \overline{D_P(K)}=\overline{D_P(\overline{K})}.$$

Most megmutatjuk a direkt szorzás egy elemi tulajdonságát, melyre később szükségünk lesz.

10. 4 LEMMA. *Legyenek μ, μ' hasonlósági típusok, K μ típusú struktúrák egy osztálya, $\mu\subseteq\mu'$ és legyen a $\mu'-\mu$ halmaz minden eleme individuumjel. Ebben az esetben*

$$P(K)[\mu']=P(K[\mu']).$$

Bizonyítás. Legyen először $\mathfrak{A}' \in P(K)[\mu']$. Ekkor $\mathfrak{A}' \upharpoonright \mu = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, ahol $\mathfrak{A}_i \in K$ minden $i \in I$-re. Definiáljuk az $\mathfrak{A}'_i$ μ'-típusú strukturát minden $i \in I$-re a következőképpen. Legyen $\mathfrak{A}'_i \upharpoonright \mu = \mathfrak{A}_i$ és legyen minden $c \in \mu' - \mu$-re $c^{\mathfrak{A}'_i} = c^{\mathfrak{A}'}(i)$. Most $c^{\mathfrak{A}'}$ egy, az I-n értelmezett függvény, amelynek tetszőleges i-re a $c^{\mathfrak{A}'}(i)$ értéke $|\mathfrak{A}_i|$-nek eleme. Az így meghatározott $\mathfrak{A}'_i$ rendszerek egyrészt elemei $K[\mu']$-nek, másrészt világos, hogy $\mathfrak{A}' = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}'_i$. Ezek szerint valóban $\mathfrak{A}' \in P([\mu'])$.

Ha pedig $\mathfrak{A}' \in P(K[\mu'])$, akkor a μ'-re tett kikötés nélkül is azonnal látható, hogy $\mathfrak{A}' \in P(K)[\mu']$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

10. 5 TÉTEL. *Legyen K μ típusú struktúráknak egy osztálya. Ha K kompakt, akkor $P(K)$ szintén kompakt.*

Bizonyítás. Minden μ-feletti G zárt formulához hozzárendelünk egy R^G egyváltozós relációjelet úgy, hogy különböző G-kre az R^G-k is különbözők legyenek. Ezeknek a relációjeleknek a szerepe a következő lesz. Legyen I egy nem üres halmaz és minden $i \in I$-re $\mathfrak{A}^{(i)}$ egy μ típusú struktúra. R^G interpretációja azon i-k halmaza lesz, melyekre $\mathfrak{A}^{(i)} \models G$, más szóval a K^G halmaz. Ezáltal tetszőleges F zárt μ-formulával kifejezni. Legyen a μ_0 hasonlósági típus az összes R^G relációjelből álló halmaz, midőn G végigfut a zárt μ-formulák halmazán. Legyen U tetszőleges egyváltozós relációjel. A következő formulákat:

$$\exists v_0 \ldots \exists v_{n-1}\Big(\bigwedge_{\substack{i \neq k \\ i,k<n}} \neg\, v_i \approx v_k \wedge \bigwedge_{i<n} U v_i\Big) \quad (\text{ahol } n \geqq 1)$$

$$\exists v_0 \ldots \exists v_{n-1}\Big(\bigwedge_{\substack{i \neq k \\ i,k<n}} \neg\, v_i \approx v_k \wedge \bigwedge_{i<n} U v_i \wedge \forall v_n \big(U v_n \to \bigvee_{i<n} v_n \approx v_i\big)\Big) \qquad (\text{ahol } n \geqq 1),$$

$$\forall v_0 v_0 \approx v_0,$$

$$\forall v_0 \neg\, U v_0,$$

rendre a $\exists^n x Ux$, $\exists !^n x Ux$ (ahol $n \geqq 1$), $\exists^0 x Ux$, $\exists !^0 x Ux$ jelölésekkel rövidítjük. Ha μ' tetszőleges hasonlósági típus, $U \in \mu'$ és $\mathfrak{B}$ μ' típusú struktúra, akkor, mint azonnal látható, a $\mathfrak{B} \models \exists^n x Ux$, ill. a $\mathfrak{B} \models \exists !^n x Ux$ állítás minden $n \geqq 0$-ra azzal equivalens, hogy $U^{\mathfrak{B}}$ elemeinek száma *legalább n*, ill. *pontosan n*.

Legyen F zárt μ-formula. A következőkben $R^{G_j^F}$ helyett mindenütt R_j^F-t írunk. (Itt G_j^F a 10. 1-ben szereplő formula). Legyen Φ^F a

$$\bigvee_{k<M^F} \Big(\bigwedge_{j \in S_k^F} \exists !^{q_j^{(k),F}} x R_j^F x \wedge \bigwedge_{j \notin S_k^F,\, j<m^F} \exists^{q_j^{(k),F}} x R_j^F x \Big)$$

zárt μ_0-formula. Az itt használt jelöléseket a 10. 1 Tételből vettük át.

Ezek után a 10. 1 Tételt a következőképpen fogalmazhatjuk át:

Legyen $I \neq 0$, $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}^{(i)} : i \in I \rangle$, ahol minden $i \in I$-re $\mathfrak{A}^{(i)}$ μ típusú struktúra. Ez esetben

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}^{(i)} \models F$$

akkor és csak akkor igaz, ha létezik olyan $\mathfrak{B}$ μ_0 *típusú struktúra, hogy*

$$(1)'_i \qquad \begin{cases} |\mathfrak{B}| = I, \\ (R_j^F)^{\mathfrak{B}} = K_{G_j^F}^{\mathfrak{A}} \text{ minden } j < m^F\text{-re és} \\ \mathfrak{B} \models \Phi^F. \end{cases}$$

Ezek után tegyük fel a tétel bizonyításának érdekében, hogy K μ típusú struktúráknak egy kompakt osztálya és Σ zárt μ-formuláknak egy olyan halmaza, melyre $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma') \cap P(K) \neq 0$ Σ tetszőleges Σ' véges részhalmaza mellett. Azt kell megmutatnunk, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) \cap P(K) \neq 0$.

A feltevés az átfogalmazott kritérium szerint azt jelenti, hogy minden $\Sigma' \in S_\omega(\Sigma)$-hoz van $\mathfrak{A}_{\Sigma'}^{(i)}$ μ típusú struktúráknak egy $\mathfrak{A}_{\Sigma'} = \langle \mathfrak{A}_{\Sigma'}^{(i)} : i \in I_{\Sigma'} \rangle$ indexezett sokasága, továbbá egy $\mathfrak{B}_{\Sigma'}$ μ_0 típusú struktúra úgy, hogy minden $F \in \Sigma'$-re $|\mathfrak{B}_{\Sigma'}| = I_{\Sigma'}, (R_j^F)^{\mathfrak{B}_{\Sigma'}} = K_{G_j^F}^{\mathfrak{A}_{\Sigma'}}$ minden $j < m^F$-re és

$$(2) \qquad \mathfrak{B}_{\Sigma'} \models \Phi^F.$$

Legyen $\Sigma' \in S_\omega(\Sigma)$. Legyen $X_{\Sigma'}$ azon Ψ formulák halmaza, melyekre

$$\text{(i)} \qquad \Psi = \neg \exists v_0 \bigwedge_{\substack{F \in \Sigma' \\ j < m^F}} Q_j^F(v_0)$$

alakú, ahol $\Theta_j^F(v_0)$ vagy $R_j^F v_0$-lal, vagy $\neg R_j^F v_0$-lal egyezik meg, és

(ii) minden $\Sigma'' \in S_\omega(\Sigma)$-ra, melyre $\Sigma' \subseteq \Sigma''$, $\mathfrak{B}_{\Sigma''} \models \Psi$ teljesül.

Ezek után a zárt μ_0-formulákból álló Γ halmazt a következőképpen definiáljuk:

$$(4) \qquad \Gamma = \{\Phi^F : F \in \Sigma\} \cup \bigcup_{\Sigma' \in S_\omega(\Sigma)} X_{\Sigma'}.$$

Azt állítjuk, hogy Γ minden véges részhalmazának van modellje. Valóban, Γ minden véges részhalmaza része egy

$$\Gamma' = \{\Phi^F : F \in \Sigma''\} \cup \bigcup_{\Sigma' \subseteq \Sigma''} X_{\Sigma'}$$

halmaznak, ahol $\Sigma'' \in S_\omega(\Sigma)$. Elég tehát az állítást az ilyen alakú Γ' halmazokra belátni. Azt állítjuk, hogy $\mathfrak{B}_{\Sigma''} \in \mathrm{Mod}_{\mu_0}(\Gamma')$, ami bizonyítani fogja állításunkat. Ha $F \in \Sigma''$, akkor $\mathfrak{B}_{\Sigma''} \models \Phi^F$ (2) miatt, másrészt, ha $\Psi \in X_{\Sigma'}$, és $\Sigma' \subseteq \Sigma''$, akkor $\mathfrak{B}_{\Sigma''} \models \Psi$ teljesül az $X_{\Sigma'}$ formulahalmaz definíciójának (ii) pontja miatt. Ezek szerint a kompaktsági tétel alkalmazható Γ-ra és kapjuk, hogy van olyan $\mathfrak{B}$, melyre

$$(5) \qquad \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}_{\mu_0}(\Gamma).$$

Legyen $|\mathfrak{B}| = I$, továbbá i I-nek egy rögzített eleme. A zárt μ-formulákból álló Δ_i halmazt a következőképpen definiáljuk:

$$\Delta_i = \{G_j^F : \; i \in (R_j^F)^{\mathfrak{B}}, F \in \Sigma, j < m^F\} \cup$$
$$\cup \{\neg G_j^F : \; i \notin (R_j^F)^{\mathfrak{B}}, F \in \Sigma, j < m^F\}.$$

Azt állítjuk, hogy létezik egy olyan $\mathfrak{A}^{(i)}$ struktúra, melyre

$$(6) \qquad \mathfrak{A}^{(i)} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Delta_i) \cap K$$

Annak érdekében, hogy ezt bebizonyítsuk, elegendő K kompaktsága miatt megmutatnunk, hogy Δ_i minden Δ véges részhalmazához van olyan $\mathfrak{A}$ struktúra, hogy $\mathfrak{A}\in \mathrm{Mod}_\mu(\Delta)\cap K$. Δ_i minden véges részhalmaza része egy

$$\Delta = \{G_j^F:\quad i\in (R_j^F)^{\mathfrak{B}}, F\in\Sigma', j<m^F\} \cup$$
$$\cup\ \{\neg G_j^F:\quad i\notin (R_j^F)^{\mathfrak{B}}, F\in\Sigma', j<m^F\}$$

alakú halmaznak, ahol $\Sigma'\in S_\omega(\Sigma)$. Elég tehát állításunkat ilyen alakú Δ halmazokra bizonyítani.

Ennek érdekében legyen $Q_j^F(v_0)=R_j^F v_0$, ha $i\in (R_j^F)^{\mathfrak{B}}$ és $Q_j^F(v_0)=\neg R_j^F v_0$, ha $i\notin (R_j^F)^{\mathfrak{B}}$ minden $F\in\Sigma'$-re és $j<m^F$-re. Ha $G=\bigwedge\limits_{\substack{F\in\Sigma'\\ j<m^F}} Q_j^F(v_0)$ akkor tehát nyilvánvalóan $\mathfrak{B}\models G[i/v_0]$. Ezek szerint $\Psi=\neg\exists v_0 G$ esetén $\mathfrak{B}$ nem elégíti ki Ψ-t. (5) szerint tehát $\Psi\notin\Gamma$ és (4) szerint $\Psi\notin X_{\Sigma'}$. Az utóbbi tény viszont, figyelembe véve $X_{\Sigma'}$ definícióját, azt jelenti, hogy van olyan $\Sigma''\in S_\omega(\Sigma)$, melyre $\Sigma'\subseteqq\Sigma''$ és melyre $\mathfrak{B}_{\Sigma''}$ nem elégíti ki Ψ-t. Továbbmenve, Ψ és G definíciója miatt az equivalens azzal, hogy van olyan i' elem az $I_{\Sigma''}$ halmazban, amelyre

$$i'\in (R_j^F)^{\mathfrak{B}_{\Sigma''}},\quad \text{ha}\quad i\in(R_j^F)^{\mathfrak{B}}$$

és

$$i'\notin (R_j^F)^{\mathfrak{B}_{\Sigma''}},\quad \text{ha}\quad i\notin(R_j^F)^{\mathfrak{B}}.$$

(2) miatt $(R_j^F)^{\mathfrak{B}_{\Sigma''}}=K_{G_j^F}^{\mathfrak{A}_{\Sigma''}}$. Figyelembe véve még a $K_G^{\mathfrak{A}}$ halmazok definícióját, az utóbbiak szerint kapjuk, hogy

$$\mathfrak{A}_{\Sigma''}^{(i')}\models G_j^F,\quad \text{ha}\quad i\in(R_j^F)^{\mathfrak{B}}$$

és

$$\mathfrak{A}_{\Sigma''}^{(i')}\models \neg G_j^F,\quad \text{ha}\quad i\notin(R_j^F)^{\mathfrak{B}}.$$

Δ definíciója miatt ez pontosan azt jelenti, hogy $\mathfrak{A}_{\Sigma''}^{(i')}\in\mathrm{Mod}_\mu(\Delta)$. Figyelembe véve még, hogy $\mathfrak{A}_{\Sigma''}^{(i')}\in K$, valóban az adódik, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(\Delta)\cap K\neq 0$.

Ezek szerint bebizonyítottuk, hogy van (6)-nak eleget tevő $\mathfrak{A}^{(i)}$ struktúra. Tekintettel arra, hogy $i\in I$ tetszőleges volt, így megkaptunk egy $\mathfrak{A}=\langle\mathfrak{A}^{(i)}:i\in I\rangle$ (6)-t kielégítő indexezett sokaságot.

Azt állítjuk, hogy $\prod\limits_{i\in I}\mathfrak{A}^{(i)}\in\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$. Ehhez a 10. 1 Tételnek a bizonyítás elején megadott átfogalmazása szerint elegendő (1)-t belátni tetszőleges $F\in\Sigma$-ra az adott $\mathfrak{B}$ struktúra és $I=|\mathfrak{B}|$ mellett. De Δ_i definíciója és a (6)-ból következő

$$\mathfrak{A}^{(i)}\in \mathrm{Mod}_\mu(\Delta_i)\quad i\in I)$$

tény miatt az (1) teljesüléséhez szükséges

$$(R_j^F)^{\mathfrak{B}}=K_{G_j^F}^{\mathfrak{A}}$$

egyenlőségek rögtön következnek minden $F\in\Sigma$-ra és $j<m^F$-re. Másrészt (5) miatt, Γ definíciója következtében

$$\mathfrak{B}\models\Phi^F\quad (F\in\Sigma)$$

is teljesül. Ezzel (1)-t bebizonyítottuk minden $F\in\Sigma$-ra és így $\prod\limits_{i\in I}\mathfrak{A}^{(i)}\in\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)\cap$

$\cap P(K)$-t is, mivel (6) miatt $\mathfrak{A}^{(i)} \in K$ $(i \in I)$. Végeredményben $\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) \cap P(K) \neq 0$, q.e.d.

10. 6. KOROLLÁRIUM. (VAUGHT tétele, [46, Theorem 2b]).

Ha $K \in PC_\Delta$, *akkor* $\mathrm{Sub}\, P(K) \in UC_\Delta$.

Bizonyítás. Legyen $K \in PC_\Delta(\mu)$. Legyen Σ az összes olyan univerzális zárt μ-formula halmaza, amely igaz minden $P(K)$-beli struktúrában. Ekkor $P(K) \subseteq \subseteq \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$, tehát $\mathrm{Sub}\, P(K) \subseteq \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$ is fennáll. Be fogjuk látni, hogy másrészről $\mathrm{Sub}\, P(K) \supseteq \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$, ami az előzővel összevetve a $\mathrm{Sub}\, P(K) = \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$ egyenlőséget adja, tehát valóban a bizonyítandó $\mathrm{Sub}\, P(K) \in UC_\Delta$ állítást kapjuk.

Legyen tehát $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$. Be kell látnunk, hogy $\mathfrak{A} \in \mathrm{Sub}\, P(K)$. Legyen $A = |\mathfrak{A}|$ és legyen tetszőleges $a \in A$ elemre c_a egy individuum jel úgy, hogy ha $a_1 \neq a_2$, a_1, $a_2 \in A$, akkor $c_{a_1} \neq c_{a_2}$, továbbá $c_a \notin \mu$ $(a \in A)$. Legyen $\mu_A = \mu \cup \{c_a : a \in A\}$. Az $\mathfrak{A}$ struktúra $\Delta_\mathfrak{A}$ *diagramját* a következő zárt μ_A-formulák halmazaként definiáljuk:

$\neg c_{a_1} \approx c_{a_2}$ minden a_1, $a_2 \in A$-ra, melyekre $a_1 \neq a_2$;

$Pc_{a_0} \dots c_{a_{n-1}}$ minden $n < \omega$-ra, P μ-beli n-változós relációjelre és tetszőleges olyan A-beli $a_0, \dots, a_{n-1}$ elemekre, melyekre $(a_0, \dots, a_1) \in P^\mathfrak{A}$;

$\neg Pc_{a_0} \dots c_{a_{n-1}}$ minden $n < \omega$-ra, P μ-beli n-változós relációjelre és tetszőleges olyan A-beli $a_0 \cdots, a_{n-1}$ elemekre, melyekre $(a_0, \dots, a_{n-1}) \notin P^\mathfrak{A}$;

$fc_{a_0} \dots c_{a_{n-1}} \approx c_{a_n}$ minden $n < \omega$-ra, f μ-beli n-változós operációjelre és tetszőleges olyan $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n A$-beli elemekre, amelyekre $f^\mathfrak{A}(a_0, \dots, a_{n-1}) = a_n$. Majdnem triviális, hogy az az állítás, hogy $\mathfrak{A}$ izomorf $\mathfrak{B}$-nak egy részstruktúrájával, ekvivalens azzal, hogy van olyan $\mathfrak{B}' \in \mathrm{Mod}_{\mu_A}(\Delta_\mathfrak{A})$ struktúra, melyre $\mathfrak{B}' \restriction \mu = \mathfrak{B}$. (Ez az ekvivalencia egyébként a diagramok használatának az értelme). Tegyük fel ugyanis először, hogy a mondott tulajdonságú $\mathfrak{B}'$ létezik. Tekintsük a $|\mathfrak{B}'| = |\mathfrak{B}| = B$ halmaznak a $\{(c_a)^{\mathfrak{B}'} : a \in A\}$ részhalmazát, jelöljük ezt A'-vel, és tekintsük a $\mathfrak{B}$ struktúra azon $\mathfrak{A}'$ részstruktúráját, amelynek alaphalmaza A'. Ekkor először is $\mathfrak{A}'$ jól definiált, azaz A' zárt az $f^\mathfrak{B}$ operációkkal szemben $(f \in \mu)$. Ha ugyanis $b_0, \dots, b_{n-1} \in A'$, tehát $b_i = (c_{a_i})^{\mathfrak{B}'}$ $(i < n)$ ahol $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$, akkor $f^\mathfrak{B}(b_0, \dots, b_{n-1}) = f^{\mathfrak{B}'}(b_0, \dots, b_{n-1}) = b \in A'$, hiszen ha tekintjük az $a = f^\mathfrak{A}(a_0, \dots, a_{n-1})$ elemet, akkor az $f(c_{a_0}, \dots, c_{a_{n-1}}) \approx c_a$ formula eleme $\Delta_\mathfrak{A}$-nak, $\mathfrak{B}'$ ezt kielégíti és így $f^{\mathfrak{B}'}((c_{a_0})^{\mathfrak{B}'}, \dots, (c_{a_{n-1}})^{\mathfrak{B}'}) = (c_a)^{\mathfrak{B}'}$, azaz $b = (c_a)^{\mathfrak{B}'} \in A'$. Másrészt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ a $\varphi(a) =_{\mathrm{df}} (c_a)^{\mathfrak{B}'}$ által definiált izomorfizmussal. φ egy-egyértelműségét a $\Delta_\mathfrak{A}$ definíciójában szereplő első csoportba tartozó, reláció-tartását a 2. és 3. csoportba tartozó, és végül operáció-tartását (a 0 változós operációkat is beleértve) a 4. csoportba tartozó formuláknak a $\mathfrak{B}'$ struktúrában való igaz volta biztosítja.

A mondott equivalencia másik része ugyanilyen kézenfekvő módon látható be. Ezt nem részletezzük, minthogy erre nincs szükségünk.

Ezek szerint $\mathfrak{A} \in \mathrm{Sub}\, P(K)$ bizonyításához elegendő belátni egy olyan $\mathfrak{B}'$ struktúra létezését, amelyre

$$\mathfrak{B}' \in \mathrm{Mod}_{\mu_A}(\Delta_\mathfrak{A}) \cap P(K)\, [\mu_A] \tag{7}$$

($\mathfrak{B}' \in P(K)[\mu_A]$ ugyanis definíció szerint azt jelenti, hogy van olyan $\mathfrak{B} \in P(K)$, melyre $\mathfrak{B}' \restriction \mu = \mathfrak{B}$).

Most felhasználjuk a $P(K[\mu_A])=P(K)[\mu_A]$ egyenlőséget (lásd 10. 4 Lemma) továbbá azt, hogy $K[\mu_A]\in PC_\Delta$, amely $K\in PC_\Delta$-ból következik. Ezek szerint $K[\mu_A]$ kompakt, tehát alkalmazva a 10. 5 Tételt $P(K)[\mu_A]=P(K[\mu_A])$ is kompakt. Ezek szerint a (7)-nek elegettevő $\mathfrak{B}'$ struktúra létezéséhez elegendő belátni azt, hogy $\Delta_{\mathfrak{A}}$-nak tetszőleges véges Δ' részhalmaza esetén van olyan $\mathfrak{B}'$ struktúra, melyre

$$\mathfrak{B}'\in \mathrm{Mod}_{\mu_A}(\Delta')\cap P(K)[\mu_A] \tag{8}$$

Legyen Φ' a Δ'-beli formulák konjunkciója, és legyen Φ az a nyilt formula, amely Φ'-ből úgy keletkezik, hogy a Φ'-ben szereplő összes különböző $c_{a_0},\ldots,c_{a_{n-1}}$ individuumjelet rendre a $v_0,\ldots,v_{n-1}$ változókkal helyettesítjük. $\Delta_{\mathfrak{A}}$ definíciójából és $\Delta'\subseteq\Delta_{\mathfrak{A}}$-ből következik, hogy $\mathfrak{A}\models\Phi\begin{bmatrix}a_0,\ldots,a_{n-1}\\ v_0,\ldots,v_{n-1}\end{bmatrix}$ tehát $\mathfrak{A}\models\exists v_0\ldots\exists v_{n-1}\Phi$ és

$$\mathfrak{A}\models\neg\forall v_0\ldots\forall v_{n-1}(\neg\Phi) \tag{9}$$

is fennáll.

Tegyük fel, állításunkkal ellentétben, hogy (8)-nak eleget tevő $\mathfrak{B}'$ struktúra nem létezik, tehát, hogy tetszőleges $\mathfrak{B}'\in P(K)[\mu_A]$ esetén, $\mathfrak{B}'$ nem elégíti ki Φ'-t. Ekkor viszont minden $\mathfrak{B}\in P(K)$ struktúra kielégíti a $\forall v_0\ldots\forall_{n-1}(\neg\Phi)$ formulát. Ha ezzel szemben ugyanis egy $\mathfrak{B}$ struktúrára $\mathfrak{B}\in P(K)$ és $\mathfrak{B}\models\neg\forall v_0\ldots\forall v_{n-1}(\neg\Phi)$ azaz $\mathfrak{B}\models\exists v_0\ldots\exists v_{n-1}\Phi$ állna fenn, tehát bizonyos $b_0,\ldots,b_{n-1}\in|\mathfrak{B}|$ elemekre $\mathfrak{B}\models\Phi\begin{bmatrix}b_0,\ldots,b_{n-1}\\ v_0,\ldots,v_{n-1}\end{bmatrix}$ lenne igaz, akkor a $(c_{a_0})^{\mathfrak{B}'}=b_0,\ldots,(c_{a_{n-1}})^{\mathfrak{B}'}=b_{n-1}$ definíciókkal meghatározott μ_A típusú $\mathfrak{B}'$ struktúrára (amelyre $\mathfrak{B}'\restriction\mu=\mathfrak{B}'(c_a)^{\mathfrak{B}'}$ tetszőleges, ha $a\neq a_0,\ldots,a_{n-1}$) $\mathfrak{B}'\models\Phi$ és $\mathfrak{B}'\in P(K)[\mu_A]$ állna fenn.

Ezek szerint $\forall v_0\ldots\forall v_{n-1}(\neg\Phi)\in\Sigma$, Σ definíciója miatt. $\mathfrak{A}$-ról feltettük, hogy $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$, tehát $\mathfrak{A}\models\forall v_0\ldots\forall v_{n-1}(\neg\Phi)$ ami (9)-nek ellentmond.

Ezzel bebizonyíttotuk (8)-nak eleget tevő $\mathfrak{B}'$ létezését és így a 10. 6 Korolláriumot.

11. §. *A direkt hatvány egy általánosítása*

Ebben a §-ban a 10. 5 Tétel felhasználásával egy újabb kompaktsági eredményt vezetünk le, amely a $Dp(K)$ művelet egy általánosítására vonatkozik.

A szóban forgó 11. 1 Tételt az utána kimondott 11. 4 Korollárium alapján találtuk. Az utóbbi Vaught tételének analogonja és bizonyítása történhet [46] módszerével is. A 11. 4 Korollárium bizonyítását nem fogjuk részletesen leírni; ez a bizonyítás a 11. 1. Tétel felhasználásával a 10. 6 Korollárium bizonyításával majdnem azonos módon történhet.

A 11. 1. Tételben egy adott struktúraosztály elemeinek direkt hatványaiból alkotott osztály képezésének, röviden a Dp műveletnek egy általánosítása szerepel.

Legyenek μ,μ' hasonlósági típusok, $\mu'\subseteq\mu$. Legyen K μ típusú struktúrák egy osztálya. Definiáljuk $P_{\mu'}(K)$-t, mint azon $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}^{(i)}$ direkt szorzatok osztályát, ahol I nem üres halmaz, $\mathfrak{A}^{(i)}\in K$ $i\in I$-re és $\mathfrak{A}^{(i)}\restriction\mu'$ ugyanaz a μ'-típusú struktúra minden $i\in I$-re, azaz $\mathfrak{A}^{(i_1)}\restriction\mu'=\mathfrak{A}^{(i_2)}\restriction\mu'$, ha $i_1,i_2\in I$. Nyilvánvaló, hogy $\mu=\mu'$ esetén $P_{\mu'}(K)=$ $=Dp(K)$. (Megjegyezzük azonban, hogy 11. 4 bizonyítása a tételnek nem a $\mu'=\mu$ esetével történik.)

11. 1. TÉTEL. *Legyenek μ, μ' hasonlósági típusok és $K \in PC_\Delta(\mu)$. Ekkor $P_{\mu'}(K)$ kompakt.*

Megjegyezzük, hogy ha $P_{\mu'}(K)$ definíciójában μ' az üres halmaz, akkor az $\mathfrak{A}^{(i_1)} \restriction \mu' = \mathfrak{A}^{(i_2)} \restriction \mu'$ egyenlőségek mindössze azt jelentik, hogy $|\mathfrak{A}^{(i_1)}| = |\mathfrak{A}^{(i_2)}|$. Tehát $P_0(K)$ „majdnem" ugyanaz, mint $P(K)$. Ennek alapján [8] eredményeit felhasználva a 10.5 Tételt igen egyszerűen lehetne 11.1-ből levezetni.

Először bebizonyítjuk a 10.1 Tétel következő elemi következményét:

11. 2 LEMMA. *Legyen F μ feletti zárt formula. Meg lehet adni μ feletti zárt formulákból álló véges halmazoknak egy olyan $\mathfrak{H}$ véges halmazát, amelyre tetszőleges μ típusú struktúrákból álló K osztály mellett*

$$P(K) \cap \mathrm{Mod}_\mu(F) \neq 0$$

ekvivalens azzal, hogy létezik $\mathfrak{H}$-nak olyan Γ eleme, hogy minden $H \in \Gamma$ formulára van K-ban $\mathfrak{A} \models H$-nak elegettevő $\mathfrak{A}$ struktúra.

Bizonyítás. A következőkben használni fogjuk a 10. 5 Tétel bizonyításában és a 10. 1-ben alkalmazott jelöléseket. Legyen $m = m^F$. A következőkben egy A halmaz esetén $1 \cdot A - n$ ill. $(-1) \cdot A$-n magát az A halmazt ill. komplementerét (egy fix majoráns halmazra vonatkozólag) értjük, továbbá egy G formula esetén $1 \cdot G$ ill. $(-1) \cdot G$ $G-t$ ill. $\neg G$-t jelenti. Jelentse E azon függvények (véges) halmazát, amelyek a $\{0, 1, \ldots, m-1\} = m$ halmazon vannak értelmezve és értékeik 1 vagy -1 lehetnek. Legyen továbbá X azon η függvények (véges) halmaza, melyek E-n vannak értelmezve, értékeik 0 vagy 1 lehetnek, és amelyekre van olyan $\mathfrak{B}$ struktúra, amelyre $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}_{\mu_0}(\Phi^F)$ (lásd 10. 5 bizonyítása) és melyre tetszőleges $\varepsilon \in E$ esetén

$$\bigcap_{j<m} \varepsilon(j)(R_j^F)^{\mathfrak{B}} = 0 \Leftrightarrow \eta(\varepsilon) = 0. \tag{1}$$

Legyen $\Gamma(\eta)$ fix $\eta \in X$ esetén a következő formulahalmaz:

$$\Gamma(\eta) = \{\bigwedge_{j<m} \varepsilon(j) G_j^F : \eta(\varepsilon) = 1, \varepsilon \in E\}$$

és végül $\mathfrak{H} = \{\Gamma(\eta) : \eta \in X\}$.

Azt állítjuk, hogy $\mathfrak{H}$ kielégíti a lemma követelményeit. Tegyük fel ugyanis először, hogy $P(K) \cap \mathrm{Mod}_\mu(F) \neq 0$. Ekkor, mint ahogy 10. 5 bizonyításában láttuk, van olyan $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}_{\mu_0}(\Phi^F)$ struktúra és K-beli struktúráknak egy $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}^{(i)} : i \in I \rangle$ indexezett sokasága, hogy (1) a 10. 5 Tétel bizonyításában fennáll. Definiáljuk $\eta \in X$-t ezzel az adott $\mathfrak{B}$-vel (1) szerint és tegyük fel, hogy $\varepsilon \in E$, $\eta(\varepsilon) = 1$. Ekkor, η definíciója miatt, van olyan $i \in I$ index, hogy $i \in \bigcap_{j<m} \varepsilon(j)(R_j^F)^{\mathfrak{B}}$. Tehát (1) a 10. 5 Tétel bizonyításában, a $K_{G_j^F}^{\mathfrak{A}}$ halmazok definíciója miatt, maga után vonja, hogy $\mathfrak{A}^{(i)} \models \bigwedge_{j<m} \varepsilon(j) G_j^F$. Ezt alkalmazva minden ε-ra, melyre $\eta(\varepsilon) = 1$ kapjuk, hogy a $\Gamma = \Gamma(\eta) \in \mathfrak{H}$ halmazban levő minden egyes formulát az $\mathfrak{A}^{(i)} \in K (i \in I)$ struktúrák valamelyike kielégíti, és így a lemmában adott feltétel teljesül.

Másodszorra tegyük fel, hogy van egy $\Gamma = \Gamma(\eta) \in \mathfrak{H}$ halmaz, és minden $H \in \Gamma$-hoz egy $\mathfrak{A}^H$ struktúra K-ból úgy, hogy $\mathfrak{A}^H \models H$. Mivel $\eta \in X$, azért van egy (1)-nek elegettevő $\mathfrak{B}$ struktúra a $\mathrm{Mod}_{\mu_0}(\Phi^F)$ osztályban. Legyen $I = |\mathfrak{B}|$. Az $I_\varepsilon = \bigcap_{j<m} \varepsilon(j)(R_j^F)^{\mathfrak{B}}$

halmazok ($\varepsilon \in E$) I-nek egy teljes particióját alkotják, azaz minden $i \in I$ elem pontosan egy I_ε halmazhoz tartozik hozzá.

Másrészt, ha $i \in I_\varepsilon$, akkor $I_\varepsilon \neq 0$, tehát (1) miatt $\eta(\varepsilon)=1$, azaz a $H_\varepsilon = \bigwedge_{j<m} \varepsilon(j) G_j^F$ formula eleme Γ-nak, tehát az $\mathfrak{A}^{H_\varepsilon}$ struktúra definiálva van. Ennek alapján a következő definíció: $\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}^{H_\varepsilon}$, ha $i \in I_\varepsilon$, minden $i \in I$-re egyértelműen megad egy $\mathfrak{A}^{(i)}$ struktúrát. Képezzük az $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}^{(i)} : i \in I \rangle$ indexezett sokaságot. Bebizonyítjuk, hogy $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}^{(i)} \models F$, amelyből $\mathfrak{A}^{(i)} \in K$ miatt következni fog $P(K) \cap \mathrm{Mod}_\mu(F) \neq 0$, amit be kell látnunk. Ehhez viszont elegendő 10. § (1)-t belátnunk. Ebből csak $(R_j^F)^{\mathfrak{B}} = K_{G_j^F}^{\mathfrak{A}}$ szorul meggondolásra. Ez utóbbi viszont azt jelenti, hogy minden $j<m$-re $i \in (R_j^F)^{\mathfrak{B}}$ ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{A}^{(i)} \models G_j^F$. Tegyük fel tehát, hogy $i \in (R_j^F)^{\mathfrak{B}}$. Ekkor azon ε-ra, amelyre $i \in I_\varepsilon$, $\varepsilon(j)=1$, tehát $\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}^{H_\varepsilon} \models H_\varepsilon$ miatt $\mathfrak{A}^{(i)} \models G_j^F$, mivel G_j^F konjunkciós tagja H_ε-nak. Fordítva, ha $\mathfrak{A}^{(i)} \models G_j^F$, és $i \in I_\varepsilon$, úgy $\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}^{H_\varepsilon} \models H_\varepsilon = \bigwedge_{j<m} \varepsilon(j) G_j^F$, tehát szükségképpen $\varepsilon(j)=1$ ($\varepsilon(j) = -1$ lehetetlen) és így $i \in I_\varepsilon = \bigcap_{j<m} \varepsilon(j)(R_j^F)^{\mathfrak{B}}$ miatt $i \in (R_j^F)^{\mathfrak{B}}$. Ezzel beláttuk, hogy minden $j<m$-re $i \in (R_j^F)^{\mathfrak{B}}$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A}^{(i)} \models \Theta_j^F$, azaz $(R_j^F)^{\mathfrak{B}} = K_{\Theta_j^F}^{\mathfrak{A}}$. Így az adott $\mathfrak{B}$-vel és $\mathfrak{A}$-val 10. § (1)-et beláttuk, és így bebizonyítottuk a lemmát.

11. 3 LEMMA. *Legyenek μ' és μ hasonlósági típusok, $\mu' \subseteq \mu$, és legyen K μ típusú struktúráknak egy kompakt osztálya. Legyen F zárt μ-formula és jelöljük X_F-el az $S_{\mu'}$ topologikus tér*[8] *azon π pontjainak a halmazát, amelyekre*

$$P(\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K) \cap \mathrm{Mod}_\mu(F) \neq 0.$$

Ekkor X_F $S_{\mu'}$-nek zárt részhalmaza.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy π érintkezési pontja X_F-nek, azaz, hogy minden zárt G μ'-formulára, amelyre $\pi \in \langle G \rangle_{\mu'}$, $\langle G \rangle_{\mu'} \cap X_F \neq 0$. Ki kell mutatnunk, hogy $\pi \in X_F$. Tegyük fel az ellenkezőjét, tehát, hogy $P(\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K) \cap \mathrm{Mod}_\mu(F) = 0$. Ekkor 11. 2 Lemmát felhasználva egy, a lemmában megfogalmazott tulajdonságú $\mathfrak{H}$ halmaz mellett minden $\Gamma \in \mathfrak{H}$-hoz van egy $H_\Gamma \in \Gamma$ zárt μ-formula úgy, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K \cap \mathrm{Mod}_\mu(H_\Gamma) = 0$. Így K kompaktsága miatt van π-nek π_Γ véges részhalmaza, melyre $\mathrm{Mod}_\mu(\pi_\Gamma) \cap K \cap \mathrm{Mod}_\mu(H_\Gamma) = 0$.

Legyen G mindazon formulák konjunkciója, melyek előfordulnak valamely π_Γ-ben valamely $\Gamma \in \mathfrak{H}$-ra; $G = \bigwedge_{\substack{H \in \pi_\Gamma \\ \Gamma \in \mathfrak{H}}} H$. Nyilvánvaló, hogy $\pi \models G$, azaz $\pi \in \langle G \rangle_{\mu'}$. Másrészt $\mathrm{Mod}_\mu(G) \cap K \cap \mathrm{Mod}_\mu(H_\Gamma) = 0$ minden $\Gamma \in \mathfrak{H}$-ra. Tehát a 11.2 Lemmát másik irányban alkalmazva $P(\mathrm{Mod}_\mu(G) \cap K) \cap \mathrm{Mod}_\mu(F) = 0$, és így annál inkább $P(\mathrm{Mod}_\mu(\pi') \cap K) \cap \mathrm{Mod}_\mu(F) = 0$ tetszőleges $\pi' \in \langle G \rangle_{\mu'}$ esetén. A legutóbbi tény azt jelenti, hogy $X_F \cap \langle G \rangle_{\mu'} = 0$. Ezt összevetve $\pi \in \langle G \rangle_{\mu'}$-vel, ellentmondásba kerültünk azon feltevésünkkel, hogy π érintkezési pontja X_F-nek. A lemma ezzel bizonyítást nyert.

A 11. 1 Tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy μ', μ hasonlósági típusok, $\mu' \subseteq \mu$ és $K \in PC_\Delta(\mu)$.

[8] Lásd 1. § 49. oldal, *MTA III. Osztály Közleményei* 20 (1971). 1—2. szám.

Tegyük fel továbbá, hogy Σ zárt μ-formulákból álló halmaz, és minden $\Sigma' \in S_\omega(\Sigma)$-ra

(2) $$P_{\mu'}(K) \cap \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma') \neq 0.$$

Rögzítsük Σ-nak egy Σ' véges részhalmazát. Jelöljük $X_{\Sigma'}$-vel a 11. 3 Lemmában X_F-el jelölt halmazt, ahol F Σ' formuláinak konjunkciója. (2)-ből $P_{\mu'}(K)$ definíciója alapján következik, hogy van egy I indexhalmaz, $I \neq 0$, és léteznek az $\mathfrak{A}^{(i)} \in K$ μ-típusú struktúrák minden $i \in I$-re úgy, hogy $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}^{(i)} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma')$ és $\mathfrak{A}^{(i)} \restriction \mu' = \mathfrak{A}$ egy fix $\mathfrak{A}$ μ' típusú struktúrára tetszőleges $i \in I$ index mellett. Legyen $\pi = Th(\mathfrak{A})$. Ekkor tehát $\mathfrak{A}^{(i)} \in \mathrm{Mod}_\mu(\pi)$ minden $i \in I$-re. Következésképpen $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}^{(i)} \in$ $\in P(\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K)$ és és így $P(\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K) \cap \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma') \neq 0$. Ezek szerint $X_{\Sigma'}$ definíciója miatt $X_{\Sigma'} \neq 0$ minden $\Sigma' \in S_\omega(\Sigma)$-ra. Nyilvánvaló továbbá, hogy $\Sigma' \subseteqq \Sigma'' \in S_\omega(\Sigma)$ esetén $X_{\Sigma'} \supseteqq X_{\Sigma''}$, ha tehát $\Sigma_1', \ldots, \Sigma_n' \in S_\omega(\Sigma)$ és $\Sigma'' = \bigcup_{k=1}^{n} \Sigma_k' \in S_\omega(\Sigma)$, akkor $\bigcap_{k=1}^{n} X_{\Sigma_k'} \supseteqq X_{\Sigma''} \neq 0$. Alkalmazva a 11. 3 Lemmát, az $X_{\Sigma'}$ halmazok zártak, továbbá közülük bármely véges soknak a metszete nem üres, és így $S_{\mu'}$ kompaktsága miatt $\bigcap_{\Sigma' \in S_\omega(\Sigma)} X_{\Sigma'} \neq 0$. Van tehát olyan $\pi \in S_{\mu'}$ pont, melyre $P(\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K) \cap$ $\cap \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma') \neq 0$ minden $\Sigma' \in S_\omega(\Sigma)$-ra. Mivel $K \in PC_\Delta$ miatt K kompakt, azért $\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K$ is kompakt. Ez abból következik, hogy nyilván $\overline{\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K} =$ $= \mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap \overline{K}$; ezért K kompaktsága miatt $\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap \overline{K} \in EC_\Delta$ (lásd (2. 15)) és így újból (2. 15)-t alkalmazva, valóban azt kapjuk, hogy $\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K$ kompakt. Alkalmazzuk a 10. 5 Tételt az ottani K helyett $\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K$-ra. Azt kapjuk, hogy $P(\mathrm{Mod}_\mu(\pi) \cap K) \cap \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) \neq 0$, azaz, hogy van egy nem üres I halmaz, továbbá léteznek az $\mathfrak{A}^{(i)}$ struktúrák minden $i \in I$-re úgy, hogy

(3) $$\mathfrak{A}^{(i)} \in K, \ \mathfrak{A}^{(i)} \restriction \mu' \in \mathrm{Mod}_{\mu'}(\pi)$$

és

(4) $$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}^{(i)} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$$

Most megmutatjuk, hogy minden $i \in I$-re létezik olyan $\mathfrak{B}^{(i)}$ struktúra, melyre

(5) $$\mathfrak{B}^{(i)} \in K, \ \mathfrak{B}^{(i)} \restriction \mu' = \mathfrak{B}$$

minden $i \in I$-re egy fix $\mathfrak{B}$ μ' típusú struktúra mellett és

(6) $$\mathfrak{B}^{(i)} \equiv \mathfrak{A}^{(i)}$$

Ennek érdekében alkalmazzuk a *Craig—Robinson*-tételt (I. fej. (2. 17)). Legyen $K^{(i)} = \{\mathfrak{B}' \restriction \mu' : \mathfrak{B}' \in K, \mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{A}^{(i)}\}$. Ekkor, ha $K_i =_{\mathrm{df}} \{\mathfrak{H} : \mathfrak{H} \equiv \mathfrak{A}^{(i)}\}$, akkor $K_i \in EC_\Delta$, továbbá nyilvánvalóan $K^{(i)} = (K_i \cap K) \restriction \mu'$, tehát $K \in PC_\Delta$ miatt $K^{(i)} \in PC_\Delta$. Világos továbbá (3) miatt, hogy $\overline{K^{(i)}} \supseteqq \mathrm{Mod}_\mu(\pi)$, hiszen $\mathfrak{A}^{(i)} \restriction \mu' \in K^{(i)}$. (Különben $\overline{K^{(i)}} =$ $= \mathrm{Mod}_{\mu'}(\pi)$, de erre nincs szükségünk). Ezért $\bigcap_{i \in I} \overline{K^{(i)}} \supseteqq \mathrm{Mod}_{\mu'}(\pi) \neq 0$ és így (2. 17) alkalmazásával kapjuk, hogy létezik olyan $\mathfrak{B}$ struktúra, melyre

$$\mathfrak{B} \in \bigcap_{i \in I} K^{(i)}$$

Ha megfigyeljük $K^{(i)}$ definícióját, látjuk, hogy ez éppen (5)-nek és (6)-nak elegettevő $\mathfrak{B}^{(i)}$ struktúrák létezését jelenti.

Világos (5)-ből, hogy

(7) $$\prod_{i\in I} \mathfrak{B}^{(i)} \in P_\mu(K)$$

Alkalmazva a 10. 2. Korolláriumot, (Feferman—Vaught tételét), (4) és (6) maga után vonja, hogy

(8) $$\prod_{i\in I} \mathfrak{B}^{(i)} \in \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma)$$

(7) és (8) végül azt jelentik, hogy $P_{\mu'}(K)\cap \mathrm{Mod}_\mu(\Sigma) \neq 0$, a 11. 1 Tétel állításának megfelelően. Ezzel 11. 1 bizonyítását befejeztük.

11. 4 Korollárium. *Ha* $K\in PC_\Delta$, *akkor* Sub $Dp(K)\in UC_\Delta$.

Ennek az állításnak a bizonyítása a 10. 6 Korollárium bizonyításának a mintájára történhet. A szükséges változtatások mindössze a következők. Ahol eredetileg $P(K)$ állt, most $Dp(K)$-t, $P(K[\mu_A])$ helyett pedig $P_\mu(K[\mu_A])$-t kell írnunk. A $P(K)[\mu_A] = P(K[\mu_A])$ azonosság helyett ennek megfelelően most $Dp(K)[\mu_A]= P_\mu(K[\mu_A])$-t kell használnunk és végül természetesen a 10. 5 Tétel helyett a 11. 1 Tételt kell alkalmaznunk a $K[\mu_A]\in PC_\Delta$ osztályra.

Az itt említett azonosság a szereplő fogalmak és jelölések jelentésének birtokában majdnem nyilvánvaló és a 10. 4 Lemma-hoz hasonlóan mutatható ki.

Részletezve: tegyük fel először, hogy $\mathfrak{H}\in Dp(K)[\mu_A]$, tehát $\mathfrak{H}\restriction\mu = \mathfrak{B}^I$, ahol $\mathfrak{B}\in K$. Értelmezzük tetszőleges $i\in I$-re a $\mathfrak{B}^{(i)}$ μ_A típusú struktúrát a következőképpen. Legyen egyrészt

(9) $$\mathfrak{B}^{(i)}\restriction\mu = \mathfrak{B},$$

másrészt tetszőleges $a\in A$-ra

(10) $$(c_a)^{\mathfrak{B}^{(i)}} = (c_a)^{\mathfrak{H}}(i).$$

$(C_a)^{\mathfrak{H}}$ most egy I—n értelmezett függvény, amely értékeit $|\mathfrak{B}|$-ből veszi, ezért van értelme a legutóbbi egyenlőségnek. Nyilvánvalóan ezáltal $\mathfrak{B}^{(i)}$ egyértelműen definiálva van. Világos, hogy $\mathfrak{B}^{(i)}\in K[\mu_A]$ és így $\prod_{i\in I}\mathfrak{B}^{(i)}\in P_\mu(K[\mu_A])$, figyelembe véve (9)-t is. Másrészt a direkt szorzat definíciója és (10) miatt nyilván $\prod_{i\in I}\mathfrak{B}^{(i)}=\mathfrak{H}$, azaz $\mathfrak{H}\in P_\mu(K[\mu_A])$.

Fordítva, ha $\mathfrak{H}\in P_\mu(K[\mu_A])$, akkor rögtön látható, hogy $\mathfrak{H}\restriction\mu\in Dp(K)$, azaz $\mathfrak{H}\in Dp(K)[\mu_A]$, q.e.d.

11. 5 Korollárium. *Ha* $K\in PC_\Delta$, *akkor* $Dp(K)$ *kompakt.*

Ez a 11. 1 Tételnek a $\mu'=\mu$ esetre való alkalmazásával adódik, $Dp(K)=P_\mu(K)$ miatt. Ennek erősebb megfogalmazását, a következő állítást, ebből már könnyű lesz megmutatnunk.

11. 6. Korollárium. *Ha* K *kompakt, akkor* $Dp(K)$ *is kompakt.*

Ha ugyanis K kompakt, akkor I. fej. (2. 15) szerint $\overline{K}\in EC_\Delta$, tehát $\overline{Dp(K)} = \overline{Dp(\overline{K})}\in EC_\Delta$ a 11. 5 Korollárium miatt (felhasználva 10. 3-t is), tehát (2. 15) szerint $Dp(K)$ valóban kompakt.

1. MEGJEGYZÉS. FUHRKEN [10] egy eredményének felhasználásával a [27] dolgozatban a szerző a következő tételt is bebizonyította. Tegyük fel, hogy $c_0 \in \mu$, c_0 individuumjel. Az $\mathfrak{A}^{(i)}$ $(i \in I)$ struktúrák *megszámlálhatóan gyenge* direkt szorzata megegyezik a $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}^{(i)}$ teljes direkt szorzat azon részstruktúrájával, amelynek alaphalmazához egy $\varphi \in \prod_{i \in I} |\mathfrak{A}^{(i)}|$ elem akkor és csak akkor tartozik hozzá, ha $\varphi(i) = (c_0)^{\mathfrak{A}^{(i)}}$ legfeljebb megszámlálható sok i kivételével I minden i elemére.

11. 7 TÉTEL. *Ha K μ típusú struktúrák egy osztálya, μ megszámlálható, és K kompakt, akkor a K elemeiből alkotható megszámlálhatóan gyenge direkt szorzatok osztálya is kompakt.*

Megjegyezzük, hogy a közönséges gyenge direkt szorzatra vonatkozólag (amelynek definícióját a fenti definícióból úgy kapjuk, hogy „megszámlálható" helyett „véges"-t mondunk) hasonló eredmény nem igaz.

2. MEGJEGYZÉS. Amint az igen könnyen belátható, egy pszeudoelemi osztály elempárjaiból alkotott $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ direkt szorzatokkal izomorf struktúrák osztálya maga is pszeudoelemi. Hasonló eredmény áll fenn, ha 2 helyett más, rögzített n természetes szám mellett tekintjük az $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$ struktúrák osztályát. Más hasonló eredmények találhatók még a szerző [27] dolgozatában.

ALGEBRAIC OPERATIONS ON CLASSES OF STRUCTURES AND THEIR CONNECTIONS WITH LOGICAL FORMULAS (II)

by

M. MAKKAI

Summary

The main results of this paper have appeared in English in the author's following papers:

1. On PC_Δ-classes in the theory of models, *Publications Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **9**/A (1964) pp. 159—194.
2. A compactness result concerning direct products of models, *Fund. Math.* **57** (1968) p. 196.
3. Results for denumerably loug formulas with finite strings of quantifiers, *J.Symmbolic Logic* (in appearence).

SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEKRŐL

Írta: KÁTAI IMRE

E dolgozatban ismertetem számelméleti függvényekkel kapcsolatos vizsgálataimat. Az eredmények nagy része szerepel doktori értekezésemben. Bár az ismertetendő tételek zöme már megjelent, vagy megjelenőben van — idegen nyelvű folyóiratokban — az eredmények összefoglalásának lehet értelme. Másrészt az értekezésben megírt eredményeim egy részét azóta élesíteni tudtam, néhány további probléma felvetődött, s néhány újabban tisztázódott.

1. Additiv számelméleti függvények

1. 1. *Additiv függvények karakterizálása.* A számelmélet egyik alapvető feladata az egész számok additív és multiplikatív struktúrája közötti összefüggések felderítése. A következő tételek azt mutatják, hogy ha egy additív számelméleti függvény a közönséges rendezés értelmében szabályosan viselkedik, akkor ez csak nagyon speciális lehet, nevezetesen a log függvény valamely konstans-szorosa, vagy ettől kevéssé eltérő függvény.

ERDŐS 1946-ban kimutatta, hogy ha valamely $f(n)$ additív számelméleti függvény monoton, vagy $f(n+1)-f(n)$ nullához tart, akkor $f(n)=c\log n$ [1]. Azóta e tételeknek sok egyszerű bizonyítása, számos általánosítása és alkalmazása van ([3]—[13]). Az alábbiakban megemlítünk néhány általánosítást.

Ha $f(n)$ additív és $\underline{\lim}\, \Delta^k f(n) \geqq 0$ valamely k természetes számra $\left(\Delta^k f(n) = \Delta^{k-1}f(n+1)-\Delta^{k-1}f(n)\right)$, akkor $f(n)=c\log n$ [9]. E tételt $k=1$-re tőlem függetlenül MÁTÉ ATTILA is bebizonyította [7], s ERDŐS PÁL még előzőleg [2]-ben bizonyítás nélkül közölte.

Kimutattam továbbá, hogy ha az f és g tetszőleges additív függvényekre $f(n+1)-g(n)\to 0$, akkor $f(n)=g(n)=c\log n$. Ha az előbbi feltétel helyett az $f(n+k)-g(n)\to 0$ feltételt tesszük, akkor $f(n)=c\log n+u(n)$, $g(n)=c\log n+v(n)$, és az $u(n)$, $v(n)$ additív függvényekre $u(n+k)=v(n)$ $(n=1,2,\cdots)$ teljesül. Az utóbbi, relációt teljesítő függvények teljesen leírhatók. Kimutatható, hogy $u(p)=v(p)=0$, ha p tetszőleges a k-hoz relatív prím prímszám [10]. További érdekes kérdés azon $f_1(n), f_2(n), f_3(n)$ additív függvények meghatározása, amelyekre

$$f_1(n)+f_2(n+1)+f_3(n+2)\to 0.$$

Valószínűnek látszik, hogy az utóbbi reláció akkor és csak akkor teljesül,

ha $\qquad f_i(n)=c_i\log n+u_i(n) \qquad (i=1,2,3), \qquad c_1+c_2+c_3=0$ és

(1. 1) $$u_1(n)+u_2(n+1)+u_3(n+2)=0 \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Azt hiszem továbbá, hogy (1. 1) megoldásai véges tartójúak. (Akkor mondjuk, hogy egy additív függvény véges tartójú, ha véges sok prímszám kivételével a függvény értéke a prímhatványhelyeken zérus). Ezen utóbbi két sejtést jelenleg nem tudom bebizonyítani.

Nem lenne érdektelen megvizsgálni a következő kérdést. Adott $c_0, ..., c_k$ valós állandók esetén meghatározandók azok az $f(n)$ additív függvények, amelyekre

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k} c_i f(n+i) = 0. \tag{1.2}$$

Azt hiszem, hogy ha a megoldás $\Sigma c_i=0$, akkor (12) összes megoldásai a $c \log n$ alakú függvények, míg $\Sigma c_i \neq 0$ esetén csak az $f(n)\equiv 0$ lesz megoldás. Ezt a $k=0$, 1 esetre könnyű megmutatni, a $k \geqq 2$ esetben csak speciális c_i-kre tudom bebizonyítani. Nem lehetetlen, hogy $\Sigma c_i=0$, $k\geqq 1$, $c_i \neq 0$ esetén már (1. 2) helyett a gyengébb

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k} c_i f(n+i) \geqq 0$$

feltételnek is csak a $c \log n$ függvények tehetnek eleget.

Erdős P. sejtette, hogy ha $f(n)$ additív és

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{n\leqq x} |f(n+1)-f(n)| = 0, \tag{1.3}$$

akkor $f(n)=c\log n$. Ezt nemrégen sikerült bebizonyítanom [12]. A közelmúltban kimutattam azt az erősebb állítást is, hogy a

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{n\leqq x} \frac{|f(n+1)-f(n)|}{n} = 0 \tag{1.4}$$

reláció csak $f(n)=c\log n$ esetén állhat fenn [13].

Ryavec levélben közölte azt a sejtését, hogy az előző állítás következik a

$$\liminf \frac{1}{x} \sum_{n\leqq x} |f(n+1)-f(n)| = 0 \tag{1.5}$$

feltételből is. Ez a sejtés igen nehéznek látszik. Csupán azt sikerült megmutatnom, hogy (1. 5) csak teljesen additív függvényekre teljesülhet [13].

Erdős P. egy másik érdekes sejtése volt a közelmúltban E. Wirsing által bebizonyított tétel: *ha $f(n)$ additív és $f(n+1)-f(n)$ korlátos, akkor $f(n) = c\log n + g(n)$, $g(n)$ korlátos függvény.*

Egyik dolgozatomban kimutattam, hogy ha 2 additív függvény maximuma szabályosan viselkedik, akkor a maximum közel van a logaritmus függvényhez. Nevezetesen, ha az $f(n)$, $g(n)$ additív függvényekre $h(n)=\max(f(n), g(n))$ monoton nő, akkor $h(n) = c\log n + r(n)$, $r(n)\to 0$. Továbbá $r(n)\to 0$, ha n minden prímosztója elég nagy [14].

1. 2. *Egyértelműségi halmazok.* A természetes számok valamely A halmazát egyértelműségi halmaznak nevezzük, ha az azonosan zérus függvény az egyetlen olyan teljesen additív függvény, amely zérus értéket vesz fel a halmaz minden elemén.

Mivel teljesen additív függvényt a prímszám helyeken felvett értékei teljesen meghatároznak, ezért a prímszámok halmaza egyértelműségi halmaz. Könnyű a prímszámok halmazától különböző egyértelműségi halmazra példát mutatni. Ilyen például $(l, k)=1$ esetén az $l, l+k, l+2k, \ldots$ számtani sorozat elemeit és k prímosztóit tartalmazó halmaz. Legyen ugyanis az $f(n)$ additív függvény 0, ha $n \equiv l \pmod k$. Ekkor tetszőleges $m \equiv 1 \pmod k$-ra $mn \equiv l \pmod k$, s így $0 = f(mn) = f(m)+f(n) = f(m)$, azaz $f(n)=0$, ha $n \equiv 1\,(k)$. Továbbá tetszőleges p prímszámra $p^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod k$, ha $(k, p)=1$, s így $0=f(p^{\varphi(k)})=\varphi(k)f(p)$. Következésképpen $f(n)=0$, ha $(n, k)=1$. Mivel halmazunk tartalmazza k összes prímosztóit, így $f(n)=0$, ha n összes prímosztója osztója k-nak. Innen állításunk rögtön következik.

Nem ilyen egyszerű annak a kérdésnek az eldöntése, hogy a „prímszám+1" alakú számok halmaza egyértelműségi halmaz-e. Numerikus számolással egyszerűen meggyőződhetünk arról, hogy ha $f(p+1) = 0$ minden prímre, akkor $f(n)=0$ $n \leqq 50$-ig. IVÁNYI ANTAL kimutatta ezt $n \leqq 400$-ig. Amennyiben a probléma pozitív irányban dől el, érdekessé válik a következő probléma megválaszolása.

Adott N természetes számra jelölje $G(N)$ azt a minimális természetes számot, amelyre, ha $f(p+1) = 0$ minden $p \leqq G(N)$-re, akkor $f(n)=0$ minden $n \leqq N$-re. $G(N)=0(N^C)$ — valószínűleg igaz — kimutatása már igen nehéznek látszik. Másrészt világos, hogy $G(N)>N$, ha N prímszám és *Brun*-szitával megmutatható, hogy $\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{G(N)}{N} = \infty$. Ugyanis $N=q$ prímre $G(N) \geqq P(q)$, ahol $P(q)$ az a legkisebb p prím, amelyre $p+1 \equiv 0 \pmod q$.

A természetes számok valamely A halmazát kvázi-egyértelműségi halmaznak nevezzük, ha a halmaz alkalmas véges sok elem hozzávételével egyértelműségi halmazzá válik.

Korábban kimutattam, hogy a „prímszám+1" alakú számok halmaza kváziegyértelműségi halmaz [16]. A bizonyításban lényeges felhasználásra kerül BOMBIERI tétele (1.). Sajnos nem becsülhető a halmazt egyértelműségivé tevő elemek száma. Ez azon múlik, hogy a *Bombieri*-féle egyenlőtlenség ineffektív, ami a *Siegel*-tétel ineffektivitásának a következménye.

Nem vizsgáltam meg a következő kérdést: *Igaz-e, hogy ha $f(p+1)$ értékei egész számok, akkor $f(n)$ egész értékű.*

Azt mondjuk, hogy a természetes számok valamely halmaza erősen egyértelműségi halmaz, ha valamely $f(n)$ additív függvény csak akkor monoton a halmazon, ha $f(n)=c \log n$.

Világos, hogy minden erősen egyértelműségi halmaz egyúttal egyértelműségi halmaz is. Nehéznek látszik annak eldöntése, hogy a „$p+1$" alakú számok halmaza erősen egyértelműségi halmaz. Ez mindenesetre igaz, ha az

$$ap-bq = 1 \tag{1. 6}$$

egyenletnek minden $(a, b)=1$-re van megoldása p, q prímekben. Valóban, (1. 6)-ot $a=n, b = n+1$-el alkalmazva $n(p+1) = (n+1)(q+1)$, s $p>q$ miatt $f(n) \leqq f(n+1)$. Így ERDŐS tételéből $f(n)=c \log n$ következne.

A *Selberg*-szitával megmutatható (l. A. I. VINOGRADOV [17]), hogy (1. 6) megoldható, ha p és q a legfeljebb 3 prímtényezőt tartalmazó számokon futnak végig. Így a legfeljebb 3 prímtényezőt tartalmazó számok 1-gyel növelt halmaza erősen egyértelműségi halmaz.

Valószínűnek látszik, hogy igaz a következő sejtés. *Ha az $f(n)$ komplex értékű teljesen additív számelméleti függvényre*

$$|f(p+1)| \leqq C\log(p+1) \tag{1.7}$$

minden p prímre, akkor

$$|f(n)| \leqq AC\log n \tag{1.8}$$

valamely A numerikus állandóval. (Innen következne, hogy a „$p+1$" halmaza egyértelműségi halmaz). Ebben az irányban csak gyenge eredményeim vannak. Az általános *Riemann*-sejtés feltételezésével kimutattam, hogy (1. 7)-ből

$$|f(n)| \leqq K_f(\log n)(\log\log 10n)$$

következik. Itt K_f alkalmas, az f függvénytől függő állandó [18].

Ehhez hasonló néhány problémát megfogalmaztam a [19] problémafelvető dolgozatban.

1. 3. *Additív számelméleti függvények értékeloszlása.* Azt mondjuk, hogy az $f(n)$ additív számelméleti függvénynek A_x, B_x normálás mellett létezik határeloszlása a természetes számok valamely $A=\{a_i\}$ halmazán, ha a

$$\frac{1}{A(x)} N\{a_i \leqq x;\ (f(a_i)-A_x)/B_x<y\}$$

$\left(A(x)=\sum_{a_i\leqq x} 1\right)$ mennyiség határértéke $x\to\infty$-re majdnem minden y-ra létezik, s a határérték valamely $F(y)$ eloszlásfüggvény. A legfontosabb feladat e területen az $f(n)$ függvényre olyan feltételek meghatározása, amelyek garantálják a határeloszlás létezését:

a) $A_x\equiv 0$, $B_x\equiv 1$;
b) $B_x\equiv 1$, alkalmas A_x;
c) alkalmas A_x, B_x sorozat mellett.

E kérdések vizsgálata többé-kevésbé teljes, ha A az összes természetes szám halmaza. Kívánatos azonban ezeknek az eredményeknek más A halmazokra való kiterjesztése. Az utóbbi években sikerült a határeloszlástételek nagy részét átvinni arra az esetre, amikor A valamely polinomnak a természetes számok halmazán, vagy a prímszámok halmazán vett helyettesítési értékeinek halmaza. A prímszám változóra vonatkozó eredmények elérését a nagy-szita tétel *Bombieri*-féle alakja teszi lehetővé [20]. Ez a következőt mondja ki:

Ha $\pi(x, k, l)$ jelöli az x-nél nem nagyobb $l(\text{mod } k)$ számtani sorozatba eső prímek számát, akkor

$$\sum_{k\leqq Y}\max_{(l,k)=1}\max_{z\leqq x}\left|\pi(z,k,l)-\frac{\operatorname{li} z}{\varphi(k)}\right| \ll x(\log x)^{-B}, \tag{1.9}$$

ahol $Y=\sqrt{x}(\log x)^{-A}$, B tetszőleges pozitív állandó, $A\geqq 4B+40$.

Megjegyezzük, hogy az itt említendő tételek bizonyításához nincs szükségünk (1. 9) iyen pontos alakjára. Itt elég lenne az a BARBANtól származó tétel is, hogy (1. 9) fennáll, ha $Y=x^{\Delta}$, Δ pozitív állandó.

ERDŐS és WINTNER klasszikus tétele szerint, ha A a természetes számok halmaza, akkor $A_x = 0$, $B_x = 1$ választással az $f(n)$ függvénynek akkor és csak akkor létezik határeloszlása, ha a következő három sor konvergens:

$$(\alpha) \quad \sum_{|f(p)| \leqq 1} \frac{f(p)}{p}; \qquad (\beta) \quad \sum_{f(p) \leqq 1|} \frac{f^2(p)}{p}; \qquad (\gamma) \quad \sum_{|f(p) > 1|} \frac{1}{p}.$$

Kimutattam (1. 9) felhasználásával, hogy az (α), (β), (γ) sorok konvergenciája esetén f határeloszlása akkor is létezik, ha A a prímszámok valamely fix pozitív egésszel növelt halmaza [21]. KUBILIUS kérdezte, hogy az előbbi sorok konvergenciája szükséges-e a határeloszlás létezéséhez, ugyanúgy, mint a közönséges esetben. Erre a kérdésre a mai napig sem tudok válaszolni. Annyit sikerült megmutatnom, hogy pótlólag feltéve $f(p)$ korlátosságát a 3 sor konvergenciája szükséges is lesz a határeloszlás létezéséhez.

Az előbb említett tételnek több általánosítását adtam [22]. Egyrészt több változóra, másrészt polinom helyettesítési értékein való eloszlás létezésére sikerült bebizonyítanom hasonló tételeket. A magasabb fokú polinomokra vonatkozó eredmények nem elég teljesek. Itt egyszerűség kedvéért csak az $A = \{n^2+1, n=1, 2, \ldots\}$ esetet diszkutáljuk. Ha $f(p) \to 0$ $p \equiv 1\,(4)$, $p \to \infty$ és a

$$\sum_{p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)} \frac{f(p)}{p}, \qquad \sum_{p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)} \frac{f^2(p)}{p}$$

sorok konvergensek, akkor az $f(n^2+1)$ sorozatnak létezik határeloszlása. Kérdés, hogy az $f(p) \to 0$ feltétel szükséges-e az eloszlás létezéséhez? Talán már az (α), (β), (γ) sorok konvergenciájából is következik a határeloszlás létezése? ERDŐS professzor hívta fel a figyelmet arra, hogy ez nincs így. Ez azon az ismert tételen alapszik, hogy az n^2+1 $(n=1, \ldots, x)$ számok között legalább cx $(c>0)$ van, amelynek legnagyobb prímosztója nagyobb x-nél. Itt a pontos szükséges és elégséges feltétel megtalálása igen nehéznek látszik.

Mint az előbbiekből kitűnik az $A = \{n=1, 2, \ldots\}$, $A = \{p+1\}$ esetekben a függvénynek az 1-nél magasabb prímhatványokon való értékei nem befolyásolják a határeloszlás létezését. Valószínű, hogy ez igaz magasabb fokú polinomok helyettesítési értékeire is.

Ebben az irányban a legjobb eredményt HOOLEY következő tételéből nyerjük [23]:

Legyen $F(x)$ $v(\geqq 3)$-edfokú egészegyütthatójú irreducibilis polinom; $y = y(x)$, tetszőleges lassan a végtelenhez tartó függvénye x-nek $x \to \infty$-re. Ekkor azon n egészek száma x-ig, amelyre létezik alkalmas $p > y$ prím úgy, hogy $F(n) \equiv 0(p^{v-1})$ az legfeljebb $o(x)$. Innen, mint könnyen látható, következik, hogy az $A = \{F(n), n=1, 2, \ldots\}$ esetben a határeloszlás létezése vagy nem létezése független az f függvénynek a p^k, $k \geqq v-1$ helyeken felvett értékétől.

2. Multiplikatív számelméleti függvények

A multiplikatív számelméleti függvényekre vonatkozó különböző irányú vizsgálatok — részben összefüggésben az additív függvényekre vonatkozó kutatásokkal — az analitikus számelmélet egy kiterjedt kutatási irányát alkotják. Itt csupán néhány általam vizsgált kérdést fogok megemlíteni.

2. 1. *Omega-becslések.* Az e területen elért eredményekről részletesen beszámoltam a [24] dolgozatban, ehhez szeretnék néhány kiegészítést fűzni.

Az 1966-os Moszkvai Nemzetközi Matematikai Kongresszuson ROSSER bejelentette, hogy SCHOENFELDdel együtt kimutatták, hogy a ζ-függvény első 2 millió gyöke a $\sigma = {}^1/_2$ egyenesen van. E numerikus eredmények lehetővé tették a [24]-ben közölt Ω-becslések lokalizációs intervallumának lerövidítését. E numerikus eredmények használhatóságához a régebbi bizonyítási gondolatmenetet lényegesen meg kellett változtatni. A következő, általános *Dirichlet*-integrálokra vonatkozó tételt sikerült bebizonyítanom [25].

Legyen $A(x)$ valós függvény az $1 \leqq x < \infty$ intervallumon, s legyen

$$f(s) = \int_1^\infty x^{-s} dA(x).$$

Tegyük fel, hogy $\int_1^x |dA(u)| < c_1 x^{\Theta_1} (0 < \theta_1 \leqq 1)$, továbbá, hogy $f(s)$ analitikusan folytatható a $\sigma > (1-\varepsilon)\theta_2$ $(s = \sigma + it)$ félsíkba, ahol $0 < \varepsilon < 1$. Tegyük fel, hogy $f(s)$-nek egyszeres pólusa van a $\varrho = \theta_2 + i\gamma$ pontban b reziduummal. Legyen $0 \leqq \gamma < c_2$. Tegyük fel, hogy $f(s)$ a ϱ pont kivételével az egész D tartományban reguláris, ahol D a következő módon van definiálva:

$$D = \{s = \sigma + it;\ \sigma \geqq \theta_2(1-\varepsilon),\ -\varepsilon_1\theta_2 \leqq t \leqq \gamma + \varepsilon_1\theta_2\} \quad 0 < \varepsilon_1 \leqq \varepsilon.$$

Legyen $M = \max\limits_{s \in \Delta} \max \left(|f(s)|, |f(s+i\gamma)|\right)$. Itt Δ azt a téglalapot jelöli, amelynek csúcsai $\theta_1 - \varepsilon_1\theta_2 i$, $\theta_2(1-\varepsilon_1) - \varepsilon_1\theta_2 i$, $\theta_2(1-\varepsilon_1) + \varepsilon_1\theta_2 i$, $\theta_1 + \varepsilon_1\theta_2 i$. Legyen $f(s)$ reguláris a $\sigma > \theta_2$, $|t| \leqq \theta_2(B+2) + \gamma$ sávon és legyen

$$|f(\sigma + it)| \leqq (|t| + \theta_2)^{-c_3 \log(\sigma - 1)}$$

a $\sigma > \theta_2$, $|t| \leqq \theta_2(B+1) + \gamma$ sávon.

Tegyük fel továbbá, hogy minden valós T-hez található olyan t a $T \leqq t \leqq T+1$ intervallumon, amelyre $|f(\sigma + it)| \leqq (|t| + \theta_2)^{c_4}$ ha $\sigma \geqq \theta_2$. Tegyük fel, hogy valamely ε_2 pozitív konstanssal

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\log B}(1 + 2\varepsilon_2) < \frac{\theta_2 \varepsilon_1}{\log(1-\varepsilon_1)^{-1}}.$$

Az előbbi feltételek mellett érvényesek a következő tételek.

A. TÉTEL: *Ha $\gamma > 0$, akkor $T > c_5$ esetén*

$$\max_{T^\beta \leqq x \leqq T} A(x) x^{-\theta_2} > \delta, \quad \min_{T^\beta \leqq x \leqq T} A(x) x^{-\theta_2} < -\delta,$$

ahol

$$\delta = \frac{|b|}{20(\theta_2 + \gamma)}, \quad r = (1 + \varepsilon_2)\frac{\theta_1 - \theta_2}{\log B},$$

$$\beta = \frac{\theta_2 - r \log(\theta_2 e/r)}{\theta_1},$$

c_5 numerikusan kiszámítható függvénye a $c_1, \ldots, c_4, M, B, b$ mennyiségeknek.

Legyen

$$K(x) = \int_1^x \frac{|A(u)|}{u}\, du.$$

B. TÉTEL: *$T > c_6$ esetén*

$$K(T) > \frac{0{,}4|b|}{\theta_2^2} T^{\beta\theta_2}.$$

c_6 numerikusan meghatározható függvénye a $c_1, \ldots, c_4, \varepsilon_2, M, B, b$ mennyiségeknek. Innen könnyen levezethető a következő két tétel.

1. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy a $\zeta(s) = \zeta(\sigma+it)$ Riemann-féle zeta függvény nem tűnik el a*

$$\sigma > {}^1/_2, \; |t| \leqq B+20$$

téglalapon. Ekkor minden $T > c_1 B^{c_2}$-re

$$\max_{T^\varkappa \leqq x \leqq T} \left(\pm A(x) x^{-1/2}\right) > \delta,$$

ahol δ pozitív numerikus állandó, $r = \frac{1{,}01}{2\log 2B}$, $\varkappa = \frac{1}{2} - r\log\frac{2e}{r}$, továbbá $A(x)$ a következő függvények bármelyike:

$$M(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n); \quad xM_0(x) = x\sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n)}{n}; \quad xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2};$$

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{(k-1)!\,\zeta(2k)}; \quad m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) e^{-n/x}; \quad R(x^2) = \sum_{n \leqq x^2} d^2(n) - x^2 p(x^2)$$

$\Big($*$p(x)$ a $\log x$ függvény harmadfokú polinomja, $p(x)x = \operatorname{Rez}_{s=1} \frac{x^s}{s}\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}\Big)$, $V(x) = \sum_{n \leqq x} r(n^2) - \varrho(x)x$ $\big(r(n)$ az $u^2+v^2 = n$ egyenlet megoldásszáma, $\varrho(x)x = \operatorname{Rez}_{s=1} \frac{x^s}{s} \frac{4}{1+\frac{1}{2^s}} \frac{\zeta^2(s)L(s)}{\zeta(2s)}$, $L(s)$ a* mod 4 *vett primitív karakterhez tartozó L-függvény$\big)$.*

Továbbá $T > c_3 \exp(k \log k \cdot \log B)$ esetén

$$\max_{T^\varkappa \leqq x \leqq T} \left(\pm P_k(x) \cdot x^{-1/2k}\right) > \frac{\delta}{k},$$

ahol $P_k(x)$ jelöli az x-nél nem nagyobb k-adik hatványmentes számok számának és $x/\zeta(k)$-nak a különbségét.

ROSSER *és* SCHOENFELD *számításainak felhasználásával $\varkappa = 0{,}36$ választható.*

2. TÉTEL: *Az 1. Tétel feltételei és jelölései mellett*

$$\int_1^T \frac{|A(x)|}{x} dx > \delta T^{\varkappa/2} \qquad \int_1^T \frac{|P_k(x)|}{x} dx > \frac{\delta}{k} T^{\varkappa/2k}.$$

A kandidátusi disszertációmban alkalmazott módszert sikerült alkalmaznom olyan esetekre is, amikor a generáló *Dirichlet* sor szingularitásai logaritmikusak. A következő tételt bizonyítottam be [26].

Jelölje k az (A) alatti modulusok valamelyikét:

$$(A) \qquad k=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 19, 24.$$

Az (A) modulushoz tartozó L-függvények valós tengelyhez közel eső gyökei ismeretesek. HASELGROVE kimutatta, hogy ezeknek az L-függvényeknek nincsenek valós gyökeik a kritikus sávban.

Jelölje $N_k(l)$ az $x^2 \equiv l (\mathrm{mod}\, k)$ kongruencia megoldásainak a számát. Legyen

$$\sigma(x, k, l) = \sum_{p \equiv l (\mathrm{mod}\, k)} \exp\left(-\frac{p}{x}\right), \quad s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-1} \exp\left(-\frac{n}{x}\right)$$

3. TÉTEL. *Legyen l kvadratikus nem-maradék* $\mathrm{mod}\, k$, $N_k(l_1)=N_k(l_2)$. *Ekkor* $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$ *és alkalmas δ pozitív numerikus állandóval minden $T>c$ esetén érvényesek a*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} \frac{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}/\log x} > \delta; \quad \max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} \frac{\sigma(x, k, l_1) - \sigma(x, k, l_2)}{\sqrt{x}/\log x} > \delta;$$

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} \left\{ \pm \frac{\pi(x, k, l) - \dfrac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(k)}}{\sqrt{x}/\log x} \right\} > \delta; \quad \max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} \pm \frac{\sigma(x, k, l_1) - \dfrac{s(x)}{\varphi(k)}}{\sqrt{x}/\log x} > \delta$$

egyenlőtlenségek.

Nemrégen KNAPOWSKI és TURÁN lokalizált $\Omega_{\pm}$ becslést bizonyítottak be a $\pi(x, 4, 1) - \frac{\mathrm{li}\, x}{2}$ különbségre (szóbeli közlés). A $\pi(x, 4, 3) - \frac{\mathrm{li}\, x}{2}$ függvény vizsgálata — bár ez az egyszerűbb eset — más módszert kíván. Ide vonatkozó eredményt ad előbbi tételünk $k=4$, $l=3$ választással.

Nem kívánok itt kitérni az osztóproblémára és a kör rácspontjainak számára vonatkozó, CORRÁDIval közös eredményünkre [27].

2. 2. *Multiplikatív függvények szuperpozíciójáról.* Jelöljön $\vartheta(n)$ pozitív egész értékeket felvevő teljesen multiplikatív függvényt, s legyen $\vartheta_0(n)=n$, $\vartheta_k(n)=\vartheta(\vartheta_{k-1}(n))$ $(k=1, 2, \ldots)$. Világos, hogy $\vartheta_k(n)$ minden rögzített k-ra teljesen multiplikatív függvény.

Jelölje $H_k(n)$ a $\vartheta_k(n)$ prímosztóinak az összességét. A $H_0(n), \ldots, H_k(n), \ldots$ halmazsorozatot az n (ϑ által generált) pályájának nevezzük.

Legyen $E(n)$ azon prímek halmaza, amelyek végtelen sok $H_k(n)$-nek elemei. $E(n)$ elemeit n aszimptotikus állapotainak nevezzük Legyen $E = \bigcup_{n=2}^{\infty} E(n)$. E-t az iteráció magjának nevezzük.

A legelső kérdés konkrét ϑ függvényre, hogy E véges vagy végtelen sok elemet tartalmaz-e. Azt mondjuk, hogy n p-adikusan zérushoz tart — az iteráció folyamán —, ha minden ν-re $p^{\nu} | \vartheta_k(n)$, ha k elég nagy $(k \geqq k_0(p, n, \nu))$. Jelölje $P(n)$ azon p-k halmazát, amelyekre n p-adikusan zérushoz tart. Evidens, hogy $P(n) \subset E(n)$. Legyen

$P=\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} P(n)$. Legyen $\varkappa(n)$ az a minimális k_0 index, amelyre $k \geqq k_0$ esetén $\vartheta_k(n)$ prímosztói $E(n)$-beliek. Ha ilyen k_0 nem létezik, akkor legyen $\varkappa(n)=+\infty$. Érvényesek a $\varkappa(n)=\max\limits_{q|n}\varkappa(q)$, $\varkappa(n)=1+\varkappa(\vartheta(n))$ (ha $\varkappa(n)>0$) relációk.

A [28] dolgozatban legegyszerűbb esetként azokat a ϑ függvényeket vizsgáltam, amelyek p prímre a $\vartheta(p)=p+a$ értéket veszik fel (a rögzített természetes szám). Kimutattam, hogy ezekben az esetekben az iteráció magja véges, sőt E elemei kisebbek, mint $(2b-1)a$, ahol b tetszőleges 1-nél nagyobb a-hoz relatív prím egész. Következésképpen E numerikusan meghatározható minden konkrét a-ra. Részletesen megvizsgáltam az $a=1, 2, \ldots, 40$ értékeket. Annyi könnyen megmutatható, hogy

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\ \varkappa(p)/(\log\log p)>c(>0).$$

Ez rögtön következik LINNIK tételéből, mely szerint az $l \bmod k$ számtani sorozat legkisebb prímszáma $\leqq k^{c_1}$. Definiáljuk a $q_1, \ldots, q_N$ prímszámokat a következő módon: q_{i+1} legyen az a legkisebb prím, amelyre $q_i | q_{i+1}-1$ $(i=1, 2, \ldots, N-1)$. Így $q_N \leqq q_{N-1}^{c_1} \leqq \ldots q_1^{c_1^N}$. Másrészt $\varkappa(q_N) \geqq 1+\varkappa(q_{N-1})$ miatt $\varkappa(q_N) \geqq N$. Innen állításunk egyszerű számolással következik.

A $\vartheta(p)=ap+b$ relációval definiált függvény iterációs magjának vizsgálata nehéznek látszik $a \geqq 2$ esetén. Nem tudom eldönteni, hogy E véges vagy végtelen sok elemet tartalmaz-e. Numerikus számítással kimutattam, hogy a $\vartheta(p)=2p-1$ függvényre az [1, 100] intervallumon a 35, 19, 37, 73, 29 prímek és csak ezek tartoznak E-hez. Lehet, hogy ez E összes eleme?

Általában a következőt sejtem: ha a $\vartheta(n)$ függvény a $\vartheta(p)=P(p)$ relációval van definiálva, ahol $P(x)$ irreducibilis polinom, akkor a függvény iterációjának magja aszerint véges vagy végtelen, hogy $P(x)$ foka 1 vagy annál nagyobb.

Érdemes lenne megvizsgálni a $\sigma(n)$ függvény — $\sigma(n)$ az n osztóinak összege — iteráltjait. Nem tudom bebizonyítani, hogy az iteráció magja véges.

Jelölje $d_r(n)$ a $d(n)$ $(=n$ osztóinak száma) függvény r-edik iteráltját. A

$$D_r(x)=\sum_{n\leqq x} d_r(n)$$

függvényre BELLMAN és SHAPIRO sejtik a

$$D_r(x)=c_r(1+o(1))\,x\log_r x$$

aszimptotikát. Ezt sikerült kimutatni az $r=2$ [29], $r=3$ [30] és ERDŐssel közösen az $r=4$ esetre [31.] ERDŐssel megvizsgáltuk a $d_r(n)$ függvény növekedési rendjét is. A következőt találtuk: $\limsup\limits_{n\to\infty}(\log\log n)^{-1}(\log\log d_r(n))\to 1/l_r$ $(r=1,2,\ldots)$, ahol l_r a *Fibonacci sorozat* r-edik eleme.

2. 3. *Multiplikatív függvények értékeloszlása.* Jelöljön $f(n)$ ± 1 értékű teljesen multiplikatív függvényt. Azt mondjuk, hogy $f(n)$ normális típusú, ha bármely $k \geqq 0$-ra és a ± 1 értékek bármely $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k$ sorozatára azon n-ek száma x-ig, amelyre $f(n+\mathrm{i})=$ $=\varepsilon_i$ $(i=0, \ldots, k)$ az $\frac{x}{2^{k+1}}+o(x)$. Megmutattam, hogy majdnem minden $f(n)$ függvény normális típusú, pontosabban szólva fennáll a következő. Legyen (Ω, A, P) egy valószínűségi mező, ξ_i $(i=1, 2, \ldots)$ teljesen független valószínűségi változók

sorozata, $P(\xi_i=1)=P(\xi_i=-1)=\frac{1}{2}$. Jelölje p_i az i-edik prímszámot, s legyen az $f(n,\omega)$ multiplikatív függvény az $f(p_i,\omega)=\xi_i(\omega)$ relációkkal definiálva. Ekkor $f(n,\omega)$ normális típusú majdnem minden $\omega\in\Omega$-ra.

Világos, hogy normális típusú $f(n)$-re

$$\sum_{n\leqq x} f(n)f(n+a_1)\dots f(n+a_k)=o(x) \tag{2.1}$$

minden $1\leqq a_1<a_2<\dots<a_k$-ra, s így speciálisan $\sum_{n\leqq x} f(n)=o(x)$; $\sum_{n\leqq x} f(n)f(n+1)=$ $=o(x)$. Másrészt (2.1) teljesülése esetén $f(n)$ normális típusú.

Nem tudom bebizonyítani, hogy a $\lambda(n)$ *Liouville*-függvény noımális, sőt azt sem, hogy

$$\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\lambda(n+1)=o(x).$$

E. WIRSING a közelmúltban megmutatta [32], hogy a $\sum_{n\leqq x} f(n)=o(x)$ reláció teljesülése ekvivalens a

$$\sum_{f(p)=-1}\frac{1}{p}=\infty \tag{2.2}$$

reláció teljesülésével.

Annyit sikerült megmutatnom, hogy (2.2) esetén

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x} f(n)f(n+1)\geqq-\frac{5}{6}x,$$

sőt, hogy az $f(n)=f(n+1)=\varepsilon$, $n\leqq x$ megoldásszáma legalább $\frac{x}{12}+o(x)$ az $\varepsilon=1$ és $=-1$ értékek mindegyikére. Érdekes, hogy a másik oldalról azt sem tudom megmutatni, hogy

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x} f(n)f(n+1)<1.$$

Annyi mindenesetre könnyen látható, hogy tetszőleges $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ előjelkombinációra az $f(n)=\varepsilon_1$, $f(n+1)=\varepsilon_2$ végtelen sok n-re megoldható.

2.4. *Lokális értékeloszlás.* Legyen $f(n)$ tetszőleges teljesen multiplikatív függvény, amelyre létezik a természetes számoknak olyan monoton növő A_k és B_k sorozata, hogy $B_k>4\sqrt{A_k}+A_k$ és az (A_k,B_k) intervallumban $f(n)$ 0-tól különböző c_k értéket vesz fel, akkor $f(n)$ azonosan 1 [33]. Innen speciálisan következik, hogy minden ±1 értékű $f(n)$ teljesen multiplikatív függvény felveszi mindkét értékét az $(N, N+4\sqrt{N})$ intervallumban elég nagy N-től kezdve. Így ez a $\lambda(n)$ függvényre is igaz.

A bizonyítás teljesen elemi. Jobb eredményt nem tudok bizonyítani egyetlen nem triviális esetre sem, így pl. a $\lambda(n)$-re sem. Valószínű, hogy $\lambda(n)$ mindkét értékét felveszi már az $[N, N+0(N^{\varepsilon})]$ intervallumon is, de ennek megmutatása már $0(N^{\varepsilon})$ helyett $o(\sqrt{N})$-el is nehéznek látszik.

Kimutattam a következő állítást is. Ha $f(n)$ a négyzetmentes számok halmazán definiált multiplikatív függvény, s $c_k\neq0$-val $f(n)=c_k$ az $A_k\leqq n\leqq B_k$ intervallumon, s $B_k\geqq A_k+A_k^{\vartheta}$, $\vartheta=0,63,\dots$, akkor $f(n)\equiv1$ [34].

W. H. MILLStől származik a következő sejtés. Ha $f(n)$ ± 1 értékű teljesen multiplikatív függvény, amelyre az $f(n)=f(n+1)=f(n+2)=+1$, reláció nem oldható meg, akkor $f(3k+1)=1$, $f(3k+2)=-1$ minden $k=0, 1, 2, \ldots$ értékre. Annyit sikerült CORRÁDIval megmutatnunk, hogy ha nem oldható meg az $f(n)=$ $=f(n+1)=f(n+2)$ reláció sem, akkor az állítás igaz. Talán igaz az előző állítás azon feltétel mellett is, hogy $f(n)=f(n+1)=f(n+2)$-nek legfeljebb véges sok megoldása van.

3. A Bombieri-tétel alkalmazásai

A Bombieri-tétel igen hatásosan alkalmazható több területen. Ezt alkalmaztuk már az 1. szakasz eredményeinek levezetésére is. Míg az ottani eredmények többségének bizonyításához elég az (1. 9)-nál gyengébb változat is, most az (1. 9) alatti éles változatra lesz szükségünk.

Legyen D tetszőleges prímhatvány-modulus, s $l\,(\mathrm{mod}\ D)$ olyan maradékosztály, hogy valamely mod D vett karakterre $\chi(l)=-1$ teljesül. Ekkor azon p prímek M száma x-ig, amelyekre $p+1$ nem tartalmaz az $l\,(\mathrm{mod}\ D)$ számtani sorozatba eső prímosztót legalább $x/(\log x)^4$. ($\log x$ kitevője csökkenthető, ha módszerünket a *Brun*-szitával kombináljuk — erre ERDŐs hívta fel a figyelmet —, de a várható pontos nagyságrend ezúton nem látszik elérhetőnek.)

Így speciálisan igaz, hogy végtelen sok p prímszám van, amelyre $p+1=P$, ahol P olyan szám, amelynek prímosztói között nincsenek $4k-1$ alakúak. Első pillanatra meglepő, hogy a „$p+1=Q$, Q prímosztói között nincsenek $4k+1$ alakúak" egyenlet végtelen sokszori megoldhatóságát nem lehet e módszerrel elintézni. Általában azokra az esetekre, amikor egyetlen χ karakter sem vesz fel -1 értéket az l helyen, semmit sem tudunk bizonyítani.

A tétel bizonyításának alapgondolata a következő. Legyen $r(n)=\sum_{d|n}\chi(d)$ $\chi(l)=-1$. Minthogy $r(n)=\prod_{q^\alpha\|n}\{1+\chi(q)+\ldots+\chi(q^\alpha)\}$, ezért a

$$T(x)=\sum_{p\leq x} r(p+1)|\mu(p+1)|$$

összegben 0-tól különböző súllyal csak azok a p prímek jöhetnek tekintetbe, amelyekre $p+1$-ek négyzetmentesek, s $q\nmid p+1$, ha $q\equiv l\,(\mathrm{mod}\ D)$. A nagy szita alkalmazásával kimutatható, hogy

$$T(x)=\big(1+o(1)\big)A(D)\frac{x}{\log x}\quad (x\to\infty), \tag{3.1}$$

ahol $A(D)$ 0-tól különböző komplex állandó. Így a *Hölder*-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$|T(x)|\leq M^{1/2}\Big(\sum_{p\leq x}|r(p+1)|^2\Big)^{1/2}\leq \sqrt{M}\,\Big(\sum_{p\leq x}d^2(p+1)\Big)^{1/2}.$$

Továbbá BARBAN egy tételéből

$$\sum_{p\leq x}d^2(p+1)\ll x\log^2 x,$$

s így (3. 1) miatt $M\gg x/(\log x)^4$ [35—37].

IRODALOM

[1] P. Erdős: On the distribution function of additive functions. *Annals of Math.*, **47** (1946), 1—20.
[2] P. Erdős: On the distribution od additive arithmetical functions. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **27** (1958), 3—7.
[3] A. S. Besicovitch: On additive functions of a positive integer. *Studies in mathematical analysis and related topics, Essays in honor of G. Pólya,* Stanford, 1962. 38—41.
[4] L. Moser and J. Lambek: On monotone multiplicative functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 544—545.
[5] A. Rényi: On a theorem of P. Erdős and its application in information theorey. *Mathematica (Cluj)*, **1** (1959), 341—344.
[6] P. Turán: On a characterization of Dirichlet's *L*-functions. *Annales Univ. Sci. Bp. Sect. Math.*, **8** (1965), 65—69.
[7] A. Máté: A new proof of a theorem of P. Erdős. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 159—162.
[8] I. Kátai: A remark on additive arithmetical functions, *Annales Univ. Sci. Bp. Sect. Math.*, **10** (1967), 81—83.
[9] I. Kátai: Characterization of additive functions by its local-behaviour. Ibid. **11** (1968).
[10] I. Kátai: On random multiplicative functions. *Acta Sci. Math. Szeged* (sajtó alatt).
[11] Z. Daróczy und I. Kátai: Additive zahlentheoretische Funktionen und das Mass der Information. (Kézirat.)
[12] I. Kátai: On a problem of P. Erdős. *Journal of Number Theory* (sajtó alatt).
[13] I. Kátai: On additive functions. (Kézirat.)
[14] I. Kátai: A remark on number-theoretical functions, *Acta Arithm.*, **14** (1968), 409—415.
[15] I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions, I. *Acta Arithm.*, **13** (1968), 715—320.
[16] I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions, II. *Acta Arithm.*, (sajtó alatt).
[17] А. И. Виноградов: Применение $\zeta(s)$ к решету Эратосфена, *Мат. сб.*, **41** (83) (1957) 49—80.
[18] I. Kátai: Some remarks on additive arithmetical functions. (Sajtó alatt.)
[19] Kátai I.: Számelméleti problémák, I., *Mat. Lapok*. (Sajtó alatt.)
[20] E. Bombieri: On the large sieve. *Mathematika,* **82** (1965), 201—225.
[21] I. Kátai: On distribution of arithmetical functions on the set od prime plus one. *Comp. Math.*, (1968), 278—289.
[22] I. Kátai: On the distribution of arithmetical functions. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*,
[23] C. Hooley: On the power-free values of polynomials. *Mathematika* **14** (1967) 21—26.
[24] Kátai I.: Omega típusú vizsgálatok a prímszámelméletben. *MTA III. Oszt. Közl.*, **16** (1966), 369—396.
[25] I. Kátai: On oscillation of number-theoretical funtions. *Acta Arithm.*, **13** (1967), 107—122.
[26] I. Kátai: On oscillation of the number of primes in arithmetical progression, *Acta Sci. Szeged*, 29 (1968), 271—282.
[27] Corrádi K. és Kátai I.: Egy megjegyzés K. S. Gangadharan „Two classical lattice point problems" c. dolgozatához. *MTA III. Oszt. Közl.*, **17** (1967), 89—97.
[28] I. Kátai: Some problems on the iteration of multiplicative number-theoretical functions. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*,
[29] I. Kátai: On the sum $\Sigma ddf(n)$. *Acta Sci. Szeged,* **29** (1968), 199—206.
[30] I. Kátai: On the iteration of the divisor-function. *Publ. Math. Debrecen,*
[31] P. Erdős and I. Kátai: On the sum $\Sigma d_4(n)$. *Acta Sci. Szeged,* (sajtó alatt).
[32] E. Wirsing: Über multiplikative Funktionen, II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967), 411—467.
[33] I. Kátai: On the determination of an additive arithmetical function by its local behavior. *Colloquium Math.*, **20** (1969), 269—271.
[34] I. Kátai: On the values of multiplicative functions in short intervals. *Math. Annalen* (sajtó alatt).
[35] I. Kátai: On a classification of primes. *Acta Sci. Szeged* **29** (1968), 207—213.
[36] I. Kátai: A note on a sieve method. *Publ. Math.*
[37] I. Kátai: On an application of the large sieve. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (sajtó alatt).

(Beérkezett: 1969. II. 10.)

ON NUMBER-THEORETIC FUNCTIONS

by

I. KÁTAI

Summary

This is an expository paper that contains the results which are contained in the academical doctoral dissertation of the author.

EGYSÉGGÖMBÖK ELHELYEZÉSE GÖMBHÉJAKBAN

Írta: HORVÁTH JENŐ

Molnár József professzornak 50. születésnapjára

Bevezetés

Dolgozatunkban két koncentrikus gömbfelület által határolt gömbhéjban elhelyezkedő, egymást nem metsző egységgömbök sűrűségét vizsgáljuk.

HADWIGER [4] meghatározta azt a minimális sugarú gömböt, amelyben $n \leqq 6$ egységgömb elhelyezhető.

MOLNÁR és a szerző [5] két párhuzamos, t távolságú sík által határolt térrészben elhelyezkedő, egymást nem metsző egységgömbök sűrűségére adott felső korlátot, ha $2 \leqq t < 4$. A felső korlát $t=2$- és $t = 2+\sqrt{2}$-re pontos. MOLNÁR kéziratban levő dolgozatában $2 \leqq t \leqq 2+\sqrt{2}$-re meghatározta a sűrűség maximumát, amely többféleképpen realizálható.

A következőkben két koncentrikus gömbfelület által határolt gömbhéjban elhelyezhető, egymást nem metsző egységgömbök sűrűségére adunk felső korlátot.

1. Egységgömbök sűrűsége gömbhéjban

Legyen $\mathbf{G}(r)$ az euklideszi térben egy O középpontú, r sugarú gömbfelület. A $\mathbf{G}(r+t)$ és a $\mathbf{G}(r)$ felület által határolt gömbhéjat $\mathbf{T}_r^{r+t}$-vel jelöljük. Legyen n a $\mathbf{T}_r^{r+t}$-ben elhelyezkedő, egymást nem metsző egységgömbök maximális száma. A gömbök $\mathbf{T}_r^{r+t}$-re vonatkozó sűrűsége

$$d(r;t) = \frac{nV(1)}{V(r+t)-V(r)}, \tag{1}$$

ahol $V(a)$ az a sugarú gömb térfogata.

A továbbiakban feltesszük, hogy $2 \leqq t < 4$, $r > 0$ és $r+t \geqq 1+\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ha az utóbbi egyenlőtlenség nem teljesül, akkor $n \leqq 3$. (Ha $r+t < 1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$, akkor $n=2$ és ha $1+\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq r+t < 1+\sqrt{\frac{3}{2}}$, akkor $n=3$). Tételeink — a bizonyítások kisebb módosításával — érvényesek akkor is, ha $r \to \infty$, azaz a vizsgált térrészt két párhuzamos sík határolja [5].

A $\mathbf{T}_r^{r+t}$ gömbhéjban elhelyezkedő egységgömbök középpontjait jelöljük O_1-, O_2-, ..., O_n-nel. A középpontok nyilván a $\mathbf{T}_\varrho^{\varrho+\tau}$ gömbhéjban vannak és kölcsönös távolságuk legalább 2, ahol $\varrho = r+1$ és $\tau = t-2$. Vetítsük az $O_1, O_2, \ldots, O_n$ pontokat O-ból $\mathbf{G}(1)$-re és jelöljük a vetületi pontokat C_1-, C_2-, ..., C_n-nel. A $C_1, C_2, \ldots$

..., C_n pontok $t<4$ miatt mind különbözők. Jelentse D_i a $\mathbf{G}(1)$ felületen C_i DIRICHLET celláját, s egyben annak területét is. A $\sum_{i=1}^{n} D_i = 4\pi$ miatt

$$n \leqq \frac{4\pi}{D},$$

ahol $D = \min_{1 \leqq i \leqq n} D_i$. Ezért (1) szerint

$$d(r;t) \leqq \frac{4\pi}{Dt(3r^2+3rt+t^2)}. \tag{2}$$

A következőkben D-t fogjuk alulról megbecsülni. Legyen V egy D cella tetszőleges csúcsa. A D cella származtatásából következik, hogy V egy olyan kör középpontja, amely átmegy a $C_1, C_2, ..., C_n$ pontrendszernek legalább három pontján, mondjuk C_i-, C_j-, C_k-n.

D becslésével a következő tételek adódnak:

1. TÉTEL: *Ha* $r+t \geqq 1+\sqrt{\frac{3}{2}}$, $2 \leqq t<4$ *és*

$$(t-2)(r+t-1) \leqq 4, \tag{3}$$

akkor

$$d(r;t) \leqq \frac{4\pi}{t(3r^2+3rt+t^2)\left\{\frac{\pi}{3}(6-k)+\operatorname{arc\,tg}\left(\cos R \operatorname{tg} k\frac{\alpha}{2}\right)\right\}},$$

ahol

$$R = \arcsin\frac{2}{\sqrt{3}\,(r+t-1)}, \qquad \alpha = 2\arcsin\frac{r+t-1}{2\sqrt{(r+t)(r+t-2)}},$$

és $k = \left[\frac{2\pi}{\alpha}\right]$. ([$x$] az x egész részét jelenti.)

Az egyenlőtlenség nem javítható, ha a gömbök középpontjai a $\mathbf{G}(r+t-1)$ *gömbbe beírt 2 élhosszal bíró szabályos tetraéder, oktaéder vagy ikozaéder csúcsai. Nem javítható még abban az elfajuló esetben, ha* $t=2$ *és a középpontok egy síkbeli 2 oldalú szabályos háromszögrácsot adnak.*

2. TÉTEL: *Ha* $2 \leqq t<4$ *és*

$$0 < (t-2)\{(t-2)(r+t-1)-4\} \leqq 2(r+1), \tag{4}$$

akkor

$$d(r;t) \leqq \frac{2\pi}{t(3r^2+3rt+t^2)\left\{\pi - k\operatorname{arc\,tg}\left(\cos R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\cos R \operatorname{tg} k\frac{\alpha}{2}\right)\right\}},$$

ahol

$$R = \arcsin\frac{4t-t^2}{4(r+1)}\sqrt{\frac{(2r+t)^2-4}{(r+1)(r+t-1)}}, \quad \alpha = 2\arcsin\frac{2(r+1)}{\sqrt{(4t-t^2)\{(2r+t)^2-4\}}}$$

és $k = \left[\frac{2\pi}{\alpha}\right]$.

Az egyenlőtlenség az $r\to\infty$ és $k=2$ vagy $k=2+\sqrt{2}$ esetben nem javítható. (L. [5]).

3. TÉTEL: *Ha* $2+\sqrt{2}<t<4$ *és*

$$\frac{(t-2)(4t-t^2)}{t^2-4t+2}<r+1\leqq\frac{16-(t-2)^4}{2(t-2)(t^2-4t+2)}, \tag{5}$$

akkor

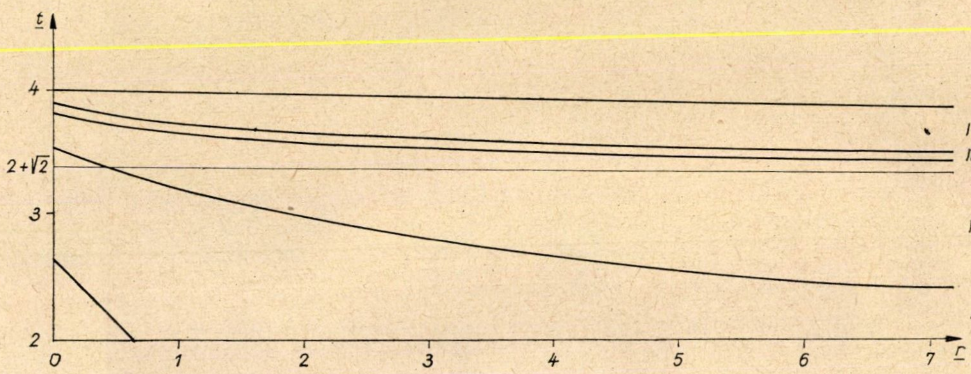
$$d(r;t)<\frac{2\pi}{t(3r^2+3rt+t^2)\left\{\pi-k\operatorname{arc\,tg}\left(\cos R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\cos R\operatorname{tg}k\frac{\alpha}{2}\right)\right\}},$$

ahol

$$R=\arcsin\frac{1}{r+t-1},\quad \alpha=2\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(r+t-1)\{4-(t-y-2)^2\}}{r+y-1}}$$

$$y=\frac{(t-2)(r+t-1)-\sqrt{2(r+t-1)^2+1}}{r+t-1}\quad \text{és}\quad k=\left[\frac{2\pi}{\alpha}\right].$$

A tételeket a 3. §-ban bizonyítjuk. Előtte néhány segédtételt bizonyítunk be. Az 1. ábrán szemléltetjük, hogy az egyes tételek r és t milyen értékeire vonatkoznak. Az értelmezési tartományt a tételnek megfelelő római számmal jelöltük.



1. ábra

2. Segédtételek

2. 1. HAJÓS-FÉLE LEMMA: *Legyen k és K a gömbön két koncentrikus r ill. R $\left(r<R<\frac{\pi}{2}\right)$ sugarú kör. Legyen D olyan sokszög, amely tartalmazza a k kört és csúcsai nincsenek a K kör belsejében. D területe akkor lesz minimális, ha csúcsai K-n vannak és oldalai — legfeljebb egy kivételével — érintik k-t.*

Az ilyen sokszögeket $\mathbf{H}(r;R)$-rel jelöljük. A lemma az euklideszi és a hiperbolikus síkon is érvényes. A bizonyítást illetőleg l. MOLNÁR [3] 225. old.

2. 2. SEGÉDTÉTEL: *Ha* $r_1 < r_2 < R_1 < R_2$, akkor

$$\mathrm{H}(r_1; R_1) < \mathrm{H}(r_2; R_2)$$

Bizonyítás:

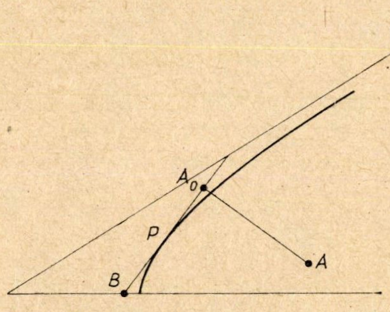
$$\mathrm{H}(r_2; R_2) > \mathrm{H}(r_2; R_2) \cap K_1 > \mathrm{H}(r_2; R_1),$$

ahol K_1 az R_1 sugarú kör. **2.1**-ből viszont következik, hogy

$$\mathrm{H}(r_2; R_1) > \mathrm{H}(r_1; R_1).$$

2. 3. SEGÉDTÉTEL: *Legyen egy hiperbola szimmetriatengelyei által határolt egyik síknegyedben elhelyezkedő „negyed" hiperbola h, továbbá A a síknegyed egy rögzített pontja. Ha a P pont végigfut h-n, akkor az AP távolság egy bizonyos ideig monoton fogy, majd monoton nő.*

Bizonyítás: Tekintsük h tetszőleges P pontját és húzzuk meg P-ben a hiperbola e érintőjét. Az érintő B-ben metszi a szimmetriatengelyt (2. ábra). Az A pont merőle-



2. ábra

ges vetülete e-re legyen A_0. (BPA_0) pontelrendezés esetén h-nak a PAA_0 szögtartományba eső Q pontjaira $AP > AQ$. (BA_0P) elrendezés esetén h-nak az A_0AP szögtartományba eső Q pontjaira $AP > AQ$. Ezért felhasználva az érintő és a szimmetria tengely által bezárt szög monotonitását, **2. 3.** nyilvánvaló.

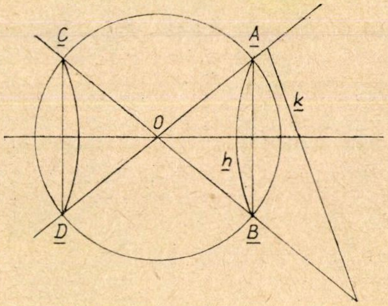
2. 4. SEGÉDTÉTEL: *Ha két másodrendű felület áthatásgörbéjét egy síkra vetítve kettős vetületet kapunk, akkor a vetület kúpszelet.*

A bizonyítást illetőleg l. KÁRTESZI [2].

2. 5. SEGÉDTÉTEL: *Vegyük az O középpontú gömbnek és az O csúcspontú ferde körkúpnak azt a szimmetriasíkját, amely a kúp körmetszeteinek is szimmetriasíkja. Ha a kúp és a gömb áthatását merőlegesen vetítjük a szimmetriasíkjukra, akkor a vetületi görbe hiperbolaív.*

Bizonyítás: Az áthatásgörbe O-középpontú centrálszimmetriájából és **2. 4.**-ből következik, hogy az áthatásgörbének a szimmetriasíkra való merőleges vetülete ellipszis vagy hiperbola lehet. Legyen a 3. ábrán a szimmetriasík a rajz síkja, k a ferde körkúp egy köre (vetületben egyenes), a kúp kontúr alkotóinak és a gömb kontúr körének metszéspontja A és C, ill. B és D. Állítsunk a szimmetriasíkra merőleges, AB-t tartalmazó síkot. A sík a kúpot olyan ellipszisben metszi, melynek egyik tengelye AB. Elég bebizonyítani, hogy AB az ellipszis kistengelye, ebből a segédtétel helyessége következik.

Tekintsük azt a $\mathbf{G}^*$ gömböt, amelynek középpontja a szimmetriasíkban van és érinti a nagytengely végpontjaihoz tartozó alkotókat. Legyenek az érintési pontok U és V. Ezekben a pontokban a kúp és a $\mathbf{G}^*$ gömb érintősíkjai egybeesnek, így át-



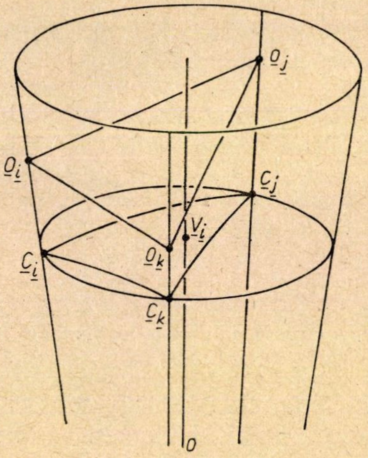
3. *ábra*

hatásuk szétesik két kúpszeletre, amely $\mathbf{G}^*$ gömb volta miatt kör és a körök síkja illeszkedik az UV egyenesre (l. KÁRTESZI [2]). Ismert, hogy egy ferde körkúpnak két különböző állású körmetsző síkja van. Ha AB az ellipszis nagytengelye, akkor UV párhuzamos a k kör síkjával, ami nyilván lehetetlen.

2. 6. SEGÉDTÉTEL: *Legyen* $T_\varrho^{\varrho+\tau}$*-ban* O_i, O_j, O_k *három olyan pont, amelyeknek egymástól való távolsága nem kisebb 2-nél. Vetítsük a pontokat O-ból* $\mathbf{G}(\varrho)$*-ra, a vetületi pontokat jelöljük* C_i-, C_j-, C_k*-val. A* $C_i, C_j C_k$ *háromszög köré írt kör sugara akkor minimális, ha* $O_iO_j = O_jO_k = O_kO_i = 2$.

Bizonyítás: A segédtétel bizonyítását több lépésben végezzük. Legyen a szférikus háromszög köré írt kör középpontja V, sugara R.

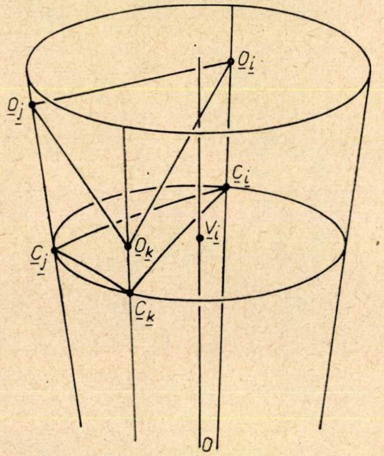
a) Legyen $O_jO_iO_k \sphericalangle \geqq 60°$, továbbá V a $C_iC_jC_k$ háromszögnek vagy belső pontja, vagy ha külső pontja, akkor $\max(C_iC_j;\, C_jC_k;\, C_kC_i) = C_jC_k$ (4a ábra).



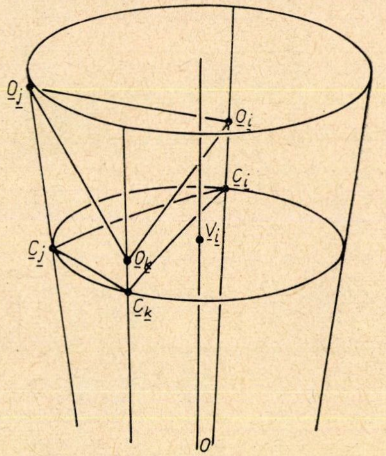
4a *ábra*

Mozgassuk az O_j és az O_k pontot az O_iO_j ill. O_iO_k egyenesen O_i felé. (Ha pl. O_iO_k döfi a $\mathbf{G}(\varrho)$ gömbfelületet, akkor a döféspont után $\mathbf{G}(\varrho)$ és az O_iOO_k sík metszésvonalán mozgatunk.) Ezáltal két esethez jutunk: 1. $O_iO_j=O_iO_k=2$ és V-nek a $C_iC_jC_k$ háromszöghöz viszonyított helyzete nem változik. 2. V a C_iC_j és C_iC_k oldalak egyikén van, pl. C_iC_k-n és $O_iO_k=2$. Nyilván mindkét esetben a háromszög köré írt kör sugara csökkent. Forgassuk O_j-t az OO_i tengely körül úgy, hogy az O_jO_k távolság csökkenjen. Ekkor nyilván R csökken. A forgatással elérhetjük, hogy az $O_iO_jO_k$ háromszög vagy szabályos lesz és V helyzete változatlan, vagy a később tárgyalandó c. esethez jutunk.

b) Legyen $O_jO_iO_k\sphericalangle\geqq 60°$, V a háromszög nem belső pontja $\max(C_iC_j;\, C_jC_k;\, C_kC_i)=C_iC_k$ (4b ábra). Ha mozgatjuk O_k-t az O_iO_k egyenes O_i felé, akkor R csökken és vagy az előbb tárgyalt a) esethez, vagy a később tárgyalandó *c)* esethez jutunk.



4b ábra



4c ábra

c) Legyen $O_iO_k=2.$, V a háromszög nem belső pontja és $\max(C_iC_j;\, C_jC_k;\, C_kC_i)=C_iC_k$ (4c ábra). A feltételekből következik, hogy vagy $OO_j>\max(OO_i;\, OO_k)$, vagy $OO_j<\min(OO_i;\, OO_j)$. Ha $OO_j>\max(OO_i;\, OO_k)$, akkor O_j-t az OO_j egyenesen O felé mozgatva, az O_iO_j és az O_jO_k oldalak közül az egyik hossza 2 lesz és $OO_j>\max(OO_i;\, OO_k)$. Legyen $O_iO_j=2$. Mozgassuk O_j-t a $C_iC_kC_j$ háromszög köré írt kör és az O pont által meghatározott forgáskúpon úgy, hogy $O_iO_j=2$ maradjon és az OO_j távolság csökkenjen. Így az $O_iO_jO_k$ háromszög szabályos lesz és R nem változik. Hasonlóan járhatunk el az $OO_j<\min(OO_i;\, OO_k)$ esetben is. Ezzel a **2. 6.** lemmát bebizonyítottuk.

2. 7. SEGÉDTÉTEL: *Legyen* $\mathbf{T}_\varrho^{\varrho+\tau}$*-ban* $O_iO_j=O_jO_k=O_kO_i=2$, *ezeknek* O*-ból* $\mathbf{G}(\varrho)$*-ra való vetülete* C_i, C_j, C_k. *A* $C_iC_jC_k$ *háromszög köré írt kör sugara csak akkor lehet minimális, ha az* O_i, O_j, O_k *pontok közül legalább egy* $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$*-n van.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az O_i, O_j és O_k pontok közül egyik sincs $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$-n. Legyen $\max(C_iC_j;\, C_jC_k;\, C_kC_i)=C_iC_j$. Toljuk el párhuzamosan az $O_iO_jO_k$ háromszöget az OO_k irányban úgy, hogy valamelyik csúcs illeszkedjen $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$-ra.

Nyilvánvaló, hogy a $C_iC_jC_k$ háromszög köré írt kör sugara csökkent, így nem lehet minimális.

2. 8. SEGÉDTÉTEL: *Legyen*

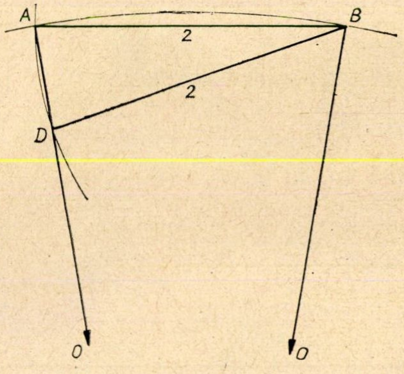
$$\tau(\varrho+\tau) \leqq 4, \tag{6}$$

továbbá $\mathbf{T}_\varrho^{\varrho+\tau}$*-ban* $O_iO_k=2$. *Az* O_iO_k*-nak O-ból* $\mathbf{G}(\varrho)$*-ra való* C_iC_k *vetülete minimális, ha mindkét pont* $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$*-n van. Ha* (6)*-ban az egyenlőség érvényes, akkor minimum realizálható úgy is, hogy egyik pont a* $\mathbf{G}(\varrho)$*-n és a másik* $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$*-n van.*

Bizonyítás: Legyen A és B $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$-n, D az OA szakaszon úgy, hogy $AB=BD=2$ (5. ábra). Az ABO és az ADB háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$AD = \frac{4}{\varrho+\tau}.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy ha $\tau \leqq AD$, akkor **2. 8.** fennáll.



5. ábra

2. 9. SEGÉDTÉTEL: *Legyen* $\mathbf{T}_\varrho^{\varrho+\tau}$*-ban* $O_iO_j=O_jO_k=O_kO_i=2$, *ezeknek O-ból* $\mathbf{G}(\varrho)$*-ra való vetülete* C_i, C_j, C_k, *továbbá legyen*

$$\varrho^* = \sqrt{\varrho^2+\varrho\tau+4} \tag{7}$$

Tegyük fel még, hogy O_i $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$*-n és* O_j $\mathbf{G}(\varrho)$*-n van. Ha* O_k $\mathbf{T}_\varrho^{\varrho^*}$*-ban van, akkor* $C_iC_jC_k$ *háromszög köré írt kör sugara nem lehet minimális.*

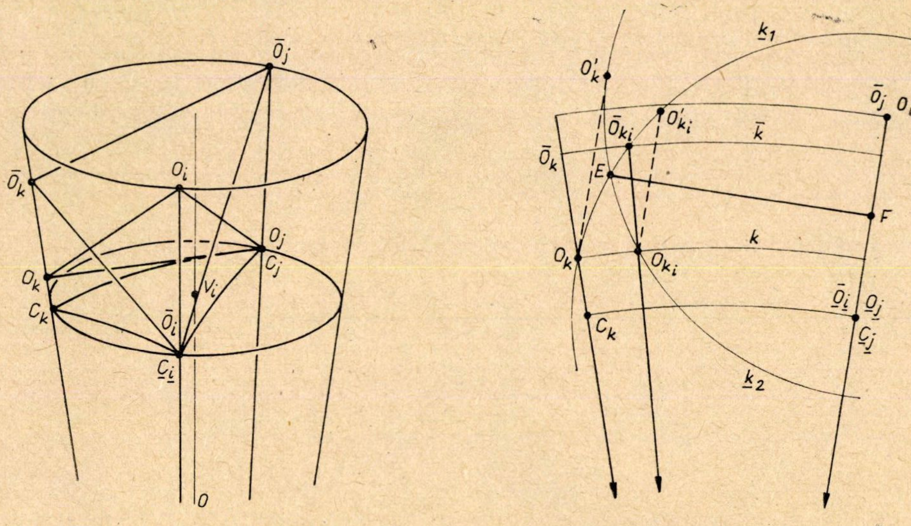
Bizonyítás: A (7)-ben bevezetett ϱ^* geometriailag azt fejezi ki, hogy ha O_k^* olyan pont, amelyre $O_iO_k^*=O_jO_k^*=2$ és $OO_k^*=\varrho^*$ fennáll, akkor a $C_iC_jC_k^*$ háromszög egyenlőszárú ($C_iC_k^*=C_jC_k^*$).

Tegyük fel, hogy O_k $\mathbf{T}_\varrho^{\varrho^*}$-ban van. Ebből következik, hogy a $C_iC_jC_k$ háromszögre érvényesek a

$$C_iC_j \leqq C_iC_k < C_jC_k \tag{8}$$

egyenlőtlenségek. Vegyük fel az $\bar{O}_i$, $\bar{O}_j$, $\bar{O}_k$ pontokat a következő feltételek mellett.

Legyen $\bar{O}_i$ az OO_i félegyenesnek O-tól ϱ távolságra levő pontja, $\bar{O}_j$ az OO_j félegyenesnek O-tól $\varrho+\tau$ távolságra levő pontja és $\bar{O}_k$ az OO_k félegyenesnek az a pontja, amelyre vagy az teljesül, hogy $\bar{O}_k$ $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$-n van és $\bar{O}_i\bar{O}_k>2$, vagy $\bar{O}_i\bar{O}_j=2$ (6.a ábra). Az ilyen feltételeket kielégítő $\bar{O}_k$ pont nyilván létezik. Elég bebizonyítani, $O_jO_k>2$. Ugyanis (8) miatt a **2. 6.** segédtételben használt feltételek teljesülnek, továbbá ha $\bar{O}_j\bar{O}_k>2$, akkor a vetületi háromszög köré írt kör sugara csökkenthető (l. **2. 6.**b), amit bizonyítani akartunk.



6. ábra

Rátérünk annak bizonyítására, hogy $\bar{O}_j\bar{O}_k>2$. Ha $\bar{O}_k$ $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$-n van, akkor (8) miatt ez nyilvánvaló. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\bar{O}_i\bar{O}_k=2$ és $\varrho^* < O\bar{O}_k < \varrho+\tau$. Egyesítsük az O_kOO_i és az O_kOO_j síkokat a síkokban levő pontokkal együtt a 6b ábra szerint, azaz OO_i és OO_j félegyenesek egybeesenek és a 6a ábrán jelölt pontok az OO_i félegyenes egyik oldalán vannak. Az O_kOO_i síkban levő O_k, $\bar{O}_k$, és C_k pontokat O_{ki}, $\bar{O}_{ki}$ és C_{ki}-vel jelöljük. Legyen az O_j középpontú 2 sugarú kör k_1, az O_i középpontú 2 sugarú kör k_2, továbbá az O középpontú OO_k sugarú kör k és az O középpontú $O\bar{O}_k$ sugarú kör $\bar{k}$. Legyen k_1 és k_2 metszéspontja E, O_iO_j felezéspontja F. Tükrözzük az O_k és az O_{ki} pontot az EF egyenesre. A tükörképeket jelöljük O'_k- és O'_{ki}-vel. Nyilvánvaló, hogy O_k és O_{ki} k-n, $\bar{O}_k$ és $\bar{O}_{ki}$ $\bar{k}$-n, O_k, $\bar{O}_{ki}$ és O'_{ki} k_1-en, O_{ki} és O'_k k_2-n van. Megmutatjuk, hogy $\bar{O}_k$ a k_2 kör külső pontja, s így $\bar{O}_j\bar{O}_k>2$. Jelöljük $s(A)$-val A-nak az EF egyenestől való távolságát. Nyilván

$$s(O_k)=s(O'_k)\geqq s(O_{ki})=s(O'_{ki})>s(\bar{O}_{ki})>s(\bar{O}_k).$$

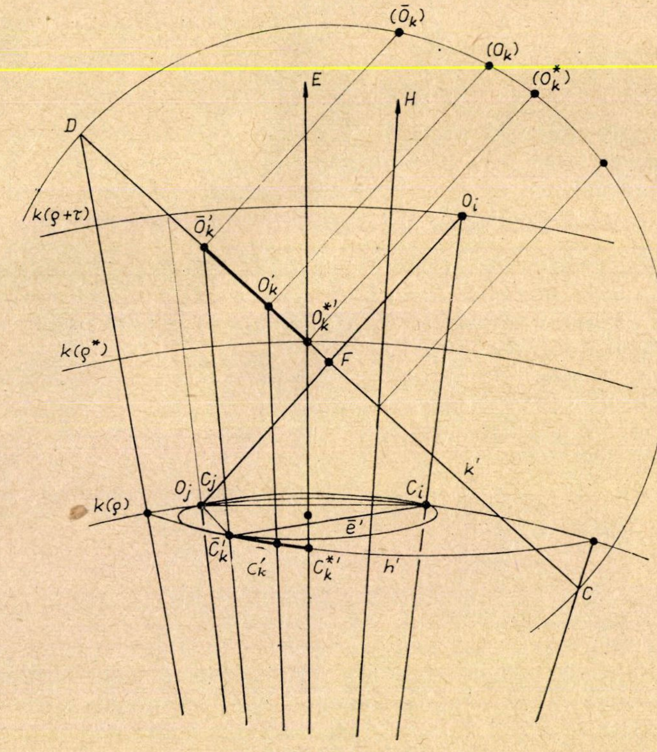
Nyilvánvaló továbbá, hogy az itt szereplő pontok közül egy sincs az $O_kO'_k$ egyenes által határolt, $\bar{O}_k$-t tartalmazó félsíkban. Így $\bar{O}_k$ a k_2 kör külső pontja, amit bizonyítani akartunk.

2. 10. SEGÉDTÉTEL: *Legyen O_i és $\bar{O}_k$ $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$-n, O_j $\mathbf{G}(\varrho)$-n és O_k $\mathbf{T}_\varrho^{\varrho+\tau}$-ban úgy, hogy az $O_iO_j=O_jO_k=O_kO_i=O_i\bar{O}_k=O_j\bar{O}_k=2$ egyenlőségek fennálljanak. Ve-*

títsük a pontokat O-ból $\mathbf{G}(\varrho)$*-ra és a vetületeket jelöljük* C_i, C_j, C_k, $\bar{C}_k$*-val. Abból, hogy* $\bar{O}_k$*-t* O_iO_j *körül tetszőleges kis szöggel* $T_\varrho^{\varrho+\tau}$*-ba forgatva a* $C_iC_j\bar{C}_k$ *vetületi háromszög köré írt kör sugara növekszik, következik, hogy a* $C_iC_jC_k$ *háromszög köré írt kör sugara akkor minimális, ha* O_k *is* $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$*-n van.*

Bizonyítás: **2. 9.**-ből következik, hogy a $C_iC_jC_k$ háromszög köré írt kör sugara csak akkor lehet minimális, ha O_k $\mathbf{T}_{\varrho^*}^{\varrho+\tau}$-ban van. Nyilván feltehetjük, hogy O_k-t és $\bar{O}_k$-t az O_iOO_j sík nem választja el. Az O_iOO_j sík $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$-t, $\mathbf{G}(\varrho^*)$-t és $\mathbf{G}(\varrho)$-t a $k(\varrho+\tau)$, $k(\varrho^*)$ és $k(\varrho)$ körben metszi (l. a 7. ábrát, ahol a pontoknak az O_iOO_j síkra való merőleges vetületét vesszővel jelöltük). Az O_iO_j felező merőleges síkjára illeszkedő F középpontú $\sqrt{3}$ sugarú k kör $\mathbf{T}_{\varrho^*}^{\varrho+\tau}$-ba eső ívének O_k tetszőleges pontja, $\bar{O}_k$ a körív $\mathbf{G}(\varrho+\tau)$-n levő végpontja és legyen O_k^* a körív $\mathbf{G}(\varrho^*)$-n levő végpontja. O_k^*-nak O-ból $\mathbf{G}(\varrho)$-ra való vetületét C_k^*-gal, a $C_iC_j\bar{C}_k$ és a $C_iC_jC_k$ háromszög köré írt kört $\bar{e}$- ill. e-vel jelöljük. Vetítsük az utóbbi köröket merőlegesen az O_iOO_j síkra, vetület olyan $\bar{e}'$ és e' ellipszis lesz, amelyeknek kistengelyei egy O-ból kiinduló félegyenesre illeszkednek. (A 7. ábrán OE-vel jelöltük.)

Vetítsük a k kört O-ból $\mathbf{G}(\varrho)$-ra, majd az így kapott vetületet merőlegesen az O_iOO_j síkra. Az így kapott görbe **2. 5.** miatt egy h' hiperbolaív, amelynek egyik szimmetria tengelye az OH félegyenesen van. Mivel F az O_iO_j és a CD szakasznak



7. *ábra*

is felezőpontja, ezért az OF félegyenes elválasztja az OH és az OE félegyeneseket. Az előzőekből, következik, hogy C_k' a h' hiperbola $\bar{C}_k' C_k^{*\prime}$ ívén van. Belátható, hogy C_k' a $C_i C_j$ egyenessel határolt, O-t tartalmazó félsíkban van.

Tekintsük az O_k pont két helyzetét. A $C_i C_j C_k$ háromszögek közül amelyiknek nagyobb a köré írt kör sugara, a neki megfelelő ellipszis $C_i C_j/O$ félsíkba eső része tartalmazza a másikat és fordítva. Ezért elég megmutatni, hogy a $\bar{C}_k' C_k^{*\prime}$ hiperbolaív pontjai — $\bar{C}_k'$ kivételével — az $\bar{e}'$ ellipszis külső pontjai.

Vegyük azt a $C_i C_j$ tengelyű ortogonális affinitást, amely a $C_i C_j/O$ félsíkot önmagába, az $\bar{e}'$ ellipszist egy $\bar{e}''$ körbe transzformálja. Belátható, hogy a h'' affin hiperbola $O''H''$ tengelye OE-hez viszonyítva OH-val azonos félsíkban marad. (Az affinképet a 7. ábrán nem rajzoltuk meg.) Mivel a feltétel szerint $\bar{O}_k$-t $O_i O_j$ körül kis szöggel forgatva, a vetületi háromszög köré írt kör sugara növekszik, ezért az elforgatott helyzetnek megfelelő ellipszis $C_i C_j/O$ félsíkba eső része tartalmazza az $\bar{e}'$ ellipszis $C_i C_j/O$ félsíkba eső részét. Így az elforgatott $\bar{O}_k$ pont vetülete $\bar{e}'$-nek, affinképe az $\bar{e}''$ körnek külső pontja. **2. 3.**-ból következik, hogy a $\bar{C}_k'' C_k^{*\prime\prime}$ hiperbolaív pontjai — $\bar{C}_k''$-t nem számítva — az $\bar{e}''$ kör külső pontjai, így a $\bar{C}_k' C_k^{*\prime}$ hiperbolaív pontjai — $\bar{C}_k'$ kivételével — az $\bar{e}'$ ellipszis külső pontjai lesznek. Ezzel **2. 10.**-et bebizonyítottuk.

3. A tételek bizonyítása

Az *1. tétel bizonyítása:* A gömbök középpontjait O-ból $\mathbf{G}(1)$-re vetítjük, s megbecsüljük az így kapott pontrendszer DIRICHLET celláinak területét. A D cellák egy-egy csúcsa valamelyik $C_i C_j C_k$ háromszög köré írt kör középpontja. **2. 1.** és **2. 2.** alapján D alsó becsléséhez a $C_i C_j C_k$ háromszög köré írt kör sugarának minimumát kell meghatározni. **2. 6.**-, **2. 7.**-, **2. 8.**- és (3)-ból következik, hogy a $C_i C_j C_k$ háromszög köré írt kör sugara minimális, ha megfelelő $O_i O_j O_k$ középpontok $\mathbf{G}(r+t-1)$-en vannak és $O_i O_j = O_j O_k = O_k O_i = 2$. Ebből számolással adódik az I. tétel.

A 2. tétel bizonyítása: A (4) egyenlőtlenség (az 1. ábrán a II tartomány) geometriailag azt fejezi ki, hogy ha O_i, O_k $\mathbf{G}(r+t-1)$-en, O_j $\mathbf{G}(r+1)$-en van és $O_i O_j = O_j O_k = O_k O_i = 2$, akkor a megfelelő $C_i C_j C_k$ háromszög köré írt kör középpontja a háromszögnek nem külső pontja.

A (4) egyenlőtlenséget átírhatjuk az

$$(r+1)\{(t-2)^2-2\} \leqq (t-2)\{4-(t-2)^2\}$$

alakba. Látható, hogy $t \leqq 2+\sqrt{2}$ esetén (4) bármely $r>0$-ra fennáll. Ha $2+\sqrt{2} < t < 4$, akkor

$$r+1 \leqq \frac{(t-2)\{4-(t-2)^2\}}{(t-2)^2-2}.$$

Ha $r \to \infty$, akkor $\max t \to 2+\sqrt{2}$.

Mint az 1. tétel bizonyításánál, itt is a D cella területét kell alulról megbecsülni. **2. 1.** és **2. 2.** miatt az O-ból vetítéssel kapott $C_i C_j C_k$ háromszög köré írt kör sugarának minimumát keressük. **2. 6.** és **2. 7.** miatt a sugár minimális, ha $O_i O_j = O_j O_k = O_k O_i = 2$ és legalább egy középpont (pl. O_i) $\mathbf{G}(r+t-1)$-en van. Ha O_j $\mathbf{G}(r+1)$-en van és $\bar{O}_k$ $\mathbf{G}(r+t-1)$-en olyan pont, hogy $O_i\bar{O}_k=O_j\bar{O}_k=2$, akkor (4) miatt $\bar{O}_k$-t O_iO_j körül tetszőleges kis szöggel $\mathbf{T}_{r+1}^{r+t-1}$-be forgatva a $C_iC_j\bar{C}_k$ háromszög köré írt kör sugara növekszik, ezért **2. 9.** és **2. 10.** miatt a $C_iC_jC_k$ háromszög köré írt kör sugara akkor lesz minimális, ha O_k $\mathbf{G}(r+t-1)$-en van.

Hátra van annak belátása, O_j $\mathbf{G}(r+1)$-en van. Tegyük fel, hogy O_j nincs $\mathbf{G}(r+1)$-en. Bebizonyítjuk, hogy a vetületként kapott háromszög köré írt kör sugara nem lehet minimális. Legyen

$$r+t-1 = OO_i \geqq OO_k \geqq OO_j = r'+1 > r+1$$

és

$$t' = r+t-r' < t.$$

Az így bevezetett r' és t'-re a (3)-, vagy (4)-nek megfelelő egyenlőtlenség érvényes.

Ha a (3)-nak megfelelő egyenlőtlenség érvényes, akkor a $C_iC_jC_k$ háromszög köré írt kör sugara minimális, ha az O_i, O_j, O_k középpont $\mathbf{G}(r+t-1)$-en van. Forgassuk O_j-t O_iO_k körül $\mathbf{G}(r+1)$-re, (4) miatt a vetületi háromszög köré írt kör sugara csökken, így nem lehetett minimális.

Ha a (4)-nek megfelelő egyenlőtlenség érvényes, akkor a sugár minimális, ha O_i, O_k $\mathbf{G}(r+t-1)$-en és O_j $\mathbf{G}(r'+1)$-en van. Forgassuk O_j-t O_iO_k körül $\mathbf{G}(r+1)$-re, a megfelelő vetületi háromszög köré írt kör sugara (4) miatt nyilván csökkent, így nem lehetett minimális.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $C_iC_jC_k$ háromszög köré írt kör sugara minimális, ha O_i, O_k $\mathbf{G}(r+t-1)$-en és O_j $\mathbf{G}(r+1)$-en van. Ebből számolással adódik a 2. tétel.

A 3. tétel bizonyítását nem részletezzük, a 2. tétel bizonyításához hasonló. A $C_iC_jC_k$ háromszög köré írt kör sugara minimális, ha O_i, O_k $\mathbf{G}(r+t-1)$-en, O_j $\mathbf{G}(r+y+1)$-en van és $O_iO_j=O_jO_k=O_kO_i=2$. Eltérés annak bizonyításában van, hogy **2. 10.**-et itt is alkalmazhatjuk. Ugyanis, ha O_i, $\bar{O}_k$ $\mathbf{G}(r+t-1)$-en O_j $\mathbf{G}(r+1)$-en van és $O_iO_j=O_j\bar{O}_k=\bar{O}_kO_i=2$, akkor (5) miatt a $C_iC_j\bar{C}_k$ háromszög köré írt kör középpontja a háromszög külső pontja. Így nem nyilvánvaló, hogy $\bar{O}_k$-t kis szöggel $\mathbf{T}_{r+1}^{r+t-1}$-be forgatva, a sugár növekszik. Számolással megmutatható, hogy (5) miatt a sugár növekszik, így alkalmazható **2. 10.** Mivel a kör középpontja a háromszög külső pontja, ezért O_j-t O_iO_k körül $\mathbf{T}_{r+1}^{r+t-1}$-be forgathatjuk úgy, hogy a kör középpontja C_iC_k-n legyen. A sugár nyilván csökken.

MEGJEGYZÉS: Hasonló becslés adható $d(r;\, t)$-re, ha

$$2+\sqrt{2}<t<4 \quad \text{és} \quad r+1>\frac{16-(t-2)^4}{2(t-2)(t^2-4t+2)}.$$

(Az 1. ábrán a IV. tartomány.) Részben a segédtételekből, másrészt számolással megmutatható, hogy a $C_iC_jC_k$ háromszög köré írt kör sugara akkor minimális, ha $O_iO_j=O_jO_k=O_kO_i=2$, O_i $\mathbf{G}(r+t-1)$-en, O_j $\mathbf{G}(r+1)$-en és O_k $\mathbf{T}_{\varrho^*}^{r+t-1}$-ben van. Az OO_k távolság egy ötödfokú egyenlet gyökeként adódna.

IRODALOM

[1] FEJES TÓTH, L.: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum,* Berlin—Heidelberg—Göttingen, 1953.
[2] KÁRTESZI F.: *Ábrázoló geometria,* Tankönyvkiadó, 1957.
[3] MOLNÁR J.: Körelhelyezés állandó görbületű felületeken, *MTA III. Oszt. Közl.* **12** (1962) 223—263.
[4] HANDWIGER, H.: Einlagerung kongruenter Kugeln in eine Kugel, *Elemente der Math.* 7 (5) (1952) 97—103.
[5] HORVÁTH, J. and MOLNÁR, J.: On the density of non-overlapping unit spheres lying in a strip, *Ann. Univ. Sci. Budapestinensis, Sect. Math.* **10** (1967) 193—201.

(Beérkezett: 1969. VI. 15.)

EINE LAGERUNG KONGRUENTER KUGELN IN EINE KUGELSCHALE

von

J. HORVÁTH

Zusammenfassung

In einer Kugelschale von äusseren und inneren Radius $r+t$ bzw. r seien Einheitskugeln eingelagert. Es werden obere Schranken für die Lagerungdichte unter den Bedingungen $r+t \geqq 1+\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $2 \leqq t < 4$ angegeben.

LEKÉPEZÉSEK ÉS LEKÉPEZÉS FÉLCSOPORTOK, II*

Írta: DÉNES JÓZSEF

Turán Pál akadémikus 60. születésnapjára

3. C és P tulajdonságú félcsoportok

A szerző P tulajdonságúnak nevezett egy G véges csoportot akkor, ha G összes elemei tényezőként pontosan egyszer tartalmazó szorzatként, G kommutátor részcsoportjának, illetve egy kommutátor részcsoport szerinti mellékosztályának minden eleme előállítható.

Egy G csoportot C tulajdonságúnak nevezünk akkor, ha a kommutátor részcsoportjának minden eleme kommutátor.

A C és P tulajdonságú csoportokra vonatkozó eredményeit a szerző [7], [8] dolgozatokban ismertette.

Míg a C tulajdonságú csoportokat több szerző vizsgálta, a P tulajdonságú csoportokkal a jelen dolgozat szerzőjén kívül csak A. RHEMTULLA foglalkozott (l. [36]), aki bebizonyította pl. azt a meglepő tételt, hogy minden páratlan rendű csoport C tulajdonságú.

A félcsoportokra értelmezett kommutátor fogalom segítségével a csoportokhoz hasonló módon definiálhatunk C tulajdonságú félcsoportot.

A P tulajdonság értelmezéséhez szükségünk lesz a következő tételre:

30. TÉTEL. *Egy S félcsoport tetszőleges olyan eleme, amely S összes elemét pontosan egyszer tartalmazó szorzatként előállítható, S minimális ideáljában van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S minimális ideálja I (azt, hogy S-nek csak egyetlen minimális ideálja van biztosítja ZARECKIJ tétele, lásd [43]). Mivel a tekintett szorzat S minden elemét tartalmazza, így nyilván I elemeit is tartalmazza, vagyis S elemeit pontosan egyszer tartalmazó szorzatként előálló elemek I-ben vannak.

Definíció. S akkor P tulajdonságú, ha $I \subset S$ minden eleme előállítható S összes elemeit pontosan egyszer tartalmazó szorzatként.

31. TÉTEL. *F_n P tulajdonságú.*

Bizonyítás. A 6. tételből következik, hogy F_n minimális ideálja $I(n, 1)$, vagyis egy defektű leképzésekből álló ideál. Felhasználva $I_{(n,1)}$ elemeinek bal-annulátor tulajdonságát adódik, hogy ha π_{n^n} jelöl egy olyan szorzatot, amely F_n minden elemét pontosan egyszer tartalmazza, és annak utolsó tényezője $i \in I_{(n,1)}$, akkor $\pi_{n^n} = i$ következésképpen F_n P tulajdonságú.

* Jelen közlemény második része az *MTA III. Osztály Közleményei* 19 (1969) (3—4) 247—267 oldalain megjelent cikknek. Ennek megfelelően a fejezetek, tételek, képletek számozása folytatólagos.

32. TÉTEL. *Ha egy S félcsoportnak van legalább egy bal-annulátora, akkor P tulajdonságú.*

Bizonyítás. Ha S-nek van legalább egy bal-annulátora, akkor minimális ideálja az összes bal-annulátorból áll, és ezért alkalmazható a 31. tétel bizonyításának követett gondolatmenete.

Definíció. Egy S jelcsoport reguláris ábrázolásában lévő elemekből álló halmazt, amelyeknek főpermutációi azonos elem halmazon vannak értelmezve S faktorának nevezzük.

33. TÉTEL. *Egy S félcsoport F faktorában levő maximális részcsoportok izomorfak.*

Bizonyítás. Minden idempotens elemhez pontosan egy maximális részcsoport tartozik, (lásd 11. tétel 1. korrolárium). Jelölje $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ az F faktorban levő idempotens elemeket, így F-ben k maximális részcsoport van, ezeket jelöljük G_1, $G_2, \ldots, G_k$-val és $\sigma_1, \in G_1$, $\sigma_2 \in G_2, \ldots, \sigma_k \in G_k$. A 10. tétel szerint ha $g_j \in G_j$, akkor $h(g_j) \leqq 1$; a tétel állítása miatt $k \geqq 2$, ezért g_j nem lehet permutáció, így $h(g_j)=1$. Vagyis $g_j = f(g_j)\varrho_j$, ahol ϱ_j idempotens leképzés:

$$\sigma_1 g_j = \sigma_1 f(g_j)\varrho_j = \sigma_1 f(g_j)$$

$$\sigma_2 g_j = \sigma_2 f(g_j)\varrho_j = \sigma_2 f(g_j)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\sigma_k g_j = \sigma_k f(g_j)\varrho_j = \sigma_k f(g_j).$$

Azonosságok miatt legalább k olyan különböző leképzés van F-ben, amelynek a főpermutációja $f(\sigma_j)$ és eleme az egyik maximális részcsoportnak. Könnyen belátható, hogy pontosan k ilyen leképezés van F-ben. Tegyük fel ugyanis állításunkkal ellentétben, hogy $k+1$ lenne, mivel a 10. tétel szerint egy részcsoportban sem lehet különböző elem azonos főpermutációval, így F-ben $k+1$ idempotens elemnek kellene lenni, ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy F idempotensei a σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_k$ elemek. A 11. tétel szerint egy leképezés-csoport elemeinek főpermutációi a csoportot izomorfiáig egyértelműen meghatározzák, és az előzőekből következik, hogy a $G_1, G_2, \ldots, G_k$ csoportokhoz tartozó főpermutációk halmaza azonos, így $G_1 \cong G_2 \cong \ldots \cong G_k$.

KOROLLÁRIUM. *A T leképezés félcsoportban σ_1 és σ_2 idempotenshez tartozó maximális részcsoportok izomorfak, ha $f(\sigma_1)=f(\sigma_2)$ vagy másképpen $T\sigma_1 = T\sigma_2$.*

34. TÉTEL. *S félcsoport F faktorában levő tetszőleges $\alpha(h(\alpha)\geqq 2)$ elem esetén létezik olyan $\beta(h(\beta)=1)$, hogy $f(\alpha)=f(\beta)$.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma \in F$ idempotens, vagyis $f(\sigma\alpha)=f(\alpha)$. Mivel $f(\sigma)$ az egységpermutáció a defekt számára vonatkozó 1. tétel miatt $h(\sigma\alpha)=1$. Tehát $\sigma\alpha=\beta$ a kívánt feltételnek eleget tesz.

35. TÉTEL. *Ha S félcsoport F faktora $G_1, G_2, \ldots, G_r$ maximális részcsoportjainak egyesítéseként előállítható, akkor kommutátor részfélcsoportja $K, C_1, C_2, \ldots, C_r$ kommutátor részfélcsoportjainak egyesítése, vagyis $K = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r$.*

Bizonyítás. Először annak belátása szüksége, hogy F félcsoport. Tegyük fel, hogy $\alpha, \beta \in F$ akkor $\alpha\beta = f(\alpha)\alpha^* f(\beta)\beta^* = f(\alpha)\alpha^* f(\beta) = \gamma$ és $\gamma \in F$. Legyen $\alpha \in K$, ekkor a 33. tétel és a 34. tétel korolláriuma értelmében

$$f(\alpha) = f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \ldots = f(\alpha_r) \quad \text{ahol} \quad \alpha_1 \in C_1, \alpha_2 \in C_2, \ldots, \alpha_r \in C_r.$$

A 33. tétel szerint $G_1, G_2, \ldots, G_r$-hez tartozó főpermutációk halmaza megegyezik, így hasonló állítás igaz $C_1, C_2, \ldots, C_r$-re is, amivel a $K = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r$ állítást igazoltuk.

KOROLLÁRIUM. *Ha egy félcsoport faktora csoportok egyesítéseként előállítható, akkor maga részfélcsoport.*

36. TÉTEL. *Ha S félcsoport F faktora $G_1, G_2, \ldots, G_r$ maximális részcsoportjainak egyesítéseként előállítható, akkor kommutátor részfélcsoportja K, normálosztója F-nek.*

Bizonyítás. A 35. tétel Korolláriuma biztosítja, hogy F részfélcsoport. Ha C_i jelöli G_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ maximális részcsoport kommutátor részcsoportját, akkor a 35. tétel szerint $K = C_1 \cup C_2 \cup, \ldots, \cup C_r$. Ekkor tetszőleges $\alpha \in F$ esetén $\alpha C_i \alpha^{-1} = = C_j$. Mivel C_i G_i-nek normálosztója, így tetszőleges β C_i-beli elemre létezik olyan K-beli elem, amelynek főpermutációja $f(\alpha\beta\alpha^{-1})$. Mivel $h(\beta) = 1$, ezért $h(\alpha\beta\alpha^{-1}) = 1$ is teljesül, és így alkalmazhatjuk a 35. tétel korolláriumát, és adódik, hogy $\alpha\beta\alpha^{-1} \in K$.

KOROLLÁRIUM. *Ha S félcsoport csak egyetlen faktorból áll, akkor kommutátor részfélcsoportja normálosztó.*

37. TÉTEL. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy S leképezés félcsoport elemidegen csoportok egyesítéseként legyen előállítható az, hogy tetszőleges F faktora is elemidegen csoportok egyesítéseként legyen előállítható.*

Bizonyítás. A feltétel elégséges, mivel S előállítható faktorainak egyesítéseként. A szükségesség belátása végett tegyük fel, hogy létezik A-nak olyan F faktora, amely nem állítható elő elemidegen csoportok egyesítéseként. Ekkor S sem állítható elő a jelzett módon, mivel egy részcsoport csak egyetlen faktorhoz tartozhat.

MEGJEGYZÉS. S. SCHWARZ (lásd [37], [38]) bebizonyította, hogy ha S periodikus kommutatív félcsoport és E idempotenseinek halmaza, akkor minden $e \in E$ esetén megadható $x \in S$ elemből álló S_e részfélcsoport, amelyekre létezik olyan n pozitív egész szám, hogy $x^n = e$. Ha $e, f \in E$ és $e \neq f$, akkor S_e és S_e diszjunktak, és S_e e elemén kívül más idempotens elemet nem tartalmaz. Továbbá $S_e S_f \subseteq S_{ef}$ minden $ef \in E$ esetén. Egy félcsoport elemidegen részfélcsoportokra való egyértelmű felbontásával foglalkozik A. M. KAUFMAN dolgozata is (lásd [24]).

38. TÉTEL. *Annak szükséges feltétele, hogy S egyetlen faktorból álló félcsoport P tulajdonságú legyen az, hogy G_i maximális részcsoportjának kommutátor részcsoportja önmaga legyen.*

Bizonyítás. Mivel S egyetlen faktorból áll, ezért maximális részcsoportjai izomorfak (lásd 33. tétel). Feltételünk szerint S tetszőleges maximális részcsoportjára fennáll, hogy megegyezik saját kommutátor részcsoportjával. S-ben levő leképezések különböző főpermutációinak halmaza egy R csoportot alkot, és ez a csoport izomorf S maximális részcsoportjával (az állítás könnyen következik a 34. tételből). Ezért az összes elemet pontosan egyszer tényezőként tartalmazó szorzatként előállítható leképzések főpermutációi R ugyanazon, kommutátor részcsoport szerinti mellékosztályhoz tartoznak. Tehát ha R-nek van valódi kommutátor részcsoportja, akkor azon $\alpha \in S$ elemek, amelyek S összes elemeit pontosan egyszer tartalmazó szorzatként előállíthatók, nem merítik ki R összes elemét. Mivel S minimális ideálja éppen a maximális részcsoportjainak egyesítése, ezért a kívánt tulajdonságú α elemek nem merítik ki S minimális ideálját, vagyis S nem lehet P tulajdonságú.

1. KOROLLÁRIUM. *α által generált ciklikus félcsoport, amely nem csoport akkor és csak akkor P tulajdonságú, ha maximális részcsoportjának rendje egy.*

2. KOROLLÁRIUM. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy S egyetlen faktorból álló kommutatív félcsoport, amely nem csoport, P tulajdonságú legyen az, hogy maximális részcsoportjai egyetlen elemből álljanak.*

39. TÉTEL. *Ha S egyetlen faktorból álló leképezés félcsoport és egyik maximális G_{ij} részcsoportja P tulajdonságú és megegyezik saját kommutátor részcsoportjával akkor S is P tulajdonságú.*

Bizonyítás. Ha G_{ij} P tulajdonságú, akkor a 33. tételben bizonyított izomorfia miatt S bármelyik maximális részcsoportja P tulajdonságú. Másrészt S minimális ideálja maximális részcsoportjainak egyesítése azért annak bizonyítása marad hátra, hogy ha $\beta \in S$ és $h(\beta) \leqq 1$, akkor β előállítható S elemeit pontosan egyszer tartalmazó szorzatként. Tekintsük azon π_j elemeket, amelyek olyan szorzatként állíthatók elő, amelyek első $m = 0(G_{ij})$ tényezője G_{ij}-beli elemekből áll, vagyis $\pi_j = \pi_j' \pi_j''$ ahol π_j' G_{ij} elemeit pontosan egyszer tartalmazó szorzat így G_{ij} P tulajdonsága miatt G_{ij} összes eleme lehet π_j' alakú, ha π_j'' rögzített és π_j' végigfut G_{ij} összes elemein, akkor $h(\pi_j) \leqq 1$ és $f(\pi_j)$ végigfut G_{ij} elemeinek főpermutációin, mivel G_{ij} minimális bal-ideál $\pi_j \in G_{ij}$, ezért π_j is G_{ij} összes elemein fut végig. Hasonló módon előállítható S tetszőleges maximális részcsoportjának bármely eleme, amivel a tétel állítását igazoltuk.

A szerző vizsgálta a P és C tulajdonság kapcsolatát csoportok esetében lásd [7], [8]. Egyik általános tétel a következőképpen fogalmazható:

40. TÉTEL. *Legyen G n-edrendű C tulajdonságú véges csoport és G másodrendű elemeinek száma legfeljebb $\frac{n}{2}$. Akkor G P tulajdonságú.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a másodrendű elemek száma kisebb, mint $\frac{n}{2}$. Ekkor legyen $b = a_1 . a_2 . \ldots . a_n$, ahol a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ G elemét jelöli. Mivel a K kommutátor részcsoport szerinti faktor-csoport kommutatív, az a_i elemek sorrendjétől függetlenül b elem ugyanazon K-szerinti B mellékosztályhoz tartozik. Jelölje q G összes másodrendű elemeinek, mint tényezőknek egy tetszőleges sorrendben vett szorzatát akkor $q \in B$. Tekintve, hogy G összes elemeit pontosan egyszer tényezőként tartalmazó szorzat pl. $q \prod_{s=l}^{n} a_s a_s^{-1}$ alakú ahol $0(a_s) > 2$, így G C tulajdonságából következik, hogy B tetszőleges eleme $q a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1} \prod_{l=1}^{n} a_l a_l^{-1}$ alakú, ahol $l \neq i, j$, $0(a_l) > 2$.

Legyen S a G-nek legalább $\left[\frac{n}{2}+1\right]$ elemet tartalmazó tetszőleges részhalmaza és legyen C_i megoldása a $b_i x=a$ egyenletnek $(a, b_i \in S)$. Ha $b_i \neq b_j$, akkor $C_i \neq C_j$. Ebből következik, hogy $\left[\frac{n}{2}+1\right]$ lehetséges b_i elemhez $\left[\frac{n}{2}+1\right]$ lehetséges c_i tartozik. Tekintve, hogy a c_i megoldások mind különbözők, a c_i elemek közül legalább egy S-nek eleme. Ebből következik, hogy G tetszőleges eleme két S-beli elem szorzataként előállítható. Most tegyük fel, hogy S-ben 2-től különböző rendű elemei szerepelnek, ekkor feltételeink szerint S-nek legalább $\left[\frac{n}{2}+1\right]$ eleme van.

Vizsgáljuk meg, milyen esetekben nem jelenti G P tulajdonságának igazolását, hogy B minden eleme $qa_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1} \prod_{l=i}^{n} a_l a_l^{-1}$ $\left(l \neq i, j,\ 0(a_l)>2\right)$ alakban előállítható. Ez nyilván akkor áll fenn, ha a_i, a_j elemek közül legalább az egyik másodrendű. Tegyük fel, hogy $0(a_i)=2$ és $0(a_j)>2$, akkor létezik olyan két $a_{i'}, a_{i''} \in S$, hogy $a_i = a_{i'} a_{i''} = a_{i''}^{-1} a_i^{-1}$, következésképpen

$$qa_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i, j \\ 0(a_l)>2}}^{n} a_l a_l^{-1} = qa_{i'} a_{i''} a_j a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_j^{-1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i', i'', j \\ 0(a_l)>2}}^{n} a_l a_l^{-1}.$$

Az $a_{i''}=a_j$ esettől eltekinthetünk, mivel ekkor

$$a_{i'} a_{i''} a_j a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_j^{-1} = a_{i'} a_{i''} a_{i'}^{-1} a_j^{-1} = a_{i'} a_{i''} a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1}.$$

Ha $a_{i'}=a_j$, akkor $a_{i'} a_{i''} a_j a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_j^{-1} = a_{i'} a_{i''} a_j a_{i''}^{-1} a_j^{-1} a_{i'}^{-1}$

kommutátor elem, amely minden tényezője kettőnél magasabb rendű.

Ha $a_{i''}=a_j^{-1}$, akkor $a_{i'} a_{i''} a_j a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_j^{-1} = a_{i'} a_j a_{i'}^{-1} a_j^{-1}$.

Ha $a_{i'}=a_j^{-1}$, akkor $a_{i'} a_{i''} a_j a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_j^{-1} = a_j^{-1} a_{i''} a_j a_{i''}^{-1}$.

A többi esetben

$$a_{i'}=a_{i''}=a_j,\ a_{i'}^{-1}=a_{i''}=a_j,\ a_{i'}^{-1}=a_{i''}^{-1}=a_j,\ a_i=a_{i''}^{-1}=a_j,$$

az előzőekben vizsgáltak speciális eseteiként tekinthetők és így részletes tárgyalásuk mellőzhető.

Nem vizsgáltuk még az $0(a_i)=0(a_j)=2$ esetet. Ebben az esetben létezik $a_{i'}, a_{i''}, a_j^{-1} a_{j''} \in S$ úgy, hogy $a_i=a_{i'} a_{i''}$, $a_j=a_{j'} a_{j''}$. Ha $a_{i'}, a_{i''}, a_{j'}, a_{j''}$ elemei különbözőek, akkor triviális, hogy G C tulajdonságú. Egyenként a következő aleseteket kell vizsgálni:

1.) $a_{i'}=a_{j'}$; 2.) $a_{i'}=a_{j''}$; 3.) $a_{i''}=a_{j'}$; 4.) $a_{i''}=a_{j''}$.

Mivel $a_i=a_{i'} a_{i''}=a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1}$ és feltesszük, hogy $a_{i'}=a_{j'}$, akkor

$$a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{j''} a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{j''}^{-1} a_{j'}^{-1} = a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{j'} a_{j''} a_{i'} a_{i''} a_{j''}^{-1} a_{i'}^{-1} =$$
$$= a_{i''}^{-1} a_{j''} a_{i'} a_{i''} a_{j''}^{-1} a_{j'} a_{i'}^{-1},$$

ami $a_{i''} \neq a_{j''} \neq a_{i'}$ miatt elegendő az állítás bizonyításához. A 2. esetben

$$a_i a_{i''} a_{i'} a_{j''} a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{j''}^{-1} a_{j'}^{-1} = a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{i'} a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{i'}^{-1\prime} a_{j'}^{-1} =$$

$$= a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{i'}^2 a_{i'} a_{i'}^{-1} a_{j'}^{-1},$$

mivel $a_{i'} a_{i''} = a_{j''}^{-1} a_{i'}^{-1}$ miatt $a_{i'}^2 = a_{i''}^{-2}$ fennáll, így

$$a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{i'}^2 a_{i''} a_{i'}^{-1} a_{j'}^{-1} = a_i a_{i''} a_{j'} a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{j'}^{-1}.$$

Állításunk tehát a 2. esetben is igaz.

A 3. esetben $a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{j''} a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{j''}^{-1} a_{j'}^{-1} = a_{i'} a_{j'} a_{j'} a_{j''} a_{j'}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{j''}^{-1} a_{j'}^{-1} =$
$= a_{i'} a_{j''}^{-1} a_{j''}^{-1} a_{j'}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{j''}^{-1} a_{j'}^{-1} = a_{i'} a_{j''} a_{j''} a_{i'}^{-1} a_{j''}^{-1} a_{j'}^{-1}.$

A 4. esetben

$$a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{j''} a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{j'}^{-1} a_{j''}^{-1} = a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{i''} a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{j'}^{-1} a_{i''}^{-1} =$$

$$= a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{i'} a_{i''}^{-2} a_{j'}^{-1} a_{i''}^{-1} = a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{i'} a_{i''}^{-2} a_{i''} a_{j'} = a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{i'} a_{i''}^{-1} a_{j'} =$$

$$= a_{i'} a_{j'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{i'} a_{i''}^{-1} a_{j'} = a_{i'} a_{j'}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{i''} a_{i''}^{-1} a_{j'} = a_{i'} a_{j'}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{j'}.$$

Más alesetek mint az

$$a_{i'} = a_{i''} = a_{j'}; \quad a_{i'} = a_{i''} = a_{j''}; \quad a_{i'}^{-1} = a_{i''}^{-1} = a_{j'}; \quad a_{i'}^{-1} = a_{i''}^{-1} = a_{j''}$$

a tárgyalt esetek speciális eseteként kezelhetők. A bizonyítás további részében feltesszük, hogy G másodrendű elemeinek száma éppen $\frac{n}{2}$. Mivel másodrendű elemek száma tetszőleges csoportban páratlan, ezért $\frac{n}{2}$ páratlan.

Az a feltétel, hogy G C tulajdonságú felesleges, mivel tetszőleges G csoportban, ha másodrendű elemek száma $\frac{n}{2}$ akkor G C tulajdonságú. Az utóbbi állítás bizonyítása megtalálható [8]-ban.

Kimutatjuk, hogy B-ben nincsen olyan másodrendű elem, amely felcserélhető lenne egy kettőnél magasabb rendű elemmel. Tegyük fel, hogy $a_j b_i = b_i a_j$, ahol $a_j, b_i \in G$ és $0(a_j) > 2$, $0(b_j) = 2$. Mivel G-ben a nem másodrendű elemek részcsoportot alkotnak, így $0(a_j b_i) = 2$, ezért $a_j b_i = b_i a_j = b_i a_j^{-1} = a_j^{-1} b_i$. Ebből következne, hogy $a_j = a_j^{-1}$, ami $0(a_j) > 2$ miatt lehetetlen. Jelöljön c, G összes másodrendű elemeit pontosan egyszer tényezőként tartalmazó szorzat, ekkor $0(c) = 2$ és így $0(a_j c) \neq 2$, hasonlóan $0(a_j a_j^{-1}) \neq 2$. Tegyük fel, hogy $a_j c a_j^{-1} = a_k c a_k^{-1}$ úgy, hogy $k \neq j$ és $0(a_j) \neq 2$, $0(a_k) \neq 2$, akkor $c a_j^{-1} a_k = a_j^{-1} a_k c$, mivel $0(a_j^{-1} a_k) \neq 2$ és $0(c) = 2$ ez lehetetlen. Így tetszőleges $b_i \in G$ elem esetén $(0(b_i) = 2)$ létezik olyan $a_j (0(a_j) \neq 2)$ elem, hogy $b_i = a_j c a_j^{-1}$ vagyis $b_i = a_j c a_j^{-1} \prod_{k \neq j} a_k a_k^{-1}$, amivel állításunkat igazoljuk.

Megjegyzés. Nem sikerült a 40. tételnek egy olyan általánosítását bebizonyítani, amely nem tesz kikötést G másodrendű elemeinek számára vonatkozóan. A 40. tételnek a *Wilson*-tétel általánosításával való kapcsolata könnyen kimutatható (lásd [39]).

Mint ismeretes az alábbi, 41. tétel Szuskevicstől származik és a véges félcsoportok elméletének egyik legjelentősebb tétele.

41. TÉTEL. *S félcsoport M magja G_i $(i=1, 2, ..., r)$ elemidegen izomorf csoportok egyesítéseként állítható elő.*

Bizonyítás. A bizonyítást leképezés félcsoportokra fogjuk elvégezni, ez azonban az általánosított *Caley*-tétel érvényessége miatt nem jelent megszorítást. Az 1. tételből következik, hogy M összes eleme k defektű, következésképpen $M_{i_1, i_2 ... i_r}$ idempotens elemei is k defektűek. Vagyis $M=\bigcup_{i=1}^{r} G_i$. Így annak bizonyítása maradt hátra, hogy a G_i csoportok izomorfak. A 33. tétel korolláriuma szerint ha M két i_j, i_l idempotens elemére fennáll az $f(i_j)=f(i_l)$ egyenlőség, akkor az i_j-hez tartozó G_j és az i_l-hez tartozó G_l csoportok izomorfak. Tegyük fel, hogy $f(i_j)\neq f(i_l)$, ekkor létezik olyan $\alpha\in S_n$ permutáció, hogy fennálljon az $f(i_j)=f(\alpha i_j\alpha^{-1})$ egyenlőség. Így $G_j\cong\alpha G_l\alpha^{-1}$, ebből következik, hogy $G_j\cong G_l$.

A következő 42. tétel a 39. tétel egy általánosítása.

42. TÉTEL. *S félcsoport P tulajdonságú, ha M magjában levő G_i maximális részcsoport kommutátor részcsoportja G_i-vel megegyezik és G_i P tulajdonságú.*

Bizonyítás. Ismeretes (lásd pl. [44] I-ből 207. old.) SZUSKEVICS 1928-ban írt [40] cikkének állítása, mely szerint M felírható a következő alakban:

$$\begin{array}{c|cccc} M & L_1 & L_2 & \dots & L_s \\ \hline R_1 & G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1s} \\ R_2 & G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_r & G_{r1} & G_{r2} & \dots & G_{rs} \end{array}$$

ahol L_i $(i=1, 2, ..., s)$ minimális balideálokat R_i $(i=1, 2, ..., r)$ minimális jobb ideálokat jelölnek. G_{ij} $(i=1, 2, ..., r j=1, 2, ..., s)$ pedig maximális részcsoportot jelöl. Az ábrából leolvasható, hogy $L_i=\bigcup_{j=1}^{r} G_{ji}$ $(i=1, 2, ..., s)$ és $R_j=\bigcup_{i=1}^{s} G_{ji}$. Be fogjuk látni, hogy L_i $(i=1, 2, ..., s)$ S félcsoport F_i faktorának pontosan azokból az α elemeiből áll, amelyekre $h(\alpha)\leq 1$. Ezt a halmazt A_i-vel jelöljük. Ha $a\in L_i$ akkor $\{a\}$ csoport, így $a\in H_i$. Tehát annak bizonyítása marad hátra, hogy ha $b\in L_i$, akkor $b\in F_i$. Ez azonban könnyen belátható, mivel $a, b\in L_i$ miatt adódik, hogy $Sa=Sb$ ezért $a, b\in F_i$. Szükségünk lesz a következő állításra is. Ha $l\in S$, akkor $L_il=L_i$. Ez is nyilvánvaló, mert $L_il\subset L_i$ ellentmondana annak, hogy L_i minimális bal-ideál.

Mivel L_i egyetlen faktorból álló félcsoport minden maximális részcsoportja megegyezik saját kommutátor részcsoportjával és P tulajdonságú, ezért alkalmazható a 39. tétel, vagyis elemeit pontosan egyszer tényezőként tartalmazó szorzat alakjában L_i minden eleme előállítható. Jelölje L_i elemeit $a_1, a_2, \cdots$, ezen elemek szorzatát Π_{aj}-vel jelöljük, ha a szorzat a_j-vel egyenlő. Jelölje $\Pi_{S\cup L_i}$ a halmaz elemeit pontosan egyszer tényezőként tartalmazó szorzatot. Be fogjuk látni, hogy $\Pi_{aj}\Pi_{S\cup L_i}$ $(j=1, 2, ..., r)$ alakban L_i tetszőleges eleme előállítható.

Legyen $\Pi_{aj}=g$ és jelölje lg annak a maximális részcsoportnak egységelemét, amely g-t tartalmazza, így $glg=g$ és $lg\Pi_{S\cup L_i}=\Pi_{aj}\Pi_{S\cup L_i}$.

A 39. tétel bizonyításából az is kiderül, hogy g előállítható $L_i\cup lg$ halmaz elemeit pontosan egyszer tényezőként tartalmazó szorzatként is. Vagyis ha $g\in L_i$, akkor

$g = \Pi_{aj}\Pi_{S \cup L_i}$. Hasonló meggondolás alkalmazható S tetszőleges bal-ideáljára. Mivel $M = \cup L_i$, így M összes eleme előállítható a kívánt szorzat alakjában. S tehát P tulajdonságú.

43. TÉTEL. *Ha S leképezés félcsoport maximális defektszámú elemei között nincsen olyan α, hogy $h(\alpha) \leqq 1$, akkor S-nek van S-től különböző kommutátor részfélcsoportja.*

Bizonyítás. Legyen $\beta \in S$ és $D(\beta)$ maximális, ezért $h(\beta) \geqq 2$. Ha β S kommutátor részfélcsoportjához tartozna, akkor előállítható lenne kommutátorok szorzataként. Vagyis olyan szorzat alakjában, amelynek minden tényezőjének defektszáma az 1. tétel és feltételeink értelmében azonos $D(\beta)$-val. Mivel kommutátorokról van szó, ezért a szorzat minden tényezőjével együtt a kvázi-inverze is szerepel. Legyen α az említett szorzat egyik tényezője akkor $D(\alpha) = D(\beta)$ és mivel feltételünk szerint $h(\alpha) > 1$, ezért $D(\alpha^{-1}) < D(\alpha)$ így β nem lehet eleme S kommutátor részfélcsoportjának.

KOROLLÁRIUM. *Az n-edfokú alternáló félcsoport maximális defektszámú elemei között van olyan α leképezés, hogy $h(\alpha) \leqq 1$.*

Bizonyítás. A 8. tétel szerint K_n kommutátor részfélcsoportja önmaga.

44. TÉTEL. *S ciklikus leképezés félcsoport feloldható.*

Bizonyítás. Legyen $\{\alpha\} = S$, ha $h(\alpha) \leqq 1$, akkor S csoport és mivel ciklikus, ezért feloldható. Így tegyük fel, hogy $h(\alpha) > 1$, akkor a 43. tétel szerint S-nek van S-től különböző K_1 kommutátor részfélcsoportja. Az előzőekhez hasonló meggondolással K_1 vagy csoport akkor ciklikus, és így feloldható, vagy félcsoport és akkor van olyan maximális defektszámú β eleme, hogy $h(\beta) > 1$. Mivel S véges, eljutunk a kommutátor lánc K_i tagjához, amely már csoport és ennek kommutátor részcsoportja az egységelem.

KOROLLÁRIUM. *Ha S olyan félcsoport, amely egyetlen G maximális részcsoportot tartalmaz, és G feloldható, akkor S is feloldható.*

45. TÉTEL. *Ha S félcsoport egynél több idempotens elemmel rendelkezik, akkor nem feloldható.*

Bizonyítás. Legyen $e \in S$ idempotens, akkor $ee^{-1}ee^{-1} = e$ miatt eleme S kommutátor részfélcsoportjának. Ha S-nek lenne több idempotens eleme, akkor a kommutátor lánc minden tagja egynél több idempotens elemet tartalmazna, így nem végződhetne egy idempotens elemmel.

KOROLLÁRIUM. *S feloldható félcsoport összes elemeinek főpermutációja azonos halmazon van értelmezve. Vagyis S egyetlen faktorból álló félcsoport.*

46. TÉTEL. *Egy idempotens félcsoport C tulajdonságú.*

Bizonyítás. Egy e idempotens eleme $ee^{-1}ee^{-1} = e^1 = e$ miatt kommutátor.

47. TÉTEL. *Egy S kommutatív leképezés félcsoport K kommutátor részfélcsoportjának tetszőleges eleme főpermutációjában a betűk fixen maradnak.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha, \beta, \gamma \in S$ és $\alpha = \beta\gamma\beta^{-1}\gamma^{-1}$, akkor a kommutativitás miatt $\alpha = \beta\beta^{-1}\gamma\gamma^{-1}$ így α két kívánt tulajdonságú elem $(\beta\beta^{-1}, \gamma\gamma^{-1})$ szorzataként előállítható. Állításunk igazolásához annak bebizonyítása szükséges, hogy egy kommutatív félcsoportban két olyan $\varkappa, \mu$ elemnek, amelynek főpermutációjában minden betű fixen marad,szorzata is ilyen tulajdonságú.

Tegyük fel, hogy $\sigma, \varrho \in S$, $\sigma^2=\sigma$ és $\varrho^2=\varrho$, ekkor $\sigma\varrho=\varrho\sigma$ $\varrho\sigma\varrho\sigma=\varrho^2\sigma^2=\varrho\sigma=\sigma\varrho$, vagyis $\varrho\sigma$ is idempotens. Könnyű látni, hogy a kommutativitás miatt $f(\varrho\sigma)$ elemhalmaza $f(\sigma)$ és $f(\varrho)$ elemhalmazának metszete. S. SCHWARTZ tétele (lásd [37], [38]) szerint, ha S_ϱ illetve S_σ, jelöli S-nek a ϱ, σ idempotensekhez tartozó maximális részfélcsoportját, akkor $S_\varrho S_\sigma \subseteqq S_{\varrho\sigma}$ miatt $f(\varkappa\mu)=f(\sigma\varrho)$.

KOROLLÁRIUM. *Annak szükséges feltétele, hogy egy kommutatív félcsoport minden olyan eleme, amelynek főpermutációjában minden betű fixen marad, eleme legyen a kommutátor részfélcsoportjának az, hogy a legnagyobb defektszámú nem idempotens jelzett alakú elemek száma egynél több legyen.*

MEGJEGYZÉS. A félcsoportok feloldhatóságának fogalmának általánosításaként bevezethető a *gyenge feloldhatóság* fogalma. Egy félcsoport gyengén feloldható, ha a kommutátor lánc kommutatív idempotens félcsoporttal szakad meg.

A 47. tétel alkalmazásával egyszerűen adódik, hogy egy kommutatív félcsoport mindig gyengén feloldható. Ugyancsak triviális, hogy a feloldhatóságból következik a gyenge feloldhatóság.

A továbbiakban néhány félcsoport osztály elem szorzatait fogjuk vizsgálni.

Egy S félcsoport $a_1, a_2, \ldots, a_k$ eleméből álló szorzatot S feletti szónak, ha $w= =a_1a_2 \ldots a_k$, akkor w-t a szó értékének nevezzük. Egy szó részszavának egy tetszőleges egymásutáni betűiből álló szót nevezünk. P. C. BAAYEN, D. VAN EMDE BOAS, D. KRUYSWIJK (lásd [1]) bebizonyították a következő tételeket:

Bármely n betűből álló n-ed rendű csoport feletti szó tartalmaz egy részszót, amelynek értéke a csoport egységeleme.

Bármely n-ed ($n \geqq 2$) rendű csoport felett létezik egy $n-1$ betűből álló szó, amely nem tartalmaz olyan részszót, amelynek értéke a csoport egységeleme.

További eredmények [27]-ben találhatók.

Minden véges félcsoporthoz megadható egy k pozitív egész szám úgy, hogy a félcsoport minden k betűből álló szava tartalmaz egy olyan részszót, amelynek értéke egy idempotens elem.

Ez utóbbi tételnek egy érdekes számelméleti következménye a következő állítás:

Adott n-hez létezik olyan l_n állandó, hogy minden olyan pozitív egész számnak, amelynek l_n-nél több osztója van, legalább egy olyan $d \geqq 2$ osztója van amelyre $d(d-1)$ osztható n-nel.

Definiáljuk az $L(n)$ függvényt a következő módon:

$$L(1)=1, \quad L(2)=2, \quad L(n)=4^{\frac{n}{3}}. \left(\frac{27}{32}\right)^{\frac{n}{3}-\left[\frac{n}{3}\right]} \quad \text{ha} \quad n \geqq 3.$$

$L(n)$-nek a következő tulajdonságai vannak:

a) Ha w egy n-ed rendű S félcsoport feletti $w\,L(n)$ betűből álló szó, akkor w-nek van olyan részszava, amelynek értéke idempotens elem.

b) Adott $n \geqq 2$ esetén létezik olyan n-ed rendű S félcsoport, amely felett meg lehet adni olyan $L(n)-1$ betűből álló szót, amelynek értéke egy idempotens elem.

Bizonyítható, hogy $C.\ 89\,(\sqrt[3]{4})^n < L(n) \leqq (\sqrt[3]{4})^n$,

ha $n \geqq 3$

Ismeretes még, hogy

$$L(n) = 2^{2k}, \quad \text{ha} \quad n = 3k, \quad k \geqq 1$$

$$L(n) = 3 \cdot 2^{2k-1}, \quad \text{ha} \quad n = 3k+1, \quad k \geqq 1$$

$$L(n) = 9 \cdot 2^{2k-2}, \quad \text{ha} \quad n = 3k+2, \quad k \geqq 1$$

és $L(1) = 1$, $L(2) = 2$.

$n \leqq 10$ esetben $L(n)$ értékeit tartalmazza az alábbi táblázat:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L(n)$	1	2	4	6	9	16	24	36	64	96

S félcsoportban értelmezzük $\lambda(S)$-et a következőképpen. Minden $\lambda(S)$ hosszúságú szó tartalmaz idempotens értékű részszót, és van olyan $\lambda(S)-1$ hosszúságú szó, amely nem tartalmaz idempotens értékű részszót. Ekkor

$$\lambda(F_n) = n!$$

A bizonyítás megtalálható [2]-ben. Érdekes megjegyezni, hogy ha G tetszőleges n-ed rendű véges csoport, akkor $\lambda(G) \leqq n$, (lásd pl. [27]). Igaz továbbá az a meglepő eredmény, hogy

$$\lambda(F_n) = \lambda(S_n) = n!$$

Gyakorlati alkalmazások kapcsán felmerült az a kérdés, hogy az S_n-ben levő τ transzpozíciókból álló $n!-1$ tényezőjű $\tau_1\tau_2 \dots \tau_{n!-1}$ szorzat rendelkezhet-e azzal a tulajdonsággal, hogy

$$\tau_1\tau_2 \dots \tau_k \neq \tau_1\tau_2 \dots \tau_l \quad \text{ha} \quad k \neq l$$

$$(k, l \leqq n!-1)?$$

A feltett kérdésre a válasz pozitív, a bizonyítás megtalálható [45]-ben.

Hasonló módon kérdezhetjük, hogy létezik-e olyan F_n-beli transzpozíciókból és szinguláris leképezésekből álló n^n-1 tényezőjű szorzat, amelynek két különböző kezdőszelete nem egyezik meg? A válasz ebben az esetben tagadó, lásd [41].

TÖRÖK ÉVA ugyancsak [41]-ben kimutatta, hogy ha a kívánt módon előállítható leképezések számát T_n jelöli, akkor

$$T_n \leqq n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}.$$

[41]-ben megtalálható annak bizonyítása is, hogy alkalmasan választott szorzat esetén

$$T_n = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

mindig elérhető. Így adódik, hogy $T_n < n!\,e$, vagyis nem sokkal több leképezés állítható elő a kívánt módon, mint permutáció.

4. Számossági eredmények

Jelölje M_n S_n két elemű generátor rendszereinek számát, továbbá K_n F_n három elemű generátor rendszereinek számát.

MEGJEGYZÉS. F_n tetszőleges generátor rendszere legalább három elemű. (Lásd 28. tétel.)

48. TÉTEL.

$$K_n = n!\binom{n}{2} M_n.$$

Bizonyítás. A 28. tétel szerint F_n $(n \geqq 2)$ legalább három elemmel generálható. A 27. tételből következik, hogy a generátor elemek közül legalább kettő S_n-beli elem. $\{\alpha, S_n\} = F_n$, a 27. tétel szerint akkor is csak akkor, ha $D(\alpha) = n-1$. Így csak azt kell bizonyítani, hogy a $D(\alpha) = n-1$ feltételnek eleget tevő $\alpha \in F_n$ elemek száma $n!\binom{n}{2}$. Ennek a tételnek a bizonyításához előnyös a leképzések gráf reprezentációját tekinteni. Nyilvánvaló, hogy $D(\alpha) = n-1$ esetén α gráf ábrázolásában egyetlen végpont van és $f(\alpha)$ elemhalmaza $n-i$ $(i=2, \ldots, n-1)$ elemet tartalmaz. Az $f(\alpha)$ rész egyetlen i szögpontból álló láncot alkot. $\binom{n}{n-i}$ lehetőség van a láncban szereplő szögpontok kiválasz-tására. $i!$-féleképpen rendezhetjük el a láncban levő szögpontokat, és $n-i$-féleképpen csatlakozhat a lánc az $f(\alpha)$-t reprezentáló körökhöz. Így az egyetlen végponttal rendelkező $F(n)$ gráfok száma

$$\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{n-i}(n-i)!\,i!\,(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} n!\,(n-i) = n!\binom{n}{2}.$$

S. PICCARD több könyvében (lásd [31], [32]) foglalkozott M_n és K_n meghatározásával. $n \leqq 7$ esetre M_n és K_n értékeit meghatározza. Az alábbi táblázat összeállításához S. PICCARD eredményein kívül felhasználtuk a 48. tételt is.

n	M_n	K_n
2	1	2
3	9	162
4	108	15 552
5	3 420	$410\,4 \cdot 10^3$
6	114 480	$123\,638\,4 \cdot 10^3$
7	7 786 800	$82\,415\,491\,2 \cdot 10^3$

Jelölje P_n annak valószínűségét, hogy S_n véletlenül választott α, β eleme esetén $\{\alpha, \beta\} = S_n$. Jelölje P_n^* annak valószínűségét, hogy F_n véletlenül választott α, β, γ eleme esetén $\{\alpha, \beta, \gamma\} = F_n$. P_n és P_n^* értékét $n = 3, 4, 5, 6, 7$ esetben szemlélteti a következő táblázat:

n	$\frac{M_n}{\binom{n!}{2}} = P_n$	$\frac{K_n}{\binom{n^n}{3}} = P_n^*$
3	0,6	0,055
4	0,39	0,005 6
5	0,46	0,000 81
6	0,44	0,000 073
7	0,61	0,000 008 9

Megfigyelhető, hogy míg P_n^* igen gyorsan csökken P_n értéke meglehetősen magas és nem monoton csökkenő. J. D. DIXON (lásd [12]) bebizonyította, hogy $P_n \to 0{,}75$, ha $n \to \infty$.

Annak ellenére, hogy a 49. tételben megadjuk a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy $\alpha, \beta \in S_n$ elemekre $\{\alpha, \beta\} = S_n$ mikor teljesül, nem sikerült J. D. DIXON eredményét megkapnunk, jól lehet nem ismerve E. NETTO hasonló sejtését (lásd [28]) sejtésként kimondtuk (lásd [10]).

49. TÉTEL. *$\{\alpha, \beta\} = S_n$ akkor és csak akkor teljesül, ha*

1. α, β elemhalmazhoz tartozó szuperponált leképezés gráf összefüggő.

2. $\tau \in \{\alpha, \beta\}$, ahol $\tau \in S_n$ tetszőleges transzpozíció.

Bizonyítás. Az 1. feltétel szükséges, mivel ha α és β permutációkhoz tartozó gráfok szuperponálásával nyert gráf nem összefüggő, akkor $\{\alpha, \beta\}$-hoz tartozó gráf sem lenne összefüggő, és így $\{\alpha, \beta\} \neq S_n$. A 2. feltétel szükségessége nyilvánvaló. Hátra van még annak belátása, hogy az 1. és 2. feltétel együttesen elégséges is. Az 1. feltétel miatt tetszőleges i és j elempárra létezik olyan $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$, hogy $\gamma(i) = j$, ezért $\gamma\tau\gamma^{-1}$ alakban tetszőleges S_n-beli transzpozíció előállítható, ezért igaz, hogy $\{\alpha, \beta\} = S_n$.

P_n, illetve M_n-el kapcsolatos problémák közül megemlítjük S. M. ULAM' által feltett kérdést (lásd [42]), amely még megválaszolatlan. Mennyi $\{\alpha, \beta\}$ $(\alpha, \beta \in S_n)$, illetve $\{\alpha', \beta'\}(\alpha', \beta', \in F_n)$ rendjének várható értéke? Még az egyszerűbbnek látszó probléma is nyitott, ugyanis az sem ismeretes, hogy a két várható érték közül melyik a nagyobb?

MEGJEGYZÉS. J. D. DIXON [12]-ben bebizonyította, hogy annak a valószínűsége, hogy $\{\alpha, \beta\} \subseteq A_n$ $(\alpha, \beta \in S_n)$ 1-hez tart, ha $n \to \infty$. Így ULAM' egyik problémájára könnyen adódik a válasz, ugyanis $\{\alpha, \beta\}(\alpha, \beta \in S_n)$ rendjének várható értéke $0{,}875n!$, ha n elég nagy.

ERDŐS PÁL és TURÁN PÁL egy dolgozat sorozatban (lásd [15] [16]) bevezették az ún. statisztikus csoportelmélet fogalmát, amin azt értették, hogy egy bizonyos tulajdonság a csoport majdnem minden elemére teljesül. Az F_n-re kiterjesztett kombinatorikus vizsgálatok is hasonló célt szolgálnak félcsoportok esetén.

50. TÉTEL. *Ha F_n-ben levő idempotens elemek számát U_n jelöli, akkor*

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

Bizonyítás. Egy n-ed fokú idempotens leképezés k-ad fokú főpermutációját $\binom{n}{k}$-féleképpen oldhatjuk meg. Egy adott k-ad fokú főpermutációt k^{n-k}-féleképpen egészíthetünk ki n-ed fokú idempotens leképezéssé. Mivel a főpermutáció fokszáma, k az $1, 2, \ldots, n$ értékeket veheti fel, így adódik, hogy

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

[22]-ben található U_n értékeit tartalmazó következő táblázat:

n	U_n	n	U_n
1	1	9	293 608
2	3	10	2 237 921
3	10	11	18 210 094
4	41	12	157 329 097
5	196	13	1 436 630 092
6	1 057	14	13 810 863 809
7	6 322	15	139 305 550 066
8	41 393	16	1 469 959 371 233

További eredményeket U_n-re vonatkozóan lásd [21]-ben.

51. TÉTEL. *Jelölje P_n annak valószínűségét, hogy F_n elemeiből véletlenszerűen egyet választva a választott α elem olyan, hogy $\{\alpha\}$ csoport. Akkor $P_n \to 0$, ha $n \to \infty$.*

Bizonyítás. A 12. tétel bizonyítása során már beláttuk, hogy egy $\varkappa \in F_n$ idempotens leképezéshez tartozó maximális részcsoport rendje $k!$ (ha $f(\varkappa)$ k-ad fokú). Ezért az 50. tétel felhasználásával adódik, hogy

$$P_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k!\, k^{n-k}}{n^n},$$

vagyis

$$P_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} k^{n-k}}{n^n} = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \left(\frac{k}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{k^{k-1}} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \left(n-\frac{k}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{k^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{k}{2n}\right)^{k-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{n-k} < \frac{n}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right].$$

Mivel $\frac{n}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right] \to 0$ ha $n \to \infty$ ezért $P_n \to 0$, ha $n \to \infty$.

1. KOROLLÁRIUM. *Annak a valószínűsége, hogy F_n elemei közül véletlenszerűen választva $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-et úgy, hogy $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = G$ és G csoport, nullához tart, ha $n \to \infty$.*

2. KOROLLÁRIUM. *Ha F_n maximális részcsoportja rendjének várható értékét E_n-nel jelöljük, akkor*

$$E_n = \frac{1}{U_n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k!\,k^{n-k}.$$

52. TÉTEL. *F_n elemeiből véletlenszerűen választott leképezés főpermutációja fokának várható értékét jelölje V_n. Ekkor*

$$V_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{N_k(n)}{n^n}k,$$

ahol $N_k(n)$ a k-adfokú főpermutációval rendelkező n-edfokú leképezések számát jelöli.

Bizonyítás. Jelölje $G_t(n)$ azon n szögpontú gráfok számát, amelyek t diszjunkt összefüggő komponenst tartalmaznak, úgy, hogy minden komponens egy fa. Ismeretes, (lásd [4], [33]), hogy

$$G_t(n) = n!\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{j^{j-2}}{j!}\right)^{a_j}\frac{1}{a_j!},\quad \sum_{j=1}^{n}a_j = t,\quad \sum_{j=1}^{n}ja_j = n,$$

valamint

$$G_t(n) = \frac{1}{t!}\sum_{j=0}^{t}\left(-\frac{1}{2}\right)^j\binom{t}{j}\binom{n-1}{t+j-1}n^{n-t-j}(t+j)!.$$

$\binom{n}{k}$-féleképpen lehet azt a k szögpontot kiválasztani, amelyek a körökhöz tartoznak, vagyis a gráfhoz tartozó leképezés főpermutációja k-adfokú.
Így a lehetséges különböző főpermutációk száma $k!$

Jelölje l azon szögpontok számát, amelyek nem gyökérpontok. Ezért $l=0, 1, \dots, k$. Az l szögpont kiválasztására $\binom{k}{l}$ lehetőség van, így $n-k$ szögpont felhasználásával $k-l$ fát kell szerkeszteni. Egyszerű számolással adódik, hogy

$$N_k(n) = \binom{n}{k}k!\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}G_{k-l}(n-k).$$

A keresett V_n várható érték így kiszámítható,

$$V_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{N_k(n)}{n^n}k.$$

MEGJEGYZÉS. $G_t(n)$-re ismeretes a következő asszimptotikus összefüggés:

$$G_t(n) \sim \frac{n^{n-2}}{2^{t-1}(t-1)!},$$

lásd [33].

B. HARRIS és L. SCHOENFELD generátor függvény segítségével kiszámította az n-edfokú leképezések főpermutációja fokának, ζ-nek eloszlását. A következő képletet nyerték $P(\zeta=k)=\frac{kn!}{n^{k+1}(n-k)!}$. Ugyanezt az eredményt elemi úton megkapta REIMANN JÓZSEF (lásd [50]). Ugyancsak [50]-ben található meg annak bizonyítása, hogy $V_n \approx 1{,}25\sqrt{n}$.

Jól ismert CAUCHY képlete, amely megadja az a_i darab hosszúságú ciklussal rendelkező permutációk számát S_n-ben $(i=1,2,\dots,n)$. CHAUCHY képlete:

$$\frac{n!}{1^{a_1}a_1!\,2^{a_2}a_2!\dots n^{a_n}a_n!}.$$

A következőkben CHAUCHY képletét F_n elemeire általánosítjuk. Erre vonatkozik a [10]-ben közölt következő tétel:

53. TÉTEL. *Jelölje $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ azon n-ed fokú leképezések számát, amelyek a_i darab i hosszúságú általánosított ciklust tartalmaznak. Ekkor*

$$T(a_1, a_2 \dots a_n) = n! \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(i!)^{a_i} a_i!} \left[\sum_{j=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \binom{i}{j} j^{j-1}(i-j)^{i-j-1} + i^{i-1} \sum_{j=3}^{i} \binom{i}{j} \frac{j!}{i^j} \right]^{a_i}.$$

Bizonyítás. Jelölje C_n azt, hogy n elemet hányféleképpen lehet egy leképezés általánosított ciklusaiba szétosztani az általánosított ciklusokon belüli sorrend figyelembevétele nélkül, ha a leképezés a_i számú i hosszúságú általánosított ciklust tartalmaz. Ekkor alkalmazhatjuk a szimmetrikus csoport hasonló elemeire ismert CHAUCHY- képletet, mivel a sorrendre nem vagyunk tekintettel, így $\prod_{i=1}^{n}(i-1)!^{a_i}$-vel kell osztani, azaz $\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(i-1)!^{a_i}}$ tényezővel szoroznunk kell, vagyis

$$C_n \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{a_i} a_i!} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(i-1)!^{a_i}} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i!^{a_i} a_i!}.$$

Ha felhasználjuk a leképezések ismert gráf ábrázolását, akkor nyilvánvaló, hogy az általánosított i-ed fokú ciklusok száma megegyezik az egyetlen komponensből álló $F(i)$ gráfok számával, amit $N[T(i)]$-val fogunk jelölni.

A következőkben $N[T(i)]$-t fogjuk meghatározni.

Ismeretes (lásd [23] [34]), hogy a párhuzamos éleket és hurkot nem tartalmazó i szögpontú és i élű egyetlen összefüggő komponensből álló irányítatlan élű gráfok száma

$$\frac{1}{2} i \sum_{m=3}^{i} \prod_{j=1}^{m-1} \left(1-\frac{1}{j}\right).$$

Ebből következik, hogy azon egy komponensű $F(i)$ gráfok száma, amelyekben a kör hossza legalább három

$$i \sum_{m=3}^{i} \prod_{j=1}^{m-1} \left(1-\frac{1}{j}\right).$$

A hurokkal rendelkező egy komponensű $F(i)$ gráfok száma a gyökeres fák számával egyezik meg, vagyis i^{i-1}. A kettő hosszúságú körrel rendelkező $F(i)$ gráfok száma

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \binom{i}{j} j^{j-1}(i-j)^{i-j-1}.$$

Ennek belátása végett osszuk fel az i szögpontot két részre úgy, hogy az egyik osztályba j, a másikba $i-j$ szögpont kerüljön.

Ezt a felosztást $\binom{i}{j}$-féleképpen végezhetjük el. Két osztályba sorolt szögpontokból $j^{j-1}(i-j)^{i-j-1}$ két elemidegen komponensből álló gráf készíthető, amelynek mindegyik komponense egy olyan gyökeres fa, melynek szögpontjai éppen az összes ugyanazon osztályhoz tartozókból áll. Mivel a gyökérpontok egyértelműen kijelölik a kettős élnek végpontjait és j szimmetria okok miatt csak az 1, 2, ..., $\left[\frac{i}{2}\right]$ értékeket veheti fel. Ezért állításunknak megfelelően a kettő hosszúságú körrel rendelkező $F(i)$ gráfok száma

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \binom{i}{j} j^{j-1}(i-j)^{i-j-1}.$$

Következésképpen

$$N[T(i)] = i^{i-1} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \binom{i}{j} j^{j-1}(i-j)^{i-j-1} + i^{i-1} \sum_{j=3}^{i} \binom{i}{j} \frac{j!}{i^j}.$$

Mivel

$$T(a_1, ,a_2 \ldots, a_n) = C_n \sum_{i=1}^{n} N[T(i)]^{a_i},$$

a tétel állítását bebizonyítottuk.

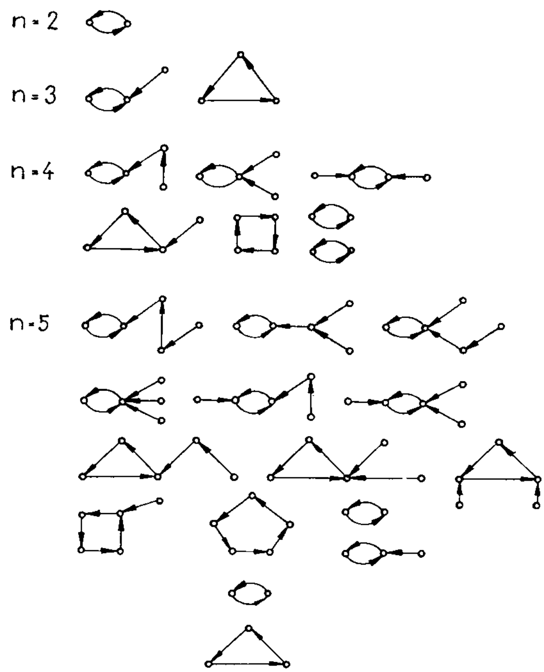
Megjegyzés. F. Harary [18] és R. C. Read [35] foglalkozott az ún. „functional digraph"-okkal, vagyis olyan $F(n)$ gráfokkal, amelyekben minden kör hosszúsága legalább kettő, vagyis hurok nélküli $F(n)$ gráf. Azt vizsgálták, hogy hány topológiailag különböző n szögpontú „functional digraph" van. Harary és Read a hurok nélküli leképezés gráfoknak a lélektanban való hasznosítását is vizsgálták (lásd [15], [20]).

Az említett szerzők által készített katalógus alapján $n=2$, 3, 4, 5, esetre megadjuk a topológiailag különböző $F(n)$ gráfokat. (Lásd 1. ábra.)

A nem izomorf hurok nélküli $F(n)$ gráfok számára explicit képletet R. L. Davis adott (lásd [3]).

A szimmetrikus csoport generátor rendszereivel részletesen foglalkozik S. Piccard könyvében (lásd [31]), ahol összegyűjti a tárgyra vonatkozó eredményeket és saját eredményeivel kiegészíti azokat.

Mi a szimmetrikus csoportnak azzal a speciális generátor rendszerével fogunk foglalkozni, amikor a generátor elemek transzpozíciók (vagyis olyan n-ed fokú permutációk, ahol pontosan $n-2$ elem fixen marad). Az itt közölt eredmények a szerzőnek TÖRÖK ÉVÁval közös dolgozatában jelentek meg (lásd [11]), magyar nyelven a szerző kandidátusi disszertációjában szerepeltek (lásd [5]).



1. ábra

Ismert a következő tétel:

Az (ij) transzpozíciónak feleljen meg az n számozott szögponttal (ezeket jelölje $P_1, P_2, \ldots, P_n$*) rendelkező gráfban a* P_i *és* P_j *pontokat összekötő él. A* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \ldots, \tau_{n-1}$ *transzpozíciók akkor generálják az n-ed fokú szimmetrikus csoportot, ha a transzpozícióknak megfelelő n szögpontú gráf összefüggő.*

A tétel bizonyítás nélkül megtalálható PÓLYA GYÖRGY [30]-ban. Mi ennek a tételnek egy általánosítását bizonyítjuk be.

54. TÉTEL. *A* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ $(r \geqq n-1)$ *transzpozíciók akkor és csak akkor generálják az n-ed fokú szimmetrikus csoportot (*S_n*-t), ha a* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ *transzpozíciókhoz tartozó n szögpontú gráf összefüggő.*

Bizonyítás. Az $1, 2, \ldots, n$ számoknak feleltessük meg a gráf $P_1, P_2, \ldots, P_n$ szögpontjait, a P_i és a P_j szögpontokat összekötő élnek az (ij) transzpozíció feleljen meg. (Ugyanezt a megfeleltetést lásd PÓLYA GYÖRGY [30]-ban és DÉNES JÓZSEF [4]-ben). Jelöljük a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ transzpozíciókhoz tartozó n szögpontú gráfot $V_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \ldots, \tau_r)$-rel Ha a $V_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$ gráf összefüggő, akkor a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ transzpozíciók által generált csoport az S_n. Ez a következőképpen látható be:

Egy összefüggő gráfban minden szögpontból bármely másikba el lehet jutni a gráfhoz tartozó élek mentén. Tegyük fel, hogy P_i-ből P_j-be a $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_l}$ transzpozícióknak megfelelő élek mentén juthatunk el. Akkor tetszőleges i-re és j-re van olyan $i_1, i_2, \dots, i_l$ sorozat, amelyre fennáll, hogy $(ij) = \tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_{l-1}}\tau_{i_l}$. Mivel tetszőleges permutáció transzpozíciók szorzatára bontható, az összes S_n-ben levő transzpozíciók generálják S_n-t, és $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ transzpozíciók segítségével az összes S_n-ben levő transzpozíció előállítható, vagyis $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ transzpozíciók S_n-nek egy generátor rendszerét alkotják. Az előbbiek szerint abból, hogy ha $V_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \dots, \tau_r)$ gráf nem összefüggő, akkor a $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ transzpozíciók nem generálják az S_n-t. Tegyük fel, hogy $V_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$ gráf nem összefüggő, akkor közös szögpontot, illetve élet nem tartalmazó összefüggő részgráfokra (komponensekre) bontható. Jelöljük a V gráf komponenseit $V_1, V_2, \dots, V_{s-1}, V_s$-tel. Mivel tetszőleges V_i-hez tartozó transzpozíciók felcserélhetők tetszőleges V_j-hez $(i \neq j)$ tartozó transzpozíciókkal, bármely α permutáció $(\alpha \in S_n)$ felírható lenne a következő alakban:

$$\alpha = \tau_{i_1}(V_1) \dots \tau_{i_r}(V_1)\tau_{i_1}(V_2) \dots \tau_{i_{r_2}}(V_2) \dots \tau_{i_1}(V_s) \dots \tau_{i_{r_3}}(V_3),$$

ahol $\tau_{ij}(V_l)$ a V_l gráfhoz tartozó transzpozíció. A fenti alakban felírható elemek azonban mind több diszjunkt ciklus szorzataként állíthatók elő, tehát egyetlen n-ed fokú ciklus sem állítható elő a fenti alakban. Vagyis $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ nem alkotja egy generátor rendszerét S_n-nek, ha $V_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$ nem összefüggő.

KOROLLÁRIUM. *Bárhogyan adjuk meg $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ különböző S_n-beli transzpozícióit, ha $r \geqq \frac{n(n-3)}{2} + 2$, akkor $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r\} = S_n$.*

55. TÉTEL. *Annak valószínűsége, hogy S_n összes transzpozíció közül véletlenszerűen kiválasztott $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_C(n)}$ transzpozíciók S_n-nek egy generátor rendszerét alkossák $e^{-e^{-2C}}$-hez konvergál, ha $N_C(n) = [\frac{1}{2} n \log n + cn]$, ahol C egy tetszőleges rögzített valós szám, $[x]$ jelöli x egész részét és $n \to +\infty$.*

Bizonyítás. $V_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_C})$ akkor összefüggő, ha a $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_C}$ transzpozíciónak van olyan $n-1$ elemű részhalmaza, amelyhez tartozó *Pólya* gráf összefüggő. Az 54. tétel szerint $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_C}$ transzpozíciók akkor és csak akkor generálják S_n-t, ha $V_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_C})$ összefüggő. Az alábbi I. tételből következik az 55-tétel.

ERDŐS P. és RÉNYI A. [13], [14] dolgozatában találhatók a következő tételek:

I. TÉTEL. *Ha $N_C(n) = [\frac{1}{2} n \log n + c_n]$ és $n \to +\infty$, akkor annak valószínűsége, hogy a $V_n N_C(n)$ gráf összefüggő $e^{-e^{-2C}}$-hez konvergál.*

Az 54. tétel lehetőséget nyújt a következő, véletlen gráfokra vonatkozó tételek alkalmazására is.

II. TÉTEL. *Jelölje $P_k(n, N_C(n))$ $(k=0, 1, \dots)$ annak valószínűségét, hogy $V_n, N_C(n)$ legnagyobb összefüggő komponense $n-k$ pontot tartalmaz, és a többi k pont izolált pontja $V_{r, N_C(n)}$-nek. Akkor*

$$\lim_{n \to \infty} P_k(n, N_c(n)) = \frac{(e^{-2c})^k e^{-e^{-2c}}}{k!},$$

vagyis V_n, $N_C(n)$ *legnagyobb összefüggő komponensén kívül fekvő pontok számának eloszlása az* e^{-2C} *várható értékű Poisson eloszláshoz konvergál, ha* $n \to \infty$.

III. TÉTEL. *Válasszuk a* $P_1, P_2, \cdots, P_n$ *szögpontú véletlen gráf lehetséges* P_iP_j *élei közül éleket oly módon, hogy minden választásnál az előzőleg ki nem választott éleket egyenlő valószínűséggel választhatjuk következőként és folytassuk ezt az eljárást addig, amíg a gráf összefüggővé nem válik. Jelölje* V_n *az így létrejött* V *összefüggő véletlen gráf éleinek számát. Akkor*

$$P\left(V_n = \left[\frac{1}{2} n \log n\right] + l\right) \sim \frac{2}{n} e^{-\frac{2l}{n} - e^{-\frac{2l}{n}}},$$

$$|l| = 0(n) \quad \textit{és} \quad n \to +\infty, \quad \textit{továbbá}$$

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{V_n - \frac{1}{2} n \log n}{n} < x\right) = e^{-e^{-2x}}.$$

A II. és III. tételből kapjuk a következő tételeket:

IV. TÉTEL. S_n*-ben az n-ed fokú szimmetrikus csoportban levő transzpozíciók közül válasszunk ki véletlenszerűen* $N_C(n)$*-t. Jelölje* $P_k(n, N_C(n))$ *annak valószínűségét, hogy a kiválasztott transzpozíciók által generált csoport rendje pontosan* $(n-k)$! *Akkor*

$$\lim_{n \to +\infty} P_k(n, N_c(n)) = \frac{(e^{-2c})^k e^{-e^{-2c}}}{k!} \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Egy transzpozíció halmazt ([4]-ben bevezetett elnevezés szerint) regulárisnak nevezünk, ha a hozzá tartozó *Pólya* gráf összefüggő.

V. TÉTEL. *Az n-ed fokú szimmetrikus csoportban levő transzpozíciók közül válasszunk egymásután transzpozíciókat oly módon, hogy minden választásnál az előzőleg ki nem választott transzpozíciók bármelyikét egyenlő valószínűséggel választhatjuk következőként és ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg kiválasztott transzpozíciókból álló halmaz nem lesz reguláris. Jelölje* V_n *az így létrejött reguláris transzpozíció halmaz elemeinek számát. Akkor*

$$P\left(V_n = \left[\frac{1}{2} n \log n\right] + l\right) \sim \frac{2}{n} e^{-\frac{2l}{n} - e^{-\frac{2l}{n}}}$$

$$|l| = 0(n) \quad \textit{és} \quad n \to +\infty,$$

továbbá

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{V_n - \frac{1}{2} n \log n}{n} < x\right) = e^{-e^{-2x}}.$$

A szimmetrikus csoport transzpozíciókból álló generátor rendszeréhez összefüggő *Pólya* gráf tartozik (lásd az 54. tételt.) Az 54. tétel általánosítható F_n-re a következőképpen:

56. TÉTEL. *Ha T transzpozíciókból és L szinguláris leképezésekből álló halmazt jelöl, akkor $\{T, L\} = F_n$, akkor és csak akkor teljesül, ha T-hez tartozó n szögpontú Pólya gráf összefüggő és L nem üres.*

Bizonyítás. A 27. és 54. tétel miatt szükséges, hogy a T-hez tartozó n szögpontú *Pólya* gráf összefüggő legyen. Ugyancsak a 27. tétel miatt L nem lehet üres. A két feltétel elégségessége, mivel egy n-ed fokú szinguláris leképezés defekt száma $n-1$, a 27. tételből nyilvánvaló.

57. TÉTEL. *F_n összes transzpozíciói és szinguláris leképezései közül véletlenszerűen válasszunk r darabot. A kiválasztott elemek közül a transzpozíciók számának várható értéke $\frac{r}{3}$.*

Bizonyítás. F_n-ben levő különböző transzpozíciók száma $\binom{n}{2}$, a különböző szinguláris leképezések $n(n-1)$. Válasszunk az

$$\frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) = \frac{3}{2} n(n-1)$$

elemű R halmazból, (amely az összes F_n-beli transzpozíciókat és szinguláris leképezéseket tartalmazza) véletlenszerűen r különbözőt. r választott elem közül t_r lesz transzpozíció. Így $r-t_r$ szinguláris leképezés. t_r valószínűségi változó, amely hipergeometrikus eloszlást követ, vagyis ha $E(t_r)$ t_r várható értékét jelöli, akkor

$$E(t_r) = \frac{r\binom{n}{2}}{\binom{n}{2} + n(n-1)} = \frac{\frac{rn(n-1)}{2}}{\frac{3}{2} n(n-1)} = \frac{r}{3}.$$

58. TÉTEL. *Jelölje O_n S_n maximális rendű elemének rendjét, O_n' pedig F_n maximális rendű elemének rendjét, akkor*

$$\frac{O_n' - O_n}{O_n'} \to 0, \quad ha \quad n \to \infty.$$

Bizonyítás. LANDAUtól származik az az eredmény, amely szerint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log O_n}{\sqrt{n \log n}} = 1.$$

Az 5. tétel segítségével könnyen adódik, hogy

$$O_n' - O_n < n,$$

ezért

$$\frac{O_n' - O_n}{O_n} < \frac{n}{e^{\sqrt{n \log n}}}, \text{ ha } n \to \infty$$

$$\text{és}\quad \frac{O'_n - O_n}{O'_n} \leqq \frac{O'_n - O_n}{O_n} \leqq \frac{n}{e^{\sqrt{n \log 1}}} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

MEGJEGYZÉS. J. NICOLAS bebizonyította, hogy $O_n = O_{n+m}$ alkalmasan választott n esetén bármilyen nagy m-re is fennállhat, ezért $O'_n - O_n$ nem korlátos (lásd [29]). O_n érékei legfeljebb $n = 301$ esetén [51]-ben találhatók. [52]-ben bizonyítást nyert, hogy $\frac{O_n + 1}{O_n} \to 1$.

ULAM már korábban említett problémájának a ciklikus rész csoportok, illetve rész félcsoportok esetére egyszerűsített változatát fogjuk megoldani (ε az n-ed fokú egység permutáció).

59. TÉTEL. *Jelölje H_n S_n-beli elemek rendjének várható értékét H_n^* pedig F_n-beli elemek rendjének várható értékét. Ekkor fennáll, hogy*

$$H_n^* < H_{n-1} + n, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Bizonyítás. F_n elemidegen részhalmazokra bontható oly módon, hogy $R_k(n)$ részhalmaz azokat a leképezéseket tartalmazza, amelyek főpermutációja k-ad fokú. Ekkor

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{n} R_k(n).$$

$R_k(n)$-beli elemek számát $N_k(n)$-et ismerjük, az 52. tétel bizonyításában kimutattuk, hogy

$$N_k(n) = \binom{n}{k} k! \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} G_{k-l}(n-k).$$

Jelöljük $R_k(n)$-beli elemek rendjének várható értékét $x_k(n)$-nel és legyen $\alpha \in R_k(n)$. Kérdés, hány olyan leképezés van F_n-ben, amelyek főpermutációja $f(\alpha)$. (Az $R_k(n)$ definíciójából következik, hogy ezek csak $R_k(n)$-ben lehetnek.) A keresett érték

$$\frac{N_k(n)}{\binom{n}{k} k!} = \frac{(n-k)!\, N_k(n)}{n!}.$$

Ennek belátására tekintsük az $R_k(n)$-ben levő összes olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ leképezést, amelyre vonatkozóan $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \ldots = f(\alpha_r)$, ha tekintünk $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ leképzéseket úgy, hogy $f(\beta_1) = f(\beta_2) = \ldots = f(\beta_s)$ és $f(\beta_1) \neq f(\alpha_1)$ esetén pontosan egy olyan β_j ($j = 1, 2, \ldots, s$) leképezés található, hogy α_i és β_j farésze megegyezik ezért $r = s$. Mivel $R_k(n)$-ben $\binom{n}{k}$ különféle idempotens főpermutáció van, a 11. és 12. tétel alkalmazásával belátható, hogy ha tekintjük az $R_k(n)$-beli leképezések különböző főpermutációinak halmazát, akkor ez a halmaz $\binom{n}{k} k!$ elemet fog tartalmazni. Kimutattuk, hogy $r = s$, így

$$r = s = \frac{N_k(n)}{\binom{n}{k} k!} = \frac{(n-k)!\, N_k(n)}{n!}.$$

Legyen $\alpha \in F_n$, akkor az 5. tételből következik, hogy $O(\alpha) < O(f(\alpha))+n$. Tekintve, hogy

$$H_k = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{m=0(\alpha) \\ \alpha \in s_k}} I_m^{(k)},$$

ahol $I_m^{(k)}$ S_k-beli m-ed rendű elemek száma,

$$x_k(n) < \sum_{\substack{m=0(\alpha) \\ \alpha \in s_k}} \binom{n}{k} I_m^{(k)}(m+n) \frac{\frac{(n-k)!\,N_k(n)}{n!}}{N_k(n)} = \sum_{\substack{m=0(\alpha) \\ \alpha \in s_k}} \binom{n}{k} I_m^{(k)}(m+n) \frac{(n-k)!}{n!} =$$

$$= \frac{n!}{n!} \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{m=0(\alpha) \\ \alpha \in s_k}} (m+n) I_m^{(k)}.$$

Következésképpen

$$x_k(n) < \frac{1}{k!} \sum_{\substack{m=0(\alpha) \\ \alpha \in s_n}} (m+n) I_m^{(k)} \quad \text{és} \quad x_k(n) < H_k + \frac{n}{k!} \sum_{\substack{m=0(\alpha) \\ \alpha \in s_n}} I_m^{(k)} \quad x_k(n) < H_k + n.$$

Így

$$H_n^* = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} N_k(n) x_k(n)$$

miatt fennáll, hogy

$$H_n^* < \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} N_k(n)(H_k+n),$$

$$H_n^* < \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} N_k(n) H_k + \frac{n}{n^n} \sum_{k=1}^{n} N_k(n), \text{ mivel } \sum_{k=1}^{n} N_R(n) = n^n$$

$$H_n^* < \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} N_k(n) H_k + n.$$

$N_n(n) = n!$ miatt

$$H_n^* - n < H_{n-1} \frac{n^n - n!}{n^n} + \frac{n!}{n^n} H_n.$$

Az alábbi megjegyzésből és a STIRLING formából adódik, hogy

$H_n^* < H_{n-1} + n + 1$, ha n elég nagy.

MEGJEGYZÉS. ERDŐS P., TURÁN P. [15], [16] bebizonyították, hogy

$$H_n < e^{C_1 \sqrt{\frac{n}{\log n}}},$$

ahol C_1 alkalmasan választott pozitív szám. (Azt sejtik, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log H_n}{\sqrt{\frac{n}{\log n}}}, \quad \frac{n}{H_{n-1}} \to 0$$

létezik és véges.)

B. HARRIS [49]-ben megadta F_n-beli elemek rendjének eloszlását és meghatározta a várható értéket $H_n^* = \frac{1}{8}\log^2 n$. F_n információtartalmáról [48]-ban találhatók eredmények.

A szerző [9]-ben bebizonyította, hogy létezik olyan félcsoport, amelynek művelettáblájából egyetlen elem sem hagyható el oly módon, hogy a megmaradó elemek az eredeti táblázatot egyértelműen meghatározzák. K. P. KOZLOV meghatározta az összes olyan félcsoportot, amely a leírt tulajdonsággal rendelkezik. (Lásd [25], [26]). FUCHS LÁSZLÓtól származik a problémának csoportok esetén való feltevése (lásd [6]). Ugyancsak sikerült megoldani a kérdést kvázi-csoportok esetén (lásd [9]).

ERDŐS P. és TURÁN P. már idézett statisztikus csoportelméleti vizsgálatai során (lásd [15], [16]) vizsgálták S_n-ben a felcserélhető elempárok számát. Mint könnyen belátható, a felcserélhető elempárok száma $np(n)$, ahol $p(n)$ az n különböző partícióinak a száma. Általában, ha egy véges csoport rendje N és a különböző konjugált osztályok száma k, akkor a felcserélhető elempárok száma Nk.

Az idézett cikkben a szerzők azt is bebizonyították, hogy a legkevesebb elemmel felcserélhető eleme S_n-nek két ciklusból áll, az egyik egy, a másik $n-1$ hosszúságú. Ha $\alpha \in S_n$ a jelzett ciklus felbontással rendelkezik, akkor az α normalizátorának a rendje $n-1$.

Z. HEDRLIN [47]-ben közölt eredményéből következik, hogy F_n-ben legalább $\left[\frac{n^{n+1}}{2}\right]$ felcserélhető elempár van.

MEGJEGYZÉS A dolgozat I részében levő 18. tétel hibás. Ennek következtében a 20. és a 22. tétel és ennek korolláriuma sem igaz.

IRODALOM

[1] P. C. BAAYEN, P. van EMDE BOAS, D. Kruyswijk: *A combinatorial problem on finite semigroups.* Math. Centrum, Amsterdam ZW 1965—006.

[2] P. van EMDE Boas: *A combinatorial problem on the semigrop of all transformations of a finitset.* Math. Centrum, Amsterdam ZW 1965—009.

[3] R. L. DAVIS: The number of structures of finite relations. *Proc. Am. Math. Soc.***4.** (1953) 486—495.

[4] J. DÉNES: The representations of a permutation as the product of a minimal number of transpositions and its connection with the theory of graphs. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **4.** (1959) 63—71.

[5] DÉNES J.: Megjegyzések a véges csoportok elméletéhez. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1961.

[6] J. DÉNES: On a problem of L. Fuchs. Acta Sci. Math. Szeged, **23.** (1962) 237—241.

[7] J. DÉNES: On some properties of commutator subgroups. *Annales Univ. Sci. Budapest. R. Eötvös, Sect. Math.* **7.** (1964) 123—127.

[8] J. DÉNES: On commutator subgroups of finite groups. *Comment. Math. Univ. Sancti Pauli* **15.** (1967) 61—65.

[9] J. DÉNES: On multiplication tables of finite quasi and semigroups. *Preprint University of Surrey,* London 1967. Orosz fordításban megjelent: *МАТЕМ. ИССЛЕДОВАНИЯ* **2.** (1967) № 2. 172—175.

[10] J. DÉNES: Some combinatorial properties of transformations and their connections with the theory of graphs. *Journal of Combinatorial Theory* **9.** (1970) 108—116.

[11] J. DÉNES, É. TÖRÖK: Groups and graphs. *Combintorial Theory and its Applications.* Colloquia Math. Soc. Bolyai János. 257—289.

[12] J. D. DIXON: The probability of generating the symmetric group. *Math. Zeitschrift* **110.** (1969) 199—205.

[13] P. ERDŐS, A. RÉNYI: On random graphs I. *Publicationes Matematicae* (1969) 290—298.

[14] P. ERDŐS, A. RÉNYI: On the evolution of random graphs. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **5.** (1960) 17—61.
[15] P. ERDŐS, P. TURÁN: On some problems of a statistical group theory. I. *Zeitschr. für Warscheinlichtkeitstheorie* und verw. Gebiete **4** (1965) 175—186.
II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **18** (1967) 151—163.
III. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **18** (1967) 309—320.
IV. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **19** (1968) 413—435.
[16] ERDŐS PÁL, TURÁN PÁL: A statisztikus csoportelmélet egyes problémáiról. *MTA III. Osztály Közleményei,* **17** (1967) 51—57.
[17] L. FUCHS: *Abelian Groups.* Akadémiai Kiadó, 1966.
[18] F. HARARY: The number of functional digraphs. *Math. Annalen* **138** (1959) 203—210.
[19] F. HARARY, R. C. READ: The probability of a given 1-Choice structure. *Phychometrika* **31** (1966) 271—278.
[20] F. HARARY, E. M. PALMER, R. C. READ: The number of ways to lobel structure. *Psychometrika* **32** (1967) 155—156
[21] B. HARRIS: A note on the number of idempotent elements in symmetric semigroups. *Amer. Math. Monthly* **74** (1967) 1234—1235.
[22] B. HARRIS, L. SCHOENFELD: The number of idempotent elements in symmetric semigroups. *J. Comb. Theory* (1967) 122—135.
[23] L. KATZ: Probability of idemposability of random mapping function, *Annals Math. Stat.* **26** (1953) 512—517.
[24] А. М. Кауфман: Последовательно-уничтожающиеся суммы ассоциативных систем. Ленинг. учен. зап. Пед. ин-та **86** (1949), 145—165.
[25] К. П. Козлов: О неограниченно варьируемых клетках в таблще кели полигруппы. Уч. зап. ЛТПИ им. А. И. Герцена **274** (1965), 143—149.
[26] К. П. Козлов: О существовании жестких клеток в таблице кели полугруппы. Уч. зап. ЛТПИ им. А. И. Герцена **276** (1967), 131—133.
[27] E. G. MARTIN, W. A. MC. WORTER: Finite sequences of groups elements and their relation to the existence order and index of subgroups. *Illinois Journal of Math.* **11** (1967) 660—662.
[28] E. NETTO: The theory of substitutions. New York, Chelsea 1964. (Fordítás németből, az eredeti 1892-ben jelent meg.)
[29] J. NICOLAS: Sur l'ondre maximum d'un element dans le groups S_n des permutations. *Acta Arille* **14** (1967/68) 315—332.
[30] G. PÓLYA: Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen, *Acta Mathematica (Uppsala)* **68** (1937) 145—255.
[31] S. PICCARD: *Sur les bases du groupe symétrique* I., II. Librairie Vuibert, Paris, 1946—48.
[32] S. PICCARD: *Sur les bases des groupes d' ordre fini.* Gauthier-Villars, Paris, 1957.
[33] A. RÉNYI: Some remarks on the theory of trees, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **4** (1959) 73—85.
[34] A. RÉNYI: On connected graphs, I., *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **4** (1959) 385—388.
[35] R. C. READ: A note on the number of functional diagraphs, *Math. Analen* **143** (1961) 109—110.
[36] A. RHEMTULLA: On a problem of L. Fuchs. *Studia Sci. Math. Hung.* **4** (1969) 195—200.
[37] S. SCHWARZ: К теории периодических полугрупп, *Czechoslovak Math. J.* **3** (1953) 7—21.
[38] S. SCHWARZ: Теория характеров коммутативных полугрупп. *Czechoslovak Math. J.* **4** (1954) 219—247.
[39] J. S. SERRET: *Handbuch der höheren Algebra.* Teubner, Leipzig 1879. I. kötet, 30. oldal.
[40] A. SUSCHKEVITSCH: Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, *Math. Ann.* **99** (1928) 30—50.
[41] TÖRÖK ÉVA: Az n-ed fokú leképezések előállításáról, *Matematikai Lapok* **19** (1968) 143—146.
[42] S. M. ULAM: *A collection of mathematical problems,* Interscience Publischer Inc., New York 1960.
[43] К. А. Зарецкий: Об идеалах полугрупп. *Успехи математических наук* **14** (1959), 173—174.
[44] A. H. CLIFFORD, G. B. PRESTON: The algebraic theory of semigroups, I—II., *Providence Ann. Math. Soc.* 1961., 1967.
[45] DÉNES J.: Az összes n-edfokú permutáció előállításáról, *Matematikai Lapok* **15** (1964) 239—241.
[46] J. DÉNES: On some properties of commutator subsemigroups, *Publ. Math.* **15** (1968) 282—285.
[47] Z. HEDRIN: On the number of commuting transformations. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolianae* (1963) 132—136.
[48] V. A. GANOV: Верхняя оценка меры информационной из быточности симметрической полугруппы кибернетика **6** (1970) 63—65.

[49] B. HARRIS: The asymptotic distribution of the order of elements in symmetric semigroups. Preprint. The University of Wisconsin, MRC Technical Summary Report №. 1195 (1971).
[50] REIMANN J: Notes on statistical semigroups theory, I, II Megjelenőben.
[51] J. L. NICOLAS: Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et „highly composite numbers". *Bull. Soc. Math. France* 97 (1969), 129—191.
[52] J. L. NICOLAS: Ordre maximal d'un élément, d'un groupe de permutations. *C. R. Acad. Sci. Paris.* Ser. A—B 270 (1970) A/473—A/476.

(Beérkezett: 1970. július 15.)

HALMAZELRENDEZÉSEK TÖMÖRSÉGÉRŐL

Irta: BENEDIKTI ISTVÁN

Bevezetés

Halmazelrendezések tömörségének vizsgálata a szemléletes tömörségi (kristálykémiában például szorossági, lásd például [5] és [6]) fogalom egzakt matematikai eszközökkel való megközelítéséből indult el. E kérdéskör analogonja, és bizonyos értelemben elődje megtalálható a statisztikában, ahol ezt pontrendszerek szóródásának vizsgálata képviseli (lásd például [10] 6. fejezetét). Halmazrendezések tömörsége vizsgálatának halmazok elhelyezéselméletében van jelentősége.

Halmazelrendezések elemeinek töltéseket tulajdonítva, sokszor az itteniekhez hasonló legtömörebb elrendezések is létrejönnek. Gömbökkel kapcsolatban BARLOW már 1883-ban tett közzé ezzel kapcsolatos vizsgálatokat. (lásd [6] 59. oldal!) Ezekkel azonban itt nem foglalkozunk.

Itt csak olyan tömörségi jellemzőkkel foglalkozunk, melyek már geometriai vizsgálatok tárgyát képezték, és kezdeti eredményekről tudunk (lásd [1]—[4] és [7]—[9]). Célunk nem ezeknek az eredményeknek az ismertetése, hanem a már vizsgált tömörségi jellemzők összegyűjtése, és ezekkel kapcsolatban néhány általános eredmény közlése.

A következőkben halmazelrendezések olyan mérőszámait vizsgáljuk, amelyeknek csökkenő értékeihez szemléletesen tömörebb elrendezések tartoznak.

A szerző figyelmét POGÁNY CSABA hívta fel az itt szereplő t_i függvényeknek az elhelyezéselméleti vizsgálatára.

1. Belidegen halmazelrendezések lazaságának néhány mérőszáma

Mielőtt rátérnénk a mérőszámok ismertetésére, rögzítjük, hogy milyen halmazrendszerekkel foglalkozunk.

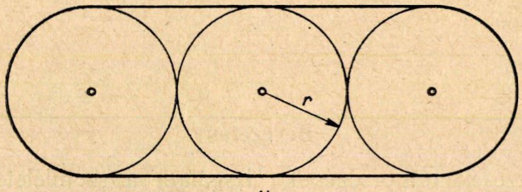
ÉRTELMEZÉS. *Belidegen* halmazrendszernek nevezzük az olyan halmazrendszert, amelynek elemei páronként közös belső pont nélküliek, azaz amelynek elemei *belső* pontjainak halmaza páronként *idegen* halmaz (röviden *belidegen* halmaz).

MEGJEGYZÉS. Az a kikötés, hogy a halmazrendszer elemei páronként belidegenek legyenek túl erős kikötésnek látszik. Természetes kívánság ettől megszabadulni, vagy ezt bizonyos mértékig lazítani. Ezt elvégezve az itt szereplő fogalmaknak és problémáknak érdekes analogonjai merülnek fel. Ezeknek taglalására azonban itt nem térünk ki.

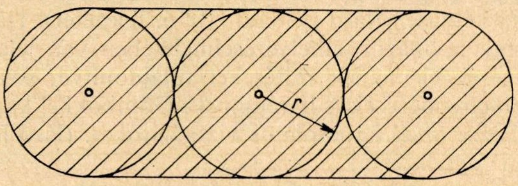
JELÖLÉS. A továbbiakban H az euklidesi sík H_i, $(i \in I)$ konvex, zárt halmazaiból álló belidegen halmazrendszert jelent, és I a természetes számok egy részhalmaza lesz.

ÉRTELMEZÉS. A H halmazelrendezés $t_1(H)$ *lazasági mérőszámának* nevezzük a $\cup H_i$ halmaz konvex burka határának ívhosszát. (Az 1. ábrán bemutatott H halmazelrendezésre például $t_1(H) = 2r(4+\pi)$.)

ÉRTELMEZÉS. A H halmazelrendezés $t_2(H)$ *lazasági mérőszámának* nevezzük a $\cup H_i$ halmaz konvex burka területét. (A 2. ábrán bemutatott H halmazelrendezésre például $t_2(H) = r^2(8+\pi)$.)



1. ábra

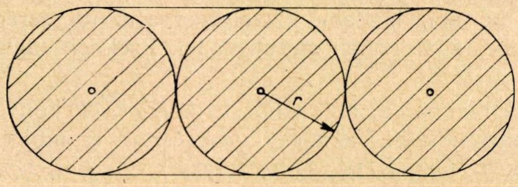


2. ábra

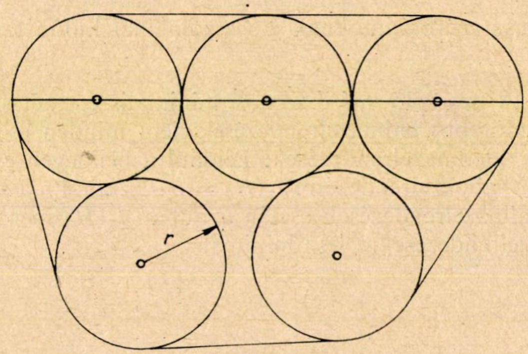
ÉRTELMEZÉS. A H halmazelrendezés $t_3(H)$ *lazasági mérőszámának* nevezzük a a $\cup H_i$ halmaz konvex burkára vonatkozó reciprok sűrűségét, azaz a $\cup H_i$ halmaz konvex burka területének, és a $\cup H_i$ halmaz területének hányadosát. (A 3. ábrán bemutatott elrendezésre például $t_3(H) = \frac{8+\pi}{3\pi}$).

ÉRTELMEZÉS. A H halmazelrendezés $t_4(H)$ *lazasági mérőszámának* nevezzük $\cup H_i$ halmaz átmérőjét, azaz a $\sup\limits_{P_i, P_j \in \cup H_i} d(P_i; P_j)$ értéket, ahol $d(P_i; P_j)$ a P_i és a P_j pont euklidesi távolsága. (A 4. ábrán bemutatott H halmazelrendezésre például $t_4(H) = 6r$.)

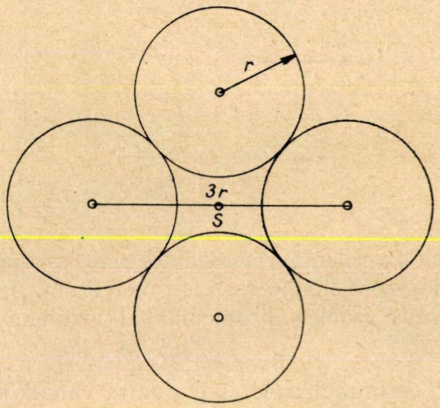
ÉRTELMEZÉS. A H halmazelrendezés $t_5(H)$ (súlypontra vonatkozó) *lazasági mérőszámán* értjük a $\cup H_i$ halmaz határának az $\cup H_i$ halmaz S súlypontjától való legnagyobb távolságát, azaz $\sup\limits_{P \in \cup H_i} d(S, P)$-t.



3. ábra



4. ábra



5. ábra

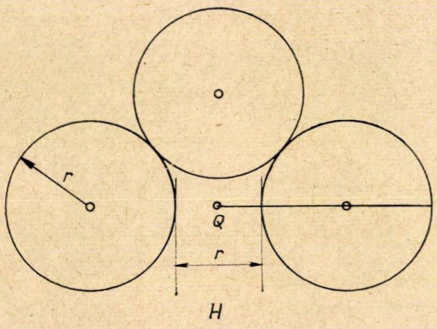
MEGJEGYZÉS. A $t_5(H)$ mérőszám nem minden halmazelrendezésnél értelmezhető. A gyakorlatban fontos esetekben azonban legtöbbször létezik. (Az 5. ábrán bemutatott halmazelrendezésre például $t_5(H)=2{,}5r$.)

ÉRTELMEZÉS. A H halmazelrendezés (Q pontra vonatkozó) $t_6(H)$ *lazasági mérőszámán* értjük az $\inf\limits_{Q\in E^2} \sup\limits_{P\in \cup H_i} d(Q,P)$ értéket. (A 6. ábrán bemutatott H halmazelrendezésre például $t_6(H)=2{,}5r$.)

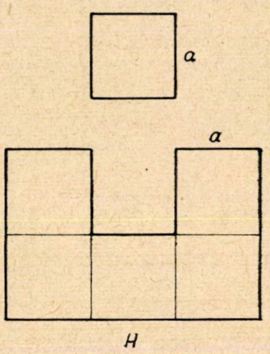
ÉRTELMEZÉS. A H halmazelrendezés $t_7(H)$ lazasági mérőszámának nevezzük a $\cup H_i$ halmaz határpontjai által alkotott halmaz (megfelelő dimenziós *Jordan*) mértékét. (A 7. ábrán bemutatott H halmazelrendezésre például $t_7(H)=16a$.)

MEGJEGYZÉS. A fenti mérőszámokon kívül egy halmazelrendezés lazaságát például a $\sup\limits_{\substack{P_i\in H_i\\ P_j\in H_j}} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} d(P_i,P_j)$ távolságösszeggel is mérhetjük. Ennek és a rokon, távolságösszeg típusú mérőszámoknak a vizsgálatával külön tanulmányban foglalkozunk.

MEGJEGYZÉS. A szereplő mérőszámok minimális értékét szolgáltató (a mérőszám szerint legtömörebb) halmazelrendezések nem minden esetben lesznek szemléletesen is „tömör" halmazelrendezések. Például a belidegen egységsugarú körökből álló bármely H halmazelrendezésre $t_7(H) = n \cdot 2\pi$, ahol n a körök száma. Négyzetekből álló H halmazelrendezések esetén azonban $t_7(H)$ mérőszám szemléletesen is „tömör" halmazelrendezésekre lesz minimális.



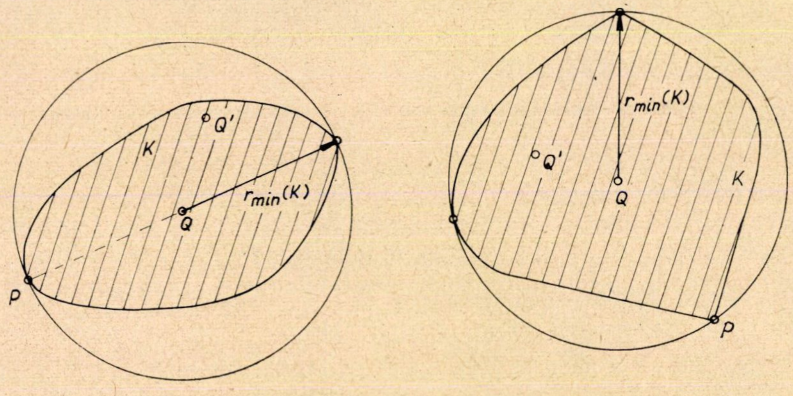
6. ábra



7. ábra

MEGJEGYZÉS. Az előbbi jelenség megszüntetésére használható a fenti mérőszámok lineáris kombinációjaként előálló összetett mérőszám. Az ilyen mérőszámokkal, és az ezekkel kapcsolatos érdekes problémákkal azonban ebben a dolgozatban nem foglalkozunk.

MEGJEGYZÉS. A H halmazelrendezés Q pontra vonatkozó lazasági mérőszáma a $\cup H_i$ halmazt lefedő minimális sugarú kör sugara. Állításunkat egyszerűen igazolhatjuk, hiszen a minimális lefedő kör, és a $\cup H_i = K$ halmaz határának van (pontosan 2, vagy legalább 3) közös pontja. (Lásd a 8. ábrát!)



8. ábra

Ezért $\sup_{P\in K} d(P, Q) = r_{\min}(K)$, ahol Q a kör középpontja, $r_{\min}(K)$ a sugara. Mivel bármely $Q' \neq Q$ pontra $(Q \in E^2)$ $\sup_{P\in K} d(P, Q') > r_{\min}(K)$, így

$$t_6(H) = \inf_{Q\in E^2} \sup_{P\in K} d(P, Q) = r_{\min}(K).$$

2. Lazasági mérőszámok megváltozásának egymáshoz való viszonya

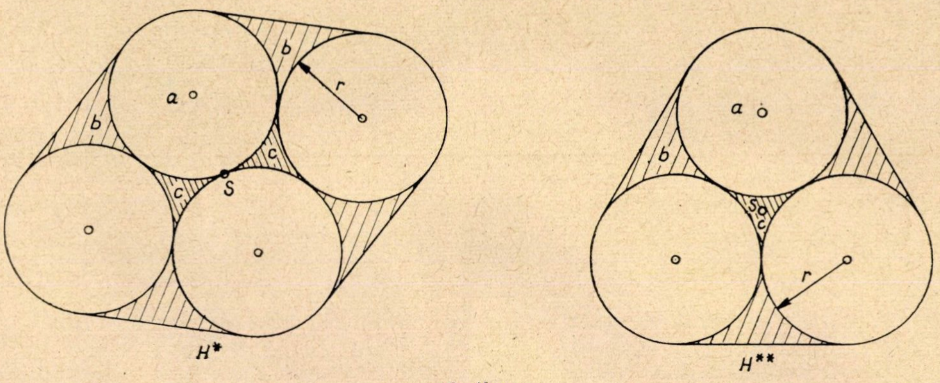
2. 1 TÉTEL: *Bármely itt szerepeltetett $t_i(H)$ és $t_j(H)$ mérőszám esetén van olyan H^* és H^{**} halmazelrendezés, melyre*

(1) $$t_i(H^*) > t_i(H^{**}) \quad \text{és} \quad t_j(H^*) > t_j(H^{**}),$$

valamint van olyan H' és H'' halmazelrendezés, melyre

(2) $$t_i(H') > t_i(H'') \quad \text{és} \quad t_j(H') < t_j(H'').$$

Bizonyítás. Az (1) egyenlőtlenségrendszer igazolására legyen a H^* halmazelrendezésben négy r sugarú kör, melyek középpontja $2r$ hosszúságú oldallal és egy $2r$ hosszúságú átlóval rendelkező rombusz csúcspontjában vannak, H^{**} halmazelrendezésben pedig legyen három, egymást páronként érintő r sugarú kör. (Lásd a 9. ábrát!)

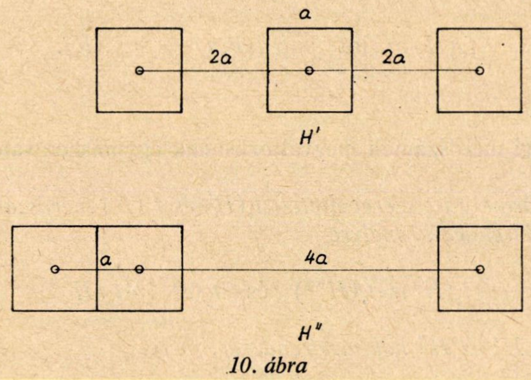


9. *ábra*

Könnyen belátható, hogy a szereplő mérőszámok bármelyikére $t(H^*) > t(H^{**})$. Példaképpen csak a $t_3(H^*)$ és $t_3(H^{**})$ mérőszámokat írjuk fel:

$$t_3(H^*) = \frac{4a+4b+2c}{4a} \quad \text{és} \quad t_3(H^{**}) = \frac{3a+3b+c}{3a},$$

ahol a, b, c rendre egy kör, két egymást érintő kör és egy közös külső érintő által határolt, három egymást páronként érintő kör által határolt halmazt, illetve ezek területét jelöli. Tehát $t_3(H^*) > t_3(H^{**})$. Állításunk második részét példákkal igazoljuk.



10. ábra

1. PÉLDA. A H' halmazelrendezésben legyen három, a oldalú négyzet, amelyek középpontjai egy egyenesen, egymástól $2a$ távolságra vannak, és megfelelő oldalaik párhuzamosak. A H'' halmazelrendezésben legyen három a oldalú négyzet, amelyek középpontjai egy egyenesen a és $4a$ távolságra vannak és megfelelő oldalaik párhuzamosak. (Lásd a 10. ábrát!) Ekkor nyilván $t_7(H') > t_7(H'')$ és $t_i(H') < t_i(H'')$, ahol $i = 1, 2, \ldots, 6$.

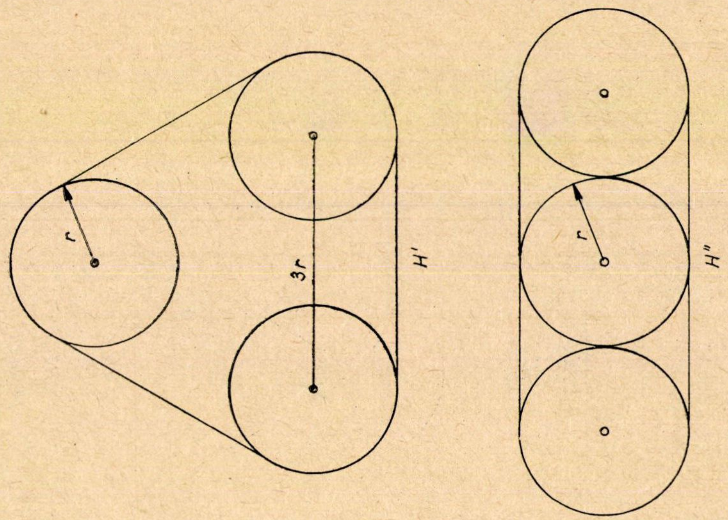
2. PÉLDA. Legyen a H' halmazelrendezésben négy egymást érintő r sugarú kör, melyek középpontja egy egyenesen van. A H'' halmazelrendezésben legyen kilenc r sugarú kör, melyek középpontjai a $2r$ oldalú szabályos háromszögrács két egymás melletti párhuzamos rácsegyenesének rácspontjai és a körök érintik egymást. (Lásd a 11. ábrát.!)
Ekkor, a már ismertetett jelöléssel:

$$t_3(H') = \frac{4a+6b}{4a}, \quad \text{illetve} \quad t_3(H'') = \frac{9a+9b+7c}{9a}.$$

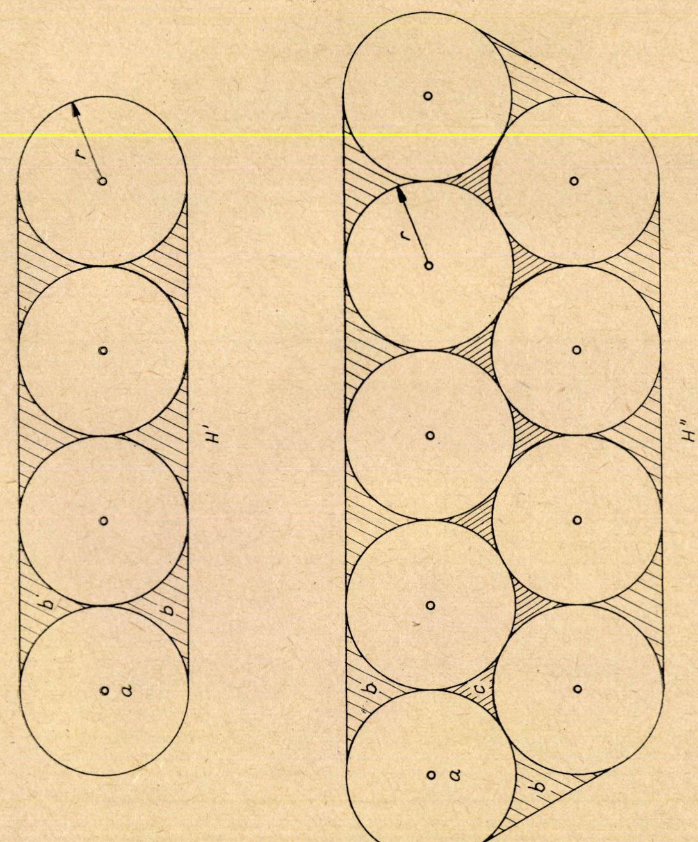
Ebből egyszerű számítással következik, hogy $t_3(H') > t_3(H'')$. A példában $t_i(H') < t_i(H'')$ egyenlőtlenségek triviálisan adódnak, ahol $i = 1, 2, 4, 5, 6, 7$.

3. PÉLDA. A H' halmazelrendezés legyen három r sugarú kör, melyek középpontjai $3r$ oldalú szabályos háromszög csúcsaiban vannak, a H'' halmazelrendezésben pedig legyen három, egymást érintő r sugarú kör, melyek középpontjai egy egyenesen vannak. (Lásd a 12. ábrát.)
Ekkor nyilvánvalóan $t_1(H') > t_1(H'')$ és $t_i(H') < t_i(H'')$ $i = 4, 5, 6$.

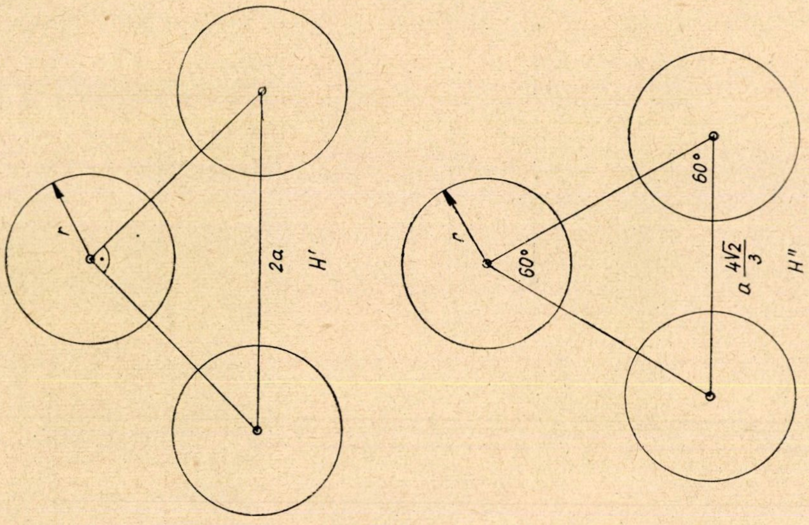
4. PÉLDA. A H' halmazelrendezés álljon három r sugarú körből, melyek középpontjai $2r$ szárú, tompaszögű, egyenlőszárú háromszöget alkotnak. A H'' halmazelrendezés ismét legyen három egymást érintő r sugarú kör, melyek középpontjai egy egyenesen vannak. (Lásd a 13. ábrát!)



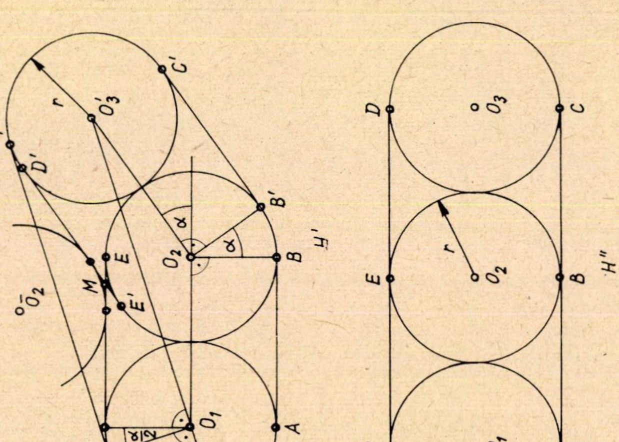
12. ábra



11. ábra



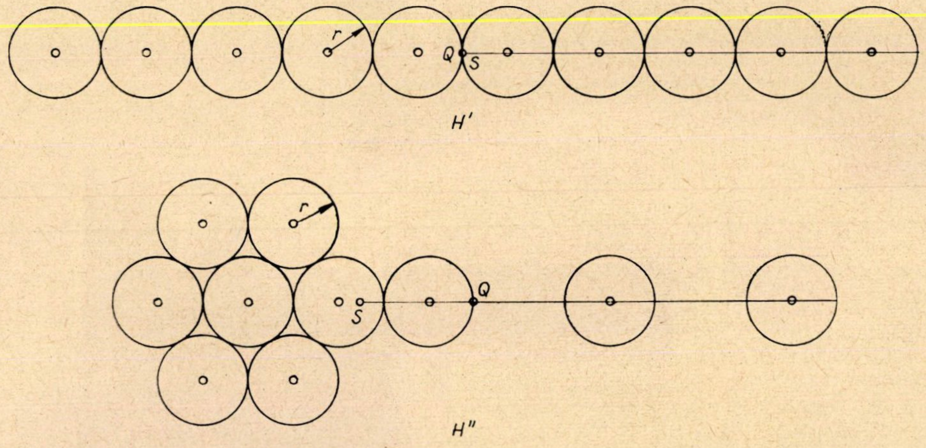
14. ábra



13. ábra

Az ábrán A, B, C, D, E, F a közös érintők érintési pontjai, és O_1, O_2, O_3 a körök középpppontjai a H'' elrendezésben. A H' tehát a H'' halmazelrendezésből az O_3 középpontú kör O_2 körüli α $(0<\alpha<\pi/2)$ szögű elforgatással keletkezik. Az ábrán B', C', D', E' rendre $B,C,D,E,$pont O_2 körüli α szögű elforgatottjait jelöli, F_1 és D_1 a H' F és D pontjainak megfelelői H''-ben. Ebben az esetben $t_2(H')>t_2(H'')$ egyenlőtlenség teljesül. Ennek igazolásához elég belátni, hogy $T_{EME'\triangle}<T_{FMD'\triangle}$, ahol M az EF és $E'D'$ szakaszok metszéspontja, T az indexben jelölt háromszögek területe. Tükrözzük az O_2 középpontú kört az M ponton keresztül. Az utóbbi két egyenlőtlenség abból következik, hogy $\alpha<\pi/2$ esetén E és E' tükörképe FM és $D'M$ szakaszok belső pontja, így az FMD' háromszög tartalmazza az $E'ME$ háromszöget. Abból, hogy $F_1F+D_1D' = BB'$ és $F_1D=O_1O_3'<4r$ valamint abból, hogy a H' halmazelrendezés súlypontja az $O_1O_2O_3'$ háromszög egy, a szimmetriatengelyen levő belső pontja, a következő egyenlőtlenségek adódnak: $t_i(H')<t_i(H'')$, $i=1, 4, 5, 6$.

5. PÉLDA. Álljon a H' halmazelrendezés három r sugarú körből, melyek középpontjai $2a(>2r)$ átfogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög csúcsait alkotják. A H'' halmazelrendezés pedig három r sugarú körből álljon, melyek középpontjai egy $a\frac{4\sqrt{2}}{3}$ oldalú szabályos háromszög csúcsait alkotják. (Lásd a 14. ábrát!) Ezekre nyilvánvalóan $t_4(H')>t_4(H'')$, de egyszerű számolással adódnak a $t_i(H')<$ $<t_i(H'')$, $i=5, 6$ egyenlőtlenségek is.



15. ábra

6. PÉLDA. A H' halmazelrendezés álljon tíz, egymást érintő r sugarú körből, melyek középpontjai egy egyenesen vannak. A H'' halmazelrendezést alkotó tíz r sugarú kör közül hat kör középpontja egy $2r$ oldalú szabályos hatszög csúcsaiban, hetedik a hatszög középpontjában van. A további három kör középpontja egy, a hatszög középpontján áthaladó átló egyenesén, a középponttól $4r$, $8r$, $16r$ távolságra van. (Lásd a 15. ábrát!)

Ekkor $t_6(H')>t_6(H'')$ és $t_5(H')<t_5(H'')$ adódik. A felírt egyenlőtlenségekből az (1) és (2) egyenlőtlenségrendszer már következik.

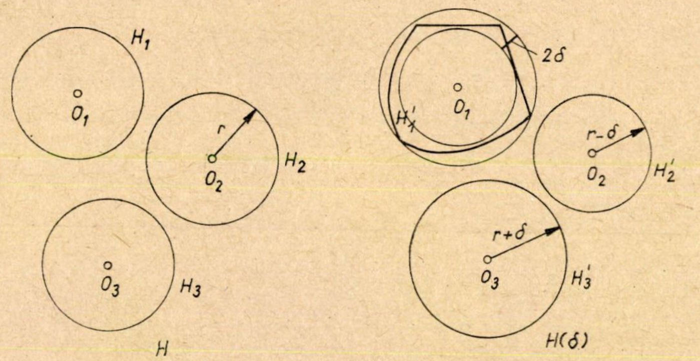
A mérőszámok változásának további vizsgálata előtt az eddigiekkel kapcsolatban természetesen felmerülő két problémát ismertetünk:

1. PROBLÉMA. Van-e olyan halmazosztály, amelynek elemeiből álló, valamely mérőszám szerint tömörebb halmazelrendezései bármely másik, itt szereplő mérőszám szerint tömörebb elrendezések?

2. PROBLÉMA. Van-e olyan halmazosztály, amelynek elemeiből álló H' és H'' halmazelrendezésekre a szereplő mérőszámok mellett, ha $t_i(H')\geqq t_i(H'')$, akkor $t_j(H')\geqq t_j(H'')$, ahol $i\neq j$?

3. Lazasági mérőszámok változása a halmazelrendezések megváltozásakor

JELÖLÉS. H_i' jelölje azt a síkbeli zárt konvex halmazt, melyre $H_i'\subset H_i(\delta)$ és $H_i\subset H_i'(\delta)$ $(i\in I)$, ahol H_i egy H halmazelrendezést alkotó halmazok, és $H_i(\delta)$ illetve $H_i'(\delta)$ a H_i illetve H_i' halmazok $\delta>0$ sugarú paralelhalmaza. $H(\delta)$ jelölje azt a halmazelrendezést, melyet a H_i' halmazok alkotnak. (Ilyen halmazelrendezéseket mutatunk be a 16*a*, és *b* ábrán.)

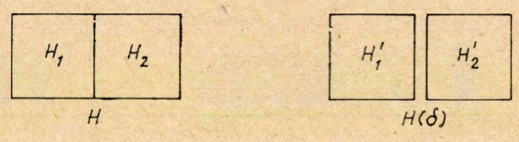


16. ábra

ÉRTELMEZÉS. Azt mondjuk, hogy az $f(H)$ halmazelrendezéseken értelmezett valós függvény (például: lazasági mérőszám) halmazelrendezés szerint folytonos, ha tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $\delta>0$, hogy

$$|f(H)-f(H(\delta))|<\varepsilon.$$

MEGJEGYZÉS. A szereplő mérőszámok közül $t_7(H)$ halmazelrendezés szerint nem folytonos függvény. Állításunk nyilvánvaló, hiszen bármely, közös határszakasszal rendelkező halmazokat tartalmazó H halmazelrendezéshez található olyan $\varepsilon>0$, hogy a H_i halmazok egy-egy belső pontjára vonatkozó $(1-\delta)$-szoros kicsinyítésével adódó $H(\delta)$ halmazelrendezésre $|t_7(H(\delta))-t_7(H)|>\varepsilon$, tetszőleges $\delta>0$-ra. (Erre egyszerű példa látható a 17. ábrán.)



17. ábra

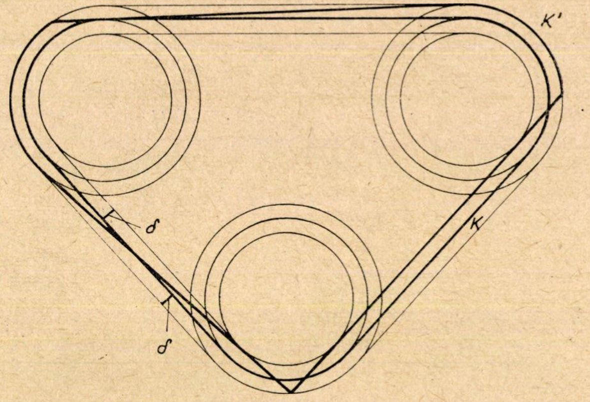
3. 1 TÉTEL: *A $t_i(H)$ mérőszámok ($i=1, 2, \ldots, 6$) halmazelrendezés szerint folytonos függvények.*

Bizonyítás. A $t_1(H)$ és $t_2(H)$ mérőszámokra állításunk abból adódik, hogy a mérőszámok legnagyobb megváltozása akkor lép fel, ha a $\cup H_i$ halmaz konvex burka $1+\delta$-szorosára növekszik. (Lásd. 18 ábrát!) Így

$$|t_1(H)-t_1(H(\delta))| \leqq t_1(H)\cdot\delta$$

illetve

$$|t_2(H)-t_2(H(\delta))| \leqq t_2(H)(\delta^2+2\delta),$$



18. ábra

tehát tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz található olyan $\delta>0$ szám, hogy $|t_i(H)-t_i(H(\delta))|<\varepsilon$ $i=1, 2$. Az értelmezésből a $t_3(H)$ mérőszámra $t_3(H)=\dfrac{t_2(H)}{T_K}$ adódik, ahol T_K az $\cup H_i=K$ halmaz területe. Ebből

$$|t_3(H)-t_3(H(\delta))| \leqq t_3(H)\left[\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^2-1\right]$$

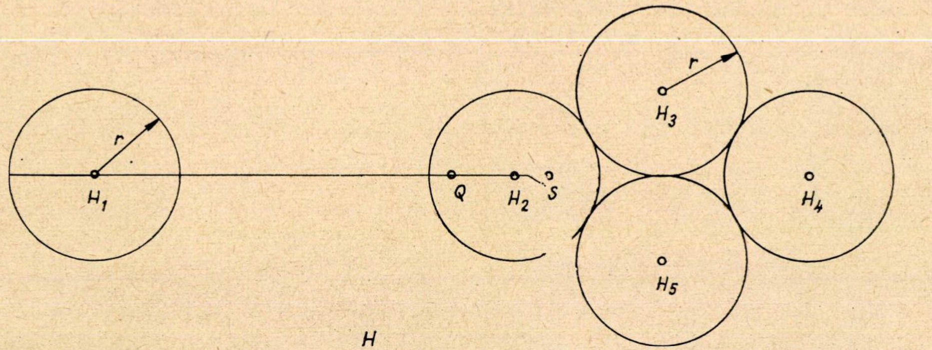
következik, tehát $t_3(H)$ halmazelrendezés szerint folytonos függvény. A $t_4(H)$ és $t_6(H)$ mérőszámokra nyilvánvalóan fennáll a $|t_i(H)-t_i(H(\delta))|<\varepsilon$ ($i=4, 6$) egyenlőtlenség, ha $0<\delta<\varepsilon/2$, tehát halmazelrendezés szerint folytonos függvények. A súlypontra vonatkozó mérőszám értelmezése alapján a $t_5(H)$ mérőszám megváltozása $|t_5(H)-t_5(H(\delta))| \leqq \Delta r+\Delta s$, ahol Δs a H halmazelrendezés S és a $H(\delta)$ halmazelrendezés S' súlypontjának távolsága, Δr pedig az S-től $H(\delta)$ és H halmazelrendezésekben mérhető legnagyobb távolságok eltérése. (Lásd a 19. ábrát!)

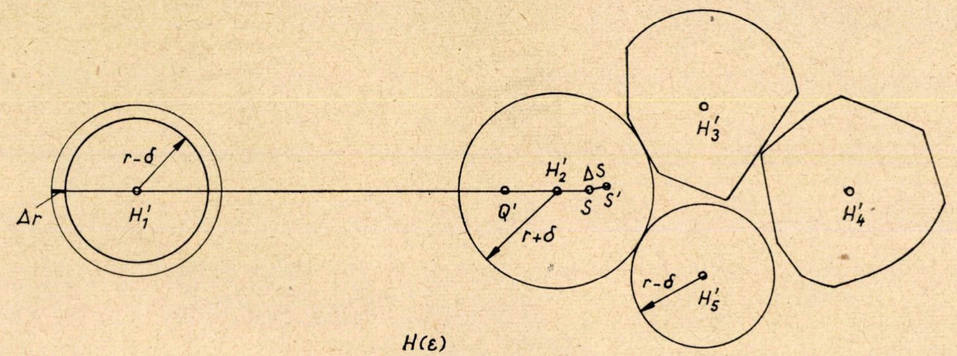
Számolással belátható, hogy ha $\delta\to 0$, akkor $\Delta r\to 0$, $\Delta s\to 0$, így δ alkalmas választásával $\Delta r+\Delta s<\varepsilon$.

MEGJEGYZÉS. Könnyen belátható, hogy az itt szereplő állításaink nemcsak belidegen halmazelrendezésekre érvényesek.

Megjegyzés a korrektúránál

Az itt szereplő mérőszámokon kívül megemlítünk még két érdekes tömörségi illetve lazasági mérőszámot, speciális példával illusztrálva. TAKÁCSY ILDIKÓ egybevágó belidegen körökből álló halmazok olyan elrendezéseit vizsgálta amelyeknél a lehető legtöbb érintési pont képződik. RUDA MIHÁLY pedig egy tömörségi mérőszámosztályt vizsgált, amelynek itt csak egy elemét említjük egy speciális esetben. Eszerint, a síkon egybevágó belidegen körök egy elrendezésének tömörsége akkor maximális, ha pl. a $\sqrt{x^2+y^2}$ függvénynek az integrálja a körök egyesített halmazán az összes elrendezéshez tartozó integrálok halmazában minimális.





19. ábra

IRODALOM

[1] BALÁZS ERZSÉBET: *Legtömörebb kockaelhelyezésekről* (kézirat).

[2] BENEDIKTI ISTVÁN: Halmazrendszerek extremális tömörségű elrendezéseivel kapcsolatos problémák, *I. MTA III. Osztály Közleményei* **19** (1969)

[3] BENEDIKTI ISTVÁN: *Távolságösszeg típusú tömörségi mérőszámokról* (kézirat).

[4] LAJOS JÓZSEF: *Téglalapok legtömörebb elhelyezéseiről* (kézirat).

[5] NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN: Kristálykémia. *A Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai* V. 51. sz., Budapest, 1944.

[6] NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN: *Kristálykémia.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.

[7] RUDA MIHÁLY: Legtömörebb elrendezések nagyságrendjéről. (kézirat)

[8] TÖLGYESI LÁSZLÓ: Egy elhelyezési problémakörről, *I. MTA III. Osztály Közleményei* **19** (1969)

[9] TÖLGYESI LÁSZLÓ: Extremális tömörségű négyzet- és háromszögrendszerek, (kézirat)

[10] YULE—KENDALL: *Bevezetés a statisztika általános elméletébe,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest 1964.

(Beérkezett: 1969. VIII. 13.)

MEASURES FOR SOLIDITY AND LOOSELESS OF SYSTEMS OF POINT SETS

by

I. BENEDIKTI

To measure solidity and looseless of a system of point sets is an important task in the geomeric allocation theory, statistics, etc. Seweral „solidity measures" and „looseless measures" are listed and discussed.

A HIPERBOLIKUS SÍK LEFEDÉSE ASZIMPTOTIKUS SOKSZÖGEKKEL

Írta: VERMES IMRE

Strommer Gyula professzornak 50. születésnapjára

1. Az euklidesi sík szabályos sokszögekkel való lefedésekor ismeretes, hogy az elemi sokszög köré képezhetők elemi sokszögekből álló övezetek, és az i-edik övezet területét R_i-vel, az i-edik övezet külső határpoligonja által határolt síkrész területét S_i-vel jelölve $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{R_i}{S_i}=0$.

Ezzel analóg problémát vizsgál a hiperbolikus sík szabályos háromszögrácsaira vonatkozóan KÁRTESZI F. [2] dolgozatában, továbbá HORVÁTH J. [1] dolgozatában e vizsgálatot kiterjeszti a hiperbolikus sík szabályos sokszögeire. Mindkét dolgozatban kimutatják, hogy a vizsgált esetekre a fentiekhez analóg módon értelmezhető határérték létezik, véges és irracionális szám.

Jelen dolgozatban a hiperbolikus sík ún. aszimptotikus sokszögekkel való lefedése esetén vizsgáljuk meg e határérték létezését.

*Aszimptotikus sokszög*nek nevezzük a hiperbolikus sík azon konvex részét, amelyet meghatározott sorrendben d számú szakasz, f számú félegyenes és e számú egyenes határol úgy, hogy a határoló oldalak sorrendjében a szereplő félegyenesek, illetve egyenesek egymással párhuzamosak. ($m = d+f+e$ esetén aszimptotikus m-szögről beszélünk.)

Itt csak kétféle aszimptotikus sokszöggel foglalkozunk. Az egyik sokszög m — az oldalak sorrendjében egymással párhuzamos — egyenes által határolt sokszög, amelynek csúcsai az oldalegyenesek végei. A másik aszimptotikus sokszög $m-2$ teljes egyenes és két félegyenes által határolt sokszög, amelynek egy végesben fekvő és $m-1$ olyan csúcsa van, amelyek a határoló oldalegyenesek végei. Nevezzük a végesben fekvő csúcsot A típusnak, az ebből kiinduló félegyenes oldalakat a típusú oldalaknak, míg a teljes egyenes oldalakat b típusúaknak és ezek végeit B típusú csúcsoknak. Tehát az egyik aszimptotikus sokszögtípusnak m számú B típusú csúcsa és m számú b típusú oldala van, míg a másiknak egy A típusú és $m-1$ számú B típusú csúcsa, továbbá két a típusú és $m-2$ számú b típusú oldala van. Az elsőt teljesen aszimptotikus m-szögnek, a másodikat ($m-1$)-ed fajú aszimptotikus m-szögnek nevezzük.

A vizsgálatból könnyen látható, hogy itt az aszimptotikus sokszög szabályosságára vonatkozóan semmit sem kell feltenni, a hiperbolikus síkot egybevágó s ily módon egyenlő (véges) területű sokszögekkel fedjük le hézagtalanul és egyrétűen.

2. A hiperbolikus sík lefedése teljesen aszimptotikus sokszögekkel

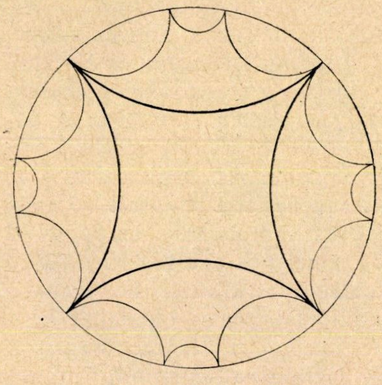
Egy teljesen aszimptotikus m-szöget ($m \geqq 3$) minden oldalára tükrözve kapjuk a sokszöget körülvevő első övezetet (1. ábra. $m=4$ esetén POINCARÉ-féle körmodellen), amelynek határoló egyeneseire ezen egyeneseket oldalként tartalmazó sokszögeket ismét tükrözve a második övezethez jutunk. E tükrözések sorozata vég nélkül folytatható, s ezáltal a hiperbolikus sík lefedéséhez jutunk. Minthogy egyenlő területű $(T = (m-2)\pi)$ sokszögek szerepelnek a lefedésben, ezért az i-edik övezet területe jellemezhető az övezetben levő sokszögek R_i számával és az övezet külső határa által befoglalt terület a tartományban levő sokszögek S_i számával. Könnyen adódik, hogy

$$R_i = m(m-1)^{i-1} \quad \text{és} \quad S_i = 1+m\sum_{j=0}^{i-1}(m-1)^j$$

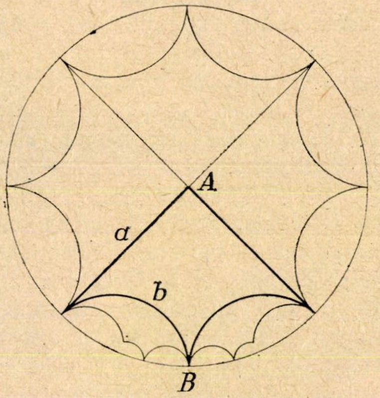
tehát

$$\lim_{i\to\infty}\frac{R_i}{S_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{m(m-1)^{i-1}}{1+m\dfrac{(m-1)^i-1}{m-2}} = \frac{m-2}{m-1}.$$

Megállapítható tehát, hogy a szóban forgó határérték létezik, véges és racionális szám.



1. ábra



2. ábra

3. A hiperbolikus sík lefedése $(m-1)$-ed fajú aszimptotikus sokszögekkel

Az $(m-1)$-ed fajú aszimptotikus m-szög ($m \geqq 3$) A típusú csúcsánál levő szög $\frac{2\pi}{k}$ ($k \geqq 3$). A sík lefedésénél az első övezet oly módon adódik, hogy az alapsokszöget a b típusú oldalakra tükrözzük, továbbá az A típusú csúcsból kiinduló egyik a típusú oldalra tükrözve a sokszöget, a kapott sokszöget a kiindulási sokszöggel nem közös a típusú oldalára tükrözzük, s i. t. Összesen $(k-1)$ számú tükrözéssel a kiindulási sokszög másik a típusú oldalával közös oldalú sokszöget kapunk. (2. ábra.

$m=4$, $k=4$ esetén a POINCARÉ-féle körmodellen). A további övezetek hasonló módon tükrözésekkel képezhetők, s az övezetek képzése — s ezzel a hiperbolikus sík lefedése — vég nélkül folytatható.

Az i-edik övezet határán levő a típusú élek száma a_i és a b típusú élek száma b_i. Az i-edik övezet határán levő minden A típusú csúcshoz két a típusú él tartozik. A lefedés során egy A típusú csúcshoz a következő övezethatáron $(k-1)\cdot(m-2)$ számú b típusú él tartozik, míg az i-edik övezet határán levő valamely b típusú oldalhoz a következő övezethatáron két a típusú él és $(m-3)$ számú b típusú él tartozik. Ezek szerint

$$a_{i+1}=2b_i$$

$$b_{i+1} = \frac{a_i}{2}(k-1)\cdot(m-2)+b_i(m-3),$$

vagyis

$$b_{i+1} = b_{i-1}(k-1)\cdot(m-2)+b_i(m-3)$$

(1) $$b_0 = m-2$$

$$b_1 = (m-2)\cdot(m+k-4).$$

Ennek alapján könnyen adódik, hogy az i-edik övezetben levő sokszögek száma

$$R_i = \frac{a_{i-1}}{2}(k-1)+b_{i-1}$$

vagyis

(2) $$R_i = b_{i-2}(k-1)+b_{i-1} \quad \text{és} \quad R_1 = k+m-3.$$

Az i-edik övezet határa által bezárt sokszögek száma

$$S_i = 1+\sum_{j=1}^{i} R_j,$$

illetve (2) felhasználásával

(3) $$S_i = 1+R_1+(k-1)\sum_{j=2}^{i} b_{j-2}+\sum_{j=2}^{i} b_{j-1}.$$

(Megjegyezzük, hogy az övezetek és az övezethatárok által befoglalt sokszögek területei az általuk tartalmazott sokszögek számával jellemezhető, mivel a lefedésben egyenlő területű $\left(T=\left(m-2-\frac{2}{k}\right)\pi\right)$ sokszögek szerepelnek.)

Könnyen belátható, hogy $s=\sum_{j=1}^{i-2} b_j$ bevezetésével és (2) felhasználásával (3) a következő alakban írható fel

(4) $$S_i = ks+k(m-1)+b_{i-1}$$

ahol s zárt formában való előállítására (1) alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{i-2} b_{j+1} = (k-1)\cdot(m-2)\sum_{j=1}^{i-2} b_{j-1}+(m-3)\sum_{j=1}^{i-2} b_j$$

illetve

$$s-b_1+b_{i-1} = (k-1)\cdot(m-2)\cdot(s+b_0-b_{i-2})+(m-3)s.$$

Ebből s kifejezhető és közben (1)-et ismét felhasználva a következő alakra hozható:

$$s=\frac{b_i-(m-4)b_{i-1}-(k-1)\cdot(m-2)^2-(m-2)\cdot(m+k-4)}{k(m-2)-2}.$$

Most vizsgáljuk az $\frac{R_i}{S_i}$ hányadost, illetve ennek határértékét $i\to\infty$ esetén.

$$\frac{R_i}{S_i}=\frac{b_{i-2}(k-1)+b_{i-1}}{k(m-1)+ks+b_{i-1}}=\frac{(k-1)\frac{b_{i-2}}{b_{i-1}}+1}{\frac{k(m-1)}{b_{i-1}}+\frac{ks}{b_{i-1}}+1}.$$

Ennek alapján

(5) $$\lim_{i\to\infty}\frac{R_i}{S_i}=\frac{(k-1)\lim\limits_{i\to\infty}\frac{b_{i-2}}{b_{i-1}}+1}{k\cdot\lim\limits_{i\to\infty}\frac{s}{b_{i-1}}+1},$$

ahol

(6) $$\lim_{i\to\infty}\frac{s}{b_{i-1}}=\frac{\lim\limits_{i\to\infty}\frac{b_i}{b_{i-1}}-(m-4)}{k(m-2)-2}.$$

Az (5) és (6) alapján látható, hogy a határérték létezésének feltétele az $\{x_i\}=\left\{\frac{b_{i+1}}{b_i}\right\}$, illetve az $\{y_i\}=\left\{\frac{b_i}{b_{i+1}}\right\}$ sorozatok határértékének létezése ($i\to\infty$ esetén). Minthogy $x_i=\frac{1}{y_i}$ és mindkét sorozat

$$1<x_i<(k-1)\cdot(m-2)+(m-3)$$

miatt korlátos, tehát elegendő az egyik, pl. az $\{x_i\}$ sorozatot vizsgálni. Az (1) felhasználásával

(7) $$x_i=\frac{1}{x_{i-1}}(m-2)\cdot(k-1)+(m-3)$$

adódik, ennek alapján a sorozat két szomszédos tagjának különbsége s ennek abszolút értéke kifejezhető:

$$|x_i-x_{i-1}|=\frac{(m-2)\cdot(k-1)}{x_{i-1}\cdot x_{i-2}}|x_{i-1}-x_{i-2}|.$$

Tovább folytatva kapjuk, hogy

$$|x_i-x_{i-1}|=\frac{[(m-2)\cdot(k-1)]^{i-4}}{\prod\limits_{j=3}^{i-1}x_j\cdot\prod\limits_{j=4}^{i-2}x_j}|x_4-x_3|,$$

tehát

$$|x_i - x_{i-1}| = \frac{[(m-2)\cdot(k-1)]^{i-4}}{\frac{b_i}{b_3}\cdot\frac{b_{i-1}}{b_4}}|x_4 - x_3|. \tag{8}$$

Ha $m>3$, akkor (1) alapján

$$b_i > b_{i-2}[(m-2)\cdot(k-1)+(m-3)]$$

adódik, ennek felhasználásával páros i-re

$$b_i > [(m-2)\cdot(k-1)+(m-3)]^{\frac{i-4}{2}}\cdot b_4,$$

illetve

$$b_{i-1} > [(m-2)\cdot(k-1)+(m-3)]^{\frac{i-4}{2}}\cdot b_3;$$

páratlan i-re pedig

$$b_i > [(m-2)\cdot(k-1)+(m-3)]^{\frac{i-3}{2}}\cdot b_3,$$

illetve

$$b_{i-1} > [(m-2)\cdot(k-1)+(m-3)]^{\frac{i-5}{2}}\cdot b_4.$$

A kapott egyenlőtlenségeket (8)-ba helyettesítve

$$|x_i - x_{i-1}| < \left[\frac{(m-2)\cdot(k-1)}{(m-2)\cdot(k-1)+(m-3)}\right]^{i-4}|x_4 - x_3|$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Az $\{x_i\}$ sorozat korlátossága, valamint

$$\frac{(m-2)\cdot(k-1)}{(m-2)\cdot(k-1)+(m-3)} < 1$$

folytán $i\to\infty$ esetén $|x_i - x_{i-1}| \to 0$, tehát $\{x_i\}$ sorozat a CAUCHY-féle konvergencia kritériumnak eleget tesz. A $\lim x_i = X$ és $\lim y_i = Y$ $\left(\text{nyilván } X=\frac{1}{Y}\right)$ határértékeket a (7) felhasználásával adódó

$$X = \frac{1}{X}(m-2)\cdot(k-1)+(m-3)$$

egyenletből számítjuk ki:

$$X = \frac{m-3+\sqrt{(m-3)^2+4(m-2)\cdot(k-1)}}{2}$$

$$Y = \frac{-m+3+\sqrt{(m-3)^2+4(m-2)\cdot(k-1)}}{2(m-2)\cdot(k-1)}.$$

Ennek alapján

$$\lim_{i\to\infty}\frac{R_i}{S_i} = \frac{(k-1)Y+1}{k\dfrac{X-(m-4)}{k(m-2)-2}+1}$$

létezik, véges és végtelen sokszor állíthat elő mind racionális mind kvadratikus irracionális számot.

Könnyen látható, hogy a határértékként előállított szám akkor és csak akkor irracionális, ha $\sqrt{(m-3)^2+4(m-2)\cdot(k-1)}$ irracionális. Ha $m=4+d$ és $k=4+2d$ ($d\geqq 0$ egész) alakú, akkor a gyökjel alatt teljes négyzetet kapunk, tehát a határérték racionális szám.

Ha valamely meghatározott m értékre $\left(4(m-2),\,(m-3)^2\right)=1$, akkor DIRICHLET tétele szerint a gyökjel alatti kifejezés végtelen sokszor állít elő prímszámot, tehát a gyök értéke végtelen sokszor lehet irracionális szám, ámde $\left(4(m-2),\right.$ $\left.(m-3)^2\right)=1$ pl. minden olyan esetben, ha $m-3$ páratlan prímszám.

Ha $m=3$, akkor az x_i sorozat $b_{2n-1}=(k-1)^n$, $b_{2n}=(k-1)^n$, $b_{2n+1}=(k-1)^{n+1}$, $b_{2n+2}=(k-1)^{n+1}$ miatt alternálóvá válik, vagyis $x_{2n}=k-1$ és $x_{2n+1}=1$. Ezek szerint a vizsgált határérték páros i-re

$$\lim_{i\to\infty}\frac{R_i}{S_i}=\frac{2(k-2)}{3k-2}$$

és páratlan i-re

$$\lim_{i\to\infty}\frac{R_i}{S_i}=\frac{k(k-2)}{(k-1)\cdot(k+2)},$$

mindkettő racionális szám.

A dolgozatban szereplő lefedéseknél előállított határértékek egzisztenciája állandó, negatív görbületű terekben reprezentált végtelen gráfokra vonatkozó limestételekre is átfogalmazható. Erre az összefüggésre a dolgozat kéziratban való elolvasása alkalmával KÁRTESZI FERENC professzor úr hívta fel figyelmemet, amiért e helyt is hálás köszönettel tartozom.

IRODALOM

[1] HORVÁTH J., Über die regulären Mosaiken der hyperbolischen Ebene, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* 7 (1964) 49—53.

[2] KÁRTESZI F., Eine Bemerkung über das Dreiecknetz der hyperbolischen Ebene, *Publ. Math. Debrecen,* 5 (1957), 142—146.

(Beérkezett: 1969. X. 27.)

ÜBER DIE ABDECKUNG DER HYPERBOLISCHEN EBENE DURCH ASYMPTOTISCHE VIELECKE

von

I. VERMES

Herrn Professor Dr. Julius Strommer zum 50. Geburtstage gewidmet

Zusammenfassung

F. KÁRTESZI [2] und J. HORVÁTH [1] haben gezeigt, daß in der hyperbolischen Ebene im Falle der Abdeckung durch reguläre Dreiecke bzw. reguläre Vielecke — wo Gürtel von Elementarvielecken um ein Elementarvieleck gebildet werden können — der Grenzwert des Quotienten $\frac{R_i}{S_i}$ $(i\to\infty)$ exis-

tiert und immer eine endliche, irrationale Zahl ist. Dabei ist R_i der Flächeninhalt des zwischen den Gürtelbegrenzungen g_{i-1} und g_i gelegen Teiles der Ebene und S_i der Flächeninhalt der durch die Begrenzung g_i umschlossenen Fläche.

In dieser Arbeit untersuchen wir die Existenz dieses Grenzwertes bei der Abdeckung der hyperbolischen Ebene durch asymptotische Vielecke. In der Abdeckung durch total asymptotische Vielecke (die Seiten des Vieleckes sind zueinander parallele Geraden) ist dieser Grenzwert immer eine rationale Zahl. Im Falle der $(m-1)$-fach asymptotischen Vielecke (ein Vieleck ist durch $m-2$ Geraden und zwei Halbgeraden umschlossen) kann der Grenzwert unendlich oft sowohl rationale als auch irrationale Werte annehmen, sofern $m>3$ ist. Für $m=3$ sind $\lim \frac{R_{2n}}{S_{2n}}$ und $\lim \frac{R_{2n+1}}{S_{2n+1}}$ voneinander verschieden, aber beide rational.

EGY HIBAKERESÉSI ELJÁRÁS OPTIMALIZÁLÁSA

Írta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR*

Bevezetés

Az utóbbi években a műszaki szakemberek mind nagyobb figyelmet fordítanak a sok alkatrészből álló bonyolult, összetett rendszerekben fellépő üzemzavarok felkutatásának problémáira. Mivel számos felhasználásra kerülő elem megbízhatóságának lényeges növelése nem minden esetben lehetséges, ezért a készülékek kellő szintű megbízhatóságát gyakran csak az elemek számának növelése árán lehet elérni. Ekkor viszont egyre nehezebb meghibásodás esetén, a hibás elemet megtalálni. A hiba megkeresése gyakran sokkal több időt és fáradtságot igényel mint a hiba kijavítása. Az elmondottakból is érzékelhető, hogy az eddigi intuitív módon történő hibakereséssel szemben jelentős szerepe van a matematikai meggondolások alapján végzett hibakeresésnek.

A keresési idő lerövidítésével, valamint az optimális keresési módszerek vizsgálatával a hibakeresés elmélete (search theory) foglalkozik.

Egy n elemű berendezés esetén a hiba megkeresésének egyik legkézenfekvőbb módszere, hogy egyenként megvizsgáljuk az elemeket egészen addig, míg a hibás elemet meg nem találjuk. Ha az n elem között van néhány olyan, amely lényegesen nagyobb valószínűséggel hibásodik meg a többihez képest és hibás voltának vizsgálata nem vesz igénybe hosszú időt, akkor ezeken kezdve a hibakeresést átlagosan rövidebb ideig tart megkeresni a hibát, mint abban az esetben, ha — ezt a tényt figyelmen kívül hagyva — sorba vizsgáltuk volna az elemeket, beleértve a kicsiny valószínűséggel hibásodókat is. Ez tehát azt jelenti, hogy a hibakeresés idejének várható értéke függ az elemek vizsgálatának sorrendjétől.

Az optimális sorrend megkeresésével — amely alapján átlagosan a legrövidebb idő alatt találjuk meg a hibás elemet — a szakirodalomban számos cikk foglalkozik. (L. pl. [1]-ből a 155. o. található hivatkozásokat.)

A közzétett munkák legtöbbje érthetően az optimális sorrendet biztosító algoritmus megadására törekszik, s ha a módszer nem igényli, akkor nem is foglalkoznak annak a gyakorta lényegesen nehezebb kérdésnek a megválaszolásával, hogy az optimális sorrend betartása mellett átlagosan mennyi idő szükséges a hibás elem meghatározásához. Ezen utóbbi várható érték ismerete különösen fontos a berendezés meghibásodása folytán előállt állásidők alatt keletkező veszteségek gazdasági értékeléséhez.

Ebben a dolgozatban a szerzők egy olyan eljárást ismertetnek, melynek alapján — bizonyos feltételek mellett — először a hibás elem „felkutatásához" szükséges idő várható értékét határozzák meg, s ennek ismeretében adják meg a hibakeresés

* A szerzők az itt közzétett eredményeket — tájékoztató jelleggel — az 1969. szept. 16—19-én Tihanyban rendezett *Megbízhatóságelméleti Kollokviumon* ismertették.

optimális sorrendjét, melyhez végső fokon a várható érték minimalizálása útján jutnak. Az alkalmazott gondolatmenet — mint látni fogjuk — lehetőséget ad a hibakeresési idő eloszlásának a meghatározására is. Ezzel a kérdéssel a 3. § foglalkozik.

1. §

Tegyük fel, hogy egy objektum, (berendezés, gyártmány, rendszer, stb.) n olyan elemből vagy részegységből áll, amely működés közben meghibásodhat.

Jelölje $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$ $(0<p_i<1;\ i=1,2,\ldots,n)$ rendre annak a valószínűségét, hogy a vizsgált rendszer megszámozott $1,2,\ldots,k,\ldots,n$ eleme hibás, feltéve, hogy tudjuk azt, hogy legalább egy elem hibás. Jelölje továbbá m_r $(r=1,2,\ldots,n)$ az r-edik elem vizsgálatához szükséges idő várható értékét $(m_r>0)$.

Vizsgáljuk meg azt, hogy milyen sorrendben kell elvégezni a hibás elem megkeresését annak érdekében, hogy a keresési idő várható értéke minimális legyen, feltéve, hogy a vizsgálat mindig helyesen és egyértelműen megadja az elem hibás vagy hibátlan voltát.

Evégből tekintsük az $1,2,\ldots,n$ számok $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n$ permutációját, s tételezzük fel, hogy $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n$ a keresési sorrend. Ebben az esetben a keresési idő várható értéke:

$$T = p_{i_1} m_{i_1} + p_{i_2}(m_{i_1}+m_{i_2}) + \cdots + p_{i_k} \sum_{l=1}^{k} m_{i_l} + p_{i_{k+1}} \sum_{l=1}^{k+1} m_{i_l} + \cdots + p_{i_n} \sum_{l=1}^{n} m_{i_l}.$$

Legyen

$$h_1 = h(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}) = \sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j} \sum_{l=1}^{j} m_{i_l},$$

$$h_2 = h(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}) = p_{i_k} \sum_{l=1}^{k} m_{i_l} + p_{i_{k+1}} \sum_{l=1}^{k+1} m_{i_l},$$

$$h_3 = h(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n) = \sum_{j=k+2}^{n} p_{i_j} \sum_{l=1}^{j} m_{i_l}.$$

Mint látható h_1 és h_3 értéke nem függ i_k és i_{k+1} sorrendjétől; azaz ha a vizsgálati sorrendben előbb az i_{k+1} elemet ellenőrizzük, s utána az i_k-adikat úgy, hogy az összes többi elemet az eredeti sorrendben vizsgáljuk, akkor a vizsgálati idő várható értéke az alábbiak szerint változik:

$$[h_1(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}) + h_2(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_k) + h_3(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_k, \ldots, i_n)] -$$

$$-[h_1(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}) + h_2(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}) + h_3(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n)] =$$

$$= h_2(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_k) - h_2(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1})] =$$

$$= p_{i_{k+1}}\left(\sum_{l=1}^{k-1} m_{i_l} + m_{i_{k+1}}\right) + p_{i_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1} m_{i_l} + m_{i_k} + m_{i_{k+1}}\right) -$$

$$-p_{i_{k+1}}\left(\sum_{l=1}^{k-1} m_{i_l} + m_{i_k} + m_{i_{k+1}}\right) - p_{i_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1} m_{i_l} + m_{i_k}\right) = p_{i_k} m_{i_{k+1}} - p_{i_{k+1}} m_{i_k}.$$

Nyilvánvaló, hogy az ellenőrzés felcserélése akkor és csak akkor csökkenti a keresési időt, ha

$$p_{i_k} m_{i_{k+1}} - p_{i_{k+1}} m_{i_k} < 0,$$

vagyis ha

$$\frac{m_{i_{k+1}}}{p_{i_{k+1}}} < \frac{m_{i_k}}{p_{i_k}}.$$

Amennyiben az $i_1, i_2, \cdots, i_n$ optimális sorrend volt, kell, hogy $p_{i_k} m_{i_{k+1}} - p_{i_{k+1}} m_{i_k} \geqq 0$ legyen, vagyis hogy

$$\frac{m_{i_k}}{p_{i_k}} \leqq \frac{m_{i_{k+1}}}{p_{i_{k+1}}}.$$

Ebből már könnyen kiolvasható, hogy a keresési idő várható értéke akkor és csak akkor lesz minimális, ha a vizsgálatot az $\frac{m_i}{p_i}$ hányadosok növekvő sorrendje által determinált index rendszernek megfelelően hajtjuk végre.

1. *Megjegyzés.* Az optimális sorrend létezése nyilvánvaló. Ugyanis a lehetséges vizsgálati sorrendek száma véges ($n!$); s mindegyik sorrendhez a keresési idő véges várható értéke — a közölt feltételek mellett — egyértelműen meghatározott. Véges sok valós számot tartalmazó halmazból pedig mindig kiválasztható egy olyan valós szám, melynél a halmazban már kisebb elem nincs. Legyen egy ezen legkisebb értékhez tartozó sorrend az $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n$. Ezen optimális sorrendnek ki kell elégíteni az

$$\frac{m_{i_k}}{p_{i_k}} \leqq \frac{m_{i_{k+1}}}{p_{i_{k+1}}} \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

egyenlőtlenség rendszert. Ha az egyenlőség sehol sem áll fenn, akkor ezek az egyenlőtlenségek is determinálnak egy egyértelmű sorrendet, mely szükségképpen megegyezik az optimális sorrenddel. Ha pedig egyenlőek is vannak az $\frac{m_i}{p_i}$ hányadosok között, akkor több optimális sorrend van, mivel $\frac{m_{ik}}{p_{ik}} = \frac{m_{i_{k+1}}}{p_{i_{k+1}}}$ esetén az i_k és az i_{k+1} elem vizsgálati sorrendjét felcserélve a vizsgálati idő várható értéke nem változik.

2. §

Az előző §-ban feltételeztük, hogy az egyes elemek ellenőrzése mindig a valóságnak megfelelően mutatja azok jó vagy hibás voltát. A gyakorlatban azonban a vizsgálat legtöbbször csak bizonyos valószínűséggel ad helyes eredményt. Ennek a ténynek a figyelembevétele a keresési eljárás megválasztásánál mindenképpen indokolt. Ebben a §-ban az alábbiakban ismertetésre kerülő modell mellett végezzük matematikai meggondolásainkat.

1. MODELL: 1° A meghibásodott objektum (berendezés, készülék stb.) n eleme közül — a hibakeresés időpontjában — egy és csak egy elem hibás.

2° A hibamegkeresés érdekében az elemeken végzett ellenőrzést egy előre meghatározott eljárási sorrendben hajtjuk végre.

3° Ha az ellenőrzés alapján az elemet (pl. alkatrészt) jónak minősítjük, tovább folytatjuk a vizsgálatot a 2°-ben megjelölt sorrendben; ha rossznak minősítjük, akkor az elemen a javítást elvégezzük (pl. a hibásnak minősített elemet kicseréljük), s ezt követően az objektumon ellenőrzést hajtunk végre, mely mindig helyes eredményt ad. Ha az objektum jónak minősül, a vizsgálatot az ellenőrzés után mindenképpen befejezzük, mert az ellenőrzés biztosan helyes eredményre vezet. Ha nem, akkor tovább folytatjuk a hibakeresést a 2°-nek megfelelően.

4° Az összes szóbajövő vizsgálatoknál

— az egyes elemek ellenőrzése mint esemény
— az objektum ellenőrzése mint esemény
— az elemek ellenőrzési ideje mint valószínűségi változó
— az objektum ellenőrzési ideje mint valószínűségi változó

teljesen függetlenek.

5° Ha minden elemet már megvizsgáltunk és nem találtuk meg a hibását, akkor a 2°-nek megfelelően újra kezdjük a hibakeresést, s ezt az eljárást mindaddig folytatjuk, míg a hibás elemet meg nem találjuk.

6° A hibás elem javítása után az objektum hibátlan lesz.
A közölt modell vizsgálatára vezessük be az alábbi jelöléseket. Legyen minden esetben

m_j — a j-edik elem ellenőrzési idejének várható értéke.
u_j — a j-edik elem javítási idejének és az azt követő objektum ellenőrzés idejének várható értéke feltéve, hogy a j-edik elem jó, de az ellenőrzés során azt hibásnak minősítettük.
δ_j — annak a valószínűsége, hogy a j-edik elem az ellenőrzés során jónak minősül feltéve, hogy valóban jó is.
γ_j — annak a valószínűsége, hogy a j-edik elem az ellenőrzés során rossznak minősül feltéve, hogy valóban rossz is, függetlenül a vizsgálati és esetleges javítási idők hosszától ($\gamma_j>0; j=1, 2, \dots, n$).
A továbbiakban használni fogjuk még az alábbi jelöléseket:
A_k — az az esemény, hogy a hibás objektumban a k-adik elem a hibás.
p_k — az A_k esemény valószínűsége $\left(P(A_k)=p_k;\ \sum_{k=1}^{n} p_k=1\right)$.
$\xi=\xi(i_1, i_2, \dots, i_n)$ — a keresési idő (a hibás elem megtalálásáig eltelt idő) egy adott $i_1, i_2, \dots, i_n$ sorrendben végzett vizsgálat mellett.
B_k — az az esemény, hogy az előre rögzített vizsgálati sorrendben k-adiknak vizsgáljuk a hibás elemet.

1. TÉTEL: *A modell feltételei és a bevezetett jelölések mellett a keresési idő várható értéke:*

$$M(\xi)=\sum_{k=1}^{n} p_{i_k}\sum_{l=1}^{k} m_{i_l}+\sum_{k=2}^{n} p_{i_k}\sum_{l=1}^{k-1} u_{i_l}(1-\delta_{i_l})+mv+u,$$

ahol

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(1-\gamma_i)}{\gamma_i},$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} \left[p_i \frac{(1-\gamma_i)}{\gamma_i} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} u_l(1-\delta_l) \right].$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a modell feltételei és az alkalmazott jelölések mellett minden $k=1, 2, ..., n$ esetén $B_k = A_{i_k}$; ugyanis a rögzített sorrendben végzett ellenőrzés mellett, akkor és csak akkor vizsgáljuk k-adiknak a hibás elemet, ha az i_k-adik elem a hibás. Ennek alapján, mivel 1°-ben feltételeztük, hogy egy és csak egy eleme hibás az objektumnak, ezért $B_1, B_2, ..., B_n$ teljes eseményrendszert alkot; vagyis $B_k \cap B_j = \emptyset$ minden $k \neq j$ esetén és $\sum_{k=1}^{n} P(B_k) = 1$. Ebből következik, hogy

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{n} M(\xi | B_k) P(B_k).$$

Ezen utóbbi összefüggés jobb oldalán szereplő $P(B_k) = p_{i_k}$ mivel $B_k = A_{i_k}$ ($k= =1, 2, ..., n$). Az $M(\xi)$ meghatározása érdekében vizsgáljuk most az $M(\xi|B_k)$ feltételes várható értékeket tetszőlegesen rögzített $1 \leqq k \leqq n$ esetén. Evégből vezessük be az alábbi jelöléseket:

$\varphi_{i_l}^{(\nu)}$ — az i_l-edik elem ellenőrzési ideje a ν-edik vizsgálat során;

$\psi_{i_l}^{(\nu)}$ — az i_l-edik elem ($l \neq k$) javítási ideje és az azt követő objektum ellenőrzésének ideje a ν-edik ellenőrzés után;

$\zeta_{i_l}^{(\nu)}$ — az i_l-edik elem ($l \neq k$) ellenőrzési és szükség esetén előállt javítási, valamint az ezt követő objektum ellenőrzési idők összege a ν-edik vizsgálat során; feltéve, hogy az i_k-adik elem a hibás. Az itt szereplő mennyiségek, valószínűségi változók, amelyek közül az első kettő várható értéke a korábbi jelölésekkel összhangban rendre:

$$\left. \begin{aligned} M(\varphi_{i_l}^{(\nu)}) &= m_{i_l} \\ M(\psi_{i_l}^{(\nu)}) &= u_{i_l} \end{aligned} \right\} \quad (\nu = 1, 2, ...;\ l = 1, 2, ..., n).$$

A további számítástechnikai és jelölési egyszerűsítések miatt legyen

$$\eta^{(0)} = \zeta_{i_1}^{(1)} + \zeta_{i_2}^{(1)} + \cdots + \zeta_{i_{k-1}}^{(1)} + \varphi_{i_k}^{(1)}$$

$$\eta^{(\nu)} = \zeta_{i_{k+1}}^{(\nu)} + \zeta_{i_{k+2}}^{(\nu)} + \cdots + \zeta_{i_n}^{(\nu)} + \zeta_{i_1}^{(\nu+1)} + \zeta_{i_2}^{(\nu+1)} + \cdots + \zeta_{i_{k-1}}^{(\nu+1)} + \varphi_{i_k}^{(\nu+1)}.$$

Ezen előzmények után az $M(\xi|B_k)$ feltételes várható érték meghatározásánál az alábbi — bizonyos szempontból általánosabb jellegű — meggondolások alkalmazhatók.

2. MODELL. Tegyük fel, hogy a vizsgált folyamatnál csak C_1 és C_2 típusú egymást kizáró állapotok fordulnak elő úgy, hogy valamelyik állapot mindig fennáll.

Jelölje $\{\tau_k\}$ az egyes állapotok véletlen befejezési időpontjainak sorozatát. Tegyük fel, hogy a sorozat első τ_n pontjaiban mindig C_1 típusú állapot fejeződik be $(n=1, 2, \ldots)$. Tételezzük fel továbbá, hogy a $\tau_k=t_k$ feltétel mellett $(k=1, 2, \ldots, n)$ $\varrho(t_k)$ valószínűséggel következik be C_1 típusú állapot, $1-\varrho(t_k)$ valószínűséggel pedig C_2 típusú.

Visszatérve az eredeti problémánkhoz, esetünkben C_1 a hibakeresés állapotát, C_2 pedig a hibakeresés befejezése utáni állapotot jelenti úgy, hogy a $\tau_0=0$ időpontban C_1 típusú állapot kezdődik.

A C_1 állapot — 3° értelmében — akkor és csak akkor fejeződhet be, ha valamely vizsgálatnál a hibás elemet hibásnak minősítjük. A hibás elemek vizsgálatának befejezési időpontjai rendre $\eta^{(0)}, \eta^{(0)}+\eta^{(1)}, \eta^{(0)}+\eta^{(1)}+\eta^{(2)}, \ldots$ stb., azaz $\tau_l=\sum_{i=0}^{l}\eta^{(i)}$. Egy-egy vizsgálat alkalmával a hibás i_k-adik elemet γ_{i_k} valószínűséggel minősítjük rossznak, mely a C_1 állapotból a C_2 állapotba való átmenetet jelenti, ennélfogva $\varrho(t_l)=1-\gamma_{i_k}$ minden esetben.

Az itt ismertetett modellben az $M(\xi|B_k)$ megfelel, ill. azonos a C_1 állapotban való tartózkodási idő várható értékével. E várható érték meghatározására kiszámítjuk az $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(\nu)}$ valószínűségi változók várható értékeit, vagyis az $M(\eta^{(0)})$, $M(\eta^{(1)}), \ldots, M(\eta^{(\nu)}), \ldots$ értékeket.

Jelölje $D_j^{(\nu)}$ azt az eseményt, hogy a j-edik elemet a ν-edik vizsgálat során $(\nu= =1, 2, \ldots)$ rossznak minősítjük feltéve, hogy az jó. Az eddig alkalmazott jelölés szerint $P(D_j^{(\nu)})=1-\delta_j$. Ennek alapján minden $l\neq k$ esetén

$$M(\zeta_{i_l}^{(\nu)})=M(\zeta_{i_l}^{(\nu)}|D_{i_l}^{(\nu)})P(D_{i_l}^{(\nu)})+M(\zeta_{i_l}^{(\nu)}|\bar{D}_{i_l}^{(\nu)})P(\bar{D}_{i_l}^{(\nu)})=$$

$$=M(\varphi_{i_l}^{(\nu)}+\psi_{i_l}^{(\nu)})(1-\delta_{i_l})+M(\varphi_{i_l}^{(\nu)})\delta_{i_l}=m_{i_l}+u_{i_l}(1-\delta_{i_l}).$$

Ezért

$$M(\eta^{(0)})=\sum_{l=1}^{k-1}[m_{i_l}+u_{i_l}(1-\delta_{i_l})]+m_{i_k}\qquad\left(\sum_{l=1}^{0}x_l=0.\right)$$

$$M(\eta^{(1)})=M(\eta^{(\nu)})=\sum_{l=1}^{n}m_{i_l}+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{l}u_{i_l}(1-\delta_{i_l})\qquad(\nu=1, 2, \ldots).$$

Jelölje $E_j^{(\nu)}$ azt az eseményt, hogy a j-edik elemet a ν-edik vizsgálat során $(\nu=1, 2, \ldots)$ rossznak minősítjük feltéve, hogy valóban rossz. Ekkor $P(E_j^{(\nu)})=\gamma_j$. A 4°-ban tett feltételek miatt

$$M(\eta^{(0)}|E_{i_k}^{(1)})=M(\eta^{(0)})$$

$$M\left\{\sum_{j=0}^{\nu}\eta^{(j)}\,\middle|\,\bigcap_{j=1}^{\nu}(\bar{E}_{i_k}^{(j)})\cap E_{i_k}^{(\nu+1)}\right\}=M\left(\sum_{j=0}^{\nu}\eta^{(j)}\right)=M(\eta^{(0)})+\sum_{j=1}^{\nu}M(\eta^{(j)})=$$

$$=M(\eta^{(0)})+\nu M(\eta^{(1)}).$$

Minthogy az $E_{i_k}^{(1)}$, $\bigcap_{j=1}^{\nu}(\bar{E}_{i_k}^{(j)})\cap E_{i_k}^{(\nu+1)}$ $\quad\nu=1, 2, \ldots$

esetén teljes eseményrendszert alkot, ezért

$$M(\xi|B_k)=M(\eta^{(0)}|E_{i1}^{(k)})P(E_{i_k}^{(1)})+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}M\left(\sum_{j=0}^{\nu}\eta^{(j)}\middle|\bigcap_{j=1}^{\nu}(\bar{E}_{i_k}^{(j)})\cap E_{i_k}^{(\nu+1)}\right)P\left(\bigcap_{j=1}^{\nu}(\bar{E}_{i_k}^{(j)})\cap E_{i_k}^{(\nu+1)}\right)=$$

$$=M(\eta^{(0)})\gamma_{i_k}+\sum_{\nu=1}^{\infty}[M(\eta^{(0)})+\nu M(\eta^{(1)})](1-\gamma_{i_k})^{\nu}\gamma_{i_k}=M(\eta^{(0)})+\frac{1-\gamma_{i_k}}{\gamma_{i_k}}M(\eta^{(1)})=$$

$$=\sum_{l=1}^{k-1}[m_{i_l}+u_{i_l}(1-\delta_{i_l})]+m_{i_k}+\frac{1-\gamma_{i_k}}{\gamma_{i_k}}\left[\sum_{l=1}^{n}m_{i_l}+\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n}u_{i_l}(1-\delta_{i_l})\right].$$

Innen

$$M(\xi)=\sum_{k=1}^{n}M(\xi|B_k)P(B_k)=\sum_{k=1}^{n}p_{i_k}\left\{\sum_{l=1}^{k-1}[m_{i_l}+u_{i_l}(1-\delta_{i_l})]+m_{i_k}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\gamma_{i_k}}{\gamma_{i_k}}\left[\sum_{l=1}^{n}m_{i_l}+\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n}u_{i_l}(1-\delta_{i_l})\right]\right\}=\sum_{k=1}^{n}p_{i_k}\sum_{l=1}^{k}m_{i_l}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}p_{i_k}\sum_{l=1}^{k-1}u_{i_l}(1-\delta_{i_l})+\sum_{k=1}^{n}p_k\frac{1-\gamma_k}{\gamma_k}m+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{p_k(1-\gamma_k)}{\gamma_k}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n}u_l(1-\delta_l)\right].$$

Q.e.d.

2. *Megjegyzés*. Ha a tételben szereplő ξ valószínűségi változó értékéhez a hibás elem javítási idejét is hozzáadjuk, akkor — a modell feltételeinek megtartása mellett az újonnan kapott $\hat{\xi}$ valószínűségi változó várható értéke $M(\hat{\xi})=M(\xi)+z$ lesz, ahol $z=\sum_{k=1}^{n}p_kz_k$ s itt z_k a k-adik elem javítási idejének várható értéke, feltételezve, hogy a k-adik elem a hibás.

A következő tétel az elemek ellenőrzési sorrendjét optimalizálja az eddigi feltevések fenntartása mellett.

2. TÉTEL: *Az* I. MODELL*ben szereplő keresési idő várható értéke akkor és csak akkor lesz minimális, ha a vizsgálatokat az*

$$\frac{m_i+(1-\delta_i)u_i}{p_i}$$

hányadosok növekvő sorrendje által determinált indexrendszernek megfelelően hajtjuk végre.

Bizonyítás. Az 1. tételben szereplő $M(\xi)$ értékének ismeretében a bizonyítás az 1. §-ban alkalmazott optimális sorrend meghatározásához hasonlóan történik. Ennek részletezését a fentiek előrebocsátása után mellőzzük, miután itt csupán egyszerű számítástechnikai műveletek elvégzésének ismertetésére kerülne sor.

Megjegyezzük, hogy lényegében hasonló feltételek mellett, de más meggondolásokkal a 2. tétellel megegyező eredményre jutott Katona Gyula is (Vö.: [1] 159. o.).

Abban az esetben, ha ξ^*-gal jelöljük a hibakeresés idejét, midőn a vizsgálatokat a 2. tétel által determinált indexrendszernek megfelelően hajtjuk végre, akkor $M(\xi)-M(\xi^*)$ jelenti az optimálisan végrehajtott sorrendtől eltérő keresési időkülönbség várható értékét. A gyakorlatban ennek nagysága adja meg, hogy átlagosan mennyivel tovább végezzük a hibakeresést, ha az optimálistól eltérő, előre meghatározott más sorrendben látunk munkához. Ha a 2. tételben szereplő hányadosok szigorúan monoton növekvő sorozatot alkotnak, akkor egyetlen egy optimális sorrend van. Ha a munka megkezdésekor bármely sorrendet egyenlő valószínűséggel választanánk ki, akkor $\frac{1}{n!}$ annak a valószínűsége, hogy az optimális sorrendnek megfelelően látunk a munkához. Ebből azonnal látható, hogy a gyakorlatban — mivel n értéke általában nagy — igen kicsiny valószínűséggel választanánk az optimális sorrendet, másszóval igen kicsiny valószínűséggel járnánk el a leggazdaságosabban. Természetesen ez esetben ennél nem kisebb valószínűséggel kapnánk meg a leggazdaságtalanabb sorrendet is, vagyis azt a sorrendet, melyre $M(\xi)-M(\xi^*)$ értéke a legnagyobb.

Megemlítjük, hogy a hibakeresési eljárásnak egyébként nem ez a legoptimálisabb módja, mivel hogy az 5° helyett eljárhatunk úgy is, hogy ha már minden elemet megvizsgáltunk és nem találtuk meg a hibásat, akkor a 2°-nak megfelelően újra kezdjük a hibakeresést, de csak azokon az elemeken, melyeket az eljárás során eddig nem minősítettünk hibásnak. Ennek figyelembevétele nyilvánvalóan nem növeli a keresési időt. Természetesen az ilyen vizsgálat nehezíti a matematikai eredmények elérését.

3. §

Ebben a §-ban az adott, illetve előre rögzített $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sorrendben végzett vizsgálat melletti $\xi=\xi(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ hibakeresési időnek — mint valószínűségi változónak — az eloszlását fogjuk vizsgálni, illetve meghatározni azon kiinduló feltétel mellett, hogy az i_k-adik elem a hibás. Evégből vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$P(\varphi_{i_l}^{(\nu)}<x) = G_{i_l}(x) \qquad (\nu=1, 2, \ldots),$$

$$P(\psi_{i_l}^{(\nu)}<x) = K_{i_l}(x) \qquad (l\neq k;\ \nu=1, 2, \ldots).$$

Ekkor a 4°-ban tett függetlenségi feltételek miatt $l\neq k$ esetén

$$P(\zeta_{i_l}^{(\nu)}<x) = F_{i_l}(x) = P(\varphi_{i_l}^{(\nu)}+\psi_{i_l}^{(\nu)}<x)(1-\delta_{i_l})+P(\varphi_{i_l}^{(\nu)}<x)\delta_{i_l} =$$

$$= \int_0^x G_{i_l}(x-y)dK_{i_l}(y)(1-\delta_{i_l})+G_{i_l}(x)\delta_{i_l};$$

az $l=k$ esetén pedig $F_{i_k}(x)=G_{i_k}(x)$. A közölt jelölések és feltételek alapján

$$P(\eta^{(0)}<x) = F_{i_1}(x)*F_{i_2}(x)*\cdots*F_{i_{k-1}}(x)*F_{i_k}(x) = \hat{H}_{i_k}(x) \qquad (k=2, 3, \ldots, n),$$

$k=1$ esetén pedig

$$\hat{H}_{i_1}(x)=G_{i_1}(x),$$

továbbá

$$P(\eta^{(\nu)}<x) = F_{i_1}(x)*F_{i_2}(x)*\cdots*F_{i_k}(x)*\cdots*F_{i_n}(x) = H_{i_k}(x) \qquad (\nu=1, 2, \ldots),$$

ahol a $*$ jel a konvolúció képzésre utal; s definíció szerint

$$F(x)*G(x)=\begin{cases}\int\limits_0^x F(x-y)\,dG(y) & \text{ha} \quad x\geqq 0\\ 0 & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$

Mindezek előrebocsátása után a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényére vonatkozóan bebizonyítjuk a következő tételt:

3. TÉTEL:

$$P(\xi(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_n)<x) = P(\xi<x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_{i_k} T_1^{(i_k)}(x) - \sum_{k=1}^{n} p_{i_k} \sum_{m=1}^{\infty} (1-\gamma_{i_k})^m [T_m^{(i_k)}(x) - T_{m+1}^{(i_k)}(x)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_{i_k}\gamma_{i_k} \sum_{m=1}^{\infty} (1-\gamma_{i_k})^{m-1} T_m^{(i_k)}(x),$$

ahol

$$T_1^{(i_k)}(x) = \hat{H}_{i_k}(x),$$

$$T_m^{(i_k)}(x) = \int\limits_0^x H_{i_k}(x-y)\,dT_{m-1}^{(i_k)}(y) \qquad (m=2,3,\ldots).$$

Bizonyítás. A 2. §-ban ismertetett 2 MODELL alapján a C_1 állapotban való tartózkodási időt reprezentáló $(\xi|B_k)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye meghatározható MOGYORÓDI JÓZSEF [1]-ben ismertetett tételének (*l.* 177. o.) csekély módosítása segítségével (*l.* 178. o. lábjegyzet). E szerint

$$P(\xi<x|B_k) = \hat{H}_{i_k}(x) - \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^x [1-H_{i_k}(x-y)]\varrho_{i_k}(y)\,dQ_m^{(i_k)}(y),$$

ahol

$$Q_1^{(i_k)}(x) = \begin{cases}\hat{H}_{i_k}(x) & \text{ha} \quad x\geqq 0\\ 0 & \text{ha} \quad x<0,\end{cases}$$

$$Q_m^{(i_k)}(x) = \int\limits_0^x H_{i_k}(x-y)\varrho_{i_k}(y)\,dQ_{m-1}^{(i_k)}(y) \qquad (m=2,3,\ldots),$$

és esetünkben

$$\varrho_{i_k}(y) = 1-\gamma_{i_k} = \text{konstans}.$$

Bevezetve a

$$T_1^{(i_k)}(x) = Q_1^{(i_k)}(x) = \hat{H}_{i_k}(x)$$

$$T_m^{(i_k)}(x) = \int\limits_0^x H_{i_k}(x-y)\,dT_{m-1}^{(i_k)}(y) \qquad (m=2,3,\ldots)$$

jelöléseket, egyszerű számolással adódik, hogy

$$Q_m^{(i_k)}(x) = \varrho_{i_k}^{m-1} T_m^{(i_k)}(x) \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Ezt a helyettesítést elvégezve kapjuk, hogy

$$P(\xi<x|B_k) = T_1^{(i_k)}(x)-\sum_{m=1}^{\infty}\varrho_{i_k}\int_0^x [1-H_{i_k}(x-y)d\varrho_{i_k}^{m-1}T_m^{(i_k)}(y)] =$$

$$= T_1^{(i_k)}(x)-\sum_{m=1}^{\infty}\varrho_{i_k}^m[T_m^{(i_k)}(x)-T_{m+1}^{(i_k)}(x)] = (1-\varrho_{i_k})\sum_{m=1}^{\infty}\varrho_{i_k}^{m-1}T_m^{(i_k)}(x).$$

Figyelembe véve, hogy $P(\xi<x)=\sum_{k=1}^{n}P(\xi<x|B_k)P(B_k)$, állításunk már következik.

3. *Megjegyzés. a)* Kihasználva azt a feltételt, hogy az alapul vett modellnél γ_{i_k} értékei időtől függetlenek, a 3. tétel egyszerűbben is igazolható. A 2. §-ban alkalmazott jelölést felhasználva legyen

$$S_{i_k}^{(1)}=E_{i_k}^{(1)}$$

$$S_{i_k}^{(\nu+1)} = \bigcap_{j=1}^{\nu}(\bar{E}_{i_k}^{(j)})\cap E_{i_k}^{(\nu+1)} \qquad (\nu=1, 2, \ldots)$$

s itt $S_{i_k}^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ teljes eseményrendszert alkot, ezért

$$P(S_{i_k}^{(\nu)}) = \gamma_{i_k}(1-\gamma_{i_k})^{\nu-1}.$$

Ennélfogva

$$P(\xi<x|B_k) = \sum_{\nu=1}^{\infty}P(\eta^{(0)}+\eta^{(1)}+\cdots+\eta^{(\nu-1)}<x|S_{i_k}^{(\nu)})\gamma_{i_k}(1-\gamma_{i_k})^{\nu-1}.$$

Tekintettel a 4° feltételeire

$$P(\xi<x|B_k) = \sum_{\nu=1}^{\infty}P(\eta^{(0)}+\eta^{(1)}+\cdots+\eta^{(\nu-1)}<x)\gamma_{i_k}(1-\gamma_{i_k})^{\nu-1} =$$

$$= \gamma_{i_k}\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\gamma_{i_k})^{\nu-1}T_\nu^{(i_k)}(x),$$

s ebből állításunk már nyilvánvalóan következik.

b) A tétel bizonyításához [1]-ből felhasznált kiinduló — általánosabb — összefüggésből látható, hogy a γ_k értéke időtől függő is lehet. Ennek a figyelembevétele lehetővé teszi, hogy a 3. tétel alapján még általánosabb feltétel mellett határozzuk meg $M(\xi)$ értékét. Ekkor ugyanis $M(\xi)=\int_0^{\infty}[1-P(\xi<x)]dx$, s itt a ξ eloszlásfüggvényét meghatározó összefüggésben $0<\varrho_k(y)\leqq 1$ a $0<y<\infty$ intervallumon értelmezett függvény.

c) Amennyiben $\delta_i=1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, a bizonyított 1—3. tétel eredményei speciális esetként magába foglalják az 1. §-ban vizsgált modellhez kapcsolódó eredményeket.

IRODALOM

[1] DOBÓ A.—SZAJCZ S.: Bevezetés a megbízhatóságelméletbe 1—2. rész. KGM. ISZSZI Operációkutatás, Számítástechnika 2. sz. (1968).

(Beérkezett: 1969. X. 29.)

OPTIMIZATION OF AN FAILURE SEARCH PROCEDURE

by

A. DOBÓ and S. SZAJCZ

Abstract

In the paper a mathematical problem of the failure search under certain conditions, given in the Model 1, is considered.

The expected value of the failure search time (ξ), as a random variable is determined (Theorem 1.); further an optimal search policy (the conditions of the model assure the existence of an optimal policy) (cf. Theorem 2.) and the distribution function of the search time (cf. Theorem 3.) are given as well.

NUMERIKUS MÓDSZER PÓLUSOS MEGOLDÁSSAL RENDELKEZŐ ELSŐRENDŰ KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLET MEGOLDÁSÁRA

Írta: FRIVALDSZKY SÁNDOR

1. Bevezetés

Az elsőrendű közönséges differenciálegyenlet numerikus megoldásának egyik kedvelt módszere a megoldásfüggvény szakaszonkénti közelítése olyan polinommal, amelyről megköveteljük, hogy bizonyos egyenlőközű alappontokban a megoldásfüggvényt jól helyettesítse, pontosabban a polinom és a megoldásfüggvény értéke, valamint az első néhány deriváltjaiké a megadott alappontokban egyenlőek legyenek. Az új alappont, ahol a megoldásfüggvény értékét keressük, vagy a fenti pontok között van, (interpolációs módszer), vagy a kapott polinomot ide extrapoláljuk (extrapolációs módszer). (Összefoglalóan l. az [1] alatt.)

Néha jobb eredményt ad az a módszer, ha a polinom helyett egy racionális törtfüggvényt alkalmazunk a közelítésre ([2]). Ez a módszer abban az esetben is alkalmasnak látszik a megoldásfüggvény számítására, ha annak pólusa van a vizsgált intervallumon belül, bár az egy lépésben adódó hibatag, amelyet a fenti cikk közöl, tetszés szerint nagy lehet, akármilyen kicsire is választjuk az alappontok távolságát. A módszer nagy hátránya az, hogy csak olyan differenciálegyenletek esetén kapunk kielégítő pontosságú képleteket, amelyeknél a megoldásfüggvény magasabbrendű deriváltjai az elsőrendűből analitikusan, egyszerűen számíthatók. Ha a megoldásfüggvény, vagy valamelyik alacsonyabbrendű deriváltja a vizsgált intervallumon végtelenné válik, akkor a megoldásfüggvényt megkísérelhetjük szakaszonként az

$$y^*(x) = \sum_{p=0}^{L} a_p x^p + b|x+A|^N \quad x \neq A$$

$$N \notin \{0, 1, \dots, L\},$$

vagy az

$$y^{**}(x) = \sum_{p=0}^{L} a_p x^p + b|x+A|^N \log|x+A| \quad x \neq A$$

$$N \in \{0, 1, \dots, L\}$$

függvénnyel közelíteni, ahol $-A$ (a pólus helye) és N (a pólus foka) ismert, az a_p ($p = 0, 1, \dots, L$), b számokat pedig az illető szakaszon úgy választjuk meg, hogy a kapott képlet az alappontokban pontos legyen, ha a megoldásfüggvény egy bizonyos fokszámot meg nem haladó tetszőleges polinom, vagy pedig a közelítő függvény maga ([3]).

A cikkben bemutatott mintafeladatok eredményei szerint a módszer igen jó közelítést ad a megoldásfüggvény számára, bár az egy lépésben adódó hibatag, amelyet az előbbi cikk levezetett, itt is tetszés szerint nagy lehet, akármilyen kicsi is az alappontok távolsága. A cikk az A és N értékekre közelítést is ad a számítás minden lépésében úgy, hogy az illető lépésben adódó hibatagnak a lépésköz szerinti *Taylor*-sorában[1] a két, legalacsonyabb fokú, el nem tűnő tagot nullává teszi. Ha ez a két—, a számolás során adódó — számsorozat az A és az N számra, egy-egy határértékhez látszik konvergálni, akkor egy második számítás is elvégezhető, most már a feltételezett határértékkel számolva. Hasonlóan járunk el, ha a két szám közül csak az egyik ismert.

A [4] dolgozatban a szerzők általánosították a módszerüket arra az esetre, amikor a szakaszonkénti közelítő függvény

$$y = \sum_{p=0}^{L} a_p x^p + b\Pi(x) \qquad x \neq A$$

alakú, ahol a $\Pi(x)$ függvénynek szingularitása van az $x=A$ pontban.

A megfelelő formula levezetése hasonló a fentiekhez, a megfelelő hibatagról ugyanaz mondható el, mint a fenti esetben. Külön foglalkozik a cikk az interpolációs, majd az extrapolációs képletekkel. A levezetett módszer feltételezi a $\Pi(x)$ függvény ismeretét.

A cikk által vizsgált numerikus példákban a megoldásfüggvény szinguláris része

$$b|x+A|^{-1} \tag{1. 1}$$

alakú, tehát elsőrendű pólus jellegű és a szinguláris tag együtthatója állandó. Ebben az esetben várható, hogy a módszer jó közelítést ad. Kétséges a közelítés jósága azonban más esetben (l. később).

A jelen dolgozatban a kezdetiérték feladat megoldását

$$\frac{u(x)}{(s-x)^p} \qquad x<s \tag{1. 2}$$

alakban keressük, ahol az $u(x)$ ismeretlen függvény elég sokszor folytonosan differenciálható. Az (1. 2) alakú közelítés részben általánosítása a [3] alatti cikk közelítő függvényének, amennyiben a szinguláris rész együtthatója, $u(x)$, függvény. Ennek fejében a polinom- tagot elhagytuk, s a kapott közelítést nemcsak egy szakaszon, hanem az egész vizsgált intervallumon alkalmaztuk.

Ha $p=1$, akkor a kétféle közelítés között nincs lényeges különbség. Ez könnyen belátható, ha az $u(x)$ függvényt az s szingularitási pontban *Taylor*-sorba fejtjük, a sor elég magas hatványú tagjait elhagyjuk, majd a kínálkozó osztásokat elvégezzük. A kapott eredmény jó közelítést ad a szingularitás közelében, attól távol pedig — a szingularitás hatása itt még nem jelentős — a [3] cikk szerinti közelítés érvényességi szakaszának egy pontjában végezzük el az $u(x)$ függvény *Taylor*-sorba fejtését, az így kapott közelítő függvényből leválasztjuk az (1. 1) alakú tagot, a maradékot pedig polinommal helyettesítjük. A $p\neq 1$ esetben azonban a két módszer nem azonos.

Megjegyezzük, hogy az (1. 2) alakú megoldással rendelkező kezdetiérték feladat nem kezelhető könnyebben, ha a feladatot átírjuk az $u(x)$ függvényre, mint ismeretlenre, vagy a megoldásfüggvény inverzének keresésére térünk át.

2. Extrapolációs formulák pólussal rendelkező megoldás esetén

Vizsgáljuk az

$$y = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat megoldását az

$$x_n = x_0 + hn \qquad (n=1, 2, \ldots), \quad h > 0$$

pontokban és legyen

$$y_n = y(x_n),$$

$$f_n = f(x_n, y_n).$$

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvényre kiróható feltételek helyett tegyük fel, hogy a megoldás

$$y(x) = \frac{u(x)}{(s-x)^p}, \quad x_0 < x < s \quad p \notin \{0, -1, -2, \ldots\} \tag{2.1}$$

alakú, ahol $u(x) \in C_{r+1}([x_0, s])$ — $(r+1)$-szer folytonosan deriválható az $[x_0, s]$ zárt intervallumon — és r természetes szám. Ekkor

$$f(x, y(x)) = \frac{u'(x)(s-x) + u(x)p}{(s-x)^{p+1}} = \frac{v(x)}{(s-x)^{p+1}}, \tag{2.2}$$

ahol $v(x) \in C_r([x_0, s])$. Írjuk fel a szokott összefüggést:

$$y_{n+1} = y_{n-t} + \int\limits_{x_{n-t}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx = y_{n-t} + \int\limits_{x_{n-t}}^{x_{n+1}} \frac{v(x)}{(s-x)^{p+1}} dx \quad t \in \{0, 1, \ldots, r\}. \tag{2.3}$$

Az integrációs intervallumon helyettesítsük a $v(x)$ függvényt polinommal az x_n, $x_{n-1}, \ldots, x_{n-r}$ alappontokra támaszkodva és végezzük el az integráljel alatt az $x = x_n + hz$ helyettesítést. Felhasználva a (2. 2)-t adódik, hogy

$$y_{n+1} = y_{n-t} + \frac{h}{r!} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} (b+j)^{p+1} \int\limits_{-t}^{1} \frac{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{r} (z+i)}{(b-z)^{p+1}} dz \, f_{n-j}, \tag{2.4}$$

ahol $bh = s - x_n$.
Az integrálás analitikusan is elvégezhető. Az eljárás tehát

$$y_{n+1} = y_{n-t} + h \sum_{j=0}^{r} A_j^{(t)}(b) f_{n-j} \tag{2.5}$$

alakú, ahol az együtthatók

$$A_j^{(t)}(b) = \frac{1}{r!} (-1)^j \binom{r}{j} (b+j)^{p+1} \int\limits_{-t}^{1} \frac{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{r} (z+i)}{(b-z)^{p+1}} dz$$

függnek a pólustól mért távolságtól és $b \to +\infty$ esetén átmennek a klasszikus differencia-módszerek együtthatóiba ([1]).

Ezeket az együtthatókat célszerű néhány p és r mellett kiszámítani a

$$b=2, 3, 4, \dots, 50$$

értékekre és ezekből a számolás folyamán lineáris interpolációval kaphatjuk az együtthatók pillanatnyi értékét. Általában elegendő az együtthatókat b nem nagy értékeire (pl. 2-től 50-ig) előre számolni, a pólustól távol úgyis valamelyik klasszikus differencia módszert lehet használni.

Ha $p \leqq r-1$ természetes szám és $b>1$, akkor az együtthatók számításának ellenőrzésére felhasználhatjuk az alábbi összefüggést:

$$\sum_{j=0}^{r} A_j^{(t)}(b) = t+1.$$

Az összefüggés más p értékre általában nem igaz.

Ha $p>0$, akkor a

$$hf_{n-j}$$

alakú szorzatok nem korlátosak a pólus közelében. Ezért ilyenkor nem használhatók a fenti módon levezethető (2. 4)-hez hasonló alakú interpolációs formulák, mivel a hozzá kapcsolódó iterációs eljárás általában nem konvergens.

Hasonlóan nem célravezető itt a klasszikus értelemben vett stabilitási kérdésekkel foglalkozni.

Ha $p<0$, akkor kísérletezhetünk interpolációs formulával is, amely a következő alakú:

$$y_{n+1} = y_{n-t} + \frac{h}{(r+1)!}\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^j\binom{r+1}{j}(b-1+j)^{p+1}\int_{-t}^{1}\frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{r+1}(z-1+i)}{(b-z)^{p+1}}\,dz \quad f_{n+1-j}.$$

Ez az eset azonban kevéssé érdekes, mert a megoldás korlátos.

3. Az eljárás hibája egyetlen lépés esetén

A (2. 4) összefüggés alapján fogjuk megbecsülni az eljárás hibáját egyetlen lépés esetén. Ha a *Taylor*-formulát integrál maradéktaggal alkalmazzuk az $u(x)$ és $u'(x)$ függvényre az x_n pont környezetében majd a (2. 1), (2. 2) összefüggések segítségével visszatérünk az $y_{n+1}, y_{n-t}, f_{n-j}$ értékekhez, akkor a (2. 4) összefüggés bal- és jobb oldalának különbségére azt kapjuk, hogy

$$\Delta(b) = \widetilde{u_n^{(r+1)}}\frac{h^{r+1-p}}{(r+1)!}\Delta_{r+1}(b) + I_{r+1}, \tag{3. 1}$$

illetve

$$\Delta(b) = I_r,$$

ahol

$$\Delta_{r+1}(b) = -(r+1-p)\int_{-t}^{1}\frac{\prod\limits_{i=0}^{r}(z+i)}{(b-z)^{p+1}}\,dz, \quad I_m = O(h^{m+1-p}),$$

ha $u \in C_{r+2}([x_0, s])$, illetve $u \in C_{r+1}([x_0, s])$, tehát $\Delta(b) = O(h^{r+1-p})$. Az első összefüggést felhasználhatjuk a hiba értékének megbecslésére az adott lépésben. Az y_{n+1} számítása után végezzünk el két számítási lépést fele lépésközzel az x_n pontból kiindulva. Ha ekkor a $\bar{y}_{n+1}$, értéket kapjuk, akkor közelítően:

$$\Delta(b) = \frac{\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}}{1 - \frac{\Delta_{r+1}(2b) + \Delta_{r+1}(2b-1)}{2^{r+1-p}\Delta_{r+1}(b)}}.$$

(3. 1)-ből látható, hogy ha $u \in C_{r+2}([x_0, s])$ és elég messze vagyunk s-től — vagyis $hb \geqq c > 0$ minden h-ra, — akkor a módszer $\Delta(b) = 0(h^{r+2})$ pontosságú, mint az *Adams*-féle differencia módszer.

4. Különböző adott pontosságú extrapolációs formulák

Általánosítsuk a (2. 4) alatti formulát. Az y_{n+1} értéket állítsuk elő az alábbi lineáris formában

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{r} a_j y_{n-j} + h \sum_{j=0}^{r} e_j f_{n-j} \tag{4. 1}$$

úgy, hogy a két oldal különbsége elég kicsi legyen. Az a_j, e_j ($j=0, 1, \ldots, r$) együtthatók alkalmas megválasztásával fogjuk ezt elérni, amely együtthatók függnek majd a b számtól, vagyis a szingularitási helytől való távolságtól is.

Az előző fejezetben vázolt módon képezhetjük (4. 1)-ben a bal és jobb oldal különbségét.

$$\bar{\Delta}(b) = \sum_{k=0}^{m} u_n^{(k)} \frac{h^{k-p}}{k!} \bar{\Delta}_k(b) + \bar{I}_m(b), \quad u \in C_{m+1}([x_0, s]), \quad m \geqq 1,$$

ahol a $\bar{\Delta}_k(b)$ értékek lineáris függvényei az a_j, e_j együtthatóknak és $I_m(b) = O(h^{m+1-p})$. Válasszuk meg az a_j, e_j ($j=0, 1, \ldots, r$) együtthatókat úgy, hogy

$$\bar{\Delta}_k(b) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, m \tag{4. 2}$$

legyen. Ez általában elérhető, ha $m \leqq 2r+1$. Az egy lépésben elkövetett hiba ekkor $O(h^{m+1-p})$.

Ezen az úton, olyan extrapolációs képletek állíthatók elő, melyek pontossága nagyobb, mint a 2. fejezetben bemutatotté. A klasszikus értelemben vett stabilitási vizsgálat elvégzése itt nehézségbe ütközik, mert ehhez egy változó együtthatós differencia egyenletet kellene megoldani a szokásos állandó együtthatós helyett. A stabilitási kérdés nem is elsőrendű fontosságú, mert a jelen cikk módszereit úgyis csak a pólus közelében — például az utolsó 10—20 lépésben — használjuk. Mégis célszerű olyan (4. 1) alatti formulát használni, ahol az y_{n-j} tényezők együtthatóinak $b \to +\infty$ mellett vett határértéke kielégíti a klasszikus stabilitási egyenletet.

Oldjuk meg a (4. 2) egyenletrendszert egy egyszerű esetben. Legyen $m = r+1$ és

$$e_j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

A kapott $(r+2)$-ismeretlenes egyenletrendszer megoldása:

$$a_0 = \frac{b^p}{(b-1)^p}\left[1-\frac{p(r+1)}{b}+(r+1)\sum_{j=1}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\frac{1}{j(j+1)}\right],$$

$$a_j = (-1)^{j-1}\binom{r}{j}\frac{r+1}{j(j+1)}\frac{(b+j)^p}{(b-1)^p}, \qquad j=1,2,\dots,r$$

$$e_0 = (r+1)\frac{b^p}{(b-1)^p}.$$

A feltétel itt $u\in C_{r+2}([x_0, s])$. A módszer pontossága $O(h^{r+2-p})$, jobb mint a 2. fejezetben bemutatotté, az együtthatók számítása is egyszerűbb, azonban a stabilitás a jelen esetben nem garantált.

Megjegyezzük, hogy $m \doteq r$

(4. 3) $$a_j=0, \quad j=0,1,\dots,r, \quad j\neq t; \quad a_t=1$$

mellett a (4. 2)-nek megoldása az

$$e_j=A_j^{(t)}(b) \qquad j=0,1,\dots,r$$

rendszer. Ez a megoldás $p\notin\{1,2,\dots,r\}$ esetén egyetlen, $p\in\{1,2,\dots,r\}$ esetén pedig egyik a végtelen sok közül, mert a jelen esetben a (4. 2) rendszer determinánsa

$$D = (-1)^{\frac{r(r+3)}{2}+1}\prod_{i=0}^{r}\left[\frac{p-i}{(b+i)^{p+1}}(r-i)!\right].$$

Ha $p\in\{1,2,\dots,r\}$, akkor a (4. 2) egyenletrendszerben a $(p+1)$-edik egyenlet $(k=p)$ előállítható az első p egyenlet lineáris kombinációjaként. Ezért ez az egyenlet elhagyható és a rendszerhez hozzávehető a következő egyenlet $(k=r+1)$. Ha az új egyenletrendszer megoldható, akkor a kapott együtthatók egy pontosabb — $O(h^{r+2-p})$ pontosságú — módszert generálnak. Például $p=r$ esetén $m=r+1$, (4. 3) mellett

$$e_j = A_j^{(t)}(b)+\beta\frac{1}{r!}(-1)^j\binom{r}{j}(b+j)^{r+1}, \qquad j=0,1,\dots,r$$

ahol

$$\beta = -\frac{\int_{-t}^{1}\frac{\prod_{i=0}^{r}(z+i)}{(b-z)^{r+1}}dz}{(r+1)\left(b+\frac{r}{2}\right)}$$

ilyen megoldása a (4. 2)-nek, amely egy $O(h^2)$ pontosságú módszer együtthatóit szolgáltatja.

5. Extrapolációs képletek egy speciális esetben

Állítsuk elő a 2. fejezetben levezetett extrapolációs módszer együtthatóit a

$$p=1, \quad r=2, \quad t=0$$

speciális esetben. Ekkor

$$y_{n+1} = y_n + h[A_0^{(0)} f_n + A_1^{(0)} f_{n-1} + A_2^{(0)} f_{n-2}],$$

ahol

$$A_0^{(0)} = \frac{b}{b-1}(b^2+b+1) + b^2\frac{2b+3}{2}\log\frac{b-1}{b},$$

$$A_1^{(0)} = -\frac{2b^3+5b^2+4b+1}{b-1} - 2(b+1)^3\log\frac{b-1}{b},$$

$$A_2^{(0)} = \frac{b}{b-1}(b+2)^2 + \frac{2b^3+9b^2+12b+4}{2}\log\frac{b-1}{b},$$

A 4. fejezetben közölt számítási eljárás az ott leírt speciális esetben az alábbi módszerhez vezet:

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + he_0 f_n,$$

ahol

$$a_0 = -\frac{3b+6}{2(b-1)}; \quad a_1 = 3\frac{b+1}{b-1}; \quad a_2 = -\frac{b+2}{2(b-1)};$$

$$e_0 = \frac{3b}{b-1}.$$

Végül $m = r+1$ esetén, a (4. 2) megoldása a (4. 3), $t=0$ feltétel mellett az alábbi módszert adja:

$$y_{n+1} = y_n + h[e_0 f_n + e_1 f_{n-1} + e_2 f_{n-2}],$$

ahol

$$e_0 = \frac{b(23b^2+41b+8)}{4(b-1)(3b^2+6b+2)}; \quad e_1 = -\frac{(4b+5)(b+1)^2}{(b-1)(3b^2+6b+2)}$$

$$e_2 = \frac{(5b+3)(b+2)^2}{4(b-1)(3b^2+6b+2)}.$$

A módszerek pontossága $O(h^2)$, $O(h^3)$, $O(h^3)$ rendre.

A pontosságból és az egyszerűbb alakból látszik, hogy $p \in \{1, 2, ..., r\}$ esetén célszerűbb a 4. fejezetben levezetett módszert $m = r+1$-re és a (4. 3) feltétel mellett használni, mint a 2. fejezet módszerét.

6. A pólus helyének és fokszámának becslése

Viszonylag könnyű összefüggéseket kapni a pólus adataira; a helyére és a fokszámára. Írjuk fel a (2. 2) összefüggést valamely x_m pontban, majd helyettesítsük az u'_m értéket az u_{m-j} ($j=0, 1, ..., l$) értékek alkalmasan választott lineáris kombinációjával. Az így kapott közelítő azonosságban a (2. 1) kapcsolat segítségével térjünk vissza az y_{m-j} $(j=0, 1, \ldots, l)$ értékekhez. A kapott összefüggés csak a $b = (s-x_m)/h$ és a p értéket tartalmazza ismeretlenként. Ha közülük az egyik ismert, akkor a másik az egyenlet megoldásával minden lépésben számítható. (Célszerű a módosított húrmódszert alkalmazni.) A kapott összefüggés:

$$\mu(c, p) = \sum_{j=1}^{l} (-1)^j \binom{l}{j} \frac{1}{j} (1+cj)^p y_{m-j} + y_m \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{i} + pc \right) - hf_m = 0, \tag{6.1}$$

ahol $c=1/b$. A baloldal pontos értéke $O(h^{l+1-p})$ fix (c, p) mellett.

Ha a pólus mindkét adata ismeretlen, akkor egy második összefüggésre is szükség van. Ezért extrapoláljuk az u_m értéket az u_{m-j} $(j=1, 2, \ldots, l)$ értékekből, majd a kapott összefüggésben térjünk vissza a (2. 1) kapcsolat segítségével az y_{m-j} $(j=0, 1, \ldots, l)$ értékekhez. Azt kapjuk, hogy

$$\nu(c, p) = \sum_{j=0}^{l} (-1)^j \binom{l}{j} (1+cj)^p y_{m-j} = 0. \tag{6.2}$$

A baloldal pontos értéke itt $O(h^{l-p})$. Az említett két közelítés u'_m, illetve u_m értékekre másféle alappontokra támaszkodva is elvégezhető, továbbá egyéb — hasonló módon előállított — összefüggések is használhatók a c és a p érték meghatározására.

A kapott kétismeretlenes egyenletrendszer a klasszikus módszerekkel megoldható. Eredményül a (c_m, p_m) közelítő értékpárt kapjuk. Felhasználható még a megoldásra az alábbi eljárás is. Legyen a

$$\mu(x, y) = 0$$
$$\nu(x, y) = 0$$

egyenletrendszer gyöke $(\bar{x}, \bar{y})$, amelyre $(x^{(n)}, y^{(n)})$ jó közelítést ad. Legyen továbbá a μ és a ν függvény mindkét parciális deriváltja a gyök környezetében folytonos, a gyök pontjában nem nulla és itt

$$\mu_x \nu_y \neq \mu_y \nu_x .$$

Ekkor egyértelműen meghatározhatók az alábbi ξ_i, η_i $(i=1, 2, 3)$ számok:

$$\begin{aligned}
\xi_1&: \quad \mu(\xi_1, y^{(n)}) = 0,\\
\eta_1&: \quad \nu(\xi_1, \eta_1) = 0,\\
\xi_2&: \quad \mu(\xi_2, \eta_1) = 0,\\
\eta_2&: \quad \nu(x^{(n)}, \eta_2) = 0,\\
\xi_3&: \quad \mu(\xi_3, \eta_2) = 0,\\
\eta_3&: \quad \nu(\xi_3, \eta_3) = 0.
\end{aligned}$$

Vegyük a $\{(\xi_1, y^{(n)}); (\xi_2, \eta_1)\}$ és az $\{(x^{(n)}, \eta_2); (\xi_3, \eta_3)\}$ egyenes metszéspontját $(x^{(n+1)}, y^{(n+1)})$ (ha létezik) a következő közelítésnek. Ekkor

$$x^{(n)} \to \bar{x},$$
$$y^{(n)} \to \bar{y},$$

ha elég jó $(x^{(0)}, y^{(0)})$ induló közelítésből kezdtük el az eljárást.

A bizonyítást az alábbiakban vázoljuk. Legyen az $(\bar{x}, \bar{y})$ pontban

$$f' = -\frac{\mu_x}{\mu_y}; \quad g' = -\frac{\nu_x}{\nu_y}.$$

Van olyan $1 > \varepsilon_0 > 0$ szám, amelyre

$$\frac{1}{\varepsilon_0} > |f'|, |g'| > \varepsilon_0; \quad |f' - g'| > \varepsilon_0.$$

Bármely — később meghatározandó — $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$ számhoz van egy olyan $(\bar{x} - \tau, \bar{x} + \tau)$ intervallum, amelyben mind a $(-\mu_x/\mu_y)$ változása a $\mu = 0$ görbe mentén, mind a $(-\nu_x/\nu_y)$ változása a $\nu = 0$ mentén legfeljebb ε. Ha az $(x^{(n)}, y^{(n)})$ pont elég közel van az $(\bar{x}, \bar{y})$ ponthoz, akkor a ξ_i $(i = 1, 2, 3)$ számok ebben az intervallumban vannak. Ezért felírható, hogy

$$\xi_1 = \bar{x} + \frac{y^{(n)} - \bar{y}}{f' + \delta_1},$$

$$\eta_1 = \bar{y} + (\xi_1 - \bar{x})(g' + \delta_2),$$

$$\xi_2 = \bar{x} + \frac{\eta_1 - \bar{y}}{f' + \delta_3},$$

$$\eta_2 = \bar{y} + (x^{(n)} - \bar{x})(g' + \delta_4),$$

$$\xi_3 = \frac{\eta_2 - \bar{y}}{f' - \delta_5} + \bar{x},$$

$$\eta_3 = \bar{y} + (\xi_3 - \bar{x})(g' + \delta_3),$$

ahol $|\delta_i| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Ha bevezetjük az

$$\alpha^{(n)} = x^{(n)} - \bar{x},$$

$$\beta^{(n)} = y^{(n)} - \bar{y},$$

$$\gamma^{(n)} = \max(|\alpha^{(n)}|, |\beta^{(n)}|)$$

jelölést, akkor a fenti egyenesek metszéspontjával kapcsolatban felírható az alábbi egyenletrendszer:

$$\alpha^{(n+1)}\left(\frac{g' + \delta_2}{f' + \delta_1} - 1\right) - \beta^{(n+1)}\left(\frac{g' + \delta_2}{f' + \delta_3} - 1\right)\frac{1}{f' + \delta_1} = \beta^{(n)}\frac{(g' + \delta_2)(\delta_3 - \delta_1)}{(f' + \delta_1)^2(f' + \delta_3)},$$

$$\alpha^{(n+1)}\left(\frac{g' + \delta_6}{f' + \delta_5} - 1\right) - \beta^{(n+1)}\left(\frac{g' + \delta_4}{f' + \delta_5} - 1\right)\frac{1}{g' + \delta_4} = \alpha^{(n)}\frac{\delta_6 - \delta_4}{f' + \delta_5},$$

felhasználva azt, hogy $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)} \neq 0$ (ekkor az eljárásnak vége volna). A *Cramer*-szabály szerint

$$\alpha^{(n+1)} = \frac{D_\alpha}{D}; \quad \beta^{(n+1)} = \frac{D_\beta}{D},$$

ahol

$$|D| > \frac{1}{2} \frac{|g'-f'|^3}{|f'|^3 |g'|} \tag{6. 3}$$

$$|D_\alpha| < 4\varepsilon\gamma^{(n)} \frac{|g'-f'|}{|f'|^3} \left(1 + \frac{1}{|f'|}\right)$$

$$|D_\beta| < 4\varepsilon\gamma^{(n)} \frac{|g'-f'|}{|f'|^2} \left(1 + \frac{|g'|}{|f'|^2}\right),$$

ha az ε szám — csak az f' és a g' értéktől függően — elég kicsi. Ezért

$$\gamma^{(n+1)} < \varepsilon K \gamma^{(n)}, \quad \left(K < \frac{16}{\varepsilon_0^5}\right)$$

ahol a K szám csak az f' és a g' számtól függ. Ha teljesül az

$$\varepsilon < \frac{q}{K}; \quad 0 < q < 1$$

feltétel is, akkor

$$\gamma^{(n+1)} < q\gamma^{(n)},$$

tehát a következő közelítés, $(x^{(n+1)}, y^{(n+1)})$ is a gyök fentemlített környezetében lesz, s az eljárás konvergens. (A (6. 3) mutatja, hogy két különböző nempárhuzamos egyenesről van szó).

Jó induló közelítés esetén a módszer tehát konvergens.

A nevezett parciálisok nem nulla volta egyszerű koordináta rendszer forgatással elérhető. Célszerű volna a tengely irányokat úgy felvenni, hogy

$$f' + g' = 0$$

legyen. A módszer általánosítható lehetne n-ismeretlenes egyenletrendszer megoldására, amely esetben minden iterációs lépésben nagyszámú $(n-1)$-ismeretlenes egyenletrendszert kellene megoldani. Viszont már $n=3$ esetén is olyan munkaigényes lenne az eljárás, hogy célszerűtlen volna használni.

Az iterációs módszer nem szimmetrikus a μ és a ν egyenesekre. Ezért felcserélve ezek szerepét egy második konvergáló pontsorozatot kaphatunk. Azt nem lehet előre tudni, hogy melyik fog gyorsabban konvergálni, ezért célszerű lehet mindkettőt kiszámolni. A két pontsorozat alkalmas kombinálásával sokféle módszer kínálkozik a konvergencia javítására, ezekre azonban nem térünk ki.

A (6. 1), (6. 2) egyenletrendszerben a megfelelő parciális deriváltak léteznek és folytonosak a gyök környezetében, ha $cl < 1$.

Az $f' \neq g'$ feltétel teljesülését elegendő $h \to 0$ határértékre igazolni fix (c, p) számpár mellett. Ha $u_m \neq 0$, akkor a pontos (c, p) értékpárra igazolható, hogy

$$\frac{1}{p} \lim_{h=0} f' < \frac{1}{p} \lim_{h=0} g' < 0.$$

Hasonló áll fenn a (c, p) ponthoz közeli (c_m, p_m) megoldási pontban is.

Az első lépésben a kezdetiérték feladat számításához az $(c^{(0)}, p^{(0)})$ értékpárra az alábbi összefüggés írható fel. A (2. 1)-ből $c=1/b$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{y_{m+1}y_{m-1}}{y_m^2} = \frac{1}{(1-c^2)^p}\frac{u_{m+1}u_{m-1}}{u_m} =$$

$$= \left(1+c^2p+c^4\frac{p(p+1)}{2}+\cdots\right)\left(1-h^2\left(\frac{u'_m}{u_m}\right)^2+O(h^2)\right),$$

ha $u_m \neq 0$ és $c<1$. Közelítőleg tehát

$$\frac{y_{m+1}y_{m-1}-y_m^2}{y_m^2} = c^2p.$$

Felírva ugyanezt az x_{m-1} alappontban az

$$\frac{y_m y_{m-2}-y_{m-1}^2}{y_{m-1}^2} = \frac{c^2p}{(c+1)^2}$$

közelítő egyenlőség adódik, amelyekből a $c^{(0)}$, majd a $p^{(0)}$ szám mint kezdőértékek már számolhatók. A többi lépésben pedig a kiinduló értéket mindig az előző lépés (c_m, p_m) értékpárjából számoljuk,

$$c_{m+1}^{(0)} = c_m/(1-c_m); \quad p_{m+1}^{(0)} = p_m.$$

Gyakori az az eset, amikor a p szám ismert, s csak a c számot akarjuk meghatározni a (6. 1) egyenletből, amelyet röviden $\mu(c)=0$ alakban írunk fel. A (6. 1) megoldása helyett kíséreljük meg a következő egyenletet megoldani

$$x=h(x), \tag{6. 4}$$

ahol

$$h(x) = x-\mu(x)\frac{\prod_{i=1}^{l}(1+xi)}{p\,y_m\, l!\, x^l}; \quad u_m \neq 0.$$

Erre fennáll, hogy az $x=c$ helyen

$$\lim_{h=0} h'(c) = 0.$$

Ha tehát a h lépésköz kicsi, akkor $h'(c)$ is az, és hasonló mondható el a $h'(c_m)$ deriváltról is, ahol a c_m érték a (6. 1) megoldása.

Jó kezdőértékből kiindulva a (6. 4) iterációval is megoldható, amely megoldása a (6. 1)-nek is megoldása lesz, mivel

$$c_m \neq 0, -1/i \qquad i=1, 2, \ldots, l.$$

Végül a megoldásgörbe számítása során minden lépésben kaphatunk így egy (s_n, p_n) számpárt, ahol $s_n = x_n + h/c_n$. Ha a szingularitáshoz közeledve az

$$s_n \to s, \quad p_n \to p$$

határértékek létezése feltehető, akkor feltehető az is, hogy a szingularitás pólus. Ekkor egy második számítási menetet is elvégezhetünk a megoldásgörbe számára, minden lépésben a (b, p) értékekkel dolgozva, ahol $b = (s-x_n)/h$, mint azt a [3], [4] alatti két cikk is javasolja.

7. Számítások, táblázatok

Az alábbiakban közöljük hat próbaszámítás eredményeit. A megoldandó egyenletek az alábbiak voltak:

$$y' = y^3\frac{1-3x^2}{2(1+x^2)^3}; \qquad y(-1) = 2$$

$$y' = y^3\frac{5x^3+1}{2(1-x^3)^3}; \qquad y(-1) = 2$$

$$y' = -y\operatorname{tg}x+y^3\frac{1}{2\cos^2 x}; \qquad y(-1) = 0{,}5402$$

$$y' = y+y^3\frac{1}{2e^{2x}}; \qquad y(-1) = 0{,}3679$$

$$y' = \frac{y^2}{\log^2(2-x)}\left[-\frac{\sqrt{-x}}{2-x}+\frac{y}{2}\right]; \qquad y(-1) = 1{,}0985$$

$$y' = \frac{y}{2(1-x)}(y^2-1); \qquad y(-1) = 1{,}414,$$

amelyek megoldásának az $x=0$ pontban $p=0{,}5$ fokú pólusa van. A kezdőérték $x_0 = -1$, a lépésköz $h=0{,}025$.

A táblázatok első oszlopa („abs") mutatja a pillanatnyi abszcisszát, a harmadik lépéstől kezdve. Ez után következik a megoldásgörbe adott pontban vett pontos értéke („pontos"), majd a megoldásgörbe közelítő értéke az *Adams*-féle extrapolációs módszerrel számolva („extrapolált"). A következő oszlop a megoldásgörbe közelítését adja a [3], [4] alatti cikkek („lambert") módszerét használva úgy, hogy ismertnek tételezzük fel a pólus helyét és fokszámát (második menet). Az utolsó három oszlop a 2. fejezet módszerével kapcsolatos számítás. Az első („szing. helye") a pólus helyének (az s_n értéknek) becslését adja az illető lépésben, ami mellett a p fokszámot ismertnek tételezzük fel. A második oszlop („első mód".) a pillanatnyi s_n közelítéssel számolt megoldásgörbe értékét adja (első menet), a harmadik pedig („második") ugyanazt, az $s=0$ pontos értékkel dolgozva (második menet). A 2. fejezet módszerénél $r=2$-nek választottuk. Így ez a módszer $O(h^{2,5})$ pontos. Az *Adams*-féle és a [3], [4] cikkekben ajánlott módszereknél is három alappontra támaszkodtunk, ezért ezek pontossága távol a szingularitástól magasabbrendű: $O(h^4)$, illetve $O(h^3)$.

A 2. fejezet módszerénél minden lépésben a c_n értéket (első menet) egy (6.1) alakú egyenletből számoltuk a módosított húrmódszerrel. Az $l=2$ volt. Az együtthatókat öt tizedesjegyre — $r=2$, $p=0{,}5$ mellett — korábban kiszámoltuk a $b=50, 49, \ldots, 2$ értékekre, s a megoldásgörbe számolása során ezekből lineárisan interpoláltunk. A számítóprogramok a MINSZK-2 elektronikus számológépre készültek MITRA-1 programnyelvben. A programok lefuttatása az INFELOR Rendszertechnikai Vállalatnál történt.

Ha $p=0{,}5$ és a 2. fejezet módszerét használjuk, akkor a megoldás

$$y = \frac{u(x)}{\sqrt{s-x}} = \frac{u(x)-u(s)}{\sqrt{s-x}} + \frac{u(s)}{\sqrt{s-x}} = t(x) + \frac{u(s)}{\sqrt{s-x}}$$

alakú, ahol $t'(s)=0$, ha $u'(s)=0$. A $t(x)$ függvény ebben az esetben jól közelíthető töröttvonallal, ezért célszerűbbnek mutatkozik a [3], [4] alatti cikkek módszerét használni alacsonyfokú polinom közelítéssel.

Az első három mintafeladatnál $u'(0)=0$, a második háromnál $u'(0)\neq 0$ volt. Ez az eredményekben jól tükröződik.

1

$$y' = y^3(1-3x^2)/(2(1+x^2)^3)$$

abs	pontos	extrapolált	Lambert	szing. helye	első mod.	második
−0.925	1.9293870	1.9293858	1.9293871	0.0004293	1.9293870	1.9293870
−0.900	1.9079075	1.9079050	1.9079078	0.0153314	1.9079074	1.9079074
−0.875	1.8875325	1.8875286	1.8875329	0.0087580	1.8875323	1.8875324
−0.850	1.8683136	1.8683080	1.8683141	0.0056001	1.8683133	1.8683133
−0.825	1.8503072	1.8502999	1.8503079	0,0030493	1.8503069	1.8503069
−0.800	1.8335757	1.8335664	1.8335766	0.0138389	1.8335754	1.8335756
−0.775	1.8181878	1.8181762	1.8181888	0.0023197	1.8181876	1.8181877
−0.750	1.8042196	1.8042053	1.8042208	−0.0017383	1.8042193	1.8042194
−0.725	1.7917557	1.7917383	1.7917571	0.0046039	1.7917554	1.7917556
−0.700	1.7808906	1.7808697	1.7808922	0.0049404	1.7808903	1.7808905
−0.675	1.7717303	1.7717052	1.7717322	0.0026850	1.7717300	1.7717302
−0.650	1.7643941	1.7643639	1.7643962	0.0002456	1.7643938	1.7643940
−0.625	1.7590169	1.7589808	1.7590194	−0.0032925	1.7590167	1.7590169
−0.600	1.7557524	1.7557090	1.7557552	−0.0006069	1.7557523	1.7557524
−0.575	1.7547763	1.7547240	1.7547794	−0.0006816	1.7547761	1.7547763
−0.550	1.7562906	1.7562275	1.7562942	−0.0002310	1.7562905	1.7562906
−0.525	1.7605298	1.7604530	1.7605339	0.0001534	1.7605296	1.7605297
−0.500	1.7677670	1.7676733	1.7677717	0.0000090	1.7677668	1.7677669
−0.475	1.7783237	1.7782084	1.7783291	−0.0004737	1.7783235	1.7783236
−0.450	1.7925812	1.7924382	1.7925874	0.0000628	1.7925809	1.7925810
−0.425	1.8109961	1.8108172	1.8110034	0.0002751	1.8109959	1.8109960
−0.400	1.8341210	1.8338946	1.8341296	0.0001146	1.8341206	1.8341208
−0.375	1.8626328	1.8623428	1.8626429	0.0002333	1.8626323	1.8626325
−0.350	1.8973713	1.8969945	1.8973833	0.0003633	1.8973705	1.8973708
−0.325	1.9393945	1.9388971	1.9394089	0.0003017	1.9393937	1.9393941
−0.300	1.9900586	1.9893898	1.9900761	0.0001664	1.9900575	1.9900579
−0.275	2.0511364	2.0502177	2.0511578	0.0001716	2.0511353	2.0511358
−0.250	2.1250000	2.1237064	2.1250268	0.0001270	2.1249987	2.1249994
−0.225	2.2149120	2.2130358	2.2149460	0.0000037	2.2149102	2.2149109
−0.200	2.3255107	2.3226908	2.3255551	0.0001223	2.3255084	2.3255096
−0.175	2.4636650	3.4592371	2.4637245	0.0000370	2.4636620	2.4636635
−0.150	2.6400837	2.6327364	2.6401665	0.0000213	2.6400804	2.6400825
−0.125	2.8726213	2.8595223	2.8727423	−0.0000021	2.8726167	2.8726193
−0.100	3.1939005	3.1681546	3.1940896	0.0000023	3.1938938	3.1938974
−0.075	3.6720233	3.6137793	3.6723511	0.0000040	3.6720105	3.6720166
−0.050	4.4833163	4.3186604	4.4839925	0,0000078	4.4832920	4.4833085
−0.025	6.3285084	5.6151186	6.3305258	0.0000020	6.3284318	6.3284918

2.

$$y' = x^3(5x^3+1)/(2(1-x^3)^3)$$

abs	pontos	extrapolált	Lambert	szing. helye	első mod.	második
−0.925	1.8626643	1.8626633	1.8626634	24.0249999	1.8626624	1.8626617
−0.900	1.8225260	1.8225241	1.8225243	24.0499999	1.8225225	1.8225211
−0.875	1.7852216	1.7852185	1.7852190	24.0750000	1.7852163	1.7852143
−0.850	1.7507644	1.7507600	1.7507610	24.1000000	1.7507574	1.7507547
−0.825	1.7191721	1.7191664	1.7191678	24.1250000	1.7191634	1.7191600
−0.800	1.6904674	1.6904600	1.6904622	13.6575103	1.6904569	1.6904531
−0.775	1.6646784	1.6646692	1.6646723	8.0856841	1.6646660	1.6646618
−0.750	1.6418398	1.6418284	1.6418328	5.4073255	1.6418255	1.6418205
−0.725	1.6219940	1.6219800	1.6219859	3.8483626	1.6219775	1.6219720
−0.700	1.6051920	1.6051750	1.6051829	2.8511030	1.6051731	1.6051670
−0.675	1.5914954	1.5914747	1.5914850	2.1688530	1.5914737	1.5914672
−0.650	1.5809777	1.5809526	1.5809661	1.6798393	1.5809528	1.5809461
−0.625	1.5737272	1.5736967	1.5737141	1.3200737	1.5736985	1.5736916
−0.600	1.5698492	1.5698120	1.5698345	1.0484960	1.5698160	1.5698094
−0.575	1.5694698	1.5694241	1.5694532	0.8397666	1.5694310	1.5694249
−0.550	1.5727397	1.5726837	1.5727211	0.6784673	1.5726941	1.5726893
−0.525	1.5798404	1.5797711	1.5798195	0.5527895	1.5797866	1.5797836
−0.500	1.5909903	1.5909042	1.5909666	0.4462807	1.5909267	1.5909261
−0.475	1.6064538	1.6063460	1.6064270	0.3559620	1.6063786	1.6063810
−0.450	1.6265531	1.6264171	1.6265226	0.2835909	1.6264637	1.6264702
−0.425	1.6516831	1.6515100	1.6516483	0.2257637	1.6515765	1.6515885
−0.400	1.6823317	1.6821091	1.6822918	0.1789611	1.6822041	1.6822228
−0.375	1.7191080	1.7188184	1.7190619	0.1411930	1.7189545	1.7189821
−0.350	1.7627805	1.7623989	1.7627268	0.1107726	1.7625945	1.7626337
−0.325	1.8143316	1.8138214	1.8142687	0.0855294	1.8141050	1.8141597
−0.300	1.8750369	1.8743433	1.8749626	0.0665046	1.8747583	1.8748334
−0.275	1.9465833	1.9456218	1.9464946	0.0508763	1.9462376	1.9463404
−0.250	2.0312500	2.0298862	2.0311428	0.0383425	2.0308156	2.0309561
−0.225	2.1321987	2.1302104	2.1320671	0.0283793	2.1316447	2.1318374
−0.200	2.2539565	2.2509597	2.2537922	0.0208427	2.2532339	2.2535047
−0.175	2.4032686	2.3985610	2.4030586	0.0149474	2.4023035	2.4026901
−0.150	2.5907031	2.5829080	2.5904266	0.0104815	2.5893704	2.5899405
−0.125	2.8339514	2.8201176	2.8335723	0.0071231	2.8320223	2.8329027
−0.100	3.1654400	3.1384394	3.1648894	0.0047120	3.1624468	3.1639109
−0.075	3.6530242	3.5925018	3.6521497	0.0030185	3.6478345	3.6505792
−0.050	4.4726949	4.3034806	4.4710716	0.0018730	4.4617111	4.4681107
−0.025	6.3246544	5.6006307	6.3204142	0.0011096	6.2881781	6.3123475

3.

$$y' = -y\,\mathrm{tg}\,(x)+y^3/(2\cos^2(x))$$

−0.925	0.6257578	0.6257567	0.6257575	0.3449802	0.6257573	0.6257575
−0.900	0.6552344	0.6552320	0.6552338	0.3626224	0.6552333	0.6552337
−0.875	0.6852545	0.6852503	0.6852534	0.3631012	0.6952527	0.6852533
−0.850	0.7158522	0.7158462	0.7158507	0.2902276	0.7158497	0.7158506
−0.825	0.7470666	0.7470582	0.7470646	0.2475701	0.7470632	0.7470645
−0.800	0.7789418	0.7789306	0.7789393	0.2203333	0.7789372	0.7789388
−0.775	0.8115278	0.8115133	0.8115246	0.1993552	0.8115218	0.8115238
−0.750	0.8448815	0.8448631	0.8448777	0.1822787	0.8448743	0.8448769
−0.725	0.8790680	0.8790449	0.8790635	0.1473651	0.8790595	0.8790623
−0.700	0.9141613	0.9141326	0.9141559	0.1160518	0.9141512	0.9141547
−0.675	0.9502462	0.9502108	0.9502400	0.0988813	0.9502343	0.9502385
−0.650	0.9874204	0.9873770	0.9874132	0.0930714	0.9874066	0.9874114
−0.625	1.0257962	1.0257431	1.0257879	0.0776936	1.0257804	1.0257857

3.

$$y' = -y \operatorname{tg}(x) + y^3/(2\cos^2(x))$$

abs	pontos	extrapolált	lambert	szing. helye	első mod.	második
−0.600	1.0655037	1.0654388	1.0654941	0.0592785	1.0654854	1.0654913
−0.575	1.1066940	1.1066148	1.1066830	0.0482955	1.1066730	1.1066799
−0.550	1.1495438	1.1494471	1.1495312	0.0397611	1.1495196	1.1495278
−0.525	1.1942605	1.1941422	1.1942461	0.0360316	1.1942329	1.1942421
−0.500	1.2410892	1.2409441	1.2410727	0.0289276	1.2410575	1.2410682
−0.475	1.2903215	1.2901428	1.2903027	0.0234255	1.2902852	1.2902976
−0.450	1.3423073	1.3420861	1.3422858	0.0194967	1.3422657	1.3422798
−0.425	1.3974696	1.3971942	1.3974450	0.0155581	1.3974220	1.3974388
−0.400	1.4563253	1.4559796	1.4562970	0.0122872	1.4562707	1.4562897
−0.375	1.5195126	1.5190746	1.5194800	0.0096082	1.5194496	1.5194717
−0.350	1.5878297	1.5872687	1.5877920	0.0076073	1.5877568	1.5877825
−0.325	1.6622893	1.6615614	1.6622454	0.0060339	1.6622049	1.6622353
−0.300	1.7441978	1.7432382	1.7441463	0.0043628	1.7440993	1.7441351
−0.275	1.8352728	1.8339841	1.8352118	0.0031733	1.8351574	1.8352000
−0.250	1.9378248	1.9360546	1.9377518	0.0022074	1.9376880	1.9377391
−0.225	2.0550464	2.0525476	2.0549577	0.0015032	2.0548816	2.0549436
−0.200	2.1914955	2.1878478	2.1913857	0.0011887	2.1912939	2.1913709
−0.175	2.3539466	2.3483930	2.3538077	0.0007547	2.3536944	2.3537921
−0.150	2.5529959	2.5440729	2.5528145	0.0004994	2.5526718	2.5527994
−0.125	2.8063588	2.7909688	2.8061116	0.0003098	2.8059234	2.8060976
−0.100	3.1464795	3.1172274	3.1461214	0.0002044	3.1458581	3.1461121
−0.075	3.6412187	3.5772038	3.6406489	0.0001369	3.6402393	3.6406514
−0.050	4.4665469	4.2912985	4.4654785	0.0000962	4.4647107	4.4655272
−0.025	6.3225792	5.5860641	6.3197228	0.0000628	6.3174122	6.3199529

4.

$$y' = y + y^3/(2\exp(2x))$$

−0.925	0.4122937	0.4122924	0.4122938	−0.1046567	0.4122940	0.4122939
−0.900	0.4285621	0.4285590	0.4285623	−0.1075168	0.4285625	0.4285623
−0.875	0.4456442	0.4456392	0.4456446	−0.0941589	0.4456449	0.4456447
−0.850	0.4635966	0.4635892	0.4635971	−0.0954389	0.4635976	0.4635973
−0.825	0.4824808	0.4824707	0.4824816	−0.0818039	0.4824823	0.4824818
−0.800	0.5023651	0.5023516	0.5023661	−0.0912526	0.5023670	0.5023661
−0.775	0.5233243	0.5233069	0.5233256	−0.0747655	0.5233269	0.5233255
−0.750	0.5454419	0.5454198	0.5454435	−0.0808067	0.5454451	0.5454434
−0.725	0.5688104	0.5687827	0.5688124	−0.0631151	0.5688142	0.5688121
−0.700	0.5935330	0.5934986	0.5935354	−0.0584322	0.5935375	0.5935352
−0.675	0.6197255	0.6196831	0.6197285	−0.0526542	0.6197308	0.6197281
−0.650	0.6475181	0.6474661	0.6475218	−0.0475184	0.6475242	0.6475211
−0.625	0.6770581	0.6769945	0.6770625	−0.0409135	0.6770653	0.6770616
−0.600	0.7085128	0.7084351	0.7085181	−0.0363432	0.7085213	0.7085166
−0.575	0.7420732	0.7419783	0.7420796	−0.0342233	0.7420832	0.7420777
−0.550	0.7779590	0.7778429	0.7779666	−0.0309697	0.7779706	0.7799643
−0.525	0.8164240	0.8162818	0.8164331	−0.0250882	0.8164376	0.8164301
−0.500	0.8577639	0.8575892	0.8577749	−0.0222956	0.8577798	0.8577709
−0.475	0.9023257	0.9021103	0.9023389	−0.0209456	0.9023442	0.9023339
−0.450	0.9505199	0.9502531	0.9505358	−0.0169670	0.9505419	0.9505293
−0.425	1.0028371	1.0025044	1.0028563	−0.0148309	1.0028630	1.0028485
−0.400	1.0598691	1.0594512	1.0598924	−0.0127681	1.0598995	1.0598821
−0.375	1.1223387	1.1218093	1.1223673	−0.0102762	1.1223748	1.1223540
−0.350	1.1911403	1.1904623	1.1911754	−0.0084234	1.1911834	1.1911583
−0.325	1.2673968	1.2665178	1.2674404	−0.0070649	1.2674491	1.2674188
−0.300	1.3525428	1.3513860	1.3525974	−0.0060063	1.3526065	1.3525694

4.

$$y' = y + y^3/(2\exp(2x))$$

abs	pontos	extrapolált	Lambert	szing. helye	első mod.	második
−0.275	1.4484472	1.4468974	1.4485164	−0.0049177	1.4485261	1.4484802
−0.250	1.5576016	1.5554804	1.5576907	−0.0039473	1.5577002	1.5576426
−0.225	1.6834200	1.6804403	1.6835369	−0.0030621	1.6835449	1.6834713
−0.200	1.8307376	1.8264151	1.8308946	−0.0022400	1.8308993	1.8308034
−0.175	2.0066861	2.0001573	2.0069034	−0.0016946	2.0069007	2.0067721
−0.150	2.2223384	2.2119525	2.2226511	−0.0012633	2.2226345	2.2224552
−0.125	2.4960782	2.4783834	2.4965530	−0.0009672	2.4965073	2.4962417
−0.100	2.8613472	2.8282161	2.8621255	−0.0007024	2.8620203	2.8615902
−0.075	3.3876402	3.3164612	3.3890748	−0.0005142	3.3888460	3.3880341
−0.050	4.2540273	4.0635807	4.2572586	−0.0003914	4.2569178	4.2547862
−0.025	6.1684017	5.3914653	6.1795349	−0.0003590	6.1766777	6.1704829

5.

$$y' = (y/\log(2-x))^2(-sqrt(-x)/(2-x)+y/2)$$

abs	pontos	extrapolált	Lambert	szing. helye	első mod.	második
−0.925	1.1159585	1.1159578	1.1159584	0.0352144	1.1159584	1.1159585
−0.900	1.1223037	1.1223021	1.1223036	0.0538966	1.1223036	1.1223036
−0.875	1.1289678	1.1289653	1.1289677	0.0329585	1.1289677	1.1289678
−0.850	1.1359769	1.1359734	1.1359767	0.0426690	1.1359768	1.1359769
−0.825	1.1433601	1.1433553	1.1433598	0.0431768	1.1433598	1.1433601
−0.800	1.1511495	1.1511432	1.1511492	0.0150687	1.1511492	1.1511494
−0.775	1.1593813	1.1593733	1.1593809	0.0345313	1.1593809	1.1593812
−0.750	1.1680961	1.1680861	1.1680956	0.0327233	1.1680956	1.1680959
−0.725	1.1773395	1.1773270	1.1773388	0.0306382	1.1773388	1.1773392
−0.700	1.1871629	1.1871476	1.1871621	0.0251434	1.1871621	1.1871627
−0.675	1.1976250	1.1976063	1.1976241	0.0205649	1.1976241	1.1976247
−0.650	1.2087925	1.2087697	1.2087913	0.0157708	1.2087914	1.2087920
−0.625	1.2207415	1.2207139	1.2207402	0.0115445	1.2207402	1.2207410
−0.600	1.2335600	1.2335264	1.2335584	0.0086787	1.2335585	1.2335592
−0.575	1.2473494	1.2473087	1.2473476	0.0121243	1.2473476	1.2473486
−0.550	1.2622280	1.2621785	1.2622258	0.0112895	1.2622260	1.2622271
−0.525	1.2783341	1.2782737	1.2783315	0.0093829	1.2783317	1.2783329
−0.500	1.2958308	1.2957568	1.2958277	0.0079242	1.2958280	1.2958294
−0.475	1.3149118	1.3148208	1.3149081	0.0085640	1.3149085	1.3149101
−0.450	1.3358092	1.3356964	1.3358048	0.0051660	1.3358053	1.3358071
−0.425	1.3588035	1.3586628	1.3587983	0.0056111	1.3587991	1.3588013
−0.400	1.3842376	1.3840605	1.3842314	0.0045163	1.3842323	1.3842349
−0.375	1.4125349	1.4123095	1.4125273	0.0039120	1.4125286	1.4125316
−0.350	1.4442255	1.4439351	1.4442162	0.0035378	1.4442180	1.4442216
−0.325	1.4799829	1.4796033	1.4799714	0.0028966	1.4799740	1.4799784
−0.300	1.5206770	1.5201724	1.5206628	0.0021996	1.5206665	1.5206717
−0.275	1.5674545	1.5667700	1.5674364	0.0017770	1.5674420	1.5674484
−0.250	1.6218604	1.6209096	1.6218371	0.0014029	1.6218453	1.6218532
−0.225	1.6860356	1.6846762	1.6860049	0.0010466	1.6860168	1.6860266
−0.200	1.7630442	1.7610310	1.7630026	0.0008306	1.7630206	1.7630332
−0.175	1.8574538	1.8543390	1.8573955	0.0005877	1.8574231	1.8574397
−0.150	1.9764295	1.9713345	1.9763449	0.0004164	1.9763888	1.9764116
−0.125	2.1319886	2.1230240	2.1318556	0.0003074	2.1319309	2.1319640
−0.100	2.3462119	2.3287881	2.3459865	0.0001976	2.3461245	2.3461762
−0.075	2.6654413	2.6263356	2.6650072	0.0001327	2.6652912	2.6653833
−0.050	3.2102771	3.1000342	3.2092400	0.0000869	3.2099646	3.2101722
−0.025	4.4624148	3.9820838	4.4585333	0.0000487	4.4613773	4.4621359

6.

$$y' = (y^2-1)y/(2(1-x))$$

abs	pontos	extrapolált	Lambert	szing. helye	első mod.	második
−0.925	1.4425953	1.4425942	1.4425952	0.0226378	1.4425953	1.4425953
−0.900	1.4529663	1.4529640	1.4529662	0.0312792	1.4529663	1.4529663
−0.875	1.4638501	1.4638464	1.4638500	0.0113243	1.4638501	1.4638501
−0.850	1.4752866	1.4752812	1.4752864	0.0237024	1.4752866	1.4752867
−0.825	1.4873201	1.4873128	1.4873199	0.0260336	1.4873201	1.4873202
−0.800	1.5000000	1.4999903	1.4999997	0.0248615	1.4999999	1.5000000
−0.775	1.5133812	1.5133688	1.5133808	0.0221857	1.5133809	1.5133811
−0.750	1.5275252	1.5275096	1.5275247	0.0210933	1.5275468	1.5275251
−0.725	1.5425013	1.5424819	1.5425007	0.0200576	1.5425009	1.5425011
−0.700	1.5583875	1.5583636	1.5583867	0.0146703	1.5583869	1.5583873
−0.675	1.5752719	1.5752426	1.5752710	0.0100042	1.5752712	1.5752716
−0.650	1.5932550	1.5932193	1.5932539	0.0074380	1.5932542	1.5932547
−0.625	1.6124516	1.6124081	1.6124503	0.0094817	1.6124505	1.6124511
−0.600	1.6329932	1.6329403	1.6329916	0.0090712	1.6329918	1.6329924
−0.575	1.6550319	1.6549675	1.6550300	0.0091707	1.6550302	1.6550310
−0.550	1.6787441	1.7686656	1.6787420	0.0083796	1.6787422	1.6787432
−0.525	1.7043362	1.7042403	1.7043336	0.0065791	1.7043339	1.7043350
−0.500	1.7320508	1.7319331	1.7320477	0.0074036	1.7320479	1.7320493
−0.475	1.7621757	1.7620305	1.7621720	0.0049509	1.7621723	1.7621739
−0.450	1.7950549	1.7948749	1.7950506	0.0447703	1.7950508	1.7950527
−0.425	1.8311038	1.8308788	1.8310985	0.0043367	1.8310990	1.8311014
−0.400	1.8708287	1.8705452	1.8708223	0.0034787	1.8708228	1.8708255
−0.375	1.9148542	1.9144932	1.1148464	0.0030564	1.9148471	1.9148503
−0.350	1.9639610	1.9634959	1.9639514	0.0028369	1.9639523	1.9639562
−0.325	2.0191392	2.0185315	2.0191272	0.0019239	2.0191290	2.0191338
−0.300	2.0816660	2.0808589	2.0816510	0.0017291	2.0816536	2.0816594
−0.275	2.1532217	2.1521284	2.1532025	0.0014030	2.1532069	2.1532141
−0.250	2.2360680	2.2345521	2.2360431	0.0011276	2.2360498	2.2360589
−0.225	2.3333333	2.3311715	2.3333003	0.0008222	2.3333103	2.3333218
−0.200	2.4494898	2.4462988	2.4494448	0.0007110	2.4494603	2.4494755
−0.175	2.5111939	2.5862775	2.5911305	0.0004937	2.5911552	2.5911755
−0.150	2.7688746	2.7608743	2.7687814	0.0003547	2.7688226	2.7688510
−0.125	3.0000000	2.9860131	2.9998547	0.0002357	2.9999256	2.9999670
−0.100	3.3166248	3.2896529	3.3163785	0.0001667	3.3165105	3.3165762
−0.075	3.7859389	3.7259949	3.7854658	0.0001133	3.7857400	3.7858586
−0.050	4.5825657	4.4156946	4.5814522	0.0000770	4.5821564	4.5824279
−0.025	6.4031244	5.6882611	6.3989711	0.0000436	6.4017218	6.4027248

IRODALOM

[1] J. D. LAMBERT—A. R. MITCHELL: On the solution of $y'=f(x, y)$ by a class of high accuracy difference formulae of low order. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* **13** (1962) 223—232.

[2] J. D. LAMBERT—B. SHAW: On the Numerical Solution of $y'=f(x, y)$ by a Class of Formulae Based on Rationale Approximation. *Mathematics of Computation,* **19** (1965) 456—461.

[3] J. D. LAMBERT—B. SHAW: A Method for The Numerical Solution of $y'=f(x, y)$ Based on a Self Adjusting Non-Polinomial Interpolant. *Mathematics of Computation,* **20** (1966) 11—20.

[4] J. D. LAMBERT—B. SHAW: Generalisation of Multistep Methods for Ordinary Differencial Equations. *Numerische Mathematik* **8** (1966) 250—263.

(Beérkezett: 1969. XI. 10.)

NEUE NUMERISCHE METHODE FÜR DIE BERECHNUNG DER SINGULÄREN LÖSUNG VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

von

S. FRIVALDSZKY

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit neuen numerischen Methoden für die Berechnung der singulären Lösung von den Differentialgleichungen erster Ordnung. Dabei gibt sie den Fehler der Berechnungen in einem Schritt sogar ein Verfahren für die Berechnung der Daten des Pols und numerische Beispiele.

A MINKOWSKI-FÉLE DIMENZIÓ ÉS MÉRTÉKFOGALOMRÓL

(Összefoglaló ismertetés)

Írta: NAGY PÉTER TIBOR (SZEGED)

1. §. Az ívhossz és felszínmérés problémája

A matematika egyik legősibb problémája a görbe ívek és felületek mértékének a meghatározása. Ennek a klasszikus, a már ARCHIMEDES által is alkalmazott módszere a görbeív hosszát a beírható törtvonalak hosszúságának határértékeként, a felület felszínét pedig a beírható poliéderek felszínének határértékeként állapítani meg. A XIX. század második felében is ez volt még az egyetlen elfogadhatónak hitt definíció. 1880-ban H. A. SCHWARTZ talált elsőként egy példát arra, hogy egy hengerhez konstruálható poliéderek egyenletesen konvergens sorozata, amelyek felszíne nem konvergál, sőt tetszőleges naggyá válhat.

SCHWARTZ példájának publikálása óta sok kezdeményezés született a felszínmérés elméletének ellentmondásmentes kiépítésére (HERMITE, PEANO, MINKOWSKI, LEBESGUE, CARATHÉODORY, HAUSDORFF é. í. t.). A továbbiakban MINKOWSKI elképzelését, az ebből kifejlődött elmélet főbb eredményeit kívánjuk összefoglalni. Megemlítjük még azt, hogy a MINKOWSKI-féle mértéknek más mértékkel (PEANO, LEBESGUE, é. í. t.) való pontos összefüggését kielégítően tisztázó eredmények tudomásunk szerint nincsenek.

Már G. Cantor [1] felvetette azt a gondolatot, hogy tetszőleges halmaz mértékét célszerű a (mérhetőség szempontjából jó tulajdonságú) ϱ sugarú burkolójának mértéke segítségével, annak $\varrho \to 0$ esetben való határértékeként definiálni. H. MINKOWSKI ezt a gondolatot folytatta és javasolta [2] hogy a C görbeív hosszát a $\lim\limits_{\varrho \to 0} \frac{V(C_\varrho)}{\varrho^2 \pi}$, az S felület mértékét pedig a $\lim\limits_{\varrho \to 0} \frac{V(S_\varrho)}{2\varrho}$ érték definiálja ($V(C_\varrho)$ jelöli a C görbeív ϱ sugarú burkolójának, $V(S_\varrho)$ pedig az S felület ϱ sugarú burkolójának a térfogatát).

G. BOULIGAND ezt a gondolatmenetet továbbfejlesztette, és [3]—[6]-ban kiépítette a MINKOWSKI-féle dimenzió és mérték fogalmát.

2. §. A burkolók mérhetősége

CANTOR, illetve MINKOWSKI gondolata a burkolók „jó" mérhetőségi tulajdonságára alapul. Azonban ők nem tisztázták, mit is jelent valóban ez a tulajdonság, hanem feltették vizsgálatuk előtt, hogy ezen burkolóknak vagy más szóval paralelhalmazoknak van mérhető térfogatuk. Tetszőleges halmaz burkolójának mérhetőségét BEHREND vizsgálta [7]-ben.

2. 1. Definíció. Legyen X nem üres halmaz az E_n euklideszi térben, ϱ pozitív valós szám. Az X halmaz ϱ sugarú burkolójának nevezzük és X_ϱ-val jelöljük az összes

olyan ϱ sugarú zárt gömbök egyesítési halmazát, amelyeknek középpontja X-nek eleme.

Érvényesek a következő állítások:

1. *Ha X zárt halmaz, akkor X_ϱ azokból a pontokból áll, amelyek X-től legfeljebb ϱ távolságra vannak; ez esetben X_ϱ is zárt.*

2. *Ha X nyitott halmaz, akkor X_ϱ azokból a pontokból áll, amelyek X-től ϱ-nál kisebb távolságra vannak; ez esetben X_ϱ is nyitott.*

TÉTEL. (BEHREND): *Legyen X tetszőleges nem üres és korlátos halmaz az E_n euklideszi térben, ϱ tetszőleges pozitív valós szám. Ekkor X_ϱ Jordan szerint mérhető.*

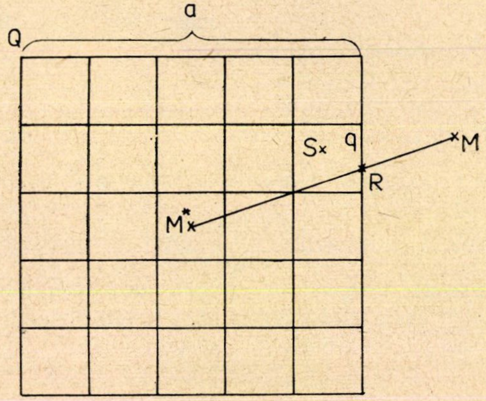
Bizonyítás. Mivel X és így X_ϱ is korlátos, a határa, ∂X_ϱ korlátos zárt halmaz és így lefedhető a oldalhosszúságú n-dimenziós kockák véges rendszerével, ahol legyen $a \leq \frac{\varrho}{\sqrt{n}}$.

Jelöljük a ∂X_ϱ-t lefedő kockák számát r-rel. Ekkor érvényes:

$$\bar{\mu}_J(\partial X_\varrho) \leq r a^n,$$

ahol $\bar{\mu}_J$ a külső *Jordan*-mértéket jelöli.

Bontsuk fel a lefedő kockákat a/u oldalhosszúságú u^n számú részkockára, ahol u egy későbbiekben meghatározandó páratlan szám. Bebizonyítjuk, hogy ezen részkockák közül legfeljebb u^n-1-nek lesz ∂X_ϱ-val közös belső pontja.



1. ábra

Legyen Q egy tetszőleges, a oldalhosszúságú lefedő kocka. Felbontva ezt a/u oldalhosszúságú részkockákra, szemeljük ki a Q középpontját tartalmazó részkockát. (Ilyen csak egy van, hisz u páratlan.) Ha ez nem tartalmaz ∂X_ϱ-val közös belső pontot, akkor Q-ra már teljesül az állítás. Viszont, ha tartalmaz ∂X_ϱ-val közös belső pontot, akkor tartalmaz olyan M^* pontot is, amely belső pontja X_ϱ-nak, azaz található hozzá egy $M \in X$ ($M \notin Q$) pont, melyre $\overline{M^*M} < \varrho$. Legyen R az M^*M szakasz metszéspontja Q határával, $q \subset Q$ pedig az (esetleg egyik) R-et tartalmazó rész-kocka. Legyen S q-nak tetszőleges eleme. Belátjuk, hogy S X_ϱ-nak belső pontja. Valóban

$$\overline{MM^*} < \varrho \text{ és}$$

$$\overline{M^*R} \geqq \frac{u-1}{2}\frac{a}{u},$$

mivel M^* a Q középpontját tartalmazó részkockában van, továbbá

$$\overline{RS} < \frac{a}{u}\sqrt{n} \text{ és}$$

$$\overline{MS} \leqq \overline{MR} + \overline{RS} = \overline{M^*M} - \overline{M^*R} + \overline{RS} < \varrho - \frac{u-1}{2}\frac{a}{u} + \sqrt{n}\frac{a}{u}.$$

Azaz $\overline{MS} < \varrho$, ha $\frac{u-1}{2} > \sqrt{n}$, ez pedig teljesül, ha u-t $2\sqrt{n}+1$-nél nagyobbra választjuk. Így igazoltuk, hogy S X_ϱ-nak belső pontja, s mivel S-et tetszőlegesen választottuk q-ból, q teljes egészében X_ϱ belsejében fekszik; igazoltuk állításunkat is.

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\bar{\mu}_J(\partial X_\varrho) \leqq r\frac{u^n-1}{u^n}a^n.$$

Ezek után k-szor megismételve a kockák u^n részre való osztását (most már u rögzített), kapjuk, hogy

$$\bar{\mu}_J(\partial X_\varrho) \leqq r\left(\frac{u^n-1}{u^n}\right)^k a^n \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Ha $k\to\infty$, a jobb oldal 0-hoz tart, és így ebből már következik, hogy X_ϱ *Jordan*-mérhető. Így a tételt bebizonyítottuk.

A fent bizonyított tétel lehetővé teszi, hogy tetszőleges X halmaz ϱ sugarú burkolójának térfogatáról beszélhessünk. A továbbiakban ezt a térfogatot $V(X_\varrho)$-val jelöljük.

3. §. A Minkowski-féle dimenzió és mérték definíciója

Legyen X az E_n euklideszi térnek nem üres korlátos halmaza, $\varrho>0$, $n\geqq\tau\geqq0$ valós számok.

Képezzük a következő karakterisztikus hányadost:

$$q_\tau(X,\varrho) := \frac{V(X_\varrho)}{\varrho^{n-\tau}}.$$

Hajtsuk végre a $\varrho\to0$ határátmenetet, és vezessük be a

$$\underline{q}_\tau(X) := \varliminf_{\varrho\to0} q_\tau(X,\varrho), \quad \bar{q}_\tau(X) := \varlimsup_{\varrho\to0} q_\tau(X,\varrho)$$

jelöléseket.

3. 1 Definíció. Az E_n tér korlátos és nem üres X részhalmazának MINKOWSKI-féle alsó illetve felső dimenzióján a következő $\underline{\mu}(X)$ illetve $\bar{\mu}(X)$ értékeket értjük:

$$\underline{\mu}(X) := \inf\{\tau : \underline{q}_\tau(X) = 0\}, \quad \bar{\mu}(X) := \inf\{\tau : \bar{q}_\tau(X) = 0\}.$$

A definícióból világos a következő egyenlőtlenség teljesülése:

$$0 \leqq \underline{\mu}(X) \leqq \bar{\mu}(X) \leqq n.$$

3. 2 Definíció. Amennyiben $\underline{\mu}(X) = \bar{\mu}(X)$ teljesül, a közös $\mu(X)$ értékeket az X halmaz *Minkowski*-dimenziójának nevezzük. Ezen dimenziószámokra érvényesek a következő állítások:

(a) *Ha* $\tau' < \underline{\mu}(X)$, *akkor* $\underline{q}_{\tau'}(X) = \infty$.

(b *Ha* $\tau'' > \underline{\mu}(X)$, *akkor* $\underline{q}_{\tau''}(X) = 0$.

Hasonlóan érvényes:

(a') *Ha* $\tau' < \bar{\mu}(X)$, *akkor* $\bar{q}_{\tau'}(X) = \infty$.

(b') *Ha* $\tau'' > \bar{\mu}(X)$, *akkor* $\bar{q}_{\tau''}(X) = 0$.

(a) *bizonyítása:* Legyen $\tau' < \tau < \underline{\mu}(X)$, ekkor érvényes:

$$q_{\tau'} = \varliminf_{\varrho\to 0}\left[\frac{V(X_\varrho)}{\varrho^{n-\tau'}}\right] = \varliminf_{\varrho\to 0}\left[\frac{V(X_\varrho)}{\varrho^{n-\tau}}\frac{1}{\varrho^{\tau-\tau'}}\right] = \varliminf_{\varrho\to 0}\left[\frac{V(X_\varrho)}{\varrho^{n-\tau}}\right]\lim_{\varrho\to 0}\frac{1}{\varrho^{\tau-\tau'}} = \underline{q}_\tau(X)\lim_{\varrho\to 0}\frac{1}{\varrho^{\tau-\tau'}} = \infty,$$

hisz $\underline{\mu}(X)$ definíciója szerint $\underline{q}_\tau(X) > 0$, mivel $\tau < \underline{\mu}(X)$. A további állítások hasonlóan bizonyíthatók.

Egy halmaz *Minkowski*-féle dimenziója általában nem egész, sőt még csak nem is racionális szám. Ezen állítás igazolása végett vizsgáljuk meg néhány egyszerű halmaz *Minkowski*-féle dimenzióját.

1. Tekintsük az E_1 euklideszi térben (a számegyenesen) a következő ponthalmazt: $X = \left\{x : x = \frac{1}{2^n} \; (n = 1, 2, \ldots)\right\}$. X ϱ sugarú burkolójának mértékére a következő összefüggés érvényes: $V(X_\varrho) = \frac{2}{2^{n-1}} + 2(n-1)\varrho$, ha $\frac{1}{2^{n+1}} \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2^n}$. Eszerint a karakterisztikus hányadosra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$2\left(\frac{1}{2^\tau}\right)^n + \frac{2(n-1)}{2^{(n+1)\tau}} \leqq \frac{V(X_\varrho)}{\varrho^{1-\tau}} \leqq 4\left(\frac{1}{2^\tau}\right)^{n+1} + \frac{2(n-1)}{2^{n\tau}}, \quad \text{ha} \quad \frac{1}{2^{n+1}} \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2^n}.$$

Tetszőleges $\tau > 0$ esetén végrehajtva a $\varrho \to 0$, azaz $n \to \infty$ határátmenetet, a karakterisztikus hányados 0-hoz tart. Így nyerjük, hogy ezen X halmaz *Minkowski*-dimenziója 0.

2. Jelölje most X a számegyenes $\left\{x : x = \frac{1}{n} \; (n = 1, 2, \ldots)\right\}$ halmazát. Ekkor érvényes: $V(X_\varrho) = \frac{1}{n} + n\varrho$, ha $\frac{1}{2n(n+1)} \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2n(n-1)}$. Képezve a karakterisztikus

hányadost, végrehajtva a határátmenetet, az előzőhöz hasonló módon kapjuk, hogy a halmaz *Minkowski*-dimenziója $\frac{1}{2}$.

3. Tekintsük most a *Cantor*-féle triadikus halmazt, jelöljük X-szel. A ϱ sugarú burkolójának a mértéke: $V(X_\varrho) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2^{n+1}\varrho$, ha $\frac{1}{2\cdot 3^{n+1}} \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2\cdot 3^n}$ teljesül. Az előzőekhez hasonló módon nyerjük, hogy e halmaz dimenziója $\frac{\log 2}{\log 3}$.

Most rátérünk a k dimenziós *Minkowski*-mérték definíciójára ($0 \leqq k \leqq n$, egyébként tetszőleges).

3. 3. Definíció. Az E_n tér korlátos és nem üres X részhalmazának k dimenziós *Minkowski*-féle alsó, illetve felső mértékén a következő $\underline{M}_k$ és $\overline{M}_k$ számokat értjük:

$$\underline{M}_k(X) = \frac{\underline{q}_k(X)}{\omega_{n-k}}, \quad \overline{M}_k(X) = \frac{\overline{q}_k(X)}{\omega_{n-k}},$$

ahol ω_λ jelöli a „λ dimenziós egységgömb térfogatát”:

$$\omega_\lambda := \frac{\pi^{\frac{\lambda}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)} \quad (\lambda \geqq 0, \text{ valós}).$$

Ez a formula természetes λ-kra visszaadja az ismert térfogatképletet, amint ez könnyen látható a gamma függvény következő tulajdonságainak a felhasználásával:

$\Gamma(n) = (n-1)!$ (n tetszőleges természetes szám);

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (z tetszőleges komplex szám);

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$.

3. 4 Definíció. Amennyiben $\underline{M}_k(X) = \overline{M}_k(X)$, az X halmazt k-dimenzióban *Minkowski*-mérhetőnek, a fenti közös $M_k(X)$ értéket pedig az X halmaz k-dimenziós *Minkowski*-mértékének nevezzük.

A definíciók szerint nyilván érvényes:

$$0 \leqq \underline{M}_k(X) \leqq \overline{M}_k(X) \leqq \infty.$$

Az $(a), (b), (a'), (b')$ állításoknak egyenes következményei a következő állítások:

(A) Ha $\tau' < \underline{\mu}(X)$, akkor $\underline{M}_{\tau'}(X) = \infty$.

(B) Ha $\tau'' > \underline{\mu}(X)$, akkor $\underline{M}_{\tau''}(X) = 0$.

(A') Ha $\tau' < \overline{\mu}(X)$, akkor $\overline{M}_{\tau'}(X) = \infty$.

(B') Ha $\tau'' > \overline{\mu}(X)$, akkor $\overline{M}_{\tau''}(X) = 0$.

DEBRUNNER [8]-ban megvizsgálta ezen dimenzió és mértékszámok viselkedését különböző halmazműveletek során (*Descartes*-szorzat, addíció, hasonlósági transzformáció). Ezen kívül bebizonyította többek között azt, hogy például a $0<\alpha<\beta<n$, $0\leqq\gamma\leqq\infty$, $0\leqq\delta\leqq\infty$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő minden $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ számnégyeshez létezik az E_n térnek olyan X részhalmaza, amelyre teljesül:

$$\underline{\mu}(X)=\alpha, \quad \bar{\mu}(X)=\beta,$$

$$\underline{M}_\mu(X)=\gamma, \quad \overline{M}_{\bar{\mu}}(X)=\delta.$$

Meg kell még említenünk, hogy ez a mérték pozitív távolságú halmazokra additív, hiszen elég kis ϱ esetén az összeadandó halmazok burkolói is pozitív távolságra lesznek egymástól (véges sok összeadandó esetén). Azonban diszjunkt, de érintkező halmazokra csupán speciális esetekben lehet megállapításokat tenni. (A felületmérték — azaz az $(n-1)$-dimenziós mérték — additivitását FAVARD vizsgálta [9]-ben, és rektifikálható görbékkel elválasztható felületdarabok esetén talált is összefüggéseket.)

4. §. A térfogatfüggvény néhány tulajdonsága

Tekintsünk egy korlátos halmazt az E_n euklideszi térben. Vizsgáljuk ϱ sugarú burkolójának térfogatát, mint a ϱ sugár függvényét; jelöljük ezt a függvényt $V(\varrho)$-val.

4. 1. TÉTEL. (BOULIGAND [5]): *Az E_n euklideszi térbeli korlátos X halmaz $V(\varrho)=$ $=V(X_\varrho)$ térfogatfüggvénye bármely ϑ szám esetében* $(0<\vartheta<1)$, *eleget tesz a következő egyenlőtlenségnek*

$$\vartheta^n V(\varrho)\leqq V(\vartheta\varrho)<V(\varrho).$$

Bizonyítás: A $V(\varrho)$ függvény szigorú monotonitása, azaz a $V(\vartheta\varrho)<V(\varrho)$ egyenlőtlenség teljesülése következik az

$$X_{\vartheta\varrho}\underset{\neq}{\subset}\operatorname{int}X_\varrho$$

halmazrelációból.

A $\vartheta^n V(\varrho)\leqq V(\vartheta\varrho)$ egyenlőtlenség bizonyítása előtt megjegyezzük, hogy mivel a burkolóhalmazok határa BEHREND tétele szerint 0-mértékű, nem követünk el hibát, ha a bizonyítás során a burkolóhalmazok helyett nyitott magjukat tekintjük és rájuk is a burkoló elnevezést és a burkolókra bevezetett jelölést használjuk.

Mivel eszerint $X_{\vartheta\varrho}$-t illetve $(\vartheta X)_{\vartheta\varrho}$-t nyitott sugarú gömbök egyesítéseként állíthatjuk elő, a *Lindelöf*-féle lefedési tétel szerint található nyitott $\vartheta\varrho$ sugarú gömböknek egy-egy olyan sorozata, emelyek $X_{\vartheta\varrho}$-t illetve $(\vartheta X)_{\vartheta\varrho}$-t lefedik. ($\vartheta X$ az X halmaznak egy rögzített o pont körüli ϑ-szoros hasonlósági transzformáltját jelöli.)

Ezen lefedő gömbök középpontjaiból álló sorozatokat bővítsük ki olyan $\{p_i\}$, illetve $\{q_i\}$ sorozattá, hogy egyrészt teljesüljön: a p_i, illetve q_i körüli $\vartheta\varrho$ sugarú nyitott P_i, illetve Q_i gömbök $(i=1, 2, \ldots)$ lefedik az $X_{\vartheta\varrho}$, illetve $(\vartheta X)_{\vartheta\varrho}$ halmazokat, másrészt a p_i és q_i pontok az X halmaz o pont körüli ϑ-szoros hasonlósági transzformációjára nézve egymásnak megfelelő pontok. Ekkor érvényes, hogy

$$X_{\vartheta\varrho}=\bigcup_{i=1}^{\infty}P_i, \quad (\vartheta X)_{\vartheta\varrho}=\bigcup_{i=1}^{\infty}Q_i.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$R_k = \bigcup_{i=1}^{k} P_i, \quad S_k = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i.$$

Így az előző egyenlőségek a következő alakot nyerik:

$$X_{\vartheta\varrho} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k, \quad (\vartheta X)_{\vartheta\varrho} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Mivel az R_k, S_k $(k=1, 2, \ldots)$, $X_{\vartheta\varrho}$ és $(\vartheta X)_{\vartheta\varrho}$ halmazok *Jordan*-mérhetők, érvényesek a következő határértékrelációk:

$$V(X_{\vartheta\varrho}) = \lim_{k\to\infty} \mu_J(R_k),$$

$$V((\vartheta X)_{\vartheta\varrho}) = \lim_{k\to\infty} \mu_J(S_k).$$

Ezek szerint a $V(X_{\vartheta\varrho}) \geqq V((\vartheta X)_{\vartheta\varrho})$ egyenlőtlenséget igazolni tudjuk, ha megmutatjuk, hogy

$$\mu_J(R_k) \geqq \mu_J(S_k) \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Ezt viszont teljes indukcióval igazolni tudjuk:
$k=1$ esetben $\mu_J(R_1)=\mu_J(S_1)$, hisz R_1 és S_1 kongruens gömbök.

Tegyük fel, hogy $\mu_J(R_k) \geqq \mu_J(S_k)$. Tekintsük R_{k+1}-et, illetve S_{k+1}-et, amelyek a $p_1, \ldots, p_{k+1}$, illetve $q_1, \ldots, q_{k+1}$ középpontú, $\vartheta\varrho$ sugarú gömbök egyesítési halmazai.

Jelöljük $q_1', \ldots, q_{k+1}'$-vel a $p_1, \ldots, p_{k+1}$ pontok képét a p_{k+1} pont körüli ϑ-szoros hasonlósági transzformációra vonatkozóan $(p_{k+1}=q_{k+1}')$, továbbá jelöljük Q_i'-vel a q_i' körüli $\vartheta\varrho$ sugarú gömböt, valamint legyen

$$S_m' := \bigcup_{i=1}^{m} Q_i'. \quad (m \leqq k+1).$$

Ekkor a $q_1', \ldots, q_{k+1}'$ pontrendszer kongruens a $q_1, \ldots, q_{k+1}$ pontrendszerrel, továbbá

$$\vartheta \overline{p_1 p_{k+1}} = \overline{q_1' q_{k+1}'}, \ \vartheta \overline{p_2 p_{k+1}} = \overline{q_2' q_{k+1}'}, \ldots, \vartheta \overline{p_k p_{k+1}} = \overline{q_k' q_{k+1}'}.$$

Mivel S_{k+1} kongruens S_{k+1}'-vel, elegendő a $\mu_J(R_{k+1}) \geqq \mu_J(S_{k+1}')$ egyenlőtlenséget igazolnunk.

Ehhez, mivel S_k kongruens S_k'-vel, valamint felhasználva az indukciós feltevésből következő

$$\mu_J(R_k) \geqq \mu_J(S_k')$$

egyenlőtlenséget, elegendő belátnunk, hogy

$$\mu_J(R_{k+1} - R_k) \geqq \mu_J(S_{k+1}' - S_k').$$

Viszont

$$R_{k+1} - R_k = P_{k+1} - (P_1 + \cdots + P_k),$$

$$S_{k+1}' - S_k' = Q_{k+1}' - (Q_1' + \cdots + Q_k').$$

Mivel $p_{k+1}=q'_{k+1}$ a hasonlósági centrum, a $\overline{p_i p_{k+1}}$ és $\overline{q'_i q'_{k+1}}$ szakaszokra vonatkozó fentebbi összefüggésből következik, hogy a $P_{k+1}=Q'_{k+1}$ gömbből a p_i körüli $\vartheta\varrho$ sugarú gömbök kisebb szeleteket metszenek ki, mint a q'_i körüli ugyanazon sugarú gömbök. Azaz

$$R_{k+1}-R_k \supset S'_{k+1}-S'_k,$$

következésképpen

$$\mu_J(R_{k+1}-R_k) \geqq \mu_J(S'_{k+1}-S'_k).$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\mu_J(R_k) \geqq \mu_J(S_k)$ minden k-ra.
Végrehajtva a $k\to\infty$ határátmenetet, nyerjük:

$$V(X_{\vartheta\varrho}) \geqq V\big((\vartheta X)_{\vartheta\varrho}\big).$$

A $(\vartheta X)_{\vartheta\varrho}$ halmazon elvégezve az $\frac{1}{\vartheta}$-szoros hasonlósági transzformációt, a térfogata $\frac{1}{\vartheta^n}$-szeresére változik, tehát

$$V\big((\vartheta X)_{\vartheta\varrho}\big) = \vartheta^n V(X_\varrho).$$

Ezzel bebizonyítottuk a

$$V(X_{\vartheta\varrho}) \geqq \vartheta^n V(X_\varrho)$$

egyenlőtlenséget is. Így a tétel teljes bizonyítást nyert.

A *Bouligand*-egyenlőtlenség felhasználásával igazolhatjuk a következő tételt:

4.2 TÉTEL (PUCCI [13]): *A $V(\varrho)$ térfogatfüggvény szigorúan monoton növő, majdnem mindenütt differenciálható és bármely $[\varrho_1, \varrho_2]$ véges intervallumon Lipschitz-feltételnek tesz eleget, következésképpen teljesen folytonos.*

Bizonyítás: A szigorú monotonitás az előző tétel szerint teljesül. LEBESGUE tétele értelmében a monotonitásból következik a majdnem mindenütt való differenciálhatóság. Hátra van még a *Lipschitz*-tulajdonság igazolása.

Legyen ϱ tetszőleges eleme a $[\varrho_1, \varrho_2]$ intervallumnak. A $V(\varrho)-V(\vartheta\varrho)$ különbséget kívánjuk becsülni, ahol $0<\vartheta<1$. A *Bouligand*-egyenlőtlenség szerint teljesül, hogy

$$V(\varrho)-V(\vartheta\varrho) \leqq V(\varrho)-\vartheta^n V(\varrho) = V(\varrho)(1-\vartheta^n).$$

Felhasználva a következő egyenlőtlenséget

$$1-\vartheta^n = (1-\vartheta)(\vartheta^{n-1}+\dots+1) \leqq n(1-\vartheta),$$

nyerjük, hogy

$$V(\varrho)-V(\vartheta\varrho) \leqq nV(\varrho)(1-\vartheta) = n\frac{V(\varrho)}{\varrho}(\varrho-\vartheta\varrho).$$

Mivel $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$, kapjuk, hogy

$$V(\varrho)-V(\vartheta\varrho) \leqq n\frac{V(\varrho_2)}{\varrho_1}(\varrho-\vartheta\varrho) = C(\varrho-\vartheta\varrho).$$

Eszerint $V(\varrho)$ a $[\varrho_1, \varrho_2]$ intervallumon *Lipschitz*-feltételnek tesz eleget. Ezzel a tételt igazoltuk.

5. §. A területfüggvényről

Ezen paragrafusban egy síkbeli területfüggvényre vonatkozó tételt fogunk tárgyalni SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA dolgozata [10] alapján. Felvetődik a kérdés: vajon hasonló jellegű állítás bebizonyítható-e magasabb dimenziós térbeli térfogatfüggvényre is? Ez a probléma még megoldatlan, a [10]-beli bizonyítás gondolatmenete magasabb dimenziós térben nem alkalmazható.

Legyen X tetszőleges síkbeli ponthalmaz. Jelölje $\lambda(X)$ az X komplementere tartalmazta körök sugarának a felső határát.

5. 1. TÉTEL: *Legyen X tetszőleges síkbeli zárt ponthalmaz, melynek a határa kompakt. Ha $0<\varrho<\lambda(X)$, léteznek a következő véges határértékek*

$$L_+(\varrho):=\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{\tau}m(X_{\varrho+\tau}-X_\varrho),\qquad L_-(\varrho):=\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{\tau}m(X_\varrho-X_{\varrho-\tau}),$$

érvényes az $L_+(\varrho)\leqq L_-(\varrho)$ egyenlőtlenség, és legfeljebb megszámlálható sok ϱ érték kivételével $L_+(\varrho)=L_-(\varrho)$.

Ez a tétel [10]-ben a következő tétel korolláriumaként adódik:

5. 2. TÉTEL: *Legyen Y egy tetszőleges síkbeli zárt ponthalmaz, amely n korlátos és v nem korlátos zárt komponensből áll (a nem korlátos komponens a végtelen távoli pont egy teljes környezetét jelenti, és így $v=0$ vagy 1). Ekkor*

$$m(Y_\varrho-Y)-\pi(n-v)\varrho^2$$

ϱ-nak folytonos, konkáv függvénye a $0\leqq\varrho<\lambda(Y)$ intervallumban $\big(m(Y_\varrho-Y)$ az $Y_\varrho-Y$ korlátos Borel-halmaz Lebesgue-mértékét jelöli$\big)$.

Ezen tétel bizonyításának csak a főbb lépéseit, és a bizonyításban szereplő fontosabb fogalmakat kívánjuk vázolni.

5. 1 Definíció. Körtartománynak nevezünk egy K síkbeli ponthalmazt, ha az véges számú zárt körlemeznek és legfeljebb egy nyílt körlemez komplementerhalmazának egyesítéseként áll elő. Feltesszük, még, hogy sem K, sem komplementere nem üres halmaz.

Körpoligonnak nevezünk egy zárt síkgörbét, ha előáll véges sok körív egyesítéseként.

A tétel bizonyításához először a következő lemmát kell belátnunk.

5. 1 LEMMA: *Legyen K egy olyan körtartomány, amely n korlátos és v nem korlátos komponensből áll ($v=0$ vagy 1). Ekkor*

$$m(K_\varrho-K)-\pi(n-v)\varrho^2$$

ϱ-nak folytonos és konkáv függvénye a $0\leqq\varrho<\lambda(K)$ intervallumban.

A *bizonyítás* gondolatmenete a következő:

1. Legyen K egyelőre egy olyan — egyébként tetszőleges — korlátos körtartomány, amelynek a határa körpoligon. Jelölje $l(\varrho)$ $\partial(K_\varrho)$-nak az ívhosszúságát, $l^c(\varrho)$ pedig $\partial((CK)_\varrho)$ ívhosszát, ahol CK K komplementer halmazát jelenti. Ezeket az $l(\varrho)$ és $l^c(\varrho)$ körpoligon ívhosszakat elemi geometriai okoskodással leírhatjuk a ϱ para-

méter függvényében. Így megállapíthatók róluk, hogy léteznek a következő határértékek:

$$d = \lim_{\varrho \to +0} \frac{1}{\varrho} \{l(\varrho) - l(0)\}, \quad d^c = \lim_{\varrho \to +0} \frac{1}{\varrho} \{l^c(\varrho) - l(0)\},$$

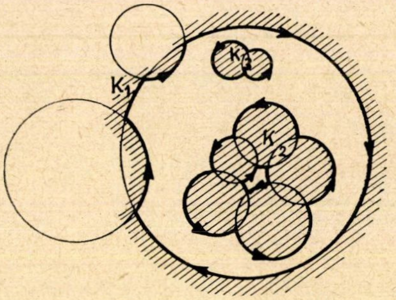
és teljesül rájuk a

$$d \leqq 2\pi, \quad d^c \leqq -2\pi$$

egyenlőtlenség. ($l(O)$ jelöli ∂K ívhosszát.)

2. Jelöljön most már K egy n korlátos és ν nem korlátos komponensből álló körtartományt. Jelölje $l(\varrho)$ továbbra is $\partial(K_\varrho)$ ívhosszát. ∂K most véges sok körpoligonból áll. Ezeket a körpoligonokat lássuk el irányítással úgy, hogy eszerint az irány szerint haladva, a körpoligon balpartja tartozzon K-hoz.

Jelöljük K összefüggő komponenseit $K_1, \ldots, K_m$-mel ($m = n + \nu$). Jelölje ezek után $l_i(\varrho)$ $\partial(K_\varrho)$ pozitív irányítású darabjának az ívhosszát, $l_i^c(\varrho)$ pedig a negatív irányítású darabnak az ívhosszát. $\partial(K_\varrho)$ természetesen nem minden i esetén bomlik fel egy pozitív és egy negatív irányítású darabra, ez esetben a nem értelmezett $l_i(\varrho)$ vagy $l_i^c(\varrho)$ függvény jelentse az azonosan 0 függvényt.



2. ábra

Ekkor elég kis ϱ esetén

$$l(\varrho) = \sum_{i=1}^{m} [l_i(\varrho) + l_i^c(\varrho)].$$

Alkalmazva a fentebb kimondott állítást, nyerjük, hogy a

$$d = \lim_{\varrho \to +0} \frac{1}{\varrho} \{l(\varrho) - l(0)\}$$

határérték létezik, véges, és érvényes rá a

$$d \leqq 2\pi(n - \nu)$$

egyenlőtlenség. (Az $l_i(\varrho)$ függvény n i-érték esetén nem az azonosan 0 függvény, az $l_i^c(\varrho)$ függvény pedig legalább ν i-érték esetén nem az azonosan 0 függvény.)

3. Mivel K_ϱ tetszőleges ϱ esetén körtartomány, alkalmazhatjuk rá az eddigieket, s így nyerjük, hogy létezik a

$$d(\varrho) = \lim_{\sigma\to+0} \frac{l(\varrho+\sigma)-l(\varrho)}{\sigma}$$

jobb oldali differenciálhányados, amely eleget tesz a

$$d(\varrho) \leqq 2\pi(n-\nu)$$

egyenlőtlenségnek.

Az eddigiekben probléma csak akkor lép fel, ha a K_ϱ tartalmaz „érintkező" körpoligonokat, ez azonban csak véges sok ϱ értékre történhet meg. Ebből pedig nyerjük, hogy az

$$f(\varrho) := l(\varrho)-2\pi(n-\nu)\varrho$$

függvény a $0 \leqq \varrho \leqq \lambda(K)$ intervallumban folytonos és véges sok szinguláris hely kivételével nempozitív jobb oldali differenciálhányadossal rendelkezik. Ebből viszont következik, hogy $f(\varrho)$ az egész intervallumban nemnövekvő függvény. E függvényt integrálva már meg is kapjuk a lemma állítását.

Az 5. 2. tétel *bizonyításának* a gondolatmenete ezek után a következő.

Az Y síkbeli ponthalmazt körtartományokkal approximáljuk. Finomabb megfontolásokkal belátható, hogy a körtartományokra igaz állítás átvihető a tételben szereplő Y ponthalmazra.

Az előzőek és a most vázolt tétel alapján térjünk rá a számunkra érdekes 1. tétel bizonyítására.

Bizonyítás: Az $m(K_\varrho-K)-\pi(n-\nu)\varrho^2$ konkáv függvény differenciálhatósági tulajdonságai alapján érvényes a következő állítás:

Tetszőleges síkbeli zárt ponthalmaz esetén, ha ezen Y ponthalmaz véges sok korlátos és legfeljebb egy nem korlátos komponensből áll (a nem korlátos komponens a végtelen távoli pontnak egy teljes környezete), léteznek a következő határértékek:

$$L_+(\varrho) = \lim_{\tau\to+0} \frac{1}{\tau}\, m(Y_{\varrho+\tau}-Y_\varrho), \quad L_-(\varrho) = \lim_{\tau\to+0} \frac{1}{\tau}\, m(Y_\varrho-Y_{\varrho-\tau})$$

minden ϱ-ra a $0<\varrho<\lambda(Y)$ intervallumban, ezen határértékek végesek, $L_+(\varrho) \leqq L_-(\varrho)$, és legfeljebb megszámlálható sok ϱ érték kivételével $L_+(\varrho)=L_-(\varrho)$.

Most már csak azt kell belátnunk, hogy X σ sugarú burkolója véges sok korlátos komponensből és legfeljebb egy nem korlátos komponensből áll. De mivel X határa kompakt, belefoglalható egy r sugarú $K(r)$ körbe. Következésképpen X_σ határát a $K(r+\sigma)$ kör tartalmazza; tartalmazza ezzel együtt X_σ összes korlátos komponensét is. De mivel minden komponens legalább egy σ sugarú kört tartalmaz, következésképpen mértéke $\geqq \pi\sigma^2$; így a korlátos komponensek száma $\leqq \left(\frac{r+\sigma}{\sigma}\right)^2$, hiszen a $K(r+\sigma)$ kör területe: $\pi(r+\sigma)^2$. Másrészt, ha X_σ tartalmaz nem korlátos komponenst, akkor ez tartalmazza a $K(r+\sigma)$ kör komplementerét, azaz ez a komponens a végtelen távoli pontnak teljes környezete. Így alkalmazható az előbb megfogalmazott állítás, s ezzel a tételt bebizonyítottuk.

6. §. A burkolók határának mérhetősége

Az előző paragrafusban láthattuk, hogy a két dimenziós euklideszi térben a térfogatfüggvény megszámlálható sok helytől eltekintve differenciálható. Azt is megemlítettük, hogy a magasabb dimenziós térbeli térfogatfüggvényről ezt nem tudjuk, csupán — amint a 4. §-ban erre rámutattunk — annyit tudunk, hogy zérómértékű helytől eltekintve differenciálható. Carlo Pucci vizsgálatai [13], [14] azt a megállapítást eredményezték, hogy zérómértékű halmaztól eltekintve ez a ϱ helyen vett differenciálhányados megegyezik a ϱ sugarú burkoló felületének $n-1$-dimenziós Minkowski-mértékével. E paragrafusban az erre vonatkozó vizsgálatokat kívánjuk összefoglalni.

A tétel igazolásához két lemmát kell belátnunk.

6. 1. Lemma (Kolmogorov [11]): *Legyen H az E_n euklideszi térnek egy részhalmaza, π pedig H-nak E_n-be való olyan leképezése, amelynél $x, y \in H$ esetén*

$$\overline{\pi(x)\pi(y)} \leqq \overline{xy}.$$

Ekkor fennáll a következő egyenlőtlenség

$$\overline{m}(\pi(H)) \leqq \overline{m}(H),$$

ahol $\overline{m}$ a Lebesgue-féle külső mértéket jelöli.

Bizonyítás: Először lássuk be a következő állítást. *Ha $K \subset H$ és K-t tartalmazza egy V térfogatú gömb, akkor $\overline{m}(\pi(K)) \leqq V$.*

Világos, hogy a $\pi(K)$ átmérője nem nagyobb a K-t tartalmazó gömb átmérőjénél. Következésképpen áll ez $\pi(K)$ konvex burka lezártjának átmérőjére is. Ennek viszont létezik a térfogata, jelöljük ezt U-val. Ekkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\overline{m}(\pi(K)) \leqq U \leqq V,$$

és ebből következik az állítás.

Ezek után legyen ε tetszőleges pozitív szám. Ekkor a *Lebesgue*-féle mérték értelmezése szerint találhatunk H-nak egy olyan G_k $(k=1, \ldots)$ gömbrendszerrel való lefedését, hogy ha V_k jelenti a G_k gömb térfogatát $(k=1, \ldots)$, érvényes lesz a következő egyenlőtlenség:

$$\sum_k V_k \leqq \overline{m}(H) + \varepsilon.$$

Vezessük be a $H_k = H \cap G_k$ jelölést, ekkor érvényesek a következő relációk:

$$H = \bigcup_k H_k, \quad H_k \subset G_k.$$

Továbbá felhasználva a fentebb igazolt $\overline{m}(\pi(K)) \leqq V$ egyenlőtlenséget:

$$\overline{m}(\pi(H_k)) \leqq V_k,$$

$$\overline{m}(\pi(H)) \leqq \sum_k \overline{m}(\pi(H_k)) \leqq \sum_k V_k \leqq \overline{m}(H) + \varepsilon.$$

Ezzel a lemma bizonyítást nyert.

6. 2. LEMMA (KNESER [12]): *Legyen H tetszőleges korlátos halmaz az E_n euklideszi térben, és legyen $\lambda \geqq 1$ és $b > a \geqq 0$. Ekkor érvényes a következő összefüggés*

$$m(H_{\lambda b}-H_{\lambda a}) \leqq \lambda^n m(H_b-H_a),$$

ahol m jelöli a Lebesgue-mértéket.

Bizonyítás: Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy H zárt. Ugyanis BEHREND tétele értelmében a burkolóhalmazok mérhetők és így lezárásuk nem változtatja meg mértéküket. A bizonyítás során használjunk vektori írásmódot, a pontokat a hozzájuk mutató helyvektorral jelöljük.

Vegyünk fel H-n kívül két pontot, jelöljük őket x_2-vel, illetve y_2-vel. Jelöljük ki a H halmaznak egy-egy olyan x_0, illetve y_0 pontját, amely az x_2, illetve y_2 ponttól minimális távolságra van. Jelöljük x_1-gyel illetve y_1-gyel, az x_0x_2, illetve az y_0y_2 szakasznak azt a pontját, amelyre

$$\lambda(x_1-x_0) = x_2-x_0, \quad \text{illetve} \quad \lambda(y_1-y_0) = y_2-y_0$$

teljesül. Ekkor

$$(y_2-y_0)^2 \leqq (y_2-x_0)^2 \quad \text{és} \quad (x_2-x_0)^2 \leqq (x_2-y_0)^2.$$

Ezeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(y_2-x_0)^2+(x_2-y_0)^2-(y_2-y_0)^2-(x_2-x_0)^2 = 2(y_2-x_2)(y_0-x_0) \geqq 0.$$

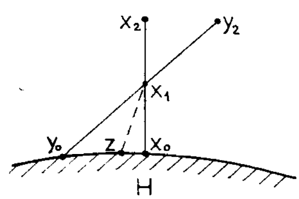
Az előzőek alapján:

$$\lambda(y_1-x_1) = \lambda[(y_1-y_0)-(x_1-x_0)+(y_0-x_0)] =$$
$$= [(y_2-y_0)-(x_2-x_0)+(y_0-x_0)]+(\lambda-1)(y_0-x_0) = (y_2-x_2)+(\lambda-1)(y_0-x_0).$$

Végül az előzőeket ismét felhasználva

$$\lambda^2(y_1-x_1)^2 = [y_2-x_2+(\lambda-1)(y_0-x_0)]^2 =$$
$$= (y_2-x_2)^2+2(\lambda-1)(y_2-x_2)(y_0-x_0)+(\lambda-1)^2(y_0-x_0)^2 \geqq (y_2-x_2)^2.$$

Ezek után az x_2 pontot futtassuk végig $H_{\lambda b}-H_{\lambda a}$-n, minden egyes x_2 ponthoz rendeljük hozzá az előzőekben meghatározott módon az összes lehetséges x_1 pontot. Ezzel kaptuk a $H_{\lambda b}-H_{\lambda a}$ halmaznak a H_b-H_a halmaz L részhalmazára való (nem egyenértékű) leképezését. Belátható azonban, hogy ezen leképezés megfordítottja már egyértékű leképezés: Tegyük fel ugyanis az ellenkezőjét, azaz tegyük fel, hogy van olyan x_1 pont, amelyhez a kérdéses leképezés két különböző pontot, x_2-t és y_2-t feleltet meg. Ekkor a leképezés fent leírt konstrukciója szerint létezik H-nak olyan x_0 és y_0 pontja, amelyek x_2-től illetve y_2-től, minimális távolságra vannak, és amelyekre teljesül, hogy mind az x_0x_2, mind az y_0y_2 szakasz tartalmazza x_1-et. De ekkor $\overline{x_1y_0}$ és $\overline{x_1x_0}$ távolságok megegyeznek az x_1 pontnak a H halmaztól való $d(x_1, H)$ távolságával, hisz ha lenne egy $z \in H$ pont, amelyre $\overline{x_1z} < \overline{x_1y_0}$, akkor a háromszög egyenlőtlenség szerint teljesülne



3. ábra

$$\overline{y_2z} \leqq \overline{y_2x_1}+\overline{x_1z} < \overline{y_2x_1}+\overline{x_1y_0} = \overline{y_2y_0},$$

ez pedig ellentmond y_0 választásának. Hasonlóan látható az $\overline{x_1 z} < \overline{x_1 x_0}$ egyenlőtlenség teljesülésének a lehetetlensége. Viszont ekkor teljesülnie kell a háromszög egyenlőtlenség szerint az

$$\overline{x_2 y_0} < \overline{x_2 x_1} + \overline{x_1 y_0} = \overline{x_2 x_1} + \overline{x_1 x_0} = \overline{x_2 x_0}$$

egyenlőtlenségnek, és ez már ellentmond feltevésünknek.

Ezzel igazoltuk, hogy a kérdéses leképezés (jelöljük φ-vel) egyértelmű.

A φ leképezés a fentebb bizonyított

$$\lambda \overline{x_1 y_1} \geqq \overline{x_2 y_2}$$

egyenlőtlenség szerint megfelel a Kolmogorov-lemma feltételeinek. Alkalmazva a lemmát, írhatjuk:

$$m(H_{\lambda b} - H_{\lambda a}) \leqq \lambda^n m(L) \leqq \lambda^n m(H_b - H_a)$$

hiszen, — mint azt a következőkben igazoljuk, — az L zárt $H_b - H_a$-ban, s következőképpen mérhető is.

Ugyanis legyen $\{x_1^n\}$ egy L-beli pontsorozat, amely a z_1 ponthoz konvergál. Be kell látnunk, hogy ekkor ha $z_1 \in H_b - H_a$, akkor $z_1 \in L$ is teljesül.

Legyen $\varphi(x_1^n) = x_2^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. A φ definíciója szerint x_2^n-hez létezik $x_0^n \in H$, amelyre $\overline{x_0^n x_2^n}$ minimális, teljesül az $(x_0^n x_1^n x_2^n)$ elrendezés, valamint érvényes $\lambda \overline{x_1^n x_0^n} = \overline{x_2^n x_0^n}$.

Mivel $x_2^n \in H_{\lambda b} - H_{\lambda a}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $H_{\lambda b} - H_{\lambda a}$ korlátos, következésképpen $\{x_2^n\}$ is az. Tehát kiválasztható egy $\{x_2^{n_k}\}$ konvergens részsorozat, amelyre $x_2^{n_k} \to z_2$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Ekkor tekintve az $\overline{x_2^{n_k} x_0^{n_k}} = \lambda \overline{x_1^{n_k} x_0^{n_k}}$ egyenlőséget, világos, hogy ha $k \to \infty$, $x_0^{n_k}$ is konvergál egy z_0 ponthoz, amelyre érvényes lesz:

$$\overline{z_2 z_0} = \lambda \overline{z_1 z_0}.$$

Ekkor viszont következik, hogy ha $z_2 \in H_{\lambda b} - H_{\lambda a}$, akkor $\varphi(z_1) = z_2$, azaz $z_1 \in L$; ha pedig z_2 rajta van $H_{\lambda a}$ határán, akkor z_1 pedig rajta van H_a határán, s így $z_1 \notin H_b - H_a$. Ezzel teljes a bizonyítás.

Rátérhetünk CARLO PUCCI tételére.

TÉTEL: *Legyen X tetszőleges korlátos halmaz az E_n térben. Ekkor — a $0 < \varrho < \infty$ intervallumnak egy Lebesgue értelemben zérómértékű részhalmazától eltekintve — minden ϱ értékre a $\partial(X_\varrho)$ halmaz Minkowski-szerint mérhető és teljesül, hogy*

$$\frac{d}{d\varrho} V(X_\varrho) = M_{n-1}(\partial(X_\varrho)),$$

ahol M_{n-1} a Minkowski-féle $(n-1)$ dimenziós mértéket, $\partial(X_\varrho)$ az X_ϱ halmaz határát jelöli.

Bizonyítás: Könnyen látható, hogy

$$\operatorname{int} [\partial(X_\varrho)]_\tau \subset X_{\varrho+\tau} - X_{\varrho-\tau}.$$

Ebből következik, hogy teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$V(X_{\varrho+\tau}) - V(X_{\varrho-\tau}) \geqq m([\partial(X_\varrho)]_\tau).$$

Végigosztva 2τ-val és végrehajtva a $\tau \to 0$ határátmenetet — mivel $\frac{d}{d\varrho} V(X_\varrho)$ majdnem minden ϱ-ra definiálva van — láthatjuk, hogy a

$$\frac{d}{d\varrho} V(X_\varrho) \geqq \overline{\lim_{\tau \to 0}} \frac{1}{2\tau} m[\partial(X_\varrho)]_\tau = \overline{M}_{n-1}[\partial(X_\varrho)]$$

egyenlőtlenség a ϱ-értékek zérómértékű halmazától eltekintve teljesül. Másrészt KNESER lemmája bizonyításának gondolatmenete szerint $\lambda > 1$ és rögzített ϱ esetén x_2-t végigfuttatva az $X_{2\lambda\varrho-\varrho} - X_\varrho$ halmazon, az összes hozzárendelhető x_1 pont által befutott L halmazt $[\partial(X_\varrho)]_{\varrho - \frac{\varrho}{\lambda}}$ tartalmazza, s hasonlóképpen a lemma bizonyításához, adódik a konklúzió:

$$V(X_{2\lambda\varrho-\varrho}) - V(X_\varrho) \leqq \lambda^n m[\partial(X_\varrho)]_{\varrho - \frac{\varrho}{\lambda}}.$$

Elosztva mindkét oldalt $2(\lambda - 1)\varrho$-val és λ-t tartatva 1-hez kapjuk, hogy ahol létezik a derivált, teljesül:

$$\frac{d}{d\varrho} V(X_\varrho) \leqq \underline{M}_{n-1}[\partial(X_\varrho)].$$

Ezt összevetve az előző eredményünkkel a tétel bizonyítást nyert.

IRODALOM

[1] G. CANTOR: Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, *Math. Ann.* (Berlin) **23** (1884), 453—488.
[2] H. MINKOWSKI: Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, **9** (1901), 115—121; *Ges. Abhandlungen* I (1911), 122—127.
[3] G. BOULIGAND: Dimension, étendue, densité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, (2) **180** (1925), 245—248.
[4] G. BOULIGAND: Sur l'aire d'un domaine plan, *Bull, Sci. Math.*, **52** (1928), 55—63.
[5] G. BOULIGAND: Ensembles impropres et nombre dimensionnel, *ibidem*, **52** (1928), 320—344. 361—376.
[6] G. BOULIGAND: Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble fermé, *ibidem*, **53** (1929), 185—192.
[7] F. BEHREND: Bemerkung zur Inhaltstheorie, *Math. Ann.*, **111** (1935), 289—292.
[8] H. DEBRUNNER: Zur Minkowskischen Dimensions- und Massbestimmung beschränkter Punktmengen des euklidischen Raumes, *Comm. Math. Helv.*, **29** (1955), 258—278.
[9] I. FAVARD: La longueur et l'aire d'après Minkowski, *Bull. Soc. Math. France*, **61** (1933), 63—68.
[10] B. Sz.-Nagy: Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **20** (1959), 36—47.
[11] A. KOLMOGOROFF: Beiträge zur Masstheorie, *Math. Ann.* **107** (1933), 351—366.
[12] M. KNESER: Über den Rand von Parallelkörpern, *Math. Nachr.*, **5** (1951), 251—258.
[13] C. PUCCI: Alcune properietà degli involucri, *Rend. Acc. Lincei*, (8) **20** (1956), 294—298.
[14] C. PUCCI: A proposito di un teorema riguardante la misura di involucri di insiemi, *Boll. U. M. I.* (3) **12** (1957), 420—421.

(Beérkezett: 1969. nov. 20.)

О ПОНЯТИИ РАЗМЕРНОСТИ И МЕРЫ МИНКОВСКОГО

П. Т. НАДЬ

Резюме

Настоящая статья является обзором результатов, связанных с понятием размерности и меры Минковского.

EGY ITERÁCIÓS ELJÁRÁSRÓL

Írta: SZIDAROVSZKY FERENC

Lineáris egyenletrendszerek megoldásának és matrix inverzének meghatározására tetszőleges kezdeti közelítések és tetszőleges matrixok esetén konvergens iterációs eljárás nem ismeretes. Célszerű tehát olyan módszerekkel dolgozni, melyek az egyenletrendszer megoldásának, ill. az inverzmatrixnak valamilyen értelemben jó közelítését veszik kezdeti közelítésként. Ezt a közelítést valamilyen direkt módszerrel (pl. *Gauss* kiküszöböléssel) határozhatjuk meg.

Egy ilyen módszer szerepel FAGYEJEV—FAGYEJEVA [1] ismert könyvében:

Legyen $X^{(0)}$ A^{-1} olyan közelítése, hogy $\|E-X^{(0)}A\|<1$; ekkor az $R^{(K)}=E-AX^{(K)}$ jelöléssel

$$X^{(K+1)}=X^{(K)}(E+R^{(K)}),\quad \text{és}\quad X^{(K)}\to A^{-1}.$$

Jelen dolgozatban bemutatjuk e módszer és a lineáris egyenletrendszerek általános iterációs módszerének kapcsolatát. Ezt az irodalomban — legjobb tudomásom szerint — eddig még nem mutatták meg. Fagyejev könyve is csak a módszert közli levezetés nélkül.

Hasonló probléma merül fel $f(x)=0$ egyváltozós egyenletek esetén is. Az ilyen egyenletek általános iterációs eljárása

$$x^{(K)}=x^{(K-1)}+f(x^{(K-1)})\cdot g(x^{(K-1)})$$

alakú. A $g(x)$ függvény célszerű választásával *Newton* módszere, a módosított *Newton*-módszer, a húrmódszer könnyen levezethető [2].

Ismeretes az $Ax=F$ lineáris egyenletrendszer általános iterációja:

$$x^{(K)}=x^{(K-1)}+H^{(K)}(F-Ax^{(K-1)}). \tag{1}$$

A $H^{(K)}$ matrix lépésenként változhat. Legyen x az egyenletrendszer pontos megoldása

$$x=x+H^{(K)}(F-Ax). \tag{2}$$

Kivonva egymásból

$$x-x^{(K)}=(E-H^{(K)}A)(x-x^{(K-1)})=\ldots=$$

$$=(E-H^{(K)}A)(E-H^{(K-1)}A)\cdot\ldots\cdot(E-H^{(1)}A)(x-x^{(0)})$$

Bevezetve a

$$T^{(K)}=(E-H^{(K)}A)\cdot\ldots\cdot(E-H^{(1)}A)\quad \text{jelölést,}$$

az $x^{(K)}\to x$ konvergenciának tetszőleges $x^{(0)}$ kezdeti közelítés melletti fennállásának nyilvánvalóan szükséges és elégséges feltétele az, hogy $T^{(K)}\to 0$ legyen.

A fenti eljárás mátrixinverzióra is használható, hiszen az inverzmátrix az $AX=E$ egyenlet megoldása. $AX=E$ pedig egy lineáris egyenletrendszer sereget jelent. X oszlopainak egymásutáni közelítéseit egyszerre végezhetjük el azáltal, hogy egy $X^{(K)}$ mátrixsorozatot számolunk, melynek oszlopai rendre az egyenletrendszer-sereg $x^{(K)}$ megoldásainak közelítései.

Tegyük fel, hogy ismerjük A^{-1} olyan $X^{(0)}$ közelítését, amelyre

$$\mu = \|E - X^{(0)}A\| < 1$$

Ekkor $H^{(K)} \equiv H = X^{(0)}$ választással

$$X - X^{(K)} = (E - X^{(0)}A)^k (X - X^{(0)})$$

adódik. Normára áttérve

$$\|X - X^{(K)}\| \leqq \|E - X^{(0)}A\|^k \|X - X^{(0)}\| = \mu^k \|X - X^{(0)}\|$$

Így $X^{(K)} \to A^{-1}$ és a konvergencia sebessége geometriai haladvány.

Most $T^{(K)}$ tényezőire fennáll, hogy

$$\|E - HA\| = \|(X - H)A\| \leqq \|A\| \cdot \|X - X^{(0)}\|$$

Azonban

$$\|E - X^{(1)}A\| = \|(X - X^{(1)})A\| \leqq \|A\| \cdot \|X - X^{(1)}\| \leqq \|A\| \cdot \|X - X^{(0)}\| \cdot \mu$$

Így $H^{(2)}$-nek az első lépésben kiszámított $X^{(1)}$ mátrixot véve $T^{(k)}$ $(E - H^{(2)}A)$ tényezőjének normája kisebb lesz, mint az előző (stacionárius) esetben. Hasonlóan, $H^{(3)}$-at a második lépésben kiszámított $X^{(2)}$ közelítő mátrixnak véve

$$\|E - X^{(2)}A\| < \|E - X^{(1)}A\| < \|E - X^{(0)}A\| \quad \text{adódik, s. í. t.}$$

Tehát a $H^{(K)} = X^{(K-1)}$ választással a $T^{(K)}$ mátrix normája kisebb lesz, mint az előző (stacionárius) esetben, mert tényezőinek normája kisebb. Tehát a $T^{(K)} \to 0$ konvergencia sebessége gyorsabb lett. Így az iterációs eljárás:

$$X^{(K)} = X^{(K-1)} + X^{(K-1)}(E - AX^{(K-1)}) = X^{(K-1)}(2E - AX^{(K-1)}).$$

Bevezetve az

$$R^{(K)} = E - AX^{(K)} \quad \text{hibamátrixot}$$

$$X^{(K)} = X^{(K-1)}(E + R^{(K-1)}) \quad \text{adódik,}$$

mely pontosan megegyezik az említett könyvben is található formulával.

Az eljárás hibája is könnyen adódik.

Vezessük be a $Q^{(K)} = X - X^{(K)}$ jelölést.

Tétel:

$$Q^{(K)} = (Q^{(0)}A)^{2k} \cdot A^{-1}.$$

A tétel bizonyítása teljes indukcióval történik. $k=1$ esetén az állítás nyilvánvaló:

$$X - X^{(1)} = (E - X^{(0)}A)(X - X^{(0)}) = (XA - X^{(0)}A)(X - X^{(0)}) =$$
$$= Q^{(0)}AQ^{(0)} = Q^{(0)}AQ^{(0)}AA^{-1} = (Q^{(0)}A)^2 A^{-1}$$

Nézzük az általános tagot

$$X-X^{(K)} = (E-X^{(K-1)}A)(X-X^{(K-1)}) =$$
$$= (X-X^{(K-1)})A(X-X^{(K-1)}) = Q^{(K-1)}AQ^{(K-1)}$$

Indukációs feltevésünkkel egyezésben

$$Q^{(K-1)} = (Q^{(0)}A)^{2^{K-1}}A^{-1}, \quad \text{így}$$
$$Q^{(K)} = (Q^{(0)}A)^{2^{K-1}}A^{-1}A(Q^{(0)}A)^{2^{K-1}}A^{-1} = (Q^{(0)}A)^{2^K}\cdot A^{-1},$$

ami tételünk bizonyítását is jelenti.
Normára áttérve

$$\|X-X^{(K)}\| \leqq \|Q^{(0)}A\|^{2^K}\cdot\|A^{-1}\| = \|E-X^{(0)}A\|^{2^K}\|A^{-1}\| = \mu^{2^K}\|A^{-1}\|$$

A hibabecslésnek ez a formája közvetlenül nem használható, hiszen tartalmazza az ismeretlen $\|A^{-1}\|$ mennyiséget.

Mivel

$$A^{-1} = X^{(0)}+(E-X^{(0)}A)A^{-1},$$

normára áttérve nyerjük, hogy

$$\|A^{-1}\| \leqq \|X^{(0)}\|+\mu\|A^{-1}\|.$$

$\mu<1$ felhasználásával

$$\|A^{-1}\| \leqq \frac{1}{1-\mu}\|X^{(0)}\|.$$

Így a fenti hibabecslés

$$\|X-X^{(K)}\| \leqq \frac{\|X^{(0)}\|}{1-\mu}\mu^{2^K}$$

alakra hozható, amely megegyezik az irodalomban található formulával.

IRODALOM

[1] Фаддеев — Фаддеева: Вычислительные методы линейной алгебры.
[2] Kis Ottó: Számítási módszerek I. TTK jegyzet 1965.

(Beérkezett: 1970. I. 9.)

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНОМ МЕТОДЕ

(F. Szidarovszky)

Резюме

Пусть $X^{(0)}$ такое приближение обратной матрицы A, что $\|E-X^{(0)}A\|<1$ выполняется. Тогда из начального приближения $X^{(0)}$ можно получить с произвольной точностью обратную матрицу с помощью одного итерационного метода очень быстрой сходимости. Настоящая работа укажет на связь этого метода и общего итерационного метода систем линейных уравнений.

A KONFORM LEKÉPEZÉS EGY DIFFERENCIÁLGEOMETRIAI JELLEMZÉSE

Írta: MOLNÁR EMIL

1. A Σ euklideszi sík **O** pontjához és ennek **U** nyílt környezetéhez az α egy-egyértelmű leképezés a Σ' euklideszi sík **O'** pontját és ennek **U'** nyílt környezetét rendeli.

Az α leképezéshez és az **U** környezet tetszőleges **P** pontjához egy újabb $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ leképezést kapcsolunk:

$\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ a **P** ponton áthaladó tetszőleges **K** görbe **P**-beli görbületi középpontjához, **G**-hez az α leképezésnél **K**-nak megfelelő $\alpha(\mathbf{K})=\mathbf{K}'$ görbe $\alpha(\mathbf{P})=\mathbf{P}'$ ponthoz tartozó görbületi középpontját, **G'**-t rendeli.

Természetesen a **K** görbére és az α leképezésre megfelelő differenciálhatósági feltételeket szabunk ki, hogy **K** és **K'** görbületi középpontjának létezését biztosítsuk.

P és **P'** nem lesz görbületi középpont. Célszerű azonban, hogy zérus görbület esetén, a görbeérintőre merőleges irányhoz tartozó ideális pontot tekintsük görbületi középpontnak.

Tehát a Σ, ill. Σ' síkot ideális elemekkel bővítjük, de elhagyjuk a **P**, ill. **P'** pontot. Az így nyert síkot $\tilde{\Sigma}$, ill. $\tilde{\Sigma}'$ jelöli.

Az α és $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ leképezés kapcsolatának vizsgálatára KÁRTESZI FERENC hívta fel figyelmemet. Ebben a dolgozatban két tételt bizonyítunk be:

1. TÉTEL: *$\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ egy-egyértelműen képezi le $\tilde{\Sigma}$-t $\tilde{\Sigma}'$-re. A leképezés harmadfokú biracionális (bikubikus) transzformáció (Cremona-transzformáció).*

2. TÉTEL: *A $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ leképezés akkor és csak akkor lesz minden* **U**-*beli* **P** *pontra kollineáció, ha az α kiinduló leképezés az* **U** *környezetben konform.*

Természetesen — analitikus formában — meg is adjuk a $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ leképezést és a belőle származtatott $\tilde{\varphi}[\alpha; \mathbf{P}]$ kollineációt, valamint a megfelelő inverz transzformációkat.

2. Előkészítjük a tételek bizonyítását, megfogalmazzuk a feltételeket.

A Σ és Σ' síkban $(y^1; y^2)$, ill. $(y^{1'}; y^{2'})$ *Descartes*-féle koordinátákat vezetünk be (röviden y^i, ill. $y^{i'}$).

Az α leképezést, illetve az α^{-1} inverz leképezést $\big(\alpha(\mathbf{U})=\mathbf{U}',\ \alpha^{-1}(\mathbf{U}')=\mathbf{U}\big)$

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha&: y^{1'} = y^{1'}(y^1; y^2); & \alpha^{-1}&: y^1 = y^1(y^{1'}; y^{2'}) \\ & y^{2'} = y^{2'}(y^1; y^2) & & y^2 = y^2(y^{1'}; y^{2'}) \end{aligned}$$

alakban adjuk meg. Röviden α: $y^{i'} = y^{i'}(y^i)$; α^{-1}: $y^i = y^i(y^{i'})$.

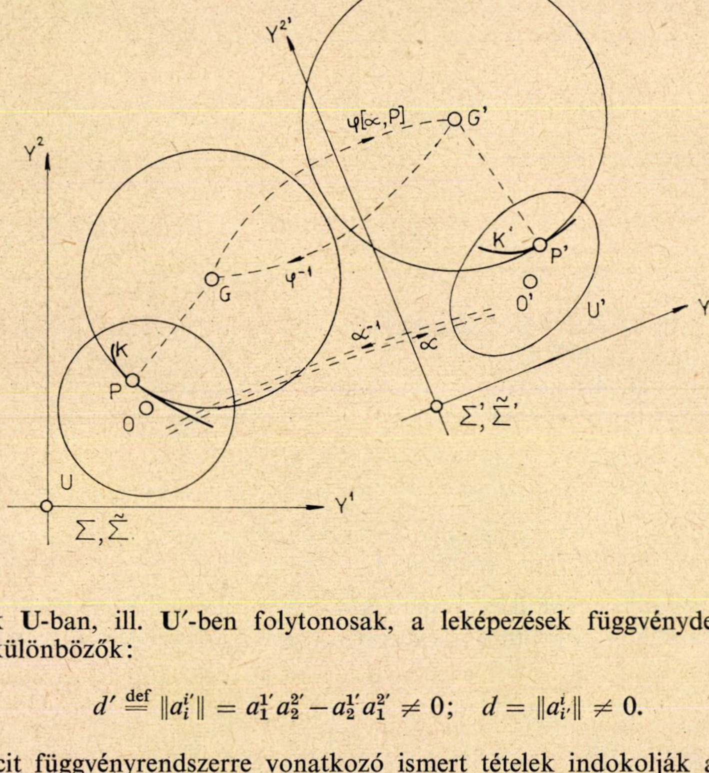
Tekintsük az **U** környezet tetszőleges **P**: $y^i(\mathbf{P})$ pontját és a neki megfelelő **P'**: $y^{i'}(\mathbf{P}')$ **U'**-beli pontot.

Feltesszük, hogy az

$$\frac{\partial y^{i'}}{\partial y^{i}}(\mathbf{P}) \overset{\text{def}}{=} a_i^{i'}, \quad \frac{\partial^2 y^{i'}}{\partial y^r \partial y^s}(\mathbf{P}) \overset{\text{def}}{=} A_{rs}^{i'} = A_{sr}^{i'}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial y^{i}}{\partial y^{i'}}(\mathbf{P}') \overset{\text{def}}{=} a_{i'}^{i}, \quad \frac{\partial^2 y^{i}}{\partial y^{r'} \partial y^{s'}}(\mathbf{P}') \overset{\text{def}}{=} A_{r's'}^{i} = A_{s'r'}^{i} \tag{2'}$$

$$(i, r, s = 1, 2; \quad i', r', s' = 1', 2')$$



deriváltak **U**-ban, ill. **U**′-ben folytonosak, a leképezések függvénydeterminánsai zérustól különbözők:

$$d' \overset{\text{def}}{=} \|a_i^{i'}\| = a_1^{1'} a_2^{2'} - a_2^{1'} a_1^{2'} \neq 0; \quad d = \|a_{i'}^{i}\| \neq 0. \tag{3}$$

Az implicit függvényrendszerre vonatkozó ismert tételek indokolják a „feltételek pazarlását". Érvényesek továbbá a következő összefüggések:

$$a_i^{i'} a_{j'}^{i} = \delta_{j'}^{i'}, \; a_{i'}^{j} a_i^{i'} = \delta_i^{j} \; (\delta_{j'}^{i'}, \delta_i^{j} \textit{ Kronecker} \text{ szimbólum}); \tag{4}$$

$$A_{rs}^{i'} = -A_{r's'}^{i} a_r^{r'} a_s^{s'} a_i^{i'}, \quad A_{r's'}^{i} = -A_{rs}^{i'} a_{r'}^{r} a_{s'}^{s} a_{i'}^{i}; \tag{5}$$

$$d = \frac{1}{d'}. \tag{6}$$

Itt és a továbbiakban is használjuk az összegző indexekre vonatkozó *Einstein*-konvenciót. Például:

$$k_p k_p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=1,2} k_p k_p = k_1 k_1 + k_2 k_2, \quad \text{vagy} \tag{7}$$

$$a_i^{i'} a_{j'}^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1,2} a_i^{i'} a_{j'}^i = a_1^{i'} a_{j'}^1 + a_2^{i'} a_{j'}^2.$$

A későbbiek során fellépő 3, ill. 3′ indexeket mindig kiírjuk.

A továbbiak egyszerűsítésére $\Sigma(y^i) \to \Sigma(x^i)$, $\Sigma'(y^{i'}) \to \Sigma'(x^{i'})$ koordináta transzformációt hajtunk végre:

$$y^i - y^i(\mathbf{P}) = x^i, \quad y^{i'} - y^{i'}(\mathbf{P}') = x^{i'}. \tag{8}$$

Legyen **K** a $\Sigma(x^i)$ sík **P** ponton áthaladó tetszőleges görbéje

$$\mathbf{K}\colon \; K(x^1; x^2) = K(0; 0) = 0. \tag{9}$$

Feltesszük, hogy a

$$\frac{\partial K}{\partial x^i}(\mathbf{P}) \stackrel{\text{def}}{=} k_i; \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x^r \partial x^s}(\mathbf{P}) \stackrel{\text{def}}{=} K_{rs} = K_{sr} \tag{10}$$

deriváltak **P** környezetében folytonosak, továbbá

$$k_i k_i \stackrel{\text{def}}{=} k_1 k_1 + k_2 k_2 \neq 0. \tag{11}$$

A **K** görbéhez **P**-ben simuló másodrendű görbe egyenlete

$$k_i x^i + \frac{1}{2} K_{rs} x^r x^s = 0. \tag{12}$$

Ebből könnyen származtatható a **K** görbe **P**-beli simuló körének egyenlete, ami egyenessé fajul, ha $S=0$:

$$k_1 x^1 + k_2 x^2 + \frac{1}{2} S(x^1 x^1 + x^2 x^2) = 0, \tag{13}$$

$$S = \frac{k_1 k_1 K_{22} - 2k_1 k_2 K_{12} + k_2 k_2 K_{11}}{k_1 k_1 + k_2 k_2} = \frac{k_r k_r K_{ss} - k_r k_s K_{rs}}{k_p k_p}. \tag{14}$$

Ha $S \neq 0$, a görbületi középpont koordinátái:

$$x_1 = -\frac{k_1}{S}, \quad x_2 = \frac{-k_2}{S}; \quad \text{röviden} \quad x_i = -\frac{k_i}{S}. \tag{15}$$

A $\Sigma(x_i)$ síkot ideális pontok bevezetésével projektív síkká bővítjük ki. Homogén koordinátákat vezetünk be a szokásos módon: az (x_1, x_2) közönséges ponthoz $x_1 : x_2 : 1 = u_1 : u_2 : u_3$, a (v_1, v_2) irányú ideális ponthoz $v_1 : v_2 : 0 = u_1 : u_2 : u_3$ előírással. Az így kibővített $\bar{\Sigma}(u_1; u_2; u_3)$ síkban $S=0$ mellett is értelmezhetjük a **G** görbületi középpontot:

$$\mathbf{G}\colon \; \varrho u_1 = -k_1; \quad \varrho u_2 = -k_2; \quad \varrho u_3 = S; \quad \varrho \neq 0. \tag{16}$$

Az α leképezés a **K** görbét a $\Sigma'(x^{i'})$ sík **P'**-n áthaladó **K'** görbéjébe viszi. **K'** egyenlete:

$$(9') \qquad K'(x^{1'}; x^{2'}) \equiv K[x^1(x^{1'}; x^{2'}); x^2(x^{1'}; x^{2'})] = 0.$$

A későbbi bizonyításból kiderül, hogy a

$$(10') \qquad \frac{\partial K'}{\partial x^{i'}}(\mathbf{P}') \stackrel{\text{def}}{=} k_{i'}, \quad \frac{\partial^2 K'}{\partial x^{r'} \partial x^{s'}}(\mathbf{P}') \stackrel{\text{def}}{=} K_{r's'} = K_{s'r'}$$

deriváltak **P'** környezetében folytonosak, továbbá

$$(11') \qquad k_{i'} k_{i'} \stackrel{\text{def}}{=} k_{1'} k_{1'} + k_{2'} k_{2'} \neq 0.$$

Érvényesek a (12), (13), (14), (15), (16)-nak megfelelő képletek is.

A **K'** görbéhez **P'**-ben simuló másodrendű görbe egyenlete

$$(12') \qquad k_{i'} x^{i'} + \frac{1}{2} K_{r's'} x^{r'} x^{s'} = 0.$$

A **K'** **P'**-beli simulókörének egyenlete

$$(13') \qquad k_{1'} x^{1'} + k_{2'} x^{2'} + \frac{1}{2} S'(x^{1'} x^{1'} + x^{2'} x^{2'}) = 0,$$

$$(14') \qquad S' = \frac{k_{1'} k_{1'} K_{2'2'} - 2k_{1'} k_{2'} K_{1'2'} + k_{2'} k_{2'} K_{1'1'}}{k_{1'} k_{1'} + k_{2'} k_{2'}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_{r'} k_{r'} K_{s's'} - k_{r'} k_{s'} K_{r's'}}{k_{p'} k_{p'}}.$$

Ha $S' \neq 0$, a görbületi középpont koordinátái:

$$(15') \qquad x_{i'} = -\frac{k_{i'}}{S'}.$$

A Σ síkhoz hasonlóan a Σ' síkot is projektív síkká bővítjük. Homogén koordináták bevezetése után, a $\tilde{\Sigma}'(u_1'; u_2'; u_3')$ síkban a **G'** általánosított görbületi középpont:

$$(16') \qquad \mathbf{G}'\colon \varrho' u_{1'} = -k_{1'}; \quad \varrho' u_{2'} = -k_{2'}; \quad \varrho' u_3 = S'; \quad \varrho' \neq 0.$$

A $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ leképezés megadásához a (10) és (10') deriváltak kapcsolatát kell meghatároznunk.

3. A tételek bizonyítása.

Az 1. Tétel bizonyítása:

(1)—(8) feltevéseinkből következik, hogy az α leképezés a **P** pont környezetében

$$(17) \qquad x^{i'}(x^i) = a_i^{i'} x^i + \frac{1}{2} A_{rs}^{i'} x^r x^s + \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{rs}^{i'}(x^i) x^r x^s\right],$$

az α^{-1} leképezés a **P'** pont környezetében

$$(17') \qquad x^i(x^{i'}) = a_{i'}^i x^{i'} + \frac{1}{2} A_{r's'}^i x^{r'} x^{s'} + \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{r's'}^i (x^{i'}) x^{r'} x^{s'}\right]$$

alakba írható, ahol $\varepsilon_{rs}^{i'}(x^i) \to 0$ midőn $x^i \to 0$; $\varepsilon_{r's'}^i(x^{i'}) \to 0$ midőn $x^{i'} \to 0$.

A $K(x^i)$ függvényre vonatkozó (9), (10), (11) feltevéseink szerint a **P** pont környezetében:

$$K(x^i) = k_i x^i + \frac{1}{2} K_{rs} x^r x^s + \left[\frac{1}{2} \varkappa(x^i) x^r x^s\right],$$

ahol $\varkappa(x^i) \to 0$ midőn $x^i \to 0$.

(17′) behelyettesítésével következik, hogy a **P′** pont környezetében a (9′)-ben értelmezett

$$K'(x^{i'}) = k_i a^i_{i'} x^{i'} + \frac{1}{2} \{(k_i A^i_{r's'} + K_{rs} a^r_{r'} a^s_{s'}) x^{r'} x^{s'}\} + \left[\frac{1}{2} \varkappa'(x^{i'}) x^{r'} x^{s'}\right],$$

ahol $\varkappa'(x^{i'}) \to 0$ midőn $x^{i'} \to 0$.

Ebből leolvashatók a (10) és (10′)-t összekapcsoló képletek:

$$k_{i'} = k_i a^i_{i'}; \quad K_{r's'} = K_{s'r'} = k_i A^i_{r's'} + K_{rs} a^r_{r'} a^s_{s'}. \tag{18}$$

A gondolatmenet megfordításával:

$$k_i = k_{i'} a^{i'}_i; \quad K_{rs} = K_{sr} = k_{i'} A^{i'}_{rs} + K_{r's'} a^{r'}_r a^{s'}_s. \tag{18′}$$

(14′) és (18) figyelembevételével (16′) így írható:

$$\varrho' u_{1'} = -k_i a^i_{1'} \{k_j k_l a^j_{p'} a^l_{p'}\};$$
$$\varrho' u_{2'} = -k_i a^i_{2'} \{k_j k_l a^j_{p'} a^l_{p'}\};$$
$$\varrho' u_{3'} = k_i k_j k_l (a^i_{r'} a^j_{r'} A^l_{s's'} - a^i_{r'} a^j_{s'} A^l_{r's'}) + k_i k_j K_{rs} a^i_{r'} a^s_{s'} (a^j_{r'} a^r_{s'} - a^j_{s'} a^r_{r'}).$$

Könnyen látható, hogy

$$k_i k_j K_{rs} a^i_{r'} a^s_{s'} (a^j_{r'} a^r_{s'} - a^j_{s'} a^r_{r'}) = d \cdot d(k_1 k_1 K_{22} - 2k_1 k_2 K_{12} + k_2 k_2 K_{11}) =$$
$$= d \cdot dS(k_1 k_1 + k_2 k_2),$$

hiszen $j=r$; $i=s$; $r'=s'$ zérus tagokat eredményez. $(d = \|a^i_{i'}\|$ (3) szerint$)$.

(16) figyelembevételével megkapjuk $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ analitikus alakját. (**P**-hez nem rendeltünk pontot: $(0; 0; 1) \to (0; 0; 0)$.)

$$\varphi[\alpha; \mathbf{P}]: \quad \varrho' u_{1'} = u_i a^i_{1'} (u_j u_l a^j_{p'} a^l_{p'}) \tag{19}$$
$$\varrho' u'_2 = u_i u^i_{2'} (u_j u_l a^j_{p'} a^l_{p'})$$
$$\varrho' u'_3 = -u_i u_j u_l (a^i_{r'} a^j_{r'} A^l_{s's'} - a^i_{r'} a^j_{s'} A^l_{r's'}) + dd(u_1 u_1 + u_2 u_2) u_3.$$

A logikai szimmetriából következik, hogy $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ inverze, φ^{-1} létezik és

$$\varphi^{-1}: \quad \varrho u_1 = u_{i'} a^{i'}_1 (u_{j'} u_{l'} a^{j'}_p a^{l'}_p) \tag{19′}$$
$$\varrho u_2 = u_{i'} a^{i'}_2 (u_{j'} u_{l'} a^{j'}_p a^{l'}_p)$$
$$\varrho u_3 = -u_{i'} u_{j'} u_{l'} (a^{i'}_r a^{j'}_r A^{l'}_{ss} - a^{i'}_r a^{j'}_s A^{l'}_{rs}) + d' d' (u_{1'} u_{1'} + u_{2'} u_{2'}) u_{3'}$$

$(d' = \|a^i_{i'}\|$ (3) szerint$)$ $(\mathbf{P}'$-nek nincs inverze: $(0, 0, 1) \to (0, 0, 0))$

Az 1. Tétel bizonyítását befejeztük.

A 2. Tétel bizonyítása:

A $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ leképezés akkor és csak akkor lesz lineáris leképezés, ha (19)-ben az $\{u_j u_l a^j_{p'} a^l_{p'}\}$ másodfokú irreducibilis tényező $\varrho' u_{3'}$-ból is kiemelhető, tehát $\varrho' u_{3'} = (u_j u_l a^j_{p'} a^l_{p'})(\lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3)$ alakba írható. Hasonlítsuk össze a megfelelő együtthatókat, először az u_3-mat tartalmazó tagokét:

$$\begin{aligned} u_1 u_1 u_3 &: \lambda^3(a^1_{1'} a^1_{1'} + a^1_{2'} a^1_{2'}) = dd \\ 2u_1 u_2 u_3 &: \lambda^3(a^1_{1'} a^2_{1'} + a^1_{2'} a^2_{2'}) = 0 \\ u_2 u_2 u_3 &: \lambda^3(a^2_{1'} a^2_{1'} + a^2_{2'} a^2_{2'}) = dd. \end{aligned} \tag{20}$$

Ebből azonnal látható, hogy

$$\begin{gathered} a^1_{1'} = a^2_{2'} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{A}; \quad a^2_{1'} = -a^1_{2'} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{B}; \\ (u_j u_l a^j_{p'} a^l_{p'}) = (\mathbf{AA} + \mathbf{BB})(u_1 u_1 + u_2 u_2); \\ \lambda^3 = d = a^1_{1'} a^2_{2'} - a^1_{2'} a^2_{1'} = \mathbf{AA} + \mathbf{BB}. \end{gathered} \tag{21}$$

Ezt a további összehasonlításnál már figyelembe vesszük:

$$\begin{aligned} u_1 u_1 u_1 &: \mathbf{AA} A^1_{2'2'} + 2\mathbf{AB} A^1_{1'2'} + \mathbf{BB} A^1_{1'1'} = -\lambda^1(\mathbf{AA} + \mathbf{BB}) \\ u_2 u_2 u_2 &: \mathbf{AA} A^2_{1'1'} - 2\mathbf{AB} A^2_{1'2'} + \mathbf{BB} A^2_{2'2'} = -\lambda^2(\mathbf{AA} + \mathbf{BB}) \\ u_1 u_1 u_2 &: \mathbf{AA}(A^2_{2'2'} - 2A^1_{1'2'}) + 2\mathbf{AB}(A^1_{2'2'} + A^2_{1'2'} - A^1_{1'1'}) + \\ &\quad + \mathbf{BB}(A^2_{1'1'} + 2A^1_{1'2'}) = -\lambda^2(\mathbf{AA} + \mathbf{BB}) \\ u_1 u_2 u_2 &: \mathbf{AA}(A^1_{1'1'} - 2A^2_{1'2'}) - 2\mathbf{AB}(A^2_{1'1'} + A^1_{1'2'} - A^2_{2'2'}) + \\ &\quad + \mathbf{BB}(A^1_{2'2'} + 2A^2_{1'2'}) = -\lambda^1(\mathbf{AA} + \mathbf{BB}). \end{aligned} \tag{22}$$

A (2′) definíciót figyelembe véve, (21) azt jelenti, hogy az α^{-1} leképezésre $\mathbf{P}'$-ben teljesülnek a *Cauchy—Riemann* relációk. A 2. Tétel feltétele szerint ez $\mathbf{U}'$ minden pontjára igaz, így α^{-1} $\mathbf{U}'$-ben szükségképpen konform leképezés.

A feltétel elégséges is. Ha α^{-1} konform, akkor (2′) szerint

$$\frac{\partial^2 y^1}{\partial y^{1'} \partial y^{1'}}(\mathbf{P}') = \frac{\partial^2 y^2}{\partial y^{1'} \partial y^{2'}}(\mathbf{P}') = -\frac{\partial^2 y^1}{\partial y^{2'} \partial y^{2'}}(\mathbf{P}') \overset{\text{def}}{=} \mathbf{C};$$

$$\frac{\partial^2 y^2}{\partial y^{2'} \partial y^{2'}}(\mathbf{P}') = \frac{\partial^2 y^1}{\partial y^{1'} \partial y^{2'}}(\mathbf{P}') = -\frac{\partial^2 y^2}{\partial y^{1'} \partial y^{1'}}(\mathbf{P}') \overset{\text{def}}{=} \mathbf{D}.$$

Tehát

$$A^1_{1'1'} = A^2_{1'2'} = -A^1_{2'2'} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{C}; \quad A^2_{2'2'} = A^1_{1'2'} = -A^2_{1'1'} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{D}. \tag{23}$$

(23)-at (22)-be behelyettesítve, helyes egyenlőségeket kapunk, ha

$$\lambda^1 = \frac{\mathbf{C}(\mathbf{AA} - \mathbf{BB}) - 2\mathbf{ABD}}{\mathbf{AA} + \mathbf{BB}}; \quad \lambda^2 = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{AA} - \mathbf{BB}) + 2\mathbf{ABC}}{\mathbf{AA} + \mathbf{BB}}. \tag{24}$$

A görbületi középpontok közötti $\tilde{\varphi}[\alpha; \mathbf{P}]$ leképezés (19) alapján:

$$\begin{aligned} \varrho' u_{1'} &= \mathbf{A} u_1 + \mathbf{B} u_2; \\ \varrho' u_{2'} &= -\mathbf{B} u_1 + \mathbf{A} u_2; \\ \varrho' u_{3'} &= \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3. \end{aligned} \tag{25}$$

A fenti leképezés determinánsa $(\mathbf{AA}+\mathbf{BB})^2 \neq 0$, így $\tilde{\varphi}[\alpha; \mathbf{P}]$ valóban kollineáció. Világos, hogy α és α^{-1} egyszerre konform leképezések $\mathbf{U}$-ban, ill. $\mathbf{U}'$-ben.

$$a_1^{1'} = a_2^{2'} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}'; \quad a_1^{2'} = -a_2^{1'} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}'; \quad \lambda^{3'} = d' = \|a_i^{i'}\| = \mathbf{A}'\mathbf{A}' + \mathbf{B}'\mathbf{B}'; \tag{21'}$$

$$A_{11}^{1'} = A_{12}^{2'} = -A_{22}^{1'} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}'; \quad A_{22}^{2'} = A_{12}^{1'} = -A_{11}^{2'} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}'; \tag{23'}$$

$$\lambda^{1'} = \frac{\mathbf{C}'(\mathbf{A}'\mathbf{A}' - \mathbf{B}'\mathbf{B}') - 2\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{D}'}{\mathbf{A}'\mathbf{A}' + \mathbf{B}'\mathbf{B}'}; \tag{24'}$$

$$\lambda^{2'} = \frac{\mathbf{D}'(\mathbf{A}'\mathbf{A}' - \mathbf{B}'\mathbf{B}') + 2\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'}{\mathbf{A}'\mathbf{A}' + \mathbf{B}'\mathbf{B}'}.$$

A $\tilde{\varphi}^{-1}$ kollineáció:

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= \mathbf{A}' u_{1'} + \mathbf{B}' u_{2'} \\ \varrho u_2 &= -\mathbf{B}' u_{1'} + \mathbf{A}' u_{2'} \\ \varrho u_3 &= \lambda^{1'} u_{1'} + \lambda^{2'} u_{2'} + \lambda^{3'} u_{3'}. \end{aligned} \tag{25'}$$

A (4), (5), (6) formulák alapján, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{D}'$, $d' = \mathbf{A}'\mathbf{A}' + \mathbf{B}'\mathbf{B}'$ ismeretében:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}'}{d'}; \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}'}{d'}; \quad d = \frac{1}{d'}; \tag{26}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}' \frac{3\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{B}' - \mathbf{A}'\mathbf{A}'\mathbf{A}'}{d'd'd'} + \mathbf{D}' \frac{-3\mathbf{A}'\mathbf{A}'\mathbf{B}' + \mathbf{B}'\mathbf{B}'\mathbf{B}'}{d'd'd'};$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}' \frac{3\mathbf{A}'\mathbf{A}'\mathbf{B}' - \mathbf{B}'\mathbf{B}'\mathbf{B}'}{d'd'd'} + \mathbf{D}' \frac{3\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{B}' - \mathbf{A}'\mathbf{A}'\mathbf{A}'}{d'd'd'}.$$

Hasonlók az inverz formulák.
A 2. Tétel bizonyítását befejeztük.

(Beérkezett: 1970. II. 26.)

ОДНА ИЗ ХАРАКТЕРИСТИК КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Э. Мольнар

Одно-однозначное отображение α отображает точку **O** и ее окрестность **U** евклидовой плоскости Σ на точку **O′** и на ее окрестность **U′** евклидовой плоскости Σ'. Отображением α и любой точкой **P**, в окрестности **U**, определяется преобразование $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$, которое переводит центр кривизны **G** (в точке **P**) любой кривой **K**, проходящей через **P**, в центр кривизны **G′** (в точке $\mathbf{P}' = \alpha(\mathbf{P})$) кривой $\mathbf{K}' = \alpha(\mathbf{K})$.

Предположим, что кривая **K** и отображение α удовлетворяют соответствующим условиям дифференцируемости, чтобы центры кривизны **G** и **G′** существовали. Если кривизна какой-той кривой равна нулю, то центром кривизны принимается идеальная точка к направлению нормали кривой. Значит, при этом плоскости Σ и Σ' расширяются до проективной плоскости, но исключаются точки **P** и **P′**. Таким образом мы получим плоскости $\tilde{\Sigma}$ и $\tilde{\Sigma}'$.

На исследование отношения отображения α к преобразованию $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ профессор *Ф. Картеси* обратил мое внимание. В этой работе доказываются две теоремы.

Теорема 1. Преобразование $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ *одно-однозначно переводит* $\tilde{\Sigma}$ *в* $\tilde{\Sigma}'$. *Оно является бирациональным преобразованием третьей степени* (*Кремоньым* преобразованием).

Теорема 2. $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ *является проективной коллинеацией для каждой точки* **P**, *в окрестности* **U**, *тогда и только тогда, если отображение* α, *в окрестности* **U**, *является конформным.*

Конечно даются и преобразование $\varphi[\alpha; \mathbf{P}]$ и из него вытекающая коллинеация $\tilde{\varphi}[\alpha; \mathbf{P}]$ и обратные к ним преобразования.

EGY RITKÍTÁSI ELJÁRÁSRÓL

Írta: MOGYORÓDI JÓZSEF

1. Tekintsük a $\tau_0 \equiv 0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \ldots$ rekurrens folyamatot, amelyre teljesül, hogy a $\tau_i - \tau_{i-1} = \delta_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ különbségek nem negatív, azonos eloszlású, független valószínűségi változók, a közös

$$P(\delta_i < x) = F(x) \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

eloszlásfüggvénnyel. Feltesszük, hogy a δ_i valószínűségi változók várható értéke véges és pozitív szám:

$$0 < \mu = \int_0^{+\infty} x \, dF(x) < +\infty .$$

Legyen $0 \leqq \varrho(x) \leqq 1$ a $[0, +\infty)$ félegyenesen értelmezett, folytonos függvény. Azon feltétel mellett, hogy $\tau_i = x$, $i=1, 2, \ldots$, a τ_i pontot $\varrho(x)$ valószínűséggel elhagyjuk az eredeti rekurrens folyamatból, ill. $1-\varrho(x)$ valószínűséggel megtartjuk. Az egyes τ_i pontokat egymástól függetlenül hagyjuk el, ill. tartjuk meg. Ily módon az eredeti rekurrens folyamat τ_i pontjainak $(i=1, 2, \ldots)$ egy részsorozatát nyerjük. Az eljárást, amely e részsorozathoz vezet, ritkításnak nevezzük. Jelölje ν az $1, 2, \ldots$ természetes számok közül azt a legkisebbet, amelyre teljesül, hogy a τ_ν pontot a ritkítás során megtartjuk.

Ha $\varrho(x) \equiv 0$, akkor 1 valószínűséggel az eredeti pontfolyamatot nyerjük vissza a ritkítás után. $\varrho(x) \equiv 1$ esetén, a $\tau_0 = 0$ pontot kivéve, az összes τ_i pontot 1 valószínűséggel elhagyjuk. E két extrém eset vizsgálata tehát érdektelen.

A számlálócsövek elméletében fontos szerepet játszik a számlálócső által regisztrált részecskék beérkezési időpontjai által alkotott pontfolyamat sztochasztikus viselkedésének ismerete. Ebből következtetni lehet a tényleges részecske-folyamatra. Ha valamely részecske becsapódását a számlálócső észlelni tudja, akkor a becsapódás pillanatában elkezdődik az ún. — általában véletlen hosszúságú — holtidő. Ez alatt az újabb beérkező részecskéket a számlálócső nem regisztrálja. Ha a holtidő kezdetétől számítva x idő múlva csapódik be az első részecske, $\varrho(x) = 1 - G(x)$ annak a valószínűsége, hogy ezt a számlálócső nem regisztrálja, ahol $G(x)$ a holtidő eloszlásfüggvénye.

Több konkrét modellt lehetne még felsorolni, ahol a fenti ritkítási eljárás lép fel.

2. Érdekességgel bír a ν és τ_ν véletlen mennyiségek vizsgálata; $\nu - 1$ a kiritkított τ_i pontok számát, τ_ν pedig az első megtartott pontig tartó időszakasz hosszát adja meg.

A $\varrho(x) \equiv 1$ esetből látható, hogy ν akár 1 valószínűséggel is felveheti a $+\infty$ értéket. Elsőként megvizsgáljuk annak feltételét, hogy ν eloszlása valódi legyen.

A $\{\nu=n\}$ esemény valószínűségét a következő módon határozzuk meg. Jelölje $Q_n(x)$ a

$$P(\tau_n<x,\ \nu\geqq n), \qquad n=1,2,\ldots$$

valószínűséget. Ekkor

$$Q_1(x)=F(x)$$

és $n=2,3,\ldots$ esetén fennáll a

$$Q_n(x)=\int_0^x F(x-y)\varrho(y)\,dQ_{n-1}(y) \tag{1}$$

rekurzív összefüggés. Valóban, olyan feltétel mellett, hogy a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-2}$ pontokat kiritkítottuk és $\tau_{n-1}=y$, az $F(x-y)\varrho(y)$ kifejezéssel egyenlő annak a valószínűsége, hogy a τ_{n-1} pontot is elhagyjuk és $\tau_n<x$ legyen. Az (1) rekurziós formulát ezután a teljes valószínűség tételének alkalmazásával nyerjük. Nyilvánvaló, hogy

$$P(\tau_\nu<x,\ \nu=n)=\int_0^x (1-\varrho(y))\,dQ_n(y),$$

és hogy

$$P(\nu\geqq n)=\lim_{x\to+\infty} Q_n(x),$$

továbbá, hogy

$$P(\nu=n)=\int_0^{+\infty} (1-\varrho(y))\,dQ_n(y).$$

A következő állításban a $P(\nu\geqq n)$ valószínűségre másik formulát is adunk.

1. TÉTEL:

$$P(\nu\geqq n)=M\left(\prod_{i=1}^{n-1}\varrho(\tau_i)\right) \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{2}$$

ahol az üres szorzat értékét 1*-nek vesszük. A* ν *valószínűségi változó akkor és csak akkor valódi eloszlású, ha a*

$$\xi_n=\prod_{i=1}^{n-1}\varrho(\tau_i), \qquad n=1,2,\ldots,$$

valószínűségi változó sorozat 1 *valószínűséggel zérushoz konvergál. Ha a* ν *valószínűségi változó valódi eloszlású, akkor az*

$$\int_0^{+\infty} (1-\varrho(x))\,dH(x) \tag{3}$$

integrál divergens, ahol $H(x)$ *a rekurrens folyamat felújítási függvénye.**

Bizonyítás. A $\{\nu\geqq 1\}$ esemény biztosan bekövetkezik. $n=2,3,\ldots$ esetén a $\{\nu\geqq n\}$ esemény akkor valósul meg, ha a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ véletlen pontokat a ritkítás során elhagyjuk. A

$$P(\nu\geqq n\,|\,\delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$$

* A felújítási függvény a $0\leqq\tau_1\leqq\tau_2\leqq\ldots$ rekurrens folyamat $(0,t)$ intervallumba eső felújítási pontjai számának várható értéke.

feltételes valószínűség nyilvánvalóan

$$\varrho(\delta_1)\varrho(\delta_1+\delta_2)\cdots\varrho(\delta_1+\cdots+\delta_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1}\varrho(\tau_i)$$

kifejezéssel egyenlő. Ennélfogva

$$P(\nu \geqq n) = M(P(\nu \geqq n|\delta_1,\dots,\delta_{n-1})) = M\left(\prod_{i=1}^{n-1}\varrho(\tau_i)\right),$$

ami bizonyítja a (2) képlet helyességét.

ν akkor és csakis akkor valódi eloszlású, ha

$$\lim_{n\to+\infty} P(\nu \geqq n) = 0.$$

A $\prod_{i=1}^{n-1}\varrho(\tau_i)$ sorozat monoton nem növekvő, ezért 1 valószínűséggel konvergens. $M\left(\prod_{i=1}^{n-1}\varrho(\tau_i)\right)\to 0$, akkor és csak akkor, ha 1 valószínűséggel

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n-1}\varrho(\tau_i) = 0.$$

Ez bizonyítja állításunk második részét. Ha az utóbbi limeszreláció érvényes, akkor 1 valószínűséggel

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}(1-\varrho(\tau_i)) = +\infty,$$

ami maga után vonja, hogy az

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} M(1-\varrho(\tau_i)) = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{+\infty}(1-\varrho(x))dF_i(x)$$

számsorozat divergens legyen, ahol $F_i(x)$ az $F(x)$ eloszlásfüggvény önmagával vett i-szeres konvolúcióját jelöli. Jelölje $H(x)$ a $\tau_0\equiv 0\leqq\tau_1\leqq\tau_2\leqq\dots$ rekurrens folyamat felújítási függvényét, azaz legyen $H(x)$ a $(0, x)$ intervallumba eső τ_i pontok számának várható értéke. Ismeretes, hogy $H(x)$ véges és

$$H(x) = \sum_{i=1}^{\infty}F_i(x).$$

Az a_n számsorozat divergenciájából következik, hogy az

$$\int_0^{+\infty}(1-\varrho(x))dH(x)$$

integrál divergens.

3. A (3) integrál divergenciája szükséges feltétele annak, hogy ν eloszlása valódi legyen. Azonban a $\varrho(x)$ ritkító valószínűségről alig kell valamivel többet feltételezni ahhoz, hogy ne csak az eloszlás valódi voltát biztosíthassuk, hanem az összes momentumok létezését is. Erről szól a

2. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy a $\varrho(x)$ ritkító valószínűség eleget tesz a*

$$\limsup_{x\to+\infty} \varrho(x) = \varrho \tag{4}$$

feltételnek, ahol $0<\varrho<1$. Ekkor a ν valószínűségi változó összes momentuma létezik.

Bizonyítás. Az állításhoz elég megmutatni, hogy a

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\nu \geqq n) z^n$$

hatványsor konvergencia sugara 1-nél nagyobb. Legyen $x_0 = x_0(\varrho)$ olyan pozitív szám, hogy $x \geqq x_0$ esetén

$$|\varrho(x)-\varrho| < \frac{1-\varrho}{2}$$

teljesül. Legyen továbbá $N(x_0)$ a $(0, x_0)$-ba eső τ_i pontok száma. Ismeretes, hogy

$$P(N(x_0)=k) = F_k(x_0) - F_{k+1}(x_0) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

ahol

$$F_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x>0 \\ 0, & \text{ha } x \leqq 0. \end{cases}$$

Tételezzük fel egyelőre, hogy $F(x_0)<1$ és válasszuk a $c<1$ számot olyan nagyra, hogy

$$1 > c > \max\left(F(x_0), \frac{1+\varrho}{2}\right)$$

teljesüljön. A $q=F(x_0)$ segítségével a $P(N(x_0)=k)$ valószínűséget a q^k kifejezéssel becsülhetjük felülről. Jelölje χ_k az $\{N(x_0)=k\}$ esemény indikátor változóját. Ekkor írható, hogy

$$M\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho(\tau_i)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} M\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho(\tau_i)\right)\chi_k\right) + \sum_{k=n}^{\infty} M\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho(\tau_i)\right)\chi_k\right) \leqq \tag{5}$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} c^{n-1-k} M(\chi_k) + \sum_{k=n}^{+\infty} M(\chi_k) \leqq c^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{q}{c}\right)^k + \sum_{k=n}^{\infty} q^k \leqq c^{n-1} \frac{1}{1-\frac{q}{c}} + \frac{q^n}{1-q}.$$

Ennélfogva

$$|G(z)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} P(\nu \geqq n) z^n\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \left(c^{n-1} \frac{1}{1-\frac{q}{c}} + \frac{q^n}{1-q}\right) = \tag{6}$$

$$= \frac{|z|}{1-\frac{q}{c}} \frac{1}{1-|z|c} + \frac{q|z|}{(1-q)(1-q|z|)},$$

hacsak

$$|z| \max(c, q) < 1,$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$|z| < \frac{1}{c}.$$

Minthogy $c<1$, azért $G(z)$ konvergenciasugara 1-nél nagyobb.

Ha $F(x_0)=1$, akkor válasszunk olyan m pozitív egész számot, hogy $F_m(x_0)<1$ legyen. Ilyen m szám létezik. A $c<1$ pozitív számot most a

$$c > \max\left(F_m(x_0),\ \frac{1+\varrho}{2}\right)$$

módon határozzuk meg. A $q'=F_m(x_0)$ segítségével a $P\big(N(x_0)=k\big)$ valószínűséget a $q'^{\left[\frac{k}{m}\right]}$ kifejezéssel becsülhetjük felülről. Innen a bizonyítás a fentihez hasonló módon történik.

Valószínű, hogy a 2. Tétel állítása akkor is igaz, amikor

$$\lim_{x\to+\infty} \varrho(x) = 1,$$

de a konvergencia elég lassú.

A $\{\nu=n\}$ esemény és a $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \ldots$ valószínűségi változók egymástól függetlenek. Ebből következőleg megmutatható, hogy a $\{\nu>n\}$ esemény és a δ_{n+1}, $\delta_{n+2}, \ldots$ valószínűségi változók is függetlenek. Jelölje $\varphi(s)$ az $F(x)$ eloszlásfüggvény *Laplace—Stieltjes* transzformáltját:

$$\varphi(s)=M(e^{-s\delta_j}) \quad (s=\sigma+i\tau,\ \ \sigma\geqq 0)$$

és jelölje $[\nu>n]$ a $\{\nu>n\}$ esemény indikátorváltozóját. Az elmondottakból következik, hogy

$$M([\nu>n]e^{-s\tau_{n+1}}) = \varphi(s)M([\nu>n]e^{-s\tau_n}).$$

Szorítkozzunk az $s\geqq 0$ értékekre. Az előbbi összefüggést alkalmazva nyerjük, hogy

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi(s)^{-n} M([\nu \geqq n]e^{-s\tau_n}) = 1+\sum_{n=2}^{m} \varphi(s)^{-(n-1)} M([\nu>n-1]e^{-s\tau_{n-1}}) =$$

$$= 1+\sum_{l=1}^{m-1} \varphi(s)^{-l} M([\nu>l]e^{-s\tau_l}).$$

Másrészt

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi(s)^{-m} M([\nu \geqq n]e^{-s\tau_n}) = \sum_{l=1}^{m} \varphi(s)^{-l} M([\nu = l]e^{-s\tau_l}+[\nu>l]e^{-s\tau_l}).$$

A két jobboldal egybevetésekor kapjuk, hogy

$$\sum_{l=1}^{m} \varphi(s)^{-l} M([\nu = l]e^{-s\tau_l}) = 1-\varphi(s)^{-m} M([\nu>m]e^{-s\tau_m}). \tag{7}$$

Érvényes tehát a következő ([1])

3. TÉTEL: *A $\varrho(x)$ ritkító valószínűség által generált v valószínűségi változó és a τ_v valószínűségi változó akkor és csak akkor tesz eleget az*

$$M(\varphi(s)^{-v}e^{-s\tau_v}) = 1 \quad (s \geqq 0) \tag{8}$$

Wald-féle azonosságnak, ha

$$\lim_{m\to+\infty} \varphi(s)^{-m} M([v>m]e^{-s\tau_m}) = 0. \tag{9}$$

A (9) feltétel teljesüléséhez és a (8) *Wald*-féle azonosság deriválhatóságához a következő ismert ([1]) elégséges feltételt fogalmazzuk meg:

4. TÉTEL: *Legyen k tetszőleges nem negatív egész szám és tegyük fel, hogy*

$$\int_0^{+\infty} x^k dF(x) < +\infty$$

Ha $m=0$ és $m=k$ esetén teljesül a

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(s)^{-n} n^{k-m} M([v>m]\tau_n^m e^{-s\tau_n}) = 0 \quad (s \geqq 0)$$

feltétel, akkor

$$M\left(\frac{d^j}{ds^j}(\varphi(s)^{-v}e^{-s\tau_v})\right) = \begin{cases} 1, & \text{ha } j=0 \\ 0, & \text{ha } j=1,2,\ldots,k. \end{cases}$$

A τ_v eloszlását az (1) rekurziós formula következményeként adódó

$$P(\tau_v < x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_n < x,\ v=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (1-\varrho(J))dQ_n(J)$$

formulával számolhatjuk, τ_v momentumait pedig a *Wald*-féle azonosság deriváltjai segítségével.

4. Példaként a *Poisson*-folyamat esetét vizsgáljuk. Ekkor

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0\ , & x \leqq 0, \end{cases}$$

ahol $\lambda>0$ rögzített szám. Az (1) rekurziós formulát alkalmazva

$$Q_1(x) = 1-e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

és

$$Q_2(x) = \int_0^x (1-e^{-\lambda(x-y)})\varrho(y)\lambda e^{-\lambda J} dy = \int_0^x \left(\lambda \int_0^y \varrho(u)du\right)\lambda e^{-\lambda y} dy.$$

Teljes indukcióval bizonyítható, hogy $n=1, 2, \ldots$ esetére

$$Q_n(x) = \int_0^x \frac{\left(\lambda \int_0^y \varrho(u)du\right)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda y} dy.$$

Most

$$P(\nu \geqq n) = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\lambda \int_0^y \varrho(u)\,du\right)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda y} dy$$

és

$$P(\nu = n) = \int_0^{+\infty} (1-\varrho(y))\,dQ_n(y).$$

Nem nehéz számolással belátható, hogy

$$P(\nu = n) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{(\lambda\varrho y)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{(\lambda\varrho y)^n}{n!}\right) \lambda e^{-\lambda y} dy,$$

továbbá

$$P(\nu < +\infty) = \int_0^{+\infty} (1-\varrho(y))\,d\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(y) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda(1-\varrho(y)) e^{-\lambda \int_0^y (1-\varrho(u))\,du} dy = 1 - \exp\left[-\lambda \int_0^{+\infty} (1-\varrho(u))\,du\right]$$

Ebből látható, hogy az 1. Tétel (3) feltétele ebben az esetben nemcsak szükséges, hanem elegendő is, mivel most

$$H(x) = \lambda x.$$

számolással adódik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\nu = n) z^n = z \int_0^{+\infty} \lambda(1-\varrho(y)) \exp\left[-\lambda \int_0^y (1-z\varrho(u))\,du\right] dy,$$

ezért ahhoz, hogy ν összes momentuma létezzék, elegendő, hogy valamilyen z-re, $|z|>1$, az

$$0 < \int_0^{+\infty} (1-z\varrho(u))\,du$$

integrál divergens legyen. A τ_ν változó eloszlásfüggvényét, ha egyáltalán létezik, a 3. pontban mondottak alapján a

$$P(\tau_\nu < x) = 1 - e^{-\lambda \int_0^x (1-\varrho(u))\,du}$$

képlettel számoljuk. Ez nyilván akkor és csak akkor lesz exponenciális, ha

$$\lambda \int_0^{+\infty} (1-\varrho(u))\,du = Kx$$

teljesül, ahol $K>0$ valamilyen állandó. Legyen $K = C\lambda$. Ekkor, mivel

$$0 \leqq 1-\varrho(u) \leqq 1,$$

azért az

$$\int_0^x (1-\varrho(u))du = Cx$$

képletből következik, hogy $0<C<1$. Áttérve a deriváltra, nyerjük, hogy

$$1-\varrho(x) = C,$$

ahonnan $\varrho(x) = 1-C$. A τ_ν változó tehát akkor és csak akkor exponenciális eloszlású, ha $\varrho(x)$ állandó.

5. Gyakorlati alkalmazások kapcsán sok esetben a $\varrho(x)$ ritkító valószínűség közel van 1-hez. Ez azt jelenti, hogy a ν valószínűségi változó nagy valószínűséggel nagy értékeket vesz fel. A következőkben megvizsgáljuk ν asszimptotikus eloszlását, amikor $\varrho(x)$ az 1-hez konvergál.

Legyen $k=1, 2, \ldots$ értékeire $\varrho_k(x)$ ritkító valószínűségek sorozata. Jelölje ν_k azt a legkisebb i indexet, amelyre teljesül, hogy a $\varrho_k(x)$ függvény szerinti ritkításnál a τ_i pontot megtartjuk; $\nu_k>0$. Jelölje továbbá r_k az $\inf_x \varrho_k(x)$ számot, R_k pedig a $\sup_x \varrho_k(x)$ számot.

5. TÉTEL: *Ha* $R_k<1$, $k=1, 2, \ldots$, *és* $\lim_{k\to+\infty} r_k=1$, *továbbá* $\lim_{k\to+\infty}(1-R_k)/(1-r_k) = 1$ *akkor*

$$\lim_{k\to+\infty} P(\nu_k \geqq xM(\nu_k)) = e^{-x} \quad (x>0).$$

Bizonyítás. Mivel

$$P(\nu_k \geqq n) = M\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho_k(\tau_i)\right),$$

azért

$$r_k^{n-1} \leqq P(\nu_k \geqq n) \leqq R_k^{n-1} \qquad (k, n=1, 2, \ldots)$$

Továbbá $R_k<1$ miatt $M(\nu_k)$ létezik és

$$\frac{1}{1-r_k} \leqq M(\nu_k) \leqq \frac{1}{1-R_k},$$

ahonnan

$$r_k^{\frac{x}{1-R_k}} \leqq P(\nu_k \geqq xM(\nu_k)) \leqq R_k^{\frac{x}{1-r_k}}.$$

Innen, figyelembe véve a feltételeket, állításunk azonnal adódik.

Az $R_k<1$, $(k=1, 2, \ldots)$ és a $\lim_{k\to+\infty}\frac{1-R_k}{1-r_k} = 1$ feltételek erősek. Ezért megfogalmazunk egy másik elégséges feltételrendszert is a fenti határeloszlástétel biztosítására.

A következő tulajdonsággal rendelkező $\varrho_k(x)$ függvénysorozatot tekintjük:
a) $k=1, 2, \ldots$ esetén létezik a

$$\lim_{x\to+\infty} \varrho_k(x) = \varrho_k \tag{10}$$

határérték, ahol $\varrho_k < 1$, $k=1, 2, \ldots$ és a (10) limeszreláció a k változóban egyenletesen teljesül, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan k-tól nem függő $x_0 = x_0(\varepsilon)$ szám, hogy $x \geqq x_0$ esetén

$$|\varrho_k(x) - \varrho_k| < \varepsilon, \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

6. TÉTEL: *Ha* $\lim_{k\to+\infty} r_k = 1$ *és teljesül az (a) feltétel, akkor*

$$\lim_{k\to+\infty} P(\nu_k \geqq xM(\nu_k)) = e^{-x} \qquad (x > 0).$$

Bizonyítás. $M(\nu_k)$ létezését az *(a)* feltétel alapján a 2. Tétel biztosítja. Válasszuk meg az x_0 számot úgy, hogy $k=1, 2, \ldots$ esetén

$$\frac{\varrho_k - \varepsilon}{1-\varepsilon} < \varrho_k(x) < \frac{\varrho_k + \varepsilon}{1+\varepsilon}$$

teljesüljön, hacsak $x \geqq x_0$. Jelölje χ_l az $\{N(x_0) = l\}$ esemény indikátor változóját. Ekkor

$$M\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho_k(\tau_i)\right) = \sum_{l=0}^{n-1} M\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho_k(\tau_i)\right)\chi_l\right) + \sum_{l=n}^{\infty} M\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho_k(\tau_i)\right)\chi_l\right).$$

Ezt figyelembevéve

$$M\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho_k(\tau_i)\right) \leqq \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{\varrho_k+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{n-1-l} P(N(x_0) = l) + P(N(x_0) \geqq n)$$

és

$$M\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho_k(\tau_i)\right) \geqq \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{\varrho_k-\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{n-1-l} r_k^l P(N(x_0) = l).$$

Az

$$M(\nu_k) = \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho_k(\tau_i)\right)$$

összefüggés alapján az előbbi két egyenlőtlenséget n-re összegezve és felcserélve az n, ill. l indexekre vonatkozó összegezések sorrendjét nyerjük, hogy

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{1-\varrho_k} \leqq M(\nu_k) \leqq \frac{1+\varepsilon}{1-\varrho_k} + H(x_0), \tag{11}$$

ha k elég nagy. Itt $H(x_0)$ a felújítási függvény értékét jelöli az x_0 pontban. Ugyanis

$$M(\nu_k) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{\varrho_k+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{n-1-l} P(N(x_0) = l) + P(N(x_0) \geqq n)\right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=l+1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_k+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{n-1-l} P(N(x_0) = l) + H(x_0) = \frac{1+\varepsilon}{1-\varrho_k} + H(x_0),$$

és

$$M(\nu_k) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{\varrho_k - \varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{n-1-l} r_k^l P(N(x_0) = l) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} r_k^l P(N(x_0) = l) \sum_{n=l+1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_k - \varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{n-1-l} = \sum_{l=0}^{\infty} r_k^l P(N(x_0) = l) \frac{1-\varepsilon}{1-\varrho_k}.$$

Az $N(x_0)$ változó generátorfüggvénye az r_k helyen

$$\sum_{l=0}^{\infty} r_k^l P(N(x_0) = l).$$

Ez, ha a k indexet elég nagyra választjuk, $(1-\varepsilon)$-nál nagyobb. Így elég nagy k esetén

$$M(\nu_k) \geqq \frac{(1-\varepsilon)^2}{1-\varrho_k}.$$

E becslésekből adódik (11) egyenlőtlenségünk. Ennélfogva, ha k elég nagy

$$(1-\varepsilon)^2 \leqq M(\nu_k)(1-\varrho_k) \leqq 1+\varepsilon+H(x_0)(1-\varrho_k).$$

Mivel x_0 rögzített, azért a k indexet elég nagyra választva adódik, hogy

$$1-2\varepsilon \leqq M(\nu_k)(1-\varrho_k) \leqq 1+2\varepsilon.$$

Így feladatunk arra korlátozódik, hogy a

$$P\left(\nu_k \geqq \frac{x}{1-\varrho_k}\right) \quad (x>0)$$

valószínűség határértékét meghatározzuk, mikor $k \to +\infty$. Legyen ebből a célból x_0 az előbb megválasztott szám és határozzuk meg a p pozitív egész számot úgy, hogy

$$P(N(x_0)>p)<\varepsilon$$

teljesüljön. A fentebbi gondolatmenethez hasonlóan

$$\sum_{l=0}^{p} \left(\frac{\varrho_k - \varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\left[\frac{x}{1-\varrho_k}\right]-l} \cdot P(N(x_0) = l) \leqq P\left(\nu_k \geqq \frac{x}{1-\varrho_k}\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{l=0}^{p} \left(\frac{\varrho_k + \varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\left[\frac{x}{1-\varrho_k}\right]-l} P(N(x_0) = l) + \varepsilon.$$

Ha $k \to +\infty$, akkor a bal és jobb oldalon álló összegekben az első tényezők az $\exp\left\{-\frac{x}{1-\varepsilon}\right\}$, ill. az $\exp\left\{-\frac{x}{1+\varepsilon}\right\}$ értékhez konvergálnak. Így

$$e^{-\frac{x}{1-\varepsilon}}\left(1-P(N(x_0)>p)\right) \leqq \lim_{k\to+\infty} {}^{\inf}_{\sup} P\left(\nu_k \geqq \frac{x}{1-\varrho_k}\right) \leqq e^{-\frac{x}{1+\varepsilon}} + \varepsilon,$$

ahonnan, a p szám megválasztását figyelembe véve nyerjük, hogy

$$e^{-\frac{x}{1-\varepsilon}}-\varepsilon \leqq \lim_{k\to+\infty} {}^{\inf}_{\sup} P\left(\nu_k \geqq \frac{x}{1-\varrho_k}\right) \leqq e^{-\frac{x}{1+\varepsilon}}+\varepsilon.$$

Az $\varepsilon > 0$ számot tetszőlegesen választhatjuk. Az utóbbi egyenlőtlenségből ezért állításunk következik.

6. A ν_k változók aszimptotikus viselkedésének ismerete lehetőséget ad arra, hogy a τ_{ν_k} valószínűségi változók eloszlásának aszimptotikus viselkedését megvizsgáljuk. Ahhoz, hogy ezt megtehessük, szükségünk lesz a következő ismert eredményre ([2], [3]), amelyet itt lemma alakjában fogalmazunk meg.

LEMMA: *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ azonos eloszlású valószínűségi változók, véges és pozitív μ várható értékkel. Legyenek továbbá ν_k pozitív egész értékű valószínűségi változók és tegyük fel, hogy valamilyen $\omega(k)$ számsorozatra teljesül, hogy $\omega(k)\to+\infty$, mikor $k\to\infty$ és*

$$\lim_{k\to+\infty} P\left(\frac{\nu_k}{\omega(k)} < x\right) = G(x),$$

ahol $G(x)$ eloszlásfüggvény. Ekkor

$$\lim_{k\to+\infty} P\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_{\nu_k}}{\mu\omega(k)} < x\right) = G(x).$$

Állításunk a következő.

7. TÉTEL: *Az 5. vagy 6. Tétel feltételei mellett*

$$\lim_{k\to+\infty} P\left(\frac{\tau_{\nu_k}}{\mu M(\nu_k)} < x\right) = 1-e^{-x} \quad (x>0).$$

Bizonyítás. Ha a Lemmában $G(x)$ szerepét $1-e^{-x}$, $\omega(k)$-ét $M(\nu_k)$, ξ_i-ét δ_i veszi át, akkor azonnal adódik tételünk állítása.

IRODALOM

[1] J. H. B. KEMPERMAN: *The passage problem for a stationary Markov Chain,* The University of Chicago Press. 1961.
[2] J. MOGYORÓDI: On the law of large numbers for the sum of a random number of independent random variables, *Annales Univ. Sci. de R. Eötvös nominatae. Sectio Math.* 8 (1965) 33—38.
[3] P. RÉVÉSZ: *The laws of large numbers,* Akadémiai Kiadó. Budapest, 1967.

(Beérkezett: 1970. III. 14.)

ОБ ОДНОЙ ПРОЦЕДУРЕ РАЗРЕЖЕНИЯ

J. Mogyoródi

Резюме

Пусть $\tau_0 \equiv 0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \ldots$ поток восстановления, где разницы $\tau_i - \tau_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ неотрицательные, независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и положительным математическим ожиданием μ. Пусть далее $0 \leqq \varrho(x) \leqq 1$ непрерывная функция, определенная на интервале $[0, +\infty)$. Поток подвергается следующей операции разрежения: при выполнении условия $\tau_i = x$ $(i=1, 2, \ldots)$, точка τ_1 выбрасывается из потока с вероятностью $\varrho(x)$ и остается в нем с вероятностью $1-\varrho(x)$. Для различных i эта операция производится независимо друг от друга. Пусть ν— наименьший индекс i, такой, что при разрежении τ_i выбрасывается из потока. В статье дается характеризация случайной величины ν. В Теореме 1 доказывается что

$$P(\nu \geqq n) = M\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varrho(\tau_i)\right), \quad (n=2, 3, \ldots)$$

где M-знак математического ожидания. Для того, чтобы ν являлась собственной случайной величиной, необходимо, чтобы интеграл

$$\int_0^{+\infty} (1-\varrho(x))\,dH(x)$$

расходился, где $H(x)$ -функция восстановления потока.

Теорема 2 дает достаточное условие того, чтобы ν имела моменты всех порядков. В Теоремах 3 и 4 исследуется условие того, чтобы ν подчинялась тождеству Вальда и дается условие дифференцируемости этого тождества. В Теоремах 5 и 6 исследуется асимптотическое поведение случайной величины ν, если $\varrho(x)$ стремится к 1. Доказывается, что

$$P(\nu \geqq xM(\nu)) \sim e^{-x} \quad (x>0),$$

если $\varrho(x)$ находится вблизи 1. Теорема 7 укажет на асимптотическое поведение случайной величины τ_ν. При выполнении условий Теоремы 5 или 6 имеем:

$$P(\tau_\nu \geqq \mu M(\nu)x) \sim e^{-x} \quad (x>0).$$

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

FÜGGVÉNYTEREKEN ÉRTELMEZETT VALÓSZÍNŰSÉGI MÉRTÉKEK SŰRŰSÉGÉRŐL

Írta: I. I. GIHMAN és A. V. SZKOROHOD*

TARTALOM

Bevezetés

0. 1. Mielőtt megfogalmaznánk a jelen dolgozatban vizsgálandó alapproblémákat, emlékeztetjük az olvasót néhány definícióra.

Tegyük fel, hogy egy X halmazon adva van a $\mathfrak{B}$ részhalmazok valamilyen σ-algebrája (ekkor az $(X, \mathfrak{B})$ párt *mérhető térnek* fogjuk nevezni). Tegyük fel, hogy adva van $\mathfrak{B}$-n két mérték, μ_1 és μ_2. Azt mondjuk, hogy a μ_2 mérték *abszolút folytonos* a μ_1 mértékre (jelben: $\mu_2 \ll \mu_1$), ha $\mu_2(A)=0$ mindazon, a $\mathfrak{B}$-be tartozó A részhalmazokra, melyekre $\mu_1(A)=0$. Abban az esetben, amidőn $\mu_2 \ll \mu_1$ és $\mu_1 \gg \mu_2$, a μ_1 és μ_2 mértékeket *ekvivalenseknek* nevezzük (ezt így jelöljük: $\mu_1 \sim \mu_2$). A μ_2 mérték *szinguláris* a μ_1 mértékre, ha megadható olyan A halmaz, melyre $\mu_1(A)=0$ és $\mu_2(X-A) = 0$. Ha μ_2 szinguláris a μ_1 mértékre, akkor μ_1 is szinguláris μ_2 mértékre, ebben az esetben a μ_1 és μ_2 mértékeket még *ortogonálisaknak* is nevezzük (ezt a tényt így jelöljük: $\mu_1 \perp \mu_2$). Ha a μ_1 és μ_2 mértékek végesek, akkor $\mu_2 = \nu_1 + \nu_2$, ahol ν_1 abszolút folytonos, ν_2 pedig szinguláris a μ_2 mértékre. Ez az előállítás az egyetlen lehetséges is (l. HALMOS [1] könyvében 134. o. 3. tétel). A ν_1, illetve ν_2 mértéket μ_2 μ_1-re nézve *abszolút folytonos,* illetve *szinguláris* komponensének nevezzük. Mármost véges mértékek esetén igaz a *Radon—Nikodym*-tétel ([1], 128. o.): annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy μ_2 mérték a μ_1 mértékre abszolút folytonos legyen, az, hogy létezzék olyan, $\mathfrak{B}$-mérhető $\varrho(x)$ függvény, melyre bármely $A \in \mathfrak{B}$ esetén fennáll

$$\mu_2(A) = \int_A \varrho(x) \mu_1(dx); \tag{0.1}$$

* И. И. Гихман и А. В. Скороход: О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах. Успехи математических наук, XXI (1966), вып. 6 (132), 83—152.

a $\varrho(x)$ függvény — a μ_1 mérték szerinti ekvivalenciát megengedve — egyértelműen meghatározható. A (0. 1) előállításban szereplő $\varrho(x)$ függvényt a μ_2 mérték μ_1 mérték szerinti *sűrűségének* (vagy *deriváltjának*) nevezzük és így jelöljük:

$$\varrho(x) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x).$$

0. 2. Sztochasztikus folyamatok vizsgálatakor különféle függvénytereken értelmezett mértékekkel kell foglalkoznunk. Sőt, bizonyos szempontból nézve egy sztochasztikus folyamat azonosítható egy mértékkel, amelyet valamilyen függvénytér egy speciális σ-algebráján értelmeztünk (gyakran elegendő az összes függvények terére szorítkozni; erről bővebben szó lesz az 1. §-ban). Ez a mérték *valószínűségi* mérték, vagyis az egész tér mértéke 1. Függvénytereken értelmezett valószínűségi mértékek vizsgálata ekvivalens a sztochasztikus folyamatok elmélete bizonyos kérdéseinek vizsgálatával.

A közelmúltban a sztochasztikus folyamatok elméletével kapcsolatos munkák jelentős része függvénytereken értelmezett valószínűségi mértékek abszolút folytonossága, ill. szingularitása kérdésével foglalkozott (ezeket a mértékeket *sztochasztikus folyamatoknak megfelelő mértékeknek* fogjuk nevezni). Különös figyelmet érdemel ezen felül egy mérték másik mérték szerinti sűrűségének kiszámítása is.

Érdekességként megjegyezzük, hogy véges dimenziós téren értelmezett mértékek esetén, a legáltalánosabbakat nem számítva, semmiféle idevágó eredményre nem jutottak még (az előbbiekhez tartozik pl. többszörös integrálok kiszámításakor az új változók bevezetésének szabálya). Függvénytéren értelmezett mértékek esetében azonban elég sok konkrét tétel között válogathatunk. Ennek az a magyarázata, hogy ezek az eredmények rendszerint egyes konkrét mértékekkel kapcsolatosak (véges dimenziós tér esetében az analóg eredményeket meglehetősen triviális differenciálási gyakorlatok képviselnék) — valamint a tér végtelen dimenziós voltával, mely utóbbi folytán fontos szerephez kezdenek jutni a konkrét mértékek megadásának egyes eszközei. A jelen cikk célja: sztochasztikus folyamatoknak megfelelő mértékek abszolút folytonosságára vonatkozó alapvető eredmények bemutatása.

0. 3. Jóllehet helyes volna függvénytéren értelmezett mértékek abszolút folytonosságának tanulmányozását e mértékek általános vizsgálatának menetébe iktatni, azonban az ebben az irányban folytatott kutatások célja mindeddig alapjában véve az volt, hogy megoldjanak a sztochasztikus folyamatok elmélete alkalmazásával kapcsolatos fontos konkrét problémákat. A jelen cikkben nem térünk ki az alkalmazási problémák ama csoportjára, amelyekben valószínűségi mértékek sűrűségével kapcsolatos eredményeket használnak fel (sőt ugyanakkor új, idevágó problémákat is felvetnek), mindazonáltal rámutatunk a kutatásoknak azokra a főirányaira, amelyek felhasználják ezeket az eredményeket.

Egy valószínűségi mértéknek egy másik szerinti sűrűségére vonatkozó első eredmények CAMERON és MARTIN [2]—[4] munkáiban jelentek meg, e munkák azzal a kérdéssel foglalkoznak, hogyan vezethető be új változó a *Wiener*-integrálban. Ezt az integrált N. WIENER vezette be [5] munkájában, ez nem más, mint az összes folytonos függvények terében értelmezett $w(t)$ *Wiener*-folyamatnak megfelelő μ_w mérték szerinti integrál. Az említett munkákban a következő formulát kapták:

$$\int f(Tx)\mu_w(dx) = \int f(x)D(x)\mu_w(dx), \tag{0. 2}$$

ahol f egy μ_w szerint integrálható funkcionál, T az összes folytonos függvények terének valamilyen önmagára való mérhető leképezése, $D(x)$ pedig egy funkcionál, amely csupán a T transzformációtól függ. Világos, hogy (0. 2)-ben $D(x)$ a transzformáció *Jacobi*-determinánsának szerepét játssza. Ha ν-vel jelöljük azt a mértéket, amelyet a $\nu(A)=\mu_w(T^{-1}(A))$ összefüggés definiál (itt $T^{-1}(A)$ az A halmaz teljes inverz képe a T leképezés esetén), akkor $\int f(Tx)\mu_w(dx)=\int f(x)\nu(dx)$. (0. 2)-ből következik, hogy $\nu(A)=\int\limits_A D(x)\mu_w(dx)$, azaz $D(x)=\frac{d\nu}{d\mu_w}(x)$. Így tehát CAMERON és MARTIN említett munkáiban egy olyan mérték *Wiener*-mérték szerinti sűrűsége került kiszámításra, amely a *Wiener*-folyamat bizonyos transzformációjának felel meg. Világos, hogy függvénytereken értelmezett más mértékek esetében is felhasználható egy mértéknek egy másik szerinti sűrűsége a „transzformáció *Jacobi*-determinánsaként", amidőn „új változót vezetünk be" a függvénytéren értelmezett mérték szerinti integrálokban.

A sztochasztikus folyamatok elméletének egyik legfontosabb problémája: különböző konkrét funkcionálok integráljainak kiszámítása az éppen vizsgált sztochasztikus folyamatnak megfelelő mérték szerint. Ha a μ_2 mérték abszolút folytonos a μ_1 mértékre, akkor a μ_2 mérték szerinti integrálok kiszámítása visszavezethető μ_1 mérték szerinti integrálok kiszámítására, a következőképpen:

$$\int f(x)\mu_2(dx)=\int f(x)\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x)\mu_1(dx). \tag{0. 3}$$

Egyedül annak az ismerete alapján, hogy μ_2 abszolút folytonos a μ_1-re nézve, megadhatók oly A halmazok, amelyekre $\mu_2(A)=1$ (feltéve, hogy ismerünk ilyen halmazokat a μ_1 mértékkel kapcsolatban). Ezek a halmazok a folyamat azon tulajdonságait jellemzik, amelyek 1 valószínűséggel teljesülnek; a sztochasztikus folyamatok elméletében nagy a fontossága az ilyen tulajdonságok vizsgálatának.

Minden $\varrho(x)$ nemnegatív mérhető funkcionált, melyre $\int \varrho(x)\mu(dx)=1$, felfoghatunk úgy, mint valamilyen valószínűségi mértéknek a μ mérték szerinti sűrűségét. Éppen ezért függvénytereken értelmezett mértékek megadhatók egy ismertnek tekintett mérték szerinti sűrűség segítségével. Ezen alapul sztochasztikus folyamatok (pontosabban, a nekik megfelelő mértékek: a részleteket l. [6]-ban) megadásának egyik konstruktív módszere.

Függvénytereken értelmezett mértékek sűrűsége sikerrel használható fel a sztochasztikus folyamatok statisztikája körébe tartozó egyes feladatok megoldásában. Tegyük fel, hogy feladatunk választani sztochasztikus folyamatnak megfelelő mértékre vonatkozó két hipotézis között: a H_i $(i=1, 2)$ hipotézis álljon abból, hogy a folyamatnak a μ_i mérték felel meg. Ha μ_1 és μ_2 ortogonálisak, akkor a folyamat realizációjának egyetlen megfigyelése alapján lehetséges 1 valószínűséggel dönteni a két hipotézis között. Ha μ_2 abszolút folytonos a μ_1 mértékre és $\varrho(x)=\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x)$, akkor a hipotézisek közti választásra szolgáló optimális kritériumok osztálya a következő: mindegyik kritériumhoz található olyan C, hogy $\varrho(x)<C$ esetén a H_1 hipotézist fogadjuk el, $\varrho(x)>C$ esetén a H_2 hipotézist, $\varrho(x)=C$ esetén pedig meghatározott valószínűséggel H_1-et és a kiegészítő valószínűséggel H_2-t. Sűrűségek kiszámítására és sűrűségeknek a sztochasztikus folyamatok statisztikájában való felhasználására vonatkozó első eredmények U. GRENANDER [7] cikkében találhatók. Analóg tárgyalásmód lehetséges egy sztochasztikus folyamat eloszlása paramétereinek a maximum likelihood módszerrel való meghatározása esetén is. Megjegyezzük, hogy sztochasztikus folyamatok statisztikájának egyes problémáira vezethetők vissza jelek zaj-háttérben való detekciójának gyakorlatilag nagyon fontos kérdései is; e kérdésekkel egész sor alkalmazási jellegű munka foglalkozik (lásd a [8], [9] könyveket, melyekben további irodalmi utalások is találhatók).

Végül jól felhasználhatók a mértékek sűrűségére vonatkozó kifejezések akkor is, amidőn egy sztochasztikus folyamatban tartalmazott, valamilyen más sztochasztikus folyamatra vonatkozó információ mennyiségének kiszámításáról van szó. Ha $\xi(t)$ és $\eta(t)$ két folyamat, μ_ξ és μ_η a nekik megfelelő mértékek, $\mu_{\xi,\eta}(dx, dy)$ a $(\xi(t); \eta(t))$ kétdimenziós folyamatnak megfelelő mérték, $\mu_\xi \times \mu_\eta$ pedig a μ_ξ és μ_η mértékek szorzata, akkor annak az információnak a mennyisége, amelyet $\xi(t)$ az $\eta(t)$-re vonatkozólag tartalmaz (vagy megfordítva) a következő formulával adható meg:

$$I_{\xi,\eta} = \int \ln \frac{d\mu_{\xi,\eta}}{d(\mu_\xi \times \mu_\eta)}(x, y)\mu_{\xi,\eta}(dx, dy). \tag{0.4}$$

Az ebben az irányban elért eredmények eléggé teljes tárgyalása megtalálható M. PINSZKER [10] könyvében.

0. 4. Az előző pontban említettünk már egyes munkákat, amelyekben sztochasztikus folyamatoknak megfelelő mértékek abszolút folytonosságának kérdéseivel foglalkoztak. A CAMERON és MARTIN által elkezdett vizsgálatokat, melyek az elsők voltak ebben az irányban, az analízis egyes kérdéseiben való alkalmazhatóság szempontjából fejlesztették tovább. Ezzel az irányzattal I. M. GEL'FAND és A. M. JAGLOM [1] összefoglaló jellegű munkájából ismerkedhet meg az olvasó. Ju. V. PROHOROV [12] bebizonyította az 1 diffúziós együtthatójú és elegendően sima átviteli koefficiensű egydimenziós diffúziós folyamatnak megfelelő mérték *Wiener*-mérték szerinti abszolút folytonosságát és kiszámította a megfelelő sűrűséget. (Megjegyezzük, hogy ezt az eredményt azzal kapcsolatosan kapta, hogy meg kellett állapítani bizonyos halmazok 0-mértékű voltát.) Többdimenziós diffúziós folyamatokat vizsgált A. V. SZKOROHOD [13], I. V. GROSZANOV [14]; ugrásszerű és folytonos komponensekkel bíró folyamatokkal A. V. SZKOROHOD foglalkozott [13], [15]. Egy mérték másik mérték szerinti sűrűsége alakjának kérdésével kapcsolatban általános típusú homogén, *Markov*-folyamatok esetében E. B. DINKIN ért el részleges eredményeket ([16], 10. fej. 3. §). Független növekményű folyamatok esetében a mértékek abszolút folytonosságára vonatkozó szükséges és elégséges feltételeket találhatunk A. V. SZKOROHOD [17] könyve 9. fejezetében.

Különösen sok munka foglalkozik *Gauss*-mértékek (*Gauss*-folyamatoknak megfelelő mértékek) abszolút folytonosságával. E munkák nagy része főként alkalmazási jellegű; ide tartoznak többek között a *Gauss*-zajból való jel-detekcióról szóló munkák. Csak azokat a munkákat említjük meg, melyekben új matematikai eredmények voltak. Egymástól pusztán eltolásban különböző mértékek abszolút folytonosságainak kérdését teljesen megoldotta U. GRENANDER, [7] munkájában. Általános típusú *Gauss*-folyamatokat vizsgált J. HAJEK [18], J. FELDMAN [19], [20], JU. A. ROZANOV [21], RADHAKRISHNA RAO és VARADARAJAN [22]. L. A. SHEPP [34]. A felsorolt munkákban különböző variánsokban találhatók a *Gauss*-mértékek abszolút folytonosságára vonatkozó szükséges és elégséges feltételek; megtalálhatók a sűrűségek kifejezései is. Az ez irányban elért eredmények jó része stacionárius *Gauss*-folyamatoknak megfelelő mértékek ekvivalenciája és ortogonalitása elégséges feltételeire vonatkozik, lényegében véve ezeket a feltételeket a spektrális sűrűségek segítségével fogalmazták meg. Megemlítjük itt. JU. A. ROZANOV [23], [24], V. G. ALEKSZEJEV [25], A. M. JAGLOM [26] munkáját, a [24], [26] munkákban bővebb bibliográfia található. Stacionárius *Gauss*-folyamatok egy elég tág osztálya esetére a mértékek ekvivalenciája szükséges és elégséges feltételeit, valamint a sűrűség kifejezését nemrég találta meg JU. A. ROZANOV [35].

0. 5. Rámutatunk a cikk tartalmának néhány sajátságára. Az 1. §-ban felsoroljuk a sztochasztikus folyamatok elméletének néhány alapfogalmát, ennek az a célja, hogy a valószínűségelméletben nem specialista olvasók számára megkönnyítse a cikk megértését. A 2. §-ban egy folyamat karakterisztikus funkcionálja fogalmát vizsgáljuk, melyet A. N. KOLMOGOROV vezetett be [27], valamint a funkcionálok néhány sajátságát: Ez a két paragrafus a későbbiek megértését hivatott elősegíteni. A 3. §-ban a mértékelmélet és a sztochasztikus folyamatok elmélete nyelvén tárgyaljuk az abszolút folytonosság és szingularitás bizonyításának általános módszereit és a sűrűségek kiszámítását. A 4—8. §-okban konkrét folyamatosztályok esetében tanulmányozzuk az abszolút folytonosság kérdéseit: a 4. § a *Gauss*-, az 5. § a stacionárius *Gauss*-, a 6. § a korlátlanul osztható, a 7. § a független növekményű, a 8. § a *Markov*-folyamatok esetét tartalmazza. Végül a 9. § bizonyos általános eredményeket tartalmaz „új változók bevezetéséről" függvénytereken értelmezett mértékek szerinti integrálok kiszámításakor.

1. §. A sztochasztikus folyamatok elméletének egyes alapfogalmai

1. 1. A különböző sztochasztikus objektumok vizsgálatakor célszerű abból indulni ki, hogy adva van az ω elemeknek valamilyen Ω halmaza, ennek részhalmazaiból képezett $\mathfrak{S}$ σ-algebra és az $\mathfrak{S}$-en értelmezett P valószínűségi mérték. Az Ω halmazt az *elemi események terének*, az $\mathfrak{S}$-be tartozó A részhalmazokat *eseményeknek*, $P(A)$-t az *A esemény valószínűségének* nevezzük. Az $\{\Omega, \mathfrak{S}, P\}$ hármast *valószínűségi térnek* nevezzük. Minden sztochasztikus objektumot ω $\mathfrak{S}$-mérhető függvényének tekintünk. Így például egy ξ *sztochasztikus (valószínűségi) változón* egy $\xi(\omega)$ $\mathfrak{S}$-mérhető számértékű függvényt értünk. Ha $(X, \mathfrak{B})$ valamilyen mérhető tér, akkor az Ω halmaz X-be való $x(\omega)$ mérhető leképezését X-be tartozó *sztochasztikus elemnek* nevezzük. Egy $x(t)$ *sztochasztikus folyamaton* — mely az E halmazon van értelmezve $(t \in E)$ és amelynek értékei X-be tartoznak — egy $x(t, \omega)$ kétváltozós függvényt értünk, mely $E \times \Omega$-n van értelmezve és amelynek értékei X-be tartoznak, emellett $x(t, \omega)$ minden $t \in E$-re X-be tartozó sztochasztikus elem. A következőkben csupán olyan sztochasztikus folyamatokkal fogunk foglalkozni, melyeknek értékei az $R^{(m)}$ m-dimenziós euklideszi térbe tartoznak (gyakran előfordulnak egyszerű számértékű folyamatok is, amikoris $m=1$). Jelölje $F_E^{(m)}$ mindazon $x(t)$ függvények terét, melyek E-n vannak értelmezve és értékeik $R^{(m)}$-be tartoznak. Ω-nak $F_E^{(m)}$-re való leképezése, mely egy $R^{(m)}$-be tartozó értékű $\xi(t)$ sztochasztikus folyamatot definiál, Ω $\mathfrak{S}$-mérhető részhalmazait $F_E^{(m)}$ részhalmazainak valamilyen σ-algebrájába viszi át.

Amennyiben minden $t \in E$-re $\mathfrak{S}$-mérhető az $\{\omega; \xi(t, \omega) \in A\}$ halmaz (A $R^{(m)}$-beli *Borel*-halmaz), akkor ebbe a σ-algebrába $F_E^{(m)}$-nek $C_t(A) = \{x(\cdot); x(t) \in A\}$ típusú halmazai fognak tartozni (ahol $t \in E$, A pedig *Borel*-halmaz). A $C_t(A)$ halmazokat *egydimenziós hengerhalmazoknak* nevezzük. A $\bigcap_{k=1}^{n} C_{t_k}(A_k)$ típusú halmazokat az $A_n = \{t_1, \ldots, t_n\}$ *halmaz felett értelmezett hengerhalmazoknak* nevezzük. Jelölje $\mathfrak{F}_E^{(m)}$ $F_E^{(m)}$ részhalmazainak azt a minimális σ-algebráját, amely tartalmazza az összes hengerhalmazokat. Tetszőleges $\mathfrak{F}_E^{(m)}$-beli halmaznak Ω-nak $F_E^{(m)}$-re való $\xi(\cdot, \omega)$ leképezésével kapcsolatos teljes inverz képe $\mathfrak{S}$-mérhető lesz és ez a leképezés $\mathfrak{F}_E^{(m)}$-en valamilyen μ mértéket definiál. Ezt a mértéket a $\xi(t)$ *folyamatnak megfelelő mértéknek* nevezzük. Néha az $\mathfrak{F}_E^{(m)}$-en értelmezett μ valószínűségi mértéket azonosítani lehet magával a sztochasztikus folyamattal, minthogy ezzel a mértékkel kapcsolatba lehet hozni az $\{F_E^{(m)}, \mathfrak{F}_E^{(m)}, \mu\}$ valószínűségi teret és akkor a $\xi(t, x(\cdot)) = x(t)$ természetes leképezés megadja azt a folyamatot, amelynek megfelel a μ mérték. Megjegyezzük, hogy sok esetben tekinthető kiindulási térnek valamilyen leszűkített tér, pl. a mérhető függvények tere vagy azon függvények tere, melyek valamilyen hatványa integrálható, vagy a másodfajú szakadások nélküli függvények tere, vagy a folytonos függvények tere é. í. t. Mindezen terekben vizsgálható az a σ-algebra, amelyet a hengerhalmazok generálnak (ezt mindig egyetlen jellel fogjuk jelölni), valamint az ezen a σ-algebrán értelmezett mérték, mely megfelel a sztochasztikus folyamatnak. A jelen cikk szempontjából elég, ha sztochasztikus folyamaton egy valószínűségi mértéket értünk, amely valamilyen F függvénytér összes henger-részhalmazának $\mathfrak{F}$ minimális σ-algebráján van értelmezve (a teret nem mindig fogjuk konkréten megadni). Vizsgálni fogunk az X metrikus tér *Borel*-halmazainak $\mathfrak{B}$ σ-algebráján értelmezett valószínűségi mértékeket is.

Ahhoz, hogy megadjunk egy sztochasztikus folyamatot (a mondott értelemben), elegendő, ha megadjuk a mérték értékeit hengerhalmazokon, ehhez pedig elegendő megadni a

$$P_{t_1, \ldots, t_n}(A_1, \ldots, A_n) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} C_{t_k}(A_k)\right) \tag{1.1}$$

függvényeket. Ezeket a függvényeket a *folyamat végesdimenziós eloszlásainak* nevezzük. Ezek eleget tesznek az additivitás feltételének, valamint bizonyos kompatibilitási feltételeknek, melyek abból következnek, hogy egy hengerhalmaz egydimenziós hengerhalmazokkal való előállítása nem egyértelmű. A. N. KOLMOGOROV ismert tétele (l. [28]) azt mondja ki, hogy az additivitás és kompatibilitás feltételeinek eleget tevő végesdimenziós eloszlások bármilyen megválasztásának megfelel egy sztochasztikus folyamat.

A folyamat meghatározásának említett módja mellett gyakran használni fogjuk a $\xi(t)$ és hasonló jelöléseket a folyamatra. A sztochasztikus folyamatok elméletében nem jártasak számára azt ajánljuk, hogy ebben az esetben fogjuk fel $\xi(t)$-t úgy, mint változó mennyiséget egy függvénytérben, amelyen mérték van értelmezve. Ha f $\mathfrak{F}$ -mérhető funkcionál, akkor $Mf(\xi(\cdot))$ $\int f(x)\mu(dx)$-et jelenti, ahol μ a $\xi(t)$ folyamatnak megfelelő mérték; ebben az esetben $\xi(t)$ az integrációs változó jelölésére szolgál. A továbbiakban csupán véges vagy végtelen intervallumokon értelmezett sztochasztikus folytonos folyamatokat fogunk vizsgálni, ez azt jelenti, hogy a folyamatnak megfelelő μ mérték eleget tesz a

$$\lim_{t\to t_0} \mu\{x;\ |x(t)-x(t_0)|>\varepsilon\} = 0$$

feltételnek minden az értelmezési tartományba tartozó t_0-ra és $\varepsilon>0$-ra.

1. 2. Most felsoroljuk azon sztochasztikus folyamat-osztályokat, melyekkel a későbbiekben foglalkozni fogunk.

I. Gauss-folyamatok. Egy $\xi(t)$ folyamatot *Gauss*-folyamatnak nevezünk, ha a $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ valószínűségi változók együttes eloszlása normális minden olyan $t_1, \dots, t_n$-re, melyek a folyamat értelmezési tartományába tartoznak. Valós értékű folyamatok esetében ez azt jelenti, hogy a $\xi(t)$ folyamat végesdimenziós eloszlásait a következő képlet adja meg:

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_1,\dots,A_n) = \int_{A_1}\dots\int_{A_n} p_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n)\,du_1\dots du_n, \tag{1.2}$$

ahol

$$p_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\{\det A_{t_1,\dots,t_n}\}^{-\frac{1}{2}}\times \tag{1.3}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(A^{-1}_{t_1,\dots,t_n}[u-a_{t_1,\dots,t_n}],\ [u-a_{t_1,\dots,t_n}])\right\},$$

$A_{t_1,\dots,t_n}$ az $\|A(t_i,t_j)\|$ matrix, $a_{t_1,\dots,t_n}$ az $a(t_1), \dots, a(t_n)$, komponensekkel bíró vektor, u az $u_1, \dots, u_n$ komponensekkel bíró vektor, $a(t)=M\xi(t)$ és

$$A(t,s) = M\xi(t)\xi(s)-a(t)a(s).$$

(Ha $A_{t_1,\dots,t_n}$ elfajult matrix, $p_{t_1,\dots,t_n}$ általánosított függvényként fogható fel.) Így tehát a *Gauss*-folyamatnak megfelelő mértéket két függvény határozza meg: $a(t)$, a folyamat várható értéke és $A(t,s)$, a folyamat korrelációfüggvénye, $a(t)$ tetszőleges lehet, $A(t,s)$ azonban pozitív definit mag. Ha E véges vagy végtelen intervallum, $A(t,s)$ pedig csupán az argumentumok különbségétől függ, vagyis $A(t,s) = B(t-s)$ és $a(t)=\text{const}$, akkor a folyamatot *stacionáriusnak* hívjuk. Sztochasztikusan folytonos folyamatok esetében $a(t)$ és $A(t,s)$ az argumentumok folytonos függvénye.

II. Korlátlanul osztható folyamatok. E folyamatok definiálását a következő paragrafusra hagyjuk, ahol sztochasztikus folyamatok megadásainak egy másik módját fogjuk javasolni.

III. Független növekményű folyamatok. A $[0,T]$ szakaszon értelmezett $\xi(t)$ folyamatot *független növekményű folyamatnak* nevezzük, ha a $\xi(t_0)$, $\xi(t_1)-\xi(t_0), \dots, \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ valószínűségi változók valószínűségi értelemben függetlenek, $t_0<t_1<\dots<t_n$. Ahhoz, hogy megadjuk egy független növekményű folyamat végesdimenziós eloszlásait, elegendő megadni a $\xi(0)$ változó eloszlását, $P_0(A) = P\{\xi(0)\in A\}$-t és a $G_{t,s}(A)= P\{\xi(s)-\xi(t)\in A\}$ $(s>t)$ függvényt. $P_0(A)$ tetszőleges eloszlás lehet. Sztochasztikus folytonos független növekményű folyamat esetén a $G_{t,s}(A)$ függvényt *Fourier*-transzformáltja értelmezi:

$$\begin{aligned}\int e^{i(z,x)} G_{t,s}(dx) = \exp\Big\{ i\big(a(s)-a(t), z\big) - \frac{1}{2}\big([B(s)-B(t)]z, z\big) + \\ + \int \left[e^{i(z,u)} - 1 - \frac{i(z,u)}{1+(u,u)} \right] \big(\Pi(s, du) - \Pi(t, du)\big)\Big\}, \quad z \in R^{(m)}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Ebben a formulában $a(t)$ folytonos függvény $R^{(m)}$-be tartozó értékekkel, $B(t)$ lineáris szimmetrikus operátor $R^{(m)}$-ben, melyre $(B(t)z, z)$ t folytonos nemcsökkenő függvénye $z \in R^{(m)}$ mellett, $\pi(t, A)$ rögzített t mellett mérték az $R^{(m)}$-beli *Borel*-halmazokon, emellett t folytonos és nemcsökkenő függvénye, ezenkívül

$$\int \frac{(x,x)}{1+(x,x)} \Pi(t, dx) < \infty.$$

IV. Markov-folyamatok. Így hívjuk azokat a folyamatokat, amelyeknek végesdimenziós eloszlásait a következő formula adja meg:

$$\begin{aligned} P_{t_1,\dots,t_n}(A_1, \dots, A_n) = \\ = \int_{A_1} m_{t_1}(dx_1) \int_{A_2} P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \dots \int_{A_n} P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n), \\ (t_1 < \dots < t_n), \end{aligned} \tag{1.5}$$

ahol $m_{t_1}(dx)$ a $\xi(t_1)$ változó eloszlása, a $P(t_1, x, t_2, A)$ függvény pedig A szerint valószínűségi mérték; rögzített A, t_1, t_2 mellett x szerint mérhető és eleget tesz a *Kolmogorov—Chapman* egyenletnek, azaz

$$P(t_1, x, t_3, A) = \int P(t_2, y, t_3, A) P(t_1, x, t_2, dy). \tag{1.6}$$

A $P(t, x, s, dy)$ függvényt *a folyamat átmenetvalószínűségének* nevezzük; valószínűségelméleti értelmét a

$$P(t, \xi(t), s, A) = P\{\xi(s) \in A | \xi(t)\}$$

összefüggés határozza meg, ahol a jobb oldalon feltételes valószínűség áll, rögzített $\xi(t)$ mellett. Ha adva van egy $P(t, x, s, A)$ átmeneti valószínűség (ahol $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$, $t < s$), mely eleget tesz a fentebb felsorolt feltételeknek, akkor tetszés szerinti $m_0(dx)$ mértéket véve $\xi(0)$ eloszlásaként, az (1. 5) formula szerint megszerkeszthetők a folyamat véges dimenziós eloszlásai is, és ezeknek a véges dimenziós eloszlásoknak meg fog felelni valamilyen *Markov*-folyamat. Így tehát egyetlen átmenetvalószínűséggel függvénytéren értelmezett, $\xi(0)$ eloszlásától függő mértékek egész családja hozható kapcsolatba. Ha adva van $[0, T]$-n a $\xi(t)$ *Markov* folyamat, vizsgálható $F_{[t_0,T]}$-ben azon $\mu_{t_0,x}$ mértékek családja, melyeket a $\xi(t)$ folyamat átmenetvalószínűségeivel szerkesztettünk meg, feltéve, hogy $\xi(t_0)$ eloszlásaként a

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \bar{\in} A \end{cases}.$$

mértékeket vesszük.

Legyen C_1 egy hengerhalmaz $F_{[0,t_0]}$-ból, C_2 egy hengerhalmaz $F_{[t_0,T]}$-ből, μ a $\xi(t)$-nek megfelelő mérték, μ_{t_0,x_0} pedig a fentebb megkonstruált mérték. Akkor (1. 5)-ből következik, hogy

$$\mu(C_1 \cap C_2) = \int \mu(C_1 \cap C_{t_0}(dx_0))\mu_{t_0,x_0}(C_2). \tag{1.7}$$

A felsorolt sztochasztikus folyamat-osztályok távolról sem merítik ki az összes lehetséges sztochasztikus folyamatokat. Mindazonáltal ezek az alapvető osztályok, melyek többé-kevésbé teljesen jellemezhetők. Ezen osztályok közös részei nem üresek, úgy, hogy az ezen osztályokra való felosztás valójában nem osztályozás. Ezek az osztályok a történeti fejlődés során keletkeztek. Itt nagy szerepet játszott az, hogy mindegyik osztályon belül külön általános módszerei vannak a sztochasztikus folyamatok vizsgálatának.

Meg kell jegyezni, hogy 1. a *Gauss*-folyamatok a korlátlanul oszthatók alosztálya; 2. a független növekményű folyamatok egyszersmind korlátlanul oszthatók és *Markov*-félék is; 3. a független növekményű *Gauss*-folyamatok az összes felsorolt osztályokba beletartoznak.

A sztochasztikus folyamatok elméletében sajátos fontos szerepe van a $w(t)$ *Wiener-folyamatnak*; ez egydimenziós, független növekményű *Gauss*-folyamat, mely $t \geqq 0$-ra van definiálva és amelyre $Mw(t)=0$, $Mw(t)w(s)=\min[t, s]$. A *Wiener*-folyamat (melyet még *Brown*-mozgás folyamatnak is neveznek) volt az első folyamat, melyhez függvénytéren értelmezett mértéket (*Wiener*-mérték) szerkesztett meg N. WIENER, [29] munkájában.

2. §. Sztochasztikus folyamatok karakterisztikus funkcionáljai

2. 1. Tegyük fel, hogy az X lineáris topologikus téren adva van egy véges μ mérték, valamely $\mathfrak{B}'$ σ-algebrán, mely utóbbira vonatkozólag mérhetők az X-en értelmezett összes lineáris folytonos funkcionálok. A valós lineáris funkcionálok terét jelöljük X^*-gal. Ekkor azt a $\varphi(l)$ függvényt, melyet X^*-on a

$$\varphi(l) = \int e^{i(l,x)}\mu(dx) \tag{2.1}$$

egyenlőséggel definiálunk, a μ *mérték karakterisztikus funkcionáljának* nevezzük. A μ mérték karakterisztikus funkcionálja a μ mértéket egyértelműen meghatározza, azon $\mathfrak{B}$ minimális σ-algebrán, amelyre vonatkozólag X^* összes lineáris funkcionáljai mérhetők. Ha egy pillanatra feltesszük, hogy $\mathfrak{B}'$ azonos $\mathfrak{B}$-vel, akkor a μ mértéket egyértelműen meghatározza karakterisztikus funkcionálja. Megjegyezzük, hogy abban az esetben, amidőn X szeparábilis *Banach*-tér, az a minimális σ-algebra, amelyre vonatkozólag az összes lineáris funkcionálok mérhetők, azonos lesz az X tér összes *Borel*-halmazainak $\mathfrak{B}$ σ-algebrájával.

A következőkben gyakran fogjuk vizsgálni a $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-téren értelmezett mértékek karakterisztikus funkcionáljait; ekkor egy ilyen mérték karakterisztikus funkcionálja

$$\varphi(z) = \int e^{i(z,x)}\mu(dx)$$

alakú lesz; ez $\mathfrak{H}$-n értelmezett funkcionál.

A karakterisztikus funkcionál pozitív definit, azaz

$$\sum_{k,j} \varphi(l_k - l_j)\alpha_k\bar{\alpha}_j \geqq 0$$

ahol $l_1, \ldots, l_n$ X^*-on értelmezett tetszőleges funkcionálok és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ komplex számok. Az X tér eltolásból álló transzformációikor, valamint lineáris transzformációikor a karakterisztikus funkcionálok meglehetősen egyszerűen transzformálódnak.

1. Legyen μ' egy mérték, melyet a $\mu' A = \mu(T_{-a}A)$ összefüggés definiál, ahol $T_{-a}x = x - a$, ha $x \in X$, és feltesszük, hogy $A \in \mathfrak{B}$ esetén $T_{-a}A \in \mathfrak{B}$. Ekkor

$$\varphi'(l) = \int e^{i(l,x)}\mu'(dx) = \int e^{i(l,x)}\mu(T_{-a}dx) =$$

$$= e^{i(l,a)}\int e^{i(z,T_{-a}x)}\mu(T_{-a}dx) = e^{i(l,a)}\varphi(l).$$

2. Legyen V valamilyen lineáris operátor X-en és $\mu'(A) = \mu(V^{-1}A)$ ($V^{-1}A$ az A halmaz teljes inverz képe a V transzformáció esetén). Ismét feltesszük, hogy $V^{-1}A \in \mathfrak{B}$, ha $A \in \mathfrak{B}$. Akkor

$$\varphi'(l) = \int e^{i(l,x)}\mu'(dx) = \int e^{i(l,x)}\mu(V^{-1}dx) = \int e^{i(V^*l, V^{-1}x)}\mu(V^{-1}dx) = \varphi(V^*l),$$

itt V^* a V-hez adjungált operátor. Az eredmény nem változik, ha V az X-et egy másik X_1 térre képezi le.

3. Definiálható a μ és ν mértékek $\mu * \nu$ konvolúciója is. Tekintsük az $X \times X$ térben a $\mu \times \nu$ mérték-szorzatot. Tegyük fel, hogy $X \times X$-nek X-re való V leképezése, melyet a $V(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ összefüggés definiál, olyan, hogy bármely $\mathfrak{B}$-mérhető A halmazra $V^{-1}A$ $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ mérhető lesz. (Terek, σ-algebrák, mértékek szorzatára vonatkozólag lásd HALMOS [1] könyvének VII. fejezetét.) Legyen mármost $\mu * \nu(A) = (\mu \times \nu)(V^{-1}A)$. Legyenek $\varphi_1(l)$ és $\varphi_2(l)$ a μ és ν mértékek karakterisztikus funkcionáljai. Ekkor a $\mu \times \nu$ mérték karakterisztikus funkcionálja a következő lesz:

$$\varphi_{1,2}(l_1, l_2) = \int \exp\{i(l_1, x_1) + i(l_2, x_2)\}\, \mu \times \nu(dx_1 dx_2) =$$

$$= \int \exp\{i(l_1, x_1)\}\mu(dx_1) \int \exp\{i(l_2, x_2)\}\, \nu(dx_2) = \varphi_1(l_1)\varphi_2(l_2).$$

Felhasználva a 2. tulajdonságot, meggyőződhetünk arról, hogy a $\mu * \nu$ mérték $\varphi(l)$ karakterisztikus funkcionálja $\varphi_1(l)\, \varphi_2(l)$ lesz. Így tehát mértékek konvolúciójakor karakterisztikus funkcionáljaik összeszorzódnak.

Megjegyzendő, hogy az 1—3. tulajdonságoknál említett leképezések mérhetőségi feltételei automatikusan teljesülnek, ha X szeparábilis *Banach*-tér, $\mathfrak{B}$ pedig a *Borel*-halmazok σ-algebrája.

2. 1. Definíció. Az $(X, \mathfrak{B})$-n értelmezett μ mértéket *korlátlanul oszthatónak* nevezzük, ha bármely n természetes számhoz található olyan, $(X, \mathfrak{B})$-n értelmezett μ_n mérték, melyre igaz, hogy a μ a μ_n mérték n-szeres konvolúciója, azaz $\mu = \mu_n * \mu_n * \ldots * \mu_n$ (n-szer).

Karakterisztikus funkcionálokra kimondva ez azt jelenti, hogy bármely n-hez található oly $\varphi_n(l)$ karakterisztikus funkcionál, melyre fennáll $[\varphi_n(l)]^n = \varphi(l)$, ahol $\varphi(l)$ μ karakterisztikus funkcionálja. A karakterisztikus funkcionáloknak ez a tulajdonsága egyes esetekben lehetővé teszi, hogy a karakterisztikus funkcionál segítségével az összes korlátlanul osztható méitékeket jellemezhessük. Sőt — megadható egy eléggé kiterjedt funkcionálosztály, melynek elemei mind korlátlanul osztható eloszlások karakterisztikus funkcionálja. A *Hilbert*-téren értelmezett mértékek esetében azon mértékek lesznek korlátlanul oszthatók, melyek karakterisztikus funkcionáljai

$$\varphi(z) = \exp\left\{i(z, a) - \frac{1}{2}(Az, z) + \int \left(e^{i(z,x)} - 1 - i(z, x)\chi_1(x)\right)\pi(dx\right\} \tag{2. 2}$$

alakúak, ahol $a \in \mathfrak{H}$, A pedig $\mathfrak{H}$-n értelmezett lineáris szimmetrikus nemnegatív operátor, melynek véges a nyoma; végül a $\mathfrak{B}$-n értelmezett $\pi(dx)$ mértékre fennáll

$$\int \frac{(x, x)}{1 + (x, x)}\pi(dx) < \infty, \quad \chi_1(x) = \begin{cases} 1, & (x, x) \leq 1, \\ 0, & (x, x) > 1 \end{cases}$$

(a $\pi(dx)$ mérték végtelen is lehet 0 környezetében). Abban az esetben, amidőn a π mérték 0-sal egyenlő, a (2. 2) karakterisztikus funkcionállal rendelkező mértéket *Gauss-mértéknek* nevezzük. Ebben az esetben a $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{B}, \mu\}$ valószínűségi téren értelmezett $(z_1, x), \ldots, (z_n, x)$ változók együttes eloszlása normális lesz.

2. 2. Ebben a pontban sztochasztikus folyamatok karakterisztikus funkcionáljait fogjuk vizsgálni. Felhasználhatók persze az előző pont eredményei is, minthogy mindig kiindulhatunk abból, hogy a folyamatnak megfelelő mérték valamilyen topologikus függvénytéren van megadva. Itt azonban nehézségbe ütközünk, mivel a teret úgy kell megválasztani, hogy az összes hengerhalmazokat tartalmazó σ-algebra *kiegészítése* egybeessék a lineáris funkcionálok által generált σ-algebra *kiegészítésé*vel. A megfelelő tér megválasztása nem triviális feladat; általános megoldásával nem is fogunk foglalkozni. Két esetet fogunk vizsgálni, nevezetesen, amikor

1. a folyamatnak megfelelő mérték értelmezhető a $[0, T]$-n definiált; R^n-be tartozó értékekkel bíró $x(t)$ függvények $L_2^{(m)}[0, T]$ *Hilbert*-terében, azon kikötés mellett, hogy

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty \quad (|x| \text{ az } x \text{ vektor normája } R^{(m)}\text{-ben});$$

2. a mértéket $\mathfrak{F}_{[0,T]}^{(m)}$-n tekintjük.

Az első esetben a $\xi(t)$ folyamat karakterisztikus funkcionálja (ha a folyamatnak a μ mérték felel meg) az előző ponttal összhangban így értelmezhető;

$$\varphi(z(\cdot)) = M \exp\left\{\int_0^T (\xi(t), z(t))dt\right\} = \int \exp\left\{\int_0^T (x(t), z(t))dt\right\}\mu(dx) \tag{2. 3}$$

(itt $z(t) \in L_2^{(m)}[0, T]$, (x, z) skalárszorzat $R^{(m)}$-ben).

Korlátlanul osztható folyamatoknak a következőkben azokat az $L_2^{(m)}[0, T]$-ben értelmezett folyamatokat hívjuk, melyek karakterisztikus funkcionáljának alakja

$$\begin{aligned} \varphi(z(\cdot)) = \exp\Big\{ & i \int_0^T (a(t), z(t))dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^T (A(t, s)z(t), z(s))dt\,ds + \\ & + \int \Big[\exp\Big\{i \int_0^T (x(t), z(t))dt\Big\} - 1 - i\chi_1(x(\cdot))\int_0^T (x(t), z(t))dt\Big]\pi(dx)\Big\}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

ahol $a(t)\in L_2^{(m)}[0, T]$ $A(t, s)$ $t\in[0, T]$, $s\in[0, T]$ mellett $R^{(m)}$-beli operátor, mely folytonos a változók összességén, továbbá

$$\int_0^T\int_0^T (A(t, s)z(t), z(s))dt\, ds \geqq 0$$

minden $z(\cdot)\in L_2^{(m)}[0, T]$ esetére. $\chi_1(x(\cdot))=1$, ha $\int_0^T |x(t)|^2dt\leqq 1$ és $\chi_1(x(\cdot))=0$ egyébként; végül π $L_2^{(m)}[0, T]$-n értelmezett mérték, melyre

$$\int\int_0^T |x(t)|^2 dt \left[\int_0^T |x(t)|^2 dt+1\right]^{-1}\pi(dx)<\infty.$$

Ha a π mérték zérussal egyenlő, (2. 4) *Gauss*-folyamat karakterisztikus funkcionálját szolgáltatja.

A korlátlan növekményű folyamatok olyan korlátlanul osztható folyamatok, melyeknél $A(s, t)=A(t, s)=A(t)$, ha $t<s$, a π mérték pedig az

$$x_{t_0, x_0}(t) = \begin{cases} 0, & t<t_0 \\ x_0, & t\geqq t_0 \end{cases}$$

függvényekre koncentrálódik; emellett, ha $D_{[t_1, t_2], A}$ azon $x_{t_0, x_0}x(\cdot)$ függvények halmaza, melyekre $t_0\in[t_1, t_2]$, $x_0\in A$, akkor

$$\pi(D_{[t_1, t_2], A}) = \Pi(t_2, A)-\Pi(t_1, A).$$

A $\pi(t, A)$ mérték az (1. 4) képletben szereplő mérték.

Tetszőleges, $[0, T]$-n értelmezett sztochasztikus folyamathoz értelmezhető karakterisztikus funkcionál a

$$(2.5)\qquad \varphi(g) = M\exp\left\{i\int_0^T (\xi(t), dg(t))\right\} = \int\exp\left\{i\int_0^T (x(t), dg(t))\right\}\mu(dx)$$

képlet segítségével, ahol $g(t)$ $[0, T]$-n értelmezett lépcsősfüggvény, melynek értékei $R^{(m)}$-be tartoznak. Egyes sztochasztikus folyamatok esetében kényelmesebb egy második fajta $\varphi_2(g)$ karakterisztikus funkcionált tekinteni:

$$(2.6)\qquad \varphi_2(g) = M\exp\left\{i\int_0^T (g(t), d\xi(t))\right\} = \int\exp\left\{i\int_0^T (g(t), dx(t))\right\}\mu(dx).$$

Itt $g(t)$ ugyancsak egy lépcsősfüggvény. Ebben az esetben $\int_0^T (g(t), dx(t))$ értelmezhető tetszőleges $x(t)$ függvény esetére. A második fajta karakterisztikus funkcionál nagyon egyszerű alakot ölt független növekményű folyamatok esetében; ha a $\xi(t)$

folyamat növekményeinek eloszlását az (1. 4) képlettel definiáljuk, akkor

(2. 7)
$$\varphi_2(g) = \exp\Big\{i\int_0^T (g(t), da(t)) - \frac{1}{2}\int_0^T (g(t), dB(t)g(t)) + \\ + \int_0^T \int \Big[e^{i(g(t),u)} - 1 - \frac{i(g(t), u)}{1+(u, u)}\Big] d_t\Pi(t, du)\Big\}.$$

A második fajta karakterisztikus funkcionál különösen egyszerű alakú lesz a *Wiener*-folyamat esetében:

(2. 8)
$$\varphi_2(g) = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_0^T g(t)^2 dt\Big\}$$

(ebben az esetben $g(t)$ számértékű függvény).

3. §. Függvénytereken értelmezett valószínűségi mértékek abszolút folytonosságával kapcsolatos általános tételek

Ebben a paragrafusban azt vizsgáljuk, mi az összefüggés a mértékek abszolút folytonossága és a mértékeken végrehajtott alapvető műveletek között; utóbbiakon határátmenet, mértékek deriválása, mértékeknek a terek leképezésekor létrejövő leképezése értendő. Emellett vizsgálni fogjuk egy mértéknek egy másikra vonatkoztatott sűrűsége kiszámításának bizonyos módszereit vagy annak eldöntését, hogy valamely adott kifejezés sűrűségfüggvény-e.

3. 1. TÉTEL: *Legyen adva valószínűségi mértékek két sorozata,* $\mu_n^{(1)}$ *és* $\mu_n^{(2)}$ $(n=0, 1, 2,)$ *az X halmaz részhalmazainak ugyanazon* $\mathfrak{B}$ *σ-algebráján s ezek tegyenek eleget a következő feltételeknek:*

a) *valamilyen* $\mathfrak{B}_0$ *algebrán, melynek σ-lezárása egybeesik* $\mathfrak{B}$*-vel,* $\mu_n^{(i)}$ *tart* $\mu_0^{(i)}$-hez $(i=1, 2)$, *azaz* $\lim_{n\to\infty} \mu_n^{(i)}(A)=\mu_0^{(i)}(A)$ *minden* $A\in\mathfrak{B}$*-re,*

b) *a* $\mu_n^{(2)}$ *mértékek abszolút folytonosak a* $\mu_n^{(1)}$ *mértékekre nézve* $(n=1, 2, \ldots)$,

c) *a* $\varrho_n(x)=\frac{d\mu_n^{(2)}}{d\mu_n^{(1)}}(x)$ *függvények egyenletesen integrálhatók* $\mu_n^{(1)}$ *szerint, azaz minden* $\varepsilon>0$*-hoz megadható olyan N, hogy minden n-re*

$$\int \varrho_n(x)\chi_{[N,\infty]}(\varrho_n(x))\,\mu_n^{(1)}(dx) < \varepsilon,$$

$\chi[N, \infty](t)$ *az* $[N, \infty]$ *intervallum indikátora.*

Akkor a $\mu_0^{(2)}$ *mérték abszolút folytonos a* $\mu_0^{(1)}$ *mértékre.*

Bizonyítás. Tetszőleges $A\in\mathfrak{B}_0$-ra

$$\mu_0^{(2)}(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n^{(2)}(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A \varrho_n(x)\mu_n^{(1)}(dx) \leqq$$

$$\leqq N \lim_{n\to\infty} \mu_n^{(1)}(A) + \overline{\lim_{n\to\infty}} \int \varrho_n(x)\chi_{[N,\infty]}(\varrho_n(x))\mu_n^{(1)}(dx) \leqq N\mu_0^{(1)}(A)+\varepsilon,$$

ha $\varepsilon>0$ és N-t úgy választottuk meg, ahogy azt a c) feltevésben elmondtuk. Azon A halmazok osztálya, melyekre

$$\mu_0^{(2)}(A) \leqq N\mu_0^{(1)}(A)+\varepsilon, \tag{3.1}$$

monoton osztály lesz, mely tartalmazza a $\mathfrak{B}_0$ algebrát; következésképp a (3. 1) összefüggés teljesül minden $\mathfrak{B}$-be tartozó A-ra. (3. 1)-ből következik, hogy $\mu_0^{(2)}(A)=0$, valahányszor $\mu_0^{(1)}(A)=0$, minthogy $\varepsilon>0$ tetszőlegesen kicsinek vehető. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

3. 1. Megjegyzés. A 3. 1. tétel c) feltétele teljesüléséhez elegendő a következő feltételek valamelyikének teljesülése:

I. Létezik $\alpha>1$, melyre

$$\sup_n \int [\varrho_n(x)]^\alpha \mu_n^{(1)}(dx)<\infty.$$

II. Létezik oly $\varphi(t)$ pozitív, folytonos függvény, melyre

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\varphi(t)}=0 \quad \text{és} \quad \sup_n \int \varphi(\varrho_n(x))\mu_n^{(1)}(dx)<\infty.$$

III. A $\mu_n^{(1)}$-ek szintén abszolút folytonosak $\mu_n^{(2)}$-re és minden $\varepsilon>0$-hoz megadható olyan $C>0$, melyre

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mu_n^{(2)}\{x;\ |\ln \varrho_n(x)|>C\}<\varepsilon. \tag{3.2}$$

Valóban, I. II. speciális esete, ha $\varphi(t)=t^\alpha$-t vesszük, II. pedig a

$$\int \varrho_n(x)\chi_{[N,\infty]}(\varrho_n(x))\mu_n^{(1)}(dx) \leqq \sup_{t\geqq N}\frac{t}{\varphi(t)}\int \varphi(\varrho_n(x))\mu_n^{(1)}(dx)$$

egyenlőtlenségből következik. III. bizonyításához megjegyezzük, hogy

$$\int \varrho_n(x)\chi_{[N,\infty)}(\varrho_n(x))\mu_n^{(1)}(dx) = \mu_n^{(2)}\{x;\ \varrho_n(x)>N\} \leqq \mu_n^{(2)}\{x;\ |\ln \varrho_n(x)|>\ln N\}.$$

Minden elegendően nagy n-re ezt a kifejezést tetszőleges kicsivé tehetjük (3. 2) folytán, ha N-et elég nagynak választjuk. Emellett minden $n>0$-ra

$$\lim_{N\to\infty}\mu_n^{(2)}\{x;\ |\ln \varrho_n(x)|>\ln N\}=0,$$

minthogy $\varrho_n(x)$ majdnem mindenütt pozitív a $\mu_n^{(2)}$ mérték szerint, mivel $\mu_n^{(1)}$ ugyancsak abszolút folytonos $\mu_n^{(2)}$-re. Ebből is következik a tétel c) feltétele.

Most megfogalmazzuk a tétel sztochasztikus folyamatokra szóló analogonját, mely a 3. 1. tételből és a 3. 1. megjegyzésből folyik.

3. 2. TÉTEL: *Legyen adva két sztochasztikus folyamat-sorozat, $\xi_n^{(1)}(t)$ és $\xi_n^{(2)}(t)$ $(n=0,1,\ldots)$ ugyanazon $\{\Omega, \mathfrak{S}, P\}$ valószínűségi téren, $t\in[0,T]$ értelmezési tartománnyal, $\mu_n^{(1)}$ és $\mu_n^{(2)}$ pedig legyenek a nekik megfelelő mértékek $\{F, \mathfrak{F}\}$-en. Tegyük fel, hogy $\xi_n^{(i)}(t)\to\xi_0^{(i)}(t)$ valószínűségben — minden $t\in[0,T]$-re, továbbá, hogy a $\mu_n^{(2)}$ mértékek abszolút folytonosak a $\mu_n^{(1)}$ mértékre $(n=1,2,\ldots)$, a $\varrho_n(x)=\dfrac{d\mu_n^{(2)}}{d\mu_n^{(1)}}$*

mennyiségekre teljesül a 3. 1. *tétel* c) *feltétele és a* $\varrho_n(\xi_n^{(1)}(\cdot))$ *sztochasztikus változósorozat valószínűségben konvergál valamilyen* ϱ *sztochasztikus változóhoz. Akkor a* $\mu_0^{(2)}$ *mérték abszolút folytonos a* $\mu_0^{(1)}$*-re és*

$$\frac{d\mu_0^{(2)}}{d\mu_0^{(1)}}(\xi_0^{(1)}(\cdot)) = \varrho.$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{B}_0$ az F-be tartozó halmazok azon minimális algebráját, mely tartalmazza mindazon $C_t(G)$ hengerhalmazokat, melyekre $P\{\xi_0^{(i)}(t)\in\Gamma_G\}=0$ (Γ_G a G halmaz határa). Akkor $\mu_n^{(i)}(A)\to\mu_0^{(i)}(A)$ minden $\mathfrak{B}_0$-ba tartozó A-ra. Minthogy minden $\mathfrak{B}_0$-beli A-ra $\chi_A(\xi_n^{(i)}(\cdot)\to\chi_A(\xi_0^{(i)}(\cdot))$ (valószínűségben), (χ_A A indikátorfüggvénye), ezért

$$\frac{d\mu_n^{(2)}}{d\mu_n^{(1)}}(\xi_n^{(1)}(\cdot))\chi_A(\xi_n^{(1)}(\cdot)) \to \varrho\chi_A(\xi_0^{(1)}(\cdot))$$

valószínűségben. Az egyenletes integrálhatóságból következik, hogy lehetséges a határátmenetet elvégezni a várható érték jele alatt:

$$\mu_0^{(2)}(A) = \lim_{n\to\infty} M\chi_A(\xi_n^{(2)}(\cdot)) = \lim_{n\to\infty} M\chi_A(\xi_n^{(1)}(\cdot))\frac{d\mu_n^{(2)}}{d\mu_n^{(1)}}(\xi_n^{(1)}(\cdot)) =$$

$$= M\lim_{n\to\infty}\chi_A(\xi_n^{(1)}(\cdot))\frac{d\mu_n^{(2)}}{d\mu_n^{(1)}}(\xi_n^{(1)}(\cdot)) = M\chi_A(\xi_0^{(1)}(\cdot))\varrho = \int_A \varrho(x)\mu_0^{(1)}(dx).$$

Ez az összefüggés nyilvánvalóan kiterjeszthető az egész $\mathfrak{F}$ σ-algebrára.

3. 2. Megjegyzés. Ha a $\frac{d\mu_n^{(1)}}{d\mu_n^{(2)}}(\mu_n^{(2)}(\cdot))$ mennyiségek valószínűségben konvergálnak valamilyen $\bar{\varrho}$ határértékhez, akkor a 3. 1. tétel c) feltétele automatikusan teljesül.

Ez a III. 3. 1. megjegyzésből következik.

3. 3. Megjegyzés. Ha nem követeljük meg a 3. 1. tétel c) feltételének teljesülését, hanem azt tesszük fel, hogy $M\varrho=1$, akkor a 3. 2. tétel állítása igaz marad.

Valóban, FATOU tételéből következik, hogy

$$M\varrho\chi_A(\xi_0^{(1)}(\cdot)) \leqq \lim_{n\to\infty} M\frac{d\mu_n^{(2)}}{d\mu_n^{(1)}}(\xi_1^{(n)}(\cdot))\chi_A(\xi_1^{(n)}(\cdot)) = \lim_{n\to\infty}\mu_n^{(2)}(A) = \mu_0^{(2)}(A)$$

minden $\mathfrak{B}$-be tartozó A-ra. Emellett azon A halmazok összessége, melyekre teljesül az

$$M\varrho\chi_A(\xi_0^{(1)}(\cdot)) \leqq \mu_0^{(2)}(A), \tag{3. 3}$$

összefüggés, monoton osztályt képez. Ezért (3. 3) teljesül minden, $\mathfrak{F}$-be tartozó A-ra. Ha valamilyen A-ra $M\varrho\chi_A(\xi_0^{(1)}(\cdot))<\mu_0^{(2)}(A)$, akkor

$$M\varrho = M\varrho\chi_A(\xi_0^{(1)}(\cdot))+M\varrho\chi_{F\setminus A}(\xi_0^{(1)}(\cdot)) < \mu_0^{(2)}(A)+\mu_0^{(2)}(F\setminus A) = 1,$$

azaz $M\varrho<1$, ez pedig ellene mond feltevésünknek. Más szóval $M\varrho\chi_A(\xi_0^{(1)}(\cdot))=$ $=\mu_0^{(2)}(A)$ vagy $\int_A \varrho(x)\mu_0^{(1)}(dx)=\mu_0^{(2)}(A)$ minden $\mathfrak{F}$-be tartozó A-ra. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Legyen X és Y két halmaz, melyeken megadtuk a $\mathfrak{B}_X$ és $\mathfrak{B}_Y$ σ-algebrákat. Legyen $Z=X\times Y$ az X és Y halmazok szorzata, $\mathfrak{B}_Z=\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y$ pedig a $\mathfrak{B}_X$ és $\mathfrak{B}_Y$ σ-algebrák szorzata (l. [1], VII. fej.; ugyanott van definiálva mértékek szorzata, amit a 3. 3. tételben használtunk fel).

3. 3. TÉTEL: *$\mathfrak{B}_X$-en legyenek adva a μ_1 és μ_2 mértékek, $\mathfrak{B}_Y$-on pedig a ν_1 és ν_2 mértékek. Jelöljük π_i-vel a $\mu_i\times\nu_i$ mértékszorzatot, mely $\mathfrak{B}_Z$-n van értelmezve ($i=1, 2$). Ha μ_2 abszolút folytonos μ_1-re, ν_2 pedig abszolút folytonos ν_1-re, akkor a π_2 mérték is abszolút folytonos lesz a π_1 mértékre és*

$$\frac{d\pi_2}{d\pi_1}(x, y)=\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x)\frac{d\nu_2}{d\nu_1}(y)$$

(x az X halmaz egy pontja, y az Y halmaz egy pontja, (x, y) pedig a Z halmazé).

A tétel állítása a mértékek szorzata definíciójából következik (l. [1], 143. o., 2. tétel). Ezt a tételt felhasználhatjuk oly mértékek abszolút folytonosságának vizsgálatakor, melyek független komponensű, többdimenziós sztochasztikus folyamatoknak felelnek meg — minthogy az ezen folyamatoknak megfelelő mértékek az egyes komponenseknek megfelelő mértékek szorzataiként állnak elő.

Tekintsük most a mértékek abszolút folytonosságát leképezések esetén. Legyen ismét X és Y két tetszőleges halmaz, melyek részhalmazainak σ-algebrái $\mathfrak{B}_X$ és $\mathfrak{B}_Y$. X-nek Y-ra való φ leképezését mérhetőnek fogjuk nevezni, ha minden $\mathfrak{B}_Y$ $\varphi^{-1}(B)$-be tartozó B halmaz teljes inverz képe $\mathfrak{B}_X$-be tartozik. Legyen μ és ν két mérték $\mathfrak{B}_X$-en. Jelöljünk μ^* és ν^*-gal két mértéket $\mathfrak{B}_Y$-on, melyeket a $\mu^*(B)=\mu(\varphi^{-1}(B))$, $\nu^*(B)=$ $=\nu(\varphi^{-1}(B))$ összefüggések definiálnak, ahol $B\in\mathfrak{B}_Y$. Nyilvánvaló: ha ν abszolút folytonos μ-re, akkor a ν^* mérték szintén abszolút folytonos lesz a μ^*-ra. Most tegyük fel, hogy adva van az X tér Y-ra való mérhető leképezéseinek egy φ_n sorozata és hogy az Y tér topologikus. Továbbá tegyük fel, hogy a φ_n sorozat olyan, hogy $\varphi_n(x)$ a μ mérték szerint tart valamilyen $\varphi_0(x)$ határértékhez. Ez a φ_0 leképezés csupán „μ-majdnem minden" x-re lesz értelmezve, mindazonáltal az előbbiek szerint bevezethető a $\mu_0^*(B)=\mu(\varphi^{-1}(B))$ mérték (az utóbbi képletben vehető tetszőleges $\varphi(x)$ mérhető variáns, μ_0^* akkor nem változik). Ha ν (ugyanúgy, mint μ, ez mérték $\mathfrak{B}_X$-en) abszolút folytonos μ-re vonatkozólag, akkor $\varphi_n(x)\to\varphi_0(x_1)$ a ν mérték szerint. Ezért értelmezhető $\nu_0^*(B)=\nu(\varphi_0^{-1}(B))$ is. Mint korábban is, ν_0^* abszolút folytonos lesz a μ_0^* mértékre.

Fogalmazzuk át ezeket az eredményeket sztochasztikus folyamatok esetére.

3. 4. TÉTEL: *Legyen $\xi_1(t)$ és $\xi_2(t)$ két sztochasztikus folyamat, μ_1 és μ_2 pedig az ezen folyamatoknak megfelelő mértékek; itt μ_2 abszolút folytonos μ_1-re. Ha φ_n az $(F, \mathfrak{F})$ tér $(F_1, \mathfrak{F}_1)$ térre való mérhető leképezéseinek egy sorozata (ahol F_1 valamilyen más függvénytér, $\mathfrak{F}$ F_1 részhalmazainak minimális σ-algebrája, mely tartalmazza az összes hengerhalmazokat) $\xi_1^{(n)}(\cdot)=\varphi_n(\xi_1(\cdot))$, $\xi_2^{(n)}(\cdot)=\varphi_n(\xi_2(\cdot))$ és $\xi_1^{(n)}(t)$ az értelmezési tartomány minden t értékére valószínűségben konvergál valamilyen $\eta_1(t)$ folyamathoz, akkor létezik — valószínűségben való konvergencia mellett — egy*

$\eta_2(t)=\lim_{n\to\infty}\xi_2^{(n)}(t)$ *határérték és a* ν_2 *mérték, mely megfelel az* $\eta_2(t)$ *folyamatnak, abszolút folytonos lesz az* $\eta_1(t)$ *folyamatnak megfelelő* ν_1 *mértékre. Ekkor fennáll a következő összefüggés:*

$$\frac{d\nu_2}{d\nu_1}(\eta_1(\cdot)) = M\left(\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot))|\eta_1(\cdot)\right). \tag{3.4}$$

((3. 4)-ben jobb oldalt feltételes várható érték áll, rögzített $\eta_1(t)$ mellett, minden értelmezési tartománybeli t-re.) A *bizonyítás* a (3. 4) képlet igazolásából áll. E képlet ekvivalens a következő összefüggéssel: minden $\mathfrak{F}$-be tartozó B hengerhalmazra fennállnak a következő összefüggések:

$$M\chi_B(\eta_1(\cdot))M\left(\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot))|\eta_1(\cdot)\right) = \nu_2(B).$$

A tétel feltételeiből következik, hogy létezik olyan φ_0 leképezés, melyre $\varphi_0(\xi_i(\cdot))= =\eta_i(\cdot)$. Ezért

$$M\chi_B(\eta_1(\cdot))M\left(\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot))|\eta_1(\cdot)\right) = M\chi_B(\varphi_0(\xi_1(\cdot)))\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)) =$$

$$= M\chi_{\varphi_0^{-1}(B)}(\xi_1(\cdot))\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)) = \mu_2(\varphi_0^{-1}(B)) = \nu_2(B)$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

3. 4. Megjegyzés. Ha $\eta_i(t)=\varphi(\xi_i(\cdot))$ és az φ leképezés kölcsönösen egyértelműek, akkor (3. 4)-ben a feltételes várható érték egybeesik magával a változóval, azaz

$$\frac{d\nu_2}{d\nu_1}(\eta_1(\cdot)) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)).$$

Egy mértéknek egy másikra vonatkoztatott sűrűsége kiszámításakor felhasználható a következő módszer. Legyenek $\Lambda_n=\{t_1^{(n)},\ldots,t_n^{(n)}\}$ halmazok a folyamat értelmezési tartományából; legyen $\Lambda_n\subset\Lambda_{n+1}$. Jelölje $\mathfrak{F}_n$ a Λ_n felett értelmezett hengerhalmazok σ-algebráját, $\mu_i^{(n)}$ pedig azt a μ_i mértéket, mely megfelel az $\mathfrak{F}_n$-en értelmezett $\xi_i(t)$ folyamatnak. Tegyük fel továbbá, hogy az $\bigcup_n \mathfrak{F}_n$ σ-lezárása μ_1 mérték szerinti kiegészítése tartalmazza $\mathfrak{F}$-et és emellett $\mu_2^{(n)}$ abszolút folytonos $\mu_1^{(n)}$-re, végül $\varrho_n(x)=\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x)$. Ekkor igaz a következő állítás.

3. 1. Lemma: *A* $\varrho_n(\xi_1(\cdot))$ *mennyiségek martingalt*[1] *képeznek és* 1 *valószínűséggel létezik a* $\lim_{n\to\infty}\varrho_n(\xi_1(\cdot))=\varrho$ *határérték. Ha* μ_2 *abszolút folytonos a* μ_1 *mértékre, akkor* $\varrho=\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot))$; *ha* $M\varrho=1$, *akkor* μ_2 *abszolút folytonos a* μ_1*-re.*

[1] A martingal definícióját lásd a [30] könyvben a 88. oldalon.

Bizonyítás. Az

$$M\varrho_{n+1}(\xi_1(\cdot))\varphi(\xi_1(t_1^{(n)}), \ldots, \xi_1(t_n^{(n)})) =$$
$$= M\varphi(\xi_1(t_1^{(n)}), \ldots, \xi_1(t_n^{(n)}))M[\varrho_{n+1}(\xi_1(\cdot))|\mathfrak{F}_n] =$$
$$= M\varphi(\xi_2(t_1^{(n)}), \ldots, \xi_2(t_n^{(n)})) = M\varrho_n(\xi_1(\cdot))\varphi(\xi_1(t_1^{(n)}), \ldots, \xi_1(t_n^{(n)}))$$

összefüggésből, mely minden korlátos, mérhető φ-re igaz, következik, hogy

$$M(\varrho_{n+1}(\xi_1(\cdot))|\mathfrak{F}_n) = \varrho_n(\xi_1(\cdot)),$$

vagyis hogy $\varrho_n(\xi_1(\cdot))$ martingal. Pontosan ugyanígy mutatható meg, hogy

$$\varrho_n(\xi_1(\cdot)) = M\left\{\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot))|\mathfrak{F}_n\right\} \tag{3. 5}$$

feltéve, hogy μ_2 abszolút folytonos μ_1-re vonatkozólag. A $\mathfrak{F}_n$-re tett feltételek következtében (3. 5)-ből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho_n(\xi_1(\cdot)) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot))$. Az, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho_n(\xi_1(\cdot))$ határérték 1 valószínűséggel létezik, a $\varrho_n(\xi_1(\cdot))\geqq 0$, $M\varrho_n(\xi_1(\cdot))=1$ összefüggésekből következik, valamint a martingalokra fennálló határérték-tételből (4. 1. tétel J. Doob [30] könyve 287. oldalán). Továbbá a *Fatou*-lemma folytán bármely korlátos, nemnegatív f funkcionálra

$$Mf(\xi_2(\cdot)) = \lim_{n\to\infty} MM\{f(\xi_2(\cdot))|\mathfrak{F}_n\} = \lim_{n\to\infty} MM\{f(\xi_1(\cdot))|\mathfrak{F}_n\}\varrho_n(\xi_1(\cdot)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} Mf(\xi_1(\cdot))\varrho_n(\xi_1(\cdot)) \geqq Mf(\xi_1(\cdot))\varrho.$$

Ha $k-f \geqq 0$, analóg módon kapjuk, hogy

$$M(k-f(\xi_2(\cdot)) \geqq M(k-f(\xi_1(\cdot)))\varrho = kM\varrho - Mf(\xi_1(\cdot))\varrho.$$

Így tehát: ha $M\varrho=1$, akkor $Mf(\xi_2(\cdot))=Mf(\xi_1(\cdot))\varrho$ minden korlátos nemnegatív funkcionálra, vagyis $\varrho = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot))$. Ezzel a lemmát bizonyítottuk.

Néha előnyösen felhasználható a következő lemma.

3. 2. Lemma. *Tegyük fel, hogy a μ_1 és μ_2 mértékek az F függvénytéren karakterisztikus funkcionáljaikkal, a*

$$\varphi_K(l) = \int e^{il(x)}\mu_K(dx) \quad (k=1, 2)$$

mennyiségekkel vannak értelmezve, azon $\mathfrak{F}$ minimális σ-algebrán, melyre vonatkozólag az F felett értelmezett összes lineáris funkcionálok mérhetők. Ha az $\mathfrak{F}$-mérhető $\varrho(x)$ funkcionál eleget tesz a

$$\varphi_2(l) = \int e^{il(x)}\varrho(x)\mu_1(dx)$$

összefüggésnek, akkor

$$\varrho(x) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x).$$

A lemma *bizonyítása* abból következik, hogy az összes $\mathfrak{F}$-mérhető függvények approximálhatók az $e^{il(x)}$ függvények véges lineáris kombinációival (különböző l-ek mellett).

4. §. Hilbert-téren értelmezett Gauss-mértékek abszolút folytonossága

A $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-téren egy μ *Gauss-mérték* megadható a

$$\varphi_\mu(z) = \int e^{i(z,x)}\mu(dx) = \exp\left\{i(z, a) - \frac{1}{2}(Az, z)\right\} \tag{4.1}$$

karakterisztikus funkcionállal, ahol a valamilyen $\mathfrak{H}$-beli vektor, A pedig szimmetrikus, nemnegatív lineáris operátor $\mathfrak{H}$-n, melynek nyoma véges; a és A a μ mértékkel a következő összefüggésben állanak:

$$(a, z) = \int (z, x)\mu(dx) \tag{4.2}$$

$$(a, z)^2 + (Az, z) = \int (z, x)^2\mu(dx) \qquad z \in \mathfrak{H}. \tag{4.3}$$

Az A operátort *korreláció*-operátornak nevezzük, az a vektort pedig *várható értéknek.*

Ebben a paragrafusban két *Gauss*-mérték, μ_1 és μ_2 abszolút folytonossága feltételeit fogjuk tanulmányozni; várható értékeik legyenek rendre a_1 és a_2, korreláció-operátoraik pedig A_1 és A_2. Nyilvánvaló, hogy egyik várható értéket nullának vehetjük, minthogy eltolási transzformáció *Gauss*-mértéket *Gauss*-mértékbe visz át, miközben a korreláció operátorok ugyanazok maradnak, a várható értékek pedig eltolást szenvednek. Feltesszük, hogy $a_1 = 0$, tanulmányozni fogjuk, mi a feltétele, hogy μ_k abszolút folytonos legyen μ_1-re.

4. 1. Tekintsük először azt az esetet, amidőn $A_1 = A_2 = A$. Legyenek $e_1, e_2, \ldots$ az A operátor sajátvektorai, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, (\lambda_k > 0)$ pedig a nekik megfelelő sajátértékek. Legyen $\alpha_k = (a_2, e_k)$. Fennáll a

4. 1. TÉTEL: *Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy μ_2 abszolút folytonos legyen μ_1-re az, hogy az a_2 vektor felbontható legyen az e_k vektorok szerint, és hogy teljesüljön a*

$$\sum \frac{1}{\lambda_k}\alpha_k^2 < \infty \tag{4.4}$$

egyenlőtlenség.

Ha a tétel feltételei teljesülnek, akkor

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\lambda_k}(x, e_k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^2}{\lambda_k}\right\}. \tag{4.5}$$

Bizonyítás. Szükségesség. Legyen b egy $\mathfrak{H}$-beli vektor, mely ortogonális az összes e_k-kra. Akkor $(Ab, b) = 0$ és így

$$(Ab, b) = \int (b; x)^2\mu_1(dx) = 0$$

Ha μ_2 abszolút folytonos μ_1-re fenn kell állnia a következő egyenlőségnek:

$$0 = \int (b, x)^2 \mu_2(dx) = (b, a_2)^2 + (Ab, b) = (b, a_2)^2.$$

Így tehát b ortogonális az e_2 vektorok lineáris burkolója ortogonális kiegészítésébe tartozó összes b vektorra — vagyis b felbontható az e_k vektorok szerint. Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k} = \infty$. Legyen

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} e_k, \qquad \beta_k^{(n)} = \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j^2}{\lambda_j} \right)^{-1}.$$

Akkor

$$\int e^{i(x, tb_n)} \mu_1(dx) = \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} (Ab_n, b_n) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\beta_k^{(n)})^2 \right\} = \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k} \right)^{-1} \right\} \to 1,$$

azaz (x, b_n) tart 0-hoz a μ_1 mérték szerint. Másrészt

$$\int e^{i(x, tb_n)} \mu_2(dx) = \exp\left\{ it(a_2, b_n) - \frac{1}{2} t^2 (Ab_n, b_n) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ it \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k^{(n)} - \frac{1}{2} t^2 (Ab_n, b_n) \right\} = \exp\left\{ it - \frac{1}{2} t^2 (Ab_n, b_n) \right\} \to \exp\{it\}$$

azaz (x, b_n) a μ_2 mérték szerint tart 1-hez. Ezért a 3. 4. Tétel folytán a μ_2 és μ_1 mértékek szingulárisak. Ezzel a tétel szükségességét bizonyítottuk.

Az elégségesség és a (4. 5) képlet bizonyítására megmutatjuk, hogy

$$\int \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} (x, e_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k} + i(x, z) \right\} \mu_1(dx) = \exp\left\{ i(a_2, z) - \frac{1}{2} (Az, z) \right\}. \tag{4. 6}$$

Minthogy tetszőleges valós γ_k-k mellett

$$\int \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \gamma_k (x, e_k) \right\} \mu_1(dx) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \gamma_k^2 \right\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \lambda_k \gamma_k^2 \right\} = \prod_{k=1}^{n} \int \exp\{i\gamma_k (x, e_k)\} \mu_1(dx),$$

könnyen igazolható, hogy mérhető függvények bármely $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ összességére

$$\int \prod_{K=1}^{n} \varphi((x, e_k)) \mu_1(dx) = \prod_{k=1}^{n} \int \varphi(x, e_k) \mu_1(dx)$$

feltéve, hogy a jobb oldali integrálok léteznek. Most vegyük észre, hogy valós t esetén

$$\int \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} t\left[\frac{\alpha_k}{\lambda_k}+i(z, e_k)\right](x, e_k)\right\}\mu_1(dx) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\int \exp\left\{t\left[\frac{\alpha_k}{\lambda_k}+i(z, e_k)\right](x, e_k)\right\}\mu_1(dx) = \prod_{k=1}^{n}\exp\left\{\frac{\lambda_k}{2}t^2\left[\frac{\alpha_k}{\lambda_k}+i(z, e_k)\right]^2\right\}$$

minthogy minden komplex Θ-ra

$$\int \exp\{\Theta(x, e_k)\}\mu_1(dx) = \int \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Theta^m}{m!}(x, e_k)^m\mu_1(dx) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Theta^m}{m!}\int (x, e_k)^m\mu_1(dx) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Theta^m}{m!}\frac{1}{i^m}\frac{d^m}{dt^m}\left[\int e^{it(x,e_k)}\mu_1(dx)\right]_{t=0} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Theta^m}{m!}\frac{1}{i^m}\frac{d^m}{dt^m}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_k t^2\right\}\right]_{t=0} = \exp\left\{\frac{\lambda_k}{2}\Theta^2\right\}.$$

Mivel

$$\int \left|\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha_k}{\lambda_k}(x, e_k)+i(z, e_k)(x, e_k)\right]\right\}\right|^2\mu_1(dx) =$$

$$= \int \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{2\alpha_k}{\lambda_k}(x, e_k)\right\}\mu_1(dx) \leqq \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\alpha_k^2}{\lambda_k}\right\},$$

a határátmenet az integráljel alatt hajtható végre.

$$\int \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\lambda_k}(x, e_k)+i(x, z)\right\}\mu_1(dx) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha_k}{\lambda_k}+i(z, e_k)\right](x, e_k)\right\}\mu_1(dx) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\lambda_k\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}+i(z, e_k)\right)^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^2}{\lambda_k}+i\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(z, e_k)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(z, e_k)^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{i(a_2, z)-\frac{1}{2}(Az, z)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^2}{\lambda_k}\right\}.$$

Az utóbbi képletből következik (4. 6). Ezzel a tételt bizonyítottuk.

4. 1. Következmény. *Ha Gauss-mértékek csupán várható értékeikben különböznek egymástól, akkor vagy ekvivalensek, vagy ortogonálisak.*

Valóban, könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ha μ_2 abszolút folytonos μ_1-re nézve, akkor μ_2 is, melynek várható értéke a_2, abszolút folytonos lesz μ_1-re nézve; a_2-vel való eltoláskor μ_2' átmegy μ_1-be, μ_1 pedig μ_2-be.

4. 2. Tekintsünk most olyan *Gauss*-mértékeket, melyek várható értékei nullák, korreláció-operátoraik azonban különbözők.

4. 2. TÉTEL: *Ha μ_2 abszolút folytonos μ_1-re nézve, akkor létezik olyan nemnegatív állandó, melyre*

$$c^{-1} \leqq \frac{(A_2 z, z)}{(A_1 z, z)} \leqq c. \tag{4.7}$$

Bizonyítás. Ha a tétel feltételei nem teljesülnek, megadható a z_n vektorok olyan sorozata, hogy $(A_i z_n, z_n)=1$, $(A_j z_n, z_n)\to 0$ $(i, j=1, 2, i\neq j)$. Akkor $(z_n, x)\to 0$ a μ_j mérték szerint, azaz $\mu_j\{x;|(x, z_n)|<\varepsilon\}\to 1$ minden $\varepsilon>0$-ra. Másrészt

$$\mu_i\{x;\ |(x, z_n)|<\varepsilon\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{|u|<\varepsilon} e^{-\frac{u^2}{2}}du \leqq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}.$$

Minthogy $\varepsilon>0$ tetszőleges, következik, hogy μ_i és μ_j kölcsönösen szingulárisak.
A 4. 2. Tétel egyszerű szükséges feltételt szolgáltat *Gauss*-mértékek abszolút folytonosságára; ez a feltétel azonban nem elégséges.

4. 1. Megjegyzés. Minthogy az A_i operátorok nemnegatívak és szimmetrikusak, léteznek olyan egyértelműen meghatározott $A_i^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ nemnegatív operátorok, melyekre $A_i^{\left(\frac{1}{2}\right)} A_i^{\left(\frac{1}{2}\right)} = A_i$.
A 4. 2. tételből következik, hogy létezik olyan korlátos és korlátos inverzű C operátor, melyre

$$A_1^{\left(\frac{1}{2}\right)} = C A_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Jelölje $e_1, e_2, \ldots$ az A_1 operátor sajátvektorainak ortonormált sorozatát, λ_1, $\lambda_2, \ldots$ pedig a nekik megfelelő sajátértékeket. Legyen $a_{ik}^{(2)}=(A_2 e_i, e_k)$. Csak nemzérus sajátértékeket és a nekik megfelelő sajátvektorokat fogunk tekintetbe venni. Akkor tetszőleges n-re az $\|a_{ik}^{(2)}\|_n$ matrix $(i, k=1, \ldots, n)$ nemelfajult (ez a 4. 2. tételből következik). Legyen $\mu_1^{(n)}$ és $\mu_2^{(n)}$ $\mathfrak{H}$-beli mérték, melyek karakterisztikus funkcionáljai

$$\varphi_i^{(n)}(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(A_i^{(n)} z, z)\right\},$$

ahol

$$(A_1^{(n)} z, z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (z, e_k)^2, \qquad (A_2^{(n)} z, z) = \sum_{\substack{k=1\\ j=1}}^{n} a_{jk}^{(2)}(z, e_j)(z, e_k).$$

Legyen $\mathfrak{H}_n$ az az altér, melyet $e_1, e_2, \ldots, e_n$ feszít ki, $m_1^{(n)}$ és $m_2^{(n)}$ pedig $R^{(n)}$-beli mértékek, amelyeket a $\mu_1^{(n)}$, illetve $\mu_2^{(n)}$ mértékek $R^{(n)}$-re való valóságos $\mathfrak{H}_n$ leképezésekor kapunk. Amint az a valószínűségelméletből ismeretes, az $m_i^{(n)}$ mértékek abszolút folytonosak lesznek az $R^{(n)}$-beli *Lebesgue*-mértékre vonatkozólag, feltéve, hogy az $(A_i^{(n)} z, z)$ formák nemelfajultak és e mértékeknek a *Lebesgue*-mértékre vonatkozó sűrűségeit a következő képletek adják meg:

$$p_i(u) = C_n^{(i)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(B_i^{(n)} u, u)\right\}, \qquad C_n^{(i)} = (2\pi^{-\frac{n}{2}}[\det B_i^{(n)}]^{\frac{1}{2}}, \quad u \in R^{(n)},$$

ahol $B_i^{(n)}$ az $\|a_{k,j}^{(i)}\|$ matrix inverz matrixa, és $a_{k,j}^{(1)}=\delta_{k,j}\lambda_k$. Következésképp $\mu_1^{(n)}$ és $\mu_2^{(n)}$ kölcsönösen abszolút folytonosak és

$$\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x) = \left(\det(B_2^{(n)}[B_1^{(n)}]^{-1})\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}[b_{k,j}^{(n,1)}-b_{k,j}^{(n,2)}](x,e_k)(x,e_j)\right\},$$

ahol $b_{k,j}^{(n,i)}$ a $B_i^{(n)}$ matrix elemei. A 3. 1. lemmából következik, hogy ha μ_2 abszolút folytonos μ_1-re, akkor $\mu_1 \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x)$-nek létezik határértéke, ha $n\to\infty$, és ez azonos $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$-szel, vagyis ez a limesz véges és nem majdnem mindenütt zérus. Megmutatjuk, hogy a (4. 8) kifejezés μ_1 szerinti határértékének létezése elégséges ahhoz, hogy μ_2 μ_1-re nézve abszolút folytonos legyen; nyilván ekkor azt is bizonyítjuk, hogy ez a limesz μ_2-nek μ_1-re vonatkozó sűrűsége lesz. E célból bebizonyítjuk a következő lemmát.

4. 1. LEMMA: *Ha a $\mathfrak{H}$-t $\mathfrak{H}_n$-re leképező V_n szimmetrikus korlátos operátorok sorozata és a d_n állandók sorozata olyan, hogy* exp. $\{(V_n x, x)+d_n\}$*-nek a μ_2 mérték szerinti véges, nem azonosan zérus határértéke van, akkor létezik a μ_1 mérték szerinti határértéke a $(V_n x, x)+d_n$ kifejezésnek.*

Bizonyítás. Vezessük vissza a $(V_n x, x)$ formát az $(A_1^{-1}x, x)$ skaláris szorzat szerinti kanonikus alakra. (A_i-nek létezik $\mathfrak{H}_n$-ben inverze). Ekkor

$$(V_n x, x) = \Sigma c_k^{(n)}(A_1^{-1}e_{nk}, x)^2 \quad (A_1^{-1}e_{nk}, e_{nj}) = \delta_{k,j}$$

A $\xi_{nk}=(A_1^{-1}e_{nk}, x)$ sztochasztikus változók együttes eloszlása a $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{B}, P\}$ valószínűségi téren normális és

$$M\xi_{nk}\xi_{nj} = \int (A_1^{-1}e_{nk}, x)(A_1^{-1}e_{nj}, x)\mu_1(dx) = (A_1A_1^{-1}e_{nk}, A^{-1}e_{nj}) = \delta_{kj},$$

következésképp a ξ_{nk} változók függetlenek és $M\xi_{nk}=0$ $D\xi_{nk}=1$. Ezért

$$(V_n x, x)+d_n = \sum_k c_k^{(n)}(\xi_{nk}^2-1)+d_n+\int (V_n x, x)\mu_1(dx).$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy a $\sum_k c_k^{(n)}(\Sigma[c_k^{(n)}]^2)^{-\frac{1}{2}}(\xi_{nk}^2-1)$ változó határeloszlása csak olyan eloszlás lehet, melynek van sűrűsége; mert ha $\sup_k |c_k^{(n)}|(\sum_j [c_j^{(n)}]^2)^{-\frac{1}{2}}\to$ $\to 0$, akkor ez az eloszlás normális; ellenkező esetben mindig lesz komponens, mely $\delta(\xi^2-1)$-nek felel meg, ahol δ eléggé kicsi, ξ pedig normális eloszlású. Ezért minden α-ra

$$\mu_1\left\{x; \left|\sum_k c_k^{(n)}(\xi_{nk}^2-1)+d_n+\int (V_n x, x)\mu_1(dx)\right| \leqq \alpha\right\} \to 0,$$

ha csak $\sum_k [c_k^{(n)}]^2\to\infty$, függetlenül $d_n+\int(V_n(x, x)\mu_1(dx)$ viselkedésétől. Minthogy $(V_n x, x)+d_n$ pozitív mértékű halmazon véges limeszű, $\varliminf_{n\to\infty}\sum_k (c_k^{(n)})^2<\infty$. De ekkor a $\sum_k c_k^{(n)}(\xi_{nk}^2-1)$ mennyiség korlátos a μ_1 mérték szerint, ekkor pedig korlátos lesz

$d_n+\int (V_n x, x)\mu_1(dx)$ is. Ezért az $\exp\{(V_n x, x)+d_n\}$ határérték majdnem mindenütt zérustól különbözik és ekkor

$$\lim_{n\to\infty}[(V_n x, x)+d_n] = \ln \lim_{n\to\infty} \exp\{(V_n x, x)+d_n\}.$$

4. 2. Következmény. Ha μ_2 abszolút folytonos a μ_1 mértékre, akkor $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x)>$ >0 majdnem mindenütt, a μ_1 mérték szerint és így μ_1 abszolút folytonos a μ_2 mértékre.

4. 2. Megjegyzés.

$$(4.9)\qquad \sum_k (c_k^{(n)})^2 = \frac{1}{2} M[c_k^{(n)}(\xi_{nk}^2-1)]^2 = \frac{1}{2}\int [(V_n x, x)-\int (V_n x, x)\mu_1(dx)]^2\mu_1(dx).$$

Ugyanolyan meggondolásokkal, mint amilyeneket felhasználtunk a lemma és (4. 9) bizonyításakor, meggyőződhetünk arról, hogy a μ_1 mérték szerinti

$$\lim_{n\to\infty}[(V_n x, x)+d_n]$$

limesz létezéséhez szükséges és elégséges, hogy létezzenek a következő határértékek:

$$(4.10)\qquad \begin{gathered} \lim_{n\to\infty}\left[\int (V_n x, x)\mu_1(dx)+d_n\right], \\ \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \int \left\{([V_n-V_m]x, x)-\int ([V_n-V_m]x, x)\mu_1(dx)\right\}^2\mu_1(dx) = 0. \end{gathered}$$

A (4. 10) képlet lehetővé teszi, hogy megállapítsuk a $(V_n x, x)-\int (V_n x, x)\mu_1(dx)$ mennyiség limesz-kifejezésének alakját is. Legyen

$$(V_n x, x) = \sum_{k,j}(V_n e_k, e_j)\sqrt{\lambda_k\lambda_j}\,\frac{(x, e_k)(x, e_j)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_j}}$$

és

$$(V_n x, x)-\int (V_n x, x)\mu_1(dx) = \sum_{k,j}(V_n e_k, e_j)\sqrt{\lambda_k\lambda_j}\left[\frac{(x, e_k)(x, e_j)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_j}}-\delta_{kj}\right].$$

Akkor

$$\int \left\{([V_n-V_m]x, x)-\int ([V_n-V_m]x, x)\mu_1(dx)\right\}^2\mu_1(dx) =$$
$$= 2\sum_{k\neq j}[(V_n e_k, e_j)-(V_m e_k, e_j)]^2\lambda_k\lambda_j+2\sum_k [(V_n e_k, e_k)-(V_m e_k, e_k)]^2\lambda_k^2.$$

Ilymódon tehát a $(V_n x, x)-\int (V_n x, x)\mu_1(dx)$ határérték létezéséből következik a $u_{kj}=\lim_{n\to\infty}(V_n e_k, e_j)\sqrt{\lambda_k\lambda_j}$ mennyiségek létezése is, emellett

$$\lim_{n\to\infty}[(V_n x, x)+d_n] = \sum_{k,j} u_{k,j}\left\{\frac{(x, e_k)(x, e_j)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_j}}-\delta_{kj}\right\}+d,\qquad \sum_{k,j}u_{kj}^2<\infty.$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $u_{kj}=([I-CC^*]e_k, e_j)$ ahol C a 4. 1 megjegyzésben bevezetett operátor.

Az előbb mondottakból következik a

4. 3. TÉTEL: *Legyenek μ_1 és μ_2 Gauss-mértékek, melyek várható értékei* 0, *korrelációs operátorai pedig A_1 és A_2. Ha μ_2 abszolút folytonos a μ_1 mértékre, akkor léteznek olyan d és u_{kj} számok, hogy $\Sigma u_{kj}^2 < \infty$ és*

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \exp\left\{d + \sum u_{kj}\left[\frac{(x, e_k)(x, e_j)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_j}} - \delta_{kj}\right]\right\}, \tag{4. 11}$$

emellett $u_{kj} = ([I - CC^*])e_k, e_j)$, ahol a C operátorra fennáll $A_2^{\frac{1}{2}} = CA_1^{\frac{1}{2}}$.

4. 4. TÉTEL: Annak a *szükséges és elégséges feltétele, hogy a μ_1 és μ_2 mértékek kölcsönösen abszolút folytonosak legyenek, az, hogy létezzék a (4. 8) kifejezés (μ_1 mérték szerinti) határértéke.*

Bizonyítás. Az, hogy μ_2 μ_1 szerinti abszolút folytonosságához (és megfordítva) szükséges a (4. 8) limesz létezése, a 3. 1 lemmából következik.

Az elégségesség bizonyításához használjuk fel a 3. 1, III. megjegyzést. Láttuk hogy

$$\ln \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x) = d_n + (V_n x, x),$$

ahol d_n valamilyen állandó, V_n pedig degenerált operátor. A 4. 1. lemma alapján abból, hogy létezik a $\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x)$ mennyiség μ_1-limesze, következik az $\ln \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x)$ mennyiség határértékének létezése és

$$\lim_{C \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} \mu_1 \left\{x; \left|\ln \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x)\right| > C\right\} = 0.$$

Ezért a 3. 1, III. megjegyzés folytán μ_1 abszolút folytonos a μ_2 mértékre. De akkor a 4. 2. következmény folytán μ_1 abszolút folytonos a μ_2 mértékre.

Állapítsuk most meg határozottabb feltételeket zérus-várható értékű mértékek abszolút folytonosságára és szingularitására.

4. 5. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy a μ_1 és μ_2 mértékek korrelációs operátorai valamilyen $c > 0$ mellett eleget tesznek a (4. 7) összefüggésnek. Ekkor a μ_1 és μ_2 mértékek ekvivalens voltának szükséges és elégséges feltétele, hogy teljesüljön az $I = \overline{\lim}_{n \uparrow \infty} I_n < \infty$ összefüggés, ahol*

$$I_n = \int \left\{\ln \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x) - \int \ln \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x)\mu_1(dx)\right\}^2 \mu_1(dx).$$

Ha $I = \infty$, akkor a μ_1 és μ_2 mértékek szingulárisak.

Bizonyítás. Az $I < \infty$ feltétel szükségessége a mértékek ekvivalenciájához a 4. 2 megjegyzésből és a 4. 1 lemma bizonyításából következik. Az elegendőség bizonyításáoz megjegyezzük, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x) = \varrho(x)$$

létezik a μ_1 mérték szerint majdnem minden x-re (a 3. 1 lemma alapján). Minthogy

$$\ln \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x) = \left\{(V_n x, x) - \int (V_n(x, x)\mu_1(dx)\right\} + d_n'$$

és az első összeadandó n szerint korlátos, ezért a következő esetek valamelyike állhat csak fenn:

1. $\varrho(x)=0$ majdnem minden x-re.

2. $\varrho(x)>0$ pozitív mértékű halmazon — vagyis ha (a 4. 4. Tétel szerint) μ_1 és μ_2 ekvivalensek. Az 1. eset fennállhat, ha a d_n' sorozat nem korlátos. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges, ha $I<\infty$. A (4. 8) képletet felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$d_n' = \frac{1}{2}\ln\det[B_2^{(n)}\{B_1^{(n)}\}^{-1}] + \frac{1}{2}\sum_{k,j}[b_{kj}^{(n,1)} - b_{kj}^{(n,2)}]\delta_{kj}\lambda_k =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln \prod_{k=1}^{n}\varrho_k^{(n)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(1-\varrho_k^{(n)})\right],$$

ahol $\varrho_k^{(n)}$ a $B_2^{(n)}[B_1^{(n)}]^{-1} = [\tilde{A}_2^{(n)}]^{-1}\tilde{A}_1^{(n)}$ matrix sajátértékei, $\tilde{A}_1^{(n)} = \|\delta_{kj}\lambda_k\|_n$, $\tilde{A}_2^{(n)} = \|a_{ik}^{(2)}\|_n$. Ha $\varrho_k^{(n)}$ az $\{\tilde{A}_2^{(n)}\}^{-1}A_1^{(n)}$ matrix sajátértéke, akkor létezik a komplex n-dimenziós tér olyan z vektora, melyre

$$\tilde{A}_1^{(n)}z = \varrho_k^{(n)}\tilde{A}_2^{(n)}z.$$

Szorozva skalárisan ezt az összefüggést z-vel, meggyőződhetünk arról, hogy

$$\varrho_k^{(n)} = \frac{(\tilde{A}_1^{(n)}z, z)}{(\tilde{A}_2^{(n)}z, z)}$$

és, következésképp,

$$\inf_{x\in\mathfrak{H}}\frac{(A_1x, x)}{(A_2x, x)} \leq \varrho_k^{(n)} \leq \sup_{x\in\mathfrak{H}}\frac{(A_1x, x)}{(A_2x, x)}, \quad \varrho_k^{(n)} \in \left[\frac{1}{c}, c\right].$$

Minthogy $x>\delta>0$ mellett $|\ln(1+x)+1-x| \leq \alpha_\delta(1-x)^2$, ahol α_δ valamilyen állandó, tetszőleges K mellett fennáll, hogy

$$|d_n'| \leq K\sum_{k=1}^{n}(1-\varrho_k^{(n)})^2.$$

Másrészt

$$\int\left\{\sum_{k,j}(b_{jk}^{(n,1)} - b_{jk}^{(n,2)})[(x, e_k)(x, e_j) - \delta_{kj}\lambda_k]\right\}^2\mu_1(dx) =$$

(4. 12)

$$= 2\sum_{k,j}(b_{jk}^{(n,1)} - b_{jk}^{(n,2)})^2\lambda_k\lambda_j = 2\,\mathrm{sp}\,([B_1^{(n)} - B_2^{(n)}]\tilde{A}_1^{(n)})^2$$

(itt az sp B a B matrix nyomát jelenti, vagyis sajátértékei összegét). A $([B_1^{(n)} - B_1^{(n)}]\tilde{A}_2^{(n)})^2$ matrix sajátértékei $(1-\varrho_k^{(n)})^2$ lesznek, következésképp

$$\int\left\{\sum_{k,j}(b_{kj}^{(n,1)} - b_{kj}^{(n,2)})[(x, e_k)(x, e_j) - \delta_{kj}\lambda_k]\right\}^2\mu_1(dx) = 2\sum_{k=1}^{n}(1-\varrho_k^{(n)})^2$$

és $I = 2 \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (1-\varrho_k^{(n)})^2 < \infty$ feltevés szerint. De akkor $\overline{\lim}_{n\to\infty} |d_n'| < \infty$ is fennáll. Ez azt jelenti, hogy fennáll a 2. eset. — Ezzel az ekvivalencia feltételét megállapítottuk.

Legyen most $I = +\infty$. Legyen $\tilde{C}_n = B_2^{(n)}[\tilde{A}_2^{(n)} - \tilde{A}_1^{(n)}]B_2^{(n)}$ matrix, C_n pedig operátor $\mathfrak{H}$-ban, melyet $C_n e_k = 0$ feltételek határoznak meg, midőn $k > n$, $(C_n e_k, e_j) = C_{kj}^{(n)}$, ahol $c_{kj}^{(n)}$ a $\tilde{C}_n$ matrix elemei.

Ekkor

$$\int (\tilde{C}_n x, x)\mu_1(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_{kk}^{(n)}\lambda_k = \mathrm{sp}\,(\tilde{C}_n \tilde{A}_1^{(n)}),$$

$$\int (\tilde{C}_n x, x)\mu_2(dx) = \mathrm{sp}\,(\tilde{C}_n \tilde{A}_2^{(n)}),$$

$$\int (\tilde{C}_n x, x)\mu_2(dx) - \int (\tilde{C}_n x, x)\mu_1(dx) = \mathrm{sp}\,\tilde{C}_n(\tilde{A}_2^{(n)} - \tilde{A}_1^{(n)}) =$$

$$= \mathrm{sp}\,B_2^{(n)}(\tilde{A}_2^{(n)} - \tilde{A}_1^{(n)})B_2^{(n)}(\tilde{A}_2^{(n)} - \tilde{A}_1^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} (1-\varrho_k^{(n)})^2.$$

Megjegyezzük továbbá, hogy a (4. 12) képlethez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int \left\{(\tilde{C}_n x, x) - \int (\tilde{C}_n x, x)\mu_i(dx)\right\}^2 \mu_i(dx) = 2\,\mathrm{sp}\,(\tilde{C}_n \tilde{A}_i^{(n)})^2.$$

Tekintsük a

$$\varphi_n(x) = \frac{(\tilde{C}_n x, x) - \mathrm{sp}\,(\tilde{C}_n A_2^{(n)})}{\sum_{k=1}^{n} (1-\varrho_k^{(n)})^2}$$

mennyiségeket. Feltesszük, hogy az n számok sorozata olyan, hogy $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (1-\varrho_k^{(n)})^2 = \infty$ és létezik a véges vagy végtelen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\mathrm{sp}(\tilde{C}_n A_1^{(n)2}]^{\frac{1}{2}}}{\sum_{k=1}^{n} (1-\varrho_k^{(n)})^2} = l$$

határérték. Akkor, $\varphi_n(x)$ az μ_2 mérték szerint zérushoz tart, minthogy

$$\int \varphi_n(x)^2 \mu_2(dx) = \frac{2}{\sum_{k=1}^{n} (1-\varrho_k^{(n)})^2} \to 0.$$

Továbbá

$$\varphi_n(x) = -1 + \frac{(\tilde{C}_n x, x) - \int (\tilde{C}_n x, x(\mu_1(dx)}{[\mathrm{sp}\,(\tilde{C}_n A_1^{(n)})^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{[\mathrm{sp}\,(\tilde{C}_n A_1^{(n)})^2]^{\frac{1}{2}}}{\sum_{k=1}^{n} (1-\varrho_k^{(n)})^2}$$

A $\dfrac{(\tilde{C}_n x, x) - \int (\tilde{C}_n x, x)\mu_1(dx)}{[\mathrm{sp}(\tilde{C}_n \tilde{A}_1^{(n)})^2]^{\frac{1}{2}}}$ mennyiség a μ_1 mérték szerint korlátos és csupán olyan határeloszlásai lehetnek, melyek sűrűséggel rendelkeznek (ugyanazokat a meggondolásokat kell felhasználni, mint a 4. 1. lemmában); ezért, ha $l>0$, akkor $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu_1\{x;|\varphi_n(x)|\leqq\varepsilon\}$. ε-t elegendő kicsire választva tetszőlegesen kicsivé tehetjük, míg

$$\lim_{n\to\infty} \mu_2\{x;\, |\varphi_n(x)| \leqq \varepsilon\} = 1.$$

Így ebben az esetben μ_1 és μ_2 szingulárisak. Ha pedig $l=0$, akkor $\varphi_n(x)\to -1$ a μ_1 mérték szerint. Vagyis ebben az esetben μ_1 és μ_2 ugyancsak szingulárisak. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

4. 3. Következmény. *Ha a μ_1 és μ_2 Gauss-mértékek zérus várható értékűek, akkor ezek a mértékek vagy ekvivalensek vagy ortogonálisak.*

A 4. 5. tételből kapható a következő állítás, mely tömör formában szükséges és elégséges feltételét adja *Gauss*-mértékek ekvivalenciájának.

4. 6. TÉTEL: *Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a (zérus várható értékű) μ_1 és μ_2 mértékek ekvivalensek legyenek, az, hogy létezzék oly korlátos és korlátos inverzű C operátor, melyre $A_1^{\frac{1}{2}}=CA_2^{\frac{1}{2}}$ és* sp $[I-CC^*]^2<\infty$ *(vagyis $[I-CC^*]^2$ szimmetrikus, teljesen folytonos operátor, mely sajátértékeinek összege véges).*

Bizonyítás. A (4. 7) feltétel a 7. 1. megjegyzésből következik.

A 4. 5. tétel jelöléseit fogjuk használni. Legyen P_n a $\mathfrak{H}_n$ altérre való projiciálás operátora. Ekkor

$$I_n = 2\,\mathrm{sp}\,([B_1^{(n)}-B_2^{(n)}]\tilde{A}_1^{(n)})^2 = 2\,\mathrm{sp}\,(B_1^{(n)}-B_2^{(n)})\tilde{A}_1^{(n)}(B_1^{(n)}-B_2^{(n)}) =$$

$$= 2\,\mathrm{sp}\,[\tilde{A}_1^{(n)}]^{\frac{1}{2}}(B_1^{(n)}-B_2^{(n)})\tilde{A}_1^{(n)}(B_1^{(n)}-B_2^{(n)})\tilde{A}_1^{(n)}[\tilde{A}_1^{(n)}]^{-\frac{1}{2}} = 2\,\mathrm{sp}\,(P_n[I-CP_nC^*]P_n)^2.$$

Felhasználtuk azt, hogy a nyom nem változik a matrixok hasonlósági transzformációjakor, valamint azt, hogy $[\tilde{A}_1^{(n)}]^{\frac{1}{2}}[\tilde{A}_2^{(n)}]^{-\frac{1}{2}}=P_nCP_n$. Ezért

$$I = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, I_n \leqq 2\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathrm{sp}\,[P_n(I-CP_nC^*)P_n]^2 \leqq 2\,\mathrm{sp}\,(I-CC^*)^2.$$

Ezzel igazoltuk a tétel feltételeinek elégséges voltát. A szükségesség bizonyításához megjegyezzük, hogy a C operátor létezése a 4. 2. tételből következik. Ha $Cx=x$-et írunk minden x-re, melyekre $A_1x=A_2x=0$ akkor

$$I = \lim_{n\to\infty} 2\,\mathrm{sp}\,(P_n[I-CP_nC^*]P_n)^2 = 2\,\mathrm{sp}\,(I-CC^*)^2.$$

Ezután csak a 4. 5 tételt kell már alkalmazni.

4. 3. Megjegyzés. Minthogy a korrelációs operátorból négyzetgyököt vonni nehéz, gyakran kényelmesebb az ekvivalencia következő elégséges feltételét használni fel: ha létezik oly invertálható D operátor, melyre $A_1=DA_2$ és $\mathrm{sp}\,(I-D)(I-D^*)<\infty$, akkor az μ_1 és μ_2 mértékek ekvivalensek.

A (4. 7) összefüggés bizonyításához itt ismét felhasználtuk $I-D$ teljes folytonosságát és pontosan úgy, mint a 4. 6. tételben, bizonyíthattuk, hogy

$$I \leqq 2\,\mathrm{sp}\,(I-D)(I-D^*).$$

4. 4. Megjegyzés. Ha a μ_1 és μ_2 mértékek szingulárisak, akkor megadható elfajult nem negatív-definit szimmetrikus V_n operátorok oly sorozata, melyre fennáll

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\int (V_n x, x)\mu_2(dx) - \int (V_n x, x)\mu_1(dx)\right|}{\int [(V_n x, x) - \int (V_n x, x)\mu_2(dx)]^2 \mu_2(dx)} > 0 \tag{4. 13}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \int [(V_n x, x) - \int (V_n x, x)\mu_2(dx)]^2 \mu_2(dx) = \infty. \tag{4. 14}$$

Ily operátor-sorozat létezése elégséges a μ_1 és μ_2 mértékek szingularitásához. Az utóbbi állítás ugyanolyan meggondolással bizonyítható, mint a mértékek szingularitása a 4. 5. tételben, csupán be kell vezetni a

$$\varphi_n(x) = \frac{(V_n x, x) - \int (V_n x, x)\mu_2(dx)}{\int [(V_n x, x) - \int (V_n(x, x))\mu_2(dx)]^2 \mu_2(dx)}$$

megfeleltetést. Ily V_n operátorok létezése bizonyításához abban az esetben, amidőn teljesül a (4. 7) feltétel, tekintsük a

$$\sum_{k,j} (b_{kj}^{(n,1)} - b_{kj}^{(n,2)})(x, e_k)(x, e_j)$$

(l. a (4. 8) képletet) kifejezést. Írjuk azt, hogy

$$\sum_{k,j} (b_{kj}^{(n,1)} - b_{kj}^{(n,2)})(x, e_k)(x, e_j) = (U_n^+ x, x) - (U_n^- x, x),$$

ahol U_n^+ és U_n^- nem negatív-definit-szimmetrikus operátorok. Meggyőződhetünk arról, felhasználva a 4. 1 lemmában bevezetett kvadratikus forma-előállítást, hogy az U_n^+ és U_n^- operátorok egyértelműen megválaszthatók, ha megköveteljük, hogy az $(U_n^+ x, x)$ és $(U_n^- x, x)$ sztochasztikus változók $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{B}, \mu_2\}$-n függetlenek legyenek. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} d_n &= \int [(U_n^+ x, x) - (U_n^- x, x) - \int (U_n^+ x, x)\mu_2(dx) + \int (U_n^- x, x)\mu_2(dx)]^2 \mu_2(dx) = \\ &= \int [(U_n^+ x, x) - \int (U_n^+ x, x)\mu_2(dx)]^2 \mu_2(dx) + \\ &+ \int [(U_n^- x, x) - \int (U_n^- x, x)\mu_2(dx)]^2 \mu_2(dx) = \\ &= 2\left[\int (U_n^+ x, x)\mu_2(dx) - \int (U_n^+ x, x)\mu_1(dx)\right] - \\ &- 2\left[\int (U_n^- x, x)\mu_2(dx) - \int (U_n^- x, x)\mu_1(dx)\right]. \end{aligned}$$

Jelölje $\tilde{V}_n$ az operátorok közül azt, melyre

$$\left|\int (U_n^\pm x, x)\mu_2(dx) - \int (U_n^\pm x, x)\mu_1(dx)\right| \geqq \frac{1}{2} d_n.$$

Ekkor $V_n = \lambda_n V_n$-t véve, ahol

$$\lambda_n = b_n \left[\int \left[(\tilde{V}_n x, x) - \int (\tilde{V}_n x, x)\mu_2(dx)\right]^2 \mu_2(dx)\right]^{-1}$$

eleget teszünk a (4. 13) és (4. 14) összefüggéseknek. Ezzel teljesen bizonyítottuk állításunkat.

4. 3. Fogalmazzuk most meg *Gauss*-mértékek abszolút folytonosságának és szingularitásának általános feltételeit. Ehhez szükséges a következő

4. 2. LEMMA: *Legyenek μ_1 és μ_2 Gauss-mértékek, melyek várható értékei a_1 és a_2 korrelációs operátorai pedig A_1 és A_2; legyen $\bar{\mu}_i$ várható értéke* 0, *korrelációs operátora A_i, μ_i' várható értéke a_2-a_1 és korrelációs operátora A_i. Akkor*

1. *ha $\mu_2 \ll \mu_1$, az összes mértékek $\mu_i, \bar{\mu}_i, \mu_i'$-ekvivalensek $(i=1, 2)$ egymással;*
2. *ha $\bar{\mu}_1$ és $\bar{\mu}_2$ vagy $\bar{\mu}_i$ és μ_i' (valamilyen i-re) ortogonálisak, akkor ortogonálisak a μ_1 és μ_2 mértékek is.*

Bizonyítás. 1. Világos, hogy $\mu_2' \ll \bar{\mu}_1$. Jelöljön most $\mu_2' \times \mu_2'$ és $\bar{\mu}_1 \times \bar{\mu}_1$ mértékeket $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$-ban. Akkor $\mu_2' \times \mu_2' \ll \bar{\mu}_1 \times \bar{\mu}_1$. Jelölje T $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ azon leképezését $\mathfrak{H}$-ra, amely az $(x_1'; x_2) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ pontot átviszi az $\dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$ pontba. Ennél a leképezésnél $\mu_2' \times \mu_2'$ átmegy $\bar{\mu}_2$-be, $\bar{\mu}_1 \times \bar{\mu}_1$ pedig $\bar{\mu}_1$-be. Így tehát $\bar{\mu}_2 \ll \bar{\mu}_1$. De akkor $\bar{\mu}_2 \sim \bar{\mu}_1$. Ez azt jelenti, hogy $\mu_2' \ll \bar{\mu}_2$, amiből (a 4. 1. következmény alapján) $\mu_2' \sim \bar{\mu}_2$. Továbbá $\mu_1' \sim \bar{\mu}_1'$, minthogy ezek a mértékek a $\bar{\mu}_2$ és $\bar{\mu}_1$ mértékek egyforma eltolásával kaphatók, vagyis az is igaz, hogy $\mu_1' \sim \bar{\mu}_1$.

2. A 2. állítás bizonyításához megjegyezzük, hogy pontosan ugyanolyan módon, mint 1. bizonyításában, megállapítható, hogy abban az esetben, amidőn μ_2-nek nemzérus μ_1-re nézve abszolút folytonos komponense van, akkor $\bar{\mu}_2$-nek is nemzérus, $\bar{\mu}_1$-re nézve abszolút folytonos komponense lesz, vagyis $\bar{\mu}_2 \sim \bar{\mu}_1$ és μ_2'-nek nemzérus $\bar{\mu}_1$-re nézve abszolút folytonos komponense van, és így $\bar{\mu}_2' \sim \bar{\mu}_2$, és analóg módon $\mu_1' \sim \bar{\mu}_1$. Így tehát a μ_2 és μ_1 mértékek ekvivalensek lesznek, ha csak egyiküknek a másik szerint nemzérus abszolút folytonos komponensük van. Ebből már következik a lemma állítása.

4. 7. TÉTEL: *Két Gauss-mérték vagy ekvivalens, vagy ortogonális. Ha az e_k-k A_1 sajátvektorai, a λ_k-k pedig A_1 sajátértékei, akkor μ_1 és μ_2 ekvivalenciájának szükséges és elégséges feltételei a következő feltételek teljesülése:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_2 - a_1, e_k)^2}{\lambda_k} < \infty,$$

2. *létezik oly korlátos inverzű C operátor, melyre $A_2^{\frac{1}{2}} = C A_1^{\frac{1}{2}}$ és* $\operatorname{sp}(I - CC^*)^2 < \infty$.
Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \exp\left\{\sum_{k,j=1}^{\infty} u_{kj} \left[\frac{(x-a_1, e_k)(x-a_1, e_j)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_j}} - \delta_{kj}\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(x-a_1, e_k)}{\sqrt{\lambda_k}} + d\right\}, \tag{4. 15}$$

ahol

$$u_{kj} = ([I - CC^*]e_k, e_j), \quad \alpha_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_2 - a_1, e_j)}{\sqrt{\lambda_j}} (\delta_{kj} - u_{kj}), \quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

ahol a d számot az $\int \dfrac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) \mu_1(dx) = 1$ feltétel határozza meg.

E tétel bizonyítása a 4. 1, 4. 3 és 4. 6 tételekből következik.

5. §. Stacionárius Gauss-folyamatoknak megfelelő mértékek ekvivalenciája és ortogonalitása

Ebben a paragrafusban zérus várható értékű stacionárius *Gauss*-folyamatokat fogunk vizsgálni, a véges $[0, T)$ szakaszon. Az ilyen folyamatok eloszlását teljesen meghatározza a $R(t,s)=M\xi(t)\xi(s)=B(t-s)$ korrelációfüggvény. A $B(t)$ függvényt szintén *korrelációfüggvénynek* nevezik. A következőkben feltesszük, hogy $B(t)$ folytonos függvény. $B(t)$ pozitív definit és ezért a *Bochner*-tétel szerint (pl. [31], 423. o.) előállítható $B(t)=\int e^{i\lambda t}dF(\lambda)$ alakban, ahol $F(\lambda)$ nemcsökkenő korlátos függvény, melyet a folyamat spektrális függvényének nevezünk. E paragrafusban mindenütt feltesszük, hogy $F(\lambda)$ abszolút folytonos és hogy $f(\lambda)=\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}$ korlátos függvény; $f(\lambda)$-t a folyamat *spektrális sűrűségének* nevezzük. Alább szó lesz majd mértékek ekvivalenciája és ortogonalitása bizonyos elégséges feltételeiről, melyeket a tekintett folyamatok spektrális sűrűségeivel fejezünk ki.[1]

Hogy felhasználhassuk az előző paragrafus eredményeit, kapcsoljuk össze a $\xi(t)$ folyamattal az $L_2[0, T]$ *Hilbert*-térbeli μ mértéket, melynek karakteiisztikus funkcionálja

$$(5.\,1)\qquad \varphi(z) = M\exp\left\{i\int_0^T \xi(t)z(t)dt\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T B(t-s)z(t)z(s)dt\,ds\right\}.$$

$\varphi(z)$ egy 0 várható értékű,

$$[Ax](t) = \int_0^T B(t-s)x(s)ds$$

korreláció-operátorú *Gauss*-mérték karakterisztikus funkcionálja.

5. 1. Ekvivalencia-feltételek. Kezdetként jegyezzük meg, hogy a tett feltevések mellett (spektrális sűrűség létezése) $(Az, z)>0$ minden $z\neq 0$-ra; mert

$$(Az, z) = \int_0^T\int_0^T B(t-s)z(t)z(s)dt\,ds =$$

$$= \int_0^T\int_0^T\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)}f(\lambda)d\lambda\right]z(t)z(s)dt\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\left|\int_0^T e^{i\lambda t}z(t)dt\right|^2 d\lambda,$$

$\int_0^T e^{i\lambda t}z(t)dt$ pedig analitikus egész függvény, és így $\left|\int_0^T e^{i\lambda t}z(t)dt\right|^2>0$ majdnem minden valós λ-ra. E körülmény folytán az ekvivalencia elegendő feltételei vizsgálatakor felhasználható a következő tétel, mely a 4. 3 megjegyzésből következik.

[1] Vannak ekvivalencia- és ortogonalitási feltételek, melyeket a korrelációfüggvények alapján fogalmaztak meg; ezeket Ju. A. ROZANOV vezette be [24], [35]. Cikkünk terjedelmének korlátozott volta nem engedi meg, hogy levezessük ezeket az eredményeket, melyekhez speciális függvénytani apparátusra van szükség.

Legyen $\xi_1(t)$ és $\xi_2(t)$ két stacionárius *Gauss*-folyamat, melyek várható értékei nullák, korrelációfüggvényei $B_1(t)$ és $B_2(t)$, és spektrális sűrűségei $f_1(\lambda)$ és $f_2(\lambda)$. Jelöljük μ_i^T-vel azt a mértéket, mely megfelel a $\xi_i(t)$ folyamatnak az $L_2[0, T]$ téren.

5. 1. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy létezik oly mérhető,* $[0, T]\times[0, T]$*-n integrálható* $c(t-s)$ *függvény, melyre*

$$B_2(t-s)-B_1(t-s) = \int_0^T c(t;u)B_1(u-s)\,du \quad (t, s\in[0, T]) \tag{5.2}$$

és

$$\int_0^T\int_0^T c(t,u)^2\,dt\,du<\infty. \tag{5.3}$$

Akkor μ_1^T *és* μ_2^T *ekvivalensek.*

Tekintsük azt az esetet, amidőn $B_1(t)=e^{-a|t|}$. Akkor az (5. 2) integrálegyenlet s szerinti kétszeres differenciálás után a következő összefüggésbe megy át:

$$\frac{d^2}{ds^2}\big(B_2(t-s)-B_1(t-s)\big) = a^2\big(B_2(t-s)-B_1(t-s)\big)-2ac(t,s)$$

az (5. 3) feltétel pedig átmegy a

$$\int_0^T\int_0^T \big[a^2\big(B_2(t-s)-B_1(t-s)\big)-\big(B_2''(t-s)-B_1''(t-s)\big)\big]^2\,dt\,ds<\infty \tag{5.4}$$

feltételbe. Ha felhasználjuk a korrelációfüggvénynek a spektrális sűrűséggel való

$$B_k(t) = \int e^{i\lambda t}f_k(\lambda)\,d\lambda$$

előállítását, akkor az (5. 4) feltétel átírható a következő alakba:

$$\frac{4}{\pi^2}\iint \frac{\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}T}{(\lambda-\mu)^2}\,\frac{f_2(\lambda)-f_1(\lambda)}{f_1(\lambda)}\,\frac{f_2(\mu)-f_1(\mu)}{f_1(\mu)}\,d\lambda\,d\mu<\infty. \tag{5.5}$$

Az (5. 5) feltétel elegendő feltétele μ_1^T és μ_2^T ekvivalenciájának, ha $f_1(\lambda) = \dfrac{1}{\pi(a^2+\lambda^2)}$. Felhasználva ezt az eredményt, bizonyos elégséges feltételek kaphatók arra, hogy μ_1^T és μ_2^T ekvivalensek legyenek minden $T>0$-ra bizonyos tágabb folyamat-osztályra vonatkozólag is.

5. 2. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy létezik oly véges exponenciális típusú,* $g(\lambda)$ *analitikus egész függvény, amely pozitív a valós* λ *értékekre és kielégíti a következő feltételeket:*

1. $\int g(\lambda)^2\,d\lambda<\infty,$
2. $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \dfrac{\lambda^2\big(f_1(\lambda)-f_2(\lambda)\big)}{g(\lambda)^2} = 0,$
3. $\displaystyle\int \frac{\lambda^2\big(f_1(\lambda)-f_2(\lambda)\big)^2}{g(\lambda)^4}\,d\lambda<\infty,$

4. *valamilyen* a *és* $C>0$ *mellett* $\frac{f_1(\lambda)+f_2(\lambda)}{2}-\frac{g(\lambda)^2}{\pi(a^2+\lambda^2)}\geqq 0$ *oly valós* λ *értékekre, melyekre* $|\lambda|>C$.

5. *valamilyen* $m>0$*-re* $\varliminf_{|\lambda|\to\infty}\frac{f_k(\lambda)}{g(\lambda)}>0$.

Akkor minden $T>0$*-ra* μ_1^T *és* μ_2^T *ekvivalens.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy minden valós λ-ra

$$\frac{\pi(a^2+\lambda^2)|f_1(\lambda)-f_2(\lambda)|}{2g(\lambda)^2}<1 \tag{5.6}$$

és hogy a 4. feltétel teljesül minden valós λ-ra. Vezessük be a következő spektrális sűrűségeket:

$$\varphi_1(\lambda)=\frac{1}{\pi(a^2+\lambda^2)}\left[1-\frac{(f_1(\lambda)-f_2(\lambda))\pi(a^2+\lambda^2)}{2g(\lambda)^2}\right],$$

$$\varphi_2(\lambda)=\frac{1}{\pi(a^2+\lambda^2)}\left[1+\frac{(f_1(\lambda)-f_2(\lambda))\pi(a^2+\lambda^2)}{2g(\lambda)^2}\right],$$

$$\psi(\lambda)=\frac{f_1(\lambda)+f_2(\lambda)}{2}-\frac{g(\lambda)^2}{\pi(a^2+\lambda^2)}.$$

Ha $\mu_{\varphi_1}^T$ és $\mu_{\varphi_2}^T$ mértékek, melyek a $\varphi_1(\lambda)$, ill. $\varphi_2(\lambda)$, spektrális sűrűségű folyamatoknak felelnek meg, akkor ezek a mértékek ekvivalensek lesznek a μ_a^T mértékkel, mely az $\frac{1}{\pi(a^2+\lambda^2)}$ spektrális sűrűségű folyamatnak felel meg (az 5. 1. tétel alapján), vagyis ekvivalensek lesznek egymás közt is tetszőleges $T>0$ mellett. Megjegyezzük, hogy

$$g(\lambda)=\int_{-k}^{k}e^{i\lambda t}c(t)dt,\quad \int_{-k}^{k}|c(t)|^2dt,$$

ahol k a $g(x)$ függvény exponenciális típusa. Legyenek $\tilde{\xi}_1(t)$ és $\tilde{\xi}_2(t)$ a $\varphi_1(\lambda)$, ill. $\varphi_2(\lambda)$ spektrális sűrűségű folyamatok, $\eta(t)$ pedig egy $\psi(\lambda)$ spektrális sűrűségű folyamat. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a

$$\xi_j(t)=\int_{-k}^{k}c(s)\tilde{\xi}_j(t-s+k)ds+\eta(t)$$

folyamat spektrális sűrűsége $f_j(\lambda)$. Továbbá, a $\xi_j(t)$ folyamat értékét $[0, T]$-n teljesen meghatározzák $\xi_j(t)$ értékei $[0, T+2k]$-n és $\eta(t)$ értékei $[0, T]$-n. Minthogy a $\tilde{\xi}_j(t)$ folyamatok egyazon transzformáció révén nyerhetők oly folyamatokból, melyeknek ekvivalens mértékek felelnek meg, az μ_1^T és μ_2^T mértékek is ekvivalensek lesznek minden $T>0$-ra.

A tétel teljes bizonyítása a következő lemmából nyerhető.

5. 1. LEMMA: *Ha az* $f_1(\lambda)$ *spektrális sűrűség valamilyen egész* $m>0$ *mellett eleget tesz az* $f_1(\lambda)>g(\lambda)^m$ *feltételnek, ahol* $|\lambda|\geqq C$, *és* $g(x)$ *eleget tesz az 5. 1. tétel feltételei-*

nek, továbbá, az $f_2(\lambda)$ spektrális sűrűség korlátos és azonos $f_1(\lambda)$-val, ha $|\lambda|>C$, akkor μ_1^T és μ_2^T ekvivalensek.

Bizonyítás. Feltesszük, hogy m páros. Vezessük be a következő $f_0(\lambda)$ spektrális sűrűségfüggvényt:

$$f_0(\lambda)=\begin{cases} f_1(\lambda), & \text{ha} \quad |\lambda|>C, \\ \dfrac{g(\lambda)^m}{1+\lambda^2}, & \text{ha} \quad |\lambda|\leqq C. \end{cases}$$

Jelöljük μ_φ^T-vel azt a mértéket, mely az $\varphi(\lambda)$ spektrális sűrűségfüggvényű stacionárius *Gauss*-folyamatnak felel meg. Legyen $\psi_0(\lambda)$ egy függvény, amely csupán $|\lambda|\leqq C$-re nem zérus. Ha $|\psi_0(\lambda)|\leqq \frac{g(\lambda)^m}{1+\lambda^2}$ és $f_0(\lambda)+\psi_0(\lambda)$ spektrális sűrűségfüggvény, akkor $\mu^T_{f_0(\lambda)+\psi_0(\lambda)}\sim\mu^T_{f_0(\lambda)}$ az 5. 2 tétel már bizonyított része értelmében, feltéve, hogy $g(\lambda)$ helyett a $\frac{1}{\sqrt{2}}g(\lambda)^{\frac{m}{2}}$ függvényt vesszük. Ha $r(\lambda)$ csupán $|\lambda|\leqq C$-re különbözik nullától, $r(\lambda)>0$ és $r(\lambda)\leqq\frac{g(\lambda)^{\frac{m}{2}}}{1+\lambda^2}$ akkor ismét az 5. 2. tétel bizonyított részéből következik, hogy $\mu^T_{f_0(\lambda)+kr(\lambda)}\sim\mu^T_{f_0(\lambda)+(k+1)r(\lambda)}$. Ezért $\mu^T_{f_0(\lambda)}\sim\mu^T_{f_0(\lambda)+\psi_0(\lambda)+nr(\lambda)}$. Legyen most $\psi_0(\lambda)=-f_0(\lambda)$, ha $|\lambda|\leqq C$, $r(\lambda)=\frac{f_1(\lambda)}{n}$, ha $|\lambda|\leqq C$, ahol n-t úgy választjuk meg, hogy $r(\lambda)\leqq\frac{g(\lambda)^m}{1+\lambda^2}$ $(|\lambda|\leqq C)$ legyen; ekkor, mint arról meggyőződhetünk, $\mu^T_{f_0}\sim\mu^T_{f_1}$. Pontosan ugyanígy $\mu^T_{f_0}\sim\mu^T_{f_2}$ és belátható.

Ezzel a lemmát bizonyítottuk.

Visszatérve az 5. 2. tétel bizonyítására, megjegyezzük, hogy a tétel feltételei mellett mindig elérhetjük azt — a spektrális sűrűségfüggvények értékeit csupán valamilyen véges intervallumon változtatva meg —, hogy a 4. feltétel és az (5. 6) összefüggés minden λ-ra teljesüljön. Ha $\tilde{f}_1(\lambda)$ és $\tilde{f}_2(\lambda)$ ilyen értelemben megváltoztatott spektrális sűrűségfüggvények, akkor a bizonyítottak alapján $\mu^T_{\tilde{f}_1}\sim\mu^T_{\tilde{f}_2}$ és $\mu^T_{f_i}\sim\mu^T_{\tilde{f}_i}$, ha $i=1, 2$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

5. 3. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy az $f_1(\lambda)$ és $f_2(\lambda)$ spektrális sűrűségfüggvények eleget tesznek a következő feltételeknek: elég nagy $|\lambda|$ értékekre valamilyen $C>0$ és $\alpha>1$ mellett*

$$C\leqq f_1(\lambda)|\lambda|^\alpha, \quad \int\frac{|f_1(\lambda)-f_2(\lambda)|^2}{1+|\lambda|^{2\alpha}}d\lambda<\infty \quad \text{és} \quad \lim_{|\lambda|\to\infty}|\lambda|^{-\alpha}|f_1(\lambda)-f_2(\lambda)|=0.$$

Akkor $\mu^T_{f_1}$ és $\mu^T_{f_2}$ ekvivalensek minden $T>0$-ra.

$\alpha>3$ esetén ennek az állításnak a bizonyítása az 5. 2. tételből következik, ha abban $g(\lambda)=\int\limits_{m<\alpha}\left(\frac{\sin(\lambda-\mu)}{\lambda-\mu}\right)^m\sqrt{\frac{a^2+\mu^2}{1+|\mu|^\alpha}}d\mu$-t írunk, $m>\alpha$. Ez ún. exponenciális típusú (m egész) egészfüggvény, mely eleget tesz az 5. 2. tétel összes feltételeinek. Ha pedig $\alpha<3$ (de okvetlenül $\alpha>1$), akkor tekintsük azon $\tilde{\xi}_k(t)$ folyamatokat, melyek spektrális sűrűségfüggvényei $\tilde{f}_k(\lambda)=f_k(\lambda)(1+\lambda^2)^{-1}$, melyekre már $\alpha>3$; ekkor a megfelelő mértékek ekvivalenciája az előzőkből következik. A $\xi_k(t) = \tilde{\xi}_k(t)+\tilde{\xi}_k'(t)$ folyamatok spektrális sűrűségfüggvényei $f_k(\lambda)$ és a nekik megfelelő mértékek szintén ekvivalensek (amennyiben őket ekvivalens mértékek egyforma transzformáció révén nyertük).

5. 2. *Az ortogonalitás elégséges feltételei.* Az ortogonalitás feltételeinek levezetéséhez felhasználásra kerül a következő

5. 1. Megjegyzés. Ha $\xi_1(t)$ és $\xi_2(t)$ *Gauss*-folyamatok $[0, T]$-n és μ_1^T és μ_2^T a nekik megfelelő mértékek, akkor μ_1^T és μ_2^T ortogonalitásához szükséges és elégséges, hogy létezzék pozitív-definit $g_n(t,s)$ függvények olyan sorozata $([0, T]\times[0, T]$-n), hogy

$$(5.7)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\left|M\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\xi_2(t)\xi_2(s)\,dt\,ds-M\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\xi_1(t)\xi_1(s)\,dt\,ds\right|}{D\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\xi_1(t)\xi_1(s)\,dt\,ds}>0$$

és

$$(5.8)\quad \lim_{n\to\infty} D\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\xi_1(t)\xi_1(s)\,dt\,ds=\infty.$$

Ennek az állításnak a bizonyítása a 4. 3. megjegyzésből következik.

5. 4. Tétel: *Legyenek $\mu_{f_1}^T$, $\mu_{f_2}^T$, $\mu_{f_3}^T$ mértékek, amelyek a $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)$ spektrális sűrűségfüggvényű stacionárius Gauss-folyamatoknak felelnek meg, $[0, T]$-n. Ha $f_1(\lambda)\leqq f_2(\lambda)\leqq f_3(\lambda)$, akkor $\mu_{f_1}^T$ és $\mu_{f_2}^T$ ortogonalitásából következik $\mu_{f_1}^T$ és $\mu_{f_3}^T$ ortogonalitása.*

Bizonyítás. Legyenek $\xi_1(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ független *Gauss*-folyamatok, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda-)$ $-f_1(\lambda)$, $f_3(\lambda)-f_2(\lambda)$ spektrális sűrűségfüggvényekkel. Ekkor a $\xi_2(t) = \xi_1(t)+\eta(t)$ folyamat spektrális sűrűségfüggvénye $f_2(\lambda)$ lesz, a $\xi_3(t) = \xi_2(t)+\zeta(t)$ folyamat spektrális sűrűségfüggvénye pedig $f_3(\lambda)$. Legyen $\mu_{f_1}^T$ és $\mu_{f_2}^T$ ortogonális és a pozitív definit $g_n(t, s)$ függvények sorozata pedig olyan, hogy teljesüljenek az (5. 7) és (5. 8) feltételek. Könnyen kiszámítható, hogy esetünkben

$$M\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\xi_2(t)\xi_2(s)\,dt\,ds-M\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\xi_1(t)\xi_1(s)\,dt\,ds=$$
$$=\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\eta(t)\eta(s)\,dt\,ds$$

és

$$M\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\xi_3(t)\xi_3(s)\,dt\,ds-M\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\xi_1(t)\xi_1(s)\,dt\,ds=$$
$$=M\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\eta(t)\eta(s)\,dt\,ds+M\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\zeta(t)\zeta(s)\,dt\,ds\geqq$$
$$\geqq M\int_0^T\int_0^T g_n(t,s)\eta(t)\eta(s)\,dt\,ds.$$

Ezért (5. 7) és (5. 8)-ból esetünkben ugyanolyan egyenlőtlenségek következnek $\xi_3(t)$- és $\xi_1(t)$-re is. Fennmarad még az 5. 1 megjegyzés feltételei elegendő voltának felhasználása.

A bizonyított tétel lehetővé teszi, hogy megoldjuk a $\mu_{f_1}^T$ és $\mu_{f_2}^T$ mértékek szingularitásának a kérdését, felhasználva a $\mu_{\bar{f}_1}^T$ és $\mu_{\bar{f}_2}^T$ mértékek szingularitását, ha $f_1 \leqq \bar{f}_1 \leqq \bar{f}_2 \leqq f_2$ és az $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ spektrális sűrűségfüggvények egyszerűbb alakúak. Ilyen spektrális sűrűségfüggvények esetére általánosabb feltételekből indulhatunk ki.

5. 5. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy az $f_1(x)$ és $f_2(x)$ spektrális sűrűségfüggvények eleget tesznek a következő feltételeknek:*

1. $f_1(\lambda) \leqq f_2(\lambda)$,

2. *létezik τ-nál nem nagyobb exponenciális típusú páros egész analitikus függvények olyan $\Delta_n(\lambda)$ sorozata, mely eleget tesz a következő feltételeknek:*

$$a)\quad 0 \leqq \Delta_n(\lambda) \leqq \frac{(f_2(\lambda)-f_1(\lambda))^{\frac{1}{2}}}{f_1(\lambda)}$$

(valós értékekre),

$$b)\quad \int \Delta_n(\lambda)^2 d\lambda < \infty,$$

$$c)\quad \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta_n(\lambda)^2 \Delta_n(\mu)^2 f(\lambda) f(\mu) \frac{\sin^4 \frac{a}{2}(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^4}\, d\lambda\, d\mu = +\infty .$$

Akkor $T > 2a+2\tau$ mellett a $\mu_{f_1}^T$ és $\mu_{f_2}^T$ mértékek ortogonálisak.

Bizonyítás. A tétel feltételeiből következik, hogy

$$\Delta_n(\lambda) = \int e^{i\lambda s} g_n(s)\, ds,$$

ahol $g_n(s)$ csupán a $[-\tau, \tau]$ intervallumon nem zérus és $\int g_n(s)^2 ds < \infty$. Vezessük be a

$$G_n(t, s) = \int\limits_{-a}^{a} g_n(s-u) g_n(t+u)(a-|u|)\, du$$

függvényt. Elemi számítással igazolható, hogy

$$\iint e^{i\lambda t + i\mu s} G_n(t, s)\, dt\, ds = \Delta_n(\lambda)\Delta_n(\mu) \frac{4\sin^2 \frac{a}{2}(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^2} \tag{5. 9}$$

(az utóbbi képletből következik $G_n(t, s)$ pozitív definit volta). Felhasználva (5. 9)-et, kiszámítható, hogy $T = 2a+2\tau$ esetén

$$M \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} G_n(t, s)[\xi_2(t)\xi_2(s) - \xi_1(t)\xi_1(s)]\, dt\, ds = a^2 \int [f_2(\lambda) - f_1(\lambda)] \Delta_n(\lambda)^2 d\lambda,$$

$$D\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} G_n(t,s)\xi_1(t)\xi_1(s)\,dt\,ds =$$

$$= 32\iint \Delta_n^2(\lambda)\Delta_n^2(\mu)f(\lambda)f(\mu)\frac{\sin^4\frac{a}{2}(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^4}\,d\lambda\,\lambda\mu.$$

Így tehát, a tétel feltételei folytán

$$D\int_{|t|\leq\frac{T}{2},}\int_{|s|\leq\frac{T}{2}} G_n(t,s)\xi_1(t)\xi_1(s)\,dt\,ds \to +\infty.$$

Minthogy

$$\iint \Delta_n^2(\lambda)\Delta_n^2(\mu)f_1(\lambda)f_1(\mu)\frac{\sin^4\frac{a}{2}(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^4}\,d\lambda\,d\mu \leq$$

$$\leq \iint \Delta_n^4(\lambda)f_1(\lambda)^2\frac{\sin^4\frac{a}{2}(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^4}\,d\lambda\,d\mu \leq \int \Delta_n^4(\lambda)f_1(\lambda)^2\,d\lambda\int\frac{\sin^4\frac{a}{2}h}{h^4}\,dh \leq$$

$$\leq \int\frac{\sin^4\frac{a}{2}h}{h^4}\,dh\cdot\int[f_2(\lambda)-f_1(\lambda)]\Delta_n^2(\lambda)\,d\lambda,$$

azért

$$\frac{M\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} G_n(t,s)[\xi_2(t)\xi_2(s)-\xi_1(t)\xi_1(s)]\,dt\,ds}{D\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} G_n(t,s)\xi_1(t)\xi_1(s)\,dt\,ds} \geq \frac{a^2}{32\int\frac{\sin^4\frac{a}{2}h}{h^4}\,dh}.$$

Így tehát teljesülnek az 5. 3. tétel feltételei. Ezzel az 5. 5. tételt bebizonyítottuk.

Az 5. 5. tételből különböző konkrét feltételeket kaphatunk mértékek ortogonalitására. Például fennáll az

5. 6. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy létezik olyan* $\alpha>1$, $C_1>0$, $C_2>0$, *hogy elég nagy* $|\lambda|$ *értékekre teljesülnek a*

$$C_1 \leq f_1(\lambda)|\lambda|^{\alpha}, \quad (f_2(\lambda)-f_1(\lambda))|\lambda|^{\alpha+\frac{1}{2}} \geq C_2$$

egyenlőtlenségek. Akkor minden $T>0$ *mellett a* $\mu_{f_1}^T$ *és* $\mu_{f_2}^T$ *mértékek ortogonálisak.*

Bizonyítás. Az 5. 1. lemma és az 5. 4. tétel folytán elegendő bizonyítani a $\mu_{\bar{f}_1}^T$ és $\mu_{\bar{f}_2}^T$ mértékek ortogonalitását, ahol $\bar{f}_1(\lambda)$ azonos $f_1(\lambda)$-val elég nagy $|\lambda|$ értékekre és minden λ-ra

$$\bar{f}_1(\lambda) \geqq \bar{C}_1(1+|\lambda|^\alpha)^{-1}, \quad \bar{C}_1>0, \quad \bar{f}_2(\lambda)=\bar{f}_1(\lambda)+\frac{C}{1+|\lambda|^{\alpha+\frac{1}{2}}}, \quad 0<C<C_2.$$

$\mu_{\bar{f}_1}^T$ és $\mu_{\bar{f}_2}^T$ ortogonalitásának bizonyításához felhasználjuk az 5. 5. tételt, ebben $\Delta_n(\lambda)$-t így választva meg:

$$\Delta_n(\lambda)=k\int_{-n}^{n}\frac{1+|y|^\alpha}{\sqrt{1+|y|^{\alpha+0,5}}}\left[\frac{\sin\varepsilon(\lambda-y)}{\lambda-y}\right]^m dy,$$

ahol m — természetes egész szám, melyre fennáll $m-\frac{\alpha}{2}>2$, $\varepsilon>0$ pedig úgy van megválasztva, hogy $m\varepsilon<\frac{T}{2}$; $\Delta_n(\lambda)$ $m\varepsilon$-nál nem nagyobb exponenciális típusú egész függvény, mely elég kis k mellett eleget tesz a

$$\Delta_n(\lambda) \leqq \frac{\sqrt{C}}{C_1}\frac{1+|\lambda|^\alpha}{\sqrt{1+|\lambda|^{\alpha+0,5}}} \leqq \frac{\sqrt{\bar{f}_2(\lambda)-\bar{f}_1(\lambda)}}{\bar{f}_1(\lambda)}$$

egyenlőtlenségnek.

Az 5. 5. tétel *c)* feltétele egyrészt abból következik, hogy $n\to\infty$ esetén az $\Delta_n(\lambda)$ függvény minden véges intervallumon egyenletesen tart a

$$\Delta(\lambda)=k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+|y|^\alpha}{\sqrt{1+|y|^{\alpha+0,5}}}\left[\frac{\sin\varepsilon(\lambda-y)}{\lambda-y}\right]^m dy$$

függvényhez, mely nagy $|\lambda|$ értékekre eleget tesz a $\Delta(\lambda)\geqq l|\lambda|^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$, $l>0$ egyenlőtlenségnek — másrészt abból, hogy minden $a>0$ mellett a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^{\alpha-\frac{1}{2}}|\mu|^{\alpha-\frac{1}{2}}f_1(\lambda)f_2(\mu)\frac{\sin^4 a(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^4}d\lambda\, d\mu,$$

integrál divergens.

6. §. Hilbert-térben értelmezett korlátlanul osztható eloszlások abszolút folytonossága

Ebben a paragrafusban, eltérően az előzőktől, mértékek abszolút folytonosságának csupán bizonyos feltételeit vizsgáljuk, nem adunk azonban képleteket a sűrűségfüggvényekre, minthogy azok még nem ismeretesek. Feltesszük, hogy egy korlátlanul osztható μ mérték karakterisztikus funkcionálja a $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-térben a következő alakú:

$$(6.1) \qquad \varphi_\mu(z)=\exp\left\{i(b,z)+\int\left(e^{i(z,x)}-1-i(z,x)\chi_1(x)\right)\pi(dx),\right.$$

vagyis, hogy a (2. 2) képletben $A=0$. Kézenfekvő az ilyen mértékeket *Gauss*-komponens nélküli mértékeknek hívni. Könnyen belátható, hogy ahhoz, hogy általános típusú korlátlanul osztható mértékeket kapjunk, elegendő *Gauss*-mérték konvolúcióját képezi egy oly mértékkel, melynek karakterisztikus funkcionálja (6. 1) típusú. Felhasználva ezt a körülményt, lehetséges lesz — e paragrafus eredményeit a 4. § eredményeivel kombinálva — megtalálni az általános típusú korlátlanul osztható mértékek abszolút folytonosságának feltételeit. Amint arról a (6. 1) képlet segítségével könnyen meggyőződhetünk, egy ξ sztochasztikus változó, melynek értékei $\mathfrak{H}$ elemei és eloszlása μ, előállítható a

$$\xi = b + \int_{|x|\leqq 1} x[\nu(dx) - \pi(dx)] + \int_{|x|>1} x\nu(dx), \tag{6.2}$$

alakban, ahol ν *Poisson*-mérték $\mathfrak{B}$-n, független értékkel, melyre $M\nu(A)=\pi(A)$. Ezt az előállítást később felhasználjuk még.

6. 1. Tekintsük először annak a feltételeit, hogy a μ mérték eltoláskor abszolút folytonos legyen. Jelölje μ azt a mértéket $\mathfrak{B}$-n, amely a $\xi+a$ változó eloszlása. Minket azok a feltételek érdekelnek, amelyek mellett μ_a abszolút folytonos lesz μ-re. Az általánősság korlátozása nélkül úgy vehetjük, hogy (6. 2)-ben $b=0$. Ekkor φ_μ-t a (6. 1) képlet határozza meg, $b=0$ mellett, φ_{μ_a}-t pedig ugyanaz a képlet, $b=a$ mellett.

6. 1. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy $a\in\mathfrak{H}$ esetén megadható $\mathfrak{B}$-mérhető, nemnegatív $g_n(x)$ függvények oly sorozata, mely eleget tesz a következő feltételeknek:*

1. $\int g_n(x)x\pi(dx)$ *létezik minden n-re és k-hoz tart;*
2. $\int g_n(x)|x|^2\pi(dx)\to 0$;
3. *létezik oly monoton, alulról konvex, $t>0$-ra értelmezett, a $\varphi(t)>0$, $\varphi(1)=1$,*

$$\varphi(t;s) \leqq \varphi(t)\varphi(s), \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t} = +\infty$$

feltételeknek eleget tevő $\varphi(t)$ függvény, melyre fennáll

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int \left[\varphi(g_n(x)) - 1 - \varphi'(1)(g_n(x)-1)\right]\pi(dx) < \infty.$$

Akkor μ_a abszolút folytonos μ mértékre nézve.

Bizonyítás. Ha a tétel feltételei teljesülnek, választható egy olyan ε_n sorozat, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\varepsilon_n} g_n(x)x\pi(dx) = a.$$

Legyen m_n egész számok olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m_n}}\int_{|x|>\varepsilon_n}(1+|g_n(x)|)\pi(dx) = 0. \tag{6.3}$$

Vezessük be $\mathfrak{H}$-ban a $\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_{m_n}^{(n)}$ független sztochasztikus változókat, melyeknek eloszlása ugyanaz, éspedig

$$P\{\xi_1^{(n)} = 0\} = 1 - \frac{1}{m_n} \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} \pi(dx),$$

$$P\{\xi_1^{(n)} \in C\} = \frac{1}{m_n} \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} \chi_C(x)\pi(dx),$$

ha $0 \bar{\in} C$ ($\chi_c(x)$: a C halmaz indikátorfüggvénye).

Analóg módon legyenek $\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_{m_n}^{(n)}$ szintén független és egyforma eloszlású sztochasztikus változók, melyekre fennáll, hogy

$$P\{\eta_1^{(n)} \in C\} = \frac{1}{m_n} \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} (1+g_n(x))\pi(dx),$$

ha $0 \bar{\in} C$, és

$$P\{\eta_1^{(n)} = 0\} = 1 - \frac{1}{m_n} \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} (1+g_n(x))\pi(dx).$$

Jelöljük $\nu^{(n)}$-nel $\xi_1^{(n)}$ eloszlását; $\tilde{\nu}^{(n)}$-nel $\eta_1^{(n)}$ eloszlását, $\mu^{(n)}$-nel a

$$\zeta_n = \xi_1^{(n)} + \cdots + \zeta_{m_n}^{(n)} - \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} \chi_1(x)x\pi(dx)$$

változó eloszlását, $\tilde{\mu}^{(n)}$-nel pedig a

$$\tilde{\zeta}_n = \eta_1^{(n)} + \cdots + \eta_{m_n}^{(n)} - \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} \chi_1(x)x\pi(dx)$$

változóét. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a $\mu^{(n)}$ mérték konvergál a μ mértékhez, a $\tilde{\mu}^{(n)}$ mérték pedig a μ_a mértékhez, valamilyen halmazalgebrán, melynek σ lezárása azonos $\mathfrak{B}$-vel, minthogy e mértékek karakterisztikus funkcionáljai

$$\varphi_{\mu^{(n)}}(z) = \left(1 + \frac{1}{m_n} \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} (e^{i(z,x)} - 1)\pi(dx)\right)^{m_n} e^{-i \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} (x,z)\chi_1(x)\pi(dx)} =$$

$$= \exp\Big\{ \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} (e^{i(z,x)} - 1 - i(z,x)\chi_1(x))\pi(dx)\Big\} + o(1)$$

alakúak a (6. 3) feltétel folytán; ugyanígy

$$\varphi_{\tilde{\mu}^{(n)}}(z) = \exp\Big\{ \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} (e^{i(z,x)} - 1 - i(z,x)\chi_1(x))\pi(1+g_n(x))\pi(dx) +$$

$$+ i \int\limits_{|x|>\varepsilon_n} (z,x)\chi_1(x)g_n(x)\pi(dx)\Big\} + o(1)$$

és

$$\int\limits_{|x|>\varepsilon_n} (e^{i(z,x)} - 1 - i(z,x)\chi_1(x))g_n(x)\pi(dx) \to 0,$$

amellett $\int\limits_{|x|>\varepsilon_n} g_n(x)(x,z)\chi_1(x)\pi(dx)\to(a,z)$ a tétel 1. és 2. feltételei következtében. Megjegyezzük, hogy a 3. 4. tétel folytán

$$\frac{d\tilde{\mu}^{(n)}}{d\mu^{(n)}}(\zeta_n) = M\left(\prod_{k=1}^{m_n}\frac{d\tilde{\nu}^{(n)}}{d\nu^{(n)}}(\xi_k^{(n)})|\zeta_n\right)$$

és

$$\frac{d\tilde{\nu}^{(n)}}{d\nu^{(n)}}(\xi_k^{(n)}) = 1+g_n(\xi_k^{(n)})-\frac{1}{m_n}\int\limits_{|x|>\varepsilon_n} g_n(x)\pi(dx)\chi_{nk}+o\left(\frac{1}{m_n}\right),$$

ahol $\chi_{nk}=1$, ha $\xi_k^{(n)}=0$, $\chi_{nk}=0$, ha $|\xi_k^{(n)}|>0$, $g_n(0)=0$-t veszünk. Továbbá

$$M\varphi\left(\frac{d\tilde{\mu}^{(n)}}{d\mu^{(n)}}(\zeta_n)\right) = M\varphi\left(M\left(\prod_{k=1}^{m_n}\frac{d\tilde{\nu}^{(n)}}{d\nu^{(n)}}(\xi_k^{(n)})|\zeta_n\right)\right) \leqq$$

$$\leqq M\varphi\left(\prod_{k=1}^{m_n}\frac{d\tilde{\nu}^{(n)}}{d\nu^{(n)}}(\xi_k^{(n)})\right) \leqq \prod_{k=1}^{m_n} M\varphi\left(\frac{d\tilde{\nu}^{(n)}}{d\nu^{(n)}}(\xi_k^{(n)})\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{m_n}\left(1+M\Psi\left(\frac{d\tilde{\nu}^{(n)}}{d\nu^{(n)}}(\xi_k^{(n)})-1\right)\right) \leqq \exp\left\{m_n M\Psi\left(\frac{d\tilde{\nu}^{(n)}}{d\nu^{(n)}}(\xi_k^{(n)})-1\right)\right\} \leqq$$

$$\leqq \exp\left\{m_n o\left(\frac{1}{m_n}\right)+\int\limits_{|x|>\varepsilon_n}\Psi(g_n(x))\pi(dx)\right\},$$

ahol $\Psi(t) = \varphi(1+t)-1-\varphi'(1)t$.

Ezért

$$\varlimsup_{n\to\infty} M\varphi\left(\frac{d\tilde{\mu}^{(n)}}{d\mu}(\zeta_n)\right)<\infty,$$

és a tétel bizonyítása következik a 3. 1, II. megjegyzésből.

Nevezzük a-t a μ mérték megengedhető eltolásának, ha μ_a abszolút folytonos μ szerint.

6. 1. KÖVETKEZMÉNY. *Jelölje N_ε azon z elemek összességét, melyekhez található olyan E halmaz, amelyet tartalmaz az origó körüli ε sugarú S_ε gömb, és amelyre $z=\int\limits_E x\pi(dx)$. Akkor az $N_0=\bigcap\limits_\varepsilon \bar{N}_\varepsilon$ halmaz, (ahol $\bar{N}_\varepsilon$ N_ε lezárása) a μ mérték megengedhető eltolásaiból áll.*

A bizonyításhoz válasszuk meg az $\varepsilon_n\to 0$ sorozatot és az $E_n\subset S_{\varepsilon_n}$ halmazokat úgy, hogy az E_n-ek ne messék egymást és fennálljon

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{E_n} x\pi(dx) = a,$$

ezenfelül pedig egy $c_n>0$ számsorozatot, amely tegyen eleget a $c_n\downarrow 0$, $\Sigma c_n=\infty$ feltételeknek. Akkor vehető $g_n(x)=\sum\limits_{m=n}^{k_n} c_m\chi_{E_m}(x)$, ahol k_n olyan, hogy $\sum\limits_{m=n}^{k_n} c_m\to 1$. A megfelelő $\varphi(t)$ függvény könnyen megszerkeszthető.

6. 1. Megjegyzés. Analóg módon meggyőződhetünk arról, hogy ha $a \in N_0$, akkor a szintén megengedhető eltolás lesz.

Alkalmazzuk a kapott eredményeket a $\mathfrak{H}$-beli korlátlanul osztható eloszlások konkrét osztályára: a stabilis eloszlásokra. A véges dimenziós eset analógiájára így nevezzük azokat a korlátlanul osztható eloszlásokat, melyekre

$$\pi(A) = \int_0^\infty \frac{dr}{r^{1+\alpha}} h(A_r), \tag{6.4}$$

ahol h valamilyen véges mérték, mely az $|x|=1$ gömb felületén van összpontosítva, A_r pedig egy halmaz az $|x|=1$ gömb felületén, melyet az $A_r = \{y; ry \in A\} \cap \cap \{y; |y|=1\}$ összefüggés határoz meg.

6. 2. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy a (6. 4) képletben az α exponensre fennáll $\alpha > 1$ és adott a mellett megadható oly nemnegatív mérhető $g_n(x)$ függvények sorozata, melyekre fennáll*

$$a = \lim_{n\to\infty} \int g_n(x) x h(dx). \tag{6.5}$$

Akkor a a μ mérték megengedhető eltolása lesz.

Bizonyítás. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $g_n(x)$ korlátos. Vegyünk valamilyen ε_n-t és vezessük be a $f_n(x)$ mennyiséget a képlet

$$\int_{\delta_n(x)}^{\varepsilon_n} \frac{dr}{r^\alpha} = g_n(x)$$

szerint. Nyilvánvaló, hogy megválasztható úgy az ε_n sorozat, hogy $\varepsilon_{n+1} < \delta_n(x)$. Vezessük be az $E_n = (x;\ \delta_n(x) \le |x| \le \varepsilon_n\}$ jelölést. Akkor $\int_{E_n} x\pi(dx) = \int g_n(x) x h(dx)$. Ezután már csak a 6. 1. következményt kell felhasználni.

A (6. 5) típusú eltolások egy K zárt kúpot képeznek $\mathfrak{H}$-ban.

6. 2. Megjegyzés. Felhasználva a 6. 1. megjegyzést, meggyőződhetünk arról, hogy azok az a-k, melyekre $a \in K$, szintén megengedhető eltolásai a mértéknek $\mathfrak{H}$-ban.

6. 2. Ebben a pontban, épp úgy, mint az előzőben, korlátlanul osztható eloszlásokat fogunk tekinteni, melyeknek nincs *Gauss*-komponensük. Tegyük fel, hogy a μ_1 és μ_2 mértékeket a

$$\varphi_K(z) = \exp\left\{i(a_K, z) + \int \left(e^{i(z,x)} - 1 - i\chi_1(x)(z, x)\right)\pi_k(dx)\right\}$$

karakterisztikus funkcionálok határozzák meg. Alább elegendő feltételeket mondunk ki arra, mikor abszolút folytonos μ_1 μ_2-re. A 4. § eredményeivel kombinálva e paragrafus feltételei lehetővé teszik, hogy elégséges feltételeket kapjunk tetszőleges korlátlanul osztható eloszlások abszolút folytonosságára.

6. 3. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő feltételek:*

1. *a $\pi_2(dx)$ mérték abszolút folytonos a $\pi_1(dx)$ mértékre és* $\dfrac{d\pi_2}{d\pi_1}(x) = \varrho(x)$;

2. *a $\varrho(x)$ függvény eleget tesz az* $\displaystyle\int \frac{(\varrho(x)-1)^2}{1+|\varrho(x)-1|}\pi_1(dx) < \infty$ *feltételnek,*

3. *az* $a_2 - a_1 = \int \chi_1(x)(\varrho(x)-1)x\pi_1(dx)$. *Akkor a* μ_2 *mérték abszolút folytonos* μ_1 *szerint.*

Bizonyítás. Először feltesszük, hogy teljesül a következő feltétel: valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett

$$|\varrho(x)-1| \leqq 1-\varepsilon. \tag{6. 6}$$

Válasszuk meg a G_{nk} ($k=1, \ldots$, n) halmazokat és az $x_{nk} \in G_{nk}$ pontokat úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek

$$\text{I.} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{i(z, x_{nk})} - 1 - i\chi_1(x_{nk})(z, x_{nk})\right)\pi_j(G_{nk}) = \\ = \int \left(e^{i(z,x)} - 1 - \chi_1(x)(z, x)\right)\pi_j(dx).$$

$$\text{II.} \quad a_2 - a_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \chi_1(x_{nk})\left(\varrho(x_{nk})-1\right)\pi_1(G_{nk})x_{nk}.$$

$$\text{III.} \quad \sup_k \sup_{x\in G_nk} \left|\frac{\varrho(x)}{\varrho(x_{nk})} - 1\right| \to 0 \quad \text{ha} \quad n\to\infty.$$

Legyen most $\xi_{n1}^{(j)}, \ldots, \xi_{nn}^{(j)}$ ($j=1, 2$) mindegyik csoportban független változók két csoportja, és a $\xi_{nk}^{(j)}$ változó legyen $\pi_j(G_{nk})$ paraméterű *Poisson*-eloszlású. Ha $\lambda_j^{(n)}$ jelenti azt a mértéket az n-dimenziós euklidészi térben, mely a $(\xi_{n1}^{(j)}, \ldots, \xi_{nn}^{(j)}$ vektornak felel meg, akkor $\lambda_2^{(n)}$ abszolút folytonos lesz $\lambda_1^{(n)}$-re és — minthogy

$$P\{\xi_{nk}^{(j)} = m\} = \frac{1}{m!}\{\pi_j(G_{nk})\}^m \exp\{-\pi_j(G_{nk})\},$$

$$\frac{d\lambda_2^{(n)}}{d\lambda_1^{(n)}}(\xi_{n1}^{(1)}, \ldots, \xi_{nn}^{(1)}) = \prod_{k=1}^{n} \left\{\frac{\pi_2(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\right\}^{\xi_{nk}^{(1)}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \left(\pi_2(G_{nk}) - \pi_1(G_{nk})\right)\right\}. \tag{6. 7}$$

Tekintsük az n-dimenziós tér $\mathfrak{H}$-ra való azon leképezését, melyet az

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \to a_1 + \sum\left(\alpha_k - \chi_1(x_{nk})\pi_1(G_{nk})\right)x_{nk}$$

összefüggés határoz meg. E leképezéskor a $\lambda_j^{(n)}$ mértékek rendre átmennek a $\mu_j^{(n)}$ mértékekbe ($\mathfrak{B}$-n), melyeknek karakterisztikus funkcionáljai

$$\varphi_1^{(n)}(z) = \exp\left\{i(a_1, z) + \sum_{k=1}^{n} \left(e^{i(z, x_{nk})} - 1 - \chi_1(x_{nk})(z, x_{nk})\right)\pi_1(G_{nk})\right\},$$

illetve

$$\varphi_2^{(n)}(z) = \exp\left\{i(a_1, z) + \sum_{k=1}^{n} (e^{i(z, x_{nk})} - 1)\pi_2(G_{nk}) - i \sum_{k=1}^{n} \chi_1(x_{nk})(z, x_{nk})\pi_1(G_{nk})\right\}.$$

Az I. és II. feltételekből következik, hogy $\varphi_j^{(n)}(z)$ konvergál $\varphi_j(z)$-hez. A 3. 4 tétel folytán a $\mu_2^{(n)}$ mérték abszolút folytonos a $\mu_1^{(n)}$ mértékekre és

$$\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1^{(n)}) = M\left(\prod_{k=1}^{n} \left\{\frac{\pi_2(G_{nk})}{\pi_2(G_{nk})}\right\}^{\xi_{nk}^{(1)}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \left(\pi_1(G_{nk}) - \pi_2(G_{nk})\right)\right\} \middle| \xi_1^{(n)}\right),$$

ahol $\xi_1^{(n)} = a_1 + \sum_{k=1}^{n} [\xi_{nk}^{(1)} - \chi_1(x_{nk})\pi_1(G_{nk})] x_{nk}$ sztochasztikus változó $\mathfrak{H}$-ban. Elegendő megmutatnunk, hogy létezik olyan $g(t)$ függvény, melyre $g(t) \geqq 0$, $\frac{g(t)}{t} \to \infty$, ha $t \to \infty$ és $Mg\left(\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1^{(n)})\right) < \infty$ egyenletesen n szerint. Legyen $g(t) = t \ln t + 1$. Ez a függvény alulról konvex. Ezért $g(M[\eta|\xi]) \leqq M[g(\eta)|\xi]$ azaz $Mg(M[\eta|\xi]) \leqq$ $\leqq Mg(\eta)$. Továbbá

$$g\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi_2(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\right)^{\xi_{nk}^{(1)}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}(\pi_1(G_{nk}) - \pi_2(G_{nk}))\right\}\right) \leqq 1 +$$

$$+ \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi_2(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\right)^{\xi_{nk}^{(1)}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}(\pi_1(G_{nk}) - \pi_2(G_{nk}))\right\}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{\pi_2(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})} \cdot \xi_{nk}^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}(\pi_1(G_{nk}) - \pi_2(G_{nk}))\right].$$

Megjegyezzük, hogy

$$M\left(\frac{\pi_2(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\right)^{\xi_{nk}^{(1)}} = e^{\pi_2(G_{nk}) - \pi_1(G_{nk})}, \tag{6.8}$$

$$M\left(\frac{\pi_2(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\right)^{\xi_{nk}^{(1)}} \cdot \xi_{nk}^{(1)} = \pi_2(G_{nk}) e^{\pi_2(G_{nk}) - \pi_1(G_{nk})}. \tag{6.9}$$

Ezért, tekintetbe véve a $\xi^{(1)}$ változók függetlenségét és a (6. 8) és (6. 9) egyenlőtlenségeket, azt kapjuk, hogy

$$Mg\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi_2(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\right)^{\xi_{nk}^{(1)}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}(\pi_1(G_{nk}) - \pi_2(G_{nk}))\right\}\right) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\frac{\pi_2(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\ \pi_2(G_{nk}) + \pi_1(G_{nk}) - \pi_2(G_{nk})\right] =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1 + \frac{\pi_2(G_{nk}) - \pi_1(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\right)\frac{\pi_2(G_{nk}) - \pi_1(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})} + \right.$$

$$\left. + \ln\left(1 + \frac{\pi_2(G_{nk}) - \pi_1(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\right) - \frac{\pi_2(G_{nk}) - \pi_1(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\right]\pi_1(G_{nk}).$$

Minthogy $|\alpha| < 1 - \varepsilon$ mellett megadható oly C_ε állandó, melyre $[\ln(1+\alpha)\cdot\alpha +$

$+\ln(1+\alpha)-\alpha] \leqq C_\varepsilon\alpha^2$, a (6. 6) feltétel teljesülésekor fennáll

$$Mg\left[\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1^{(n)})\right] \leqq 1+C_\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi_2(G_{nk})-\pi_1(G_{nk})}{\pi_1(G_{nk})}\right)^2\pi_1(G_{nk}) =$$

$$= 1+C_\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Big[\int_{G_{nk}}(\varrho(u)-1)\pi_1(du)\Big]^2\Big[\int_{G_{nk}}\pi_1(du)\Big]^{-1} \leqq$$

$$\leqq 1+C_\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\int_{G_{nk}}(\varrho(u)-1)^2\pi_1(du) \leqq 1+C_\varepsilon\int(\varrho(u)-1)^2\pi_1(du) \leqq$$

$$\leqq 1+(2-\varepsilon)C_\varepsilon\int\frac{(\varrho(u)-1)^2}{1+|\varrho(u)-1|}\pi_1(du).$$

Az egyenlőtlenségek eme láncolatában felhasználtuk a *Cauchy*-egyenlőtlenséget és a (6. 6)-ból következő $1 \leqq \frac{2-\varepsilon}{1+|\varrho(u)-1|}$ egyenlőtlenséget.

Lássuk most a tétel bizonyítását az általános esetben. Vegyünk valamilyen $\varepsilon\in(0, 1)$-et és jelöljük $\mathfrak{H}_1$-gyel $\mathfrak{H}$ azon x elemeinek a halmazát, melyekre $|\varrho(x)-1| \leqq 1-\varepsilon$, $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}\setminus\mathfrak{H}_1$.

A tétel 2) feltételéből következik, hogy

$$\int_{\mathfrak{H}_2}\pi_1(du)<\infty \quad \text{és} \quad \int_{\mathfrak{H}_2}\varrho(u)\pi_1(du) = \pi_2(\mathfrak{H}_2)<\infty$$

ezért végesek lesznek az

$$\int_{\mathfrak{H}_2}\chi_1(u)u\pi_1(du), \quad \int_{\mathfrak{H}_2}\chi_1(u)u\pi_2(du)$$

integrálok is. Vezessük be a $\mu_{k,j}$ $(k, j=1, 2)$ mértékeket, melyek karakterisztikus funkcionáljai

$$\varphi_{1,j}(z) = \exp\Big\{i(a_j, z)-i\int_{\mathfrak{H}_2}(u, z)\chi_1(u)\pi_j(du)+\int_{\mathfrak{H}_1}\big(e^{i(u,z)}-1-i\chi_1(u)(u, z)\big)\pi_j(du)\Big\},$$

$$\varphi_{2,j}(z) = \exp\Big\{\int_{\mathfrak{H}_2}(e^{i(u,z)}-1)\pi_j(du)\Big\},$$

Minthogy $\varphi_{1,j}(z)\varphi_{2,j}(z)=\varphi_j(z)$, $\mu_j = \mu_{1,j}*\mu_{2,j}$. Ezért elegendő bizonyítani, hogy $\mu_{1,2}$ abszolút folytonos $\mu_{1,1}$-re és $\mu_{2,2}$ $\mu_{2,1}$-re. A $\mu_{1,1}$ és $\mu_{1,2}$ mértékekre teljesülnek a tétel feltételei és (6. 6), úgyhogy $\mu_{1,2}$ abszolút folytonos $\mu_{1,1}$-re a bizonyítottak folytán. Legyen most $\pi_j^*(A) = \pi_j(A\cap\mathfrak{H}_2)$ $(\pi_j^*(\mathfrak{H})<\infty)$. Akkor, mint könnyen belátható,

$$\mu_{2,j} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\pi_j^*(\mathfrak{H})}}{k!}\pi_j^{*(k)},$$

ahol

$$\pi_j^{*(0)}(-A) = \begin{cases}1, & \text{ha } A\ni 0\\ 0, & \text{ha } A\not\ni 0,\end{cases} \quad \pi_j^{*(k)} = \pi_j^{*(k-1)}*\pi_j^*.$$

A π_2^* mérték abszolút folytonos a π_1^* mértékre ezért $\pi_2^{*(k)}$ abszolút folytonos $\pi_1^{*(k)}$-re, vagyis $\mu_{2,2}$ abszolút folytonos $\mu_{2,1}$-re. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

7. §. Független növekményű folyamatoknak megfelelő mértékek

Tegyük fel, hogy adva van két sztochasztikusan folytonos független növekményű $\xi_1(t)$ és $\xi_2(t)$ folyamat, melyek a $[0, T]$-ben vannak definiálva; értékeik tartozzanak $R^{(m)}$-hez. Legyen

$$
(7.1) \qquad Me^{i(z, \xi_k(t))} = \exp\left\{i(a_k(t), z) - \frac{1}{2}(A_k(t)z, z) + \right.
$$
$$
\left. + \int \left[e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z, x)}{1+(x, x)}\right] \Pi_k(t, dx)\right\}, \qquad (k=1, 2)
$$

ahol $a_k(t)$ folytonos függvény, melynek értékei $R^{(m)}$-be tartoznak, $A(t)$ egy minden t-re nemnegatív szimmetrikus operátor $R^{(m)}$-ben, amelyre fennáll, hogy $(A_k(t)z, z)$ monoton folytonos függvénye minden $z \in R^{(m)}$-re, $\Pi_k(t, dx)$ pedig egy mérték, mely az $R^{(m)}$ *Borel*-halmazokon van értelmezve, t szerint monoton nemcsökkenő és amelyre fennáll $\int \frac{(x, x)}{1+(x, x)} \Pi_k(t, dx) < \infty$. Vizsgálni fogjuk a $\xi_k(t)$ folyamatoknak megfelelő μ_k mértékeket, az $\mathfrak{F}^{(m)}_{[0,T]}$ σ-algebrán; ez utóbbi minimális azon σ-algebrák közül, amelyek tartalmazzák az összes, a $[0, T]$ szakaszon értelmezett és $R^{(m)}$-beli értékekkel bíró $x(t)$ függvények $F^{(m)}_{[0,T]}$ terének összes hengerhalmazát.

7. 1. Ebben a pontban független növekményű *Gauss*-folyamatokat fogunk vizsgálni, azaz olyan folyamatokat, melyek esetében a (7. 1) képletben $\Pi_k(t, dx) = 0$ (azonosan). Akkor a μ_k mérték vizsgálható azon $F^{(m)}_{[0,T]}$-beli függvények $L_2^{(m)}[0, T]$ *Hilbert*-terén, melyekre $\int_0^T |x(t)|^2\, dt < \infty$. Ezért a μ_k mértékekre alkalmazhatók a 4. § eredményei. Jelöljük $\bar{\mu}_k$-sal a $\bar{\xi}_k(t) = \xi_k(t) - M\xi_k(t)$ folyamatoknak megfelelő mértékeket. A 4. 2. lemmából következik a

7. 1. LEMMA. *Abból, hogy μ_2 abszolút folytonos a μ_1-re nézve, következik, hogy μ_2 abszolút folytonos a μ_1-re nézve.*

Erre a lemmára a következő tétel bizonyításához lesz szükség.

7. 1. TÉTEL: *Ahhoz, hogy μ_2 abszolút folytonos legyen a μ_1-re, szükséges, hogy minden $t \in [0, T]$ és $z \in R^{(m)}$-re teljesüljön a $D(\xi_1(t) - \xi_1(0), z) = D(\xi_2(t) - \xi_2(0), z)$ egyenlőség.*

Ha a tétel feltételei teljesülnek, akkor $\bar{\mu}_2$ abszolút folytonos $\bar{\mu}_1$-re. Tekintsük az $F^{(m)}_{[0,T]}$ tér következő, S-sel jelölt — leképezését az $F^{(1)}_{[0,T]}$ térre:

$$
Sx(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(x\left(\frac{kt}{n}\right) - x\left(\frac{k-1}{n}t\right), z\right)^2,
$$

ahol a határérték a $\bar{\mu}_1$ mérték szerint konvergencia értelmében értendő (vagyis a $\bar{\mu}_2$ mérték szerint is, minthogy $\bar{\mu}_2$ abszolút folytonos $\bar{\mu}_1$-re). Akkor

$$
S\bar{\xi}_i(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=t}^{n} \left(\bar{\xi}_i\left(\frac{k}{n}t\right) - \bar{\xi}_i\left(\frac{k-1}{n}t\right), z\right)^2
$$

a konvergencia valószínűség szerinti. De

$$D\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{\xi}_i\left(\frac{k}{n}t\right)-\bar{\xi}_i\left(\frac{k-1}{n}t\right),z\right)^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} M\left(\bar{\xi}_i\left(\frac{k}{n}t\right)-\bar{\xi}_i\left(\frac{k-1}{n}t\right),z\right)^4 =$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n}\left[D\left(\bar{\xi}_i\left(\frac{k}{n}t\right)-\bar{\xi}_i\left(\frac{k-1}{n}t\right),z\right)\right]^2 \leqq$$

$$\leqq 3\sup_k D\left(\bar{\xi}_i\left(\frac{k}{n}t\right)-\bar{\xi}_i\left(\frac{k-1}{n}t\right),z\right) D(\bar{\xi}_i(t)-\bar{\xi}_i(0),z)\to 0,$$

ha $n\to\infty$. Ezért

$$S\bar{\xi}_i(t) = \lim_{n\to\infty} M\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{\xi}_i\left(\frac{k}{n}t\right)-\bar{\xi}_i\left(\frac{k-1}{n}t\right),z\right)^2 = D(\bar{\xi}_i(t)-\bar{\xi}_i(0),z).$$

Így tehát az $S\bar{\xi}_i(t)$ folyamatnak megfelelő ν_i mérték az egyetlen $D(\bar{\xi}_i(t)-\bar{\xi}_i(0),z)$ függvényre összpontosul. Abból, hogy ν_2 abszolút folytonos ν_1-re, következik a tétel bizonyítása.

A következőkben feltesszük, hogy $\xi_1(0)=\xi_2(0)=0$ 1 valószínűséggel.

A bizonyított tételből következik, hogy van értelme csupán azt az esetet vizsgálni, amidőn $\xi_2(t) = \xi_1(t)+a(t)$, ahol $a(t)$ valamilyen nem-sztochasztikus függvény, és $M\xi_1(t)=0$.

Az alaptétel megfogalmazásához szükségünk lesz a *Stieltjes*-integrál egy általánosítására. Legyen $A(t)$ egy függvény, melynek értékei $R^{(m)}$-beli lineáris szimmetrikus nemnegatív operátorok, emellett $A(t_2)-A(t_1)$ szintén nemnegatív operátor, $t_1<t_2$ mellett. Tegyük fel továbbá, hogy $e_1,\dots,e_m$ valamilyen ortonormált bázis $R^{(m)}$-ben. Ha $a(t)$ vektorfüggvény, melynek értékei $R^{(m)}$-be tartoznak, akkor $\int_0^T dA(s)$ $a(s)$-en értjük a következőkben azt az $R^{(m)}$-beli vektort, melynek koordinátái

$$\sum_{j=1}^{m}\int_0^T (a(s),e_j)ds(e_i,A(s)e_j) \qquad (i=1,\dots,m)$$

(az összeget akkor tekintjük létezőnek, ha léteznek ezek az integrálok). Megjegyezzük, hogy az $(e_i, A(s)e_j)$ függvények korlátos változásúak lesznek, mivel az $A(t_2)-$ $-A(t_1)$ operátor nemnegatív voltából $t_1<t_2$ következik, hogy

$$|(e_i,A(t_2)e_j)-(e_i,A(t_1)e_j)| \leqq \frac{1}{2}\left[(e_i,[A(t_2)-A(t_1)]e_i)+(e_j,(A(t_2)-A(t_1))e_j)\right].$$

7. 2. TÉTEL: *Legyen $\xi_1(t)$ sztochasztikusan folytonos független növekményű Gauss-folyamat, melyre $\xi_1(0)=0$, $M\xi_1(t)=0$, $D(\xi_1(t),z)=(A(t)z,z)$, és $\xi_2(t) =$ $= \xi_1(t)+a(t)$. Ahhoz, hogy μ_2 abszolút folytonos legyen a μ_1-re szükséges és elégséges, hogy létezzék oly $b(t)$ ($R^{(m)}$-be tartozó értékű) függvény, melyre minden $t\in[0,T]$-re fennáll*

$$a(t) = \int_0^t dA(s)b(s)$$

és

$$\int_0^T (b(s),dA(s)b(s)) = \sum_{i,j}\int_0^T (b(s),e_i)(b(s),e_j)d(A(s)e_i,e_j)<\infty.$$

Ekkor

$$\ln \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)) = \int_0^T (b(s), d\xi_1(s)) - \frac{1}{2} \int_0^T (b(s), dA(s)b(s)), \tag{7.2}$$

itt $\int_0^T (b(s), d\xi_1(s))$ *sztochasztikus integrál* (l. [32], 486. o.)

Bizonyítás. Szükségesség. Először is megjegyezzük, hogy $a(t_2)-a(t_1)$ az $A(t_2)-A(t_1)$ operátor értékkészletébe tartozik, mert az $([A(t_2)-A(t_1)]z, z) = M(\xi_1(t_2)-\xi_1(t_1), z)^2 = 0$ összefüggésből $M(\xi_2(t_2)-\xi_2(t_1), z)^2 = M(\xi_1(t_2)-\xi_2(t_1), z)^2 = M(\xi_1(t_2)-\xi_1(t_1), z)^2+(a(t_2)-a(t_1), z)^2 = 0$ következik, azaz $a(t_2)-a(t_1)$ ortogonális minden z-re, melyekre $([A(t_2)-A(t_1)]z, z) = 0$. Jelöljük $[A(t_2)-A(t_1)]^{-1}(a(t_2)-a(t_1))$-gyel azt a vektort az $A(t_2)-A(t_1)$ operátor értékkészletéből, amelyet ez az operátor $a(t_2)-a(t_1)$-be visz át. Egyetlen ilyen vektor létezik. Vezessük be a $t_{nk} = \frac{kT}{2^n}$

$$b_n(t) = \sum_{t_{nk}<t} [A(t_{nk})-A(t_{n,k-1})]^{-1}(a(t_{nk})-a(t_{nk-1}))$$

jelöléseket. Megmutatjuk, hogy a

$$\int_0^T (b_n(s), dA(s)b_n(s)) = \sum_{i=0}^{2^n-1} (b_n(t_{ni}), a(t_{ni+1})-a(t_{ni}))$$

kifejezés egyenletesen korlátos n-ben. Ehhez tekintsük a következő sztochasztikus változókat:

$$\frac{\int_0^T (b_n(s), d\xi_1(s))}{\int_0^T (b_n(s), dA(s)b_n(s))} \quad \text{és} \quad \frac{\int_0^T (b_n(s), d\xi_2(s))}{\int_0^T (b_n(s), dA(s)b_n(s))} = \frac{\int_0^T (b_n(s), d\xi_1(s))}{\int_0^T (b_n(s), dA(s)b_n(s))} + 1.$$

Tegyük fel, hogy $d_n = \int_0^T (b_n(s), dA(s)b(s)) \to \infty$ valamilyen n sorozatra. Tekintsük az

$$Sx(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n} \int_0^T (b_n(s), dx(s))$$

leképezést, ahol a határértéket az μ_1 mérték szerinti konvergencia értelmében vesszük (vagyis az μ_2 szerinti konvergencia értelmében is). Minthogy

$$M \int_0^T (b_n(s), d\xi_1(s)) = 0,$$

de

$$D \int_0^T (b_n(s), d\xi_1(s)) = \int_0^T (b_n(s), dA(s)b_n(s)) = d_n,$$

$S\xi_1(t)=0$ és $S\xi_2(t)=1$ 1 valószínűséggel. Ez ellentmond annak, hogy μ_2 abszolút folytonos a μ_1-re. Más szóval, létezik olyan C állandó, hogy

$$\int_0^T (b_n(s), dA(s)b_n(s)) \leqq C. \tag{7.3}$$

Tekintsük azon $x(t)$ függvények L_2 lineáris terét, melyek $[0, T]$-n vannak definiálva és értékük $R^{(m)}$-be tartozik, és amelyekre

$$\int_0^T (x(s), dA(s)x(s)) < \infty.$$

Vezessük be L_2-ben a

$$\{x(\cdot), y(\cdot)\} = \int_0^T (x(s), dA(s)y(s))$$

bilineáris formát. Ez a forma felfogható, mint skaláris szorzat, feltéve, hogy azon $x_1(t)$, $x_2(t)$ függvényeket, melyekre $\{x_1(\cdot)-x_2(\cdot), x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\} = 0$, azonosítjuk. Az ilyen azonosítás révén kapott teret jelöljük L_2^*-gal. Könnyen belátható, hogy ez a tér *Hilbert*-tér.

A (7. 3) összefüggésből következik a $b_n(t)$ sorozat gyenge kompaktsága L_2^*-ban. Ezért létezik olyan n_k sorozat és $b(s)$ függvény L_2-ben, melyekre

$$\int_0^T (x(s), dA(s)b_{n_k}(s)) \to \int_0^T (x(s), dA(s)b(s))$$

minden $x(t) \in L_2$-re. Legyen $\chi_t(s)=1$, ha $s \leqq t$, $\chi_t(s)=0$, ha $s>t$ és $z \in R^{(m)}$. Akkor $\chi_t(s)z \in L_2$, úgy, hogy

$$\int_0^T \chi_t(s)(z, dA(s)b_{n_k}(s)) = \int_0^t (z, dA(s)b_{n_k}(s)) \to \int_0^t (z, dA(s)b(s)).$$

Duálisan racionális t esetén azonban

$$\int_0^t (z, dA(s)b_n(s)) = (z, a(t))$$

elegendő nagy n-ekre, a konstrukció értelmében. Így tehát

$$\int_0^t (z, dA(s)b(s)) = (z, a(t)) \tag{7.4}$$

duálisan-racionális t-kre, vagyis minden t-re, minthogy a (7. 4) egyenlőség mindkét oldala folytonos A szerint. Következésképp

$$a(t) = \int_0^t dA(s)b(s)$$

és $b(t) \in L_2$. A tétel feltételeinek szükségességét ezzel bizonyítottuk.

Elégségesség. Legyen

$$\eta = \int_0^T (b(s), d\xi(s)) - \frac{1}{2}\int_0^T (b(s), dA(s)b(s)). \tag{7.5}$$

Elegendő igazolni, hogy

$$\begin{aligned} M\exp\left\{\eta + i\sum_{j=1}^{k}(\xi_1(t_j)-\xi_1(t_{j-1}),\, z_j)\right\} = \\ = \exp\left\{i\sum_{j=1}^{k}(z_j, a(t_j)-a(t_{j-1})) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}(z_j, [A(t_j)-A(t_{j-1})]z_j)\right\} \end{aligned} \tag{7.6}$$

minden természetes k-ra, $0 \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqq T$ és $z_1, \ldots, z_m \in R^{(m)}$.

(7. 6) bal oldalának várható értéke kiszámításához felhasználjuk a

$$Me^{i\varphi_1+\varphi_2} = \exp\left\{M(i\varphi_1+\varphi_2) + \frac{1}{2}M(i\varphi_1+\varphi_2 - iM\varphi_1 - M\varphi_2)^2\right\}$$

képletet, amely igaz abban az esetben, amidőn φ_1 és φ_2 együttes eloszlása normális. E képlet folytán

$$\begin{aligned} M\exp\left\{\eta + i\sum_{j=1}^{k}(\xi_1(t_j)-\xi_1(t_{j-1}),\, z_j)\right\} = \exp\Big\{M\eta + \frac{1}{2}D\eta + \\ + iM\eta\sum_{j=1}^{k}(\xi_1(t_j)-\xi_1(t_{j-1}), z_j) - \frac{1}{2}M\left(\sum_{j=1}^{k}(\xi_1(t_j)-\xi_1(t_{j-1}), z_j)\right)^2\Big\}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Minthogy
$$D\eta = \int_0^T (b(s), dA(s)b(s)),$$

$$M\eta = \frac{1}{2}D\eta = 0. \tag{7.8}$$

Ezenfelül

$$\begin{aligned} M\eta(\xi_1(t_j)-\xi_1(t_{j-1}), z_j) = M\int_0^T (b(s), d\xi_1(s))\int_{t_{j-1}}^{t_j}(z_j, d\xi_1(s)) = \\ = M\int_{t_{j-1}}^{t_j}(b(s), d\xi_1(s))\int_{t_{j-1}}^{t_j}(z_j, d\xi_1(s)) = \\ = M\sum_{r=1}^{m}\int_{j-1}^{T_j}(b(s), e_r)d(\xi_1(s), e_r)\sum_{l=1}^{m}\int_{j-1}^{t_j}(z_j, e_l)d(\xi_1(s), e_l) = \\ = \int_{t_{j-1}}^{t_j}(z_j, dA(s)b(s)) = (z_j, a(t_j)-a(t_{j-1})). \end{aligned} \tag{7.9}$$

(7. 8) és (7. 9)-et (7. 7)-be írva, kapjuk a (7. 6) kifejezést. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

7.2. Tekintsünk két $\xi_j(t)$ $(j=1, 2)$ független növekményű sztochasztikus folyamatot, melyek $t\in[0, T]$-n vannak értelmezve és értékeik $R^{(m)}$-be tartoznak, karakterisztikus függvényeik pedig (7. 1) alakúak.

Az alapvető eredmény megfogalmazásához szükségünk van a független növekményű folyamat speciális előállítására.

Tekintsük a $[0, T]\times R^{(m)}$ topologikus szorzatot. E tér tetszőleges B^* *Borel*-halmaza esetén, melynek nincs közös része a $[0, T]\times\{x; |x|<\varepsilon\}$ halmazzal (valamilyen $\varepsilon>0$ mellett) jelöljük $\nu_j^*(B^*)$-gal azon t pontok számát, melyekre $(t; \xi_j(t+0)-$ $-\xi_j(t-0))\in B^*$. Minthogy $\xi(t)$-nek nincsenek másodfajú szakadásai (l. [17], 48. o. 3. tétel), $\nu^*(B^*)$ véges mennyiség. [17]-ből (12. § és 14. §, 1. tétel) következik, hogy $\nu_j^*(B^*)$ Poisson-eloszlású és $\nu_j^*(B_1^*), \ldots, \nu_j^*(B_k^*)$ független sztochasztikus változók abban az esetben, amidőn a $B_1^*, \ldots, B_k^*$ halmazok páronként közös rész nélküliek. Legyen $M\nu_j^*(B^*)=\Pi_j^*(B^*)$. A $\Pi_j^*(B^*)$ mértéket a következő egyszerű összefüggés kapcsolja össze $\Pi_j(t, A)$-val:

$$\Pi_j(t, A) = \Pi_j^*([0, t]\times A).$$

Tetszőleges $B_\varepsilon^* = [0, t]\times\{x; |x|>\varepsilon\}$ halmazon ν_j^* nemnegatív véges mérték, amely végesszámú pontban van összpontosítva, ezért tetszőleges mindenütt véges, mérhető $f(t, x)$ függvényhez létezik az

$$\int_{|x|>\varepsilon} f(t, x)\nu_j^*(dt, dx)$$

integrál, mely közönséges értelemben veendő. Azokra a mérhető $f(t, x)$ függvényekre, melyekre

$$\int |f(t, x)|^2\Pi_j^*(dt, dx)<\infty,$$

értelmezhető (l. [32], 5. fej. 3. §) a

$$\int f(t, x)[\nu_j^*(dt, dx)-\Pi_j^*(dt, dx)]$$

sztochasztikus integrál. Minthogy a $\nu^*-\Pi^*$ mérték azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy

$$M(\nu_j^*(B_1^*)-\Pi_j^*(B_1^*))(\nu_j^*(B_2^*)-\Pi_j^*(B_2^*)) = \Pi^*(B_1^*\cap B_2^*)$$

([17]-ben a 16. § 1. tételéből és a 15. §. 1. tételéből) következik, hogy a (7. 1) karakterisztikus függvényű $\xi_j(t)$ folyamat előállítható a

$$\xi_j(t) = \xi_j^{(0)}(t)+a_j(t)+\int_0^t\int_{R^{(m)}} x\left[\nu_j^*(ds, dx)-\frac{1}{1+|x|^2}\Pi_j^*(ds, dx)\right] \tag{7.10}$$

alakban, ahol $\xi_j^{(0)}(t)$ független növekményű *Gauss*-folyamat, melyre

$$M\xi_j^{(0)}(t)=0, \quad D(\xi_j^{(0)}(t), z)=(A_j(t)z, z) \quad z\in R^{(m)}.$$

7. 3. TÉTEL: *Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\xi_2(t)$ folyamatnak megfelelő μ_2 mérték abszolút folytonos legyen μ_1-re, az, hogy teljesüljenek a következő feltételek:*

1. $(A(t)z, z)=(A_2(t)z, z)$ *minden* $z\in R^{(m)}$-re $t\in[0, T]$;

2. *létezik olyan* $\pi(t, x)$ *mérhető függvény, melyre minden* $t\in[0, T]$ *és ha* $A\subset R^{(m)}$ *(A Borel-halmaz), akkor*

$$\Pi_2(t, A) = \int_0^t \int_A \pi(s, x)\Pi_1^*(ds, dx);$$

3. *a* $\pi(s, x)$ *függvény eleget tesz* $0<c<t$ *mellett a*

$$\int_{|\pi(s,x)-1|>c} |\pi(s, x)-1|\Pi_1^*(ds, dx)<\infty,$$

$$\int_{|\pi(s,x)-1|\leqq c} (\pi(s, x)-1)^2\Pi_1^*(ds, dx)<\infty$$

feltételeknek;

4. *legyen*

$$a(t) = a_2(t)-a_1(t)-\int_0^T \int_{R^{(m)}} x\frac{\pi(s, x)-1}{1+|x|^2}\Pi_1^*(ds, dx),$$

akkor létezik oly $b(t)$ *függvény, melyre*

$$a(t) = \int_0^t dA_1(s)b(s) \quad \text{és} \quad \int_0^T (b(s), dA_1(s)b(s))<\infty.$$

Ha az 1—4. *feltételek teljesülnek, akkor*

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)) = \exp\left\{\int_0^T (b(s), d\xi_1^{(0)}(s))-\frac{1}{2}\int_0^T (b(s), dA_1(s)b(s))+\right.$$

$$+\int_0^T \int_{R^{(m)}} \ln\pi(t, x)\left[\nu_1^*(dt, dx)-\frac{\Pi_1^*(dt, dx)}{1+\ln^2\pi(t, x)}\right]+ \tag{7.11}$$

$$\left.+\int_0^T \int_{R^{(m)}} \left[\frac{\ln\pi(t, x)}{1+\ln^2\pi(t, x)}-\pi(t, x)+1\right]\Pi_1^*(dt, dx)\right\}$$

(ha $\pi(t, x)$ *zérus az* A^**-halmazon, melyre* $\nu_1^*(B^*>0$*, akkor az* exp *jel utáni kifejezést* $-\infty$*-nel vesszük egyenlőnek,* $e^{-\infty}$*-t pedig nullával).*

Bizonyítás. Szükségesség. Jelölje S az $F_{[0,T]}^{(m)}$ tér $F_{[0,T]}^{(m)}$-re való azon leképezését, melyet a

$$Sx(t) = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left[x(t)-\sum_{\frac{l}{n}<t}\psi_{\varepsilon_k}\left(x\left(\frac{l}{n}\right)-x\left(\frac{l-1}{n}\right)\right)+\int_{|x|>\varepsilon_k}\frac{x}{1+|x|^2}\Pi_1(t, dx)\right]$$

összefüggés definiál, ahol $\psi_\varepsilon(x)=x$ ha $|x|>\varepsilon$, $\psi_\varepsilon(x)=0$, ha $|x|\leqq\varepsilon$ és ε_k nullához tartó sorozat, melyre $\pi_j(T, \{x; |x|=\varepsilon_k\})=0$; a határértékek a μ_1 mérték szerinti konvergencia értelmében veendők. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\frac{l}{n}<t}\psi_{\varepsilon_k}\left(\xi_j\left(\frac{l}{n}\right)-\xi_j\left(\frac{l-1}{n}\right)\right) = \int_0^t \int_{|x|>\varepsilon_k} x\nu_j^*(ds, dx)$$

(minthogy baloldalt a folyamat abszolút értékben ε_k-t meghaladó ugrásainak összege áll). Következőleg

$$S\xi_1(t) = \xi_1^{(0)} + a_1(t)$$

a (2) képlet alapján. Ezért, abból hogy a μ_2 abszolút folytonos a μ_1-re nézve, következik, hogy létezik a

$$S\xi_2(t) = \lim_{k\to\infty} \left\{ \xi_2^{(0)}(t) + a_2(t) + \int_0 \int_{|x|\le\varepsilon_k} x \left[\nu_2^*(ds, dx) - \frac{\Pi_2^*(ds, dx)}{1+|x|^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \int_{|x|>\varepsilon_k} x \frac{[\Pi_1^*(ds, dx) - \Pi_2^*(ds, dx)]}{1+|x|^2} \right\}$$

határérték. Utóbbi csak akkor lehetséges, ha létezik a

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0} \int_0^t \int_{|x|>\varepsilon_k} \frac{x}{1+|x|^2} [\Pi_1^*(ds, dx) - \Pi_2^*(ds, dx)]$$

határérték, emellett

$$S\xi_2(t) = \xi_2^{(0)}(t) + a_2(t) +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_k\to 0} \int_0^t \int_{|x|>\varepsilon_k} \frac{x}{1+|x|^2} [\Pi_1^*(ds, dx) - \Pi_2^*(ds, dx)] = \xi_2^{(0)}(t) + a_1(t) + a(t)$$

(az $a(t)$ függvényt a 7. 3. tétel 4. feltételében vezettük be). A 3. 4. tétel alapján az $S\xi_2(t)$ folyamatnak megfelelő mérték abszolút folytonos az $S\xi_1(t)$-nek megfelelő mértékre. Alkalmazva a 7. 2. tételt független növekményű $S\xi_j(t)$ *Gauss*-folyamatokra, kapjuk az 1. és 4. feltételek szükségességét.

Legyen továbbá A^* valamilyen mérhető halmaz $[0, T]\times R^{(m)}$-ból. Ha $\Pi_1^*(A^*)=0$, akkor azon $x(\cdot)$ függvények C halmazának μ_1 mértéke, melyekre valamilyen t-re $t(t;\, x(t+0)-x(t-0)) \in A^*$, zérussal egyenlő. Következésképp $\mu_2(C)=0$ is igaz, azaz $\Pi_2^*(A^*)=0$. Így tehát $\Pi_2^*(A^*)=0$ minthogy $\Pi_1^*(A^*)=0$. Más szóval Π_2^* abszolút folytonos Π_1^*-re, minthogy

$$\Pi_2^*(A^*) = \int_{A^*} \pi(t, x)\Pi_1^*(dt, dx),$$

ahol $\Pi(t, x)$ valamilyen mérhető függvény. Ezzel a 2. feltétel szükségességét kimutattuk. A

$$\int_{|\pi|(t,x)-1|>c} |\pi(t, x) - 1| \Pi_1^*(dt, dx) = \int_{\pi(t,x)>1-c} (1 - \pi(t, x))\Pi_1^*(dt, dx) +$$

$$+ \int_{\pi(t,x)>1+c} (\pi(t, x) - 1)\Pi_1^*(dt, dx)$$

integrál véges volta bizonyításához elég megmutatni, hogy

$$\int_{\pi(t,x)<1-c} \Pi_1^*(dt, dx) < \infty, \qquad \int_{\pi(t,x)>1+c} \Pi_2^*(dt, dx) < \infty.$$

Jelöljük A_δ^*-val azon $(t;\, x)$ pontok halmazát, melyek eleget tesznek a $\pi(t, x) < 1-c$; $|x|>\delta$ feltételeknek. Tegyük fel, hogy $M\nu_1^*(A_\delta^*) = \Pi_1^*(A_\delta^*) \to \infty$, ha $\delta \to 0$.

Akkor, felhasználva azt a tényt, hogy $\nu_1^*(A_\nu^*)$ *Poisson*-eloszlású és így $D\nu_1^*(A_\delta^*) = \Pi_1^*(A_\delta^*)$, azt kapjuk, hogy $\lim\limits_{\delta\to\infty} \frac{\nu_1^*(A_\delta^*)}{\Pi_1^*(A_\delta^*)} = 1$. Ez azonban nem lehetséges, mert $\Pi_2^*(A_\delta^*) \leqq (1-c)\Pi_1^*(A_\delta^*)$ és így $\overline{\lim\limits_{\delta\to 0}} \frac{\nu_2^*(A_\delta^*)}{\Pi_1^*(A_\delta^*)} \leqq 1-c$. Analóg módon állapítható meg az $\int\limits_{\pi(t,x)>1+c} \pi_2^*(dt, dx)$ integrál végessége.

Végül mutassuk meg, hogy

$$\int\limits_{|\pi(t,x)-1|\leqq c} (\pi(t,x)-1)^2 \Pi_1^*(dt, dx) < \infty. \tag{7.12}$$

Tegyük fel az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy

$$\int\limits_{|\pi(t,x)-1|\leqq c} (\pi(t,x)-1)^2 \Pi_1^*(dt, dx) = \infty.$$

Akkor

$$\lim_{\delta\to\infty} \int\limits_{B_\delta^*} (\pi(t,x)-1)^2 \Pi_1^*(dt, dx) = \infty,$$

ahol B_δ^* azon x-ek halmaza, melyekre $|\pi(t,x)-1| \leqq c$, $|x|>\delta$. Fennáll

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\int\limits_{B_\delta^*} (\pi(t,x)-1)\nu_j^*(dt, dx) - \int\limits_{B_\delta^*} (\pi(t,x)-1)\Pi_1^*(dt, dx)}{\int\limits_{B_\delta^*} (\pi(t,x)-1)^2 \Pi_1^*(dt, dx)} = \begin{cases} 0 & \text{ha } j=1 \\ 1 & \text{ha } j=2 \end{cases}$$

ami ellene mond annak, hogy μ_2 abszolút folytonos a μ_1 mértékre. A kapott ellentmondás meggyőz (7. 12) helyességéről. Így a 3. feltétel szükségességét is bizonyítottuk.

A tétel feltételei elégségességének bizonyításához mutassuk meg a

$$M \exp\left\{i \int_0^T (x(t), d\xi_2(t))\right\} = M \exp\left\{i \int_0^T (x(t), d\xi_1(t))\right\} \tag{7.13}$$

összefüggés fennállását, ahol η (7. 11) jobb oldala.

A (2. 7) képlet alapján

$$\begin{aligned} M \exp\left\{i \int_0^T (x(t), d\xi_2(t))\right\} &= \exp\left\{i \int_0^T (x(t), da_2(t)) - \right. \\ &\left. -\frac{1}{2} \int_0^T (x(t), dA_2(t)x(t)) + \int_0^T \int\limits_{R^{(m)}} \left(e^{i(u, x(t))} - 1 - \frac{i(u, x(t))}{1+|u|^2}\right) \Pi_2^*(dt, du)\right\}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

A (7. 13) összefüggés jobboldala kiszámítására használjuk fel a

$$M\exp\left\{i\int_0^T (x(t), d\xi_1(t))\right\}\eta = M\exp\left\{i\int_0^T (x(t), d\xi_1^{(0)}(t)) +\right.$$

$$\text{(7. 15)}\quad \left.+\int_0^T (b(s), d\xi_1^{(0)}(s))\right\}\times M\exp\left\{i\int_0^T\int_{R^{(m)}} (x(t), u)\left[\nu_1^*(dt, du) - \frac{\Pi_1^*(dt, du)}{1+|u|^2}\right] +\right.$$

$$\left.+\int_0^T\int_{R^{(m)}} \ln\pi(t, u)\left[\nu_1^*(dt, du) - \frac{\Pi_1^*(dt, du)}{1+\ln^2\pi(t, u)}\right]\right\} e^C$$

képletet, ahol

$$C = -\frac{1}{2}\int_0^T (b(s), dA(s)b(s)) + \int_0^T\int_{R^{(m)}}\left[\frac{\ln\pi(t, u)}{1+\ln^2\pi(t, u)} - \pi(t, u) + 1\right]\Pi_1^*(dt, du).$$

(7. 15) jobb oldalának első szorzóját már kiszámítottuk a 7. 1 pontban; a másodikra — felhasználva azt a tényt, hogy

$$Me^{\lambda\nu_1^*(dt,du)} = \exp\{(e^\lambda - 1)\Pi_1^*(dt, du)\}$$

és a ν_1^* mérték értékeinek függetlenségét, az

$$\exp\left\{\int_0^T\int_{R^{(m)}}\left[e^{i(x(t),u)+\ln\pi(t,u)} - 1 - \frac{i(x(t)u)}{1+|u|^2} - \frac{\ln\pi(t, u)}{1+\ln^2\pi(t, u)}\right]\Pi_1^*(dt, du)\right\}$$

kifejezést kapjuk. Felhasználva ezt a képletet, az

$$e^{\ln\pi(t,u)}\Pi_1^*(dt, du) = \Pi_2^*(dt, du)$$

összefüggést és a 4. feltételt, némi átalakítás után megkapjuk a kívánt (7. 13) képletet. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

8. §. Általános Markov-folyamatoknak megfelelő mértékek abszolút folytonossága

8. 1. Legyen $\xi_1(t)$ és $\xi_2(t)$ két *Markov*-folyamat, melyek $[0, T]$-n vannak definiálva, és értékeik az x térbe tartoznak; legyen $P_i(t, x, s, dy)$ az átmeneti valószínűség a $\xi_i(t)$ folyamathoz. Jelöljük μ_i-vel azt a mértéket, amely a $\xi_i(t)$ folyamatnak felel meg. Ha μ_2 abszolút folytonos μ_1-re, akkor a $\xi_2(t)$, $\xi_2(s)$ változópárok együttes eloszlása abszolút folytonos $\xi_1(t)$, $\xi_1(s)$ együttes eloszlására, vagyis a $P\{\xi_2(t)\in dx\}P_2(t, x, s, dy)$ mérték abszolút folytonos a $P\{\xi_1(t)\in dx\}P_1(t, x, s, dy)$ mértékre. Feltesszük, hogy erősebb feltétel is teljesül: minden $t<s$ és $x\in R^{(m)}$ mellett a $P_2(t, x, s, dy)$ mérték abszolút folytonos a $P_1(t, x, s, dy)$ mértékre. Jelöljük a $P_2(t, x, s, dy)$ mérték $P_1(t, x, s, dy)$ szerinti sűrűségfüggvényét $\varrho(t, x, s, y)$-nal.

Legyen $\{t_{n_1}, t_{n_2}, \ldots, t_{n_n}\} = \Lambda_n$ a $[0, T]$ valamilyen részhalmaza, melynek a következő tulajdonsága van: $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$, és ha $\mathfrak{B}_n$ a Λ_n felett értelmezett hengerhalmazok σ-algebrája, akkor a $\bigcup_n \mathfrak{B}_n$ μ_i mértékek szerinti kiegészítése tartalmaz egy $\mathfrak{F}_{[0,T]}^{(m)}$

σ-algebrát, amelyet az összes hengerhalmazok generáltak. Jelöljük $\mu_i^{(n)}$-nel a μ_i mértéket $\mathfrak{B}_n$-en.

Feltesszük, hogy μ_2 abszolút folytonos μ_1-re és $\eta=\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot))$. Akkor $\mu_2^{(n)}$ abszolút folytonos $\mu_1^{(n)}$-re és $\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1^{(n)})=M(\eta|\mathfrak{B}_n)$, ahol $\xi_j^{(n)}$ Λ_n-en értelmezett függvény $\xi_j^{(n)}(t_{nk})=\xi_j(t_{nk})$. Minthogy minden $\{x(t);\, x(t_{nk})\in A_k,\ k=1, \dots, n\}$ típusú C hengerhalmazra

$$\mu_2^{(n)}(C) = \int_X\int_{A_1}\dots\int_{A_n} P\{\xi(0)\in dx_0\}\, P_2(0, x_0, t_{n,1}, dx_1) \dots P_2(t_{n,n-1}, x_{n-1}, t_{n,n} dx_n) =$$

$$= \int_X\int_{A_1}\dots\int_{A_n} \varrho_0(x_0)\varrho(0, x_0, t_{n,1}, x_1) \dots \varrho(t_{n,n-1}, x_{n-1}, t_{n,n}, x_n)\times$$

$$\times P\{\xi_1(0)\in dx_0\} \dots P_1(t_{n,n-1}, x_{n-1}, t_{n,n}, dx_n),$$

ahol $\varrho_0(x)$ $\xi_2(0)$ eloszlásának $\xi_1(0)$ eloszlásához viszonyított sűrűségfüggvénye,

$$\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1^{(n)}(\cdot)) =$$

$$= \varrho_0(\xi_1(0))\varrho(0, \xi_1(0), t_{n,1}, \xi_1(t_{n,1})) \dots \varrho(t_{n,n-1}, \xi_1(t_{n,n-1}), t_{n,n}, \xi_1(t_{n,n})).$$

A 3. 1. lemmából következik, hogy $\lim_{n\to\infty} M(\eta|\mathfrak{B}_n)$ 1 valószínűséggel létezik és azonos η-val. Ezért

$$(8.1)\quad \eta = \lim_{n\to\infty} [\varrho_0(\xi_1(0)\varrho\xi_1(0), t_{n,1}, \xi_1(t_{n,1})) \dots \varrho(t_{n,n-1}, \xi_1(t_{n,n-1}), t_{n,n}, \xi_1(t_{n,n})).$$

Feltesszük továbbá, hogy $\varrho(t, x, s, y)>0$. Legyen $\alpha(t, x, s, y)=\ln \varrho(t, x, s, y)$. Akkor ha $t_{n0}=0$, azt kapjuk, hogy

$$(8.2)\qquad \eta = \varrho_0(\xi_1(0)) \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(t_{n,k}, \xi_1(t_{nk}), t_{n,k+1}, \xi_1(t_{n,k+1}))\right\}.$$

A legutóbbi képlet azt mutatja, hogy egyik mértéknek a másikhoz viszonyított sűrűségfüggvénye milyen típusú lehet *Markov*-folyamatok esetében.

Most kimondunk bizonyos feltételeket, amelyek mellett egy (8. 2) alakú kifejezés valóban egy — *Markov*-folyamatnak megfelelő — mértéknek a másikra vonatkoztatott sűrűségét adja meg.

Jelöljük $\mu_{s,x_0}^{(1)}$-gyel azt a mértéket, amely megfelel a $\xi_{s,x_0}^{(1)}(t)$ *Markov*-folyamatnak az [s, T] szakaszon, és amelynek kezdeti eloszlása $P\{\xi_{s,x_0}^{(1)}(s)=x_0\}=1$ átmeneti valószínűsége pedig $P_1(t_1, x, t_2, dy)$.

8. 1. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy az $\alpha(t_1, x, t_2, y)$ függvény eleget tesz a következő feltételeknek.*

1. *Akármilyenek is $s<s_2$ a $[0, T]$ intervallumból, és az $x\in R^{(m)}$, a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha(t_{n,k}, x(t_{n,k}), t_{n,k+1}, x(t_{n,k+1}))$$

mennyiség, ahol $s_1=t_{n,0}<\ldots<t_{n,n}=s_2$, *a* $\mu_{s_1,x}^{(1)}$ *mérték szerint konvergál valamilyen határértékhez, ha* $\max_k (t_{n,k+1}-t_{n,k}) \to 0$;

2. *x-ben egyenletesen*

$$\int e^{\alpha(t,x,s,y)}\alpha(t,x,s,y)P_1(t,x,s,dy) = O(s-t); \tag{8.3}$$

3) *x-ben egyenletesen*

$$\int e^{\alpha(t,x,s,y)}P_1(t,x,s,dy) = 1+o(s-t); \tag{8.4}$$

Vezessük be a

$$\eta^* = \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha\big(t_{n,k},\xi_1(t_{n,k}),t_{n,k+1},\xi_1(t_{n,k+1})\big)\right\}$$

jelölést, ahol $0=t_{n,0}<\ldots<t_{n,n}=T$ *és* $\lim_{n\to\infty}\max_k (t_{n,k+1}-t_{n,k}) = 0$, $\varrho_0(x)\geqq 0$,*-ra pedig fennáll* $M\varrho_0(\xi_1(0))=1$.

Akkor a μ_2 *mérték, melyet* $\mathfrak{F}_{[0,T]}^{(m)}$*-en az*

$$\mu_2(A) = M\chi_A(\xi_1(\cdot))\varrho_0(\xi_1(0))\eta^* \tag{8.5}$$

összefüggés értelmez, meg fog felelni valamilyen Markov-folyamatnak.

Bizonyítás. Minthogy $\eta^*\geqq 0$ 1 valószínűséggel, a μ_2 mérték, melyet a (8. 5) egyenlőség értelmez, valószínűségi mérték lesz, feltéve, hogy $M\eta^*\varrho_0(\xi_1(0))=1$. Legyen

$$\eta_n = \exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\alpha\big(t_{n,k},\xi_1(t_{n,k}),t_{n,k+1},\xi_1(t_{n,k+1})\big)\right\}.$$

Minthogy (8. 4)-től következik, hogy

$$M\big[\exp\{\alpha(t_{n,k},\xi_1(t_{n,k}),t_{n,k+1},\xi_1(t_{n,k+1}))\}\,\big|\,\xi_1(t_{n,k})\big] = 1+o(t_{n,k+1}-t_{n,k})$$

$$M\eta_n\varrho_0(\xi_1(0)) = 1+\Sigma o(t_{n,k+1}-t_{n,k}) = 1+o(1).$$

Az $M\eta^*\varrho_0(\xi_1(0))=1$ összefüggés bizonyításához elég megmutatni, hogy η_n egyenletesen integrálható. Ekkor a $M\eta_n\varrho_0(\xi_1(0)) = 1+o(1)$ összefüggésben elvégezhető a határátmenet. Az egyenletes integrálhatóság az

$$M(\eta_n\ln\eta_n|\xi_1(0)) = M\left[\exp\sum_{k=0}^{n-1}\alpha\big(t_{n,k},\xi_1(t_{n,k}),t_{n,k+1},\xi_1(t_{n,k+1})\big)\right\}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{n-1}\alpha\big(t_{n,j},\xi_1(t_{n,j}),t_{n,j+1},\xi_1(t_{n;j+1})\big)\Bigg] = \sum_{j=0}^{n-1}O(t_{n,j+1}-t_{n,j}) = O(1)$$

összefüggésből fog következni, (8. 3) és (8. 4) alapján. Most már csak azt kell figyelembe vennünk, hogy a $\varphi(t) = t\ln t+1$ függvény eleget tesz a 3. 1, II. megjegyzés feltételeinek. Ezzel az $M\eta^*\varrho_0(\xi_1(0))=1$ összefüggést bizonyítottuk.

Megmutatjuk, hogy a μ_2 mérték megfelel valamilyen *Markov*-folyamatnak. Vezessük be a

$$\bar{P}_2(t, x, s, A) = \int_{C_s(A)} \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{n-1} \alpha(t_{n,k}, x(t_{n,k}), t_{n,k+1}, x(t_{n,k+1}))\right\} d\mu_{t,x}^{(1)} =$$

$$= M\left[\exp\left\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(t_{n,k}, \xi_1(t_{n,k}), t_{n,k+1}, \xi_1(t_{n,k+1}))\right\} \chi_A(\xi_1(s)) \mid \xi_1(t) = x\right]$$

függvényt, ahol $t = t_{n,0} < \ldots < t_{n,n} = S$, $\max\limits_k (t_{n,k+1} - t_{n,k}) \to 0$, $C_3(A) = \{x(\cdot);\, x(s) \in A\}$ pedig egydimenziós hengerhalmaz. Pontosan úgy, mint fentebb is, kimondható, hogy

$$\int \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(t_{n,k}, x(t_{n,k}), t_{n;k+1}, x(t_{n,k+1}))\right\} d\mu_{t,x}^{(1)} = 1.$$

Ezért $s_1 < s_2 < \ldots < s_l$ mellett

$$\mu_2\left(\bigcap_{k+1}^{l} C_{sk}(A_k)\right) = M\varrho_0(\xi_1(0))\eta^* \prod_{k=1}^{l} \chi_{A_k}(\xi_1(s_k)) =$$

$$= M\varrho_0(\xi_1(0)) \prod_{k=1}^{l} \lambda(s_{k-1}, s_k)\chi_{A_k}(\xi_1(s_k)) \quad (s_0 = 0)$$

ahol

$$\lambda(s_{k-1}, s_k) = \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha(t_{n,j}, \xi_1(t_{n,j}), t_{n,j+1}, \xi_1(t_{n,j+1}))\right\}$$

$$s_{k-1} = t_{n,0} < \cdots < t_{n,n} = s_k, \quad \max_k (t_{n,k+1} - t_{n,k}) \to 0.$$

Továbbá

$$M \prod_{k=1}^{l} [\lambda(s_{k-1}, s_k)\chi_{A_k}(\xi_1(s_k))]\varrho_0(\xi_1(0)) =$$

$$= M\varrho_0(\xi_1(0)) \prod_{k=1}^{l-1} \lambda(s_{k-1}, s_k)\chi_{A_k}(\xi_1(s_k)) \times M\{\lambda(s_{l-1}, s_l)\chi_{A_l}(\xi_1(s_l)) \mid \xi_1(s_{l-1})\} =$$

$$= M\varrho_0(\xi_1(0)) \prod_{k=1}^{l-1} \lambda(s_{k-1}, s_k)\chi_{A_k}(\xi_1(s_k))\bar{P}_2(s_{l-1}, \xi_1(s_{l-1}), s_l, A_l).$$

Így tehát

$$\mu_2\left(\bigcap_{k=1}^{l} C_{sk}(A_k)\right) = \int_{A_{l-1}} \mu_2\left(\bigcap_{k=1}^{l-2} C_{sk}(A_k) \cap C_{s_{l-1}}(dy_{l-1})\right) \bar{P}_2(s_{l-1}, y_{l-1}, s_l, A_l).$$

Alkalmazva ezt az összefüggést $\mu_2(\bigcup\limits_{k=1}^{l-2} C_{s_k}(A_k) \cap C_{s_{l-1}}(dy_{l-1}))$-re é. í. t., kapjuk, hogy

$$\mu_2\left(\bigcap_{k=1}^{l} C_{sk}(A_k)\right) = \int_{A_1} \mu_2(C_{s_1}(dy_1)) \int_{A_2} \bar{P}_2(s_1, y_1, s_2, dy_2) \ldots \int_{A_{l-1}} \bar{P}_2(s_{l-1}, y_{l-1}, s_l, A_l).$$

Ez utóbbi egyenlőség azt mutatja, hogy a μ_2 mérték megfelel egy Markov-folyamatnak, melynek átmeneti valószínűsége $\bar{P}_2(t, x, s, dy)$. Ezzel a tétel bizonyítása kész.

8. 1. Megyjegyzés. A tétel akkor is igaz marad, ha megadható oly $R^{(m)}$-beli E_n-Borel halmazok oly sorozata, melyre $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup_n E_n = R^{(m)}$ és minden l-re

$$\mu_1 \left(\bigcap_{k=1}^{l} C_{sk}(E_n) \right) \geqq 1 - \delta_n, \quad \delta_n \to 0,$$

és a 2. és 3. feltételek x-ben egyenletesen teljesülnek mindegyik E_n halmazon.

Hogy ennek az állításnak a helyességéről meggyőződjünk, vezessük be az

$$\alpha^{(n)}(t, x, s, y) = \chi_{E_n}(x)\alpha(t, x, s, y)$$

függvényt és ennek alapján szerkesszük meg a $\mu_2^{(n)}$ mértékeket ugyanúgy, mint ahogy az α függvény alapján megszerkesztettük μ_2-t. Ekkor $\mu_2^{(n)}$ meg fog felelni valamilyen Markov-folyamatnak és Var $(\mu_2^{(n)} - \mu_2) \leqq \delta_n$.

8. 2. Tekintsük most e tétel alkalmazását ugrásokból álló *Markov*-folyamatokra (az ilyen folyamatok definícióját l. például [32]-ben, 403. o.).

Tegyük fel, hogy a $\xi_1(t)$ folyamattal kapcsolatban annak a valószínűsége, hogy a $[t, t+h]$ szakaszon pontosan egy ugrás történik, mely után $\xi_i(t+h) \in A$, azon feltétel mellett, hogy $\xi_i(t) = x$ — egyenlő $\pi_i(t, x, A)h + O(h)$-val (x és t szerint egyenletesen), annak a valószínűsége pedig, hogy egynél több ugrás történik, $O(h)$ (x és t szerint egyenletesen). Akkor annak a valószínűsége, hogy ugrás nem történik, $1 - \pi_i(t, x, X)h + O(h)$ lesz, és az $\xi_i(t)$ folyamat átmenet-valószínűsége

$$P_i(t, x, t+h, A) = [1 - \pi_i(t, x, X)h]\delta(x, A) + \pi_i(t, x, A)h + o(h) \tag{8. 6}$$

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \bar{\in} A. \end{cases}$$

alakú lesz. A (8. 6) összefüggésből könnyen levezethető, hogy a $\xi_i(t)$ folyamat átmenet-valószínűségeit teljesen meghatározza a $\pi_i(t, x, A)$ függvény, feltéve, hogy $\pi_i(t, x, X)$ korlátos.

Vizsgáljuk most azt a problémát, létezik-e a

$$\lim_{n\to\infty} \sum \alpha(t_{n,k}, \xi_1(t_{n,k}), t_{n,k+1}, \xi_1(t_{n,k+1}))$$

határérték, ugrásokból álló folyamat esetében.

8. 1. Lemma. *Legyen $\xi_1(t)$ ugrásokból álló folyamat, melyre* $\sup_{t,x} \pi_i(t, x, X) < \infty$, *$\alpha(t, x, y)$ legyen mérhető az x, y változók összessége szerint és folytonos t szerint; legyen $\alpha(t, x, x) = 0$. Akkor* 1 *valószínűséggel létezik a*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(t_{n,k}, \xi_1(t_{n,k}), \xi_1(t_{n,k+1})) \tag{8. 7}$$

kifejezés határértéke, ahol $s = t_{n,0} < \ldots < t_{n,n} = t$ és $\max_k (t_{n,k+1} - t_{n,k}) \to 0$.

A lemma bizonyításához megjegyezzük, hogy a $\xi_1(t)$ folyamat sztochasztikusan ekvivalens lesz a $\xi_1'(t)$ lépcsőfüggvénnyel, melynek véges számú lépcsője van (l. [32], 456. o., 2. következmény). Ha a $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$ pontok a $\xi_1'(t)$ folyamat szakadási pontjai, könnyen belátható, hogy

$$(8.8) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{n-1} \alpha\big(t_{n,K}, \xi_1(t_{n,K}), \xi_1(t_{n,K+1})\big) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha\big(\tau_i, \xi_1'(\tau_i-0), \xi_1'(\tau_i+0)\big)$$

(megjegyezzük, hogy ha (8. 7)-ben a limesz jele alatt levő $\xi(t)$-t sztochasztikusan ekvivalens folyamattal helyettesítjük, az összeg csak nulla mértékű halmazon fog megváltozni, és következésképp, a határérték 1 valószínűséggel nem változik).

8. 2. TÉTEL: *Legyen $\xi_1(t)$ és $\xi_2(t)$ két, ugrásokból álló Markov-folyamat, melyekre teljesül a (8. 6) összefüggés. Ha $\pi_2(t, x, dy)$ abszolút folytonos $\pi_1(\alpha, x, dy)$-re nézve és $\varrho(t, x, y) = \dfrac{\pi_2(t, x, dy)}{\pi_1(t_1 x, dy)} > 0$, a $\xi_2(0)$ eloszlás pedig abszolút fólytonos a $\xi_1(0)$ eloszlásra nézve, akkor μ_2 abszolút folytonos μ_1-re nézve és $\dfrac{d\mu_2}{d\mu_1} = \eta$ (η-t a (8. 2) képlet definiálja), ahol*

$$\alpha(t, x, s, y) = \ln\left[\frac{1-\pi_2(t, x, X)(s-t)}{1-\pi_1(t, x, X)(s-t)}\delta(x, y) + \delta(t, x, y)\big(1-\delta(x, y)\big)\right]$$

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

$\varrho_0(x)$ pedig a $\xi_2(0)$ eloszlás sűrűsége a $\xi_1(0)$ eloszlás szerint.

Bizonyítás. Először is

$$\alpha(t, x, s, y) = [\pi_1(t, x, X) - \pi_2(t, x, X)](s-t)\delta(x, y) + \ln \varrho(t, x, y)\{1-\delta(x, y)\} +$$
$$+ o(s-t)$$

és léteznek a következő limeszek ($s = t_{n0} < \ldots < t_{n,n} = t$),

$$\max_k (t_{n,k+1} - t_{n,k}) \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \big[\pi_1\big(t_{n,k}, \xi_1(t_{n,k}), X\big) - \pi_2\big(t_{n,k}, \xi_1(t_{n,k}), X\big)\big](t_{n,k+1} - t_{n,k}) \times$$
$$\times \delta\big(\xi_1(t_{n,k}), \xi_1(t_{n,k+1})\big) = \int_t^s \big[\pi_1\big(u, \xi_1(u), X\big) - \pi_2\big(u, \xi_1(u), X\big)\big] du,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \varrho\big(t_{n,k}, \xi_1(t_{n,k}), \xi_1(t_{n,k+1})\big)\big[1 - \delta\big(\xi_1(t_{n,k}), \xi_1(t_{n,k+1})\big)\big]$$

a 8. 1. lemma folytán. Ezen felül

$$\int e^{\alpha(t,x,s,y)} P_1(t,x,s,dy) =$$

$$= \int \left\{ \frac{1-\pi_2(t,x,X)(s-t)}{1-\pi_1(t,x,X)(s-t)} \delta(x,y) + \varrho(t,x,y)(1-\delta(x,y)) \right\}$$

$$\{[1-(s-t)\pi_1(t,x,X)]\delta(x,dy) + (s-t)\pi_1(t,x,dy)\} + o(s-t) =$$

$$= 1-(s-t)\pi_2(t,x,X) + (s-t)\int \varrho(t,x,y)\pi_1(t,x,dy) + o(s-t) = 1+o(s-t).$$

Továbbá

$$\int e^{\alpha(t,x,s,y)} \alpha(t,x,s,y) P_1(t,x,s,dy) =$$

$$= \int \alpha(t,x,s,y)[[1-\pi_2(t,x,X)(s-t)]\delta(x,dy) + (s-t)\pi_2(t,x,dy)] = O(s-t).$$

Így tehát a 8. 1. tétel minden feltétele teljesül.

A tétel bizonyítása befejezéséhez elegendő megmutatni, hogy $P_2(t,x,s,A)$ azonos a

$$\bar{P}_2(t,x,s,A) = M\{\lambda(t,s)\chi_A(\xi_1(s))|\xi(t)=x\}$$

mennyiséggel, ahol

$$\lambda(t,s) = \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(t_{n,k}, \xi_1(t_{n,k}), t_{n,k+1}, \xi_1(t_{n,k+1}))\right\},$$

$$t = t_{n,0} < \cdots < t_{n,k} = t, \qquad \max_k (t_{n,k+1} - t_{n,k}) \to 0.$$

Ez igazolva lesz, ha megmutatjuk, hogy

(8. 9) $$|P_2(t,x,s,A) - \bar{P}_2(t,x,s,A)| = o(s-t)$$

x és A-ban egyenletesen. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\xi_1(t)$ lépcsős folyamat.

Megjegyezzük, hogy a 8. 1 lemmából és (8. 8)-ból következik, hogy

$$\lambda(t,s) = \exp\left\{\int_t^s [\pi_1(u,\xi_1(u),X) - \pi_2(u,\xi_1(u),X)]\,du + \right.$$

$$\left. + \sum_{t<\tau_k<s} \ln \varrho(\tau_k, \xi_1(\tau_k-0), \xi_1(\tau_k+0))\right\},$$

ahol a τ_k-k a $\xi_1(t)$ folyamat szakadási pontjai. Ezért

(8. 10) $$M(|\lambda(t,s) - e^{\alpha(t,\xi_1(t),s\xi_1(s)}|\,|\xi_1(t)) = o(s-t),$$

minthogy abban az esetben, amidőn t és s közt nem történik egyetlen ugrás, sem,

$$|\lambda(t,s) - e^{\alpha(t,\xi_1(t),s\xi_1(s))}| = o(s-t),$$

ha pedig pontosan egy ugrás történik, akkor

$$|\lambda(t,s) - e^{\alpha(t,\xi_1(t),s\xi_1(s)}| = O(s-t)$$

$O(s-t)$ valószínűséggel. Végül annak a valószínűsége, hogy egynél több ugrás történik, $o(s-t)$-vel egyenlő. (8. 10)-ből következik (8. 9). Ezzel a tétel bizonyítása kész.

8. 3. Tekintsük a $\xi(t)$ folytonos Markov-folyamatot, melynek értékei az $R^{(m)}$ m-dimenziós euklidészi térből valók. Ha a folyamat átmenet-valószínűsége, $P(t, x, s, dy)$ minden $\varepsilon>0$-ra eleget tesz a

$$(8.11) \qquad \int_{|x-y|\leq\varepsilon} (y-x)P(t, x, s, dy) = a(s, x)(s-t)+o(s-t)$$

$$(8.12) \qquad \int_{|x-y|\leq\varepsilon} (y-x, z)^2 P(t, x, s, dy) = \big(A(s, x)z, z\big)(s-t)+o(s-t)$$

$$(8.13) \qquad \int_{|x-y|>\varepsilon} P(t, x, s, dy) = o(s-t)$$

feltételeknek, X-ben egyenletesen minden kompaktumon, akkor a $\xi(t)$ folyamatot diffúziós folyamatnak hívjuk. A (8. 11)—(8. 13) képletekben x, y, a, z $R^{(m)}$-beli vektorok, A szimmetrikus nemnegatív operátor $R^{(m)}$-ben. Az $a(s, x)$ vektort a diffúziós folyamat átvitel-vektorának nevezzük, az $A(s, x)$ operátort pedig a diffúzió operátorának. Meghatározott feltételek mellett $a(s, x)$ és $A(s, x)$ teljesen meghatározzák a folyamat átmenet-valószínűségét. Ha $a(s, x)$ és $A(s, x)$ folytonosak és minden kétszer folytonosan differenciálható $\varphi(y)$ függvényre az $\int \varphi(y)P(t, x, s, dy)=u_s(t, x)$ integrál kétszer folytonosan differenciálható x szerint, akkor $u_s(t, x)$ $t<s$ esetén kielégíti az

$$(8.14) \qquad -\frac{\partial u_s(t, x)}{\partial t} = \sum a_k(s, x)\frac{\partial u_s}{\partial x^i}+\frac{1}{2}\sum_{k,j} \alpha_{k,j}(s, x)\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^k\,\partial x^j}$$

inverz Kolmogorov-egyenletet, $u_s(s, x)=\varphi(x)$ kezdeti feltétel mellett. Az egyenletesen $a_k(s, x)$ és x^x rendre az a, ill. x vektorok komponensei, $\alpha_{k,j}$ pedig az A operátor matrixának elemei.

Legyen $a(s, x)$ és $A(s, x)$ olyan, hogy a (8. 14) egyenletnek egyetlen megoldása van, mely eleget tesz az $u_s(x, s)=\varphi(x)$ feltételnek minden kétszer folytonosan differenciálható $\varphi(x)$ függvény esetére. Ekkor egyértelműen meghatározható $\int \varphi(y)P(t, x, s, dy)$ minden kétszer folytonosan differenciálható $\varphi(x)$ függvény esetében, ez pedig egyértelműen meghatározza $P(t, x, s, dy)$-t.

A következőkben oly diffúziós folyamatot tekintünk, melyek átmenet-valószínűségeit teljesen meghatározzák az $a(s, x)$ és $A(s, x)$ függvények. Azt is fel fogjuk tenni, hogy a (8. 11) és (8. 12) feltételek $\varepsilon=+\infty$ mellett teljesülnek:

$$(8.15) \qquad \left|\int (y-x)P(t, x, s, dy)\right| = O(s-t),$$

$$(8.16) \qquad \int (y-x)^2 P(t, x, s, dy) = O(s-t),$$

$$(8.17) \qquad \int (y-x)^m P(t, x, s, dy) = o(s-t)$$

ahol $m>2$. Emellett feltesszük, hogy a $a(s, x)$ és $A(s, x)$ eleget tesznek a Lipschitz-feltételnek valamilyen K-ra:

$$|a(s, x)-a(s, y)|+\|A(s, x)-A(s, y)\| \leqq K|x-y| \tag{8.18}$$

($\|A\|$ az A operátor normája $R^{(m)}$-ben).

Egy a felsorolt feltételeknek eleget tevő $\xi(t)$ folyamathoz értelmezhető az $\int_0^t (f(s, \xi(s)), d\xi(s))$ integrál (ahol $f(s, x)$ folytonos vektorfüggvény, $R^{(m)}$-be tartozó értékekkel) a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (f(s_k, \xi(s_k)), [\xi(s_{k+1})-\xi(s_k)]) \qquad 0 = s_0 < \cdots < s_n = t$$

összeg határértékeként. Meg kell jegyezni, hogy

$$\int_0^t (f(s, \xi(s)), d\xi(s)) = \int_0^t (f(s, \xi(s)), a(s, \xi(s)))ds + \int_0^t (f(s, \xi(s)), d\zeta(s))$$

ahol

$$\zeta(s) = \xi(s) - \int_0^t a(\theta, \xi(\theta))d\theta.$$

Könnyen belátható, hogy $\zeta(s)$ martingál; ezért $\int_0^t (f(s, \xi(s)), d\zeta(s))$ sztochasztikus integrál és

$$M \int_0^t (f(s, \xi(s)), d\zeta(s)) = 0,$$

$$M\left[\int_0^t (f(s, \xi(s)), d\zeta(s))\right]^2 = \int_0^t M(A(s, \xi(s))f(s, \xi(s)), f(s, \xi(s)))ds.$$

8. 3. Tétel: *Legyen $c(s, x)$ vektorfüggvény, mely folytonos a változók összességén,*

$$d(s, x) = (a(s, x), c(s, x)) + \frac{1}{2}(A(s, x)c(s, x), c(s, x))$$

pedig számértékű függvény. Akkor

$$\exp\left\{\int_0^T (c(s, \xi(s)), d\xi(s)) - \int_0^T d(s, \xi(s))ds\right\} \tag{8.19}$$

valamilyen Markov-folyamatnak megfelelő mértéknek a $\xi(t)$ folyamatnak megfelelő mérték szerinti sűrűségét szolgáltatja.

Bizonyítás. Vezessük be a

$$\beta(s, x, t, y) = (c(s, x), y-x-a(s, x)[t-s]), \qquad \alpha = \beta - \frac{1}{2}\beta^2$$

mennyiségeket. Akkor

$$\int_0^T (c(s, \xi(s)), d\xi(s)) - \int_0^T d(s, \xi(s))ds =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(t_{n,k}, \xi(t_{n,k}), t_{n,k+1}, \xi(t_{n,k+1})),$$

ahol $0 = t_{n,0} < \cdots < t_{n,n} = T, \quad \max_k (t_{n,k+1} - t_{n,k}) \to 0$. Ezenfelül, ha

$$s = t_{n,0} < \cdots < t_{n,n} = t, \quad \max_k (t_{n,k+1} - t_{n,k}) \to 0,$$

akkor létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(t_{n,k}, \xi(t_{n,k}), t_{n,k+1}, \xi(t_{n,k+1})) =$$

$$= \int_s^t (c(u, \xi_1(u)), d\xi(u)) - \int_s^t d(u, \xi(u))du$$

határérték. Felhasználva az

$$|e^{x-\frac{x^2}{2}} - 1 - x| \leqq C|x|^3,$$

egyenlőtlenséget, meggyőződhetünk arról, hogy

$$\left|M\left(e^{\alpha(t_{n,k}, \xi(t_{n,k}), t_{n,k+1}, \xi(t_{n,k+1}))} - 1 | \xi(t_{n,k})\right)\right| \leqq$$

$$\leqq \left|M\beta(t_{n,k}, \xi(t_{n,k}), t_{n,k+1}, \xi(t_{n,k+1}))\right| \xi(t_{n,k})\Big| +$$

$$+ CM\left(|\beta(t_{n,k}, \xi(t_{n,k}), t_{n,k+1}, \xi(t_{n,k+1}))|^3 | \xi(t_{n,k})\right).$$

(8. 11)-ből következik, hogy

$$\int \beta(t_{n,k}, x, t_{n,k+1}, y) P(t_{n,k}, x, t_{n,k+1}, dy) =$$

$$= \left(c(t_{n,k}x), \int (y-x) P(t_{n,k}, x, t_{n,k+1}, dy) - (t_{n,k+1} - t_{n,k}) a(t_{n,k}, x)\right) =$$

$$= o(t_{n,k+1} - t_{n,k})$$

x-ben egyenletesen. Ezenfelül (8. 18)-ból következik, hogy

$$\int |\beta(t_{n,k}, x, t_{n,k+1}, y)|^3 P(t_{n,k}, x, t_{n,k+1}, dy) =$$

$$= O(t_{n,k+1} - t_{n,k})^3 + \int |y-x|^3 P(t_{n,k}, x, t_{n,k+1}, dy) = o(t_{n,k+1} - t_{n,k})$$

szintén x-ben egyenletesen. Továbbá

$$\left|\int e^{\alpha(t,x,s,y)}\alpha(t,x,s,y)P(t,x,s,dy)\right| =$$

$$= \left|\int \alpha(t,x,s,y)P(t,x,s,dy)\right| + \left|\int \beta(t,x,s,y)\alpha(t,x,s,y)P(t,x,s,dy)\right| +$$

$$+ C\int |\beta(t,x,s,y)|^3\alpha(t,x,s,y)P(t,x,s,dy) = O(s-t)+$$

$$+ O\left(\left|\int (y-x)P(t,x,s,dy)\right|\right) + O\left(\sum_{k+2}^{5}\int |y-x|^k P(t,x,s,dy)\right) = O(s-t).$$

Következésképp teljesülnek a 8. 1. tétel 2. és 3. feltételei, x-ben egyenletesen, minden kompaktumon. A $\xi(t)$ folyamat folytonosságából 1 valószínűséggel következik, hogy minden δ_n-hez található olyan E_n kompaktum, melyre $P\{\xi(t)\in E_n, 0 \leqq t \leqq T\} \geqq 1-\delta_n$. Így tehát teljesülnek a 8. 1. megjegyzés feltételei. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

8. 2. Megjegyzés. A 8. 1. tétel bizonyításából következik, hogy ha egy Markov-folyamat mértékének a $\xi(t)$ folyamatnak megfelelő mérték szerinti sűrűségét a (8. 19) képlet fejezi ki, akkor e folyamat átmenet-valószínűsége

$$P_2(t,x,s,A) =$$
$$= M\left(\chi_A(\xi_1(s))\exp\left\{\int_t^s (c(u,\xi(u)),d\xi(u)) - \int_t^s d(u,\xi(u))du\right\}\Big|\,\xi_1(t)=x\right) \tag{8.20}$$

lesz.

8. 4. TÉTEL: *Ha a* $c(u,x)$ *és* $d(u,x)$ *függvények folytonosak argumentumaik összessége szerint és a*

$$a_2(t,x) = a_1(t,x) + A_1(t,x)c(t,x) \tag{8.21}$$

eleget tesznek a 8. 18. *Lipschitz-feltételnek, akkor a* (8. 20) *képlettel meghatározott* $P_2(t,x,s,A)$ *átmenet-valószínűségű folyamat diffúziós folyamat lesz, melynél a diffúziós operátora* $A(t,x)$ *és az átvitelvektor az* $a_2(t,x)$.

Bizonyítás. Tekintsük a következő integrált

$$\int (y-x)P_2(t,x,s,dy) =$$

$$= M_{t,x}[\xi_1(s)-\xi_1(t)]\exp\left\{\int_t^s (c(u_1,\xi_1(u)),d\xi_1(u)) - \int_t^s d(u,\xi_1(u))du\right\},$$

ahol $M_{t,x}$ feltételes várható értéket jelent az $\xi_1(t)=x$ feltétel mellett, vagyis $\mu_{t,x}^{(1)}$ szerinti integrált. Pontosan úgy, mint a 8. 3. tételben, igazolható a határátmenet integrál jel alatti elvégzésének jogosultsága.

$$M_{t,x}[\xi_1(s)-\xi_1(t)]\exp\left\{\int_t^s (c(u,\xi_1(u)),\, d\xi_1(u))-\int_t^s d(u,\xi_1(u))du\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} M_{t,x}[\xi_1(s)-\xi_1(t)]\exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\alpha(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}),\,t_{n,k+1},\,\xi_1(t_{n,k+1}))\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} M_{t,x}[\xi_1(s)-\xi_1(t)]\prod_{k=0}^{n-1}(1+\beta(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}),\,t_{n,k+1})\xi_1(t_{n,k+1})),$$

ahol
$$t = t_{n,0}<\dots<t_{n,n} = s, \quad \max(t_{n,k+1}-t_{n,k})\to 0.$$

Ezért

$$\int (y-x)P_2(t,x,s,dy) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} M_{t,x}[\xi_1(s)-\xi_1(t)]\prod_{k=0}^{n-1}(1+\beta(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}),\,t_{n,k+1},\,\xi_1(t_{n,k+1})))=$$

$$= \lim_{n\to\infty} M_{t,x}\sum_{k=0}^{n-1}[\xi_1(t_{n,k+1})-\xi_1(t_{n,k})]\prod_{k=0}^{n-1}(1+\beta(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}),\,t_{n,k+1},\,\xi_1(t_{n,k+1})))=$$

$$= \lim_{n\to\infty} M_{t,x}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=0}^{k-1}(1+\beta(t_{n,j},\,\xi_1(t_{n,j}),\,t_{n,j+1},\,\xi_1(t_{n,j+1})))\times$$
$$\times M(\xi(t_{n,k+1})-\xi(t_{n,k})+$$
$$+\beta(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}),\,t_{n,k+1},\,\xi_1(t_{n,k+1}))[\xi_1(t_{n,k+1})-\xi_1(t_{n,k})]|\xi_1(t_{n,k})).$$

Felhasználva az

$$M(\xi_1(t_{n,k+1})-\xi_1(t_{n,k})|\xi_1(t_{n,k})) = a_1(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}))(t_{n,k+1}-t_{n,k})+o(t_{n,k+1}-t_{n,k}),$$
$$M\{\beta(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}),\,t_{n,k+1},\,\xi_1(t_{n,k+1}))[\xi_1(t_{n,k+1})-\xi_1(t_{n,k})]|\xi_1(t_{n,k})\} =$$
$$= A_1(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}))c(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}))(t_{n,k+1}-t_{n,k})+o(t_{n,k+1}-t_{n,k})$$

összefüggéseket, és a (8. 21) jelölést, azt kapjuk, hogy

$$\int (y-x)P_2(t,x,s,dy) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} M_{t,x}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=0}^{k-1}(1+\beta(t_{n,j},\,\xi_1(t_{n,j}),\,t_{n,j+1},\,\xi_1(t_{n,j+1})))\times$$
$$\times a_2(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}))(t_{n,k+1}-t_{n,k}) =$$

$$= \int_t^s a_2(u,x)du+\lim_{n\to\infty} M_{t,x}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=0}^{k-1}(1+\beta(t_{n,j},\,\xi_1(t_{n,j}),\,t_{n,j+1},\,\xi_1(t_{n,j+1})))\times$$
$$\times[a_2(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,k}))-a_2(t_{n,k},\,\xi_1(t_{n,0}))](t_{n,k+1}-t_{n,k}).$$

Az, hogy a második összeadandó $o(s-t)$ az $|a_2(t,x)-a_2(t,y)| \leqq K|x-y|$ egyenlőtlenségből és a (8. 16)—(8. 17) feltételekből következik. Más szóval tehát

$$\int_t^s (y-x)P_2(t,x,s,dy) = \int_t^s a_2(u,x)du + o(s-t) = a_2(t,x)(s-t)+o(s-t).$$

Ugyanúgy bizonyítható, hogy

$$\int (y-x,z)^2 P_2(t,x,s,dy) =$$

$$M_{t,x}\left[(\xi_1(s)-\xi_1(t),z)^2\right]\exp\left\{\int_t^s (c(u,\xi_1(u)),d\xi_1(u)) - \int_t^s d(u,\xi_1(u))du\right\} =$$

$$= M_{t,x}\left[(\xi_1(s)-\xi_1(t),z)^2\right]+o(s-t) = \left(A_1(t,x)z,z\right)(s-t)+o(s-t).$$

A (8. 13) feltétel a

$$\int |y-x|^3 P_2(t,x,s,dy) = o(s-t)$$

összefüggésből következik. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

8. 3. Megjegyzés. A 8. 4. tétel igaz marad, ha a (8. 15)—(8. 18) feltételek csupán minden kompaktumon teljesülnek. Ehhez fel kell használni a 8. 1. megjegyzést.

8. 1. Következmény. Tegyük fel, hogy a $\xi_1(t)$ és $\xi_2(t)$ folyamatok diffúziós együtthatói: $a_1(t,x)$, $A_1(t,x)$, $a_2(t,x)$, $A_2(t,x)$ eleget tesznek a Lipschitz-feltételeknek, a folyamatok pedig eleget tesznek az összes, fent felsorolt feltételeknek. Ha μ_i a $\xi_i(t)$ folyamatnak megfelelő mérték, akkor ahhoz, hogy μ_2 abszolút folytonos legyen a μ_1 szerint, elegendő, hogy $A_1(t,x)=A_2(t,x)$ fennálljon és létezzék egy $c(t,x)$ vektorfüggvény, melyre az $a_2(t,x)-a_1(t,x) = A(t,x)c(t,x)$ és $\xi_2(0)$ eloszlás abszolút folytonos legyen a $\xi_1(0)$ eloszlásra nézve (a megfelelő sűrűséget jelöljük $\varrho_0(x)$-szel). E feltételek mellett $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$-et a

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)) = \varrho_0(\xi_1(0))\eta$$

képlet szolgáltatja, ahol η-t a (8. 19) kifejezés adja meg.

8. 4. Legyen $y(t)$ egy sztochasztikus folyamat, mely megoldása az

$$y^{(m)}(t)+g(t,y,\dots,y^{(m-1)})+f(t,y,\dots,y^{(m-1)})\alpha(t) = 0 \tag{8.22}$$

differenciálegyenletnek. Ilyen típusú egyenlettel találkozunk véletlen ráhatások befolyása alatt álló rendszerek vizsgálatakor. Különösen érdekes az az eset, amidőn $\alpha(t)$ általánosított folyamat: egy $w(t)$ Wiener-folyamat általánosított deriváltja. A (8. 22) egyenlet értelmezhető egzakte, mint sztochasztikus differenciálegyenlet (l. [15], III. fejezet), ha átírjuk a

$$dy^{(m-1)}(t)+g(t,y,\dots,y^{(m-1)})dt+f(t,y,\dots,y^{(m-1)})dw(t) = 0 \tag{8.23}$$

alakra. Ennek az egyenletnek a megoldása — azon feltétel mellett, hogy g és f folytonos és $y, \ldots, y^{(m-1)}$ szerint eleget tesz a Lipschitz-feltételeknek — létezik, és egyértelműen meghatározott (adott kezdeti feltételek mellett), és az $\{y(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)\}$ m-dimenziós folyamat diffúziós Markov-folyamat lesz,

$$a(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) = \{y', \ldots, y^{(m-1)}, -g(t, y, \ldots, y^{(m-1)})\}$$

átvitel-vektorral és $A(t, y, \ldots, y^{(m-1)})$ diffúzió-operátorral, melyre

$$(A(t, y, \ldots, y^{(m-1)})z, z) = f^2(t, y, \ldots, y^{(m-1)})z_m^2, \quad z = \{z_1, \ldots, z_m\}.$$

Tekintsünk két sztochasztikus folyamatot, $y_1(t)$ és $y_2(t)$-t, melyek megoldásai a

$$dy_i^{(m-1)}(t) + g_i(t, y_i, \ldots, y_i^{(m-1)})dt + f(t, y_i, \ldots, y_i^{(m-1)})dw(t) = 0 \tag{8.24}$$

egyenletnek, egyforma $y_i(0) = y_0$, $y_i^{(k)}(0) = y_k$ $(k=1, \ldots, m-1)$ kezdeti feltételekkel.

A 8. 1. következményből folyik a

8. 5. TÉTEL: *Ha $f(t, y, \ldots, y^{(m-1)}) \geqq \delta > 0$ az argumentumok minden értékére és μ_i az a mérték, mely megfelel az $y_i(t)$ folyamatnak a $\mathfrak{F}_{[0,T]}^{(m)}$-n, akkor μ_2 abszolút folytonos μ_1-re nézve és*

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(y(t)) = \exp\left\{\int_0^T \frac{g_1(t, y(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)) - g_2(t, y(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))}{f^2(t_1 y(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))} dy^{(m-1)}(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{g_1^2(t, y(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)) - g_2^2(t, y(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))}{f^2(t, y(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))} dt\right\}. \tag{8.25}$$

9. §. Mértékek abszolút folytonossága a tér egyes transzformációi esetében

Legyen μ mérték valamilyen $(X, \mathfrak{B})$ mérhető téren, T pedig X mérhető leképezése T-re. Jelöljük ν-vel azt a mértéket, melyet μ-ből a T: $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ (minden $A \in \mathfrak{B}$-re) leképezéskor kapunk. Érdekelni fognak bennünket azok a feltételek, melyek mellett a ν mérték abszolút folytonos lesz μ-re nézve. Ahogy már megjegyeztük, ezt a feladatot CAMERON és MARTIN megoldották [2]—[4] munkáikban arra az esetre, amidőn μ Wiener-folyamatnak megfelelő mérték. A. D. SATASVILI [33]-ban megoldotta ezt a feladatot *Gauss*-mértékek transzformációi bizonyos osztályára.

Arra szorítkozunk, hogy mértékeket egy $\mathfrak{H}$ szeparábilis Hilbert-tér $\mathfrak{B}$ halmazai σ-algebráján vizsgáljuk, mely utóbbi $\mathfrak{H}$ Borel-halmazai σ-algebrájának kiegészítése a kiindulási μ mérték szerint. Feltesszük továbbá, hogy a $T(x)$ leképezésnek erős első variációja van, azaz létezik $\delta T(x)$ lineáris operátorok oly családja, melyre

$$|T(x+u) - T(x) - \delta T(x)u| = o(|u|), \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Ha az A operátor alakja $A = E + B$, ahol E egységoperátor, B teljesen folytonos, λ_k pedig a $B + B^* + BB^*$ szimmetrikus teljesen folytonos operátor sajátértékeinek sorozata (B^* a B operátor adjungáltja), akkor legyen

$$|\det A| = \sqrt{\prod_K |1 + \lambda_K|},$$

ha a végtelen szorzat konvergál vagy nullához divergál.

Az alapvető eredmény megfogalmazásához tudnunk kell, hogyan viselkedik a μ mérték a legegyszerűbb transzformációk: az eltolási transzformációk esetében. Legyen $S_a x = x+a$, $\mu_a = \mu(S_a^{-1})$. Jelöljük L-lel azt a lineáris sokaságot $\mathfrak{H}$-ban, melyre μ_a abszolút folytonos μ-re nézve, $a \in L$. Vezessük be a $\frac{d\mu_a}{d\mu}(x) = \varrho(a, x)$ jelölést.

9. 1. Tétel: *Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő feltételek:*

1. $\varrho(a, x) > 0$, *ha a* $a \in L$ *és* μ *szerint majdnem minden* x-re; *továbbá létezik olyan ortonormált* $e_1, e_2, \ldots$ *sorozat, mely teljes L-ben, és amelyre*

$$\lim_{n\to\infty} \varrho\left(\sum_{k=1}^{n} (a, e_k)e_k, x_0 + \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k\right) = \varrho(a, x_0 + x)$$

minden $a \in L$-re *és* μ *szerint majdnem minden* x_0 *és* x-re, $\mathfrak{H}$-*ból;*

2. *a* $T(x)$ *transzformáció invertálható, vagyis létezik oly* $U(x)$ *transzformáció, melyre* $T(U(x)) = U(T(x)) = x$; *létezik* $\delta U(x)$ *és* $|\det \delta U(x)| > 0$ *és* $\mathfrak{B}$-*mérhető;*

3. *minden* $x \in \mathfrak{H}$-*hoz értelmezve van és* $\mathfrak{B}$-*mérhető az* $\varrho(U(x)-x, x)$ *kifejezés, emellett* $U(x)-x \in L$.

Akkor a ν *mérték abszolút folytonos a* μ *mértékre nézve és*

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \varrho(x - U(x), x)\,|\det \delta U(x)|. \tag{9.1}$$

Bizonyítás. Minthogy a (9. 1) képlet érvényes arra az esetre, amidőn T eltolás, feltehető $T(0)=0$, vagyis $U(0)=0$. Jelöljük $\mathfrak{H}_k$-val az $e_1, \ldots, e_k$ vektorok lineáris burkát, P_k-vel pedig a $\mathfrak{H}_k$-ra való projiciálás operátorát. Legyen $T_k(x) = x + P_k(T(P_k x) - x)$ és tegyük fel, hogy $T_k(x)$ invertálható és $T_k^{-1}(x) = U_k(x)$. Legyen m_n mérték az $R^{(n)}$ n-dimenziós euklidészi térben, melyet a μ mértékből az $x \to \{(x, e_1), \ldots, (x, e_n)\}$ leképezéssel kaptunk. Minthogy az m_n mérték tetszőleges eltolásai abszolút folytonosak (ez az 1. feltételből következik), m_n-nek létezik sűrűsége Lebesgue-mérték szerint:

$$m_n(A_{(n)}) = \int_{A_{(n)}} p_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \quad A_{(n)} \subset R^{(n)}.$$

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ funkcionál csupán $(x, e_1), \ldots, (x, e_n)$, $n > k$-től függ,

$$f(x) = \varphi((x, e_1), \ldots, (x, e_n)).$$

Akkor

$$\int f(T_K(x))\mu(dx) =$$
$$= \int \varphi(T_k^{(1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, T_k^{(n)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))p_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, d\alpha_1 \ldots, d\alpha_n, \tag{9.2}$$

ahol

$$T_k^{(i)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left(T_k\left(\sum_1^n \alpha_j e_j\right), e_i\right).$$

Vezessük be (9. 2)-ben a

$$\beta_i = T_k^{(i)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

változó-cserét, azaz legyen

$$\alpha_i = U_k^{(i)}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \left(U_k\left(\sum_i^n \beta_j e_j\right), e_i\right).$$

Azt kapjuk, hogy

$$\int f(T_k(x))\,\mu(dx) = \int \varphi(\beta_1, \ldots, \beta_n) \frac{p_n(U_k^{(1)}(\beta_1, \ldots, \beta_n), \ldots, U_k^{(n)}(\beta_1, \ldots, \beta_n))}{p_n(\beta_1, \ldots, \beta_n)} \times$$

$$\times \left| \frac{D[U_k^{(1)}(\beta_1, \ldots, \beta_n), \ldots, U_k^{(n)}(\beta_1, \ldots, \beta_n)]}{D[\beta_1, \ldots, \beta_n]} \right| p_n(\beta_1, \ldots, \beta_n) d\beta_1 \ldots d\beta_n.$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy

$$\left| \frac{D[U_k^{(1)}(\beta_1, \ldots, \beta_n), \ldots, U_k^{(n)}(\beta_1, \ldots, \beta_n)]}{D[\beta_1, \ldots, \beta_n]} \right| = \left| \det \delta U_k \left(\sum_1^n \beta_j e_j \right) \right| =$$

$$= \left| \det \delta U_k \left(\sum_1^\infty \beta_j e_j \right) \right|.$$

Tekintsük x-et mint sztochasztikus változót a $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{B}, \mu\}$ valószínűségi téren. Akkor a 3. 4. tételből következik, hogy valós $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ mennyiségekre igaz a

$$\frac{p_n((x, e_1) - \gamma_1, \ldots, (x, e_n)) - \gamma_n}{p_n((x, e_1), \ldots, (x, e_n))} = M \left[\varrho \left(\sum_1^n \gamma_i e_i, x \right) \middle| (x, e_1), \ldots, (x, e_n) \right]$$

összefüggés, jobb oldalt feltételes várható érték áll. Ezért

$$\int f(T_k(x)) \mu(dx) = M \left\{ \varphi((x, e_1), \ldots, (x, e_n)) \, |\det \delta U_k(x)| \times \right.$$

$$\left. \times M \left[\varrho \left(\sum_1^n (x - U_K(x), e_i) e_i, x \right) \middle| (x, e_1), \ldots, (x, e_n) \right] \right\} =$$

$$= M f(x) \, |\det \delta U_k(x)| \, \varrho(x - U_k(x), x).$$

Így tehát

$$\int f(T_k(x))\,\mu(dx) = \int f(x)\,|\det \delta U_k(x)|\,\varrho(x - U_k(x), x) \tag{9. 3}$$

n szerinti határátmenet igazolja, hogy fennáll (9. 3) minden olyan f funkcionálra, melyre értelmezve van a (9. 3) bal oldala. Tegyük fel most, hogy a $T(x)$ transzformáció olyan, hogy az $\tilde{U}_k(x) = x + P_k(U(P_k x) - x)$ operátor minden elegendően nagy k-ra invertálható. Akkor, felhasználva a 3. 1, III. megjegyzést és a tétel 1. és 3. feltételeit, látható, hogy érvényes a

$$\int f(T(x))\mu(dx) = \int f(x)\,|\det \delta U(x)|\,\varrho(x - U(x), x)\mu(dx). \tag{9. 4}$$

képlet.

Az általános esetben a tétel bizonyításához megjegyezzük, hogy elegendő igazolni a (9. 4) képletet funkcionálok olyan halmazára, amelynek lineáris burka sűrű az összes mérhető funkcionálok terében, a majdnem mindenütt való konvergencia értelmében. Ilyen lesz pl. az az F halmaz, amelyet a következő módon szerkesztünk meg: legyen $\delta(x_0)$ valamilyen pozitív függvény $\mathfrak{H}$-n, F pedig az összes olyan korlátos, mérhető f funkcionálok összessége, melyek mindegyikéhez létezik olyan $x_0 \in \mathfrak{H}$, hogy $f(x)=0$, ha $|x-x_0| \geqq \delta(x_0)$. Minden x_0-hoz megadható olyan $f(x_0)$, hogy minden elegendően nagy k-ra az $\tilde{U}_k(x)$ operátor invertálható legyen, hacsak $|x-x_0| < \delta(x_0)$, következésképp $\delta(x_0)$ minden ilyen megválasztásakor a (9. 4) összefüggés fenn fog állani, minden, F-be tartozó funkcionálra. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

9. 1. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen μ Gauss-mérték $\mathfrak{H}$-n, melynek várható értéke nulla, $e_1, e_2, \ldots$ és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ pedig a korreláció-operátor sajátvektorai, illetve sajátértékei. Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-U(x), e_k)(x, e_k)}{\lambda_k}$ sor a μ mérték szerint majdnem mindenütt konvergál és $T(x)$-re teljesül a tétel 2. feltétele, akkor*

$$\frac{dv}{d\mu}(x) = |\det \delta U(x)| \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-U(x), e_k)(x, e_k)}{\lambda_k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-U(x), e_k)(x, e_k)^2}{\lambda_k}\right\}. \tag{9.5}$$

Ennek bizonyításához a 4. 1. tételt kell felhasználni.

IRODALOM

[1] П. Халмош: *Теория меры.* М., ИЛ, 1953.

[2] R. H. CAMERON—W. T. MARTIN: On transformations of Wiener integrals under translations. *Ann. Math.* **45** (1944) 386—396.

[3] R. H. CAMERON—W. T. MARTIN: Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **58** (1945) 184—219.

[4] R. H. CAMERON—W. T. MARTIN: The transformations of Wiener integrals by nonlinear transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **66** (1949) 253—283.

[5] N. WIENER: Differential space. *Journ. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.* **2** (1923) 131—174.

[6] А. В. Скороход: Конструктивные методы задания случайных процессов, *УМН* **20,** вып. 3 (1965).

[7] U. GRENANDER: Stochastic processes and statistical inference. *Ark. Math.* **1** No. 17 (1950), 195—277.

[8] Д. Миддлтон: *Введение в статистическую теорию связи,* т. 1, 2. „Советское радио" (1961).

[9] К. Хелстром: *Статистическая теория обнаружения сигналов.* М., ИЛ, 1963.

[10] М. С. Пинскер: *Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов.* Изд-во АН СССР, 1960.

[11] И. М. Гельфанд—А. М. Яглом: Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой механике. УМН **11,** вып. 1 (1956).

[12] Ю. В. Прохоров: Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. *Теор. вероятн. и ее примен.* **1** (1956) 177—233.

[13] А. В. Скороход: О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. II. *Теор. вероятн. и ее примен.* **5** (1960) 45—53.

[14] И. В. Гирсанов: О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры. *Теор. вероятн. и ее примен.* **5** (1960) 314—330.

[15] А. В. Скороход: *Исследования по теории случайных процессов.* Изд-во Киев ун-та, 1961.

[16] Е. Б. Дынкин: *Марковские процессы.* М., Физматгиз, 1963.

[17] А. В. Скороход: *Случайные процессы с независимыми приращениями.* М., „Наука" 1964.

[18] Я. Гаек: Об одном свойстве нормальных распределений произвольных стохастических процессов. *Чехосл. матем. журн.* **8** (1958) 610—618.

[19] J. FELDMAN: Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes. *Pacif. Journ. Math.* **8** (1958) 699—708.
[20] J. FELDMAN: Some classes of equivalent Gaussian processes on interval. *Pacif. Journ. Math.* **10** (1960) 1211—1220.
[21] Ю. А. Розанов: О плотности одной гауссовской меры относительно другой. *Теор. вероятн. и ее примен.* 7 (1962) 84—89.
[22] C. RADHAKRISHNA RAO—V. S. VARADARAJAN: Discrimination of Gaussian processes. *Sankhya. The Indian Journal of Statistics* **A-25**, No. 3 (1963) 303—330.
[23] Ю. А. Розанов: К вопросу об эквивалентности гауссовских мер, отвечающих гауссовским стационарным процессам. *Теор. вероятн. и ее примен.* 7 (1962) 241—250.
[24] Ю. А. Розанов: О вероятностных мерах в функциональном пространстве, отвечающих гауссовским стационарным процессам. *Теор. вероятн. и ее примен.* **9** (1964) 448—465.
[25] В. Г. Алексеев: Достаточные условия ортогональности и эквивалентности гауссовских мер. *Изв. АН, сер. матем.* **28** №5 (1964) 1083—1089.
[26] А. М. Яглом: On the equivalence and perpendicularity of two Gaussian probability measures in function space. *Proceedings of the Symposium on time series analysis* (Ed. by M. Rosenblatt). Wiley, N. Y.-London (1963) 327—346.
[27] A. N. KOLMOGOROFF: La transformation de Laplace dans les espaces linéaires. *C. R. Acad. Sci.* Paris **200** (1935) 1717—1718.
[28] А. Н. Колмогоров: *Основные понятия теории вероятностей.* М.—Л., ОНТИ, 1936.
[29] N. WIENER: Generalized harmonic analysis. *Acta Math.* **55** (1930) 117—258.
[30] Дж. Дуб: *Вероятностные процессы.* М., ИЛ, 1956.
[31] Б. В. Гнеденко: *Курс теории вероятностей.* Изд. 3. М., Физматгиз, 1961.
[32] И. И. Гихман—А. В. Скороход: *Введение в теорию случайных процессов.* М., „Наука", 1965.
[33] А. Д. Шаташвили: Об одном классе абсолютно непрерывных нелинейных преобразований гауссовских мер. *АН Гр. ССР, Труды вычислительного центра* **5**:1 (1965) 69—105.
[34] L. A. SHEPP: The singularity of Gaussian measures in function space. *Proc. Nat. Acad. of Sci. USA.* **52**:2 (1964) 430—433.
[35] Ю. А. Розанов: О плотности гауссовских распределений и интегральных уравлений Винера—Хопфа. ДАН **165** (1965) 1000—1003.
[36] T. S. PITCHER: The admissible mean values of stochastic process. *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963) 538—546.

Fordította:
Medgyessy Pál

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA RENDES ÉS LEVELEZŐ TAGJAINAK 1969-BEN MEGJELENT PUBLIKÁCIÓI JEGYZÉKE

CSÁSZÁR ÁKOS levelező tag

On the characterization of completely regular spaces, *Ann, Univ. Budapest., Sect. Math.*, **11** (1968) 79—82.

Über die doppelte Kompaktifizierung gewisser topogener Räume, *Ann. Univ. Budapest., Sect. Math.*, **11** (1968) 83—103.

Erweiterung, Kompaktifizierung und Vervollständigung syntopogener Räume, *Proc. I. Internat. Symp. Extension Theory, Berlin 1967,* 51—54.

DETRE LÁSZLÓ levelező tag

Non-Periodic Phenomena in Variable Stars. *Proceedings of the IVth Colloquium on Variable Stars held in Budapest, 5—6 September 1968.* (Szerkesztő DETRE LÁSZLÓ.) Academic Press, Budapest 1969. XII+490 oldal.

Statistical and Physical Interpretation of Non-Periodic Phenomena in Variable Stars. Introductory Report. Ibid. pp. 3—20.

On the Period changes of Pulsars. *Inf. Bull. on Variable Stars* 4 (1969) (No. 380) 1—2.

A Magyar Tudományos Akadémia Csillagvizsgáló Intézetének működése. *Csillagászati Évkönyv* az 1970. évre (1969) 86—93.

A csillagászat legújabb eredményei. *Csillagászati Évkönyv* az 1970. évre (1969) 127—134.

ERDŐS PÁL rendes tag

Über die in Graphen enthaltenen saturierten planaren Graphen (Herrn H. Grötzsch zum 65. Geburtstag gewidmet), *Math. Nachrichten* **40** (1969) 13—17.

Intersection theorems for systems of sets, II., *Journ. London Math. Soc.* **44** (1969) 467—479. (R. RADÓval).

On the distribution of prime divisors of *n*, *Aequationes Mathematicae* **2** (1969) 177—183.

On the number of complete subgraphs and cicuits contained in graphs, *Casopis pro Pestováni Matematiky* **94** (1969) 290—296.

On random entire functions, *Zastosowania Matematyki Applicationes Mathematicae* (Hugó Steinhaus Jubilee Volume) **10** (1969) 47—55. (RÉNYI A.-val).

Problems and results in chromatic graph theory (dedicated to the memory of Jon Folkman), *Proof Techniques in Graph Theory,* ed. by Frank Harary, Academic Press, New York and London, 1969, 27—35.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ rendes tag

Über die Nachbarschaft eines Kreises in einer Kreispackung, *Studia Sci. Math. Hungar.* **4** (1969) 93—97.

Remarks on a theorem of R. M. Robinson, *Studia Sci. Math. Hungar.* 4 (1969)

Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969) 375—381.

Sokszögekre vonatkozó iterációs eljárások, *Matematikai Lapok* **20** (1969) 15—23.

GÁSPÁR REZSŐ levelező tag

May-Electron Problems. II. Energy Expansions and Internal Fields, *International Journal of Quantum Chemistry*, 3 (1969) 723.

Polynominal Wave Functions in Elliptical Coordinates for Molecules, *Acta Physica Hungarica*, 27 (1969) 237. (I. TAMÁSSY—LENTEIvel közösen).

New Foundations for the Thomas-Fermi Model, *Acta Physica Hungarica*, 27 (1969) 441.

GOMBÁS PÁL rendes tag

On the Inhomogeneity Correction of the Kinetic Energy of a Fermion Gas, *PHYSICS LETTERS* **28A** (1969) 585.

A kicserélődési potenciál korrekciójáról. *Химическая Связв Кристаллах*. Изгат „Наика и Техника." 1969. Минск. 55. oldal.

Einführung in die Kvantummechanik und ihre Anwendungen. Akadémiai Kiadó Budapest — Springer-Verlag Wien. 1969. (Gombás Pál fordításában) KISDI DÁVIDdal közösen.

JÁNOSSY LAJOS rendes tag

Elgondolások a sebesség-összeadás törvényeiről, I. *Fizikai Szemle* **19** (1969) 312—316.

Általános relativitáselmélet és nem-euklideszi geometria, *Fizikai Szemle* **19** (1969) 321—327.

Euklideszi-e a tér? *Magyar Tudomány* **14** (1969) 413—425.

The Lorentz principle and the general theory of relativity. Part VI., *Acta Physica Hungarica* **26** (1969) 353—369. WERNER ANTALlal közösen.

The hydrodynamical model of wave mechanics. The many body problem, *Acta Physica Hungarica* **27** (1969) 35—46.

A Riemann—Christoffel tenzor kovariáns deriváltja, *KFKI Közlemények* **17** (1969) 3. WERNER ANTALlal közösen.

Relativitáselmélet és fizikai valóság. Gondolat Kiadó, Budapest, 1969. III. kiadás.

Fizika (kísérleti tanvkönyv) Gimnáziumok szakosított tantervű IV.] osztálya részére. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969. HOLICS LÁSZLÓval közösen.

KALMÁR LÁSZLÓ rendes tag

Digitális számológépek és célgépek alkalmazása az orvosi diagnosztikában, *Orvos és Technika* 7 (1969) 14—18.

An intuitive representation of context-free languages, *International Conference on Computational Linguistics* (COLING), 1969. Preprint No. 66, 1—10.

KOVÁCS ISTVÁN rendes tag

Rotational Structure of the Spectra of Diatomic Molecules, *International Conference on Spectroscopy*, Bombay 1967. 101—106. Invited Talks. (Megjelent 1968.)

Rotational Structure in the Spectra of Diatomic Molecules, Akadémiai Kiadó, Budapest és Adam Hilger Ltd, London, 1969. 320. old.

General Form of the Centrifugal Term in the Rotational Spectra, Acta Phys. Hung. 27 1969. 5—10.

PÁL LÉNÁRD levelező tag

Virtual Spin—Wave—State Below and Above the Curie Temperature in Dilute Fe(Cr) Alloy, *Phys. Letters*, **28A** (1968) 213—14. (Társszerzők: N. KROÓ, M. ARSIK, D. JOVIĆ.)

First—Order Magnetic Phase Transitions, *Acta Phys. Hung*. **27** (1969) 47—87.

Mi a véleménye a hazai tudományos tevékenység és a társadalmi szükségletek közötti viszonyról? *Társadalmi Szemle* **24** (1969) 14—15.

Hozzászólás az Izotóp Intézet 10 éves munkájáról szóló beszámolóhoz, *MTA Kémiai Közlemények* **32** (1969) 337—45.

A tudomány a termelőerők legnemzetközibb eleme, *Magyar Nemzet* 1969. május 25.

Műszaki haladás és kutatás, *Természet Világa* **7** (1969) 300.

Kutatóintézet és egyetem, koncentráció és monopolhelyzet. Megjegyzés a kutatás reformjáról c. cikkhez. *Népszabadság,* 1969. június 16. *Budapester Rundschau,* 1969. július 4.

Tudományos életünk nemzetközi kapcsolatai, *Természet Világa* **8** (1969) 370.

Tudomány és együttműködés, *Magyar Nemzet,* 1969. november 30.

Megjegyzések a MTA szervezeti felépítésének reformjához, *Magyar Tudomány* **12** (1969) 729—34.

RÉNYI ALFRÉD rendes tag

Lectures on the theory of search, Lecture notes, *University of North Carolina at Chapel Hill, Institute of Statistics,* Memio series, No. 600, 7. May (1969).

Dialögusok a matematikáról, 3. kiadás, Akad. Kiadó, Budapest, 1969.

Szerencsejátékok és a valószínűségszámítás. *Matematikai Érdekességek,* Gondolat, Budapest, 1969. 197—220. o.

A Bar-Kochba játék és az információelmélet. *Matematikai Érdekességek,* Gondolat, Budapest, 1969, 269—285.

Briefe über die Wahrscheinlichkeit, Akad. Kiadó, Budapest—VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin—Birkhäuser, Basel, 1969.

Measures in denumerable spaces, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969) 494—502 (H. HANISCHsal és W. M. HIRSCHsel).

On some problems in the theory of order statistics, *Bulletin of the International Statistical Institute* **42** (1969) 165—176.

On random entire functions, *Zastosowania Math.* **10** (1969) 47—55. (Erdős Pállal).

On the distribution of numbers prime to *n*, *Abhandlungen aus der Zahlentheorie und Analysis,* Zur Erinnerung an E. Landau, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969. 271—278.

SZALAY SÁNDOR rendes tag

Accumulation of uranium and other micrometals in coal and organic shales and the role of humic acids in these geochemical enrichments, *Arkiv för Mineralogi och Geologi* **5** (1969) 23—26.

Accumulation of Microelements in Peat Humic Acids and Coal. Advances ind Organic Geochemistry, *Intern Series of Monographs in Earth Sciences* **31** (1969) 567—578. M. SZILÁGYIval közösen.

Szotrudnicsesztvo v Oblaszti Iszszledovanija Atomnogo Jadra, *Acta Universitatis Debreceniensis de L. Kossuth Nominatae* Ser. Phys. et Chim. **14** (1968) 41—49. T. FÉNYESsel közösen.

Az ATOMKI 1 millió voltos Van de Graaf generátora. *Atomki Közlemények* **11** (1969) (No. 4.) BÁCSKAY GY., BERECZ I., BÓDIZS D., KISS Á., KOLTAY E., PAPP I., SCHADEK J., SOMORJAI E., SZABÓ GY. szerzőkkel közösen.

Mikroelem felvételének tanulmányozása a keszthelyi rétlápon, I. *Agrokémia és Talajtan* **18** (1969) 263—288. SÁMSONI Z., BELÁK I., GYŐRI D., SZILÁGYI M., TÓTH A. szerzőkkel közösen.

A fizikusok szerepe az ipar fejlődésében. *Fizikai Szemle* **19** (1969) 193—198.

Merre tartanak a fejlődő országok? Megnyitó az Országos Béketanács Tudományos Bizottsága, a Hazafias Népfront HB megyei Bizottsága, a Debreceni Felsőoktatási és Tudományos Intézetek Tudományos Békekonferenciáján. Az Országos Béketanács önálló kiadványa (1969) 7—10. old.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA rendes tag

Hilbertraum-Operatoren der Klasse C_0, *Abstract Spaces and Approximation* c. kötetben, Basel, 1969. 72—81.

Opérateurs sans multiplicité (C. FOIAssal közösen), *Acta Sci. Math., Szeged* **30** (1969) 1—18.

Sur la norme des fonctions de certains opérateurs, *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.* **20** (1969) 331—334.

TANDORI KÁROLY rendes tag

Über die Reflexivität gewisser Banachräume, *Acta Sci. Math. Szeged* **30** (1969) 39—42.

Ein Divergenzsatz für Fourierreihen, *Acta Sci. Math., Szeged* **30** (1969) 43—48.

Eine Bemerkung zum Konvergenzproblem der Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **20** (1969) 315—322.

TARJÁN IMRE levelező tag

On Step-Like Plaque-Growth, *Acta Biochim. et Biophys. Acad. Sci. Hung.* **4** (1969) 305—312. HEMELA J. és RONTÓ GY. szerzőkkel közösen.

Uptake of Streptomycin by E. Coli B., *Acta Biochim. et Biophys. Acad. Sci. Hung.* **4** (1969) 415—419. SZŐGYI M. és TAMÁS GY. szerzőkkel közösen.

On the Kinetics of Phase Transformation of CsCl-Crystals, II., *Acta Phys. Hung.* **27** (1969) 25—33. GAÁL I. és MORLIN Z. szerzőkkel közösen.

Gyulai Zoltán, *Magyar Tudomány* **2** (1969) 87—89.

Új irányzatok az orvosképzésben, *Felsőoktatási Szemle* **18/9** (1969) 513—515. GYŐRGYI S. szerzővel közösen.

TURÁN PÁL rendes tag

Über die angenäherte Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen und Eigenwerten von Matrizen, *Berichte der IV. Intern. Math. Kongr. über Anwendungen der Math. in Ing. Wissensch.* Weimar 1967. p. 209—216.

Über einige Fragen der vergleichenden Primzahltheorie. *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Erinnerung an Edmund Landau (1877—1938),* p. 159—171. S. KNAPOWSKIval közösen.

On the distribution of zeros of Riemann zeta and allied functions, I., *Journal of Number Theory* **1** (1969) 122—137. (Halász Gáborral.)

On a certain limitation of eigenvalues of matrices, *Aequationes Mathematicae* **2** (1969) (Fasc. 2—3.) 184—189.

On some statistical properties of the alternating group of degree *n*. *L'Enseignement Mathématique* **4** (1969) 89—99. DÉNES JÓZSEFfel és ERDŐS PÁLlal közösen.

A remark on linear differential equations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **20** (1969) (Fasc. 3—4.) 357—360.

KÖNYVKRITIKA

Rédei László: Algebra I. (Akadémiai Kiadó, Budapest 1967) **című angol nyelvű könyvének ismertetése**

A mű az 1954-es magyar nyelvű eredeti 1959-es német nyelvű kiadásának angol nyelvű fordítása. A német nyelvű és ezzel együtt az angol nyelvű kiadás szövege jelentősen különbözik az eredeti magyar nyelvű kiadás szövegétől. Néhány új paragrafuson kívül (*Frattini*-féle részstruktúrák, a gyűrű holomorfjai, a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételek, a háromszög nevezetes pontjai stb.) e két idegen nyelvű változatban teljesen új a szerző eredményeit tartalmazó 12. fejezet, amely az elsőfokban nemkommutatív véges algebrai struktúrák leírásával foglalkozik.

Az 1. fejezet a könyv olvasásához szükséges halmazelméleti alapfogalmakat és alapismereteket állítja össze. A 2. fejezet az egyes algebrai struktúrafajtákkal, az azokra vonatkozó legáltalánosabb eredményekkel és az e struktúrafajták vizsgálatához szükséges apparátussal ismertet meg. A 3. fejezet az operátorstruktúrákkal foglalkozik. Itt kerül tárgyalásra többek között a Schreier-féle bővítéselmélet és a lineáris algebra számos klasszikus eredménye. A 4. fejezet tárgya az egységelemes zérusosztómentes gyűrűbeli oszthatóság és faktorizáció, a főideálgyűrű és az euklideszi gyűrű. Az 5. fejezet a véges *Abel*-csoportok alaptételét és HAJÓS szimplex-faktorizációkra vonatkozó tételét tartalmazza. A 6. fejezet az operátormodulusokra és a vektorterekre vonatkozó legfontosabb (részben klasszikus) eredményeket nyújtja. A 7. fejezetben polinomgyűrűre vonatkozó vizsgálatok (többszörös zérushely, a szimmetrikus polinomok alaptétele, a rezultáns és diszkrimináns, interpolációs képletek, irreducibilitási kérdések) vannak. A testelmélettel foglalkozó 8. fejezet a könyv legrészletesebb kidolgozott fejezete. A 9. fejezet az elrendezett struktúrákra vonatkozó néhány fontos eredményt foglal össze, a 10. fejezet pedig az értékelt testekre vonatkozó eredményekkel foglalkozik, és számos fontos eredményt (az értékelés típusai, OSZTROVSZKI tételei a racionális számtest értékeléseiről és az archimédeszien értékelt testekről, a valós értékelések folytatásai) dolgoz fel. A 11. fejezet a *Galois*-elmélettel, annak nevezetes klasszikus kérdésekre való alkalmazásával és a geometriai szerkeszthetőséggel, a 12. fejezet pedig az elsősorban nemkommutatív véges félcsoportok, csoportok és gyűrűk leírásával foglalkozik.

A mű célja, hogy bevezetőt nyújtson az algebrai struktúrák elméletébe. Módszere a 30-as évek felfogásához, ahhoz a *van der Waerden*i iskolához kapcsolódik, amely a maga idejében forradalmi változást jelentett a klasszikus szemléletmóddal szemben. A mű ennek a felfogásnak egyik legtökéletesebb realizálását nyújtja a matematikai szakirodalomban. Noha az utóbbi években új szemlélet, a homologikus szemlélet van kialakulóban és elterjedőben, RÉDEI LÁSZLÓ könyvének tárgyalásmódja ma is korszerűnek tekinthető. Feltétlenül magasra kell értékelnünk azt a tényt, hogy a mű egy eredményekben igen gazdag tudományos életmű terméke és szerzőjének a modern algebrát részleteiben, összefüggéseiben és egészében mélyen értő, lecsiszolt és a legmesszebbmenően átélt, szinte személyes emberi közelségbe hozott felfogását tükrözi. RÉDEI LÁSZLÓ e művének eredeti magyar nyelvű kiadása alapvető szerepet játszott abban, hogy a magyar algebrai iskola nemzetközileg is jelentős színvonalat ért el.

A tárgyalás során a szerző mindvégig arra törekszik, hogy biztosítsa az egyes algebrai struktúrafajták vizsgálatánál a közös, egységes látásmódot és problémafelvetést. Nagy gondot fordít az analógiák felkutatására. Az egységesítő szemlélet következetes, ám nem erőltetett érvényesítése vezeti a szerzőt arra, hogy számos esetben az egyes fogalmak lehető legmesszebbmenő, de mindig természetes általánosításait találja meg és a problémákat ilyen nagy általánosság mellett tárgyalja. Az általánosításra való eme törekvés a mű fontos pozitívuma e tárgykört feldolgozó más monográfiákkal szemben. Sikeres a szerzőnek az a törekvése is, hogy az algebra klasszikus eredményeit tartalmilag és módszertanilag a modern algebra kérdéskomplexumába beágyazza.

A könyvben a szerző számos önálló eredménye is feldolgozást nyert, ezek közül több itt jelent meg először nyomtatásban. A szerzőnek a könyvben feldolgozott önálló vizsgálatai közül elsősorban a gyűrű holomorfjaival, a véges *Abel*-csoportok faktorizációival, a csoportelméleti zeta-függvénnyel, a háromszög nevezetes pontjaival, valamint az elsőfokban nemkommutatív struktúrákkal kapcsolatos fontos eredményeit kell kiemelnünk.

Saját eredményeit a szerző természetesen ágyazza be a könyvben feldolgozott hatalmas tudományos anyagba.

A nemzetközi referáló folyóiratokban a könyvre vonatkozó referátumok elsősorban két dolgot emelnek ki: 1. A mű jól egyesíti a kezdő számára hasznos egyetemi tankönyv és a további vizsgálódásokhoz nélkülözhetetlen monográfia előnyeit. 2. Számos olyan fontos eredményt közöl, amely eddig könyvben nem volt hozzáférhető.

A feldolgozott hatalmas anyaghoz képest a mű kb. 800 oldalnyi terjedelme nem túlzott, a kitűzött feladatot a szerzőnek csak ilyen terjedelem mellett sikerülhetett megoldania, ezt is csupán a mindvégig követett igen elegáns és szabatos tárgyalásmóddal.

Az egyes fejezetek elhelyezése és terjedelme didaktikailag jól indokolt. Az, hogy a könyv a testelmélettel foglalkozik legmélyebben, a szerző sajátos érdeklődésével és a testelméletnek a matematika egészén belüli történeti és tartalmi fontosságával valamint alkalmazhatóságával indokolható.

Rédei László könyve egyrészt az aktív kutatók kézikönyvének, másrészt az algebrai vizsgálódásokba bekapcsolódni szándékozó, megfelelő matematikai kultúrával rendelkező egyetemi hallgatók tankönyvének készült. Az alkalmazott módszereket ez a körülmény határozza meg. Kétségtelen, hogy a mű modern, de ugyanilyen kétségtelen, hogy nem hipermodern. Részletesebben: nem a napjainkban egyre inkább térthódító univerzális algebrai és kategóriaelméleti szemlélettel készült.

A könyvet bírálni szándékozó azt is megemlíthetné, hogy napjainkban már kevéssé indokolt teljesen figyelmen kívül hagyni a nemasszociatív struktúrákat. Mindamellett a mű jelenleg is korszerűnek tekinthető a következő meggondolás alapján. A kezdő kutatónak ismeretszerzésében bizonyos mértékig követnie kell a tudomány fejlődésének útját, nem kezdheti tanulmányait az absztrakció jelenlegi legmagasabb fokát jelentő ismeretek elsajátításával. Ugyanakkor célszerű, ha a klasszikus eredményeket minél általánosabb alakban, a számára hozzáférhető legmodernebb tárgyalásban ismeri meg. Didaktikai szempontból, a potenciális olvasótábor leszűkülésének elkerülése végett bizonyos kompromisszumra van tehát szükség, amelyet a szerző igen eredményesen valósított meg.

A szerző az egyes fejezeteket gazdag és tanulságos példaanyaggal illusztrálja s (a magyar nyelvű kiadásból még hiányzó) gyakorló feladatokkal egészíti ki. A bizonyítások mindenütt teljesek, a mű olvasásához — a már említett matematikai kulturáltságon kívül — előismeretek nem szükségesek. A korábbi kiadásokban előfordult pontatlanságokat a szerző az angol nyelvű kiadásban kiküszöbölte.

A könyv stílusa példamutató abban a vonatkozásban, hogy a szerző a tömörség és az érthetőség követelményeinek egyidejűleg tesz eleget. Itt meg kell jegyeznünk, hogy ez az a stílus, amelyen — közvetlenül vagy közvetve — az egész jelenlegi magyar algebrai kutatógárda nevelkedett.

E könyvismertetés megírásakor nem mondhatunk le arról a lehetőségről, hogy ennek kapcsán is tisztelettel ne köszöntsük a szerzőt a magyar algebristák és általánosabban, az egész magyar matematikai társadalom nevében abból az alkalomból, hogy idén tölti be 70-edik életévét.

Írta: Csákány Béla és Peák István

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÖNYVKRITIKA

INDEX

FROM THE FOREIGHN LITERATURE

BOOK REVIEWS

Technikai szerkesztő: Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Helle Mária

A kézirat nyomdába érkezett: 1971. VII. 1. — Ívterjedelem: 35,35 (A/5) ív

71-3587 — Szegedi Nyomda

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK

FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

Kutató fizikusok számára önálló eredményeket tartalmazó és összefoglaló jellegű fizikai, csillagászati dolgozatokat, könyvismertetéseket, laboratóriumi fogásokat és ma már klasszikussá vált dolgozatokat közöl hazai és külföldi szerzőktől.

Évenként 1 kötet (kb. 36 ív) jelenik meg 6 számban.
A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 forint.

Belföldi megrendeléseket az *Akadémiai Kiadó*, Budapest, V., Alkotmány utca 21.

(Pénzforgalmi jelzőszám 215-11488.)

Külföldi megrendelések
a „*Kultúra*" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,
Budapest, I., Fő utca 32.
Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

Ára: 75,— Ft